The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	高エネルギ分解能電子ライナックの軌道解析に関する研究
Author(s)	竹内, 良亘
Citation	大阪大学, 1975, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1461
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

高エネルギ分解能電子ライナックの軌道解析に関する研究

竹内良亘

報告番号 甲第1821号

論　文　目　録

氏名　竹　内　良　亘

主論文　高エネルギ分解能電子ライナックの軌道解析に関する研究

（主論文のうち印刷公表したもの）

1. 高周波電磁界中の電子軌道に対する近軸不変量
電子通信学会論文誌 56-B巻 12号
昭和 48 年 12 月 25 日

1. Electron Optical Design of Superconducting Electron LINAC, Part I
（超電導電子ライナックの電子幾何光学設計，そのI）
Technology Reports of the Osaka University 24巻 1号
昭和 49 年 3 月 22 日

（主論文のうち未公表のもの）

1. Second-Order Approximation of Electron Trajectories in High Energy Resolution LINAC
（高エネルギ分解能ライナックにおける電子軌道の2次近似）
Particle Accelerators 6巻
昭和 50 年掲載予定

1. Integral Formulation for Second-Order Aberration Coefficients of Longitudinal Properties of LINAC
（ライナックの縦方向特性の2次収差係数に対する積分形の定式化）
Nuclear Instruments and Methods
昭和 50 年掲載予定

1. 高周波加速電磁界中における電子集群の空間電荷効果 ―
近軸理論からのセルフ・コンシステントな取り扱い ―

執筆中

電子通信学会論文誌B投稿予定

PARTICLE ACCELERATORS

Dr. Yoshinobu Takeuchi Dec. 26, 1973

Dear Sir:

Your manuscript Second Order Approximation of Electron Trajectories in High Energy Resolution Linac

has been accepted for publication. Proofs requiring urgent correction will be sent to you as soon as possible.

John P. Blewett
Brookhaven Natl. Lab.
Upton, New York 11973

NUCLEAR INSTRUMENTS AND METHODS
Editor Professor Kai Siegbahn
Institute of Physics
Box 530, S-751 21 UPPSALA 1, Sweden

In our files your contribution has been given the registration number

8427

and you are kindly requested to refer to this number in all further correspondence concerning this paper.

Uppsala December 17 1974

The Editor acknowledges receipt of the following article;

Authors Y. Takeuchi et al.

Title: Integral Formulation for Second-Order ...

☒ which is accepted for publication in Nuclear Instruments and Methods.

☐ as a Letter to the Editor.

According to our publication policy we have to request you to supply the following items before the manuscript can be sent to the publisher;

☐ 1. An abstract in English summarizing the paper.

☐ 2. Name and address of institute where the research work reported has been made.

☐ 3. Figure captions.

☐ 4. The figure material is not ready for direct reproduction. Would you please send inked original drawings or glossy prints of the following figures:

☐ 5. The manuscript needs a linguistic revision. Please supply new manuscript in which the language has been corrected.

☐ 6. List of references with initials of the authors included.

☐ 7.

As soon as we get this new material from you the manuscript will be sent to the publisher.

内　容　梗　概

本論文は，筆者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電子工学専攻）在学中に行ったエネルギ分解能の高いライナック電磁界中の電子軌道の解析に関する研究をまとめたもので，6章からなっている．

第1章においては，エネルギ分解能の高いライナック電磁界中の電子軌道解析に関して従来の方法と本論文との関係を述べ，本論文の意義を明確にしている．

第2章においては，一般の回転対称TMモード電磁界中の電子軌道の縦および横方向エミッタンスの不変性を近軸近似の仮定の下で解析的に証明し，その応用例を示している．また，近軸エミッタンスとLiouville不変量との関係ならびにエミッタンス図と変換行列との関係について考察している．

第3章においては，最適入射位相でのライナック電子軌道の2次近似解析法を扱っている．すなわち，出射エネルギを入射位相幅，入射ビーム径およびビーム入射角の2次収差形式として表現し，その収差係数を軌道方程式から追跡する方法および積分形式で与える方法を示し，特別な場合の収差係数の解析解を与えている．つぎに，軸上電子の出射エネルギの広がりが入射位相幅の2次関数となるように変形された縦方向変換行列を導入し，最後に，2次近似の枠内において縦方向エミッタンスの性質を明らかにしている．

第4章においては，空間電荷効果に対する近軸理論を扱っている．すなわち，電子集群の楕円体モデルの相対論的な線形空間電荷界を導出した後，空間電荷効果の近軸収差表示ならびに等価ビーム径による表示を行っている．つぎに，等価ビーム径のみたすセルフ・コンシステントな方程式の近似解析解をライナック電磁界およびドリフト空間に対して与えている．

第5章においては，第2章および第3章の理論の応用例として超電導ライナックの加速管の設計を行い，その軌道解析例を示している．

第6章は結論で，得られた研究成果をまとめるとともに，残された問題について述べている．

目　　次

内　容　梗　概……(1)
主　要　記　号　表……(5)

第　1　章　序　　論……1

第　2　章　ライナック電磁界中の電子軌道に対する近軸不変量……7
　2．1　ま　え　が　き……7
　2．2　縦および横方向軌道方程式……7
　2．3　縦および横方向近軸エミッタンス……9
　2．4　Liouville 形の近軸不変量……13
　2．5　エミッタンス図と変換行列……15
　2．6　エミッタンス不変性の応用例……17
　2．7　む　す　び……18

第　3　章　ライナック電磁界中の電子軌道の2次近似理論……21
　3．1　ま　え　が　き……21
　3．2　2次の縦方向軌道方程式……21
　3．3　縦方向2次収差に対する軌道追跡……23
　3．4　縦方向2次収差係数の積分表現……24
　　3．4．1　軌道方程式の変換……24
　　3．4．2　収差係数の積分表示……28
　3．5　特別な場合の収差係数……30
　　3．5．1　$v_p = c$ の進行波界に波乗りする場合……30
　　3．5．2　$v_p \ll c$ の後進波界をさらに加えた場合……32
　3．6　最適入射位相での変形縦方向変換行列……34
　3．7　2次近似における縦方向エミッタンスに対する考察……35
　3．8　む　す　び……36

第 4 章　空間電荷効果の近軸近似による解析……37
4．1　まえがき……37
4．2　電子集群の楕円体モデル……37
4．3　空間電荷効果の近軸収差表示……38
4．4　等価ビーム径による空間電荷効果の表示……41
4．5　ビーム代表量の近似解析解……44
4．6　ドリフト空間中での近似解析解……49
4．7　むすび……54

第 5 章　電子ライナックへの適用例……55
5．1　まえがき……55
5．2　加速管内の電磁界分布……55
5．3　軸上電子の2次近似縦方向軌道と横方向近軸軌道とによる加速管の設計……57
5．4　2次近似縦方向軌道……62
5．5　軌道追跡法と積分公式法との比較……66
5．6　むすび……68

第 6 章　結　論……71

謝　辞……73
参考文献……75
本研究に関係ある筆者の発表論文および資料……79

付　録……81
A　横方向2次収差係数……81
B　式（4・17）～（4・20）の導出……83
C　Θの輪郭方程式の導出……84
D　蓄積エネルギWの計算……84

主　要　記　号　表

a_0	:	$E_z(t=T,\ r=0,\ z)$：軸上電界分布
$\mathbf{B}$	:	磁束密度
B^s_ϕ	:	空間電荷磁束密度の ϕ 成分
c	:	自由空間中の光速
$\mathbf{E}$	:	電界
$\mathbf{E}^s$	:	空間電荷電界
$\mathscr{E}^x_0$	:	第1種 Lamé 関数
e	:	$-e$：電子の電荷量
		添字：出射面における諸量
$\mathscr{F}^x_0$	:	第2種 Lamé 関数
f	:	$\omega/2\pi$ ：電磁界の周波数
$f_\theta,\ f_r$	:	バンチ形状を示す関数
I	:	1周期あたりの平均電流（>0）
$I_\tau,\ I_r$	:	縦方向，横方向 Liouville 形近軸不変量
i	:	添字：入射面における諸量
K, K_0, K_1, K_2	:	運動エネルギ，各次摂動解
$\widetilde{K}$	:	K/mc^2
$\hat{K}_1,\ \hat{K}_2$	:	$K_1/K_0,\ K_2/K_0$
$\hat{K}_{1im}$	:	輪郭電子の $\hat{K}_{1i}$
k	:	ω/c ：自由空間の位相定数
$\mathbf{L}$	:	$(c\tau_1',\ \omega\tau_1)$ に対する変換行列
$\mathbf{M},\ \widetilde{\mathbf{M}}$	:	横方向近軸変換行列，空間電荷界を含む場合の行列
m	:	電子の静止質量
N	:	空間電荷効果パラメータ
p_r	:	横方向運動量
q	:	$(kR)^2$
R, R_0, R_1	:	横方向ビーム代表量，各次摂動解

$R_{1\varepsilon}$, $R_{1\mu}$: Ξ_r, N に関する R の 1 次摂動解

r, r_1, r_2 : 横方向変位，各次摂動解

r_{1im} : 輪郭電子の r_{1i}

$S(\ ,\ )$: 引数で張られる面積

$\mathbf{S}'_{klmn}$, $\mathbf{S}_{klmn}$: $\mathbf{T}_{klmn}$ 系に対応する r'_2, kr_2 の 2 次収差係数

T : 基準軌道

T_{opt} : ωT_{opt} ：最適入射位相

$\mathbf{T}$, $\widetilde{\mathbf{T}}$: $(\hat{K}_1, \omega\tau_1)$ の変換行列，空間電荷界を含む場合の行列

$\mathbf{T}'_{klmn}$, $\mathbf{T}_{klmn}$: $c\tau'_2$, $\omega\tau_2$ の 2 次収差係数

t : 時間

$U(\widetilde{K}_0)$: $\widetilde{K}_0(\widetilde{K}_0+2)$

V_z, v_z : $(T')^{-1}$, $(t')^{-1}$

v_p : 電磁界の位相速度

W_τ, W_r : det $\mathbf{T}$, det $\mathbf{M}$

$\hat{W}$: 相対エネルギ変動の代表量

W^K_{klmn}, W^τ_{klmn}, $W^{r'}_{klmn}$, W^r_{klmn} : $\hat{K}_2$, $\omega\tau_2$, r'_2, kr_2 に対する 2 次収差係数

z : ビームの平均的な運動方向

β_T : $(cT')^{-1}$

φ : 円筒座標の φ

ε : 真空の誘電率

ε_l, ε_r, $\widetilde{\varepsilon_l}$, $\widetilde{\varepsilon_r}$: 縦方向，横方向エミッタンス，それらの正規化量

Ξ_θ, Ξ_r : 縦方向，横方向初速度分布パラメータ

η : $e/m>0$ ：$-\eta$ ：電子の比電荷

ω : 電磁界の角周波数

$\widetilde{\omega}$: 摂動のパラメータ

μ : 真空の透磁率

γ_T : $(1-\beta_T)^{-1/2}$

Θ, Θ_0, Θ_1 : 位相変動の代表量，各次摂動解

$\Theta_{1\varepsilon}$, $\Theta_{1\mu}$: Ξ_θ, N に関する Θ の 1 次摂動解

τ_1, τ_2	:	縦方向近軸軌道，2次収差
τ_{1im}	:	輪郭電子のτ_{1i}
$\triangle$	:	変動量を示す記号
$Я'$	:	ビームの傾きの代表量
“ ′ ”	:	zに関する微分

第1章　序　　論

電子ライナックは，高周波電界によって電子を直線状に加速し数MeV以上のエネルギをそれに与える加速装置であり，円形の加速器とちがって，電子ビームの外部への取り出しが容易なこと，また大電流の加速ができること，さらに加速管長を延ばすことでエネルギを高めて行くことができることを最大の特長としている．このような特長をもつ電子ライナックは，従来から物理学実験用のみならず工業用あるいは医療用の各種放射線の線源として重要な役割を果している．さらに近年，超電導技術のマイクロ波加速空胴への応用によってより安定でエネルギのそろった電子ビームを得ることが可能となり，10MeV級電子顕微鏡の加速系として期待されるようになった．(1)〜(3) 筆者の所属する大阪大学工学部電子ビーム研究施設裏研究室においても，この超電導電子ライナックを電子顕微鏡の電子源として用いることを計画している．(4)〜(6)

このようなエネルギ分解能の高い電子ライナックにおいては，縦方向入射条件とエネルギとの関係のみならず，従来考慮されていなかった軸上電子と軸外電子のエネルギの差も正確に評価する必要がある．すなわち，エネルギ分布と入射位相幅，入射半径，入射角との関係を従来の電子ライナックにおけるよりも一層詳細に検討する必要がある．ところが，ライナック電子軌道を厳密に解析的に解くことは，その軌道方程式の強い非線形性のために特殊な場合(7)〜(12)を除いて一般にすこぶる困難である．ここでいう電子軌道とは，z軸に垂直な空間座標をzの関数とみる従来の横方向軌道以外に，電子走行図として知られている時間tをzの関数とみたときの縦方向軌道をも意味している．(13)〜(15) 上述の困難さのため，上記の目的にそう軌道解析の方法としてつぎの二つが考えられよう．一つは解析的な工夫をせず，もっぱら軌道方程式の数値解法にたよる方法，第二は軌道方程式を摂動論によって解析する方法である．

前者は，電子軌道に対する厳密なデータを大量に得ることができる反面，電子軌道に及ぼす種々のパラメータの影響について考察するには不必要な情

報が多すぎるという欠点をもっている．元来，軌道解析の目的は，加速管の設計あるいは実際の特性の説明にあるから，その結果をできるだけ少いパラメータで記述できることが望ましい．この意味で，後者の方法においては，数値解析が必要であるがはるかに少いパラメータで各次の近似軌道を記述でき，さらに近似解析解が見出される可能性がある．実際問題として，電子ライナックの軌道解析においては2次摂動で十分良い近似を得ることができる．そこで問題とする軌道解析の主題は，“空間電荷を含んだ任意の高周波電磁界中の横および縦方向軌道の近軸および2次近似を解析し，その特性を簡潔に記述すること”といえる．

摂動計算における1次摂動の理論すなわち近軸理論については，P. A. Sturrock[13]，E. M. McMillan[16]，R. H. Miller[17]，W. K. H. Panofsky[18]およびG. I. Zhileiko[19]は，その理論をライナック電磁界における縦および横方向軌道の集束，発散に対する検討に用いており，この場合におけるその理論の有効性はすでに実証されている．

ところで，電子の運動過程によらない不変量が知られていれば，軌道解析の手数が大いに省け，場合によっては詳しい解析をすることなしに知りたい情報を得ることができる．良く知られた不変量に断熱不変量があるが，これは電子の位置と電磁界との位相関係が非常にゆっくりと変化する特殊な状況に対するものである．

また，高周波電磁界中の他の不変量として縦および横方向エミッタンスが知られている．この不変性は，横方向変位とそれに対応する運動量ならびに時間とエネルギによって構成される位相空間体積要素が z に対して不変であり，かつ縦と横運動の分離が成立すれば示すことができるとされている．[20][21] ところで，この体積要素の不変性は，従来からLiouvilleの定理によって自明の事実であるとみなされているようである．しかし，良く知られたLiouvilleの定理は，空間変数および“正準”運動量からなる位相空間体積要素が，上記で必要とされる“z”に対してでなく“時間”に対して不変となることを言うものである．勿論，特殊な場合，たとえば位相速度一定のときには，この両者が等価であることは示されているが，[21] 一般の場合につ

いての証明は筆者の知る限りないようである．すなわち，縦および横方向エミッタンスの不変性の成立は十分予想されるが，その厳密な証明および成立条件についての検討はなされたとは言い難い．

さて，電子ライナックにおいて最大加速条件での出射エネルギ分布は，近軸近似では0となるため，2次の摂動論が必要となる．3次以上の高次摂動は，2次摂動解が消滅しない限り不必要である．2次の摂動軌道に関して，M. Boussoukaya − A. Septier[22][23]は，位相速度が変化する進行波電磁界において加速電界のピーク近傍で運動する軸上電子に対して，2次の縦方向軌道方程式を求めている．しかしながら，この方程式を用いた検討は一切おこなわれていない．実際，Boussoukaya − Septier は，出射エネルギに及ぼす種々の入射条件の影響について検討を行う場合，摂動論を展開せずもとの軌道方程式をそのまま数値積分する方法に従っている．

最近，松田－裏[14][24][25]によって高周波電磁界レンズの電子軌道解析に対し興味ある理論が発展されつつある．これは要するに，電子の時間的，空間的ふるまいを光学的に等価とみなし，基準電子のまわりに時間および空間の力学変数を形式的に摂動展開することによってそれらの収差係数を求め，それによって軌道特性を評価する方法である．この方法は，軸外電子のふるまいの解析についてはもちろんのこと，原理的に任意の電磁界中の電子軌道解析に適用することができる．しかし，松田－裏によって導かれた収差係数は，レンズ特性の解析を目的としたものであるゆえ入射条件に対する係数として表現されていない．このままでは電子ライナックの軌道解析に適用できず，また，この収差係数としてはエネルギ分解能を直接に評価しうる形になっていない．そこで改めて摂動論を展開しなおす必要がある．

さて，加速すべき電子ビーム電流を増すと，空間電荷効果を考慮しなければならない．これは本来非線形効果である．しかし，摂動論の考え方からすれば空間電荷効果もまず線形近似で考慮することから始めねばならない．実際にこの方法をとる解析がT. Nishikawa[26]によって行われている．さらに空間電荷界の大きさが加速電磁界に比べて小さければ，それを1次摂動として扱うことができ，空間電荷効果は近軸収差項として取り扱うことがで

きる．

しかしながら，空間電荷界はライナック電磁界中の電子群の特性に左右される．したがってこれは軌道方程式において既知関数として与えられない．空間電荷の影響を厳密に取り扱うには，パルス全体の動きに加え位相空間におけるパルスの構造をセルフ・コンシステントに求めねばならない．例えばBoltzmann－Vlasov方程式とMaxwell方程式とから解を求めようとする方法[27][28]があるが，このときには位相空間における分布状態から改めてパルス全体の弾道的ふるまいを計算せねばならず，厳密であっても迂遠である．また一方，パルスを位相空間において微小部分に分割し，それぞれの部分の軌道をセルフ・コンシステントに求めていく方法も考えられるが，この場合には数値計算のアルゴリズムの複雑さはまぬがれない．

そこで厳密さにおいては少し欠けるが，直接的で物理的にも意味のとり易い方法が必要である．例えばビームの輪郭をいくつかのパラメータ（代表電子の軌道量）で記述し，このパラメータをセルフ・コンシステントに決めようという考えである．このような考えに基づく解析は，プロトン・ライナックの強集束系を対象に近軸理論を出発点として考察されている．すなわち，横方向代表量に関してはI. Kapchinsky－V. Vladimirsky[29]によって，また回転対称楕円体モデルについてはS. Ohnuma[30]によって考察された．さらに最近F. J. Sacherer[31]はビーム統計量のモーメントを考えることによって同様の解析を行っている．しかし，これらいずれの解析も，近軸軌道を特徴づける変換行列とビーム代表量との対応関係を明らかにするという点で，なお不十分である．

一方，このような対応関係については，静電磁界中で空間電荷効果と熱初速度効果の両者を含んだ解析において考察せられている．すなわち，C. C. Cutler－M. E. Hines[32]は近軸軌道方程式へ線形空間電荷界を導入することによってこれら両効果を考察した；軸上を横方向速度$\sqrt{kT/m}$（この表現に限ってkはボルツマン定数，Tは絶対温度）をもって出発する電子の軌道を$\sigma(z)$，陰極端部を初速度0で出発する電子の軌道を$r_e(z)$と書き，この両パラメータで任意のzにおける電流密度分布を解析している．さらに，

G. Herrmann[33]はビーム実効半径を $\{\sigma^2(z)+r_e^2(z)\}^{1/2}$ で定義し，これと空間電荷効果とを対応させることにより，初速度分布と空間電荷効果のセルフ・コンシステントな解析を行った．その後，K. Amboss[34]はHerrmannの結果にもとづいてその実効半径が満たす方程式を導き，さらにその理論と実験結果との一致を確めた．このような静電磁界中の横方向軌道に対するHerrmann－Ambossの手法は，高周波電磁界において縦および横方向軌道を形式的に等価とみなす摂動論の近軸軌道に対しては容易に拡張できることを示唆している．

上にみたように，空間電荷界のセルフ・コンシステントなとり入れは甚だ面倒である．そこで，第2章および第3章においてはこれをきり離してまず考察を進める．第2章においては，近軸近似での不変量を中心に考察する．すなわち，エミッタンス不変性について，近軸軌道方程式からその厳密な証明を与え，さらに近軸軌道に伴うLiouville形不変量とエミッタンスとの関係についても解析的に検討する．なお，このようなエミッタンスの軌道方程式からの取り扱いによれば，さらに2次摂動軌道を考慮することによって，エミッタンスの取り扱いが2次近似の範囲まで拡張される．これは説明の便宜上第3章で述べる．

第3章においては，松田－裏の収差理論の流れに沿って軸外電子の影響も含む2次の縦方向軌道解析を入射条件のみを含む2次収差形式として定式化する．そのさい相対的なエネルギ変動に対する2次収差係数を積分形式で与え，特別な場合のその収差係数の解析解を求める．また，最適入射位相での軸上電子の縦方向特性を簡潔に評価できる縦方向変換行列を導入する．さらに，第2章と関連して，2次近似の枠内で縦方向エミッタンスの性質について述べる．

第4章では，近軸理論に空間電荷界をとり入れる．まず，空間電荷効果を近軸収差項として表現する．つぎに，静電磁界中の横方向軌道に対するHerrmann－Ambossの手法を縦方向軌道に拡張することでライナック電磁界中のパルス電子ビームの空間電荷界をセルフ・コンシステントにとり入れる．そして，そこで導かれるビーム代表量のみたす方程式の近似解を求める．

第5章においては，ライナック加速管の設計および軌道解析に第2章および第3章の理論を適用し，その一般論の有用性を具体的に示す．

本論文によって，ライナックを電子顕微鏡に適用する場合必要な電子ビーム軌道に関する基本量の諸性質を厳密に又統一的に解析でき，装置設計に必要な関係式をすべて明らかにすることができる．

第 2 章　ライナック電磁界中の電子軌道に対する近軸不変量[47)〜(49)]

2．1　まえがき

本章では，近軸不変量であるエミッタンスについて扱う．すなわち，2．2ではライナック電磁界中の縦および横方向の近軸軌道方程式を導出し，2．3において，縦および横方向正規化エミッタンスの不変性を上記近軸軌道方程式から厳密に証明する．さらに2．4でLiouville 形近軸不変量[35)]の存在を示し，それと正規化エミッタンスとの関係を明らかにする．2．5ではエミッタンス図と変換行列との対応関係について考察する．最後に，2．6では縦方向エミッタンス不変性の有用性を示すために，速度変調－集群理論の例をとりあげる．

2．2　縦および横方向軌道方程式

回転対称な一般のＴＭモード電磁界（ただし外部集束磁界と空間電荷界は考慮しない）中の電子に対して，r および t に関するつぎの二つの軌道方程式が成立する．

$$c/k\cdot t''+\left\{(ct')^2-1-r'^2\right\}^{1/2}$$
$$\cdot\left[-\left\{(ct')^2-1\right\}\eta E_z/kc^2-ct'r'\eta B_\phi/kc\right.$$
$$\left.+r'\eta E_r/kc^2\right]=0\,, \qquad (2.1)$$

$$1/k\cdot r''+\left\{(ct')^2-1-r'^2\right\}^{1/2}$$
$$\cdot\left\{-ct'r'\eta E_z/kc^2-(r'^2+1)\eta B_\phi/kc\right.$$
$$\left.+ct'\eta E_r/kc^2\right\}=0\,. \qquad (2.2)$$

