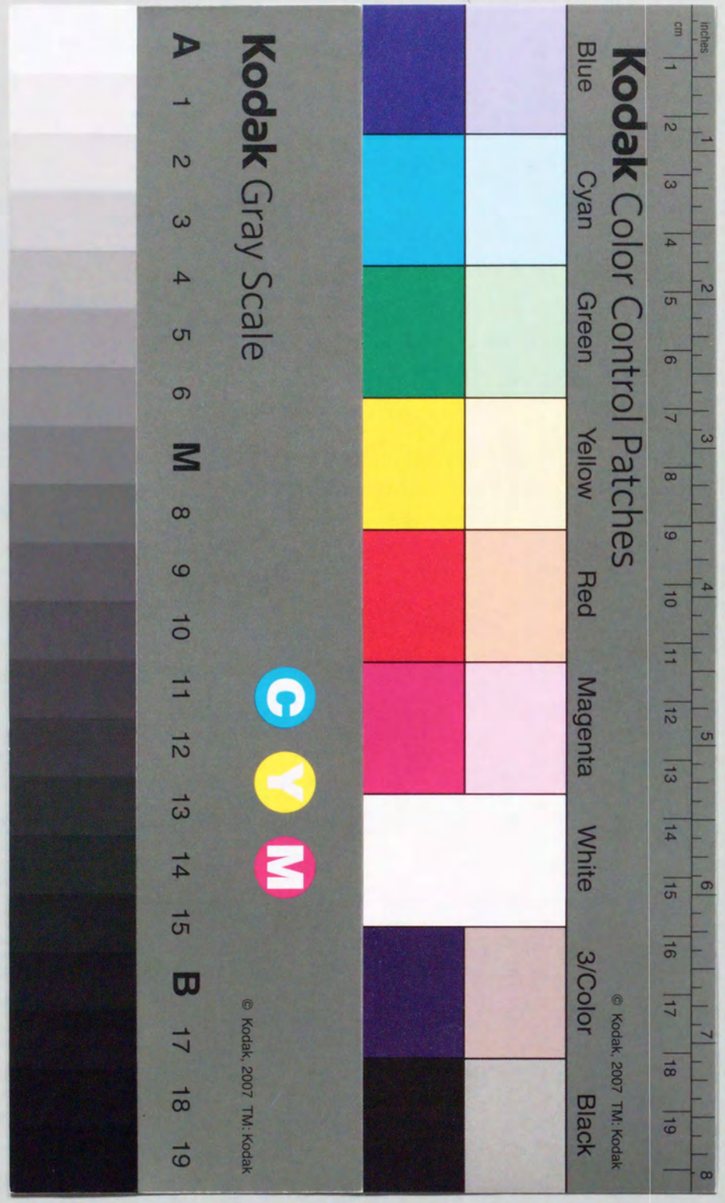
OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	ループ整形を考慮したILQ制御系設計法の拡張と2自由度ロバストサーボ系設計への一般化
Author(s)	酒井, 雅也
Citation	大阪大学, 2001, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3184168
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University



ループ整形を考慮した ILQ 制御系設計法の拡張と 2 自由度ロバストサーボ系設計への一般化

平成 13 年 3 月

大阪大学 大学院基礎工学研究科
システム人間系専攻 システム科学分野

酒井 雅也

博士論文

ループ整形を考慮した
ILQ 制御系設計法の拡張と2自由度
ロバストサーボ系設計への一般化

酒井　雅也

大阪大学　大学院基礎工学研究科
システム人間系専攻　システム科学分野

2001年3月

概要

ロバストサーボ系については様々な研究がされており，その設計法の一つに最適レギュレータの逆問題を応用したILQ最適サーボ系設計法がある．この設計法では目標値応答を設計者が非干渉化指定でき，さらに制御則が制御対象のパラメータ等から解析的に得られるなど，実用上好ましい特徴を持っている．また，状態フィードバックの形式では様々な拡張がなされており，ほぼ完成の域に達している．

しかし，一般にサーボ系設計の際には，目標値応答特性だけでなく，外乱除去やモデルの不確かさなどに対する安定性も考慮した，いわゆるロバスト性が要求される．そこで，本論文の目的の一つは，従来のILQ設計法で可能であった目標値応答特性の指定に加え，ロバスト性も考慮した設計法へ拡張することである．このため，状態フィードバックの構成から同次元オブザーバおよび，それに付随する自由パラメータを用いた出力フィードバックの構成に変更し，それらを活用することで上述のロバスト性を考慮した設計を考える．これについては，観測ノイズから出力までの閉ループ伝達関数（ノイズ抑制特性）を考え，その周波数整形（ループ整形）を行うための設計法を提案する．これは，従来のループ整形手法のように，開ループ特性を周波数整形することによって閉ループ特性を間接的に整形するのではなく，直接閉ループ特性を整形することを目的とし，モデルマッチングの観点からその指定が可能なクラスを明らかにする．そして，補償器の低次元化を考慮に入れたオブザーバの設計指針を示す．本設計法では，従来法の持つ上述の特徴（目標応答の非干渉化指定と設計結果の解析表現）を継承しながら設計法の拡張が達成されており，その結果，実用性の高さを損なわずにより適用範囲の広い設計法となっている．そして，提案法を磁気浮上システムの振動抑制制御に応用し，その有効性を示す．

つぎに，同次元オブザーバを最小次元オブザーバに変更した構成で同様のループ整形を考える．この場合でも，補償器のクラスは同次元オブザーバを用いた場合と等価であることが示される．しかし，自由パラメータを用いないときの補償器は，最小次元オブザーバを用いた方が同次元オブザーバを用いたものよりも低次となる．この利点を活かすため，補償器の低次元化を考慮したノイズ抑制特性の段階的な整形法を提案する．

また一方では，従来研究によって2自由度ロバストサーボ系の一般構成が明らかにされており，ILQ制御系もその構成に含まれる．それによると，フィードフォワード側の自由パラメータによって目標値応答特性を改善し得ることが示されており，ILQ設計法でそれが活用できるように拡張を行う．その際，従来法と同様に制御系の漸近

構造に着目し，その漸近先で非干渉化指定が可能な目標値応答特性のクラスを導出する．このクラスは従来法よりも広いクラスとなる．さらに，状態フィードバックで非干渉化が不可能な場合についても，この自由パラメータを活用すれば非干渉化指定が可能となることを，1型サーボ系について示す．

最後に，ILQ 設計法に限定して議論を進めていたロバストサーボ系の設計法を一般的な2自由度ロバストサーボ系へ拡張する．これは，ILQ 設計法を用いた場合と同様に目標値応答特性とノイズ抑制特性の二つの閉ループ特性に着目し，非干渉化指定が可能なクラスを導出するものである．その結果，これらのクラスについては ILQ 設計法に限定した場合と本質的な差はないことが示される．そして，これらの特性を指定した後に残された設計の自由度についても考察を行い，その活用例を示す．このように，ILQ 設計法をベースにした場合との差異を考察することによって，ループ整形の観点から ILQ 法の位置付けや，ロバストサーボ系が持つ普遍的な性質を明らかにすることが本論文のもう一つの目的である．

以上のように，本論文ではループ整形機能を有するロバストサーボ系の設計法を ILQ 設計法を拡張する形で提案し，さらにそれを一般的な2自由度ロバストサーボ系へ拡張した．そしてループ整形の観点から，ILQ ロバストサーボ系の2自由度ロバストサーボ系における位置付けを明らかにするとともに，ループ整形後の補償器の設計自由度についても考察を行った．

謝辞

本研究にあたり，多大な御指導を頂きました 藤井 隆雄 教授に心より感謝いたします．先生には私が研究室に配属されて以来の5年間，指導教官として適切なアドバイスや深い議論など，一から研究のてほどきをして頂き，大変お世話になりました．

本論文の副査員として貴重な時間を割いて頂き，適切な助言を頂きました 田村 坦之 教授と 潮 俊光 教授に感謝の意を表します．

また本研究にあたり，建設的な御意見を頂きました 山本 茂 助教授に感謝いたします．

研究室内のゼミや研究発表会など，機会がある度に貴重なアドバイスや建設的な御意見を頂きました 小原 敦美 助教授，下村 卓 助手，金子 修 助手，福岡工業大学の 辻野 太郎 助教授に感謝いたします．

藤井研究室の多くの先輩，後輩諸氏に深く感謝の意を表します．中でも，東芝（株）の 黒江 祐希 さんには ILQ 設計法に関して，川崎重工業（株）の 中島 健一 さんには磁気浮上システムの浮上制御に関して，数々の貴重な助言を頂きました．また，石川島播磨重工業（株）の 中村 恵子 さんには本研究に関して貢献をして頂きました．事務関係では 中川 登喜子 さんと 土居 良子 さんにお世話になりました．ここに御礼申し上げます．

最後に，多くの負担がかかるにも関わらず，私を大学院に通わせてくれ，支えてくれた両親に心から感謝の意と敬意を表します．

2001年3月　酒井雅也

目 次

概要 iii

謝辞 v

記号表 xi

第1章 序論 **1**
1.1 本研究の背景と目的 1
1.2 論文の構成 2

第2章 準備 **7**
2.1 はじめに 7
2.2 ILQ 最適サーボ系設計法 7
2.2.1 ILQ 設計法の経緯 7
2.2.2 制御対象の記述 8
2.2.3 ロバストサーボ系 8
2.2.4 ILQ サーボ系の構成と，その設計手順 10
2.3 ループ整形 14
2.3.1 ループ整形の概念 14
2.3.2 ループ整形の手法 [DS '81, MG '90] 15
2.3.3 ロバスト安定化 15
2.4 2自由度制御系 17
2.4.1 既約分解に基づく2自由度制御系 18
2.4.2 2自由度ロバストサーボ系 19

第3章 ループ整形を考慮した ILQ ロバストサーボ系設計法の拡張 **21**
3.1 はじめに 21
3.2 ロバスト安定化に着目した整形 21
3.2.1 制御対象の記述，および仮定 22
3.2.2 制御系の構成 22
3.2.3 設計法 23
3.3 数値例 27
3.3.1 目標値応答特性の整形 28

3.3.2 ノイズ抑制特性の整形 28
3.4 磁気浮上システムへの適用例 32
3.4.1 磁気浮上システムの概要 32
3.4.2 設計 33
3.4.3 実験結果 36
3.4.4 実験結果のまとめ 37
3.5 まとめ 38

第4章 制御系構成の変更による ILQ 設計法の拡張 **41**
4.1 はじめに 41
4.2 最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を用いた場合 42
4.2.1 最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の構成 42
4.2.2 ILQ 設計法への適用 49
4.2.3 数値例 52
4.2.4 まとめ 56
4.3 フィードフォワード側の自由パラメータを用いた場合 57
4.3.1 制御系の構成 57
4.3.2 漸近構造 58
4.3.3 マッチング可能なクラス 58
4.3.4 状態フィードバックで非干渉化できない場合（A.2） 61
4.3.5 数値例 65
4.3.6 まとめ 68

第5章 2自由度ロバストサーボ系への一般化 **69**
5.1 はじめに 69
5.2 制御対象の記述，および仮定 70
5.3 目標値応答特性の指定 70
5.4 ノイズ抑制特性の指定 71
5.5 ILQ 設計法を用いた場合との比較 73
5.5.1 目標値応答特性のクラスついて 73
5.5.2 ノイズ抑制特性のクラスついて 73
5.5.3 まとめ 74
5.6 目標値応答特性に対応した設計の自由度 74
5.6.1 自由パラメータの選定方針 75
5.7 ノイズ抑制特性に対応した設計の自由度 77
5.7.1 フィードバック補償器の一意性 77
5.8 まとめ 79

第6章 結論 **81**

参考文献 **85**

付 録A 定理3.2.1の証明 **89**

付 録B 極配置法による ILQ 設計法 **93**

付 録C $\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$と$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$に関する各証明 **95**
C.1 ディスクリプタ形式とワイヤストラス変換 [Kata '99] 95
C.2 $\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$と$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ のワイヤストラス形式 96
C.3 $\tilde{z}_i^+(s)$ が等しいことの証明 97
C.4 $\tilde{d}_i$ が等しいことの証明 98

付 録D 定理5.4.1の証明 **101**
D.1 $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)$ の零点について 102

付 録E 定理5.7.1の証明 **105**

関連発表論文 **107**

記号表

$\mathcal{R}$	:	実数全体の集合.
$\mathcal{C}$	:	複素数全体の集合.
$\mathrm{Re}\ x$, $\mathrm{Im}\ x$	:	複素数 x の実部，虚部.
M^{T}	:	行列 M の転置.
$\lambda(M)$	:	行列 M の固有値.
$\lambda_{\mathrm{s}}(M)$	:	行列 M の固有値全体の集合.
$\overline{\sigma}(M)$	:	行列 M の最大特異値.
$\underline{\sigma}(M)$	:	行列 M の最小特異値.
$\det M$	:	行列 M の行列式.
I_n	:	n 次の単位行列．サイズが明らかなときは添字 n は省略する.
$0_{m\times n}$	:	$m\times n$ 次の零行列．サイズが明らかなときは添字 $m\times n$ は省略する.
$e_i=[0\cdots1\cdots0]^{\mathrm{T}}$ $i=1,2,\cdots,n$	:	自然基底.
$\mathcal{L}[f]$	:	f のラプラス変換．$f(s)$ とも書く.
$\left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	:	$:=C(sI-A)^{-1}B+D.$
$\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ $\underset{1\le i\le m}{\mathrm{diag}}\{a_i\}$	:	$:=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_m \end{bmatrix}$ $a_i\ (1\le i\le m)$ はスカラ.
$\mathrm{blockdiag}\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ $\underset{1\le i\le m}{\mathrm{blockdiag}}\{A_i\}$	:	$:=\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}$ $A_i\ (1\le i\le m)$ は行列.
$\deg a(s)$	:	多項式 $a(s)$ の次数.
RH_∞	:	安定かつプロパな有理関数全体の集合.

$||G(s)||_\infty$: 伝達関数行列 $G(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム．つまり，$||G(s)||_\infty := \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \overline{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{\mathrm{Re}\, s \geq 0} \overline{\sigma}(G(s))$.

第1章　序論

1.1　本研究の背景と目的

1960 年代に Kalman によって提唱された現代制御理論によって，それまで主流であった伝達関数を用いた周波数領域での設計から，システムの内部状態を 1 階の線形微分方程式で記述する状態空間表現を用いた時間領域での設計へとシフトしていった．そして，最適レギュレータ理論やオブザーバ理論に代表される，数々の有益な設計理論が提案されたのは周知の事実である．

しかし，1980 年代に入り再び周波数領域での設計が注目されるようになった．これは，現実問題としてモデルの不確かさを考慮する必要があり，この不確実性を状態空間で考えるよりも，伝達関数の誤差として考えた方が，容易かつ自然であることによる．しかし，解析や系統的な設計のためには，状態空間上での取り扱いが簡単であるため，不確かさを考慮した周波数領域の設計を状態空間で取り扱うための研究がさかんに行われた．これは，古典制御と現代制御の融合であり，ロバスト制御の始まりである．そして，ループ整形に代表される古典的な周波数領域での設計に対して，$\mathcal{H}_\infty$ 制御理論に代表されるロバスト制御により，理論的な裏付けと系統的な設計法が与えられた．

上述のロバスト性を考慮すると，制御系（サーボ系）設計の際には主に

1) 所望の目標値応答特性を得る．

2) 外乱やモデル化誤差に対処できる．

ことが必要になる．これらの要請を満たすためには，少なくとも制御系の構成として**ロバストサーボ系**とする必要がある．さらに，1) の実現のためには**非干渉化**や**モデルマッチング**が行えた方が便利である．また，2) の実現のための一つの方法として**ループ整形**がある．さらに 1)，2) を同時に考慮するためには，より設計自由度の大きい **2 自由度制御系**とすることが望ましいと考えられる．

ロバストサーボ系の設計理論の一つである ILQ ロバストサーボ系設計法は，最適レギュレータの逆問題を応用した設計理論であり，上述の要請 1) に対して所望の非干渉化された目標値応答特性が伝達関数で指定（モデルマッチング）できる．そして，得られた制御則が制御対象のパラメータなどで解析的に表現できるなど，実用性の高い設計法である．この設計法は最適レギュレータの一種であるから低感度特性などの，ある種のロバスト性は有する．しかし，モデル化誤差や外乱などの具体的な不確かさを陽に考慮した設計法とはなっていないため，要請 2) に対して十分であるとは言い難い．

そこで，本論文ではこの要請に答えるべく，設計理論の拡張を行う．この際，つぎの点に注意して拡張を行う．

(1) 閉ループ特性を直接ループ整形する．

(2) 補償器の低次元化を考慮に入れる．

(3) 設計や調整が簡単である．

(1) は要請 2) の解決にもつながるものであるが，古典的な開ループ特性の整形ではなく，制御系の性能に直接関係する閉ループ特性の整形を直接行えるような拡張を行う．この整形はオブザーバとその設計自由度を導入し，それらを活用することで，観測ノイズから出力までの閉ループ伝達関数を解析的に指定することにより行う．この構成により，閉ループ系のノミナル安定性を陽に考慮することなく，ループ整形が行える．さらに制御系の各構成部の役割が明瞭であるという利点も持つ．また，このことを利用して (2) を考慮した拡張を考えることができる．つぎに (3) を考慮してループ整形はモデルマッチングの観点から行い，非干渉化された応答が指定できるようなクラスを明らかにする．多入出力系では伝達関数行列の個々の要素のゲインではなく，特異値をロバスト性の尺度とする必要がある．しかし，非干渉化を行うことにより，保守性は現れるが，個々の要素のゲイン特性でロバスト性を判断することができる．さらに調整が各入出力ごとに行えるため設計が容易になる．また，(2) に関連して，オブザーバを最小次元オブザーバに変更した場合も考える．このように $\mathcal{H}_\infty$ 制御理論などを用いた設計と比較して，制御系の構成要素の役割をはっきりさせ，さらに設計が解析的に行える実用的な設計法をめざす．

一方，一般的な 2 自由度ロバストサーボ系の立場から従来の ILQ 法を見直し，その位置づけを明らかにすることも重要であると考えられる．そこでまず，従来の ILQ 法では用いられていなかった，フィードフォワード側の自由パラメータを導入して設計法の拡張を行う．この際も ILQ 法の利点である「目標値応答特性の非干渉化指定」と「補償器の解析表現」を損なわないような拡張を考える．これにより，2 自由度 ILQ ロバストサーボ系の設計法が明らかとなる．つぎに一般的な 2 自由度ロバストサーボ系の構成に拡張し，同様に二つの閉ループ特性を整形するための手法を考える．そして，両者をループ整形の観点から比較することにより，ILQ 法の位置づけを明らかにする．また，ループ整形後の設計自由度についても考察を行う．

以上のように，本論文の目的は ILQ 設計法を拡張する形で，ループ整形機能を有し，しかも実用性を重視したロバストサーボ系の設計法を提案すること，および一般的な 2 自由度ロバストサーボ系との関係を明らかにすることである．

1.2 論文の構成

本論文は Fig.1.1 のように構成される．まず，第 2 章で以降の議論に必要となる既存の結果を簡単に示す．つぎに，第 3 章では ILQ 設計法のループ整形を考慮した設計法

への拡張について述べる．つづく第 4 章では，第 3 章で述べた設計法について，制御系の構成を変更した場合について述べる．そして第 5 章では，サーボ系の構成を ILQ サーボ系から一般的な 2 自由度ロバストサーボ系に変更した場合の，設計法の一般化について考察する．最後に第 6 章で結論と今後の展開について述べる．各章の概要はつぎのとおりである．

Fig. 1.1: Organization of the thesis

第 2 章：準備

この章では，以降の章での議論に必要となるいくつかの既存の結果を示す．まず，2.2 節では本論文で提案する設計法の基盤となる ILQ 最適サーボ系設計法と，それを特別な場合として含む一般的なロバストサーボ系の設計理論について述べる．つぎに，2.3 節ではループ整形の概念やそれを達成するための既存の方法を述べる．また，それに関連してロバスト安定化についても述べる．最後に，2.4 節では 2 自由度制御系について述べた後，それをロバストサーボ系に応用し，その状態空間での構成について述べる．

第3章：ループ整形を考慮した ILQ ロバストサーボ系設計法の拡張

制御系設計の際には，外乱除去やモデル化誤差に対する安定化といったロバストな制御系を構築することが不可欠であり，そのための様々な設計法が提案されている．

この章では，ILQ 法で設計された制御系が上述のロバスト性を有するように設計法の拡張を行う．この際，制御系の構成を状態フィードバックから状態オブザーバを用いた出力フィードバックの形に変更し，状態オブザーバは通常の同次元オブザーバに，自由パラメータ $Q_B(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ を付加した一般化オブザーバを用いる．3.2.2 節でこの一般化オブザーバについて述べる．また，それを用いた制御系の構成は 2 自由度ロバストサーボ系の一般構成に含まれることが分かる．そして 3.2.3 節でこの一般化オブザーバの設計自由度を活用して，従来の ILQ 設計法で行っていた参照入力から出力までの閉ループ伝達関数（目標値応答特性）の指定に加え，観測ノイズから出力までの閉ループ伝達関数（ノイズ抑制特性）も解析的に指定（ループ整形）できる設計法を提案する．このノイズ抑制特性の指定については，まず非干渉化指定が可能な伝達関数のクラスを明らかにする．つぎに，そのクラス内で所望の伝達関数を指定したとき，それを実現する一般化オブザーバの設計手順を述べる，という逆問題的なアプローチをとる．これにより，オブザーバの選定についても，補償器の低次元化も考慮した一つの設計指針を与えることができる．本設計法では ILQ 設計法の特徴である，「ゲイン調整パラメータ Σ を無限大とした漸近先の構造が解析的に得られる」ことを利用しており，「設計結果が制御対象のパラメータや設計仕様で指定する閉ループ伝達関数のパラメータから解析的に得られる」という特長を引き継いでる．このため，補償器の再設計や調整が比較的容易であり，実用性が高い設計法となっている．

つぎに 3.4 節では，この設計法の磁気浮上システムへの応用例を述べる．このシステムについては，従来の ILQ 制御で浮上制御に成功したが，モデル化されていない動特性が原因でスピルオーバ現象が発生した．そのため，$\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いてスピルオーバの抑制には成功したものの，補償器がかなり高次になるという問題が残った．そこで，本設計法を用いて $\mathcal{H}_\infty$ 制御と同様に閉ループ周波数特性の整形を行い，スピルオーバを抑制するための制御系の設計を行った．その結果，$\mathcal{H}_\infty$ 補償器と比較して同等の性能を持つ低次の補償器が設計できた．このことから本設計法の有効性が確認できた．

第4章：制御系構成の変更による ILQ 設計法の拡張

この章では，つぎの 2 種類の制御系構成の変更による ILQ 設計法の拡張を行う．

(1) 最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を用いた構成．

(2) フィードフォワード側の設計自由度 $Q_F(s)$ を付加した構成．

(1) については最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の方が，3 章で導入した同次元オブザーバに基づくものよりも低次の補償器が設計できる可能性があるという考えによる．そこで，4.2 節では最小次元オブザーバと自由パラメータを用いた制御系の

構成を考え，同次元オブザーバの場合と同様に 2 種類の閉ループ特性が整形可能な設計法を提案する．そのためにまず 4.2.1 節では同次元オブザーバと最小次元オブザーバの関係を明らかにし，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般構成を導出する．その結果，同次元オブザーバは最小次元オブザーバと出力推定器に分解できることが示される．また，それをもとにした最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の構成は，同次元オブザーバに基づく安定化補償器の構成に等価変換できることが示される．しかし，もう一つの解釈として同次元オブザーバに基づく安定化補償器の場合と同様に「（最小次元）オブザーバと，その推定誤差に基づく信号を入力とする自由パラメータで構成される」という解釈もできることが示される．つぎに 4.2.2 節ではそれを ILQ 制御系に適用し，前章と同様の 2 種類のループ整形を行う設計法を提案する．さらに，1 入出力系については，ノイズ抑制特性の段階的な整形法についても述べる．これは，第 1 段階ではオブザーバのみでノミナル性能を達成するような閉ループ特性の整形を行い，第 2 段階では自由パラメータを活用してそれにフィルタ特性を加え，ロバスト安定化を達成するという方法である．この方法ではノミナル性能をオブザーバのみで達成するため，同次元オブザーバを用いた場合よりも低次の補償器が設計できる可能性がある．4.2.3 節の数値例でその一例が示される．

(2) については，4.3 節で 2 自由度ロバストサーボ系の一般構成で示されている，フィードフォワード側の自由パラメータ $Q_F(s)$ を付加した制御構成を考え，設計理論の拡張を行う．この自由パラメータは目標値応答特性を改善し得るものであることが知られており，それを活用することで従来法よりも指定可能な目標値応答特性のクラスが広がることが期待される．まず，4.3.2 節では従来法と同様にゲイン調整パラメータ Σ を無限大としたときの制御系の漸近構造を導出する．それをもとに 4.3.3 節で，非干渉化指定が可能な伝達関数のクラスを明らかにする．その結果，自由パラメータを付加しない従来法では，指定できる伝達関数の相対次数が制御対象と目標値追従のための内部モデルによって定まる，ある値に限定されていたが，この制約が緩和されることが示される．さらに従来法よりも相対次数が 1 次小さい（つまり速い）応答が指定可能になる．また，このクラスは状態フィードバックゲインの値には依存しないが，補償器の次数を小さくするという観点から一つの選定指針を与える．

4.3.4 節ではもう一つの結果として，状態フィードバックゲインでは非干渉化できない場合に $Q_F(s)$ によって非干渉化指定を達成する設計法を提案する．ただしこの拡張は，極配置法による ILQ ゲインの指定法が提案されている 1 型サーボ系に対してのみ行う．この場合も同様に漸近構造を求め，それをもとに指定可能なクラスを求めた後，設計手順を与える．この拡張は 1 型サーボ系に対してしか行っていないが，実用上はほぼ十分である．

第5章：2 自由度ロバストサーボ系への一般化

この章では，フィードバックゲインを ILQ ゲインに限定しない一般的な 2 自由度ロバストサーボ系について，3，4 章で行った二つの特性のループ整形を考える．

まず，5.3，5.4節ではそれらの非干渉化指定が可能なクラスを導出する．このとき，目標値応答特性については，フィードバックゲインは任意の安定化ゲインに選べ，フィードフォワード側の自由パラメータのみでその整形が可能なことが示される．同様にノイズ抑制特性についても，オブザーバゲインは任意の安定化ゲインに選べ，フィードバック側の自由パラメータのみで整形が可能となる．

つぎに，このクラスとILQゲインを用いた場合のクラスの比較を5.5節で行う．その結果，ILQゲインを用いた場合はゲイン調整パラメータ Σ を無限大とした漸近先を指定するため，疑似的に通常のロバストサーボ系と比べて指定可能な伝達関数の相対次数が1次小さい（速い）応答を指定できることが示される．その他の特徴については両者ともに相違ないことが示される．

5.3，5.4節では，目標値応答特性，およびノイズ抑制特性の指定可能なクラスはそれぞれフィードバックゲインとオブザーバゲインに依存しないことが示された．5.6，5.7節ではこの二つのゲインの選定に関連して，目標値応答特性やノイズ抑制特性の伝達関数を決定した際に，これらのゲインの選定の自由度が設計自由度となり得るのかを考察する．その結果，目標値応答特性に関してはフィードバックゲインが設計自由度となり得ることがわかるので，5.6.1節で状態フィードバックの構成の場合についてその設計法の一例を述べる．これは2段階の設計法となっており，第1段階で目標値応答特性をILQ法で設計する．つぎに第2段階で他の方法でフィードバック特性を考慮してゲインを選び直す．そして，これらの両方のパラメータを用いて自由パラメータを設計することで，第1，第2段階で設計した両方の特性を持つ制御系を構成する方法である．一方，ノイズ抑制特性に関しては，それを指定するともはや設計自由度は残されていないことが示される．つまり，自由パラメータとオブザーバゲインの組合せに関わらずフィードバック補償器は一意に定まる．

第2章 準備

2.1 はじめに

この章では，以後の議論に必要になる既存の結果を簡単に示す．

まず，2.2節では本論文の基盤となるILQ（Inverse Linear Quadratic）最適サーボ系の経緯やこれまでに明らかになった事実，および設計手順を示す．また，以後の議論で必要になる仮定やロバストサーボ系についても述べる．

つぎに，2.3節では本論文のテーマであるILQ設計法の拡張を行う際に必要となるループ整形の概念や，それを達成するための方法を述べる．また，ロバスト安定化についても述べる．

最後に，2.4節では2自由度制御系について述べる．そして，それを2自由度ロバストサーボ系に応用し，状態空間で表した構成を示す．本論文では，この構成を3章以降の議論に用いる．

2.2 ILQ 最適サーボ系設計法

2.2.1 ILQ 設計法の経緯

ILQ設計法は最適レギュレータの逆問題を応用した設計法であり，1987年に藤井によって提案された[Fuji '87]．それをサーボ系の設計問題に応用したのがILQ最適サーボ系設計法[FM '87]であり，これまでに種々の改良や拡張が行れてきた．この設計法では，最適レギュレータの問題点である「2次形式評価関数の重みが応答波形に明確に反映されない」という点が克服される．つまり，設計者は重みの選定をする代わりに閉ループ応答を漸近的に指定することができ，その結果，制御系が何らかの重みに対して最適となるフィードバックゲインが得られる．しかもその特徴として，フィードバックゲインがプラントのパラメータや設計仕様で与えられる上述の閉ループ応答のパラメータから解析的に得られるため，実用性が高い．

ILQサーボ系設計法の拡張の経緯を振り返ってみると，まず文献[FM '87]では，ステップ参照入力に追従するサーボ系の設計法が提案された．ただし，ここでは制御対象は相対次数がすべて1の最小位相系に限られていた．この制御対象の制約について拡張を行ったのが文献[FS '88, SF '93]である．このうち文献[FS '88]では相対次数の制約を緩和し，厳密にプロパなプラントにまで適用可能になり，文献[SF '93]では一部の非最小位相系について適用可能になった．一方，参照入力の面からは，文献[KAF '96]

で一般の参照入力に対しても適用可能なように拡張された．そしてこれらを統合し，最も広い「一般化された参照入力と直達項を含む非最小位相系」のクラスにまで拡張されたのが文献 [KF '98] である．また，文献 [SKFS '98] では周波数重み付きの最適サーボ系についてILQ 設計法を考案している．

この ILQ 設計法の実システムへの応用例としてエンジン制御 [KF '87]，磁気浮上システムの浮上制御 [SNTF '95]，圧延制御 [ONYBS '96]，エレベータの振動抑制制御 [Seki '98] などがあり，いずれも良好な結果が得られている．このことからも ILQ 設計法の実用性の高さを知ることができる．

2.2.2 制御対象の記述

制御対象として，つぎの m 個の入出力信号を持つ n 次元線形時不変システムを考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in \mathrm{R}^{n\times n},\ B \in \mathcal{R}^{n\times m} \tag{2.1a}$$

$$y = Cx \qquad C \in \mathcal{R}^{m\times n} \tag{2.1b}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{2.1c}$$

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B \tag{2.1d}$$

ここで，$x \in \mathcal{R}^n$ は状態変数，$y \in \mathcal{R}^m$ は制御出力，$u \in \mathcal{R}^m$ は制御入力を表し，$\mathrm{rank}\ B = m$ とする．また，このシステムは可制御かつ可観測であるとする．

2.2.3 ロバストサーボ系

本節では ILQ サーボ系が属するロバストサーボ系について概要を記す．ロバストサーボ系とは制御系の内部安定性を崩さない範囲のシステムの摂動に対して，漸近追従が達成されるサーボ系のことをさす．このためには参照入力信号の発生モデル（内部モデル）をサーボ補償器に含ませる必要があること（内部モデル原理）を Davison が示した [Davi '76].

