【 14 】

氏　　　　名	小 林 俊 公（こばやし とし まさ）
博士の専攻分野の名称	博　　士（理　　学）
学位記番号	第　15014　号
学位授与年月日	平成11年12月14日
学位規則第4条第1項該当	
学位授与の要件	理学研究科　数学専攻
学位論文名	Holomorphic vertical line bundle of the twistor space over a quaternionic manifold (四元数多様体上のツイスター空間の正則垂直直線束)
論文審査委員	(主査) 教授 坂根 由昌 (副査) 教授 満渕 俊樹　教授 藤木 明　教授 小磯 憲史 講師 後藤 竜司

論文内容の要旨

向き付けられた m 次元共形多様体に対して、共形構造を保つ対称な接束上の接続を Weyl 構造という。Weyl 構造は $CO(m)$-主束の随伴束に接続を誘導する。とくに $m=4$ の場合、線形群の表現 $A \to |detA|^{\frac{1}{4}}$ による随伴束に Weyl 構造が誘導する接続の曲率が自己双対 2-形式ならば、自己双対 Weyl 構造と呼ばれる。また、4 次元自己双対多様体上には、全空間が複素 3 次元多様体であるような twistor space と呼ばれる fibration がある。twistor space は $CO(4)$-主束の随伴束を用いて表すことができるため、その垂直直線束 Θ には Weyl 構造により接続が誘導される。そして、自己双対 Weyl 構造が誘導する接続により Θ には正則構造が誘導されることが、Gauduchion により示されている。

$GL(n,\mathbf{H})Sp(1)$-構造とそれを保つ対称な接続を持つ $4n$ 次元多様体 M を四元数多様体と呼ぶ。四元数多様体上にも twistor space Z が定義できる。$GL(1, \mathbf{H})Sp(1)=CO(4)$ であることにも注意すると、四元数多様体は 4 次元自己双対多様体のひとつの一般化と考えられる。そこで、四元数多様体上の Z の垂直直線束 Θ の正則構造について調べた。

Θ の接続 ∇ の曲率 R^{∇} が Z 上の複素構造に関して $(1,1)$-型であるとき、∇ は Θ に正則構造を与える。R^{∇} は M の接続 D の曲率 R^D などを用いて具体的に表わすことができ、R^{∇} が $(1,1)$-型であるかどうかは、R^D について調べればよいことがわかる。

次に、R^D を $GL(n, \mathbf{H})Sp(1)$ のリー環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n, \mathbf{H})\oplus\mathfrak{sp}(1)$ に値をとる 2-形式と見て、対応する Spencer complex を考える：

$$\mathfrak{g}^{(1)}\otimes T^*M \xrightarrow{\partial} \mathfrak{g}\otimes\Lambda^2 T^*M \xrightarrow{\partial} TM\otimes\Lambda^3 T^*M.$$

ここで、$\mathfrak{g}^{(1)}$ は $\mathfrak{g}$ の 1st prolongation である。この列における $GL(n, \mathbf{H})Sp(1)$ の表現空間は、$GL(n, \mathbf{H})$、$Sp(1)$ の $\mathbf{C}^{2n}$、$\mathbf{C}^2$ 上の標準的な表現 E、H を用いて表すことができる。そして R^D は、Bianchi の第 1 恒等式より $\partial R^D=0$ をみたすため、$\mathfrak{g}\otimes\Lambda^2 T^*M$ におけるコホモロジー $H^{1,2}(\mathfrak{g})$ の代表元を表している。さらに $GL(n, \mathbf{H})$ の表現の分解 $E^*\otimes S^3E \cong S^2E\oplus U$（$U$ は既約）などを用いると、$H^{1,2}(\mathfrak{g})\cong U$ であることや、上の列における $GL(n, \mathbf{H})Sp(1)$ の表現空間の既約分解が得られ、R^D は $S^2E\oplus\Lambda^2E\oplus S^2ES^2H\oplus\Lambda^2ES^2H\oplus U$ に対応する 5 つの成分に分解することがわかる。そして twistor space の複素構造が R^D の各成分へどのように作用するかを調べ、D に誘導される接続 ∇ が Θ に正則構造を

与えるための条件は、R^D の Λ^2ES^2H-成分が消えることであることが示せる。R^D の Λ^2ES^2H-成分が消えることは、4 次元自己双対多様体の場合、Weyl 構造が自己双対であることに対応する。したがって、得られた結果およびその証明は、Gauduchion の結果の四元数多様体の場合への一般化になる。

また、四元数 Kähler 多様体や hypercomplex 多様体は四元数多様体の例である。四元数 Kähler 多様体の Levi-Civita 接続の曲率と hypercomplex 多様体の小畠接続の曲率の成分はそれぞれ、$\Lambda^2E \oplus U$、$S^2E \oplus U$ に含まれるので、得られた結果から、それらの twistor space の垂直直線束には正則構造が誘導されることがわかる。

論文審査の結果の要旨

四元数ケーラー多様体の一つの一般化である、$GL(n, \mathbf{H})Sp(1)$-構造とそれを保つ捩率のない接続をもつ $4n$ 次元多様体は四元数多様体と呼ばれる。四元数多様体上にはファイバー空間としてツイスター空間が定義でき、これは $2n+1$ 次元の複素多様体となる。本論文の主結果は、ツイスター空間上の垂直直線束が正則束となる必要十分条件を四元数多様体の接続の曲率テンソルの条件として与えたことである。すなわち、$GL(n, \mathbf{H})Sp(1)$ の作用で接続の曲率テンソルを分解するとき、分解のある成分が 0 である時に限り垂直直線束は正則となることを示した。得られた結果は 4 次元自己双対多様体のツイスター空間上の垂直直線束に対する Gauduchion の結果の拡張にあたっている。特に、四元数ケーラー多様体の場合には Levi-Civita 接続、超複素多様体の場合には小畠接続を考えることにより、これらのツイスター空間上の垂直直線束は正則束であることを導いた。以上により、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。