ただし，$k=\omega/c$，ω は角周波数，$\eta=e/m>0$，“′”は z に関する微分を表わす．以下において式（2．1）を縦方向軌道方程式，式（2．2）を横方向

軌道方程式と呼ぶ．

ここで，変数 t および r を摂動のパラメータ $\widetilde{\omega}$ によって次のように展開する．

$$\left.\begin{aligned} t &= T+\widetilde{\omega}\tau_1+\widetilde{\omega}^2\tau_2+\cdots \quad , \\ r &= \quad \widetilde{\omega} r_1+\widetilde{\omega}^2 r_2+\cdots \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

上の展開において，$T(z)$ は基準となる縦方向電子軌道であり，その選び方は，考えている時間幅の間に存在する無数の縦方向軌道のうち，任意の軌道を基準軌道 $T(z)$ に選ぶことができる．しかし，実際には，考えている時間幅において中心的なふるまいをする縦方向軌道を $T(z)$ として選んだ方が便利である．たとえば，最大出射エネルギ条件で入射した軸上電子の縦方向軌道として選ぶ．

回転対称ＴＭモードの電磁界成分 E_z，E_r および B_ϕ は，軸上電界分布 $E_z(t=T,\ r=0,\ z)$ の関数として表現され，τ_1，τ_2，r_1 および r_2 の級数に展開される：

$$\begin{aligned} E_z(t,r,z) = {} & E_z(T,0,z)+\widetilde{\omega}\,\partial a_0/\partial(\omega T)\cdot\omega\tau_1 \\ & +\widetilde{\omega}^2\{-1/4\cdot(\partial^2 a_0/\partial(kz)^2-c^2\varepsilon\mu\partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2) \\ & \cdot(kr_1)^2+1/2\cdot\partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2\cdot(\omega\tau_1)^2+\partial a_0/\partial(\omega T) \\ & \cdot\omega\tau_2\}+\cdots\cdots\cdots , \end{aligned} \qquad (2.4)$$

$$E_r=-\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial E_z}{\partial z}\,\partial r\ , \qquad B_\phi=\varepsilon\mu\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\,\partial r \quad . \qquad (2.5)$$

運動エネルギも同様に展開できる：

$$K=K_0+\widetilde{\omega}K_1+\widetilde{\omega}^2K_2+\cdots\cdots\ , \qquad (2.6)$$

ここで，

$$K_0 = mc^2 \left[cT' \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{-1/2} - 1 \right] , \qquad (2.7)$$

$$K_1 = -mc^2 \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{-3/2} c\tau_1' \quad . \qquad (2.8)$$

さて，式（2．3）～式（2．5）を軌道方程式（2．1）および（2．2）に代入し，$\widetilde{\omega}$について0次項をとりだすと基準軌道方程式を，また1次項をとりだすと近軸軌道方程式をうる：

$$c/k \cdot T'' = \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{3/2} \eta a_0 / kc^2 \quad , \qquad (2.9)$$

$$c/k \cdot \tau_1'' - 3 \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{1/2} cT' \eta a_0 / kc^2 \cdot c\tau_1'$$

$$- \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{3/2} \eta / kc^2 \cdot \partial a_0 / \partial (\omega T) \cdot \omega \tau_1 = 0 \quad , \qquad (2.10)$$

$$1/k \cdot r_1'' - \left\{ (cT')^2 - 1 \right\}^{1/2} \eta / kc^2 \cdot \left\{ cT' a_0 r_1' \right.$$

$$\left. + 1/2 \cdot (cT' \partial a_0 / \partial (kz) + \partial a_0 / \partial (\omega T)) k r_1 \right\} = 0 \quad . \qquad (2.11)$$

式（2．10）は近軸横方向量を含まず，また式（2．11）は近軸縦方向量を含まないことから，近軸理論の範囲内では電子の運動を縦方向と横方向とに分離し，基準軌道$T(z)$を仲立ちとしてそれぞれ別個に考察すればよいことがわかる．ただし，

$$\left. \begin{aligned} & c\tau_1' = -(V_z/c)^{-1} (\triangle v_z / v_z)_1 \quad , \\ & V_z = (T')^{-1} , \quad v_z = (t')^{-1} \quad . \end{aligned} \right\} \qquad (2.12)$$

2．3　縦および横方向近軸エミッタンス

回転対称のTMモード電磁界中においては，横方向近軸軌道の性質は位置座標r_1と運動量p_{r1}とがわかれば完全に記述される．p_{r1}はr_1'を用いて

$$p_{r1} = mc\gamma_T \beta_T r_1' \qquad (2.13)$$

と表現される．ただし，

$$\left.\begin{aligned}\beta_{\mathrm{T}}&=V_z/c=\left\{(1+1.96\times10^{-6}V)^2-1\right\}^{1/2}/(1+1.96\times10^{-6}V),\\ \gamma_{\mathrm{T}}&=(1-\beta_{\mathrm{T}}^2)^{-1/2}=1+1.96\times10^{-6}V\quad.\end{aligned}\right\}$$

（２．１４）

さて，ある時刻における電子の横方向特性は横軸を r_1，縦軸を p_{r1} とした位相平面上の一点で表わされる．したがって，ある有限のビーム径と有限の速度分布とを持った電子ビームの，ある z 断面内の電子の集合は図２．１（a）で示されるような閉曲線に囲まれた領域内の点集合で記述される．この閉曲線の形は z 軸に沿って変わるが，この閉曲線で囲まれる面積は不変であることを以下で解析的に証明しよう．なお，この位相平面上の閉曲線で囲まれる面積は横方向正規化エミッタンスと呼ばれるが，本論文においては，次式で示すように横軸を kr_1．縦軸を p_{r1}/mc として規格化した場合の面積

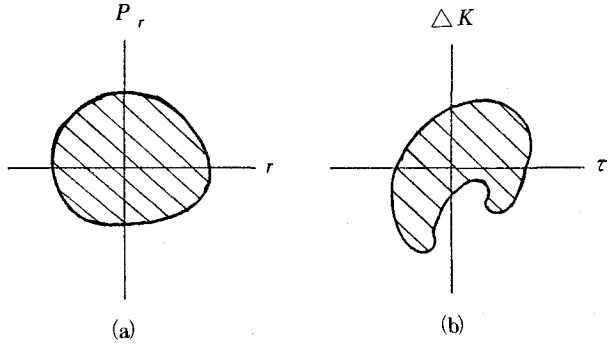


図２．１　正規化エミッタンスの説明図．
(a)　横方向正規化エミッタンス，
(b)　縦方向正規化エミッタンス．

$$\tilde{\varepsilon}_r \triangleq S(kr_1,\ p_{r1}/mc) \qquad (2.15)$$

を横方向正規化エミッタンスと呼ぶ．

さて，式（２．１３）を用いて式（２．１５）を書き換えれば，

$$\tilde{\varepsilon}_r=\gamma_{\mathrm{T}}\beta_{\mathrm{T}}\oint r_1'\delta(kr_1) \qquad (2.16)$$

となる．ただし，δ は積分に対する微分記号を意味し，積分は位相平面にお

ける境界にそっての一周線積分を意味する．式（２．１６）を z で微分すれば，

$$\frac{d\widetilde{\varepsilon}_r}{dz} = -\left\{(cT')^2-1\right\}^{-3/2} c^2 T'T'' \oint r_1' \delta(kr_1)$$

$$+\left\{(cT')^2-1\right\}^{-1/2} \oint \left\{r_1'' \delta(kr_1) + r_1' \frac{d}{dz} \delta(kr_1)\right\} \tag{2.17}$$

となる．上式に表われる T'' に式（２．９）を，r_1'' に式（２．１１）をそれぞれ代入し，δ と d とは互に独立であること，および

$$\left.\begin{aligned} &\oint r_1 \delta r_1 = \frac{1}{2} \oint \delta(r_1^2) \equiv 0 \\ &\oint r_1' \delta r_1' = \frac{1}{2} \oint \delta(r_1'^2) \equiv 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2.18}$$

なる恒等式を用いれば

$$d\widetilde{\varepsilon}_r / dz = 0 \tag{2.19}$$

となる．したがって，式（２．９）および式（２．１１）によって定義される横方向近軸軌道に対して

$$\widetilde{\varepsilon}_r = \text{不変量} \tag{2.20}$$

となる．

式（２．２０）の結果は，式（２．９）および式（２．１１）に含まれる一般の回転対称ＴＭモード電磁界に対して成立し，進行波形を問わない．とくに，進行波形において，断熱不変量が存在するための条件すなわち電子が波乗りする条件[13]が全く満足されない場合でも成立する．

正規化エミッタンス式（２．１５）は，運動量 p_{r1} を変数として含んでいるが，実際の系では r_1' を問題にする場合が多く，したがって

$$\varepsilon_r \triangleq S(kr_1, r_1') \tag{2.21}$$

によって定義される横方向エミッタンスもよく用いられる．式（２．１６）から

$$\varepsilon_r \gamma_T \beta_T = \widetilde{\varepsilon}_r = \text{不変量} \tag{2.22}$$

となり，したがって電子ビームが加速されるにつれて ε_r は小さくなることがわかる．

つぎに縦方向近軸軌道について考えよう．基準軌道 $T(z)$ をとる電子の運動エネルギ K_0 に対し，$t(z)$ における運動エネルギは $K_0+\triangle K$ と表わされる．ところで，4元量の定式化の考え方からすれば，横方向の位置および運動量には縦方向の時間およびエネルギがそれぞれ対応し，したがって，近軸軌道の電子の縦方向特性は横軸を τ_1，縦軸を $(\triangle K)_1 \triangleq K_1$ とする位相面上の一点で表わすことができる．ここで，ある有限の時間間隔内の，有限のエネルギ分散をもった電子ビームを考えれば，ある z 断面内の電子の集合は図2－1(b)で示されるような閉曲線で囲まれた領域内の点集合で表現される．この領域の面積は縦方向正規化エミッタンスと呼ばれる．ただし，ここでは横方向の場合と同様に横軸および縦軸を規格化した場合の面積

$$\tilde{\varepsilon}_l \triangleq S(\omega\tau_1,\ (\triangle K)_1/mc^2) \qquad (2.23)$$

を縦方向正規化エミッタンスとして定義する．式(2.8)を用いて式(2.23)を書き換えれば

$$\tilde{\varepsilon}_l = -(\gamma_T \beta_T)^3 \oint c\tau_1' \delta(\omega\tau_1) \qquad (2.24)$$

となり，これが z によらない不変量であることは横方向の場合とまったく同様にして証明することができる．すなわち

$$\tilde{\varepsilon}_l = \text{不変量} \qquad (2.25)$$

となる．

縦方向の正規化エミッタンス式(2.23)は絶対エネルギ変動を変数として含んでいるが，実際の加速系などにおいては相対エネルギ変動が問題とされる場合が多く，したがって式(2.21)に対応してつぎのような縦方向エミッタンス ε_l を定義する．

$$\varepsilon_l \triangleq S(\omega\tau_1,\ (\triangle K)_1/K_0) \quad . \qquad (2.26)$$

式（２．８）を用いれば

$$\varepsilon_l(\gamma_T-1)=\tilde{\varepsilon}_l=\text{不変量} \qquad (2.27)$$

となり，横方向エミッタンス ε_r と同様，電子ビームが加速されるにつれて ε_l は小さくなることがわかる．したがって加速を伴うバンチングが有効であることがこれからも言える．

２．４　Liouville 形の近軸不変量

縦方向および横方向の近軸軌道方程式（２．１０）および（２．１１）がともに斉次線形２階常微分方程式であることから，変換行列による取り扱いができる．そこで，本節では式（２．１０）および（２．１１）に伴う変換行列と，前節で述べた $\tilde{\varepsilon}_r$ および $\tilde{\varepsilon}_l$ の不変性との関係について考察する．

横方向近軸軌道において，入射面での r_1' と kr_1 とが与えられたとき，任意の z における r_1' と kr_1 とは横方向変換行列**M**を用いてつぎのように与えられる．

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ kr_1 \end{pmatrix}=\mathbf{M}\begin{pmatrix} r_{1i}' \\ kr_{1i} \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.28)$$

ただし，添字 i は入射面における量を表わす．像面においては M_{21} が，またクロス・オーバ面においては M_{22} が０となる．

さて，不変量 $\tilde{\varepsilon}_r$ を与える式（２．１６）は任意の z における表現であるが，そこに含まれる近軸量については式（２．２８）を代入することにより入射面での諸量へ変換できる．この場合，積分路は入射面におけるものに変換され，δ 微分に対しては任意の出発点をとりうる r_{1i}' および r_{1i} がその作用を受けることから式（２．１６）はつぎのように表わされる．

$$\tilde{\varepsilon}_r=\gamma_T\beta_T\oint_i(M_{11}r_{1i}'+M_{12}kr_{1i})$$

$$\cdot\left\{M_{21}\delta(r_{1i}')+M_{22}\delta(kr_{1i})\right\} \quad . \qquad (2.29)$$

ただし，M_{jk} は**M**の成分を表わす．上式に式（２．１８）の恒等式を用い，さらに M_{21} に関する被積分項に部分積分を適用すれば次式をうる．

$$\widetilde{\varepsilon}_r = \gamma_T \beta_T \, det(\mathbf{M}) \oint_i r'_{1i} \, \delta(k r_{1i}) \quad . \qquad (2.30)$$

ここで，入射面における**M**の行列式 $det(\mathbf{M})$ の値は，式（２．２８）からわかるように $\mathbf{M}_i$ ＝単位行列であり，したがって１に等しいことに注意すれば，上式からただちに

$$\gamma_T \beta_T \, det(\mathbf{M}) = \gamma_{Ti} \beta_{Ti} = \text{不変量} \qquad (2.31)$$

をうる．

ところで，斉次線形常微分方程式の基本解系の一般的性質として，Wronski 行列式は，Liouville の公式によって与えられる．これと式（２．３１）とは等価であることは容易に示すことができる．したがって，式（２．３１）の不変量は Liouville 形の不変量[35] の一種と考えることができる．

縦方向の場合についても，上述の横方向の場合と全く同様に考察することができる．縦方向の変換行列を**L**とすれば，任意の z における $c\tau'_1$ および $\omega\tau_1$ は次式で表わされる．

$$\begin{pmatrix} c\tau'_1 \\ \omega\tau_1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} c\tau'_{1i} \\ \omega\tau_{1i} \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.32)$$

もし基準電子が最大出射エネルギを得るような最適位相に入射されたときは，成分 L_{12} は０となることに注意しよう．この場合には第３章で述べるように２次近似が必要となる．

式（２．３２）を式（２．２４）に適用すれば

$$\widetilde{\varepsilon}_l = -(\gamma_T \beta_T)^3 det(\mathbf{L}) \oint_i c\tau'_{1i} \, \delta(\omega\tau_{1i}) \qquad (2.33)$$

をうる．上式に $\widetilde{\varepsilon}_l$ の不変性を用いれば，横方向の場合と同様，つぎのような縦方向の Liouville 形の不変量の存在を示すことができる．

$$(\gamma_T \beta_T)^3 det(\mathbf{L}) = (\gamma_{Ti} \beta_{Ti})^3 = \text{不変量} \quad . \qquad (2.34)$$

2．5　エミッタンス図と変換行列

式（2．28）の変換行列**M**は次式で決定される．

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} r'_{1a} & 1/k\cdot r'_{1b} \\ k\,r_{1a} & r_{1b} \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.35)$$

ただし，r'_{1a}およびr_{1a}は，横方向近軸軌道方程式（2．11）を初期条件$r'_{1i}=1$，$r_{1i}=0$で解いたときの任意のzにおけるr'_1およびr_1の値であり，また，r'_{1b}およびr_{1b}は，初期条件$r'_{1i}=0$，$r_{1i}=1$のときの解である．

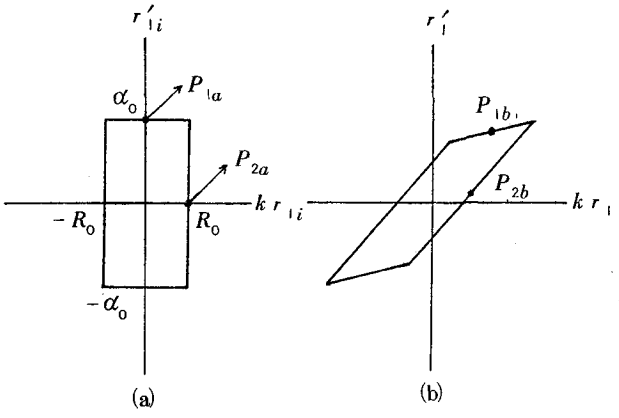


図2．2　横方向エミッタンス図の説明図．
(a)　入射面における横方向エミッタンス図，
(b)　出射面における横方向エミッタンス図．

いま，図2．2（a）に示すような横方向入射条件の電子ビームを考えれば，つぎのことがわかる．

(1)出射エミッタンス図は図2．2（b）に示すように原点対称の平行四辺形となる．したがって，出射エミッタンス図を描くためには，入射エミッタンス図の相隣りあう2頂角に対応する出射点を求めるだけで十分である．

(2)点P_{1b}およびP_{2b}の縦軸上の値を$P_{1b}|_y$および$P_{2b}|_y$で，また横軸上の値を$P_{1b}|_x$および$P_{2b}|_x$で示せば，

$$\left.\begin{aligned} M_{11}&=P_{1b}|_y/\alpha_0\ , & M_{12}&=P_{2b}|_y/R_0\ , \\ M_{21}&=P_{1b}|_x/\alpha_0\ , & M_{22}&=P_{2b}|_x/R_0\ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.36)$$

したがって出射エミッタンス図から変換行列**M**の各要素の値を読みとることができる．

さて，つぎに縦方向の変換行列**L**は次式で与えられる．

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}\tau'_{1a} & 1/k\cdot\tau'_{1b}\\ k\tau_{1a} & \tau_{1b}\end{pmatrix}\quad. \tag{2.37}$$

ただし，τ'_{1a}，τ_{1a}およびτ'_{1b}，τ_{1b}は，横方向の場合と同様に縦方向近軸軌道方程式（2．10）を初期条件$\tau'_{1i}=1$，$\tau_{1i}=0$および$\tau'_{1i}=0$，$\tau_{1i}=1$で解いたときの解である．

いま，縦方向の入射条件が

$$\left.\begin{aligned}&-\triangle E_0\leqq(\triangle K)_{1i}/K_{0i}\leqq\triangle E_0\quad,\\&-\theta_0\leqq\omega\tau_{1i}\leqq\theta_0\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

で規定される電子ビームを考えれば，つぎのことがわかる．

(1)横方向の場合に示した(1)の性質がそのままなりたつ．

(2)入射エミッタンス図上の点Q_{1a}（0，$\triangle E_0$）およびQ_{2a}（θ_0，0）に対応する出射エミッタンス図上の点をQ_{1b}およびQ_{2b}とすれば，

$$\left.\begin{aligned}L_{11}&=Q_{1b}|_y\cdot\frac{\gamma_T-1}{\gamma_{Ti}-1}\left(\frac{\gamma_{Ti}\beta_{Ti}}{\gamma_T\beta_T}\right)^3\frac{1}{\triangle E_0}\quad,\\L_{12}&=-Q_{2b}|_y\cdot\frac{\gamma_T-1}{(\gamma_T\beta_T)^3}\frac{1}{\theta_0}\quad,\\L_{21}&=-Q_{1b}|_x\cdot\frac{(\gamma_{Ti}\beta_{Ti})^3}{\gamma_{Ti}-1}\frac{1}{\triangle E_0}\quad,\\L_{22}&=Q_{2b}|_x/\theta_0\quad.\end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

2．6　エミッタンス不変性の応用例

本節では，縦方向エミッタンス不変性の応用の一例として，縦方向熱初速度分布が存在するときの電子ビームの速度変調－集群をとりあげ，その状態を縦方向エミッタンス図を用いて考察しよう．いま，変調間隙における走行角および速度変調度は1に比べ十分小さいと仮定すれば，集群の中心となる電子の縦方向軌道を基準軌道に対応させることにより，このような電子ビームに近軸理論が適用できる．

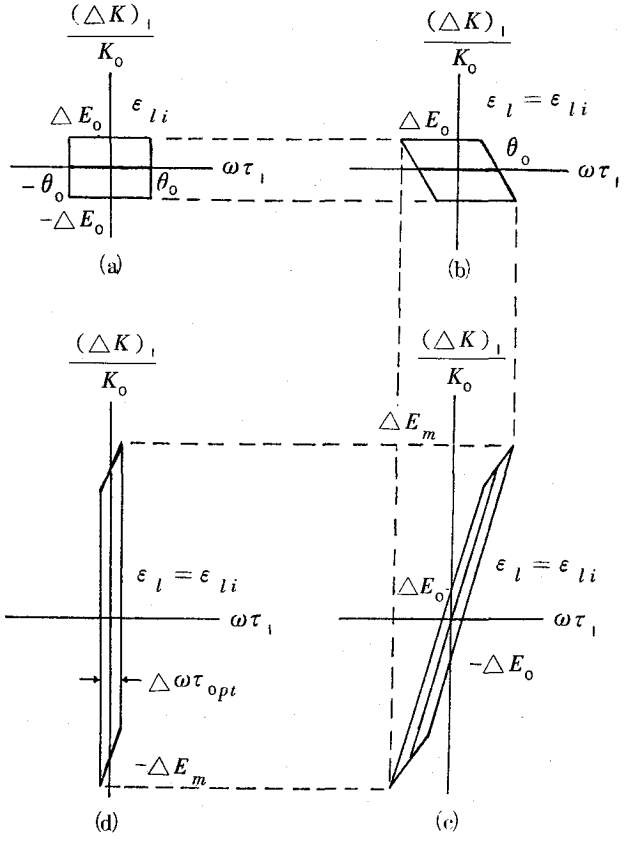


図2．3　近軸理論による速度変調－集群を表わす縦方向エミッタンス図．
(a)　電子銃出口，
(b)　変調間隙入口，
(c)　変調間隙出口，
(d)　最適集群位置．
太実線：初速度分布のない電子群．

図2．3はこのときの縦方向近軸エミッタンス図で，太実線は初速度分布の存在しないときの電子群の状態を示し，細実線はそれが存在するときのエミッタンス図である．まず(a)は電子銃出口（文献(15)の時間的入射瞳を通過した直後）におけるエ

ミッタンス図で，位相幅が$2\theta_0$，エネルギ分布幅が$2\triangle E_0$である．この状態の電子ビームが速度変調間隙入口に達したとき(b)のようになり，このときの縦方向エミッタンスε_lは(a)の縦方向エミッタンスε_{li}に相等しい．つぎに電子ビームが変調間隙で速度変調作用を受けると，その出口においてはエミッタンス図は(c)に示すように，(b)の場合の$(\triangle K)_1/K_0$軸上の値および$\omega\tau_1$をそのまま保ちながらエネルギ分布幅が$2\triangle E_m$に変形する．この$\triangle E_m$は基準の電子の速度と変調度とに依存するが，ε_lは基準の電子が変調作用を受けないことからやはりε_{li}に等しくなっている．この図において，熱初速度分布が存在しないときの電子群についていえば，基準の電子より先に出た電子は第3象限に，後に出る電子は第1象限にある．このように変調された電子ビームがドリフト空間を通過するに従い集群されていく様子は，このエミッタンス図がε_lと$(\triangle K)_1/K_0$とを一定に保ったまま変形していく様子から知ることができる．(d)に示すような最適集群距離における位相幅$\triangle\omega\tau_{opt}$は，ほぼ

$$\triangle\omega\tau_{opt}\simeq 2\theta_0\triangle E_0/\triangle E_m \qquad (2.40)$$

と評価できる．すなわち$\triangle E_0$に対応した初速度分布をもつ電子ビームは集群によって上式で与えられるパルス幅にしか圧縮できないことがわかる．

2.7 むすび

近軸不変量を中心に考察した．

(1) 縦および横方向正規化エミッタンスの不変性を，それぞれ縦および横方向近軸軌道方程式から厳密に証明した．2次近似における不変性は第3章で扱う．

(2) 近軸の縦および横方向正規化エミッタンスはLiouville不変量の一種である．

(3) 原点対称の長方形入射エミッタンス図形に対応する出射エミッタンス図形から，近軸変換行列の各要素の値を読みとることができる．

本章で述べたのは一般論であり，電子ライナック以外に，たとえばピコ秒

パルス電子ビームを利用した時間拡大レンズの設計などにそのまま適用できるもので非常に有用である.

