Title	線型位相空間における双対系構造の一般化と多価写像の不動点定理
Author(s)	浦井, 憲; 横田, 耕祐
Citation	大阪大学経済学. 2006, 56(3), p. 1-12
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/14723
rights	
Note	

線型位相空間における双対系構造の一般化と多価写像の不動点定理

浦　井　　憲 * ・横　田　耕　祐 †

1　はじめに

本稿の目的は、経済学的均衡理論という用途・観点から、できる限り一般的な形の不動点定理を示すことにある。ここでの結果の特徴は、「線型位相空間における双対系 (双対システム)」の概念を一般化し、Kakutani 型および Browder 型の多価写像に対して不動点の存在に関する一般条件を記述するためそれを用いたことにある。双対システムの概念を一般化することは経済学理論において重要な意味がある。なぜなら、それは通常の事実と価値 (財と価格) の分類を再構築することを可能にするからである。

社会科学において、個人によって構成された厳密な意味で (ゲーム論的なメカニズムという意味で) 社会を完全に記述できないという事実 (Urai (2002)) は重要であり、その主たる難しさは認識の問題にある。社会という概念は個人にとって自分自身、つまり各個人の思考や信念、将来に対する期待、他人に関する知識、合理性を含む全体からなる。個人は相互に依存しあい、そして各人の思考や知識もまた互いの影響を受けあっている。経済学理論はこうした問題を、市場メカニズム下で効用最大化を目指す主体という世界観、ならびにそこでの合理性に基づいて、単純化したものである。しかし、このような手法にとって事実と (価格によって与えられる) 価値の区別は必要不可欠なものである。価格は交換についてのルールを与えたり、財空間の或る部分集合に消費者の行動を制限したりする。世界に関する信念や、世界を形作る合理性を所与とすると、財空間における需要と供給の物理的な状況から、人間社会がどのようなものであるか、どのようなものであるべきか、ということを記述するためにこそ均衡という概念が出てくるのである。数学的には均衡は財と価格ベクトル空間の双対システム上に定義された写像の不動点として特徴付けられ、抽象的な均衡問題は Gale-Nikaido-Debreu Lemma という名で知られている。このような個人の信念 (価値判断) と物理的状況 (事実判断) の区別が経済学理論において有用かつ必要なものであることは間違いない。しかし、その境界は通常の経済学理論で考えられている程に明確なものでもない[1]。 このような事実／価値の不確定な境界を記述するための

* 大阪大学大学院経済学研究科
（E-mail：urai@econ.osaka-u.ac.jp）
〒 560 － 0043 大阪府豊中市待兼山町
大阪大学大学院経済学研究科

† 大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程
（E-mail：cg034yk@mail2.econ.osaka-u.ac.jp）
〒 560 － 0043 大阪府豊中市待兼山町
大阪大学大学院経済学研究科

[1] 現実社会において、倫理、習慣、法律などが我々の価値判断を形作る大きな役割をしているような例は多いが、「習慣は第２の天性」と言われるがごとく、そういったものは我々の事実判断にも影響を与えている。事実判断と価値判断のグレーゾーンというべき部分 (その代表は制度、モラル、認識といったものであるが) に向けて、理論は常に開かれていなければならない。

数学的な手段として双対概念を一般化することは、経済学理論が世界を記述する際の十分な広がりを持つために重要なことである。

本稿におけるいくつかの定理は Kakutani 型不動点定理の変形という意義だけでなく Browder 型不動点定理の最も一般的な形を与えるものにもなっており、これらの結果は数学的にも興味深いものとなっている。定理 1 と定理 2 は Browder の不動点定理の拡張で、これらの定理は Park (2001)(G-convex 空間の下での Corollary 4.5)、Ben-El-Mechaiekh et al. (1998)(L-convexity 下での Proposition 3.8)、Ding (2000)(可縮条件を用いた議論)、Luo (2001)(semi-lattice 構造を伴った δ-convexity 下での Theorem 3.2) などで行われたのと本質的に同様のアプローチである[2]。定理 3 は Kakutani の不動点定理の最も一般的な形のひとつである。この定理において、必要な条件は線型空間構造を用いることなく、本稿で定義する「一般化された双対システム (generalaized dual system)」という独自の概念のみで与えられている。Ben-El-Mechaiekh et al. (1998)(Theorem 4.2 と Corollary 4.7) は凸構造に限ればほぼ同様の問題を扱っているが、本稿では一様構造を用いずに定理を与えることが可能となっている。更に、定理 3 は Browder タイプの不動点定理の一般化とみなすこともできる (系 1 と系 2)。Kakutani の不動点定理のより直接的な拡張として、定理 4 は Ben-El-Mechaiekh et al. (1998) のものとほぼ同様のものであるが、定理 5 は「一般化された双対システム構造 (generalized dual system structure)」の概念を元にしているという点において Ben-El-Mechaiekh et al. (1998) とは全く異なる意義を持っている。論文の最後に与えた系 4 は、今日見られる Gale-Nikaido-Debreu Lemma としては恐らく最も一般的な形に、以上の定理を応用したものである。

[2] 本稿における抽象凸はこれらの論文で用いられているどの概念よりも弱いものである。

2　抽象凸

以下では必ずしも線型空間構造に依存しない凸概念を定義する。通常、線型空間における凸性は、(1)『集合それ自身を含む最小の凸集合である凸包を定義する』、(2)『有限部分集合に対して凸結合を定義する』という 2 つの特徴を持つ。不動点議論には特に 2 番目の特徴が重要となる[3]。凸概念を一般化するために、本稿ではベクトル空間構造から構造として 2 つ目の特徴を取り出す。

Eilenberg and Montgomery (1946)、その更なる一般化である Begle (1950) に見られるように、位相空間における線型構造は不動点議論には必ずしも必要ではないことがわかる。ある種の双対構造が必要と思われる Gale-Nikaido-Debreu Lemma においてさえも、必要となる条件は”a compact $\cdots$ set in which the convex linear combination of finitely many points depends continuously on its coefficients”（Nikaido (1959), p.362, Main Theorem）であることが知られている。本稿に於いて凸概念を一般化した抽象凸は、このタイプの『線型結合』の一般化になっているが、『凸包』を含む形で凸概念を一般化した Komiya (1981)、Horvath (1991)、Park and Kim (1996)、Ben-El-Mechaiekh et al. (1998) のような近年の研究の全体に渡る一般化を目的とはしていない。しかし、『凸結合』概念については近年の研究でなされている中で最も一般的な枠組みを与えている。