ロバストサーボ系の構成

制御対象 (2.1) の出力 y を任意の初期状態を持つ，つぎの線形自由系

$$\dot{x}_r = A_r x_r \qquad A_r \in \mathcal{R}^{q\times q} \tag{2.2a}$$

$$r = C_r x_r \qquad C_r \in \mathcal{R}^{m\times q} \tag{2.2b}$$

$$(A_r,\ C_r) \text{ は可観測対で } \mathrm{Re}\ \forall\lambda(A_r) \geq 0$$

$$\alpha(s) := \det(sI - A_r) \tag{2.2c}$$

の出力 $r \in \mathcal{R}^m$ に漸近追従させる，つまり

$$\lim_{t\to\infty} e = 0, \quad e := r - y \tag{2.3}$$

を満足する制御系は内部モデル

$$\dot{x}_c = A_C x_c + B_C(r - y) \tag{2.4a}$$

$$A_C := \mathrm{blockdiag}\{\underbrace{A_r\ ,\cdots,\ A_r}_{m}\} \tag{2.4b}$$

$$B_C := \mathrm{blockdiag}\{\underbrace{B_r\ ,\cdots,\ B_r}_{m}\} \tag{2.4c}$$

$$A_r := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots\cdots & & -\alpha_{q-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{q\times q},\quad B_r := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{q\times 1} \tag{2.4d}$$

を導入した Fig.2.1 の構成で表される．ここで，状態フィードバックゲイン K_F，K_C を系の内部安定性を満足するように選べば (2.3) 式を達成するロバストサーボ系が得られる．この安定化ゲイン K_F，K_C の存在性についてはロバストサーボ系の設計可能条件としてつぎの事実が知られている．

[補題 2.2.1[Davi '76]]

Fig.2.1 を安定化する状態フィードバックゲイン K_F，K_C が存在するための必要十分条件は，A_r のすべての固有値 η について次式が成り立つことである．

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \tag{2.5}$$

この補題は，制御対象の零点と内部モデルの極 η の間で極零相殺をおこさないことを意味する．これはつぎの偏差系

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e u_e \tag{2.6a}$$

$$-e = C_e x_e \tag{2.6b}$$

$$A_e := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_C C & A_C \end{bmatrix},\ B_e := \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},\ C_e := \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6c}$$

$$x_e := \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ x_c - \bar{x}_c \end{bmatrix},\ u_e := u - \bar{u} \tag{2.6d}$$

を安定化する状態フィードバックゲイン

$$u_e = -K_e x_e,\ \ K_e := \begin{bmatrix} K_F & -K_C \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

が存在するための条件となっている [Chen '70]．ただし，$\bar{x}$, $\bar{x}_c$ および $\bar{u}$ はそれぞれ定常状態での状態，制御入力を表す．

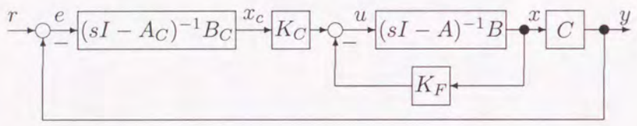


Fig. 2.1: Configuration of robust servo system

2.2.4 ILQ サーボ系の構成と，その設計手順

ILQ 設計法は偏差系 (2.6) を安定化する (2.7) 式のゲイン K_e をつぎの適当な重み $Q_e > 0$, $R_e > 0$ を持つ 2 次形式評価関数

$$J_e := \int_0^\infty \left\{ x_e^{\mathrm{T}} Q_e x_e + u_e^{\mathrm{T}} R_e u_e \right\} dt \tag{2.8}$$

を最小化する制御則として求める，いわゆる最適レギュレータ問題の一種である．しかし，通常の最適レギュレータ問題では重み Q_e, R_e を与えてから最適制御則 K_e を求めるのに対し，ILQ 設計法では与えられた制御則が何らかの重みに対して最適になる「最適レギュレータの逆問題」の結果に基づいて決定される．したがって，設計者は工学的仕様とは明確に結びつかない重みを試行錯誤で選定する必要はなく，最適レギュレータの有するロバスト性を保持したまま所望の応答を指定できる．

ILQ 設計法では最適レギュレータの逆問題に関連したつぎの補題に基づいて最適制御則 K_e がパラメトライズされる．

[補題 2.2.2[KFM '94]]

状態フィードバック (2.7) が最適制御則，つまりある適当な重み $Q_e = Q_e^{\mathrm{T}}$ および $R_e > 0$ に対して (2.8) 式の J_e を最小化し，かつ $J_e > 0$ となるなら，ゲイン K_e に対して適当な正則行列 V と正定対角行列

$$\Sigma := \mathrm{diag}\{\sigma_1\ , \cdots\ , \sigma_m\} \tag{2.9}$$

および適当な実行列 K_F^0, K_C^0 が存在して次式が成立する．

$$K_e \ = \ V^{-1} \Sigma V \left[K_F^0 \ \ -K_C^0 \right] \tag{2.10a}$$

$$K_F^0 B \ = \ I \tag{2.10b}$$

ILQ 設計法では K_F^0, K_C^0 を「基準最適ゲイン」，Σ を「ゲイン調整パラメータ」と呼ぶ．なお，設計の簡単化のため $V = I$ と選ぶ．そのとき，これらのパラメータを用いて ILQ 最適サーボ系は Fig.2.2 のように構成される．この図において，設計者はゲイン調整パラメータ Σ を無限大とした漸近先で，参照入力 r から出力 y までの閉ループ応答（目標値応答特性）を非干渉化された形式で指定できる．このとき，K_F^0, F_C^0 は非干渉化ゲインに選ばれるが，それが可能な条件として制御対象に以下の二つの仮定が必要である．

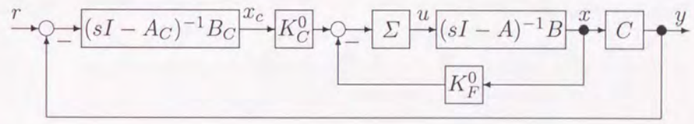


Fig. 2.2: Configuration of ILQ optimal servo system

[仮定 2.2.1]

制御対象 (2.1) は非干渉化可能である．つまり，つぎの非干渉化行列 D が正則である．

$$D := \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m - 1} B \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ただし，d_i は制御対象の各出力に対する相対次数で

$$d_i := \min\{k | c_i A^{k-1} B \neq 0\} \tag{2.12}$$

で定義される．

上記の仮定は制御対象が状態フィードバックで非干渉化可能な条件であるが，非干渉化後の閉ループ系の内部安定性までは保証していない．以下の仮定は内部安定性を満たす非干渉化ゲインの存在を保証する．

[仮定 2.2.2[KF '98]]

システム (2.1) の不安定零点は行零点のみである．

この行零点とは，制御対象の伝達関数行列のいずれかの行を完全に零にするものであり，特に第 i 行を零にするものを「第 i 行零点」と呼ぶ．つまり，制御対象 (2.1) の第 i 行零点を

$$z_{ij}^{+},\ 1 \le j \le n_i^{+},\ \text{ただし}\ \sum_{i=1}^{m} n_i^{+} = n^{+} \tag{2.13}$$

と表せば，z_{ij}^{+} は次式を満たすものとして定義される．

$$c_i\left(z_{ij}^{+}I - A\right)^{-1}B = 0,\ \ 1 \le j \le n_i^{+} \tag{2.14}$$

上式は制御対象の伝達関数 $G(s)$ が

$$G(s) = \mathrm{diag}\{z_1^{+}(s)\ ,\cdots,\ z_m^{+}(s)\}\tilde{G}(s) \tag{2.15}$$

のように，n_i^{+} 次の行零点多項式

$$z_i^{+}(s) := \prod_{j=1}^{n_i^{+}}(s - z_{ij}^{+}) \tag{2.16}$$

を括り出せることを意味し，残った伝達関数 $\tilde{G}(s)$ は以下の性質 1，2 を満たす [KF '98]．ただし，不安定な行零点がない行では $z_i^{+}(s) = 1$ とする．

性質 1 $\tilde{G}(s)$ はつぎの実現をもつ最小位相系である．

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu,\ \ \tilde{y} = \tilde{C}x && (2.17)\\ \tilde{C} &:= \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\{z_1^{+}(A)\}^{-1} \\ \vdots \\ c_m\{z_m^{+}(A)\}^{-1} \end{bmatrix} && (2.18) \end{aligned}$$

性質 2 $\tilde{G}(s)$ の相対次数を d_i^{+} とすると，$d_i^{+} = d_i + n_i^{+}$ であり，かつ次式を満たす．

$$d_i^{+} = \min\{k | \tilde{c}_i A^{k-1} B \neq 0\} \tag{2.19}$$

つぎに，ILQ 設計法の設計手順について主要結果を示す．

《 定理 2.2.1[KF '98] 》

Fig.2.2 の ILQ サーボ系において $\{\sigma_i\} \to \infty$ （以降は $\Sigma \to \infty$ と記す）としたときの r から y までの閉ループ伝達関数 $G_{yr}^{\infty}(s) := \lim_{\Sigma\to\infty} G_{yr}(s)$ を

$$\begin{aligned} G_{yr}^{\infty}(s) &= \mathop{\mathrm{diag}}_{1\le i\le m}\left\{\frac{z_i^{+}(s)r_i(s)}{\phi_i(s)}\right\} \in \mathrm{RH}_{\infty} && (2.20)\\ \phi_i(s) &= \psi_i(s)\alpha(s) + r_i(s)z_i^{+}(s) && (2.21)\\ r_i(s) &:= r_i^{q-1}s^{q-1} + \cdots + r_i^{1}s + r_i^{0} && (2.22)\\ \deg\phi_i(s) &= d_i^{+} + q - 1 && (2.23)\\ \deg\psi_i(s) &= d_i^{+} - 1 && (2.24) \end{aligned}$$

と指定でき，そのときの基準最適ゲインは次式で一意に得られる．

$$\begin{aligned} K_F^{0} &= D^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{c}_1\psi_1(A) \\ \vdots \\ \tilde{c}_m\psi_m(A) \end{bmatrix} && (2.25a)\\ K_C^{0} &= D^{-1}\mathop{\mathrm{blockdiag}}_{1\le i\le m}\{[r_i^{0}\ \cdots\ r_i^{q-1}]\} && (2.25b) \end{aligned}$$

つまり，設計者は任意の $d_i^{+} + q - 1$ 次のモニックな安定多項式 $\phi_i(s)$ を指定できる．そして，これと (2.2c) 式で定義される内部モデルの特性多項式 $\alpha(s)$，および行零点多項式 $z_i^{+}(s)$ から (2.21) 式を満たす一意解 $\psi_i(s)$，$r_i(s)$ が求まり，それをもとに基準最適ゲインが (2.25) 式のように得られる．

つぎに，残る設計パラメータの Σ が Fig.2.2 のサーボ系を最適にするための条件を記す．まず，偏差系 (2.6) の係数行列 B_e と直交する $\overline{n+qm}\times n+q(m-1)$ 行列 Ξ を導入し，これと $K := [K_F^{0},\ K_C^{0}]\Xi$ で定義されるつぎの変換行列

$$T := \begin{bmatrix} \Xi & B_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

を用いて，偏差系 (2.6) および (2.7) 式のフィードバックゲイン K_e をつぎのように相似変換する．

$$\begin{aligned} \tilde{A}_e &:= T^{-1}A_eT =: \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix},\ \ \tilde{B}_e := T^{-1}B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} && (2.27)\\ \tilde{K}_e &:= K_eT = \Sigma\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} && (2.28) \end{aligned}$$

ただし，$\tilde{A}_e$ の要素は $\tilde{B}_e$，$\tilde{K}_e$ の要素のサイズに合わせて分割する．このとき，Σ の最適性に関してつぎの定理が得られる．

《 定理 2.2.2[KF '98] 》

(2.6) 式の偏差系において (2.7), (2.10), (2.25) 式の状態フィードバック制御が最適となる，つまり適当な $Q_e > 0$ および $R_e = \Sigma^{-1}$ に関して (2.8) 式の評価関数を最小化するためには Σ が次式を満足することが必要十分である．

$$H_\Sigma := \Sigma - \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{22}^{\mathrm{T}} > 0 \tag{2.29a}$$

$$\mathrm{Re}\ \lambda(F_\Sigma) < 0, \quad F_\Sigma := \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} H_\Sigma^{-1} \tilde{A}_{21} \tag{2.29b}$$

$$||H_\Sigma^{-\frac{1}{2}} \tilde{A}_{21} (sI - F_\Sigma)^{-1} \tilde{A}_{12} H_\Sigma^{-\frac{1}{2}}||_\infty < 1 \tag{2.29c}$$

上記の定理を満たす Σ には最小値 $\Sigma_{\min}$ が存在し，$\forall \Sigma \geq \Sigma_{\min}$ に対して最適性が保証される．最後に設計手順を示す．

設計手順

手順 1 設計仕様として (2.20) 式で表される所望の漸近伝達関数の分母多項式 $\phi_i(s)$ を指定し，(2.21) 式を満たす $\psi_i(s)$ と $r_i(s)$ を求める．

手順 2 (2.25) 式で基準最適ゲイン K_F^0, K_C^0 を求める．

手順 3 調整パラメータ Σ の下限値を**定理 2.2.2** を用いて計算し，その大きさを制御入力と追従性能のトレードオフで決定する．

以上のように ILQ 設計法では設計者が非干渉化された目標応答 $G_{yr}^{\infty}(s)$ を指定でき，フィードバックゲインが (2.25) 式のように制御対象のパラメータと設計仕様で与えるパラメータで解析的に表される．

2.3 ループ整形

本節ではループ整形の概念や，これまでに提案されてきたループ整形の手法について簡単に述べた後，それに関連してロバスト安定化について述べる．

2.3.1 ループ整形の概念

ループ整形とはフィードバック制御系の「閉ループ伝達関数のゲイン（特異値）は開ループ伝達関数のゲイン（特異値）から決定できる」という考えに基づき，所望の制御性能を達成する，つまり，所望の閉ループ特性を得るために開ループゲインの整形を行う補償器を設計することである．この考え方は Bode[Bode '45] によって提案され，Doyle[DS '81] らはこれを多入出力系に拡張した．その特徴として，補償器の設計が開ループ伝達関数のゲイン線図を用いて直観的に行えるため，わかりやすいことが

あげられる．しかし，開ループゲインの整形結果が閉ループ系の内部安定性を必ずしも保証しないため，設計には注意を要する．これについては安定性も保証するループ整形の手法として，$\mathcal{H}_\infty$ 制御を応用した $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形法 [MG '90] が McFarlane と Glover によって提案されている．

2.3.2 ループ整形の手法 [DS '81, MG '90]

ループ整形では，制御対象の不確かさや外乱等に対する性能を表す閉ループ系の伝達関数のゲイン（特異値）を，たとえばつぎのような開ループゲイン（特異値）で評価する．なお，制御系の構成は Fig2.3 で表され，G, K はそれぞれ制御対象，補償器を表す．また，r, u, d_1, d_2, y, n はそれぞれ，参照入力，制御入力，入力外乱，出力外乱，出力，観測ノイズを表す．

1) 感度（$d_2 \to y$）：出力外乱の出力への影響 $\Rightarrow \bar{\sigma}\big((I-GK)^{-1}\big)$ を小さくする．

$$\bar{\sigma}\big((I-GK)^{-1}\big) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I-GK)} \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)-1} \simeq \frac{1}{\underline{\sigma}(GK)} \quad \big(\underline{\sigma}(GK) \gg 1\big) \tag{2.30}$$

2) 制御対象の加法的な不確かさ $\Rightarrow \bar{\sigma}\big(K(I-GK)^{-1}\big)$ を小さくする．

$$\bar{\sigma}\big(K(I-GK)^{-1}\big) \leq \frac{\bar{\sigma}(K)}{\underline{\sigma}(I-GK)} \simeq \bar{\sigma}(K) \quad \big(\bar{\sigma}(GK) \ll 1\big) \tag{2.31}$$

3) 相補感度（$n \to y$）：観測ノイズの影響および制御対象の出力側の乗法的不確かさ $\Rightarrow \bar{\sigma}\big(GK(I-GK)^{-1}\big)$ を小さくする．

$$\bar{\sigma}\big(GK(I-GK)^{-1}\big) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}\big((GK)^{-1}\big)-1} \simeq \bar{\sigma}(GK) \quad \big(\bar{\sigma}(GK) \ll 1\big) \tag{2.32}$$

4) 入力外乱の出力への影響（$d_1 \to y$）$\Rightarrow \bar{\sigma}\big((I-GK)^{-1}G\big)$ を小さくする．

$$\bar{\sigma}\big((I-GK)^{-1}G\big) = \bar{\sigma}\Big(\big((GK)^{-1}-I\big)^{-1}(GK)^{-1}G\Big) \simeq \bar{\sigma}(K^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \tag{2.33}$$
$$\big(\underline{\sigma}(GK) \gg 1, \ K \text{ は正方}\big)$$

上記の要請 1), 4) は制御性能を表し，2), 3) はロバスト安定性を表す．これらのうち，1), 4) と 2), 3) は互いに相反する要請であることから，すべての周波数帯でよい制御性能とロバスト安定性を得ることはできない．これは，よく知られた制御性能とロバスト安定性のトレードオフである．しかし一般には制御性能は低周波域で，ロバスト安定性は高周波域で重要になってくるため，適切な妥協点を見い出すことができる．つまり，Fig.2.4 に示すように，低周波数域で $\underline{\sigma}(GK)$ を大きくし，高周波域で $\bar{\sigma}(GK)$ を小さくするように K を設計する．

2.3.3 ロバスト安定化

まず，ロバスト安定性の議論のための基礎となるつぎの定理を述べる．

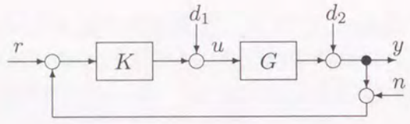


Fig. 2.3: Closed-loop system

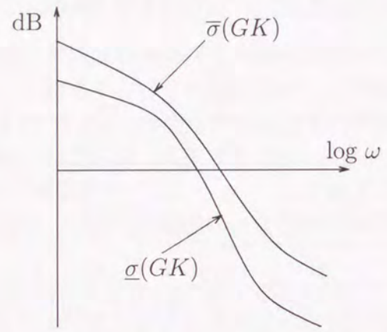


Fig. 2.4: Open-loop singular value shaping

《 定理 2.3.1[Zame '66] 》(スモールゲイン定理)

Fig.2.5 において，$G_1(s)$，$G_2(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ とする．このとき

$$||G_1(s)G_2(s)||_\infty < 1 \tag{2.34}$$

を満たせば閉ループ系は安定である．

この定理は安定な伝達関数で構成された閉ループ系はループを閉じても，ループゲインが 1 未満であれば安定であることを示している．

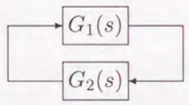


Fig. 2.5: Closed loop system

つぎに，Fig.2.6 で表されるフィードバック系を考える．図において，$G(s)$ は制御対象，$C(s)$ は補償器とする．また，Δ は制御対象の出力側の乗法的な不確かさを表し，$\Delta \in \mathrm{RH}_\infty$ とする．今，図の w から z までの閉ループ伝達関数を $T_{zw}(s)$ と定義すると，**定理 2.3.1** からこのフィードバック系が不確かさ Δ に対して安定（ロバスト安定）となるための条件として

$$||\Delta T_{zw}(s)||_\infty < 1 \tag{2.35}$$

が得られる．通常 Δ は未知であるから，$\overline{\sigma}(\Delta(j\omega)) \le |W(j\omega)|$, $\forall\omega$ を満たす既知で安定なスカラ関数 $W(s)$ を用いてロバスト安定化条件はつぎのように書き換えられる．

$$||W(s)T_{zw}(s)||_\infty < 1 \tag{2.36}$$

上式を満足する補償器 $C(s)$ の代表的な設計法の一つに $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計法 [DGKF '89] がある．

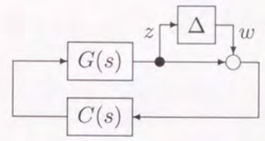


Fig. 2.6: Multiplicative output uncertainty

2.4 2 自由度制御系

本節ではまず 2 自由度制御系について述べた後，その構成をロバストサーボ系に適用して状態空間表現で表した結果を示す．後で考える拡張された ILQ 制御系はこの構成に含まれる．

制御系設計の際の基本的な要請に

1) 系の内部安定性を保証する．

ことがあるが，通常はこれに加えて

2) 所望の目標値応答を得る．

3) モデル化誤差や外乱に対処できる．

ことが主な設計仕様として挙げられる．Fig.2.7 に示す 1 自由度系のシステムでは制御対象 $G(s)$ の出力 y と参照入力 r の二つの信号を偏差 e にまとめて補償器 $C(s)$ の入力としているため，上述の三つの要請を満たすには補償器の設計自由度が不足することがある．一方，2 自由度制御系は Fig.2.8 で表され，フィードフォワード補償器 $C_1(s)$ とフィードバック補償器 $C_2(s)$ を持つため y と r の信号をそれぞれ独立に利用できる．このため補償器の設計自由度が 1 自由度系に比べて大きくなり，フィードバック特性（要請 1) および 3)）とフィードフォワード特性（要請 2)）を別々に設計することができる．この 2 自由度系の重要性は Horowitz によって指摘され [Horo '76]，その後の研究で補償器のクラスの特徴づけや，実現可能な伝達関数のクラスなどが明らかにされている [Pern '81, DG '84].

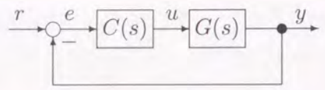


Fig. 2.7: One-degree-of-freedom system

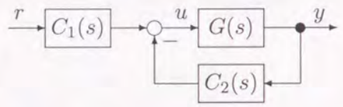


Fig. 2.8: Two-degree-of-freedom system

2.4.1 既約分解に基づく2自由度制御系

本節では Fig.2.8 の2自由度制御系を内部安定化する $C_1(s)$, $C_2(s)$ のクラスを特徴づける結果を示す．これは制御対象 $G(s)$ の RH_∞ 上の既約分解に基づいて得られる．まず，1自由度系を内部安定化する補償器 $C(s)$ のクラスは Youla らによって導かれたつぎの定理で特徴づけられる．

《 定理 2.4.1[YJB '76] 》

制御対象 $G(s)$ の RH_∞ 上の既約分解とベズー等式をつぎのように仮定する．

$$G(s) = N(s)D(s)^{-1} = \tilde{D}(s)^{-1}\tilde{N}(s) \tag{2.37a}$$
$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I, \quad \tilde{N}(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I \tag{2.37b}$$

このとき Fig.2.7 の制御系を内部安定にするすべての安定化補償器 $C(s)$ の集合 $\Omega(G(s))$ は次式で与えられる．

$$\Omega(G(s)) = \left\{ \left(Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)\right)^{-1}\left(X(s) + R(s)\tilde{D}(s)\right) \mid \forall R(s) \in \mathrm{RH}_\infty \right\} \tag{2.38a}$$
$$= \left\{ \left(\tilde{X}(s) + D(s)Q(s)\right)\left(\tilde{Y}(s) - N(s)Q(s)\right)^{-1} \mid \forall Q(s) \in \mathrm{RH}_\infty \right\} \tag{2.38b}$$

つぎに，この定理の結果を用いて Fig.2.8 の2自由度制御系に対する安定化補償器のクラスがつぎの定理で特徴づけられる．

《 定理 2.4.2[DG '84] 》

制御対象 $G(s)$ の既約分解とベズー等式を (2.37) 式とする．このとき Fig.2.8 の制御系を内部安定にするすべての補償器 $C = [C_1(s) \quad -C_2(s)]$ の集合は次式で与えられる．

$$\Big\{ C = \left(Y(s) - R(s)\tilde{N}(s)\right)^{-1}\left[K(s) \quad -\left(X(s) + R(s)\tilde{D}(s)\right)\right] \mid \forall K(s) \in \mathrm{RH}_\infty,\ \forall R(s) \in \mathrm{RH}_\infty \Big\} \tag{2.39a}$$
$$= \Big\{ C = \left[\left(D(s) + C_2(s)N(s)\right)K(s) \quad -C_2(s)\right] \mid \forall K(s) \in \mathrm{RH}_\infty,\ \forall C_2(s) \in \Omega(G(s)) \Big\} \tag{2.39b}$$

(2.39b) 式から $C_2(s)$ は1自由度系の補償器とクラスが等しいことがわかる．しかし，$C_1(s)$ には自由パラメータ $K(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ の設計自由度が残されており，これが1自由度系との違いになっている．

2.4.2 2自由度ロバストサーボ系

藤崎ら [FYH '94] は，前節で述べた2自由度制御系を 2.2.3 節で述べたロバストサーボ系に応用した「2自由度ロバストサーボ系」を状態空間で表現している．この構成は参照入力信号のクラスが各チャンネルで等しい場合のものであり Fig.2.9 で表される．なお，本論文では観測ノイズ抑制特性を考えるため，n（観測ノイズ）を加えたものを示した．図において K_F, K_C は

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_C C & A_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [K_F \quad -K_C] \tag{2.40}$$

を安定にする任意のゲイン，つまり偏差系 (2.6) の安定化ゲインであり，H は $A - HC$ を安定にする任意の行列である．また，フィードフォワード側とフィードバック側に自由パラメータ $Q_F(s) \in \mathrm{RH}_\infty$, $Q_B(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ を持つ．この2自由度ロバストサーボ系は Fig.2.1 のロバストサーボ系において，フィードバック部を状態 x を推定する状態オブザーバと自由パラメータ $Q_B(s)$ に置き換え，フィードフォワード側に自由パラメータ $Q_F(s)$ を付加した構成となっている．したがって各パラメータの役割が明瞭で，その制御構造が非常にわかりやすいものとなっている．また，以下の構造上の特徴を持つ．

1. 目標値応答特性を表す参照入力 r から出力 y までの閉ループ伝達関数 $G_{yr}(s)$ はオブザーバおよび自由パラメータ $Q_B(s)$ に依存しない．
2. 観測ノイズ抑制特性，およびロバスト安定性を表す n から y までの閉ループ伝達関数 $G_{yn}(s)$ は $Q_F(s)$ に依存しない．

本論文では次章以降，この Fig.2.9 の構造に基づいて Fig.2.2 の ILQ サーボ系の構造を拡張し，設計理論の拡張を行う．

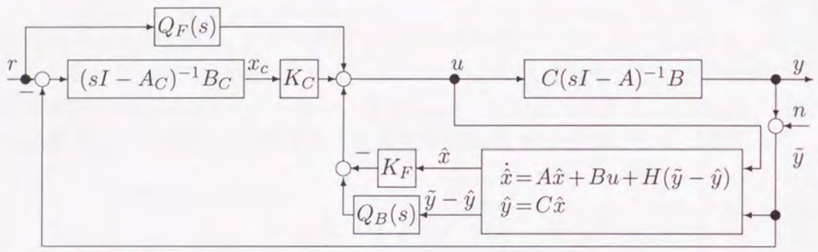


Fig. 2.9: Control structure of two-degree-of-freedom robust servo system

第3章 ループ整形を考慮した ILQ ロバストサーボ系設計法の拡張

3.1 はじめに

この章では 2.2 節で述べた ILQ 設計法をループ整形を考慮した設計法へ拡張する．2.2 節で述べたように，ILQ 設計法は種々の改良や拡張が行われてきた．そして実用性の高さからいくつかの実システムに適用され，良好な結果を得てきた．しかし，観測ノイズの抑制やモデル化誤差に対するロバスト安定化という視点に欠けていたために，多変数磁気浮上系に適用した際にスピルオーバ現象が発生するなどの問題が生じた [SNTF '95]．そこで，この章では ILQ 設計法をノイズ抑制やロバスト安定化を考慮に入れた設計が行えるように拡張する [SF '00]．この際に，制御系の構成を従来の状態フィードバックの構成からオブザーバとその設計自由度を用いた構成に変更する．そして，これらを活用することでループ整形を行い，上述の問題を解決する設計法を提案する．

つぎにこの設計法の磁気浮上システムへの応用例を示す．このシステムについてはすでに $\mathcal{H}_\infty$ 制御を用いてスピルオーバの抑制が達成されている [TNF '98] が，提案する設計法を用いて同等の性能を有する，より低次の補償器が設計できることを示す [SKNF '98]．

3.2 ロバスト安定化に着目した整形

一般に目標値応答の指定や観測ノイズの抑制などの制御目的は，適切な制御ループの応答をその目的に合わせて整形することで達成できる．例えば 2.3 節で述べた古典的なループ整形法では，それを開ループ周波数応答（ゲイン特性）の整形で行っていたが，閉ループ系の安定性の確保に難点があった．その反省から，近年 $\mathcal{H}_\infty$ 制御理論を応用して，内部安定性を確保しながら古典制御と同様な開ループ周波数応答の整形を行う $\mathcal{H}_\infty$ ループ整形法が McFarlane ら [MG '90] によって提案されている．ここではそのような開ループゲイン特性の整形法とは異なり，ILQ ロバストサーボ系に新たにオブザーバの設計自由度を付加した構成を考え，目標値追従と観測ノイズの抑制の二つの閉ループ特性を同時に整形する機能を持つサーボ系の統一的設計法を提案する．このサーボ系の構成は 2.4.2 節で述べた 2 自由度ロバストサーボ系の一般構成に含まれる．本設計法の特長は，このループ整形をモデルマッチングの観点から行う点にあ

り，これにより設計結果がプラントと設計仕様で指定する所望の閉ループ特性のデータから解析的に得られる，というILQ設計法本来の特長がそのまま引き継がれることになる．

3.2.1　制御対象の記述，および仮定

制御対象は2.2.2節で記述されるものとする．ただし，これに加えて $\mathrm{rank}\, G(s) = m$ を仮定する．また2.2節のILQ設計法が使えるための条件として，ロバストサーボ系の設計可能条件（**補題 2.2.1**），および非干渉化可能条件（**仮定 2.2.1**，**仮定 2.2.2**）を仮定する．

3.2.2　制御系の構成

ここでは観測ノイズの抑制やロバスト安定性も考慮するため，Fig.2.2のILQ制御系の構成を状態フィードバックからオブザーバを用いた出力フィードバックの構成に変更する．またこの際，従来よく用いられる状態オブザーバではなく，より多くの自由度を有する一般化オブザーバ [GM '89] を用いてサーボ系を構成する．なお，文献 [GM '89] では同次元オブザーバの一般系を示しているが，本設計法ではそれを線形関数オブザーバへ拡張したもの [KR '92] を用いる．このオブザーバは状態の線形関数

$$v = K_F^0 x \tag{3.1}$$

を推定するもので，制御対象の入力 u と 出力 y を入力とする線形動的システム

$$\hat{v}(s) = L(s)u(s) + J(s)y(s) \tag{3.2}$$

のうち，任意の初期状態と入力 u に対して

$$\lim_{t\to\infty}(v(t) - \hat{v}(t)) = 0 \tag{3.3}$$

となるものをいう．ただし $\hat{v}(s)$ は v の推定値 $\hat{v}$ をラプラス変換 $(\hat{v}(s) = \mathcal{L}[\hat{v}])$ したものであり，$L(s), J(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ とする．このオブザーバによる推定値 $\hat{v}(s)$ は，従来の同次元オブザーバ

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \tag{3.4}$$

の推定値 $\hat{x}(s) = \mathcal{L}[\hat{x}]$ と任意の $Q_B(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ を用いて

$$\hat{v}(s) = K_F^0\hat{x}(s) + Q_B(s)\big(y(s) - \hat{y}(s)\big) \tag{3.5}$$

と表される [KR '92]．ここで $\hat{y}$ は出力 y の推定値であり，$\hat{y}(s) = \mathcal{L}[\hat{y}]$ である．以上を図示すると，本設計法で用いる制御系はFig.3.1のようになる（図中 n は観測ノイズを表す）．この構成は，Fig.2.9で示される2自由度ロバストサーボ系の一般的な構成において，目標値応答特性の改善のための自由度 $Q_F(s) = 0$ としたものである．本節では制御系の構成を簡単にするため，および主にロバスト安定化を考慮した設計法を考えるため，それに直接関係のない $Q_F(s)$ は使用しない．なお，$Q_F(s)$ を活用した設計については次章で扱う．

2.4.2節で述べたように，このシステム構成の重要な特徴は，目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ が状態フィードバック構成の場合と変わらない，つまり $G_{yr}(s)$ が一般化オブザーバの設計パラメータ H と $Q_B(s)$ に依存しないことである．この特徴を活かし，追従特性の整形はフィードバックゲイン K_F^0，K_C^0 の設計で，ノイズ抑制やロバスト安定性のための整形は一般化オブザーバの設計で行う．また各補償器の設計はモデルマッチングの観点から行い，前者は参照入力から出力までの閉ループ伝達関数 $G_{yr}(s)$ を指定し，後者は観測ノイズから出力までの閉ループ伝達関数 $G_{yn}(s)$ を指定して行う．なお，2.3.3節から $G_{yn}(s)$ を整形することは観測ノイズの抑制のみならず，制御対象の出力側の乗法的な不確かさに対するロバスト安定化も考慮した設計が行えることに注意する．