第 3 章　ライナック電磁界中の電子軌道の2次近似理論[50]〜[53]

3．1　まえがき

電子ライナックで最大加速を得るような最適の位相で入射されたパルス電子ビームの出射面における縦方向特性は，2．4で述べたように$L_{12}=0$となるから近軸理論では不十分であり2次近似が必要となる．なお横方向特性については，出射面が像面あるいはクロスオーバ面になるような特別の場合には2次近似あるいはさらに3次近似が必要となるが，通常は近軸近似で十分と思われる．付録Aに2次近似の結果のみをまとめておいた．

本章では，まず3．2において2次の縦方向軌道方程式を導出する．ついで3．3において，その方程式の直接の数値積分によって時間$t(z)$を組織的に追跡することによりその傾き$t'(z)$に対する2次収差係数を求め，そのようにして得られた収差係数を用いて出射エネルギを2次補正する方法について述べる．この方法は計算手続が組織的で比較的単純である．一方，電子幾何光学においては収差係数は積分公式として定式化されていて，これに従えば計算時間の短縮が期待され，またある場合には解析的検討が可能となる．3．4ではこれを扱う．そのさい縦方向の収差係数は，時間の傾き$t'(z)$に対するものの代りに，相対的なエネルギの広がりで表わす．3．5では特別な場合の収差係数の解析解を与える．3．6では，最適入射位相における軸上電子の縦方向特性を簡潔に評価できる変換行列を導入する．最後に，3．7では2次近似の枠内において縦方向エミッタンスの不変性について考察し，ある条件が満たされるときにはその不変性が成立することを示す．

3．2　2次の縦方向軌道方程式

2次の縦方向軌道方程式は，式（2．1）の摂動展開において$\tilde{\omega}$について2次の項をとり出せばえられる：

$$c/k\cdot\tau_2''-3\left\{(cT')^2-1\right\}^{1/2}cT'\eta a_0/kc^2\cdot c\tau_2'$$

$$-\left\{(cT')^2-1\right\}^{3/2}\eta/kc^2\cdot\partial a_0/\partial(\omega T)\cdot\omega\tau_2=\sum_{j=1}^{6}C_j\ . \qquad (3.1)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=\left\{(cT')^2-1\right\}^{3/2}\eta/kc^2\cdot 1/2\cdot\partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2\cdot(\omega\tau_1)^2\ ,\\
C_2&=3\left\{(cT')^2-1\right\}^{1/2}cT'\eta/kc^2\cdot\partial a_0/\partial(\omega T)\cdot c\tau'_1\omega\tau_1\ ,\\
C_3&=3\left\{(cT')^2-1/2\right\}\left\{(cT')^2-1\right\}^{-1/2}\eta a_0/kc^2\cdot(c\tau'_1)^2\ ,\\
C_4&=-1/4\cdot\left\{(cT')^2-1\right\}^{3/2}\eta/kc^2\cdot(\partial^2 a_0/\partial(kz)^2+a_0)(kr_1)^2\ ,\\
C_5&=1/2\cdot\left\{(cT')^2-1\right\}^{1/2}\eta/kc^2\\
&\quad\cdot(\partial a_0/\partial(kz)+cT'\cdot\partial a_0/\partial(\omega T))kr_1r'_1\ ,\\
C_6&=-1/2\cdot\left\{(cT')^2-1\right\}^{1/2}\eta a_0/kc^2\cdot r'^2_1\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

式（2．6）における2次の運動エネルギK_2は

$$\begin{aligned}
K_2=mc^2\big[&3/2\cdot\left\{(cT')^2-1\right\}^{-5/2}cT'(c\tau'_1)^2\\
&+1/2\cdot\left\{(cT')^2-1\right\}^{-3/2}cT'\cdot r'^2_1\\
&-\left\{(cT')^2-1\right\}^{-3/2}c\tau'_2\big]
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

となる．以下では式（2．8）および（3．3）で与えられるK_1およびK_2に対し，便宜上つぎのような表現を用いることにする．

$$K_1/K_0=\kappa\, c\tau'_1\ , \qquad (3.4)$$

$$K_2/K_0=\lambda(c\tau'_1)^2+\zeta r'^2_1+\kappa\, c\tau'_2\ . \qquad (3.5)$$

3．3　縦方向2次収差に対する軌道追跡

2次の縦方向軌道方程式（3．1）の解は，斉次方程式の一般解と特殊解との和として与えられる．式（3．1）の左辺は縦方向近軸軌道方程式（2．10）の左辺と同じ形をしていることから，式（3．1）の右辺は2次方程式を特徴づけるものと考えることができる．この右辺は入射面における近軸変数の2次多項式で表わされるはずである．実際，この右辺は式（3．2）からわかるように基準および近軸解から決定され，後者は式（2．28）および（2.32）からわかるように入射面での近軸変数の1次結合として表現されるからである．したがって，式（3．1）の特解は入射量の2次多項式として表現することができ，その係数は z の関数として与えられている基準軌道量および変換行列から計算される．以上のことから，任意の z における縦方向2次収差はつぎのように表現される．

$$c\tau_2' = \mathbf{T}'_{0002}(c\tau'_{1i})^2 + \mathbf{T}'_{0011}c\tau'_{1i}\omega\tau_{1i} + \mathbf{T}'_{0020}(\omega\tau_{1i})^2$$

$$+\mathbf{T}'_{0200}r'^2_{1i} + \mathbf{T}'_{1100}r'_{1i}\,kr_{1i} + \mathbf{T}'_{2000}(kr_{1i})^2 \quad , \qquad (3.6)$$

$$\omega\tau_2 = \mathbf{T}_{0002}(c\tau'_{1i})^2 + \mathbf{T}_{0011}c\tau'_{1i}\,\omega\tau_{1i} + \mathbf{T}_{0020}(\omega\tau_{1i})^2$$

$$+\mathbf{T}_{0200}r'^2_{1i} + \mathbf{T}_{1100}r'_{1i}\,kr_{1i} + \mathbf{T}_{2000}(kr_{1i})^2 \quad . \qquad (3.7)$$

ここで，$\mathbf{T}'_{klmn}$ および $\mathbf{T}_{klmn}$ は縦方向2次収差係数であり，添字 k，l，m，n は $(kr_{1i})^k\,r'^l_{1i}\,(\omega\tau_{1i})^m\,(c\tau'_{1i})^n$ 項の指数を示している．たとえば $\mathbf{T}'_{0011}\cdot(\omega\tau_{1i})(c\tau'_{1i})$ のごとくである．

$\mathbf{T}'_{klmn}$ および $\mathbf{T}_{klmn}$ の値は，2．5で述べた近軸変換行列 $\mathbf{L}$ および $\mathbf{M}$ を求める場合と同様にして計算することができる．たとえば，$\mathbf{T}_{0020}$ の値は入射条件 $kr_{1i}=0$，$r'_{1i}=0$，$\omega\tau_{1i}=1$ および $c\tau'_{1i}=0$ の下での2次方程式（3．1）の解 $\omega\tau_2$ の値に等しく，また $\mathbf{T}'_{0020}$ の値は $c\tau_2$ の z 微分に等しい．もちろんこの場合，式（3．1）の右辺には同じ入射条件の下での近軸解を代入しなければならない．残りの係数の値も同様にして求めることができる．

式（2．28），（2．32）および（3．6）を式（3．4）および

(3.5)に代入すれば，最適入射位相における出射面での1次および2次の運動エネルギはつぎのように与えられる．

$$K_{1e}/K_{0e}=\kappa_e L_{11} c\tau'_{1i} \quad , \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} K_{2e}/K_{0e}=&\kappa_e \mathbf{T}'_{0020}(\omega\tau_{1i})^2+\kappa_e \mathbf{T}'_{0011}\omega\tau_{1i}\, c\tau'_{1i} \\ &+(\lambda_e L_{11}{}^2+\kappa_e \mathbf{T}'_{0002})(c\tau'_{1i})^2 \\ &+(\zeta_e M_{12}{}^2+\kappa_e \mathbf{T}'_{2000})(kr_{1i})^2 \\ &+(2\zeta_e M_{11}M_{12}+\kappa_e \mathbf{T}'_{1100})kr_{1i}\, r'_{1i} \\ &+(\zeta_e M_{11}{}^2+\kappa_e \mathbf{T}'_{0200})\, r'_{1i}{}^2 \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

ただし，添字 e は出射面における量を表わす．なお，$\mathbf{L}$，$\mathbf{M}$ および $\mathbf{T}'_{klmn}$ に対する添字 e は記法を簡単にするために省略している．式(3.8)および(3.9)に従えば，出射エネルギの広がりを，入射エネルギの広がりの関数(1次のオーダ)および入射位相幅と入射ビームの横方向特性の関数(2次のオーダ)として評価することができる．

3.4 縦方向2次収差係数の積分表現

3.4.1 軌道方程式の変換

本節では，運動エネルギ $K(z)$，位相 $\omega t(z)$，変位 $r(z)$ およびその傾き $r'(z)$ を力学変数とする．このとき軌道方程式(2.1)および(2.2)はつぎのように変換される．

$$\left.\begin{aligned} d\widetilde{K}/d(kz)&=-\eta/kc^2\cdot(r'E_r+E_z) \quad , \\ d(\omega t)/d(kz)&=(\widetilde{K}+1)\,G(\widetilde{K},\ r') \quad , \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} dr'/d(kz)=&\eta/kc^2\cdot G(\widetilde{K},\ r') \\ &\cdot\{-(\widetilde{K}+1)\,G(\widetilde{K},\ r')(E_r-r'E_z)+(1+r'^2)\,cB_\phi\} \ , \end{aligned}$$

$$d(kr)/d(kz)=r' \quad . \tag{3.11}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} &G(\widetilde{K},\ r')=[(r'^2+1)/\{\widetilde{K}(\widetilde{K}+2)\}]^{1/2} \quad , \\ &\widetilde{K}=K/mc^2 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

これらの方程式に対し通常の摂動論を適用すれば，各次数の力学変数がみたす摂動方程式をうることができるが，ここでは運動エネルギについてはその相対的な広がりの満たす摂動方程式へさらに変形する．まず，0次（基準）および1次（近軸）の方程式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &d\widetilde{K}_0/d(kz)=-\eta/kc^2\cdot a_0 \quad , \\ &d(\omega T)/d(kz)=(\widetilde{K}_0+1)\,U(\widetilde{K}_0)^{-1/2} \quad , \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &d\hat{K}_1/d(kz)-p_{kk}(kz)\,\hat{K}_1-p_{k\tau}(kz)\,\omega\tau_1=0 \quad , \\ &d(\omega\tau_1)/d(kz)-p_{\tau k}(kz)\,\hat{K}_1=0 \quad , \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &dr_1'/d(kz)-p_{r'r'}(kz)\,r_1'-p_{r'r}(kz)\,kr_1=0 \quad , \\ &d(kr_1)/d(kz)-r_1'=0 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{K}_0=K_0/mc^2 \quad , \\ &\hat{K}_1=K_1/K_0 \quad , \\ &U(\widetilde{K}_0)=\widetilde{K}_0(\widetilde{K}_0+2) \quad , \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

$$\left.\begin{aligned} &p_{kk}=\eta/kc^2\cdot a_0/\widetilde{K}_0 \quad , \\ &p_{k\tau}=-\eta/kc^2\cdot 1/\widetilde{K}_0\cdot\partial a_0/\partial(\omega T) \quad , \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&p_{\tau k}=-U(\widetilde{K}_0)^{-3/2}\widetilde{K}_0 \quad , \\
&p_{r'r'}=\eta/kc^2\cdot(\widetilde{K}_0+1)U(\widetilde{K}_0)^{-1}a_0 \quad , \\
&p_{r'r}=\eta/2kc^2\cdot[(\widetilde{K}_0+1)U(\widetilde{K}_0)^{-1}\partial a_0/\partial(kz) \\
&\qquad\qquad +U(\widetilde{K}_0)^{-1/2}c^2\varepsilon\mu\partial a_0/\partial(\omega T)] \quad ,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.18)
$$

式（３．１４）の解は入射量の関数として次のように表わされる．

$$
\begin{pmatrix}\hat{K}_1(kz)\\ \omega\tau_1(kz)\end{pmatrix}=\mathbf{T}(kz)\begin{pmatrix}\hat{K}_{1i}\\ \omega\tau_{1i}\end{pmatrix} \quad . \qquad (3.19)
$$

式（３．１５）に対しては式（２．２８）が成りたつ．また，Liouville 形の不変量が式（３．１４）および（３．１５）から導かれる．

$$
\left.\begin{aligned}
&I_\tau=W_\tau(kz)\widetilde{K}_0(kz)=\widetilde{K}_{0i}=\text{不変量} \quad , \\
&I_r=W_r(kz)U(\widetilde{K}_0(kz))^{1/2}=U(\widetilde{K}_{0i})^{1/2}=\text{不変量} \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (3.20)
$$

ただし，

$$
W_\tau=det(\mathbf{T}) \quad , \qquad W_r=det(\mathbf{M}) \quad . \qquad (3.21)
$$

さてつぎに縦方向の２次方程式は次式で与えられる．

$$
\left.\begin{aligned}
&d\hat{K}_2/d(kz)-p_{kk}(kz)\hat{K}_2-p_{k\tau}(kz)\omega\tau_2=q_k^{(2)}(kz) \quad , \\
&d(\omega\tau_2)/d(kz)-p_{\tau k}(kz)\hat{K}_2=q_\tau^{(2)}(kz) \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (3.22)
$$

ただし，

$$
\left.\begin{aligned}
&\hat{K}_2=K_2/K_0 \quad , \\
&q_k^{(2)}=G_2(kz)\{\omega\tau_1(kz)\}^2+G_4(kz)\{kr_1(kz)\}^2 \\
&\qquad +G_5(kz)kr_1(kz)r_1'(kz) \quad , \\
&q_\tau^{(2)}=G_1(kz)\{\hat{K}_1(kz)\}^2+G_3(kz)\{r_1'(kz)\}^2 \quad ,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.23)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
G_1 &= 3/2 \cdot (\widetilde{K}_0 + 1)\, U\, (\widetilde{K}_0)^{-5/2}\, \widetilde{K}_0^{\,2} \quad , \\
G_2 &= -\eta/2kc^2 \cdot 1/\widetilde{K}_0 \cdot \partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2 \quad , \\
G_3 &= 1/2 \cdot (\widetilde{K}_0 + 1)\, U\, (\widetilde{K}_0)^{-1/2} \quad , \\
G_4 &= -\eta/4kc^2 \cdot 1/\widetilde{K}_0 \cdot \left\{ c^2 \varepsilon \mu \partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2 - \partial^2 a_0/\partial(kz)^2 \right\} \quad , \\
G_5 &= \eta/2kc^2 \cdot 1/\widetilde{K}_0 \cdot \partial a_0/\partial(kz) \quad .
\end{aligned}
\right\}
$$

（３．２４）

式（３．２２）の解 $\hat{K}_2$ および $\omega\tau_2$ は，３．３において述べたように斉次方程式の一般解と特解との和として与えられ，つぎのように表現される．

$$
\begin{aligned}
\hat{K}_2(kz) &= T_{11}(kz)\,\hat{K}_{2i} \\
&+ W^K_{0002}(kz)\,\hat{K}_{1i}{}^2 + W^K_{0011}(kz)\,\hat{K}_{1i}\,\omega\tau_{1i} + W^K_{0020}(kz)(\omega\tau_{1i})^2 \\
&+ W^K_{0200}(kz)\,r'_{1i}{}^2 + W^K_{1100}(kz)\,r'_{1i}\,kr_{1i} + W^K_{2000}(kz)(kr_{1i})^2 \quad ,
\end{aligned}
$$

（３．２５）

$$
\begin{aligned}
\omega\tau_2(kz) &= T_{21}(kz)\,\hat{K}_{2i} \\
&+ W^\tau_{0002}(kz)\,\hat{K}_{1i}{}^2 + W^\tau_{0011}(kz)\,\hat{K}_{1i}\,\omega\tau_{1i} + W^\tau_{0020}(kz)(\omega\tau_{1i})^2 \\
&+ W^\tau_{0200}(kz)\,r'_{1i}{}^2 + W^\tau_{1100}(kz)\,r'_{1i}\,kr_{1i} + W^\tau_{2000}(kz)(kr_{1i})^2 \quad .
\end{aligned}
$$

（３．２６）

ここで W^K_{klmn} はエネルギの相対的な広がりに対する縦方向２次収差係数であり，W^τ_{klmn} は位相変動に対するものである．添字 k，l，m，n は $(kr_{1i})^k \cdot r'_{1i}{}^l (\omega\tau_{1i})^m \hat{K}_{1i}{}^n$ 項の指数を示している．式（３．２５）および（３．２６）に従えば，縦および横方向入射条件が２次の相対エネルギ変動および位相変動に及ぼす影響を組織的に評価することができる．ここで，$\hat{K}_2$ は $\omega\tau_2$ とちがって入射面において０とならないことに注意しよう．K_{2i} は式（３．５）からわ

かるように入射面における1次のエネルギ変動および傾きの2乗から生ずるものである：

$$\hat{K}_{2i} = \lambda_i / \kappa_i^2 \cdot \hat{K}_{1i}^2 + \zeta_i r_{1i}'^2 \quad . \tag{3.27}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= -U(\widetilde{K}_0)^{3/2} / \widetilde{K}_0 \quad , \\ \lambda &= 3/2 \cdot U(\widetilde{K}_0)^2 (\widetilde{K}_0 + 1) / \widetilde{K}_0 \quad , \\ \zeta &= 1/2 \cdot U(\widetilde{K}_0)(\widetilde{K}_0 + 1) / \widetilde{K}_0 \quad . \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

3.4.2　収差係数の積分表示

前節において述べたように式（3.25）および（3.26）におけるW^K_{klmn}およびW^τ_{klmn}は式（3.22）の特解であり，これらは良く知られた定数変化法によって積分形に表現される．たとえばW^K_{0002}は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} W^K_{0002}(kz) = {} & T_{12}(kz) \int_{kz_i}^{kz} \left\{ T_{11}^3(kz) G_1(kz) - T_{21}^3(kz) G_2(kz) \right\} \\ & / W_\tau(kz) \cdot d(kz) \\ & + T_{11}(kz) \int_{kz_i}^{kz} \left\{ -T_{12}(kz) T_{11}^2(kz) G_1(kz) \right. \\ & \left. + T_{22}(kz) T_{21}^2(kz) G_2(kz) \right\} / W_\tau(kz) \cdot d(kz) \quad . \end{aligned} \tag{3.29}$$

この表現からW^K_{0002}の値を求めるためには，あらかじめG_1，G_2および**T**の〔kz_i，kz〕における値を知っておかねばならない．G_1およびG_2は式（3.24）からわかるように0次量の関数であり，それらは与えられた軸上電界a_0および入射条件（$\widetilde{K}_{0i}$，ωT_i）の下で式（3.13）から計算することができる．同様に1次量**T**も式（3.14）から計算でき，この方程式における0次量にはいま上で求めた0次解を用いる．

他の係数W^K_{klmn}は次のように与えられる．

$$W^K_{0011}=T_{12}\int 2\,(T_{11}{}^2T_{12}G_1-T_{21}{}^2T_{22}G_2)/W_\tau\,d(kz)$$

$$+T_{11}\int 2\,(-T_{12}{}^2T_{11}G_1+T_{22}{}^2T_{21}G_2)/W_\tau\,d(kz)\quad,\qquad(3.30)$$

$$W^K_{0020}=T_{12}\int(T_{11}T_{12}{}^2G_1-T_{21}T_{22}{}^2G_2)/W_\tau\,d(kz)$$

$$+T_{11}\int(-T_{12}{}^3G_1+T_{22}{}^3G_2)/W_\tau\,d(kz)\quad,\qquad(3.31)$$

$$W^K_{0200}=T_{12}\int\{T_{11}M_{11}{}^2G_3-T_{21}(M_{21}{}^2G_4+M_{21}M_{11}G_5)\}/W_\tau\,d(kz)$$

$$+T_{11}\int\{-T_{12}M_{11}{}^2G_3+T_{22}(M_{21}{}^2G_4+M_{21}M_{11}G_5)\}/W_\tau\,d(kz)\quad,$$

$$(3.32)$$

$$W^K_{1100}=T_{12}\int[2\,T_{11}M_{12}M_{11}G_3-T_{21}\{2\,M_{22}M_{21}G_4$$

$$+(M_{22}M_{11}+M_{21}M_{12})G_5\}]/W_\tau\,d(kz)$$

$$+T_{11}\int[-2\,T_{12}M_{12}M_{11}G_3+T_{22}\{2\,M_{22}M_{21}G_4$$

$$+(M_{22}M_{11}+M_{21}M_{12})\,G_5\}]/W_\tau\,d(kz)\quad,\qquad(3.33)$$

$$W^K_{2000}=T_{12}\int\{T_{11}M_{12}{}^2G_3-T_{21}(M_{22}{}^2G_4+M_{22}M_{12}G_5)\}/W_\tau\,d(kz)$$

$$+T_{11}\int\{-T_{12}M_{12}{}^2G_3+T_{22}(M_{22}{}^2G_4+M_{22}M_{12}G_5)\}/W_\tau\,d(kz)\quad.$$

$$(3.34)$$

これらの係数の値は W^K_{0002} の場合と同様にして求めることができる．

W^τ_{klmn} に対する表現式は，式（3．29）～（3．34）の積分記号の外側にある T_{11} および T_{12} をそれぞれ T_{21} および T_{22} におきかえた式として与えられる．

