

Title	厚肉体の有限要素解析法と大型ピストン強度解析への応用に関する研究
Author(s)	蔦, 紀夫
Citation	大阪大学, 1977, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/1481">https://hdl.handle.net/11094/1481</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

厚肉体の有限要素解析法と大型ピストン

強度解析への応用に関する研究

昭和 51 年 10 月

蔦 紀 夫

厚肉体の有限要素解析法と大型ピストン  
強度解析への応用に関する研究

昭和 51 年 10 月

薦 紀 夫

# 目 次

緒 論	1
第 1 編 肉厚方向に直交関数を用いる厚肉体の有限要素解析法	7
第 1 章 緒 言	7
主 要 記 号	11
第 2 章 厚肉回転殻の軸対称問題の解析理論	16
2.1 基礎式の誘導	16
2.2 要素の仮想仕事	27
2.3 剛性方程式	33
2.4 計算例による精度の検討	37
第 3 章 厚肉体の三次元問題の解析理論	40
3.1 変位関数	40
3.2 応力一歪一変位関係	43
3.3 要素の仮想仕事	49
3.4 剛性方程式	51
3.5 計算例による精度の検討	52
第 4 章 厚肉体の熱伝導問題の解析理論	54
4.1 基礎式の誘導	54
4.2 熱伝導方程式	58
4.3 計算例による精度の検討	65
第 1 編 参 考 文 献	66
付録 1.A 厚肉回転殻の外力の仮想仕事	73
付録 1.B 厚肉体の三次元問題の外力の仮想仕事	80

第 2 編	厚肉体の接触複合構造物の有限要素解析法	83
第 1 章	緒 言	84
	主 要 記 号	85
第 2 章	厚肉体の接触問題の有限要素解析法	87
2.1	接線力の非可逆性	87
2.2	仮 定	87
2.3	要素の増分仮想仕事	88
2.4	接触面の連続条件と選択条件	90
2.5	接触複合構造物の剛性方程式	94
2.6	プログラム	100
2.7	計算例による解析法の妥当性の検討	101
第 2 編	参 考 文 献	103
第 3 編	リップなしピストンの強度問題	105
第 1 章	緒 言	106
	主 要 記 号	109
第 2 章	ピストンの熱伝導解析	111
2.1	定常サイクル中の温度変動解析	111
2.2	過渡状態での温度変動の解析	117
2.3	隅角部の局部昇温の解析	119
2.4	局部高熱負荷による昇温の解析	120
第 3 章	リップなしピストンの応力解析	123
3.1	構造様式と解析条件	123
3.2	ガス圧荷重をうける場合の解析	124
3.2.1	各部の応力分布	124

3.2.2	厚肉解と薄肉解の差の原因の検討	125
3.2.3	構造様式と隅角部固着度および主要点内力との関係	128
3.3	熱応力に対する解析	131
3.3.1	温度条件	131
3.3.2	熱曲げが作用する場合の解析	132
3.3.3	熱伸びが作用する場合の解析	134
3.3.4	隅角部に局部昇温をうける場合の解析	136
3.4	隅角部の応力集中	136
第 4 章	リブなしピストンの強度実験	138
4.1	ガス圧強度実験	138
4.2	熱応力実験	139
4.3	実機実験	140
第 3 編	参考文献	143
付録 3.A	薄肉殻理論によるリブなしピストンの応力解析	147
第 4 編	リブ付ピストンおよび分割型ピストンの強度問題	152
第 1 章	緒言	153
	主要記号	156
第 2 章	リブ付ピストンの応力解析	159
2.1	円周型リブ付ピストンのリブ配置	159
2.2	一円周型リブ付ピストンのガス圧応力の解析	161
2.3	二円周型リブ付ピストンのガス圧応力の解析	162
2.4	放射型リブ付ピストンのガス圧応力の解析	164
2.5	リブ付ピストンの熱曲げ応力の解析	166

第 3 章	リブ付ピストンのリブルート部の拘束熱応力解析法	167
3.1	解析方針	167
3.2	帯板要素に対する基礎方程式	168
3.3	長縁の連続条件	171
3.4	リブとリブクラウンに対する基礎方程式と一般解	173
3.5	リブ間クラウンに対する基礎方程式と一般解	180
3.6	積分定数の決定	183
3.7	数値計算結果および考察	184
3.7.1	代表的変位および応力の分布	184
3.7.2	リブ間隔, $\eta$ および肉厚比の影響	186
第 4 章	リブ付ピストンのガス圧強度実験	188
4.1	模型, 実験装置, 実験方法	188
4.2	実験結果および考察	188
第 5 章	分割型ピストンの応力解析	190
5.1	挙動の基礎的検討	190
5.2	熱負荷が作用する場合の挙動	191
5.2.1	単位荷重による各部の応力	191
5.2.2	熱負荷による接触面反力	193
5.3	ガス圧荷重が重畳する場合の挙動	195
5.4	非線形挙動の影響	197
5.4.1	すべり, 接線力の影響	197
5.4.2	接触面の傾きの影響	199
第 4 編	参考文献	202

結 論	204
著 者 發 表 論 文	219
謝 辭	221
第 1 編 付 図	222
第 2 編 付 図	239
第 3 編 付 図	247
第 4 編 付 図	296



結 論

厚肉構造物は大型ピストンやシリンダカバーなどの燃焼室構造部材を始め、タービンケーシングや原子力圧力容器など、大型機械構造物では最もひんばんに使われる重要な構造要素の一つである。厚肉体の応力解析は三次元的な取扱いを必要とするため、場の方程式を厳密に解く古典解法は、実際の複雑な構造系を解析することにはあまり用いられず、数学的に取扱いの可能な基礎的な分野にとどまっていた。しかし、近年、電子計算機を利用したマトリックス構造解析法が発達し、三次元塊体の解析用として開発された四面体要素や軸対称体要素などを適用することによつて厚肉体の解析もできるようになった。そして主として、厚肉軸対称殻など二次元的な取扱いの可能な分野で実用構造物への多くの適用が計られてきた。

しかし、これらの解析法では厚肉体のもつ構造の簡易さや、それに基づく挙動の平易さの割には、入出力手続きの複雑さや、問題の離散化による工学的判断の困難化、など取扱いが複雑となりすぎるきらいがある。

そこで本論文の第1編では、薄肉体と塊体の中間に位置する、この厚肉体の構造特性に適した解析法を研究する。すなわち厚肉体においては肉厚内の変位や応力の分布はそれほど複雑にならないことに注目して、これを直交関数の和に展開し、厚肉体の広がり方向にのみ要素分割を施す解法であつて、各節点での直交関数のモード別の解を重畳して所要の解を得ようとするものである。この方法によれば、従来、塊体として構造系を複雑化して取扱つていた厚肉体の解析に対して、次元を一つ下げた薄肉体と同じ取扱いが可能となり、計算が著しく簡易化されることになる。本編ではこの手法により、厚肉回転殻、厚肉体の三次元問題の解析理論を基き、基本的な例題を解いて解析法の妥当性を検討する。また同時に熱応力解析などに不可欠の厚肉体の熱伝導解析理論も導く。

次に厚肉体は、単独で一つの構造物を構成する場合と、いくつかの厚肉体が接触部を介して力を伝えあうような複合構造系として一つの構造物を構成する場合とがある。圧力容器などは前者に、シリンダカバー、ライナ、ジャケット、吸排気弁などで構成される燃焼室周壁構造は後者に属し、一般に機械が大型化するにつれて複合構造系を構成する割合や構成要

素の数は増加する。

複合構造系内の一つの構造要素の応力、変形状態を正しく評価するためには接触部を介して伝えられる外力が明確でなければならないが、これらの力やその分布は、たとえば嵌合問題に見られるように、一般に不明な場合が多い。このような場合には、一機械要素のみでなく、複合構造系全体を解析し、接触境界での作用力の詳細を明確にするか、あるいは一挙に各要素の応力状態までも明らかにしていくような解析法が必要となってくる。

複合構造物の古典解法としては、古くはHertzの問題や嵌合問題などにつき、種々の有用な解が求められてきているが、そのいずれも解析的な取扱いが可能な、比較的単純な構造の組合せの場合に限られている。一方、近年の連続体に対するマトリックス有限要素解析法の接触問題への応用は、問題ごとに個別的に解法を工夫して適用されているとはいえ、実際に用いられている多種類の複合構造物に汎用的に適用できるような手法の開発はまだ行われていない。

そこで本論文の第2編では、接触結合部の非線形挙動の基礎的考察をもとに、接触複合構造物の有限要素解析法を研究する。すなわち、接触面の挙動には、接線力とすべりの非線形性に由来して、線形挙動や可逆的非線形挙動のほかに非可逆的な非線形挙動の特性があることをまず明らかにする。そして増分仮想仕事の原理から、初期不整を含み、任意の接触面形状を有する複合構造系の増分型剛性方程式を求め、この解を接触両面間の連続条件の選択的適用によつて定める汎用的な解析法を導く。そして基本的な例題を解いてその有用性を明らかにする。

第1編、第2編で得られる解析理論を用いて、第3編、第4編では大型ピストンの構造強度に関する基礎的諸問題を研究する。船用の大型ディーゼル機関に用いられる大型ピストンの構造様式は、船用主機の型式や、機関の大きさによつて異なるが、大別すれば、種々の形状から成る厚肉回転殻構造、この構造を種々のリブによつて補強した、リブ付厚肉回転殻構造、およびいくつかの厚肉回転殻が結合されてできた複合厚肉回転殻構造のいずれかに分けられる。これらの構造物の応力解析法としては、古くはEicherberg以来の薄肉殻理論

を用いた解析法があり、また近年に至つては有限要素法を用いた研究などが報告されてきた。しかし、薄肉殻理論による解法は、ピストンのような厚肉体の挙動を表わしうるかどうか明らかでなく、また一定歪要素を用いた有限要素解析法は、離散化手続きが膨大で特定の機種形状に対する事例的な計算例の域を出ていない。

しかるに近年の建造船舶の大型化や、過酷な使用条件で跡をたたない損傷事故、などに起因して、機関を大型化したり新機種の開発のための研究が日常化してきているため、構造様式と挙動に関する、より合理的な解析法の開発と、基礎的な研究成果の集積が強く要望されるようになってきている。そこで第3編では、このうちまず、大型リブなしピストンの構造強度に関する問題を研究する。ピストンのクラウン部に作用する主要外力は、燃焼ガスよりのガス圧荷重と熱負荷に基づく不均一温度分布によるものに大別される。

第2章では、このうち、熱負荷下で構造物に生じる各種温度分布の発生状況を解析する。そして常用出力1サイクル中に生じるピストンクラウン部のサイクル平均温度分布、触火面付近の温度変動状態、起動・停止および運転変動条件下で生じる過渡温度変動の状態、隅角部の局部昇温の状態、および局部高熱負荷による昇温の様相などを明らかにする。

第3章では、実用ピストンを代表する3種の構造様式で種々の形状を有する大型リブなしピストンが、ガス圧荷重および熱負荷をそれぞれ単独にうける場合の挙動を、第1編の手法に薄肉殻理論による解を併用して解析する。その際、取扱いを一般化するため、熱負荷による温度分布を、肉厚平均伸び成分、表裏符号逆の温度勾配成分および隅角部の局部昇温成分に分けて取扱う。そして、各作用負荷のもとで、構造各部に生じる応力分布特性が3種類の構造様式とそれぞれの形状によつてどのように変化するかを明らかにし、3種類の構造を代表する4個の形状パラメータと構造主要点の断面内力、隅角部の固着度などとの関係を広範囲に求めて図表化する。また、ガス圧応力解析の際に薄肉解と厚肉解の間はかなり大きな差異が生じることの原因と、薄肉解に対する補正法を検討する。次に隅角部内面に生じる応力集中の様相を、隅角部の丸み半径、ピストン径および負荷様式を変えて解析し、これを明らかにする。

第4章では、520mm径の代表的な実用大型ピストンを用いて油圧負荷実験、バーナーを用いた熱応力実験、およびこれを実際の機関に組込んだ実働下での実機実験を実施し、実用大型ピストンの応力発生の実態を把握するとともに、解析解と比較して以上に求めた解析解の妥当性を検討する。

第4編では大型リブ付ピストンおよび分割型ピストンの構造強度に関する問題を研究する。

このうち第2章、第3章では超大型機関に用いられるクラウン部をリブによつて補強したリブ付ピストンの挙動を解析する。ピストンのクラウン部は熱負荷対策上あまり厚くできないため、ある径以上のものでは必然的にリブ付ピストン構造様式が採用されることになるが、この構造様式では、ガス圧荷重下の挙動がリブなし型の場合と著しく異なることや、高熱負荷を直接受けるクラウンと、冷却室に位置するリブの接合部において両者の熱伸び差が拘束されるなど、新しい構造上の問題が介在する。しかし、これらはいずれも三次元的な取扱いを必要とするため、従来の研究では、リブ部を周方向に剛性のない直交異方性軸対称体として解析する方法などが示されているにすぎない。

そこで第2章では、まずリブ付ピストンの主要構造様式である。円周型リブ配置および放射型リブ配置を有するピストンにガス圧荷重が作用する場合の挙動を第1編の手法を用いて解析し、構造各部の発生応力の特徴、それらの挙動を支配するパラメータ、リブ形状寸法と発生応力の関係などを明らかにする。また熱曲げ荷重下の熱応力の状態も解析する。

第3章では、クラウンとリブの接合縁での熱伸び差の拘束応力の問題を解析する。これらは第1編の手法によつてももちろん取扱えるが、ここでは、この問題が立体板構造の面内問題になつていることに注目して、これに適した新しい理論解析法を導く。すなわち対称性を考慮してリブとクラウンを含む一構成要素を取出して、これを帯板要素に分割し、各帯板内の挙動を支配する偏微分方程式を、帯板縁辺での常微分方程式の連立系に置き直してこれを解くものである。これにより、接合縁上の発生応力の特性和、それらのリブの配置や剛性などによる変化の特性を明らかにする。

第4章では、実用の大型リブ付ピストンに生じている応力の実態を把握し、併せて解析解の妥当性を検討するため、1,050 mm径の超大型実用リブ付ピストンがガス圧荷重をうける場合の挙動を燃焼室内に油圧を負荷する実験により調べる。

第5章では中速四サイクル機関などに用いられる分割型ピストンの構造強度の問題を研究する。分割型ピストンの構造は、高熱負荷やガス圧荷重を直接うける上側ピストン部と、これを支持する下側ピストン部の二つの構造に分割し、クラウン中間部に円周状のリブを設けて、このリブ支持部でボルト結合、外周のスカート部は接触結合する方式をとる。この種の構造の挙動は、接触境界での相互作用力が、両構造の変形に支配されるなど、二つ以上の連続体の接触問題を取扱わねばならないという特徴があり、単位荷重の合成で所定の解を得る重畳の法則が必ずしも成立しない。

このため、従来の研究は事例についての実験的な研究が主体で、接触面に通常設けられる初期すきまや接触力による挙動の変化などが充分考察されていない。

そこで第2編の手法と撓性行列法を併用してこの種の構造系の挙動特性を研究する。まずガス圧、熱曲げ、熱伸びおよびスカート部反力などの基本荷重がそれぞれ独立に作用する場合の上側ピストン各部の応力および変形を求める。次にこれを組合せて、熱負荷が作用する場合およびこれにガス圧荷重が重畳する場合の挙動が、スカート下縁に設けた初期すきまや熱負荷作用時の上下両ピストンの相対熱変形および下側ピストンの剛性などによつてどのように変化するかを解析する。そして各場合の接触力の大きさと、それに伴う応力状態の変化の様相を明らかにする。また各負荷過程での接触面接線力やすべりおよび熱変形による接触面の傾き角の変化などの非線形項の影響も同時に検討を加える。

第 1 編

肉厚方向に直交関数を用いる  
厚肉体の有限要素解析法

## 第 1 章 結 言

三次元体の応力解析<sup>(1.1)</sup>は古く1885年に変位を調和関数の和の形で求める解析手法を開発した Boussinesq<sup>(1.2)</sup>以来 Galerkin<sup>(1.3)</sup>, Love<sup>(1.4)</sup>, Westergaard<sup>(1.5)</sup>等を経て今日まで種々の問題が解かれた。このうち厚肉体のように一方向の寸法が他の二方向に比べて比較的小さい構造系の解析は、薄肉体の解との類似性の観点から、古典理論によつてもかなり取扱われた。

厚板解析に対する薄板的手法に三次元的な影響を初めて論じたのは E. Reissner<sup>(1.6)</sup><sup>(1.7)</sup><sup>(1.8)</sup>である。彼は変分法を用いて場の支配方程式を求め、平面問題や板曲げ問題に対する三次元的な影響を調べた。この手法は薄板の断面力や断面モーメントによる取扱いに剪断変形の影響を含めたものであつたが、Poniatovskii<sup>(1.9)</sup>, Gol'denveizer<sup>(1.10)</sup>は三次元弾性体の基礎式を、関数展開法によつて数組の基礎方程式群に分け、これを繰返し法によつて解く、別の厚板曲げ問題の近似解法を示した。厚肉殻に対する基礎方程式に関しては、Green と Naghdi<sup>(1.11)</sup>, John<sup>(1.12)</sup>, Zerna<sup>(1.13)</sup><sup>(1.14)</sup>, Reissner<sup>(1.15)</sup>, Sensenig<sup>(1.16)</sup>らによつて、三次元弾性論からの線形殻理論の誘導が、境界付近の三次元的効果を含めて行なわれた。また Visarion と Stanescu<sup>(1.17)</sup> や Rutten<sup>(1.18)</sup>は関数展開法によつてこれらを取扱う方法を示した。

しかし、厚肉体のように三次元的な応力状態を示す構造系を、このようにして得られたテンソル場の境界値問題として厳密に解くことは一般に困難で、このため、従来これらにより解かれた問題は、数学的な取扱いが可能な基礎的な分野に限られていた。これに対し、1956年、航空機の構造解析に端を発した<sup>(1.19)</sup>マトリックス有限要素法の手法は、この種の三次元的な解析を必要とする分野の取扱いを著しく容易にする可能性を与えた。マトリックス有限要素法の厚肉体構造解析問題への応用は、主として、薄肉体の曲げ問題に剪断変形の影響を考慮する方法と、三次元塊体に対する取扱いを直接この問題に用いる方法の二つの方向から研究が行なわれてきた。

薄肉体的手法からのアプローチとしては、9自由度の三角形要素を変位法変分原理によ



つて解いた Melosh<sup>(1.20)</sup> および Hellinger - Reissner の変分原理に基づく混合法により解いた Herrmann<sup>(1.21)</sup>らによつて最初に始められた。その後種々の自由度および形状の要素が開発され、三角形要素については Martin<sup>(1.22)</sup>, Utku<sup>(1.23)</sup>により、長方形要素は Smith<sup>(1.24)</sup>, Monforton と Schmit<sup>(1.25)</sup>, Pryor et al<sup>(1.26)</sup>, Greimann<sup>(1.27)</sup>らにより、また任意形状の四辺形要素は Clough と Felippa<sup>(1.28)</sup>により、さらに混合法に基づく要素は Pian と Tong<sup>(1.29)</sup>, Anderheggen<sup>(1.30)</sup> および Cook<sup>(1.31)</sup>らにより研究が行なわれた。

次に塊体に対する取扱いもいままでに多く行なわれてきた。厚肉体解析の基礎となる三次元要素の開発は、Gallagher, Padlog および Bijlaard<sup>(1.32)</sup>により始められた。彼らは変位法により、四面体要素の剛性行列を求めたが、同じ要素は Przemieniecki<sup>(1.33)</sup>により、撓性行列法を用いて取扱われ、その後 Argyris<sup>(1.34)</sup>に引継がれた。これとは別に Melosh<sup>(1.35)</sup>は六面体要素の剛性方程式を導いた。Irons<sup>(1.37)</sup>は Taig<sup>(1.36)</sup>の考えをもとに斜交六面体8節点要素の剛性行列を求めたが、<sup>(1.37)</sup>彼はさらにこれを発展させ、要素ブロックの稜線に沿つて多くの節点を取り、高次の補間多項式を用いる六面体多節点要素および節点変位の微分量の連続性まで保証する高精度の要素を考えた。<sup>(1.38)</sup><sup>(1.39)</sup>このような内挿関数を用いた四面体および六面体多節点要素の発展はその後、Ergatoudis<sup>(1.40)</sup>により引継がれ、曲面体要素が開発され、これらはさらに、Zienkiewicz 一派<sup>(1.41)</sup><sup>(1.42)</sup><sup>(1.43)</sup>, および Argyris 一派<sup>(1.44)</sup><sup>(1.45)</sup><sup>(1.46)</sup><sup>(1.47)</sup>, によりアイソパラメトリック要素を始めとする曲面体多節点要素として発展させられた。

以上は塊体解法の発展の経緯であるが、実用上非常に多く生じる厚肉構造系の問題へのこれら三次元要素の適用についての研究はあまり行なわれず、わずかに Ahmad, Irons および Zienkiewicz<sup>(1.48)</sup><sup>(1.49)</sup>と Ahmad<sup>(1.50)</sup>らが、厚肉殻の肉厚方向の応力を無視し、肉厚内の応力分布が直線の場合を、座標と共通の変位関数を用いて取扱つたものがあるにすぎない。

さて以上のような従来の諸研究を厚肉体の構造解析問題に適用していくにはいくつかの問題点が指摘できる。

厚板、厚肉回転殻や厚肉曲面構造など厚肉体は肉厚方向の剪断力を伝達するほか、曲り梁などに見られるように肉厚内の応力分布が一次以上の高次の分布をする場合があり、したがって、薄肉体に剪断変形の影響のみを考慮する手法や、応力分布を直線近似する厚肉体の解析法ではその取扱いが充分でない。次に、塊体要素を用いた厚肉体解法のうちでも、最も基本的な四面体あるいは六面体の一定歪要素を用いる場合には、要素分割の際、肉厚方向の要素辺の長さが短くなるから、広がり方向の分割をそれに合わせて短くすれば節点数が膨大となつて、一つの問題の答を得るのに多大の計算時間を要するし、逆に広がり方向の分割を荒くすれば扁平な要素形状となつて精度上の問題を生じる。このため、従来この種の要素を用いて汎用プログラムが開発されても、<sup>(1.51)</sup> 実際問題への適用はほとんど行なわれていないのが現状である。

三次元要素のうちでも、四面体あるいは六面体多節点要素を用いれば、肉厚内の応力分布の形状に応じて要素節点を増すことにより、肉厚内応力の非線形性等は取扱えるが、アイソパラメトリック要素に代表されるこれら多節点要素の解析法自体が、局所曲線座標系表示によるきわめて一般的な取扱い法で、かつ高次の自由度を持つため、エネルギー積分など要素剛性行列の作成がかなり繁雑となり、またこれを数値積分に持込む場合には誤差が増加するなど、運用時に各種の問題が生じることが多い。

さらにこのような塊体要素による取扱いでは、計算に先立つ構造系の有限要素への分割、節点座標や要素構成などの離散化手続きが二次元の場合に比べて飛躍的に繁雑になり、データエラーなど解析上の二次的なトラブルがそれに応じて増大するが、一つの問題の解析費用が膨大なこの種の取扱い法としては、これはかなり深刻な問題である。同時に、この種の解析は、試行錯誤を必要とする試設計や開発段階で必要となる場合が多いため、手数や費用の多いことが、その活用を著しく阻害することになる。

そこで本論文では、これらの問題点を解消し、薄肉体と塊体の中間に位置するこの種の厚肉体の取扱いに適した新しい解析法を考える。それは厚肉体の肉厚内の応力の分布形状がそれほど複雑な形をしないことに注目して、肉厚内の応力、変位などの分布を、肉厚方向に

べき型の直交関数に展開して解く方法である。そして、各節点（断面）での肉厚内の変位分布をモード別分布の和の形で表わし、直交関数の特性を利用して、各モード別の解の振巾を求める問題に帰着させるものである。

この方法によれば、要素分割は肉厚方向には不要で、広がり方向のみでよいから、厚板三次元構造、厚肉曲面構造など、従来三次元塊体として取扱っていたものは薄肉体と同じ二次元的な取扱いに、また厚肉回転殻のように二次元的な取扱いが必要であったものは一次元的な取扱いに、それぞれ自由度を落とした解析が可能となる。このため、構造系の離散化に伴う入出力手数 of 著しい簡素化や、これに伴うデータエラ、さらには計算誤差の減小が可能となり、また、従来法では離散化しすぎるために工学的判断が容易でなかつた解析結果の評価についても、断面力、断面モーメントおよび自己平衡応力成分などによる表示が可能となる。さらに、後出のごとく剛性行列についてもいくつかの基本剛性行列を単純に組合わせることにより、高次モードの剛性行列を作ることができること、剛性行列が直交条件により対角化することにより計算時間の相当な短縮が期待できる、などの長所がある。

以下ではべき型直交関数に Legendre 関数を選び、第 2 章では厚肉回転殻軸対称問題に対する解析理論を、第 3 章では厚肉体の三次元問題に対する解析理論を、また第 4 章では、熱負荷をうける構造系に必須の、厚肉体熱伝導問題の解析理論をそれぞれ誘導することにする。

以下に第 1 編で用いる主要記号を列記する。

## 第 2 章

$IB_C, IB_J, IB_N$  ; 歪一変位行列と式 (1.2.12), 式 (1.2.13) で与えられるその成分

$ID', ID_G, ID$  ; 局部座標系, 全体座標系および両座標系共通の応力一歪行列

$e_2, e_T$  ; 式 (1.2.32) および式 (1.2.50) で与えられる定数行列

$f_B, f_{Bn}$  ; 物体力とその振巾

$F, \bar{F}_n$  ; 節点内力とその振巾

- $F_{ej}, \bar{F}_{ej}$  ; 外表面と内表面の節点外力  
 $G_i$  ; 式 (1.2.3 4.) で与えられる行列  
 $h$  ; 要素の肉厚  
 $J_{n\lambda}$  ; 式 (1.2.3 4.) で与えられる定数  
 $J_2, J_{ij}$  ; ヤコビアン行列とその逆行列の成分  
 $l$  ; 要素の長さ  
 $n$  ; Legendre 級数の次数  
 $N, N_s$  ; 変位関数  
 $P_n, Q_n$  ; Legendre 級数と, その組合せ関数  
 $\bar{P}_1, \bar{P}_1$  ; 外表面の法線圧と接線圧  
 $\bar{P}_{-1}, \bar{P}_{-1}$  ; 内表面の法線圧と接線圧  
 $R_0$  ; 肉厚中心の半径  
 $R, \bar{R}$  ; 変位一般変位変換行列および変位振巾変換行列  
 $S_n, S_{\lambda\mu}$  ; 要素の剛性行列とその成分  
 $t$  ; 転置  
 $T, \bar{T}_n$  ; 温度, 節点温度振巾  
 $X_R$  ; 全体座標 =  $\{R \ z \ \theta\}$   
 $X'_\theta$  ; 局部座標 =  $\{x' \ y' \ \theta'\}$   
 $X'_{L\theta}$  ; 無次元局部座標 =  $\{\xi \ \xi \ \theta\}$   
 $Z_\lambda$  ; 式 (1.2.45) で与えられる行列  
 $\alpha$  ; 線膨張係数  
 $\Pi, \bar{\Pi}$  ; 分布荷重行列  
 $\delta$  ; 仮想量  
 $\delta'$  ; 局部座標系の変位 =  $\{u'_x \ u'_y\}^t$   
 $\delta_D$  ; 全体座標系の変位 =  $\{u_R \ u_z\}^t$

- $\delta_G$  ; 全体座標系の一般変位 =  $\{\epsilon_\theta \ u_z\}^t$   
 $\delta_{Gn}$  ; 全体座標系の一般変位振巾 =  $\{\epsilon_{\theta n} \ u_{zn}\}^t$   
 $a\delta_{Gn}$  ; 全体座標系の一般変位振巾の別表示 =  $\{\gamma'_{\theta n} \ v'_{zn}\}^t$   
 $\bar{\delta}_n, \delta'_n$  ; 全体座標系の節点変位振巾, 局部座標系の変位振巾 =  $\{u'_{xn} \ u'_{yn}\}$   
 $a\delta'_n$  ; 局部座標系の変位振巾の別表示 =  $\{v'_{xn} \ v'_{yn}\}^t$   
 $\epsilon_0$  ; 初期歪  
 $\epsilon'$  ; 局部座標系の歪 =  $\{\epsilon'_x \ \epsilon'_y \ \epsilon'_\theta \ \epsilon'_{xy}\}^t$   
 $\epsilon_G$  ; 全体座標系の歪 =  $\{\epsilon_R \ \epsilon_Z \ \epsilon_\theta \ \epsilon_{RZ}\}^t$   
 $\epsilon'_{cn}$  ; 式 (1.2.44) で与えられる歪振巾  
 $\bar{\theta}$  ; 要素の斜交性を表わす角度  
 $(H)_j, (\bar{H})_j$  ; 両表面の節点力の荷重行列  
 $\lambda$  ; 全体座標と局部座標の間の座標変換行列 =  $\{\lambda'_x \ \lambda'_y\}^t$   
 $\lambda_L$  ; 局部座標と無次元局部座標の間の座標変換行列  
 $\sigma'$  ; 局部座標系の応力 =  $\{\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_\theta \ \sigma'_{xy}\}^t$   
 $\sigma_G$  ; 全体座標系の応力 =  $\{\sigma_R \ \sigma_Z \ \sigma_\theta \ \sigma_{RZ}\}^t$   
 $\phi$  ; 肉厚中心線の傾き角  
 $\psi$  ; 温度荷重行列  
 $\omega$  ; 式 (1.2.54) で与えられる変換行列  
 $\Omega$  ; 物体力荷重行列

### 第 3 章 (第 2 章と異なる部分のみ)

- $a$  ; 全体座標系と局部座標系の間の方角余弦行列 =  $\{a_u \ a_v \ a_w\}^t$   
 $1B_c, 1B_{T3}, 1B_{N3}$  ; 歪一変位行列および式 (1.3.18), 式 (1.3.19) で与えられるその成分  
 $1D'$  ; 局部座標系の応力一歪行列

$E_{T3}$	; 式 (1.3.32) で与えられる定数行列
$G_{\lambda}$	; 式 (1.3.30) で与えられる行列
$h$	; 要素の肉厚
$J_3, J_{ij}$	; ヤコビアン行列とその逆行列の成分
$l$	; 要素の長さ
$\bar{J}$	; 要素の中
$\delta'$	; 局部座標系の変位 $= \{u' \ v' \ w'\}^t$
$\delta_G$	; 全体座標系の変位 $= \{u \ v \ w\}^t$
$\delta_{Gn}$	; 全体座標系の変位振巾 $= \{u_n \ v_n \ w_n\}^t$
$a\delta_{Gn}$	; 全体座標系の変位振巾の別表示 $= \{a u_n \ a v_n \ a w_n\}^t$
$\bar{\delta}_n$	; 全体座標系の節点変位振巾
$\delta'_n$	; 局部座標系の変位振巾 $= \{u'_n \ v'_n \ w'_n\}^t$
$a\delta'_n$	; 局部座標系の変位振巾の別表示 $= \{a u'_n \ a v'_n \ a w'_n\}^t$
$\epsilon'$	; 局部座標系の歪 $= \{\epsilon'_x \ \epsilon'_y \ \epsilon'_z \ \epsilon'_{xy} \ \epsilon'_{yz} \ \epsilon'_{zx}\}^t$
$\epsilon'_n$	; 局部座標系の歪振巾 $= \{\epsilon'_{zn} \ \epsilon'_{yn} \ \epsilon'_{zn} \ \epsilon'_{zyn} \ \epsilon'_{yzn} \ \epsilon'_{zxn}\}^t$
$\epsilon'_0 \ \epsilon'_{0n}$	; 初期歪とその振巾
$\bar{\lambda}_L$	; デカルト系局部座標と無次元局部座標の間の方向余弦行列
$\sigma'$	; 局部座標系の応力 $= \{\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \sigma'_{xy} \ \sigma'_{yz} \ \sigma'_{zx}\}^t$

第 4 章 (第 3 章と異なる部分のみ)

$A_n, B_n$	; 式 (1.4.12), 式 (1.4.11) で与えられる行列
$C$	; 比熱
$G_i$	; 式 (1.4.18) で与えられる行列
$H_n, h_{\lambda\mu}$	; 温度剛性行列とその成分
$k$	; 熱伝導率,

$k$  ; 熱伝導率および熱伝導率行列 = 「 $k_x \ k_y \ k_z$ 」

$l_x, l_y, l_z$  ; 表面の法線の方向余弦

$\bar{Q}_1, \bar{Q}_{-1}$  ; 要素の表面熱伝達量行列

$\bar{t}$  ; 時間

$T_B, \bar{T}_B$  ; 表面媒体温度, 節点の媒体温度

$T, \bar{T}_n, a\bar{T}_n$  ; 温度, 節点温度振巾とその別表示

$\bar{\alpha}$  ; 表面熱伝達係数

$\bar{\Gamma}_T, \bar{\Pi}_T$  ; 表面熱伝達行列

$\bar{\rho}$  ; 密度

$\Phi, \bar{\Phi}_n$  ; 発熱量, 節点発熱量振巾

$\Omega_T$  ; 発熱行列

## 第 2 章 厚肉回転殻の軸対称問題の解析理論

### 2.1 基礎式の誘導

図 1.2.1 のような厚肉回転殻の一つの断面要素を考え、全体座標系の円柱座標  $X_R \equiv \{R, Z, \theta\}$  のほかに、肉厚中心線に沿う方向に  $\zeta$  軸、肉厚中心から外向きに  $\xi$  軸、円周方向に  $\theta$  軸の無次元局部座標系  $X_{L\theta} \equiv \{\zeta, \xi, \theta\}$  を定める。ここで取扱う要素は簡単のため、図のように両端と中点の三つの節点（断面）から成るものとし、その長さを  $l$ 、肉厚を  $h$  とする。また  $\xi = \pm 1$  が要素の分割辺を、 $\zeta = \pm 1$  が外内表面を表わすものとする。このような要素について開発された手法は容易に多節点要素の場合にも拡張しうる。

さて、図 1.2.1 で、任意の断面  $\xi$  の一般変位として、全体座標系の変位成分  $U_R, U_Z$  を取る代わりに、エネルギー積分を求める時の取扱いを容易にするため、このうち  $U_R$  に代えて周方向の歪成分  $\epsilon_\theta$  を用いる。そしてまずこの  $\xi$  での変位成分  $\epsilon_\theta(\zeta, \xi)$  および  $U_Z(\zeta, \xi)$  を  $\zeta$  方向に Legendre の直交関数  $P_n(\zeta)$  を用いて級数展開する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \delta_G &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\zeta) a \bar{\delta}_{Gn} \\ \text{ただし} \quad \delta_G &= \{\epsilon_\theta \quad U_Z\}^t, \quad a \bar{\delta}_{Gn} = \{r_{\theta n} \quad V_{zn}\}^t \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

ここに  $r_{\theta n}$  および  $V_{zn}$  は各次数  $n$  での関数  $P_n$  の振巾に相当し、 $\xi$  の関数である。また  $P_n(\zeta)$  は次式で与えられる。

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \quad (1.2.2)$$

次に解析の便宜上もう一つの局部座標系  $X'_{\theta} \equiv \{x', y', \theta\}$  を  $y'$  軸と肉厚中心線が一致するように定め（図 1.2.1 参照）、この変位を  $\delta'$  とすれば、両座標系変位の間には

$$\left. \begin{aligned} \delta' &= \lambda \cdot R \cdot \delta_G \\ \text{ただし} \quad \delta' &= \{u_{x'} \quad u_{y'}\}^t \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$



なる関係がある。ここに $\lambda$ は両座標系間の座標変換行列であつて、

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

で、また $R$ は $\varepsilon_{\theta}$ を $U_R$ に変換するための行列であつて

$$R = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

ただし

$$R = R_0 + \frac{h}{2} \zeta \cos \phi$$

で与えられる。両式中 $\phi$ は殻の中心線と肉厚中心線との間の傾き角、 $R_0$ は肉厚中心線に沿う半径座標である。式(1.2.1)を式(1.2.3)に用いれば

$$\delta' = \sum p_{na} \delta'_n \quad (1.2.6)$$

ただし

$${}_a \delta'_n \equiv \begin{Bmatrix} U'_{x'n} \\ U'_{y'n} \end{Bmatrix} = \lambda \cdot R \cdot {}_a \delta_{gn}$$

が得られる。

次に、局部座標系で表わした歪一変位関係式は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_{\theta} \\ \varepsilon'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x' & 0 \\ 0 & \partial/\partial y' \\ \frac{1}{R} \cos \phi & -\frac{1}{R} \sin \phi \\ \partial/\partial y' & \partial/\partial x' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U'_x \\ U'_y \end{Bmatrix} \quad (1.2.7)$$

あるいは

$$\varepsilon' = B_c \cdot \delta'$$

さて、要素のエネルギー積分を行なうときの積分領域は無次元局部座標系  $X_{L0}$  で規定されるので、式 (1.2.7) はこの座標成分による表示に変換する必要がある。この変換は

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \zeta}$$

のような操作により容易に得られる。すなわち  $J_2$  を

$$J_2 = \begin{bmatrix} \partial x' / \partial \zeta & \partial y' / \partial \zeta \\ \partial x' / \partial \xi & \partial y' / \partial \xi \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

と置けば、両座標系の微分演算子の間には

$$\begin{Bmatrix} \partial / \partial x' \\ \partial / \partial y' \end{Bmatrix} = J_2^{-1} \begin{Bmatrix} \partial / \partial \zeta \\ \partial / \partial \xi \end{Bmatrix} \quad (1.2.9)$$

の関係があるから、これを式 (1.2.7) に用いれば、式 (1.2.7) 中の  $IB_C$  行列は

$$IB_C = \begin{bmatrix} J'_{11} \frac{\partial}{\partial \zeta} + J'_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & J'_{21} \frac{\partial}{\partial \zeta} + J'_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1}{R} \cos \phi & -\frac{1}{R} \sin \phi \\ J'_{21} \frac{\partial}{\partial \zeta} + J'_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} & J'_{11} \frac{\partial}{\partial \zeta} + J'_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} J'_{11} & J'_{12} \\ J'_{21} & J'_{22} \end{bmatrix} \equiv J_2^{-1}$$

となる。これを微分演算子を含む項とそれ以外の項に分けてマトリックス表示すれば

$$IB_C = IB_J \cdot IB_N \quad (1.2.11)$$

ただし

$$IB_J = \begin{bmatrix} J'_{11} & J'_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J'_{21} & J'_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ J'_{21} & J'_{22} & 0 & 0 & J'_{11} & J'_{12} \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

$$B_N = \begin{bmatrix} \partial/\partial \zeta & 0 \\ \partial/\partial \xi & 0 \\ \frac{1}{R} \cos \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \sin \phi \\ 0 & \partial/\partial \zeta \\ 0 & \partial/\partial \xi \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

が得られる。これを用いれば式 (1.2.7) の関係は

$$\mathcal{E}' = B_J \cdot B_N \cdot \delta' \quad (1.2.14)$$

となる。 $\delta'$  は後出の式 (1.2.42) のごとく  $(\zeta, \xi)$  系で表わされるから、上式によつて式 (1.2.7) の  $(\zeta, \xi)$  系による表示が得られたことになる。

以下では簡単のため、まず  $l$  および  $h$  が要素内で一定の場合を考えることにする。両局部座標系間の関係を、 $\lambda_L$  で座標変換行列を表わして

$$X_{\theta'}^{\prime t} = \begin{bmatrix} \lambda_L & \\ & 1 \end{bmatrix} X_{L\theta}^t \quad (1.2.15)$$

と置けば、いまの場合  $\lambda_L$  および式 (1.2.8) の  $J_2$  はともに

$$\lambda_L = J_2 = \begin{bmatrix} h & \\ & l \end{bmatrix} \quad (1.2.16)$$

ただし、「 $\quad$ 」は対角行列である。これより  $J_2^{-1}$  を求め、これを式 (1.2.12) に用いて  $B_J$  行列を求めたのち、式 (1.2.14) に用いれば局部座標系の歪  $\mathcal{E}'$  の各成分は次式のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{x'} &= \frac{2}{h} \frac{\partial U_{x'}}{\partial \zeta} \\
 \varepsilon_{y'} &= \frac{2}{l} \frac{\partial U_{y'}}{\partial \xi} \\
 \varepsilon_{\theta} &= \frac{U_{x'} \cos \phi - U_{y'} \sin \phi}{R_0 + \frac{h}{2} \zeta \cos \phi} \\
 \varepsilon_{x'y'} &= \frac{2}{l} \frac{\partial U_{x'}}{\partial \xi} + \frac{2}{h} \frac{\partial U_{y'}}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \right\} (1.2.17)$$

上式中の微分形を含まない第2式，第3式および第4式の右辺第1項（ $\varepsilon_{x'y'_1}$  とする）

に式（1.2.6）を用い，局部座標系の変位振巾によつて表示すると

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{y'} &= \sum P_n \frac{2}{l} \frac{dV_{y'n}}{d\xi} \\
 \varepsilon_{\theta} &= \sum P_n \frac{V_{x'n} \cos \phi - V_{y'n} \sin \phi}{R_0 + \frac{h}{2} \zeta \cos \phi} \\
 \varepsilon_{x'y'_1} &= \sum P_n \cdot \frac{2}{l} \frac{dV_{x'n}}{d\xi}
 \end{aligned} \right\} (1.2.18)$$

となる。式（1.2.17）の残り，すなわち第1式および第4式の第2項（ $\varepsilon_{x'y'_2}$  とする）

は式（1.2.6）を代入したとき  $P_n$  の微分形を含み，そのままではエネルギー積分時の直交条件の導入が容易でない。そこでこれを解決するため， $\delta_G$  および  $\delta'$  の表示を式（1.2.1）および式（1.2.6）の代りに以下に示す表示へ置き換えることを考える。すなわち，いま

$Q_n(\zeta)$  を

$$Q_n(\zeta) = P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta) \quad (1.2.19)$$

とし，これを用いて  $\delta_G$  および  $\delta'$  を

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_G &= \sum Q_n(\zeta) \cdot \delta_{Gn} \\
 \delta' &= \sum Q_n(\zeta) \cdot \delta'_n
 \end{aligned} \right\} (1.2.20)$$

ただし

$$\delta_{Gn} = \{ \varepsilon_{\theta n} \quad U_{zn} \}^t, \quad \delta'_n = \{ U_{xn'}, U_{yn'} \}^t$$

のように置き直す。このようにすれば関数  $P_n$  には

$$\frac{dQ_n}{d\xi} = (2n-1)P_{n-1} \quad (1.2.21)$$

なる性質があるから、式 (1.2.17) の第1式および第4式の右辺 第2項はこれを用いて

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \sum (2n+1) P_n \cdot \frac{2}{h} U_{x'n+1} \\ \varepsilon_{x'y'} &= \sum (2n+1) P_n \cdot \frac{2}{h} U_{y'n+1} \end{aligned} \right\} (1.2.22)$$

と表わし得ることがわかる。また式 (1.2.1) および式 (1.2.6) の変位振巾は新しい表示の対応成分を用いて

$$\left. \begin{aligned} a\delta_{Gn} &= \delta_{Gn} - \delta_{Gn+2} \\ a\delta'_n &= \delta'_n - \delta'_{n+2} \end{aligned} \right\} (1.2.23)$$

のように書き表わせる。そこで式 (1.2.18) の  $U_{y'n}$  等を式 (1.2.23) を用いて  $U_{x'n}$  等で表わした後、式 (1.2.22) と合せて書けば、歪成分の新しい局部座標系節点変位振巾による表示が得られる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \sum (2n+1) P_n \frac{2}{h} U_{x'n+1} \\ \varepsilon_{y'} &= \sum \frac{2}{\ell} \left( \frac{dU_{y'n}}{d\xi} - \frac{dU_{y'n+2}}{d\xi} \right) \\ \varepsilon_{\theta} &= \sum P_n \frac{1}{R} \left\{ (U_{x'n} - U_{x'n+2}) \cos \phi \right. \\ &\quad \left. - (U_{y'n} - U_{y'n+2}) \sin \phi \right\} \\ \varepsilon_{x'y'} &= \sum P_n \left\{ \frac{2}{\ell} \left( \frac{dU_{x'n}}{d\xi} - \frac{dU_{x'n+2}}{d\xi} \right) + (2n+1) \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{h} U_{y'n+1} \right\} \end{aligned} \right\} (1.2.24)$$

さて、式 (1.2.20) の第1式で与えられる  $\xi$  断面での全体座標系の変位振巾  $\delta_{Gn}$  は Lagrange の内挿関数を用いて全体座標系の節点変位振巾の関数として表わすことができ、

$$\delta_{Gn} = N(\xi) \cdot \bar{\delta}_n \quad (1.2.25)$$

と書ける。ここに  $\bar{\delta}_n$  は節点での  $P_n$  関数の  $n$  次のモードに対する変位振巾であつて

$$\bar{\delta}_n^t = \left\{ \varepsilon_{\theta in} \quad \varepsilon_{\theta jn} \quad \varepsilon_{\theta kn} \quad U_{zin} \quad U_{zjn} \quad U_{zkn} \right\} \quad (1.2.26)$$

であり、(図 1.2.1 参照)，また  $N(\xi)$  は内挿関数であつて、いまの場合

$$\left. \begin{aligned} N(\xi) &= \begin{bmatrix} N_s \\ \\ \\ N_s \end{bmatrix} \\ N_s &= \{ N_i \quad N_j \quad N_k \} \\ N_i &= \frac{1}{2} \xi (\xi - 1), \quad N_j = (1 + \xi) (1 - \xi) \\ N_k &= \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.27)$$

で与えられる。式 (1.2.20) の両式の間には、式 (1.2.3) の関係があるから、これを用いば局部座標系の変位振巾は

$$\delta_n' = \lambda \cdot R \cdot \delta_{Gn} \quad (1.2.28)$$

のように全体座標系の変位振巾によつて表わすことができ、これに式 (1.2.25) を代入し、

演算の順序を入れ替えれば、

$$\left. \begin{aligned} \delta_n' &= \lambda \cdot N \cdot \bar{R} \cdot \bar{\delta}_n \\ \text{ただし} \\ \bar{R} &= \begin{bmatrix} R_{0i} + \frac{h_i}{2} \cos \phi_i & R_{0j} + \frac{h_j}{2} \cos \phi_j & & \\ & R_{0k} + \frac{h_k}{2} \cos \phi_k & 1 & 1 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.29)$$

となつて局部座標系変位振巾の全体座標系節点変位振巾による表示が得られる。上式を式

(1.2.24) の各式に用いば局部座標系の各歪成分を全体座標系の節点変位振巾によつて表わすことができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \sum (2n+1) P_n \frac{2}{h} \lambda_{x'} N \cdot \bar{R} \cdot \bar{\delta}_{n+1} \\ \varepsilon_{y'} &= \sum P_n \frac{2}{l} \lambda_{y'} \frac{dN}{d\xi} \cdot \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \varepsilon_{\theta} &= \sum P_n \cdot e_2 \cdot N \cdot (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'y'} = \sum p_n \left\{ \frac{2}{l} \lambda_{x'} \frac{dN}{d\xi} \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \right. \\ \left. + (2n+1) \frac{2}{h} \lambda_{y'} N \bar{R} \bar{\delta}_{n+1} \right\} \end{aligned}$$

ここに

$$\left\{ \frac{\lambda_{x'}}{\lambda_{y'}} \right\} \equiv \lambda \quad (1.2.31)$$

$$e_2^t = \{ 1 \quad 0 \} \quad (1.2.32)$$

である。上式をマトリックス形で表わせれば次式となる。

$$\varepsilon' = \sum_{n=0} p_n \left( \sum_{\lambda=0} J_{n\lambda} \cdot G_{\lambda} \cdot \bar{\delta}_{n+\lambda} \right) \quad (1.2.33)$$

ここに  $G_i$  および  $J_{ni}$  はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} G_0^t &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \frac{2}{l} \cdot \bar{R}^t \cdot \frac{dN^t}{d\xi} \cdot \lambda_{y'}^t & N^t e_2^t & \frac{2}{l} \bar{R}^t \frac{dN^t}{d\xi} \lambda_{x'}^t \end{array} \right] \\ G_1^t &= \left[ \begin{array}{cccc} \bar{R}^t \cdot N^t \cdot \lambda_{x'}^t & 0 & 0 & \frac{2}{h} \bar{R}^t N^t \cdot \lambda_{y'}^t \end{array} \right] \\ G_2 &= -G_0, \quad J_{n0} = J_{n2} = 1, \quad J_{n1} = 2n+1 \\ \text{ただし } 0 &; \quad \text{零行列} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.34)$$

である。

以上では形状  $l$  および  $h$  が要素内で一定の場合を考えた。

通常の厚肉回転殻はこれらの要素関係式を用いて取扱えるが、特に要素内の  $l$  および  $h$  が場所によつて変化する場合に、式 (1.2.34) がどのような形をとるかを、上の場合と同様に求めてみると以下のようなになる。

いま要素形状が図 1.2.2 に示すような直線境界で与えられる四辺形リング要素の場合を考え、その肉厚および長さを

$$\left. \begin{aligned} h(\xi) &= h_0 + h_1 \xi \\ l(\xi) &= l_0 + l_1 \xi \end{aligned} \right\} \quad (1.2.35)$$

と置く。図のように  $X'$  軸と  $\zeta$  軸の間の傾き角を  $\bar{\theta}(\xi)$  とすれば、式 (1.2.15) の  $\lambda_L$  行列は、図より

$$\lambda_L = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} & 0 \\ \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} & l_0/2 \end{bmatrix} \quad (1.2.36)$$

となるから、式 (1.2.8) の  $J_2$  行列は

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} & \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \\ \left( \frac{h'}{2} \cos \bar{\theta} - \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' \right) \zeta & \left( \frac{h'}{2} \sin \bar{\theta} + \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' \right) \zeta + \frac{l_0}{2} \end{bmatrix} \quad (1.2.37)$$

ただし

$$h' = \frac{dh}{d\xi}, \quad \bar{\theta}' = \frac{d\bar{\theta}}{d\xi}$$

したがって、この逆行列は  $1/|J_2|$  を  $\zeta$  のべき級数に展開して  $\zeta^3$  以下を省略すれば

$$J_2^{-1} = \frac{4}{h\hat{l}} \left\{ J_A + (\zeta - \zeta^2 f)(-f J_A + J_B) \right\} \quad (1.2.38)$$

ただし

$$J_A = \begin{bmatrix} l_0/2 & -\frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \\ 0 & \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \end{bmatrix}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} \frac{h'}{2} \sin \bar{\theta} + \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 \\ -\frac{h'}{2} \cos \bar{\theta} + \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \frac{h\bar{\theta}'}{\hat{l}}, \quad \hat{l} = l_0 \cos \bar{\theta}$$

と表わせる。これを式 (1.2.12) に用いれば  $IB_J$  行列は

$$IB_J = IB_{J(0)} + (\zeta - \zeta^2 f) IB_{J(1)} \quad (1.2.39)$$



となる。ここに  $IB_{J(0)}$  および  $IB_{J(1)}$  は

$$IB_{J(0)} = \frac{4}{h\hat{l}} \begin{bmatrix} \frac{l_0}{2} & -\frac{h}{2} \sin \bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \\ 0 & 0 & \frac{h\hat{l}}{4} & \frac{h\hat{l}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} & 0 & 0 & \frac{l_0}{2} & -\frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.2.40)$$

および

$$IB_{J(1)} = \frac{4}{h\hat{l}} \begin{bmatrix} -\frac{fl_0}{2} + \frac{h'}{2} \sin \bar{\theta} & \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h'}{2} \cos \bar{\theta} & -f \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 \\ -\frac{h'}{2} \cos \bar{\theta} & -f \frac{h}{2} \cos \bar{\theta} & 0 & 0 & -\frac{fl_0}{2} + \frac{h'}{2} \sin \bar{\theta} & \frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \\ +\frac{h}{2} \sin \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 & 0 & 0 & +\frac{h}{2} \cos \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.41)$$

である。特別の場合としては  $l$  および  $h$  が要素内で一定の場合には  $l_1 = h_1 = \bar{\theta} = 0$  を上式に用い、さらにこれを (1.2.14) 式に用いれば、先に求めた式 (1.2.17) 式が得られることが容易に証明できる。

さて  $IB_J$  が求められたから、これを用いてこの場合の  $\mathcal{E}'$  と  $\bar{\mathcal{D}}_n$  の関係が定められる。

すなわち、式 (1.2.20) の第2式に式 (1.2.29) を用いれば

$$\mathcal{D}' = \sum_{n=0} Q_n \cdot \lambda \cdot IN \cdot \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{D}} \quad (1.2.42)$$

が得られるから、これと式 (1.2.13) の両式から式 (1.2.14) 中の  $IB_n \bar{\mathcal{D}}$  が次のように求められる。

$$\mathbb{B}_N \cdot \bar{\delta}' = \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (2n+1) p_n \lambda_{x'} N \cdot \bar{R} \bar{\delta}_{n+1} \\ \Sigma p_n \lambda_{y'} \frac{dN}{d\xi} \cdot \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \Sigma p_n \frac{1}{R} \cos \phi \cdot \lambda_{x'} N \cdot \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \Sigma -p_n \frac{1}{R} \sin \phi \cdot \lambda_{y'} N \cdot \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \Sigma (2n+1) p_n \lambda_{y'} N \cdot \bar{R} \bar{\delta}_{n+1} \\ \Sigma p_n \lambda_{x'} \frac{dN}{d\xi} \bar{R} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \end{array} \right\} \quad (1.2.43)$$

上式の第3行, 第4行の成分和をとり,  $\bar{B}_{J(0)}$  および  $\bar{B}_{J(1)}$  を式 (1.2.40) および式 (1.2.41) の右辺の第4列を落したものとして定義しなおせば, 求めるべき  $\mathcal{E}$  と  $\bar{\delta}_n$  の関係は

$$\mathcal{E}' = \Sigma p_n \{ \bar{B}_{J(0)} + (\zeta - \zeta^2 f) \bar{B}_{J(1)} \} \mathcal{E}'_{cn} \quad (1.2.44)$$

ただし

$$\mathcal{E}'_{cn} = \Sigma J_{n\lambda} \cdot \mathcal{Z}_\lambda \cdot \bar{\delta}_{n+\lambda}$$

となる。ここに  $\mathcal{Z}_\lambda$  は

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{Z}_0^t = \left[ 0 \quad \left( \lambda_{y'} \frac{dN}{d\xi} \cdot \bar{R} \right)^t \quad (e_2 N)^t \quad 0 \quad 0 \quad \left( \lambda_{x'} \frac{dN}{d\xi} \bar{R} \right)^t \right] \\ \mathcal{Z}_1^t = \left[ \left( \lambda_{x'} N \cdot \bar{R} \right)^t \quad 0 \quad 0 \quad \left( \lambda_{y'} N \cdot \bar{R} \right)^t \quad 0 \right] \\ \mathcal{Z}_2 = -\mathcal{Z}_0 \end{array} \right\} \quad (1.2.45)$$

であり,  $J_{n\lambda}$  は式 (1.2.34) で与えられるものと同じである。

したがって要素形状が式 (1.2.35) あるいは図 1.2.2 で与えられるような場合には,  $\mathcal{E}$  と  $\bar{\delta}_n$  の関係は式 (1.2.34) の代りに上式を用いればよいことがわかる。

さて, 全体座標系の歪を

$$\mathcal{E}_G^t = \{ \mathcal{E}_R \quad \mathcal{E}_Z \quad \mathcal{E}_\theta \quad \mathcal{E}_{RZ} \} \quad (1.2.46)$$

とすれば, 式 (1.2.8) と同様の関係を用いて

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_R}{\partial R} & \frac{\partial U_R}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_Z}{\partial R} & \frac{\partial U_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \lambda^t \begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} \end{pmatrix} \lambda \quad (1.2.47)$$

が得られ、これより全体座標系の歪成分と局部座標系の歪成分の間には次のような関係があることがわかる。

$$\mathcal{E}_G = \omega \cdot \mathcal{E} \quad (1.2.48)$$

ただし  $\omega$  は

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & 0 & \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 0 & \sin \phi \cos \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 \sin \phi \cos \phi & -2 \sin \phi \cos \phi & 0 & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad (1.2.49)$$

であつて  $\phi$  のみの関数である。

## 2.2 要素の仮想仕事

以上で歪、変位、節点変位間の基礎的な関係が得られたので、次にこれらをもとに要素の仮想仕事に対する関係式を誘導する。応力および応力-歪行列を  $\mathcal{T}$  および  $\mathcal{D}$  とし、全体座標系および局部座標系の成分に添字  $G$  および肩記号 " ' " を付けて区別すれば応力と歪の関係はそれぞれ次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_G &= \mathcal{D}_G (\mathcal{E}_G - \mathcal{E}_0) \\ \text{ただし} \\ \mathcal{T}_G^t &= \{ \sigma_R \quad \sigma_Z \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{RZ} \} \\ \mathcal{E}_0 &= \alpha T \mathbf{e}_T \\ \mathbf{e}_T &= \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.50)$$

$T$  ; 温度

$\alpha$  ; 線膨脹係数

および

$$\sigma' = D' (\epsilon' - \epsilon_0)$$

ただし

$$\sigma'^t = \{ \sigma_x' \quad \sigma_y' \quad \sigma_\theta' \quad \sigma_{xy}' \}$$

(1.2.51)

次に応力のする仮想仕事は、全体座標系および局部座標系の両表示によつてそれぞれ

$$\delta V_{eG} = \int \delta \epsilon_G^t \cdot \sigma_G dV_G$$

および

$$\delta V_{e'} = \int \delta \epsilon'^t \cdot \sigma' \cdot dV'$$

(1.2.52)

のように与えられる。上式の第一式に式 (1.2.50) および式 (1.2.48) を用いて局部座標系の歪成分で表わせば

$$\delta V_{eG} = \int \delta \epsilon'^t \cdot \omega^t \cdot D_G \cdot \omega (\epsilon' - \epsilon_0) dV' \quad (1.2.53)$$

となるから  $D$  を定義座標系によつて使いわけて

$$D = \begin{cases} \omega^t \cdot D_G \cdot \omega & (X_R \text{ 系}) \\ D' & (X_\theta' \text{ 系}) \end{cases} \quad (1.2.54)$$

とすれば、式 (1.2.52) 中の両式は共通に

$$\begin{aligned} \delta V_e &= \int \delta \epsilon'^t \cdot D \cdot (\epsilon' - \epsilon_0) dV' \\ &\equiv \delta V_{e\sigma} + \delta V_{eTem} \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

と書けることがわかる。

そこで以下では式 (1.2.55) を用いて応力のする仮想仕事を求める。両局部座標系の体積要素  $dV_L = |J_2| d\xi d\eta d\theta$  と  $dV' = dx' dy' d\theta$  の間には式 (1.2.36) の

$\lambda_L$  を用いて

$$dV' = |\lambda_L| dV_L$$

の関係があるから、これと式 (1.2.44) の両方を式 (1.2.55) に用いれば

応力のする仮想仕事は

$$\left. \begin{aligned} \delta V_{e\sigma} &= \int \sum p_n \delta \mathcal{E}'_{cn} \{ \bar{B}_{J(0)}^t + (\zeta - \zeta^2 f) \bar{B}_{J(1)}^t \} \\ &\quad \times ID \cdot \{ \sum p_m \{ \bar{B}_{J(0)}^t + (\zeta - \zeta^2 f) \bar{B}_{J(1)}^t \} \\ &\quad |\lambda_L| dV_L \end{aligned} \right\} \quad (1.2.56)$$

と表わしうる。これを  $\zeta$  べきによつて展開し、3次以上の項を省略すれば、各べきの係数に

添字 (i) をつけて

$$\delta V_{e\sigma} = \delta V_{e\sigma(0)} + \zeta \delta V_{e\sigma(1)} + \zeta^2 \delta V_{e\sigma(2)}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \delta V_{e\sigma(0)} &= \int (\sum p_n \delta \mathcal{E}'_{cn} \bar{B}_{J(0)}^t) \cdot ID \cdot (\sum p_n \bar{B}_{J(0)}^t \mathcal{E}'_{cm}) |\lambda_L| dV_L \\ \delta V_{e\sigma(1)} &= \int (\sum p_n \delta \mathcal{E}'_{cn}) (\bar{B}_{J(0)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(1)}^t + \bar{B}_{J(1)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(0)}^t) \\ &\quad (\sum p_n \mathcal{E}'_{cm}) |\lambda_L| dV_L \\ \delta V_{e\sigma(2)} &= \int (\sum p_n \delta \mathcal{E}'_{cn}) \{ \bar{B}_{J(1)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(1)}^t - f (\bar{B}_{J(0)}^t \cdot ID \cdot \\ &\quad \bar{B}_{J(1)}^t + \bar{B}_{J(1)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(0)}^t) \} \cdot (\sum p_m \mathcal{E}'_{cm}) |\lambda_L| dV_L \end{aligned} \right\} \quad (1.2.57)$$

が得られる。したがつてこれらの具体的な形を求めることによつて応力による仮想仕事を得られる。

さて、上の各エネルギー積分中、まず第2式は Legendre 関数の直交性の性質

$$\int_{-1}^1 p_m p_n d\zeta = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{2}{2n+1} & (n = m) \end{cases} \quad (1.2.58)$$

を用いて  $\zeta$  に関する積分を直ちに行なうことができ、

$$\delta V_{e\sigma(0)} = \sum \frac{2}{2n+1} \cdot 2\pi \int_{-1}^1 \delta \mathcal{E}'_{cn} \cdot \bar{B}_{J(0)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}'_{J(0)} \cdot \mathcal{E}'_{cn} |\lambda_L| d\zeta \quad (1.2.59)$$

となる。上式中の  $\xi_{cn}$  に式 (1.2.44) の第2式の関係を用いれば次式が得られる。

$$\delta V_{e\sigma(0)} = \sum \frac{2}{2n+1} \left\{ \delta \bar{\delta}_n^t \quad (2n+1) \delta \bar{\delta}_{n+1}^t \quad \delta \bar{\delta}_{n+2}^t \right\} \times \begin{pmatrix} S_{00}^{(0)} & S_{01}^{(0)} & -S_{00}^{(0)} \\ & S_{11}^{(0)} & -S_{01}^{(0)t} \\ (\text{Sym.}) & & S_{00}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\delta}_n \\ (2n+1) \bar{\delta}_{n+1} \\ \bar{\delta}_{n+2} \end{pmatrix} \quad (1.2.60)$$