（注意 3.2.1）

オブザーバを付加することによって，最適レギュレータの有する最適性，および円条件で表されるある種のロバスト性や低感度特性は失われることに注意する．なお，Andersonら [AM '89] はLQG制御系において，本設計法と同様の自由パラメータを用いてこの開ループ特性（円条件）を回復できることを指摘している．そしてその考え方を発展させて閉ループ特性（感度関数）を状態フィードバックを用いた場合のものに近づける「感度／ループ回復」の手法を提案している．

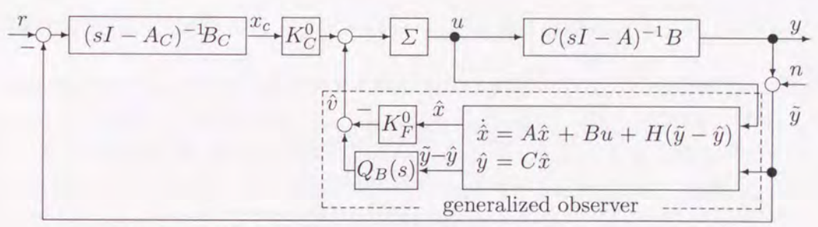


Fig. 3.1: ILQ servo system with generalized observer

3.2.3　設計法

1. 目標値応答特性の整形

まず目標値応答特性，つまり $G_{yr}(s)$ の整形には，それ自体が漸近的に指定できるILQ設計法 [Fuji '87, KAF '96, KF '98] を用いる．その設計手順は2.2.4節に示したと

おりであり，**定理 2.2.1** から K_F^0, K_C^0 が，**定理 2.2.2** から Σ の下限値が決定される．

2. ノイズ抑制特性の整形

つぎに，本設計法の特徴であり，本節の主要結果である観測ノイズの抑制特性，つまり $G_{yn}(s)$ の整形について述べる．$G_{yn}(s)$ も目標値応答特性と同様に Σ を無限大とした極限 $G_{yn}^{\infty}(s) := \lim_{\Sigma\to\infty} G_{yn}(s)$ を指定する．この指定はILQ設計法では Σ を無限大とした極限で，$G_{yr}^{\infty}(s)$ やフィードバックゲインの解析表現が得られることを利用している．まずその極限を設計パラメータ $Q_B(s)$, H が入った形で求める．Fig.3.1で n から y までの伝達関数を計算すると

$$\begin{aligned} G_{yn}(s) &= -G_{yr}(s)\{K_C^0 G_C(s)\}^{-1}\Big[K_C^0 G_C(s) + K_F^0(sI-A+HC)^{-1}H \\ &\quad + Q_B(s)C(sI-A+HC)^{-1}H - Q_B(s)\Big] \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．ただし，$G_C(s) := (sI-A_C)^{-1}B_C$ である．つぎに(2.2c)，(2.4)式および(2.25b)式を用いて簡単な計算により

$$K_C^0 G_C(s) = D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{r_i(s)}{\alpha(s)}\right\} \tag{3.7}$$

が導けるので，これを(3.6)式に代入して $\Sigma\to\infty$ とすると

$$\begin{aligned} G_{yn}^{\infty}(s) &= -G_{yr}^{\infty}(s) - \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} D\left[K_F^0(sI-A+HC)^{-1}H\right. \\ &\quad \left. + Q_B(s)\{C(sI-A+HC)^{-1}H - I\}\right] \end{aligned} \tag{3.8}$$

のように $G_{yn}(s)$ の極限が得られる．今，(3.8)式をもとにつぎの有理関数行列を定義する．

$$\begin{aligned} T_1(s) &:= \bar{G}_{yn}^{\infty}(s) + G_{yr}^{\infty}(s) + \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} \\ &\quad \times DK_F^0(sI-A+HC)^{-1}H \end{aligned} \tag{3.9a}$$

$$T_2(s) := \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} D \tag{3.9b}$$

$$T_3(s) := -C(sI-A+HC)^{-1}H + I \tag{3.9c}$$

ここで，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ は設計者が指定する希望の伝達関数である．このとき以下の恒等式が成り立つ．

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) - G_{yn}^{\infty}(s) \equiv T_1(s) - T_2(s)Q_B(s)T_3(s) \tag{3.10}$$

つまり，希望の伝達関数と実際の伝達関数の差は $Q_B(s)$ に対してアフィンとなり，これを零もしくは小さくするのが，いわゆる**モデルマッチング問題**である．本設計法で

はこれが零になる場合を考える．そこで(3.10)式を零にする $Q_B(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ が存在するとき，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ はマッチング可能と呼び，$Q_B(s)$ は次式で定まる．

$$Q_B(s) = T_2(s)^{-1}T_1(s)T_3(s)^{-1} \tag{3.11}$$

また，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の設計や調整は各入出力単位で行える方が実用上好ましいと考えられるため，これを

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) := \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \in \mathrm{RH}_\infty \tag{3.12}$$

のように対角行列の形で指定する．このとき，$Q_B(s)\in\mathrm{RH}_\infty$ となる条件からつぎの定理が得られる．

《 定理 3.2.1 》

マッチング可能な $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ は，つぎの必要十分条件で完全に特徴づけられる．

（条件1）$N_i(s)$ が $z_i^+(s)$ を因子に持つ．

（条件2）$N_i(s)+M_i(s)$ が $\alpha(s)\beta_i(s)$ を因子に持つ．

（条件3）$\deg M_i(s) - \deg N_i(s) \ge d_i - 1$.

ただし，$\beta_i(s)$ はシステム $(A,\ B,\ c_i)$ の可制御かつ可観測な不安定極を重複度も含めてすべて根に持つ多項式であり，不安定極がない場合は $\beta_i(s)=1$ とする．また，例外として最小位相系の制御対象で $d_i=1$ の場合には（条件2）を満足しないが，$N_i(s)/M_i(s)=-1$, $\big(N_i(s)=-M_i(s)\big)$ を指定できる（実用的な意味は持たない）．

（証明）　付録A参照．　□

この結果の意味を述べる．**定理 3.2.1** の証明から明らかなように（条件1），（条件2）は $Q_B(s)$ の安定性を，また（条件3）はプロパ性を保証するものである．まず（条件1）は，内部安定性の制約より「相補感度関数が制御対象の不安定零点を零点に持つ」ことに起因する[MS '90]．また（条件2）は言い換えると，Fig.3.1で n から $\tilde{y}$ までの伝達関数 $G_{yn}(s)+I$（つまり感度関数）が，Σ を大きくした極限で $\alpha(s)$ と $\beta_i(s)$ を分子多項式の因子に持つことに等しい．前者の必要性は内部モデル原理より「感度関数が内部モデルの極を零点に持つ」ことに，また後者の必要性は内部安定性の制約より「感度関数が制御対象の不安定極を零点に持つ」ことに起因する[MS '90]．この結果，内部モデルが高次（つまり参照入力が複雑）になるほど，また制御対象の不安定極または不安定零点が多いほどマッチング可能なクラスが狭くなる．逆に安定な最小位相系を1型サーボ系で制御する場合は，（条件3）を満たすものの中で定常ゲインが $-I$ となるものすべてがマッチング可能となる．

以上でマッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ が特徴づけられた．以下では所望の $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)\in\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ の指定と，そのモデルマッチングに必要な一般化オブザーバの設計について述べる．ま

ず，(3.8)式より $G_{yn}^{\infty}(s)$ の伝達極が $G_{yr}^{\infty}(s)$ の伝達極，オブザーバ極（つまり $A-HC$ の固有値）および $Q_B(s)$ の伝達極からなることに注意すれば，$Q_B(s)$ の低次元化（したがって制御器の低次元化）を考慮に入れたつぎの設計指針を得る．

【設計指針】

指針1　$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の伝達極が $G_{yr}^{\infty}(s)$ の伝達極を含む（つまり $M_i(s)$ が $\phi_i(s)$ を含む）ように，クラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ の中から所望のものを出来るだけ低次で指定する．

指針2　(3.4)式の同次元オブザーバは，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の伝達極と（$G_{yr}^{\infty}(s)$ の伝達極以外の）n 個の極を共有するように設計する．

（注意 3.2.2）

(3.9a), (3.9b)式と(3.11)式より容易に分かるように，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の指定に関する指針1は $Q_B(s)$ の低次元化，したがって補償器の低次元化に寄与する．一方，オブザーバゲイン H の設計に関する指針2は必ずしもそうでない．なぜなら，同じ $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を実現する $Q_B(s)$ とオブザーバゲイン H の組合せに対し，常に補償器は一意に定まることが示せるからである．つまり，オブザーバゲイン H を指針2にしたがって設計しても，これにしたがわずに設計しても同一の補償器が得られるのである．これは，後者の場合には必ず $Q_B(s)$ がより高次になるが補償器内部で極零相殺が起こり，その結果として指針2に従って設計した補償器と同じものが得られるからである（詳細は5章参照）．明らかにこの事実は後者の設計法が冗長な部分を含むことを示唆しており，補償器の設計計算を簡単化する上で指針2の妥当性を示している．

（注意 3.2.3）

(3.11)式から分かるように $Q_B(s)$ は $T_3(s)^{-1}=C(sI-A)^{-1}H+I$ の極，つまり制御対象の極を含む．このうち不安定極については $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ 内で $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を指定すれば相殺される．しかし，安定極については相殺されない．このため，安定極が多い制御対象については $Q_B(s)$ の次数（補償器の次数）が大きくなる傾向がある．しかし，定理の（条件2）に関連して $N_i(s)+M_i(s)$ が $(A,\ B,\ c_i)$ の可制御かつ可観測な**安定極**も因子に持つように $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を指定すれば，制約は厳しくなるものの，この安定極は相殺され $Q_B(s)$ には現れなくなる．

以上より，2種類の閉ループ特性の整形を可能にするロバストサーボ系の解析的な設計手順を得る．

【設計手順】

1. 目標値応答特性の整形

3.2.3節で述べた手順で所望の追従特性 $G_{yr}^{\infty}(s)$ を指定し，マッチングに必要な基準最適ゲイン K_F^0，K_C^0 と調整パラメータ Σ を求める．

2. ノイズ抑制特性の整形

手順2-a　**マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ の導出**

$\beta_i(s)$ を求め，それをもとにマッチング可能な $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ を求める．

手順2-b　**ノイズ抑制特性の指定**

上記の指針1にしたがい，クラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ 内で所望の伝達関数 $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を指定する．

手順2-c　**オブザーバの設計**

上記の指針2にしたがい，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の伝達極の一部がオブザーバ極になるように H を設計する．

手順2-d　**$Q_B(s)$ の計算**

$Q_B(s)$ を (3.11) 式で計算する．なお，この効率的な計算手順を付録Aの後半に示す．

（注意 3.2.4）

上記の設計手順は概略を述べたものであり，実際にはシミュレーションや実験結果を参考に所望の性能が得られるまで手順1，2を繰り返す．なお，ノイズ抑制特性のみを変更する場合は手順(2-b)-(2-d)のみを繰り返せばよい．

（注意 3.2.5）

整形される二つの閉ループ特性の各目標特性への漸近度合いについては，(3.6)式の $G_{yn}(s)$ が Σ を含む $G_{yr}(s)$ と Σ に関係しない行列との積の形で表わされることから，$\Sigma\to\infty$ とした極限で指定される $G_{yr}^{\infty}(s)$ のゲイン周波数特性と実際に用いる有限の Σ での $G_{yr}(s)$ のゲイン周波数特性の差が，そのまま $G_{yn}^{\infty}(s)$ と $G_{yn}(s)$ のゲイン周波数特性の差として現れる．つまり，両特性ともゲイン周波数特性についてはその漸近度合いに差がないことに注意する．

3.3　数値例

制御対象のモデルとして可制御かつ可観測なシステム

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} u \tag{3.13a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{3.13b}$$

を考える．このシステム(3.13)の伝達関数は

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{s-2}{(s+2)(s-1)s} \\ 0 & -\dfrac{s-2}{(s-1)s} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

となるので第1行零点はない（したがって $z_1^+(s)=1$）が，第2行に不安定な行零点

$$z_{21}^+=2,\ z_2^+(s)=s-z_{21}^+ \tag{3.15}$$

を持つ非最小位相系である．(2.12)，(2.11) 式より相対次数 d_1，d_2 および非干渉化行列 D はそれぞれ

$$d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

となり，D は正則であるから ILQ 法による設計が可能である．なお定義より $n_1^+ = 0$，$n_2^+ = 1$ したがって $d_1^+ = 1$，$d_2^+ = 2$ であることに注意する．このシステムにおいて，目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ は定値参照入力に追従するように指定する．また，観測ノイズとして 10[Hz] の正弦波が加わるものとし，ノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ はこれを除去するように整形する．

3.3.1　目標値応答特性の整形

定置参照入力に追従するため，内部モデルは積分器

$$A_r = 0,\ B_r = 1,\ \alpha(s) = s,\ q := \deg\,\alpha(s) = 1 \tag{3.17}$$

$$A_C = \mathrm{blockdiag}\{A_r, A_r\},\ B_C = \mathrm{blockdiag}\{B_r, B_r\} \tag{3.18}$$

とする．つぎに非干渉化された各入出力間の伝達関数の $d_i^+ + q - 1$ 次分母多項式 $\phi_i(s),\ 1 \le i \le 2$ を

$$\phi_1(s) = s + 4,\ \phi_2(s) = (s+2)^2 \tag{3.19}$$

のように指定すると，(2.21) 式を満足する一意解 $\psi_i(s),\ r_i(s),\ 1 \le i \le 2$ は

$$\psi_1(s) = 1,\ \psi_2(s) = s + 6,\ r_1(s) = 1,\ r_2(s) = -2 \tag{3.20}$$

と求まった．ゆえに (2.25) 式から基準最適ゲインが

$$K_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix},\ K_C^0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

と計算される．つぎに $\Sigma := \sigma I_2$ の下限値 $\sigma_{\min}$ を計算すると $\sigma_{\min} = 1.0162 \times 10$ となった．

3.3.2　ノイズ抑制特性の整形

つぎに観測ノイズ抑制特性の整形を行う．まず**定理 3.2.1** からマッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ を求める．(3.14) 式から $\beta_1(s) = \beta_2(s) = s(s-1)$ である．また (3.17) 式から $\alpha(s) = s$ であるからマッチング可能な

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) := \mathrm{diag}\{\bar{g}_{yn1}^{\infty}(s),\ \bar{g}_{yn2}^{\infty}(s)\} = \mathrm{diag}\left\{\frac{N_1(s)}{M_1(s)},\ \frac{N_2(s)}{M_2(s)}\right\} \tag{3.22}$$

のクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ はつぎのようになる．

マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$

1. $N_2(s)$ が $s-2$ を因子として持つ．
2. $N_i(s) + M_i(s),\ 1 \le i \le 2$ が $s^2(s-1)$ を因子として持つ．
3. $\deg\,M_i(s) - \deg\,N_i(s) \ge 0,\ 1 \le i \le 2.$

ここで観測ノイズの除去のため $N_1(s)$，$N_2(s)$ につぎの因子

$$f(s) = s^2 + 2\times 0.01\omega s + \omega^2,\ \omega = 2\pi \times 10$$

を含ませ，10[Hz] でゲインが下がるようなノッチフィルタ特性を持たせる．また 3.2.3 節の設計指針 1 にしたがい，$M_i(s)$ には (3.19) 式で指定された $\phi_i(s)$ を因子に持たせるようにする．そして周波数応答の形に注意してつぎのような伝達関数に選んだ．

$$\bar{g}_{yn1}^{\infty}(s) = \frac{f(s)\delta_1(s)}{(s+4)\,(s+3)\,(s+15)\,(s+10)^2} \tag{3.23}$$

$$\bar{g}_{yn2}^{\infty}(s) = \frac{(s-2)f(s)\delta_2(s)}{(s+2)^3\,(s+3)\,(s+15)\,(s+10)^2} \tag{3.24}$$

ここで，$\delta_1(s)$，$\delta_2(s)$ は上記の $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ に入る条件 2 により制約される因子であり，他の因子を決めると一意に決定し，

$$\delta_1(s) = -1.3688s^2 - 1.3688s - 4.5595 \tag{3.25}$$

$$\delta_2(s) = (3.6520\times 10)s^2 + (1.1853\times 10)s + 4.5595 \tag{3.26}$$

となった．つぎにオブザーバ極は設計指針 2 にしたがい，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の伝達極と一致する極 $(-10,\ -10,\ -15)$ を選んだ．そしてそれを実現するオブザーバゲイン H は

$$H = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 26 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

と求まった．これらの式から $Q_B(s)$ を $Q_B(s) = T_1(s)^{-1}T_2(s)T_3(s)^{-1}$ により計算すると，つぎのように求まった．

$$Q_B(s) = \begin{bmatrix} Q_{B11}(s) & Q_{B12}(s) \\ Q_{B21}(s) & Q_{B22}(s) \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

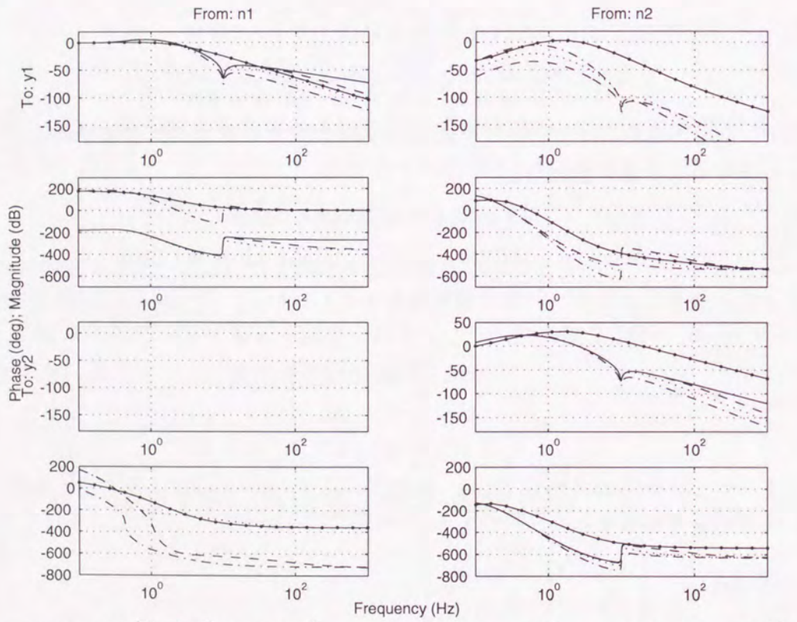
$$Q_{B11}(s) = \frac{(1.0631\times 10)s^3 + (3.7041\times 10^2)s^2 - (1.5930\times 10^3)s - 9.0000\times 10^2}{(s+2)(s+10)(s+15)(s+3)}$$

$$Q_{B12}(s) = \frac{-s^2 - (4.1631\times 10)s - 6.9304\times 10^2}{(s+2)(s+10)(s+3)}$$

$$Q_{B21}(s) = 0$$

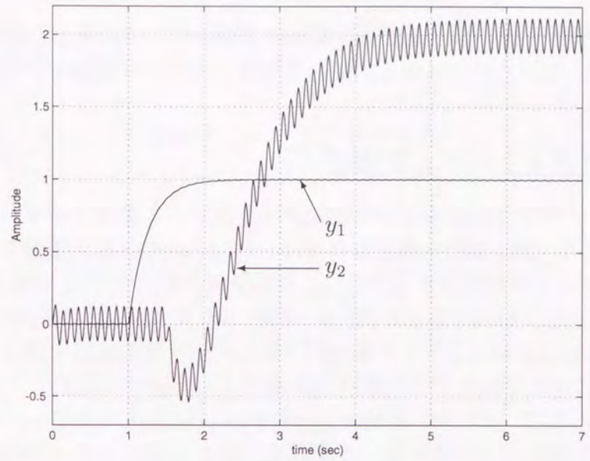
$$Q_{B22}(s) = \frac{(7.8400\times 10^2)s^2 + (1.3007\times 10^4)s + 6.4654\times 10^4}{(s+10)(s+3)(s+2)}$$

Fig.3.2 に指定した $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$（実線）と，Σ の値を変化させたときの $G_{yn}(s)$（鎖線，点線，破線）および $Q_B(s)=0$ としたときの $G_{yn}(s)$（実線に点）のボード線図を示す．Σ を大きくしていくと，実際の $G_{yn}(s)$ のボード線図が指定した $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ に漸近していく様子がわかる．また，$Q_B(s)$ を用いない（$Q_B(s)=0$ とした）従来の方法では設計の自由度が不足しているため，観測ノイズを抑制するためのノッチフィルタ特性を持たせることができないが，本設計法ではそれが可能である．その効果を確認するために，Figs.3.3，3.4 に出力のステップ応答の比較を示す．参照入力信号として第1，第2入力にそれぞれ大きさ 1，2 の定置入力を時刻 1，1.5 [sec] に加えた．また，観測ノイズとして 10 [Hz] で振幅 0.01 の正弦波を加えた．Fig.3.3 に示す $Q_B(s)=0$ の場合は観測ノイズの影響が主として第2出力に現れているが，Fig.3.4 に示す本設計法を用いた場合はそれが抑制されていることがわかる．また Fig.3.4 では $\Sigma\to\infty$ とした漸近応答（破線）も示しているが，両者はほぼ完全に一致していることもわかる．以上より本設計法の有効性が確認できた．



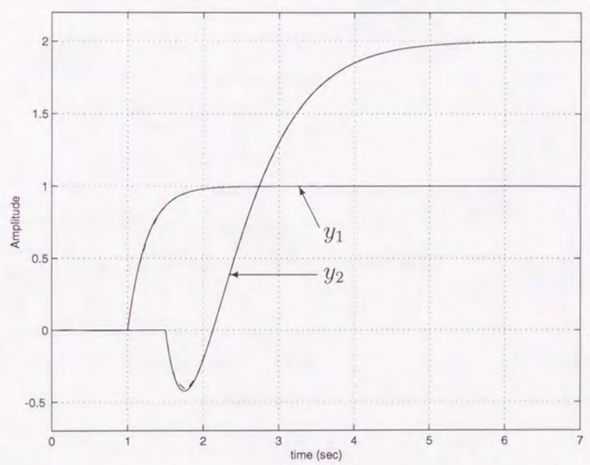
— : $\sigma\to\infty$(desired response)，$-\cdot-$: $\sigma=\sigma_{\min}\times 2$，$\cdots$: $\sigma=\sigma_{\min}\times 10$，
$--$: $\sigma=\sigma_{\min}\times 50$，$-\bullet-$: $Q_B(s)=0$，$\sigma=\sigma_{\min}\times 2$

Fig. 3.2: Bode-plot of $G_{yn}(s)$



$Q_B(s)=0$, $\sigma=\sigma_{\min}\times 2$

Fig. 3.3: Step reference responses by existimg method



- - : $\sigma\to\infty$(desired responce)，— : $\sigma=\sigma_{\min}\times 2$

Fig. 3.4: Step reference responses by proposed method

3.4　磁気浮上システムへの適用例

本節では，前節で提案した設計法を磁気浮上システムへ適用した結果について述べる [SKNF '98]．ここではロバスト安定化を考慮したループ整形を行う．

3.4.1　磁気浮上システムの概要

Fig.3.5 に示すY字型鉄片を用いた磁気浮上システムの概略を示す．本磁気浮上系は3入出力系であり，浮上体の先端に取り付けられた三つの鉄片を電磁石で吸引し，その位置をギャップセンサで検出する．先に，本磁気浮上制御に ILQ 設計法と $\mathcal{H}_\infty$ 制御系設計法を適用した．その結果 [SNTF '95, TNF '98] によれば，状態オブザーバを用いた ILQ 制御系は目標値のステップ変化には優れた追従性能を示すが，インパルス外乱や観測ノイズに対してはモデル化誤差の影響でスピルオーバが生じ，不安定になった [SNTF '95]．そこで，モデルの不確かさを閉ループ同定法で同定し，その不確かさに対してロバスト安定な2自由度 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系を設計し，スピルオーバの抑制に成功した [TNF '98]．しかし，補償器の次数は ILQ 制御系のもの [SNTF '95]（同次元オブザーバを用いた場合が9次，最小次元オブザーバを用いた場合が6次）に比べてかなり高次（33次）になった．そこで，前節の設計法を用いて低次元のロバスト安定化補償器を設計する．ここで，$G_{yn}(s)$ は相補感度関数（2.3.3節の $T_{zw}(s)$ に相当）に等しいのでこれを低次で適切に整形すれば，スピルオーバを抑制するロバスト安定化補償器が設計できる．

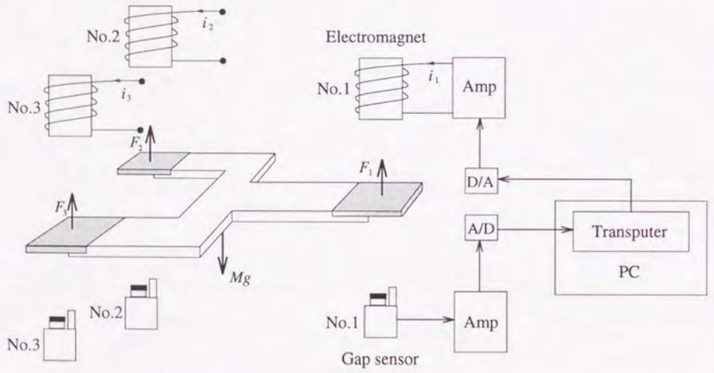


Fig. 3.5: Magnetic levitation system

3.4.2　設計

本磁気浮上系に対しては，物理法則と厳密な線形化を用いてつぎの非干渉化されたモデルが得られている [TNF '98]．

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2} I_3 \tag{3.29}$$

ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

であり，状態 x と出力 y は次式で定義される．

$$x := [y^{\mathrm{T}} \ \dot{y}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \ y := \begin{bmatrix} x_v - x_v^* & \theta_p & \theta_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3.31}$$

ここに x_v は浮上体の重心を浮上体の上面に射影した点 G の変位であり，x_v^* はその基準位置 (電磁石の吸引面から X_v 方向へ 18[mm] の位置) である．また θ_p，θ_r はそれぞれピッチ方向およびロール方向の回転角である（Fig.3.6 参照）．

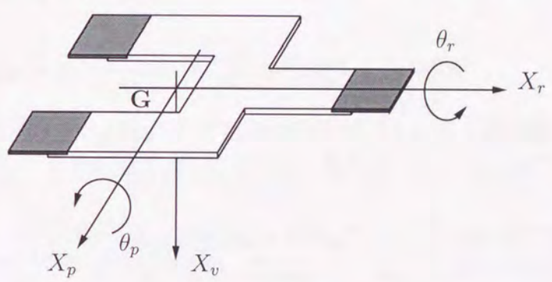


Fig. 3.6: Coordinate axis

【設計手順】

3.2.3節 に記した手順にしたがって設計する．

1．目標値応答特性の整形

目標値のステップ変化に追従させるため内部モデルには積分器を含ませる．つまり (2.2c)，(2.4) 式で，

$$A_C = 0_{3\times 3},\ \ B_C = I_3,\ \ \alpha(s) = s \tag{3.32}$$

とする．また(2.11)，(2.12)式からD，d_iはつぎのようになる．

$$D = I_3,\ \ d_i = 2,\ (1 \le i \le 3) \tag{3.33}$$

よって$G_{yr}^{\infty}(s)$はつぎの2次遅れ伝達関数に指定できる．

$$G_{yr}^{\infty}(s) = \frac{r(s)}{\phi(s)} I_3,\ \ \phi(s) = (s + \frac{1}{T})^2,\ \ r(s) = \frac{1}{T^2} \tag{3.34}$$

このとき(2.25)式から基準最適ゲインK_F^0，K_C^0は

$$K_F^0 = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{T} I_3 & I_3 \end{array} \right],\ \ K_C^0 = \frac{1}{T^2} I_3 \tag{3.35}$$

と計算される．ここで時定数Tは従来の結果[SNTF '95]をもとに$T = 0.08$と指定した．このとき$\Sigma = \sigma I_3$の下限値$\sigma_{\min}$は$\sigma_{\min} = 51$と求まり，調整の結果，以下のΣを選んだ．

$$\Sigma = \sigma_{\min} \times 20 I_3 = 1020 I_3 \tag{3.36}$$

2. ノイズ抑制特性の整形

つぎにスピルオーバ抑制を目的とした$G_{yn}(s)$の整形を行う．$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$も各入出力で同じものを

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) = \bar{g}_{yn}^{\infty}(s) I_3,\ \ \bar{g}_{yn}^{\infty}(s) := \frac{n(s)}{m(s)} \tag{3.37}$$

と指定する．本磁気浮上系はモデルが非干渉化されており，フィードバックゲインも(3.35)式のように求まるので，オブザーバゲインHと$Q_B(s)$をつぎの形

$$H = \left[\begin{array}{c} h_1 I_3 \\ h_2 I_3 \end{array} \right],\ Q_B(s) = q_B(s) I_3,\ q_B(s) := \frac{e(s)}{d(s)} \tag{3.38}$$

で指定すれば，nからyまでの伝達関数もΣに関係なく非干渉化され，1入出力系の問題に帰着される．この1入出力系に**定理3.2.1**を適用し，マッチング可能なクラス$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$を求める．まず(3.32)式より$\alpha(s) = s$である．つぎに(3.29)式から容易にわかるように$\beta(s) = s^2$である．これと(3.33)式からマッチング可能な$\bar{g}_{yn}^{\infty}(s)$のクラス$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$はつぎのように特徴づけられる．

マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$

1. $n(s) + m(s)$がs^3を因子に持つ．
2. $\deg m(s) - \deg n(s) \ge 1$.