有限集合 A に対して、A の要素の数を $\sharp A$ で表す。Δ^A により、すべての非空な有限集合 A に対して $\Sigma_{a\in A} e(a) = 1$ となる関数 $e : A \to \mathbb{R}_+$ の全体を表す。すべての $a' \in A\setminus\{a\}$ に対して $e^a(a') = 0$ かつ $e^a(a) = 1$ となる Δ^A の要素を e^a で表す。

[3] 凸包を定義することは、すべての凸集合からなる族を定義することにすぎないので、(1) は常に凸構造を荒いものにする。(2) によって最も細かい凸構造の 1 つが自動的に定義され、また凸構造がより細かくなると不動点定理で必要となる凸性の条件はより弱くなるので、不動点議論にとっては (1) は常に不要である。

X を位相空間とする。$\mathcal{F}(X)$ で X の非空有限集合の全体からなる集合を表す。すべての非空有限集合 $A \in \mathcal{F}(X)$ に対して、連続関数 $f_A : \Delta^A \to X$ とともに $A \subset \hat{A}$ なる有限集合 $\hat{A} \in \mathcal{F}(X)$ が存在する時、X に (抽象) 凸構造が定義されていると言う。すべての非空有限集合 $B \subset Z$ と $B' \in \mathcal{F}(X)$ なるすべての $B' \supset \hat{B}$ に対して $f_{B'}(\Delta^B) \subset Z$ となる時、X の部分集合 Z は (抽象) 凸であると言う[4]。

抽象凸集合の任意のインターセクションが抽象凸になることは容易にわかる。X を抽象凸構造が定義された集合とする。すべての $A \subset X$ に対して、A 内の点の凸結合からなる集合の一般概念を

$$C(A) = \bigcup_{A' \supset \hat{A}, A' \in \mathcal{F}(X)} f_{A'}(\Delta^A)$$

と定義する。X のすべての凸部分集合 Z において、任意の非空な有限部分集合 $A \subset Z$ に対して $C(A) \subset Z$ となるのは明らかである。しかし、$A \subset Z$、$0 < \sharp A < \infty$ なる $C(A)$ のすべてのユニオン (これを $C(Z)$ で表す。) が (抽象) 凸集合になるとは限らない[5]。一方で、X そのものは明らかに (抽象) 凸であり、抽象凸集合の任意のインターセクションは抽象凸なので、Z を含む最小の抽象凸集合、すなわち Z の凸包 coZ が存在する。凸包 coZ は Z における点のすべての有限な凸結合からなる集合 $C(Z)$ を明らかに含むが、必ずしもそれと一致しないかもしれない。

3 不動点定理と双対システム構造

まず最初に Browder (1968) の不動点定理を抽象凸空間に拡張する。

定理 1 (抽象凸空間における Browder の不動点定理). X を抽象凸構造が定義されたコンパクト ·*Hausdorff* 空間とする。このとき、各点で open lower section を持つすべての非空 · 凸値対応 $\varphi : X \to 2^X$ は不動点を持つ。

証明 . φ は非空値なので、$\{\varphi^{-1}(y) \mid y \in X\}$ は X の開被覆である。X はコンパクトなので、$\{\varphi^{-1}(y) \mid y \in X\}$ の有限被覆 $\{\varphi^{-1}(y^i) \mid i = 0, 1, \cdots, n\}$ が存在する。A を有限集合 $\{y^0, y^1, \cdots, y^n\}$ とし、$\bar{A}$ をすべての $B \subset A$ に対して $\hat{B}$ を含む集合とする。すると抽象凸の定義より、Z が凸かつ集合 $B \subset A$ を含んでいるとすると、$Z \supset f_{\bar{A}}(\Delta^B)$ を得る。

$\varphi^{-1}(y^0), \varphi^{-1}(y^1), \cdots, \varphi^{-1}(y^n)$ に対する 1 の分解を $\beta^0, \beta^1, \cdots, \beta^n$ とし、写像 $F : \Delta^A \to \Delta^A$ を

$$F(e) = \sum_{i=0}^{n} \beta^i(f_{\bar{A}}(e)) e^{y^i}$$

と定義する。F は Δ^A からそれ自身への連続関数なので、Brouwer の不動点定理より F は不動点 $e^* = F(e^*)$ を持つ。$x^* = f_{\bar{A}}(e^*)$ とする。1 の分解の性質から

$$\beta^i(x^*) > 0 \Longrightarrow x^* \in \varphi^{-1}(y^i) \Longrightarrow y^i \in \varphi(x^*)$$

を得る。方程式の両辺に $f_{\bar{A}}$ を施すと $f_{\bar{A}}(e^*) = f_{\bar{A}}(\sum_{i=0}^{n} \beta^i(f_{\bar{A}}(e^*)) e^{y^i})$ となる。集合 $\{y^i \mid \beta^i(x^*) > 0\}$ を B で表す。$x^* = f_{\bar{A}}(e^*)$ と $x^* = f_{\bar{A}}(\sum_{i=0}^{n} \beta^i(f_{\bar{A}}(e^*)) e^{y^i})$ ということから、$x^* \in f_{\bar{A}}(\Delta^B)$ を得る。$\varphi(x^*)$ は凸なので、$f_{\bar{A}}(\Delta^B) \subset \varphi(x^*)$ となり、

$$x^* \in f_{\bar{A}}(\Delta^B) \subset \varphi(x^*)$$

すなわち、φ の不動点 x^* を得る。

（証明終）

次の定理も Browder の不動点定理の拡張と見ることができる[6]。Kakutani 型の写像を含むこ

[4] この条件で、「$B' \supset \hat{B}$ に対して」を「$B' \supset B$ に対して」と変えると Ben-El-Mechaiekh et al. (1998) で定義された L-convexity の概念になる。抽象凸に関連する議論については、非常に簡潔で優れたイントロダクションとして Komiya (1999) を参考にさせて頂いた。