ただし

$$S_{\lambda\mu}^{(0)} = 2\pi \int_{-1}^1 Z_\lambda^t A_{(0)} Z_\mu \cdot |\lambda_\mu| d\xi \quad (\lambda, \mu = 0, 1)$$

$$A_{(0)} = \bar{B}_{J(0)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(0)}$$

上式の  $S_{\lambda\mu}^{(0)}$  は剛性行列の成分であつて  $n$  に無関係な3個の基本剛性行列  $S_{00}^{(0)}$ ,  $S_{01}^{(0)}$  および  $S_{11}^{(0)}$  で表わせる。したがつて  $n$  の高次モードの剛性はこれら3個の基本剛性行列の組合わせで求められることがわかる。さて、上式中の仮想変位には  $\delta \bar{\delta}_n^t$  以外の成分も含まれるから、これを  $\delta \bar{\delta}_n$  別に整理しなおせば

$$\delta V_{e\sigma(0)} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot S_n^{(0)} \cdot \bar{\delta}_{Gn(0)}$$

ただし

$$S_n^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{2n-3} S_{00}^t & \left( \frac{2(2n-1)}{2n-1} S_{01}^t - \frac{2(2n-3)}{2n-3} S_{01} \right) & \left( \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-3} \right) \\ S_{00} + 2(2n-1) S_{11} & \left( 2 S_{01} - \frac{2(2n-1)}{2n-1} S_{01}^t \right) & \frac{-2}{2n+1} S_{00} \end{pmatrix} \quad (1.2.61)$$

$$\bar{\delta}_{Gn(0)} = \left\{ \bar{\delta}_{n-2}^t \quad \bar{\delta}_{n-1}^t \quad \bar{\delta}_n^t \quad \bar{\delta}_{n+1}^t \quad \bar{\delta}_{n+2}^t \right\}$$

が得られる。次に与べきの1次の微小項に関するエネルギー積分式 (1.2.57) の第3式は、

Legendre 関数の漸化式

$$\xi p_n = \frac{n+1}{2n+1} p_{n+1} + \frac{n}{2n+1} p_{n-1} \quad (1.2.62)$$

を用いて得られる

$$\zeta \sum p_n \epsilon_{cn}^t = \sum p_n \left( \frac{n}{2n-1} \epsilon_{c_{n-1}}^t + \frac{n+1}{2n+3} \epsilon_{c_{n+1}}^t \right)$$

等の関係を用いることによつて求められ

$$\zeta \delta \text{Ver}_{(1)} = \sum \frac{2}{2n+1} \left\{ \delta \bar{\delta}_n^t (2n+1) \delta \bar{\delta}_{n+1}^t - \delta \bar{\delta}_{n+2}^t \right\} \times \left[ \begin{array}{ccccc} S_{00}^{(1)} & S_{01}^{(1)} & S_{00}^{(1)} & S_{01}^{(1)} & S_{00}^{(1)} \\ S_{01}^{t(1)} & S_{11}^{(1)} & S_{01}^{t(1)} & S_{11}^{(1)} & S_{01}^{t(1)} \\ S_{00}^{(1)} & S_{01}^{(1)} & S_{00}^{(1)} & S_{01}^{(1)} & S_{00}^{(1)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2n-1} \bar{\delta}_{n-1} \\ n \frac{2n-1}{2n-1} \bar{\delta}_n \\ \left( \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n-1} \right) \bar{\delta}_{n+1} \\ (n+1) \bar{\delta}_{n+2} \\ - \frac{n+1}{2n+3} \bar{\delta}_{n+3} \end{array} \right\} \quad (1.2.63)$$

ただし

$$S_{\lambda\mu}^{(1)} = 2\pi \int Z_\lambda^t A_{(1)} Z_\mu | \lambda_L | d\xi$$

$$A_{(1)} = \bar{B}_{J(0)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(1)} + \bar{B}_{J(1)}^t \cdot ID \cdot \bar{B}_{J(0)}$$

のようになる。1次の剛性行列の成分  $S_{\lambda\mu}^{(1)}$  も0次の解の場合と同様、3個の基本剛性行列  $S_{00}^{(1)}$ ,  $S_{01}^{(1)}$  および  $S_{11}^{(1)}$  のみによつて構成され、これらは  $n$  に無関係である。これを

$\delta \bar{\delta}_n$  別に整理し直せば

$$\zeta \delta \text{Ver}_{(1)} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t S_n^{(1)} \bar{\delta}_{Gn(1)}$$

ただし

$$S_n^{(1)} = \left[ \begin{array}{l} -\frac{2(n-2)}{(2n-3)(2n-5)} S_{00}^{(1)} - \frac{2(n-2)}{2n-3} S_{01}^{(1)} + \frac{2(n-1)}{2n-3} S_{01}^{(1)wt} \left\{ \frac{2n}{(2n+1)(2n-1)} - \frac{2}{2n-3} \right. \\ \left. \left( \frac{n-1}{2n-1} - \frac{n-2}{2n-5} \right) S_{00}^{(1)} + 2(n-1) S_{11}^{(1)} \left( \frac{2n}{2n+1} - \frac{2(n-1)}{2n-3} \right) S_{01}^{(1)} + 2 \left( \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} \right) \cdot \right. \\ \left. S_{01}^{(1)wt} \left\{ \frac{2}{2n+1} \left( \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n-1} \right) + \frac{2(n-1)}{(2n-3)(2n-1)} \right\} S_{00}^{(1)} + 2n S_{11}^{(1)} - \frac{2(n+1)}{2n+1} S_{01}^{(1)} \right. \\ \left. - \frac{2n}{2n+1} S_{01}^{(1)wt} - \frac{-2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} S_{00}^{(1)} \right] \quad (1.2.64)$$

および

$$\bar{\delta}_{Gn(1)}^t = \left\{ \bar{\delta}_{n-3}^t \quad \bar{\delta}_{n-2}^t \quad \dots \quad \bar{\delta}_{n+3}^t \right\}$$

となる。さらにこの2次の微小項，すなわち式(1.2.57)の第4式も全く同様にして求めることができ

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2 \delta V_{e\sigma(2)} &= \sum \delta \bar{\delta}_n^t S_n^{(2)} \cdot \bar{\delta}_{Gn}^{(2)} \\ \text{ただし} \\ \bar{\delta}_{Gn}^{(2)} &= \{ \bar{\delta}_{n-4}^t \quad \bar{\delta}_{n-3}^t \quad \dots \quad \bar{\delta}_{n+4}^t \} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.65)$$

の形に書くことができる。式(1.2.61)，式(1.2.64)および式(1.2.65)の各式を式(1.2.57)の第1式に用いれば応力のする仮想仕事は

$$\delta V_{e\sigma} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \sum_{\lambda=0}^2 S_n^{(\lambda)} \cdot \bar{\delta}_{Gn}^{(\lambda)} \quad (1.2.66)$$

で表わせることがわかる。

以上で応力のする仮想仕事の節点変位振巾による表示が得られたが，対応する外力の仮想仕事も付録1.Aに示すように同様な過程で求めることができ，それぞれ次のように表わせる。

まず熱荷重による仮想仕事，すなわち式(1.2.55)の $\delta V_{eTem}$ は次のように書ける。

$$\delta V_{eTem} = - \sum_{n=0}^3 \delta \bar{\delta}_n^t \sum_{\lambda=0}^3 \psi^{(\lambda)} \bar{\pi}_{Gn}^{(\lambda)} \quad (1.2.67)$$

ここに $\psi^{(\lambda)}$ および $\bar{\pi}_{Gn}^{(\lambda)}$ は付録(1.A.5)～(1.A.7)の各式で与えられ，それぞれ温度荷重行列，および節点温度振巾 $\bar{\pi}_n$ からなる要素温度振巾ベクトルである。

次に物体力による仮想仕事， $\delta U_B$ は，物体力の節点振巾ベクトルを $\bar{f}_{Bn}$ とすれば

$$\delta U_B = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot \Omega \cdot \left( \frac{-2}{2n-3} \bar{f}_{Bn-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{f}_{Bn} \right) \quad (1.2.68)$$

と表わせる。ただし $\Omega$ は物体力による荷重行列で付録(1.A.12)式で与えられる。

同様にして，表面分布力および節点内力による仮想仕事 $\delta U_p$ および $\delta U_f$ はそれぞれ



$$\delta U_P = \sum_{n=0} \delta \bar{\delta}_n^t (\bar{\pi} \cdot \bar{P}_n + (-1)^n \bar{\pi} \cdot \bar{P}_{-1}) \quad (1.2.69)$$

および

$$\delta U_F = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot 2\pi \bar{R}^t \times \left( \frac{-2}{2n-3} \bar{F}_{n-2} - \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \right) \quad (1.2.70)$$

となる。ここに  $\bar{p}_1$  および  $\bar{p}_{-1}$  は外内表面 ( $\zeta = \pm 1$ ) での表面圧の節点振巾ベクトルであり、 $\bar{F}_n$  は節点内力の振巾ベクトル、また  $\bar{r}, \bar{r}$  は表面圧荷重行列であつて付録 1.A の式 (1.A.19) で与えられる。

### 2.3 剛性方程式

以上で内外力各成分による仮想仕事の表示が得られたから、これらより要素の剛性方程式を容易に求めることができる。既出の表示を用いれば、要素に対する仮想仕事の原理は次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \delta V_e - \delta U_e &= 0 \\ \text{ただし} \\ \delta V_e &= \delta V_{e\sigma} + \delta V_{eT_{em}} \\ \delta U_e &= \delta U_B + \delta U_P + \delta U_F \end{aligned} \right\} (1.2.71)$$

式 (1.2.66) ~ 式 (1.2.70) の各式を上式に用いれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^2 S_n^{(\lambda)} \cdot \bar{\delta}_{Gn}^{(\lambda)} &= R_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ \text{ただし} \\ R_n &= \sum_{\lambda=0}^3 \psi^{(\lambda)} \cdot \pi_{Gn}^{(\lambda)} + \Omega \left( \frac{-2}{2n-3} f_{Bn-2} + \frac{2}{2n+1} f_{Bn} \right) \\ &\quad + \bar{\pi} \cdot \bar{p}_1 + (-1)^n \bar{\pi} \cdot \bar{p}_{-1} + 2\pi \bar{R}^t \left( -\frac{2}{2n-3} \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \right) \end{aligned} \right\} (1.2.72)$$

上式が要素の剛性方程式であり、 $n \geq 2$  に対しては上の第 2 式中、 $\bar{p}_1, \bar{p}_{-1}$  に関する項が不要となる。

このようにして得られた各要素の剛性方程式を、構造系内の全要素について合成すると

き，“ある節点  $j$  につき，その節点を含む全要素の，その節点に対する未知断面力を合成したものは，その節点の内外表面に作用する節点外力に等しい。”という，各節点での力学的な平衡条件により，式 (1.2.72) 中の  $\bar{F}_n$  に関する項は，節点外力による成分に置き換えることができる。ここでは一般変位に歪成分を用いているので仮想仕事の等価性に置き換えてこの関係を求めると次のようになる。

節点  $j$  で両表面に作用する全体座標系表示の節点外力を

$$\left. \begin{aligned} F_{ej} &= \{F_{eR} \quad F_{eZ}\}_j^t \quad (\zeta = 1) \\ \text{および} \\ \bar{F}_{ej} &= \{\bar{F}_{eR} \quad \bar{F}_{eZ}\}_j^t \quad (\zeta = -1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.73)$$

とすれば，同方向の変位は式 (1.2.20) の第1式および式 (1.2.25) の両式から

$$\left. \begin{aligned} \delta_j &= \sum R_{\zeta=1} \cdot N_{\xi=\xi_j} \cdot \bar{\delta}_n \\ \bar{\delta}_j &= \sum (-1)^n R_{\zeta=-1} \cdot N_{\xi=\xi_j} \cdot \bar{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.74)$$

となるから，この場合の仮想仕事  $\delta U_{Fej}$  は

$$\left. \begin{aligned} \delta U_{Fej} &= \sum_{n=0}^l \delta \bar{\delta}_n^t (\Theta_j F_{ej} + (-1)^n \bar{\Theta}_j \bar{F}_{ej}) \\ \text{ただし} \\ \Theta_j &= N_{\xi=\xi_j} \cdot R_{\zeta=1} \\ \bar{\Theta}_j &= N_{\xi=\xi_j}^t \cdot R_{\zeta=-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.75)$$

となる。したがって式 (1.2.72) の第2式の  $F_{G\lambda}$  に関する項は

$$2\pi \bar{R}^t \left( -\frac{2}{2n-3} \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \right) = \Theta_j F_{ej} + (-1)^n \bar{\Theta}_j \bar{F}_{ej} \quad (1.2.76)$$

のように既知外力の項でおきかえられる。このような置き換えののち，構造全体の剛性方程式は，添字  $G$  をつけて次のように表わせる。

$$S_{Gn}^{(0)} \bar{\delta}_{Gn} + S_{Gn}^{(1)} \cdot \bar{\delta}_{Gn} + S_{Gn}^{(2)} \cdot \bar{\delta}_{Gn} = R_{Gn} \quad (1.2.77)$$

上式で要素形状を表わす  $l$  および  $h$  が要素内で一定とみなしうる場合には、第1項のみを考えればよく、この場合の全体剛性方程式は次の形に書ける。

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2S_{00G}^{(0)} & 2S_{01G}^{(0)} & -2S_{00G}^{(0)} \\ \hline \frac{2}{3}S_{00G}^{(0)} & 2S_{01G}^{(0)} & -\frac{2}{3}S_{00G}^{(0)} \\ +2S_{11G}^{(0)} & +2S_{01G}^{(0)} & \\ \hline \frac{12}{5}S_{00G}^{(0)} & 2S_{01G}^{(0)} & -\frac{2}{5}S_{00G}^{(0)} \\ +6S_{11G}^{(0)} & +2S_{01G}^{(0)} & \\ \hline \frac{20}{21}S_{00G}^{(0)} & 2S_{01G}^{(0)} & -\frac{2}{7}S_{00G}^{(0)} \\ +10S_{11G}^{(0)} & +2S_{01G}^{(0)} & \\ \hline \frac{28}{45}S_{00G}^{(0)} & \cdot & \cdot \\ +14S_{11G}^{(0)} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \delta_{GG0} \\ \hline \delta_{GG1} \\ \hline \delta_{GG2} \\ \hline \delta_{GG3} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline IR_{G0}^{(0)} \\ \hline IR_{G1}^{(0)} \\ \hline IR_{G2}^{(0)} \\ \hline IR_{G3}^{(0)} \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \end{array} \quad (1.2.78)$$

(Sym.)

この場合、剛性行列は帯巾3の対角行列となり、各小行列は式(1.2.60)を構造全体に合成した3個の基本行列以外は含まない。したがって高次モードに必要な剛性の組立ても  $n$  を含む係数を変えるだけで容易に組立てられる。たとえば上式で肉厚内の応力分布が  $P_n$  の0次と1次のみから成る問題を取扱うには、上の剛性行列中、始めの(2,2)のみを扱えばよく、2次、3次と高次モードが必要になるにつれて、この取扱い行と列の巾を広げてゆけばよい。

次に、全体剛性方程式(1.2.77)中、 $\xi$  の1次まで考慮する場合には、式(1.2.78)に重畳すべき付加剛性方程式は、式(1.2.64)を全要素について合成することによつて得られ

$0$	$\frac{2}{3}S_{00G}^{(1)}$	$2S_{01G}^{(1)}$	$-2S_{00G}^{(1)}$		$\delta_{GG0}$	$IR_{G0}^{(1)}$
	$\frac{2}{3}(S_{01G}^{(1)} + S_{01G}^{t(1)})$	$-\frac{2}{3}S_{00G}^{(1)} + 2S_{11G}^{(1)}$	$\frac{4}{3}S_{01G}^{(1)} - \frac{2}{3}S_{01G}^{t(1)}$	$-\frac{8}{15}S_{00G}^{(1)}$	$\delta_{GG1}$	$IR_{G1}^{(1)}$
	$\frac{6}{5}(S_{01G}^{(1)} + S_{01G}^{t(1)})$	$-\frac{2}{7}S_{00G}^{(1)} + 4S_{11G}^{(1)}$	$\frac{6}{5}S_{01G}^{(1)} - \frac{4}{5}S_{01G}^{t(1)}$	$-\frac{2}{7}S_{00G}^{(1)}$	$\delta_{GG2}$	$IR_{G2}^{(1)}$
	$\frac{-10}{21}(S_{01G}^{(1)} + S_{01G}^{t(1)})$	$-\frac{2}{9}S_{00G}^{(1)} + 6S_{11G}^{(1)}$	$\frac{8}{7}S_{01G}^{(1)} - \frac{6}{7}S_{01G}^{t(1)}$	$-\frac{4}{21}S_{00G}^{(1)}$	$\delta_{GG3}$	$IR_{G3}^{(1)}$
	$\frac{-14}{45}(S_{01G}^{(1)} + S_{01G}^{t(1)})$	$-\frac{2}{11}S_{00G}^{(1)} + 8S_{11G}^{(1)}$	$\frac{10}{9}S_{01G}^{(1)} - \frac{8}{9}S_{01G}^{t(1)}$		.	.
	$\frac{-18}{77}(S_{01G}^{(1)} + S_{01G}^{t(1)})$				.	.
					.	.
					.	.

(1.2.79)

となる。この場合にも、付加剛性行列は式 (1.2.63) で与えられる 3 個の基本剛性を構造全体に集めた 8 個の基本小行列の組合わせによつてすべての小行列が構成できる。式 (1.2.78), 式 (1.2.79) を重ね合わせて解けば、 $\zeta$  の 1 次の微小項を考慮した場合の剛性方程式が得られる。 $\zeta^2$  の微小項まで考慮する場合も同様に取扱える。

さて、解くべき剛性方程式 (1.2.78) は次の形をしている。

$\circ$					
$\times$	$\Delta$			$\delta_{GG0}$	$IR_{G0}$
$\circ$	$\times$	$\Delta$		$\delta_{GG1}$	$IR_{G1}$
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.
$\circ$	$\times$	$\Delta$		.	.

(1.2.80)

上式中の剛性行列はある巾おきに非零の剛性が対角状に並んだ粗な行列となっているため、このまま消去法等により解けば、計算の過程で零部にも非零要素がつかまって計算効率が悪い。この欠点を解消するには、モード別に並んでいる変位ベクトルを節点ごとに全モードを並べるように剛性方程式の組変えを行えばよい。このようにすれば、式(1.2.80)の剛性方程式は

$$\begin{matrix} \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \\ \vdots \\ \Delta n_j^* \end{matrix} = \begin{matrix} R_{n1} \\ R_{n2} \\ \vdots \\ R_{nj}^* \end{matrix} \quad (1.2.81)$$

となつてきわめて帯巾の縮小された対角状行列となる。このような方法によつて、要素数100、節点数200が解けるパイロットプログラムをFACOM230-35を用いて開発した。

#### 2.4 計算例による精度の検討

このプログラムを用いて基本的な例題を解き、解析解あるいは別解法による解と比較して精度の検討を行なつた。

図1.2.3は内半径100mm、肉厚20mmの厚肉円周に $600 \text{ kg/rad}$ の軸引張荷重が作用する場合の軸変位( $U_z$ の0次)と軸応力 $\sigma_z$ の分布を解析解と比較したものであつて、要素1個による計算結果は解析解とよく一致する。

図1.2.4は内半径100mm、外半径200mm、肉厚10mm中空円板の内周に、 $p = 2 \text{ kg/mm}^2$ の内圧が作用する場合を解いて得られる半径変位( $U_R$ の0次)と半径応力 $\sigma_R$ の分布を厳密解と比較したものである。この場合厳密解は $\frac{1}{R}$ または $\frac{1}{R^2}$ を含む形で与えられる

ため、要素数が1の場合には最大変位は正解の76%であるが、要素数が2になると変位、応力ともほぼ正解と一致することがわかる。

図1.2.5は内半径20mm, 肉厚10mmの厚肉円筒に内圧が作用する場合の、肉厚内の半径変位 $U_R$ の分布および半径応力 $\sigma_R$ , 周応力 $\sigma_\theta$ の分布を厳密解と比較したものである。図中 $n=0$ の表示が0次の分布,  $n=0+1$ が0次に1次の分布を合成した結果,  $n=0+1+2$ が2次までの合成結果である。合成結果は $U_R$ ,  $\sigma_R$  および  $\sigma_\theta$ とも厳密解とよく一致することがわかる。

図1.2.6は傾いた要素の精度を調べるため内半径85mm, 肉厚10mmの球殻に,内圧が作用する場合を要素数8で解いて厳密解と比較したもので, 外表面の法線変位の分布, 肉厚内の半径変位, 半径応力および周応力の各分布とも, 計算結果は解析解とほぼ一致していることがわかる。

図1.2.7は, 中空円板の内周に, 面外方向に $100 \text{ Kg} / \text{rad}$ の輪状荷重が作用する場合を解いて解析解と比較したものであつて, 軸方向変位 $U_z$ (0次)が面外変形として生じる場合の一例である。要素が2個では内周の最大変位は78.2%であるが, 4個になると95.5%となり, 半径応力および周応力の分布とともにほぼ正解を表わすことがわかる。

次に図1.2.8(a)に示すような内半径85mm, 肉厚30mmの厚肉円筒の自由端に半径方向輪状荷重が作用する場合を解析し, 一定歪要素を用いた有限要素解と比較した。図1.2.8(b)(c)はそれぞれ, 一定歪要素および本解法を用いたときの要素分割を比較したものであつて, 一定歪要素の解析では要素数78を, また本解法のモデルでは要素数4を用いた。図1.2.9は外周での半径変位 $U_R$ の軸方向分布のモード別解, およびモード別解を合成した分布を一定歪要素による解と比較したものである。合成解は一定歪要素による解とよく一致する。図1.2.10は肉厚内の半径変位の分布を, 自由端 $Z=0$ , 自由端より10mmおよび20mmの各断面で一定歪要素による解と比較したものであつて, 本解はいずれも一定歪要素による解とほぼ一致することがわかる。

以上の諸解析の結果, 本解法による解はいずれも他の解法による解とよく一致し, 本解法の

妥当性が検証された。

### 第 3 章 厚肉体の三次元問題の解析理論

#### 3.1 変位関数

図 1.3.1 に示すような代表的な立体三次元要素を考え、デカルト系全体座標  $(x, y, z)$  と、二つの局部座標系  $(x', y', z')$  および  $(\xi, \eta, \zeta)$  を定める。デカルト系局部座標  $(x', y', z')$  は無次元局部座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  の中心と一致させ、かつ、 $z'$  軸と  $\zeta$  軸を肉厚方向に、 $x', y'$  および  $\xi, \eta$  を広がり方向に選ぶ。そして取扱いを簡単にするため  $z$  軸と  $\zeta$  軸は近似的に一致する場合を考える。 $\xi = \pm 1$  および  $\eta = \pm 1$  をそれぞれ広がり方向分割両縁の境界とし、 $\zeta = \pm 1$  で肉厚方向の両表面を表わす。 $\xi, \eta$  および  $\zeta$  に沿う要素の長さをそれぞれ  $l, \bar{s}$  および  $h$  とする。要素節点は広がり方向の四つの隅角点 (断面) と四つの辺の中間点 (断面) の八つの節点 (断面) から成るものとする。

さて、全体座標系の変位を  $(u, v, w)$  とし、要素内の任意点  $(\xi, \eta)$  の断面内の変位分布を Legendre の直交関数  $P_n(\zeta)$  を用いて次のように表わす。

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0} P_n(\zeta) \left\{ \begin{matrix} aU_n \\ aV_n \\ aW_n \end{matrix} \right\} \quad (1.3.1)$$

あるいは

$$\delta_G = \sum P_n(\zeta) \cdot a \delta_{Gn}$$

ここに  $aU_n$  等は  $\xi, \eta$  の関数であり、 $n$  次の分布  $P_n$  に対する振巾を表わす。次に前章と同様にして、エネルギー積分の取扱いを容易にするために

$$Q_n(\zeta) = P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)$$

によつて定義される  $\delta_G$  の別のモード別表示

$$\left. \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} \right\} = \sum_{n=0} Q_n(\zeta) \left\{ \begin{matrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{matrix} \right\}$$





$$\left. \begin{matrix} N_5 \\ N_7 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 \mp \eta) (1 - \xi^2)$$

$$\left. \begin{matrix} N_6 \\ N_8 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (1 \pm \xi) (1 - \eta^2)$$

である。式 (1.3.2) に式 (1.3.4.) を用いれば

$$\delta_G = \sum_{n=0} Q_n \cdot IN \cdot \bar{\delta}_n \quad (1.3.7)$$

が、また式 (1.2.19) を上式に用いて式 (1.3.1) と比較すれば

$$a \delta_{Gn} = IN \cdot (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \quad (1.3.8)$$

が得られる。これを式 (1.3.1) に代入すれば

$$\delta_G = \sum P_n \cdot IN \cdot (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \quad (1.3.9)$$

となる。式 (1.3.7) と式 (1.3.9) により、全体座標系変位の直交関数  $P_n$  および  $Q_n$  の両者による展開形を節点変位振巾  $\bar{\delta}_n$  を未知量として表わせた。

仮想仕事は局部座標系の成分によつて表示するのが便利であるので、次に局部座標系の成分を上全体座標系節点変位振巾  $\bar{\delta}_n$  によつて表示していくことを考える。全体座標およびデカルト系局部座標 (以下では  $(x', y', z')$  系などのように呼ぶことがある) 間の関係を方向余弦行列  $a$  を用いて

$$X' = a (X - X_0)$$

ただし

$$X = \{x \quad y \quad z\}$$

$$X' = \{x' \quad y' \quad z'\}$$

$$X_0 = \{x_0 \quad y_0 \quad z_0\} \quad (\text{局部座標の原点})$$

(1.3.10)

と表わせば、 $(x', y', z')$ 系の変位  $\delta'$  と全体座標系の変位の間の関係は

$$\delta' = a \cdot \delta_G$$

ただし

$$\delta' = \{u' \quad v' \quad w'\}^t$$

(1.3.11)

と書ける。式 (1.3.11) に式 (1.3.7) を用いれば

$$\delta' = \sum Q_n \cdot \delta'_n$$

ただし

$$\delta'_n = a \cdot N \bar{\delta}_n$$

(1.3.12)

また、式 (1.3.9) を用いれば

$$\delta' = \sum P_n \cdot a \delta'_n$$

ただし

$$a \delta'_n = a \cdot N \cdot (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2})$$

(1.3.13)

となつて、 $(x', y', z')$ 系の変位  $\delta'$  の  $\bar{\delta}_n$  による表示が得られた。

### 3.2 応力—歪—変位関係

次に  $(x', y', z')$ 系での歪—変位関係式は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{y'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x' & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y' & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z' \\ \partial/\partial y' & \partial/\partial x' & 0 \\ \partial/\partial z' & 0 & \partial/\partial x' \\ 0 & \partial/\partial z' & \partial/\partial y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$$

(1.3.14)

あるいは

$$\mathcal{E}' = B_C \cdot \mathcal{D}'$$

上式で  $\mathcal{D}'$  は  $(\xi, \eta, \zeta)$  系座標の関数で与えられるため、上式中の  $(x', y', z')$  系の微分演算子は  $(\xi, \eta, \zeta)$  系で表わしていく必要がある。 $(x', y', z')$  系と  $(\xi, \eta, \zeta)$  系との間には

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \xi}$$

等の関係があるから、 $J_3$  を

$$J_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \xi} & \frac{\partial z'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x'}{\partial \eta} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} & \frac{\partial z'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x'}{\partial \zeta} & \frac{\partial y'}{\partial \zeta} & \frac{\partial z'}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (1.3.15)$$

とすれば、両座標系の微分演算子間関係は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = J_3^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_{11}' & J_{12}' & J_{13}' \\ J_{21}' & J_{22}' & J_{23}' \\ J_{31}' & J_{32}' & J_{33}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (1.3.16)$$

これを式 (1.3.14) に用いて、演算子行列  $B_C$  を  $(\xi, \eta, \zeta)$  系で表わせれば次式が得られる。

$$B_C = B_{J_3} \cdot B_{N_3} \quad (1.3.17)$$

ここに  $B_{J_3}$  および  $B_{N_3}$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$B_{J_3} = \begin{pmatrix} J_{11}' & J_{12}' & J_{13}' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}' & J_{22}' & J_{23}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}' & J_{32}' & J_{33}' \end{pmatrix} \quad (1.3.18)$$

$$\begin{pmatrix} J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} & J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ J'_{31} & J'_{32} & J'_{33} & 0 & 0 & 0 & J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} \\ 0 & 0 & 0 & J'_{31} & J'_{32} & J'_{33} & J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} \end{pmatrix}$$

$$|B_{N3} = \begin{pmatrix} \partial/\partial\xi & 0 & 0 \\ \partial/\partial\eta & 0 & 0 \\ \partial/\partial\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial\xi & 0 \\ 0 & \partial/\partial\eta & 0 \\ 0 & \partial/\partial\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial\xi \\ 0 & 0 & \partial/\partial\eta \\ 0 & 0 & \partial/\partial\zeta \end{pmatrix} \quad (1.3.19)$$

式 (1.3.17) を式 (1.3.14) に用いれば

$$\mathcal{E}' = |B_{J3} \cdot |B_{N3} \cdot \delta' \quad (1.3.20)$$

となつて、演算子行列を含めて  $\mathcal{E}'$  が  $(\xi, \eta, \zeta)$  系で表わされた。

そこで以下では両局部座標系間の関係から、 $|B_{J3}$  行列の具体的な形を求めることを考える。図 1.3.2 は  $\zeta = \text{const}$ , 面での両局部座標系間の関係を表わしたものである。図で要素形状を

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 + l_1 \eta \\ \bar{s} &= s_0 + s_1 \xi \\ \bar{\theta} &= \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 \eta \end{aligned} \right\} (1.3.21)$$

とすれば両座標系間には

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \cos \bar{\theta} & 0 & 0 \\ \frac{l}{2} \sin \bar{\theta} & \frac{S_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & h/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \equiv \bar{\lambda}_L \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad (1.3.22)$$

の関係がある。上式より式 (1.3.15) の  $J_3$  は

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \cos \bar{\theta} & \frac{l}{2} \sin \bar{\theta} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{l}{2} \cos \bar{\theta} \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{l}{2} \sin \bar{\theta} \right) & 0 \\ 0 & 0 & h/2 \end{bmatrix} \quad (1.3.23)$$

となるから、この逆行列は

$$J_3^{-1} = \frac{1}{|J_3|} \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \left( \frac{S_0}{2} + \frac{l'}{2} \sin \bar{\theta} + \frac{l}{2} \cos \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' \right) & -\frac{lh}{4} \sin \bar{\theta} & 0 \\ -\frac{h}{2} \left( \frac{l'}{2} \cos \bar{\theta} - \frac{l}{2} \sin \bar{\theta} \cdot \bar{\theta}' \right) & \frac{lh}{4} \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 2|J_3|/h \end{bmatrix} \quad (1.3.24)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} |J_3| &= \frac{h}{2} \left( \frac{l^2}{4} \bar{\theta}' + \frac{lS_0}{4} \cos \bar{\theta} \right) \\ l' &= dl/d\eta, \quad \bar{\theta}' = d\bar{\theta}/d\eta \end{aligned} \right\} \quad (1.3.25)$$

となり、これを式 (1.3.16) と比較することにより、その成分  $J_{ii}'$  等が定まる。これを式 (1.3.18) に用いることにより、斜交性の影響を表わす  $|BJ_3|$  が定まる。式 (1.3.24)

が  $\xi, \eta$  のみの関数であるから、 $IB_{J_3}$  の各成分もすべて  $\xi, \eta$  のみの関数となることがわかる。

さて、方向余弦行列  $a$  を便宜上

$$a = \begin{Bmatrix} a_u \\ a_v \\ a_w \end{Bmatrix} \quad (1.3.26)$$

のように分ける。次に式 (1.3.12), 式 (1.3.13) を成分別表示したものを式 (1.3.20) に用いるに、演算子行列  $IB_{N_3}$  の要素中、 $\xi, \eta$  の偏微分を含むものには式 (1.3.13) を、また  $\zeta$  の微分を含むものには式 (1.3.12) を用い、その際

$$dQ_n(\zeta)/d\zeta = (2n-1)P_{n-1}(\zeta) \quad (1.2.11)$$

の関係を考慮すると、式 (1.3.20) の各成分は以下の各式のように表わすことができる。

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \\ \varepsilon'_{xy} \\ \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yz} \end{array} \right\} = IB_{J_3} \left\{ \begin{array}{l} \sum P_n a_u \frac{\partial IN}{\partial \xi} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum P_n a_u \cdot \frac{\partial IN}{\partial \eta} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum (2n+1) P_n a_u \cdot IN \cdot \bar{\delta}_{n+1} \\ \sum P_n a_v \cdot \frac{\partial IN}{\partial \xi} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum P_n a_v \cdot \frac{\partial IN}{\partial \eta} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum (2n+1) P_n a_v \cdot IN \cdot \bar{\delta}_{n+1} \\ \sum P_n a_w \cdot \frac{\partial IN}{\partial \xi} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum P_n a_w \cdot \frac{\partial IN}{\partial \eta} (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \\ \sum (2n+1) P_n a_w \cdot IN \cdot \bar{\delta}_{n+1} \end{array} \right. \quad (1.3.27)$$

これより，歪成分は次式のように，単純な級数和の形にまとめることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \sum p_n \cdot B_{J_3} \cdot \mathcal{E}'_n \\ \text{ただし} & \\ \mathcal{E}'_n{}^t &= \{ \mathcal{E}'_{x'n} \quad \mathcal{E}'_{y'n} \quad \mathcal{E}'_{z'n} \quad \mathcal{E}'_{xy'n} \quad \mathcal{E}'_{xz'n} \quad \mathcal{E}'_{yz'n} \} \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

ここに  $\mathcal{E}'_n$  は式 (1.3.27) より

$$\mathcal{E}'_n = \sum_{\lambda=0}^2 J_{n\lambda} \cdot G_\lambda \bar{\delta}_{n+1} \quad (1.3.29)$$

と表わせる。上式中  $J_{n\lambda}$  は式 (1.2.34) で与えられ，また  $G_\lambda$  はいまの場合，次のようになる。

$$\begin{aligned} G_0^t &= \left[ \begin{array}{cccccc} (a_u \frac{\partial N}{\partial \xi})^t & (a_u \frac{\partial N}{\partial \eta})^t & 0 & (a_v \frac{\partial N}{\partial \xi})^t & (a_v \frac{\partial N}{\partial \eta})^t & \\ & 0 & (a_w \frac{\partial N}{\partial \xi})^t & (a_w \frac{\partial N}{\partial \eta})^t & 0 & \\ 0 & 0 & (a_u \cdot N)^t & 0 & 0 & (a_v \cdot N)^t \\ & 0 & 0 & (a_w \cdot N)^t & & \end{array} \right] \\ G_1^t &= \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & (a_u \cdot N)^t & 0 & 0 & (a_v \cdot N)^t \\ & 0 & 0 & (a_w \cdot N)^t & & \end{array} \right] \\ G_2 &= -G_0 \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

以上で  $(x', y', z')$  系歪成分の全体座標系節点変位振巾  $\bar{\delta}_n$  による表示が得られた。

応力と歪の関係は，応力-歪行列を  $D'$  とすれば

$$\sigma' = D' (\mathcal{E}' - \mathcal{E}'_0)$$



ただし

$$\sigma' = \{ \sigma_x' \quad \sigma_y' \quad \dots \quad \sigma_{yz}' \}^t$$

(1.3.31)

で与えられ、初期歪が温度の場合には

$$\epsilon_0' = \alpha T \cdot e_{T3}$$

ただし

$$e_{T3} = \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}^t$$

(1.3.32)

と表わせる。

### 3.3 要素の仮想仕事

$(x', y', z')$ 系で表わした応力の成す仮想仕事は次式で表わせる。

$$\delta V_e' = \int (\delta \epsilon')^t \cdot \sigma' dV'$$

ただし

$$dV' = dx' dy' dz'$$

(1.3.33)

上式に式(1.3.31)と式(1.3.28)を用い

$$dV' = |J_3| dV_L$$

ただし

$$dV_L = d\xi d\eta d\zeta$$

(1.3.34)

を考慮すれば

$$\delta V_e' = \int (\sum P_n |B_{J_3}| \cdot \delta \epsilon_n')^t \cdot |D'| (\sum P_m |B_{J_3}| \cdot \epsilon_m' - \epsilon_0') \cdot |J_3| dV_L$$

あるいは

$$\delta V_e' = \delta V_{e\sigma}' + \delta V_{eT\epsilon m}'$$

(1.3.35)

ただし

$$\delta V_{e\sigma}' = \int (\sum P_n |B_{J_3}| \cdot \delta \epsilon_n')^t \cdot |D'| (\sum P_m |B_{J_3}| \cdot \epsilon_m') |J_3| dV_L$$

$$\delta V_{eT\epsilon m}' = - \int (\sum P_n |B_{J_3}| \cdot \delta \epsilon_n')^t \cdot |D'| \cdot \epsilon_0' |J_3| dV_L$$

が得られる。上の第1式の右辺第1項は応力のする仮想仕事であり、第2項は温度による等価節点力のする仕事である。

第2式は式(1.2.58)を用いて容易に積分が行なえ、

$$\delta V_{e\sigma} = \sum \frac{2}{2n+1} \int (|B_{J_3} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}'_n)^t \cdot |D'| \cdot |B_{J_3} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_n \cdot |J_3| d\xi d\eta \quad (1.3.36)$$

あるいは式(1.3.29)を用いて

$$\delta V_{e\sigma} = \sum \frac{2}{2n+1} \left[ \delta \bar{\delta}_n^t \quad (2n+1) \delta \bar{\delta}_{n+1}^t \quad \delta \bar{\delta}_{n+2}^t \right] \times \begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & -S_{00} \\ & S_{11} & -S_{01}^t \\ (Sym) & & S_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_n \\ \bar{\delta}_{n+1} \\ \delta_{n+2} \end{Bmatrix} \quad (1.3.37)$$

ただし

$$S_{\lambda\mu} = \int G_\lambda^t \cdot |B_{J_3}^t \cdot |D'| \cdot |B_{J_3} \cdot G_\mu \cdot |J_3| d\xi d\eta \quad (\lambda, \mu = 0, 1)$$

となる。上式を  $\delta \bar{\delta}_n$  別に整理し直せば次式が得られる。

$$\delta V_{e\sigma} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot S_n \cdot \bar{\delta}_n$$

ただし

$$S_n = \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{-2}{2n-3} S_{00}^t \quad \frac{2(2n-1)}{2n-1} S_{01}^t - \frac{2(2n-3)}{2n-3} S_{01} \right) \left( \frac{2}{2n+1} \right. \\ & \left. + \frac{2}{2n-3} \right) S_{00} + 2(2n-1) S_{11} \quad \frac{2(2n+1)}{2n+1} S_{01} - \frac{2(2n-1)}{2n-1} S_{01}^t \\ & \left. - \frac{2}{2n+1} S_{00} \right\} \quad (1.3.38) \end{aligned}$$

および

$$\bar{\delta}_{Gn}^t = \{ \bar{\delta}_{n-2} \quad \bar{\delta}_{n-1} \quad \bar{\delta}_n \quad \bar{\delta}_{n+1} \quad \bar{\delta}_{n+2} \}$$

これがこの場合の応力がする仮想仕事である。外力による仮想仕事は第2章の場合と同様に  
して付録1.Bのように求められる。

### 3.4 剛性方程式

要素に対する仮想仕事の原理は式(1.2.71)で与えられ、これに式(1.3.38)および付録1.Bに示す外力の各仕事式の表示を用いれば、モード別仮想変位の任意性から次の要素剛性方程式が得られる。

$$S_n \cdot \bar{\delta}_{Gn} = R_n$$

ただし

$$R_n = \psi_{Gn} \cdot \alpha \bar{T}_{Gn} + \Omega \left( -\frac{2}{2n-3} \bar{f}_{Bn-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{f}_{Bn} \right) + \bar{P} \cdot \bar{P}_1 + (-1)^n \bar{P} \cdot \bar{P}_{-1} - \frac{2}{2n-3} \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \quad (1.3.39)$$

なお上の第2式の右辺第1項は熱荷重、第2項は物体力、第3項、第4項は表面圧、また第5項、第6項は節点内力による項を表わし、 $n \geq 2$ に対しては表面圧の項は消滅する。

このようにして得られた各要素の剛性方程式を、構造系内の全要素について合成するとき、式(1.2.76)と同様の関係によつて、上式中の未知断面力 $\bar{F}_n$ に関する項は、各節点jで、内外表面に作用する節点外力

$$\bar{F}_{ej} = \{ F_{ex} \quad F_{ey} \quad F_{ez} \}_j^t, \quad (\zeta = 1)$$

$$\bar{F}_{ej} = \{ \bar{F}_{ex} \quad \bar{F}_{ey} \quad \bar{F}_{ez} \}_j^t, \quad (\zeta = -1)$$

によつて置き換えることができ

$$\sum \left( \frac{-2}{2n+3} \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \right) = f_{ej} + (-1)^n \bar{F}_{ej} \quad (1.3.40)$$

となる。なお上式の右辺は  $n \geq 2$  に対し零となる。

このような置き換えののち，得られる系全体の剛性方程式は，節点当りの自由度が異なるだけで式 (1.2.78) と同じ形に書くことができる。式 (1.2.81) のような未知変位の並べ換えを行ない，帯巾を縮少したのち，第2章の場合と同様にして容易にこれを解くことができる。

### 3.5. 計算例による精度の検討

以上の解法に基づいて，パイロットプログラムを作り基本的な例題を解いて精度の検討を行なった。

図 1.3.3 は長さ 400 mm，巾 40 mm，厚さ 40 mm（紙面に直角方向）の棒が単純引張をうける場合を要素数 1 で解いて，軸変位  $U_x$ （0 次）の分布を，理論解と比較したものである。本解は梁理論によるものと完全に一致した。

図 1.3.4 は同じモデルが，自由端に純曲げモーメントをうける場合の撓みおよび応力の分布を要素数 1 で解いて梁理論による解と比較した。解析では肉厚を 40 mm，80 mm および 120 mm に変化させて長さに対する肉厚の影響も同時に調べた。この場合の撓み  $w$ （0 次）は，軸方向に二次曲線で，また軸応力  $\sigma_x$  は一定で  $x$  方向にのみ変化するため，いずれの結果も一つの要素でその挙動を表わせる場合である。図より明らかのごとく，撓みおよび軸応力は肉厚比のいかんにかかわらず，ほぼ正解を表わしていることがわかる。

図 1.3.5 は，図 1.3.3 と同じモデルの自由端に面外方向の集中荷重が作用する場合を要素数 1 および 2 で解いたものである。この場合の撓みは，軸方向に三次式で変化するから，要素数 1 の場合には梁理論よりかなり小さいが，要素数が 2 になると，ほぼ正解となつていくことがわかる。

分布荷重に対する同様の結果を図 1.3.6 に示す。この場合には撓みは四次式でまた応力が二次式で変化するが、要素数 2 でほぼその挙動を表わしうることがわかる。

次に形状変化の影響を調べるため、変巾片持梁が自由端に集中荷重をうける場合の撓みおよび応力の軸方向分布を、解析解と比較した(図 1.3.7)。この場合には撓みおよび応力とも要素数 1 でほぼ正解を表わしていることがわかる。

二次元的な曲げをうける厚板問題の解析精度を検討するため、図 1.3.8 に示す半巾 10 mm、肉厚 1 mm の周辺固定正方形板が、中央集中荷重をうける場合を解いて、Timoshenko による薄肉解肉解<sup>(1.53)</sup> および Zienkiewicz による薄板曲げ要素による解<sup>(1.52)</sup> と比較した。同(b)図は $x$ 軸に沿う撓み分布で最大撓みは解析解とほぼ一致する。同(c)図は応力の $x$ 軸に沿う分布を比較したものであつて、荷重集中点の近傍を除いて両解はほぼ一致することがわかる。

以上の解析の結果、本解法による解はいずれも別解法による解とよく一致し、本解法の有用性が明らかとなつた。

## 第 4 章 厚肉体の熱伝導問題の解析理論

### 4.1 基礎式の誘導

第 3 章で用いたと同じ三次元体の一つの有限要素およびその対応する座標系 (図 1.3.1) を考え、温度を  $T$ 、時間を  $\bar{t}$ 、熱伝導率を  $k$ 、比熱、密度を  $c, \bar{\rho}$ 、発熱を  $\Phi$  とすれば、熱伝導の基礎方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial T}{\partial z}) \\ + \Phi - c \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} = 0 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

で与えられる。また  $l_x, l_y, l_z$  を境界面外向法線と  $x, y, z$  軸との間の方向余弦、 $T_B$ ,

$\bar{\alpha}$  をそれぞれ境界表面媒体温度、媒体と表面との間の表面熱伝達係数とすれば、表面の熱的境界条件は一般に

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} l_z - \bar{\alpha} T_B + \bar{\alpha} T = 0 \quad (1.4.2)$$

と書ける。

式 (1.4.1) が停留関数としての Euler の方程式となり、式 (1.4.2) がこの自然境界条件となるような汎関数は、式 (1.4.1) の左辺  $\partial T / \partial \bar{t}$  が各瞬間において不変量であるとするとき次式となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \iiint \frac{1}{2} \{ k_x (\frac{\partial T}{\partial x})^2 + k_y (\frac{\partial T}{\partial y})^2 + k_z (\frac{\partial T}{\partial z})^2 - (\Phi - c \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial \bar{t}}) T \} dV_G \\ - \iint \bar{\alpha} T_B T dA_G + \iint \frac{1}{2} \bar{\alpha} T^2 dA_G \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

ただし、上式の右辺第 2 項第 3 項は境界周辺に沿う表面積分を表わす。上式が成立することは、この第 1 変分をとり、Green の定理を用いることによつて、式 (1.4.1)、式 (1.4.2) が得られることにより容易に証明することができる。

さて、要素内の任意点  $(\xi, \eta)$  の断面内の温度分布を Legendre の直交関数  $P_n(\xi)$  と Lagrange の内挿関数  $N(\xi, \eta)$  および節点温度を用いて次のように表わす。

$$T = \sum Q_n(\xi) \cdot N_n(\xi, \eta) \cdot \bar{T}_n \quad (1.4.4)$$

ただし  $Q_n(\xi)$  は式 (1.2.19) で与えられる  $P_n(\xi)$  の組合せ関数であり、また  $\bar{T}_n$  は各節点 (断面) の  $Q_n$  に対する温度振巾であつて

$$\bar{T}_n^t = \{ \bar{T}_{1n}, \bar{T}_{2n}, \dots, \bar{T}_{8n} \} \quad (1.4.5)$$

で与えられる。

式 (1.4.4) を式 (1.4.3) に代入し、各未知節点温度振巾  $\bar{T}_{in}$  等に対して変分を取れば、

$$\begin{aligned} \delta X = & \sum_{n=0} \left\{ \iiint \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta \bar{T}_{in} + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta \bar{T}_{in} + k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta \bar{T}_{in} - \left( \Phi - c \bar{p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \delta \bar{T}_{in} \right\} dV_G - \iint \bar{\alpha} T_B \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \delta \bar{T}_{in} dA_G + \\ & + \iint \bar{\alpha} T \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \delta \bar{T}_{in} dA_G + \iiint \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{2n}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta \bar{T}_{2n} + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{2n}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta \bar{T}_{2n} \right. \\ & \left. + k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{2n}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta \bar{T}_{2n} - \left( \Phi - c \bar{p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{2n}} \delta \bar{T}_{2n} \right\} \cdot dV_G \\ & - \iint \bar{\alpha} T_B \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{2n}} \delta \bar{T}_{2n} dA_G + \iint \bar{\alpha} T \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{2n}} \delta \bar{T}_{2n} dA_G \\ & + \dots \\ & + \dots \\ & + \iiint \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta \bar{T}_{8n} + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta \bar{T}_{8n} + k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta \bar{T}_{8n} - \left( \Phi - c \bar{p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{8n}} \delta \bar{T}_{8n} \right\} dV_G - \iint \bar{\alpha} T_B \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{8n}} \delta \bar{T}_{8n} \cdot \\ & \left. dA_G + \iint \bar{\alpha} T \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{8n}} \delta \bar{T}_{8n} dA_G \right\} \quad (1.4.6) \end{aligned}$$

が得られる。そこで上式から、たとえば変分量  $\delta \bar{T}_{in}$  を含む成分をとりだせば、

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X}{\delta \bar{T}_{in}} &= \iiint \left\{ k_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + k_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \left( \Phi - c \bar{p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \right\} dV_G \\
&\quad - \iint \bar{\alpha} T_B \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} dA_G + \iint \bar{\alpha} T \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} dA_G \quad (1.4.7) \\
&\quad (n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

あるいは、これをマトリックス形で表わせば

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X}{\delta \bar{T}_{in}} &= \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} k_x & & \\ & k_y & \\ & & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} dV_G + \iint \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \bar{\alpha} T dA_G \\
&\quad - \iint \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \left( \Phi - c \bar{p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV_G - \iint \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{in}} \bar{\alpha} T_B dA_G \quad (1.4.8) \\
&\quad (n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

が得られる。上式は要素の特定の節点 1 に対する関係であるが、同様の関係を他の節点のものについても求め、簡単のため、問題を定常問題、すなわち

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.4.9)$$

の場合に限定して、これらの各関係をマトリックス表示すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\delta X}{\delta \bar{T}_n} \right\} &= \int_V A_n \cdot k T_x \cdot dV_G + \int_A B_n \bar{\alpha} T dA_G - \int_A B_n \bar{\alpha} T_B dA_G \\
&\quad - \int_V B_n \Phi dV_G \quad (1.4.10) \\
&\quad (n = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

ここに式中の各行列は



$$R = [R_x \quad R_y \quad R_z]$$

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\delta X}{\delta T_n} \right\} &= \left\{ \frac{\partial X}{\partial \bar{T}_{1n}} \quad \frac{\partial X}{\partial \bar{T}_{2n}} \quad \dots \quad \frac{\partial X}{\partial \bar{T}_{8n}} \right\}^t \\ B_n &= \left\{ \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{1n}} \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{2n}} \quad \dots \quad \frac{\partial T}{\partial \bar{T}_{8n}} \right\}^t \end{aligned} \right\} \quad (1.4.11)$$

および

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \right\}^t \\ A_n &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{1n}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{1n}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{1n}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{T}_{8n}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.12)$$

で与えられる。なお、非定常問題への拡張は、後出の文献(3.22)に示すのとほぼ同様の取扱いによつて容易にこれを行なうことができる。

さて、 $T$  は一価かつ連続な関係であるから、式(1.4.3)の汎関数 $X$ は、この $T$ の各頂点での未知節点温度振巾 $T_{\lambda n}$ に関して停留値を取る。たとえば図1.4.1で $e_1 \sim e_4$ の各要素に対する式(1.4.10)の関係が定まつたとすると、このうち $j$ 点に関する成分だけを取り出して寄せ集めたものは次の停留条件を満足する。

$$\sum_{e=e_1}^{e_4} \left( \frac{\delta \chi}{\delta \bar{T}_{jn}} \right)_e = 0 \quad (1.4.13)$$

上のような関係は全節点（断面）について成立するから、これらを未知節点変位振巾について解けば解が定まる。

そこで以下では式（1.4.4）を式（1.4.10）～式（1.4.12）に用いて各行列の積分を行ない、これらの具体的な関係を誘導することにする。

#### 4.2 熱伝導方程式

さて、要素内の温度分布式（1.4.4）は局部座標系（ $\xi, \eta, \zeta$ ）の関数として与えられているから、式（1.4.12）のように（ $x, y, z$ ）系の微分演算子を含む成分はこれを（ $\xi, \eta, \zeta$ ）系の表示に変換しなければならない。まず式（1.4.12）の第1式は式（1.3.10）、式（1.3.16）の両式を用いて

$$\begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} = a^t J_3^{-1} \begin{Bmatrix} \partial T / \partial \xi \\ \partial T / \partial \eta \\ \partial T / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad (1.4.14)$$

と書ける。ここに  $J_3^{-1}$  は式（1.3.24）で与えられる量であり、 $a$  は（ $x, y, z$ ）系と（ $x', y', z'$ ）系の間の方角余弦である。

さて、前章の場合と同様、直交条件の導入を容易にするために、 $T$  の別表示

$$T = \sum P_n(\zeta) \cdot N_s(\xi, \eta) \cdot a \bar{\pi}_n \quad (1.4.15)$$

を本解析においても併用する。このときには、式（1.4.4）との関係から  $a \bar{\pi}_n$  は

$$\left. \begin{aligned} a \bar{\pi}_n &= \bar{\pi}_n - \bar{\pi}_{n-2} \\ \text{ただし} \\ a \bar{\pi}_n^t &= \{ a \bar{\pi}_{1n} \quad a \bar{\pi}_{2n} \quad \dots \quad a \bar{\pi}_{3n} \} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.16)$$

と書ける。これを式 (1.4.15) に用いれば

$$T = \sum p_n IN_s (\bar{\pi}_n - \bar{\pi}_{n-2}) \quad (1.4.17)$$

上式を式 (1.4.14) 右辺の  $\xi, \eta$  に関する微分系に, 式 (1.4.4) を  $\zeta$  の微分形に用いれば

$$\left. \begin{array}{l} \partial T / \partial \xi \\ \partial T / \partial \eta \\ \partial T / \partial \zeta \end{array} \right\} = \sum p_n \left[ \begin{array}{ccc} \partial IN_s / \partial \xi & & \\ & \partial IN_s / \partial \eta & \\ & & IN_s \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \bar{\pi}_n - \bar{\pi}_{n+2} \\ \bar{\pi}_n - \bar{\pi}_{n+2} \\ (2n+1)\bar{\pi}_{n+1} \end{array} \right\}$$

あるいは

$$\left. \begin{array}{l} \partial T / \partial \xi \\ \partial T / \partial \eta \\ \partial T / \partial \zeta \end{array} \right\} = \sum p_n \sum_{\lambda=0}^2 G_i J_{n\lambda} \bar{\pi}_{n+\lambda} \quad (1.4.18)$$

ただし

$$G_0^t = \left[ \begin{array}{ccc} (\partial IN_s / \partial \xi)^t & (\partial IN_s / \partial \eta)^t & \textcircled{0} \end{array} \right]$$

$$G_1^t = \left[ \begin{array}{ccc} \textcircled{0} & \textcircled{0} & IN_s^t \end{array} \right]$$

$$G_2 = -G_0$$

が得られる。したがって式 (1.4.14) は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{array} \right\} = \sum_{n=0} p_n \cdot a^t J_3^{-1} \sum_{\lambda=0}^2 G_\lambda J_{n\lambda} \bar{\pi}_{n+\lambda} \quad (1.4.19)$$

上の関係を式 (1.4.12) の第2式に用いれば,  $A_n$  は次のようになる。

$$A_n = \{ p_{n-2} G_2^t + p_{n-1} (2n-1) G_1^t + p_n G_0^t \} J_3^{-1t} Q \quad (1.4.20)$$

また式 (1.4.4) を式 (1.4.11) の第3式に用いれば,  $B_n$  は

$$B_n = (p_n - p_{n-2}) \cdot IN_s^t \quad (1.4.21)$$

となる。したがって式 (1.4.17), 式 (1.4.19) ~ 式 (1.4.21) を用い, 発熱量  $\Phi$  および表面熱伝達量  $\bar{\alpha} T_B$  の両者に対する熱的境界条件をそれぞれ

$$\Phi = \sum p_n IN_s \bar{\Phi}_n$$

ただし  
 および 
$$\bar{\Phi}_n^t = \{ \bar{\Phi}_{1n}, \bar{\Phi}_{2n}, \dots, \bar{\Phi}_{8n} \}$$

$$\bar{\alpha} T_{B \zeta=1} = IN_s \cdot \bar{Q}_1$$

$$\bar{\alpha} T_{B \zeta=-1} = IN_s \cdot \bar{Q}_{-1}$$

ただし

$$\bar{Q}_1 = \{ \bar{\alpha} \cdot \bar{\pi}_B \}_{\zeta=1}$$

$$\bar{Q}_{-1} = \{ \bar{\alpha} \cdot \bar{\pi}_B \}_{\zeta=-1}$$

$\bar{\alpha}$  ; 節点の表面熱伝達係数行列

$\bar{\pi}_B$  ; 節点の表面媒体温度

(1.4.22)

と置くことによつて, 式 (1.4.10) が, 各節点での温度振巾  $\bar{\pi}_n$  を未知量とする形に整理することができる。

すなわち, いま式 (1.4.10) を

$$\left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\} = \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_{\mu}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_1 &= \iiint A_n |K| \begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} dV_G \\
 \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_2 &= \iint |B_n \cdot \bar{\alpha}| T dA_G \\
 \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_3 &= - \iint |B_n \bar{\alpha}| T_B dA_G \\
 \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_4 &= - \iint |B_n \Phi| dV_G
 \end{aligned} \right\} (1.4.23)$$

と置けば、第2式は式(1.4.19)、式(1.4.20)を用いて得られる

$$\left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\}_1 = \iiint \left\{ P_{n-2} G_2^t + (2n-1) P_{n-1} G_1^t + P_n G_0^t \right\} \\
 \times J_3^{-1t} \cdot a \cdot |K| \left( \sum_{n=0} P_n a^t \cdot J_3^{-1} \sum G_i J_{n\lambda} \bar{\pi}_{n+\lambda} \right) |J_3| dV_L$$

の関係を積分することによつて得られ

$$\left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T} \right\}_1 = |H_n \cdot \bar{\pi}_{Gn}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\pi}_{Gn} &= \left\{ \bar{\pi}_{n-2}^t \quad \bar{\pi}_{n-1}^t \quad \bar{\pi}_n^t \quad \bar{\pi}_{n+1}^t \quad \bar{\pi}_{n+2}^t \right\}^t \\
 |H_n| &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{-2}{2n-3} |h_{00}^t| & \left( \frac{2(2n-1)}{2n-1} |h_{01}^t| - \frac{2(2n-3)}{2n-3} |h_{01}^t| \right) \\ \left( \left( \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n-3} \right) |h_{00}^t| + 2(2n-1) |h_{11}^t| \right) & \\ \left( 2|h_{01}^t| - \frac{2(2n-1)}{2n-1} |h_{01}^t| \right) & \frac{-2}{2n+1} |h_{00}^t| \end{array} \right] \\
 |h_{\lambda\mu}| &= \int_{-1}^1 G_\lambda^t \cdot J_3^{-1t} \cdot a \cdot |K| \cdot a^t \cdot J_3^{-1} G_\mu |J_3| d\xi d\eta
 \end{aligned} \right\} (1.4.24)$$

となる。

次に第3式は、式 (1.4.21), 式 (1.4.4) を用いれば

$$\left\{ \frac{\delta X}{\delta T_n} \right\}_2 = W_{\zeta=1} + W_{\zeta=-1}$$

ただし

$$W = \iint (P_n - P_{n-2}) \cdot N_S^t \bar{\alpha} (\sum Q_n N_S \bar{\Pi}_n) dA_G$$

より

$$\left\{ \frac{\delta X}{\delta T_n} \right\}_2 = \left\{ \Pi_T + (-1)^n \bar{\Pi}_T \right\} \bar{\Pi}_0 + \left\{ \Pi_T - (-1)^n \bar{\Pi}_T \right\} \cdot \bar{\Pi}_1$$

$$(n = 0, 1)$$

ただし

$$\Pi_T = \iint N_S^t \bar{\alpha}_{\zeta=1} N_S dA_{G\zeta=1}$$

$$\bar{\Pi}_T = \iint N_S^t \bar{\alpha}_{\zeta=-1} N_S d\bar{A}_{G\zeta=-1}$$

(1.4.25)

となる。

また第4式は式 (1.4.21) と式 (1.4.22) の第2, 第3式を用いれば同様にして

$$\left\{ \frac{\delta X}{\delta T_n} \right\}_3 = - \left\{ \Pi_T \bar{Q}_1 + (-1)^n \bar{\Pi}_T \bar{Q}_{-1} \right\}$$

$$(n = 0, 1)$$

(1.4.26)

第5式は式 (1.4.21), 式 (1.4.22) の第1式を用いて

$$\left\{ \frac{\delta X}{\delta T_n} \right\}_4 = - \Omega_T \left( \frac{2}{2n+1} \bar{\Phi}_n - \frac{2}{2n-3} \bar{\Phi}_{n-2} \right)$$

(1.4.27)

ただし

$$\Omega_T = \iint |N_S^T N_S| |J_3| d\xi d\eta$$

と表わせる。

ゆえに式 (1.4.23) はこれらの結果を用いれば

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\delta \chi}{\delta T_n} \right\} &= H_n \bar{\pi}_{Gn} + \{ \pi_T + (-1)^n \bar{\pi}_T \} \bar{\pi}_0 + \{ \pi_T \\ &\quad - (-1)^n \bar{\pi}_T \} \bar{\pi}_1 - \{ \pi_T \cdot \bar{Q}_1 + (-1)^n \bar{\pi}_T \cdot \bar{Q}_{-1} \} \\ &\quad - \Omega_T \left( \frac{2}{2n+1} \bar{\Phi}_n - \frac{2}{2n-3} \bar{\Phi}_{n-2} \right) \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

$$(n = 0, 1, \dots)$$

となる。これが求める要素の停留関数である。なお上式中の右辺第2～第4項は境界条件が与えられる場合にのみ有効で、かつ  $n \geq 2$  に対しては零と置かねばならない。

式 (1.4.28) のような関係を各要素ごとに求め、停留条件式 (1.4.13) に用いると節点ごとに熱伝導の平衡方程式が得られる。すなわち

$$K_{nj} \bar{\pi}_{Gnj} = R_{Tj} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_{nj} \bar{\pi}_{Gnj} &= \sum_e \left[ H_n \bar{\pi}_{Gn} + \{ \pi_T + (-1)^n \bar{\pi}_T \} \bar{\pi}_0 \right. \\ &\quad \left. + \{ \pi_T - (-1)^n \bar{\pi}_T \} \bar{\pi}_1 \right]_j \\ R_{Tj} &= \sum_e \left[ \{ \pi_T \bar{Q}_1 + (-1)^n \bar{\pi}_T \bar{Q}_{-1} \} + \Omega_T \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{2}{2n+1} \bar{\Phi}_n - \frac{2}{2n-3} \bar{\Phi}_{n-2} \right) \right]_j \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

このような関係を構造系内の全節点について求めれば

$$K_n \bar{\pi}_{Gn} = R_{Tn} \quad (1.4.30)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