$G_{yn}(s)$の整形はこのクラス$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$の中で行うが，その整形目標として，すでにロバスト安定化を達成している$\mathcal{H}_{\infty}$制御系の$G_{yn}(s)$[TNF '98]を選ぶ．そしてそのゲイン特性を近似するように(3.37)式の$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$を指定する．その際つぎの点に注意した．

(a) 分子$n(s)$には$f(s) = s^2 + 2\zeta(2\pi \cdot 60) + (2\pi \cdot 60)^2$，$(0 < \zeta < 1)$の形の因子を含ませる．

(b) 分母$m(s)$には設計指針にしたがい，$\phi(s)$とオブザーバの特性多項式を含ませる．

(a)は60[Hz]でゲインが下がるノッチフィルタ特性を$\bar{g}_{yn}^{\infty}(s)$に持たせるためである．これにより，スピルオーバの原因となる64，74[Hz]付近のモデル化されていない振動モード，および60[Hz]のセンサノイズの影響が抑制できる．また，(b)は補償器の次数を小さくするためである．その結果，$\bar{g}_{yn}^{\infty}(s)$の各因子は

$$\bar{g}_{yn}^{\infty}(s) = \frac{f(s)\delta(s)}{\phi(s)h(s)d(s)} \tag{3.39}$$

となる．ただし$h(s)$は(3.4)式に示したオブザーバの特性多項式に関係し，次式で定義される．

$$h(s) := s^2 + h_1 s + h_2 \tag{3.40}$$

また$\delta(s)$はクラス$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$に入る条件1によって制約される2次の多項式因子であり，他の因子を決定すると一意に定まる．あとは，選定の自由度が残っている因子$f(s)$，$h(s)$，$d(s)$の調整で近似の度合いを上げる．このとき$d(s)$はクラス$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$に入る条件2を考慮して最小の1次因子にした．

パラメータの調整結果

1. フィルタの因子$f(s)$はノッチのピーク値をもとに$\zeta = 0.01$として次式で定めた．

$$f(s) = s^2 + 2 \cdot 0.01(2\pi \cdot 60) + (2\pi \cdot 60)^2 \tag{3.41}$$

2. $h(s)$と$d(s)$の調整は$G_{yn}(s)$に加え，観測ノイズから偏差までの伝達関数$G_{en}(s)$のゲイン特性，つまり制御性能も考慮した．$G_{en}(s)$は感度関数に相当し，

$$G_{yn}(s) + G_{en}(s) = -I \tag{3.42}$$

の関係があるため両方を独立に指定することはできない．そこで$\mathcal{H}_{\infty}$制御の感度関数に近いものを試行錯誤で探し，その結果以下のように決定した．

$$h(s) = s^2 + 250s + 250^2 \tag{3.43}$$

$$d(s) = s + 350 \tag{3.44}$$

その結果，残る因子$\delta(s)$は

$$\delta(s) = -(180.8s^2 + 4013s + 24040) \tag{3.45}$$

となり，$q_B(s)$は以下の1次の伝達関数となった．

$$q_B(s) = \frac{1.28 \times 10^5}{s + 350} + 181 \tag{3.46}$$

設計結果の検討

前節の設計の結果，感度，相補感度関数ともにFig.3.7に示すように従来のILQ制御と$\mathcal{H}_\infty$制御のいずれにも近いものが得られた．また，このときの補償器の特異値プロットをFig.3.8に示す．これも問題となる60[Hz]付近の周波数帯では$\mathcal{H}_\infty$制御のものと非常に近いものが得られた．本補償器は12次であり，$\mathcal{H}_\infty$補償器が33次であることから，約1/3に低次元化されたことになる．また同次元オブザーバを用いたILQ補償器の次数(9次)と比較しても，3次増やすだけでノッチフィルタ特性を持たせることができ，効率の良い設計ができているといえる．このノッチフィルタ特性はスピルオーバの抑制，つまりロバスト安定化に不可欠なものであり，従来の同次元オブザーバを用いた構成では設計の自由度が不足してこの特性が出せず，ロバスト安定化ができない．

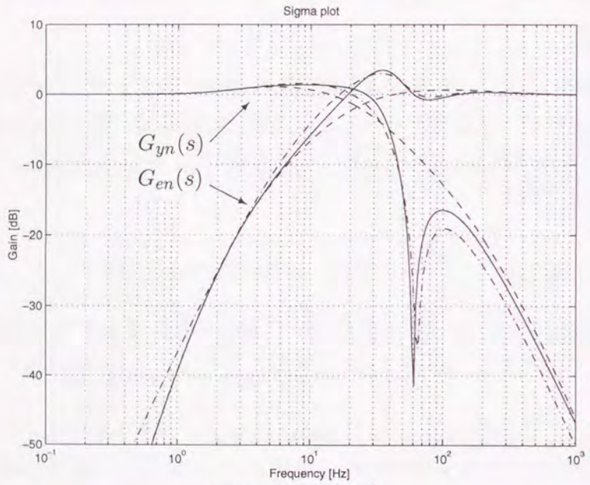


Fig. 3.7: σ-plot of $G_{yn}(s)$ and $G_{en}(s)$

3.4.3　実験結果

前節で設計した制御系に対して浮上実験を行った結果を示す．まず最初に，実験装置の限界である基準位置の下3[mm]から上3[mm]までの最大幅6[mm]のステップ入力を加えたときの出力応答波形を，従来のILQおよび$\mathcal{H}_\infty$制御系に対する結果とともにFig.3.9に示す．この図より，本設計法は従来法とほぼ同等の追従性能を達成してい

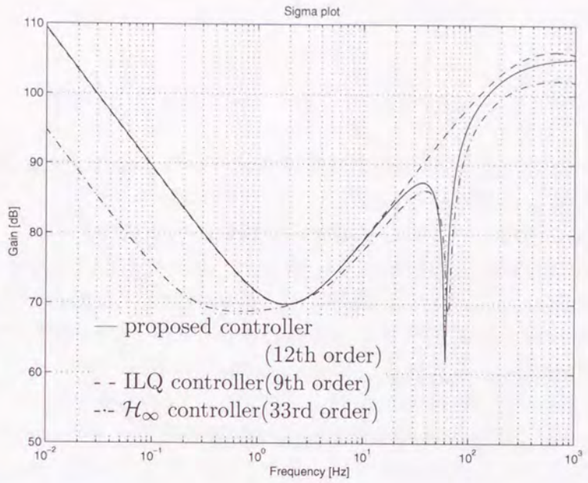


Fig. 3.8: σ-plot of controllers

ることが分かる．なお，シミュレーション結果は実験結果と酷似しているため省略する．また，そのときの制御入力をFig.3.10に示す．見やすさのため，従来のILQ制御系，$\mathcal{H}_\infty$制御系のものを0.5[V]づつ上にシフトし，入力も一つだけ示している．従来のILQ制御系と比較して$\mathcal{H}_\infty$制御系では入力の変動が小さいことがわかる．本制御系では$\mathcal{H}_\infty$制御系ほどではないが，変動が小さくなっていることがわかる．

つぎに安定浮上中の浮上体にインパルス外乱を加えた時の出力応答波形をFigs.3.11〜3.13に示す．図中の矢印の時刻にインパルス外乱を与えている．Fig.3.11は従来のILQ制御系，Fig.3.12およびFig.3.13はそれぞれ本制御系，$\mathcal{H}_\infty$制御系のものである．なお，インパスル外乱は浮上体を金具で直接叩くことにより与えた．これらの図より，ILQ制御系では外乱によって励起された振動が発散していたが，本制御系ではそれが$\mathcal{H}_\infty$制御系と同様に抑制されていることがわかる．

3.4.4　実験結果のまとめ

本制御系は目標値追従については従来のILQ制御系と，スピルオーバ抑制に関しては$\mathcal{H}_\infty$制御系と同等の性能を示す．つまり，本設計法はILQ制御と$\mathcal{H}_\infty$制御の両方の性質を併せ持つ合理的な補償器を設計していることが，実験結果から裏づけられたことになる．

しかし，パラメータの調整の際には，本設計法では考慮されていない感度関数に相当する$G_{en}(s)$も低感度になるように調整しなければならなかった．このことは，よく知られた「ロバスト安定性と制御性能のトレードオフ」を意味しており，本設計法に

残された課題のひとつを示唆していると考えられる．

3.5　まとめ

この章では，従来のILQ設計法では考慮されていなかったノイズ抑制特性や，ロバスト安定化を考慮した設計法の拡張を行った．その際，一般化オブザーバを導入してその設計自由度を活用し，従来の目標値応答特性の指定に加えてノイズ抑制特性も解析的に非干渉化指定が可能な設計法を考案した．本設計法では設計結果が解析的に得られるという従来のILQ設計法の特徴を引き継いでいる．このため実システムに適用する際に，設計仕様の変更やパラメータの調整などの再設計が容易であるため，現場で受け入れられやすいと思われる．

つぎに，本設計法を磁気浮上システムに適用し，振動抑制を目的とした設計を行った．その結果，$\mathcal{H}_\infty$ 制御器と同等の振動抑制性能を持ち，かつ従来のILQ設計法と同等の追従性能を持つ低次の制御器が設計できた．これは本設計法の有効性を示すものである．

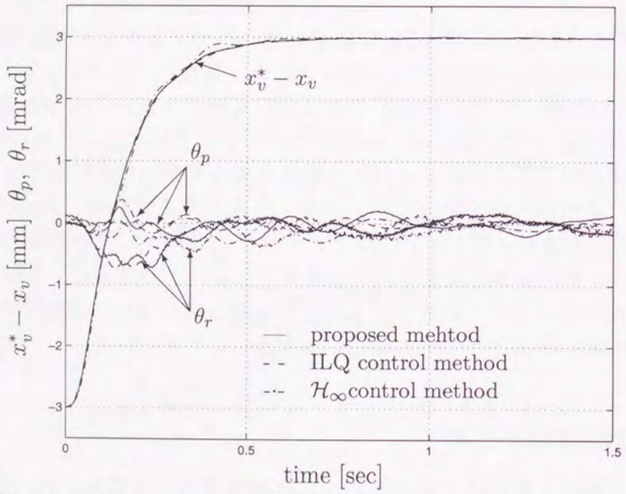


Fig. 3.9: Comparison of other control methods (output response)

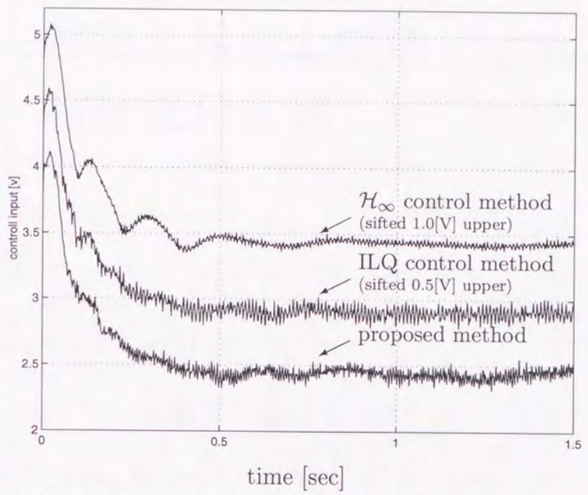


Fig. 3.10: Comparison of other control methods (control input)

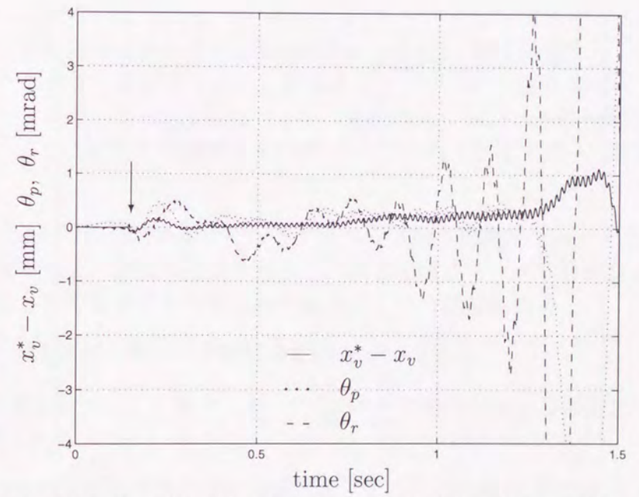


Fig. 3.11: Impulse disturbance responses by existing ILQ control

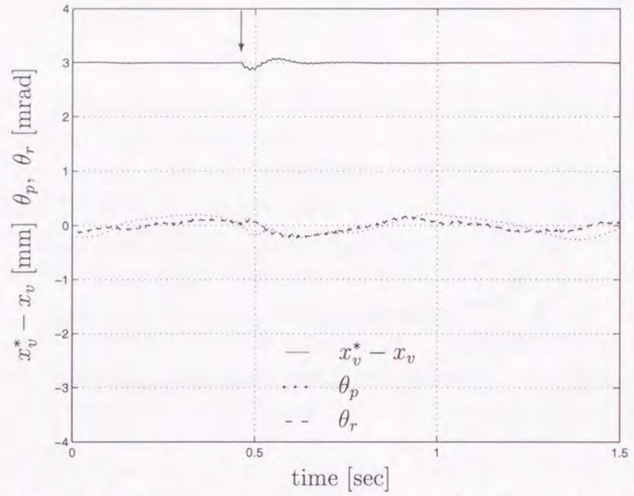


Fig. 3.12: Impulse disturbance responses by proposed method

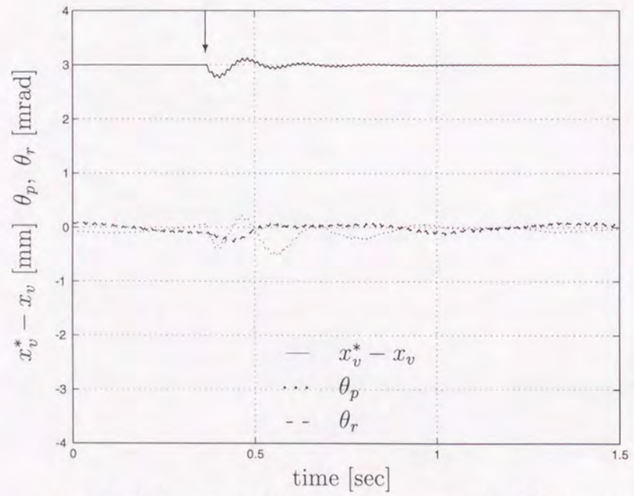


Fig. 3.13: Impulse disturbance responses by $\mathcal{H}_\infty$ control

第4章　制御系構成の変更による ILQ 設計法の拡張

4.1　はじめに

この章では2種類の制御系構成の変更による ILQ 設計法の拡張を行う．一つめは状態オブザーバの変更による拡張であり，二つめはフィードフォワード側の設計自由度を用いた拡張である．

4.2節では状態オブザーバの変更による拡張について述べる．この拡張の際には3章の ILQ 設計法の拡張の際に導入した，同次元オブザーバと自由パラメータ $Q_B(s)$ を持つ制御系の構成と同様の考え方で，オブザーバを最小次元オブザーバに変更したものを考える [NSNF '01]．そのためにまず 4.2.1 節で，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般構成を導出する．その際に同次元オブザーバと最小次元オブザーバの関係を明らかにする．これは「同次元オブザーバを状態の推定器と出力推定器に分解する」というアプローチを用いる．そしてその結果得られる安定化補償器の構成は Telford らが提案した構成 [TM '89] と同じものであることが示される．つぎに最小次元オブザーバを用いた ILQ サーボ系を構成し，その場合に同次元オブザーバの場合よりも利点があると考えられる「2段階設計法」を 4.2.2 節で提案する．これは，第1段階でノミナル性能を達成するように最小次元オブザーバの設計を行い，第2段階で自由パラメータを用いて $G_{yn}(s)$ にフィルタを付加し，ロバスト安定性を持たせる設計法である．この設計法の数値例を 4.2.3 節で示し，同次元オブザーバを用いた場合と比較を行う．

つぎに 4.3 節では，新たにフィードフォワード側の自由パラメータ $Q_F(s)$ を付加した制御構成を考え，理論の拡張を行う．この自由パラメータは目標値応答特性の改善に用いることができることが知られており，ここでは従来法の

1. 非干渉化された閉ループ応答の漸近指定が可能．
2. 設計結果がプラントのパラメータと閉ループ特性に関する設計仕様とから解析的に得られる．

という利点を継承した設計法の拡張を行う．そのために 4.3.2 節では $\Sigma \to \infty$ としたときの制御系の漸近構造を導出し，4.3.3 節で具体的な設計手順を示す．さらに 4.3.4 節では状態フィードバックで非干渉化できない場合について考える．これについては1型サーボ系のみについて設計手順を述べる．

4.2　最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を用いた場合

本節では 3.2.2 節で用いた同次元オブザーバと自由パラメータ $Q_B(s)$ からなる制御構成を変更して，最小次元オブザーバとそれに対応する自由パラメータの構成を導出し，それを ILQ 制御系に応用する．最小次元オブザーバは同次元オブザーバと比較して推定すべき状態の数が少ないため，3.2.3 節と同様の設計手順を考えた場合に，より低次の補償器が設計できる可能性がある．

4.2.1　最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の構成

本節では，Doyle によって示された同次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般構成 [Doyl '84] に対して，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般構成の導出を試みる．これについてはすでに [TM '89] で提案されているが，その構成は同次元オブザーバを使った場合に比べて複雑でわかりにくく，また同次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般形との関係が明らかにされていない．そこで，同次元オブザーバに基づく安定化補償器を単に等価変換することによって，[TM '89] で提案されている最小次元オブザーバに基づく安定化補償器が導出できることを示し，両者の関係を明らかにする．

制御対象とオブザーバ

制御対象として，可制御かつ可観測な線形時不変システム

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & A \in \mathcal{R}^{n\times n},\ B \in \mathcal{R}^{n\times m} \\ y = Cx, & C \in \mathcal{R}^{l\times n},\ \mathrm{rank}\ C = l \end{cases} \tag{4.1}$$
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

を考える．制御対象 (4.1) に対する同次元オブザーバを次式で与える．

$$\dot{\hat{x}}_f = (A - HC)\hat{x}_f + Bu + Hy,\ H \in \mathcal{R}^{n\times l} \tag{4.2a}$$
$$\hat{y}_f = C\hat{x}_f \tag{4.2b}$$
$$\text{ただし}\quad \mathrm{Re}\ \forall\lambda(A - HC) < 0$$

つぎに，最小次元オブザーバを次式で与える．

$$\dot{\omega} = \hat{A}\omega + \hat{B}u + Ly, \qquad \hat{A} \in \mathcal{R}^{(n-l)\times(n-l)},\ \hat{B} \in \mathcal{R}^{(n-l)\times m},\ L \in \mathcal{R}^{(n-l)\times l} \tag{4.3a}$$
$$\hat{x}_m = \hat{C}\omega + \hat{D}y, \qquad \hat{C} \in \mathcal{R}^{n\times(n-l)},\ \hat{D} \in \mathcal{R}^{n\times l} \tag{4.3b}$$

ただし，ω は Fx $(F \in \mathcal{R}^{(n-l)\times n})$ の推定値で $\mathrm{Re}\ \forall\lambda(\hat{A}) < 0$ を満たす．さらに次式の関係が成り立つ．

$$\hat{B} = FB \tag{4.4a}$$
$$FA = \hat{A}F + LC \tag{4.4b}$$
$$\hat{C}F + \hat{D}C = I \tag{4.4c}$$

上記の最小次元オブザーバの条件式は，通常よく用いられる (4.4) 式と等価な

$$\hat{A} = FA\hat{C},\ \hat{B} = FB,\ L = FA\hat{D} \tag{4.5a}$$
$$\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{4.5b}$$

を用いることもできる [Reil '83]．

同次元オブザーバと最小次元オブザーバの関係

同次元オブザーバの状態方程式 (4.2a) は状態変数変換により，最小次元オブザーバの状態方程式 (4.3a) 式とそれ以外の部分に分解できることを示す．まず，(4.2a) 式の同次元オブザーバの H に対して

$$F(A - HC) = \hat{A}F \tag{4.6}$$

および (4.5b) 式を満たす $\hat{A}$, F, $\hat{D}$, $\hat{C}$ を求める．たとえば，$A - HC$ の n 本の左固有ベクトルから適当に $(n - l)$ 本を選んで F を構成し，(4.5b)，(4.6) 式が成り立つようにできる．(逆に，$\hat{A}$ が与えられたときに (4.5b)，(4.6) 式をみたす F, H, $\hat{D}$, $\hat{C}$ が存在することはよく知られている [IIK '88].) (4.6) 式より明らかに $\hat{A}$ は安定行列 $A - HC$ の固有値の一部を共有するから安定である．またこの式に右から $\hat{C}$ をかけて (4.5b) 式を用いると

$$\hat{A} = FA\hat{C} \tag{4.7}$$

を得る．ゆえに，$\hat{B}$ と L を (4.5a) 式のように定義すれば (4.5) 式が成立し，これら $\hat{A}$, $\hat{B}$, L, $\hat{C}$, $\hat{D}$ を係数行列に持つ (4.3) 式は制御対象 (4.1) に対する最小次元オブザーバであることがわかる．また (4.5b)，(4.6) 式より

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}(A - HC)\begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{C} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C(A - HC)\hat{D} & C(A - HC)\hat{C} \\ F(A - HC)\hat{D} & F(A - HC)\hat{C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(A - HC)\hat{D} & CA\hat{C} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.8}$$

が成り立つことに注意すれば，$A-HC$ の安定性より

$$\Lambda := C(A-HC)\hat{D} \tag{4.9}$$

は安定であることがわかる．

以上の準備のもとに，(4.2a) 式の同次元オブザーバは状態変数変換により上で求めた最小次元オブザーバとそれ以外の部分に分解できることを示す．まず，(4.2a) 式の同次元オブザーバに

$$z = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \hat{x}_f = \begin{bmatrix} \hat{y}_f \\ F\hat{x}_f \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\left(\hat{x}_f = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}^{-1} z = \hat{C}F\hat{x}_f + \hat{D}\hat{y}_f \right) \tag{4.11}$$

という状態変数変換を行うと，(4.8)，(4.9) 式から

$$\dot{\hat{y}}_f = \Lambda\hat{y}_f + CA\hat{C}F\hat{x}_f + CBu + CHy \tag{4.12a}$$

$$F\dot{\hat{x}}_f = \hat{A}F\hat{x}_f + FBu + FHy \tag{4.12b}$$

が成り立つ．ここで，(4.5b)，(4.6) 式から $FH = FA\hat{D}$，(4.9) 式から $CH = CA\hat{D} - \Lambda$ が導けるのでこれらを (4.12) 式に代入し，(4.5a) 式を用いて整理するとそれぞれ

$$\dot{\hat{y}}_f = C\{A(\hat{C}F\hat{x}_f + \hat{D}y) + Bu\} - \Lambda(y - \hat{y}_f) \tag{4.13}$$

$$F\dot{\hat{x}}_f = \hat{A}F\hat{x}_f + \hat{B}u + Ly \tag{4.14}$$

となる．したがって (4.14) 式で

$$F\hat{x}_f = \omega \tag{4.15}$$

とおけば，先に述べた最小次元オブザーバの状態方程式を得る．つぎに，(4.13) 式について考える．(4.3b)，(4.15) 式より (4.13) 式を書き直すと

$$\dot{\hat{y}}_f = C(A\hat{x}_m + Bu) - \Lambda(y - \hat{y}_f) \tag{4.16}$$

となる．これは文献 [TM '89] で導入されている出力推定値に関する微分方程式と同じである．以下では，便宜上分解後の $\hat{y}_f$ を y_e と表し，(4.16) 式の果たす役割を考える．(4.1)，(4.3b)，(4.16) 式を用いて $\dot{y} - \dot{y}_e$ を計算すると，

$$\dot{y} - \dot{y}_e = CA\hat{C}(Fx - \omega) + \Lambda(y - y_e) \tag{4.17}$$

となる．(4.17) 式をラプラス変換して整理し，最小次元オブザーバ (4.3a) に関する周知の関係式

$$Fx - \omega = (sI - \hat{A})^{-1}(Fx(0) - \omega(0)) \tag{4.18}$$

を用いると，

$$y - y_e = (sI - \Lambda)^{-1}CA\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}(Fx(0) - \omega(0)) \tag{4.19}$$

となり，$\hat{A}$，Λ の安定性より $x(0)$，$\omega(0)$ の値によらず

$$\lim_{t\to\infty}(y - y_e) = 0 \tag{4.20}$$

となる．したがって (4.16) 式は出力の推定器である．

以上の議論により，つぎの定理が成り立つ．

《 定理 4.2.1 》

同次元オブザーバ (4.2a) は，出力推定器 (4.17) と出力以外の状態量を推定する最小次元オブザーバ (4.3a) に分解できる．さらに，これら三つの推定機構の極ならびに推定値の間には次の関係が成立する．

$$\lambda_s(A - HC) = \lambda_s(\hat{A}) \cup \lambda_s(\Lambda) \tag{4.21}$$

$$\hat{x}_f = \hat{x}_m - \hat{D}(y - \hat{y}_f) \tag{4.22}$$

(証明)　前半はすでに示した．後半の (4.21) 式は (4.8)，(4.9) 式より自明であり，(4.22) 式は (4.3b)，(4.11)，(4.15) 式より容易に導かれる．□

つまり，同次元オブザーバの極は最小次元オブザーバの極と出力推定器の極から成る．また，同次元オブザーバによる状態推定値 $\hat{x}_f$ は，最小次元オブザーバによる状態推定値 $\hat{x}_m$ と出力推定値 $\hat{y}_f$ を用いて (4.22) 式のように関係づけられる．

(注意 4.2.1)

F の選び方によって，最小次元オブザーバと出力推定器の極（つまり Λ と $\hat{A}$ の固有値）の組合せを変えることができる．

(注意 4.2.2)

1 出力 2 次の制御対象と複素極を持つ 2 次元オブザーバの場合を考えればわかるように，一般に奇数個の出力を持つ偶数次元の制御対象と，複素極のみを持つ同次元オブザーバの組合せに対しては，(4.6) 式を満たす行列 F として実数行列を選ぶことができない．この特別な場合を除くすべての組合せに対しては，$\hat{A}$ を実数行列の範囲で適切に選ぶことにより常に F を実数行列に選ぶことができる．

二つのオブザーバに基づく安定化補償器の構成とその関係

同次元オブザーバに基づく安定化補償器 [Doyl '84] と最小次元オブザーバに基づく安定化補償器 [TM '89] は，それぞれ自由度 $Q_f(s)$，$Q_m(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ を用いて Figs.4.1,

4.2 のように表される．これらの図より制御対象への入力はそれぞれ

$$u = -K\hat{x}_f + Q_f(s)(y - \hat{y}_f) \tag{4.23}$$
$$u = -K\hat{x}_m + Q_m(s)(y - y_e) \tag{4.24}$$

である．(4.24) 式に (4.22) 式を代入すると

$$u = -K\hat{x}_f + (Q_m(s) - K\hat{D})(y - \hat{y}_f) \tag{4.25}$$

となるので，(4.23) 式と (4.25) 式を比較すると $Q_f(s)$ と $Q_m(s)$ の間には

$$Q_f(s) = Q_m(s) - K\hat{D} \tag{4.26}$$

という関係がある．つまり Fig.4.1 と Fig.4.2 の破線で囲まれた部分は等価である．

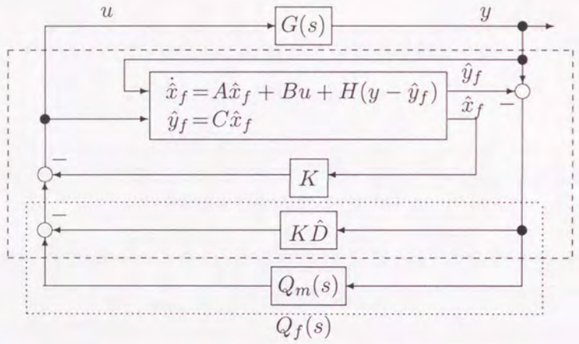


Fig. 4.1: Stabilizing controller based on full-order observer

(注意 **4.2.3**)

注意 4.2.2 で述べた特別な場合は，Fig.4.2 の構成では二つの推定器はともに複素係数になる．しかしこの場合も，Fig.4.2 の $Q_m(s)$ の次数を増やすなどすれば実係数の範囲内で Fig.4.1 の構成と等価になる．つまり，安定化補償器として等価になるが，それを構成するオブザーバの間にはもはや**定理 4.2.1** の関係は成立せず，(4.26) 式も成立しない．

自由度の解釈

Fig.4.2 では Λ を用いて出力推定器を構成し，出力推定誤差 $y - y_e$ を自由度 $Q_m(s)$ への入力としている．しかし，Λ を自由度の一部とみなし，$Q_m(s)$ と Λ を合わせた部

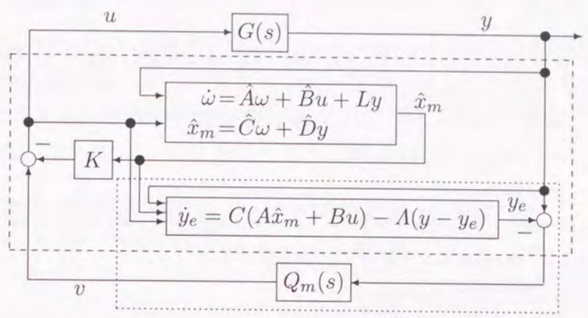


Fig. 4.2: Stabilizing controller based on minimal-order observer

分（Fig.4.2 の点線で囲まれた部分）を自由度と考えることもできる．その場合の自由度について解釈する．(4.16) 式を (4.1)，(4.3b)，(4.4c) 式を用いて変形すると

$$y_e = -(sI - \Lambda)^{-1}CA\hat{C}(Fx - \omega) + y \tag{4.27}$$

となり，自由度 $Q_m(s)$ の出力 v はつぎのように表せる．

$$v = Q_m(s)(y - y_e) = \{Q_m(s)(sI - \Lambda)^{-1}\} \cdot CA\hat{C}(Fx - \omega) \tag{4.28}$$

ここで新しく自由度を

$$\tilde{Q}(s) := Q_m(s)(sI - \Lambda)^{-1} \tag{4.29}$$

と定義すると，$\tilde{Q}(s)$ は安定かつ**厳密にプロパ**となる．(4.29) 式から最小次元オブザーバの推定誤差 $Fx - \omega$ に基づく入力 $CA\hat{C}(Fx - \omega)$ が，自由度 $\tilde{Q}(s)$ に加えられていると考えることができる（Fig.4.3）．これは同次元オブザーバに基づく安定化補償器に対応した結果と解釈できる．また，このような自由度 $\tilde{Q}(s)$ を考えれば設計時に $(sI - \Lambda)^{-1}$ と $Q_m(s)$ を別々に決定する必要がなく便利であり，次節以降の設計法でもこの $\tilde{Q}(s)$ を自由度として設計法を考案している．しかし，実際には Fx は測定できず，直接入力として使うことができないので Fig.4.3 は実装することができない．そこでつぎにそれを $\tilde{Q}(s)$ のパラメータを用いて実装する方法を考える．

$\tilde{Q}(s)$ の実装方法

(4.29) 式から $\tilde{Q}(s)$ は厳密にプロパであるから，その実現を $(\tilde{A}_q,\ \tilde{B}_q,\ \tilde{C}_q,\ 0)$ とおくと，(4.28)，(4.29) 式から

$$\dot{\tilde{x}}_q = \tilde{A}_q\tilde{x}_q + \tilde{B}_qCA\hat{C}(Fx - \omega) \tag{4.30a}$$
$$v = \tilde{C}\tilde{x}_q \tag{4.30b}$$

が成り立つ．また，(4.1)，(4.4c) 式から

$$C\dot{x} = CA(\hat{C}F + \hat{D}C)x + CBu \quad \Leftrightarrow \quad CA\hat{C}Fx = \dot{y} - CA\hat{D}y + CBu \tag{4.31}$$

であるので，これを (4.30a) 式に代入して状態を $\tilde{x}_{\bar{q}} := \tilde{x}_q - \tilde{B}_q y$ に取り直すと，(4.30) 式は

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}_{\bar{q}} &= \tilde{A}_q\tilde{x}_{\bar{q}} - \tilde{B}_qCA\hat{C}\omega + (\tilde{A}_q\tilde{B}_q - \tilde{B}_qCA\hat{D})y - \tilde{B}_qCBu \\
&=: \tilde{A}_{\bar{q}}\tilde{x}_{\bar{q}} + \tilde{B}_{\bar{q}\omega}\omega + \tilde{B}_{\bar{q}y}y + \tilde{B}_{\bar{q}u}u \qquad (4.32a) \\
v &= \tilde{C}\tilde{x}_{\bar{q}} + \tilde{C}_q\tilde{B}_q y \\
&=: \tilde{C}_{\bar{q}}\tilde{x}_{\bar{q}} + \tilde{D}_{\bar{q}y}y \qquad (4.32b)
\end{aligned}$$

と書き直せる．(4.32) 式は入力に ω，y および u を用いているので実装可能であり，Fig.4.4 の構成で表される．なお，$\tilde{Q}(s)$ を求めた後，それを $Q_m(s)$ と $(sI-\Lambda)^{-1}$ に分解して Fig.4.2 のように実装してもよい．

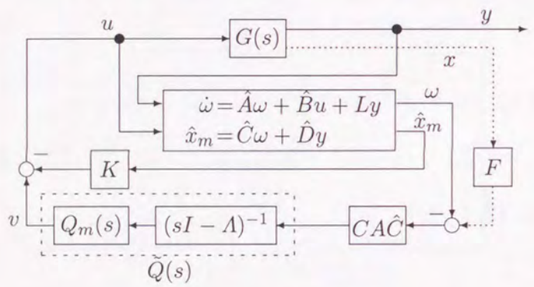


Fig. 4.3: Stabilizing controller based on minimal-order observer

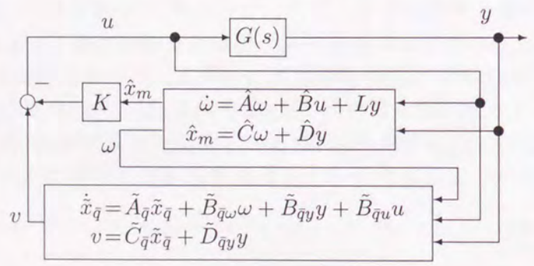


Fig. 4.4: Stabilizing controller based on minimal-order observer (realizable form)

4.2.2　ILQ 設計法への適用

本節では 3.2.3 節と同様の方法で，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を用いた ILQ サーボ系の設計法について考える．前半では 3.2.3 節と同様の設計法について述べ，後半ではノイズ抑制特性の段階的な整形について述べる．なお，制御対象の仮定は 3.2.1 節と同じである．このときサーボ系の構成は Fig.4.5 のように表される．

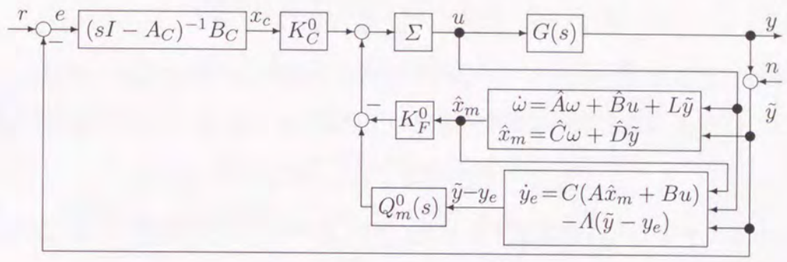


Fig. 4.5: ILQ servo system with minimal-order observer and free parameter

目標値応答特性の指定

目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ はオブザーバと自由パラメータには依存しないので 3.2.3 節と同様であり，省略する．