3．3で述べた軌道追跡法において用いられた縦方向近軸変換行列 **L** および縦方向2次収差係数 $\mathbf{T}'_{klmn}$，$\mathbf{T}_{klmn}$ と，本節で述べた積分公式法において用いられた縦方向近軸変換行列 **T** および縦方向2次収差係数 W^K_{klmn}，W^τ_{klmn} との間の変換式は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} &T_{11}=\kappa/\kappa_i\cdot L_{11}\quad,\qquad T_{12}=\kappa L_{12}\quad,\\ &T_{21}=1/\kappa_i\cdot L_{21}\quad,\qquad T_{22}=L_{22}\quad,\end{aligned}\right\}\qquad(3.35)$$

$$\left.\begin{aligned} &W^K_{0002}=(\kappa_i\lambda L_{11}{}^2-\lambda_i\kappa L_{11}+\kappa_i\kappa\,\mathbf{T}'_{0002})/\kappa_i{}^3\quad,\\ &W^K_{0011}=(2\lambda L_{11}L_{12}+\kappa\,\mathbf{T}'_{0011})/\kappa_i\quad,\\ &W^K_{0020}=\lambda L_{12}{}^2+\kappa\,\mathbf{T}'_{0020}\quad,\\ &W^K_{0200}=(\kappa_i\zeta M_{11}{}^2-\zeta_i\kappa L_{11}+\kappa_i\kappa\,\mathbf{T}'_{0200})/\kappa_i\quad,\\ &W^K_{1100}=2\zeta M_{11}M_{12}+\kappa\,\mathbf{T}'_{1100}\quad,\\ &W^K_{2000}=\zeta M_{12}{}^2+\kappa\,\mathbf{T}'_{2000}\quad,\end{aligned}\right\}\qquad(3.36)$$

$$\left.\begin{aligned} &W^\tau_{0002}=(\kappa_i\,\mathbf{T}_{0002}-L_{21}\lambda_i)/\kappa_i{}^3\quad,\\ &W^\tau_{0011}=\mathbf{T}_{0011}/\kappa_i\quad,\qquad W^\tau_{0020}=\mathbf{T}_{0020}\quad,\\ &W^\tau_{0200}=(\kappa_i\,\mathbf{T}_{0200}-L_{21}\zeta_i)/\kappa_i\quad,\\ &W^\tau_{1100}=\mathbf{T}_{1100}\quad,\qquad W^\tau_{2000}=\mathbf{T}_{2000}\quad.\end{aligned}\right\}\qquad(3.37)$$

3．5　特別な場合の収差係数

3．5．1　$v_p=c$の進行波界に波乗りする場合

基本波のみから構成される進行波界において，位相速度が光速に等しい場合には，ライナック電磁界は横方向に一様な変化のない電磁界となる．このとき，基準軌道の電子が最大加速をうるような位相にトラップされ，その速度が光速に非常に近い場合には次のようになる．

式（3．13）から$\widetilde{K}_0$は

$$\widetilde{K}_0=\eta A_0/kc^2\cdot k(z-z_i)+\widetilde{K}_{0i}\qquad(3.38)$$

となり，基準軌道のエネルギはzに比例して増大する．ただし，A_0は加速電

界の最大値である．式（３．１４）から縦方向近軸変換行列**T**の各要素は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &T_{11}=\widetilde{K}_{0i}/\widetilde{K}_0 \ , \quad T_{12}=0 \ , \quad T_{22}=1 \ , \\ &T_{21}=1/2\cdot\widetilde{K}_{0i}(\eta A_0/kc^2)^{-1}(\widetilde{K}_0^{-2}-\widetilde{K}_{0i}^{-2}) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.39)$$

また，式（３．１５）から横方向近軸変換行列**M**の各要素は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} &M_{11}=\widetilde{K}_{0i}/\widetilde{K}_0 , \quad M_{12}=0 \ , \quad M_{22}=1 \ , \\ &M_{21}=\widetilde{K}_{0i}/(\eta A_0/kc^2)\cdot log(\widetilde{K}_0/\widetilde{K}_{0i}) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.40)$$

M_{21} をみればわかるように，入射ビームに開き角があるときはビーム半径は対数関数に従って増大することがわかる．[20]

式（３．２９）～（３．３４）および（３．３８）～（３．４０）からエネルギ変動に対する２次収差係数 W^K_{klmn} は次のように求まる．

$$\left.\begin{aligned} W^K_{0002}=&1/24\cdot(\eta A_0/kc^2)^{-2}\widetilde{K}_{0i}^{\,2}/\widetilde{K}_0\cdot(\widetilde{K}_0^{-3}-\widetilde{K}_{0i}^{-3}) \\ &-1/4\cdot(\eta A_0/kc^2)^{-2}/\widetilde{K}_0\cdot(\widetilde{K}_0^{-1}-\widetilde{K}_{0i}^{-1}) \\ &-(8\eta A_0/kc^2)^{-1}\widetilde{K}_{0i}^{-2}/\widetilde{K}_0\cdot k(z-z_i) \ , \\ W^K_{0011}=&+(2\eta A_0/kc^2)^{-1}\widetilde{K}_{0i}/\widetilde{K}_0\cdot(\widetilde{K}_0^{-1}-\widetilde{K}_{0i}^{-1}) \\ &+(2\widetilde{K}_{0i}\widetilde{K}_0)^{-1}k(z-z_i) \ , \\ W^K_{0020}=&-1/2\cdot(\widetilde{K}_0-\widetilde{K}_{0i})/\widetilde{K}_0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3.41)$$

$$W^K_{2000}=0 , \quad W^K_{1100}=0 , \quad W^K_{0200}=0 . \qquad (3.42)$$

式（３．４１）の W^K_{0020} において $\widetilde{K}_0 \gg \widetilde{K}_{0i}$ のときは $W^K_{0020}=-1/2$ となる．すなわち，$\triangle K/K_0$ に及ぼす入射パルス幅の影響は $-1/2\cdot(\omega\tau_{1i})^2$ で評価される．この結果は，$\widetilde{K}$ の近似式

$$\widetilde{K}=-k(z-z_i)\eta A_0/kc^2\cdot\cos(\theta_\infty+\omega\tau_{1i})+\widetilde{K}_i,\quad(\theta_\infty=\pi)$$

(3.43)

から得られる良く知られた結果[36]と一致する．式(3.42)の係数は軸外電子の効果に関するもので，今の場合の電磁界は横方向に変化がないことから当然予想される結果である．

位相変動に関しては近軸近似で十分であり，式(3.39)から入射エネルギ変動のそれに及ぼす影響は z^2 に逆比例して小さくなり，出射パルス幅はほぼ入射パルス幅に等しいことがわかる．

3.5.2　$v_p \ll c$ の後進波界をさらに加えた場合

つぎに，上で仮定した進行波電磁界に加え次式で示される空間高調波が存在する場合を考える．

$$a_{-1}=A_{-1}\cos(\omega T-\beta_{-1}z)\quad. \tag{3.44}$$

ただし，$\beta_{-1}<0$ とし，$-\beta_{-1}/k\gg 1$ を仮定する．このような状況においては，電子の運動はなめらかな軌道に小さな振動が重ねあわされたものである．この急激な振動をならしてしまったなめらかな電子の軌道を標準的な方法[37]に従って求めた．まず，基準軌道の平均のエネルギは式(3.38)の右辺と同じである．縦方向の近軸軌道に対する平均的な変換行列は，式(3.39)の右辺の $\widetilde{K}_0$ を平均量におきかえたものになる．横方向の平均的な近軸変換行列はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\langle M_{11}\rangle=\widetilde{K}_{0i}\cdot\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}\cdot\cos(\psi-\psi_i)\ ,\\
&\langle M_{12}\rangle=-(2\sqrt{2})^{-1}\eta A_{-1}/kc^2\cdot\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}\sin(\psi-\psi_i)\ ,\\
&\langle M_{21}\rangle=\widetilde{K}_{0i}(\eta A_0/kc^2)^{-1}(A_{-1}/2\sqrt{2}A_0)^{-1}\sin(\psi-\psi_i)\ ,\\
&\langle M_{22}\rangle=\cos(\psi-\psi_i)\quad.
\end{aligned}\right\}$$

(3.45)

ただし，

$$\psi = A_{-1}/2\sqrt{2}A_0 \cdot \log\langle\widetilde{K}_0\rangle,\quad \psi_i = A_{-1}/2\sqrt{2}A_0 \cdot \log\widetilde{K}_{0i}\ .$$

（３．４６）

$\langle\ \rangle$は平均量を意味する．式（３．４５）からわかるように，波長が基本波に比べ十分に短い後進波は，横方向に集束作用をもっている[38]．

つぎに，エネルギ変動に対する２次収差係数については，$\langle W^K_{00mn}\rangle$ は式（３．４１）右辺の$\widetilde{K}_0$を$\langle\widetilde{K}_0\rangle$におきかえたものに等しい．$\langle W^K_{kl00}\rangle$ は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\langle W^K_{0200}\rangle &= 1/16\cdot(A_{-1}/A_0)^2\{1+(A_{-1}/\sqrt{2}A_0)^2\}^{-1}(A_{-1}/2\sqrt{2}A_0)^{-1}\\
&\quad\cdot\widetilde{K}_{0i}{}^2\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}[\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}\{\sin 2(\psi-\psi_i)+A_{-1}/\sqrt{2}A_0\\
&\quad\cdot\cos 2(\psi-\psi_i)\}-\widetilde{K}_{0i}{}^{-1}A_{-1}/\sqrt{2}A_0]\ ,\\
\langle W^K_{1100}\rangle &= 1/8\cdot(\eta A_{-1}/kc^2)^2\{1+(A_{-1}/\sqrt{2}A_0)^2\}^{-1}(\eta A_0/kc^2)^{-1}\\
&\quad\cdot\widetilde{K}_{0i}\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}[\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}\{\cos 2(\psi-\psi_i)\\
&\quad-A_{-1}/\sqrt{2}A_0\cdot\sin 2(\psi-\psi_i)\}\\
&\quad-\widetilde{K}_{0i}{}^{-1}]\ ,\\
\langle W^K_{2000}\rangle &= -1/32\sqrt{2}\cdot(\eta A_{-1}/kc^2)^3\{1+(A_{-1}/\sqrt{2}A_0)^2\}^{-1}(\eta A_0/kc^2)^{-1}\\
&\quad\cdot\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}[\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}\{\sin 2(\psi-\psi_i)+A_{-1}/\sqrt{2}A_0\cdot\cos 2(\psi-\psi_i)\}\\
&\quad-\widetilde{K}_{0i}{}^{-1}\cdot A_{-1}/\sqrt{2}A_0]\ .
\end{aligned}\right\}$$

（３．４７）

式（３．４７）において，$A_{-1}\sim A_0$とすれば，$\langle W^K_{kl00}\rangle$の値は$\langle\widetilde{K}_0\rangle^{-1}$のオーダをもつ．いま$\langle\widetilde{K}_0\rangle$は非常に大きな値であると仮定しているから，式（３．４４）の空間高調波が加わることによって生ずるW^K_{klmn}の変化はほとんど無視できる．

3．6　最適入射位相での変形縦方向変換行列

軸上電子について考えれば，出射面でのエネルギ分解能は主として入射ビームの位相幅に影響される．このとき，最適入射位相の近傍では，相対エネルギ変動の2次収差を示す式（3．25）において右辺第4項が支配的となる．すなわち，

$$\triangle K_e / K_{0e} \sim W^K_{0020} (\omega\tau_{1i})^2 \qquad (3.48)$$

とかける．ところで最適入射位相の下では，出射面での近軸変換行列**L**の成分 L_{12} は0になっているから，この場合を変換行列の形式で取り扱うには L_{12} のかわりに $L_{12}^* \omega\tau_{1i}$ なる量を代入すればよい．このとき

$$c\tau'_1 = L_{11} c\tau'_{1i} + L_{12}^* (\omega\tau_{1i})^2 \qquad (3.49)$$

となる．上式と式（3．4）とから次式をうる．

$$\triangle K / K_0 = \kappa / \kappa_i \cdot L_{11} \hat{K}_{1i} + \kappa L_{12}^* (\omega\tau_{1i})^2 \quad . \qquad (3.50)$$

一方，式（3．19）および（3．25）から

$$\triangle K / K_0 = T_{11} \hat{K}_{1i} + W^K_{0020} (\omega\tau_{1i})^2 \qquad (3.51)$$

とかける．なお式（3．48）は上式右辺の第2項のみをとり出した形をかいたものである．したがって上2式（3．50）および（3．51）から次の関係をうる．

$$L_{12}^* = W^K_{0020} / \kappa \quad . \qquad (3.52)$$

上式をかきかえると

$$L_{12}^* = -W^K_{0020} \left\{ (cT')^2 - 1 \right\} \left\{ cT' - \sqrt{(cT')^2 - 1} \right\} \qquad (3.53)$$

となる．実はこの L_{12}^* は ct' に対する2次収差係数 $\mathbf{T}'_{0020}$ となっている．

このように変形された縦方向の変換行列は前節までに述べてきた厳密な2次近似ではないが，最適入射位相における軸上電子の縦方向特性を簡潔に評

価できる．そのため加速管の設計などにおいては有用と思われる．

3．7　2次近似における縦方向エミッタンスに対する考察

縦方向正規化エミッタンスを式（2．23）の表現を一般化してつぎのように書こう．

$$\tilde{\varepsilon}_l \triangleq \oint \triangle K/mc^2 \cdot \delta(\omega \triangle t) \quad . \qquad (3.54)$$

上式の$\triangle K$および$\triangle t$を2次近似まで考慮すれば$\tilde{\varepsilon}_l$はつぎのようになる．

$$\tilde{\varepsilon}_l = \oint K_1/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_1) + \oint K_2/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_1)$$

$$+ \oint K_1/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_2) + \oint K_2/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_2) \quad . \qquad (3.55)$$

上式は全体として一般に不変量ではない．しかし，上式右辺の第1項は2．3で述べたように不変である．いま，右辺第2項および第3項を，z軸上を運動する電子ビームについて，式（3．19），（3．20），（3．25）および（3．26）を用いて計算すればつぎのようになる．

$$\oint K_2/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_1) + \oint K_1/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_2)$$

$$= \tilde{K}_0 \oint det\,\mathbf{T} \cdot \hat{K}_{2i}\,\delta(\omega\tau_{1i}) = \oint K_{2i}/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_{1i}) \quad . \qquad (3.56)$$

したがって，式（3．55）右辺第4項を除く残りの項は$\oint (K_{1i} + K_{2i})/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_{1i})$に等しくなる．すなわち，軸上電子ビームに対しては，式（3．55）右辺のこれら3項は不変量である．

式（3．55）の右辺第4項は，3次近似において現われる$\oint K_3/mc^2 \cdot \delta(\omega\tau_1)$および$\oint K_1/mc^2 \delta(\omega\tau_3)$と同じオーダをもっており，不変ではない．しかし，これら3次のエミッタンスとあわせれば，軸上電子ビームに対して不変であることが予想される．

さて，式（3．55）を軸上電子ビームについて考え，さらにそれが次の条件

$$|K_{1i}/K_{0i}| \ll |\omega\tau_{1i}| \qquad (3.57)$$

を満たす場合には，式（３．５５）の$\tilde{\varepsilon}_l$は近軸の$\tilde{\varepsilon}_l$に等しい不変量となる．上の不等式（３．５７）は，入射エネルギの相対的な広がりが入射位相幅に比べ十分小さい，言いかえると図３．１に示すように縦方向エミッタンス図の領域が横軸方向にフラットであることを意味している．

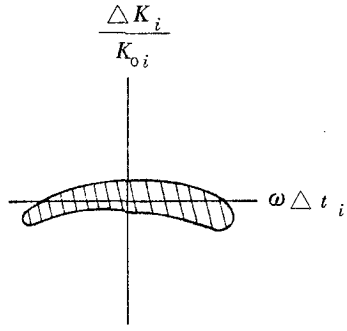


図３．１　軸上電子に対し$\tilde{\varepsilon}_{l2}=\tilde{\varepsilon}_{l1}$とする入射エミッタンス領域．

３．８　むすび

電子ライナックの出射エネルギの広がりに及ぼす種々の入射条件の影響を２次収差係数によって統一的に評価する方法を示した．すなわち

(1)　時間$t(z)$の２次軌道方程式を直接積分することにより，その傾き$t'(z)$に対する２次収差係数を得た．

(2)　エネルギの相対的な広がりに対する２次収差係数を積分公式として定式化した．そして，それをもとに特別な場合の収差係数の解析解を与えた．

(3)　縦方向正規化エミッタンスの２次近似における不変性を軸上電子ビームに対して証明し，さらに，入射エネルギの相対的な広がりが入射位相幅に比べ十分小さい場合には，そのエミッタンスは近軸正規化エミッタンスに等しくなることを示した．

第 4 章　空間電荷効果の近軸近似による解析[54]

4．1　ま　え　が　き

本章では，空間電荷界を考慮したとき，パルス電子ビームのふるまいを近軸近似で解析する方法について述べる．まず4．2においては，電子集群を楕円体モデルで近似したときの空間電荷界を求める．この電磁界は，バンチ内部の座標に対して線形な界である．したがって，この界を近軸方程式の加速電磁界の項へ加えることができる．4．3においては，さらに空間電荷界が加速電磁界に比べ十分小さいと仮定する．そのようにして空間電荷界を1次の摂動として扱うことにより，3．4．1で定義した近軸変換行列を補正する収差係数を導く．4．4では，3．4．1で導出した縦および横方向近軸軌道方程式に対してHerrmann[33]の実効半径の定義を拡張して適用する．それによってAmboss[34]の導いた式に対応する，近軸変換行列とパルス電子ビームの縦および横方向代表量との関係を求め，また同時にこれら代表量のみたすセルフ・コンシステントな方程式を導出する．4．5ではこの方程式の一似近似解の表現を求める．4．6では，ドリフト空間中のビーム代表量の一次近似解析解と球体バンチモデルに対する解とを与える．

4．2　電子集群の楕円体モデル

空間電荷界を解析的に表現するにはパルス電子ビームあるいは電子集群のモデル化が必要である．その場合，速度分布の影響をも解析的に取り扱うためには，ビーム代表量の関数として空間電荷界が表現できるモデルが必要である．従来から考えられている種々のモデルのうち，ほとんどがディスク・モデルと類似な数値モデルであり，速度分布を扱うのは困難である．ここでの目的に合うモデルとしては，楕円体バンチモデルが現在使われている唯一のものと思われる．このモデルに関しては，そのセルフ・コンシステントな電荷密度分布は近似的に一様電荷密度分布になるという証明がB．I．Bondarev－A．D．Vlasov[39]によって与えられている．

静止した一様電荷密度楕円体の内部の空間電荷界はO．Kellogg[40]により

求められている．しかし相対論的速度で動く場合に空間電荷磁界も含めた界は計算されていない．ここではKelloggの界をローレンツ変換するとつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} E_z^{\,s} &= -3/4\cdot\sqrt{\mu/\varepsilon}\ I k\sqrt{U(\widetilde{K}_0)}/(h-q)\cdot(2/\sqrt{h}+L_g)\omega\tau_1\ , \\ E_r^{\,s} &= -3/4\cdot\sqrt{\mu/\varepsilon}\ I k(\widetilde{K}_0+1)/(h-q)\cdot(\sqrt{h}/q+L_g/2)kr_1\ , \\ cB_\phi^{\,s} &= \sqrt{U(\widetilde{K}_0)}/(\widetilde{K}_0+1)\cdot E_r^{\,s}\ . \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} &h \triangleq \left\{\Theta\sqrt{U(\widetilde{K}_0)}\right\}^2\ , \qquad q \triangleq (kR)^2\ , \\ &L_g = 1/\sqrt{h-q}\cdot\log\left|(\sqrt{h}-\sqrt{h-q})/(\sqrt{h}+\sqrt{h-q})\right| \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

であり，式（4．1）は回転楕円体の長軸が z 軸上にある場合，すなわち $h>q$ の場合の界である（図4．1参照）．また，2Θ はこのモデルでのパルス幅，$2R$ はビーム直径である．

4．3　空間電荷効果の近軸収差表示

空間電荷界を加速電磁界に対する摂動として取り扱う場合，パルスの中心点のふるまいを示す基準軌道に対してはその効果は作用しないと考えることになる．3．4．1で導出した近軸軌道方程式（3．14）および（3．15）において，加速電磁界の作用は，式（2．4），（2．5）に示される E_z，E_r および B_ϕ の展開式における1次項を含む項，すなわち $p_{k\tau}\omega\tau_1$ および $p_{r'r}kr_1$ によって示されている．いま，パルス内部の空間電荷界が $E_z^{\,s}$，$E_r^{\,s}$ および $B_\phi^{\,s}$

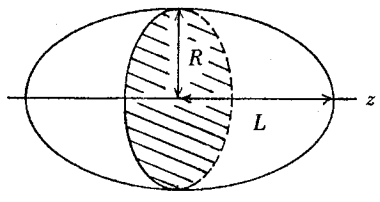


図4．1　電子集群の回転楕円体モデル（$L>R$）．

として求められたとしよう．このとき，これらの空間電荷界の線形近似式を上述の軌道方程式の対応する項へ加えれば次のような方程式がえられる．

$$\left.\begin{aligned} &d\hat{K}_1/d(kz)-p_{kk}\hat{K}_1-(p_{k\tau}+p_{k\tau}{}^s)\omega\tau_1=0\ ,\\ &d(\omega\tau_1)/d(kz)-p_{\tau k}\hat{K}_1=0\ ,\end{aligned}\right\}\qquad(4.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &dr_1'/d(kz)-p_{r'r'}r_1'-(p_{r'r}+p_{r'r}{}^s)kr_1=0\ ,\\ &d(kr_1)/d(kz)-r_1'=0\ .\end{aligned}\right\}\qquad(4.4)$$

ここで，

$$p_{k\tau}{}^s=-\eta/kc^2\cdot 1/\widetilde{K}_0\cdot(E_z{}^s/\omega\tau_1)\ ,\qquad(4.5)$$

$$p_{r'r}{}^s=-\eta/kc^2\cdot[(\widetilde{K}_0+1)U(\widetilde{K}_0)^{-1}(E_r{}^s/kr_1)$$
$$-U(\widetilde{K}_0)^{-1/2}(cB_\phi{}^s/kr_1)]\ .\qquad(4.6)$$

式（4．3）および（4．4）における $p_{k\tau}{}^s$ および $p_{r'r}{}^s$ を式（3．13）で定義される0次解および z の関数と考えれば，$p_{k\tau}{}^s$ および $p_{r'r}{}^s$ が加わったことによって生じた近軸解の変化，$\triangle\hat{K}_1$，$\triangle\omega\tau_1$，$\triangle r_1'$ および $\triangle kr_1$ が満たす線形微分方程式をうることができる．縦方向軌道についてのこの方程式は，

$$\left.\begin{aligned} &d(\triangle\hat{K}_1)/d(kz)-p_{kk}\triangle\hat{K}_1-p_{k\tau}\triangle\omega\tau_1=p_{k\tau}{}^s\omega\tau_1^{(0)}\ ,\\ &d(\triangle\omega\tau_1)/d(kz)-p_{\tau k}\triangle\hat{K}_1=0\ ,\end{aligned}\right\}\qquad(4.7)$$

となる．ただし，上の第1式の右辺においては，$\omega\tau_1^{(0)}$ を $p_{k\tau}{}^s$ がないときの解とし，$p_{k\tau}{}^s(\omega\tau_1-\omega\tau_1^{(0)})$ の項を省略している．つまり，

$$|p_{k\tau}{}^s(\omega\tau_1-\omega\tau_1^{(0)})|\ll|p_{k\tau}{}^s\omega\tau_1^{(0)}|\qquad(4.8)$$