なる全節点に関する熱伝導の平衡方程式が得られ、これを解くことによつて所要の解が定まる。式(1.4.30)を式(1.4.24), 式(1.4.25)等を用いてもう少し見やすい形に書き表せば

$$\begin{pmatrix}
 2h_{00G} & 2h_{01G} & -2h_{00G} & & & \\
 \frac{2}{3}h_{00G} & 2h_{01G} & -\frac{2}{3}h_{00G} & & & \\
 +2h_{11G} & +2h_{01G} & & & & \\
 \frac{12}{3}h_{00G} & 2h_{01G} & -\frac{2}{5}h_{00G} & & & \\
 +6h_{11G} & +2h_{01G} & & & & \\
 \frac{20}{21}h_{00G} & 2h_{01G} & -\frac{2}{7}h_{00G} & & & \\
 +10h_{11G} & +2h_{01G} & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & 
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 \pi_G + \bar{\pi}_G & \pi_G - \bar{\pi}_G & 0 & & & \\
 & \pi_G + \bar{\pi}_G & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & \\
 & & & & 0 & \\
 & & & & & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \pi_{GG0} \\
 \pi_{GG1} \\
 \pi_{GG2} \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 R_{T0} \\
 R_{T1} \\
 R_{T2} \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{pmatrix}
 \quad (1.4.31)$$



となる。上式の左辺第1項は式(1.4.24)より得られるもの、また第2項は式(1.4.25)より得られる表面境界条件に関する項である。また右辺は表面熱伝達量および発熱量を表わす式(1.4.26)および式(1.4.27)よりなる。なお、領域内の温度が指定される場合には拘束条件として無条件に式(1.4.31)中に導入することにより取扱うことができる。

上式を第3章の場合と同様にして解けば、各節点の温度振巾が定められ、これより所要の解が求められる。

#### 4.3 計算例による精度の検討

以上の解法に基づいて、パイロットプログラムを作り、基本的な例題を解いて精度の検討を行なった。

図1.4.2は、図中に示す巾 $100\text{mm}$ 、長さ $200\text{mm}$ 、肉厚 $1\text{mm}$ の長方形板が長手方向の両端で図に示す熱負荷条件をうける場合の一次元熱伝導問題を、長手方向を肉厚方向(と方向)として解析を行ない、解析解と比較したものである。これより解析解と本解は完全に一致することがわかる。

次に図1.4.3は、図中に示す半径 $500\text{mm}$ 、肉厚 $50\text{mm}$ の円板の肉厚両表面に、それぞれ異なる一様熱負荷が作用し、さらに上表面の半径 $235\text{mm}$ から $50\text{mm}$ 巾のリング状の部分が、他の一様熱負荷部分の1.5倍の熱負荷をうける場合の温度分布を、図中に示す開角 $30^\circ$ の扇形モデルによつて解析し、文献(1.5.8)に示す別の有限要素解法による解と比較したものである。これより両結果はほぼ一致することがわかる。これらにより本解法の妥当性が明らかになった。

第 1 編 参 考 文 献

- (1.1) 宮本博 "三次元弾性論", 裳華房, 1968
- (1.2) Boussinesq, J., "Application des Potentiels à L'étude de L'équilibre et du Mouvement des Solides Elastique" Paris, Gauthiers-Villas, 1885
- (1.3) Galerkin, B., "Contribution a la Solution Generale du Probleme de la Théorie de L'élasticité dans le Cas de Trois Dimensions", C.R. Acad. Sci, Paris 190, 1930, P1047
- (1.4) Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge Univ. Press, 1959
- (1.5) Westergaard, H.M., "Theory of Elasticity and Plasticity", Harvard Univ. Press, 1952
- (1.6) Reissner, E., "On the Calculation of Three-Dimensional Corrections for the Two-Dimensional Theory of Plane Stress", Proc. 15th. Eastern Photoelast. Conf., 1942, P.23
- (1.7) Reissner, E., "The Effect of Transverse-Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", J. Appl. Mech. Vol. 12, No.2, 1945, P.65
- (1.8) Reissner, E., "On Bending of Elastic Plates" Quart. Appl. Math. Vol. 5, 1947, P.55
- (1.9) Poniatovskii, V.V., "Theory for Plates of Medium Thickness", J. Appl. Math. and Mech. (PMM), Vol. 26, No.2, 1962, P.478
- (1.10) Gol'denveizer, A.L., "Derivation of an Approximate Theory of Bending of a Plate by the Method of Asymptotic Integration of

the Equations of the Theory of Elasticity", J. Appl. Math. and Mech., Vol. 26, No.4, 1962, P1000

- (1.11) Green, A.E., and Naghdi P.M., "Some Remarks on the Linear Theory of Shells", Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol. 18, 1965, P.257
- (1.12) John, F., "Estimates for the Derivative of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations", Comm. Pure & Appl. Math., Vol. 18, 1965, P.235
- (1.13) Zerna, W., "A New Formulation of the Theory of Elastic Shells", IASS-Bulletin, Vol. 36, 1968, P.61
- (1.14) Zerna, W., "Herleitung der ersten Approximation der Theorie Elastischer Shalen", Abh. Braunsch. Wissensch. Sesellsch Vol.19, 1967, P.52
- (1.15) Reissner, E., "On the Foundation of Generalized Linear Shell Theory", Proc. of Symp. Int. Union Theor. and Appl. Mech., 1967 on Thin Shells, Copenhagen, Springer-Verlag, 1969, P.15
- (1.16) Sensenig, C.B., "A Shell Theory Compared with the Exact Three-Dimensional Theory of Elasticity" Int. J. Engng. Sci., Vol.6, 1968, P.435
- (1.17) Visarion, V., and Stanescu, K., "Analysis of Non-Thin Shells", J. Appl. Math. and Mech., Vol. 32, No.6, 1968, P.1043
- (1.18) Rutten, H.S., "Asymptotic Approximation in the Three-Dimensional Theory of Thin and Thick Elastic Shells", Proc. of Symp. Int. Union Theor. and Appl. Mech., 1967 on Thin Shells, Copengagen,

Springer-Verlag, 1969, P.115

- (1.19) Turner, M. J., Clough, R.W., and Martin, H. C., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aeron, Sci. Vol. 23, 1956, P.805
- (1.20) Melosh, R. J., "A Flat Triangular Shell Element Stiffness Matrix", Proc. 1st Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-66-80, 1965, P.503
- (1.21) Herrmann, L. R., "A Bending Analysis for Plates", Proc. 1st Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-66-80, 1965, P.577
- (1.22) Martin, H. C., "Stiffness Matrix for a Triangular Sandwich Element in Bending", Jet Propulsion Labor. Report No.32-1158, 1967
- (1.23) Utku, S., "Stiffness Matrices for Thin Triangular Elements of Nonzero Gaussian Curvature", J. Amer. Inst., Aeron. and Astron., Vol. 5, No.9, 1967, P.1659
- (1.24) Smith, I. M., "A Finite Element Analysis for "Moderately Thick" Rectangular Plates in Bending", Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 1968, P.563
- (1.25) Monforton, G. R., and Schmit L. A., "Finite Element Analysis of Sandwich Plates and Cylindrical Shells with Laminated Faces", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-68-150, 1968, P.573
- (1.26) Pryor, C. W., Barker R. M. and Frederick, D., "Finite Element

- Bending Analysis of Reissner Plates", Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div., Vol. 96, 1970 P.957
- (1.27) Greimann L. F. and Lynn, P.P., "Finite Element Analysis of Plate Bending with Transverse Shear Deformation" Nucl. Engng Des., Vol. 14, 1970, P.223
- (1.28) Clough, R.W. and Felippa, C. A., "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-68-150, 1968, P.399
- (1.29) Pian, T.H.H. and Tong, P., "Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-68-150, 1968, P.441
- (1.30) Anderheggen, E., "Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis" Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div. Vol. 93, 1967, P.13
- (1.31) Cook, R.D., "Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates" Int. J. Num. Meth. in Engng, Vol. 5, 1972, P.277
- (1.32) Gallagher, R.H., Podlog, J. and Bijlaard, P.P., "Stress Analysis of Heated Complex Shapes", J. Amer. Rocket Soc. Vol. 32, 1962, P.700
- (1.33) Przemieniecki, J. S., "Tetrahedron Elements in the Matrix Force Method of Structural Analysis", J. Amer. Inst. Aeron and Astron.,

Vol. 2, No.6, 1964, P.1152

- (1.34) Argyris, J. H., "Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media-Small and Large Displacements, J. Amer. Inst. Aeron. and Astron., Vol. 3, No.1, 1965, P.45
- (1.35) Melosh, R. J., "Structural Analysis of Solids" Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Struct. Div., Vol. 89, 1963, P.205
- (1.36) Taig, I.C., "Structural Analysis by the Matrix Displacement Method", Engl. Electric Aviation Report, No. S017, 1961
- (1.37) Irons, B. M., "Stress Analysis by Stiffnesses using Numerical Integration" Rolls-Royce Co. (Internal Report), June, 1963
- (1.38) Irons, B. M., "Engineering Applications of Numerical Integration in Stiffness Methods", J. Amer. Inst. Aeron and Astron., Vol. 4, No.11, 1966, P.2035
- (1.39) Irons, B. M., "Numerical Integration Applied to Finite Element Methods", Conf. on use of Digital Computers in Struct. Engng, Univ. of New-Castle, July, 1966
- (1.40) Ergatoudis, J. G., "Quadrilateral Elements in Plane Analysis: Introduction to Solid Analysis", M. Sci. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1966
- (1.41) Ergatoudis, J. G., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., "Three Dimensional Analysis of Arch Dams and Their Foundations", Symp. on Arch Dams, Inst. Civil Engng., London, 1968
- (1.42) Zienkiewicz, O.C., Iron B.M., Ergatoudis, J. G., Ahmad, S. and Scott, F. C., "Isoparametric and Associated Element Families for

Two and Three Dimensional Analysis", Proc. Course on Finite Element Methods in Stress Analysis ed. Holand and Bell, Trondheim Tech. Univ., 1969

- (1.43) Zienkiewicz, O.C., Irons, B. M., Campbell, J. and Scott, F., "Three Dimensional Stress Analysis", Symp. Int. Union Theor. and Appl. Mech., High Speed Computing in Elasticity, Liege, 1970
- (1.44) Argyris, J. H., "The LUMINA Element for the Matrix Displacement Method", Aeron. J. Roy. Aeron. Soc., Vol. 72, 1968, P.514
- (1.45) Argyris, J. H., Fried, I. and Scharpf, D. W., "The Hermes 8 Element for the Matrix Displacement Method" Aeron. J. Roy. Aeron. Soc., Vol. 72, 1968, P.613
- (1.46) Argyris, J. H., Fried, I. and Scharpf, D. W., "The TET 20 and TEA Elements for the Matrix Displacement Method" Aeron. J. Roy. Aeron. Soc., Vol. 72, 1968, P.618
- (1.47) Argyris, J.H., and Scharpf, D.W., "The Curved Tetrahedral and Triangular Elements TEC and TRIC for the Matrix Displacement Method" Aeron. J. Roy. Aeron. Soc., Vol. 73., 1969, P.55
- (1.48) Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C., "Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems", Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1968
- (1.49) Ahmad, S., Irons, B.M. and Zeinkiewicz, O.C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 2, 1970, P.419

- (1.50) Ahmad, S., "Curved Finite Elements in the Analysis of Solid, Shell and Plates Structures", Ph. D. thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1969
- (1.51) 安川, 森, 蔦, 川上 "多目的有限要素法システム  
KAMPFES - Elastic I - " 川崎技報, 43号, 1971, p 1
- (1.52) Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1971
- (1.53) Timoshenko, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1940
- (1.54) 蔦, 山地, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第1報, 厚肉回転殻軸対称問題)", 日本機械学会論文集, 42巻353号, 昭51, P73
- (1.55) 蔦, 山地, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第2報, 厚肉体の三次元問題)", 日本機械学会講演論文集, 第51期全国大会, No. 730-13, 昭48-10, P163 (日本機械学会論文集 昭51-8掲載予定)
- (1.56) 蔦, 山地, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第3報, 厚肉体の熱伝導解析)", 日本機械学会関西支部第49期定時総会講演論文集, 昭49-3, p 1 (日本機械学会論文集 昭52-2 掲載予定)
- (1.57) 蔦, 山地, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第4報, 解析法に関する2~3の検討とピストン強度解析への応用)", 日本機械学会関西支部第49期定時総会講演論文集, 昭49-3, P 4
- (1.58) 蔦, "三次元非定常熱伝導解析プログラム", 川崎重工技研速報, 昭46-1, (未公表), P 8



付録 1. A 厚肉回転殻の外力の仮想仕事

1. A. 1 熱荷重による仮想仕事

熱荷重による仮想仕事，すなわち式 (1.2.55) の右辺第2項  $\delta V_{eTem}$  は，要素内の温度分布を

$$T = \sum P_n N_s \cdot \bar{\pi}_n$$

ただし

$$\bar{\pi}_n^t = \{ T_{in} \quad T_{jn} \quad T_{kn} \}$$

} (1.A.1)

と置くことによつて以下のように求まる。

まず式 (1.2.55) の  $\epsilon_0$  を

$$\epsilon_0 = e_T \cdot \alpha T$$

ただし

$$e_T^t = \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \}$$

} (1.A.2)

と置けば，両式から

$$\epsilon_0 = \sum P_n e_T \cdot N_s \alpha \bar{\pi}_n \quad (1.A.3)$$

が得られる。上式および式 (1.2.44) の第1式を式 (1.2.55) に用いれば

$$\begin{aligned} \delta V_{eTem} &= - \int \delta \epsilon^t \cdot D \cdot \epsilon_0 dV' \\ &= - \int \sum P_n \cdot \delta \epsilon_{cn}^t \{ \bar{B}_{J(c)}^t + (\zeta - \zeta^2 f) \bar{B}_{J(l)}^t \} \cdot D \cdot \\ &\quad \left( \sum P_n e_T \cdot N_s \cdot \alpha \bar{\pi}_m \right) |\lambda_L| dV_L \end{aligned}$$

となり，これより

$$\delta V_{eTem} = -\delta V_{eTem}^{(0)} - \zeta \delta V_{eTem}^{(1)} - \zeta^2 \delta V_{eTem}^{(2)}$$

ただし

$$\delta V_{eTem}^{(0)} = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \int_{-1}^1 \delta \mathcal{E}_{cn}^t \cdot \bar{B}_{J^{(0)}}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot N_S \propto \bar{\pi}_n \cdot |\lambda_L| d\xi$$

$$\delta V_{eTem}^{(1)} = \sum \frac{4\pi}{2n+1} \int \delta \mathcal{E}_{cn}^t \bar{B}_{J^{(1)}}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot N_S \left( \frac{n}{2n-1} \alpha \cdot \bar{\pi}_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \alpha \bar{\pi}_{n+1} \right) |\lambda_L| d\xi$$

$$\delta V_{eTem}^{(2)} = \sum \frac{2}{2n+1} \int \left( \frac{n}{2n-1} \delta \mathcal{E}_{cn-1}^t + \frac{n+1}{2n+3} \delta \mathcal{E}_{cn+1}^t \right) (-f) \bar{B}_{J^{(1)}}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot N_S \cdot \left( \frac{n}{2n-1} \alpha \bar{\pi}_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \alpha \bar{\pi}_{n+1} \right) |\lambda_L| d\xi$$

(1.A.4)

が得られる。したがって上の  $\mathcal{E}_{cn}'$  に式 (1.2.44) の第2式を用いて各成分の積分を行ない、変分量  $\delta \bar{\delta}_n$  によつて整理すれば次の各式のようになる。

$$\delta V_{eTem}^{(0)} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot \psi^{(0)} \cdot \bar{\pi}_{Gn}^{(0)}$$

ただし

$$\psi^{(0)} = 2\pi \int_{-1}^1 \left\{ \frac{2}{2n+1} Z_0^t \quad \frac{2(2n-1)}{2n-1} Z_{10}^t \quad \frac{-2}{2n-3} Z_{0(0)} \right\} \bar{B}_{J^{(0)}}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot N_S |\lambda_L| d\xi$$

$$\bar{\pi}_{Gn}^{(0)} = \left\{ \alpha \bar{\pi}_n^t \quad \alpha \bar{\pi}_{n-1}^t \quad \alpha \bar{\pi}_{n-2}^t \right\}^t$$

$$\zeta \delta V_{eTem}^{(1)} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \psi^{(1)} \bar{\pi}_{Gn}^{(1)}$$

ただし

$$\psi^{(1)} = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{2}{2n+1} Z_0^t \quad \frac{2(2n-1)}{2n-1} Z_1^t \quad \frac{-2}{2n-3} Z_0 \right\} \bar{B}_{J^{(1)}}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot N_S \cdot |\lambda_L| d\xi$$

$$\bar{\pi}_{Gn}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{2n-1} \alpha \bar{\pi}_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \alpha \bar{\pi}_{n+1} \\ \frac{n-1}{2n-3} \alpha \bar{\pi}_{n-2} + \frac{n}{2n+1} \alpha \bar{\pi}_n \\ \frac{n-2}{2n-5} \alpha \bar{\pi}_{n-3} + \frac{n-1}{2n-1} \alpha \bar{\pi}_{n-1} \end{array} \right\}$$

(1.A.5)

(1.A.6)

および

$$\xi^2 \delta V_{Tem}^{(2)} = \sum \delta \bar{\delta}_n^t (\psi^{(2)} \cdot \bar{\pi}_{Gn}^{(2)} + \psi^{(3)} \cdot \bar{\pi}_{Gn}^{(3)})$$

ただし

$$\psi^{(2)} = 2\pi \int_{-1}^1 \left[ \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} z_0^t \quad \frac{2n}{2n-1} z_1^t \quad \frac{-2(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} z_0^t \right]$$

$$\cdot (-f) \cdot \bar{B}_{J(i)}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot IN_S |\lambda_L| d\xi$$

$$\psi^{(3)} = 2\pi \int_{-1}^1 \left[ \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} z_0^t \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2n-1} z_1^t \quad \frac{-(n-2)(n-3)}{(2n-3)(2n-5)} z_0^t \right]$$

$$\cdot (-f) \cdot \bar{B}_{J(i)}^t \cdot ID \cdot e_T \cdot IN_S |\lambda_L| d\xi$$

(1.A.7)

$$\bar{\pi}_{Gn}^{(2)} = \left[ \begin{array}{l} \frac{n+1}{2n+1} \alpha \bar{\pi}_n + \frac{n+2}{2n+5} \alpha \bar{\pi}_{n+2} \\ \frac{n}{2n-1} \alpha \bar{\pi}_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} \alpha \bar{\pi}_{n+1} \\ \frac{n-1}{2n-3} \alpha \bar{\pi}_{n-2} + \frac{n}{2n+1} \alpha \bar{\pi}_n \end{array} \right]$$

$$\bar{\pi}_{Gn}^{(3)} = \left[ \begin{array}{l} \frac{n-1}{2n-3} \alpha \bar{\pi}_{n-2} + \frac{n}{2n+1} \alpha \bar{\pi}_n \\ \frac{n-2}{2n-5} \alpha \bar{\pi}_{n-3} + \frac{n-1}{2n-1} \alpha \bar{\pi}_{n-1} \\ \frac{n-3}{2n-7} \alpha \bar{\pi}_{n-4} + \frac{n-2}{2n-3} \alpha \bar{\pi}_{n-2} \end{array} \right]$$

これらより温度の成す仮想仕事式 (1.A.4) は結局次のように書ける。

$$\delta V_{Tem} = - \sum_{n=0} \delta \bar{\delta}_n^t \sum_{\lambda=0}^3 \psi^{(\lambda)} \cdot \bar{\pi}_{Gn}^{(\lambda)} \quad (1.A.8)$$

1. A. 2 物体力による仮想仕事

要素の全体座標系表示による  $R, Z$  方向の単位体積当たりの物体力を

$$\bar{f}_B \equiv \begin{Bmatrix} f_R \\ f_Z \end{Bmatrix} = \sum P_n \cdot IN \bar{f}_{Bn}$$

ただし

$$\bar{f}_{Bn}^t = \{f_{Rin}, f_{Rjn}, f_{Rkn}, f_{Zin}, f_{Zjn}, f_{Zkn}\}$$

(1.A.9)

とすれば、この位置エネルギーの変化による仮想仕事  $\delta U_B$  は

$$\delta U_B = \int_V \delta \bar{\delta}_D^t \cdot \bar{f}_B dV \quad (1.A.10)$$

と書ける。ただし、 $\delta_D$  は全体座標系の変位であつて式 (1.2.1), 式 (1.2.23) の第1式および式 (1.2.25) より

$$\delta_D = IR \delta_G = \sum P_n \cdot IN \cdot (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \quad (1.A.11)$$

と書ける。そこで式 (1.A.9), 式 (1.A.11) の両式を式 (1.A.10) に用いて  $\delta U_B$  の  $\zeta$  に関する積分を行なえば

$$\delta U_B = \int_V \left\{ \sum P_n IR \cdot IN (\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_{n+2}) \right\}^t (\sum P_n IN \bar{f}_{Bn}) \cdot |\lambda_L| dV_L$$

となり、これより

$$\delta U_B = \sum_{n=0} \frac{2}{2n+1} (\delta \bar{\delta}_n^t - \delta \bar{\delta}_{n+2}^t) \cdot \Omega \cdot \bar{f}_{Bn} \quad (1.A.12)$$

ただし

$$\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 IN^t \cdot IR^t \cdot IN |\lambda_L| d\xi$$

が得られる。これを  $n$  の変分量別に整理し直せば

$$\delta U_B = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \Omega \cdot \left( \frac{-2}{2n-3} \bar{f}_{Bn-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{f}_{Bn} \right) \quad (1.A.13)$$

となる。上式が物体力  $f_B$  による仮想仕事である。

### 1. A. 3 表面分布力による仮想仕事

次に表面分布力による仮想仕事を考える。表面圧の経線方向の分布を簡単のため座標系と共通とし、外内表面での  $\zeta$  方向および  $\xi$  方向の表面圧の分布を

$$P_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} P_\zeta \\ P_{\zeta\xi} \end{array} \right\}_{\zeta=1} = IN \cdot \bar{P}_1 \quad (1.A.14)$$

ただし

$$\bar{P}_1^t = \{ P_{\zeta i} \quad P_{\zeta j} \quad P_{\zeta k} \quad P_{\zeta \xi i} \quad P_{\zeta \xi j} \quad P_{\zeta \xi k} \}$$

および

$$P_{-1} = \left\{ \begin{array}{l} P_\zeta \\ P_{\zeta\xi} \end{array} \right\}_{\zeta=-1} = IN \cdot \bar{P}_{-1} \quad (1.A.15)$$

ただし

$$\bar{P}_{-1}^t = \{ \bar{P}_{\zeta i} \quad \bar{P}_{\zeta j} \quad \bar{P}_{\zeta k} \quad \bar{P}_{\zeta \xi i} \quad \bar{P}_{\zeta \xi j} \quad \bar{P}_{\zeta \xi k} \}$$

と置く。ここに  $\bar{P}_1$  および  $\bar{P}_{-1}$  は表面圧の節点値である。式 (1.A.14) および式 (1.A.15) に対応する方向の変位は式 (1.2.20) の第2式および式 (1.2.29) で

$$Q_n(\zeta = \pm 1) = \begin{cases} (\pm 1)^n, & n = 0, 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases} \quad (1.A.16)$$

として求まり

$$\delta'_{\zeta=1} \equiv \delta'_s = \sum \lambda \cdot IN \cdot \bar{P}_{\zeta=1} \cdot \bar{\delta}_n$$

$$\delta'_{\xi=-1} \equiv \bar{\delta}'_s = \sum (-1)^n \cdot \lambda \cdot IN \cdot \bar{R}_{\xi=-1} \cdot \bar{\delta}_n \quad \left. \vphantom{\delta'_{\xi=-1}} \right\} (1.A.17)$$

となる。ゆえに、表面圧の成す仮想仕事は式 (1.2.15) の  $\lambda_L$  を用い、

$$\begin{aligned} \delta U_p &= \int \delta \delta_s'^t \lambda_L^{-1t} \cdot IN \cdot \bar{P}_i \, dA_{\xi\theta} \\ &\quad + \int \delta \bar{\delta}_s'^t \lambda_L^{-1t} IN \cdot \bar{P}_i \, d\bar{A}_{\xi\theta} \end{aligned} \quad (1.A.18)$$

に上式を用いて、次のように表わせる。

$$\delta U_p = \sum_{n=0}^i \delta \bar{\delta}_n^t (\bar{\pi} \bar{P}_i + (-1)^n \bar{\pi} \bar{P}_{-1}) \quad \left. \vphantom{\delta U_p} \right\} (1.A.19)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\pi} &= \int \bar{R}_{\xi=1}^t \cdot IN^t \cdot \lambda^t \cdot \lambda_L^{-1t} \cdot IN \cdot dA_{\xi\theta} \\ \bar{\pi} &= \int \bar{R}_{\xi=-1}^t \cdot IN^t \cdot \lambda^t \cdot \lambda_L^{-1t} \cdot IN \cdot d\bar{A}_{\xi\theta} \end{aligned}$$

となる。

#### 1. A. 4 節点力による仮想仕事

次に要素各節点の未知断面力を  $\bar{F}$  とし、これを  $P_n$  で展開して

$$\bar{F} = \sum P_n \cdot \bar{F}_n \quad \left. \vphantom{\bar{F}} \right\} (1.A.20)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= \{ F_{Rni} \quad F_{Rnj} \quad \dots \quad F_{ZnK} \} \\ \bar{F} &= \{ F_{Ri}(\zeta) \quad F_{Rj}(\zeta) \quad \dots \quad F_{ZK}(\zeta) \} \end{aligned}$$

の形に表わせば、これによる仮想仕事  $\delta U_F$  は、式 (1.2.1)、式 (1.2.23) の第1式および式 (1.2.25) を用いて

$$\delta U_F = \int_{-1}^1 \left\{ \sum P_n \cdot \bar{R} (\delta \bar{\delta}_n - \delta \bar{\delta}_{n+2}) \right\}^t (\sum P_n \bar{F}_n) d\zeta$$

と書ける。式 (1.2.58) を利用して積分を行なえば

$$\delta U_F = \sum \frac{2}{2n+1} (\delta \bar{\delta}_n^t - \delta \bar{\delta}_{n+2}^t) \cdot 2\pi \bar{R}^t \cdot \bar{F}_n$$

あるいは

$$\delta U_F = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \left( -\frac{2}{2n-3} \cdot 2\pi \bar{R}^t \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \cdot 2\pi \bar{R}^t \bar{F}_n \right) \quad (1.A.21)$$

が得られる。これが節点内力による仮想仕事である。

付録 1. B 厚肉体の三次元問題の外力の仮想仕事

厚肉体の三次元問題の外力の仮想仕事は付録 1. A に示す厚肉回転殻構造の場合と同様に  
して求めることができ、それぞれ以下のようになる。

まず、熱荷重による仮想仕事は、要素内の温度分布を

$$T = \sum p_n \cdot IN_S \cdot \bar{\pi}_n$$

ただし

$$\bar{\pi}_n = \{ \bar{\pi}_{1n} \quad \bar{\pi}_{2n} \quad \dots \quad \bar{\pi}_{8n} \}^t$$

} (1.B.1)

と表わし、これと式 (1.3.32) を式 (1.3.35) の第 4 式に用いることによつて容易に求まり、次のようになる。

$$\delta V e_{T e m}' = - \delta \bar{\delta}_n^t \psi_{G n} \cdot \alpha \bar{\pi}_{G n}$$

ただし

$$\bar{\pi}_{G n} = \{ \bar{\pi}_{n-2}^t \quad \bar{\pi}_{n-1}^t \quad \bar{\pi}_n^t \}$$

$$\psi_{G n} = \left\{ \frac{2}{2n-3} \psi^{(2)} \quad \frac{2(2n-1)}{2n-1} \psi^{(1)} \quad \frac{2}{2n+1} \psi^{(0)} \right\}$$

$$\psi^{(\alpha)} = \int G_\lambda^t |B_{J_3}^t \cdot D' e_T \cdot IN_S \cdot |J_3| d\xi d\eta$$

} (1.B.2)

次に物体力による仮想仕事  $\delta U_B$  は、要素内の単位体積当たりの物体力を

$$\bar{f}_B = \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{matrix} \right\} = \sum p_n \cdot IN \cdot \bar{f}_{Bn}$$

ただし

$$\bar{f}_{Bn} = \{ f_{x1} \quad f_{x2} \quad \dots \quad f_{y1} \quad \dots \quad f_{z1} \quad \dots \quad f_{z8} \}^t$$

} (1.B.3)



とすれば、付録 1.A で用いたと同じ手続きによつて

$$\delta U_B = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \cdot \Omega \cdot \left( \frac{-2}{2n-3} \bar{f}_{Bn-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{f}_{Bn} \right) \quad (1.B.4)$$

ただし

$$\Omega = \int |N^t N \cdot J_3| d\xi d\eta$$

となる。

表面圧による仮想仕事  $\delta U_p$  は、両表面上の分布荷重を

$$P_i = IN \cdot \bar{P}_i$$

および

$$P_{-i} = IN \cdot \bar{P}_{-i}$$

ただし

$$\left. \begin{matrix} P_i \\ P_{-i} \end{matrix} \right\} = \{ P_\xi \quad P_\eta \quad P_\zeta \}_{\zeta=\pm 1}^t$$

$$\left. \begin{matrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_{-i} \end{matrix} \right\} = \{ \bar{P}_{\xi 1} \quad \bar{P}_{\xi 2} \cdots \bar{P}_{\eta 1} \cdots \bar{P}_{\zeta 1} \cdots \bar{P}_{\zeta 8} \}_{\zeta=\pm 1}^t$$

とすれば、同様にして次式のようになる。

$$\delta U_p = \sum_{n=0}^l \delta \bar{\delta}_n^t (P \cdot \bar{P}_i + (-1)^n \bar{P} \cdot \bar{P}_{-i}) \quad (1.B.6)$$

ただし

$$P = \int N^t a^t \cdot \bar{\lambda}_L \cdot N \cdot dA_{\xi\eta}, \quad (\zeta = 1)$$

$$\bar{P} = \int N^t \cdot a^t \cdot \bar{\lambda}_L \cdot N \cdot d\bar{A}_{\xi\eta}, \quad (\zeta = -1)$$

節点内力による仮想仕事  $\delta U_F$  は、各節点の未知断面力を  $\bar{F}$  とし、これを  $P_n$  で展開し

て

$$\left. \begin{aligned}
 F &= \sum p_n \bar{F}_n \\
 \text{ただし} \\
 \bar{F}_n &= \{ \bar{F}_{x1n}, \bar{F}_{x2n} \dots, \bar{F}_{y1n} \dots, \bar{F}_{z1n} \dots, \bar{F}_{z8n} \}^t
 \end{aligned} \right\} \quad (1.B.7)$$

の形に表わせば

$$\delta U_F = \sum \delta \bar{\delta}_n^t \left( -\frac{2}{2n-3} \bar{F}_{n-2} + \frac{2}{2n+1} \bar{F}_n \right) \quad (1.B.8)$$

と表わせる。

第 2 編

厚肉体の接触複合構造物の

有限要素解析法

## 第 1 章 緒 言

厚肉体は単独で一つの構造物を形成する場合と、いくつかの厚肉体が接触部を介して力を伝え合うような複合構造系として一つの構造物を構成する場合とがあり、一般に機械が大型化するにつれて複合構造系を構成する要素の数は増加する。

複合構造系内の一つの構造要素の応力、変形状態を正しく評価するためには、接触部を介して伝えられる外力が明確でなければならないが、これらの力やその分布は、たとえば嵌合問題に見られるように、一般に不明な場合が多い。このような場合には、一機械要素のみでなく、複合構造系全体を解析し、接触境界での作用力の詳細を明確にするか、あるいは一挙に各要素の応力状態までも明らかにしていくような解析法が必要となってくる。

複合構造物の古典解法による解は、古くはHertzの問題や嵌合問題などにつき、種々の有用な解が求められてきているが、そのいずれも解析的取扱いが可能な比較的単純な構造の組合せの場合である。一方、近年の連続体有限要素法の非連続体接触問題への応用は、圧入軸<sup>(2.1)(2.2)</sup>やブロックの塑性圧縮<sup>(2.3)(2.4)</sup>、Hertzの問題<sup>(2.3)(2.5)(2.6)</sup>など、実用上重要な問題ごとに解を工夫して解かれてきた。Wilson<sup>(2.7)</sup>は圧入問題に対し、おのおのの接触表面で組立てた二つの剛性方程式を組合わせて、一つの新しい剛性方程式を求める方法を、対応面に摩擦のない状態で、接触面が全体座標系の一つの軸に平行な場合について示した。大手<sup>(2.8)</sup>はその方法を摩擦条件を有する問題に拡張し、同様の圧入問題を解いた。しかしこの手法では、接触と非接触の境界が負荷とともに変化するHertzの問題などは取扱えない。このように、従来の接触問題の取扱いは、個別の問題ごとに解を工夫するやり方であったため、実用上現れる、いろいろな種類の複合構造系の問題に共通に適用できない。

そこで本編では、接触結合部の非線形挙動の基礎的考察をもとに、複合構造物の汎用的解析法を研究する。すなわち、まず、接触面の傾きが連続的に変化し、かつ複雑な負荷過程をうける一般的な場合につき、解析法の考え方を考察する。そして接触面の挙動には、線形

挙動や可逆的非線形挙動のほか、接線力とすべりの非線形性に由来して非可逆的な非線形挙動を生じる場合があることを明らかにし、この取扱いに、非可逆性を含まないように負荷過程を区切って荷重増分法を、また可逆的な非線形性の取扱いには、繰り返し法をそれぞれ導入し、一つの荷重増分内の非線形性を繰り返し法で取扱う解法を考える。

そして増分型仮想仕事の原理から、接触境界面の作用力や対応変位を未知量として含む増分型剛性方程式をまず求める。次に、接触対応面間の力学的平衡条件や幾何学的連続条件は、接触面作用力や変位によつて一価ではなく、連続体のごとく一体に挙動する場合のほか、対応面がすべる場合や、自由境界に帰着する場合などがあり、それぞれの連続条件は皆異なる。そこで、任意の接触面形状で、ギャップやラップのような初期不整を含み、接触範囲が荷重とともに変化する一般的な場合について、上の各場合の連続条件およびその選択条件を表式化し、これを増分形で表示する。そして増分型剛性方程式に含まれる接触面未知量をこの連続条件を用いて、初期値などの既知量によつて表示して、複合構造系全体の剛性方程式を求めて、その形をくずさずにこれを解く汎用的マトリックス解法を考える。そして解の明らかな数種の基本的な例題を解いて本解法の有用性を明らかにする。

以下に本編で用いる主要記号を列記する。

- $IB$  ; 歪一節点変位行列
- $ID$  ; 応力一歪行列
- $IK$  ; 剛性行列
- $lLaj, lLej$  ; 方向余弦
- $lMej, lMpj$  ; 式(2.26)で与えられる行列
- $lMu_j, lMs_j$  ; 式(2.25), 式(2.28)で与えられる行列
- $IN$  ; 変位関数
- $P, q, \gamma$  ; 面圧, 最大摩擦力方向とその直交方向の接線圧
- $lp, lP$  ; 全体座標系表示の接触面圧と接触面節点力

- $IP_n, IP_0$  ; 局部座標系表示の接触面節点力と増分解析時の初期節点力  
 $IR, S, IF$  ; 節点力  
 $t$  ; 転置  
 $\pi$  ; 温度  
 $U, \bar{U}$  ; 変位, 節点変位  
 $U_p, U_q, U_r$  ;  $p, q, r$  方向の変位  
 $x, y, z$  ; 全体座標  
 $x_a, y_a, z_a$  ; 局部座標  
 $\alpha$  ; 線膨張係数  
 $\delta_p, \delta_p^0$  ; 接触面の初期不整量, 増分解析時の初期不整量  
 $\Delta$  ; 増分,  
 $\epsilon, \epsilon_0$  ; 歪, 初期歪  
 $\epsilon_p, \epsilon_p$  ; 許容誤差  
 $\lambda$  ; 表 2.2 で与えられる行列  
 $\mu$  ; 摩擦係数  
 $\mu$  ; 表 2.1 で与えられる行列  
 $\sigma$  ; 応力  
 $\chi, \chi_y$  ; 物体力, 表面力  
 $"0"$  (添字) ; 増分解析の初期値  
 $"0"$  (肩記号) ; 繰返し解析の一つ前の解

## 第 2 章 厚肉体の接触問題の有限要素解析法

### 2.1 接線力の非可逆性

図 2.1 (a) に示すように、三つの物体 ①, ②, ③ が二つの独立な外力  $P$  および  $Q$  をうける問題を考える。荷重  $P$  がまず作用し、 $P_0$  で一定値に保持され、そののち横荷重  $Q$  が  $0 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0$  のように重畳するとき、①と②の境界面の 1 点での接線圧  $q$  の履歴は図 2.1 (b) のような形をとる。(簡単のため、 $q$  は  $P_0$  のみの場合に零とする。) すなわち、 $P_0$  を一定にしたまま  $Q$  を増すと、 $q$  は  $t_1$  で限界摩擦力  $-\mu P_0$  ( $\mu$  は摩擦係数) に達し、そののち、最大値  $Q_0$  まで  $q$  は  $-\mu P_0$  一定のまますべりのみが行進する。

$Q_0$  から  $Q$  が減少するにつれて、接線変位の食い違いは一定のまま、 $q$  がまず減り始め、 $t_2$  点で  $q$  は反対の摩擦力  $\mu P_0$  に達する。その後  $q$  は  $\mu P_0$  のまま反対方向へのすべりが  $Q$  の除荷の終りまで続く。この最終状態  $t_3$  は同じ荷重条件にもかかわらず、初期状態  $t_0$  と著しく異なる。

ここに示されたような接線力とすべりの非可逆性を取扱うためには、負荷履歴を非可逆性を含まない間隔にわけて取扱う必要がある。そこで本研究では、この取扱いに、弾塑性解析などで使われる荷重増分法を用いることにする。

### 2.2 仮定

次の仮定を設ける。

- (1) 剛体運動はないものとする。
- (2) 接触面間の中間介在物 (油など) の現象は無視し、静摩擦係数のみで扱える。動摩擦は考えない。
- (3) 応力一歪、歪一変位関係は線形とする。
- (4) 分割要素の辺長に比し、変位などは十分小さい。

### 2.3 要素の増分仮想仕事

いくつかの物体①②③④……が互に接触面を構成する場合を考える。各物体を有限の要素に分割したのち、図 2.2 に示すように代表的な物体 ① ② から成る接触境界を考える。

①側の境界面を含む一つの要素を  $A_i$ 、②側の対応要素を  $B_i$  とし、接触対応面の節点は図の  $j_a, j_b$  のごとく互に対応させる。全体座標を  $(x, y, z)$ 、 $A_i$  と  $B_i$  に共通の局部座標を  $(x_a, y_a, z_a)$  とし、 $y_a, z_a$  を接触面内に  $x_a$  を  $A_i$  の外向法線の方向にとる。

このとき、非可逆過程を含まない一つの負荷増分に対する  $A_i$  の増分仮想仕事の原理は、  
(2.9) 前増分までの増分仮想仕事式が完全に満足されているものとすれば、次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta W = & \int \Delta \sigma_{ai}^t \delta \Delta \epsilon_{ai} dV - \int \Delta \chi_{ai}^t \cdot \delta \Delta U_{ai} dV \\ & - \int \Delta \chi_{vai}^t \delta \Delta U_{ai} dS - \int \Delta p_{ai}^t \delta \Delta U_{ai} dS \\ & - \Delta F_{ai}^t \delta \Delta \bar{U}_{ai} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここに

$\sigma_{ai}, \epsilon_{ai}$  ; 応力, 歪

$U_{ai}, \bar{U}_{ai}$  ; 変位, 節点変位

$\chi_{ai}, \chi_{vai}$  ; 物体力, 表面力

$p_{ai}$  ; 全体座標系表示の接触圧力

$F_{ai}$  ; 節点力

であり、また  $\delta$  は仮想量、 $\Delta$  は増分を、 $a_i$  は要素番号を、 $t$  は転置行列をそれぞれ表わす。

変位関数、歪一節点変位関係および応力一歪関係を

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{ai} &= IN \Delta \bar{U}_{ai} \\ \Delta \epsilon_{ai} &= IB \cdot \Delta \bar{U}_{ai} \\ \Delta \sigma_{ai} &= ID \cdot (\Delta \epsilon_{ai} - \Delta \epsilon_{oai}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$



とする。ここに  $IN$  は変位関数、 $B$  は歪一変位行列、 $D$  は応力一歪行列である。熱負荷のある問題では、初期歪は

$$\Delta \epsilon_{oai} = \alpha \cdot \Delta T_{ai} \quad (2.3)$$

で与えられる。ただし  $\alpha$  は線膨張係数、 $T$  は温度を表わす。

式 (2.2) を式 (2.1) に代入すれば、増分仮想変位の任意性から、次の剛性方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 & K_{ai} \cdot \Delta \bar{U}_{ai} = \Delta S_{ai} + \Delta P_{ai} + \Delta F_{ai} \\
 \text{ここに} \\
 & K_{ai} = \int B^t \cdot D \cdot B dV \\
 & \Delta S_{ai} = \int B^t \cdot D \cdot \Delta \epsilon_{oai} dV + \int IN^t \Delta \chi_{ai} dV \\
 & \quad + \int IN^t \Delta \chi_{vai} dS \\
 & \Delta P_{ai} = \int IN^t \Delta p_{ai} dS
 \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Ⓐ内の内部要素  $A_k$  に対しても、式 (2.4) の第1式の右辺第2項を落すだけで同様の関係が得られる。したがってⒶ内の全要素に対する剛性方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 & K_a \cdot \Delta \bar{U}_a = \Delta S_a + \Delta P_a + \Delta F_a \\
 \text{ここに} \\
 & K_a = \sum K_{ai} + \sum K_{ak} \\
 & \Delta S_a = \sum \Delta S_{ai} + \sum \Delta S_{ak} \\
 & \Delta P_a = \sum \Delta P_{ai} \\
 & \Delta F_a = \sum \Delta F_{ai} + \sum \Delta F_{ak}
 \end{aligned} \right\} (2.5)$$

上式の第1式の右辺第2項の未知接触圧力に対する等価節点力がいまの場合未知である。

既知節点力を

$$\Delta R_a = \Delta S_a + \Delta F_a \quad (2.6)$$

と置いて式(2.5)に用いたのち、同様の関係を全物体(A, B, C, ……)に集めると次のような物体別全体剛性方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_a \\ \\ K_b \\ \\ K_c \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{U}_a \\ \Delta \bar{U}_b \\ \Delta \bar{U}_c \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta R_a \\ \Delta R_b \\ \Delta R_c \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta P_a \\ \Delta P_b \\ \Delta P_c \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

あるいは

$$K \cdot \Delta U = \Delta R + \Delta P$$

上式は接触面力およびその対応変位を未知量として含む。これを解くためには、接触対応面間の連続条件を使つて $\Delta P_a$ などを既知量で表わしていくことが必要である。そこで次にこれについて考える。

#### 2.4 接触面間の連続条件と選択条件

接触面間の連続条件は、その部分に作用する力と変形の大きさによつて異なる。これらは通常次のように分類できる。すなわち

- (a) 接触対応両面の力と変位が連続体のごとくすべて連続している場合
- (b) 接触対応面間に作用する接線力は限界摩擦力に保持されたまま、最大摩擦力方向にすべりが生じる。

これらに加えて、Hertzの問題のように接触範囲が負荷の大きさとともに変わる場合の取扱

いを容易にするために、次の条件(c)を追加するのが都合がよい。

(c) 接触両面が自由境界の条件に帰着する場合

これは、解析に先立つ段階では荒く広い目の接触範囲を定め、真の接触範囲は(c)の条件を使って定めてゆけるからである。

そこで、上の(a)~(c)の各場合に対する接触面間の力学的平衡条件および幾何学的連続条件を次に考える。図 2.2 を参照して、接触面上に作用する分布力の垂直成分を  $p$ 、最大摩擦力作用方向の接線圧を  $q$ 、それらに直交する方向の成分を  $r$  とし、対応する変位を  $U_p$ 、 $U_q$  および  $U_r$  とする。そして添字  $a, b$  を要素  $A_i$  と  $B_i$  を区別するのに用いる。接触境界では力、変位ともに未知であるから、連続条件は自由度の 2 倍の連続条件式が必要である。これらは先の条件(a)(b)および(c)に対応して、それぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & p_a^0 \leq 0, \quad |q_a^0| \leq \mu |p_a^0| \\
 & \text{および} \quad |r_a^0| \leq \mu |p_a^0| \quad \text{に対し} \\
 & p_a + p_b = 0, \quad q_a + q_b = 0, \\
 & r_a + r_b = 0, \quad U_{pa} - U_{pb} = 0, \\
 & U_{qa} - U_{qb} = 0, \quad U_{ra} - U_{rb} = 0
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \quad & p_a^0 \leq 0, \quad |q_a^0| \leq \mu |p_a^0| \\ & \text{および} \quad |r_a^0| \leq \mu |p_a^0| \quad \text{に対し} \\ & p_a + p_b = 0, \quad q_a + q_b = 0, \\ & r_a + r_b = 0, \quad U_{pa} - U_{pb} = 0, \\ & U_{qa} - U_{qb} = 0, \quad U_{ra} - U_{rb} = 0 \end{aligned}} \right\} (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & p_a^0 \leq 0, \quad |q_a^0| > \mu |p_a^0| \\
 & \text{および} \quad |r_a^0| \leq \mu |p_a^0| \quad \text{に対し} \\
 & p_a + p_b = 0, \quad q_a + q_b = 0, \\
 & r_a + r_b = 0, \quad U_{pa} - U_{pb} = 0, \\
 & |q_a| = \mu |p_a|, \quad U_{ra} - U_{rb} = 0
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (b) \quad & p_a^0 \leq 0, \quad |q_a^0| > \mu |p_a^0| \\ & \text{および} \quad |r_a^0| \leq \mu |p_a^0| \quad \text{に対し} \\ & p_a + p_b = 0, \quad q_a + q_b = 0, \\ & r_a + r_b = 0, \quad U_{pa} - U_{pb} = 0, \\ & |q_a| = \mu |p_a|, \quad U_{ra} - U_{rb} = 0 \end{aligned}} \right\} (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad & p_a^0 > 0 \quad \text{に対し} \\
 & p_a = q_a = r_a = p_b = q_b = r_b = 0
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (c) \quad & p_a^0 > 0 \quad \text{に対し} \\ & p_a = q_a = r_a = p_b = q_b = r_b = 0 \end{aligned}} \right\} (2.10)$$

上の 3 種の連続条件のうちどれを適用するかは、解析に先立つ段階ではわからないから、まず仮の連続条件を定めて計算を行ない、この結果得られる境界の力と変位で仮の条件の適否

を判定し、この条件を改良して解析を繰返すような試行錯誤の過程が必要となる。上式中の各不等式はこれらの選択条件を表わし、肩記号の○印は繰返し計算の一つ前の解を意味する。

以上は接触境界面が負荷前に同一面にある場合であるが、すべての接触面が負荷前に同一面にあるような場合は実際の構造系ではまれで、通常、何らかの口開き状態にあるか、あるいは圧入構造のごとく、初期重合がある場合が多い。したがって、上の各連続条件のうち法線変位に関する条件はこれらを含むように拡張しておく必要がある。いま、対応面の初期不整量を  $\delta p$  とすると、両面の法線変位が連続する場合の条件は式 (2.8) ~ 式 (2.10) 中の  $U_{pa} - U_{pb} = 0$  の代わりに

$$U_{pa} - U_{pb} - \delta p = 0 \quad (2.11)$$

とすればよい。ただし  $\delta p$  は初期口開きの場合正、初期重合の場合負に取るものとする。

自由境界の条件(c)を用いた解析結果によつて新たに連続条件を定める場合には、式 (2.8) ~ 式 (2.10) 中に示す力による判定は使えないが、それに代つて変位を用いた次の判定条件を用いることができる。

$$U_{pa}^{\circ} - U_{pb}^{\circ} - \delta p \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 ; \text{条件 (a), (b)} \\ < 0 ; \text{条件 (c)} \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

さて、式 (2.8) ~ 式 (2.12) を式 (2.7) に適用するためには、各式を増分形で表示しなければならない。式中の各変数を増分量と初期値を用いて表わし、

$$\left. \begin{array}{l} P_{a0} = P_{a0} + \Delta P_a, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \\ U_{pa} = U_{pa0} + \Delta U_{pa}, \quad \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

と置く。ただし添字 "0" は増分解析時の初期値で、前増分までの解である。上の関係を式 (2.8) ~ 式 (2.12) に用いれば、各連続条件および判定条件は次のようになる。

(a)  $P_{a0} + \Delta P_a^{\circ} \leq 0$

(または  $-\Delta U_{p_a^{\circ}} + \Delta U_{p_b^{\circ}} + \delta p^{\circ} \leq 0$ ),

$|q_{a0} + \Delta q_a^{\circ}| - \mu |p_a^{\circ} + \Delta p_a^{\circ}| \leq 0$  および

$|Y_{a0} + \Delta Y_a^{\circ}| - \mu |p_a^{\circ} + \Delta p_a^{\circ}| \leq 0$  に対し

$\Delta P_a + \Delta P_b = 0$  ①,  $\Delta q_a + \Delta q_b = 0$  ②,

$\Delta Y_a + \Delta Y_b = 0$  ③,  $\Delta U_{p_a} = \Delta U_{p_b} + \delta p^{\circ}$  ④,

$\Delta U_{q_a} = \Delta U_{q_b}$  ⑤, および  $\Delta U_{r_a} = \Delta U_{r_b}$  ⑥

(b)  $P_{a0} + \Delta P_a^{\circ} \leq 0$

(または  $-\Delta U_{p_a^{\circ}} + \Delta U_{p_b^{\circ}} + \delta p^{\circ} \leq 0$ ),

$|q_{a0} + \Delta q_a^{\circ}| - \mu |p_a^{\circ} + \Delta p_a^{\circ}| > 0$  および

$|Y_{a0} + \Delta Y_a^{\circ}| - \mu |p_a^{\circ} + \Delta p_a^{\circ}| \leq 0$  に対し

$\Delta P_a + \Delta P_b = 0$  ①,  $\Delta q_a + \Delta q_b = 0$  ②,

$\Delta Y_a + \Delta Y_b = 0$  ③,  $\Delta U_{p_a} = \Delta U_{p_b} + \delta p^{\circ}$  ④,

$|q_{a0} + \Delta q_a| = \mu |p_{a0} + \Delta p_a|$  ⑦, および

$\Delta U_{r_a} = \Delta U_{r_b}$  ⑥

(2.14)

(c)  $P_{a0} + \Delta P_a^{\circ} > 0$

(または  $-\Delta U_{p_a^{\circ}} + \Delta U_{p_b^{\circ}} + \delta p^{\circ} > 0$ ) に対し

$\Delta P_a + \Delta P_b = 0$  ①,  $\Delta q_a + \Delta q_b = 0$  ②,

$\Delta Y_a + \Delta Y_b = 0$  ③,  $p_{a0} + \Delta P_a = 0$  ⑧,

$q_{a0} + \Delta q_a = 0$  ⑨ および

$Y_{a0} + \Delta Y_a = 0$  ⑩

ただし

$$\delta p^{\circ} = \delta p - U_{pa0} + U_{pb0} \quad (2.15)$$

式(2.14)中、()内の選択条件は自由境界条件(c)を用いた解析結果に適用すればよい。

## 2.5 接触複合構造物の剛性方程式

さて、上の関係を式(2.7)に導入することを考える。いま、図2.2の節点  $ja, jb$  に関する剛性方程式が、式(2.7)中で次の形になっているものとする。

$$IK \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta \bar{U}_{aj} \\ \vdots \\ \Delta \bar{U}_{bj} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta R_{aj} \\ \vdots \\ \Delta R_{bj} \\ \vdots \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vdots \\ \Delta P_{aj} \\ \vdots \\ \Delta P_{bj} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

上式に連続条件を導入するためには、右辺第2項を局部座標系の成分として書き表わす必要がある。

全体座標系で表わした接触力の各成分は局部座標系成分  $\Delta P_{anj}$  と、両座標系間の方向余弦行列  $L_{aj}$  を用いて次のように関係づけられる。

$$\Delta P_{anj} = L_{aj} \cdot \Delta P_{aj} \quad (2.17)$$

したがって、式(2.16)の各項に左から方向余弦行列  $L_{ej}$  を乗ずることにより次式が得られる。

$$L_{ej} IK \Delta \bar{U} = L_{ej} \Delta R + P_{nj} \quad (2.18)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}e_j &= \left[ \begin{array}{c|c} \hline & \\ \hline \text{---} \mathbb{L}a_j \text{---} & \hline \\ \hline & \\ \hline \text{---} & \text{---} \mathbb{L}a_j \text{---} \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right] \quad (2.19) \\
 \Delta P_{nj}^t &= \{ \text{---} \Delta P_{anj} \text{---} \Delta P_{bnj} \text{---} \}
 \end{aligned}$$

次に2.4節で分布接触力に対してたてた関係が、そのまま等価節点力に対する関係として成立つものとすれば、式(2.14)中の力学的平衡条件①, ②, ③, ⑦, ⑧, ⑨および⑩は次のようにして式(2.18)中に導入できる。まず条件①②および③は式(2.14)の条件(a)~(d)に共通に成立し、マトリックス形で次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 \Delta P_{anj} + \Delta P_{bnj} &= 0 \\
 \text{ただし} \\
 \Delta P_{anj}^t &= \{ \Delta P_{anj} \quad \Delta Q_{anj} \quad \Delta R_{anj} \}, \dots,
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここに  $\Delta P_{anj}$  等は式(2.14)中  $\Delta P_a$  等に相当する。式(2.20)を式(2.18)に導入するためには次の行列

$$\mathbb{M}e_{j1} = \left[ \begin{array}{c|c} \hline & \\ \hline \text{---} \mathbb{I} \text{---} & \hline \\ \hline & \\ \hline \text{---} \mathbb{I} \text{---} & \text{---} \mathbb{I} \text{---} \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right] \quad (2.21)$$

ただし  $\mathbb{I}$  ; 節点の自由度元の単位行列

を同式の左から乗ずればよい。このとき、式(2.18)の右辺第2項は次のようになる。

$$\|Mej\| \cdot \Delta Pnj = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \Delta Panj \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

すなわち、式(2.20)の導入によつてj節点に関する未知節点力の半分は消去できた。

他の条件⑦⑧⑨および⑩は条件(a)~(c)によつて適用の仕方が異なるが、いま式(2.14)(b)の場合を例として取上げれば⑦式が成り立ち、これらはマトリックス形で次のように書ける。

$$\| \mu \| Panj = - \| \mu \| Panjo \quad (2.23)$$

ここに  $\| \mu \|$  および  $Panjo$  はそれぞれ

$$\| \mu \| = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \bar{\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.23')$$

および

$$Panjo^t = \{ Panjo \quad Qanjo \quad Ranjo \}$$

であつて  $Panjo$  等は式(2.14)中の  $Pao$  等に相当し、接触圧等価節点力の初期値である。

式(2.23)を式(2.18)に導入するためには、次の行列



$$M_{ej2} = \left[ \begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & \nu \end{array} \right] \quad (2.24)$$

を同式の左から乗ずればよい。

このとき、式(2.22)は

$$M_{ej2} \cdot M_{ej1} \cdot \Delta P_{nj} = \left[ \begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & \nu \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} P_{anjo} \\ \hline \mathbb{O} \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

$$\equiv -M_{pj} \quad P_{oj}$$

となつて、式(2.18)の右辺第2項はすべて既知量によつて表示し得たことになる。他の条件式(2.14)の(a)および(c)に対しても、上式中の行列  $\mu$  をその性質に応じて表2.1に与えられる値を用いることによつて、式(2.25)と同じ形に書ける。ただし、表2.1中  $\mathbb{O}$  は零行列、 $P_{nkl}$  は  $(n, n)$  の行列で、その  $(k, l)$  成分が1、他がすべて0の行列単位である。

したがつて、 $M_{ej}$  を

$$M_{ej} = M_{ej2} \cdot M_{ej1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline \nu & \nu \end{array} \right] \quad (2.26)$$

とし、これを式 (2.18) に乗じたのち式 (2.25) を用いれば、次式が得られる。

$$M_{ej} \cdot l_{ej} \cdot K \cdot \Delta \bar{U} = M_{ej} \cdot l_{ej} \cdot \Delta R - M_{pj} \cdot P_{oj} \quad (2.27)$$

次に、幾何学的連続条件、式 (2.14) 中の④、⑤、⑥は、仮想仕事の原理、式 (2.1) を求める際の仮定から、拘束条件として取扱うことができ、たとえば式 (2.23)' の第1行のような力の平衡条件を取扱っていないブランク行を使つてこれを導入すればよい。すなわち

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \lambda & -\lambda \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} l_{ej} \begin{Bmatrix} \Delta U_{aj} \\ \Delta U_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_j \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$M_{uj} \cdot l_{ej} \cdot \Delta U = M_{\delta j} \cdot \delta_{oj} \quad (2.28)$$

ただし

$$\bar{\delta}_j^t = \{ \bar{\delta}_{pj} \quad 0 \quad 0 \}$$

なお、上式中  $\bar{\delta}_{pj}$  は式 (2.15) で与えられる増分解析時の初期不整量であり、また  $\lambda$  は接触面の条件(a)~(c)に応じて表 2.2 中の各値をとるものとする。

式 (2.27) と式 (2.28) を重ね合わせれば、節点  $ja$  と  $jb$  に対する求めるべき剛性方程式が得られる。すなわち

$$\begin{aligned}
& (IMej \cdot lLej \cdot K + IMuj \cdot lLej) \cdot \Delta U \\
& = IMej \cdot lLej \cdot \Delta R - IMpj \cdot lPo_j + IM\delta_j \cdot \delta_{oj} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

上式は特定の節点  $ja$  と  $jb$  に対するものであるが、このような関係を対象構造系の全接触点に集めたものの行列表示を、それぞれ

$$\left. \begin{aligned}
lLe^* &= \sum lLej, & IMe^* &= \sum IMej, & IMp &= \sum IMpj, \\
lPo &= \sum lPo_j, & \delta_o &= \sum \delta_{oj}, & IMu &= \sum IMuj, \\
IM\delta &= \sum IM\delta_j
\end{aligned} \right\} (2.30)$$

とし、さらに行列  $lLe$  および  $IMe$  を

$$lLe = lLe^* + I^*, \quad IMe = IMe^* + II^* \quad (2.31)$$

とする。ここに  $II^*$  は接触点以外の成分が節点あたりの自由度元の単位行列で、接触点に関する成分が 0 の全節点に対する対角行列である。

式 (2.30), 式 (2.31) を用いれば、式 (2.29) のような関係を全接触点について集めたものは次のように書ける。

$$\begin{aligned}
& (IMe \cdot lLe \cdot K + IMu \cdot lLe^*) \Delta U \\
& = IMe \cdot lLe \cdot \Delta R - IMp \cdot lPo + IM\delta \cdot \delta_o \quad (2.32)
\end{aligned}$$

上式が求める剛性方程式であり、これを用いて解析を進めることができる。すなわち、まず各接触点の連続条件を式 (2.14) のいずれかに仮定すれば、 $\mu$  および  $\lambda$  が表 2.1, 表 2.2 より決定できる。このとき、式 (2.32) の各行列  $IMp$ ,  $IMe$ ,  $IMu$  および  $IM\delta$  は式 (2.25), 式 (2.26) および式 (2.28) からそれぞれ求められるから、式 (2.32) が解ける。この解を次式に用いれば、各接触力が定まる。

$$\Delta P_n = lLe^* \Delta P = lLe^* K \cdot \Delta U - lLe^* \Delta R \quad (2.33)$$

このようにして得られた接触力を式 (2.14) に用いて、新たに各接触点の連続条件を定め

解析に先立つて仮定した接触面の仮想連続条件の適否を判定する。両者が各接触点で一致しなければ新しい接触面条件を用いて計算を繰り返し、一致すれば、正解とみなして次の増分解析に進めばよい。

## 2.6 プログラム

以上の考え方に基づいて平面応力および軸対称問題が取扱えるパイロットプログラムを作った。

式(2.14)中の接触面判定条件を直接プログラムに適用すると、 $p_a^\circ$  や  $|q_a^\circ| - \mu |p_a^\circ|$  などの値が零に近いところで、解の大勢に影響を与えない微視的な影響によつて、不等式の符号がしばしば変わり、収束が悪くなる可能性がある。そこで本解析では厳密な零判定の代りに許容誤差による緩衝帯を設け、また絶対量による比較の代りに相対量を用いた比較を行なった。たとえば式(2.14)で

$$p_{a0} + \Delta p_a^\circ \begin{cases} \leq 0 & \text{の代りに} \\ > 0 \end{cases}$$

$$\frac{p_a^\circ + \Delta p_a^\circ}{p_{\max}} \begin{cases} \leq -\varepsilon_p \\ > \varepsilon_p \end{cases} \quad (2.34)$$

を、また

$$|q_{a0} + \Delta q_a^\circ| - \mu |p_{a0} + \Delta p_a^\circ| \begin{cases} \leq 0 & \text{の代りに} \\ > 0 \end{cases}$$

$$\frac{|q_{a0} + \Delta q_a^\circ| - \mu |p_{a0} + \Delta p_a^\circ|}{\mu |p_{a0} + \Delta p_a^\circ|} \begin{cases} \leq -\varepsilon_f \\ > \varepsilon_f \end{cases} \quad (2.35)$$

をそれぞれ用い、式(2.34)の左辺の値が $-\varepsilon_p$ と $\varepsilon_p$ の間ときには自由境界条件(c)を、また、式(2.35)の左辺が $\varepsilon_f$ と $-\varepsilon_f$ の間ときにはすべり条件(b)として取扱

うようにした。そして  $\epsilon_p$  および  $\epsilon_f$  に適当な許容量を与えた。これによつて、通常数回の繰返しによつて増分解が定められるようになった。

## 2.7 計算例による解析法の妥当性の検討

本解法の妥当性を検討するため、解の明らかないくつかの例題を解いた。

### (1) 長方形平面ブロックの圧縮

まず、図 2.3 (a) に示す二つの長方形弾性ブロックの接触問題を解析した。摩擦係数  $\mu$  は零とし、ヤング率およびポアソン比をそれぞれ  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$  とした。

図 2.3 (b) は接触境界に沿つた接触圧力の分布を大久保の解析解<sup>(2.11)</sup> および大手の有限要素法による解<sup>(2.8)</sup> と比較したものである。図 2.3 (c) は接触境界に沿つての下側ブロックの垂直変位の分布を、接触領域の中央点 ( $x/B = 0$ ) での最大変位からの差として表わしたものである。

両結果とも本解法による解はこれら両著者による解とよく一致していることがわかる。

### (2) ディスクの長方形ブロックへの押し込み (Hertz の問題)

初期不整と、未知接触境界をもつ例題として、ディスクの長方形平面ブロックへの押し込み問題を解いて Hertz の解<sup>(2.12)</sup> と比較した。(図 2.4 (a)) 図中に示すように、要素分割は接触点近傍で密に取つた。ディスクと長方形ブロックの間のギャップは初期不整量として取扱い、計算に先立つては図中の節点 1 ~ 10 の間を仮の接触範囲と定めた。

図 2.4 (b) は、繰返し計算の各過程で得られる接触圧力の分布を Hertz の解と比較したものであり、図 2.4 (c) は両接触表面の変位分布の収束状況である。

計算のスタートでは、節点 1 と 2 に対し、連続体型連続条件(a)を、残りの節点 3 ~ 10 に対しては自由境界(d)を仮定した。この第 1 回の試解析で得られる接触圧力および変位の分布を図 2.4 (b)(i) および (c)(i) にそれぞれ示す。

第 1 回計算の解では、接触圧力の分布は Hertz の解と著しく食い違い、またディスクの変位  $U_D$  は、節点 1, 2, 10 を除いて、長方形ブロックの変位と初期ギャップの和  $U_p + \delta$

よりも大きい。すなわち節点3~9の間ではディスクが長方形ブロックの上に重ね合わさることになる。そのような節点では、連続体型(a)の条件を次の繰返し計算で採用していくことになる。第3回および第5回の繰返し計算で得られる接触圧力と変位の分布をそれぞれ図2.4(b)および(c)の(ii)および(iii)にそれぞれ示す。収束状態(第5回目の結果)での接触圧力の分布は Hertz の解とよく一致する。

### (3) ねじの接触問題

傾いた接触面をもつ問題の一例として、ボルトナットにおけるねじの接触問題を解いた。用いたモデルは図2.5(a)に示すような呼び径24mmのISOメートル並目ねじである。

計算結果のうち、各ねじ山の分担する荷重の割合を従来よく用いられる久保の式による結果(2.13)と比較したのが図2.5(b)である。両結果は被締付体のばか穴の影響をうける第1山の分担力を除いて、いずれもよく一致している。このときの各ねじ山ごとの接触面内の接触圧力の分布を図2.5(c)に示す。これより、接触圧力は一般にねじ山の根元と先端で高く、中央部で一様な分布を示すことがわかる。図2.6(a)はねじ山の変形状態を示す。各ねじ山の対応面の相対すべりの大きさは荷重点に近いねじ山ほど大きくなっている。ボルトねじ山の根元付近の表面に沿う経線方向応力の分布を、西田による光弾性実験の結果(2.14)および、ねじ形状の近似に写像関数を用いた大滝の解析解(2.15)と比較した。両結果はほぼ一致するが、最大値、分布とも少しずつ異なるのは、両者の解が図2.5(c)のような正しい接触圧力の分布を与えていないことによると思われる。

### (4) 負荷履歴をうける長方形ブロック

非可逆過程を含む例題として2.1節で述べた問題を図2.7(a)に示す模型によつて計算した。荷重 $P$ のみの状態、 $P$ に $Q$ が重畳した状態、およびこれより $Q$ を取除いた状態、の三つの負荷過程に分けて増分解析を行なつた。この結果を添字i, ii, iiiをつけて図2.7(b)および(c)に示す。同じ荷重条件にもかかわらず、接線方向の接触圧力 $q_{ij}$ および軸方向応力 $\sigma_{ij}$ は $q_i$ および $\sigma_i$ とかなり異なることがわかる。

以上の諸解析の結果、本解法による解の有用性が明らかとなつた。

## 第 2 編 参 考 文 献

- (2.1) Parson, B. and Wilson, E.A., "A Method for Determining the Surface Contact Stresses Resulting from Interference Fits", Trans. Amer. Soc. Mech. Engng, J. Engng Ind., Vol. 92, No.1, 1970, P. 209
- (2.2) White, D. J. and Humpherson, J., "Finite-Element Analysis of Stresses in Shafts due to Interference-Fit Hubs", J. Strain Analysis, Vol. 4, No.2, 1969, P.105
- (2.3) Yamada, Y., "Recent Developments in Matrix Displacement Method for Elastic-Plastic Problems in Japan", Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, 1971
- (2.4) 長松, 室田, 神馬, "平面ひずみ圧縮を受けるブロックの摩擦による不均一変形について(第4報, 一般の場合の有限要素法による解析)", 日本機械学会論文集, 36巻, 288号, 1971, P1264
- (2.5) Lynch, F.L., "A Finite Element Method of Viscoelastic Stress Analysis with Application to Rolling Contact Problems", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 1, 1969, P.379
- (2.6) Conry, T. F. and Seireg, A., "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", Trans. Amer. Soc. Mech. Engng, J. Appl. Mech., Vol. 38 No.2, 1971, P.387
- (2.7) Wilson, E.A. and Parson, B., "Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems Using Differential Displacements", Int. J. Num.