ノイズ抑制特性の指定

$G_{yn}(s)$ の整形も 3.2.3 節と同様に，$\Sigma \to \infty$ としたときの漸近伝達関数 $G_{yn}^{\infty}(s) := \lim_{\Sigma\to\infty} G_{yn}(s)$ を指定することによって行う．よって以下では 3.2.3 節の議論と同様に進める．まず，極限 $G_{yn}^{\infty}(s)$ を計算する．Fig.4.5 より $G_{yr}(s)$ と $G_{yn}(s)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
G_{yr}(s) &= C\big(sI - A + B\Sigma K_F^0 + B\Sigma K_C^0 G_C(s)C\big)^{-1}B\Sigma K_C^0 G_C(s) \qquad (4.33) \\
G_{yn}(s) &= -G_{yr}(s)\big[\big(K_C^0 G_C(s)\big)^{-1}\big\{K_F^0\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L + \hat{D}\big) \\
&\quad + \tilde{Q}^0(s)\big\{CA\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L + \hat{D}\big) - sI\big\}\big\} + I\big] \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\tilde{Q}^0(s) := Q_m^0(s)(sI-\Lambda)^{-1}$ である．(4.34) 式の $G_{yn}(s)$ において，Σ に関係するのは $G_{yr}(s)$ の部分だけであるので，$G_{yn}^{\infty}(s)$ は，(4.34) 式右辺の $G_{yr}(s)$ を $G_{yr}^{\infty}(s)$ に置き換えたものである．つまり

$$\begin{aligned}
G_{yn}^{\infty}(s) &= -G_{yr}^{\infty}(s)\big[\big(K_C^0 G_C(s)\big)^{-1}\big\{K_F^0\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L + \hat{D}\big) \\
&\quad + \tilde{Q}^0(s)\big\{CA\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L + \hat{D}\big) - sI\big\}\big\} + I\big] \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

となる．今，(4.35) 式をもとに同次元オブザーバを用いた場合の (3.9) 式と対応した，つぎの有理関数行列を定義する．

$$\begin{aligned} T_1(s) &:= \bar{G}_{yn}^{\infty}(s) + G_{yr}^{\infty}(s) + \mathop{\mathrm{diag}}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} \\ &\quad \times DK_F^0\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L+\hat{D}\big) \qquad (4.36a) \\ T_2(s) &:= \mathop{\mathrm{diag}}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} D \qquad (4.36b) \\ T_3(s) &:= CA\big(\hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}L+\hat{D}\big) - sI \qquad (4.36c) \end{aligned}$$

ここで $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ は設計者が指定する希望の伝達関数とすると，以下の恒等式が成り立つ．

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) - G_{yn}^{\infty}(s) \equiv T_1(s) - T_2(s)\tilde{Q}^0(s)T_3(s) \qquad (4.37)$$

上式を零にする $\tilde{Q}^0(s)$ が存在するとき $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ はマッチング可能と呼び，$\tilde{Q}^0(s)$ は次式で定まる．

$$\tilde{Q}^0(s) = T_2(s)^{-1}T_1(s)T_3(s)^{-1} \qquad (4.38)$$

3.2.3 節と同様に $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) := \mathop{\mathrm{diag}}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \in \mathrm{RH}_{\infty} \qquad (4.39)$$

のように対角行列の形で指定する．このとき，**定理 3.2.1** と同様のつぎの定理が得られる．

《 **定理 4.2.2** 》

マッチング可能な $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ は**定理 3.2.1** と等しい．

(証明)　前節で最小次元オブザーバに基づく安定化補償器は同次元オブザーバに基づく安定化補償器に等価変換できることを示した．したがって，マッチング可能なクラスは同次元オブザーバを用いた場合と等しい．　□

2 段階設計法

以下では制御対象が 1 入出力系の場合について，オブザーバのみで（$\tilde{Q}^0(s)=0$ で）ノミナル性能を達成した後，$\tilde{Q}^0(s)$ を利用してロバスト安定化する，というノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ の段階的な整形法を提案する．

まず第 1 段階では $\tilde{Q}^0(s)=0$ でノミナル性能を達成する．このときの $G_{yn}^{\infty}(s)$ を $G_{yn}^{\infty 0}(s)$ とする．つぎに第 2 段階で $\tilde{Q}^0(s)$ を付加し，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を

$$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^{\infty 0}(s) \times f(s) =: \frac{N(s)}{M(s)} \qquad (4.40)$$

という形で指定する．$f(s)$ は観測ノイズや制御対象の不確かさが存在する周波数領域でゲインを下げるようなフィルタに選ぶとよいが，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ には**定理 4.2.2** の制約があるため $f(s)$ にも制約がかかる．しかし，$G_{yn}^{\infty 0}(s) \in \mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ であるので，つぎのようにしてこれを $f(s)$ の制約に書き換えることができる．

$G_{yn}^{\infty 0}(s)$ と $f(s)$ を

$$G_{yn}^{\infty 0}(s) = \frac{N^0(s)}{M^0(s)},\ f(s) = \frac{N_f(s)}{M_f(s)} \qquad (4.41)$$

とおく．$G_{yn}^{\infty 0}(s)$ は**定理 4.2.2** の制約をみたすため，その（条件 2）から適当な多項式 $k(s)$ を用いて

$$N^0(s) + M^0(s) = \alpha(s)\beta(s)k(s) \qquad (4.42)$$

と表すことができる．また**定理 4.2.2** の（条件 3）より

$$\deg M^0(s) - \deg N^0(s) \ge d_1 - 1 \qquad (4.43)$$

である．ここで，$N(s)+M(s)$ を計算すると

$$\begin{aligned} N(s)+M(s) &= N^0(s)N_f(s) + M^0(s)M_f(s) \\ &= \big(N^0(s)+M^0(s)\big)N_f(s) + M^0(s)\big(M_f(s)-N_f(s)\big) \\ &= \alpha(s)\beta(s)k(s)N_f(s) + M^0(s)\big(M_f(s)-N_f(s)\big) \qquad (4.44) \end{aligned}$$

となるので，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ が（条件 2）を満たすためには $M_f(s)-N_f(s)$ が $\alpha(s)\beta(s)$ を因子に持つことが必要十分である．また，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ が**定理 4.2.2** の（条件 3）をみたす，つまり

$$\deg M(s) - \deg N(s) \ge d_1 - 1 \qquad (4.45)$$

となるためには (4.43) 式から $f(s)$ がプロパであることが必要十分である．なお，(条件 1）については $N^0(s)$ が $z_1^+(s)$ を因子に持つことから $f(s)$ に関係なく常に満たされる．以上をまとめるとつぎの定理を得る．

《 **定理 4.2.3** 》

観測ノイズ抑制特性を $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^{\infty 0}(s) \times f(s)$ と指定するとき，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) \in \mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ となるための必要十分条件は，$f(s)$ が制約条件

1. $M_f(s)-N_f(s)$ が $\alpha(s)\beta(s)$ を因子に持つ．
2. プロパである．

を満たすことである．

この結果に基づいて，$f(s)$ は**定理 4.2.3** の制約をみたし，かつ希望のフィルタ特性を持つように選べばよい．

(注意 **4.2.4**)

同次元オブザーバを用いた場合も段階的に周波数整形をすることができる．しかし，最小次元オブザーバを用いたほうがノミナル性能をより低次で達成することもあり，そのときにはフィルタ $f(s)$ の選び方（例えば $f(s)$ が両者で等しい場合など）によっては補償器が低次になる．

以上より設計手順をまとめると，つぎのようになる．

【ILQ サーボ系の設計手順】

手順1　**目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ の整形（ ILQ 設計法）**

$G_{yr}^{\infty}(s)$ を指定して K_F^0，K_C^0 を求め，Σ を調整する．

手順2　**観測ノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ の整形**

$\mathcal{G}_{yn}^{\infty}$ の中から $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を指定し，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の極の一部がオブザーバ極となるように最小次元オブザーバを設計してから，(4.38) 式より $\tilde{Q}^0(s)$ を求める．

特に1入出力系の場合には，手順2はつぎのように段階的に整形することができる．

手順2-1　**ノミナル性能の達成**

ノミナル性能を達成するように適当に最小次元オブザーバを設計する．

手順2-2　**ロバスト安定化**

まずロバスト安定性を満たし，かつ**定理 4.2.3** の制約をみたすように $f(s)$ を選ぶ．つぎに，$\bar{G}_{yn}^{\infty}(s) = G_{yn}^{\infty 0}(s) \times f(s)$ と指定し，(4.38) 式で $\tilde{Q}^0(s)$ を計算する．

4.2.3　数値例

本節では前節で提案した設計法のうち，2段階設計法の数値例を示す．制御対象は3.4節の数値例と同様の磁気浮上系を用いる．このシステムはモデルが非干渉化されているため1入出力系の設計問題に帰着でき，したがって2段階設計法が適用できる．目標値応答特性の指定についてはは3.4節と同様の手順で行うが，ノイズ抑制特性の指定については段階的な設計を行う．前節で述べたように，第1段階ではオブザーバのみを用いてノッチフィルタ特性を持たないノミナル特性を指定し，第2段階で自由パラメータを付加してロバスト安定になるようにフィルタを設計する．また，同次元オブザーバを用いた場合についても段階的な設計を行い，両者の比較を行う．なお，3.4節で述べたように，磁気浮上系のモデルは (3.29) 式で表され，設計はすべての入出力について同じ特性を指定するため，設計結果は一つの入出力のみについて示す．したがって，つぎのシステムに対する設計結果を示す．

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{4.46}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ G(s) = \frac{1}{s^2}$$

手順1　**目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ の整形**

3.4節と同様である．つまり

$$G_{yr}^{\infty}(s) = \frac{\phi(0)}{\phi(s)},\ \ \phi(s) = (s + \frac{1}{T})^2,\ \ T = 0.08 \tag{4.47}$$

と指定し，K_C^0, K_F^0 は以下のように求まる．

$$K_C^0 = \frac{1}{T^2},\ \ K_F^0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{T} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

となる．また，最適性を保証する Σ の下限値 $\Sigma_{\min}$ は $\Sigma_{\min} = 51$ となり，Σ は $\Sigma = \Sigma_{\min} \times 14$ とした．

観測ノイズ抑制特性の整形（最小次元オブザーバを用いた場合）

手順2-1　**ノミナル性能**

最小次元オブザーバはゴピナスの方法を用いると

$$\hat{A} = -l_1,\ \ \hat{B} = 1,\ \ L = -l_1^2,\ \ \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_1 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

となる．このときオブザーバの特性多項式 $l(s)$ は

$$l(s) = s + l_1 \tag{4.50}$$

となる．最小次元オブザーバのみでノミナル安定性を達成するように，オブザーバ極は -130 に選んだ（つまり $l_1 = 130$）．そのとき $G_{yn}^{\infty 0}(s)$ は

$$G_{yn}^{\infty 0}(s) \ = \ \frac{-(1.5500\times10^2)s^2 - (3.4062\times10^3)s - 2.0312\times10^4}{(s+12.5)^2(s+130)} \tag{4.51}$$

となる．$G_{yn}^{0}(s)$ のゲイン特性を Fig.4.6（破線）に，観測ノイズ n から偏差 e までの伝達関数（感度関数）$G_{en}^{0}(s)$ のゲイン特性を Fig.4.7（破線）に示す．なお，これらの設計パラメータの値は文献 [SNTF '95] で示されているものとほぼ等しい．このとき浮上実験を行うと浮上はするが，インパルス外乱が加わるとスピルオーバが発生する．

手順2-2　**ロバスト安定性**

つぎに，自由度 $\tilde{Q}^0(s)$ を付加してロバスト安定化する．$f(s)$ の制約は **定理 4.2.3** より

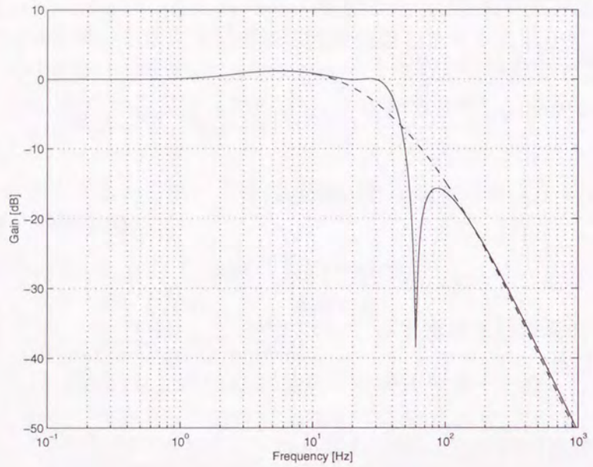


Fig. 4.6: $G_{yn}(s)$

$f(s)$ の制約

1. $M_f(s)-N_f(s)$ が s^3 を因子に持つ．$\Leftrightarrow M_f(s)$ と $N_f(s)$ の2次以下の係数が互いに一致する．
2. プロパである．

となる．$f(s)$ は上の制約を満たすように，つぎのように選んだ．

$$f(s) = \frac{n(s)\delta(s)}{d(s)} \tag{4.52}$$

$$n(s) = s^2 + 2\times0.01\times2\pi\times60s + (2\pi\times60)^2 \tag{4.53}$$

$$\delta(s) = 1.0804s^2 + (1.9853\times10^2)s + 2.7047\times10^4 \tag{4.54}$$

$$d(s) = (s^2+200s+200^2)(s^2+230s+310^2) \tag{4.55}$$

ここで，$n(s)$ はモデル化誤差の存在する 60Hz 付近のゲインを下げるために，また2次の多項式 $\delta(s)$ は制約2を満たすために導入したもので，$d(s)$ を決めると一意に求まる．よって $\bar{G}^{\infty}_{yn}(s)$ を

$$\bar{G}^{\infty}_{yn}(s) = G^{\infty 0}_{yn}(s) \times \frac{n(s)\delta(s)}{d(s)} \tag{4.56}$$

と指定する．$G_{yn}(s)$ のゲイン特性を Fig.4.6（実線）に，$G_{en}(s)$ のゲイン特性を 4.7（実線）に示す．また，$\tilde{Q}^0(s)$ はつぎのように求まった．

$$\tilde{Q}^0(s) = \frac{-(1.2470\times10)s^3 + (3.4341\times10^4)s^2 + (7.5905\times10^5)s + 4.5362\times10^6}{(s^2+200s+200^2)(s^2+230s+310^2)} \tag{4.57}$$

このとき，補償器の次数は 18 次（1 入出力につき 6 次）である．

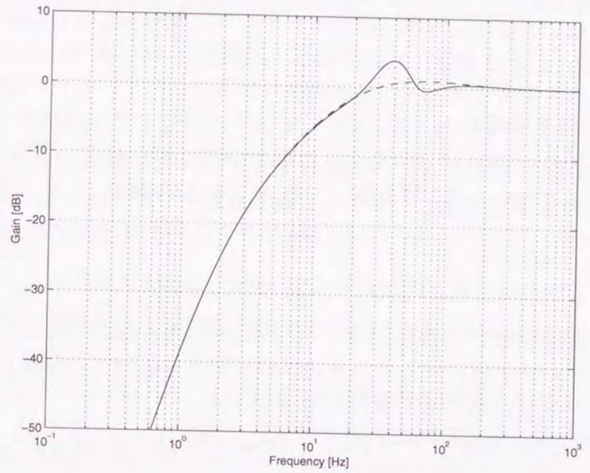


Fig. 4.7: $G_{en}(s)$

観測ノイズ抑制特性の整形（同次元オブザーバを用いた場合）

同次元オブザーバを用いて前節と同様に段階的な整形を行う．マッチング可能なクラス $\mathcal{G}^{\infty}_{yn}$ は最小次元オブザーバを用いた場合と同じである．

手順 2-1　ノミナル性能

オブザーバゲイン H を

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

とすると，オブザーバの特性多項式 $h(s)$ は

$$h(s) = s^2 + h_1 s + h_2 \tag{4.59}$$

となる．同次元オブザーバのみでノミナル安定性を達成するように，オブザーバ極は -130，-10000 とした（つまり $h_1 = 10130$，$h_2 = 1.3\times10^6$）．そのときの $G^{\infty 0}_{yn}(s)$ は

$$G^{\infty 0}_{yn}(s) = \frac{-(1.5534\times10^6)s^2 - (3.4083\times10^7)s - 2.0312\times10^8}{(s+12.5)^2(s+130)(s+10000)} \tag{4.60}$$

である．低周波域における $G^0_{yn}(s)$ のゲイン特性と $G^0_{en}(s)$ のゲイン特性は，最小次元オブザーバだけを用いてノミナル安定性を達成した場合の特性（Figs.4.6，4.7 の破線）とほぼ同じである．

手順 2-2　ロバスト安定性

マッチング可能なクラス $\mathcal{G}^\infty_{yn}$ が最小次元オブザーバを用いた場合と一致するため，$f(s)$ の制約条件も同じである．よって，最小次元オブザーバの場合と同じ $f(s)$ を用いて，$\bar{G}^\infty_{yn}(s)$ を

$$\bar{G}^\infty_{yn}(s) = G^{\infty 0}_{yn}(s) \times f(s) \tag{4.61}$$

と指定する．低周波域では $G_{yn}(s)$ のゲイン特性と $G_{en}(s)$ のゲイン特性は，最小次元オブザーバでロバスト安定化したときの特性（Figs.4.6，4.7 の実線）とほぼ同じである．その結果，$Q_f(s)$ はつぎのようになった．

$$Q_f(s) = \frac{-(1.2497\times10^5)s^3 + (3.4416\times10^8)s^2 + (7.5950\times10^9)s + 4.5362\times10^{10}}{(s^2+200s+200^2)(s^2+230s+310^2)} \tag{4.62}$$

このときの補償器の次数は 21 次（1 入出力につき 7 次）であり，最小次元オブザーバを用いた場合と比べてオブザーバの次数が大きい分（3 次）だけ補償器も高次になっている．

なお，段階的な整形を行わず，同次元オブザーバと自由度を同時に設計すると，3.4 節で示したように 12 次の補償器が得られる．最小次元オブザーバを用いて同時に設計した場合も両者が等価であることから補償器の次数は同じになる．しかし，その場合はオブザーバでノミナル性能を達成し，自由度でロバスト安定化するという意味は失われる．段階的な整形法は補償器が高次になりやすいが，それぞれのパラメータの役割が明確であるので直感的に理解しやすい整形法である．

4.2.4　まとめ

4.2.1 節では，まず同次元オブザーバを状態変換によって最小次元オブザーバと出力推定器に分解した．つぎにその結果を用いて同次元オブザーバに基づく安定化補償器を状態変数変換すれば，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を導出できることを示した．そして最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を周波数整形 ILQ サーボ系に応用し，マッチング可能な $\bar{G}^\infty_{yn}(s)$ のクラスが同次元オブザーバを用いた場合のクラスと一致することを示すとともに，1 入出力系に対して段階的な $\bar{G}^\infty_{yn}(s)$ の整形法を提案した．つぎにこの段階的な設計法を磁気浮上システムに適用した数値例を示し，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の方が同次元オブザーバに基づく安定化補償器の場合よりも，ノミナル性能を低次で達成する分だけ低次の補償器が設計できることを示した．今後の課題は，この段階的な整形法を多入出力系に拡張することである．

4.3　フィードフォワード側の自由パラメータを用いた場合

本節では，Fig.2.9 の 2 自由度ロバストサーボ系の構成において，フィードフォワード側の自由パラメータ $Q_F(s)$ を活用し，ILQ 設計法の拡張を行う．2.2 節で述べた従来の ILQ 設計法はフィードバックゲインのみを用いて，あるクラスの非干渉化された目標値応答特性が指定できる設計法である．一方，自由パラメータ $Q_F(s)$ は目標値応答特性の改善に活用できることが知られており，それを ILQ 法に活用することでさらなる目標値応答の改善が期待できる．本節の主要結果は以下のとおりである．

A.1 指定可能な目標値応答特性のクラスが広がる．

A.2 状態フィードバックで非干渉化不可能なプラントも非干渉化できる．

なお，A.2 については実用上重要な 1 型サーボ系の場合についてのみ，設計理論を拡張した．

A.1 の目標値応答特性の指定は ILQ 設計法の持つ解析表現を利用しており，設計結果が「プラントのパラメータと閉ループ特性に関する設計仕様とから解析的に得られる」という従来の特徴を引き継いでいる．また，A.2 の場合についてもある程度，設計結果が解析的に表現できる．

つぎに A.2 については，従来の ILQ 法では非干渉化が不可能なプラントに対し，一部の入出力のみを非干渉化する部分非干渉化設計法であったが，ここでは自由パラメータを活用することで完全な非干渉化を達成する．

4.3.1　制御系の構成

制御対象および参照入力に関する仮定は，2.2 節で述べた従来の ILQ 法の設計可能条件と同様である．ここではフィードフォワード側の自由パラメータを考えるため，

$$\begin{cases} \dot{x}_q &= A_Q x_q + B_Q r \\ y_q &= C_Q x_q + D_Q r \end{cases} \tag{4.63}$$
$$Q_F(s) := C_Q(sI - A_Q)^{-1}B_Q + D_Q \in \mathrm{RH}_\infty$$

をフィードフォワード側に加えた Fig.4.8 のロバストサーボ系を考え，2.2 節で述べた従来の ILQ 法を拡張してその設計を行う．この図からわかるように，$Q_F(s)$ は参照入力 r を入力とし，その出力信号 y_q が制御入力 u に直接加えられるため，入力外乱や観測ノイズの除去などの目的には活用できないが，目標値応答特性の改善には利用できる [FYH '94]．また，LQ 制御系が有する低感度特性などのロバスト性は引き継がれる．なお，Fig.4.8 でフィードバック信号 $K_F x$ を状態オブザーバとフィードバック側の自由パラメータを用いたものに置き換えれば，Fig.2.9 の 2 自由度ロバストサーボ系の構成になる．しかし，本節で考える目標値応答特性の設計には状態オブザーバとフィードバック側の自由パラメータは関与しないので，ここでは簡単な Fig.4.8 の構成を考える．なお，ここで提案する設計法は，3 章および 4.2 節で提案した状態オブザーバとフィードバック側の自由パラメータを活用した設計法と組み合わせることができる．

4.3.2　漸近構造

本節では，ILQ 法のゲイン調整パラメータ Σ を無限大にしたときの漸近構造を導出する．ILQ 法では Fig.4.8 のフィードバックゲイン K_F, K_C は (2.10) 式のようにパラメトライズされるので，$Q_F(s)$ からの出力信号 y_q に対して，

$$y_q = V^{-1}\Sigma V y_q^0, \quad Q_F(s) = V^{-1}\Sigma V Q_F^0(s) \tag{4.64}$$

のように $V^{-1}\Sigma V$ を引き出せば，Fig.4.8 と (2.10a)，(4.64) 式から制御入力は

$$u = V^{-1}\Sigma V(-K_F^0 x + K_C^0 x_c + y_q^0) \tag{4.65}$$

となる．この式の両辺を時間で微分して (2.1a)，(2.10b) 式を代入して整理すると

$$\dot{u} = -V^{-1}\Sigma V(K_F^0 A x + u - K_C^0 \dot{x}_c - \dot{y}_q^0) \tag{4.66}$$

となる．さらに上式をラプラス変換して u を移行すると

$$\begin{aligned} u(s) &= -V^{-1}(sI+\Sigma)^{-1}\Sigma V[K_F^0 A x(s) - sK_C^0 x_c(s) - s y_q^0(s)] \\ &= -V^{-1}(sI+\Sigma)^{-1}\Sigma V\Big[K_F^0 A x(s) \\ &\quad -sK_C^0(sI-A_C)^{-1}B_C\big(r(s)-y(s)\big) - sQ_F^0(s)r(s)\Big] \\ &= -V^{-1}(sI+\Sigma)^{-1}\Sigma V\Big[\{K_F^0 A + sK_C^0(sI-A_C)^{-1}B_C C\}x(s) \\ &\quad -\{sK_C^0(sI-A_C)^{-1}B_C + sQ_F^0(s)\}r(s)\Big] \end{aligned} \tag{4.67}$$

となる．上式と $\lim_{\Sigma\to\infty}(sI+\Sigma)^{-1}\Sigma = I$ となることから $\Sigma\to\infty$ としたときの ILQ 制御系の漸近構造が Fig.4.9 のように得られる．

4.3.3　マッチング可能なクラス

2.2 節で述べた従来の ILQ 設計法では $\Sigma\to\infty$ において，非干渉化された r から y までの閉ループ伝達関数を指定し，それを達成するフィードバックゲイン，および最適性を保証する Σ の下限値を決定する．本設計法ではそれを拡張し，自由パラメー

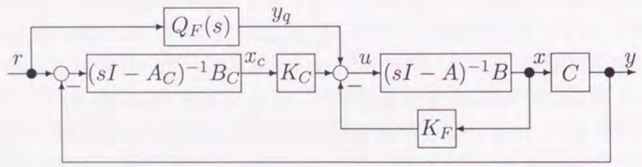


Fig. 4.8: Robust servo system with free parameter

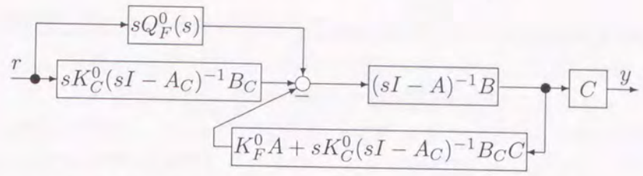


Fig. 4.9: Asymptotic structure of ILQ servo system

タ $Q_F^0(s)$ の自由度もこの伝達関数の指定に用いる．ここでは Fig.4.9 の漸近構造をもとに設計を行うが，K_F^0, K_C^0 および Σ の下限値に関しては 2.2 節で述べた従来法の結果を用いる．したがって，このとき Fig.4.9 において $Q_F^0(s)=0$ のときの r から y までの閉ループ伝達関数 $G_{yr0}^\infty(s)$ は (2.20) 式と同様で

$$G_{yr0}^\infty(s) = \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{r_i(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} \tag{4.68}$$

$$\phi_i(s) = \alpha(s)\psi_i(s) + r_i(s)z_i^+(s) \tag{4.69}$$

$$r_i(s) = r_{q-1}^i s^{q-1} + \cdots + r_1^i s + r_0^i \tag{4.70}$$

$$\deg\phi_i(s) = d_i^+ + q - 1 \tag{4.71}$$

$$\deg\psi_i(s) = d_i^+ - 1 \tag{4.72}$$

となる．今，このフィードバックゲインを用いて，$Q_F^0(s)\neq 0$ のときの r から y までの閉ループ伝達関数 $G_{yr}^\infty(s)$ を計算するとつぎのようになる．

$$G_{yr}^\infty(s) = G_{yr0}^\infty(s) + \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} DQ_F^0(s) \tag{4.73}$$

つぎに上式をもとに，つぎの有理関数行列を定義する．

$$T_1(s) := \bar{G}_{yr}^\infty(s) - G_{yr0}^\infty(s) \tag{4.74a}$$

$$T_2(s) := \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\alpha(s)z_i^+(s)}{\phi_i(s)}\right\} D \tag{4.74b}$$

ここで，$\bar{G}_{yr}^\infty(s)$ は設計者が指定する希望の伝達関数である．このとき以下の恒等式が成り立つ．

$$\bar{G}_{yr}^\infty(s) - G_{yr}^\infty(s) \equiv T_1(s) - T_2(s)Q_F^0(s) \tag{4.75}$$

ここで (4.75) 式を零にする $Q_F^0(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ が存在するとき，$\bar{G}_{yr}^\infty(s)$ はマッチング可能と呼び，$Q_F^0(s)$ は次式で定まる．

$$Q_F^0(s) = T_2(s)^{-1}T_1(s) \tag{4.76}$$

本設計法でも従来法に倣って，設計者が非干渉化された既約な伝達関数

$$\bar{G}_{yr}^{\infty}(s) = \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \tag{4.77}$$

を指定することとする．そのためにまずこのクラスを特徴づける条件を求める．(4.75) 式を零とおいて，(4.74)，(4.77) 式を代入して $DQ_F^0(s) =: \tilde{Q}_F^0(s)$ について解くと

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_F^0(s) &= \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\phi_i(s)}{\alpha(s)z_i^+(s)}\left(\frac{\phi_i(s)N_i(s) - r_i(s)z_i^+(s)M_i(s)}{M_i(s)\phi_i(s)}\right)\right\} \\
&= \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\phi_i(s)N_i(s) - r_i(s)z_i^+(s)M_i(s)}{\alpha(s)z_i^+(s)M_i(s)}\right\} \qquad (4.78a) \\
&= \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)N_i(s)}{z_i^+(s)M_i(s)} - \frac{r_i(s)\big(M_i(s) - N_i(s)\big)}{\alpha(s)M_i(s)}\right\} \qquad (4.78b)
\end{aligned}$$

となる．上式と $\tilde{Q}_F^0(s) \in \mathrm{RH}_\infty (\Leftrightarrow Q_F(s) \in \mathrm{RH}_\infty)$ となる条件からつぎの定理を得る．

《 **定理 4.3.1** 》

マッチング可能な $\bar{G}_{yr}^{\infty}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yr}^{\infty}$ はつぎの必要十分条件で特徴づけられる．

C1. $N_i(s)$ が $z_i^+(s)$ を因子に持つ．

C2. $M_i(s) - N_i(s)$ が $\alpha(s)$ を因子に持つ．

C3. $\deg M_i(s) - \deg N_i(s) \ge d_i - 1$.