を仮定した．これは $\omega\tau_1-\omega\tau_1^{(0)}$ が2次の微小量であることを意味している．この条件が成り立つためには

$$|p_{k\tau}{}^s|\ll|p_{k\tau}|\qquad(4.9)$$

なる条件，すなわち空間電荷界の大きさが加速電磁界の大きさに比べ十分小さいことが必要である．上の不等式を式（３．１７），（４．１）および（４．５）を用いて書きかえると

$$I \ll 2/(\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\omega/c)\cdot A_0\widetilde{K}_0(\widetilde{K}_0+2)\Theta^3 \qquad (4.10)$$

となる．ただし，オーダを推定するために球体バンチとし，また，A_0は加速電界の最大値である．たとえば，$f=4GH_z$，$A_0=2MV/m$，$K_0=50\,keV$，$\Theta=0.02\pi$（ピコ秒パルス，$R=0.3mm$）のときは上の不等式の右辺は $7\,mA$ となる．

$\omega\tau_1^{(0)}$は式（３．１９）で定義される近軸変換行列**T**を基本解系とする量である．式（４．７）の特解は定数変化法によって求め得る．$p_{k\tau}{}^s$があるときの変換行列，すなわち式（４．３）に対するものを$\widetilde{\mathbf{T}}$で表わせば，この各要素は１次近似において次のように与えられる（**T**は空間電荷効果がないときの変換行列）．

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{T}_{11}&=T_{11}+T_{11}\int_{kz_i}^{kz} p_{k\tau}{}^s T_{22}T_{21}/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\\
&\qquad+T_{12}\int_{kz_i}^{kz} -p_{k\tau}{}^s T_{21}{}^2/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\ ,\\
\widetilde{T}_{12}&=T_{12}+T_{11}\int p_{k\tau}{}^s T_{22}{}^2/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\\
&\qquad+T_{12}\int -p_{k\tau}{}^s T_{21}T_{22}/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\ ,\\
\widetilde{T}_{21}&=T_{21}+T_{21}\int p_{k\tau}{}^s T_{22}T_{21}/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\\
&\qquad+T_{22}\int -p_{k\tau}{}^s T_{21}{}^2/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\ ,\\
\widetilde{T}_{22}&=T_{22}+T_{21}\int p_{k\tau}{}^s T_{22}{}^2/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\\
&\qquad+T_{22}\int -p_{k\tau}{}^s T_{21}T_{22}/\det\mathbf{T}\cdot d(kz)\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

同様にして式（４．４）に対する変換行列$\widetilde{\mathbf{M}}$は１次近似においてつぎのように

なる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\widetilde{M}_{11} &= M_{11} + M_{11}\int_{kz_i}^{kz} p_{r'r}{}^{s} M_{22}M_{21}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz) \\
&\qquad + M_{12}\int_{kz_i}^{kz} -p_{r'r}{}^{s} M_{21}{}^{2}/\det M\cdot d(kz)\ , \\
\widetilde{M}_{12} &= M_{12} + M_{11}\int p_{r'r}{}^{s} M_{22}{}^{2}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz) \\
&\qquad + M_{12}\int -p_{r'r}{}^{s} M_{21}M_{22}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz)\ , \\
\widetilde{M}_{21} &= M_{21} + M_{21}\int p_{r'r}{}^{s} M_{22}M_{21}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz) \\
&\qquad + M_{22}\int -p_{r'r}{}^{s} M_{21}{}^{2}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz)\ , \\
\widetilde{M}_{22} &= M_{22} + M_{21}\int p_{r'r}{}^{s} M_{22}{}^{2}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz) \\
&\qquad + M_{22}\int -p_{r'r}{}^{s} M_{21}M_{22}/\det\mathbf{M}\cdot d(kz)\ .
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.12}
$$

式（4．11）および（4．12）に従って$\widetilde{\mathbf{T}}$および$\widetilde{\mathbf{M}}$の値を求めるには，まず$p_{k\tau}{}^{s}$および$p_{r'r}{}^{s}$に含まれる0次量を与えられた入射条件の下で式（3.13）から計算し，つぎに2．5で述べた方法に従って$\mathbf{T}$および$\mathbf{M}$を求め，また$E_z{}^{s}$，$E_r{}^{s}$および$B_\phi{}^{s}$を0次量およびzの関数として求めておく必要がある．楕円体バンチモデルの場合には前節で求めた式（4．1）で与えられる．

4．4　等価ビーム径による空間電荷効果の表示

式（4．3）および（4．4）に含まれる空間電荷効果を示す$p_{k\tau}{}^{s}$および$p_{r'r}{}^{s}$を，位相空間において何らかの意味でビームの大きさを代表している電子の運動と対応させて決める．Herrmann[33]の考え方を式（2．28）の第2行に適用すれば

$$
kR \cong \left\{ (r'_{1im}\widetilde{M}_{21})^2 + (kr_{1im}\widetilde{M}_{22})^2 \right\}^{1/2} \tag{4.13}
$$

となる．ただし，r'_{1im} および kr_{1im} はそれぞれ入射ビームの横方向エミッタンス図における輪郭の傾きおよび半径である．また式（２．２８）の第１行に対しても同じ考え方をすれば代表の傾きを定義できる．このような量はHerrmannは用いていないが，ここではそれを $\mathcal{R}'$ として定義しよう．

$$\mathcal{R}' \triangleq \left\{ (r'_{1im}\widetilde{M}_{11})^2 + (kr_{1im}\widetilde{M}_{12})^2 \right\}^{1/2} . \qquad (4.14)$$

この $\mathcal{R}'$ は dR/dz とは違う量であることに注意しよう．dR/dz は代表半径の運動過程に伴う変化の微係数であるのに対し，$\mathcal{R}'$ はある z においてパルス電子ビームの横方向エミッタンス図の傾きを代表しているとみなされる量である．この考え方は式（３．１９）からわかるように縦方向近軸軌道に対しても全く同様に適用することができる．代表的な相対エネルギ変動を $\hat{\mathcal{W}}$ で，また代表的なパルス幅を Θ で表わせば，これらは次式で定義される．

$$\hat{\mathcal{W}} \triangleq \left\{ (\hat{K}_{1im}\widetilde{T}_{11})^2 + (\omega\tau_{1im}\widetilde{T}_{12})^2 \right\}^{1/2} , \qquad (4.15)$$

$$\Theta \triangleq \left\{ (\hat{K}_{1im}\widetilde{T}_{21})^2 + (\omega\tau_{1im}\widetilde{T}_{22})^2 \right\}^{1/2} . \qquad (4.16)$$

ただし，$\hat{K}_{1im}$ および $\omega\tau_{1im}$ は，入射パルスビームの縦方向エミッタンス図における輪郭の相対エネルギ変動および位相変動量である．

逆に $\widetilde{\mathbf{T}}$ はビーム代表量でつぎのように表わせる（付録Ｂ参照）．

$$\left.\begin{aligned} (\hat{K}_{1im}\widetilde{T}_{11})^2 &= \hat{\mathcal{W}}^2 \cos^2\{\Phi_1(\Theta, kR, kz)\} , \\ (\omega\tau_{1im}\widetilde{T}_{12})^2 &= \hat{\mathcal{W}}^2 \sin^2\{\Phi_1(\Theta, kR, kz)\} , \end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

$$\Phi_1 = \hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\int_{kz_i}^{kz}\{p_{k\tau} + p_{k\tau}{}^s(\Theta, kR, kz)\}\det\widetilde{\mathbf{T}}/\hat{\mathcal{W}}^2 \cdot d(kz) , \qquad (4.18)$$

$$\left.\begin{aligned} (\hat{K}_{1im}\widetilde{T}_{21})^2 &= \Theta^2 \sin^2\{\Phi_2(\Theta, kR, kz)\} , \\ (\omega\tau_{1im}\widetilde{T}_{22})^2 &= \Theta^2 \cos^2\{\Phi_2(\Theta, kR, kz)\} , \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

$$\Phi_2 = \hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\int p_{\tau k}\det\widetilde{\mathbf{T}}/\Theta^2 \cdot d(kz) . \qquad (4.20)$$

$\widetilde{\mathbf{M}}$についても$\widetilde{\mathbf{T}}$と同様にして$\mathcal{R}'$，kR，およびΘの関数として表現することができる．

$$\left.\begin{aligned}(r'_{1im}\widetilde{M}_{11})^2&=\mathcal{R}'^2\cos^2\{\Phi_3(\Theta,\ kR,\ kz)\},\\(kr_{1im}\widetilde{M}_{12})^2&=\mathcal{R}'^2\sin^2\{\Phi_3(\Theta,\ kR,\ kz)\},\end{aligned}\right\}\qquad(4.21)$$

$$\Phi_3=r'_{1im}\,kr_{1im}\int\{p_{r'r}+p_{r'r}{}^s(\Theta,\ kR,\ kz)\}\cdot\det\widetilde{\mathbf{M}}/\mathcal{R}'^2\cdot d(kz),\qquad(4.22)$$

$$\left.\begin{aligned}(r'_{1im}\widetilde{M}_{21})^2&=(kR)^2\sin^2\{\Phi_4(\Theta,\ kR,\ kz)\},\\(kr_{1im}\widetilde{M}_{22})^2&=(kR)^2\cos^2\{\Phi_4(\Theta,\ kR,\ kz)\},\end{aligned}\right\}\qquad(4.23)$$

$$\Phi_4=r'_{1im}\,kr_{1im}\int\det\widetilde{\mathbf{M}}/(kR)^2\cdot d(kz).\qquad(4.24)$$

ここで，

$$\det\widetilde{\mathbf{T}}=\widetilde{K}_{0i}/\widetilde{K}_0,\qquad\det\widetilde{\mathbf{M}}=\{U(\widetilde{K}_{0i})/U(\widetilde{K}_0)\}^{1/2}.\qquad(4.25)$$

また，$p_{k\tau}{}^s$および$p_{r'r}{}^s$は$(\Theta,\ kR,\ kz)$の関数である．このように，$\widetilde{\mathbf{T}}$および$\widetilde{\mathbf{M}}$の要素は，ビーム代表量$\hat{W}$，Θ，$\mathcal{R}'$およびkRのzに対する依存性と$p_{k\tau}{}^s$および$p_{r'r}{}^s$の関数形が与えられれば計算することができる．

さて，縦方向ビーム代表量$\hat{W}$およびΘのみたす連立の輪郭微分方程式(envelope equation)を，式(4.15)，(4.16)および$\widetilde{\mathbf{T}}$のみたす式(4.3)から求めると次のようになる(付録C参照)．

$$\begin{aligned}&d^2\Theta/d(kz)^2-(1/p_{\tau k}\cdot dp_{\tau k}/d(kz)+p_{kk})d\Theta/d(kz)\\&\quad-(\hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}p_{\tau k}\det\widetilde{\mathbf{T}})^2/\Theta^3\\&\quad-p_{\tau k}\{p_{k\tau}+p_{k\tau}{}^s(\Theta,\ kR,\ kz)\}\Theta=0,\end{aligned}\qquad(4.26)$$

$$\hat{W}^2\Theta^2=\{\Theta/p_{\tau k}\cdot d\Theta/d(kz)\}^2+(\hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\det\widetilde{\mathbf{T}})^2.\qquad(4.27)$$

ここで

$$d\Theta/d(kz)\big|_i=0 \tag{4.28}$$

である．

同様にして横方向ビーム代表量 $\text{Я}'$ および kR のみたす輪郭方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} &d^2(kR)/d(kz)^2-p_{r'r'}\,d(kR)/d(kz)\\ &\quad-(r'_{|im}\,kr_{|im}\,\det\widetilde{\mathbf{M}})^2/(kR)^3\\ &\quad-\left\{p_{r'r}+p_{r'r}{}^{s}(\Theta,\,kR,\,kz)\right\}kR=0\,, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\text{Я}'^{\,2}(kR)^2=\left\{kR\,d(kR)/d(kz)\right\}^2+(r'_{|im}\,kr_{|im}\,\det\widetilde{\mathbf{M}})^2\ . \tag{4.30}$$

ここで

$$d(kR)/d(kz)\big|_i=0 \tag{4.31}$$

である．式（４．２６）および（４．２９）から，縦および横方向特性は，空間電荷効果を示す項 $p_{k\tau}{}^{s}$ および $p_{r'r}{}^{s}$ を仲立ちとして結合していることがわかる．横方向方程式（４．２９）に対し，非相対論近似と静電磁界への変換をほどこし，$p_{r'r}{}^{s}$ に連続ビームに対する表現を代入すれば，式（４．２９）は Amboss[34] の導出した式と一致することが確められる．Ambossは，その方程式の計算結果と実験結果とがほぼ一致することを報告しており，この事実から類推すれば本節で得られた輪郭方程式は，現実をかなり良く記述しているものと期待される．

４．５　ビーム代表量の近似解析解

４．４で導出したビーム代表量のみたす微分方程式（４．２６）および（４．２９）は，$p_{k\tau}{}^{s}$ および $p_{r'r}{}^{s}$ の項に強い非線形性をもった連立微分方程式である．これの解を既知の関数の項で表現することはおそらくは困難であろう．そこでこの微分方程式を解くために考えられる一つの方法は，ライナック電

磁界中を運動するパルス電子ビームの性質を決定するパラメータによって解をべき級数の形で求めることである．このパラメータの値が実際のパルス電子ビームでは十分小さければ，そんなに高次項まで計算しなくても，実用的に十分な精度をもつ近似解をうることができるであろう．

式（4．26）および（4．29）において $p_{\tau k}\, p_{k\tau}{}^{s}$ および $p_{r'r}{}^{s}$ を次に示すように空間電荷効果を示すパラメータとパルスの形状に関係する項との積として表現しよう．

$$\left.\begin{aligned} p_{\tau k}\, p_{k\tau}{}^{s} &= N f_{\theta}(\Theta,\ kR,\ kz)\ , \\ p_{r'r}{}^{s} &= N f_{r}(\Theta,\ kR,\ kz)\ . \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

ここで N は空間電荷効果を示すパラメータで

$$N \fallingdotseq 3/4 \cdot \sqrt{\mu/\varepsilon}\ \eta/kc^{2} \cdot Ik/\left\{U(\widetilde{K}_{0i})\, q_{i}\sqrt{h_{i}}\right\} \qquad (4.33)$$

として定義される．このパラメータは進行波管の理論においてしばしば用いられる諸パラメータ[41]と次のような関係にある．

$$\left\{(\omega_{p}/\omega)^{2}/(C\, u_{0}/c)\right\}^{3/2} = 2^{5/2}/(3\pi^{3/2}) \cdot N\ . \qquad (4.34)$$

ただし，ω_{p} はプラズマ角周波数，C は結合係数，u_{0} は平均直流ビーム速度である．また上式における N は式（4．33）を非相対論近似し $L=R$ としたものである．式（4．32）右辺の f_{θ} および f_{r} はパルス電子ビームの形状に関係した項であり，4．2で述べた楕円体バンチモデルの場合には次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} f_{\theta}(\Theta,\ kR,\ kz) &= -U(\widetilde{K}_{0i})\, q_{i}\sqrt{h_{i}}/\left\{U(\widetilde{K}_{0})\, q\sqrt{h}\,(h/q-1)\right\} \\ &\quad \cdot (2+L_{g}\sqrt{h})\ , \\ f_{r}(\Theta,\ kR,\ kz) &= U(\widetilde{K}_{0i})\, q_{i}\sqrt{h_{i}}/\left\{U(\widetilde{K}_{0})\, q\sqrt{h}\,(h/q-1)\right\} \\ &\quad \cdot (h/q+L_{g}\sqrt{h}/2)\ . \end{aligned}\right\}$$

$$(4.35)$$

f_θ および f_r は極限的な高エネルギの場合にはともに0となり，したがってこの場合には縦方向および横方向運動は空間電荷によって影響されないことがわかる．

またここで，初速度分布の効果を示すパラメータを次式で定義しよう．

$$\left.\begin{aligned} \Xi_\theta &\triangleq (\hat{K}_{1im}\,\omega\tau_{1im}\,\widetilde{K}_{0i})^2 \quad , \\ \Xi_r &\triangleq \left\{ r'_{1im}\,k\,r_{1im}\,U(\widetilde{K}_{0i})^{1/2} \right\}^2 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4.36)$$

Ξ_θ および Ξ_r はエミッタンスの2乗の次元をもつ量であることに注意しよう．

式（4．32）および（4．36）を用いれば式（4．26）および（4．29）は次のようにかかれる．

$$L_\theta(\Theta) = \Xi_\theta / \{U(\widetilde{K}_0)\Theta\}^3 + N f_\theta(\Theta,\ kR,\ kz)\cdot\Theta \ , \qquad (4.37)$$

$$L_r(kR) = \Xi_r / \{U(\widetilde{K}_0)(kR)^3\} + N f_r(\Theta,\ kR,\ kz)\cdot kR \ . \qquad (4.38)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} L_\theta(\Theta) &\triangleq d^2\Theta/d(kz)^2 - (1/p_{\tau k}\cdot dp_{\tau k}/d(kz) + p_{kk})\,d\Theta/d(kz) \\ &\qquad - p_{\tau k}\,p_{k\tau}\,\Theta \quad , \\ L_r(kR) &\triangleq d^2(kR)/d(kz)^2 - p_{r'r'}\,d(kR)/d(kz) - p_{r'r}\,kR \ . \end{aligned}\right\} \qquad (4.39)$$

$L_\theta(\Theta)=0$ および $L_r(kR)=0$ なる微分方程式は，第3章で述べた近軸方程式（3．14）および（3．15）から導かれる $\omega\tau_1$ および kr_1 に対する2階微分方程式と全く同じ形をもっている．式（4．37）および（4．38）の右辺において，その第1項は初速度分布の効果に基づくビーム代表量の3乗に逆比例する非線形項であり，第2項は空間電荷効果にもとづく非線形項である．

さて，Ξ_θ，Ξ_r および N が1に比べ十分小さい場合を考えよう．$L_\theta(\Theta)=0$ および $L_r(kR)=0$ の解を0次解とし，Θ_0 および kR_0 で表わすことにすれ

ば，これらは上述したように空間電荷のない場合における変換行列で書くことができる．

$$\Theta_0 = \Theta_i T_{22} \quad , \qquad kR_0 = kR_i M_{22} \quad . \tag{4.40}$$

ただし，ここで0次解が式（4.28）および（4.31）の入射条件をみたすためには T_{21} および M_{21} にかかる任意定数は0とおかねばならないことに注意しよう．このとき，Ξ_θ および N を摂動パラメータとして式（4.37）から得られる1次の摂動方程式の特解 $\Theta_{1\varepsilon}$ および $\Theta_{1\mu}$ は良く知られた定数変化法によって積分形として求めることができる．

$$\left.\begin{aligned}
\Theta_{1\varepsilon} &= -T_{21}\int_{kz_i}^{kz} T_{22}/\triangle_\theta \cdot \left\{U(\widetilde{K}_0)\Theta_0\right\}^{-3} d(kz) \\
&\quad + T_{22}\int_{kz_i}^{kz} T_{21}/\triangle_\theta \cdot \left\{U(\widetilde{K}_0)\Theta_0\right\}^{-3} d(kz) \quad , \\
\Theta_{1\mu} &= -T_{21}\int_{kz_i}^{kz} T_{22} f_\theta(\Theta_0, kR_0, kz)\cdot\Theta_0/\triangle_\theta \cdot d(kz) \\
&\quad + T_{22}\int_{kz_i}^{kz} T_{21} f_\theta(\Theta_0, kR_0, kz)\cdot\Theta_0/\triangle_\theta \cdot d(kz) \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

ただし，

$$\triangle_\theta \triangleq T_{21} dT_{22}/d(kz) - T_{22} dT_{21}/d(kz) \quad . \tag{4.42}$$

式（4.37）に対する1次近似解は

$$\Theta_0 + \Xi_\theta \Theta_{1\varepsilon} + N\Theta_{1\mu}$$

として与えられる．$\hat{W}$ に対する1次近似解は式（4.27）から

$$\hat{W} \simeq \sqrt{w_0} + \Xi_\theta/\sqrt{w_0}\cdot\left\{p_{\tau k}^{-2} d\Theta_0/d(kz)\cdot d\Theta_{1\varepsilon}/d(kz)\right.$$
$$\left. - (\hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\det\widetilde{\mathbf{T}})^2\Theta_{1\varepsilon}/\Theta_0^3\right\}$$

$$+N/\sqrt{w_0}\cdot\{p_{\tau k}^{-2}d\Theta_0/d(kz)\cdot d\Theta_{1\mu}/d(kz)$$

$$-(\hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\det\widetilde{\mathbf{T}})^2\Theta_{1\mu}/\Theta_0^3\}\qquad(4.43)$$

となる．ただし

$$w_0\triangleq\{p_{\tau k}^{-1}d\Theta_0/d(kz)\}^2+(\hat{K}_{1im}\omega\tau_{1im}\det\widetilde{\mathbf{T}}/\Theta_0)^2\ .\qquad(4.44)$$

同様に式（4．38）で記述される横方向ビーム代表量に対する1次摂動解は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}kR_{1\varepsilon}&=-M_{21}\int M_{22}/\{\triangle_r U(\widetilde{K}_0)(kR_0)^3\}\cdot d(kz)\\&\quad+M_{22}\int M_{21}/\{\triangle_r U(\widetilde{K}_0)(kR_0)^3\}\cdot d(kz)\ ,\\kR_{1\mu}&=-M_{21}\int M_{22}f_r(\Theta_0,kR_0,kz)\cdot kR_0/\triangle_r\cdot d(kz)\\&\quad+M_{22}\int M_{21}f_r(\Theta_0,kR_0,kz)\cdot kR_0/\triangle_r\cdot d(kz)\end{aligned}\right\}\ .\qquad(4.45)$$

ただし，

$$\triangle_r\triangleq M_{21}dM_{22}/d(kz)-M_{22}dM_{21}/d(kz)\qquad(4.46)$$

式（4．38）に対する1次近似解は

$$kR_0+\Xi_r kR_{1\varepsilon}+N\,kR_{1\mu}$$

として与えられる．Я′に対する1次近似解は式（4．30）から

$$\text{Я}'\simeq\sqrt{r_0}+\Xi_r/\sqrt{r_0}\cdot\{d(kR_0)/d(kz)\cdot d(kR_{1\varepsilon})/d(kz)$$

$$-(r'_{1im}kr_{1im}\det\widetilde{\mathbf{M}})^2kR_{1\varepsilon}/(kR_0)^3\}$$

$$+N/\sqrt{r_0}\cdot\{d(kR_0)/d(kz)\cdot d(kR_{1\mu})/d(kz)$$

$$-(r'_{1im}kr_{1im}\det\widetilde{\mathbf{M}})^2kR_{1\mu}/(kR_0)^3\}\qquad(4.47)$$

となる．ただし，

$$r_0 \triangleq \left\{ d(kR_0)/d(kz) \right\}^2 + (r'_{1im}\, kr_{1im}\, \det \widetilde{\mathbf{M}}/kR_0)^2 \quad . \qquad (4.48)$$

式（4.41）および（4.45）の右辺に含まれる変換行列の要素は，空間電荷効果が無視できるときのものである．

4.6 ドリフト空間中での近似解析解

以上の解析はライナック電磁界によって加速されるパルス電子ビームに対するもので，その加速作用によっては空間電荷効果に差異が生ずることが考えられる．この空間電荷効果に対する加速作用の影響を知るには，まずドリフト空間中での空間電荷効果を知っておく必要がある．ドリフト空間中では，$a_0 \equiv 0$，$\widetilde{K}_0 \equiv \widetilde{K}_{0i}$ であるから，$L_\theta(\Theta) = d^2\Theta/d(kz)^2$，$L_r(kR) = d^2(kR)/d(kz)^2$ となる．したがって式（4.37）および（4.38）は次のようにかかれる．

$$d^2\Theta/d(kz)^2 - \Xi_\theta/\left\{U(\widetilde{K}_{0i})\Theta\right\}^3 = N f_\theta(\Theta, kR, kz)\Theta \quad , \qquad (4.49)$$

$$d^2(kR)/d(kz)^2 - \Xi_r/\left\{U(\widetilde{K}_{0i})(kR)^3\right\} = N f_r(\Theta, kR, kz)kR \quad . \qquad (4.50)$$