Meth. Engng, Vol. 2, 1970, P.387

- (2.8) 大手, "有限要素法による弾性接触応力の解析", 日本機械学会論文集, 38巻, 313号, 1972, P.2210
- (2.9) 鷺津, "弾性学の変分原理概論", 培風館, 1972, P.131
- (2.10) Wilson, E.L., "Structural Analysis of Axisymmetric solids", J. Amer. Inst. Aeron. and Astron., Vol. 3, No.12, 1965, P.2269
- (2.11) 大久保, "弾性平面にて圧縮された半無限体の二次元問題について", 日本機械学会論文集, 18巻, 65号, 1952, P.58
- (2.12) Roark, R. J., "Formulas for Stress and Strain", McGraw-Hill, 1954, P.288
- (2.13) 山本, "ねじ随説, 一ねじの応力(1)", 機械の研究, 18巻, 9号, 1968, P.1270
- (2.14) 西田, "応力集中", 森北出版, 1967, P.668
- (2.15) 大滝, "ボルト・ナット結合体のボルト谷底における応力分布(第1報, ボルト谷底に生じる最大応力について)", 日本機械学会論文集, 37巻, 303号, 1971, P.2197
- (2.16) 蔦, 山地, "接触問題の有限要素解析法に関する研究", 日本機械学会誌(技術論文), 76巻, 651号, 1973, P.348
- (2.17) Tsuda, T. and Yamaji, S., "Finite Element Analysis of Contact Problem", Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Method, Univ. Tokyo Press, 1973, P.177



第 3 編

リブなしピストンの強度問題

## 第 1 章 緒 言

ピストンの応力解析法に関する研究は、古く1923年Eicherberg (3.1) (3.2) によつて始められた。彼はピストンのクラウン部を円板、スカート部を薄肉円筒とみなし、薄肉回転殻の軸対称応力解析法を工夫して解析を行なつた。Eicherbergの理論を使つて Fitzge orge と Pope (3.3) はクラウン全体が一様な軸方向温度勾配をうける場合の、クラウンの中心、およびクラウンとスカートの交差する隅角部でのモーメントと応力の計算式を与えた。Whitehouse (3.4) はこれに続いて温度勾配がスカート部で軸方向にもある場合を解析した。宇野、川崎 (3.5) は球殻型のクラウンをもつ、リブなしピストンが、ガス圧または熱負荷をうける場合を薄肉殻理論によつて解析する方法を示した。Dennis と Radford (3.6) は Whitehouse らと同様の熱応力解析を行なつて実機計測から得られる計測値と比較した。Enderbey と White (3.7) はこの両部ともに半径方向と軸方向温度勾配をもつ場合を同様の方法によつて解析した。これらの諸研究では、ピストンの構造を単純な円板あるいは球殻と、円筒殻の組合せとし、解析法の基礎を薄肉軸対称殻理論においたが、実際のピストンは厚肉構造であり、薄肉殻理論によつて得られた解がどの程度実際のピストンの挙動を表わしうるかは明らかでない。

ピストンの厚肉回転殻としての解析的研究に関しては、Ibrahim と McCallin (3.8) が三次元弾性基礎式を差分化してガス圧応力および熱応力を解析した例があるが、本格的に取扱われたのは1967年頃に、有限要素法が活用されだしてからである。ノルウェー工科大学の Fiskaa ら (3.9) は一定歪軸対称体要素を用いて実用ピストンを事例的に解析し、この種の手法がピストンの応力解析に有力であることを初めて示した。日本造船研究協会第100部会 (3.10) は B & W K 84 E F 型機関を同様の手法によつて解析したが、このような一定歪要素による解析はその後も報告された。たとえば Izumi ら (3.11) はクラウンが球殻型のリブなしピストンのガス圧応力と熱応力を有限要素法によつて解析し、それぞれの実機実験の結果と比較している。これらに見られる取扱い手法は離散化手続きの膨大な一定

歪要素を用いた単純有限要素法によるものであつたため、一つの計算に多大な労力を要し、したがつて事例的な計算の域を出ていない。

以上のようにピストンの強度に関するこれまでの研究は薄肉殻理論による解析と有限要素法による事例的な解析が主であつた。しかしながら、建造船舶の巨大化による機関の大型化や、過酷な使用条件下で跡をたたない損傷事故などに起因して、ピストン自身の大型化や、新機種の開発改良研究は日常化してきているため、これら事例的なものは、実際のピストンの新構造開発時にはあまり役に立たず、開発時にはスタートから面倒な有限要素法による解析を繰返しているのが現状である。したがつてこれらの現状を改善するためには、構造の変更や使用条件の変更時にも、ピストンの挙動を容易に推定できるような、より組織的な研究が必要となつてくる。

そこで本編では、まずリップなしピストンの場合をとりあげ、熱負荷により生じる温度分布や、構造様式と挙動の関連に関する一連の解析を行なつて、この種のピストンの基礎的挙動特性を明らかにしていくことにする。

ピストンに作用する外力には、燃焼ガスの作用によるガス圧力と熱負荷のほか、クランク軸からピンを介して作用する反力や組立時の拘束力など各種の作用力があるが、設計上最も重要なのは前二者である。燃焼ガスからピストン触火面に作用する熱負荷の大きさに関する研究は、古く1923年頃からNusselt (3.12), Hicherberg (3.13), Pflaum (3.14)らによつて行なわれたが、大型二サイクルディーゼル機関の数多くの実験から求めたHicherbergの実験式が実機の状態をよく表わすものとして、必要に応じて多少の修正を加えて用いられており、また最近では作動ガスの状態解析に基づく性能シミュレーションから、シリンダ内のガス温度、圧力、熱伝達率などのサイクル変動に基づく各成分が求められるようになってきている。(3.15)(3.16)

そこで本研究では、これらのガス圧荷重や熱負荷条件は与えられるものとし、まず第2章では、種々の熱負荷条件下で構造系内に生じる温度分布の発生状況を解析する。すなわち、まず、常用出力運転時の1サイクル(クランク軸1回転)の間にピストン壁面内の温度がど

のように変化するかを解析し、サイクル平均温度分布およびサイクル中の触火面付近の温度変動状態と熱負荷条件の関係を求める。次に、起動時、停止時、および外負荷変動時などの各種の運転条件の下で、ピストンクラウン部に生じる過渡温度変動の状態を解析し、負荷変動の条件と温度分布の変化の関係、および定常温度分布との差異などとの関係を明らかにする。また、定常状態で隅角部に生じる局部昇温や燃焼ガス噴射方向の局部昇温の状態も解析する。

第3章では実用構造を代表する3種のリップなしピストンの構造様式を取出し、これらが種々の形状寸法をとる場合の挙動特性を第1編の手法を用いて解析する。(3.18) まずガス圧荷重をうける場合を解析し、構造様式および形状と構造各部の発生応力の関係を組織的に調べるとともに、薄肉殻理論に基づく解析解と比較する。そして両者の間はかなり大きい差異の原因に対して、厚肉化による隅角部固着効果の観点から検討を加える。また、リップなしピストンの構造形状を表わす4種の形状パラメータと構造主要断面の内力や隅角部固着度との関係を広範囲に求めて図表化する。

次に同章の後半では、熱負荷をうける場合の構造形状と発生応力の関係を解析する。取扱いを一般化するため、熱負荷による温度分布はこれを肉厚平均の熱伸び成分、表裏符号逆の温度勾配成分および隅角部局部昇温成分の3種にわけて取扱い、各場合の発生応力の特徴とそれらの構造形状との関連を明らかにする。隅角部局部昇温については代表例について解析を行ない、局部昇温が全体挙動におよぼす影響や局部的な発生応力の特徴を調べる。また隅角部内面に生じる応力集中の状態を、隅角部丸み半径、ピストン径、負荷様式を変えて解析し、これらの関係を明らかにする。

第4章では520 mm 径の代表的な大型実用ピストンを用いて、油圧負荷実験、バーナを用いた熱応力実験、および実際の機関に組込んだ運転状態での実機計測実験を行ない、実用ピストンに発生する応力の実態を把握するとともに、解析結果と比較してその妥当性を検討する。

以下に本編で用いる主要記号を列記する。

- $a$  ; クラウンの円板部の巾  
 $a_n$  ; フーリエ係数  
 $b$  ; ピストンの半径  
 $B_g, B_w$  ; クラウンのガス側および冷却側ビオ数  
 $c, \bar{\rho}$  ; 比熱, 密度  
 $e$  ; クラウンの円環殻部の巾  
 $E, \nu$  ; ヤング率, ポアソン比  
 $h_c, h_s, H$  ; クラウンの肉厚, スカートの肉厚, クラウンのくぼみ  
 $H^*$  ; 触火面側の熱境界層厚さ  
 $k$  ; 熱伝導率  
 $M, N, Q, V$  ; モーメント, 軸力, 剪断力, 剪断力  
 $M_p^*$  ; 式(3.3.5) で与えられるクラウンの固定端モーメント  
 $n$  ; フーリエ級数の次数  
 $p$  ; ガス圧  
 $Q_m$  ; 触火面のサイクル平均入熱量  
 $r_0$  ; 球殻型クラウンの曲率半径  
 $S$  ; 経線座標  
 $\bar{t}, t_0, \theta$  ; 時間, クランクのサイクル時間, クランク角  
 $T(z, t)$  ; クラウンの温度  
 $T_{cn}, T_{sn}$  ; クラウン温度のフーリエ成分  
 $T_{st}$  ; 定常解  
 $T_g, T_{gm}, T_w$  ; 燃焼ガスの温度とそのサイクル平均値, 冷却媒体の温度  
 $T_0, \tau$  ; クラウンの平均温度と温度勾配  
 $T_{os}, \Delta T_0$  ; 表面温度, 触火面と冷却面の温度差  
 $u, \vartheta$  ; 半径変位, 傾き角

$\bar{y}, \varphi$  ; クラウンの経線に沿う座標

$z$  ; クラウンの肉厚方向座標

$\alpha$  ; 線膨張係数

$\alpha_g, \alpha_m, \alpha_w$  ; ガス側表面熱伝達係数とそのサイクル平均値, 冷却面側表面熱伝達係数

$\beta$  ; 隅角内面の応力集中率

$\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\xi}, \bar{\omega}$  ; 式 (3.3.1) で与えられる形状パラメータ

$\lambda_p, \lambda_\tau, \lambda_{T_0}$  ;  $p, \tau, T_0$  をうけるクラウンの固定解に対する実際のモーメントの比

$\hat{\lambda}_p, \hat{\lambda}_\tau, \hat{\lambda}_{T_0}$  ;  $p, \tau, T_0$  をうけるクラウンの固定解に対する実際の膜張力の比

$\sigma_{T_0}^*, M_{T_0}^*$  ;  $T_0$  によるクラウンの固定解の固定端応力およびモーメント

$\sigma_s$  ; クラウンの経線応力

$\sigma_\tau^*, M_\tau^*$  ;  $\tau$  によるクラウンの固定解の固定端応力およびモーメント

## 第 2 章      ピ ス ト ン の 熱 伝 導 解 析

### 2.1      定常サイクル中の温度変動解析

機関の定常状態での1サイクル中の温度変化はクラウンの触火面のごく近傍で生じるから、その広がり方向の変化は一様と考えてよい。そこで、クラウン肉厚内のサイクル平均温度分布と触火面付近の温度変動状態を肉厚方向の一次元熱伝導問題に近似し、Fourier級数を用いて解析する。

図 3.2.1 は代表的な機関の1サイクル中のガス圧  $p$  ガス温度  $\tilde{T}_g$  および表面熱伝達係数  $\alpha_g$  の変化の例であつて、燃料噴射時に各量とも急上昇し、吸排気につれて急降下するような分布性状を示す。以下では、これに基づく壁面内の温度変化の状態を解析することにする。

まず、図 3.2.1 のガス温度  $\tilde{T}_g$  および壁内の温度分布  $T(z, \bar{t})$  ( $z$  は触火面側表面からの肉厚方向座標) を時間  $\bar{t}$  に関して Fourier 級数に展開する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}
 T_g(\theta) &= a_0/z + \sum_{n=1} a_n \cos n\theta \\
 \text{ただし} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{T}_g(\theta) \cos n\theta \cdot d\theta, \\
 \theta &= 2\pi \bar{t}/t_0 \quad (t_0 = \text{サイクル時間}) \\
 T(z, \bar{t}) &= T_{st}(z) + \sum (T_{cn}(z) \cos n\theta \\
 &\quad + T_{sn}(z) \sin n\theta)
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

このように置けば、 $T(z, \bar{t})$  を求める問題は、定常解  $T_{st}(z)$  および非定常解の振巾  $T_{cn}(z)$  および  $T_{sn}(z)$  を求める一連の常微分方程式系の解析に置き換えることができる。

サイクル中の熱収支の積分値は零で、かつサイクル時間が $\frac{1}{2}$ 秒前後と短いことから、非定常解に対する熱放出側の境界条件は熱境界層理論 (3.20) で定まる変動温度の浸透深さ  $Z=H^*$  で与えれば充分である。以下では、表面熱伝達係数が1サイクルの間の平均値を取

る場合につき、式(3.2.1)の解  $T(z, \bar{t})$  を求めることにする。式(3.2.1)の第4式および第1式を熱伝導の基礎式および触火面側の境界条件

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial \bar{t}}, \quad k \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_{gm} (T - T_g)$$

ただし

$c$  ; 比 熱

$\bar{\rho}$  ; 密 度

$k$  : 熱伝導率

$$\alpha_{gm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_g d\theta$$

(3.2.2)

に用いれば、次式が得られる。

$$c \bar{\rho} \sum 2\pi n / t_0 (-T_{cn} \sin n\theta + T_{sn} \cos n\theta)$$

$$= k \frac{d^2 T_{st}}{dz^2} + \sum_{n=1} k \left( \frac{d^2 T_{cn}}{dz^2} \cos n\theta + \frac{d^2 T_{sn}}{dz^2} \sin n\theta \right)$$

$$k \frac{dT_{st}}{dz} + \sum_{n=1} k \left( \frac{dT_{cn}}{dz} \cos n\theta + \frac{dT_{sn}}{dz} \sin n\theta \right)$$

$$= \alpha_{gm} \left\{ T_{st} + \sum_{n=1} (T_{cn} \cos n\theta + T_{sn} \sin n\theta) \right.$$

$$\left. - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1} a_n \cos n\theta \right\}$$

(3.2.3)

これより各次数  $n$  ごとに基礎方程式と境界条件を求めれば、非定常成分 ( $n \geq 1$ ) に  
対して



$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2 T_{cn}}{dz^2} - \frac{\bar{n}}{\omega} T_{sn} &= 0 \\
 \frac{d^2 T_{sn}}{dz^2} + \frac{\bar{n}}{\omega} T_{cn} &= 0
 \end{aligned} \right\} (3.2.4)$$

および

$$\begin{aligned}
 z=0 \text{ で } \frac{dT_{cn}}{dz} &= \bar{\alpha}_g (T_{cn} - a_n) \\
 z=0 \text{ で } \frac{dT_{sn}}{dz} &= \bar{\alpha}_g T_{sn} \quad (n=1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $\bar{n}$ ,  $\omega$  および  $\bar{\alpha}_g$  はそれぞれ

$$\bar{n} = \frac{2\pi n}{t_0}, \quad \omega = \frac{k}{c\bar{p}}, \quad \bar{\alpha}_g = \frac{\alpha_{gm}}{k} \quad (3.2.5)$$

で与えられる。

次に熱放出側の境界条件は熱境界層端で与えるから

$$z = H^* \text{ で } \frac{dT_{cn}}{dz} = \frac{dT_{sn}}{dz} = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.2.6)$$

と書ける。したがって、非定常問題の基礎式(3.2.4)の第1式, 第2式を同式の第3式, 第4式および式(3.2.6)の境界条件のもとで解けば, 非定常成分に対する解が定まる。まず

$$\frac{\bar{n}}{\omega} \equiv \gamma_n^2$$

と置き、式(3.2.4)の始めの二つの式から  $T_{sn}$  を消去すれば  $T_{cn}$  に関する次の4階の線形微分方程式が得られる。

$$\frac{d^4 T_{cn}}{d\bar{z}^4} + \gamma_n^4 T_{cn} = 0 \quad (3.2.7)$$

上式の解は  $C_{in}$  を積分定数として

$$T_{cn} = \cos h \bar{z} \left\{ \begin{array}{l} C_{1n} \cos \bar{z} \\ C_{2n} \sin \bar{z} \end{array} \right\} + \sin h \bar{z} \left\{ \begin{array}{l} C_{3n} \cos \bar{z} \\ C_{4n} \sin \bar{z} \end{array} \right\} \quad (3.2.8)$$

ただし

$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_n z$$

となる。これを式(3.2.4)の第1式に用いれば

$$T_{sn} = \cos h \bar{z} \left\{ \begin{array}{l} C_{4n} \cos \bar{z} \\ -C_{3n} \sin \bar{z} \end{array} \right\} + \sin h \bar{z} \left\{ \begin{array}{l} C_{2n} \cos \bar{z} \\ -C_{1n} \sin \bar{z} \end{array} \right\} \quad (3.2.9)$$

が得られる。上式中の積分定数  $C_{ij}$  は、この両式を式(3.2.4)の第3式、第4式および式(3.2.6)に用いることによつて定めることができ、それぞれ次のようになる。

$$C_{1n} = \frac{a_n}{\text{Det}n} \left\{ \cos h z^* \sin h z^* - \sin z^* \cos z^* \right. \\ \left. + \alpha_n (\cos^2 z^* + \sin h^2 z^*) \right\}$$

$$C_{2n} = \frac{-a_n}{\text{Det}n} (\sin h^2 z^* + \sin^2 z^* - \alpha_n \sin z^* \cos z^*)$$

$$C_{3n} = \frac{-a_n}{\text{Det}n} (\cos h^2 z^* - \cos^2 z^* + \alpha_n \cos h z^* \sin h z^*)$$

$$C_{4n} = \frac{a_n}{\text{Det}n} (\cosh z^* \sinh z^* + \sin z^* \cos z^*)$$

ただし

$$\begin{aligned} \text{Det}n &= \frac{2}{\alpha_n} (\sinh^2 z^* + \sin^2 z^*) + \alpha_n (\cosh z^* \cdot \\ &\quad \cos z^* - \sinh z^* \sin z^*)^2 + 4 \cosh z^* \sinh z^* \cdot \\ &\quad (1 + \sin^2 z^*) - 2 \sin z^* \cos z^* (2 \cosh^2 z^* \\ &\quad + \sinh^2 z^*) + 2 \cosh^2 z^* \cos^2 z^* \end{aligned}$$

$$z^* = \gamma_n H^* / \sqrt{2}$$

$$\alpha_n = \sqrt{2} \bar{\alpha} g / \gamma_n$$

(3.2.10)

以上で非定常解が定まった。

次にサイクル平均の定常解は式(3.2.3)および冷却面境界条件

$$z = h_c \quad \text{で} \quad k \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_w (T - T_w) = 0$$

ただし

$\alpha_w$  ; 冷却側表面熱伝達係数

$T_w$  ; 冷却側媒体温度

$h_c$  ; クラウンの肉厚

(3.2.11)

より得られ

$$T_{st}/T_{gm}' = \frac{1 + B_w - \frac{z}{hc}}{1 + B_w + B_g}$$

ただし

$$T_{gm}' = T_{gm} - T_w, \quad T_{gm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{T}_g d\theta$$

$$B_g = \frac{k}{hc \cdot \alpha_{gm}}, \quad B_w = \frac{k}{hc \cdot \alpha_w}$$
(3.2.12)

となる。式(3.2.8)、式(3.2.9)、式(3.2.10)および式(3.2.12)を式(3.2.1)の第2式に用いればすべての解が定まる。

次にこれらの解析解を用いて数値計算を行なう。まず式(3.2.12)から、触火面側の表面温度  $T_{os}$  およびこの表面温度と冷却面側の表面温度との差  $\Delta T_o$  が熱負荷条件によつてどのように変化するかを図3.2.2に示す。これより両表面の温度差は冷却側の熱伝達量およびガス側の熱伝達量の増加とともに、また触火面温度はガス側熱伝達量の増加とともに増大し、冷却側熱伝達量の増加とともに減少することがわかる。

次にサイクル中の温度変動の様相を調べるため、一例として、 $T_{gmax} = 2000^\circ\text{C}$ 、 $B_g = 1.3.3$ 、 $H^* = 9\text{mm}$ 、 $t_o = 0.5$ 秒、 $C = 0.12\text{kcal/kg}^\circ\text{C}$ 、 $\bar{p} = 7.85 \times 10^3\text{kg/m}^2$ 、 $R = 45\text{kcal/mh}^\circ\text{C}$  の条件を式(3.2.8)、式(3.2.9)に与えて解析した。この結果を図3.2.3に示す。解析では図3.2.1に示すような作用熱負荷の時間的变化を、図3.2.3の挿入図に示すような様式にモデル化した。これより触火面側の表面温度は上死点( $\theta = 0^\circ$ )付近で最大値を、下死点付近で最小値を示し、表面の温度変動巾が最も大きい。また温度変動の表面からの浸透深さは  $H^*$  より小さく5~6mmの範囲となる。

そこで次に、この触火面側の表面温度の1サイクルの変動巾が熱負荷条件によつてどのように変化するかを、図3.2.4(a)に示すような熱負荷の作用様式を与え、平均入熱量  $Q_m = \alpha_{gm} \cdot T_{gm}$  を種々に変えて解析した。その結果得られる  $Q_m$  と表面の温度変動巾  $\Delta T$  の関係を同図(b)に示す。これより実用ピストンの代表的な入熱量として、たとえば  $Q_m = 0.5 \times 10^6\text{kcal/m}^2\text{hr}$  の場合をとれば、 $\Delta T = 20^\circ\text{C}$  となり、変動巾はあまり大きくないことがわかる。

以上では、クラウン部の温度を肉厚方向の一次元熱伝導問題として取扱った。次に定常運転状態で実用ピストンに生じる温度分布がこのような一次元解によつてどの程度表わしうるかを調べることにする。図 3.2.5 に示す外径 520 mm, クラウンの肉厚 42 mm の実用リブなしピストンが各表面で図中のテーブルに示すような経験的に把握されている実動熱負荷条件をうける場合の温度分布を、前に筆者が考察した一定歪四辺形リング要素による方法 (3.22) によつて解析した。その結果得られる各部の温度を図中に数字で、また両表面に沿う分布および各断面の分布を破線で示す。図より明らかなごとく、クラウン各部の温度は肉厚方向一次元定常解 (図中一点鎖線) にほぼ近く、隅角部でやゝ上昇したのち、スカート下縁にかけて冷却面側媒体のもつ温度に漸減する分布を示すことがわかる。

## 2.2 過渡状態での温度変動の解析

次に起動、停止、運転条件の変化など、外負荷変動時にピストンクラウン内に生じる温度変動の状態を前節の有限要素法に基づく方法と (3.22) Duhamel の定理を用いて解析し、その特徴およびサイクル平均の定常温度分布との差異などを明らかにする。

実際の機関は、起動時の約 30 分程度の間、全負荷の  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ , 85%,  $\frac{4}{4}$  の順にステップ状に負荷を増し、また停止時には、一般に約 10 分程度の間、負荷時とほぼ逆の条件で無負荷状態に至るような条件で運転されている。航海中の運転条件は船の遭遇する状態によつて種々であるが、暴風や衝突回避など、緊急の場合には、急激な負荷変化を強要される場合も生じる。たとえば文献 (3.23) に示されている運航記録には、 $\frac{4}{4} \rightarrow \frac{1}{4}$  の急激な負荷変動が記録されている。

そこで、ここでは負荷変動時にピストンクラウン部に生じる温度変動を図 3.2.6 (a)(b) に示す四つの代表的な場合について解析を行なうことにする。過渡運転中の熱負荷条件は、定格出力の  $\frac{1}{2} \sim \frac{4}{4}$  の間の変動巾は比較的ゆるやかで、 $0 \sim \frac{1}{3}$  負荷の間で上昇巾が大きいことが知られているので、ここでは熱負荷条件が実際に近い、 $0 \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{4}$  の 2 段階ステップ起動および最も極端な  $0 \rightarrow \frac{4}{4}$  のステップ起動の 2 種の起動条件、およびこの逆の 2 種の停止

条件の場合を解析する。

この熱負荷条件と解析対象構造を図 3.2.6(c) に示す。 $\frac{4}{4}$  負荷は図中 (○) に示す熱負荷条件を与え、また  $\frac{1}{3}$  負荷は同図のガス側条件の 70% が作用するものとし、他は同じとした。解析では、 $\frac{1}{3}$  負荷のステップ起動、および  $\frac{4}{4}$  負荷に対するステップ起動の二つの場合を解析し、この結果を Duhamel の定理を用いて図 3.2.6(a)(b) に示す 4 種の熱負荷条件下の挙動を求めるようにした。

解析の結果を図 3.2.7 から図 3.2.11 に示す。図 3.2.7 は、2 段起動に対する隅角断面  $B_1, B_2$  上の各点の温度の時間的変化を定常解の触火面温度  $T_{0s}$  で割って無次元化して示したものである。起動時から約 10 分後には  $\frac{1}{3}$  負荷に対するクラウン内の温度は定常に達し、2 段目の  $\frac{4}{4}$  熱負荷作用点  $\bar{t} = 13.5$  分から再び急上昇し、その 10 分後には再負荷上昇に対するクラウン内の温度はほぼ定常に達する。

次に、図 3.2.8 における実線は、この場合のクラウン一様断面部  $A_1, A_2$  および隅角部断面  $B_1, B_2$  の温度分布の時間的変化を示したものである。断面  $A_1, A_2$  の温度分布は、1 段目熱負荷に対する挙動が定常に達した  $\bar{t} = 13.5$  分に一度断面内が直線温度分布となつたのち、2 段目熱負荷によつて再び触火面側付近の温度が急上昇し、定常状態では 2.1 節の式 (3.2.12) で与えられる温度分布に達する。図中の破線は、最も過酷なステップ起動に対する同様の結果である。熱負荷作用開始点付近の触火面付近の温度上昇が 2 段起動の場合よりも相当急激となる。

いま、この図から、クラウン一様断面部の、各時間での、触火面側の表面温度と冷却面側の表面温度の差  $\Delta T_t$  をとり、これと  $\frac{4}{4}$  負荷による定常状態の両表面温度差  $\Delta T_0$  との比の時間的変化を調べると図 3.2.9 のようになる。すなわち過渡中の両表面温度差は、起動条件図 3.2.6(a) または (b) のいかににかかわらず、定常時の温度差  $\Delta T_0$  より小さく、かつ過渡時の始めから  $\Delta T_0$  に漸増するような分布傾向を示すことがわかる。

次に同様にして、全負荷  $\frac{4}{4}$  から  $\frac{1}{3}$  負荷に落とし、13.5 分後に零負荷にする 2 段停止熱負荷条件下で、クラウン各部に生じる温度分布を解析した。この結果のうち、クラウン一様

断面部  $A_1, A_2$ , および隅角部  $B_1, B_2$  の温度分布の変化を図 3.2.10 に実線で示す。除荷開始の初期には触火面付近の温度が急速に低下し、その後、断面各部が一様に低下して、負荷  $1/3$  の場合の定常温度分布に達したのち、 $1/3$  から 0 のステップ除荷に応じて今と同じ傾向の温度低下を生じて常温に達する。同図中破線は、全負荷からのステップ除荷に対する各断面の同様の温度変化であり、ステップ除荷直後の触火面付近の温度変化が 2 段除荷の場合と比べて相当急激となる。

これより、除荷時の両表面温度差の時間的变化を、起動時の場合と同様にして求めた。そしてこの結果を、定常時の両表面温度差  $\Delta T_0$  との比として表わし、この時間的变化を示せば図 3.2.11 のようになる。これより、停止過程での両表面温度差  $\Delta T_t$  は定常時最大温度差から漸減して、起動時と丁度逆の傾向を示すことがわかる。

### 2.3 隅角部の局部昇温の解析

定常状態で隅角部に生じる局部昇温の実態を把握するため、前節と同じ手法で、図 3.2.13 挿入図に示す 2 種の隅角形状につき、肉厚および冷却条件を変えて解析を行なった。

冷却条件は水冷および油冷の 2 種とし、水冷の場合は図 3.2.6(c) に示す熱負荷条件を、また油冷の場合は同図で  $\alpha_w$  のみを  $1000 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$  に変えた。隅角形状は、その内面が直角の場合と、 $50 \text{ mm}$  の丸み半径をもつ場合の 2 種としこの両場合につき、クラウン部肉厚を  $30 \text{ mm}$ ,  $50 \text{ mm}$ , および  $70 \text{ mm}$  の 3 種に変えて解析した。またスカート部肉厚はクラウンと同一とした。

解析の結果を図 3.2.12 および図 3.2.13 に示す。図 3.2.12 は、水冷条件で  $hc = 30 \text{ mm}$  の直角型隅角形状の場合に対する解析結果である。図はクラウンおよびスカートの内外表面に沿う温度分布 ( 図中細かい破線 ), およびこれからクラウン肉厚一様部の解析解 ( 図中長い破線の分布 ) を差引いた隅角部の局部昇温の状態 ( 図中実線 ) を同時に示したものであつて、隅角断面  $BD$  から下のスカート部は、 $BD$  断面での解析解 ( 長い破線の分布 ) がスカート下縁にかけて直線減衰するものとして用いた。隅角部の温度は外面の隅角端  $B$  で

最も高く、クラウン両表面の温度は、この $B$ からクラウン中心部に進むにつれて、クラウン肉厚一様部の解析解に漸近する。一方スカート両表面の温度は隅角断面 $BD$ からスカート下縁にかけて直線的に減衰し、冷却媒体のもつ一様温度に漸減する分布傾向を示す。

次に隅角部の局部昇温は、触火面 $BA$ およびスカート外面 $BC$ に沿ってほぼ直線的に減衰する分布を示し、クラウン側では、断面 $AD$ にそつてほぼ一定値をもつ分布が、クラウン中心部に進むにつれて肉厚程度の範囲で零に減衰する分布傾向を、またスカート側では、断面 $DC$ でのヤ、外上がりの分布が、スカート下縁方向の肉厚程度の範囲で零に減衰する分布傾向をそれぞれ示すことがわかる。

そこで同様の解析を他の肉厚および冷却条件のものについても行なつて、図3.2.12の主要点 $A, B, C$ の温度が、肉厚、隅角形状および冷却条件によつてどのように変化するかを示したのが図3.2.13である。図は横軸にクラウンの肉厚をとり、縦軸に主要点 $A, B, C$ の局部昇温をそれぞれの解析解 $T_{0s}$ で割つて無次元化したものをつつて、各隅角形状、冷却条件の場合を同時に示したものである。これより $A$ 点の温度は隅角形状および冷却条件の差異にあまり影響されず、クラウン肉厚の増加につれて $T_{0s}$ の1.1倍位からゆつくり漸減する分布傾向を示す。隅角点 $B$ の温度は、クラウンの肉厚、隅角形状および冷却条件の差異に起因して $T_{0s}$ の1.3～1.5倍の範囲の値をとり、クラウンの肉厚の増加とともに漸減する分布傾向を、また $C$ 点の温度は隅角形状によつて $C$ 点の位置自身がずれることなどにより、直角型と曲角型で異なつた分布傾向を、それぞれ示すことがわかる。以上のいずれにおいても冷却条件の差異に基づく $T/T_{0s}$ の差異はほとんど見られない。

## 2.5 局部高熱負荷による昇温の解析

燃料噴射方向に直面するピストン触火面の部分は、局部的に高い熱負荷にさらされることがある。いま、この局所高熱負荷によつてクラウン内に生じる局部昇温の状態を明らかにするため、半径525mm、肉厚50mmの一様厚さのピストンが、半径方向での位置と巾、周方向での周期的な位置に関して条件が異なる種々の熱負荷条件をうける場合の温度を第1編



第4章の手法によつて解析した。

まず高熱負荷域がリング状で軸対称な場合を、図3.2.14に示す3種の条件について解析した。解析ではクラウン内外面の熱負荷条件は一定とし、その上に図中の斜線部で示すような半径位置の異なる局所高熱負荷がおのおの独立に作用する場合を取扱つた。高熱域の半径方向巾 $\Delta r^*$ は肉厚程度とし、( $\Delta r^*/h_c = 1.2$ )表面熱伝達係数は一様部の1.5倍とした。

3種の解析結果をまとめて同図中に示す。図は各場合ごとに得られる両表面の温度分布を、局所高熱負荷域がない場合の式(3.2.12)より得られる解析解、および全面局所高熱負荷条件の場合の解析解と比較して示したものである。これより、加熱巾中央の、触火面側最高温度は、局所加熱のない場合の解析解より相当高く、局部昇温の影響巾は加熱巾の2~3倍に及ぶことがわかる。冷却面側表面温度もほぼ同様の傾向を示すがその上昇巾は小さい。また3種の結果を比較して明らかなごとく、半径位置が変化しても、局所加熱域の最高温度やその影響巾はほとんど変化しないことがわかる。

次に、図3.2.15(a)に示すように、この3種の熱負荷条件が周方向に断続的に作用する場合を、他の条件はリング状負荷の場合と同じとして解析した。解析では、熱負荷条件の一対称部 $\pi/6$ の部分を取り、このうち $\pi/8$ の開き角の部分に局所加熱域があるものとした。この結果のうち、加熱半径位置 $r^*/h_c = 5.3$ の場合に対する結果を図3.2.15(b)に示す。図より加熱域の温度上昇は、流入熱負荷の絶対値が、リング状加熱の場合より減少し、かつ流入熱負荷がクラウンの広がり方向に二次元的に拡散することにより、局部昇温はリング状加熱の場合よりかなり低目となることがわかる。周方向条件が同一で、加熱半径位置の異なる他の解析結果についてもほぼ同様の結果が得られた。

そこで、これら一連の結果より、任意の半径方向巾および周方向巾(それぞれ $\Delta r^*/t$ および $b^*/t$ )の局所加熱をうける場合の触火面側の表面の最高温度が、これらの条件および局部熱負荷の大きさによつてどのように変化するかを求めると、図3.2.16のようになる。図は横軸に半径方向の加熱巾 $\Delta r^*/h_c$ を、縦軸に周方向加熱巾 $b^*/h_c$ をとつて、局部加熱なしの場合の表面温度からの上昇分、 $\Delta T_{max}$ の変化を立体的に示したものである。分母の

$\Delta T_s$  は、全域高熱負荷条件で求めた触火面温度の解析解と、局所高熱負荷域なしの場合の触火面温度の解析解の差である。これより、局所高熱負荷域の作用巾の増加と局部昇温の関係を容易に求めることができる。

### 第 3 章 リブなしピストンの応力解析

#### 3.1 構造様式と解析条件

現在実用化されている大型リブなしピストンの主要構造様式を分類すれば図 3.3.1 に示すように次の 3 種に大別できる。すなわち

- (i) クラウンが円板でスカートが円筒殻の場合 (図中(i))
- (ii) クラウンが球殻でスカートが円筒殻の場合 (図中(ii))
- (iii) クラウンが円板と円環殻の組合せでスカートが円筒殻の場合 (図中(iii))

以下ではこれらを様式(i)などのように呼ぶことにする。

上記 3 種の構造様式は次の形状パラメータの組合せによつて表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{hs}{hc} \\ \bar{\omega} &= \frac{hc}{b} \\ \bar{\delta} &= \frac{H}{b} \\ \bar{\xi} &= \frac{e}{b} \end{aligned} \right\} (3.3.1)$$

ただし

- $b$  ; スカート肉厚中心線の半径
- $H$  ; ピストン中心線上のクラウンのくぼみ量
- $e$  ; 円環殻部の巾
- $hc$  ; クラウンの肉厚
- $hs$  ; スカートの肉厚 (図 3.3.1 参照)

すなわち、様式(i)は $\bar{p}$ と $\bar{\omega}$ 、(ii)は $\bar{p}$ 、 $\bar{\omega}$  および $\bar{\delta}$ 、(iii)は $\bar{p}$ 、 $\bar{\omega}$ 、 $\bar{\delta}$  および $\bar{\xi}$ の組合わせとして各構造様式を規定することができる。

さて、ピストンに作用する外力は、燃焼ガスによるガス圧力と、ガス熱負荷—裏面冷却によつて生じる不均一温度勾配によるものが支配的である。そこで解析では、外力としてクラウン部に一様ガス圧力が作用する場合、また熱負荷として、クラウン部に表裏逆符号で大きさの等しい一様な肉厚内温度勾配が作用する場合（スカート部は軸方向に直線減衰）、クラウン部に一様な肉厚平均温度が存在する場合（スカート部直線減衰）、および隅角部局部昇温の3種の場合を考えれば、これらの組合せによつてその基礎的な挙動を規定することができる。

以下では、第1編第2章の理論を用い、表3.3.1に示す6種の構造形状の場合を選んで解析を行ない。各構造様式、形状別の挙動特性を明らかにしていくことにする。表中、模型M1は様式(i)の構造であり、M2～M4は様式(ii)で、クラウン部のくぼみ量 $\bar{\delta}$ を変えたもの、また、M5、M6は様式(iii)で $\bar{\delta}$ および円板部と円環殻部の巾の比 $\bar{\xi}$ を変化させたものである。各模型とも、隅角部内面の丸み半径はクラウン肉厚の $1/5$ とした。また、解析ではヤング率 $E = 2.1 \times 10^4 \text{ Kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ および線膨張係数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ を一定として用いるが、これらの定数は、本編の本章以外の各章および第4編においても特に断らない限りそのまま用いることにする。

## 3.2 ガス圧荷重をうける場合の解析

### 3.2.1 各部の応力分布

クラウン部外面に一様なガス圧荷重 $p$ が作用する場合の、円板型クラウンM1に対する解析結果を図3.3.2中に太実線で示す。図は横軸に経線に沿う座標 $S$ をクラウン半径 $b$ で割った無次元座標 $S/b$ を、縦軸にクラウン両表面の経線方向応力 $\sigma_s$ を $p$ で割った無次元応力 $\sigma_s/p$ をとつて表わしたものである。比較のため、図中には付録3.Aに示す薄肉殻理論

(3.24) (3.25) による解析解（以下ではこれを薄肉解と呼ぶことがある。）を一点鎖線で、また破線で薄肉回転殻の有限要素解 (3.26) (3.27) をそれぞれ示した。これより明らかごとく、薄肉殻理論による両解はほぼ一致しているが、厚肉理論による本解は中央付近でも、これら薄肉解より相当小さくなることがわかる。隅角部付近では、クラウン外面の経線方向応力は零に、また内面の応力は応力集中のために高くなり、それぞれ薄肉解と異なつた傾向を示す。これらの差異の詳細については後に検討を行なう。

球殻型クラウン  $M2 \sim M4$  に対する同様の結果を図 3.3.3 ~ 図 3.3.5 に示す。図 3.3.3 は球殻部のくぼみの浅い模型  $M2$  に対する結果であり、図 3.3.4 はくぼみが  $M2$  の 2 倍になつた  $M3$  に対する結果、また図 3.3.5 はくぼみ量がピストン半径  $b$  の半分になつた  $M4$  に対する結果である。各図とも厚肉解はいずれも中央付近で薄肉解よりも小さく、また隅角部における内面での応力集中と、外面での自由端の影響については  $M1$  の場合と同様な傾向を示す。クラウンのくぼみ  $H$  が零の模型  $M1$  から  $H$  が順次増して  $M2, M3, M4$  となるにつれてガス圧荷重は断面の膜張力でもつようになるから、断面モーメントは次第に低下し、したがつて、両表面の応力は次第に小さく、膜張力に相当する両表面の応力の平均値は次第に大きくなる傾向を示す。

図 3.3.6, 図 3.3.7 はクラウン部が円板と円環殻からなる模型  $M5, M6$  に対する同様の結果である。くぼみ  $\bar{\delta}$  の浅い模型  $M5$  は円板型  $M1$  の、またくぼみの深くなる  $M6$  は球殻型クラウン  $M3$  の挙動に近いが、円環殻部が存在するための応力分布の顕著な変化はあまり見られない。

### 3.2.2 厚肉解と薄肉解の差の原因の検討

前節の結果より、実用ピストンの挙動を表わすと思われる厚肉解が薄肉殻理論による解と相当異なることが明らかとなつた。この差異の原因は大別してクラウン部の肉厚の影響に基づくか、あるいはクラウンとスカート之交差部すなわち隅角部の固着効果に起因するかのいずれかであると考えられる。

そこでまず肉厚の影響を調べるため、直径と肉厚比の異なる周辺固定厚肉円板に等分布荷重が作用する場合を第1編の手法によつて解析し、これを Love の解 (1.4) および薄肉解と比較した。この結果を図 3.3.8 に示す。図は固定端表面の半径応力が半径/肉厚比によつてどのように変化するかを3者の解を比較して示したものである。固定端表面の半径応力に対する本解と Love の解はほぼ一致するのに対し、薄肉解は  $b/hc$  の小さいところでこれらより低いが、解析に用いた  $b/hc = 5$  程度ではその差は約 5% 程度であつて図 3.3.2 ~ 図 3.3.7 に示すような顕著な差は現われな

い。そこでこの差の原因が主として隅角部の固着効果に起因することが推定されるので、次にこれについて検討することにする。

図 3.3.9 (a) に示す隅角部  $A'B'C'D'$  のうち  $A'D'$  および  $D'C'$  で切つて、切口断面に作用する各内力を (b) 図および (c) 図のように表わすと、薄肉解析における通常

の連続条件は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{\varphi} &= M_z \\
 N_H &= Q_z \\
 \psi_R &= -\psi_z \\
 U_R &= U_z
 \end{aligned} \right\} (3.3.2)$$

ただし

$M_{\varphi}, M_z$  ;  $A'D'$  および  $D'C'$  断面のモーメント  
 $N_H, Q_z$  ; 半径方向力および剪断力  
 $\psi_R, \psi_z$  ; 傾斜  
 $U_R, U_z$  ; 半径変位

上式はクラウンとスカート

の肉厚中心線の交差部において、モーメント、半径方向力、変位および傾斜の平衡および連続条件を考えたことになつて

肉厚などにより必ずある巾をもつて支持されるから、実際の変形量は式(3.3.2)の解より小さくなるはずである。この影響はクラウンやスカート肉厚が厚くなるほど顕著となつてくる。このことは薄肉殻の場合でさえ問題となり検討が加えられている。(3.28)(3.29)

(3.30) この問題を取扱うためには、図3.3.9(b)および(c)に示す隅角部  $A'B'C'D'$  への作用力の釣合を肉厚中心線のみで行なうのではなく、肉厚を考慮した力の平衡および変形の連続性を考慮していく必要がある。

いま同図(b)に基づいて、クラウン部は、半径が  $b' = b - hs/2$  から成り、隅角部はクラウンの力をそのままスカートに伝えるだけでなく、それ自体も捩り抵抗と伸び抵抗を有するものとみなすと、式(3.3.2)に代る連続条件は、図中の各記号を用いてそれぞれ次のように書ける。(ただし  $T$  を隅角部の捩り抵抗とする。)

モーメントの釣合

$$M_{\varphi} \cdot b' - M_z b + V b' e_1 + Q_z \cdot b e_2 + T \cdot b = 0$$

半径方向力の釣合

$$N_H \cdot b' - Q_z \cdot b + N_{\theta} \cdot e_4 = 0$$

傾斜の連続

$$\vartheta_k = \varphi = -\vartheta_z$$

変位の連続

$$u_k + e_2 \varphi = u_z$$

(3.3.3)

そこで付録3.Aに示す薄肉解析において連続条件式(3.3.2)の代りに上式を用いて、以下同様の解析を行ない、これによつて、先の  $M1 \sim M6$  の各模型の場合を再計算すれば、図3.3.2~図3.3.7の各図中に示す二点鎖線のようになる。そして、これらはいずれも厚肉理論を用いた本解の場合とほぼ一致することがわかる。

したがつて実際に用いられている厚肉ピストンの挙動は厚肉理論に基づく本解法によつてよく表わされることが明らかとなるとともに、これを従来薄肉理論によつて解析する場合には式(3.3.3)のような肉厚を考慮した隅角部の連続条件を用いれば、ほぼ妥当な解が

得られることが明らかとなつた。

### 3.2.3 構造様式と隅角部固着度および主要点の内力との関係

そこで、次に3.1節で述べた3種の構造様式のピストンの主要断面すなわち図3.3.1のA, B, Dでの断面モーメント, 膜張力が形状パラメータ $\bar{r}, \bar{\omega}, \bar{\delta}$ および $\bar{r}$ によつてどのように変化するかを解析した。

図3.3.10は様式(i)および(ii)に対する結果であつて, クラウンとスカート肉厚比 $\bar{r}$ が1の場合である。図は横軸にクラウン部の深さを表わす $H/b$ を, 縦軸にクラウン中央断面(A)および隅角点(B)のモーメントおよび膜張力を無次元化したもの(それぞれ $\lambda_p$ および $\hat{\lambda}_p$ とする)をとり, クラウン部の肉厚/半径比( $hc/b$ )をパラメータとして表わしたものである。ここに $\lambda_p$ および $\hat{\lambda}_p$ は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_p &= \frac{M_i}{M_p^*} \\ \hat{\lambda}_p &= \frac{N\varphi_i \cdot hc}{6M_p^*} \quad (i = A, B, C) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.4)$$

で定義される。 $M_p^*$ は隅角部が固定の場合のクラウンの固定端モーメントであつて, 様式(i)および(ii)の場合には, それぞれ付録3.Aから次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_p^* &= \frac{p \cdot b^2}{8} && \text{(様式(i))} \\ M_p^* &= -\frac{\Delta \cdot hc \cdot \sqrt{\beta_s} \cdot f_2 \cdot (1-\nu)}{2m(f_1 f_4 + \beta_s f_2^2)} \cdot p && \text{(様式(ii))} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

ただし

$$P = \text{ガス圧力}$$



$$m = \sqrt{12(1-\nu^2)}$$

$$\rho_s = m\gamma_0/hc \quad (\gamma_0 = \text{球殻の曲率半径})$$

$$f_1 = (\text{ber}'\bar{\gamma}_0)^2 + (\text{bei}'\bar{\gamma}_0)^2 \quad (\text{ber}, \text{bei} \text{ は Kelvin 関数})$$

$$f_2 = \text{ber}\bar{\gamma}_0 \cdot \text{ber}'\bar{\gamma}_0 + \text{bei}\bar{\gamma}_0 \cdot \text{bei}'\bar{\gamma}_0 \quad (', '' \text{ は } \gamma \text{ に関する微分})$$

$$f_3 = \text{ber}\bar{\gamma}_0 \cdot \text{bei}'\bar{\gamma}_0 - \text{bei}\bar{\gamma}_0 \cdot \text{ber}'\bar{\gamma}_0$$

$$f_4 = (\nu^2 \cot^2 \varphi_0 - \rho_s/\bar{\gamma}_0^2) f_1 + 2\rho_s/\bar{\gamma}_0 \cdot f_3 \\ - \rho_s(\text{bei}^2\bar{\gamma}_0 + \text{ber}^2\bar{\gamma}_0)$$

$$\Delta = \sqrt{\rho_s} \cdot f_3 - \sqrt{\rho_s} \cdot f_1/\bar{\gamma}_0 + \nu f_1 \cot \varphi_0$$

$$\bar{\gamma} = 4\sqrt{\rho_s^2 - \nu^2} \varphi, \quad \bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}|_{r=b}, \quad \varphi_0 = \varphi|_{\bar{\gamma}_0}$$

図中実線および二点鎖線はB点およびA点のモーメント  $M_B$  および  $M_A$  に対する  $\lambda_p$  の値であり、破線および一点鎖線はA点およびB点の膜張力  $N\varphi_A$  および  $N\varphi_B$  に対する  $\hat{\lambda}_p$  の値である。なお、固定端断面では式(3.3.3)を用いた薄肉修正解を用いた。この固定端モーメントと応力集中の関係については別項で検討することにする。

さて、様式(i)の構造様式に対する結果は横軸の  $H/b = 0$  の点で表わせ、中央のモーメント  $\lambda_{pA}$  は固定端のモーメント  $\lambda_{pB}$  とあまり変わらない。様式(ii)の隅角部および中央部のモーメントは、 $H/b$  が増すにつれて、いずれも一度極大値を示し、その後  $H/b$  の増加につれてA点およびB点の値はともに減少していく傾向を示す。この間膜張力は深み  $H$  の増加とともに漸増し、クラウン部のガス圧荷重を膜張力でもつ割合が増加していく。

実線が示すB点のモーメント  $\lambda_{pB}$  は、クラウンの隅角部B点のモーメントと、この部分が固定の場合のクラウンの固定端モーメントとの比を示すから、これは応力表示によるクラウン隅角部の固着度を表わしている。様式(i)の固着度は70~80%程度で、固定解の70~80%程度のモーメントが生じていることになる。様式(ii)の固着度は図のように、くぼみの増加およびクラウンの肉厚比  $hc/b$  の変化によつて相当変化し、例えば  $\bar{\omega} = 1/5$  では、 $H/b = 0.2$  で約93%、 $H/b = 0.4$  で80%、 $\bar{\omega} = 1/7$  では、 $H/b = 0.2$  で108%、

$H/b = 0.4$  で 85% となつて、特に  $H/b = 0.2$  付近で  $\lambda_p$  が 1 を越える場合がある。

この固着度が 1 を越える場合がなぜおこるかを明確にするため、いま  $H/b = 0.2$  ,  $hc/b = 1/7$  の構造にガス圧荷重が作用する場合の隅角部の傾斜の変化を、隅角部単純支持の場合の隅角部の傾斜の変化と比べると、それぞれ  $\nu_{\varphi ii} = -0.00335$  , および  $\nu_{\varphi 支} = -0.00894$  となり、隅角部支持の場合の傾斜  $\nu_{\varphi 支}$  の約 69% が拘束される。したがつて傾斜の拘束で表わした固着度は 1 以下となつてゐることがわかる。そこで隅角部固定の解析で、傾斜のみを零とし、ガス圧解析で得られる半径方向収縮量  $u_{\varphi} = -0.1851 \text{ mm}$  を与えて、クラウン隅角部のモーメントを求めると  $M_{\varphi} = 19,200 \text{ Kg-mm}$  となり  $\nu_{\varphi ii}$  解析の場合の隅角部モーメント  $M_{\varphi} = 6625 \text{ Kg-mm}$  より相当大きくなる。したがつて固着度が 1 より大きくなるのは半径方向の強制変位による付加曲げモーメントに起因するものであることが明らかとなつた。

次に構造様式 (iii) に対する同様の結果を図 3.3.11 に示す。図は主要点 A, B, D の断面内力を  $\bar{r} = 1$  ,  $\bar{\omega} = 0.2$  の場合につき、円板部の半径  $a$  がピストン半径  $b$  に占める割合  $a/b$  をパラメータとして表わしたものである。この場合隅角部固定解を基準とした解の表示は面倒であるので、縦軸は断面モーメントおよび膜張力によつて表わすとともに、隅角部固定の場合のクラウン固定端モーメントも同時に示した。図より明らかなごとく、中央断面および隅角部のモーメントは  $H/b$  が大きくなるにつれて漸減し、これに代つて膜張力が漸増する。中央断面と隅角部に作用するモーメントは符号逆でほぼ近い値を示し、また円板と円環殻の接続部のモーメントはあまり大きくなく、この中間にくる。またクラウンに占める円環殻部の割合  $a/b$  が変わると、 $H/b$  の大きい場合の隅角部でかなり顕著な挙動の差異が生じ、同じくばみ量  $H/b$  では、円環殻部の占める割合が小さいほど、固定端モーメントが低下しており、その値は隅角部固定の場合のクラウンの固定端の値に近い。中央部のモーメントは、 $a/b$  によつてはあまり変らない。

図より縦軸を固定解で割つて  $\lambda_p$  ,  $\hat{\lambda}_p$  によつて表示し直せば、図 3.3.12 のようになる。これより隅角部のモーメントは固定解のほぼ 8 割から、 $H/b$  の増すにつれてゆつくり減少

するのに対し、中央部のモーメントおよび膜張力は固定解に比べて急速に増加することがわかる。

### 3.3 熱応力に対する解析

#### 3.3.1 温度条件

第2章における計算結果によれば、ガスからの熱伝達が一杯で、肉厚が一定であれば、クラウンの肉厚内の温度分布は直線で半径方向に一様となり、隅角部外面で3割前後上昇し、スカート上面から下面にかけてこれらの分布が直線的に減少して、やがて冷却媒体の温度に近い一様な値までゆつくり漸減する分布傾向を示すことが認められる。

そこでここでは取扱いを一般化するため、この温度分布を図3.3.13に示すように次の3種の基本パターンに分類する。すなわち

- (i) クラウン部では表裏符号逆で半径方向に一様な肉厚内温度勾配が存在し、スカート上面から  $2h_s + h_c$  ( $h_s, h_c$  はスカートおよびクラウンの肉厚) のところまでこの分布が直線的に零に減衰する。(同図(b)参照, 触火面温度を  $100^\circ\text{C}$  とする)
- (ii) クラウン部の温度が、肉厚内で一様で半径方向にも一様な分布をもち、この分布がスカート上面から  $2h_s + h_c$  のところまで直線的に零に減衰する。(同図(c)参照, クラウン温度を  $100^\circ\text{C}$  とする。)
- (iii) 隅角部のみ局部昇温がある場合、すなわち、隅角点B'の最大温度が同図(d)のようにクラウン中心方向  $h_c$  のところまで、折線状に零に減衰し、またスカート下縁方向の  $h_s/2$  まで直線状に零に減衰する。ただしクラウン側およびスカート側断面の温度は肉厚方向に一様であるとする。

この3種の基本解が得られれば、(3.2.12)式の肉厚方向温度分布のもつ配分と、2.3節で求めた隅角部局部昇温の結果に従ってこれらを組合せることにより、作用熱負荷に対応する熱応力が求められる。そこで以下ではまず基本となる(i)の熱曲げおよび(ii)の熱伸びの

もとでの挙動が、3.2節で用いた構造様式、形状によつてどのように変化するかを第1編第2章の手法を用いて解析する。

### 3.3.2 熱曲げが作用する場合の解析

まず、図3.3.13(b)の熱曲げ荷重が作用する場合を、表1の3種の構造様式から成るM1~M6の6種の形状の場合について解析した。この結果を付録3.Aに示す薄肉殻理論による解と比較して図3.3.14~図3.3.19に示す。

図3.3.14は、様式(i)のM1模型に対する結果である。図は経線座標Sに沿つて、クラウン両表面の経線応力がどのように変化するかを示したもので、応力は隅角部固定の場合のクラウン表面の熱応力

$$\sigma_{\tau}^* = \frac{E\alpha\tau hc}{2(1-\nu)}$$

ただし

$$\tau = (T_{\text{外面}} - T_{\text{内面}})/hc$$

} (3.3.6)

で割つて無次元化して示した。両表面の応力は応力集中のある隅角部を除き、クラウン部にわたつてほぼ一定で、固定解の約95%の熱曲率が拘束される。これはクラウン部の自由膨張による熱曲率の生じ方と、スカート部のそれとが、いずれも外向きにとつとなるため、これらの干渉作用によつて両部の熱曲率がほとんど完全に拘束されることになるためと思われる。またこの拘束の作用の仕方に応じてクラウン部には、膜張力が引張力として作用するが大きさは小さい。

クラウン部の両表面応力はガス圧荷重に対する場合とは異なり、薄肉殻理論による解析解とほぼ一致する。このことは温度勾配により生じる熱応力は隅角部の支持位置のいかんによりあまり左右されないことを意味するものと思われる。隅角部近傍の内面では応力集中のために局部的に応力上昇を生じ、またその外面では隅角端で応力が零になるが、隅角部からスカ-

ト部に進むにつれて、再び薄肉解に近い挙動を示す。(図において外表面の厚肉解と薄肉解の値は横座標  $S$  が  $(hc + hs)/2$  だけずれ、厚肉解の方が大きい。内面ではこの逆となる。)

図 3.3.15 ~ 図 3.3.17 はそれぞれ  $M2 \sim M4$  に対する同様の結果である。球殻型クラウンでは、いずれも固定端モーメントが相対的に高く、固定解の 1.05 ~ 1.1 倍となるのに対し、中央部のモーメントは相対的に低く、固定解の 0.8 倍程度となる傾向を示す。

図 3.3.18 ~ 図 3.3.19 は、様式(Ⅲ)の  $M5, M6$  に対する同様の結果である。いずれも様式(Ⅱ)の場合とほぼ同様の傾向を示すことがわかる。

次にこれらの結果よりピストン主要点(図 3.3.1 A, B, D)での断面モーメントと膜張力が、形状パラメータ  $\bar{r}, \bar{\omega}, \bar{\delta}$  および  $\bar{\zeta}$  の異なる種々の構造形状によつてどのように変化するかを解析した。

図 3.3.20 はクラウンとスカート肉厚比  $\bar{r}$  が 1 の場合に対する様式(i)および(Ⅱ)の結果である。図は横軸に  $H/b$  を、また縦軸に無次元モーメント  $\lambda_\tau$  および  $\hat{\lambda}_\tau$  をとり  $\bar{\omega} = hc/b$  をパラメータとして表わしたものである。ここに  $\lambda_\tau$  および  $\hat{\lambda}_\tau$  は