[5] その意味では、1 点から成る集合でさえ必ずしも抽象凸集合とは限らない。

[6] open lower section property は $\varphi(x)$ の或る要素 y^x のみに課せられる。

のタイプの定理は、線型位相空間では Urai and Hayashi (2000)、Urai (2000)、Urai and Yoshimachi (2004) で扱われているが、本稿ではさらにこれらの結果を拡張する。以下では、集合 X 上の抽象凸構造を写像の集合 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ で表す。混乱のおそれがない限り $\mathcal{F}(X)$ からそれ自身への写像 $A \mapsto \hat{A}$ はあえて記述しないものとする。また、写像 $\varphi : X \to 2^X$ のすべての不動点からなる集合 $\{x \in X \mid x \in \varphi(x)\}$ を $\mathcal{F}ix(\varphi)$ で表す。

定理 2 (Browder の不動点定理の拡張). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ が定義された非空・コンパクト・*Hausdorff* 空間とする。もし凸値対応 $\varphi : X \to 2^X \setminus \emptyset$ が、すべての $x \notin \mathcal{F}ix(\varphi)$ について、$y^x \in \varphi(x)$ という点および、$\forall z \in U^x \setminus \mathcal{F}ix(\varphi), y^x \in \varphi(z)$ となる x の開近傍 U^x を持つならば、$\mathcal{F}ix(\varphi) \neq \emptyset$ が成り立つ。

証明 . $\mathcal{F}ix(\varphi) = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。そうすると、$\{U^x \mid x \in X\}$ は X の被覆なので、定理中の条件を満たすような点 $y^1 = y^{x^1}, y^2 = y^{x^2}, \cdots, y^n = y^{x^n}$ を持つ有限被覆 $\{U^{x^1}, U^{x^2} \cdots, U^{x^n}\}$ が存在する。$\bar{A} = \bigcup\{\hat{B} \mid B \subset A\}$ として $\bar{A} \in \mathcal{F}(X)$ をとり、Δ^A からそれ自身への連続写像 F を次のように定義する。

$$F(e) = \sum_{t=1}^n \beta^t(f_{\bar{A}}(e))e^{y^t}$$

このとき、写像 F は *Browder* の不動点定理より不動点 $e^* = F(e^*)$ を持つ。$x^* = f_{\bar{A}}(e^*)$、$B = \{y^t \mid \beta^t(f_{\bar{A}}(e^*)) > 0\}$ とする。$\beta^t(x^*) > 0$ ならば $y^t \in \varphi(x^*)$ なので $f_{\bar{A}}(\Delta^B) \subset \varphi(x^*)$ を得る。したがって、$x^* = f_{\bar{A}}(e^*) = f_{\bar{A}}(\sum_{t=1}^n \beta^t(f_{\bar{A}}(e^*))e^{y^t}) \in f_{\bar{A}}(\Delta^B) \subset \varphi(x^*)$ となる。ゆえに、φ は不動点を持つことになり、矛盾となる。

（証明終）

定理２における対応 φ に関する『すべての $x \notin \mathcal{F}ix(\varphi)$ について、x の開被覆 U^x が存在し、すべての $z \in U^x \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ について $y^x \in \varphi(z)$ となる $y^x \in \varphi(x)$ が存在する』という条件を満たすことを、本稿では対応 $\varphi : X \to 2^X$ が $X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ 上で locally common element を持つと呼ぶ。

写像 $\varphi : X \to 2^X$ における x から見た $\varphi(x)$ の方向（direction）という概念を用いて定理２をさらに一般化する。X と W にはそれぞれ（抽象）凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ と $\{g_A \mid A \in \mathcal{F}(W)\}$ が定義された集合であると仮定する。本稿では、次の３つの条件 (V1)～(V3) を満たすとき、写像 $V : X \times W \to 2^X$ を持つ集合 W を X 上の一般化された双対構造 (generalized dual structure) と呼ぶ[7]。

(V1) $V(x, w)$ は X の凸部分集合である。
(V2) $x \notin V(x, w)$
(V3) $y \in V(x, w^0) \wedge y \in V(x, w^1) \wedge \cdots \wedge y \in V(x, w^n) \Longrightarrow y \in V(x, w)\ for\ \ all\ \ w \in C(\{w^0, w^1, \cdots, w^n\})$

条件 (V3) において、$C(\{w^0, w^1, \cdots, w^n\})$ は集合

$$\bigcup_{A' \in \mathcal{F}(X), A' \supset \hat{A}} g'_A(\Delta^A)$$

を表す[8]。(ここで、$A = \{w^0, w^1, \cdots, w^n\}$ である。) (V1)～(V3) の条件に加えて次の条件 (V4) が満たされるとき、双対システム構造は位相的 (topological) であると呼ばれる。

(V4) $V(x, w) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y^x \in V(x, w),\ \forall B \in \mathcal{F}(W),\ C(B) \ni w,\ \exists U \subset X \times W,\ (x, w) \in U,\ U\ is\ open,\ and\ \forall (z, w') \in U \cap X \times C(B),\ y^x \in V(z, w')$ [9]

[7] 厳密に言うと、上述のような「構造」という言葉の使い方は言葉の乱用である。本来 V は２つの base set X と W 上の構造として呼ばれるべきものである。

[8] X と W が線型空間で、(X, W, f) が dual system を作るような canonical bilinear form $f : X \times W \to R$ が存在するならば、V を $V(x, w) = \{y \in X \mid f(y - x, w) > 0\}$ として定義できる。したがって、$X \times W$ 上の写像 V を持つ集合 W は X 上の generalized dual system structure として見なすことができる。$w^0 = w^1 = \cdots = w^n$ の時でさえも条件 (V3) は満たされることに注意されたい。

[9] 勿論この条件は canonical bilinear form と topological dual

条件 (V4) は Brower 型の不動点定理には必ずしも必要ではない。しかし、Kakutani 型の不動点定理には欠くことのできない条件となる。(ただし、一様構造を持つ空間においては、Kakutani 型であっても (V4) は必要ではなくなる。このことは、定理 4 および定理 5 において示される。)