ただし，例外として最小位相系の制御対象で $d_i = 1$ の場合は条件 C2 を満足しないが，$N_i(s)/M_i(s) = 1$，$\big(N_i(s) = M_i(s)\big)$ を指定できる．

(証明)　まず $\tilde{Q}_F^0(s)$ がプロパとなるための条件を (4.78a) 式から求める．$\deg \alpha(s) = q$，$\deg r_i(s) \le q-1$ であるので第2項目は厳密にプロパである．よって第1項目の $\phi_i(s)N_i(s)/\alpha(s)z_i^+(s)M_i(s)$ がプロパであればよい．$\deg \alpha(s) = q$，$\deg z_i^+(s) = n_i^+$，$\deg \phi_i(s) = d_i + n_i^+ + q - 1$ であるから，これは条件 C3 と等価である．

つぎに，$\tilde{Q}_F^0(s)$ が安定となるための条件を考える．これは (4.78b) 式の分母因子のうちで，不安定因子 $\alpha(s)$，$z_i^+(s)$ を相殺するための $\bar{G}_{yr}^{\infty}(s)$ の条件と等価である．今，$\phi_i(s)$ は安定であるから (4.69) 式より，それぞれ $r_i(s)$ と $\alpha(s)$，$\psi_i(s)$ と $z_i^+(s)$ は既約である．よって $\tilde{Q}_F^0(s)$ が安定になるための必要十分条件として条件 C1 および C2 を得る．また，例外の場合も (4.78b) 式と $z_i^+(s) = 1$，$\deg \psi_i(s) = 0$ から明らかである．□

従来の $Q_F(s) = 0$ の場合との相違

従来法の $Q_F(s) = 0$ の場合のマッチング可能な伝達関数 $G_{yr0}^{\infty}(s)$ のクラスと比較すると，不安定零点と内部モデルの条件 C1，C2 は $Q_F(s)$ を付加しても変わらないが，

相対次数の条件 C3 が緩和されていることがわかる．つまり，従来法では閉ループ系の極多項式 $\phi_i(s)$ の次数が固定であり，それを指定すると閉ループ系の零点も自動的に定まっていたが，この極の個数と零点の制約がある程度緩和されたことになる．また，従来法よりも相対次数が一つ小さい応答を指定できることから，指定応答を速くできることがわかる．

【設計手順】

手順1　**定理 4.3.1** の条件 C1～C3 を満たす範囲で $G_{yr}^{\infty}(s)$ を指定する．

手順2　$M_i(s)$ を因数分解し，(4.71) 式で与えられる次数の因子を $\phi_i(s)$ に振り分ける．

手順3　$\phi_i(s)$ をもとに前述の方法で基準最適ゲイン K_F^0，K_C^0 を計算する．

手順4　(4.78b) 式から $\tilde{Q}_F^0(s)$ を計算し，$Q_F^0(s)$ を求める．

手順5　最適性を満たす $\Sigma = \sigma I$ の下限値（$Q_F^0(s)$ に無関係）を計算し，適切な値に選ぶ．

(注意 4.3.1)

手順2 で $M_i(s)$ の因子の一部を $\phi_i(s)$ に振り分けたのは $\tilde{Q}_F^0(s)$ の次数を下げるためである．これは (4.73) 式で $G_{yr}^{\infty}(s)$ の分母に $\phi_i(s)$ を含むことから明らかである．しかし，$Q_F(s)$ の自由度のみで目標値応答特性の指定が行えるため（詳細は 5.6 節で述べる），K_F^0，K_C^0 は任意の安定化ゲインに選べる（つまり $\phi_i(s)$ は任意に選べる）．ただし，そのとき求まる $\tilde{Q}_F^0(s)$ は高次になる．

4.3.4　状態フィードバックで非干渉化できない場合（A.2）

本節では，2.2 節の制御対象に関するつぎの仮定を緩める．つまり K_F^0，K_C^0 を非干渉化ゲインに選べない場合を考え，その場合でも $Q_F(s)$ を用いて非干渉化する方法を述べる．

a) 非干渉化行列 D が正則でない場合．

b) 制御対象が行零点以外の不安定零点を持つ場合．

これらの場合，2.2 節の設計法は用いることができないが，1 型サーボ系の場合には極配置法による ILQ ゲイン K_F^0，K_C^0 の設計法が文献 [Fuji '92] に示されているので，その結果を用いる．ゲインの具体的な計算方法は付録 B に示す．ただし，このゲインは (2.25) 式のような解析表現では記述できない．このゲインを用いると非干渉化は達成

できないが，$G^{\infty}_{yr0}(s)$ は 1 番目から $m-1$ 番目までの入出力について非干渉化されたつぎの (4.79) 式の形にでき，設計者は $\phi_i(s)$ の指定が可能である．

$$G^{\infty}_{yr0}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{r_1 z_1^+(s)}{\phi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{r_2 z_2^+(s)}{\phi_2(s)} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ \dfrac{s z_m^+(s)*}{\phi_m(s)} & \dfrac{s z_m^+(s)*}{\phi_m(s)} & \cdots & \dfrac{r_m z_m^+(s) z^+(s)}{\phi_m(s)} \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

ただし

$z^+(s)$ ： 制御対象の行零点以外の不安定零点を重複度も含めてすべて根に持つ多項式

r_i ： ある定数．

$*$ ： ある多項式．

$$\deg \phi_i(s) = d_i^+,\ (1 \le i \le m-1) \tag{4.80a}$$

$$\deg \phi_m(s) = d_m^+ + (n - \sum_{k=1}^{m-1} d_k^+ - n_z^-) \tag{4.80b}$$

n_z^- ： 制御対象の安定零点の個数

であり，$G^{\infty}_{yr0}(0) = I$ を満たす．

ここより $Q_F(s)$ を付加し，非干渉化を行うことを考える．$\Sigma \to \infty$ としたときの漸近構造は Fig.4.9 に内部モデルの値 $A_C = 0,\ B_C = I$ を代入して Fig.4.10 のようになる．また r から y までの伝達関数 $G^{\infty}_{yr}(s)$ はつぎのようになる．

$$G^{\infty}_{yr}(s) = G^{\infty}_{yr0}(s) + G^{\infty}_{yr0}(s)(K_C^0)^{-1} s Q_F^0(s) \tag{4.81}$$

前節の (4.75) 式と同様のモデルマッチング形式を考える．つまり，

$$T_1(s) := \bar{G}^{\infty}_{yr}(s) - G^{\infty}_{yr0}(s) \tag{4.82a}$$

$$T_2(s) := G^{\infty}_{yr0}(s)(K_C^0)^{-1} s \tag{4.82b}$$

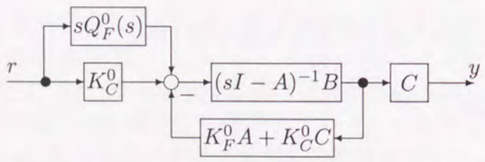


Fig. 4.10: Asymptotic structure of ILQ servo system

と定義し，$\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ を非干渉化した既約な伝達関数

$$\bar{G}^{\infty}_{yr}(s) = \operatorname*{diag}_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{N_i(s)}{M_i(s)} \right\} \tag{4.83}$$

を指定するとき，$\bar{G}^{\infty}_{yr}(s) - G^{\infty}_{yr}(s) \equiv T_1(s) - T_2(s) Q_F^0(s) = 0$ となるマッチング可能なクラスはつぎの定理で特徴づけられる．

《 定理 4.3.2 》

マッチング可能な $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ のクラス $\mathcal{G}^{\infty}_{yr}$ はつぎの必要十分条件で特徴づけられる．

C1'. $N_i(s)$ が $z_i^+(s)$ を因子に持つ．

C2'. $N_i(0)/M_i(0) = 1$.

C3'. $\deg M_i(s) - \deg N_i(s) \ge \tilde{d}_i - 1$.

ただし，$z_i^+(s)$ は

$$G(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{11}(s)}{w_{11}(s)} & \cdots & \dfrac{v_{1m}(s)}{w_{1m}(s)} \\ & \vdots & \\ \dfrac{v_{m1}(s)}{w_{m1}(s)} & \cdots & \dfrac{v_{mm}(s)}{w_{mm}(s)} \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

$(w_{ij}(s)$ と $v_{ij}(s)$ は既約$)$

としたときの第 i 列の要素の不安定な最小公倍分母多項式と定義する．また，$\tilde{d}_i$ は (4.84) 式の第 i 列の要素のうち，(分子次数 − 分母次数) の最大値と定義する．

(証明)　Fig.4.10 から $G^{\infty}_{yr0}(s)$ が

$$G^{\infty}_{yr0}(s) = C\big(sI - A + B(K_F^0 A + K_C^0 C)\big)^{-1} B K_C^0 \tag{4.85}$$

となることと，$T_1(s) - T_2(s) Q_F^0(s) = 0$ から $Q_F^0(s)$ を計算すると

$$Q_F^0(s) = \frac{1}{s} K_C^0 \left(-I + G^{\infty}_{yr0}(s)^{-1} \operatorname*{diag}_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{N_i(s)}{M_i(s)} \right\} \right) \tag{4.86a}$$

$$= -\frac{1}{s} K_C^0 + \frac{1}{s} \left[C\{sI - A + B(K_F^0 A + K_C^0 C)\}^{-1} B \right]^{-1} \times \operatorname*{diag}_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{N_i(s)}{M_i(s)} \right\} \tag{4.86b}$$

となる．まず $Q_F^0(s)$ が安定となるための $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ の条件を考える．(4.86b) 式から分母の s と $[C\{sI - A + B(K_F^0 A + K_C^0 C)\}^{-1} B]^{-1}$ の不安定部分を相殺するように $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ を選ばなくてはならない．

s を相殺する条件

(4.86a) 式で考える．括弧内のすべての因子が s を分子因子に持つことが必要十分である．今，$G^{\infty}_{yr0}(0) = I$ であるから

$$-I + \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(0)}{M_i(0)}\right\} = 0 \tag{4.87}$$

であればよい．よって $G^{\infty}_{yr}(0) = I$ が s を相殺するために必要十分であり，条件 C2' を得る．

$[C\{sI - A + B(K^0_F A + K^0_C C)\}^{-1}B]^{-1}$ の不安定因子を相殺する条件

(4.86b) 式で考える．$[C\{sI - A + B(K^0_F A + K^0_C C)\}^{-1}B]^{-1}$ の第 i 列の要素の不安定な最小公倍分母多項式は $\tilde{z}^+_i(s)$ と等しく（証明は付録 C.3 に示す），これを $N_i(s)$ で相殺することが必要十分である．よって条件 C1' を得る．

つぎに $Q^0_F(s)$ がプロパとなるための $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ の必要十分条件を求める．(4.86b) 式から

$$\frac{1}{s}\left[C\{sI - A + B(K^0_F A + K^0_C C)\}^{-1}B\right]^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \tag{4.88}$$

がプロパであればよい．このためには，$[C\{sI - A + B(K^0_F A + K^0_C C)\}^{-1}B]^{-1}$ の第 i 列の要素のうち，（分子次数 − 分母次数）の最大値が $\tilde{d}_i$ と等しい（証明は付録 C.4 に示す）ことから，$N_i(s)/M_i(s)$ の相対次数を $\tilde{d}_i - 1$ 以上とすればよい．したがって条件 C3' を得る．　□

（注意 4.3.2）

$\tilde{z}^+_i(s)$ は制御対象の不安定零点の一部を根に持つ多項式であり，特に不安定な行零点を持つ場合については $z^+_i(s)$ を因子として持つ．これは行零点の性質（(2.15) 式）から明らかである．

なお，設計手順は前節とほぼ同様であるが，以下に示す．

【設計手順】

手順 1　**定理 4.3.2** の条件 C1'～C3' を満たす範囲で $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ を指定する．

手順 2　$M_i(s)$ を因数分解し，(4.80) 式で与えられる次数の因子を $\phi_i(s)$ に振り分ける．

手順 3　$\phi_i(s)$ をもとに基準最適ゲイン K^0_F，K^0_C を計算する．

手順 4　(4.86a) 式から $Q^0_F(s)$ を求める．

手順 5　最適性を満たす $\Sigma = \sigma I$ の下限値（$Q^0_F(s)$ に無関係）を計算し，適切な値に選ぶ．

なお，従来の ILQ 法でも (4.79) 式のようにほぼ非干渉化された応答が指定可能であるので，必要に応じて使い分ければよい．なお，ここで提案した完全な非干渉化を行った場合は条件 C1' のため，従来法とは異なり，行零点以外の不安定零点の影響も第 m 出力以外に現れる場合がある（数値例参照）．

4.3.5　数値例

本節では，4.3.4 節の状態フィードバックで非干渉化できない場合について，提案法を用いて設計を行う．まず，つぎの係数行列を持つ可制御かつ可観測なシステムを考える．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s^3} \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

このシステムは行零点ではない不安定零点 1 を一つ持ち，安定零点は持たない．また相対次数は $d_1 = d_2 = 1$ であり，非干渉化行列 D は

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

となるので状態フィードバックでは非干渉化不可能である．また

$$G(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{s-1} & -\dfrac{s}{s-1} \\ -\dfrac{s^3}{s-1} & \dfrac{s^3}{s-1} \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

であるので，

$$\tilde{z}^+_1(s) = \tilde{z}^+_2(s) = s - 1 \tag{4.92}$$

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 = 2 \tag{4.93}$$

となることがわかる．よって**定理 4.3.2** からマッチング可能な

$$\bar{G}^{\infty}_{yr}(s) := \operatorname{diag}\left\{\frac{N_1(s)}{M_1(s)}, \frac{N_2(s)}{M_2(s)}\right\} \tag{4.94}$$

のクラス $\mathcal{G}'^{\infty}_{yr}$ はつぎのようになる．

マッチング可能なクラス $\mathcal{G}'^{\infty}_{yr}$

1. $N_i(s)$, $i=1,2$ が $s-1$ を因子に持つ.
2. $N_i(0)/M_i(0)=1$, $i=1,\ 2$.
3. $\deg M_i(s)-\deg N_i(s)\geq 1$, $i=1,\ 2$.

手順1 クラス $\mathcal{G}'^{\infty}_{yr}$ に入るように $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ を次式で指定する.

$$\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)=\mathrm{diag}\left\{-\frac{(s-1)}{(s+1)^3},\ -\frac{(s-1)}{(s+1)^3}\right\} \tag{4.95}$$

手順2 $\bar{G}^{\infty}_{yr}(s)$ の分母因子からそれぞれ (4.80) 式を満たす次数の因子を

$$\phi_1(s)=s+1,\quad \phi_2(s)=(s+1)^3 \tag{4.96}$$

と振り分ける.

手順3 ILQ 法で基準最適ゲインを求めると

$$K^0_F=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&3&4\end{bmatrix},\quad K^0_C=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix} \tag{4.97}$$

となった. ちなみにこのとき (4.79) 式の $G^{\infty}_{yr0}(s)$ は

$$G^{\infty}_{yr0}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1}&0\\[2ex]\dfrac{(s+3)s}{(s+1)^3}&-\dfrac{s-1}{(s+1)^3}\end{bmatrix} \tag{4.98}$$

となった.

手順4 (4.86a) 式から $Q^0_F(s)$ を求めると

$$Q^0_F(s)=\begin{bmatrix}-\dfrac{s+3}{(s+1)^2}&0\\[2ex]0&0\end{bmatrix} \tag{4.99}$$

となり, 2次であった.

手順5 Σ の下限値 ($Q^0_F(s)$ に無関係) を計算すると $\sigma_{\min}=6$ となった.

このときの出力と制御入力のステップ応答を Fig.4.11 に示す (上段:出力, 下段:制御入力). 時刻 2, 6 [sec] に第1, 第2入力にそれぞれ大きさ 1, 2 のステップ入力を加えた. なお Σ の大きさは $\sigma=\sigma_{\min}\times 6$ とした. 出力応答については $\Sigma\to\infty$ の漸近応答も点線で示しているが, 十分それに漸近していることがわかる. また, 自由パラ

メータ $Q_F(s)$ を用いない場合の応答も Fig.4.12 に示す. このとき, 整定時間が $Q_F(s)$ を用いた場合とほぼ同じになるように (4.79) 式の $G^{\infty}_{yr0}(s)$ を

$$\tilde{G}^{\infty}_{yr0}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2s+1}&0\\[2ex]\dfrac{(3s+13)s}{6(s+1)^3}&-\dfrac{s-1}{(s+1)^3}\end{bmatrix} \tag{4.100}$$

と指定し, 従来の ILQ 法で設計を行った. また Σ の下限値は $\sigma_{\min}=6$ となり, 同様に $\sigma=\sigma_{\min}\times 6$ の応答を示す.

まず, 出力の応答結果を比較すると, $Q_F(s)$ を用いた場合は非干渉化が行われているのに対し, $Q_F(s)=0$ の場合は第2出力に干渉が起こっていることがわかる. また, 不安定零点の影響に関しては, $Q_F(s)$ を用いて非干渉化を行った場合はすべての出力に対して逆応答が生じているが, $Q_F(s)=0$ の場合は第2出力のみに影響が出ていることがわかる. まとめると, 従来法では不安定零点の影響と干渉をひとつの出力に集中させて, それ以外の出力については非干渉化された所望の応答を得ることができる. 一方, 本設計法では不安定零点の影響がすべての出力に現れるが, 完全な非干渉化が達成できる. つぎに, 制御入力については大きさなど, どちらもほぼ同じであり $Q_F(s)$ を付加しても大きな変化は見られないことがわかる.

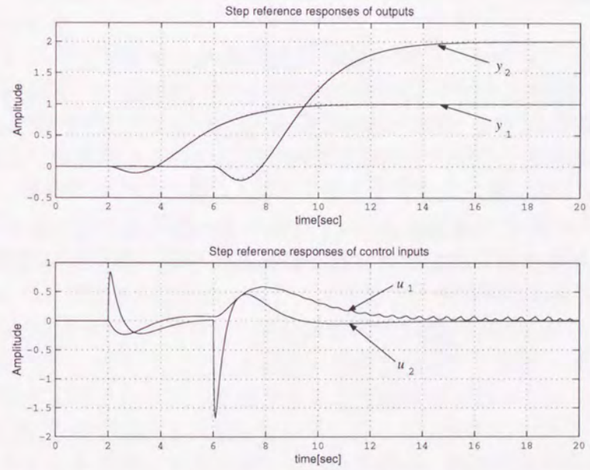


Fig. 4.11: Step reference responses by proposed method

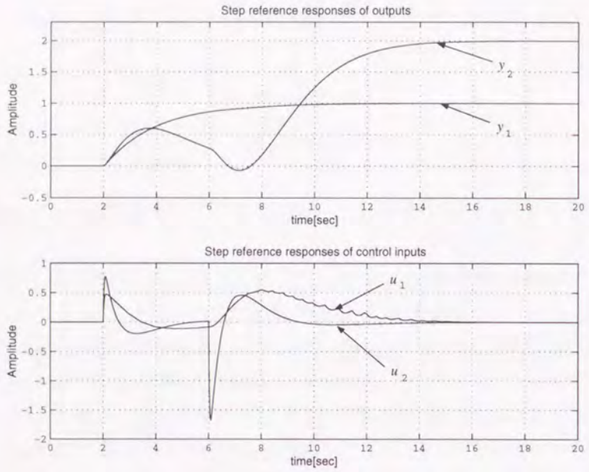


Fig. 4.12: Step reference responses by existing method ($Q_F(s) = 0$)

4.3.6 まとめ

本節ではフィードフォワード側の設計自由度 $Q_F(s)$ を活用して ILQ 法の拡張を行った．その結果，従来法が持つ「目標値応答特性の漸近指定」と「設計結果の解析表現」という特徴を継承しつつ，指定可能な目標値応答特性のクラスを広げることができた．さらに従来法では非干渉化が不可能な制御対象についても非干渉化を達成する自由パラメータの選定法を，実用上重要な1型サーボ系の場合について提案した．ただし，この1型サーボ系の場合のみに対して行った拡張を，参照入力を一般化したサーボ系に対しても考える場合，フィードバックゲイン K_F^0, K_C^0 の選定法が問題となるが，これについては今後の課題である．

第5章 2自由度ロバストサーボ系への一般化

5.1 はじめに

前章まではループ整形機能を有するロバストサーボ系の設計時にフィードバックゲインを ILQ ゲインに限定し，さらに対象とする閉ループ特性も Σ を無限大とした漸近先を指定した．したがって，この 1)ILQ ゲインを用い，2) 漸近先を指定する，という制約がどの程度，設計上の制約になっているのかを考察する必要があると考えられる．そこでこの章では，前章までの ILQ 設計法をベースにした目標値応答特性とノイズ抑制特性の整形を，フィードバックゲインを ILQ ゲインに限定しない場合に拡張する．つまり，2.4.2 節で述べた Fig.2.9 の一般的な 2 自由度ロバストサーボ系の構成で考える．このときに，それぞれの特性についてマッチング可能なクラスを導出し，ILQ 設計法を用いた場合との比較を行う．その結果，これらのクラスには本質的な相違はないことが示される．

つぎに，これらの特性の指定がどの程度，設計パラメータの設計自由度を利用しているのかを考察する．この結果，ノイズ抑制特性についてはその指定に設計の自由度をすべて使い果たしてしまうが，目標値応答特性についてはフィードバックゲインの自由度が残されていることが示される．そして，残された設計自由度の活用例の一つを提案する．

なお，本章の内容と関連する研究として以下のものがある．

まず2自由度ロバストサーボ系の目標値応答特性の実現可能なクラスについてはすでに文献 [FYH '94] で示されている．また，非干渉化については Desoer ら [DG '86] によって，2 自由度系制御系における目標値応答特性の非干渉化可能なクラスが導出されている．しかし，いずれのクラスも既約分解表現を用いて特徴づけられており，見通しが悪い．本章ではこれら二つを統合するような結果となっており，さらにノイズ抑制特性についても非干渉化を考慮している．そして，それらのクラスの記述については設計のしやすさを考慮してより詳しく解析を行い，伝達関数の各要素に関する条件まで求めている．

つぎに，モデルマッチング後の設計自由度に関しては2自由度制御系の構成の場合に文献 [MS '90] で既約分解に基づく考察がある．しかしこれは目標値応答特性を指定した後の設計自由度であり，2自由度ロバストサーボ系の構成を用いた場合はほぼ明らかである．一方，本章では目標値応答特性とノイズ抑制特性のそれぞれについて，その特性を指定した後に残る設計の自由度を考えており，さらに残された設計自由度に

ついては対応する設計パラメータまで明らかにしている．

5.2　制御対象の記述，および仮定

制御対象は2.2.2節で記述されるものとする．ただし，これに加えて rank $G(s) = m$ とする．また，ロバストサーボ系の設計可能条件（**補題 2.2.1**）を仮定する．本章では状態フィードバックによる非干渉化可能条件（**仮定 2.2.1**，**仮定 2.2.2**）は仮定しない．

5.3　目標値応答特性の指定

本節では，目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ の非干渉化指定が可能なクラスを導出する．目標値応答特性のみを考慮するので Fig.4.8 の構成で考える．この図で r から y までの閉ループ伝達関数 $G_{yr}(s)$ を計算するとつぎのようになる．

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) &= C(sI-A)^{-1}B\big[I+K_F(sI-A)^{-1}B+K_CG_C(s)C(sI-A)^{-1}B\big]^{-1} \\ &\quad \times\big[K_CG_C(s)+Q_F(s)\big] \qquad (5.1a) \\ &= C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}B\,[K_CG_C(s)+Q_F(s)] \qquad (5.1b) \end{aligned}$$

今，K_F，K_C については系の内部安定化を保証する，つまり(2.6)式を安定化するゲインが与えられていると仮定する．このとき，モデルマッチング形式を与えるため，(5.1b)式をもとにつぎの有理伝達関数を定義する．

$$\begin{aligned} T_1(s) &:= \bar{G}_{yr}(s)-C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}BK_CG_C(s) \qquad (5.2a) \\ T_2(s) &:= C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}B \qquad (5.2b) \end{aligned}$$

ここで，$\bar{G}_{yr}(s)$ を設計者が指定する非干渉化された既約な伝達関数

$$\bar{G}_{yr}(s) = \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \qquad (5.3)$$

とするとき，$\bar{G}_{yr}(s)-G_{yr}(s)\equiv T_1(s)-T_2(s)Q_F(s)=0$ となるマッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yr}$ はつぎの定理で特徴づけられる．

《 定理 5.3.1 》

マッチング可能な $\bar{G}_{yr}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yr}$ はつぎの必要十分条件で特徴づけられる．

C1. $N_i(s)$ が $\tilde{z}_i^+(s)$ を因子に持つ．

C2. $M_i(s)-N_i(s)$ が $\alpha(s)$ を因子に持つ．

C3. $\deg M_i(s)-\deg N_i(s)\ge\tilde{d}_i$.

ただし，$\tilde{z}_i^+(s)$ および $\tilde{d}_i$ は**定理 4.3.2** で定義されるものとする．

(証明)　(5.1a)式で $G_{yr}(s)=\bar{G}_{yr}(s)$ とおいて，$Q_F(s)$ を逆算すると

$$\begin{aligned} Q_F(s) &= \big[I+K_F(sI-A)^{-1}B+K_CG_C(s)C(sI-A)^{-1}B\big] \\ &\quad \times\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}\bar{G}_{yr}(s)-K_CG_C(s) \\ &= \big[I+K_F(sI-A)^{-1}B\big]\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}\bar{G}_{yr}(s)+K_CG_C(s)\big[\bar{G}_{yr}(s)-I\big] \\ &= \{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}\bar{G}_{yr}(s)+K_CG_C(s)\big[\bar{G}_{yr}(s)-I\big] \qquad (5.4) \end{aligned}$$

となる．$Q_F(s)$ が安定となる必要十分条件は(5.4)式の不安定要素を $\bar{G}_{yr}(s)$ が相殺することである．(5.4)式の第 i 列要素について考えると，この不安定要素は $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ の $\tilde{z}_i^+(s)$（付録C.3）と $K_CG_C(s)$ の $\alpha(s)$ である．まず $\tilde{z}_i^+(s)$ を相殺するための必要十分条件は，内部安定性より $K_CG_C(s)$ が分母因子に $\tilde{z}_i^+(s)$ を持たないことから条件C1と等価である．同様に $\alpha(s)$ を相殺するための必要十分条件は，ロバストサーボ系の設計可能条件（**補題 2.2.1**）より $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ の分母因子が $\alpha(s)$ を因子としてもたないことから，条件C2と等価である．

つぎに $Q_F(s)$ がプロパ性になる必要十分条件を考える．これは(5.4)式から $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}\bar{G}_{yr}(s)$ がプロパとなることである．その条件がC3となるが，これは**定理 4.3.2** の条件C3'の証明とほぼ同様であるため省略する．　□

(注意 5.3.1)

このクラスはILQ法をベースにした場合と異なり，漸近先を考えないため指定応答と実際の応答は厳密に一致する．

この結果からマッチング可能な $\bar{G}_{yr}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yr}$ はフィードバックゲイン K_F，K_C に依存しないことが分かる．また，これら K_F，K_C の選び方については5.6節で述べるとして，以下に設計手順を示す．

【設計手順】

手順1　偏差系(2.6)を安定化するゲイン K_F および K_C を設計する．

手順2　マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yr}$ を求め，その中で所望の特性を指定する．

手順3　$Q_F(s)$ を $Q_F(s)=T_2(s)^{-1}T_1(s)$ で求める．

5.4　ノイズ抑制特性の指定

本節では，ノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ について非干渉化指定が可能なクラスを導出する．したがって，Fig.2.9において，$Q_F(s)$ は関係しないので $Q_F(s)=0$ とおいた構成で考える．

$G_{yn}(s)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} G_{yn}(s) &= -G_{yr0}(s)\{K_CG_C(s)\}^{-1}\big[K_CG_C(s)+K_F(sI-A+HC)^{-1}H \\ &\quad +Q_B(s)\big\{C(sI-A+HC)^{-1}H-I\big\}\big] \qquad (5.5) \end{aligned}$$

となる．ただし，$G_{yr0}(s)$ は $Q_F(s)=0$ とおいたときの r から y までの閉ループ伝達関数であり，(5.1b) 式で $Q_F(s)=0$ としたものと等しく

$$G_{yr0}(s)=C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}BK_CG_C(s) \tag{5.6}$$

となる．上式を (5.5) 式に代入すると

$$\begin{aligned} G_{yn}(s) &= -C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}B\big[K_CG_C(s) \\ &\quad +K_F(sI-A+HC)^{-1}H+Q_B(s)\{C(sI-A+HC)^{-1}H-I\}\big] \end{aligned} \tag{5.7}$$

となる．上式をもとにつぎの有理伝達関数を定義する．

$$\begin{aligned} T_1(s) &:= \bar{G}_{yn}(s)+C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}B \\ &\quad \times\big[K_CG_C(s)+K_F(sI-A+HC)^{-1}H\big] && \text{(5.8a)} \\ T_2(s) &:= C\{sI-A+BK_F+BK_CG_C(s)C\}^{-1}B && \text{(5.8b)} \\ T_3(s) &:= -C(sI-A+HC)^{-1}H+I && \text{(5.8c)} \end{aligned}$$

ここで $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ を設計者が指定する非干渉化された既約な伝達関数

$$\bar{G}_{yn}(s)=\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{N_i(s)}{M_i(s)}\right\} \tag{5.9}$$

とするとき，$\bar{G}_{yr}(s)-G_{yr}(s)\equiv T_1(s)-T_2(s)Q_B(s)T_3(s)=0$ となるマッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}$ はつぎの定理で特徴づけられる．

《 定理 5.4.1 》

マッチング可能な $\bar{G}_{yn}(s)$ のクラス $\mathcal{G}_{yn}$ はつぎの必要十分条件で特徴づけられる．

（条件1）$N_i(s)$ が $\tilde{z}_i^+(s)$ を因子に持つ．

（条件2）$M_i(s)+N_i(s)$ が $\alpha(s)\beta_i(s)$ を因子に持つ．

（条件3）$\deg M_i(s)-\deg N_i(s)\ge\tilde{d}_i$.

ただし，$\beta_i(s)$ および $\tilde{z}_i^+(s)$, $\tilde{d}_i$ はそれぞれ**定理 3.2.1**，**定理 4.3.2** で定義されるものとする．

(証明)　付録D参照．　□

この定理より，マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}$ はオブザーバゲイン H に依存しないことがわかる．しかし，このゲイン H の選定の自由度は，設計の自由度とはならないことが5.7節で示される．以下に設計手順を示す．

【設計手順】

手順1　$A-HC$ を安定とするゲイン H を設計する．

手順2　マッチング可能なクラス $\mathcal{G}_{yn}$ を求め，その中で所望の特性を指定する．

手順3　$Q_B(s)$ を $Q_B(s)=T_2(s)^{-1}T_1(s)T_3(s)^{-1}$ で求める．

5.5　ILQ 設計法を用いた場合との比較

本節では第3章および第4章で述べた，ILQ 法をベースにした場合の二つの閉ループ特性のマッチング可能なクラスと，この章の前節までで述べた，一般的な2自由度ロバストサーボ系でのマッチング可能なクラスとの比較を行う．

5.5.1　目標値応答特性のクラスついて

定理 4.3.1，**定理 4.3.2** と**定理 5.3.1** を比較すると，まず1番目の不安定零点の制約については，制御対象が不安定な行零点のみを持つ場合は $\tilde{z}_i^+(s)=z_i^+(s)$ となることは明らかであり，この制約は同じである．また，行零点以外の不安定零点も持つ場合についても，1型サーボ系については **定理 4.3.2** と**定理 5.3.1** から同じ制約であることが分かる．

つぎに2番目の条件（$\alpha(s)\beta_i(s)$ の制約）も同じである．

最後に3番目の相対次数の条件については，d_i と $\tilde{d}_i$ の関係が明らかになっていないが，1入出力系では $d_i=\tilde{d}_i$ となることから，その場合について比較を行うと，**定理 4.3.1** と**定理 5.3.1** から ILQ 法を用いた方が相対次数で1次速い応答を指定できることがわかる．また，多入出力系では1型サーボ系の場合については，**定理 4.3.2** と**定理 5.3.1** がこの事実を示している．この速い応答を指定できる理由は，ILQ 法では $\Sigma\to\infty$ とした漸近応答を指定するためである．文献 [KFM '94] にも示されているが，ILQ サーボ系では (4.67) 式からわかるように入力側に1次フィルタ $(sI+\Sigma)^{-1}\Sigma$ を持つ．$\Sigma\to\infty$ とした漸近先ではこの1次フィルタが消失し，その結果，目標値応答特性の相対次数が1次小さくなる．しかし，実用時には Σ は有限の値を用いるため，実際は指定応答の相対次数よりも1次大きい（遅い）応答になっており，これが漸近応答と有限値の応答の違いとなって現れる．よって理論的には実用時には相対次数の差はなくなっている．ただし数値例からもわかるように，特に時間応答については，Σ をある程度大きくすれば実際の応答を指定応答に近づけることができるため，実用上は疑似的に1次速い応答を指定できる．これは ILQ ゲインを用いないサーボ系と比較して利点となっている．

1型サーボ系以外の構成で状態フィードバックで非干渉化できない場合については，$Q_F(s)$ を用いた ILQ 法の拡張は行えていない．したがってこの場合，これらの3条件についての比較はできないが，上記の結果から両者のクラスの違いは1型サーボ系の場合と同様であると予想される．

5.5.2　ノイズ抑制特性のクラスついて

定理 3.2.1 と**定理 5.4.1** を比較すると，定理の3条件の比較は目標値応答特性の場合と同じ議論になることがわかる．つまり，1番目と2番目の条件はどちらも同じであり，3番目の相対次数の条件のみが異なる．したがって ILQ 法を用いた方が相対次数

が1次だけ小さい応答を指定できる．しかしこれも，実用上は有限値の Σ を用いるため相対次数の差はなくなる．これに関して，漸近先で指定した応答と実際の応答は高周波域でのゲインの傾きが20[dB/dec]（相対次数で1次分）異なるため注意を要する．3.3節の数値例（Fig.3.2）ではこの事実が現れている．ただし，Σ を大きくすれば高周波域でも漸近先との差が小さくなっていくことがわかる．

5.5.3　まとめ

マッチング可能なクラスについて，本質的な違いはないことを示した．まず 1)ILQ ゲインを用いる ことについては，マッチング可能なクラスがフィードバックゲインに依存しないことから，その差はないことはほぼ明らかであったが，定理を比較することによってそれを確認した．つぎに 2) 漸近先を指定する ことについては $\Sigma \to \infty$ とした極限のみで相対次数の差が現れるが，有限の Σ では両者の差はなくなることを示した．しかし，実用時には Σ の値をある程度大きくすることで疑似的に相対次数を1次小さくできるため，目標値応答特性の指定の際には速い応答が指定できる．これは ILQ 法独自の利点である．一方で，ノイズ抑制特性の指定の際には漸近先と実際の周波数応答では，高周波域でのゲインの傾きが20[dB/dec] 異なるため注意を要する．

また，ILQ 法を用いた場合は $G_{yr}^{\infty}(s)$ や $G_{yn}^{\infty}(s)$ の多くの部分が設計仕様で与えるパラメータから決まる有理式で表される．これにより補償器の低次元化を考慮に入れた設計指針を与えることができたが，一般的な場合では難しい．さらに，それらを指定したときに定まる $Q_F(s)$ および $Q_B(s)$ の計算も一般的な場合に比べて容易であり，ILQ 法を用いる利点となっている．