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\tau &= \frac{M_i}{M_\tau^*} \\ \hat{\lambda}_\tau &= \frac{N_{\varphi i} \cdot hc}{6 M_\tau^*} \quad (i = A, B, C) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.7)$$

ただし

$$M_\tau^* = (1 + \nu) \alpha D_c \tau \quad (\text{様式(i), (Ⅱ), (Ⅲ)})$$

$D_c$  ; クラウンの曲げ剛性

で、 $M_\tau^*$  は薄肉殻理論による隅角部固定の場合のクラウンの固定端モーメントである。図より様式(i)のクラウンの中央および隅角部のモーメント  $\lambda_\tau$  は等しくほぼ固定解に近いが、様式(Ⅱ)の球殻型クラウンでは、 $H/b = 0.2$  付近で両部のモーメントの差が大きく、隅角部

では固定解より1割程度大きくまた中央部では1割位低下する。くぼみ  $H/b$  がさらに大きくなると再び両部のモーメントは漸近するが、両者の差は一般に小さく固定解に近い。

図 3.3.21 は、様式 (iii) に対する同様の結果であつて様式 (ii) の場合とほぼ同様の傾向を示す。

### 3.3.3 熱伸びが作用する場合の解析

次に、クラウン部が肉厚平均温度をうけ、これがスカート頂部から軸方向に直線的に減衰する図 3.3.13 (c) の熱伸び荷重をうける場合を解析した。このうち、模型  $M1$  に対する結果を図 3.3.22 に薄肉殻理論による解と比較して示す。図中縦軸は表面応力を隅角部固定の場合のクラウンの膜応力

$$\sigma_{T_0}^* = \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \quad (3.3.8)$$

ただし

$T_0$  ; クラウンの温度

で割つて無次元化したものを示す。

クラウン部に生ずる応力は、肉厚平均温度に対する伸びがスカート部のフープ張力によつて拘束されることによつて生じるため、この場合のクラウン各部のモーメントおよび膜圧縮力は長手方向に一様となる。この膜圧縮力の大きさはクラウンとスカートの剛性比によつて異なるが、いまの場合、 $\sigma_{T_0}^*$  の約 5% が拘束され、付加曲げによる表面応力は  $\sigma_{T_0}^*$  の約 20% 位となつてゐることがわかる。また厚肉解と薄肉解は、熱曲げの場合と同様に、応力集中部を除いてほぼ一致する。

様式 (ii) の模型  $M2 \sim M4$  に対する同様の結果を図 3.3.23 ~ 図 3.3.25 に示す。 $M2, M3, M4$  と順次クラウンのくぼみ  $H$  が大きくなるにつれて、中央部付近のモーメントは漸減し、逆に隅角部付近のモーメントは急増する傾向を示す。これは 3.2 節で述べたように、半径方向強制変位による付加曲げモーメントが大きくなることに起因するものと思われる。このよ

うに球殻型クラウンは一般にガス圧応力は低いが、熱伸びによる付加曲げモーメント増大の問題を本質的に抱えていることがわかる。

様式(Ⅲ)のM5, M6に対する同様の結果を、図3.3.26および図3.3.27に示す。円板部では、様式(i)の場合と同様に一様な分布を、また円環殻部では端上りの様式(Ⅱ)と同じ分布傾向を示し、隅角部に最大モーメントが生じる。

次にこれらの結果より、2節で述べた3種の構造様式のピストンの主要断面A, B, D(図3.3.1)での断面モーメントと膜力が形状パラメータによつてどのように変化するかを解析した。図3.3.28はクラウンとスカート肉厚比 $\bar{\rho} = 1$ の場合に対する様式(i)および(Ⅱ)の結果である。図中 $\lambda_{T0}$ および $\hat{\lambda}_{T0}$ は

$$\lambda_{T0i} = \frac{M_i}{M_{T0}^*}$$

$$\hat{\lambda}_{T0i} = \frac{hc \cdot H_i}{6M_{T0}^*} \quad (i = A, B, C)$$

(3.3.9)

ただし

$$M_{T0}^* = - \frac{E\alpha T_0 hc^2}{6(1-\nu)} \quad (\text{様式(i)})$$

$$M_{T0}^* = \frac{\Delta \cdot f_1 \cdot \cot \varphi_0}{(f_1 f_4 + \rho_s f_2^2)} \frac{E\alpha T_0 hc^2}{6} \quad (\text{様式(Ⅱ)})$$

であり、 $M_{T0}^*$ は隅角部固定の場合のクラウンの膜応力に、断面係数を乗じた量である。

図によれば、クラウンのくぼみHが増すにつれて隅角部のモーメントが著しく増大する一方中央部のモーメントは次第に減少することがわかる。

図3.3.29は、様式(Ⅲ)の場合の結果である。図にはクラウンの隅角部固定の場合の $M_{T0}^*$ の応力表示も同時に示した。くぼみHが増すにつれて固定端モーメントは大きくなり、また中央部のモーメントは減少するが、円板と円環殻の接続部のモーメントは必ずしもこれ

ら両者の中間にこない。また膜応力は $H$ のいかんにかかわらず小さいことがわかる。

### 3.3.4 隅角部に局部昇温をうける場合の解析

次に図 3.3.13 (a) のように隅角部近傍のみに局部的な昇温がある場合を事例的に解析し、これらがピストン全体の挙動に及ぼす影響や、局部的な発生応力の特徴を調べる。

代表的な場合として  $M1$  の模型で  $h_c = 50 \text{ mm}$ ,  $b = 250 \text{ mm}$  の場合を用いる。2.3 節の結果を用いれば、図 3.3.13 (a) の隅角点の温度はそれぞれ代表的に  $T_A = T_C = T_D = 50^\circ\text{C}$ ,  $T_B = 150^\circ\text{C}$  とすればよい。この温度分布を与えて、各部の応力を第 1 編の手法によつて解析すれば図 3.3.30 のようになる。図は両表面に沿う経線応力および周応力の分布を示したものである。この結果を検討するために、いま図 3.3.31 のように隅角部を  $A'D'$  および  $D'C'$  で切離して切口断面に作用する力を考えれば、熱膨張によつて隅角部と円板部の間には伸び差  $\delta_T$  が生じる。これを拘束するために、切口  $A'D'$  には引張力  $P$  が、また切口  $D'C'$  には主として剪断力  $Q$  が作用する。このような作用力の影響で  $A'D'$  より内側のクラウン部には膜張力が、またスカート部には  $Q$  による曲げモーメントが支配的に作用するがそれぞれの大きさは小さい。すなわち隅角部に存在する大きな温度勾配はほぼそのまま隅角部のみで拘束されて大きな円周応力を生じるが、他の部分へはあまり影響を及ぼさないことがわかる。このような傾向は一般に同様の形状を有するピストンに認められるものと考えてよい。

### 3.4. 隅角部の応力集中

隅角部の応力集中が丸み半径やピストン径などによつてどのように変化するかを明らかにするため、 $M1$  模型でピストン半径と隅角部丸み半径を変え、ガス圧荷重、熱曲げおよび熱伸びの 3 種の荷重条件の場合を解析した。

ガス圧荷重が作用する場合の隅角部の応力集中の様相を 3 種の隅角部内面の半径  $\rho$  および 3 種のピストン半径  $b$  の場合について解析し、この結果を図 3.3.32 に示す。図は内縁に沿う経線応力の分布を、各  $\rho$  ごとにピストン半径の影響を比較して示したものである。



図 3.3.33 はこの結果より隅角部の半径  $\rho$  と応力集中度  $\beta$  との関係をピストン半径をパラメータとして表わしたもので、破線は図中に示すような I 型平面構造の場合の応力集中度 (3.31) である。なお  $\beta$  の分母は図 3.3.10 より得られる値を用いた。これより明らかなごとく、ガス圧荷重が作用する場合の隅角部の応力集中度は  $\rho$  が同じならピストン径の小さいものの方が大きく、径が大きくなるにつれて応力集中度は低下することがわかる。またこれを平板の場合 (3.31) と比較すると  $\rho$  の大きいところで、周応力による抵抗の増加などにより、集中度がやや低くなるが、両者の差はあまりない。

図 3.3.34 は、図 3.3.13 (b) のような熱曲げ荷重が作用する場合の隅角部の応力分布を比較して示したものである。熱曲げ荷重下の隅角部の応力分布はピストン径の大きさにあまり関係なく  $\rho$  によつて一定の分布を示し、その最大応力の位置はクラウン側とスカート側の丸み止端部付近に二つの山をもつような分布を示す (クラウン側がやや大きい) ことがわかる。

次にこれより隅角部の最大応力を、図 3.3.20 より得られる隅角部曲げモーメントによる表面応力で割つて応力集中度を求め、 $\rho$  との関係を作れば図 3.3.35 のようになる。これより明らかなごとく、熱曲げによる隅角部応力集中度はあまり大きくなく、また  $\rho$  の増加とともにゆるやかに減少するが、ピストン径によつてはほとんど変化しないことがわかる。

同様にして図 3.3.13 (c) のような熱伸び荷重が作用する場合の隅角部の応力分布の解析結果を図 3.3.36 に示す。熱伸びに対する隅角部の応力上昇はピストン径によつて少しずつ異なるが、その差はあまり大きくない。最大応力位置はクラウン側の丸み止端部に近く、丸み半径の小さいほど応力上昇の程度が大きい。次にこれより図 3.3.28 の結果を用いて応力集中度を求めれば図 3.3.37 のようになる。全体の傾向は熱曲げの場合とほぼ似た傾向となるが、やや応力集中度が高目となることがわかる。

## 第 4 章 リブなしピストンの強度実験

### 4.1 ガス圧強度実験

実用のリブなしピストンに生じる応力の実態を把握し、併せて解析解の妥当性を検討するため、実用ピストンを用いて実験を行なった。

実験の対象とした機関は表 3.4.1 のごとく、シリンダ当りの出力がそれぞれ 750 PS および 950 PS で、シリンダ径の同じ 2 種の舶用中型主機用のもの A, B であつて、それぞれのピストンの構造形状を図 3.4.1 に示す。実験には、この鋳鋼製の実用ピストンを、実際のピストンの製作過程と同じく、鋳造、機械加工の過程を経て作り、そのまま模型として用いた。

実験装置を図 3.4.2 に示す。ピストンはステートボルトで組んだ支持装置のシリンダ内にはめ込み、下円板にボルトで取付けた。油圧ポンプから送り込んだ油は注油口を通つてピストン頂面に流れ込み、頂面にガス圧に相当する圧力を負荷する。この荷重はピストン下端 B 面で下円板に伝えられ、上円板と下円板を介してステートボルトを引き裂こうとする力とバランスする形でピストンに荷重が負荷される。なお、ピストンとシリンダのすきまからの油もれを防ぐため、ピストンのトツプリング溝には図の④部の位置に O リングを挿入した。

計測位置を図 3.4.3 に示す。クラウン中心から半径方向に 50 mm 間隔で内外表面および首部内面に 2 方向型歪計を、経線方向と円周方向が一致するようにはり付けた。また対称性を検証するため 4 半径断面にも同じ数の歪計をはり付け、これらをすべてコーティング剤により被覆した。ピストン上面からのリード線の引出しは接着剤（セメダインスーパー 1500）中に被覆線を埋込んで水密性の保持を計つた。

荷重は手押しポンプにより  $10 \text{ Kg/cm}^2$  きざみに  $90 \text{ Kg/cm}^2$  まで加圧してこれをブルドン管により検出した。

実験の結果を図 3.4.4, 図 3.4.5 に示す。図は A 型および B 型模型にそれぞれ  $70 \text{ Kg/cm}^2$  および  $80 \text{ Kg/cm}^2$  の油圧荷重が作用する場合の断面の応力分布を第 1 編第 2 章の手法による

解析解と比較して示したものである。引張応力の最大値は中央部内面に、高い圧縮応力域は隅角部内面および中央部外面に生じ、実験結果はいずれの部分でも解析解とほぼ一致していることがわかる。

## 4.2 熱 応 力 実 験

次に同じピストンを用いて熱応力実験を実施した。

実験装置の概観を図 3.4.6 に、その詳細を図 3.4.7 に示す。ピストンの加熱は、図に示す手製燃焼器の中で直接バーナーによつて行なう方法を採用した。プロパンガスと工場用加圧空気を、入口を向い合せたエルボで混合して燃焼させ、また同空気をエジエクタとして煙道に噴射した。

燃焼器の過熱を避けるため防熱機外周に水を噴射した。ピストン内面の冷却用油は冷却案内金物中の渦巻き型の回路を外周から回転しながら図のイからホへと進み、冷却を行なう。

温度の測定はクロメルアルメル型熱電対によつた。熱電対は線径 0.2 mm のものを 1.6 mm シース管中に配したものをを用い、これを図 3.4.8 に示す各位置に配した。熱電対はまず中間ピースに埋込み、これを被測定体に冷しばめしたのち、銀ろう付を行なうという方法で接触状態の改善を計つた。熱電対の他端には零接点を設け、出力はパイロメータで直接読みとつた。

高温歪計は文献 (3.32) を参考に、零点移動量が少なく、ゲージファクタを含めた熱特性の均一性、再現性などの性能が安定している東京測器製 K-110A を採用した。このはり付位置を図 3.4.9 に示す。計測は外表面温度が耐熱限界を越えるために内面のみとし、図の各点で経線方向および周方向に合わせて各 2 枚ずつはり付けた。またリード線の高温による抵抗変化を避けるため 3 線式結線法を採用した。実験にかかると前にピストンを図 3.4.7 の装置にセットして空だきし、両模型の歪計に対して約 300°C、1.5 時間のキュアリングを行なつた。

実験の結果を図 3.4.10～図 3.4.12 に示す。

図 3.4.10 は用いた高温歪計の零点移動特性で、3 回の繰返し昇温過程の歪出力がいずれも同じとなり、キュアリング後の再現性は充分認められた。実験結果の解析に当つては、計測点の温度に相当する零点移動量をこの図から読み取り、これを実測歪から差引くことによつて応力に対応する歪成分を求めた。

図 3.4.11 は A 型ピストンの計測温度をもとに求めた断面の等温線と、熱応力の計測値と解析解の比較結果を同時に示したものである。温度の計測誤差、歪計の性能のばらつきなどを考慮すれば両結果は比較的良好に一致しているといえる。

図 3.4.12 は B 型ピストンに対する同様の結果である。

実験に際しては、プロパンの量、空気量および冷却油の流量を種々に変えて温度の試計測を行ない。最も温度が上がり、かつ実用ピストンの分布に近い場合を試行錯誤により求めて最終計測を行なつたが、それでも火炎および炉内温度が実用ピストンの状態と多少異なつた結果となつた。しかし、これらにより、ピストンの熱応力発生の際略が把握できるとともに、実用ピストンにおける発生応力の状態が、解析的には推定できることが明らかとなつた。

### 4.3 実 機 実 験

前節で用いた 2 種のピストンのうち B 型のもをそのまま実際の機関に組込んで実用ピストンの実働下での応力計測実験を行なつた。

図 3.4.13 および図 3.4.14 に B 型ピストン用供試機関の外観図および横断面図を示す。熱応力実験に用いたピストンの熱電対、高温歪計のはり付け状態をそのままにし、さらに図 3.4.15 の各位置にテンプラグ (註) を追加して図 3.4.13 の No.6 シリンダに組込んだ。更

---

(註) テンプラグは焼入金属を一定温度に加熱すると、加熱温度と硬度変化の間にきわめてよい直線性のある特殊合金製の小ネジであつて、被測定体に埋込むと、それがうけた最高温度を 1% 以下の誤差で知ることができる。

にリード線などで冷却油流路の抵抗が増すため、この影響をうけないピストンの温度状態を把握する目的で、№5シリンダのピストンにテンブラグのみを埋込んだ。

ピストンからの熱電対と歪計のリード線の取出し状況を図3.4.14中に破線で、また図3.4.16にその概観を写真で示す。リード線は一度ピストン棒の上部で外に出したあと、ピストン棒の下部に切込んだ溝の部分で接着剤にて固定し、ピストン棒パッキン部を通し、滑頭(すべりあたま)へ導く。そして滑頭から指圧図採取装置のリンク添いに機関外部に取出すようにした。しかし、図3.4.9におけるPおよびQ以外の歪計については機関に組込む時および運転中にリード線が断線したり被覆が破れて計測が不可能となった。残った歪計および熱電対の出力を、それぞれ動歪計—電磁オシロおよび直流増巾器—電磁オシロにより動的に記録した。

計測は機関の定格出力(表3.4.1)の $1/3$ から $4/4$ までを4段階にわけ、 $1/3$ ,  $1/2$ ,  $3/4$ ,  $4/4$ の各負荷段階で負荷整定後30分~1時間ずつ運転して行なった。なお機関の負荷の大きさは水動力計による値を用いた。

実験の結果を図3.4.17~図3.4.20に示す。図3.4.17は機関の各負荷段階でのピストンの温度分布を、負荷の大きさをパラメータとして表わしたもので、№5および№6シリンダのテンブラグによる結果も同時に示した。図から各部の温度の上がり方が非線形で、負荷の大きくなるのに伴って上昇率が低くなってくる。これはピストンの温度上昇につれ、熱容量の大きい周辺構造に熱が逃げやすくなること、および冷却油の温度上昇によつてその流量が増え、熱伝達が改善されることなどによるものと思われる。また№5シリンダの温度がやや低目となること。隅角部外面の温度が特に高くなることなどが明らかとなった。

図3.4.18は実測値から№6ピストンの等温線を描いたものである。

ガス圧による応力は、熱歪と重畳した電磁オシロの出力からその変動成分として求め、指圧線図より求まる定格時の最高圧力 $79 \text{ Kg/cm}^2$ に対する解析解と対応させて、図3.4.5中に◎印で示した。これより実働下のガス圧応力は、解析解および静圧負荷実験の結果と比較

的よく一致していることがわかる。

図 3.4.19 は電磁オシロの出力の平均値として求めた熱歪から，零点移動量を調整して得られる熱応力が負荷とともに変化する様子を示したものであり，図 3.4.20 は，このうち定格時の熱応力を，図 3.4.18 の温度分布より得られる解析解と比較したものであつて，両結果は比較的よく一致していることがわかる。

### 第 3 編 参 考 文 献

- (3.1) Eicherberg, G., "Temperatur verlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren", Verein Deutscher Ing. Forsch. Arbeit Ing. Forsch. Arbeit Ing. Wes., No.263, 1923, P.3
- (3.2) Eicherberg, G., "Some New Investigations on Old Combustion Engine Problems", Engng, No.148, 1939, P.603
- (3.3) Fitzgeorge, D. and Pope, J.A., "An Introduction to the Factors Contributing to the Failure of Diesel Engine Pistons and Cylinder Covers", Trans. North East Coast Inst. Engrs. and Shipbldrs, No. 71, 1954-55, P.163.
- (3.4) Whitehouse, N.D., "An Estimation of Thermal and Combustion Pressure Stresses in "S.R.L." Oil Cooled Pistons", English Electric Report R/ER/3, 1956
- (3.5) 宇野, 川崎, "船用大型ディーゼル機関ピストンクラウンの強度について", 造船協会論文集第100号, 昭31, P.225
- (3.6) Dennis, R.A. and Radford, J.M., "Piston Stress-Theoretical and Experimental Developments", Proc. Inst. Mech. Engrs., No.179 (Pt 3C), 1964-65, P.19
- (3.7) Enderby, L.R. and White, D.J., "Axisymmetric Method for Determining Thermal Stresses in Piston" J. strain Analysis, Vol. 3, No.2 1968, P.146
- (3.8) Ibrahim, S.M. and McCallin H., "Gas Load and Thermal Stresses in Diesel Engine Pistons and Valves", Proc. Inst. Mech. Engrs.

Vol. 182 (Pt 3L), 1967-68 P.176

- (3.9) Fiskaa, G., Iversen, A., and Sarsten, A., "Computer Calculation of Stresses in Axisymmetric Thermally Loaded Components" Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol. 182 (Pt 3L), 1967-68, P.152
- (3.10) 日本造船研究協会 第100研究部会, "巨大船用ディーゼル機関に関する基礎的研究", 昭44-8
- (3.11) Izumi, S., Omotehara, I., Oyamada, T., and Yano, T., "Recent Development and Running Experience with UE Diesel Engines", Proc. Int. Marine and Shipping Conf., 1973, P.8
- (3.12) NuBelt, W. "Der Wärmeübergang in Verbrennungs Kraftmaschinen", Verein Deutscher Ing., -Forschungsheft No.264, 1923
- (3.13) Eichelberg, G., "Investigation on Internal Combustion Engine", Engng., No.148, Oct. 1939 P.463
- (3.14) Pflaum, W., "Der Wärmeübergang bei Diesel Maschinen mit und ohne Aufladung", Motor Tech. Zeitschrift, Vol. 22, No.3, 1961
- (3.15) Woschni, O., "Electronic Calculation of the Time Curve of Pressure, Temperature and Mass Flow Rate in the Cylinder of a Diesel Engine", Proc. Inst. Mech. Engrs, Vol.182 (Pt 3L), 1967-68
- (3.16) 永井, 水島, "大型二サイクルディーゼル機関の性能シミュレーション", 日本機械学会第812回講演会論文集, №710-17, 昭46-11, P.183
- (3.17) 蔦, "ディーゼル機関燃焼室壁の過渡的弾塑性熱応力変動の解析(その1,定常サイクルの変化)", 日本機械学会関西支部第230回講演会論文集, 昭48-6, P.23



- (3.18) 蔦, 織田, 山地, "ピストンの強度 (その5. リブなしピストンの応力解析と厚肉解・薄肉解の差の比較検討)", 日本機械学会・山梨地方講演会講演論文集, 昭49-11, P. 215
- (3.19) Akashi, G., Shimizu, K., Maehata, S., Tsuta, T., and Nakamura, Y., "Designing Problems for the Strength of Combustion Chamber on KAWASAKI-MAN 2 Cycle Diesel Engine", Proc. Int. Sym. Marine Engng, Tokyo, 1973, P3-6-17
- (3.20) 三浦, "熱 近似の方法—熱伝導・熱弾性問題の近似解法", 東京大学航空研究所集報, 第3巻第2号, 1962, P. 143
- (3.21) たとえば 甲藤 "熱伝導論", 共立出版, P. 28
- (3.22) 蔦, "電子計算機による平面および軸対称構造物の熱伝導および熱応力解析", 川崎技報, 第38号, 昭45-6, P. 23
- (3.23) Takao, T., Sakamoto, I., and Nagai, M., "Stress Analysis of Combustion Chamber Walls of Main Diesel Engine of a Ship under Service Condition", Proc. Int. symp. Marine Engng, Tokyo, 1973, P3-6-29
- (3.24) 太田, 浜田, 石塚, 宇野, "円環殻の強度に関する研究 (第1報, 解の提案)", 日本機械学会論文集, 29巻197号, 昭38, P. 142
- (3.25) 太田, 浜田, 古川, 大田 "円環殻の強度に関する研究 (第3報, 圧力容器の熱応力)", 日本機械学会論文集, 29巻197号, 昭38, P.165
- (3.26) Dong, S.B., "Analysis of Laminated Shells of Revolution", Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, Engng Mech. Div. Vol. 92, 1966, P.135
- (3.27) 蔦, 山地, "薄肉回転殻非対称荷重解析プログラムの開発", 川崎重工研究

報告 第1144号, 昭47-11 (未公表)

- (3.28) O'Connell, J. M. and Chubb, E.J., "Improved Method of Calculating Stresses at the Intersection of a Cylindrical Nozzle and a Spherical Vessel", Appl. Mech. Convn. Proc. Inst. Mech. Engrs, Vol.178 (Pt-3J), 1963-64, P.224
- (3.29) Marcal, P.V. and Turner C.E., "Elastic-Plastic Behavior of Flush Nozzles in Spherical Pressure Vessels", J. Mech. Engng Science, Vol. 9, No.3, 1967, P.182
- (3.30) 進藤, 瀬口, 伝宝, 岡本, "圧力容器頂部ノズル取付部付近の応力", 日本機械学会論文集, 38巻310号, 昭47, P.1209
- (3.31) 関西造船協会編"造船設計便覧", 海文堂, 昭48, P.503
- (3.32) 蔦, 谷中, "高温歪計の熱的諸特性に関する実験", 日本非破壊検査協会第4分科会資料, 昭42-8.

付録 3 A 薄肉殻理論によるリップなしピストンの応力解析

3. A. 1 一般解

3種の様式(i)~(iii)を構成する円環殻, 球殻, 円板, および円筒殻の一般解は太田らの文献(3.24)(3.25)より, 図3. A. 1を参照して次のように書ける。

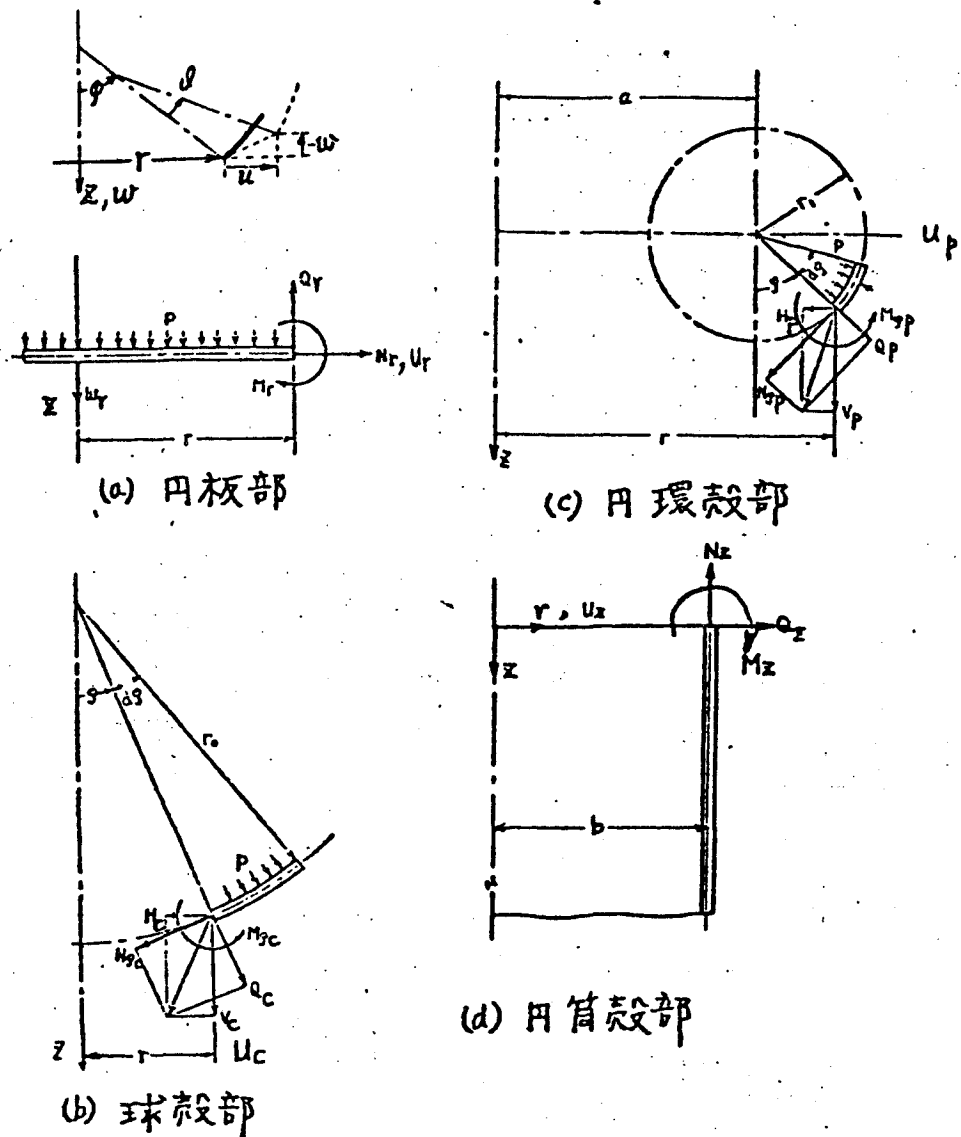


図 3. A. 1 構造要素の座標系と断面量

(a) 円環殻の場合

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_\varphi &= C_1 \eta_{1R} + C_2 \eta_{1i} + C_3 \eta_{2R} + C_4 \eta_{2i} + A \cdot \eta_{\varphi i} \\
 \mathcal{U}_\varphi &= \frac{hc}{m} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda} + \sin \varphi \right) \frac{d\chi_\varphi}{d\varphi} - \nu \chi_\varphi \cos \varphi - \nu A \cdot \sin \varphi \right. \\
 &\quad \left. + IP \{ 1 - 2\nu + (1-\nu)\lambda \sin \varphi \} \right\} + a(1 + \lambda \sin \varphi) \alpha T_0 \\
 M_\varphi &= -\frac{Dc}{r_i} \left\{ \frac{d\mathcal{U}_\varphi}{d\varphi} + \nu \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \mathcal{U}_\varphi - \alpha r_i (1 + \nu) \tau \right\} \\
 N_\varphi &= \frac{Ehc^2}{ma} \left\{ \chi_\varphi \cos \varphi + A \sin \varphi \right. \\
 &\quad \left. + IP \cdot (2 + \lambda \sin \varphi) \right\} / (1 + \lambda \sin \varphi) \\
 H_\varphi &= \frac{Ehc^2}{ma \cos \varphi} \left\{ \left\{ \chi_\varphi \cos \varphi + A \sin \varphi + IP (2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \lambda \sin \varphi) \right\} / (1 + \lambda \sin \varphi) - \frac{P}{2} a (1 + \lambda \sin \varphi) \tan \varphi \right\}
 \end{aligned} \tag{3.A.1}$$

ここから

$$\chi_\varphi = C_1 \eta_{1i} - C_2 \eta_{1R} + C_3 \eta_{2i} - C_4 \eta_{2R} - A \eta_{\varphi R}$$

$$\lambda = \frac{r_i}{a}, \quad m = \sqrt{12(1-\nu^2)}$$

$$IP = \frac{ma r_i}{2Ehc^2} P$$

$$A = \frac{ma}{Ehc^2} \left\{ (1 + \lambda \sin \varphi_0) V_0 - \frac{P r_i}{2} (2 + \lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 \right\}$$

$\eta_{ij}$ ; 文献 (3.24) の式 (33) ~ 式 (38)

$$V_0 = V(\varphi)_{\varphi = \varphi_0}$$

$C_i$  ; 積分定数

$M_\varphi, N_\varphi, H_\varphi$  ; モーメント, 膜力, 半径方向力

$\nu_\varphi, u_\varphi$  ; 傾斜, 半径変位

$h_c, D_c, a, r_i$  ; 肉厚, 曲げ剛性, 円環中心の半径座標, 円環半径

$E, \nu$  ; ヤング率, ポアソン比

$p$  ; 圧力

$\alpha, \tau, T_0$  ; 線膨張係数, 温度勾配 ( $\frac{T_0 - T_1}{h}$ ), 平均温度 ( $\frac{T_0 + T_1}{2}$ )

$r, \theta, z$  ; 円筒座標系

(b) 球殻の場合

$$\nu_p = S_1 \text{ber}' \bar{y} + S_2 \text{bei}' \bar{y}$$

$$u_p = \frac{h_c}{m} \left[ \sqrt{\rho_s} \left\{ -S_1 \left( \text{ber} \bar{y} - \frac{1}{\bar{y}} \text{bei}' \bar{y} \right) - S_2 \left( \text{bei} \bar{y} + \frac{1}{\bar{y}} \text{ber}' \bar{y} \right) \right\} - \nu \cot \varphi \left( -S_1 \text{bei}' \bar{y} + S_2 \text{ber}' \bar{y} \right) + I_{p_s} (1 - \nu) \right] \sin \varphi + \alpha T_0 r_0 \sin \varphi$$

$$M_p = -\frac{D_c}{r_0} \left[ \sqrt{\rho_s} \left\{ -S_1 \left( \text{bei} \bar{y} + \frac{1}{\bar{y}} \text{ber}' \bar{y} \right) + S_2 \left( \text{ber} \bar{y} - \frac{1}{\bar{y}} \text{bei}' \bar{y} \right) \right\} + \nu \cot \varphi \left( S_1 \text{ber}' \bar{y} + S_2 \text{bei}' \bar{y} \right) - \alpha (1 + \nu) r_0 \tau \right] \quad (3.A.2)$$

$$N_p = \frac{E h_c^2}{m r_0} \left\{ \left( -S_1 \text{bei}' \bar{y} + S_2 \text{ber}' \bar{y} \right) \cot \varphi + I_{p_s} \right\}$$

$$H_p = \frac{E h_c^2}{m r_0} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \left( -S_1 \text{bei}' \bar{y} + S_2 \text{ber}' \bar{y} \right) + I_{p_s} \cos \varphi \right\}$$

ただし

$$\rho_s = \sqrt{\frac{m r_0}{h_c}}, \quad \bar{y} = \sqrt[4]{\rho_s^2 - \nu^2} \varphi$$

$$\rho_s = \frac{m \gamma_0^2}{2 E h c^2} p$$

$S_1, S_2$ ; 積分定数,  $\gamma_0$ ; 球殻半径

(c) 円板の場合

$$v_r = L_1 \cdot r - \frac{p r^3}{16 D_c}$$

$$u_r = \left( \frac{1-\nu}{E h c} L_3 + \alpha T_0 \right) r$$

$$M_r = D_c \left\{ (1+\nu)(\alpha \tau - L_1) + \frac{3+\nu}{16 D_c} p r^2 \right\}$$

$$N_r = H r = L_3$$

(3.A.3)

ただし,  $L_1, L_3$ ; 積分定数

(d) 円筒殻の場合

$$v_z = e^{-\bar{\beta} z} (K_1 \cos \bar{\beta} z + K_2 \sin \bar{\beta} z) + \frac{b}{c} \alpha \frac{dT_0}{dz}$$

$$u_z = \frac{e^{-\bar{\beta} z}}{2 \bar{\beta}} \left\{ (K_1 + K_2) \cos \bar{\beta} z - (K_1 - K_2) \sin \bar{\beta} z \right\}$$

$$+ b \alpha \frac{dT_0}{dz} \left( 1 - \frac{z}{c} \right)$$

$$M_z = D_s \left[ \bar{\beta} e^{-\bar{\beta} z} \left\{ (K_1 - K_2) \cos \bar{\beta} z + (K_1 + K_2) \sin \bar{\beta} z \right\} + \alpha (1+\nu) \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \frac{dT_0}{dz} \right]$$

$$Q_z = \frac{E h_s^2}{m b} e^{-\bar{\beta} z} (K_2 \cos \bar{\beta} z - K_1 \sin \bar{\beta} z) - D_s \alpha (1+\nu) \frac{1}{c} \frac{dT_0}{dz}$$

(3.A.4)

ただし

$b$  ; 円筒殻の半径

$C$  ; 温度作用部の長さ

$D_s, h_s$  ; 曲げ剛性, 肉厚

$$\bar{\beta} ; 4\sqrt{\frac{3-(1-\nu^2)}{b^2 h_s^2}}$$

$K_1, K_2$  ; 積分定数

### 3. A. 2 接続部の条件と解法

接続条件に必要な断面量ベクトルを上記の4種の構造要素のそれぞれについて

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) 円環殻に対し } IR_\varphi^t = \{M_\varphi \quad H_\varphi \quad U_\varphi \quad \mathcal{V}_\varphi\} \\ \text{b) 球殻に対し } IR_p^t = \{M_p \quad H_p \quad U_p \quad \mathcal{V}_p\} \\ \text{c) 円板部に対し } IR_r^t = \{M_r \quad H_r \quad U_r \quad \mathcal{V}_r\} \\ \text{d) 円筒殻に対し } IR_z^t = \{-M_z \quad -Q_z \quad -U_z \quad -\mathcal{V}_z\} \end{array} \right\} \quad (3.A.5)$$

ただし

$t$  ; 転置

とすれば本文中の3種の構造様式の接続部 (図 3.3.1 B, D) の連続条件はそれぞれ次のように書ける。

$$\left. \begin{array}{l} \text{タイプ(i)の場合 } IR_r)_{r=b} = IR_z)_{z=0} \quad (B \text{ 点}) \\ \text{タイプ(ii)の場合 } IR_p)_{r=b} = IR_z)_{z=0} \quad (B \text{ 点}) \\ \text{タイプ(iii)の場合 } IR_r)_{r=a} = IR_\varphi)_{\varphi=0} \quad (D \text{ 点}) \\ \phantom{\text{タイプ(iii)の場合}} IR_\varphi)_{r=b} = IR_z)_{z=0} \quad (B \text{ 点}) \end{array} \right\} \quad (3.A.6)$$

式 (3.A.1)~式 (3.A.4) の各式を式 (3.A.6) に用いれば各場合の積分定数が定まり, 所要の解が得られる。

第 4 編

リブ付ピストンおよび分割型ピストン  
の強度問題



## 第 1 章 緒 言

ピストンのクラウン部は熱負荷対策上あまり厚くできないため、ある径以上のものではガス圧応力が著しく高くなる。そこで、大口径ピストンではクラウン部を各種リブによつて支持する構造様式が採用されている。

このリブ付ピストンのリブ支持の様式は、大別すれば、図 4.1.1 に示すように、リブを円周状に配し、熱負荷対策上周方向に等間隔に軸方向スリットを設けた円周型の様式とリブを放射状に配した放射型の様式に分けられる。

そのいずれも船舶の大型化に呼応して最近に発達したものであり、また三次元的な取扱いを必要とするため、その応力解析法を扱った研究は少ない。三菱重工の小林ら<sup>(4.1)</sup>は放射状リブを有するリブ付ピストンのリブ部を、周方向には剛性がなく、半径方向と軸方向には周平均の等価な剛性を有する直交異方性の軸対称体として有限要素法により取扱う方法を示した。しかしこの方法ではリブが周方向に密に入っているものとし、リブの剛性を平均的にしか取扱っていないため、最も重要なリブとクラウンの交差部付近の局所的な変形拘束によつて生じる応力状態などを正しく把握していない。このほかリブとそれ以外の軸対称構造部を別個に解いて撓性行列法によつて接続する方法や、<sup>(3.10)</sup> 全体を三次元体として一挙に解析する報告も<sup>(4.2)</sup> あるが、労力や費用が膨大となるため、方法としては可能であつても日常的な改良・開発研究の場でこれらを駆使することは困難である。

リブ付ピストンのガス圧強度に関する研究は、計測の容易さから主として実験的研究に依存し、これを前述の軸対称体近似解法<sup>(4.1)</sup>で補完する方法が採用されてきた。山田ら<sup>(4.3)</sup>は900 mm径のフラット型クラウンを有する放射型リブ付ピストンのガス圧応力を水圧試験装置を用いた実験によつて求め、改造前後の2種の構造形状の応力状態を比較した。Kilchenmannも<sup>(4.4)</sup>同様の実験を行ない有限要素法による計算結果と比較している。表原ら<sup>(4.5)</sup>およびIzumiら<sup>(3.11)</sup>は、放射型リブを有し、球殻型クラウンからなるリブ付ピストンに対して、実機計測や水圧試験によりその応力変動の状態を求めた。

他方、熱応力に関する実験的研究は、その初期には計測の困難さから温度計測に主眼がおかれ、Alcock, (4.6) Langballe, (4.7) 矢野, (4.8) Gregoretta, (4.9) Sorensen, (4.10) らの実機計測の報告がある。最近に至つて熱応力計測も温度の低い冷却面側で可能となつたため、実験室的な熱応力計測お (4.1) (4.3) 実機計測 (4.3) なども行なわれるようになった。しかしこれらはいずれも特定の機種 of 構造変更に伴う確認試験などの事例的研究の域を出ていない。

さて、リップなしピストンにリップを付加したことによつて新たに生じる問題としては次の各問題が考えられる。

- (1) クラウンのガス圧荷重による面外曲げ変形がリップ部で拘束されるため、リップの配置や様式によつて、その挙動がリップなしピストンの場合と著しく異なる。
- (2) リップの存在によつて熱によるクラウンの面外曲げ変形の拘束が強くなる。
- (3) 冷却室内にあるリップと高熱ガスに直接さらされるクラウンは両者の接合縁に沿つて熱伸び差を拘束されるために、同縁に沿つて大きな拘束熱応力が生じる。

そこで以上の諸問題のうち、本編第2章では、第1編第3章の手法を用いて、まず(1)と(2)の問題を研究する。

まず円周型リップ付ピストンの合理的なリップ配置方法を検討し、それらの配置をもつリップ付ピストンがガス圧荷重をうけるときに生じる構造各部の応力状態およびそれらとリップ様式との関係を一円周型および二円周型リップ付ピストンの場合について解析する。そしてこれらの結果より、構造主要点の応力の簡易推定法を検討する。

次に放射型リップ構造様式の場合についても周方向リップ枚数とピストン径の種々の組合わせのもとで生じるガス圧応力の分布、その特徴および主要点の応力の簡易推定法などについて同様の解析と検討を行なう。

熱負荷による挙動のうち、温度勾配による熱曲げ荷重下の挙動は、第3編のリップなしピストンの解析結果からの類推で、その熱変形のほとんどが拘束されてそのまま熱応力となることが予想されるので2~3の事例解析によつてその推定の妥当性を検討する。

第3章では、熱伸び荷重下の挙動のうち最も重要な上記(3)の局部熱伸び差拘束による拘束熱応力の問題を解析する。これらは第1編第3章の手法によつても勿論解析できるが、ここでは現象の局部性を考慮し、この種の構造系に適した新しい解析理論を導き、これを用いて、この挙動特性を調べる。すなわち、これらは立体厚板構造ではあるが、リップ、クラウンのいずれに対しても面内問題となることに注目し、構造の一対称部を取り出し、クラウンとリップを帯板要素に分割したのち、各帯板内部の応力、変形を支配する偏微分方程式を帯板縁辺での常微分方程式の連立系に置き直す解析方法を誘導する。(4.11) そして、これを用いて各種リップ形状下での発生応力状態を解析し、リップの剛性、リップ巾およびリップ間隔などの諸要素と発生応力の関係を明らかにする。

第4章では、現用最大級の直径1050 mmの超大型二円周型リップ付ピストンがガス圧荷重をうける場合の各部の発生応力の状況を、燃焼室内に油圧を負荷する実験により求め、大型実用リップ付ピストンに生じている応力の実態を把握するとともに、第1編の手法による解析解を求めて、この実験結果と比較検討する。

第5章では主として中速四サイクル機関に用いられる分割型ピストンの挙動特性を研究する。

図4.1.2に示すように分割型ピストンの構造は、高熱負荷やガス圧荷重を直接うける上側ピストン部とこれを支持する下側ピストン部の二つの構造に分割され、クラウン中間部に円周状のリップを設けて、このリップ支持部でボルト結合、スカート部は接触結合する構造方式をとる。この種の構造の挙動の特性を求めるには二つの連続体の接触問題を取扱わねばならず、また接触境界で相互に作用する力は、単に与えられた荷重条件のみではなく、両構造の変形が接触部で拘束される程度によつても影響されるなどの特徴がある。したがって一体型の場合のように各荷重成分の解にもとづく重畳の法則が必ずしも成立せず、組合せ荷重の絶対値によつて挙動を評価しなければならない。

Rohrle は(4.13) ピストン径が230 mmから520 mmまでの各種の分割型ピストンの温度を導電抵抗紙を使つたコンダクティブシートアナログの方法によつて、また熱応力を

熱光弾性実験によつて求める一方、差分法およびArgyrisのTriax要素を用いた軸対称体有限要素法によつて各場合の温度および熱応力を求めた。飯田ら(4.14)はUEV30/40分割型ピストンのガス圧応力を三次元光弾性実験により調べた。武本は(4.15)分割型ピストンのガス圧応力がスカート下縁に設けた初期すきまによつてどのように変わるかを分割型ピストンの実機計測により調べた。平山ら(4.16)はピストン径500mmの新開発分割型ピストンにつき、支持条件の変化によるガス圧応力および熱応力の変化を実機計測によつて求め考察を加えた。

以上のように分割型ピストンに対する従来の研究では事例についての実験的な研究が主体で、かつ接触面に通常設けられる初期すきまや接触面の作用力による挙動特性の変化などが充分考察されていない。

そこで本章では第2編で述べた接触問題有限要素解析法と撓性行列法を併用してこの種の構造系の挙動特性を研究する。すなわち、まずガス圧荷重、熱曲げ、熱伸び、スカート部反力などの基本荷重がそれぞれ独立に作用する場合の挙動特性を求め、これより、各負荷段階で基礎となる熱負荷下の挙動がスカート下縁に設けた初期すきまや下部ピストンの剛性およびそれに伴う接触面反力の大きさなどによつてどのように変化するかを解析する。次にガス圧荷重がこの上に重畳する場合の挙動を求め、これらが熱変形重畳時の各種の接触面条件のもとでどのように変化するかを調べる。さらに、接触面の傾きによつて生じる付加力の大きさや接線力、すべりなどの非線形項の影響も同時に明らかにする。

以下に本編で用いる主要記号を列記する。

## 第 2 章 (第3編と異なる部分のみ)

- |       |   |                        |
|-------|---|------------------------|
| $a$   | ; | クラウンの外半径               |
| $b$   | ; | クラウンの外半径または外周リップの取付け半径 |
| $c$   | ; | 内周リップの取付け半径            |
| $t_r$ | ; | リップの厚さ                 |

- $\alpha$  ; 放射リップの間隔を表わす角度  
 $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$  ; 周辺固定円板または円輪板の最大応力を与える係数  
 $\theta, \theta_1$  ; 円周リップの1/2リップ中心間距離を表わす角度  
 $\sigma_R, \sigma_\theta$  ; 半径応力, 周応力

### 第 3 章

- $a_i$  ; 帯板の巾  
 $C_i, d_i$  ; 積分定数  
 $\beta_{ij}, \bar{\beta}_{ij}$  ; 積分定数  
 $\mu_i, \bar{\mu}_i$  ; 積分定数  
 $D$  ; 微分演算子を含む係数  
 $e_i$  ; 式(4.3.64)で与えられる定数  
 $E, G, E_g$  ; ヤング率, 剪断弾性係数およびその比  
 $l_0, L_0$  ; 円周リップの周方向間隔の半分, リップ周方向長さの半分  
 $\bar{P}_{xi}, \bar{P}_{si}$  ; 帯板内の断面力  
 $\hat{p}_i, \hat{p}_i$  ; 縁辺作用力の垂直成分とその無次元表示  
 $\bar{q}_i, q_i, \hat{q}_i$  ; 帯板内の剪断力, 長縁の剪断力とその無次元表示  
 $S_i, x_j$  ; 帯板の座標系  
 $t_i, t_c, t_R$  ; 帯板, クラウンおよびリップの肉厚  
 $\hat{t}$  ; リップとクラウンの肉厚比  
 $\bar{T}_i, T_i$  ; 帯板および帯板長縁の温度  
 $\bar{u}_i, \bar{w}_i, u_i$  ; 帯板内の変位成分, 長縁の $x_j$ 方向変位  
 $u_i^*, u_i^{**}$  ; 同次解と特解  
 $\alpha_i, \alpha_c, \alpha_R$  ; 帯板, クラウン, リップの線膨脹係数  
 $\alpha_{ij}$  ; 帯板の巾の比

- $\lambda_j, \zeta_i$  ; 特性方程式の根  
 $\bar{\sigma}_{xi}, \bar{\sigma}_{si}, \bar{\tau}_{xsi}$  ; 帯板の直応力, 剪断応力  
 $\sigma_{2D}, \sigma_{2u}, \tau_{2}$  ; 接合縁のリップ側およびクラウン側縁応力, 剪断力  
 $"K"$  (肩記号) ;  $\int dx_j$   
 $"I"$  (肩記号) ;  $d/dx_j$   
 $"U, D"$  (添字) ; 縁辺量の上側帯板成分および下側帯板成分

第 5 章 (第 3 編と異なる部分のみ)

- $R^u, R^l, f_R$  ; 上側と下側ピストンの剛性およびその比を表わす係数  
 $P, P_{max}, P_0$  ; ガス圧, 各負荷段階の最大ガス圧, 機関の最大ガス圧  
 $Q_0, Q_P$  ; 初期締付力, クラウンのラジアン当りのガス圧荷重  
 $Q_R, Q_S$  ; 熱負荷によるリップおよびスカート下面の反力  
 $Q_{RP}, Q_{SP}$  ; ガス圧によるリップおよびスカート下面の反力  
 $q_R, q_S$  ; リップとスカートの接触面接線圧  
 $R_R, R_b, R_h$  ; リップ取付半径, リップ巾, リップ高さ  
 $T_0, T_0', T$  ; 上側および下側ピストンの平均温度, クラウンの温度勾配  
 $\beta_R, \beta_S$  ; リップおよびスカート接触面の傾きによる付加撓み  
 $\Delta i, \Delta \lambda_T$  ; 初期すきま, 熱負荷作用後のすきま  
 $\delta_P^u, \delta_P^l$  ; ガス圧による上側および下側ピストンの相対変形  
 $\delta_Q^u, \delta_Q^l$  ; スカート反力による上側および下側ピストンの相対変形  
 $\delta_{T_0}, \delta_T, \delta \lambda_T$  ; クラウンの平均温度, 温度勾配および熱負荷によるスカート下縁の変形  
 $\lambda_{T_0}, \lambda_T, \lambda_Q$  ; クラウンの平均温度, 温度勾配およびスカート反力の大きさを表す定数  
 $\lambda_T^*, \lambda_T^{**}$  ; 熱負荷とガス圧, および熱負荷だけで接触開始する時期を表わす定数

## 第 2 章 リブ付ピストンの応力解析

### 2.1 円周型リブ付ピストンのリブ配置

円周型リブは熱応力を軽減するため、図 4.2.1 (a), (b)のごとく、円周方向に等間隔でスリットを入れたたんざく状とするが、これらのリブの合理的取付け半径位置は、ガス圧荷重が作用したとき円周リブによつて分断されたいくつかの円板部に生じる各最大応力が等しくなる位置として定めることができる。

以下ではまず一円周型リブの場合を考える。簡単のため円周リブのたんざく状分割の影響は無視し、内外両円板を周辺固定とみなせば、これらの最大応力はいずれもリブ部に生じる。いまその大きさをそれぞれ

$$\left. \begin{array}{l} \text{内側円板に対し} \quad \sigma_c = \gamma_c \cdot p \cdot \left( \frac{c}{h_c} \right)^2 \\ \text{外側円板に対し} \quad \sigma_b = \gamma_b \cdot p \cdot \left( \frac{b}{h_c} \right)^2 \end{array} \right\} \quad (4.2.1)$$

ただし

$h_c$  ; クラウン肉厚

$c$  ; リブの取付け半径

$b$  ; クラウン外半径

$p$  ; ガス圧

の形に表わす。合理的なリブ位置は上の両式を等置することによつて

$$\gamma_b = \gamma_c \left( \frac{c}{b} \right)^2 \quad (4.2.2)$$

とし、これより  $c/b$  を求めることにより定められる。ここに  $\gamma_c$  および  $\gamma_b$  の値は薄肉の場合にはそれぞれ 0.75 および図 4.2.2 実線のように  $c/b$  の関数として与えられ (1.53)

これらの値は第 1 編の厚肉解法による解とも一致する。したがつて合理的なリブ取付け半径位置はこの実線と式 (4.2.2) (図中一点鎖線) を同時に満足する解として定められ、いま

平均的なリブ厚さとして  $tr/b = 0.15$  とすれば

$$c/b = 0.41 \quad (4.2.3)$$

が得られる。

すなわち一円周型リブ付ピストンの合理的なリブ位置はスリットの影響を無視すれば、ピストン径の約4割程度の位置にすればよいことがわかる。

次に二円周型リブ付ピストン (図 4.2.1 (b)) の合理的リブ位置も同様にして求めることができる。まず内周リブと外周リブの最適取付半径比は式 (4.2.3) と同じとなる。最外周円板 (図における②) の外半径を  $a$ 、最大応力を式 (4.2.1) と同様に

$$\sigma_a = \gamma_a p \left( \frac{a}{hc} \right)^2 \quad (4.2.4)$$

と表わす。これを式 (4.2.1) の第2式と等置すれば

$$\gamma_a = \gamma_b \cdot \left( \frac{b}{a} \right)^2 \quad (4.2.5)$$

が得られ、これが外側両円板②、③ (図 4.2.1 参照) の最大応力が等しい条件となる。一円周型の解である式 (4.2.3) に相当する  $\gamma_b$  の値を図 4.2.2 から求めて式 (4.2.5) に用いれば、この関係は図 4.2.2 の破線のようになる。一方、式 (4.2.4) が最大応力となるような  $\gamma_a$  と  $b/a$  の関係は図 4.2.2 の実線で表わされる  $\gamma_b \sim c/b$  の関係と同じであるのでこの両曲線を満足する位置として外側リブの最適位置が定まり、 $tr/b = 0.15$  とすれば

$$b/a = 0.63 \quad (4.2.6)$$

となる。

円周リブが3円周以上の構造様式およびクラウンの肉厚がリブで隔てられた各円板部で異なる場合についても同様の考察によつてそれらの合理的リブ位置を求めることができる。



## 2.2 一円周型リブ付ピストンのガス圧応力の解析

一円周型リブ付ピストンで、前節にて求めた合理的リブ位置を有するピストンがガス圧荷重をうける場合の挙動を第1編第3章の手法を用いて解析する。

ここでは、図4.2.1(a)の構造でリブ数=6/周、 $b=680\text{ mm}$ 、 $C=280\text{ mm}$ 、 $h_c = t_r = 50\text{ mm}$ なる実用寸法を有する大型ピストンが2種のリブ周方向間隔、すなわち図中の $\theta_1/\theta$ が $1/2$ と $1/4$ をとる場合を選び、構造の一対称部 $\theta$ の部分を取り出して解析を行なった。この要素分割の様子を図4.2.3に示す。簡単のため解析ではリブ部および外円周部を固定とした。

リブ間隔 $\theta_1/\theta = 1/2$ に対する結果のうち、クラウン表面の半径方向応力 $\sigma_R$ の分布を図4.2.4に、また周方向応力 $\sigma_\theta$ の分布を図4.2.5にそれぞれ示す。図4.2.4より、円周リブの周方向断続構造のため、一つのリブ巾に沿う半径方向応力の分布は一様ではなくなりリブ端で大きく、リブ巾の中央で小さい分布形状を、また外円周上でもリブ間隔の中央延長線上で大きく、リブ巾中央延長上で小さい分布形状を示すことがわかる。リブより内側の円板部の最大応力はリブのすぐ内側に、外側円板部の最大応力はリブのすぐ外側に生じ、その大きさはほぼ等しいことから、2.1節のリブ位置設定法はほぼ妥当なことがわかるが、その最大応力の値自身は2.1節で求めた厚肉固定円板の解( $4.4\text{ Kg/mm}^2$ )よりかなり大きくなる。

図4.2.5の周応力 $\sigma_\theta$ の分布では、リブの周方向の端付近が最も大きく、外周の周応力は中心の応力とほぼ同程度となる。リブ端周応力の増加はリブ間隔を設けたことによつて生じた図の $\triangle OAB$ 部の圧力負担に起因し、リブ間隔の長さ $\overline{CD}$ が大きくなるにつれて急速に増加するものと考えられる。またリブのすぐ外側と内側の端の周応力のうち外側が大きいのは、それぞれが分担するものと考えられる面積 $\square ABCD$ および $\triangle OCD$ の負荷分担の差によるものと考えてよい。

次にリブの周方向間隔の大きい $\theta_1/\theta = 1/4$ に対する同様の結果を図4.2.6および図4.2.7に示す。半径応力の分布図4.2.6を、リブ間隔の小さい図4.2.4の結果と比較すれ

ば、外周上におけるリブ間2等分線上の応力は、リブの短小化による負荷分担の増加に起因して相当大きくなり、またリブ端付近の最大応力はやや増加するが、内側円板と外側円板の同部での値はほぼ等しいことがわかる。周応力の分布を示す図4.2.7では、中心および最外縁の値はリブ巾の大きい図4.2.5の場合とあまり変わらないが、リブの周方向端では、リブ間隔部の負荷分担の増加によつてかなり大きくなる。

そこで、以上の結果より、各部最大応力と構造形状の関係をもう少しわかりやすく整理することを考えてみる。まずリブ周方向端の最大半径応力  $\sigma_{Rmax}$  はリブの断続の程度を表わす  $\theta_1/\theta$  に支配されるから、いま一つの目安として前節の固定円板の解  $(\sigma_{Rmax})_{\theta_1/\theta=1}$  がリブ断続の影響によつて  $\theta_1/\theta$  倍になるものとし

$$(\sigma_{Rmax}^{\circ})_{\theta_1/\theta} = (\sigma_{Rmax})_{\theta_1/\theta} \times \frac{\theta}{\theta_1} \quad (4.2.7)$$

なる  $(\sigma_{Rmax}^{\circ})_{\theta_1/\theta}$  を求め、これと先の図4.2.4、図4.2.6の結果と比較すれば図4.2.8のようになる。これより両解析結果は式(4.2.7)の表わす直線の値とほぼ等しく、最大半径応力は式(4.2.7)のような簡易解によりほぼ推定しうる挙動を示すことがわかる。

次にリブ端の最大周応力  $\sigma_{\theta max}$  と  $\theta_1/\theta$  に対する同様の関係を図4.2.9に示す。ここでは比較解として、リブ間隔全作用荷重(図中の斜線部)のうち、図の扇形の部分  $m_1, m_2, m_3, m_4$  で示すような内外両円板から半径位置において1/2ずつとつた部分の荷重をリブ端で分担する場合の梁理論解を用いることにすれば、これと  $\theta_1/\theta$  の関係は図中の実線のようになる。これと図4.2.5および図4.2.7の2種の解析解(図中○, +印)を比較すれば、最大周応力はこの比較解に近い挙動を示し、 $\theta_1/\theta$  の増加とともに急増する傾向を示すことがわかる。 $\theta_1/\theta$  の大きい範囲では一般に最大半径応力の方が大きく、 $\theta_1/\theta$  がある大きさ以下では逆に周応力の方が増大する。

### 2.3 二円周型リブ付ピストンのガス圧応力の解析

次に2.1節で求めた合理的リブ位置を有する直径1090mmの二円周型リブ付ピストン

が頂面に一様なガス圧荷重をうける場合を、同様の方法によつて解析し、リブ配置の最適性発生応力分布の特徴、応力分布に対するリブ巾の影響などを求め、これより一般的な二円周型リブ付ピストンの最大応力の簡易推定方法を検討した。

解析に用いたピストンの構造寸法は図 4.2.1 (b)で

$$C = 162.5 \text{ mm}, \quad b = 365 \text{ mm}, \quad a = 545 \text{ mm}$$

$$h_c = t_r = 50 \text{ mm}, \quad \text{リブ数} = 6 / \text{周}$$

で、リブ間隔  $\theta_1/\theta$  が  $1/2$  および  $1/4$  の 2 種類の場合である。

$\theta_1/\theta = 1/2$  に対する解析結果のうち、冷却面側半径応力の分布を図 4.2.1 0 に、また周応力の分布を図 4.2.1 1 に示す。内側、中央および外側の各円板部の最大半径応力は内側円板がやや小さいのを除けば、いずれもほぼ等しく、2.1 節でのリブ位置設定法がほぼ妥当なものであることがわかる。しかし応力の絶対値は  $\theta_1/\theta$  の影響によつて相当高くなり、また外周上でリブ間中央線上の応力が増大する。周応力の最大値は、内外周リブともリブ端に生じ、その大きさは  $\theta_1/\theta$  に応じた分担面積の割合に応じて外周リブ側の方がはるかに高くなる。したがつて、リブ間隔の増大によつて、周応力が半径応力よりも大きくなるような場合には、分担受圧面積を考慮してリブ周方向間隔を再検討するとともに、内周と外周のリブ数を変えるなどの工夫が必要となる。

次にリブ巾を縮小した  $\theta_1/\theta = 1/4$  に対する結果を図 4.2.1 2 および図 4.2.1 3 にそれぞれ示す。半径応力、周応力とも外周側リブ縁の応力が増大するが、特に、周応力の増加が顕著となる。また、リブ間隔の増大に伴つて外周上で、リブ間中点の半径応力が増大するとともに、三つの円板部の最大半径応力の等価性もくずれ、リブ間隔がこの程度の構造ではもはや三つの円板部から成る構造様式とはみなせなくなつてくることがわかる。

以上の結果より、一円周型の場合と同様にして、二円周型リブ付ピストンに生じる最大応力の簡易推定方法を検討してみる。二円周型の場合、内外周リブの間隔を  $\theta_1/\theta$  によつて規定すれば、受圧面積分担の増加割合から外側リブの応力の方が高くなる。そこでまず、外側リブの最大半径応力の増加割合を一円周リブ型に対する式 (4.2.7) を用いて推定し、

これと上記2種の解析結果とを比較すれば図4.2.14のようになる。これより円板との等価性のくずれる $\theta_1/\theta$ の低いところを除いては、この推定解は実際の応力分布に充分近いことがわかる。図には同時に、外周上でリブ間中点Cの応力も同時に示した。これよりC点の半径応力はA点の応力に近い挙動をすることがわかる。

次に外周リブ端の最大周応力を一円周リブ型の場合と同様にして、図4.2.15の扇形の部分 $m_1, m_2, m_3, m_4$ で囲まれた、リブ間隔作用荷重の1/2ずつをリブ端で分担する場合の梁理論解と比較すれば図4.2.15のようになる。これより、外側リブ端の最大周応力はこのような方法で比較的精度よく推定できることがわかる。また図4.2.14と図4.2.15を比べて明らかごとく、 $\theta_1/\theta$ に伴う応力上昇率は周応力の方が急激で、最大周応力を半径応力以下とするためには $\theta_1/\theta$ を1/2以上、すなわちリブ巾をリブ間隔以上とする必要があることがわかる。

#### 2.4 放射型リブ付ピストンのガス圧応力の解析

次に図4.2.1(C)に示す放射型のリブ構造様式を有するピストンの場合を解析する。この種のリブ形状のピストンは、リブ枚数を増すことによりガス圧応力を低く押えることができるから、ここでは現用超大型ピストンで用いられる8枚型とその前後の6枚および10枚型の各場合を選び、それらの直径/肉厚比を数種変えた構造につき、第1編第3章の方法で発生応力の特徴、直径ヤリブ本数の増減による応力変化の様相を求め、それらの簡易推定方法を検討する。

解析では構造の対称性を考えて一構成単位として図4.2.1(C)の1/2リブ間隔 $\alpha$ の部分を取り、クラウン部に一様ガス圧荷重を負荷して、外周およびリブ部で固定の条件により解析した。