すべての $x \notin \mathcal{F}ix(\varphi)$ とすべての $w \in \Phi(x)$ について $\varphi(x) \subset V(x, w)$ であるとき、対応 $\Phi : X \to 2^W$ は V と W の下での φ の (1 つの) 双対空間表現 (dual space representation) と呼ぶ。各 $\varphi : X \to 2^X$ に対して、φ に対して、それが双対空間表現を持つように一般化された双対系構造 W と $V : X \times W \to 2^X$ が存在するとは限らない。しかしそれがあるとすれば、写像 φ とその不動点からなる集合 $\mathcal{F}ix(\varphi)$ を様々な方法で特徴付けることができる。写像 $\varphi : X \to 2^X$ が、すべての $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ において、$w^x \in W$ という点および $\forall z \in U^x, w^x \in \Phi(z)$ となる x の開集合 U^x の存在するような双対空間表現 Φ を持つとき、φ は locally fixed direction を持つと呼ぶ[10]。

$X = W$ であるような一般化された双対構造 (generalized dual structure) の特殊ケースは Urai (2000) における Section 6, Theorem 21 で扱われており、Urai and Yoshimachi (2004) では線型位相空間における『方向 (direction)』の構造としてさらに一般化されている[11]。本稿では次の 2 点についてそれとは異なる一般化を行っている。

(i) 凸概念が base set 上の線型構造に必ずしも依存する必要がない。

(ii) 集合 W が X の部分集合に制限されない。

X を含んでいるような線型空間の双対線型空間の部分集合として W を考えることによって、directional structure を線型空間に対する双対の一般化された概念と考えることができるので、後者の一般化が特に重要である。Kakutani 型の写像の値がとる閉性と凸性という条件は、continuous real linear forms (topological dual space) の集合といわゆる分離定理を通じて非常に特別な関係にあるので、Kakutani 型と Browder 型両方の不動点定理に対して統一した見方が可能となる[12]。

定理 3 (双対システム構造の下での不動点定理). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ を持つ非空・コンパクト ·*Hausdorff* 空間とし、W を凸構造 $\{g_A \mid A \in \mathcal{F}(W)\}$ を持つ集合とする。非空値対応 $\varphi : X \to 2^X$ が、X 上の位相的双対システム構造 (*topological dual system structure*) $(W, V : X \times W \to 2^X)$ の下で *locally fixed direction* を持つ時、φ は不動点を持つ。[13]

証明 . φ の双対空間表現を Φ で表す。φ が不動点を持たないと仮定しよう。Φ は $X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ の各点で *fixed direction* を持つので、X のコンパクト性を考慮すると有限開被覆 $U^1, \cdots, U^m$ と点 $w^1, \cdots, w^m \in W$ が存在し、各 $i = 1, \cdots, m$ なら

space の partial continuity の概念を一般化したものである。条件 (V4) は Urai and Yoshimachi (2004) における (A3) lower topological condition と類似の条件として Urai (2005) で用いられたものである。

[10] 任意の $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ に対して、x の近傍 U^x と $U^x \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ 上の Φ の selection である連続写像 (または upper semicontinuous 対応) $p^x : U^x \setminus \mathcal{F}ix(\varphi) \to W$ が存在するような φ の dual space representation が存在する時、φ は locally continuous (または locally upper semicontinuous) direction を持つと呼ぶ。これらの写像に対する不動点定理は、$X = W$ 上の線型構造の下で Urai and Yoshimachi (2002) および Urai and Yoshimachi (2004) で扱われている。

[11] ただしこれらの論文では、条件 (V3) は $X = W$ という特別な設定の下でより強い形で書かれている。(Urai and Yoshimachi (2002) の脚注 2 を見よ。)

[12] X が局所凸線型位相空間のコンパクトな凸部分集合とすると、非空・閉値 upper semicontinuous 対応 $\varphi : X \to X$ が通常の topological dual system の下で locally fixed direction を持つことは明らかである。任意の $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ に対して、第 2 分離定理 (c.f. Schaefer (1971)) は強い意味で x と $\varphi(x)$ を分離する closed hyper plane(すなわち、局所凸空間上の continuous linear form) の存在を保証する。このような linear form からなる集合を $\Phi(x)$ と定義する。すると、φ の upper semicontinuity は、各点 x において、x に関係する 1 つの hyper plane($\Phi(x)$ の要素) が、ちょうどすべての $z \in U^x$ に対して $\varphi(z)$ の fixed local direction を与えているような、x の近傍 U^x の存在を保証する。

[13] Urai and Yokota (2005) と同様の定理 (Theorem 3) とは条件 (V4) が異なっており、ここでは Urai (2005) の証明を踏襲したものになっている。

びに全ての $z \in U_i$ について、$w^i \in \Phi(z)$ となる。$B = \{w^1, \cdots, w^m\}$ とし、$\beta^1, \cdots, \beta^m$ を $U^1, \cdots, U^m$ に関する 1 の分解とする。写像 $\hat{\varphi} : X \to 2^X$ を

$$\hat{\varphi}(x) = V(x, f_{\hat{B}}(\textstyle\sum_{i=1}^m \beta^i(x)e^i))$$

と定義する。ここで、e^i は $\Delta^B \subset \Delta^{\hat{B}}$ の頂点で w^i に対応しているところのものである。(V3) より、$f_{\hat{B}}(\sum_{i=1}^m \beta^i(x)e^i)$ は $\Phi(x)$ に属す。したがって、$\hat{\varphi}(x)$ は $\varphi(x)$ を含み、点 x から見た方向 $f_{\hat{B}}(\sum_{i=1}^m \beta^i(x)e^i)$ に他ならないものとなっている。さらに (V4) を考慮すると、$\hat{\varphi}$ は定理 2 の φ に関する条件を全て満たす。ゆえに、定理 2 より $\hat{\varphi}$ は不動点を持つが、これは (V2) に矛盾する。