5.6　目標値応答特性に対応した設計の自由度

本節では目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ を指定したときに，設計の自由度がどの程度残されているかを考察する．目標値応答特性を決定するのはフィードバックゲイン K_F，K_C および フィードフォワード側の自由パラメータ $Q_F(s)$ である．本節では，ある $G_{yr}(s)$ を指定したときに，フィードバックゲイン K_F，K_C の設計自由度が残されることが示される．よって，状態フィードバックでサーボ系を構成する場合にはこの K_F，K_C を他の特性（たとえばフィードバック特性）の改善に用いることができる．本節の後半ではそのような設計法の一例を提案する．

目標値応答特性を指定するパラメータに関して，つぎの補題が成り立つ．

[補題 5.6.1]

ある一つの目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ を実現する二つの $Q_F(s)$ および K_F, K_C の組をそれぞれ $(Q_{F1}(s),\ K_{F1},\ K_{C1})$，$(Q_{F2}(s),\ K_{F2},\ K_{C2})$ と表すと，$Q_{F2}(s)$ はつぎのように一意に表される．

$$Q_{F2}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{qf1} & 0 & 0 & B_{qf1} \\ 0 & A_C & B_C C & -B_C \\ BC_{qf1} & -BK_{C1} & A - BK_{F1} & D_{qf1}B \\ \hline C_{qf1} & K_{C2} - K_{C1} & K_{F2} - K_{F1} & D_{qf1} \end{array}\right] \tag{5.10}$$

ただし

$$Q_{F1}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{qf1} & B_{qf1} \\ \hline C_{qf1} & D_{qf1} \end{array}\right] \tag{5.11}$$

である．

(証明)　(5.1b) 式からそれぞれ二組のパラメータを用いて $G_{yr}(s)$ を計算し，両方を等しいとおけば次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\left[C\{sI - A + BK_{F1} + BK_{C1}(sI - A_C)^{-1}B_C C\}^{-1}B\right] \\ &\quad \times \left[K_{C1}(sI - A_C)^{-1}B_C + Q_{F1}(s)\right] \\ &\quad = \left[C\{sI - A + BK_{F2} + BK_{C2}(sI - A_C)^{-1}B_C C\}^{-1}B\right] \\ &\quad\quad \times \left[K_{C2}(sI - A_C)^{-1}B_C + Q_{F2}(s)\right] \end{aligned} \tag{5.12}$$

上式から $Q_{F2}(s)$ を残りのパラメータで表すと (5.10) 式を得る．　□

この結果から $Q_{F2}(s)$ の極は $Q_{F1}(s)$ の極と $Q_F(s) = 0$，$K_F = K_{F1}$，$K_C = K_{C1}$ としたときの $G_{yr}(s)$ の極から成ることがわかる．これらの閉ループ極の関係を Fig.5.1 に示す．$G_{yr2}(s)$（$Q_{F2}(s)$, K_{F2}, K_{C2} で構成）の極は $G_{yr1}(s)$（$Q_{F1}(s)$, K_{F1}, K_{C1} で構成）と同一の極を持つ $Q_{F2}(s)$ と，不可観測な極（$Q_F(s) = 0$，$K_F = K_{F2}$, $K_C = K_{C2}$ としたときの $G_{yr}(s)$ の極）で構成される．なお，この極の不可観測性は簡単な計算により確認できる．この結果 $G_{yr1}(s) = G_{yr2}(s)$ となるが，それぞれの補償器（r および y から u までの開ループ伝達関数）は明らかに異なる．したがって，目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ 決定してもさらに設計の自由度が残されていることが分かる．この残された自由度は **補題 5.6.1** から K_{F2} と K_{C2} であることが分かる．よって，これらのゲインに関しては他の仕様を満足させるために活用できる．またこのことは，目標値応答特性を $Q_F(s)$ のみで整形できることも示している．

5.6.1　自由パラメータの選定方針

本節では目標値応答特性 $G_{yr}(s)$ を決定した後に残された設計の自由度の活用例の一つを提案する．この活用例として，ロバスト安定化を考慮した設計を考える．このロバスト安定化について，出力側の乗法的不確かさについては $G_{yn}(s)$ の整形で行えることを2.3.3節で示した．また，これについては任意の安定化ゲイン K_F，K_C につい

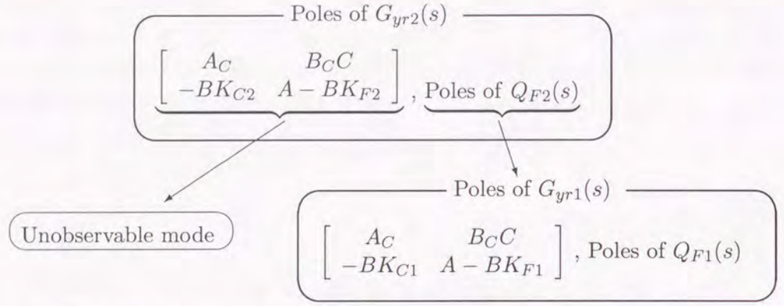


Fig. 5.1: Relationship between pools of both closed loop systems

てマッチング可能なクラスが不変で，オブザーバおよび $Q_B(s)$ のみの選定で整形が行えることを示した．したがって Fig.2.9 の構成で，この出力側の乗法的不確かさについてのロバスト安定化を考慮した K_F，K_C の選定を考えてもほとんど意味がなく，またそのような場合は $Q_B(s)$ を用いるべきである．しかし，Fig.5.2 の状態フィードバックを用いた構成では事情は異なる．そこで以下ではそのような状況を考え，さらに入力側に乗法的な不確かさ Δ が存在する場合について考える（出力側に不確かさがある場合も同様に考えることができる）．ここで，Δ は $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが $1/\rho$ 未満の安定な伝達関数の集合を表す．なお，この構成でも**補題 5.6.1** は成り立つが，Fig.2.9 の構成での補償器とは異なることに注意する．また，目標値応答特性の指定には前章までで提案した ILQ 法を用いる．設計手順はつぎのとおりである．

【設計手順】

手順 1　**ノミナル追従特性の設計**：ノミナルな追従特性（つまり $\Delta = 0$ のとき）は前章で提案した ILQ 法で指定し，得られた K_F^0, K_C^0, $Q_F^0(s)$ をもとに $K_F = K_{F1} = \Sigma K_F^0$，$K_C = K_{C1} = \Sigma K_C^0$，$Q_F(s) = Q_{F1}(s) = \Sigma Q_F^0(s)$ を設計する．

手順 2　**ロバスト安定化**：$\Delta \neq 0$ でも安定性を保証するように $K_F = K_{F2}$, $K_C = K_{C2}$ を決定する．

手順 3　手順 2 の $K_F = K_{F2}$，$K_C = K_{C2}$ をフィードバックゲインとして用い，これらと手順 1 で求めた K_{F1}，K_{C1} から (5.10) 式の $Q_F(s) = Q_{F2}(s)$ を用いて制御系を構成すれば，手順 2 で設計したフィードバック特性を持ち，かつ手順 1 で設計した目標値応答特性を持つ制御系が得られる．

上記の手順 2（ロバスト安定化）については $\mathcal{H}_\infty$ 制御の枠組で考えることにする．小ゲイン定理（**定理 2.3.1**）から Fig.5.2 で $\tilde{u}$ から u までの閉ループ伝達関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが ρ 未満であればロバスト安定である．したがってつぎのように考えればよい．

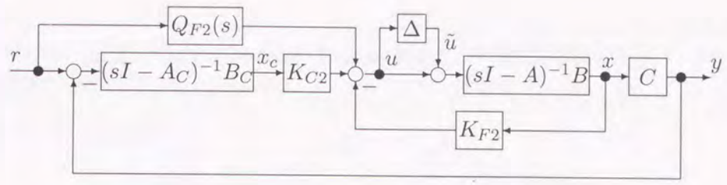


Fig. 5.2: Configuration of robust servosystem with uncertainty

まず，Fig.5.2 で $\tilde{u}$ から u までの閉ループ伝達関数 $P_u(s)$ は

$$P_u(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A-BK_{F2} & BK_{C2} & B \\ -B_C C & A_C & 0 \\ \hline -K_{F2} & K_{C2} & 0 \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array}\right] \tag{5.13}$$

である．有界実補題から $||P_u(s)||_\infty < \gamma$，$\gamma > 0$ であることと，以下の行列不等式を満たす X が存在することは等価である．

$$\begin{bmatrix} A_u X + X A_u^{\mathrm{T}} & X C_u^{\mathrm{T}} & B_u \\ C_u X & -\gamma I & 0 \\ B_u^{\mathrm{T}} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.14}$$

$$X > 0 \tag{5.15}$$

上式 (5.14)，(5.15) の制約条件のもとで γ を最小化する K_{F2}，K_{C2}（と X）を求めればよい（少なくとも $\gamma \leq \rho$ でロバスト安定）．これは適当な変数変換をすれば LMI となるので，γ を最小にする最適解 K_{F2}，K_{C2} を数値的に計算することができる．

5.7　ノイズ抑制特性に対応した設計の自由度

本節では前節と対応してノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ を指定したときに設計の自由度が残されているかを考察する．ノイズ抑制特性を決定するのはオブザーバゲイン H およびフィードバック側の自由パラメータ $Q_B(s)$ である．本節では，前節の目標値応答特性の場合とは異なり，$G_{yn}(s)$ の指定で設計の自由度をすべて使い果たしてしまうことが示される．

5.7.1　フィードバック補償器の一意性

本節ではある $G_{yn}(s)$ を実現する $Q_B(s)$ と オブザーバゲイン H の組合せは無数に存在するが，そのときのフィードバック補償器（y から u までの開ループ伝達関数）は一意に定まる，つまり $G_{yn}(s)$ を指定すれば設計の自由度はなくなることを示す．なお K_F, K_C, A_C, B_C は固定とするが，これは $G_{yr}(s)$ を固定していることに相当する．まず，つぎの補題が成り立つ．

[補題 5.7.1]

ある一つのノイズ抑制特性 $G_{yn}(s)$ を実現する二つの $Q_B(s)$ と H の組をそれぞれ $(Q_{B1}(s),\ H_1)$, $(Q_{B2}(s),\ H_2)$ と表すと，$Q_{B2}(s)$ はつぎのように一意に表される．

$$Q_{B2}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{qb1} & B_{qb1}C & B_{qb1} \\ 0 & A-H_1C & H_2-H_1 \\ \hline C_{qb1} & K_F+D_{qb1}C & D_{qb1} \end{array}\right] \tag{5.16}$$

ただし，

$$Q_{B1}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{qb1} & B_{qb1} \\ \hline C_{qb1} & D_{qb1} \end{array}\right] \tag{5.17}$$

である．

(証明)　(5.7) 式からそれぞれ二組のパラメータを用いて $G_{yn}(s)$ を計算し，両方を等しいとおけば次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &K_F(sI-A+H_1C)^{-1}H_1 + Q_{B1}(s)C(sI-A+H_1C)^{-1}H_1 - Q_{B1}(s) \\ &\quad = K_F(sI-A+H_2C)^{-1}H_2 + Q_{B2}(s)C(sI-A+H_2C)^{-1}H_2 - Q_{B2}(s) \end{aligned} \tag{5.18}$$

上式から $Q_{B2}(s)$ を $Q_{B1}(s)$, H_1 および H_2 を用いて表せば (5.16) 式を得る．　□

この結果より，$Q_{B2}(s)$ の極は $Q_{B1}(s)$ の極とオブザーバゲイン H_1 を用いた $A-H_1C$ の極から構成されることが分かる．またこれら $G_{yn1}(s)$ ($(Q_{B1}(s),\ H_1)$ で構成) と $G_{yn2}(s)$ ($(Q_{B2}(s),\ H_2)$ で構成) の閉ループ極の関係を Fig.5.3 に示す．$G_{yn2}(s)$ はオブザーバの部分が不可観測となり（簡単な計算により確認できる），$Q_{B2}(s)$ が $G_{yn1}(s)$ のオブザーバの部分と自由パラメータ $Q_{B1}(s)$ を兼任するような形になっていることがわかる．つぎに，**補題 5.7.1** を用いてつぎの定理を示す．

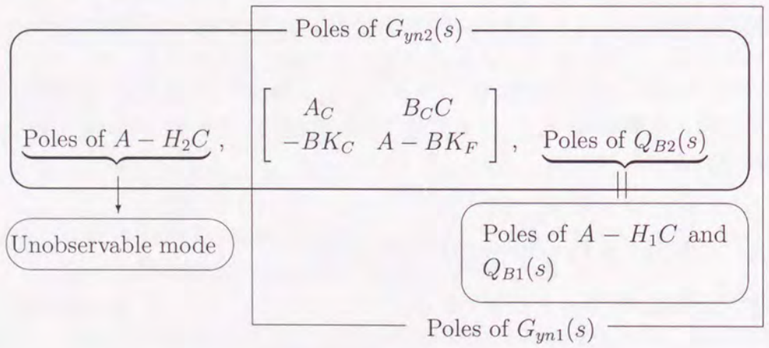


Fig. 5.3: Relationship between poles of both closed loop systems

《 定理 5.7.1 》

(5.16) 式の $Q_{B2}(s)$ と H_2 を用いたフィードバック補償器は内包する $A-H_2C$ のモードが不可観測になり，$(Q_{B1}(s),\ H_1)$ を用いた補償器と一致する．

(証明)　付録 E 参照．　□

(注意 5.7.1)

$Q_F(s)$ を固定すればフィードフォワード補償器 (r から u までの開ループ伝達関数) も一意に定まる．

定理 5.7.1 および Fig.5.3 から $G_{yn}(s)$ の指定時にオブザーバ極を $G_{yn}(s)$ の極に含めないように指定した場合にはその極が不可観測モードとなり，同時に補償器の不可観測モードにもなることがわかる．したがって，この場合のオブザーバ極は冗長なモードとなり，制御系として何の機能も果たさない．このことは，$G_{yn}(s)$ の指定時にその極の一部をオブザーバ極として指定すべきであることを示唆していると同時に，$G_{yn}(s)$ の指定を行うと，もはや設計の自由度は残されていないことを意味する．なお，3.2.3 節で述べたオブザーバに関する設計指針 2 はこの事実から与えた（**注意 3.2.2**）．

5.8　まとめ

この章では ILQ 法をベースにした 2 種類の特性をループ整形する手法を一般的な 2 自由度ロバストサーボ系へ拡張した．その際，ループ整形が可能な（マッチング可能な）伝達関数のクラスを導出し，それが ILQ 法をベースにした場合のクラスと比べて本質的に同じであることを示した．つぎに，2 つの閉ループ特性のループ整形後に残された設計の自由度について考察を行い，目標値応答特性についてはフィードバックゲインの設計自由度が残されているが，ノイズ抑制特性については設計の自由度が残されていないことを明らかにした．そして，目標値応答特性の残された設計自由度について，フィードバック特性を改善するための設計法の一例を示した．

第6章　結論

本論文では ILQ 設計法をベースにして，ループ整形が可能な2種類のロバストサーボ系の設計法を提案し，それを一般的な2自由度ロバストサーボ系へ拡張した．そして，ILQ 法をベースとした場合とベースとしない一般的な場合とを比較し，ループ整形のための設計の自由度について考察を行った．

第3章では ILQ ロバストサーボ系の構成を，状態フィードバックの構成から一般化オブザーバを用いた出力フィードバックの構成に変更し，それを活用することによって従来法の目標値応答特性の指定だけでなく，ノイズ抑制特性も漸近的に指定できる設計法へ拡張した．また，応用例として磁気浮上システムの振動抑制制御へ適用し，実験結果からその有効性を確認した．以下に要点を示す．

- 非干渉化可能なノイズ抑制特性の伝達関数のクラスを導出した．このクラスは内部モデル，および制御対象の不安定極，不安定零点，相対次数によって決まる．
- 補償器の低次元化を考慮に入れたノイズ抑制特性の選定方針，および一般化オブザーバの設計方針を示した．
- 設計者は二つの閉ループ特性を解析的に指定でき，設計結果も解析的に得られる．
- 磁気浮上システムへの適用例では既に振動抑制に成功している $\mathcal{H}_\infty$ 制御のノイズ抑制特性を低次で近似することにより，同等の性能を持つ低次の補償器が設計できた．これは，上述の選定方針にしたがってノイズ抑制特性と一般化オブザーバを決定したこと，および ILQ 法では1自由度制御系の構成でも所望の目標値応答特性が得られることによる．

第4章では ILQ サーボ系をベースにして2種類の制御系構成の変更による設計法の拡張を行った．一つめは第3章で用いた構成に対し，同次元オブザーバを最小次元オブザーバに置き換える拡張を行った．主な結果はつぎのとおりである．

- 同次元オブザーバを最小次元オブザーバと出力推定器に分解することにより，両者の関係を明らかにした．
- 最小次元オブザーバに基づく安定化補償器の一般系を示し，それが同次元オブザーバに基づく安定化補償器に等価変換できることを示した．また，最小次元オブザーバに基づく安定化補償器が有する自由パラメータの解釈として，同次元オブザーバに基づいた構成と対応させて類似する独自の解釈を与えた．

- 最小次元オブザーバに基づく安定化補償器を ILQ サーボ系に適用することにより，3章と同様の設計法を提案した．
- ノイズ抑制特性の段階的な整形法について提案し，これを用いた場合は最小次元オブザーバに基づく構成の方が低次の補償器を得ることができる可能性を示し，数値例でその一例を示した．

二つめはフィードフォワード側の自由パラメータを用いた構成を用いて目標値応答特性の指定に関する拡張を行った．要点は以下のとおりである．

- 従来法に倣ってゲイン調整パラメータを無限大としたときの漸近構造を導出し，それをもとに漸近的に非干渉化指定が可能な伝達関数のクラスを導出した．このクラスは内部モデル，制御対象の不安定零点，相対次数によって決まる．従来法と比べて相対次数の制約が緩和され，さらに1次速い応答が指定できる．
- 補償器の低次元化を考慮に入れたフィードバックゲインの選定指針を与えた．
- フィードバックゲインの設計には従来法を用いるため，設計結果が解析的に得られる．
- 1型サーボ系については，状態フィードバックで非干渉化が不可能な制御対象についても非干渉化指定が可能となった．

第5章では ILQ サーボ系に限定しない一般的な2自由度ロバストサーボ系について，第3，4章と同様の2種類の閉ループ特性をループ整形する手法について提案した．そして ILQ サーボ系をベースにした場合との比較を行い，それぞれの特性を指定した後に残された設計の自由度について考察を行った．要点は以下のとおりである．

- 二つの特性の非干渉化指定が可能なクラスを導出し，設計手順を示した．なお，ILQ 法をベースにした場合と異なり，指定応答は実際の応答と厳密に一致する．
- 上述のクラスは ILQ 法をベースにした場合と本質的に同じである．ただし，ILQ 法をベースにした場合には疑似的に相対次数で1次速い応答を指定できる．
- 目標値応答特性を指定しても K_F, K_C の設計自由度が残される．そして，そのフィードバック特性を考慮した選定方法の一つを提案した．
- ノイズ抑制特性については，それを指定すると設計の自由度はなくなる．

以上のように，本論文ではループ整形の立場から ILQ 設計法の拡張を行い，制御系の構造解析を行うことで「解析的な設計が行える」という従来法の特徴を継承した実用性の高い設計法とすることができた．これは他のループ整形手法にはない利点である．そしてこの拡張により，ILQ 設計法の設計仕様に応じた使い分けが可能となった．つまり，従来法で不十分な場合にはまずオブザーバのみを付加し，それでも不十分な場合にはさらに自由パラメータも付加して本論文の提案手法を用いる，といった柔軟

な対応が可能となった．以上のことから ILQ 設計法はさらに実用性を高めたと言える．そして一般的な2自由度ロバストサーボ系への拡張を行い，それを ILQ 法をベースにした場合と比較することにより，その位置付けを明らかにした．その結果，ループ整形の観点からは本質的な違いはなく，したがって本論文では2自由度ロバストサーボ系の枠組の中で，ILQ 設計法をベースとした実用的な設計法を提案したと言える．

今後の研究課題としては，

1) 他の閉ループ特性もループ整形が行える設計法への拡張．

2) クラス内で所望の応答を得るための系統的な手法の開発．

3) 状態フィードバックで非干渉化が不可能な場合の ILQ ゲインの選定法．

などがあげられる．1) については 2.3 節で述べたように，問題に応じて適切なループを整形する必要があることと，ロバスト安定性だけではなく制御性能なども考慮した設計法が望まれるためである．2) については制御対象が多くの不安定極を持つ場合などはクラスに入るための制約が厳しくなるため，数値例で示したような方法では所望の特性を得ることが難しくなるためである．これに対する解決策の一つとして，本論文で述べたマッチング可能なクラスの中から所望の特性を指定する代わりに $\min ||T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_{3(s)}||_\infty$ とする $Q(s)$ を，モデルマッチング問題を数値的に解くことにより求める方法があげられる．ただし，一般に $T_2(s)$ および $T_3(s)$ が虚軸上に零点を持つため注意を要する．虚軸上に制約のあるモデルマッチング問題の解法については文献 [GGLD '90, SH '89] を組み合わせれば解くことができる．ただし，この場合は本論文で述べた補償器の低次元化を考慮に入れた閉ループ特性や，オブザーバの選定方針が成り立たない可能性がある．3) については 4.3.4 節で述べた手法の参照入力を一般化した場合の拡張である．

参考文献

[Fuji '87] T. Fujii: A new approach to the LQ design from the viewpoint of the inverse regulator problem; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-32**-11, 995/1004 (1987)

[FM '87] 藤井，水島：LQ 設計への新しい試み-最適サーボ系設計への応用，計測自動制御学会論文集，**23**-2，129/135（1987）

[FS '88] 藤井，下村：ILQ 最適サーボ系設計法の一般化，システム制御情報学会論文誌，**1**-6，194/203（1988）

[SF '93] 下村，藤井：ILQ 最適サーボ系設計法の非最小位相系への拡張，システム制御情報学会論文誌，**6**-11，498/507 （1993）

[KAF '96] 黒江，阿部，藤井：参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法，計測自動制御学会論文集，**32**-4，539/546 （1996）

[KF '98] 黒江，藤井：参照入力と制御対象を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法，計測自動制御学会論文集，**34**-3，195/202 （1998）

[SKFS '98] 塩出，黒江，藤井，須田：周波数重み付き最適サーボ系設計への逆問題的アプローチ，システム制御情報学会論文誌，**11**-10，576/584 （1998）

[KF '87] 河原林，藤井：ILQ 法によるエンジン試験装置のサーボ系設計，電気学会論文誌 D，**107**-8，965/971（1987）

[SNTF '95] 末松，中島，辻野，藤井：ILQ 設計法の多変数磁気浮上系への応用，計測自動制御学会論文集，**31**-9，1471/1480 （1995）

[TNF '98] T. Tsujino, K. Nakasima and T. Fujii: Application of $\mathcal{H}_\infty$ Control and Closed Loop Identification to a Magnetic Levitation System; *Asian Journal of Control*, **1**-4, 283/296 (1998)

[ONYBS '96] 大井，西村，柳多，伴，関：ILQ 設計理論に基づく冷間圧延機の高精度板厚制御，システム制御情報学会論文誌，**9**-6，274/286（1996）

[Seki '98] 関：ILQ 設計理論を応用したエレベータの振動抑制制御，システム/制御/情報，**42**-11，599/606（1998）

[Davi '76] E. J. Davison: The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-Invariant Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-21**-1, 25/34 (1976)

[Chen '70] Chi-Tsong Chen: Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston (1970)

[Kuro '99] 黒江：最適制御の逆問題に基づく ILQ 制御系設計法の一般化と周波数整形問題への応用，平成 11 年度 博士学位論文（大阪大学大学院基礎工学研究科）（1999）

[Bode '45] H. W. Bode: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, D. Van Nostrand, Princeton, N. J. (1945)

[DS '81] J. C. Doyle and G. Stein: Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**-1, 4/16 (1981)

[MG '90] D. C. McFarlane, K. Glover: Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **138**, Springer-Verlag (1990)

[Zame '66] G. Zames: On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems, part I, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-11**-2, 228/238 (1966)

[DGKF '89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-34**-8, 831/847 (1989)

[Horo '76] I. M. Horowitz: Synthesis of Feedback Systems, *Academic Press* (1963)

[Pern '81] L. Pernebo: An Algebraic Theory for the Design of Controllers for Linear Multivariable Systems, Parts I and II, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**-1, 171/193 (1981)

[DG '84] C. A. Desoer and C. L. Gustafson: Algebraic Theory of Linear Multivariable Feedback Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-29**-10, 909/917 (1984)

[YJB '76] D. C. Youla, H. A. Jabr and J. J. Bongiorno Jr: Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, Part II; The Multivariable Case, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-21**-3, 319/338 (1976)

[FYH '94] 藤崎，安田，平井：2 自由度ロバストサーボ系の制御構造，計測自動制御学会論文集，**30**-11，1334/1340（1994）

[GM '89] G. C. Goodwin and R. H. Middleton: The Class of All Stable Unbiased State Estimators, *Systems & Control Letters*, **13**, 161/163 (1989)

[KR '92] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea: Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Filtering, *Proc. of 1992 IEEE C. D. C.* , 2299/2304 (1992)

[AM '89] B. D. O. Anderson, J. B. Moore: OPTIMAL CONTROL. Linear Quadratic Method, *Prentice-Hall International*, 251/261 (1989)

[SF '00] 酒井，藤井：ループ整形機能を有する ILQ ロバストサーボ系の解析的設計法，計測自動制御学会 論文集，**36**-4，340/347（2000）
（1999 年度計測自動制御学会学術奨励賞授賞：計測と制御，**39**-4，2000）

[SKNF '98] 酒井，黒江，中島，藤井：磁気浮上系の振動抑制を目的とした周波数整形 ILQ コントローラの設計，システム制御情報学会論文誌，**11**-5，267/276（1998）（1999 年度システム制御情報学会論文賞授賞：システム/制御/情報，**43**-7，1999）

[NSNF '01] 中村，酒井，中島，藤井：最小次元観測器に基づく安定化制御器の導出と周波数整形 ILQ サーボ系設計への応用，システム制御情報学会論文誌，**14**-2，62/70（2001）（掲載予定）

[KFM '94] 木村，藤井，森：ロバスト制御，コロナ社（1994）

[MS '90] 前田，杉江：アドバンスト制御のためのシステム制御理論，朝倉出版（1990）

[Doyl '84] J. C. Doyle: *Lecture Notes in Advances in Multivariable Control*, ONR/Honewell Workshop (1984)

[TM '89] A. J. Telford and J. B. Moore: Doubly coprime factorizations, reduced-order observers, dynamic state estimate feedback, *International J. on Control*, **50**-6, 2583/2597 (1989)

[Reil '83] J. O'Reilly: *Observers for Linear Systems*, Academic Press (1983)

[IIK '88] 岩井，井上，川路：オブザーバ，コロナ社（1988）

[Fuji '92] 藤井：最適レギュレータの逆問題と最適サーボ系設計への応用，現代制御理論基礎講座 初級テキスト，計測自動制御学会（1992）

[DG '86] C. A. Desoer and A. N. Gündes: Decoupling Linear Multioutput Plants by Dynamic Output Feedback: An Algebraic Theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**-8, 744/750 (1986)

[SH '89] T. Sugie and S. Hara: H_∞-suboptimal control problem with boundary constraints, *Systems & Control Letters*, **13** 93/99 (1989)

[GGLD '90] M. Green, K. Glover, D. Limebeer and J. C. Doyle: A J-spectral Factorization Approach to $\mathcal{H}_\infty$ Control, *SIAM J. Control and Optimization*, **28**-6, 1350/1371 (1990)

[Kata '99] 片山：線形システムの最適制御 –デスクリプタシステム入門–，近代科学社（1999）

付 録A　定理3.2.1の証明

(3.10) 式を零とおいて $Q_B(s)$ について解き，これを

$$Q_B(s) = Q_1(s) + Q_2(s) \tag{A.1a}$$
$$Q_B(s) = Q_3(s) + Q_4(s) \tag{A.1b}$$

のように2通りの形に分解する．ただし

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= D^{-1}\left[\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)DK_F^0(sI-A+HC)^{-1}H\right] \\ &\quad\times\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \end{aligned} \tag{A.2a}$$
$$Q_2(s) = D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{r_i(s)}{\alpha(s)}\right\}(\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)+I)\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \tag{A.2b}$$
$$Q_3(s) = D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\phi_i(s)}{\alpha(s)z_i^+(s)}\right\}(\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)+I)\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \tag{A.2c}$$
$$\begin{aligned} Q_4(s) &= \left[-D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}+K_F^0(sI-A+HC)^{-1}H\right] \\ &\quad\times\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \end{aligned} \tag{A.2d}$$

である．以下ではこの分解を利用して，定理の3条件が $Q_B(s)\in \mathrm{RH}_\infty$ となる必要十分条件であることを示す．

最初に $Q_B(s)$ が安定になるための条件（定理の（条件1），(条件2)）を証明する．まず，対 $(A,\ H)$ の可安定性から $G_i(s) := c_i(sI-A)^{-1}H$ の不安定極（伝達極）は重複度も含めて H によらず不変であることに注意すれば，(A,B) の可制御性より，(条件2）中の $\beta_i(s)$ はこの $G_i(s)$ の不安定な伝達極を根に持つ多項式に等しいことがわかる．そうして (A.1a)，(A.1b) 式の第 i ($1\le i\le m$) 行に注目すれば容易に分かるように，$Q(s)$ が安定になるには，これら第 i 行で $z_i^+(s)$ と $\alpha(s)$，$\beta_i(s)$ が相殺されることが必要十分である．以下では，まず (A.1a) 式を用いて前者の相殺と定理の（条件1）の等価性を示し，つぎに (A.1b) 式を用いて後者の相殺と定理の（条件2）の等価性を示す．

まず (A.1a) 式については，明らかに $Q_2(s)$ は $z_i^+(s)$ を分母因子として持たず，また $Q_1(s)$ で $z_i^+(s)$ が相殺される必要十分条件は定理の（条件1）に他ならない．一方 (A.1b) 式については，まず定理の（条件2），および例外が $Q_3(s)$ で $\alpha(s)\beta_i(s)$ が相殺される必要十分条件であることは自明であり，しかも $Q_4(s)$ は以下に示すように $\alpha(s)\beta_i(s)$ を分母因子として持たない．

まず $Q_4(s)$ を変形するとつぎのようになる．

$$Q_4(s) = -D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}\left[I - \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{z_i^+(s)}{\psi_i(s)}\right\}DK_F^0(sI-A+HC)^{-1}H\right] \times\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \tag{A.3}$$

(A.3) 式右辺の2番目と3番目の行列の積を計算するまえに $z_i^+(s)/\psi_i(s)$（プロパ）の実現を可制御正準形で

$$\frac{z_i^+(s)}{\psi_i(s)} =: \left[\begin{array}{c|c} A_{\psi i} & B_{\psi i} \\ \hline C_{\psi i} & D_{\psi i}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & & I_{d_i^+-3} & 0 \\ -a_{i0} & \cdots & -a_{id_i^+-2} & 1 \\ \hline c_{i0} & \cdots & c_{id_i^+-2} & D_{\psi i}\end{array}\right] \tag{A.4}$$

と定義する．ただし，$z_i^+(s)/\psi_i(s)=1$（$d_i=1,\ n_i^+=0$）となるときは，$A_{\psi i}=B_{\psi i}=C_{\psi i}=0,\ D_{\psi i}=1$ とする．(A.3) 式右辺の2番目と3番目の行列の積は

$$\left[I - \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{z_i^+(s)}{\psi_i(s)}\right\}DK_F^0(sI-A+HC)^{-1}H\right]\{C(sI-A)^{-1}H+I\}$$
$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{A_{\psi i}\} & -\operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{B_{\psi i}\}DK_F^0 & 0 & 0 \\ 0 & A-HC & HC & H \\ 0 & 0 & A & H \\ \hline \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{C_{\psi i}\} & -\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\{D_{\psi i}\}DK_F^0 & C & I\end{array}\right]$$
$$=: \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s\end{array}\right] \tag{A.5}$$

となる．(A.5) に対してつぎの変換行列 T による相似変換を行う．ただし，行列 J の $A_{\psi i}=B_{\psi i}=C_{\psi i}=0,\ D_{\psi i}=1$ に対応する行は零とする．

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & J \\ 0 & I & -I \\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\quad J = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_1A^{d_1^+-2} \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \\ \vdots \\ \tilde{c}_mA^{d_m^+-2}\end{bmatrix} \tag{A.6}$$

(2.18)，(2.25a)，(A.4) 式等を用いて計算を行うと，相似変換後は

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}A_sT & T^{-1}B_s \\ \hline C_sT & D_s\end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{ccc|c} \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{A_{\psi i}\} & -\operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{B_{\psi i}\}DK_F^0 & 0 & JH \\ 0 & A-HC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & H \\ \hline \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{C_{\psi i}\} & -\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\{D_{\psi i}\}DK_F^0 & 0 & I\end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{A_{\psi i}\} & JH \\ \hline \operatorname*{blockdiag}_{1\le i\le m}\{C_{\psi i}\} & I\end{array}\right] =: G_m(s) \tag{A.7}$$