これらの方程式の厳密な解析解をうることはやはり困難であり，このため N についての摂動方程式の解を求めよう．ただし今度は Ξ_θ および Ξ_r を摂動のパラメータとは考えない．したがって以下の解析は初速度分布の広がりが大きい場合にも適用できる．

式（4.49）の0次摂動すなわち非摂動方程式は

$$d^2\Theta_0/d(kz)^2 - \Xi_\theta/\left\{U(\widetilde{K}_{0i})\Theta_0\right\}^3 = 0 \quad . \qquad (4.51)$$

この解は次式で与えられる

$$\Theta_0 = \left[\Xi_\theta/\left\{U(K_{0i})^3\Theta_i{}^2\right\} \cdot (kz - kz_i)^2 + \Theta_i{}^2\right]^{1/2} \quad . \qquad (4.52)$$

また同様に式（4.50）で記述される横方向代表量についても次の0次解を

うる．

$$kR_0=[\Xi_r/\{U(\widetilde{K}_{0i})(kR_i)^2\}\cdot(kz-kz_i)^2+(kR_i)^2]^{1/2}\ .$$

(4.53)

これらの0次解はそれぞれ入射条件(4.28)および(4.31)を満足している．

つぎに式(4.49)の1次摂動方程式は

$$d^2\Theta_1/d(kz)^2+3\Xi_\theta/\{U(\widetilde{K}_{0i})^3\Theta_0^4\}\cdot\Theta_1=f_\theta(\Theta_0,\ kR_0,\ kz)\Theta_0$$

(4.54)

となる．この方程式の解は次式で与えられる．

$$\Theta_1=-\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}\mathscr{E}_0^x(kz-kz_i)\int_{kz_i}^{kz}\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}$$

$$\cdot\mathscr{F}_0^x(kz-kz_i)f_\theta(\Theta_0,\ kR_0,\ kz)\Theta_0/\triangle_p\cdot d(kz)$$

$$+\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}\mathscr{F}_0^x(kz-kz_i)\int_{kz_i}^{kz}\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}$$

$$\cdot\mathscr{E}_0^x(kz-kz_i)f_\theta(\Theta_0,\ kR_0,\ kz)\Theta_0/\triangle_p\cdot d(kz)\ .$$

(4.55)

ただし，$\mathscr{E}_0^x(\cdot)$および$\mathscr{F}_0^x(\cdot)$は第1種および第2種Lamé関数である．[42]
また，

$$x=2\Xi_\theta/\{U(\widetilde{K}_{0i})^3\Theta_i^4\}\quad,\qquad(4.56)$$

$$\triangle_p\triangleq\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}\mathscr{E}_0^x(kz-kz_i)$$

$$\cdot d/d(kz)[\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}\mathscr{F}_0^x(kz-kz_i)]$$

$$-\{(kz-kz_i)^2+2/x\}^{1/2}\mathscr{F}_0^x(kz-kz_i)$$

$$\cdot\, d/d(kz)\left[\left\{(kz-kz_i)^2+2/x\right\}^{1/2}\mathcal{E}_0^x(kz-kz_i)\right] . \tag{4.57}$$

同様にして横方向代表量に対する式（４．５０）の１次摂動解は次式で与えられる．

$$kR_1=-\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{E}_0^y(kz-kz_i)\int\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}$$
$$\cdot\,\mathcal{F}_0^y(kz-kz_i)f_r(\Theta_0,\ kR_0,\ kz)kR_0/\triangle_q\cdot d(kz)$$
$$+\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{F}_0^y(kz-kz_i)\int\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}$$
$$\cdot\,\mathcal{E}_0^y(kz-kz_i)f_r(\Theta_0,\ kR_0,\ kz)kR_0/\triangle_q\cdot d(kz) . \tag{4.58}$$

ただし，

$$y=2\Xi_r/\left\{U(\widetilde{K}_{0i})(kR_i)^4\right\} , \tag{4.59}$$

$$\triangle_q\triangleq\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{E}_0^y(kz-kz_i)$$
$$\cdot\, d/d(kz)\left[\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{F}_0^y(kz-kz_i)\right]$$
$$-\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{F}_0^y(kz-kz_i)$$
$$\cdot\, d/d(kz)\left[\left\{(kz-kz_i)^2+2/y\right\}^{1/2}\mathcal{E}_0^y(kz-kz_i)\right] . \tag{4.60}$$

以上のようにして式（４．４９）および（４．５０）に対する１次近似解はそれぞれ

$$\Theta_0+N\Theta_1 , \qquad kR_0+N\,k\,R_1$$

として与えられる．また，これらの解に対応する$\hat{W}$および$\mathcal{Я}'$は，それぞれ式（４．４３）および（４．４７）において$\Xi_\theta=0$，$\Xi_r=0$　およびドリフト空間の条件を代入したものから求めることができる．

以上に求めた1次近似解が実用上十分な精度をもつためにはNが1より十分小さいことが必要である．この条件は式（4．33）から次のようにかかれる．

$$I \ll 4/3 \cdot \sqrt{\varepsilon/\mu}\, k^2 c^2/\eta \cdot \{\widetilde{K}_{0i}(\widetilde{K}_{0i}+2)\}^{3/2} R_i{}^2 \Theta_i \quad . \quad (4.61)$$

上式右辺を4．3で計算した電流限界値の場合と同じ条件で計算すると9mAとなる．

ところで，ドリフト空間中でのビーム代表量に対する一般的な方程式（4．49）および（4．50）はf_θおよびf_rの項によって連立方程式となり，さらにこれらの項は強い非線形項である．このため上述したようにNを摂動パラメータとした摂動法を適用せざるをえなかったが，一方f_θおよびf_rを簡単な関数に近似することによって式（4．49）および（4．50）の解析解を求めることも考えられる．この場合には初速度分布のパラメータΞ_θ，Ξ_rおよび空間電荷効果のパラメータNは任意の値をとることができる．そこで式（4．35）で与えられる楕円体バンチモデルに対するf_θおよびf_rを次のように展開する．

$$\left.\begin{aligned} f_\theta(\Theta, kR, kz) &= U(\widetilde{K}_{0i})/U(\widetilde{K}_0) \cdot q_i\sqrt{h_i}\,\{2/3 \cdot h^{-3/2} \\ &\quad + 2/5 \cdot h^{-5/2}\delta^2 + \cdots\}\ , \\ f_r(\Theta, kR, kz) &= U(\widetilde{K}_{0i})/U(\widetilde{K}_0) \cdot q_i\sqrt{h_i}\,\{2/3 \cdot q^{-3/2} \\ &\quad - 1/5 \cdot q^{-5/2}\delta^2 + \cdots\}\ . \end{aligned}\right\} \quad (4.62)$$

ただし$\delta^2 = h - q$ である．上式においてδに関して2次以上の項が無視できる場合，すなわち考えているパルス電子ビームがほぼ球体バンチモデルとみなされる場合には，f_θおよびf_rはそれぞれ縦および横方向量のみの関数となる．このとき，縦および横方向代表量のみたす方程式は互に独立となり次のようになる．

$$d^2\Theta/d(kz)^2-\Xi_\theta/\{U(\widetilde{K}_{0i})\Theta\}^3-2/3\cdot Nq_i\sqrt{h_i}\,U(\widetilde{K}_{0i})^{-3/2}/\Theta^2=0\ ,$$

(4.63)

$$d^2(kR)/d(kz)^2-\Xi_r/\{U(\widetilde{K}_{0i})(kR)^3\}-2/3\cdot Nq_i\sqrt{h_i}/(kR)^2=0\ .$$

(4.64)

式(4.63)を積分すれば次式をうる.

$$kz-kz_i=g_3\{(\Theta-g_2)^2-g_2^2-g_1\}^{1/2}$$
$$+g_2g_3\,log\,|[\Theta-g_2+\{(\Theta-g_2)^2-g_2^2-g_1\}^{1/2}](g_2^2+g_1)^{-1/2}|\ .$$

(4.65)

ただし,

$$\left.\begin{aligned}
g_1&\triangleq\Xi_\theta U(\widetilde{K}_{0i})^{-3}/\{\Xi_\theta U(\widetilde{K}_{0i})^{-3}\Theta_i^{-2}\\
&\qquad+4/3\cdot Nq_i\sqrt{h_i}\,U(\widetilde{K}_{0i})^{-3/2}\Theta_i^{-1}\}\ ,\\
g_2&\triangleq g_1\,2/3\cdot N/\Xi_\theta\cdot q_i\sqrt{h_i}\,U(\widetilde{K}_{0i})^{3/2}\ ,\\
g_3&\triangleq\{g_1U(\widetilde{K}_{0i})^3/\Xi_\theta\}^{1/2}\ .
\end{aligned}\right\}\quad(4.66)$$

一方, 横方向代表量に対する方程式(4.64)の解は, 式(4.65)においてΘをkRにおきかえ, またg_1, g_2およびg_3を次式とすればよい.

$$\left.\begin{aligned}
g_1&\triangleq\Xi_r U(\widetilde{K}_{0i})^{-1}/\{\Xi_r U(\widetilde{K}_{0i})^{-1}(kR_i)^{-2}\\
&\qquad+4/3\cdot Nq_i\sqrt{h_i}(kR_i)^{-1}\}\ ,\\
g_2&\triangleq g_1\cdot 2/3\cdot N/\Xi_r\cdot q_i\sqrt{h_i}\,U(\widetilde{K}_{0i})\ ,\\
g_3&\triangleq\{g_1U(\widetilde{K}_{0i})/\Xi_r\}^{1/2}\ .
\end{aligned}\right\}\quad(4.67)$$

$\hat{W}$および$\mathfrak{R}'$は式(4.27)あるいは(4.30)から求めることができる.

式(4.65)の右辺第2項から球体バンチモデルのパルス電子ビームの輪郭

はドリフト空間を通過するに従いほぼ指数関数的に増大していくことがわかる．空間電荷効果を無視したときは式（４．５２）および（４．５３）からわかるようにビームの輪郭は初速度分布の影響によってほぼ線形に増大していく．これは，ビーム代表量の微分方程式（４．６３）あるいは（４．６４）において，代表量の３乗に逆比例する項よりも２乗に逆比例する項の方が輪郭の広がりに大きな影響を持つことを意味している．ところで，ドリフト空間中における連続ビームに対しては，その半径のみたす微分方程式は半径の逆数項を含み，その結果ビーム半径は入射の傾きが十分小さい場合には近似的に z の２乗の指数関数に従って増大していくことが知られている[43]．したがって上に述べた球体バンチモデルの場合においては，連続ビームに比べその輪郭の発散は緩慢である．

４．７　む す び

ライナック電磁界中のパルス電子ビームの空間電荷効果をセルフ・コンシステントに考察した．

(1)　近軸理論の立場から，空間電荷界を加速電磁界に対する１次の摂動として考慮したとき，近軸変換行列を補正する空間電荷収差係数を与えた．

(2)　近軸変換行列とパルス電子ビームの縦および横方向代表量との関係を導き，また同時にこれら代表量のみたすセルフ・コンシステントな方程式をえた．

(3)　初速度分布および空間電荷の効果が十分小さいとき，ライナック電磁界中の楕円体バンチモデルに対しそのビーム代表量の一次近似表現式を与えた．また，ドリフト空間中におけるそのビーム代表量の１次近似解析解と，さらに球体バンチモデルに対する解とを与えた．

第５章　電子ライナックへの適用例[51)〜(53)]

５．１　ま　え　が　き

本章では第２章および第３章の解析の適用例として出射エネルギが１００ keV 程度の５空胴加速管をとりあげる．これは電子顕微鏡用超電導ライナックのシステム全体をテストする基礎実験用のもので，工作上の容易さを考えて位相速度の一定な一様周期構造とする．

５．２では，設計の対象とする加速管内の電磁界分布について述べる．５．３では，横方向ビーム特性を近軸変換行列によって，縦方向については３．６で導入した最適入射位相における変換行列によって記述し，加速管寸法の影響を明らかにする．そして，これらの結果に基づいて一様周期構造５空胴の $\pi/2$ モード定在波加速管の寸法を決定する．５．４においては，このようにして設計された電子ライナックに対し，第２章および第３章で述べた方法に従って軌道解析を行い，エネルギ高分解能を達成する入射条件について考察する．最後に５．５において，この軌道解析例を通して３．３で述べた軌道追跡法と３．４．２で述べた積分公式法との優劣を比較する．

５．２　加速管内の電磁界分布

一様周期構造の $\pi/2$ モード定在波加速管における E_z 成分は良く知られているように次式で与えられる[44)]．

$$E_z=\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m I_0(k_m r)\cos\{(1+4m)\pi z/2D\}\cos\omega t \quad . \tag{5.1}$$

ただし，

$$k_m{}^2=[\{(1+4m)\pi/2\}^2-(kD)^2]/D^2 \quad . \tag{5.2}$$

A_m は第 m 次空間高調波の振幅であり，$I_0(\cdot)$ および $I_1(\cdot)$ は第１種変形ベッセル関数である．また加速管の寸法は図５．１に示されている．$\pi/2$ モード動作を仮定すれば，基本波の位相速度 v_p は加速管のピッチ長 D と次のよ

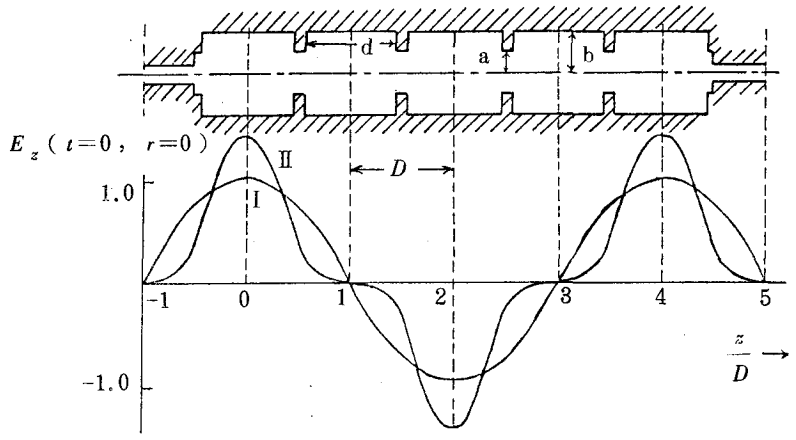


図５．１　π／2モード動作の５空胴定在波加速管．軸上電界分布Ⅰ：正弦分布，Ⅱ：式（５．４）に示される空間高調波を含む変形正弦分布．

うな関係にある．

$$\pi/2 \cdot v_p/c = kD \quad . \tag{5.3}$$

kD および d/D を一定とすれば，空間高調波の振幅はアイリスの内径と外径との比 a/b にのみ依存する．図５．１に示す分布Ⅱは，$kD=1.0$，$d/D=0.7$ および $a/b=0.1$ の場合におけるものである．この場合の空間高調波 A_m はつぎのようになっている．

$$\left.\begin{array}{lll} A_0=1.0, & A_{-1}=0.4300, & A_{+1}=0.03993, \\ A_{-2}=-0.05281, & A_{+2}=-0.01098, & A_{-3}=0.007276. \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

分布Ⅰは正弦分布である．以下の解析においては，電磁界は加速管の出入口に接続されるドリフト管の中へ図５．１に示されるように侵入しているものと仮定する．[45] 一様周期構造の分散関係式はすでにWalkinshaw によって

与えられている[46]．

一様周期構造加速管の性能を示す量として次式が定義される．

$$A_0/k\cdot(PQ)^{-1/2}$$
$$=A_0/k\cdot(\omega W)^{-1/2}. \qquad (5.5)$$

ただし，Pは加速管へ供給されるパワー，Wは無負荷Qに関係した蓄積エネルギである．式（5．5）の数値例をb/Dの例とともにa/bの関数として図5．2に示す（付録D参照）．

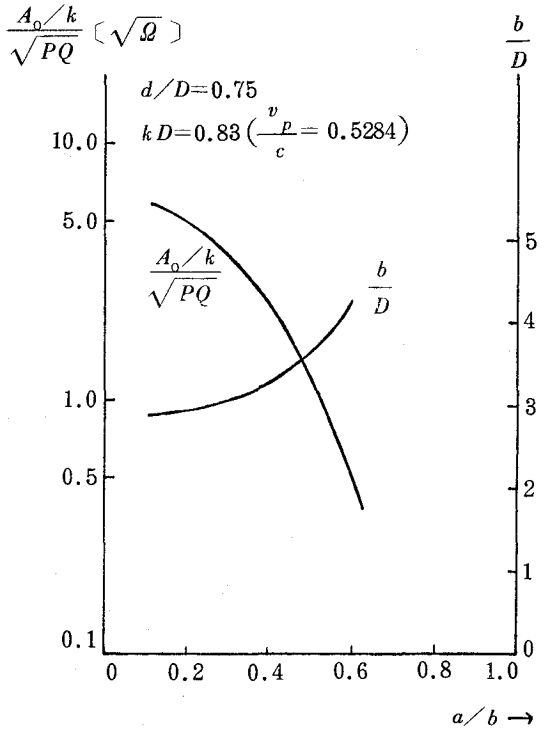


図5．2　$\pi/2$モードで$kD=0.83$および$d/D=0.75$の場合のb/Dおよび$A_0/(k\sqrt{PQ})$とa/bとの関係．

5．3　軸上電子の2次近似縦方向軌道と横方向近軸軌道とによる加速管の設計

z軸上を運動する電子のエネルギは基準軌道方程式（2．9）から計算することができる．その式に現われるa_0，すなわち$E_z(t=T,\ r=0,\ z)$は式（5．1）に与えられている．ここでは，図5．1に示されているように$z/D=-1$を入射面に$z/D=5$を出射面として式（2．9）を数値的に解くことにする．

式（2．9）によって定まる運動エネルギは式（2．7）に与えられるK_0である．出射エネルギK_{0e}は入射位相ωT_iに依存し，最適の入射位相ωT_{opt}において最大エネルギK_{0em}をとる．図5．3はピッチ長が最適入射位相での出射

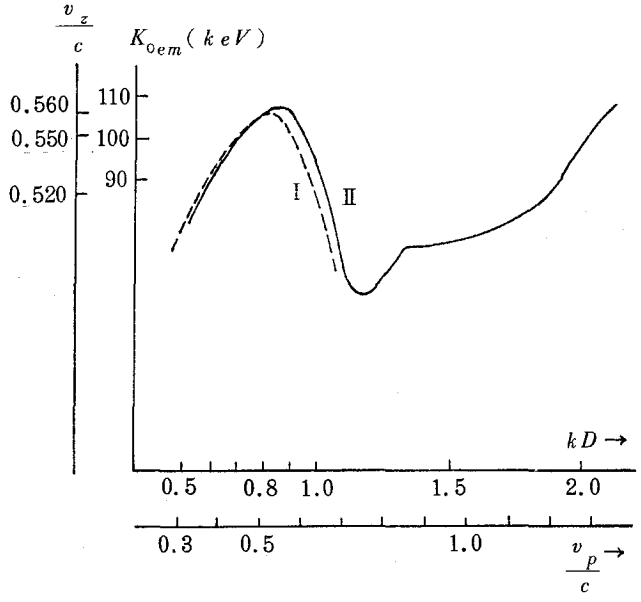


図５．３　$\pi/2$モード定在波動作の５空胴電子ライナックにおける最適入射位相での軸上電子の出射エネルギと正規化ピッチ長 kD あるいは位相速度との関係．
破線：分布Ⅰ
実線：分布Ⅱ
（図５．１参照），
$K_i = 50\,keV$，$f = 4GH_z$，$A_0 = 2MV/m$，
v_z：電子の出射速度．

エネルギに及ぼす影響を分布ⅠおよびⅡについて示したものである．ただしこの場合，入射エネルギ K_{0i}，動作周波数 f および基本波の振幅 A_0 の大きさを次の値とした．

$$K_{0i} = 50\,keV,\quad f = 4GH_z,\quad A_0 = 2MV/m. \qquad (5.6)$$

これらの値については，実際の実験装置の問題および TM_{010} 超電導空胴共振器による加速実験の結果[(4)(5)]を考慮して選択した．図５．３から，分布ⅠおよびⅡは，ほぼ同じ $kD \sim 0.8$ においてほぼ同じ出射エネルギ $K_{0em} \sim 105\,keV$

を与えており，また kD～2.0 近傍においてほぼ同じ 105keVを与えていることがわかる．後者の場合にはピッチ長が前者の場合に比べ長くなる．後者の場合，電子の速度と位相速度とに大きな差がある．そして正味得られる加速区間がほぼ前者の場合と同じになり，その結果前者の場合と同じエネルギになっている．

さて，kD の設計値がいかに決定されるかを考えよう．電子顕微鏡の電子ビームに対しては相対エネルギ変動が 10^{-4} 以下であることが要求される．[3][19] 出射電子ビームのエネルギ分解能は，軸上電子に対しては入射ビームの位相幅に主として影響される．このときの縦方向特性は，最適入射位相の下では 3．6 で導入した変換行列 $\mathbf{L}^*$を用いて記述することができる．

$\mathbf{L}^*$の要素のうち，L_{11}，L_{21}およびL_{22}の値は縦方向近軸軌道方程式（2．10）から計算することができる．一方 L_{12}^* は式（3．53）から W_{0020}^Kを用いて計算できる．W_{0020}^K の値は 3．4 で述べた方法に従って計算することもで

表 5．1　5 空胴定在波電子ライナックにおける最適入射位相での縦方向近軸軌道に対する変形変換行列 $\mathbf{L}^*$ の要素（$K_i = 50keV$，　$f = 4GH_z$，　$A_0 = 2MV/m$）．

kD	分　布　I	分　布　II
0.79	0.3841，　0.1467 2.6854，　0.7905	
0.82	0.4264，　0.1399 2.7917，　0.7100	0.3642，　0.1531 2.7015，　0.8112
0.85	0.4856，　0.1349 2.9269，　0.6301	0.4009，　0.1478 2.7835，　0.7319
0.88		0.4525，　0.1448 2.8910，　0.6528

表５．２　５空胴定在波電子ライナックにおける最適入射位相での横方向近軸軌道に対する変換行列**M**の要素
($K_i = 50\,keV$,　$f = 4GH_z$,　$A_0 = 2MV/m$).

kD	分　布　Ⅰ	分　布　Ⅱ
0.79	0.7208,　-0.2711×10^{-2} 3.7844,　0.9183	
0.82	0.6885,　-0.7065×10^{-4} 3.9277,　0.9748	0.7036,　-0.1484×10^{-1} 3.8873,　0.8646
0.85	0.6496,　-0.9661×10^{-3} 4.0717,　1.0313	0.6721,　-0.1170×10^{-1} 4.0297,　0.9187
0.88		0.6337,　-0.1185×10^{-1} 4.1709,　0.9730