（証明終）

凸値対応 $\varphi : X \to 2^X$ を所与として、$x \notin \mathcal{F}ix(\varphi)$ かつ $y \in \varphi(x)$ であるすべての (x, y) に対しては $V_\varphi(x, y) = \varphi(x)$、それ以外のときは $V_\varphi(x, y) = \emptyset$ として双対システム構造 (dual system structure) $(W = X, V_\varphi : X \times X \to X)$ を定義する。構造 $(W = X, V_\varphi)$ を dual system structure induced by φ と呼ぶ。すると、φ が locally common element を持つならば、定理 1 および定理 2 のように φ は $(W = X, V_\varphi)$ の下で locally fixed direction を持つ。より状況を限定して φ が開グラフを持つならば、$z^y \in \varphi(x) = V_\varphi(x, y)$ を任意にとることにより $(W = X, V_\varphi)$ が (V4) を満たすことも確認できる。したがって、定理 3 は Browder の不動点定理 (1968) の拡張であることがわかる。

系 1 (Browder の不動点定理の一般化). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ を持つコンパクト ·*Hausdorff* 空間とし、$\varphi : X \to 2^X$ を非空値対応とする。φ は $X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ 上で開グラフを持つとする。さらに、すべての $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ に対して $x \notin \Psi(x)$ かつ $\varphi(x) \subset \Psi(x)$ なる凸集合 $\Psi(x)$ が存在するとする。このとき、φ は不動点を持つ。

証明 . φ が不動点を持たないとすると、X から X 自身への非空凸値対応 Ψ は、Ψ によって *induce* された双対システム構造 (*dual system structure*) $(W = X, V_\Psi)$ の下で (V4) を満たす。したがって、定理 3 より Ψ は不動点を持つが、任意の $x \in X$ に対して $x \notin \Psi(x)$ なので Ψ が不動点を持つことはできない。

（証明終）

次の結果もまた定理 3 から直ちに得られる結果である。この系は、Urai (2000) の Theorem 1 ($\mathbf{K}^*$) や Urai and Yoshimachi (2004) の Theorem 1 の部分的拡張と見ることができる。

系 2. X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ を持ったコンパクト・*Hausdorff* 空間とし、$\varphi : X \to 2^X$ を非空値対応とする。任意の $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ に対して $x \notin \Phi(x)$ かつ $\varphi(x) \subset \Phi(x)$ となる凸値対応 $\Phi : X \to 2^X$ が存在するとする。さらに $X \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ において Φ が開グラフを持つとすると、φ は不動点を持つ。

証明 . φ に不動点がないとする。このとき Φ は X 上で定義され不動点を持たない。Φ によって *induce* された双対システム構造 (*dual system structure*) $(W = X, V_\Phi)$ を考えることによって、Φ の *dual space representation* と Φ は同一視できる。したがって、$(W = X, V_\Phi)$ は位相的 (*topological*) で、定理 3 より Φ は不動点 x^* を持つ。これは矛盾である。

（証明終）

既に見たように、X が局所凸線型位相空間のコンパクトな凸部分集合ならば、非空 · 閉値な upper semicontinuous 対応 $\varphi : X \to X$ は標準的な位相的双対構造 (topological dual structure) の下で locally fixed direction を持つ (脚注 12)。したがって、定理 3 が Kakutani-Fan-Glicksberg の不動点定理 (Kakutani (1941), Glicksberg (1952), Fan (1952)) の拡張になっている。しかし、この定理は局所凸線型位相空間におけるすべての (single valued) 連続関数のケースを含むので、このタイプの定理は重要である。次の系は single valued

であるという意味で定理3の特殊ケースであるが、これは局所凸位相空間構造や距離構造を持たない空間への Brouwer の不動点定理の一般化と考えることができる[14]。

系 3 (single valued ケースの不動点定理). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ コンパクトな *Hausdorff* 空間とし、$f : X \to X$ を関数 (*single valued*) とする。すべての $x \in X \setminus \mathcal{F}ix(f)$ に対して、点 $w^x \in W$ と $\forall z \in U^x, f(z) \in V(z, w^x)$ なる x の開近傍 U^x が存在するような X 上の *topological dual structure* (W, V) があるとする。このとき、f は不動点を持つ。

線型空間構造を持つ場合は当然ながら、一様空間構造下での Kakutani-Fan-Glicksberg 型の不動点定理を本稿での双対システムと同じ枠組で取り扱うことも可能である。X を (位相的) 一様空間とし、位相は X の uniformity に対する対称な開集合基底 $\{U_\mu \subset X \times X : \mu \in \mathcal{M}\}$ で与えられている[15]。X 上に凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ が定義されているとする。さらに、uniformity に対する基底であるすべての vicinity U_μ に対して、

(1) $U_\mu(x) = \{y \mid (x, y) \in U_\mu\}$ は凸

(2) X のすべての凸部分集合 Z に対して $U_\mu(Z) = \{y \mid (z, y) \in U_\mu \ for\ some\ z \in Z\}$ は凸

であると仮定する。このような空間を局所凸一様空間 (locally convex uniform space) と呼ぶ[16]。

定理 4 (局所凸一様空間における Kakutani の不動点定理). X を非空 · コンパクト ·*Hausdorff* 局所凸一様空間とし、$\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ を X 上の凸構造とする。$\varphi : X \to 2^X$ が閉グラフを持つ非空 · 凸値対応であるとすると、φ は不動点を持つ。

証明 . φ が不動点を持たないと仮定しよう。すると、すべての $x \in X$ に対して $x \notin \varphi(x)$ である。各 x と $y \in \varphi(x)$ に対して、$(x, y) \notin U$ なる *vicinity* U が存在する。$(V_{(x,y)} \circ V_{(x,y)}) \circ (V_{(x,y)} \circ V_{(x,y)}) \subset U$ なる対称な *vicinity* $V_{(x,y)}$ をとる。そうすると、$((z_1, z_2) \in V_{(x,y)}(x) \times V_{(x,y)}(y) \cap V_{(x,y)}) \Rightarrow ((x, z_1) \in V_{(x,y)} \wedge (z_1, z_2) \in V_{(x,y)} \wedge (z_2, y) \in V_{(x,y)}) \Rightarrow ((x, y) \in V_{(x,y)} \circ V_{(x,y)} \circ V_{(x,y)} \subset U)$ なので $V_{(x,y)}(x) \times V_{(x,y)}(y) \cap V_{(x,y)} = \emptyset$ でなければならない。φ のグラフはコンパクトなので、φ のグラフを被覆するような $\cup_{i=1}^n V_{(x_i,y_i)}(x_i) \times V_{(x_i,y_i)}(y_i)$ なる φ のグラフの有限個の点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ が存在する。U^* を $U^* \subset \cap_{i=1}^n V_{(x_i,y_i)}$ とし、V^* を $(V^* \circ V^*) \circ (V^* \circ V^*) \subset U^*$ なる対称な *vicinity* とする。このとき、φ のグラフ内のすべての (x, y) に対して $V^*(x) \times V^*(y) \cap V^* = \emptyset$ を得る。