この結果のうち、一例として半径と肉厚の比が10に対する各リブ枚数の場合の結果を図4.2.16、図4.2.17および図4.2.18に示す。各図とも、クラウン裏面の半径応力および周応力の分布を、それぞれ最大応力を含むと思われる半径方向断面および周方向断面上

で立体的に示した。図より半径応力の最大値は外周縁辺上で、リブ間隔の2等分点の位置Aに、周応力の最大値は、リブ取付け線上で、中央付近Bの位置に生じ、その大きさはリブ数が増し、したがって一つのリブ取付け線が分担する荷重の少なくなる6, 8, 10枚となるにつれて、漸次減少していくことがわかる。また、一般に、最大半径応力よりもリブ取付け線上に生じる最大周応力の方が大きい。

そこで次に、この3種のリブ数の各々の場合につき、肉厚と直径の比を種々に変えた解析を行ない、外周上でリブ間の2等分点Aに生じる最大半径応力と直径/肉厚比 ( $b/h_c$ ) およびリブ間隔 ( $\alpha$ ) の関係を求めれば図4.2.19の実線のようになる。また、リブ取付け線上の点Bでの最大周応力と  $b/h_c$  および  $\alpha$  との関係を求めれば、同図破線のようになる。これよりリブ本数が一定ならば、A点およびB点の各最大応力は直径/肉厚比の増加とともに漸増し、たとえばリブ間隔  $\pi/8$  の構造では  $b/h_c$  が10で  $\sigma_{Rmax}/p = 4.8$ ,  $\sigma_{\theta max}/p = 8.8$  に対し、 $b/h_c$  が15ではそれぞれ12.2および18.4となる。いまリブ本数と最大応力との関係を見やすくするため、横軸にリブ本数を取って書き直せば図4.2.20となる。図よりリブ数の増加とともに各応力の低下していく様子が明らかであり、たとえば直径/肉厚比10では最大半径応力はリブ数が6から10になれば約1/3に、また周応力は約1/2に低下させうる事がわかる。

次にこれらの各最大応力の簡易推定方法を検討する。

いま、図4.2.21の挿入図に示すように、リブ巾2等分線の外周上の点Aと中心Oを結ぶ線AO上でAより測つた長さAOと、リブ縁辺上の点BとOを結ぶ線分BOの長さが等しくなるようにBおよびOを定め、その長さを $\bar{a}$ とする。このようにすれば、図4.2.16～図4.2.18に示すリブ縁辺上の最大周応力はいずれもこのB点付近に生じていることがわかる。そこで今一辺の長さ $2\bar{a}$ の周辺固定正方形板が同じガス圧 $p$ をうける場合を考え、その辺の midpointでの応力 $\sigma_{th}$ と $\bar{a}/h_c$ の関係を求めれば図4.2.21実線のように、また対応するB点の応力を図4.2.19あるいは図4.2.20より求めれば図中の○印のようになる。これよりB点の最大周応力はこのような簡易解に近い挙動を示すことがわかる。次に正方形板

の解  $\sigma_{th}$  を A 点の応力と比較するためには外周  $\overline{DA}$  の長さが  $\bar{\alpha}$  の  $1+\alpha$  倍になっていることを考慮すれば、比較解は  $\sigma_{th}$  の  $1/(1+\alpha)$  倍とする必要がある。そこで各リブ数の場合に対応する  $\sigma_{th}/(1+\alpha)$  を同図破線のように求める一方、A 点の応力を先の図 4.2.19 より求めれば、図中の  $\Delta$  印のようになる。両者を比較すれば、A 点の応力は破線の  $\sigma_{th}/(1+\alpha)$  の曲線にほぼ近い挙動を示すことがわかる。

## 2.5 リブ付ピストンの熱曲げ応力の解析

リブ付ピストンに作用する熱応力を、リブなしピストンの解析の場合と同様に、クラウンの肉厚平均温度に対する応力、温度勾配に対する応力および隅角部の局部昇温に対する応力に分けて考え、本節ではまずクラウンの温度勾配によつて誘起される熱応力の状態を第 1 編第 3 章の手法によつて解析を行なう。次にクラウンの熱伸びに対する挙動で最も問題となる、リブ取付線に沿う拘束熱応力の問題に対しては次章で詳しく解析を行なうことにする。局部昇温に対する挙動はリブなしピストンの場合と同じく全体の挙動にはあまり影響しないので簡単のためここではこれを省略することにする。

さて、図 4.2.12 に示す、 $\theta_1/\theta = 1/4$  の二円周型リブ付ピストンがクラウンの肉厚内に、触火面側  $100^\circ\text{C}$ 、冷却面側  $-100^\circ\text{C}$  の直線温度勾配をうける場合を解析した。この結果のうち、冷却面側表面の半径応力  $\sigma_R$  および周応力  $\sigma_\theta$  の分布を図 4.2.22 に示す。これより明らかなごとく、温度勾配に基づく熱歪は外周のほか中間部でリブ支持した影響によつてほぼ完全に拘束され、いたるところで完全拘束時の熱応力  $\sigma_T^*$  (式 (3.3.6)) の一様値が生じていることがわかる。同様にして一円周型に対する図 4.2.4 および放射型に対する図 4.2.16 の場合を解析したところ、同様の結果が得られた。これらより、リブ付ピストンの温度勾配による熱応力はリブ形状、ピストン径の如何にかかわらず温度による熱歪を完全に拘束した時の熱応力になることが明らかとなつた。

### 第 3 章 リブ付ピストンのリブ根部の拘束熱応力解析法

#### 3.1 解析方針

冷却室に位置するリブと高い熱負荷をうけるクラウンが両者の接合縁で相互に熱伸び差を拘束されるために生じる拘束熱応力の問題を解析するために新たな解析理論を導き、これによつてその挙動を明らかにしていくことにする。

簡単のため円周リブを主対象とし、リブとクラウンが互に異なる肉厚平均温度をうけている場合を考える。放射リブおよびその他についてもこれらの結果を容易に適用することができる。

さて、図 4.3.1 (a)のごときクラウン、リブおよびスカートから成る構造のうち、現象の局所性と構造の対称性を考慮して、 $A_1 \sim A_4$  および  $B_1 \sim B_4$  で囲まれた部分を考える。このとき接合線  $A_2 D_2$  で、リブとクラウンの熱伸び差を拘束することによつて生じる応力はリブとクラウンのいずれにおいても面内力の力伝達の解析問題となるから、同図(a)中  $A_1 A_3 D_3 D_1$  部 (リブクラウン)、 $D_1 D_3 B_3 B_1$  部 (リブ間クラウン) の両クラウン部を  $\pi/2$  回転して、図 4.3.1 (b)のごとき構造を取扱うことにし、リブとクラウンが直交している影響は両者の連続条件を考えるときに導入することにする。

さて、この構造を解析する便宜上、図 4.3.2 のごとくリブクラウンとリブ間クラウンをそれぞれ 2 枚の帯板要素に、またリブ部を 3 枚の帯板要素に分割して取扱うことにし、各帯板要素に、図の A, B...F 端から帯板の軸方向 (以下本章では軸方向と呼ぶ) に  $x_1$  軸, G...I 端から  $x_2$  軸, 各帯板の深さ方向に  $S_i$  軸の直角座標系を定める。帯板①の深さを  $a_i$ 、肉厚を  $t_i$ 、線膨張係数を  $\alpha_i$ 、リブの長さを  $L_0$ 、リブ間クラウンの長さを  $l_0$  とし、要素内の軸方向変位を  $\bar{u}_i(x_j, S_i)$ 、 $S_i$  方向変位を  $\bar{w}_i(x_j, S_i)$ 、軸方向断面力を  $\bar{P}_{x_i}(x_j, S_i)$  ( $= \bar{\sigma}_{x_i} \cdot t_i$ , 以下同じ)、 $S_i$  方向断面力を  $\bar{P}_{S_i}(x_j, S_i)$ 、剪断力を  $\bar{q}_i(x_j, S_i)$ 、温度を  $\bar{T}_i(x_j, S_i)$ 、また帯板上下面の縁辺で、境界面に作用する深さ方向力を  $p_i(x_j)$ 、軸方向力を  $q_i(x_j)$ 、軸方向変位を  $u_i(x_j)$ 、温度を  $T_i(x_j)$  と定める。

そして、次の二つの仮定を設ける。

- (i) 現象がリップとクラウンの接合縁で生じた拘束熱応力の拡散現象であり、拡散方向に相当する帯深さ方向の応力、変形の分布は比較的単純な形をしていることから、帯板要素内の軸方向変位  $u_i$  の深さ方向の分布を直線近似する。
- (ii) 拘束熱応力の発生部となる接合縁では、リップ縁辺に垂直に作用する力は、クラウンの面外曲げ抵抗を無視すれば零となる。したがってこの縁辺では長手方向の力の取合のみとなるから、帯板の解析においてポアソン比の影響を省略する。このようにしても最も重要な接合部付近の拘束熱応力の解には、あまり影響を及ぼさないとと思われる。

以下では上の各成分を用いて、帯板要素内の挙動を支配する偏微分方程式を帯板縁辺での常微分方程式の連立系に置き換え、各帯板間の連続条件を用いてその解を誘導することにする。

### 3.2 帯板要素に対する基礎方程式

帯板要素①の長さ  $dx_j$ 、深さ  $ds_i$  の部分を取り出して考える。

仮定(i)により軸方向変位は次のように書ける。

$$\bar{u}_i = u_{i-1} \cdot (a_i - s_i) / a_i + u_i \cdot s_i / a_i \quad (4.3.1)$$

帯板要素①内の温度は次のごとく与えられるものとする。

$$\bar{T}_i = T_{i-1} (a_i - s_i) / a_i + T_i \cdot s_i / a_i \quad (4.3.2)$$

仮定(ii)を考慮すれば軸力  $\bar{P}_{x_i}$  は  $E$  をヤング率、 $\alpha$  を線膨張係数として

$$\bar{P}_{x_i} = E t_i \partial \bar{u}_i / \partial x_j - E t_i \alpha \bar{T}_i \quad (4.3.3)$$

と書ける。“ $\partial$ ” =  $d/dx_j$  として上式に式(4.3.1)を用いれば



$$\bar{P}_{xi} = Et_i (a_i - S_i/a_i U'_{i-1} + S_i/a_i U'_i) - Et_i \alpha_i \bar{T}_i \quad (4.3.4)$$

が得られる。次に面内の剪断力  $\bar{q}_i$  は、 $x_j$  方向の力の釣合条件

$$\partial \bar{P}_{xi} / \partial x_j + \partial \bar{q}_i / \partial S_i = 0 \quad (4.3.5)$$

に式 (4.3.4) を用い、 $S_i$  について積分することによつて得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \bar{q}_i = Et_i \left\{ \frac{(a_i - S_i)^2}{2a_i} U''_{i-1} - \frac{S_i}{2a_i} U''_i \right\} \\ - Et_i \alpha_i \left\{ \frac{(a_i - S_i)^2}{2a_i} T'_{i-1} - \frac{S_i^2}{2a_i} T'_i \right\} + q_{oi} \end{aligned}$$

ただし

$q_{oi}$ ; 積分定数

上式を  $\bar{q}_i$  に対する境界条件

$$S_i = 0 \quad \text{で} \quad \bar{q}_i = q_{i-1}, \quad S_i = a_i \quad \text{で} \quad \bar{q}_i = q_i$$

に用いれば

$$\begin{aligned} \bar{q}_i = Et_i \left\{ (-S_i + S_i^2/2a_i) U''_{i-1} - S_i^2/2a_i U''_i \right\} + q_{i-1} \\ - Et_i \alpha_i \left\{ (-S_i + S_i^2/2a_i) T'_{i-1} - S_i^2/2a_i T'_i \right\} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

および

$$q_{i-1} - q_i = \frac{1}{2} E a_i t_i (U''_{i-1} + U''_i) - \frac{1}{2} E a_i t_i \alpha_i (T'_{i-1} + T'_i) \quad (4.3.7)$$

の両式が得られる。次に  $S_i$  方向の力の釣合から

$$\partial \bar{q}_i / \partial x_j + \partial \bar{P}_{Si} / \partial S_i = 0 \quad (4.3.8)$$

が成立つ。式(4.3.6)を上式に用い  $S_i$  について積分すれば

$$\begin{aligned} \bar{P}_{Si} = & E t_i \left\{ \left( \frac{S_i^2}{2} - \frac{S_i^3}{6a_i} \right) U_{i-1}''' + \frac{S_i^2}{6a_i} U_i'' \right\} \\ & - S_i q_{i-1}' - E t_i \alpha_i \left\{ \left( \frac{S_i^2}{2} - \frac{S_i^3}{6a_i} \right) T_i'' \right. \\ & \left. + \frac{S_i^3}{6a_i} T_i'' \right\} + P_{S0i} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

ただし

$P_{S0i}$  ; 積分定数

$\bar{P}_{Si}$  に対する境界条件

$$S=0 \text{ で } \bar{P}_{Si} = P_{i-1}, \quad S=a_i \text{ で } \bar{P}_{Si} = P_i$$

を上式に用いれば

$$\begin{aligned} -P_{i-1} + P_i = & \frac{1}{6} E a_i^2 t_i (2U_{i-1}''' + U_i''') - a_i q_{i-1}' \\ & - \frac{1}{6} E t_i \alpha_i a_i^2 (2T_{i-1}'' + T_i'') \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

および

$$P_{S0i} = P_{i-1} \quad (4.3.10')$$

の両式が得られる。次に剪断力と剪断変形の関係

$$\bar{q}_i = G t_i \left( \partial \bar{u}_i / \partial S_i + \partial \bar{w}_i / \partial x_j \right) \quad (4.3.11)$$

に式(4.3.6)および式(4.3.1)を用いれば次式となる。

$$\begin{aligned} G t_i \partial \bar{w}_i / \partial x_j = & \frac{G t_i}{a_i} (U_{i-1} - U_i) + q_{i-1} \\ & + E t_i \left\{ (-S_i + S_i^2/2a_i) U_{i-1}'' - S_i^2/2a_i U_i'' \right\} \\ & - E t_i \alpha_i \left\{ (-S_i - S_i^2/2a_i) T_{i-1}' - \frac{S_i^2}{2a_i} T_i' \right\} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

ただし  $G$  は剪断弾性係数である。簡単のため  $\bar{w}_i$  を

$$\bar{w}_i = \frac{1}{a_i} \int_0^{a_i} \bar{w}_i ds_i$$

すなわち断面の平均値と定義し直せば、式 (4.3.12) は

$$\begin{aligned} G t_i \bar{w}_i' &= G t_i / a_i \cdot (u_{i-1} - u_i) - \frac{1}{6} E a_i t_i (2 u_{i-1}'' + u_i'') \\ &+ q_{i-1} + \frac{1}{6} E a_i t_i \alpha_i (2 T_{i-1}' + T_i') \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

となる。そこで

$$\hat{q}_i = q_i / E, \quad \hat{p}_i = p_i / E, \quad E_g = E / G \quad (4.3.14)$$

と置いて式 (4.3.7), 式 (4.3.10) および、式 (4.3.13) を書き直せば

$$\hat{q}_{i-1} - \hat{q}_i = a_i t_i / 2 \cdot (u_{i-1}'' + u_i'') - a_i t_i \alpha_i / 2 \cdot (T_{i-1}' + T_i') \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} -\hat{p}_{i-1} + \hat{p}_i &= a_i^2 t_i / 6 \cdot (2 u_{i-1}''' + u_i''') - a_i \hat{q}_{i-1}' \\ &- a_i^2 t_i \alpha_i / 6 \cdot (2 T_{i-1}'' + T_i'') \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_i' &= (u_{i-1} - u_i) / a_i - E_g a_i / 6 \cdot (2 u_{i-1}'' + u_i'') \\ &+ E_g / t_i \cdot \hat{q}_{i-1} + E_g a_i \alpha_i / 6 \cdot (2 T_{i-1}' + T_i') \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

が得られる。式 (4.3.1), 式 (4.3.4), 式 (4.3.6), 式 (4.3.9), 式 (4.3.15)

式 (4.3.16), 式 (4.3.17) が帯板要素①に対する基礎方程式である。

### 3.3 長縁の連続条件

次に各帯板間の力の平衡条件および変形の連続条件を考えれば、これらはそれぞれ次のようになる。

(a) リブとリブクラウンの境界0縁では

(i) リブ測0縁での垂直分布力  $P_{2u}$  (ただし添字  $u$  は上縁側を表わす) はクラウンの面外変形抵抗を無視すれば零となる。

(ii) クラウン側0縁の  $S_i$  方向変位  $\bar{w}_2$  は, 図 4.3.1 (a) の線  $\overline{O O'}$  が変形後も元の形を保持することにより,  $X_1$  方向に変化しない。

(iii) 軸方向変位  $u_2$ , 軸方向の剪断力  $q_2$  は両縁で連続する。

がそれぞれ成立つ。

(b) 次にクラウン上縁の A 縁では, リブクラウンとリブ間クラウンの干渉などにより, リブとリブクラウンの接合面で生じた拘束応力が消滅する。

(c) リブ間クラウンの上下縁すなわち G 縁および I 縁では, 上記(b)および(a)(ii)の条件が成立する。

(d) リブ下端の F 縁では, 接合縁で生じた拘束応力は消滅する。

(e) リブクラウンとリブ間クラウンの接合縁では, 変位および応力が連続する。

(f) リブの軸方向端では軸方向力が零となる。

(g) 対称面図 4.3.1 (a) の  $A_1 \sim A_4$  および  $B_1 \sim B_4$  の面は, クラウンの平均温度の変化に応じて, それぞれ  $A_1 \sim A_4$  および  $B_1 \sim B_4$  面内を半径方向に動く。

(h) その他の接合縁では変位および力が連続する。

以上の諸条件によつて解析を進めることができる。

上で述べた(a)~(h)の縁辺の連続条件を表式化すれば, 次のようになる。

$$(a)(i) \quad P_{2u} = 0 \quad (4.3.18)$$

$$(a)(ii) \quad \bar{w}'_2 = 0 \quad (4.3.19)$$

$$(b) \quad P_o = q_o = 0 \quad (4.3.20) \quad (4.3.21)$$

$$(c) \quad \bar{w}'_7 = q_7 = P_{su} = q_{su} = 0 \quad (4.3.22) \quad (4.3.23) \quad (4.3.24) \quad (4.3.25)$$

$$(d) \quad P_{SD} = q_{SD} = 0 \quad (4.3.26) \quad (4.3.27)$$

ただし、添字  $D$  は下縁側を表わす。

以上のほか帯板要素①と②，③と④と⑤および⑥と⑦で，各  $\bar{w}_i$  は連続しているから次式が成立する。

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad \bar{w}_3 = \bar{w}_4 = \bar{w}_5, \quad \bar{w}_6 = \bar{w}_7$$

(4.3.28) (4.3.29) (4.3.30) (4.3.31)

以上の基礎関係式と未知関数を照合すれば，未知関数は  $u_0 \sim u_4, u_{5D}, u_{5U}, u_6, u_7, \bar{w}_1 \sim \bar{w}_7, p_0, p_1, p_{2D}, p_{2U}, p_3, p_4, p_{5D}, p_{5U}, p_6, p_7, q_0 \sim q_4, q_{5D}, q_{5U}, q_6, q_7$  の35個，また基礎関係式は各板要素内で式(4.3.15)，式(4.3.16)，式(4.3.17)の3式ずつ21個，境界条件式(4.3.18)～式(4.3.31)の14個の計35個となり，これらを解くことによつて所要の解が得られる。

### 3.4 リブとリブクラウンに対する基礎方程式と一般解

まず帯板要素①～⑤に対する基礎方程式を誘導する。

帯板要素①～⑤に対し式(4.3.15)の左辺を加えれば，式(4.3.21)および，式(4.3.27)を考慮して

$$\sum_{i=1}^5 (\hat{q}_{i-1} - \hat{q}_i) = 0 \tag{4.3.32}$$

が，また式(4.3.18)および式(4.3.26)を考慮して，帯板要素③～⑤に対する式(4.3.16)の左辺の総和を取れば

$$\sum_{i=3}^5 (-\hat{p}_{i-1} + \hat{p}_i) = 0 \tag{4.3.33}$$

がそれぞれ得られる。次に式(4.3.19)と式(4.3.28)から次式が成立つ。

$$\bar{w}_i' = 0 \tag{4.3.34}$$

そこで，式(4.3.19)，式(4.3.29)，式(4.3.30)，式(4.3.32)，式(4.3.33)

および式 (4.3.34) の各式を  $U_0 \sim U_5$  で表示することを考える。あとの便宜上、この誘導に先立つて式 (4.3.15), 式 (4.3.21), 式 (4.3.27) から所要の  $\hat{q}_i$  を  $U_i$  で表わしておく。簡単のため以下では

$$t_1 = t_2 = t_c, \quad t_3 = t_4 = t_5 = t_R$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_c, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_R$$

とすれば、これらはそれぞれ次のように書ける。

$$q_1 = \frac{1}{2} E a_1 t_c (U_0'' - U_1'') + \frac{1}{2} E a_1 t_c \alpha_c (T_0' + T_1')$$

$$q_2 = \frac{1}{2} E a_3 t_R (U_2'' + U_3'' - \alpha_R T_{2u}' + \alpha_R T_3') \\ + \frac{1}{2} E a_4 t_R (U_3'' + U_4'' - \alpha_R T_3' - \alpha_R T_4') + \frac{1}{2} E a_5 t_R \cdot$$

$$(U_4'' + U_5'' - \alpha_R T_4' - \alpha_R T_5')$$

$$q_3 = \frac{1}{2} E a_4 t_R (U_3'' + U_4'' - \alpha_R T_3' - \alpha_R T_4')$$

$$+ \frac{1}{2} E a_5 t_R (U_4'' + U_5'' - \alpha_R T_4' - \alpha_R T_5')$$

$$q_4 = \frac{1}{2} E a_5 t_R (U_4'' + U_5'' - \alpha_R T_4' - \alpha_R T_5')$$

(4.3.35)

さて、まず式 (4.3.32) に式 (4.3.15) を用いて2回積分すれば

$$\sum_{i=1}^5 \left\{ a_i t_i / 2 \cdot (U_{i-1} + U_i) - a_i d_i t_i / 2 \cdot (T_{i-1}^K + T_i^K) \right\}$$

$$= C_0 + C_1 x$$

(4.3.36)

ただし、 $T_i^K = \int T_i dx$ ,  $C_i$ ; 積分定数

が得られる。次に式 (4.3.33) に式 (4.3.16) および式 (4.3.35) を用いて3回積分すれば

$$U_2 + R_1 U_3 + R_2 U_4 + R_3 U_5 + F_1^K = C_2 + C_3 \chi_1 + C_4 \chi_1^2$$

ただし

$$R_1 = (1 + \alpha_{43})(2 + \alpha_{43})$$

$$R_2 = (\alpha_{43} + \alpha_{53})(3 + 2\alpha_{43} + \alpha_{53})$$

$$R_3 = \alpha_{53}(3 + 3\alpha_{43} + 2\alpha_{53}), \quad \alpha_{ij} = a_i/a_j$$

$$F_1^K = \alpha_R (T_{2u}^K + R_1 T_3^K + R_2 T_4^K + R_3 T_5^K)$$

(4.3.37)

となる。さらに式(4.3.34)および式(4.3.19)に式(4.3.17)を用いて  $W_i'$  を  $U_i$  等で表わす。式(4.3.35)を併用すればこれらはそれぞれ次式となる。

$$(U_0 - U_1)/a_1 - E_g a_1 / 6 \cdot (2U_0'' + U_1'')$$

$$+ E_g a_1 \alpha_c / 6 \cdot (2T_0' + T_1') = 0$$

(4.3.38)

$$(U_1 - U_2)/a_2 - E_g a_2 / 6 \cdot \{3\alpha_{12} U_0'' + (2 + 3\alpha_{12}) \cdot U_1''$$

$$+ U_2''\} + F_2' = 0$$

(4.3.39)

ただし

$$F_2 = 1/2 \cdot E_g a_1 \alpha_c (T_0 + T_1) + 1/6 \cdot E_g a_2 \alpha_c (2T_1 + T_2)$$

同様にして、式(4.3.29)、式(4.3.30)の両式を1回微分したものに式(4.3.17)

および式(4.3.35)を用いれば、それぞれ次式が得られる。

$$(U_2 - U_3)/a_3 - (U_3 - U_4)/a_4 + E_g a_3 / 6 \cdot (U_2'' + 2U_3'')$$

$$+ E_g a_4 / 6 \cdot (2U_3'' + U_4'') + F_3' = 0$$

(4.3.40)

ただし

$$F_3 = -E_g a_3 \alpha_R / 6 \cdot (T_{2u} + 2T_3) - E_g a_4 \alpha_R / 6 \cdot (2T_3 + T_4)$$

$$(U_3 - U_4)/a_4 - (U_4 - U_5)/a_5 + E_g a_4 / 6 \cdot (U_3'' + 2U_4'')$$

$$+ E_g a_5 / 6 \cdot (2U_4'' + U_5'') + F_4' = 0$$

(4.3.41)

ただし

$$F_4 = -E_g a_4 \alpha_R / 6 \cdot (T_3 + 2T_4) - E_g a_5 \alpha_R / 6 \cdot (2T_4 + T_5)$$

以上の結果、この場合の基礎方程式は式(4.3.36)～式(4.3.41)の各式で与えられ、これら  $U_0 \sim U_5$  の6個の未知関数に関して解く問題に帰着した。この解き方にはいろいろあるが、ここではこれを直接解くことにし、まず式(4.3.37)、式(4.3.36)の両式から  $U_5$  および  $U_0$  を  $U_1 \sim U_4$  で表わせれば次式が得られる。

$$U_5 = -U_2/R_3 - R_1/R_3 U_3 - R_2/R_3 U_4 + F_5$$

ただし

$$F_5 = -F_1^K/R_3 + (C_2 + C_3 \chi_1 + C_4 \chi_1^2)/R_3$$

} (4.3.42)

$$U_0 = -(1 + \alpha_{21})U_1 - R_5 U_2 - R_6 U_3 - R_7 U_4 + F_6$$

ただし

$$F_6 = \alpha_{51} \hat{t}/R_3 \cdot F_1^K + \sum_{i=1}^5 \alpha_{i1} \cdot \alpha_i \cdot \frac{t_i}{t_c} (T_{i-1}^K + T_i^K) + (2C_0 + 2C_1 \chi_1)/a_1 t - \alpha_{51} \hat{t}/R_3 \cdot (C_2 + C_3 \chi_1 + C_4 \chi_1^2)$$

$$R_5 = \alpha_{21} + \alpha_{31} \hat{t} - \alpha_{51} \hat{t}/R_3, \quad \hat{t} = tR/t_c$$

$$R_6 = \alpha_{31} + \alpha_{41} \hat{t} - \alpha_{51} \hat{t} R_1/R_3$$

$$R_7 = \alpha_{41} \hat{t} + \alpha_{51} \hat{t} - \alpha_{51} \hat{t} R_2/R_3$$

} (4.3.43)

この両式を残りの各式に用いて  $U_0$  および  $U_5$  を消去すれば

$$D = \sqrt{Eg/6} \cdot a_1 \cdot \frac{d}{d\chi_1}$$

なる微分演算子を用いて次式が得られる。

$$[P(D)]\{u\} = [\Phi(D)] \cdot \{T\} + [\phi(\chi_1)]\{c\}$$

ただし

$$\{u\}^t = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$$

$$\{T\}^t = \{\alpha_c T_0, \alpha_c T_1, \alpha_c T_{20}, \alpha_R T_{2u}, \alpha_R T_3, \alpha_R T_4, \alpha_R T_5\}$$

$$\{c\}^t = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

} (4.3.44)



$$T(D) = \begin{bmatrix} (1+\alpha_{21})D^2 - (2+\alpha_{21}) & 2R_5D^2 - R_5 & 2R_6D^2 - R_6 & 2R_7D^2 - R_7 \\ \alpha_{21}^2 D^2 + 1 & -\alpha_{21}^2(1-3\alpha_{12}R_5)D^2 - 1 & 3\alpha_{21}R_6D^2 & 3\alpha_{21}R_7D^2 \\ 0 & -\alpha_{41}\alpha_{51}/R_3 D^2 - \alpha_{45}/R_3 & \alpha_{41}^2(1-\frac{\alpha_{54}R_1}{R_3})D^2 + (1-\frac{\alpha_{45}R_1}{R_3}) & \alpha_{41}^2(2+2\alpha_{54}-\alpha_{54}\frac{R_2}{R_3})D^2 - (1+\alpha_{45}+\alpha_{45}\frac{R_2}{R_3}) \\ 0 & \alpha_{31}^2 D^2 + 1 & 2\alpha_{31}^2(1+\alpha_{43})D^2 - (1+\alpha_{34}) & \alpha_{31}\alpha_{41}D^2 + \alpha_{34} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(D)] = \begin{bmatrix} -1 & (1+\alpha_{21})(D^2-1) & \alpha_{21}(2D^2-1) & (R_5-\alpha_{21})(2D^2-1) & R_6(2D^2-1) & R_7(2D^2-1) & 0 \\ 0 & \alpha_{21}^2 D^2 & 2\alpha_{21}^2 D^2 & 3\alpha_{21}(R_5-\alpha_{21})D^2 & 3\alpha_{21}R_6D^2 & 3\alpha_{21}R_7D^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_{45}}{R_3}(\alpha_{51}^2 D^2 + 1) & \frac{\alpha_{41}}{R_3}(R_6-\alpha_{31})D^2 - \alpha_{45}\frac{R_1}{R_3} & \alpha_{41}\alpha_{51}(2+2\alpha_{45} - \frac{R_2}{R_3})D^2 - \alpha_{45}\frac{R_2}{R_3} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{31}^2 D^2 & 2\alpha_{31}^2(1+\alpha_{43})D^2 & \alpha_{31}\alpha_{41}D^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(x_i)] = \begin{bmatrix} z/a, t c & 2x/a, t c & -\alpha_{51}\hat{t}/R_3 & -\frac{\alpha_{51}\hat{t}}{R_3}x_1 & \frac{\alpha_{51}\hat{t}}{R_3}(-x_1^3 + \frac{2}{3}Eg a_i^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_{45}}{R_3} & \frac{\alpha_{45}}{R_3}x_1 & \frac{\alpha_{45}}{R_3}(x_1 - \frac{Eg}{3}a_5^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.3.44')

上式が  $u_1 \sim u_4$  に対する基礎方程式である。上式中  $[T(D)]$  の  $i$  行  $j$  列の成分は  $\gamma_{ij} D^2 + \bar{\gamma}_{ij}$  の形をしているから、これよりある  $u_i$  について解いた式は 8 階の線形微分方程式となる。この解は  $u_i^*$ ,  $u_i^{**}$  を同次解および特解とすれば

$$u_i = u_i^* + u_i^{**} \quad (i = 1 \sim 4) \quad (4.3.45)$$

と書ける。このうち  $u_i^*$  は上の 8 階の微分方程式の右辺を零とした式

$$\left. \begin{aligned} & \{\Gamma(D)\} \{u\} = 0 \\ \text{あるいは} & \\ & \sum_{j=0}^4 R_{2j} d^{2j} u_i^* / d\chi_i^{2j} = 0 \quad (i = 1 \sim 4) \end{aligned} \right\} (4.3.46)$$

から求まる双 4 次の特性方程式の根の性質から次式となる。

$$u_i^* = \sum_{j=1}^4 (\beta_{ij} \operatorname{ch} \lambda_j \chi_i + \bar{\beta}_{ij} \operatorname{sh} \lambda_j \chi_i) \quad (i = 1 \sim 4) \quad (4.3.47)$$

ただし、 $\lambda_j$  は式 (4.3.46) の特性方程式の根であり、 $\beta_{ij}$  および  $\bar{\beta}_{ij}$  は積分定数である。上式中の  $u_i^*$  と  $u_j^* (i \neq j)$  の積分定数間の関係は、上式を式 (4.3.46) の第 1 式に用いたとき、これらが  $\chi_i$  に無関係に成立しなければならないという条件

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \left( \{\Gamma(\lambda_i)\} \cdot \{\beta_{ji}\} \operatorname{ch} \lambda_i \chi_i + \{\Gamma(\lambda_i)\} \{\bar{\beta}_{ji}\} \operatorname{sh} \lambda_i \chi_i \right) \equiv 0 \\ \text{ただし} & \\ & \{\beta_{ji}\}^t = \{\beta_{1i} \ \beta_{2i} \ \beta_{3i} \ \beta_{4i}\}, \quad \{\bar{\beta}_{ji}\}^t = \{\bar{\beta}_{1i} \ \bar{\beta}_{2i} \ \bar{\beta}_{3i} \ \bar{\beta}_{4i}\} \end{aligned} \right\} (4.3.48)$$

より定めることができる。なお上式で  $\{\Gamma(\lambda_i)\}$  は  $\{\Gamma(D)\}$  中の  $D$  を  $\lambda_i$  に置き換えたものである。上式から

$$\left. \begin{aligned} & \{\Gamma(\lambda_i)\} \{\beta_{ji}\} = 0 \\ \text{および} & \\ & \{\Gamma(\lambda_i)\} \{\bar{\beta}_{ji}\} = 0 \quad (i = 1 \sim 4) \end{aligned} \right\} (4.3.49)$$

が得られる。これより  $\beta_{j2}$  を基準未定定数、また  $\theta_{ji}$  を

$$\theta_{ji} = \beta_{ji} / \beta_{j2}$$

とすれば、式 (4.3.47) は次の形に書ける。

$$u_i^* = \sum_{j=1}^4 (\theta_{ji} \beta_{j2} \operatorname{ch} \lambda_j \chi_i + \theta_{ji} \bar{\beta}_{j2} \operatorname{sh} \lambda_j \chi_i) \quad (4.3.50)$$

次に式 (4.3.44) の右辺第1項に対する特解  $\tilde{u}_i^{**}$  を求める。この右辺第1項をいまべき級数の形で表わして

$$\left. \begin{aligned} & \{\Phi(D)\}\{T\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{\tilde{w}_n\} x_i^n \\ & \text{ただし} \\ & \{\tilde{w}_n\}^t = \{\tilde{w}_{1n} \quad \tilde{w}_{2n} \quad \tilde{w}_{3n} \quad \tilde{w}_{4n}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.51)$$

とし、一方  $\tilde{u}^{**}$  を

$$\left. \begin{aligned} & \{\tilde{u}^{**}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\tilde{p}_n\} x_i^n \\ & \text{ただし} \\ & \{\tilde{p}_n\}^t = \{\tilde{p}_{1n} \quad \dots \dots \dots\}, \\ & \{\tilde{u}^{**}\}^t = \{\tilde{u}_i^{**} \quad \dots \dots \dots\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.52)$$

と置いて、両式を式 (4.3.44) に用い、 $x_i$  の各べきの係数を比較すれば  $\{\tilde{p}_n\}$  と  $\{\tilde{w}_n\}$  の関係が定まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{6} E g a_i^2 (n+2)(n+1) \{\tilde{r}\} \{\tilde{p}_{n+2}\} + \{\tilde{r}\} \{\tilde{p}_n\} = \{\tilde{w}_n\} \\ & n = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (4.3.53)$$

ここに  $\{\tilde{r}\}$  および  $\{\tilde{r}\}$  はそれぞれ  $r_{ij}$  および  $\bar{r}_{ij}$  を  $i$  行  $j$  列の成分とする  $4 \times 4$  の行列である。なお  $r_{ij}$  および  $\bar{r}_{ij}$  は  $\{\Gamma(D)\}$  の  $i$  行  $j$  列の成分  $r_{ij} D^2 + \bar{r}_{ij}$  の係数であつて、式 (4.3.44) で与えられる。

次に式 (4.3.44) の右辺第2項に対する特解  $\tilde{u}^{**}$  は、同様に

$$\left. \begin{aligned} & \{\Phi(x_i)\}\{C\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \{\tilde{w}_n\} x_i^n \\ & \text{および} \\ & \{\tilde{u}^{**}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\tilde{p}_n\} x_i^n \end{aligned} \right\} \quad (4.3.54)$$

と置いて式 (4.3.44) に代入し  $x_i$  のべき数を比較することによつて得られる。この解

は式 (4.3.53) で  $\tilde{p} \rightarrow \tilde{\tilde{p}}$ ,  $\tilde{w} \rightarrow \tilde{\tilde{w}}$  とした同様の式となり, これより

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{\tilde{u}}^{**}\} &= \{\tilde{\tilde{\phi}}(x_i)\} \{\bar{c}\} \\ \text{ただし} \\ \{\bar{c}\}^t &= \{C_0 \quad C_2 \quad C_4\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.55)$$

が得られる。ここに  $\{\tilde{\tilde{\phi}}(x_i)\}$  は  $x_i$  の二次式を含む 4 行 3 列の行列となる。式 (4.3.52)

と式 (4.3.55) より特解  $\{u^{**}\}$  が定まる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \{u^{**}\} &= \{\tilde{u}^{**}\} + \{\tilde{\tilde{u}}^{**}\} = \sum_{n=0}^n \{\tilde{p}_n\} x_i^n + \sum_{n=0}^2 \{\tilde{\tilde{\phi}}(x_i)\} \{\bar{c}\} \\ \text{ただし} \\ \{u^{**}\} &= \{u_1^{**}, u_2^{**}, \dots\}^t \end{aligned} \right\} \quad (4.3.56)$$

したがって, 上式と式 (4.3.50) を式 (4.3.45) に用いることにより, 積分定数  $\beta_{j2}$ ,  $\bar{\beta}_{j2}$  ( $j=1 \sim 4$ ) および  $\{\bar{c}\}$  を除いて, 帯板要素①～⑤の一般解の形が定められたことになる。

### 3.5 リブ間クラウンに対する基礎方程式と一般解

次に帯板要素⑥および⑦の解を求める。まず式 (4.3.22) と式 (4.3.31) から次式が成立つ。

$$\bar{w}_6' = 0 \quad (4.3.57)$$

また式 (4.3.15) で  $i=6, 7$  の場合を合成し, 式 (4.3.23) および式 (4.3.25) を考慮すれば次式が得られる。

$$\sum_{i=6}^7 (q_{i-1} - q_i) = 0 \quad (4.3.58)$$

したがって式 (4.3.22), 式 (4.3.57), 式 (4.3.58) を  $u_{5u}, u_6, u_7$  について解けば所要の解が定まる。計算に先立つて, 式 (4.3.15), 式 (4.3.25) より  $\hat{q}_6$  を予め

求めておく。すなわち

$$\hat{q}_6 = a_7 t c / 2 \cdot (U_6'' + U_7'') - a_7 t \alpha c / 2 \cdot (T_6' + T_7') \quad (4.3.59)$$

上式を考慮して式 (4.3.57) と式 (4.3.22) に式 (4.3.17) を用いればそれぞれ

$$U_{su} - U_6 - E g a_6^2 / 6 \cdot (2U_{su}'' + U_6'') + E g a_6^2 \alpha c / 6 \cdot (2T_5' + T_6') = 0 \quad (4.3.60)$$

および

$$U_6 - U_7 + E g a_7^2 / 6 \cdot (U_6'' + 2U_7'') - E g a_7^2 \alpha c / 6 \cdot (T_6' + 2T_7') = 0 \quad (4.3.61)$$

が得られる。また式 (4.3.58) に式 (4.3.15) を用いて2回積分すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} U_{su} &= -(1 + \alpha_{76}) U_6 - \alpha_{76} U_7 + \alpha_c \{ T_5^K + (1 + \alpha_{76}) \cdot \\ & T_6^K + \alpha_{76} T_7^K \} + d_0 + d_1 \chi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.62)$$

ただし

$d_i$ ; 積分定数

そこで式 (4.3.62) を式 (4.3.60) に用いて  $U_{su}$  を消去し、これと式 (4.3.61) を

$U_6, U_7$  に対して解けば、前と同様にして次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{\Gamma}(D)\} \{\bar{u}\} &= \{\bar{\Phi}(D)\} \{\bar{T}\} + \{\bar{\Phi}(\chi_2)\} \{d\} \\ \{\bar{u}\}^t &= \{U_6, U_7\}, \quad \{\bar{T}\}^t = \{\alpha T_5^K, \alpha T_6^K, \alpha T_7^K\}, \quad \{d\}^t = \{d_0, d_1\} \\ \{\bar{\Gamma}(D)\} &= \begin{bmatrix} \alpha_{61}^2 (1 + 2\alpha_{76}) D^2 - (2 + \alpha_{76}), & 2\alpha_{61}^2 \alpha_{76} D^2 - \alpha_{76} \\ \alpha_{71} D^2 + 1, & 2\alpha_{71}^2 D^2 - 1 \end{bmatrix} \\ \{\bar{\Phi}(D)\} &= \begin{bmatrix} -1 & \alpha_{61}^2 (1 + 2\alpha_{76}) D^2 - (1 + \alpha_{76}) & 2\alpha_{61}^2 \alpha_{76} D^2 - \alpha_{76} \\ 0 & \alpha_{71}^2 D^2 & 2\alpha_{71}^2 D^2 \end{bmatrix} \\ \{\bar{\Phi}(\chi)\} &= \begin{bmatrix} -1 & -\chi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.63)$$

これより同次解  $U_6^*$ ,  $U_7^*$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} U_6^* \\ U_7^* \end{aligned} \right\} &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \begin{aligned} 1 \\ e_i \end{aligned} \right\} (\mu_i \operatorname{ch} \zeta_i \chi_2 + \bar{\mu}_i \operatorname{sh} \zeta_i \chi_2) \\ \text{ただし} \\ e_i &= \frac{-\{Eg a_6^2 (1+2\alpha_{76}) - \zeta_i^2/6 - 2 - \alpha_{76}\}}{Eg a_6^2 \alpha_{76} \zeta_i^2/3 - \alpha_{76}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.64)$$

ここに  $\mu_i$ ,  $\bar{\mu}_i$  は積分定数であり、また  $\zeta_i$  は式 (4.3.63) の特性方程式

$$\begin{aligned} &1/18 \cdot Eg^2 a_6^2 a_7^2 (1+\alpha_{76}) \zeta^4 - 1/6 \cdot Eg a_6^2 \{1+4\alpha_{76} \\ &+ \alpha_{76}^2 (4+\alpha_{76})\} \zeta^2 + 2(1+\alpha_{76}) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

の正根である。特解も同様にして

$$[\bar{\Phi}(D)] \cdot \{\bar{T}\} \equiv \sum_{n=0} \{\bar{w}_n\} \chi_2^n$$

とおき、 $\bar{P}(D)$  の成分を  $\delta_{ij} D^2 + \bar{\delta}_{ij}$  として式 (4.3.63) に用いて  $\chi_2$  のべきを比較すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{6} Eg a_i^2 (n+2)(n+1) \{\delta\} \{\bar{p}_{n+2}\} + \{\bar{\delta}\} \{\bar{p}_n\} &= \{\bar{w}_n\} \\ (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.66)$$

が得られる。ここに  $\{\delta\}$  は  $\delta_{ij}$  を、 $\{\bar{\delta}\}$  は  $\bar{\delta}_{ij}$  を  $i$  行  $j$  列の成分とするそれぞれ  $2 \times 2$  の行列である。これより定まる  $\bar{p}_n$  を用いれば特解が

$$\left. \begin{aligned} U_6^{**} \\ U_7^{**} \end{aligned} \right\} = \sum_{n=0} \{\bar{p}_n\} \chi_2^n + (d_0 + d_1 \chi_2) / (2 + 2\alpha_{76}) \quad (4.3.67)$$

と定められる。したがってリブ間クラウンの一般解

$$U_i = U_i^* + U_i^{**} \quad (i=6, 7) \quad (4.3.68)$$

が  $\mu_i, \bar{\mu}_i$  ( $i=1, 2$ ) および  $d_i$  の積分定数を除いて求められた。

### 3.6 積分定数の決定

積分定数は  $\beta_{2i}, \bar{\beta}_{2i} (i=1\sim 4), \mu_i, \bar{\mu}_i (i=1, 2), C_i (i=0\sim 4), d_i (i=0, 1)$  の19個である。これらの定数は以下に示す  $x_j$  方向両端の境界条件およびリブクラウンとリブ間クラウンの間の連続条件により定められる。

まず  $x_1 = 0$  を固定端に選べばこの端面では次式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} U_0 = U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_{50} = 0 \\ W_2' = 0 \end{aligned} \right\} (4.3.69)$$

$x_1 = L_0, x_2 = l_0$  での力と変位の連続条件により

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{x_1}(S_1=0, x_1=L_0) &= \bar{P}_{x_6}(S_6=0, x_2=l_0) \\ \bar{P}_{x_2}(S_2=0, x_1=L_0) &= \bar{P}_{x_7}(S_7=0, x_2=l_0) \\ \bar{P}_{x_2}(S_2=a_2, x_1=L_0) &= \bar{P}_{x_7}(S_7=a_7, x_2=l_0) \\ \text{および} \\ U_0 + U_{50} &= U_1 + U_6 = U_2 + U_7 = 0 \end{aligned} \right\} (4.3.70)$$

が成立する。リブの  $x_1 = L_0$  の端は自由端であるから軸方向力が存在しない。すなわち

$$\begin{aligned} \bar{P}_{x_4}(S_4=0, x_1=L_0) &= \bar{P}_{x_5}(S_5=0, x_1=L_0) \\ &= \bar{P}_{x_5}(S_5=a_5, x_1=L_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

さらに  $x_2 = 0$  の端は直線的に変形する条件により,  $U_{50}, U_6, U_7$  に対する各条件式が成立つ。たとえばクラウンの温度を一様とし, これを基準温度に選んで, それからの変化量として温度を表示すれば

$$x_2 = 0 \text{ で } U_{50} = U_6 = U_7 = 0 \quad (4.3.72)$$

となる。この式(4.3.69)～式(4.3.72)の19個の条件により、各積分定数を定め  
 ることができる。積分定数が定められれば、今求めたのと逆の順に、各部の変形および  
 応力状態が定められ、その挙動を定めることができる。

### 3.7 数値計算結果および考察

以上の結果をもとに、実用域の形状寸法を有するリブ付ピストンについて数値計算を行  
 ない考察を加える。

簡単のためクラウンおよびリブの物性値として、ヤング率  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ Kg/mm}^2$ 、剪  
 断弾性係数  $G = 8100 \text{ Kg/mm}^2$ 、線膨張係数  $\alpha_c = \alpha_R = 1.2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$  で一定とし、  
 クラウンの肉厚平均温度を  $0^\circ\text{C}$ 、リブの肉厚平均温度を  $\bar{T} = -100^\circ\text{C}$  で一定の基準状態に  
 ついて計算を行なった。これはクラウンおよびリブの温度が一樣で、かつクラウンの温度  
 がリブより  $100^\circ\text{C}$  高い場合に相当する。

#### 3.7.1 代表的変位および応力の分布

まず図4.1.1(a)(b)に示す一円周型および二円周型リブ付ピストンで、それぞれ  $700 \text{ mm}$   
 径および  $1000 \text{ mm}$  径級の2種の実用ピストンの形状寸法を参考に  $L_0 = 90 \text{ mm}$ 、  
 $l_0 = 90 \text{ mm}$ 、 $A \equiv a_1 + a_2 = 200 \text{ mm}$ 、 $B \equiv a_3 + a_4 + a_5 = 220 \text{ mm}$ 、 $t_c = t_R = 40 \text{ mm}$   
 の場合を代表例として選び、その挙動特性を解析した。

この結果得られた軸方向変位の分布を図4.3.3に、軸方向応力の分布を図4.3.4にそれ  
 ぞれ示す。図で各切口断面に沿う分布のうち、 $S_i$  方向の分布は得られた折線状の分布を滑  
 らかに結んだものである。リブの自由端  $x_1 = L_0$  に沿つての軸方向変位  $u$  の分布では、  
 リブとクラウンの接合縁  $0$  からある深さ以上ではリブの自由収縮量  $\alpha_R \bar{T}$  になり、接合縁に  
 近づくとつれて漸増するような拘束変位をクラウンより受けることがわかる。接合縁では  
 リブ側とクラウン側の強制変位の絶対値の和が自由収縮量になるが、いまの場合、リブ側で  
 自由収縮量の8割以上の変位が拘束され、リブの収縮によりクラウンが受ける強制変位は0



縁のリップ端で、リップ自由収縮量の2割弱となつている。またリップクラウンとリップ間クラウンの接合部  $D_1, D_2$  ( $x_1 = L_0$ ) に沿つての強制変位の分布は接合縁からある距離以上離れると、その値が零に減衰していることがわかる。

次に軸方向の応力分布を示した図 4.3.4 では、接合縁に沿うリップ側の軸方向応力  $\sigma_{2D}$  は、リップ端  $x_1 = L_0$  で最大で、中央部に進むにつれて漸減し、中央付近では一様な値をとるような分布傾向を示す。このうちリップ端応力  $\sigma_{2D}(L_0)$  はリップの単純拘束応力  $\sigma_T = E\alpha\bar{T}$  よりかなり高く、中央部ではこの  $\sigma_T$  よりやや低い一様応力状態となる傾向を示す。接合縁に沿うリップクラウン側の応力  $\sigma_{2u}$  は、後述のようなリップ間クラウンとの力の取合いの関係から、端部  $x_1 = L_0$  で引張最大値  $\sigma_{2u}(L_0)$  をとり、リップ巾中央に進むにつれて圧縮側に転化し、圧縮一様値に収束する傾向を示す。またリップ間クラウン側  $\overline{D_2 B_2}$  に沿う軸方向応力  $\sigma_\eta$  は、リップクラウンとの取合部で引張最大値  $\sigma_{2u}(L_0)$  を示し他端  $x_2 = 0$  に進むにつれて、これが漸減し、引張一様値に収束するような分布傾向を示す。

次に応力の深さ方向への拡散は、リップではリップ端  $x_1 = L_0$  に近い所で少なく、中央に進むにつれて拡散が進むが、拡散の深さはそれほど深くない。またリップクラウン側ではリップ間クラウンとの取合部での応力干渉により、さらに拡散深さは小さくなることがわかる。このように応力の深さ方向への減衰が早いことから、クラウン上縁 (A縁, G縁) およびリップ下縁 (F縁) を実際の構造に合わせる必要はなく、図 4.3.1 あるいは図 4.3.2 の計算模型で充分であることが確認できる。

次に解析法の妥当性を検討するため、 $L_0 = 100\text{ mm}$ ,  $l_0 = 60\text{ mm}$ ,  $t_c = t_R = 40\text{ mm}$ ,  $A = 100\text{ mm}$ ,  $B = 300\text{ mm}$  の場合を立体板構造の有限要素法 (4.1.8) によつて解析し本解法による結果と比較した。その結果を図 4.3.5 に示す。図はリップとクラウンの接合縁およびその延長上におけるリップ、リップクラウンおよびリップ間クラウンの軸方向応力の分布を比較したものである。これより両結果はよく一致していることがわかる。

### 3.7.2 リブ間隔，巾および肉厚比の影響

次にこのような応力の発生特性がリブの構造寸法によつてどのように変化するかを，リブ間隔  $2l_0$ ，リブ巾  $2L_0$  およびリブとクラウンの肉厚比  $\hat{t}$  を変えた一連の数値計算によつて調べた。

図 4.3.6 はリブ巾  $L_0$  の変化によつて接合縁上のリブ側およびクラウン側応力  $\sigma_{2D}$  および  $\sigma_{2u}$  の分布がどのように変化するかを計算したものであり，図 4.3.7 はこのときの接合縁に沿う剪断応力の分布である。これより軸方向応力，剪断応力とも，応力集中部は端付近に集中し， $L_0$  が大きい場合には端付近の応力  $\sigma_{2D}(L_0)$ ， $\sigma_{2u}(L_0)$  および  $q_2(L_0)/\hat{t}$  等はあまり変わらず，中央の一樣応力部の巾が広がる傾向を示す。逆に  $L_0$  がある程度以下になると接合縁に沿つての応力拡散が充分行なえず，端の最大応力が下がつて応力が  $L_0$  間に一樣化する傾向を示す。

次にリブ間隔  $l_0$  によつて応力分布がどのように変化するかを調べた。図 4.3.8 は接合縁に沿うリブ側およびクラウン側両応力分布を  $l_0/L_0 = 1/5$ ，5 の 2 つの場合について求めたものである。 $l_0$  が変つても  $\sigma_{2D}$  および  $\sigma_{2u}$  の応力分布の形はほとんど変わらず  $l_0$  が小さくなるにつれて応力が平均的に高目となる傾向を示す。剪断応力の分布，図 4.3.9 の場合にも同様のことが言える。次に図 4.3.10 は図 4.3.8 の最大応力  $\sigma_{2u}(L_0)$  および  $\sigma_{2D}(L_0)$  が  $l_0$  によつてどのように変化するかを横軸に  $l_0/L_0$ ，縦軸に最大応力を  $\sigma_1 = -E\bar{\alpha}\bar{T}$  で割つた無次元応力を取り，肉厚比  $\hat{t}$  をパラメータとして表わしたものである。これより  $l_0$  が小さくなるほど最大応力の上昇傾向が急となる様相を示している。

このような接合縁に沿う応力分布の  $l_0$  による変化は図 4.3.11 のように説明することができる。すなわち一般に，リブとリブクラウンの接合縁には図のごとく，熱収縮により生じた変位を適合させるための剪断力  $q$  が作用し，またリブクラウンとリブ間クラウンの接合部には， $q$  によりリブクラウンの端  $x=L_0$  に生じるすきまをリブ間クラウンに適合させるための端末力  $P_e$  が作用する。リブ間クラウンがない  $P_e=0$  の場合，リブおよびリブクラウンの熱による自由収縮変位  $U_{R0}$  および  $U_{p0}$  は  $q$  の取合いによつてそれぞれ  $U_{R1}$

および  $U_{P1}$  に変化し、さらにリブ間クラウンを取付けてリブクラウンとの接合部の変位を適合させたとき、リブ、リブクラウンおよびリブ間クラウンの変位がそれぞれ  $U_{R2}$ ,  $U_{P2}$  および  $U_{S2}$  に変化したとする。このとき同図(a)のごとく  $l_0$  が小さく、したがってリブ間クラウンのばねが剛な場合には、 $P_e$  による伸び  $U_{S2}$  が小さく、 $U_{P1} \rightarrow U_{P2}$  および  $U_{R1} \rightarrow U_{R2}$  の変化が大きくなるのに対し、 $l_0$  の大きい同図(b)では逆に  $U_{S2}$  が大きく、したがって、 $U_{P1} \rightarrow U_{P2}$ ,  $U_{R1} \rightarrow U_{R2}$  の変化量が小さくなる。このため  $l_0$  の小さい場合の応力が相対的に増加することになる。

次に肉厚比の変化による応力分布の変化の様子を図 4.3.1 2, 図 4.3.1 3 および 図 4.3.1 4 に示す。図 4.3.1 2 は接合縁に沿うリブおよびリブクラウンの軸方向応力の分布を、肉厚比  $\hat{t}$  をパラメータとして表わしたものであり、図 4.3.1 3 はこのときの接合縁に沿う剪断応力分布の変化、また図 4.3.1 4 は図 4.3.1 3 中の最大応力  $\sigma_{2D}(L_0)$  および  $\sigma_{2u}(L_0)$  が  $\hat{t}$  によつてどのように変化するかを求めたものである。一般にリブの厚さが厚いほど接合面で生じる相対変位を拘束するのに必要な力が大きく、したがってリブおよびクラウンとも応力が高く、かつ端に集中する傾向を示すことがわかる。したがって最大応力と肉厚比  $\hat{t}$  の関係を示した図 4.3.1 4 では、 $\hat{t}$  の増加とともに最大応力がリブ側およびクラウン側とも増大していくことになる。

## 第 4 章 リブ付ピストンのガス圧強度実験

### 4.1 模型，実験装置，実験方法

大型リブ付ピストンの実用時に実際に生じる応力の実態を把握し，併せて，これまで行なつた解析解の妥当性を検討するために燃焼室内に油圧を負荷する実験を行なつた。

実験に用いた二円周型実用リブ付ピストンは図 4.4.1 に示す構造形状を有し，実用機では最大のピストンであつて直径  $1050\text{ mm}$ ，クラウンおよびリブ上部の厚さが  $50\text{ mm}$  でほぼ 2.1 節で求めたと同じリブ半径方向配置を有するものである。

実験装置の概観を図 4.4.2 にその詳細を図 4.4.3 に示す。模型は支持円板にセットしたシリンダ内にはめ込み，その上から実用時に実際に用いる上下二つのシリンダカバーをかぶせて，上カバーを支持円板に 12 本の締付けボルトによつて取付けた。そして図中 A で示す第 2，第 3 リング溝部に O リングを 2 本はめてシールした。

荷重は，図中 B で示す注油孔に電動式油圧ポンプを接続し，ここから燃焼室 C に油を送りこんでピストン頂面および側面上部第 1 リング溝部まで一様に負荷を与えるようにした。

歪計のはり付けの状況を図 4.4.4 に，そのはり付け位置を図 4.4.1 中に示す。はり付けた歪計はすべて触火面側で，構造の一対称部中の図の各位置に 2 方向歪計を半径方向と周方向に合わせて計 19 枚，検定用として，その外側に 8 枚の計 27 枚をはり付けた。リード線は噴射孔 D 部に設けた治具を通して取り出した。

油圧荷重は 0 から  $90\text{ Kg/cm}^2$  まで， $10\text{ Kg/cm}^2$  おききステップ状に上昇させ，ブルドン管で各段階の荷重をセットしたのち歪を多点式自動歪計測装置に記録した。

### 4.2 実験結果および考察

計測結果のうち，油圧  $90\text{ Kg/cm}^2$  を負荷したときに得られる各部の半径方向および周方向応力の分布を，第 1 編第 3 章の方法で求めた解析解と比較して図 4.4.5 および図 4.4.6 に示す。図 4.4.5 は半径応力の分布，また図 4.4.6 は周応力の分布である。

実験では数回のならし負荷ののち、各荷重段階での歪を計測したが、各点の歪計測値と荷重の関係はいずれも直線性、再現性ともに良好であつた。図中の応力はこれら2方向歪の計測結果より求めたものである。解析は構造の一対称部、すなわち図4.4.1の $\theta = \pi/3$ の部分について、リブ部およびクラウン外周固定の条件で行なつた。

半径応力の分布は外周上で外周リブのリブ巾中点延長線上の点Fの応力が最も高く、外側リブ端面付近の応力はこれより小さい。これはリブ下縁とピストン下部の取付けの便宜上、不均一なリブ間隔をとつたために、(外周リブ間隔は $\theta_1/\theta$ が $\frac{1}{3}$ と約 $1/2$ の2種)、リブ間隔の大きい部分の外周上の応力が高くなる一方、リブ端の応力は内周リブ巾の増大によつて応力の上昇が相対的に押えられることになつたためと思われる。

図4.4.6の周応力の分布では、既に2.3節でみたように外周側リブの端面で最大応力を生じ、その大きさは最大半径応力と同程度かやや大きい目となつて、リブ支持のないクラウン部への作用荷重のかなりの部分がこの部分に集中することがわかる。

これらの両図より明らかごとく、実験値は傾向、大きさともに解析解と比較的よく一致し、実用ピストンの応力発生状況はこのような解析解によつてほぼ推定できることが明らかとなつた。

## 第 5 章 分割型ピストンの応力解析

### 5.1 挙動の基礎的検討

ピストンの主要作用荷重であるガス圧および熱負荷のうち、出力の増加していく各段階でその挙動の基準となるのは熱負荷によるもので、その上にガス圧荷重による繰返し挙動が重畳することになる。

分割型ピストンに熱負荷が作用すると、クラウン部は上にとつの変形をし、したがってリブ部およびスカート部の各対応接触面の間には図 4.5.1 (a) に示すように相対変形  $\delta_{\lambda T}^U$  および  $\delta_{\lambda T}^L$  (それぞれ上側構造および下側構造の変形) が生じる。通常的设计で設けられるスカート接触面の初期すきま  $\Delta i$  とリブ部の植込みボルトによる初期締付け力  $Q_0$  がある場合には、ある熱負荷段階までに生じたクラウンのとつ形の変形は初期すきまによつて吸収され、これが相殺されてスカート側が接触したのちに熱負荷で生じるリブ側接触面を口開けようとする反力  $Q_{\lambda T}$  (図 4.5.1 (a)) は初期締付け力によつて相殺されつつ、両接触面が接触のままの挙動が進む。熱負荷による反力  $Q_{\lambda T}$  が締付け力  $Q_0$  を越えるときリブ側接触面が口開き状態の挙動が進行する。

次にこれらの各熱負荷段階でガス圧荷重がこれに重畳する場合もいまと同様に考えることができる。熱負荷による変形が重畳した状態でなおスカート下縁にすきま  $\Delta_{\lambda T} = \Delta i - \delta_{\lambda T}^U - \delta_{\lambda T}^L$  が存在する場合には、ガス圧による変形  $\delta p^U + \delta p^L$  (図 4.5.1 (b) 参照) が  $\Delta_{\lambda T}$  より小さいとき、作用ガス圧による全荷重はリブ部に作用し、上側ピストンはスカート下縁自由の挙動をするが、 $\Delta_{\lambda T}$  より大きいときには、図 4.5.2 に示すようにガス圧サイクル  $0 \sim p_{max}$  の途中  $p^*$  まではスカート下縁自由の挙動を、また  $p^*$  から  $p_{max}$  の間はスカート下縁接触の挙動をすることになる。熱負荷作用後両接触面が接触状態にある場合にはガス圧下の挙動は、接触両面が一体型の挙動をする。

## 5.2 熱負荷が作用する場合の挙動

### 5.2.1 単位荷重による各部の応力

図 4.1.2 に示す分割型ピストンのうち、上側ピストンの構造はクラウン部が円板、球殻、円板と円環殻の組合せあるいは球殻と円環殻の組合せのいずれかで、スカートが円筒殻の構造にスリットなしの円周状リップを取付けた構造として規定できる。簡単のため、ここではクラウンが円板あるいは球殻から成り、下側ピストンの構造は図 4.5.3 に示すように通常用いられる形状寸法比をもつ場合を考える。そして前と同様にして熱負荷荷重を肉厚の表裏で符号反対の熱曲げ成分( $\tau$ )、肉厚内で一様な熱伸び成分( $T_0$ ) および局部昇温成分にわけ(図 3.3.1 3 参照)、図中に示す主要寸法の比が  $hs/h_c = 1$ ,  $hc/b = 0.1$ ,  $ls/b = 1/2$ ,  $R_b/h_c = R_h/h_c = 1.6$  の各値をとる場合につき、その挙動特性を考えていくことにする。