きるが，ここでは基準軌道方程式（２．９）を直接に数値積分することによって $\omega\tau_{1i} = \pm 10^{-2}\pi$ における $\triangle K_e$ を求め，式（３．４８）から W^K_{0020} を求めた．それから L^*_{12} を評価した．表５．１は，図５．３に示される最大エネルギの領域 kD～0.8 近傍における４個の kD の値に対して，基準軌道が最適入射位相 ωT_{0pt} をとるときの変形縦方向変換行列 $\mathbf{L}^*$ の計算値を示す．ただし，K_i，f および A_0 の値は前と同じく式（５．６）に示される値である．表５．１からエネルギ分解能に関しては kD の値が大きい方が望ましいことがわかる．また，エネルギ分解能 10^{-4} 以下を達成するためには，入射ビームのエネルギ変動は 10^{-4} 以下でなくてはならず入射パルス幅は数ピコ秒以下である必要がある．さらに，空間高調波は縦方向特性に対しほとんど影響を及ぼさないことがわかる．これは位相速度が変化する場合の Boussoukaya-Septier[22] の結果と同様である．

さてつぎに，ピッチ長および空間高調波が横方向軌道へ及ぼす影響につい

て調べよう．電子顕微鏡に対しては，ビームの傾きが $10^{-3}\,rad.$ 程度かあるいはそれ以下が，またビーム直径に対しては数 μm が要求される[3]．このような横方向特性を解析するには，通常，近軸近似で十分と思われる．表５．２に，表５．１の場合に対応する横方向近軸変換行列**M**の計算値を示す．もし入射電子ビームの傾きが $10^{-3}\,rad.$ 程度，またビーム直径が数 μm であるならば，表５．２より出射ビームの特性は主として入射の傾きによって決定されることがわかる．すなわち，この場合には次式が成立している．

$$\left.\begin{aligned} M_{11}r'_{1i} &\gg M_{12}kr_{1i}\,, \\ M_{21}r'_{1i} &\gg M_{22}kr_{1i}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

出射ビームの傾きは $10^{-3}\,rad.$ 以下，またビーム直径は数 $10\mu m$ となる．この直径の値は電子顕微鏡の場合にはかなり大きすぎる値である．出射ビームの直径を減少させるためには，入射の傾きを $10^{-3}\,rad.$ 以下にするか，あるいは加速管の後に静電磁界集束レンズを設ける必要があろう．以上の結果から，入射の傾きの出射ビーム直径へ及ぼす影響すなわち M_{21} が大へん重要であることがわかる．この観点から M_{21} の値はできるだけ小さいことが望ましい．したがって表５．２から小さい値をもつ kD の場合の方が良いことがわかる．これは上述した縦方向特性の場合と逆の傾向を示している．また，表５．２から空間高調波は縦方向の場合と同様に横方向特性に対してもほとんど影響を及ぼさないことがわかる．Septier-Bous'soukaya[23]は位相速度が変化する場合に対し上記と同じ結論をえている．

加速管の設計手順は以下のとおりである．

(1) まず第一に，入射エネルギ，動作周波数および基本波の振幅を式（5.6）に示される値に選ぶ．

(2) 最大加速を達成できるのは kD の値が 0.8 のあたりである．この値のまわりにおいて，kD の変化はエネルギ分解能とビーム直径との最適化に対し逆の傾向を示すので，ここではこれら２つの場合の妥協点として kD を 0.83 とする．$f=4GH_z$ に対しては D は $0.9901\,cm$ となる．

(3) 工作上の観点から，隣接するアイリスの間隙長とピッチ長との比 d/D を 0.75 とする．そうすれば d の値は 0.7426cm となる．

(4) 図5．2とマイクロ波の結合およびビーム力学を考えて $a/b=0.2$ とする．

(5) 図5．2から，$kD=0.83$，$d/D=0.75$ および $a/b=0.2$ の場合には，b/D は 2.9589 となる．結局，$b=2.9296cm$ および $a=0.5859cm$ となる．またこのときの PQ は 2.362×10^7 である．

5．4　2次近似縦方向軌道

前節で設計された $\pi/2$ モード定在波動作の5空胴一様周期加速管に対し，第3章で述べた理論に従ってその軌道解析を行う．その電子ライナックの動作条件をあらためて表5．3に示す．この例では，第一1空間高調波が考慮

表5．3　$\pi/2$ モード定在波動作の5空胴一様周期電子ライナックの動作条件．

周波数	:	4 GHz
位相速度	:	0.5284・c
軸上電界（ピーク）	:	2 MV/m
第一1空間高調波	:	0.06x(0-th order)
入射エネルギ	:	50 keV
$\omega T_i=\omega T_{opt}$	:	0.2875・π $rad.$
出射エネルギ	:	105.641 keV
ωT_e	:	3.5477・π $rad.$

され，基準軌道の入射位相は最適入射位相にとってある．この最適入射位相は，式（2．32）において $L_{12}=0$ となる入射位相を式（2．9）および（2．10）の数値積分によって逐次探し求めることによって得られる．このとき，式（3．4）および（3．5）における κ，λ および ζ の値は次のようになる．

表５．４　表５．３の場合における近軸変換行列**L**，**M**および縦方向２次収差係数$\mathbf{T}'_{klmn}$，$\mathbf{T}_{klmn}$．

$L_{11}=0.4323$	$L_{12}=0.00000$	$M_{11}=0.6810$	$M_{12}=-0.0009$
$L_{21}=2.8147$	$L_{22}=0.6982$	$M_{21}=3.9735$	$M_{22}=0.9797$

$\mathbf{T}'_{0020}=0.1398$	$\mathbf{T}'_{0011}=0.5034$	$\mathbf{T}'_{0002}=0.6209$
$\mathbf{T}'_{2000}=-0.2774$	$\mathbf{T}'_{1100}=-1.1350$	$\mathbf{T}'_{0200}=-1.4123$

$\mathbf{T}_{0020}=0.5039$	$\mathbf{T}_{0011}=0.9683$	$\mathbf{T}_{0002}=0.6561$
$\mathbf{T}_{2000}=-0.8830$	$\mathbf{T}_{1100}=-2.5890$	$\mathbf{T}_{0200}=-2.3786$

$$\left.\begin{array}{lll}\kappa_i=-0.9505, & \lambda_i=0.7091, & \zeta_i=1.1516, \\ \kappa_e=-1.4905, & \lambda_e=1.8222, & \zeta_e=1.3315,\end{array}\right\} \quad (5.8)$$

これらの条件の下で，近軸変換行列**L**，**M**および縦方向２次収差係数$\mathbf{T}'_{klmn}$・$\mathbf{T}_{klmn}$の出射面における値は，式（２．９）～（２．１１）および（３．１）の数値積分によって求められる．これらの値を表５．４に示す．この表には横方向２次収差係数の値を示していないが，これはこの例における出射面が横方向軌道に対して像面（$M_{21}=0$）あるいはクロスオーバ面（$M_{22}=0$）ではないからである．

さて，電子顕微鏡において要求されるエネルギ分解能$|\triangle K_e/K_{0e}|\leqq 10^{-4}$を考え，これを達成するために必要な入射条件について考えよう．まず軸外電子がエネルギ分解能に及ぼす影響について考える．横方向入射条件の関数としての出射エネルギ分解能は，式（３．９）の右辺の後３項によって示される．表５．４および式（５．８）を用いてこれを書きなおすと次のようになる．

$$\hat{K}_{2r}=0.4135(kr_{1i})^2+1.6901\cdot kr_{1i}\,r'_{1i}+2.7225\cdot r'^{\,2}_{1i}\ . \quad (5.9)$$

上式は次のように変形される．

$$\hat{K}_{2r}=0.1373(k\tilde{r}_{1i})^2+2.9987\cdot\tilde{r}'^2_{1i}\ . \qquad (5.10)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} kr_{1i}&=k\tilde{r}_{1i}\cos\nu-\tilde{r}'_{1i}\sin\nu\ ,\\ r'_{1i}&=k\tilde{r}_{1i}\sin\nu+\tilde{r}'_{1i}\cos\nu\ ,\\ \nu&=-0.3159\,rad.\ \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

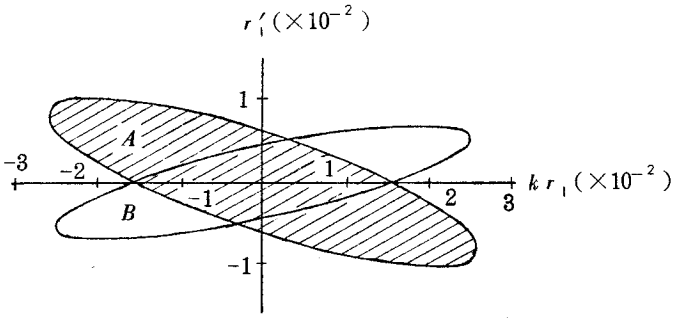


図５．４　表５．３の場合にエネルギ分解能 10^{-4} 以下を達成する許容横方向入射条件：A，　出射面へ変換された領域：B．

式（５．１０）からわかるように $\hat{K}_{2r}$ はいかなる横方向入射条件に対しても正符号である．したがって，軸外電子は軸上電子よりも常に大きな出射エネルギをもっている．$\hat{K}_{2r}$ を 10^{-4} 以下におさえるには次の条件が満足されねばならない．

$$(k\tilde{r}_{1i})^2/(2.6988\times10^{-2})^2+\tilde{r}'^2_{1i}/(0.5775\times10^{-2})^2<1\ . \qquad (5.12)$$

上式で示される横方向エミッタンス図の領域を図５．４に示す．また同図にはMによって変換された出射面における領域も示す．

式（３．８），（３．９），（５．８）および表５．４からエネルギ分解能 10^{-4}

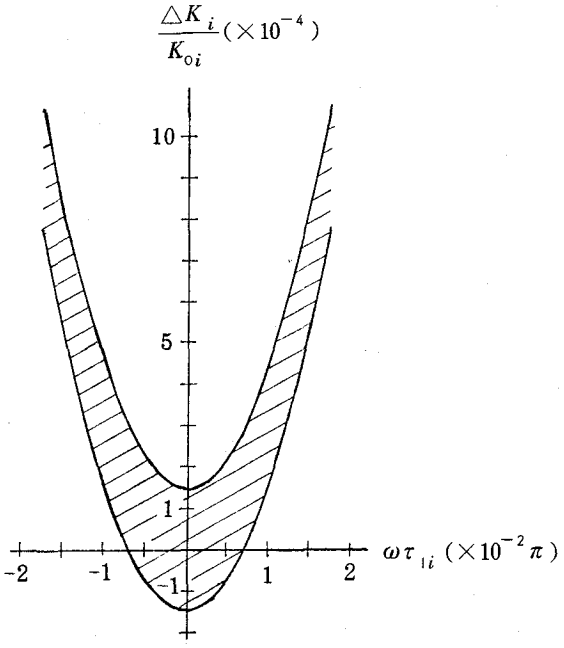


図５．５

表５．３の場合にエネルギ分解能 10^{-4} 以下を達成するに必要な縦方向エミッタンス図の領域．

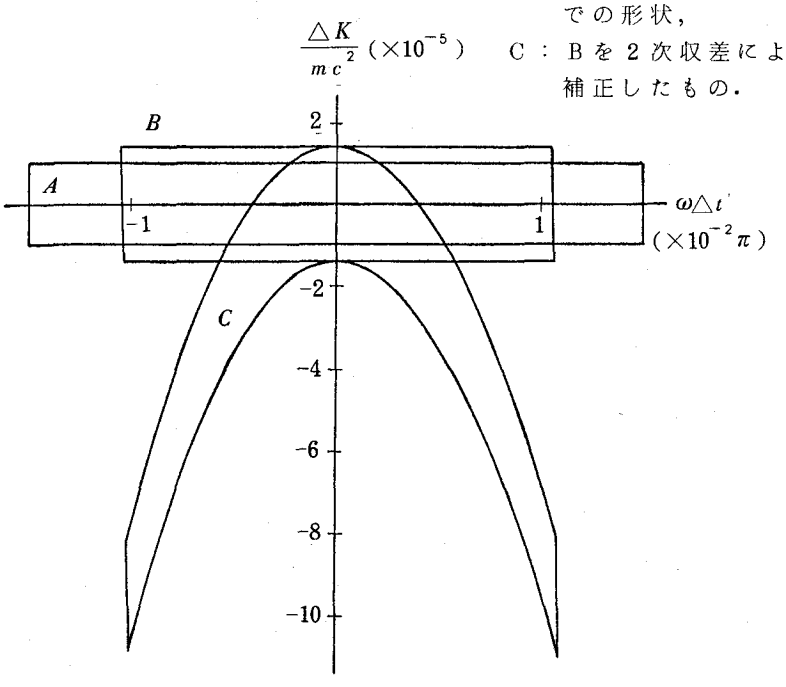
図５．６

表５．３の場合の最適入射位相での軸上電子に対する縦方向正規化エミッタンス形状．

A：入射形状，

B：近軸近似による出射面での形状，

C：Bを２次収差によって補正したもの．



を達成するのに必要な縦方向入射条件を求めることができる．ただしここではさらに式（３．５７）の条件を仮定しよう．このときその条件は次のようになる．

$$-1.4751\times10^{-4}+0.3074(\omega\tau_{1i})^2<K_{1i}/K_{0i}<$$

$$1.4751\times10^{-4}+0.3074(\omega\tau_{1i})^2 . \qquad (5.13)$$

上式で示される縦方向エミッタンス図の領域を図５．５に示す．このような縦方向特性は，ビームを短いパルスにチョップするか，あるいはプリバンチャの位相を減速位相にあわせるかすることにより達成される．図５．６は表５．４の場合における縦方向正規化エミッタンス図である．入射条件は，

$$\left.\begin{array}{l} |K_{1i}/mc^2|\leqq10^{-5}, \quad |\omega\tau_{1i}|\leqq1.5\pi\times10^{-2}\,rad., \\ kr_{1i}=r'_{1i}=0 \end{array}\right\} \quad (5.14)$$

でありＡで示される図形である．図形Ｂは出射面における近軸正規化エミッタンス図であり，これを２次収差によって補正したのが図形Ｃである．図形Ｂで囲まれる領域の面積はＡの面積に等しく，Ｃの面積は３.７において述べたようにほぼＡの面積に等しくなっている．軸外電子に対する縦方向正規化エミッタンス図は，図５．６を縦軸の正方向へ $\hat{K}_{2r}K_{0e}/mc^2$ だけ移動させることによって得られる．

５．５　軌道追跡法と積分公式法との比較

本節では，３．３で述べた軌道追跡法と３．４で述べた積分公式法とを，計算に要する時間および精度に関して比較する．ただし，ここでの軌道追跡法は積分公式法の出発点となった３．４．１の方程式（３．１３）～（３．１５）および（３．２２）に対して適用する．その数値例として前節における軌道解析例をとりあげる．

計算時間と精度とは計算方式の選択に依存する．ここでは最も標準的な手法として知られているSimpson 公式を積分公式法に対して適用し，また

Runge-Kutta Gill法を軌道追跡法において用いることにする．

積分を実行する区間を1～10ブロックに分け，さらにそれぞれのブロックを6分割する．まず第一に，入射条件（$\widetilde{K}_{0i}$，ωT_i）の下で0次解に対する数値計算を第1ブロックに対して行う．この数値解を式（3．17）および（3．18）に代入し近軸軌道方程式（3．14）および（3．15）を数値積分することによって**T**および**M**が求められる．つぎに第1ブロックにおいて，式（3．29）～（3．34）の積分公式に従って数値積分を行い，また3．3で述べた方法に従って式（3．22）で定まる2次軌道を追跡する．第2ブロックにおいては，同様に数値計算が実行されるが，そこでの入射条件は第1ブロックの出射条件としなければならない．最後に，このブロックでの式（3．29）～（3．34）の積分値は第1ブロックでの積分値に加えられる．このようにして順次各ブロックごとに数値計算が実行される．式（3．25）

表5．5　積分公式法および軌道追跡法によって計算された W^K_{2000} の値．
方法(1)：積分公式（Simpson 公式），
方法(2)：軌道追跡（Runge-Kutta Gill 法），
$I_\tau/I_{\tau i}$，I_r/I_{ri}：式（3．20）に示されるLiouville不変量の入出射面における値の比．

方　法	区　間　数	W^K_{2000}	時間(msec)	$I_\tau/I_{\tau i}$	I_r/I_{ri}
(1)	60	0.4135	152		
	30	0.4136	74		
	18	0.4150	43		
	12	0.3058	28		
(2)	60	0.4135	870	1.0000	1.0000
	30	0.4135	434	1.0000	1.0000
	18	0.4136	261	0.9998	0.9999
	12	0.4140	173	0.9989	0.9996

に従って$\hat{K}_2$を評価するに必要なW^K_{klmn}の有効数字は，実際上，2～3ケタで十分と思われる．

表5．5に，積分公式法および軌道追跡法によって計算したW^K_{2000}の出射面における数値を示す．すべての係数W^K_{klmn}のうちW^K_{2000}は，区間分割数の増大に対する有効数字の収束が最も悪い係数となっている．同表には，1個の係数を計算するのに要する平均時間も示され，さらに軌道追跡法の欄には式（3．20）に示されるLiouville不変量の入出射面における値の比$I_\tau/I_{\tau i}$およびI_r/I_{ri}が示されている．表5．6には，すべての係数W^K_{klmn}の有効数字4ケタを示す．これらの値は式（3．36），（5．8）および表5．4から得られる値と当然のことながら一致する．表5．5から次のことがわかる．同じ区間分割数に対しては，Runge-Kutta Gill法を用いた軌道追跡法の方が，Simpson公式を用いた積分公式法よりも良い精度を与えている．しかしながら，積分公式法での計算時間は軌道追跡法の場合の約1/6である．そこで同じ有効ケタ数に対しては，たとえば2ケタをとってみると，積分公式法での計算時間は軌道追跡法の場合の約1/4になる．また，$I_\tau/I_{\tau i}$の有効ケタ数は軌道追跡法によって計算されたW^K_{2000}の有効ケタ数と同じになっている．したがって，I_τおよびI_rの値を計算することは，0次量および近軸変換行列に対してのみならず，2次収差係数に対してもその精度チェックになる．

表5．6　表5．3の場合における縦方向2次収差係数W^K_{klmn}．

$W^K_{0002}=-1.1796$	$W^K_{0200}=1.9418$
$W^K_{0011}=0.7894$	$W^K_{1100}=1.6901$
$W^K_{0020}=-0.2084$	$W^K_{2000}=0.4135$

5．6　むすび

100keV電子ライナックの加速管設計を具体的に行い，設計された電子ライナックの軌道解析を行った．

(1)　空間高調波が縦および横方向のビーム特性，とくに分解能に及ぼす影響は無視できる．

(2) エネルギ高分解能を達成するために必要な入射ビームの縦方向特性は，下に凸な放物状のエミッタンス図形として表現される．

(3) 2次収差係数の数値を求める場合，軌道追跡法よりも積分公式法に従った方が計算時間の点で有利と思われる．

最後に，本章で理論設計した加速管は，その後，筆者の所属する裏研究室において製作され，現在他のグループによって加速実験が行われていることを付記しておく．

第6章　結　　論

本論文で得られた研究成果のうち，とくに重要と思われるものを列記すればつぎのとおりである．

(1)　回転対称TMモード電磁界中の近軸電子軌道に対する縦および横方向正規化エミッタンスの不変性を証明した．さらに，縦方向正規化エミッタンスについては，2次近似における不変性を軸上電子ビームに対して証明し，また，入射エネルギの相対的な広がりが入射位相幅に比べ十分小さい場合には，そのエミッタンスは近軸正規化エミッタンスに等しくなることを示した．

(2)　エネルギ分解能の高いライナックで必要な縦方向特性の精密かつ簡潔な表現方法を与えた．すなわち，縦方向特性を入射面での諸量の2次形式で表現し，2次収差係数を積分形式で与えた．そして，それをもとに特別な場合の収差係数の解析解を与えた．

(3)　空間電荷効果を無視できない電子ライナックに対し，パルス電子ビームの縦および横方向代表量をセルフ・コンシステントに解析する方法を示し，代表量の1次近似表現式を与えた．またドリフト空間中における近似解析解も与えた．

(4)　実際のモデルについて上記(1)および(2)の解析を適用し，その有用性を示した．

なお，高エネルギ分解能電子ライナックの軌道解析における今後の課題としては，まず第1に，マイクロ波電源の変動や加速管の環境変化にもとづくゆがみなどから生ずるライナック電磁界の変動が電子ビーム特性に及ぼす影響を明らかにする方法を与えること，第2に，空間電荷効果の解析において，管壁の影像効果や管壁による電子群の捕獲なども含めて空胴とパルス電子ビームとの相互作用，またバンチ自身の不安定性や分極効果を考慮した解析的方法を見出すことであると思われる．第1の問題点については，本論文の方法は任意の軸上電界分布に対し適用できることから，この軸上電界分布を何か基準の分布を

定め摂動展開することによって解決できると思われる．第2の問題点については，電流密度が比較的少くてすむ電子顕微鏡の電子源の場合には第4章の取り扱いで十分と思われるが，高電流密度でエネルギ高分解能が要求されるような特殊な物性研究用の電子源の場合には考慮する必要があろう．この問題を総合的な立場から解析的に解決することは現在のところ非常に困難であり，今後の研究に待たねばならない．

謝　　辞

本研究の端緒を与えられ，懇切な御指導を賜わった裏　克己教授に対し衷心より感謝の意を表す．また本論文をまとめるにあたり種々御検討をいただいた松尾幸人教授，小山次郎教授，川西政治教授，ならびに電子工学一般に関し御教導をいただいた菅田栄治名誉教授，喜田村善一教授，尾崎　弘教授，中井順吉教授，中村勝吾教授，塙　輝雄教授，児玉慎三教授に対し深く感謝する．さらに公私ともにお世話をいただいた岡山大学浜田　博教授ならびに大阪大学西原　浩助教授に対し深く感謝する．

本研究を進めるにあたり，仔細にわたる御指導ならびに有益な御討論を賜わった藤岡　弘助手に対し衷心より感謝の意を表す．また適切な御助言をいただいた松田甚一助手，鷹岡昭夫助手を始めとする裏研究室の方々，ならびに新居浜工業高等専門学校小松文章教授，静岡大学田中郁雄助教授，日本電子森村尚之氏，岡山大学森川良孝助手，大阪大学大学院覚野重雄，江上憲位の諸氏に対し厚く感謝する．さらに本研究を行うにあたり，その貴重な機会を与えていただいた九州工業大学許斐　貢学長，隈本　寛教授，清水俊之教授，磯　泰行教授，矢鳴虎夫講師に対し厚く感謝する．

参　考　文　献

(1) C.Passow; "Normal-und supraleitende Hochfrequenzbeschleuniger als Spannungsquellen für Elektronenmikroskope ?", KFK 957, Kernforschungszentrum, Karlsruhe (1969).

(2) V.Bevc; "Megavolt Electron Microscope with Microwave Frequency Accelerators", Univ. California, Lawrence Livermore Labo. (1971).

(3) 浜，藤田，裏；"日本における超高圧電子顕微鏡の建設とその将来性"，応用物理，38，734 (1969).

(4) 鷹岡，裏；"超電導円筒 TM_{010} 空胴による電子加速"，信学論，56-B，272 (1973).

(5) A.Takaoka and K.Ura; "Experiments of Superconducting Microwave Resonant Cavity Used for Electron LINAC", Technol. Rept., Osaka Univ., 23, No.1111 (1973).

(6) 森村，松田，裏；"ピコセカンドパルス電子ビームの発生"，信学論，56-B，72 (1973).