$U \subset V^*$ を任意の *open vicinity* とする。X はコンパクトなので、被覆 $\{U(x) \mid x \in X\}$ は有限部分開被覆 $\{U(a_1^U), \cdots, U(a_n^U)\}$ を持つ。$\varphi(a_1^U), \cdots, \varphi(a_n^U)$ のそれぞれから任意に $b_1^U, \cdots, b_n^U$ を取り、$B^U = \{b_1^U, \cdots, b_n^U\}$ としたときの Δ^{B^U} からそれ自身への写像 g^U を

$$g^U(e) = \sum_{i=1}^n \beta_i^U(f_{\hat{B^U}}(e))e^i$$

と定義する。ここで、$f_{\hat{B^U}}$ は X 上の凸構造の下で与えられた写像を表し、e^i は b_i^U の値が 1 となるような Δ^{B^U} の要素を表す。g^U が Δ^{B^U} からそれ自身への連続写像であることは明らかなので、*Brouwer* の不動点定理より不動点 e^U を持つ。$x^U = f_{\hat{B^U}}(e^U)$ とする。X はコンパクトなので、*uniformity* を有向集合として考えると、$x^U \to x^*$ となる部分ネットが存在すると見ることができる。

局所凸一様空間の条件 (1) および (2) を満たす *open vicinity* $U \subset V^*$ をとる。$U \subset V^*$ よりすべての $x \in X$ と $\varphi(x)$ に対して

[14] ベクトル空間構造の下では、Urai and Yoshimachi (2004) に於ける定理の更なる拡張となる。

[15] 一様空間に関するこれらの概念の詳細については Kelley (1955)(Chapter 6) を見よ。

[16] X 上にはベクトル空間構造がないことに注意されたい。勿論すべての局所凸線型位相空間は、通常の線型空間に於ける凸構造の下では局所凸一様空間である。

$$U(\varphi(x)) \cap U(x) = \emptyset$$

を得る。φ の *upper semicontinuity* から、任意の $z \in \hat{U}(x^*)$ に対して $\varphi(z) \subset U(\varphi(x^*))$ なる対称な *open vicinity* $\hat{U} \subset U$ をとることができる。さらに、$U_0 \circ U_0 \subset \hat{U}$ なる対称な *open vicinity* U_0 と $x^{\bar{V}} \in U_0(x^*) \subset \bar{U}(x^*)$ なる対称な *open vicinity* $\bar{V} \subset U_0$ をとる。ここで、点 $x^{\bar{V}}$ は前の段落で取り扱ったように (暗黙的に $\bar{V}$ に依存している $a_1, \cdots, a_k$ および $b_1, \cdots, b_k$ と一緒に) とられているものとする。つまり、$\{\bar{V}(a_1), \cdots, \bar{V}(a_k)\}$ は X の被覆であり、$b_1, \cdots, b_k$ のそれぞれは $\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n)$ の点である。$\beta^1 : X \to [0,1], \cdots, \beta^n : X \to [0,1]$ で $\{\bar{V}(a_1), \cdots, \bar{V}(a_k)\}$ に関する 1 の分解を表すものとし、B で有限集合 $\{b_1, \cdots, b_k\}$ を表すとする。$x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(e^{\bar{V}})$ は

$$x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(g^{\bar{V}}(e^{\bar{V}})) = f_{\hat{B}}(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \beta^i(x^{\bar{V}})e^i)$$

を満たす。ただし、e^i は b_i の値が 1 となる Δ^B の要素を表す。$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ のとき $x^{\bar{V}} \in \bar{V}(a_i)$、すなわち $a_i \in \bar{V}(x^{\bar{V}}) \subset U_0(x^{\bar{V}})$ であるということに注意されたい。$x^{\bar{V}} \in U_0(x^*)$ だから、$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ は $(x^*, a_i) = (x^*, x^{\bar{V}}) \circ (x^{\bar{V}}, a_i) \in U_0 \circ U_0 \subset \bar{U}$ である。したがって、$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ であれば、$b_i \in \varphi(a_i) \subset U(\varphi(x^*))$ となる。しかし、これは $x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(\sum_{i=1}^{k} \beta^i(x^{\bar{V}})e^i)$ が $U(\varphi(x^*))$ の要素であることを意味する。なぜなら、局所凸一様空間の条件 (2) から $U(\varphi(x^*))$ は凸だからである。$x^{\bar{V}} \in U_0(x^*) \subset U(x^*)$ なので、$x^{\bar{V}} \in U(x^*) \cap U(\varphi(x^*))$ を得るが、これは仮定に矛盾する。

（証明終）

この証明において、次のように X 上の directional structure を定義することができる。すべての $x \in X$ と $e \in \Delta^B$ に対して $V(x,e)$ を次のように定義する。

$$V(x,e) = \textstyle\bigcap_{i \in \{j : e(b^j) > 0\}} U(\varphi(a_i))$$

そうすると、$V : X \times \Delta^B$ が directional structure の公理 (V1)(V2)(V3) を満たしていることをチェックすることは容易であり、(Δ^B, V) の下で φ は locally fixed direction を持つ。さらに、φ が closed valued upper semicontinuous であるということは、任意の $x \notin \varphi(x)$ に対して、すべての $z \in U(x)$ について $\varphi(z)$ が $U(x)$ と交わらない $V(x,e)$ の部分集合であるような x の開近傍 U^x が存在することを意味する。本稿では、(閉値写像の場合に限定されはするものの) 一般的な意味においてこれを x に於ける φ の upper demicontinuity と呼ぶ[17]。このケースでは条件 (V4) は必ずしも満たされていないかもしれないが、uniformity U 上の g^U での不動点議論と、uniformity $\bar{V}$ の下での x^* への極限議論があれば、写像 φ の不動点の存在には (V1)～(V3) で十分である。