となり，$G(s)$ の極（A の固有値）は相殺されることがわかる．また，(A.7) 式を (A.3) 式に代入すると $Q_4(s)$ は

$$Q_4(s) = -D^{-1}\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}G_m(s) \tag{A.8}$$

となり，しかも (A.4) 式の定義より明らかなように右辺の行列の積で $G_m(s)$ の極（$A_{\psi i}$ の固有値）も相殺される．ゆえに $Q_4(s)$ は $\alpha(s)\beta_i(s)$ を分母因子として持たない．

最後に (A.1a) 式を用いて $Q_B(s)$ のプロパ性が定理の（条件3）と等価であることを示す．まず，$\deg\ r_i(s)\le q-1,\ \deg\ \alpha(s)=q$ であるから $Q_2(s)$ はプロパである．よって $Q_B(s)$ と $Q_1(s)$ のプロパ性は等価である．また，$Q_1(s)$ のプロパ性は $\operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\{z_i^+(s)/\psi_i(s)\}\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ のプロパ性によって決まる．今，$\deg\ \psi_i(s)=d_i^+-1=d_i+n_i^+-1,\ \deg\ z_i^+(s)=n_i^+$ であるから $Q_1(s)$，つまり $Q_B(s)$ がプロパになるための $\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)$ の必要十分条件は定理の（条件3）と等価となることがわかる．□

$Q_B(s)$の計算手順

以下では前述の証明の過程で用いた式を利用した効率的な $Q_B(s)$ の計算手順を示す．(A.2c)，(A.8) 式の $Q_3(s)$，$Q_4(s)$ と (2.21) 式の関係式を用いて $Q_B(s)$ を整理するとつぎのようになる．

$$\begin{aligned}
Q_B(s) =& D^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\phi_i(s)}{\alpha(s)z_i^+(s)}\right\}(\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)+I)\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \\
&- D^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}G_m(s) \\
=& \underbrace{D^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{\psi_i(s)}{z_i^+(s)}\right\}\Big[\underbrace{(\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)+I)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}}_{\text{step.1}} - G_m(s)\Big]}_{\text{step.2}} \\
&+ \underbrace{D^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le m}\left\{\frac{r_i(s)}{\alpha(s)}\right\}(\bar{G}_{yn}^{\infty}(s)+I)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}}_{\text{step.3}}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

(A.9) 式をもとに $Q_B(s)$ をつぎの三段階で計算する．

手順1　step.1 の部分で $C(sI-A)^{-1}B+I$ の不安定因子 $\beta_i(s)$ を相殺する．

手順2　手順1の結果も用いて，step.2 の部分で不安定因子 $z_i^+(s)$ を相殺する．

手順3　step.3 の部分で不安定因子 $\alpha(s)\beta_i(s)$ を相殺し，手順2で計算した部分と合わせて一つにまとめる．

付 録B　極配置法による ILQ 設計法

ここでは制御対象が状態フィードバックで非干渉化できない場合でも用いることができる，極配置法による ILQ 設計法 [Fuji '92] について述べる．

1型サーボ系を ILQ 法で設計する場合，n 個の安定な指定極 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ の極配置を行うが，非干渉化が可能な場合についてはそのうち d_i^+ 個の極（ユーザー指定極と呼ぶ）のモードを第 i 出力のみに現れるような極配置を行い，残りの極については安定零点と極零相殺を行っていた．しかし，制御対象が行零点以外の不安定零点を持つ場合は極零相殺ができず，非干渉化行列 D が正則でない場合についても零点の数が減るため，いずれの場合もユーザー指定極の数が増加する．今，第 i 出力に対するユーザー指定極の添字集合を

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_i = \{p_i,\ p_i+1,\ \cdots,\ p_i+d_i^+-1\},\quad 1\le i\le m \\
&p_1=1,\ p_{i+1}=p_i+d_i^+
\end{aligned} \tag{B.1}$$

とおき，制御対象の安定零点と極零相殺をさせる極の添字集合を

$$\mathcal{K}_- = \{p_m,\ p_m+1,\ \cdots,p_m+d_m^+-1\} \tag{B.2}$$

とおく，さらに上述の増加極の添字集合を

$$\mathcal{K}_+ = \{p_m+d_m^+,\ p_m+d_m^++1,\ \cdots,n\} \tag{B.3}$$

とおく．このとき，極配置の手順は以下のようになる．

手順1　A の固有値とは異なる n 個の安定な指定極 $\{s_1,\cdots,s_n\}$ と m 次元ベクトル g_k を選び，ベクトル t_k を

$$t_k=(s_k-A)^{-1}Bg_k,\quad 1\le k\le n \tag{B.4}$$

で与える．ただし，g_k については次式を満たすように選ぶ．

$$g_k = G(s_k)^{-1}e_i, \qquad k\in\mathcal{K}_i \tag{B.5a}$$
$$G(s_k)g_k = 0, \qquad k\in\mathcal{K}_- \tag{B.5b}$$
$$g_k = G(s_k)^{-1}e_m, \qquad k\in\mathcal{K}_+ \tag{B.5c}$$

なお，$s_k,\ k\in\mathcal{K}_-$ については制御対象の安定零点を選ぶ．また，そのときの s_k および (B.4)，(B.5b) 式を満たす t_k，g_k はつぎの一般化固有値問題を

解いて得られる．

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_k \\ g_k \end{bmatrix} = s_k \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_k \\ g_k \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

なお，複素極 s_k は複素共役対 s_k，s_{k+1} として選び，対応する g_k，g_{k+1} も複素共役対として選ぶ．(B.5c) 式からわかるように，増加極に対してはすべて第 m 出力にその影響が現れる．

手順2 基準最適ゲイン K_F^0，K_C^0 を次式で計算する．

$$[K_F^0 \quad K_C^0] = [GT^{-1} \quad I] \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \tag{B.7}$$

なお，Σ の下限値の計算は**定理 2.2.2** を用いる．

付 録C　$\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$と $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ に関する各証明

以下の証明には伝達関数の状態空間表現として，ディスクリプタ表現を利用する．まず，C.1 で証明に用いるディスクリプタ表現とワイヤストラス変換について簡単に述べた後，証明を示す．

C.1　ディスクリプタ形式とワイヤストラス変換 [Kata '99]

$G(s)^{-1} = \{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ をディスクリプタ形式で表すとつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.1}$$

ここで，

$$\bar{E} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} := \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \bar{C} := \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

と定義すると，システム (C.1) のワイヤストラス形式はつぎのように表される．

$$S^{-1}\bar{E}T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad S^{-1}\bar{A}T = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad S^{-1}\bar{B} =: \begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix}, \quad \bar{C}T =: \begin{bmatrix} C_s & C_f \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

ただし，

$$T := [U \quad V], \quad S := [EU \quad \bar{A}V] \tag{C.4}$$

であり，Λ は $(\bar{E},\ \bar{A})$ の固有値からなるジョルダン形式である．また，U は対応する固有ベクトル，一般化固有ベクトル鎖からなる行列，N は無限大固有値に関連したベ

き零行列（零固有値のみを持つジョルダン形式），V は対応する固有ベクトル，一般化固有ベクトル鎖からなる行列である．このとき伝達関数行列は

$$\begin{aligned} G(s)^{-1} &= \bar{C}(s\bar{E}-\bar{A})^{-1}\bar{B} \\ &= C_s(sI-\Lambda)^{-1}B_s + C_f(sN-I)^{-1}B_f \end{aligned} \tag{C.5}$$

となり，システムは遅いモードと呼ばれるプロパな部分（(C.5) 式右辺第 1 項）と速いモードと呼ばれるインプロパな部分（(C.5) 式右辺第 2 項）に分けられる．

C.2　$\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$と$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$のワイヤストラス形式

システム (C.1) が (C.3) 式のように変換されたとする．つまり次式が成り立つ．

$$(s\bar{E}-\bar{A})[U\ \ V] = [\bar{E}U\ \ \bar{A}V]\begin{bmatrix} sI-\Lambda & 0 \\ 0 & sN-I \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

また

$$X := \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K_F & I \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

と定義すると

$$\begin{bmatrix} A-BK_F & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}X \tag{C.8}$$

であり，$\bar{E}X = \bar{E}$ であるから，(C.6) 式は

$$(s\bar{E}-\bar{A}X)[X^{-1}U\ \ X^{-1}V] = [\bar{E}X^{-1}U\ \ \bar{A}XX^{-1}V]\begin{bmatrix} sI-\Lambda & 0 \\ 0 & sN-I \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

と等価である．今，$\tilde{U} := X^{-1}U$, $\tilde{V} := X^{-1}V$ と定義すると (C.9) 式は

$$(s\bar{E}-\bar{A}X)[\tilde{U}\ \ \tilde{V}] = [\bar{E}\tilde{U}\ \ \bar{A}X\tilde{V}]\begin{bmatrix} sI-\Lambda & 0 \\ 0 & sN-I \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

となるから $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ は (C.10) 式のワイヤストラス形式に分解されることが分かる．よって変換行列は $\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ に対しては $T = [U\ V]$, $S = [\bar{E}U\ \bar{A}V]$ であり，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ に対しては $\tilde{T} := [\tilde{U}\ \tilde{V}]$, $\tilde{S} := [\bar{E}\tilde{U}\ \bar{A}X\tilde{V}]$ となる．システム (C.1) に対して，

$$S^{-1}\bar{B} = [\bar{E}U\ \bar{A}V]^{-1}\bar{B} =: \begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

$$\bar{C}T = [0\ \ I][U\ V] =: [\,C_s\ C_f] \tag{C.12}$$

であるから，インプロパな部分の速いモードの伝達関数は

$$C_f(sN-I)^{-1}B_f = [0\ \ I]V(sN-I)^{-1}B_f \tag{C.13}$$

である．また，遅いモードの伝達関数は

$$C_s(sN-I)^{-1}B_s = [0\ \ I]U(sI-\Lambda)^{-1}B_s \tag{C.14}$$

である．つぎに，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ に対しては $\tilde{S} = S$ に注意すると，

$$\tilde{S}^{-1}\bar{B} = S^{-1}\bar{B} = \begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix} \tag{C.15}$$

$$\bar{C}\tilde{T} = [0\ \ I][\tilde{U}\ \ \tilde{V}] = [0\ \ I]X^{-1}[U\ \ V] = [K_F\ \ I][U\ \ V] =: [\,\tilde{C}_s\ \tilde{C}_f] \tag{C.16}$$

であるから，速いモードの伝達関数はつぎのようになる．

$$\tilde{C}_f(sN-I)^{-1}B_f = [K_F\ \ I]V(sN-I)^{-1}B_f \tag{C.17}$$

また，遅いモードの伝達関数は

$$\tilde{C}_s(sN-I)^{-1}B_s = [K_F\ \ I]U(sI-\Lambda)^{-1}B_s \tag{C.18}$$

となる．

C.3　$\tilde{z}_i^+(s)$ が等しいことの証明

ここでは $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ の第 i 列の不安定な最小公倍分母多項式が $z_i^+(s)$ と等しいことを示す．

まず $\tilde{z}_i^+(s)$ は前述のワイヤストラス形式において，不安定な遅いモードのみを根に持つ多項式である．$\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ と $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ の遅いモードの伝達関数は (C.14), (C.18) 式であることから，両者とも Λ の固有値を遅いモードとして持つ．また，両者の伝達関数の違いは C_s と $\tilde{C}_s$ の違いのみである．したがって，両者の不安定な遅いモードの可観測性が等価であることを示せばよい．つまり，指数可観測性が不安定モードについて等価であることを示せばよい．$(C,\ A)$ の可観測性から

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s\bar{E}-\bar{A} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A & B \\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = m+n, \quad \forall s \in \mathcal{C} \tag{C.19}$$

が成り立つので $\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ はすべての指数モードに対して可観測である．今，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ はすべての不安定な指数モードに対して可観測であることを示す．これは $\operatorname{Re}\lambda^+ > 0$ となる任意の $\lambda^+ \in \mathcal{C}$ に対して

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda^+\bar{E}-\bar{A}X \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \lambda^+I-A+BK_F & B \\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = m+n \tag{C.20}$$

が成り立つことを示せばよい．以下，背理法を用いて証明する．今，$\exists\lambda^+\in\mathcal{C}$, $\mathrm{Re}\,\lambda^+>0$ に対して (C.20) 式が成立しないと仮定する．このとき $\exists\eta=[\eta_1^{\mathrm{T}}\ \ \eta_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\neq 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} \lambda^+I-A+BK_F & B \\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=0 \tag{C.21}$$

を満たす．これより

$$\begin{cases} (\lambda^+I-A+BK_F)\eta_1+B\eta_2=0 \\ C\eta_1=0 \\ \eta_2=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda^+I-A+BK_F)\eta_1=0\\ C\eta_1=0\end{cases} \tag{C.22}$$

となる．よって次式が成り立つ．

$$\left\{\lambda^+I-\begin{bmatrix}A-BK_F & -BK_C\\ B_CC & A_C\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\eta_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda^+I-A+BK_F)\eta_1\\ \lambda^+B_CC\eta_1\end{bmatrix}=0 \tag{C.23}$$

上式は $\left[\begin{smallmatrix}A-BK_F & -BK_C\\ B_CC & A_C\end{smallmatrix}\right]$ が λ^+ を固有値として持つことを意味し，閉ループ系の内部安定性に反する（K_F, K_C は偏差系 (2.6) の安定化ゲインとなっていない）．したがって，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ はすべての不安定な指数モードに対して可観測である．そしてこれは $\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ の不安定な指数モードと一致するので，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ の第 i 列の不安定な最小公倍分母多項式は，$\{C(sI-A)^{-1}B\}^{-1}$ のそれ（$\tilde{z}_i^+(s)$）と等しい．

C.4　$\tilde{d}_i$ が等しいことの証明

ここでは $[C\{sI-A+B(K_F^0A+K_C^0C)\}^{-1}B]^{-1}$ の第 i 列の要素のうち，（分子次数 − 分母次数）の最大値が $\tilde{d}_i$ と等しいことを証明する．

以下では $K=K_F^0A+K_C^0C$ とおきなおして議論を進める．$\tilde{d}_i$, $(1\le i\le m)$ については (C.5) 式の速いモード $C_f(sN-I)^{-1}B_f$ の次数差を調べれば良い．これは

$$C_f(sN-I)^{-1}B_f = -C_f(I+sN+s^2N^2+\cdots+s^{\mu-1}N^{\mu-1})B_f \tag{C.24}$$

$$\mu:=\min\{\,i\mid N^i=0,\ i>0\} \tag{C.25}$$

となることから，$\tilde{d}_i$ は次式で定義できる．

$$\tilde{d}_i:=\max\{k\mid C_fN^kb_{f_i}\neq 0\},\quad B_f:=[\,b_{f_1}\ \cdots\ b_{f_m}] \tag{C.26}$$

一方，$\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1}$ については，この最大次数差 $\tilde{d}_i'$ は

$$\tilde{d}_i':=\max\{k\mid \tilde{C}_fN^kb_{f_i}\neq 0\},\quad B_f:=[\,b_{f_1}\ \cdots\ b_{f_m}] \tag{C.27}$$

と定義できる．

以下では $\tilde{d}_i=\tilde{d}_i'$ を証明する．ここでは証明の繁雑さを避けるため，N がひとつのジョルダンブロックを持つ $N=N_1\in\mathcal{R}^{l\times l}$ の場合のみを証明する．N が複数のジョルダンブロックを持つ場合も同様に証明できる．今，N はひとつのジョルダンブロックで構成されるので

$$N=\begin{bmatrix}0_{l-1\times 1} & I_{l-1}\\ 0 & 0_{1\times l-1}\end{bmatrix},\quad \mu=l \tag{C.28}$$

である．

$$V:=[v_1\ \cdots\ v_l],\ v_j:=\begin{bmatrix}v_{j_1}\\ v_{j_2}\end{bmatrix},\ v_{j_1}\in\mathcal{C}^{n\times 1},\ v_{j_2}\in\mathcal{C}^{m\times 1}\quad (j=1,2,\cdots,l) \tag{C.29}$$

と定義すると，$VN=[\,0\ v_1\ \cdots v_{l-1}]$, $VN^2=[\,0\ 0\ v_1\cdots\ v_{l-2}]$, $\ldots$, $VN^{l-1}=[\,0\ \cdots\ 0\ v_1]$ となる．また，v_1 は $\bar{A}u=\lambda\bar{E}u$, $u\neq 0$ の無限大固有値に対する固有ベクトル，つまり $\bar{E}v=\rho\bar{A}v$ の零固有値（$\rho=0$）に対する固有ベクトルであるから $\bar{E}v_1=0$, $v_1\neq 0$ を満たす．よって $\bar{E}$ の構造を考えると $v_{1_1}=0$ となる．つぎに v_2 以降は $\bar{E}v_j=\bar{A}v_{j-1}$, $j>1$ であるので，簡単な計算により

$$v_{j_1}=A^{j-2}Bv_{1_2}+A^{j-3}Bv_{2_2}+\cdots+Bv_{j-1_2}\quad (j>1) \tag{C.30}$$

となることが分かる．

$\tilde{d}_i=\tilde{d}_i'$ を示すには $C_fN^{\tilde{d}_i}b_{f_i}=\tilde{C}_fN^{\tilde{d}_i}b_{f_i}$ かつ $\tilde{C}_fN^{\tilde{d}_i+k}b_{f_i}=0$, $(k>0)$ を示せば十分である．$\tilde{d}_i\le\mu-1$, $\tilde{d}_i'\le\mu-1$ であるから，今，$\tilde{d}_i=\mu-1-k$ $(k\ge 0)$ とすると，定義から

$$C_fN^{\mu-1-k}b_{f_i} = [\,0\ \ I][\,0\ \cdots\ 0\ v_1\ \cdots\ v_{k+1}]b_{f_i}\neq 0 \tag{C.31}$$

$$C_fN^{\mu-k}b_{f_i} = [\,0\ \ I][\,0\ \cdots\ 0\ v_1\ \cdots\ v_k]b_{f_i}=0 \tag{C.32}$$

$$\vdots$$

$$C_fN^{\mu-1}b_{f_i} = [\,0\ \ I][\,0\ \cdots\ 0\ v_1]b_{f_i}=0 \tag{C.33}$$

である．よって

$$[\,0\ \cdots\ 0\ v_{1_2}\ \cdots\ v_{k_2}]b_{f_i}=0 \tag{C.34}$$

$$[\,0\ \cdots\ 0\ v_{1_2}\ \cdots\ v_{k-1_2}]b_{f_i}=0 \tag{C.35}$$

$$\vdots$$

$$[\,0\ \cdots\ 0\ v_{1_2}]b_{f_i}=0 \tag{C.36}$$

となる．(C.30) 式を用いて $N^{\tilde{d}_i}b_{f_i} = N^{\mu-1-k}b_{f_i}$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
N^{\mu-1-k}b_{f_i} &= [\,0\ \cdots\ 0\ v_1\ \cdots\ v_{k+1}]b_{f_i} \\
&= \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & v_{1_1} & \cdots & v_{k+1_1} \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1_2} \end{bmatrix} b_{f_i} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & Bv_{1_2} & \cdots & Bv_{k_2} \\ & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & ABv_{1_2} & \cdots & ABv_{k-1_2} \\ & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
&\quad \left. \cdots + \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & A^kBv_{1_2} \\ & 0 \end{bmatrix} \right\} b_{f_i} \qquad \text{(C.37)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，(C.34)〜(C.36) 式より (C.37) 式の右辺の中括弧内において，第1項以外は b_{f_i} を右から掛けると零となるので

$$
N^{\mu-1-k}b_{f_i} = \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1_2} \end{bmatrix} b_{f_i} \qquad \text{(C.38)}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
C_fN^{\mu-1-k}b_{f_i} &= [\,0\ \ I] \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1_2} \end{bmatrix} b_{f_i} \\
&= [\,K\ \ I] \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1_2} \end{bmatrix} b_{f_i} \\
&= \tilde{C}_fN^{\mu-1-k}b_{f_i} \qquad \text{(C.39)}
\end{aligned}
$$

となる．また (C.38) 式と同様の計算で

$$
N^{\mu-1-k+j}b_{f_i} = \begin{bmatrix} 0\ \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & v_{1_2} & \cdots & v_{k+1-j_2} \end{bmatrix} b_{f_i} \quad (j = 1, 2, \cdots, k) \qquad \text{(C.40)}
$$

となるので，

$$
\tilde{C}_fN^{\mu-1-k+j}b_{f_i} = [\,K\ \ I]N^{\mu-1-k+j}b_{f_i} = [\,0\ \ I]N^{\mu-1-k+j}b_{f_i} = C_fN^{\mu-1-k+j}b_{f_i} = 0 \qquad \text{(C.41)}
$$

である．(C.39)，(C.41) 式から $\tilde{d}_i = \tilde{d}_i'$ が証明された．

付 録D　定理5.4.1の証明

(5.7) 式で $G_{yn}(s) = \bar{G}_{yn}(s)$ とおいて $Q_B(s)$ について解く．このとき $Q_B(s)$ をつぎの2通りの形式に分解する．

$$
\begin{aligned}
Q_B(s) = &\left[\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1} + K_CG_C(s)\right]\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}\bar{G}_{yn}(s)^{\mathrm{T}} \\
&+ \{K_CG_C(s) + K_F(sI-A+HC)^{-1}H\}\{C(sI-A)^{-1}H+I\} \qquad \text{(D.1a)} \\
&\big(\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1} + K_CG_C(s)\big)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}} \\
&\times (\bar{G}_{yn}(s)^{\mathrm{T}} + I) - \{C(sI-A+BK_F+HC)^{-1}B\}^{-1} \qquad \text{(D.1b)}
\end{aligned}
$$

これらの式から $Q_B(s) \in \mathrm{RH}_\infty$ となる $\bar{G}_{yn}(s)$ のクラス，つまりマッチング可能な $\bar{G}_{yn}(s)$ のクラスを求める．

$Q_B(s)$ の安定性について

(D.1) 式の不安定因子は $\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1}$（$\{C(sI-A+BK+HC)^{-1}B\}^{-1}$）および $C(sI-A)^{-1}H+I$，$K_CG_C(s)$ の不安定因子であり，これらを相殺するための $\bar{G}_{yn}(s)$ の条件が**定理 5.4.1** の（条件1），(条件2）と等価であることを示す．

まず，(D.1a) 式を用いて $\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1}$（$\{C(sI-A+BK+HC)^{-1}B\}^{-1}$）の不安定因子を相殺するための条件を求め，これが（条件1）となることを示す．付録C.3から $\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1}$ の第 i 列の不安定な最小公倍分母は $\tilde{z}_i(s)$ と等しい．これは明らかに $K_CG_C(s)$ の各要素の分母多項式（$\alpha(s)$ の因子）と既約である．また，$\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の零点は $A-HC$ の極と等しいから $\tilde{z}_i^+(s)=0$ の根を持たない．よって，$\big(\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)\big)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の第 i 列要素の不安定な最小公倍分母は $\tilde{z}_i^+(s)$ を含み，さらにこれは (D.1a) 式右辺第2項のすべての要素の分母因子と既約である．したがって，$\tilde{z}_i^+(s)$ を相殺するための必要十分条件として（条件1）を得る．

つぎに，(D.1b) 式を用いて $K_CG_C(s)$，$\{C(sI-A+BK)^{-1}B\}^{-1}$ の不安定因子を相殺するための条件を求め，これが（条件2）となることを示す．(D.1b) 式において，$\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の零点は $A-HC$ の極であり，安定であるから $K_CG_C(s)$ の極（$\alpha(s)=0$ の根）と極零相殺を起こさない．したがって $K_CG_C(s)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の各列成分の不安定な最小公倍分母多項式には必ず $\alpha(s)$ が含まれる．次に $\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の第 i 列成分，つまり $C(sI-A)^{-1}H+I$ の第 i 行成分の不安定な最小公倍分母多項式は $\beta_i(s)$ であり，$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)$ は零点として $\beta_i(s)=0$ の根を持たない（零点の定義と証明は付録D.1を参照）．さらに

$\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}$ のすべての分母因子は $\alpha(s)$, $\beta_i(s)$ と既約である．以上より，$\big(\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)\big)\{C(sI-A)^{-1}H+I\}^{\mathrm{T}}$ の第 i 列要素の不安定な最小公倍分母は $\alpha(s)\beta_i(s)$ を含み，しかもこれは $\{C(sI-A+BK_F+HC)^{-1}B\}^{-1}$ の全ての要素の分母因子と既約であるから，この因子を相殺する必要十分条件として（条件 2）を得る．

$Q_B(s)$ のプロパ性について

(D.1a) 式を用いて $Q_B(s)$ がプロパになるための条件を求め，これが（条件 3）となることを示す．(D.1a) 式右辺第 2 項はプロパであるから，$Q_B(s)$ がプロパになるための条件は (D.1a) 式右辺第 1 項がプロパとなる，つまり $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}\bar{G}_{yn}(s)$ がプロパになる条件と等価である．これは**定理 5.3.1** の条件 C3 の証明と等しい，つまり（条件 3）となる．

D.1 $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)$ の零点について

$P(s):=\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)$ が $\beta_i(s)=0$ の根（A の不安定極）を零点に持たないことを示す．$y=P(s)u$ とおき，適当な状態変数を用いて入力 u から出力 y までの状態方程式をディスクリプタ形式で表すと

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK_K & B & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ B_C \end{bmatrix} u \quad \text{(D.2a)}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & I & K_C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{(D.2b)}$$

となる．システム (D.2) の不変零点 $z\in\mathcal{C}$ は次式を満たすものとして定義される [Kata '99].

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}&\begin{bmatrix} A-BK_F-zI & B & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I-zI & B_C \\ 0 & I & K_C & 0 \end{bmatrix} \\ &\le \operatorname{normalrank}\begin{bmatrix} A-BK_F-sI & B & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I-sI & B_C \\ 0 & I & K_C & 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \quad \text{(D.3)}$$

今，明らかに

$$\operatorname{normalrank}\begin{bmatrix} A-BK_F-sI & B & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I-sI & B_C \\ 0 & I & K_C & 0 \end{bmatrix} = n+2m+mq \text{（フルランク）}$$

である．ここで λ が行列 A の不安定極でかつ $P(s)$ の零点であったと仮定する．このとき零でないベクトル $\eta=[\eta_1^{\mathrm{T}}\ \eta_2^{\mathrm{T}}\ \eta_3^{\mathrm{T}}\ \eta_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathcal{C}^{(n+2m+mq)\times 1}$ が存在して

$$\begin{bmatrix} A-BK_F-\lambda I & B & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I-\lambda I & B_C \\ 0 & I & K_C & 0 \end{bmatrix}\eta = 0 \quad \text{(D.4)}$$

を満たす．(D.4) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} (A-BK_F-\lambda I)\eta_1+B\eta_2 &= 0 && \text{(D.5)}\\ -C\eta_1+\eta_4 &= 0 && \text{(D.6)}\\ (A_C-\lambda I)\eta_3+B_C\eta_4 &= 0 && \text{(D.7)}\\ \eta_2+K_C\eta_3 &= 0 && \text{(D.8)}\end{aligned}$$

となる．(D.6)，(D.8) 式より

$$\begin{aligned}\eta_4 &= C\eta_1 && \text{(D.9)}\\ \eta_2 &= -K_C\eta_3 && \text{(D.10)}\end{aligned}$$

となるが，これらを (D.5)，(D.7) 式に代入するとつぎのようになる．

$$\begin{bmatrix} A-BK_F-\lambda I & -BK_C \\ B_CC & A_C-\lambda I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(D.11)}$$

ここで，もし $\eta_1\neq 0$ または $\eta_3\neq 0$ ならば (D.11) 式から行列

$$\begin{bmatrix} A-BK_F & -BK_C \\ B_CC & A_C \end{bmatrix}$$

が A の不安定固有値 λ を持つことになるが，これは閉ループ系の内部安定性に反するため起こり得ない．したがって $\eta_1=\eta_3=0$ であるが，このとき (D.9)，(D.10) 式から $\eta_2=\eta_4=0$ となるため，$\eta=0$ となり，仮定に反する．以上より $P(s)$ つまり $\{C(sI-A+BK_F)^{-1}B\}^{-1}+K_CG_C(s)$ は行列 A の不安定極，つまり $\beta_i(s)=0$ の根を零点に持たない．

付 録E　定理5.7.1の証明

$(Q_{B1}(s),\ H_1)$ を用いたときのフィードバック補償器 $C_{B1}(s)$ はつぎのようになる．

$$C_{B1}(s)=\left[\begin{array}{ccc|c} A_C & 0 & 0 & -B_C \\ BK_C & A-H_1C-B(K_F+D_{qb1}C) & BC_{qb1} & BD_{qb1}+H_1 \\ 0 & -B_{qb1}C & A_{qb1} & B_{qb1} \\ \hline K_C & -K_F-D_{qb1}C & C_{qb1} & D_{qb1} \end{array}\right] \tag{E.1}$$

つぎに，H_2 と (5.16) 式の $Q_{B2}(s)$ を用いた補償器 $C_{B2}(s)$ は，(E.1) 式で H_1 と $Q_{B1}(s)$ をそれぞれ H_2 と $Q_{B2}(s)$ に置き換えることにより，次式で得られる．

$$\begin{aligned} C_{B2}(s)&=\left[\begin{array}{cccc|c} A_C & 0 & 0 & 0 & -B_C \\ BK_C & A-H_2C \\ & -B(K_F+D_{qb1}C) & BC_{qb1} & B(K_{F1}+D_{qb1}C) & BD_{qb1}+H_2 \\ 0 & -B_{qb1}C & A_{qb1} & B_{qb1}C & B_{qb1} \\ 0 & (H_1-H_2)C & 0 & A-H_1C & H_2-H_1 \\ \hline K_C & -K_F-D_{qb1}C & C_{qb1} & K_F+D_{qb1}C & D_{qb1} \end{array}\right] \\ &=:\left[\begin{array}{c|c} A_{B2} & B_{B2} \\ \hline C_{B2} & D_{B2} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{E.2}$$

(E.2) 式に対してつぎの変換行列

$$T=\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で相似変換を行うと，

$$\begin{aligned} C_{B2}(s)&=\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}A_{B2}T & T^{-1}B_{B2} \\ \hline C_{B2}T & D_{B2} \end{array}\right] \\ &=\left[\begin{array}{cccc|c} A-H_2C & 0 & (H_1-H_2)C & 0 & H_2-H_1 \\ 0 & A_C & 0 & 0 & -B_C \\ 0 & BK_C & A-H_1C \\ & & -B(K_F+D_{qb1}C) & BC_{qb1} & BD_{qb1}+H_1 \\ 0 & 0 & -B_{qb1}C & A_{qb1} & B_{qb1} \\ \hline 0 & K_C & -K_F-D_{qb1}C & C_{qb1} & D_{qb1} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{E.3}$$

となる．よって補償器 $C_{B2}(s)$ は内包する $A - H_2C$ のモードが不可観測となることがわかる．この不可観測なモードを取り除くと $C_{B2}(s) = C_{B1}(s)$ となり，(E.1) 式を得る．

関連発表論文

[論文誌]

1. 酒井，黒江，中島，藤井：磁気浮上系の振動抑制を目的とした周波数整形 ILQ コントローラの設計，システム制御情報学会論文誌，**11**-5，267/276 （1998）
2. 酒井，藤井：ループ整形機能を有する ILQ ロバストサーボ系の解析的設計法，計測自動制御学会論文集，**36**-4，340/347 （2000）
3. 中村，酒井，中島，藤井：最小次元観測器に基づく安定化制御器の導出と周波数整形 ILQ サーボ系設計への応用，システム制御情報学会論文誌，**14**-2，62/70 （2001）（掲載予定）
4. 酒井，藤井：フィードフォワード側の自由パラメータを活用した ILQ 設計法の拡張，(計測自動制御学会に投稿中)

[前刷り（査読あり）]

1. M. Sakai, Y. Kuroe, K. Nakashima and T. Fujii: Application of ILQ-based Frequency-Shaping Control to a Magnetic Levitation System, *Proc. of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications*, 1-4 September 1998, 593/597 (1998)

[解説記事]

1. 藤井，酒井：ループ整形機能を有するロバストサーボ系の解析的設計法と磁気浮上制御への応用，計測と制御，**38**-3，202/208 (1999)