熱負荷による挙動(応力, 変形)  $B(T)$  は、各基本荷重による挙動特性をそれぞれ  $B(\tau)$ 、 $B(T_0)$  および  $B(Q)$  (接触反力による成分) と表わせればそれらを組合せて

$$B(T) = \lambda_T (\lambda_{T_0} \cdot B(T_0) + \lambda_\tau \cdot B(\tau) + \lambda_Q B(Q)) \quad (4.5.1)$$

のように表わせる。ここに  $\lambda_T$  は負荷段階をまた  $\lambda_Q$  は接触面反力の影響を表わす定数であり  $\lambda_\tau$  および  $\lambda_{T_0}$  はそれぞれ  $T_0$  と  $T$  の配分を表わす定数およびクラウンの肉厚平均温度  $T_0$  と下側ピストンの肉厚平均温度  $T_0'$  の差を表わす定数であつて次の各式で与えられる。

$$\lambda_\tau = 1/(2B_w + 1)$$

$$\lambda_{T_0} = (T_0 - T_0')/T_0$$

なお、局部昇温成分は全体の挙動への影響は小さいので、簡単のため、ここではこれを省略して考えていくことにする。

まず基本荷重  $T$ ,  $T_0$  および  $Q$  による挙動特性を考える。フラット型および球殻型の上側ピストン構造は、既述の形状パラメータ  $hs/h_c$ ,  $hc/b$  および  $H/b$  に加えてリップ位

置を表わす無次元量  $Rr/b$  (図 4.5.3 参照) によつて規定できるから、いま一例として

$hc/h_s = 1$ ,  $hc/b = 0.1$  の実用域寸法を有するフラット型クラウン ( $H/b = 0$ ,  $b = 250 \text{ mm}$  とする) が、リブ位置  $Rr/b = 0.6$  で支持される場合の  $T$ ,  $T_0$  および  $Q$  によるクラウン各部の経線応力  $\sigma_s$  の分布を求め、リブ存在による発生応力の変化の様相を調べれば図 4.5.5, 図 4.5.6 および図 4.5.7 のようになる。図には比較のため、薄肉殻理論による解も同時に示した。なおリブ部の温度は第 3 編 2.3 節と同様の解析から図 4.5.4 (a) のような温度分布を求め、これを同 (b) 図のようにリブ巾平均温度の軸方向分布を直線近似して用いた。

図より熱曲げ荷重  $T$  による熱変形は、リブの存在の有無に関係なく、そのほとんどが拘束されてクラウン部の両表面に符号逆の高い熱応力が生じることがわかる。熱伸び荷重による応力は図 4.5.6 中の挿入図に示すように、リブ部の軸方向温度勾配による傾き  $\theta_{T_0}$  を拘束してクラウンとの変形を適合させるに要するモーメント  $M_r$  分だけリブなし型の場合と異なり、これによつてリブより外周側のクラウン部の応力が相当高くなる。スカート側接触面反力  $Q = 0.16 Q_p$  ( $Q_p = \frac{b^2 p}{2}$ ;  $p = 1 \text{ Kg/mm}^2$  のガス圧によるラジアン当りの荷重) による応力は図 4.5.7 中の挿入図に示すような  $Q$  と隅角モーメント  $M_e$  に起因し、リブ外周とスカート側の両隅角部に符号逆の相当大きな曲げ応力を生じる。この接触面反力の大きさは、熱負荷で生じる対応接触面の変形の不適合さに依存するから、クラウン部の熱負荷作用時の応力を正しく評価するためには、これらの熱変形の発生の様相とそれに伴う反力  $Q$  の大きさを評価していくことが新たに必要となつてくる。これらの詳細な検討は次節で行なうことにする。

図 4.5.8, 図 4.5.9 および図 4.5.10 はくぼみ  $H/b = 0.2$  で、他はいまと同じ形状の球殻型クラウンが、それぞれ単位荷重  $T$ ,  $T_0$  および  $Q$  をうける場合に対する同様の結果である。いずれの場合もフラット型の場合とよく似た応力の分布傾向を示すことがわかる。

同様の解析を他の形状寸法のものについても実施し、主要断面、すなわちクラウン中央リブ内外周および隅角部の曲げ応力  $\sigma_M$  および膜応力  $\sigma_N$  が、これらによつてどのように変



化するかを求めれば、図 4.5.1 1, 図 4.5.1 2 および図 4.5.1 3 のようになる。 図 4.5.1 1

より  $T$  に対する挙動は、リブなし型に対する図 3.3.2 0 の場合とほぼ同様でリブ有無の影響は少ない。 図 4.5.1 2 は、 $T_0$  に対する同様の結果で、リブ支持位置  $Rr/b$  や形状  $H/b$  などによつて、各部の応力は相当大きく変化する。 接触反力  $Q$  に対する図 4.5.1 3 もほぼ同様にこれらの影響を顕著にうけ、特にリブ位置による影響が大きいことがわかる。

### 5.2.2 熱負荷による接触面反力

熱負荷が作用したときの接触面反力の大きさ  $Q_s$  は各单位荷重によるスカート下縁の変位を  $\delta_T, \delta_{T_0}, \delta_Q^U$  および  $\delta_Q^L$  ( $\delta_Q^L$  は下側構造のリブとスカート間の相対変位) とし、初期すきまを  $\Delta_i$  とすれば

$$\frac{Q_s}{Q} = \frac{\delta_{\lambda T} - \Delta_i}{\delta_Q^L + \delta_Q^U} \quad (4.5.2)$$

ただし

$$\delta_{\lambda T} = \lambda_T (\lambda_{T_0} \delta_{T_0} + \lambda_T \delta_T)$$

により与えられる。いま、これを書きなおして

$$Q_s = f_R \cdot R^U (\delta_{\lambda T} - \Delta_i) \quad (4.5.3)$$

ただし

$$f_R = \frac{1}{1 + R^U/R^L}$$

$$R^U = Q/\delta_Q^U, \quad R^L = Q/\delta_Q^L$$

とすれば、5.2.1 節の解析で得られる  $\delta_T, \delta_{T_0}, \delta_Q^U$  および  $\delta_Q^L$  (あるいは  $R^U, R^L$ ) と構造形状 ( $H/b$  あるいは  $Rr/b$ ) の関係、すなわち図 4.5.1 4 あるいは図 4.5.1 5 を同式に用いることによつて  $Q_s$  の大きさを容易に定めることができる。

熱負荷の増減を表わす係数  $\lambda_T$  の増加とともに、 $Q_s$  の値がどのように変化するかを示す一例として、図 4.5.5 のフラット型クラウンが実用条件に近い  $\lambda_T = 1/4.6$ ,  $\lambda_{T_0} = 2/3$

および初期締付力  $Q_0 = 0.86 Q_p$  をうける場合を解析し、 $f_k$  および初期すきま  $\Delta_i$  をパラメータとして表わせば図 4.5.16 のように、また、図 4.5.8 の球殻型クラウンの場合を表わせば図 4.5.17 のようになる。(ただし後者では  $Q_0 = 0.66 Q_p$  とした) 図には同時にリブ側接触面反力  $Q_R$  の変化の様子も同時に示した。これよりスカート側反力  $Q_S$  は熱負荷  $\lambda_T$  の増加とともに増大し、リブ側反力  $Q_R$  はこの逆となる。また両者とも初期すきま  $\Delta_i$  と下側構造の剛性の大きさを表わすパラメータ  $f_k$  によつても相当変化し、 $\Delta_i$  が大きいほど  $Q_S$  の値は小さくなる。 $f_k$  の値は先の図 4.5.15 から、下側構造の  $H/b$  ( $\bar{H}$  は下側構造の円板部の肉厚) をパラメータとして図 4.5.18 のように与えられ、実用構造では 0.8 ~ 0.95 位の範囲にあつてかなり剛であるから、 $Q_S$  および  $Q_R$  と  $\lambda_T$  の関係は両図で  $f_k = 1$  に近い挙動を示すことになる。

同様の関係をクラウンのくぼみ  $H/b$  および、リブ位置  $R_r/b$  の異なる他の形状のものについても求め、構造形状による  $Q_S$  の変化を  $\lambda_T = 2.7$ ,  $f_k = 1$  の場合について  $\Delta_i$  をパラメータとして表わすと図 4.5.19 のようになる。いずれの場合も  $Q_S$  はクラウンのくぼみ  $H/b$  および  $\Delta_i$  が大きくなるにつれて、またリブ取付け半径  $R_r/b$  が小さくなるにつれて小さくなることがわかる。

以上で熱負荷に対する接触面反力の大きさが定められたから、熱負荷  $\lambda_T$  が作用する場合の応力は、式 (4.5.1) に  $\tau, T_0, Q$  および  $Q_S$  に対する結果 (それぞれ図 4.5.11, 図 4.5.12, 図 4.5.13 および図 4.5.19) を用いることによつて容易に求められる。一例として図 4.5.5 および図 4.5.8 のフラット型および球殻型クラウンの  $\lambda_T = 2.7$  の時の応力分布を  $\Delta_i$  をパラメータとして表わせば、それぞれ図 4.5.20 および図 4.5.21 のようになる。(なお、ここでは基本荷重による解は上の主要断面表示の代りに図 4.5.5 ~ 図 4.5.10 を用いた。) これらより明らかごとくクラウンの応力は接触反力  $Q_S$  や、熱伸びによる付加曲げの作用によつてリブより外周側のクラウン部の応力上昇が顕著となることがわかる。

### 5.3 ガス圧荷重が重畳する場合の挙動

図 4.5.3 で示したように、熱負荷によつて生じたスカート下縁の変形  $\delta\lambda_T$  が初期すきま  $\Delta i$  より小さいときは、スカート接触面は  $\Delta\lambda_T \equiv \Delta i - \delta\lambda_T$  のすきまがある。この状態でガス圧最高荷重  $p_{max}$  が重畳するときには  $p_{max}$  によるスカート下縁の変形  $\delta p$  が、この  $\Delta\lambda_T$  と丁度等しくなるような  $\lambda_T$  の値  $\lambda_T^*$  でスカート下縁の接触が始まる。

$\lambda_T^*$  の値を求めるためには機関の各出力段階で作用する  $\lambda_T$  とガス圧最高荷重  $p_{max}$  の関係が必要となる。一例として図 3.4.17 の実機実験の温度計測結果から出力比を中介としてこの関係を求めれば図 4.5.22 のようになる。図から  $\lambda_T$  と  $p_{max}$  の関係を近似的に

$$\frac{\lambda_T}{\lambda_{Tmax}} = \frac{p_{max}}{p_0} \left( 2.3 - 1.3 \frac{p_{max}}{p_0} \right) \quad (4.5.4)$$

ただし

$p_0$  = 機関の最高ガス圧

と書ける。次にリブ部支持、スカート下縁自由の条件でガス圧単位荷重  $p = 1 \text{ Kg/mm}^2$  によつてスカート下縁に生じる軸方向変位  $\delta p^u$  の値を図 4.5.5 で  $H/b$  および  $Rr/b$  を変えて計算すれば図 4.5.23 のようになる。これらより  $\lambda_T^*$  の値を求めるためには、まず図 4.5.14 を式 (4.5.2) に用いて  $\delta\lambda_T$  と  $\lambda_T$  の関係を求め、これより得られる  $\Delta\lambda_T$  と各  $\lambda_T$  での  $p_{max}$  (図 4.5.22) に対応する  $\delta p^u$  および  $\delta p^l$  の値を図 4.5.23 と図 4.5.15 より求めることにより定められる。

一例として図 4.5.5 のフラット型クラウンで  $\Delta i$  が種々の値をとる場合について  $\Delta i$  と  $\lambda_T^*$  の関係を求めれば図 4.5.24 の一点鎖線のようになる。同様にして熱負荷  $\lambda_T$  だけで接触開始する点  $\lambda_T^{**}$  の値は  $-\Delta\lambda_T$  が横軸をよぎる点として定められ同図実線のようになる。いま、たとえば初期すきま  $\Delta i$  が  $0.25 \text{ mm}$  の場合、図の熱負荷区間  $Ra$  では、ガス圧荷重が重畳してもスカート下縁は接触せず、また  $Rb$  区間では熱負荷だけで接触が保たれる。その中間の  $Rab$  区間では  $0 \sim p_{max}$  の途中  $p^*$  で接触が始まり、 $p^* \sim p_{max}$  で接触、 $0 \sim p^*$  で口開きを繰返すことになる。そして、それぞれの条件に対応したガス圧応力が

熱応力の上に重畳する。

同様な方法によつて、他の構造様式の場合の $\lambda_T^*$ および $\lambda_T^{**}$ と $\Delta i$ の関係を求め、 $\Delta i$ をパラメータとしてこの関係を図示すれば図4.5.25のようになる。これより接触時期 $\lambda_T^*$ および $\lambda_T^{**}$ の値はクラウンのくぼみが大きくなるとともに増加し、 $\lambda_T^*$ から $\lambda_T^{**}$ に到る期間も長くなる傾向を示す。また当然ながら初期すきまが大きく、リブ位置が外周寄りに近いほど接触時期が遅れることがわかる。

さて、図4.5.24の区間 $R_b$ ではスカート下縁自由の条件でガス圧荷重 $p$ によつて生じる変形 $\delta p^u$ は、下側ピストンの $p$ による相対変形 $\delta p^l$ を除いて拘束される。このときの $p$ によるスカート側およびリブ側反力は、この変形拘束条件と両接触面間の力の平衡条件より定まり、それぞれ

$$\frac{Q_{sp}}{Q_p} = \frac{\frac{\delta p^u}{Q_p} + \frac{1}{k_L}}{\frac{1}{k_u} + \frac{1}{k_L}} \quad (4.5.5)$$

および

$$\frac{Q_{rp}}{Q_p} = 1 - \frac{Q_{sp}}{Q_p}$$

となる。 $Q_{sp}$ の大きさは、図4.5.23および図4.5.15から、 $H/b$ と $Rr/b$ の変化に対して図4.5.26のようになる。これよりリブ位置が外周寄りになるほどスカート側反力が小さく、リブ側反力が大きい。その場合でも、たとえば $Rr/b = 0.6$ の場合に見られるようにクラウンのくぼみが増すとリブ側反力は増加する傾向を示す。図4.5.24の区間

$Rab$ で生じる接触面反力は、その $\lambda_T$ でのガス圧最高荷重 $p_{max}$ の代りに $p^* \sim p_{max}$ の間の増分 $\Delta p^*$ について上と同様の解析を行なうことにより定められる。

このようにして接触時期および接触時のガス圧による接触面反力が求められるとガス圧単位荷重によるクラウン部の応力を求めることによつて、各熱負荷段階 $\lambda_T$ での重畳ガス圧

による付加応力を容易に求めることができる。一例として図 4.5.5 に示すフラット型クラウンが頂面にガス圧単位荷重  $p = 1 \text{ Kg/mm}$  をうける場合のクラウン各部の応力分布を求めれば、図 4.5.27 のようになる。図中  $\Delta i = \infty$  の解はリブ部支持、スカート下縁自由の解を  $f_k = 1$ ,  $\Delta i = 0$  はリブおよびスカート両面支持の解を表わす。  $f_k = 0$ ,  $\Delta i = 0$  の解は逆にスカート部支持、リブ部自由の解を表わすから、図の  $f_k = 0.5$  の解と  $\Delta i = \infty$  の両解では、隅角内面の解は符号逆で大きく食い違うことになる。次に球殻型クラウン図 4.5.8 に対する同様の結果を図 4.5.28 に示す。

同様な解析を  $H/b$  および  $Rr/b$  の異なる他の構造についても行ない、構造主要断面の曲げ応力および膜応力の構造パラメータによる変化を求めると図 4.5.29 および図 4.5.30 のようになる。図 4.5.29 は  $\Delta i = \infty$ ,  $f_k = 1$ , 図 4.5.30 は  $\Delta i = 0$ ,  $f_k = 1$  に対する結果である。これより各負荷段階でのガス圧応力は接触面条件が図 4.5.24 の  $R_a$ ,  $R_b$  あるいは  $R_{ab}$  領域のいずれになるかをまず定め、それ従つてこれらの応力を組合わせることによつて容易に求めることができる。

## 5.4 非線形挙動の影響

### 5.4.1 すべり、接線力の影響

さて、熱負荷が作用すると上側ピストンと下側ピストンの平均温度の差によつて半径方向に伸び差を生じ、接触面では接触反力に摩擦係数をかけた限界摩擦力の範囲内で接触面接線力が作用する。そして、伸び差の食い止めに要する力が限界摩擦力を越えると接線力は限界摩擦力を保ちつつ相対すべりが進行することになる。

熱負荷作用時に生じるこのような接線力やすべりの様相を明らかにするため、まず  $\lambda_T = 2.7$  でリブ部支持、スカート部自由の条件で生じる接触面の半径方向変位を、図 4.5.5, 図 4.5.8 の 2 種の構造モデルでリブ位置の異なる種々の場合について解析した。この結果を図 4.5.31 に一点鎖線および点線で示す。次に同じ構造で、リブ側およびスカート

側接触面にそれぞれ単位の接線力を独立に加えて生じる半径方向変位を解析し、これを用いて図 4.5.3 1 の半径方向変位を完全に拘束するに要する接線力を求めれば、それぞれ同図の二点鎖線および長い破線のようになる。

このようにして生じる接線力は接触面圧できまる限界摩擦力以内でなければならないから、いま求めた接線力が実際に働いているかどうかはまだわからない。そこでこの間の挙動を明らかにする一例として、図 4.5.8 の球殻型クラウンの接線力が熱負荷  $\lambda_T$  の増加につれてどのように変化するかを、 $f_R = 1$ 、 $\Delta i = 0.2$  の条件で解析した。リブ側およびスカート側接触反力  $Q_R$  および  $Q_S$  は  $\lambda_T$  の増加に伴って図 4.5.1 7 のように変化するため、このときの限界摩擦力  $\mu Q_S$  および  $\mu Q_R$  と  $\lambda_T$  の関係は同図から、図 4.5.3 2 中の一点鎖線のようになる。(ただし摩擦係数  $\mu$  は 0.2 とした。) 次に  $\lambda_T$  による半径方向相対変位量を完全に拘束するに要するリブ側およびスカート側の接触面接線力  $q_R^i$  および  $q_S^i$  を図 4.5.3 1 より求めれば図中の最長破線および実線のようになる。

これより、リブ側接触面では、初期締付力が大きい  $\lambda_T$  の初期 0 ~ 0 間で接線力が限界摩擦力  $\mu Q_R$  以下に保持されて、すべり拘束に要する力  $q_R^i$  がそのまま接線力として作用する。その間  $\lambda_T$  による熱伸びは接触面で完全に拘束される。 $\lambda_T$  が 0 をすぎると  $q_R^i$  が  $\mu Q_R$  をこえるから、それ以降は  $\mu Q_R$  を保持しつつ  $q_R^i - \mu Q_R$  を開放して生じる相対すべりが進行する。したがって、リブ部の実際の接触面接線力  $q_R$  は図中の細かい破線のように  $Q_R$  の変動に従う限界摩擦力曲線上を進んでいくことになる。

スカート側接線力はその変形拘束に要する力  $q_S^i$  が接触開始の初期から、限界摩擦力  $\mu Q_S$  より大きく、したがって接線力  $q_S$  は図の長い破線のように  $\mu Q_S$  に従って増大し  $q_S^i - \mu Q_S$  に相当する変形が開放されてその分のすべりが進行することになる。

以上で接線力の挙動が明らかとなつたから、次にこれによつて生じる付加応力の状態を一例として図 4.5.5 の構造モデルの場合について解析した。この結果を図 4.5.3 3 に示す。図中破線はリブ接触面の内向き単位接線力  $q_R = -1 \cdot 0^5 \text{ Kg/rad}$  による応力であり、また一点鎖線はスカート部の内向き単位接線力  $q_S = -1 \cdot 0^5 \text{ Kg/rad}$  による応力である。これ

より接線力によつて生じる付加応力は一般に小さいことがわかる。

次に熱負荷作用後にガス圧荷重が重畳する場合の接線力やすべりなどの挙動を明らかにする一例として図 4.5.5 のフラット型クラウンが図 4.5.3 に示す下側ピストンによつて支持され、熱負荷  $\lambda_T = 2.7$  の上にガス圧荷重  $p = 1 \text{ Kg/mm}^2$  が重畳して作用する場合を解析した。この状態では両接触面はすでに述べたごとく、熱負荷によつて接触状態にあり、かつ相対すべりを生じているが、ガス圧荷重が重畳したときの接触面圧の増分による付加限界摩擦力以内に、 $p$  による付加接線力が保持されるときには一体の挙動をする。

そこで両接触面が熱負荷作用後も全面一様に接触しているものとし、 $p$  のみが独立に作用する条件でまず解析した。その結果を図 4.5.3 4 に示す。図中実線および破線は両接触面内の面圧および接線圧の分布を、また、接触面の矢印は接線力の作用方向を示す。これより、リブ巾内の接触面圧の分布は内面が強く当るような分布傾向を、またスカート側接触面内の分布は一様な当りを示す両端上りの分布傾向を示す。また熱負荷によつて両接触面がともに全面一様に接触しているときにはガス圧荷重作用後の両接触面の接線力の増分は付加面圧できまる限界摩擦力内に保持されることがわかる。

#### 5.4.2 接触面の傾きの影響

これまでの挙動の解析では熱負荷によつて生じる接触面の傾きの影響は考慮していなかった。そこで次に、熱負荷作用時に、図 4.5.3 5 の挿入図に示すようなリブおよびスカート接触面の傾きを表わす付加撓み  $\beta_R$  および  $\beta_S$  がどのような値をとるかを前の図 4.5.1 4 および図 4.5.1 5 の解析の際の結果より、 $\lambda_T = 2.7$ 、 $\Delta_i = 0$ 、 $f_k = 1$  の場合について求めると図 4.5.3 5 のようになる。

これより  $\beta_R$  および  $\beta_S$  の大きさは図 4.5.1 4 の単位熱負荷による変形などと比べて 1 桁小さいことがわかる。

スカート側の付加撓み  $\beta_S$  はスカート側接触力を増し、リブ側接触力を減ずる一方、リブ側の付加撓み  $\beta_R$  はこの逆となる。いま、この付加撓みに対応する付加接触力の大きさ

を図 4.5.1 4 と図 4.5.1 9 を用いて求めれば図 4.5.3 6 のようになる。これより接触面の傾きによる付加接触力の大きさは構造のいかんにかかわらずほぼガス圧単位荷重  $Q_p$  の 2 ～ 10 % 位の範囲にあつて小さいことがわかる。これを図 4.5.1 9 の熱負荷作用時の接触力  $Q_s$  等と比較すれば約 10 % 以下となり、接触面の傾きによる付加接触力の影響はかなり小さいことがわかる。

次に熱負荷による接触面の傾きを考慮した分割型ピストンの接触面挙動を明らかにするため、熱負荷作用時を第 1 段、ガス圧重畳時を第 2 段とする 2 段負荷履歴を与えて解析を行なつた。対象とした構造は図 4.5.3 4 の場合と同じで、始めに熱負荷のみを  $\lambda_T = 2.7$   $\Delta i = 0$  および  $Q_0 = 0.82 Q_p$  の条件で解析し、2 段目としてガス圧単位荷重  $p = 1 \text{ Kg/mm}^2$  をこれに重畳させた。

この結果得られる両接触面の面圧および接線圧の分布およびクラウン両表面の経線応力の分布を図 4.5.3 7 に示す。熱負荷が作用するとリブ接触面はリブ内周で最大となるような口開きを生じ、外周寄りの一部の接触部に高い面圧集中部が生じる。そしてこの部分は限界摩擦力に相当する接線圧を保ちつつ、クラウンが相対的に熱伸び方向に動くような相対すべりを生じる。

スカート側接触面は、全面が下側ピストンの対応部と接触するが熱による変形の生じ方に起因して外周寄りに高い面圧集中部が生じる。熱負荷によつて生じた力は、リブ側では初期締付力  $Q_0$  でほぼ相殺されるが、スカート側はそのまま図のような接触面圧分布の形で残留する。スカート側接触面接線圧は図 4.5.3 2 で述べたように限界摩擦力を保持しつづすべりが進行する。

次にガス圧荷重が重畳したときのリブ側の面圧増分は熱負荷による口開きの影響で外周側で大きく内周寄りで零に近い直線的な面圧分布を示し、図 4.5.3 4 の全面一様接触の場合とかなり異なつた分布性状を示す。スカート側の面圧増分は図 4.5.3 4 の場合と変わらない。またガス圧重畳時にはリブ側接触面の口開きが解消されることがわかる。重畳ガス圧によるリブ側およびスカート側接触面の相対すべりの方向は、熱負荷作用時と同方向となるため



一体挙動をするスカート側最外周部付近を除いて、付加面圧できまる限界摩擦力の付加接線圧を作用させつつ同方向のすべりを生じる。

#### 第 4 編 参 考 文 献

- (4.1) 小林, 西島, 高垣, "リップ付ピストンの構造解析" 三菱重工技報, Vol. 7, №5, 1970, P. 619
- (4.2) Saugerud, O.T., and Aasen, E., "Piston Crown MAN KSZ 105/180 3-Dimensional Stress Analysis", Det Norske Veritas Report, No.73-7-M, Jan., 1973
- (4.3) 山田, 田中, 増田, "石川島播磨スルザー大型ディーゼル機関における問題点と対策", 内燃機関, Vol.10, №9, 1971, P. 37
- (4.4) Kirchenmann, W.A., "75 Years Continuous Development of Diesel Engines", North East Coast Inst. of Engrs. & Shipbldrs Vol.9, No.3, 1974, P.61
- (4.5) 表原, 深堀, "三菱UEC 85 / 180 D形機関の開発", 三菱重工技報, Vol.7 №5, 1970, P. 625
- (4.6) Alcock, J.F., "Thermal Loading of Diesel Engines", Inst. Mar. Engrs, Vol. 77, No.11, 1965 P.279
- (4.7) Langballe, M. "Investigations into the Thermal Loading of a Large Bore Diesel Engine", European Shipbldg, No.4, 1969, P.58
- (4.8) 矢野, "三菱UEディーゼル機関の熱応力について", 内燃機関, Vol.2, №17, 1963, P. 50
- (4.9) Gregoretta, A., "Service Performance with Fiat Marine Diesel Engine Type 900S", Inst. of Marine Engrs, Vol. 77, No.1, 1965, P.25

- (4.10) Sorensen, J.S., "Development of E & W KGF-Engine", Trans. Inst. Marine Engrs. Vo., 83, 1971
- (4.11) 薦, "大型ピストンのリブルート部の熱応力解析" 日本機械学会論文集, 40 卷 335 号, 昭 49, P. 1888
- (4.12) 薦, 織田, 山地, 小竹, "ピストンの強度 (その 6, 分割型ピストンの応力解析)", 日本機械学会関西支部第 50 回定時総会講演論文集, 昭 50-3, P. 14
- (4.13) Röhrle, M., "Ermittlung von Spannungen und Deformation an Kolben", Motor Tech. Zeitschrift, Vol. 31, No.10, 1970, P.414
- (4.14) 飯田, 高城, "光弾性試験による応力解析 (三次元光弾性試験によるピストンクラウン 応力解析)", 防衛庁技術研究本部技報, 第 7 卷第 67 号, 昭 43, P.13
- (4.15) 武本, "I H L - S E M T PC-3, PC-4 形機関", 内燃機関, 12 卷. 5 号, 1973, P. 30
- (4.16) 平山, 岡村, 帆刈, 斉藤, "ピストンの変形と応力", 日本船用機関学会誌, 第 9 卷第 6 号, 昭 49, P. 57

結 論

厚肉構造物は大型機械構造で常用される重要な構造要素の一つであるが、有限要素法のこの種構造系への応用は主として三次元塊体要素の適用によつて行なわれてきたため、構造や挙動の平易さの割にはその取扱いが複雑となりすぎるきらいがあつた。

そこで本論文の第1編では、厚肉体を薄肉体と同じ取扱いによつて肉厚内の非線形な応力分布まで求める方法として、肉厚内の分布を直交関数の和に展開して所要の解を得る新しい有限要素解析理論を開発することができた。

次に厚肉体同志が接触部を介して力を伝え合う接触複合構造系の解析は従来個別の問題ごとに連続体有限要素法の解法を工夫する以外に手段がなかつた。しかし機械構造物が大型化するほど複合構造系を構成する割合およびその種類が増大するから、いずれの場合も取扱える接触構造系の解析理論の確立は不可欠である。

本論文の第2編では接触結合部の非線形挙動の基礎的考察をもとに、このような任意の厚肉体接触複合構造物が取扱える新しい有限要素解析理論を導くことができた。

第3編、第4編ではこれらの解析理論を用いて船用ディーゼル機関の各種大型ピストンの応力に関する基礎的挙動を明らかにした。大型ピストンの応力に関するこれまでの研究は機種別の事例解析が主体で、それらの結果を相互に活用することが困難であつた。

本論文では大型ピストンクラウン部の主要構造様式を厚肉回転殻構造から成るリップなしピストン、このクラウンの内面を各種リップで支持したリップ付ピストンおよびクラウン部とこれを支持するスカート部を分割し、接触結合させた分割型ピストンの3種に大別し、それぞれがガス圧荷重、熱伸び荷重、熱曲げ荷重の各単位荷重を独立にうける場合の挙動を明らかにすることにより、いずれのピストンにも応用できる構造様式・形状と負荷様式と応力に関する基礎的な関係を初めて明らかにすることができた。

第1編、第2編で得られた解析理論の妥当性はすべて解の明らかな基本的な例題を解くことによつて検証された。また第3編、第4編における大型ピストンの応力解析結果の妥

当性は実用ピストンを用いた実験および運転時の計測結果により確認された。

第1編から第4編に得られた主な結論は次の通りである。

## 1 第1編の結論

厚肉回転殻や厚板、厚肉曲面構造などの厚肉体は、肉厚方向の剪断力を伝達するほか曲り梁に見られるように肉厚内の応力分布が直線以上の高次の分布をする場合があるため薄肉理論では取扱えず、取扱いを複雑化した塊体要素の適用によつて取扱われてきた。

このため、離散化手続きやそれに伴うデータエラ、計算費用などが膨大で実用上労力の多い解法を強いられるという面があつた。

そこで厚肉体の肉厚内の応力分布形状は比較的単純な形をすることに注目して、肉厚内の応力、変位の分布を Legendre の直交関数の和の形で表わし、薄肉体と同じように応力変化の任意な広がり方向のみの要素分割でこれを取扱う、新しい厚肉体の有限要素解析理論を導いた。

第2章では経線方向を Lagrange の内挿関数、肉厚方向を Legendre 関数で表わした要素変位関数を軸対称体の基礎方程式と仮想仕事の原理に用いて、節点（断面）のモード別変位分布の振巾を未知量とする厚肉回転殻軸対称問題の基本剛性方程式を誘導した。その際2種の変位関数を併用し、半径変位の代わりに周方向歪を用いる工夫により積分時の直交条件が容易に導入しうることを示すとともに、直交条件の利用によつて剛性行列が対角状となること、各モードごとの剛性行列は低次の三つの基本剛性行列の単純な組合わせで求められることなどを明らかにした。そして得られた基礎関係式を用いて汎用プログラムを作り、解の明らかな基本的な例題を解いて解析法の妥当性を検証した。

これによつて、厚肉回転殻はその肉厚中心線の経線方向の線分からなる基本要素を用いて、肉厚内の非線形な応力分布まで求められるようにすることができた。

第3章では厚肉体の三次元問題の解析理論を導いた。厚肉体を肉厚中心面内での任意の四辺形要素に分割して四つの隅角点と四つの辺2等分点の八つの節点（断面）<sup>1)</sup>で基本

要素を構成し、広がり方向分布を内挿関数で、また肉厚内の分布を Legendre の直交関数の和で表わした。この変位関数を三次元塊体の基礎方程式に用い、仮想仕事の原理から、広がり方向と中立面の法線が近似的に垂直な場合について、節点変位振巾を未知量とする基本剛性方程式を誘導した。この場合にも 2 種の変位関数の併用によつて直交条件の導入を容易にし、これによつて剛性行列を対角化して計算効率をあげるとともに、モード別の剛性行列が 3 個の基本剛性行列の組合わせによつて得られることを示した。

これによつて厚肉体の三次元問題の解析は、肉厚中立面の広がり方向を四辺形要素に分割することによつて肉厚内の非線形な応力分布まで求められるようになり、厚肉体に対する一つの新しい合理的な実用解法を開発することができた。

第 4 章では厚肉体三次元構造の熱伝導解析理論を誘導した。熱伝導の基礎微分方程式が停留関数としての Euler の方程式となり、表面の熱的境界条件が変分の際の自然境界条件となるような汎関数をまず求め、第 3 章で用いた厚肉三次元体要素の変位関数をこの汎関数に用いて未知節点温度振巾に対する停留条件から温度剛性方程式を導いた。

第 3 章、第 4 章の解析結果はいずれも汎用プログラム化して基本的な例題を解き、その有用性を明らかにすることができた。

以上の解析法においては剛性行列の対角化やモード別剛性行列が基本剛性行列の単純な組合せで得られることにより計算をかなり効率化することができ、また、塊体的手法と比べて要素分割などの構造の離散化に伴う入出力手間が著しく簡素化され、データエラーや計算誤差の減少が可能となつた。さらに従来 of 塊体的手法では離散化しすぎるために工学的判断の容易でなかつた解析結果の表示は断面力や断面モーメントおよび自己平衡応力成分など直観的に工学的判断の得やすい形で求められるようになつた。

## 2. 第 2 編の結論

接触結合部の非線形挙動と接触面連続条件の基礎的考察をもとに、厚肉体接触複合構造物の一般性のある有限要素解析理論を開発することができた。

まず接触面の挙動を基本的に検討した結果、除荷を伴うような組合せ荷重が作用する場合、接触面に生じる接線力およびすべりには、弾塑性体の負荷除荷時の応力-歪関係に見られるような非可逆的な過程が存在し、負荷の最終状態の挙動を求めるためには、非可逆過程を含まない負荷増分の過程にわけて解を求め、その結果を蓄積して最終状態を定めなければならないことを明らかにした。

そこでこの取扱いに荷重増分法の手法を導入して、仮想仕事の原理から増分型剛性方程式を求め、この方程式中に含まれる未知接触力などを接触両面間の連続条件を用いて既知量表示し、問題を解く方法を考えた。接触面の性質には、接触面が連続体のごとく一体に変形する場合と、接触両面が相対的にすべる場合があるが、このほか自由境界の性質も含めることにより、負荷によつて接触範囲が変わる Hertz の問題や、初期ギャップやラップを含むような問題が取扱えるように工夫した。そして各接触面性質に対応する力の平衡条件および変位の連続条件を接触面が任意の傾きをもつ一般の場合について求めて増分形で表した。

この連続条件を使つて先に求めた物体別増分型剛性方程式から接触複合構造系に対する剛性方程式を誘導するマトリックス演算の手法を示した。この場合接触面がどの性質をもつかは未知の接触力成分間の関係や接触面対応変位などによつて定まることから、解析の初めには不明であるので、始めに接触面性質を仮定して解析を行ない、この結果得られる接触力と接触面変位とから、仮定した接触面性質の適否を判定するような試行錯誤による繰返し解法を考えた。

以上により任意の物体形状と接触面形状を有するほとんどの接触問題が解析できるようになり、接触境界に作用する力や物体ごとの変形、応力状態などが一挙にして求められるようになった。

本解法の妥当性を検討するため、平面応力、軸対称接触問題解析用汎用プログラムを作り、Hertz の問題やねじの接触問題など性質の異なる基本的な例題を解いて既存の解と比較した。



実際の数値計算では接触力の非常に小さいところや、連続体変形とすべり変形の境界部などで、解の大勢に影響を及ぼさない微小量の修正のために、試行錯誤過程での解の収束性が悪くなる傾向があつた。そこで異なる接触面性質の選択条件の分岐点近傍に緩衝帯を設けるとともに、絶対量による判定条件を相対量によるものに切り換えることにより収束性の改善を計つた。その結果通常数回の繰返し計算によつて正解への収束が得られるようになり、各例題について本解法の有用性が確認された。

### 3. 第3編の結論

第3編ではリブなしピストンの応力に関する諸問題を解析した。

リブなしピストンの応力に関する従来の研究は薄肉殻理論による解析や有限要素法による事例解析が主であつたが、薄肉殻理論による解が実際のピストンの挙動をどの程度表わすかは明確にされておらず、また有限要素法による解析は相互利用の困難な事例解析の域を出ず、日常化した機関の改良・開発研究にあまり寄与しえない面があつた。

そこで厚肉回転殻構造からなる大型リブなしピストンが主要外力であるガス圧荷重および熱負荷をうける場合の構造様式・形状と負荷様式と応力に関する一連の解析を第1編の手法を用いて行ない、いずれのピストンにも応用できる基礎的な諸関係を明らかにすることができた。

第2章では、まず熱応力解析の基礎となる種々の熱負荷条件下で構造系内に生じる温度分布の発生状況を解析した。そして、ピストンの定常1サイクル中のクラウン部のサイクル平均温度分布や触火面付近の温度変動状態と熱負荷条件の関係、起動・停止などの運転変動条件下でピストンクラウン部に生じる過渡温度変動と運転条件の関係や定常温度分布との差異および定常状態で隅角部に生じる局部昇温の様相や燃料噴斜方向の局部昇温の状態などを明らかにした。

第3章では、実用構造を代表する3種の大型リブなしピストン構造様式すなわちクラウンがフラット型、球殻型およびフラット+円環殻型の各様式で、種々の形状寸法をとる

場合の挙動特性を解析した。

熱負荷挙動に対する解析は取扱いを一般化するため肉厚平均伸び成分、表裏符号逆の温度勾配成分および隅角部局部昇温成分にわけ、ガス圧荷重を含めたそれぞれの基本荷重下でのクラウン各部の断面モーメント、膜力などの発生特性、これらの形状パラメータによる変化、構造形状と隅角部固着度の関係、薄肉殻理論解との差異と、その解決策および隅角部内面の応力集中と丸み半径、ピストン径および負荷様式の関係などを明らかにすることができた。

第4章では実用大型リブなしピストンを用いた油圧負荷実験、バーナによる熱応力実験および実機運転時の実験により実用時の発生応力の実態を把握し、併せて解析解の妥当性を検証した。これらによつて得られた主な結論は次の様である。

- (1) 定常な1サイクル中の触火面付近の最大温度変動巾は、熱負荷条件によつて異なるが、通常20~30℃と小さく、また温度変動の浸透深さも触火面から3~4mmと小さい。したがつてクラウンの定常状態での温度は、ガス側および冷却面側の二つのピオ数（肉厚×表面熱伝達係数/熱伝導率）で決まるサイクル平均温度分布にほぼ近い。
- (2) 起動、停止、負荷変動など過渡状態で生じる温度分布を2段起動および停止、およびステップ起動および停止の代表的な4種の出力変動条件で解析した。この結果過渡中の両表面の温度差はクラウンの一樣断面部、隅角部とも定常時の温度差より小さく、かつ過渡初期から定常状態に進むにつれて温度差が漸増（起動）あるいは漸減（停止）する分布傾向を示す。
- (3) 隅角部の局部昇温は、触火面隅角端の温度が最も高く、これがクラウン中心方向およびスカート下縁方向に、それぞれ肉厚程度の範囲で直線的に減衰する分布傾向を示し、最大温度は肉厚一樣断面部表面温度に比べて3割前後高くなる。
- (4) 燃料噴射方向の局部的な高熱負荷によつて生じる局部昇温の状態を、熱負荷域の半径方向位置と巾、周方向の断続性の巾を変えて解析し、その結果を図表化した。

- (5) 次にピストンがクラウン部に一様なガス圧荷重をうける場合の挙動を実用構造を代表する3種の様式について解析し、これを薄肉解析解と比較したところ、両結果は相当異なつた。その原因を検討した結果、隅角部の固着効果に対するスカート肉厚の影響であることが明らかとなり、薄肉解析解でも連続条件を工夫することにより妥当な解が得られることを明らかにした。
- (6) 3種の構造様式で種々の形状のリップなしピストンがガス圧荷重をうける場合の主要断面（中央断面、隅角部、構造変化部）のモーメント、膜力が、この構造形状を表わす4種の形状パラメータによつて、どのように変化するかを求めて図表化した。隅角部におけるクラウンの固着度は、フラット型のもので70%~80%、球殻型のもので70~110%、フラットと円環殻の組合せ型のもので約80%前後の値をとる。
- (7) ピストンに生じる熱応力のうち、温度勾配によるものは、フラット型、球殻型およびフラット+円環殻型のいずれもほとんどの熱歪がそのまま拘束されて熱応力となる。この関係を、ピストン主要断面の曲げ応力、膜応力と形状パラメータの関係として図表化した。
- (8) 肉厚内で一様な熱伸び成分が作用する場合の熱応力は、フラット型では、クラウン部で一様で、熱伸び完全拘束の約20%の曲げ応力と5%程度の伸び拘束による膜圧縮力を生じる。球殻型クラウンでは、くぼみが大きくなるにつれて、半径方向伸び拘束による隅角部付加曲げモーメントが急増し、逆に中央部付近のモーメントは漸減する。球殻型クラウンは、ガス圧応力は低い、このような熱伸びによる付加曲げモーメント増大の問題を本質的に抱えている。

フラット+円環殻型ではフラット部はフラット型の、また円環殻部は球殻型と同じような挙動を示し、隅角部のモーメントが大きくなる。これらの結果をわかりやすくするため、主要断面の曲げ応力および膜応力と形状パラメータの関係を図表化した。

- (9) 温度勾配，熱伸びに対する厚肉解は，いずれも薄肉解とかなり近い。
- (10) 隅角部局部昇温による熱応力を代表的な例について解析した。フラット型クラウン部の温度分布から温度勾配成分と熱伸び成分を差引いて隅角部の局部昇温成分のみを取出し，その応力発生状況を解析した結果，クラウン部には主として膜力が，スカート部には曲げモーメントが作用するが，その値は小さく隅角部に生じる局部的に大きな温度勾配はほぼそのまま円周応力として隅角部のみで拘束され，全体挙動への影響は少ないことがわかった。
- (11) 隅角部の応力集中が荷重条件，丸み半径やピストン径などによつてどのように変化するかをフラット型構造様式の場合について解析した。そしてガス圧，熱曲げおよび熱伸びの各単位荷重をうける場合について，隅角部曲率半径と応力集中率の関係をピストン半径をパラメータとして図表化した。
- (12) ガス圧荷重下の応力集中率は平面の場合の解と大きく違わないが，ピストン径が大きくなるにつれてその値は低下する。熱曲げ単位荷重下の応力集中率はピストン径によつてほとんど変わらず，丸み半径の増加とともにゆるやかに漸減するが，その大きさはあまり大きくない。熱伸び荷重下の応力集中は熱曲げの場合とほぼ似た傾向を示し，応力集中率はあまり大きくない。
- (13) 外径520mmで構造形状の異なる2種の実用ピストンにつき，ガス圧の代りに油圧を負荷して表面各部の歪を計測し，解析解と比較したところ両者は比較的よく一致した。
- (14) このピストンを手製の燃焼器を用いた熱応力実験装置にセットし，高温歪計によつて熱応力を計測する一方，実測温度分布をもとに解析解を求めて両者を比較したところ，比較的よく一致した。
- (15) このピストンをさらに実際の供試機関に組込んで実機運転時の動的応力を計測し，得られたガス圧応力および熱応力をそれぞれ指圧線図より得られる最大圧力に対する解析解および実測温度分布より求めた熱応力の解析解と比較したところ，両者は

比較的よく一致した。これらにより、大型リブなしピストンの実働応力の概要が把握しえたとともに、これらがいずれも解析的に推定できることが明らかとなった。

#### 4. 第4編の結論

大型リブ付ピストンおよび分割型ピストンの応力は、三次元解析や接触問題の解析を必要とするため、これらを取扱った研究は少なく、構造様式と挙動の関係は、まだよく明らかにされていない。

そこで第1編および第2編の手法を用いて大型リブ付ピストンの各種リブ構造と発生応力との関係および分割型ピストンの接触部挙動の特性と発生応力との関係に関する一連の解析を行ない、これらの問題を解明するとともに、クラウンとリブ接合部付近の熱伸び差拘束応力を解析する新たな解析理論を導いた。

第2章～第4章では円周型および放射型の2種の主要リブ支持方式の大型リブ付ピストンがガス圧、熱曲げおよび熱伸びの各単位荷重をうける場合の挙動を解析した。ピストンのクラウン部は熱負荷対策上あまり厚くできないため、あるピストン径以上のものでは必然的にリブ付ピストン構造様式が採用されることになるが、この構造ではガス圧荷重によるクラウン部の面外曲げ変形がリブ部で拘束されるため、リブの配置や様式によつて、その挙動がリブなしピストンの場合と著しく異なる。

そこで第2章では、上の2種のリブ付ピストンにガス圧荷重が作用する場合の応力を第1編の手法を用いて解析し、構造各部の発生応力の特徴、その挙動を支配するパラメータ、リブ配置様式と発生応力との関係などを明らかにした。また熱曲げ荷重下の熱応力の発生状態も解析した。

第3章では、冷却室内にあるリブと高熱ガスに直接さらされるクラウンとが両者の接合縁に沿つて熱伸び差を拘束されるために生じる拘束熱応力の問題を解析するための新しい解析理論を誘導した。そして、接合縁上の発生応力の特徴や、発生応力とリブの剛性、リブ巾、リブ間隔などの諸要素との関係を明らかにした。

第4章では実用大型リブ付ピストンがガス圧荷重をうける場合の応力を燃焼室に油圧を  
負荷する実験により求めて、解析解と比較した。

第5章では分割型ピストンの挙動を第2編の手法と撓性行列法を併用して解析した。  
まずガス圧、熱曲げ、熱伸びおよびスカート部反力などの基本荷重がそれぞれ独立に作用す  
る場合の発生応力の特性や両接触面の変形状態を解析した。次にこれらを組合わせて、熱  
負荷をうける場合、およびガス圧荷重が重畳する場合の接触面作用力、接触面の變形および  
構造各部の応力状態などがスカート下縁に通常設けられる初期すきま、下側ピストンの剛性  
クラウンの構造様式、リブ位置および熱負荷による接触面の變形などによつてどのように変  
化するかを一連の解析によつて明らかにするとともに、接触面の傾きによる面圧分布の変化  
や、接触面接線力、すべりの大きさとそれらの応力に及ぼす影響なども同時に求めた。

第4編で得られた主な結論は次の通りである。

#### リブ付ピストン

- (1) 周方向にたんざく状に分割された一円周型リブ付ピストンが、リブで仕切られた各円  
板部の最大応力が等しくなるような合理的リブ半径位置を有するとき、ガス圧荷重に  
よる曲げの最大半径応力は、リブ端で半径方向内外面に生じる。その大きさは、リ  
ブ取付円周の長さ、これからリブ間隔の長さを除いた正味リブ占有長さの比で大き  
くなる。最大周応力もリブ端に生じ、その大きさは、リブ間隔部の受圧面積（ピス  
トン中心と、向合わせた両リブ端面を結ぶ扇形面積）の1/2を両リブ端で受持つとし  
た単純梁理論解にほぼ近い。外円周上（スカートと接続する隅角断面）の最大半径  
応力は、リブの周方向の間隔の2等分点延長線上の位置に生じ、その大きさはリブ端  
の半径応力に近いやや小さい。
- (2) 上と同様の合理的リブ位置を有する二円周型リブ付ピストンがガス圧荷重をうけると  
きの最大半径応力は内外周リブともリブ端に生じ、両者の大きさはあまり変わらず、こ  
れらは一円周型の場合と同様の方法で推定できる。周応力の最大値は内外周リブと

も、リブ端に生じるが、その大きさは受圧面積分担の割合に応じて外周リブの方がはるかに高くなる。その大きさは一円周型の場合と同様の方法でほぼ推定できる。

外円周上の最大半径応力は外周側リブ間隔の2等分点延長線上に生じ、外周側のリブ端の半径応力に近いやや小さい。

- (3) 放射型リブ付ピストンにガス圧荷重が作用する場合の最大半径応力は、外円周上でリブ間隔の2等分点延長線上の点Aに生じ、また周応力の最大値は、このAから測つた2等分点延長線上の長さ、リブ取付線の法線の長さとは等しくなるように引いた法線の根元Bに生じる。(図4.2.21参照) この長さを $\bar{a}$ とすれば、最大周応力の大きさは一辺 $2\bar{a}$ の周辺固定正方形板の辺中央の曲げ応力によつて、また最大半径応力は、この曲げ応力の $1/1+\alpha$ 倍( $2\alpha$ はリブ間隔を表わす角度)によつて、ほぼ近い上限を与えうる。最大半径応力はリブ数が6から10になれば、直径と肉厚の比が10の場合で約 $1/3$ に、また最大周応力は約 $1/2$ に低下させうる。
- (4) 温度勾配によるクラウンの熱曲率は円周型および放射型いずれのリブ構造様式の場合も、リブ支持の影響によつてほぼ完全に拘束され、熱歪に相当する熱応力がそのまま発生する。
- (5) クラウンとリブの接合縁での両者の熱伸び差を拘束することによつて生じる拘束熱応力の解析方法として、構造の一对称部の立体構造を帯板要素に分割し、帯板内部の挙動を支配する偏微分方程式を、帯板縁辺での常微分方程式の連立系に変換して解く新しい理論解析法を導いた。
- (6) 熱伸び差に起因して、リブとクラウンの接合縁に生じる局部拘束熱応力のうち、リブ側の応力は、リブ端で全熱伸び差拘束応力よりかなり高く、中央部でこれより小さい一様応力部分を作る。クラウン側の接合縁に沿う拘束熱応力は、リブ端で引張りで中央部に進むにつれてすぐ圧縮一様応力状態に転化するが、リブ側応力よりかなり小さい。一般に全熱伸び差のうち、リブ側で約8割、クラウン側で約2割が拘束される。

- (7) リブの肉厚が増すと熱伸び差拘束応力はリブ側、クラウン側ともに大きくなるが、リブ接合部の長さの増減はリブ端最大応力にあまり影響せず、中央の一樣応力部分の巾が増減する。またリブとリブの間のクラウンは接合縁の拘束変位の取合いに対してばねの役目をし、この部分の長さが短くなると、リブ、クラウンの拘束熱応力は大きくなる。
- (8) 大型リブ付ピストンの実用時に生じる応力の実態を把握し、併せて解析解の妥当性を検討するため、一例として超大型実用二円周型リブ付ピストンがガス圧荷重をうける場合の挙動を油圧荷重による実験によつて調べた。その結果、実験値は傾向、大きさともに解析解と比較的よく一致し、実用ピストンの挙動はこのような解析解によつてほぼ推定できることが明らかとなつた。

#### 分割型ピストン

- (9) 熱負荷やガス圧を直接うける上側ピストン部と、これを支持する下側ピストンの二つの構造に分割した分割型ピストンに、熱負荷が作用すると、クラウン中心部が熱負荷作用側にとつとなるような熱変形を生じ、クラウン部に設けたリブ支持部の接触面には口開けようとする力が、またスカート側の接触面には押付け力が作用する。その大きさは、ピストンの剛性とスカート側接触面に設けた初期すきまによつて変化する。初期すきまがあると、熱負荷作用時の両接触面の相対熱変形が、この大きさになるまでは、熱負荷による接触力は作用せず、相対熱変形がこれを超えるとスカート側接触面には、この超えた分の相対変形を拘束する接触反力が作用し、リブ側接触面の初期締付力は、この分だけ低下していく。このスカート側接触力の大きさは、初期すきまが大きいほど、またクラウンの凹みが増すほど小さく、またリブ位置が中心に近づくほど急激に小さくなる。
- (10) 熱負荷の上にガス圧荷重が重量する場合には、両荷重によつて生じるリブとスカート両接触面の相対変形が初期すきまより小さく、スカート下縁が自由境界のもとで挙動



する場合、熱負荷による相対変形が初期すきまを相殺して、両接触面支持の挙動をする場合、および熱負荷だけで接触せず、ガス圧サイクル  $0 \sim P_{max}$  の途中  $0 \sim P^*$  の間は、スカート下縁自由  $P^* \sim P_{max}$  の間は両支持面接触を繰り返す場合の3種の挙動特性がある。そこで熱負荷だけでスカート下縁が接触を開始する熱負荷の大きさ  $\lambda_T^{**}$  および熱負荷にガス圧荷重が重量して初めて両面が接触開始する大きさ、 $\lambda_T^*$  が初期すきまによつてどう変るかをフラット型および球殻型クラウンの場合について求めて図表化し、与えられた熱負荷およびガス圧荷重下の挙動が3種のうちのいずれの接触条件で挙動しているかを求められるようにした。

(1) 熱負荷によるクラウン各部の応力は、リップ付加の影響と接触面反力の影響によつて、リップなしピストンの場合より変化する。このうち熱曲げ単位荷重による応力は、リップなしピストンの場合と同じく、温度勾配に相当する熱歪はクラウン全面にわたつてほぼ完全に拘束されて、そのまま高い熱応力となる。この傾向はリップ位置やクラウン形状で変化しない。熱伸び単位荷重による応力は、リップ部の軸方向温度勾配によつてクラウンとリップの接合縁に作用する付加曲げモーメントの影響分だけリップなしピストンの場合と異なりリップ外周側のクラウンの断面と隅角断面で符号反対のかなり大きな曲げ応力を生じる。これらの熱曲げおよび熱伸び単位荷重によるクラウン主要断面の応力が、構造形状やリップ位置によつてどのように変化するかをフラット型および球殻型クラウンの場合について求めて図表化した。

(2) スカート下縁の単位接触反力による応力は、隅角部に生じる剪断力と付加曲げモーメントに起因し、隅角断面とリップの外周側断面で符号逆のかなり大きな曲げ応力を発生させる。熱負荷作用時の接触面反力の大きさは、クラウンの肉厚方向温度分布のもつ熱伸び、熱曲げの配分にもとづいて、リップとスカートの両接触面の相対変形を求め、これと初期すきま、スカート下縁の単位反力による相対変形の関係からこれを定めることができる。そこでこの反力の大きさが構造形状やリップ位置などによつて、どのように変化するかをフラット型および球殻型クラウンの場合について求めて図表

化した。その大きさはクラウンのくぼみの増加とともに相当急速に小さくなる。

リブより内周のクラウン部の曲げ応力は至るところほぼ一様で、その大きさは外周側応力よりも、かなり小さい。

- (13) ガス圧単位荷重によるクラウンの応力は、リブ支持の影響によつてリブなし型の場合と相当異なり、クラウン中心および隅角断面のほかリブ内外周の断面の曲げ応力が大きくなる。そこでこれら主要断面の応力が構造形状、リブ位置および接触条件によつてどのような値をとるか求めて図表化した。クラウンのくぼみが大きくなるほどクラウン各部の曲げ応力は小さくなり、リブ内周側断面の曲げ応力が大きくなる。またガス圧応力は10項で述べた3種の接触条件によつてもかなり差が生じ、特に支持条件の影響を強くうけるリブより外周側クラウン部の曲げ応力の変化が著しい。
- (14) リブ側接触面では初期締付力の大きい熱負荷の作用初期に接線力が限界摩擦力に保持されて、すべり拘束に要する力がそのまま接線力として作用するが、この期間は負荷のごく初期だけで、少し負荷が上昇すると、接線力は限界摩擦力を保ちつつ熱負荷上昇とともに、接触面の相対すべりが進行する。スカート側接触面の接線力は、接触開始の初期から、スカート側作用面圧のもつ限界摩擦力の変化に従いつつ、すべりが進行する。ガス圧荷重が重量するときの付加接線力は、リブ側で内向き、スカート側で外向きに作用し、熱負荷作用後も両接触面が一樣接触を保つ時には、リブ部は付加面圧できまる限界摩擦力以内で一体の挙動を、スカート側も接触域の一部がすべりつつ、ほぼ一体型の挙動を示す。これらのリブ部およびスカート部の接線力によるクラウン部の応力の変化は一般に小さい。
- (15) リブ部接触面の熱負荷による傾きに起因する付加接触力は小さいが、接触面内の面圧分布はこの傾きの影響によつてかなり変化し、一樣接触の際、一樣に近かつた面圧分布はリブ外周側で大きく、内周側で零に近い直線的な分布に変化する。スカート側の接触面圧は傾きによる影響を余りうけず、ほぼ一樣接触状態に近い。

## 著 者 発 表 論 文

- 1 蔦 紀夫, 山地成一, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第1報, 厚肉回転殻軸対称問題)", 日本機械学会論文集, 42巻, 353号, 昭51-1, P73 (第1編第2章)
- 2 蔦 紀夫, 山地成一, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第2報, 厚肉体の三次元問題)", 日本機械学会第51回全国大会講演論文集, №730-13, P163, (日本機械学会論文集昭51-8掲載予定), (第1編第3章)
- 3 蔦 紀夫, 山地成一, "肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第3報, 厚肉体の熱伝導解析)", 日本機械学会関西支部第49期定時総会講演論文集 (昭49-3), P1, (日本機械学会論文集昭52-2掲載予定), (第1編第4章)
- 4 蔦 紀夫, 山地成一, "接触問題の有限要素解析解に関する研究", 日本機械学会誌 (技術論文), 76巻, 651号, 昭48-3, P348, Tsuta, T. and Yamaji, S., "Finite Element Analysis of Contact Problem", Proc. of the 1973 Tokyo Seminar on FEM, Univ. of Tokyo Press, 1973-11, P177 (第2編第2章)
- 5 蔦 紀夫, "ディーゼル機関燃焼室壁の過度的弾塑性熱応力変動の解析 (その1, 定常サイクル中の変化)", 日本機械学会関西支部第230回講演論文集, 昭48-6, P23, (第3編第2章)
- 6 蔦 紀夫, "電子計算機による平面および軸対称構造物の熱伝導および熱応力解析", 川崎技報, 第38号, 昭45-6, P1. (第3編第2章)
- 7 蔦 紀夫, 織田光秋, 山地成一, "ピストンの強度 (その5, リブなしピストンの応力解析と厚肉解, 薄肉解の差の比較検討)", 日本機械学会山梨地方講演会講演

- 論文集, 昭49-11, P173. (第3編第3章)
8. Akashi, G., Shimizu K., Maehata, S., Tsuta, T., and Nakamura, Y.,  
" Designing Problems for the Strength of Combustion Chamber of  
KAWASAKI-2 Cycle Diesel Engine", Proc. of ISME, 1973-11,  
P3-6-7. (第3編第4章)
9. 蔦 紀夫, 山地成一, " 肉厚方向に直交関数を用いた厚肉体の有限要素解析法 (第  
4報, 解析法に関する2~3の検討とピストン強度解析への応用)", 日本機械学  
会第49期定時総会講演論文集, 昭49-3, P4. (第4編第2章)
10. 蔦 紀夫, " 大型ピストンのリップルート部の熱応力解析", 日本機械学会論文集,  
40巻, 335号, 昭49-7, P1888. (第4編第3章)
11. 蔦 紀夫, 織田光秋, 山地成一, 小竹俊一, " ピストンの強度 (その6, 分割型ピ  
ストンの応力解析)", 日本機械学会関西支部, 第50期定期総会講演論文集,  
1975-3, P14. (第4編第5章)

## 謝

## 辞

本研究は川崎重工業株式会社技術研究所強度研究室において大阪大学工学部浜田実教授の御指導の下に行なつたもので、終始、懇切なる御教示と御鞭達を賜わつた同教授に対して深く感謝の意を表する。

また本研究に対し、有益な御教示と御支援を賜わつた川崎重工顧問大阪大学太田友弥名誉教授、大阪大学工学部八木順吉教授、並びに懇篤なる御校閲と御助言の勞をとられた大阪大学工学部菊川真教授、大路清嗣教授および大阪大学溶接工学研究所上田幸雄教授に対して深く感謝の意を表するものである。

さらに本研究の遂行にあつては強度研究室中村宏室長、および安川度博士より格別の御支援と御配慮を賜わつたことに厚く謝意を表するとともに、本研究中の面倒なプログラム開発および数値計算を実行された強度研究室山地成一君および織田光秋君、つねに御協力と御援助を惜しまれなかつた強度研究室各位に感謝する次第である。

なお末尾ながら本研究の遂行に際し格別の御配慮を賜わり、また本研究中の実験およびその結果をここに用いることを快諾された川崎重工原動機事業部ディーゼル工場長明石源一郎氏、2サイクル設計課課長清水滉氏、技術課係長中村陽一氏および実験を行なわれた多くの方々に対して厚く感謝する。