定理 5 (局所凸一様空間における Kakutani の不動点定理の拡張). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ が定義された 非空 · コンパクト ·*Hausdorff*· 局所凸一様空間とし、W を凸構造 $\{g_A \mid A \in \mathcal{F}(W)\}$ が定義された集合とする。非空値対応 $\varphi : X \to 2^X$ が *dual system structure* $(W, V : X \times W \to 2^X)$ の下で閉値 *upper demicontinuous* であるとき、φ は不動点を持つ。

証明 . 先の定理 4 と同じ方法で、すべての *vicinity* U に対する g^U と x^U、および *limit point* x^* を定義する。($U \subset V^*$ という仮定と、V^* の定義はこれらの定義に関しては本質的ではない。) φ の不動点が存在しないと仮定する。このとき、x^* における φ の *upper demicontinuity* より、局所凸

[17] upper demicontinuity は、$\varphi(x)$ が closed hyperplane H によって定まった open half space に含まれる時、$\varphi(z)$ も x の近くのすべての z に対してその open half space に含まれるような、Hausdorff 線型空間に於ける φ に対する要求である。(Fan (1969) を見よ。) X がコンパクト ·Hausdorff· 局所凸一様空間で、$\varphi : X \to X$ が閉値である時、X は normal なので $x \notin \varphi(x)$ は x と $\varphi(x)$ が 2 つの開集合によって分離されることを意味する。したがって、$\varphi(x)$ を含む凸な開集合をすべての $y \in \varphi(y)$ についての direction $V(x,y)$ として考えることによって、閉値写像に対する upper demicontinuity の概念が上のように一般化される。

一様空間の条件 (1)(2) および

$$\forall z \in \bar{U}(x^*), \varphi(z) \subset V(x^*, w^*) \text{ かつ }$$
$$V(x^*, w^*) \cap \bar{U}(x^*) = \emptyset$$

を満たす *open vicinity* $\bar{U}$ が存在する。ここで、w^* は *upper demicontinuity* の条件においてその存在が保証されている W の要素である。$U_0 \circ U_0 \subset \bar{U}$ となる対称な *open vicinity* U_0 と $x^{\bar{V}} \in U_0(x^*) \subset \bar{U}(x^*)$ となる対称な *open vicinity* $\bar{V} \subset U_0$ をとる。ここで、$x^{\bar{V}}$ は先の定理 4 における証明と同じようにとられている。(すなわち、$\{\bar{V}(a_1)\cdots\bar{V}(a_k)\}$ は X の被覆であり、$b_1, \cdots, b_k$ は各 $\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_n)$ の要素である。) $\beta^1 : X \to [0,1], \cdots, \beta^n : X \to [0,1]$ で $\{\bar{V}(a_1), \cdots, \bar{V}(a_k)\}$ に関する 1 の分解を表し、また B によって有限集合 $\{b_1, \cdots, b_k\}$ を表すとする。$x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(e^{\bar{V}})$ は

$$x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(g^{\bar{V}}(e^{\bar{V}})) = f_{\hat{B}}(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \beta^i(x^{\bar{V}})e^i)$$

を満たしている。e^i は b_i の値が 1 となるような Δ^B の要素を表している。$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ のとき $x^{\bar{V}} \in \bar{V}(a_i)$、すなわち $a_i \in \bar{V}(x^{\bar{V}}) \subset U_0(x^{\bar{V}})$ であることに注意すると、$x^{\bar{V}} \in U_0(x^*)$ なので、$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ は $(x^*, a_i) = (x^*, x^{\bar{V}}) \circ (x^{\bar{V}}, a_i) \in U_0 \circ U_0 \subset \bar{U}$ を意味する。したがって、$\beta^i(x^{\bar{V}}) > 0$ であることから $a_i \in \bar{U}(x^*)$ と $b_i \in \varphi(a_i) \subset V(x^*, w^*)$ を得る。しかし、これは $x^{\bar{V}} = f_{\hat{B}}(\sum_{i=1}^{k} \beta^i(x^{\bar{V}})e^i)$ が双対構造条件 (V1) の下で $V(x^*, w^*)$ の要素であることを意味する。$x^{\bar{V}} \in U_0(x^*) \subset \bar{U}(x^*)$ なので $x^{\bar{V}} \in \bar{U}(x^*) \cap V(x^*, w^*)$ を得るが、これは仮定に矛盾する。

（証明終）

位相空間 X が開被覆の極限で近似することができ、写像 φ が十分小さな被覆の要素に対して locally fixed direction を持てば同じ議論が可能である[18]。

[18] したがって、本稿の結果を Čech および Vietoris Homology の理論に関連づけることができる。

この結果は一般均衡理論 (Gale-Nikaido-Debreu Lemma) における需要対応と供給対応の一致として解釈することができる。数学的にはその結果は一般化された双対システム構造の下での変分不等式問題の一般型に類するものである。