(7) J.C.Slater; "The Design of Linear Accelerators", Rev. Mod. Phys., 20, 473 (1948).

(8) J.R.Terrall; "On the Motion of Particles in a Traveling Wave Linear Accelerator", Phys. Rev., 77, 415 (1950).

(9) J.R.Terrall and J.C.Slater; "Particle Dynamics in the Linear Accelerator", J.Appl. Phys., 23, 66 (1952).

(10) 戸田，小野寺，入江；"線形電子加速器Regular Section中の電子の運動"，三菱電機中研，研究報告　792号 (1960).

(11) G.Dôme; "Electron Bunching by Uniform Sections of Disk-Loaded Waveguide. Part A:General Study", M-242-A,

W.W.Hansen Labo. Phys., Stanford Univ. (1960).

(12) V.Hlubuček; "Approximative Solution of Electron Motion in a LINAC (Linear Accelerator)", TESLA Electron., **4**, 8 (1971).

(13) P.A.Sturrock; "Static and Dynamic Electron Optics - an account of focusing in lens, deflector and accelerator-", chap.6, Cambridge Univ. Press, London (1955).

(14) 松田, 裏; "高周波電磁界中における電子軌道の結像特性", 信学論, **57-B**, 273 (1974).

(15) 藤岡, 松田, 裏; "集群電子流波形に及ぼす縦方向熱初速度分布の影響", 信学論, **55-B**, 463 (1972).

(16) E.M.McMillan; "The Relation between Phase Stability and First-order Focusing in Linear Accelerators", Phys. Rev., **80**, 493 (1950).

(17) R.H.Miller; "A Linear Accelerator for Submillimeter Wave Generation", ML-1244, W.W.Hansen Labo. Phys., Stanford Univ. (1964).

(18) W.K.H.Panofsky; "Note on Radial Beam Dynamics", SLAC-TN-63-89, Stanford Linear Accelerator Center (1963).

(19) G.I.Zhileiko; "Linear Accelerator as Electron Source in the Electron Microscope", Sov. Phys.-Tech. Phys., **9**, 1684 (1965).

(20) R.H.Helm and R.Miller; Particle Dynamics, in "Linear Accelerators", ed. P.Lapostolle and A.Septier, chap. B.1.2, North-Holland, Amsterdam (1970).

(21) A.D.Vlasov; "Theory of Linear Accelerators", chap.2, Atomizdat Moskva (1965).

(22) M.Boussoukaya and A.Septier; "Etude Theorique de la

Dispersion D'energie des Electrons a la Sortie d'un Accelerateur Lineaire Court Supraconducteur Fonctionnant en Regime Continu", Nucl. Instr. Meth., **80**, 109 (1970).

(23) A. Septier and M. Boussoukaya; "Mouvement Radial des Electrons et Emittance du Faisceau dans un Accelerateur Lineaire Supraconducteur de Faible Energie", Nucl. Instr. Meth., **80**, 273 (1970).

(24) J. Matsuda and K. Ura; "The Aberration Theory of the Electron Trajectory in the R-F Fields. Part I. The Second Order Aberration", Optik, **40**, 179 (1974).

(25) J. Matsuda and K. Ura; "The Aberration Theory of the Electron Trajectory in the R-F Fields. Part II. The Third Order Aberration", Optik, **40**, 284 (1974).

(26) T. Nishikawa; "Analytic Approach to the Space Charge Effect on the Longitudinal Phase Motions in Linear Accelerators", SJC-A-67-1, Working Group for Construction of Proton Synchrotron, Inst. Nucl. Study, Univ. Tokyo (1967).

(27) P. L. Morton; "Longitudinal Space-Charge Effects in Standing Wave LINACs", Rev. Sci. Instr., **36**, 1826 (1965).

(28) T. D. Newton; "Structure of a Bunch of Charge in an Ideal Accelerator", Canadian J. Phys., **44**, 3137 (1966).

(29) I. Kapchinsky and V. Vladimirsky; "Limitation of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator Associated with the Beam Space Charge", 2nd Conf. on High Energy Accelerators, CERN, 274

(1959).

(30) S.Ohnuma; "Space Charge Effects on the Quadrupole Focusing System in Low-Energy Proton Linear Accelerators", Yale Internal Rept.Y-17 (1967).

(31) F.J.Sacherer; "RMS Envelope Equations with Space Charge", IEEE Trans. **NS-18**(3), 1105 (1971).

(32) C.C.Cutler and M.E.Hines; "Thermal Velocity Effects in Electron Cuns", Proc. IRE, **43**, 307 (1955).

(33) G.Herrmann; "Optical Theory of Thermal Velocity Effects in Cylindrical Electron Beams", J. Appl. Phys., **29**, 127 (1958).

(34) K.Amboss; "Verification and Use of Herrmann's Optical Theory of Thermal Velocity Effects in Electron Beams in the Low Perveance Regime", IEEE Trans., **ED-11**, 479 (1964).

(35) J.Fronteau, Some Aspects of Trace-Space Computation for High-Energy Charged Particle Beams, in "Focusing of Charged Particles", ed. A.Septier, vol. II, chap. 5.4, Academic Press, New York (1967).

(36) K.Irie; "Design Criteria of Linacs for Spectrum and Instabilities of Electron Energy", Japanese J. Appl. Phys., **11**, 69 (1972).

(37) ランダウ, リフシッツ; "力学", chap.5, 東京図書(1967).

(38) L.A.Makhnenko, V.I.Pakhomov and K.N.Stepanov; "High-Frequency Focusing in Linear Accelerators", Sov. Phys.-Tech. Phys., **10**, 486 (1965).

(39) B.I.Bondarev and A.D.Vlasov; "Self-Consistent Particle Distribution and Limiting Current in a Linear Accelerator", Plasma Phys., **8**, 599 (1966).

(40) O.Kellogg; "Foundations of Potential Theory", chap. 7, Oscar Brandstetter, Leipzig (1929).

(41) 小山；"進行波管", chap.4, 丸善, 東京(1964).

(42) P.Moon and D.Spencer; "Field Theory Handbook, including coordinate systems, differential equations and their solutions", chap.6, Springer, Berlin (1961).

(43) B.J.Thompson and L.B.Headrick; "Space Charge Limitations on the Focus of Electron Beams", Proc. IRE, **28**, 318 (1940).

(44) W.Walkinshaw; "Theoretical Design of Linear Accelerator for Electrons", Proc. Phys. Soc., **61**, 246 (1948).

(45) J.N.Weaver, T.I.Smith and P.B.Wilson; "Accelerating Structures for Superconducting Electron LINACs", IEEE Trans., **NS**-14(3), 345 (1967).

(46) W.Walkinshaw; "Notes on "Wave Guides for Slow Waves"", J. Appl. Phys., **20**, 634 (1949).

本研究に関係ある筆者の発表論文および資料

(47) 竹内, 藤岡, 裏；"定在波電磁界中の時間系近軸エミッタンスの不変性", 日本物理学会２８回年会, 3P-T-7 (1973).

(48) 竹内, 藤岡, 裏；"高周波電磁界中の時間エミッタンスとその応用", 日本学術振興会１３２委員会(荷電粒子ビームの工業への応用), ５５回資料, **48A**-218 (1973).

(49) 竹内, 藤岡, 裏；"高周波電磁界中の電子軌道に対する近軸不変量", 電子通信学会論文誌, **56-B**, 551 (1973).

(50) 竹内, 藤岡, 裏；"電子ライナックのビームエネルギに対する２次収

差係数”，応用物理学会２１回講演会，30-N-10（1974）.

(51) Y.Takeuchi, H.Fujioka and K.Ura; “Second-Order Approximation of Electron Trajectories in High Energy Resolution LINAC”, Particle Accelerators, to be published.

(52) Y.Takeuchi, H.Fujioka and K.Ura; “Integral Formulation for Second-Order Aberration Coefficients of Longitudinal Properties of LINAC”, Nuclear Instruments and Methods, to be published.

(53) Y.Takeuchi, H.Fujioka and K.Ura; “Electron Optical Design of Superconducting Electron LINAC, Part I”, Technology Reports of the Osaka University, **24**, No. 1168 (1974).

(54) 竹内，藤岡，裏；“高周波加速電磁界中における電子集群の空間電荷効果――近軸理論からのセルフ・コンシステントな取り扱い――”，電子通信学会論文誌，投稿予定.

付　　録

A　横方向2次収差係数

式（3．6）および（3．7）に対応して，横方向2次収差はつぎのように表現される．

$$\left.\begin{aligned} r'_2 &= \mathbf{S}'_{1010}\, kr_{1i}\,\omega\tau_{1i} + \mathbf{S}'_{1001}\, kr_{1i}\, c\tau'_{1i} \\ &\quad + \mathbf{S}'_{0110}\, r'_{1i}\,\omega\tau_{1i} + \mathbf{S}'_{0101}\, r'_{1i}\, c\tau'_{1i} \quad , \\ kr_2 &= \mathbf{S}_{1010}\, kr_{1i}\,\omega\tau_{1i} + \mathbf{S}_{1001}\, kr_{1i}\, c\tau'_{1i} \\ &\quad + \mathbf{S}_{0110}\, r'_{1i}\,\omega\tau_{1i} + \mathbf{S}_{0101}\, r'_{1i}\, c\tau'_{1i} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}.1)$$

一方，式（3．25）および（3．26）に対応してつぎのように表現される．

$$\left.\begin{aligned} r'_2(kz) &= W^{r'}_{0101}(kz)\,\hat{K}_{1i}\, r'_{1i} + W^{r'}_{1001}(kz)\,\hat{K}_{1i}\, kr_{1i} \\ &\quad + W^{r'}_{0110}(kz)\,\omega\tau_{1i}\, r'_{1i} + W^{r'}_{1010}(kz)\,\omega\tau_{1i}\, kr_{1i} \quad , \\ kr_2(kz) &= W^{r}_{0101}(kz)\,\hat{K}_{1i}\, r'_{1i} + W^{r}_{1001}(kz)\,\hat{K}_{1i}\, kr_{1i} \\ &\quad + W^{r}_{0110}(kz)\,\omega\tau_{1i}\, r'_{1i} + W^{r}_{1010}(kz)\,\omega\tau_{1i}\, kr_{1i} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}.2)$$

$W^{r'}_{klmn}$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} W^{r'}_{0101} &= M_{12}\int \{-M_{21}M_{kr'}\}/W_r \cdot d(kz) \\ &\quad + M_{11}\int M_{22}M_{kr'}/W_r \cdot d(kz) \quad , \end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.3)$$

$$\begin{aligned} W^{r'}_{1001} &= M_{12}\int (-M_{21}M_{kr})/W_r \cdot d(kz) \\ &\quad + M_{11}\int M_{22}M_{kr}/W_r \cdot d(kz) \quad , \end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.4)$$

$$\begin{aligned} W^{r'}_{0110} &= M_{12}\int (-M_{21}M_{\tau r'})/W_r \cdot d(kz) \\ &\quad + M_{11}\int M_{22}M_{\tau r'}/W_r \cdot d(kz) \quad , \end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.5)$$

$$W^{r'}_{1010}=M_{12}\int(-M_{21}M_{\tau r})/W_r\cdot d(kz)$$

$$+M_{11}\int M_{22}M_{\tau r}/W_r\cdot d(kz)\quad . \qquad (A.6)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
M_{kr'}&=T_{21}M_{21}B_1+T_{21}M_{11}B_2+T_{11}M_{21}B_3+T_{11}M_{11}B_4,\\
M_{kr}&=T_{21}M_{22}B_1+T_{21}M_{12}B_2+T_{11}M_{22}B_3+T_{11}M_{12}B_4,\\
M_{\tau r'}&=T_{22}M_{21}B_1+T_{22}M_{11}B_2+T_{12}M_{21}B_3+T_{12}M_{11}B_4,\\
M_{\tau r}&=T_{22}M_{22}B_1+T_{22}M_{12}B_2+T_{12}M_{22}B_3+T_{12}M_{12}B_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (A.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
B_1&=\eta/2kc^2\cdot[(\widetilde{K}_0+1)U(\widetilde{K}_0)^{-1}\partial^2 a_0/\partial(\omega T)\partial(kz)\\
&\quad+U(\widetilde{K}_0)^{-1/2}c^2\varepsilon\mu\partial^2 a_0/\partial(\omega T)^2],\\
B_2&=\eta/kc^2\cdot(\widetilde{K}_0+1)U(\widetilde{K}_0)^{-1}\partial a_0/\partial(\omega T)\quad ,\\
B_3&=-\eta/2kc^2\cdot[U(\widetilde{K}_0)^{-2}\{(\widetilde{K}_0+1)^2+1\}\widetilde{K}_0\partial a_0/\partial(kz)\\
&\quad+U(\widetilde{K}_0)^{-3/2}(\widetilde{K}_0+1)\widetilde{K}_0c^2\varepsilon\mu\partial a_0/\partial(\omega T)],\\
B_4&=-\eta/kc^2\cdot U(\widetilde{K}_0)^{-2}\{(\widetilde{K}_0+1)^2+1\}\widetilde{K}_0 a_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (A.8)$$

W^r_{klmn} に対する表現は，上式（A．3）～（A．6）における積分記号の外側の M_{11} および M_{12} をそれぞれ M_{21} および M_{22} におきかえたものとして与えられる．

式（3．36）に対応する $W^{r'}_{klmn}$ と $\mathbf{S}'_{klmn}$ との変換式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
W^{r'}_{0101}&=\mathbf{S}'_{0101}/\kappa_i, & W^{r'}_{0110}&=\mathbf{S}'_{0110},\\
W^{r'}_{1001}&=\mathbf{S}'_{1001}/\kappa_i, & W^{r'}_{1010}&=\mathbf{S}'_{1010}.
\end{aligned}\right\} \qquad (A.9)$$

また，W^r_{klmn} に対する変換式は上式右辺の $\mathbf{S}'_{klmn}$ を $\mathbf{S}_{klmn}$ におきかえたものとして与えられる．なお，近軸変換行列 $\mathbf{M}$ は二つの記述系において共通である．

B　式（4．17）～（4．20）の導出

$\tilde{\mathbf{T}}$は次式を満足する．

$$\left.\begin{aligned} &d\tilde{T}_{11}/d(kz)-p_{k\kappa}\tilde{T}_{11}-(p_{k\tau}+p^{s}_{k\tau})\tilde{T}_{21}=0\ , \\ &d\tilde{T}_{21}/d(kz)-p_{\tau k}\tilde{T}_{11}=0\ , \end{aligned}\right\} \qquad (A.10)$$

$$\left.\begin{aligned} &d\tilde{T}_{12}/d(kz)-p_{k\kappa}\tilde{T}_{12}-(p_{k\tau}+p^{s}_{k\tau})\tilde{T}_{22}=0\ , \\ &d\tilde{T}_{22}/d(kz)-p_{\tau k}\tilde{T}_{12}=0\ . \end{aligned}\right\} \qquad (A.11)$$

したがって$det\ \tilde{\mathbf{T}}$は次のようにかかれる．

$$\begin{aligned} det\,\tilde{\mathbf{T}} &= \tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22}-\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21} \\ &= \tilde{T}_{11}(p_{k\tau}+p^{s}_{k\tau})^{-1}(d\tilde{T}_{12}/d(kz)-p_{kk}\tilde{T}_{12}) \\ &\quad -\tilde{T}_{12}(p_{k\tau}+p^{s}_{k\tau})^{-1}(d\tilde{T}_{11}/d(kz)-p_{kk}\tilde{T}_{11})\ . \end{aligned} \qquad (A.12)$$

上式を変形すると

$$(p_{k\tau}+p^{s}_{k\tau})\,det\,\tilde{\mathbf{T}}=\tilde{T}_{11}{}^{2}\,d(\tilde{T}_{12}/\tilde{T}_{11})/d(kz)\ . \qquad (A.13)$$

一方，式（4．15）から

$$\hat{W}^{2}/\hat{K}_{1im}{}^{2}=\tilde{T}_{11}{}^{2}\{1+(\omega\tau_{1im})^{2}\tilde{T}_{12}{}^{2}/(\hat{K}_{1im}{}^{2}\tilde{T}_{11}{}^{2})\}\ . \qquad (A.14)$$

式（A．13）および（A．14）から式（4．17）および（4．18）をうる．
同様に，$\tilde{\mathbf{T}}$のみたす式（A．10）および（A．11）から

$$p_{\tau k}\,det\,\tilde{\mathbf{T}}=\tilde{T}_{22}{}^{2}\,d(\tilde{T}_{21}/\tilde{T}_{22})/d(kz)\ . \qquad (A.15)$$

また，式（4．16）から

$$\Theta^{2}/(\omega\tau_{1im})^{2}=\tilde{T}_{22}{}^{2}[1+\hat{K}_{1im}{}^{2}\tilde{T}_{21}{}^{2}/\{(\omega\tau_{1im})^{2}\tilde{T}_{22}{}^{2}\}] \qquad (A.16)$$

が成り立つ．式（A．15）および（A．16）から式（4．19）および（4．20）をうる．

C　Θの輪郭方程式の導出

式（４．１５）を微分すれば

$$d\hat{W}/d(kz)=\hat{W}^{-1}\left[p_{kk}\hat{W}^2+(p_{k\tau}+p_{k\tau}^{s})\left\{\hat{K}_{1im}{}^2\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{21}+(\omega\tau_{1im})^2\cdot\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{22}\right\}\right] \qquad (A.17)$$

をうる．また，式（４．１６）を微分すれば次式をうる．

$$d\Theta/d(kz)=\Theta^{-1}p_{\tau k}\left\{\hat{K}_{1im}{}^2\tilde{T}_{21}\tilde{T}_{11}+(\omega\tau_{1im})^2\tilde{T}_{22}\tilde{T}_{12}\right\}. \qquad (A.18)$$

いま，

$$\left\{\hat{K}_{1im}{}^2\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{21}+(\omega\tau_{1im})^2\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{22}\right\}^2$$
$$=\hat{W}^2\Theta^2-(\hat{K}_{1im}\,\omega\tau_{1im}\,det\,\tilde{\mathbf{T}})^2 \qquad (A.19)$$

が成り立つことに注意すれば，式（Ａ．１７）および（Ａ．１８）からただちに次式をうる．

$$\hat{W}^2\Theta^2=\left\{\Theta/p_{\tau k}\cdot d\Theta/d(kz)\right\}^2+(\hat{K}_{1im}\,\omega\tau_{1im}\,det\,\tilde{\mathbf{T}})^2\ , \qquad (A.20)$$

$$d\hat{W}/d(kz)-p_{kk}\hat{W}-\left\{p_{k\tau}+p_{k\tau}^{s}(\Theta,kR,kz)\right\}/p_{\tau k}\cdot\Theta/\hat{W}$$
$$\cdot d\Theta/d(kz)=0\ . \qquad (A.21)$$

上２式から$\hat{W}$を消去すれば式（４．２６）をうる．

D　蓄積エネルギWの計算

式（５．５）のWは次のようにかかれる．

$$W=3W_{\pi}+3W_1+2W_2\ . \qquad (A.22)$$

ただし，W_{π}は領域$|r|\leqq a$および$1\leqq z/D\leqq 3$に蓄えられるエネルギ，W_1は端の空胴の領域$a\leqq r\leqq b$におけるもの，そしてW_2は端の空胴に隣接する空胴の領域$a\leqq r\leqq b$におけるものである．

分散関係式を用いればW_π，W_1およびW_2は次式で与えられる．

$$\frac{ckW_\pi}{(A_0/k)^2}=\frac{\pi\varepsilon}{2c}\,kD\left(kb\frac{a}{b}\right)^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{c}{\chi_m/k}\frac{A_m}{A_0}\right)^2$$

$$\cdot\left\{J_1^{\,2}(\chi_m a)-J_0(\chi_m a)J_2(\chi_m a)\right\}\ ,\qquad (A.23)$$

$$\frac{ckW_1}{(A_0/k)^2}=\frac{\pi\varepsilon}{2c}\left[\frac{1}{kD\cdot d/D}\left(\frac{c}{\Gamma_0/k\cdot F_0(\Gamma_0 a)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\right.\right.$$

$$\left.\frac{A_m}{A_0}J_0(\chi_m a)\,kI_{0m}\right)^2$$

$$\cdot(kb)^2\left\{F_1^{\,2}(\Gamma_0 b)-(a/b)^2(F_1^{\,2}(\Gamma_0 a)-F_0(\Gamma_0 a)F_2(\Gamma_0 a))\right\}$$

$$+\sum_{t=1}^{\infty}\frac{2}{kDd/D}\left(\frac{c}{\Gamma_{2t}/k\cdot F_0(\Gamma_{2t}a)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{A_m}{A_0}J_0(\chi_m a)\,kI_{2tm}\right)^2$$

$$\left.\cdot(kb)^2\left\{F_1^{\,2}(\Gamma_{2t}b)-(a/b)^2(F_1^{\,2}(\Gamma_{2t}a)-F_0(\Gamma_{2t}a)F_2(\Gamma_{2t}a))\right\}\right],$$

$$(A.24)$$

$$\frac{ckW_2}{(A_0/k)^2}=\frac{\pi\varepsilon}{2c}\left[\sum_{t=1}^{\infty}\frac{2}{kDd/D}\left(\frac{c}{\Gamma_{2t-1}/k\cdot F_0(\Gamma_{2t-1}a)}\right.\right.$$

$$\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{A_m}{A_0}J_0(\chi_m a)\,kI_{2t-1m}\Big)^2$$

$$\cdot(kb)^2\left\{F_1^{\,2}(\Gamma_{2t-1}b)-(a/b)^2(F_1^{\,2}(\Gamma_{2t-1}a)\right.$$

$$\left.\left.-F_0(\Gamma_{2t-1}a)F_2(\Gamma_{2t-1}a))\right\}\right]\ ,\qquad (A.25)$$

ただし，

$$I_{sm}=\begin{cases}S_1+S_2 & (s:even)\\ S_2-S_1 & (s:odd)\end{cases}\ ,$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sin\left[\left\{(1+4m)\pi/2D + s\pi/d\right\}D/2\right]/\left\{(1+4m)\pi/2D + s\pi/d\right\}, \\ S_2 &= \sin\left[\left\{(1+4m)\pi/2D - s\pi/d\right\}D/2\right]/\left\{(1+4m)\pi/2D - s\pi/d\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (A.26)$$

$$\left.\begin{aligned} F_{\binom{0}{1}{2}}(\Gamma_s a) &= J_{\binom{0}{1}{2}}(\Gamma_s a)Y_0(\Gamma_s b) - J_0(\Gamma_s b)Y_{\binom{0}{1}{2}}(\Gamma_s a), \\ \chi_m^2 &= \left[(kD)^2 - \left\{(1+4m)\pi/2\right\}^2\right]/D^2, \\ \Gamma_s{}^2 &= k^2 - (s\pi/d)^2 . \end{aligned}\right\} \quad (A.27)$$

上式の表現において，χ_m あるいは Γ_s が純虚数となるときは χ_m を k_m で，あるいは Γ_s を $\widetilde{\Gamma}_s$ でおきかえる．ただし $\chi_m{}^2 = -k_m{}^2$，$\Gamma_s{}^2 = -\widetilde{\Gamma}_s{}^2$ である．さらに J_0，J_1，J_2，Y_0 および Y_2 をそれぞれ I_0，I_1，I_2，K_0 および K_2 でおきかえ，Y_1 を $-K_1$ でおきかえると上式はそのまま成立する．ただし，ここでの K_0・K_1，K_2 は第2種変形ベッセル関数である．