系 4 (一般化された双対システム構造の下での Gale-Nikaido-Debreu Lemma). X を凸構造 $\{f_A \mid A \in \mathcal{F}(X)\}$ および、X 上の位相的双対構造 (W,V) の定義されたコンパクト・*Hausdorff* 空間とする。また、W を凸構造 $\{g_A \mid A \in \mathcal{F}(W)\}$ が定義されたコンパクト・*Hausdorff* 空間とする。$D : W \to 2^X$ と $S : W \to 2^X$ を、$D(w) \cap S(w) = \emptyset$ ならば任意の $w' \in U^w$ と任意の $s \in S(w')$ に対して

$$D(w') \subset V(s, \theta(w)) \quad \textbf{(Continuity)}$$

となるような w の開近傍 U^w と $\theta(w) \in W$ が存在するような非空値をとる多価写像であるとする。さらに、任意の $w \in W$ に対して、$\exists s \in S(w)$

$$D(w) \subset X \setminus V(s, w) \quad \textbf{(Walras' Law)}$$

と仮定する。このとき、$D(w^*) \cap S(w^*) \neq \emptyset$ となる少なくとも一つの $w^* \in W$ が存在する。

証明 . 任意の $w \in W$ に対して $D(w) \cap S(w) = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。もしそうであるとすると、W はコンパクトなので、有限個の $w^1, \cdots, w^n$ と定理の条件を満たす W の被覆 $U^1 = U^{w^1}, \cdots, U^n = U^{w^n}$ が存在する。W からそれ自身への対応 φ を

$$\varphi : W \ni w \mapsto \{w' \in W \mid \forall s \in S(w), D(w) \subset V(s, w')\} \in 2^W$$

と定義する。$w \in U^t$ より $\theta(w^t) \in \varphi(w)$ なので、φ は非空値対応である。更に、これは V への条件 (V3) から凸値である。また、任意の $w \in W \setminus \mathcal{F}ix(\varphi)$ に対して、$y^w \in \varphi(z)$ $(\forall z \in U^w \setminus \mathcal{F}ix(\varphi))$ と

なる点 $y^w \in \varphi(w)$ と w の開近傍 U^w が存在することも明らかである。したがって、φ は定理２の条件を満たしている写像である。w^* を φ の不動点とする。すると、$\forall s \in S(w^*), D(w^*) \subset V(s, w^*)$ を得るが、これは *Walras' Law* に矛盾する。

（証明終）

(大阪大学大学院経済学研究科助教授)
(大阪大学大学院経済学研究科博士後期課程)

参考文献

Begle, E. G. (1950): “A fixed point theory,” *Annals of Mathematics 51*(3), 544–550.

Ben-El-Mechaiekh, H., Chebbi, F. M., S., and Llinares, J. V. (1998): “Abstract convextity and fixed points,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications 222*, 138–150.

Browder, F. (1968): “The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces,” *Mathematical Annals 177*, 283–301.

Ding, X. P. (2000): “Existence of solutions for quasi-equilibrium problems in noncompact topological spaces,” *Computers & Mathematics with Applications 39*, 13–21.

Eilenberg, S. and Montgomery, D. (1946): “Fixed point theorems for multi-valued transformations,” *American Journal of Mathematics 68*, 214–222.

Fan, K. (1952): “Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 38*, 121–126.

Fan, K. (1969): “Extensions of two fixed point theorems of F.E.Browder,” *Mathematische Zeitschrift 112*, 234–240.

Glicksberg, K. K. (1952): “A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points,” *Proceedings in the American Mathemtical Sciety 3*, 170–174.

Horvath, C. D. (1991): “Coincidence Theorems for The Better Admissible Multimaps and Their Applications,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications 156*, 341–357.

Kakutani, S. (1941): “A generalization of Brouwer’s Fixed Point Theorem,” *Duke Math J. 8*(3).

Kelley, J. L. (1955): *General Topology*. Springer-Verlag, New York/Berlin.

Komiya, H. (1981): “Convexity on a Topological Space,” *Fundamenta Mathematicae 111*, 107–113.

Komiya, H. (1999): “Fixed point theorems and related topics in abstract convex spaces,” 京都大学数理解析研究所講究録 *1108*, 1–11.

Luo, Q. (2001): “KKM and Nash Equilibria Type Theorems in Topological Ordered Spaces,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications 264*, 262–269.

Nikaido, H. (1959): “Coincidence and some systems of inequalities,” *Journal of The Mathematical Society of Japan 11*(4), 354–373.

Park, S. (2001): “New topological versions of the Fan-Browder fixed point theorem,” *Nonlinear Analysis 47*, 595–606.

Park, S. and Kim, H. (1996): “Coincidence Theorems for Admissible Multifunctions on Generalized Convex Spaces,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications 197*, 173–187.

Schaefer, H. H. (1971): *Toplogical Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York/Berlin.

Urai, K. (2000): "Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings," *Advances in Mathematical Economics 2*, 87–118.

Urai, K. (2002): "Why there isn't a complete description of the human society I:The individual and rationality," 京都大学数理解析研究所講究録 *1264*.

Urai, K. (2005): "Fixed Points and Economic Equilibria," Ph.D. Thesis, 大阪大学 .

Urai, K. and Hayashi, T. (2000): "A generalization of continuity and convexity conditions for correspondences in the economic equilibrium theory," *The Japanese Economic Review 51*(4), 583–595.

Urai, K. and Yokota, K. (2005): "Generalized Dual System Structure and Fixed Point Theorems for Multi-valued Mappings," 京都大学数理解析研究所講究録 *1443*, 15 – 26.

Urai, K. and Yoshimachi, A. (2002): "Existence of equilibrium with non-convex constraint correspondences: Including an application for the default economy,". Discussion Paper No.02-06, Faculty of Economics and Osaka School of International Public Policy, Osaka University.

Urai, K. and Yoshimachi, A. (2004): "Fixed point theorems in Hausdorff topological vector spaces and economic equilibrium theory," *Advances in Mathematical Economics 6*.

Generalization of Dual System Structure on Linear Topological Spaces and Fixed Point Theorems for Multi-valued Mappings

Ken Urai and Kousuke Yokota

In this paper, the concept of duality between two spaces having vector space structures is generalized so that we may obtain minimal continuity and/or convexity conditions for multi-valued mappings to have fixed points from the viewpoint of economic equilibrium theory. We use one of the weakest structures of abstract convexity to define an abstract system of duality, and show that upper semicontinuity and open lower section property may be treated as special cases of generalized mappings defined for arguments in economic equilibrium theory under the generalized dual system structure. We also use the results to show the existence of economic equilibria as one of the most general forms of Gale-Nikaido-Debreu Lemma.

Keywords: Abstract Convexity, Generalized Dual System Structure, Fan-Browder's Fixed Point Theorem, Kakutani's Fixed Point Theorem, Gale-Nikaido-Debreu Lemma
JEL classification: C62; D51