第 1 編 付 図

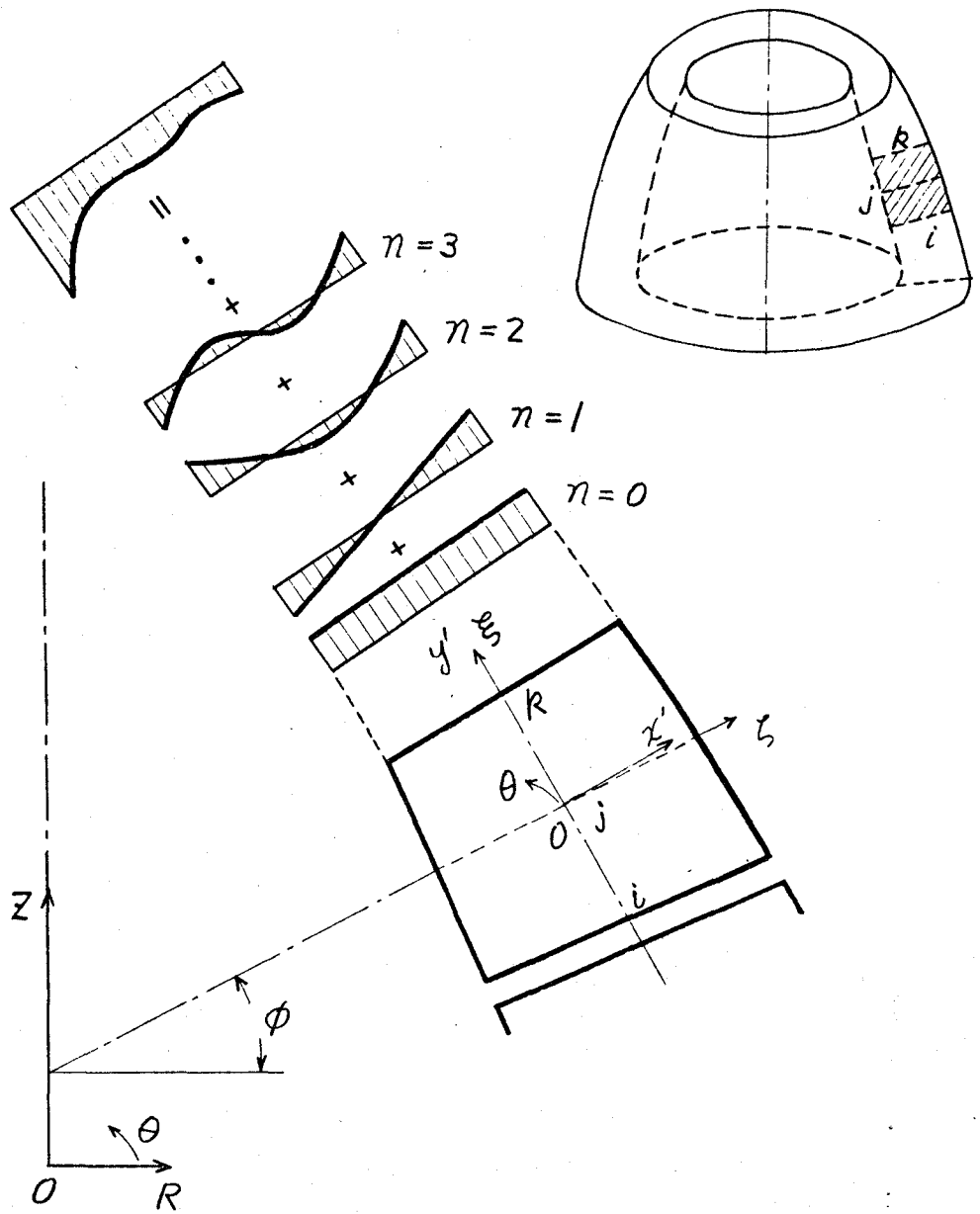


図 1. 2. 1 要素形状と座標系

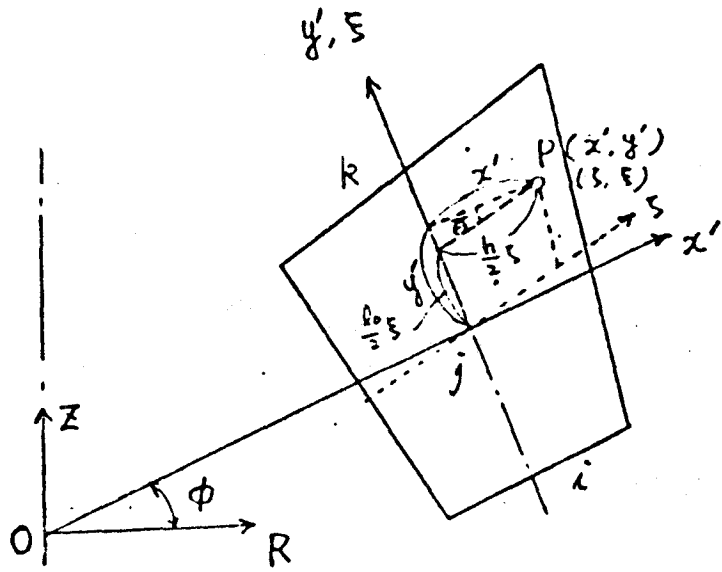


図 1.2.2 斜交要素

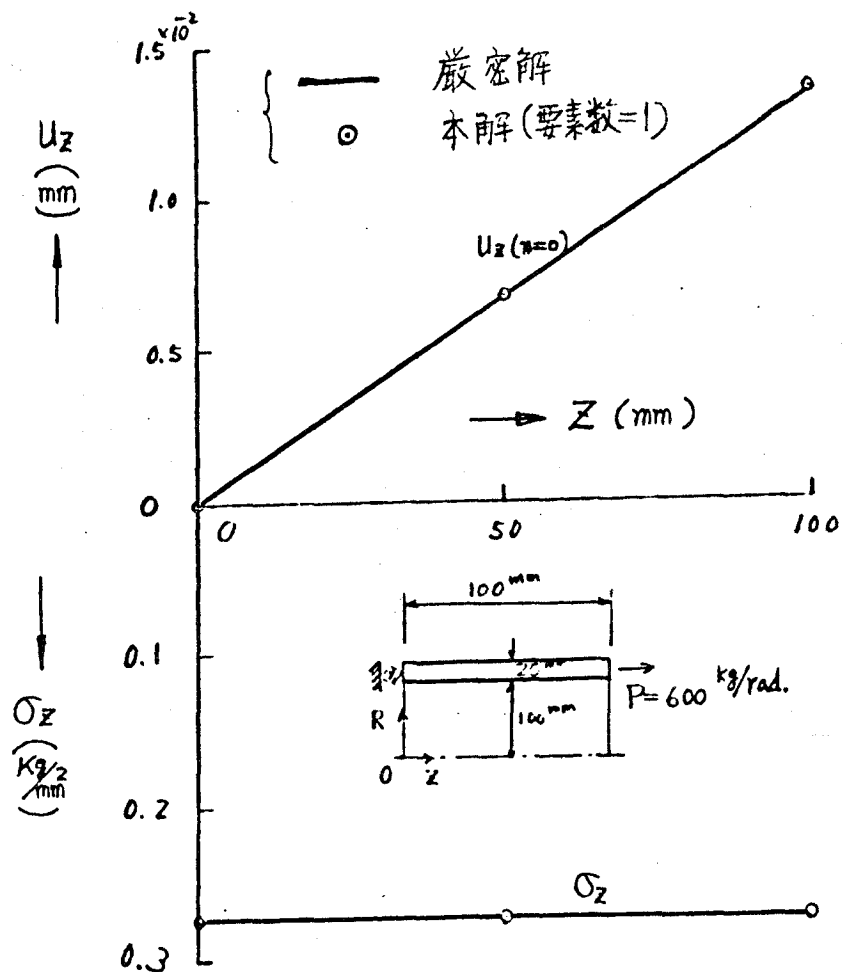


図 1.2.3 引張荷重をうける円筒

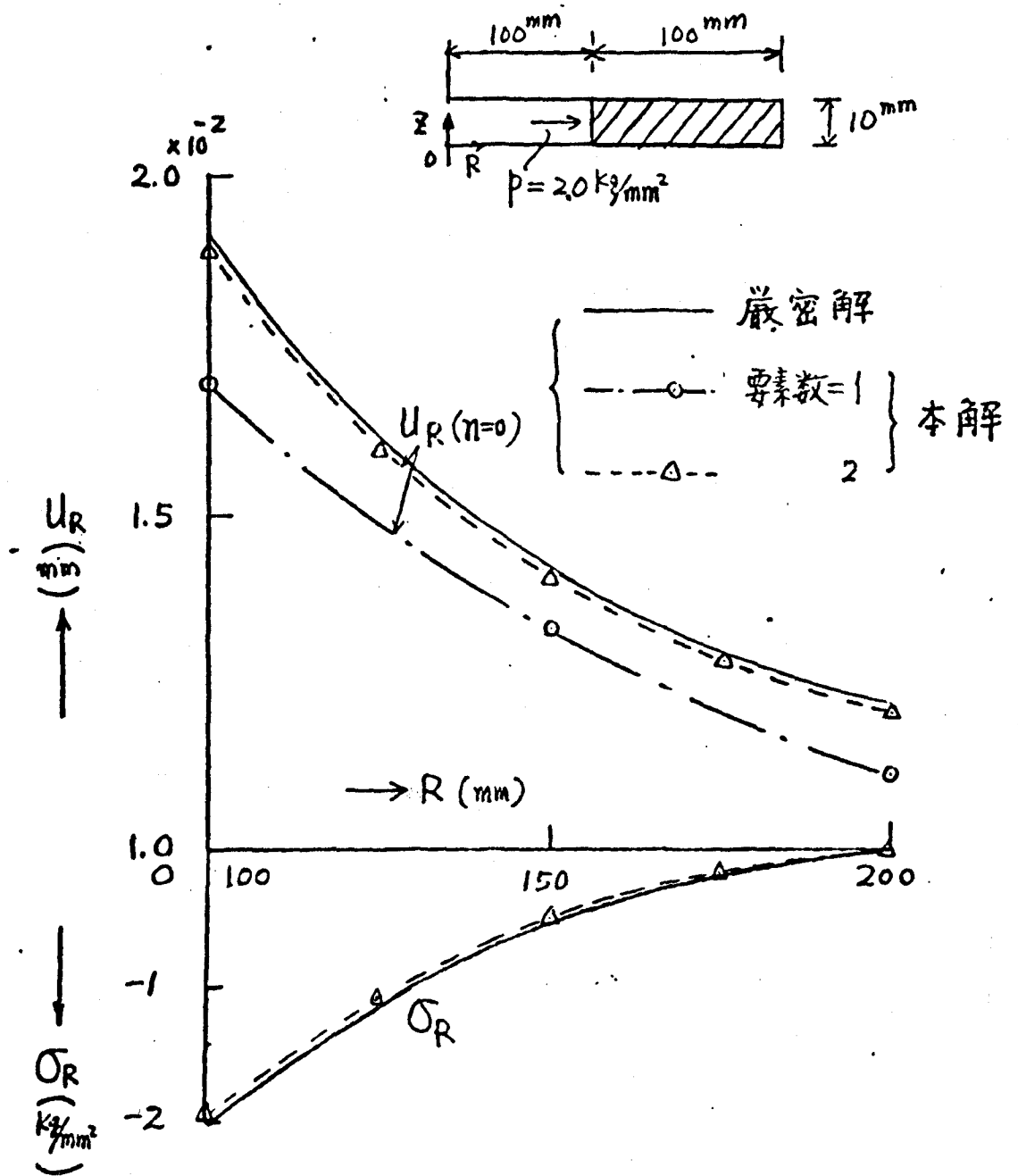


図 1.2.4 内圧をうけるディスク



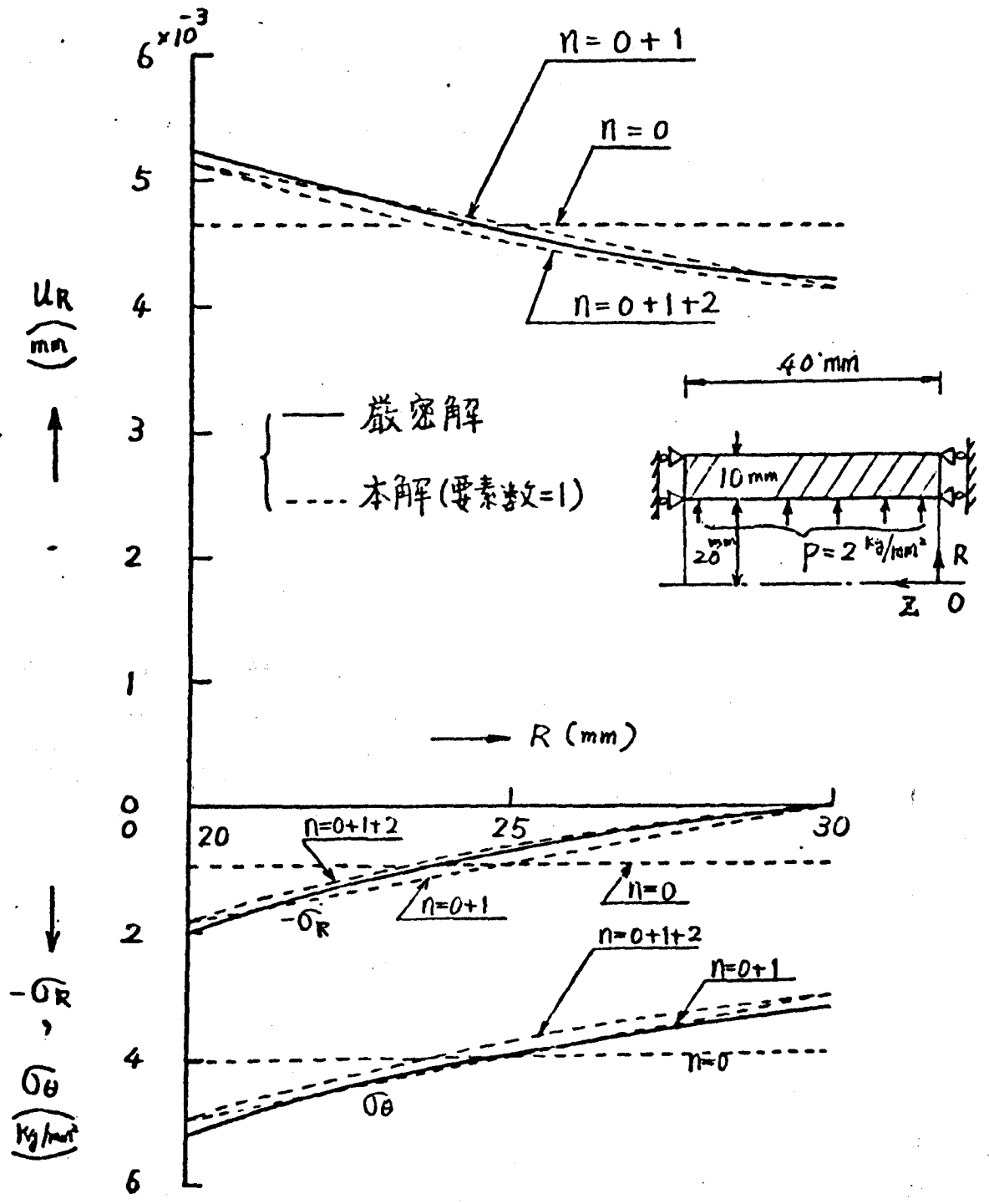


図 1. 2. 5 内圧をうける厚肉円筒

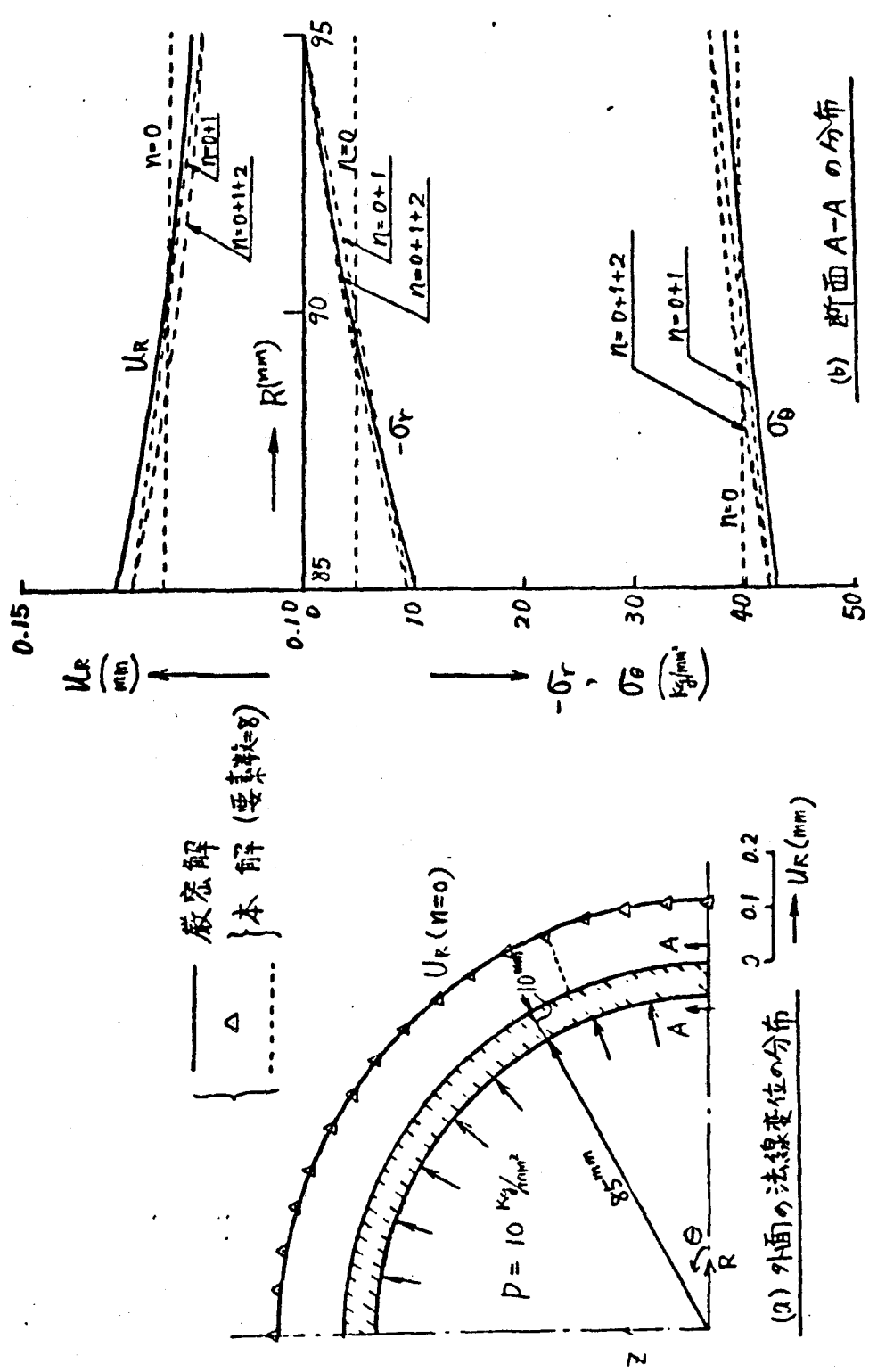


図 I. 2. 6 内圧をうける球殻

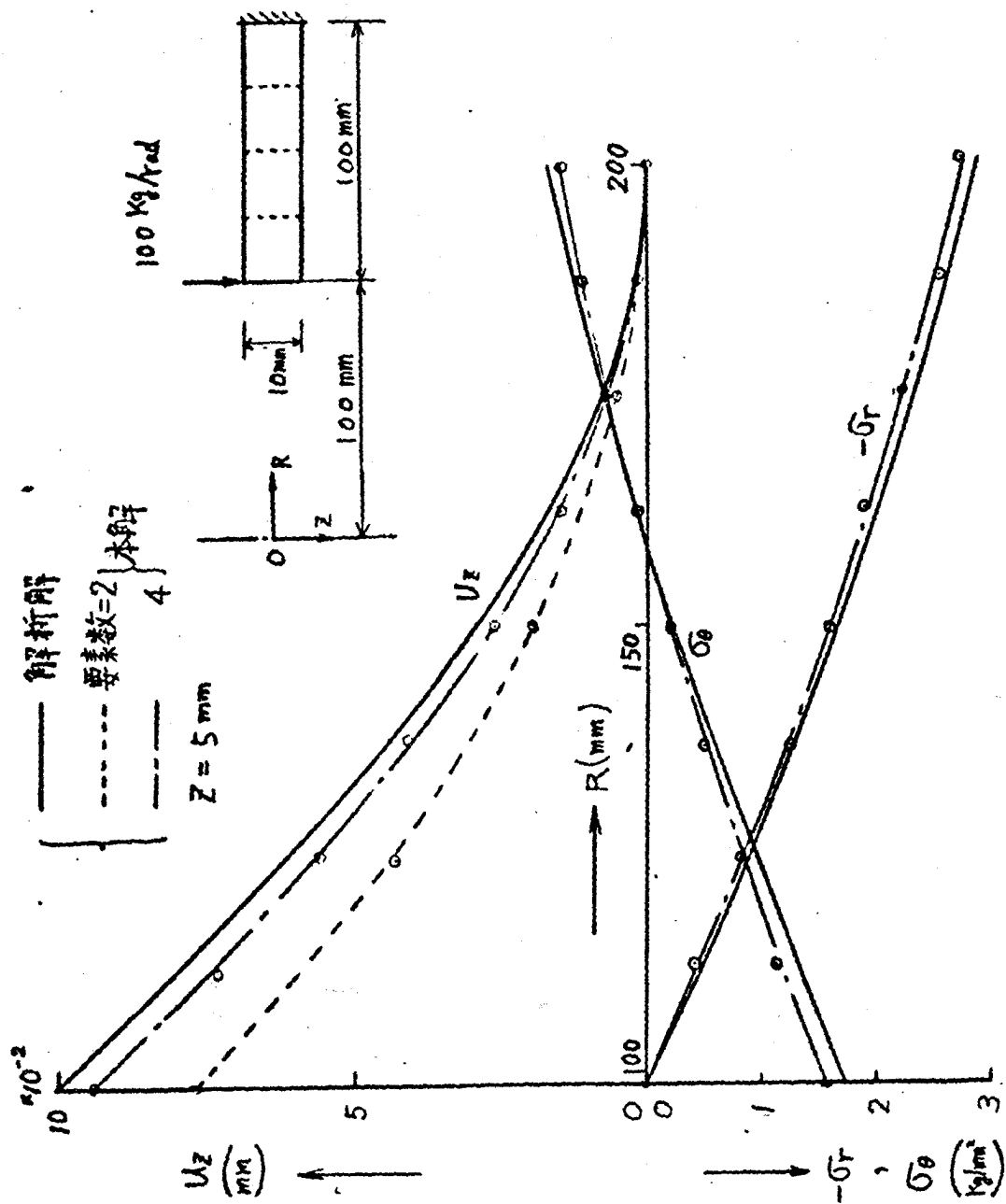


図 1.2.7 面外荷重をうけるディスク

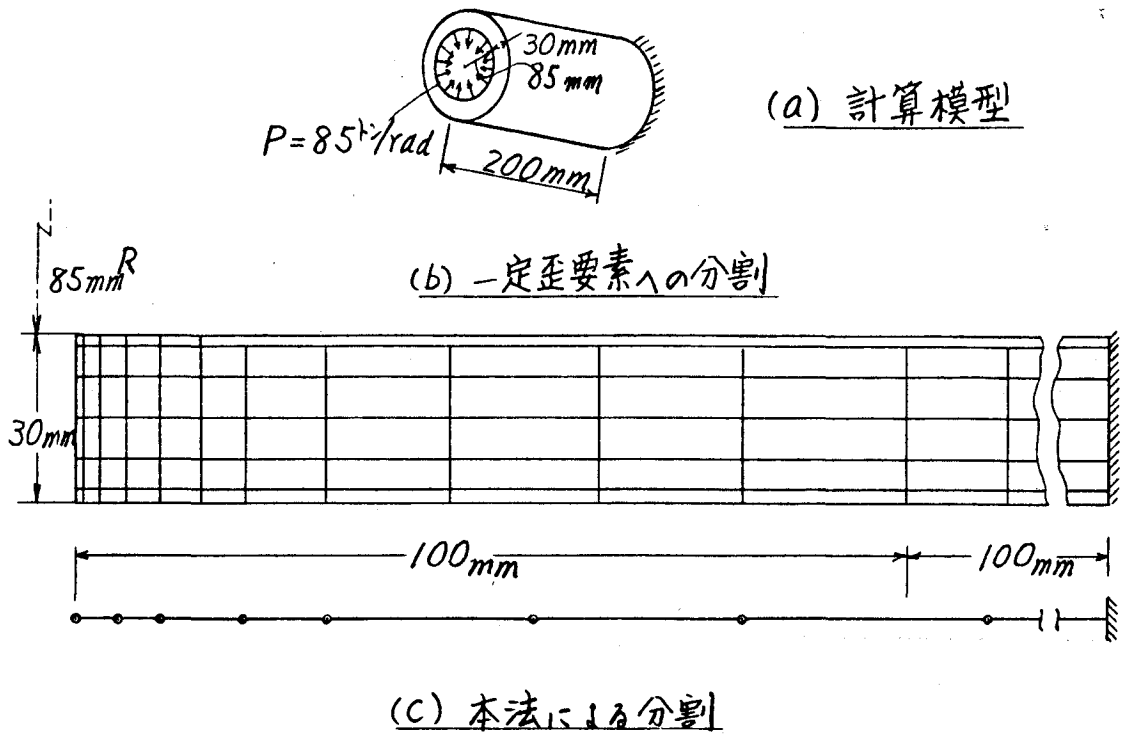


図 1. 2. 8 輪状荷重をうける厚肉円筒

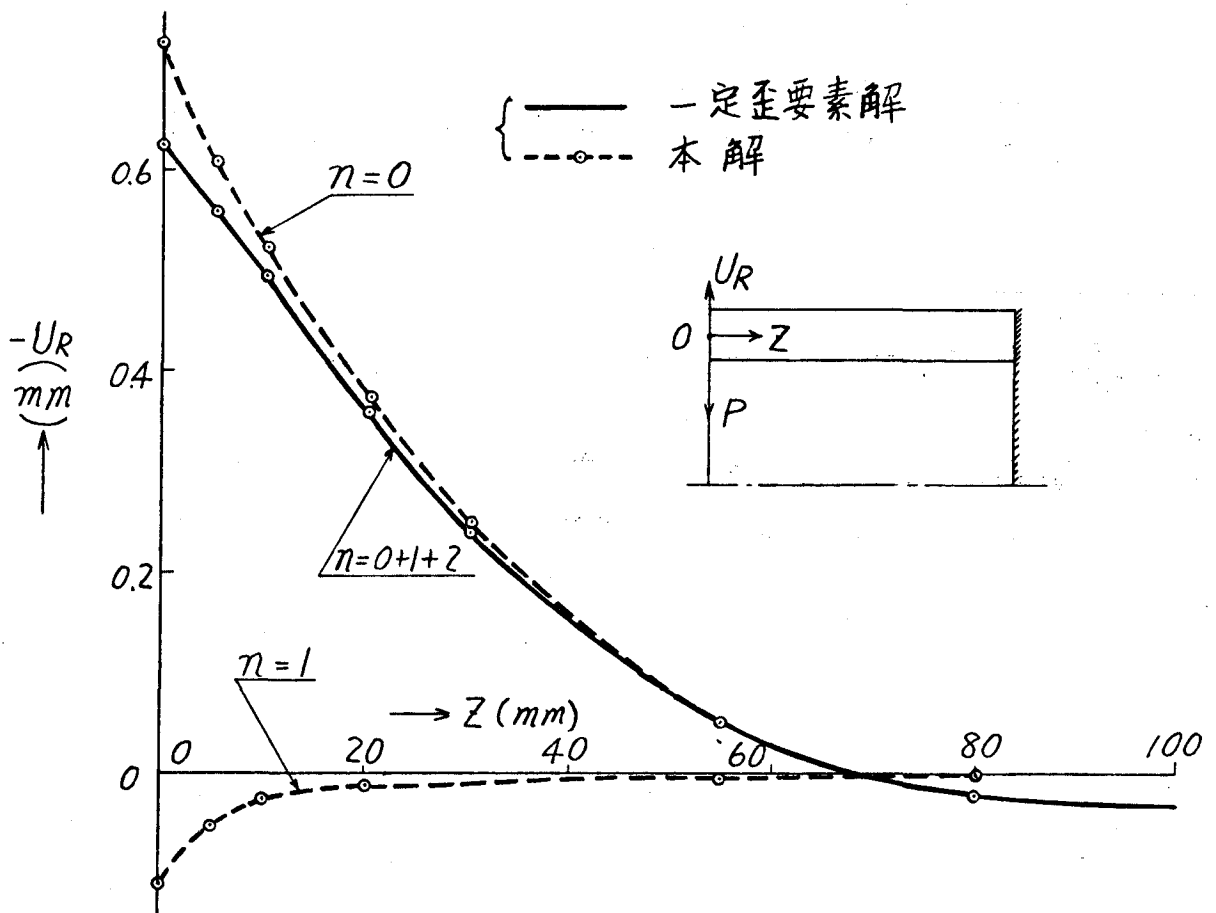


図 1. 2. 9 外面の  $U_R$  の分布

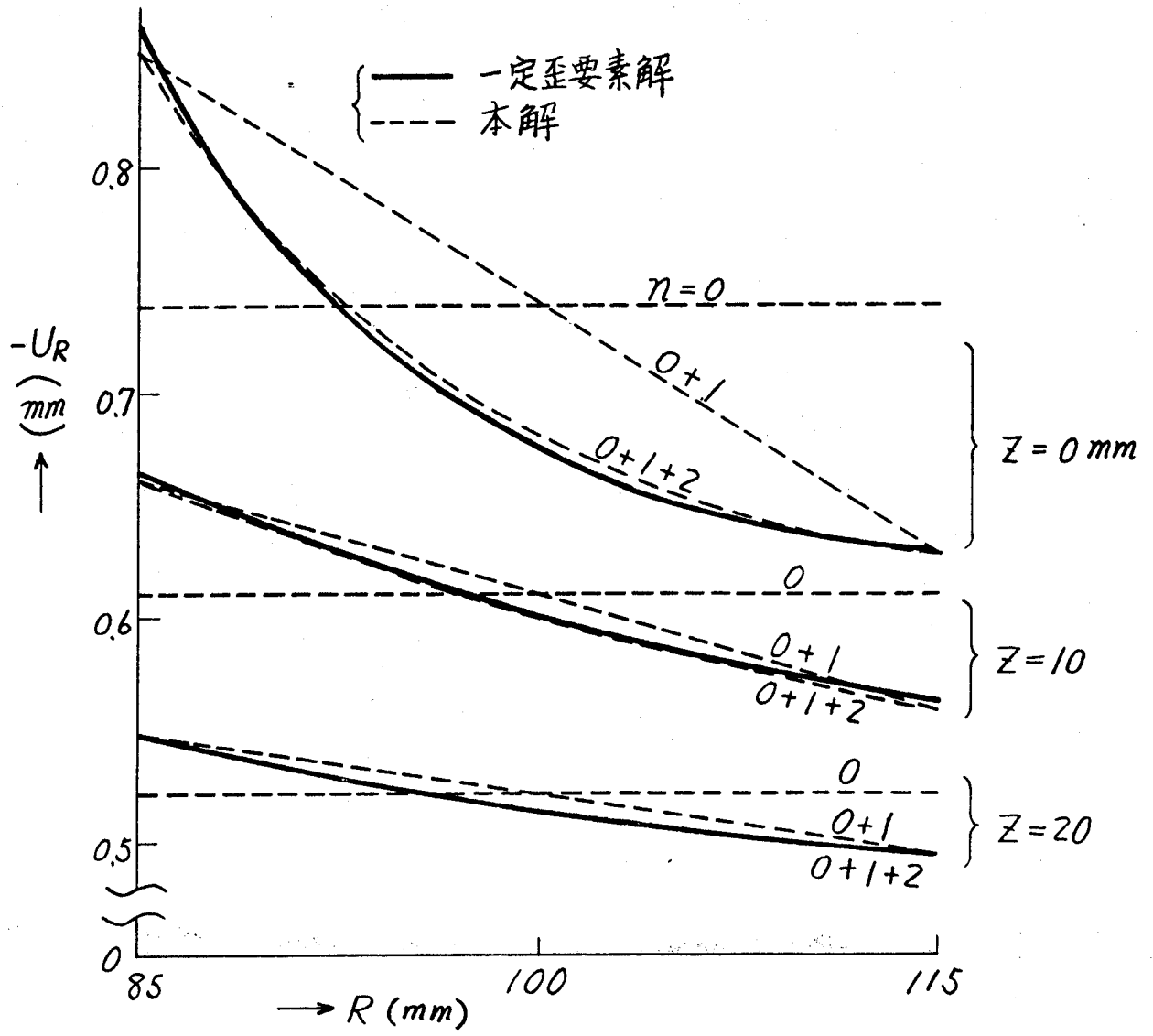


図 1. 2. 10 肉厚内の  $U_R$  の分布

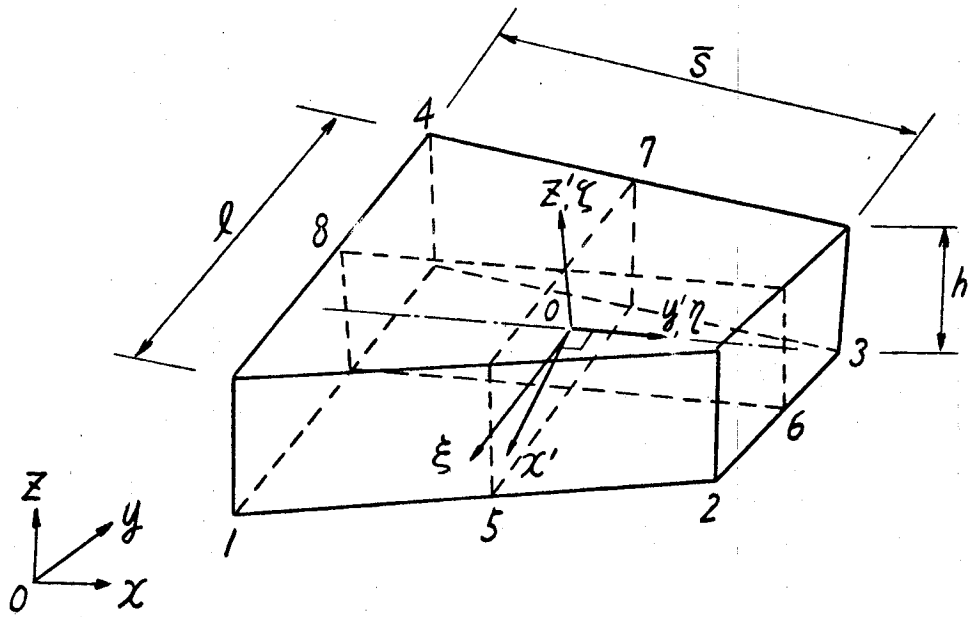


図 1. 3. 1 要素形状と座標系

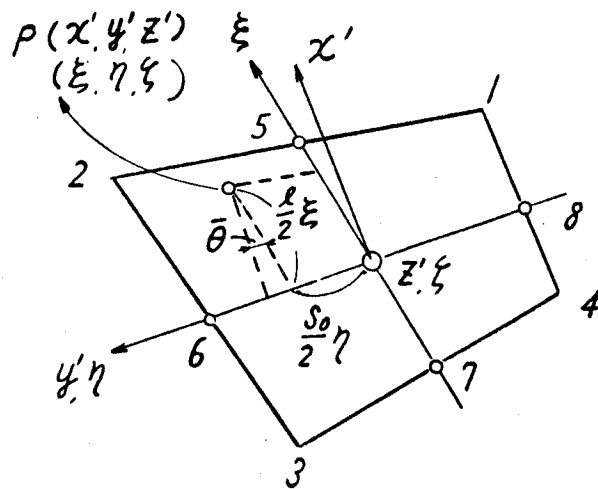


図 1. 3. 2  $\xi$  が一定面の要素形状

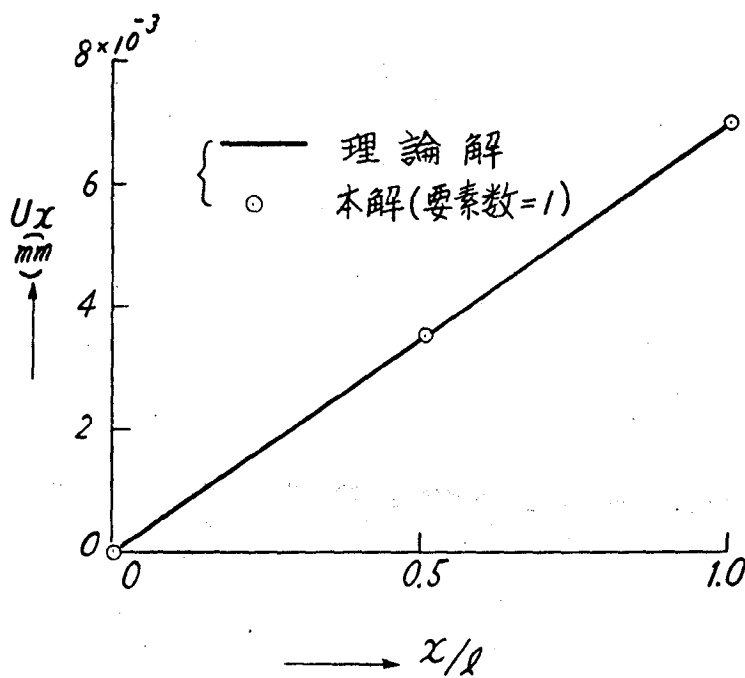
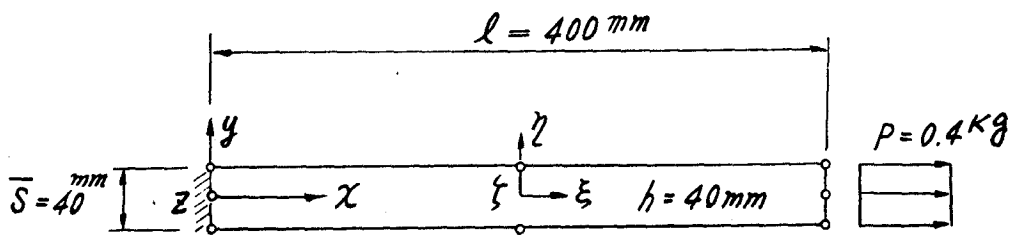
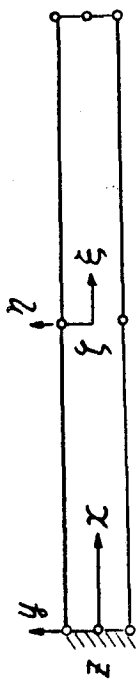
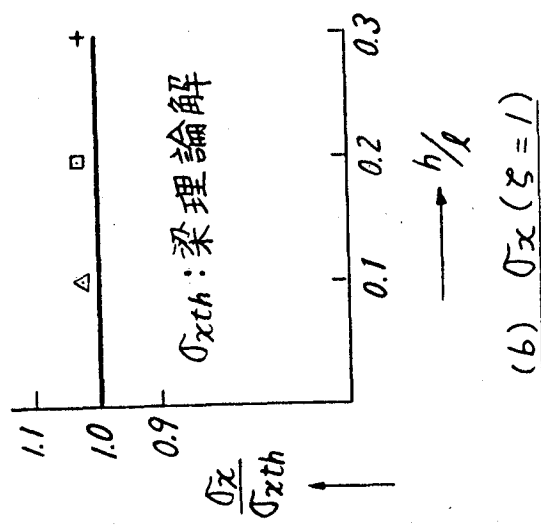
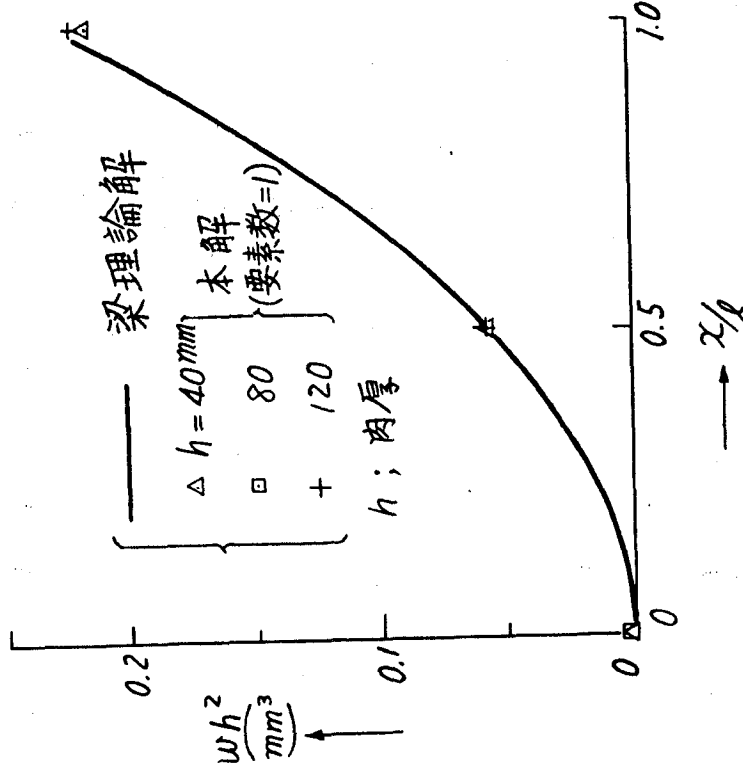
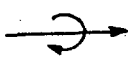


図 1. 3. 3 棒の引張



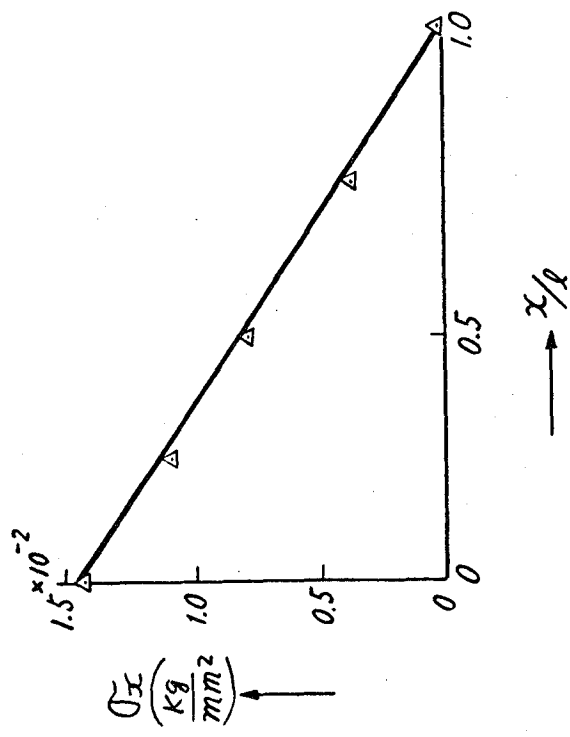
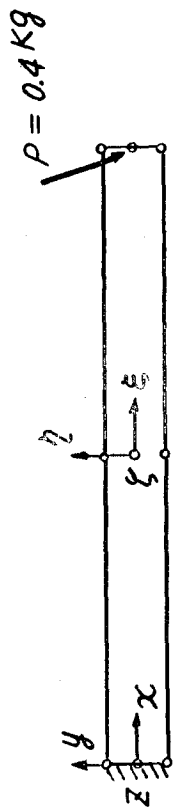
$$M_y = 0.2 \times h \text{ kg-mm}$$



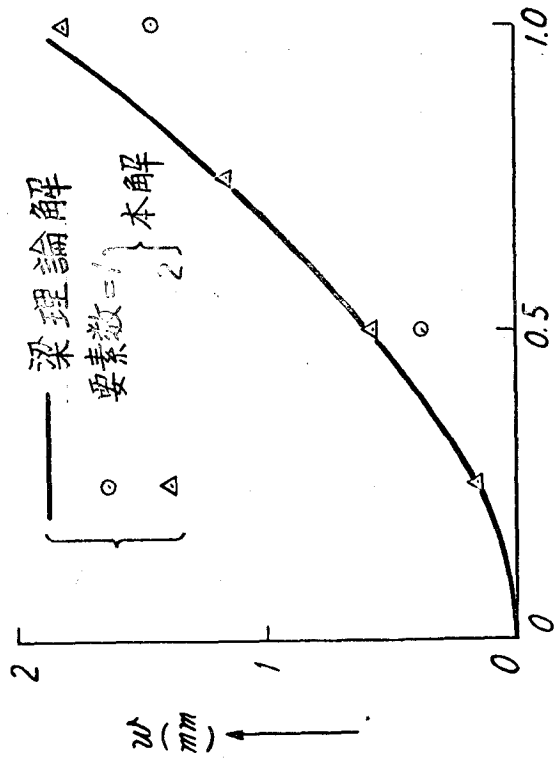
(a)  $w$  の分布 (0次)

図 1.3.4 純曲げをうける片持梁



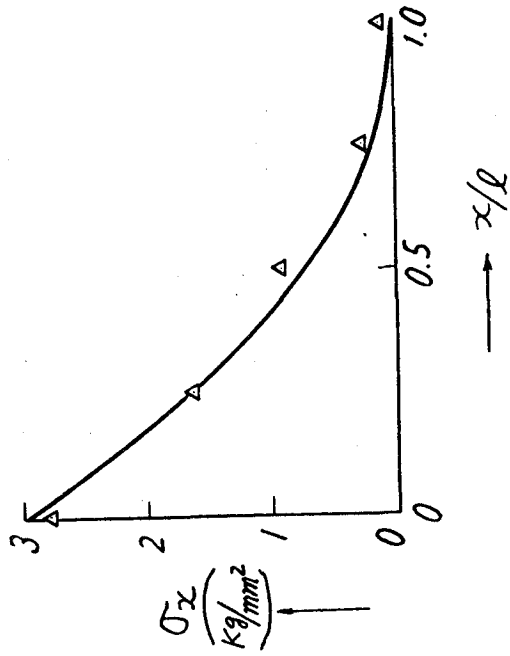
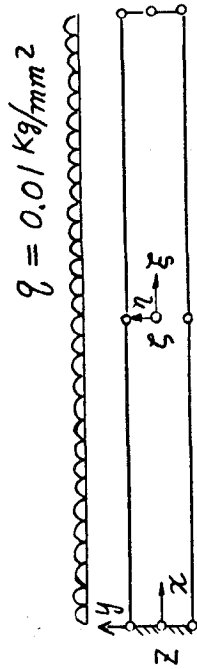


(b)  $M(x)$  の分布 ( $\xi = 1$ )

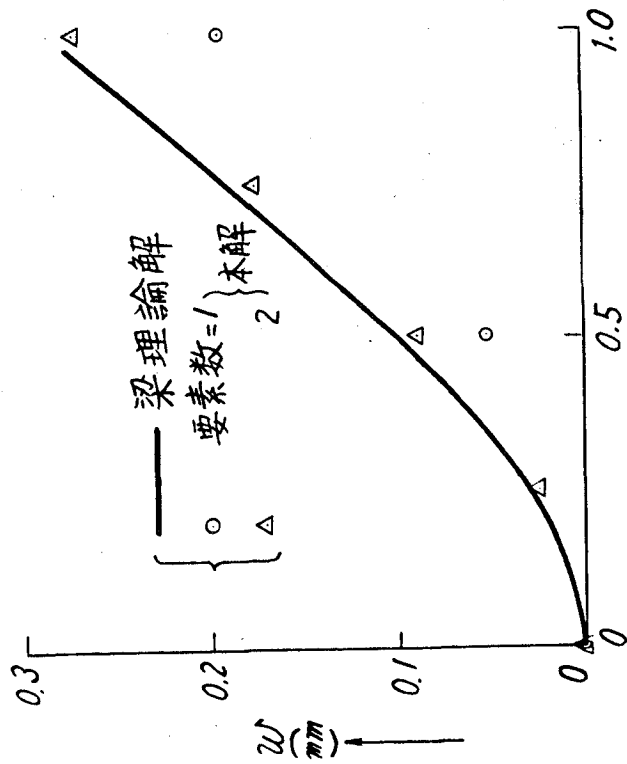


(a)  $w$  の分布 (0 次)

図 1.8.5 集中荷重をうける片持梁



(b)  $\sigma_x$  の分布 ( $\xi = 1$ )



(a)  $w$  の分布 (0 次)

図 1.3.6 等分布荷重をうける片持梁

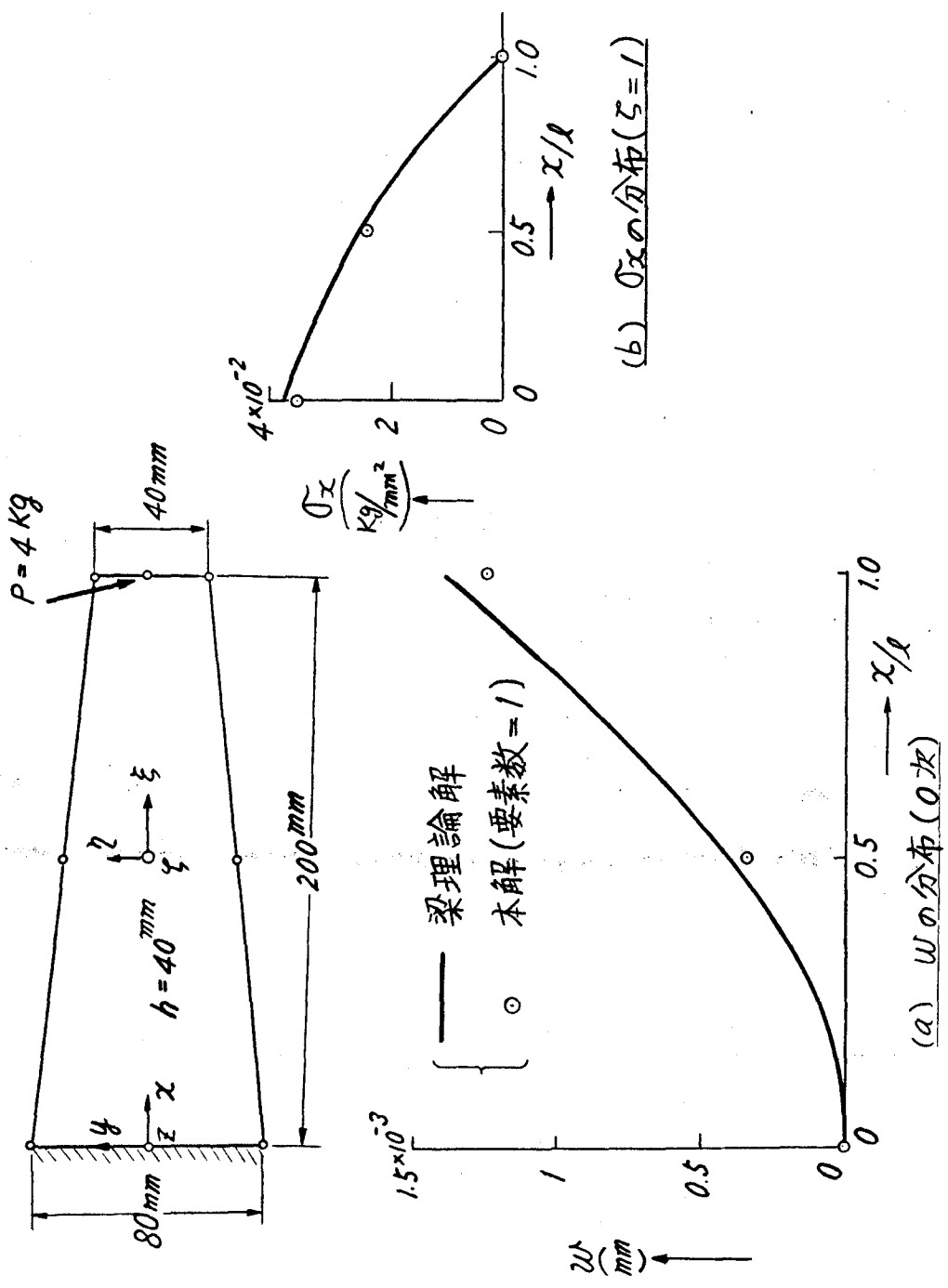
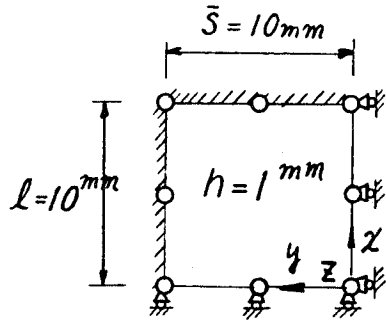
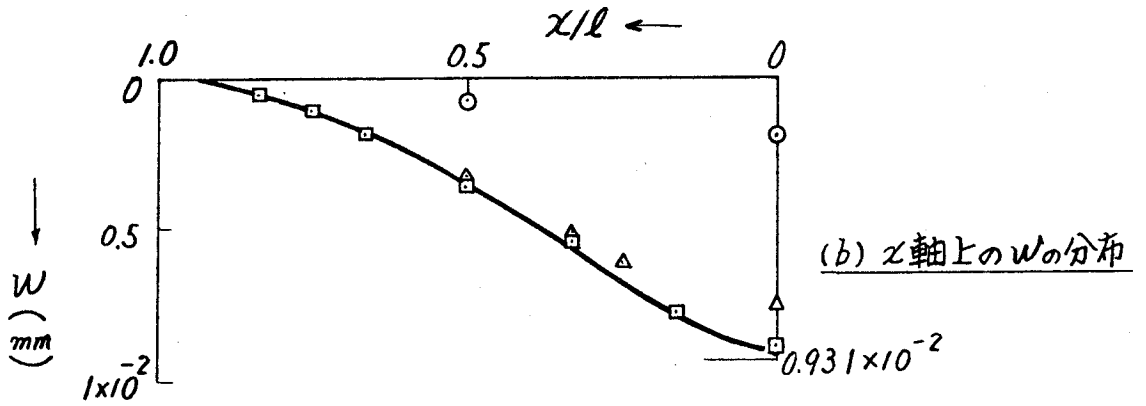


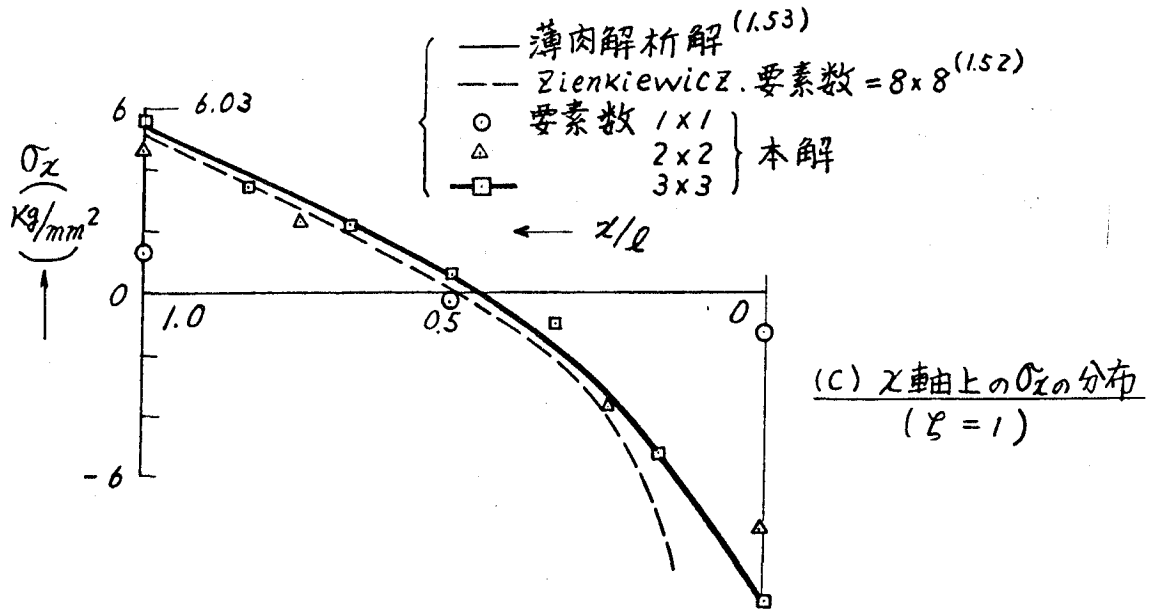
図 1.8.7 集中荷重をうける変巾片持梁



(a) 計算模型



(b) x軸上のWの分布



(c) x軸上の $\sigma_x$ の分布  
( $\xi = 1$ )

図 1. 3. 8 中央集中荷重をうける周辺固定正方形板

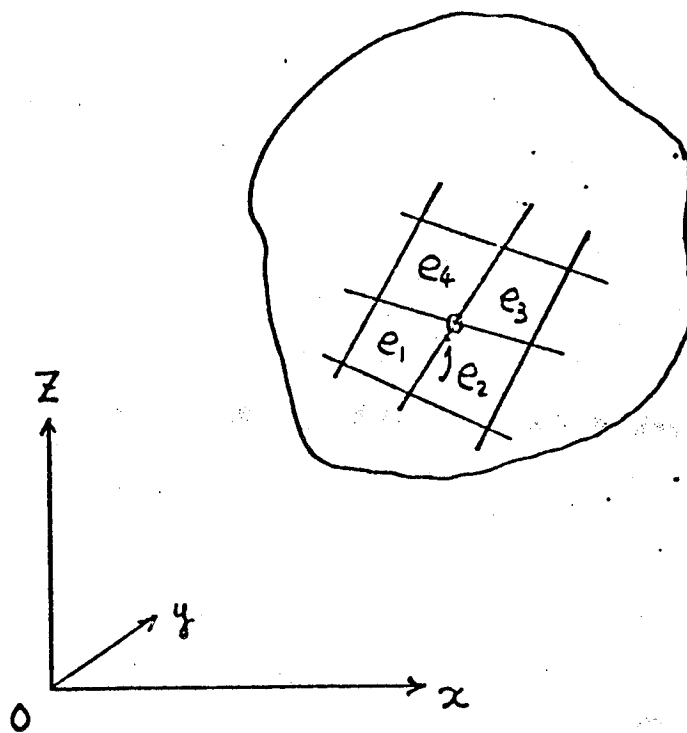


図 1.4.1  $j$  断面まわりの要素

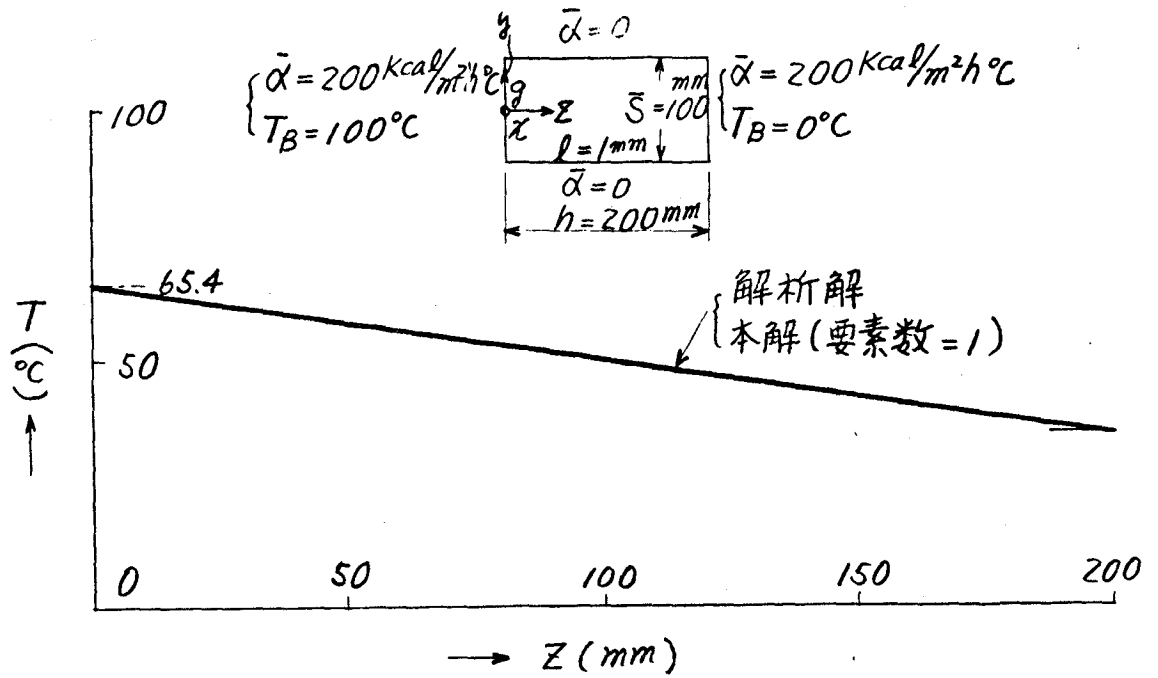


図 1. 4. 2 一次元熱伝導の計算例

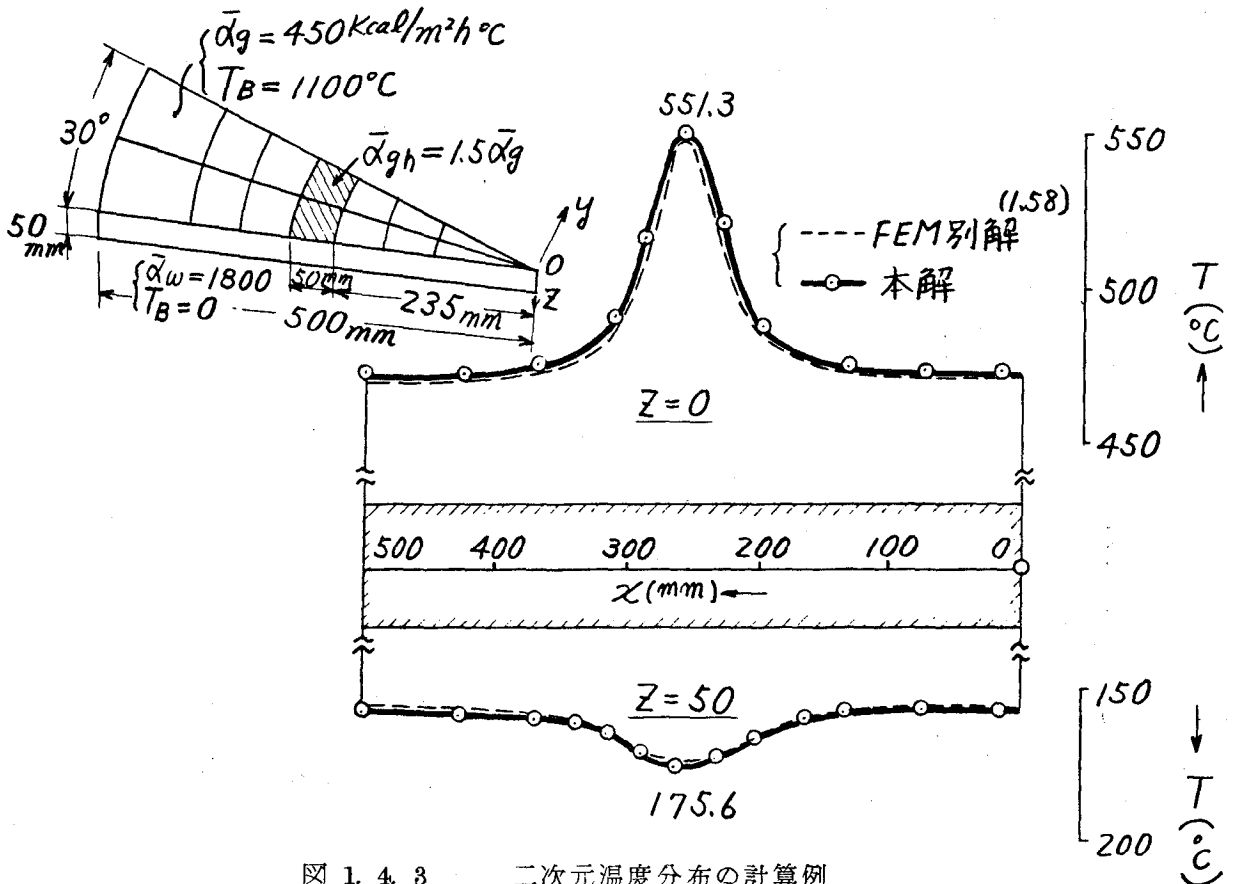


図 1. 4. 3 二次元温度分布の計算例

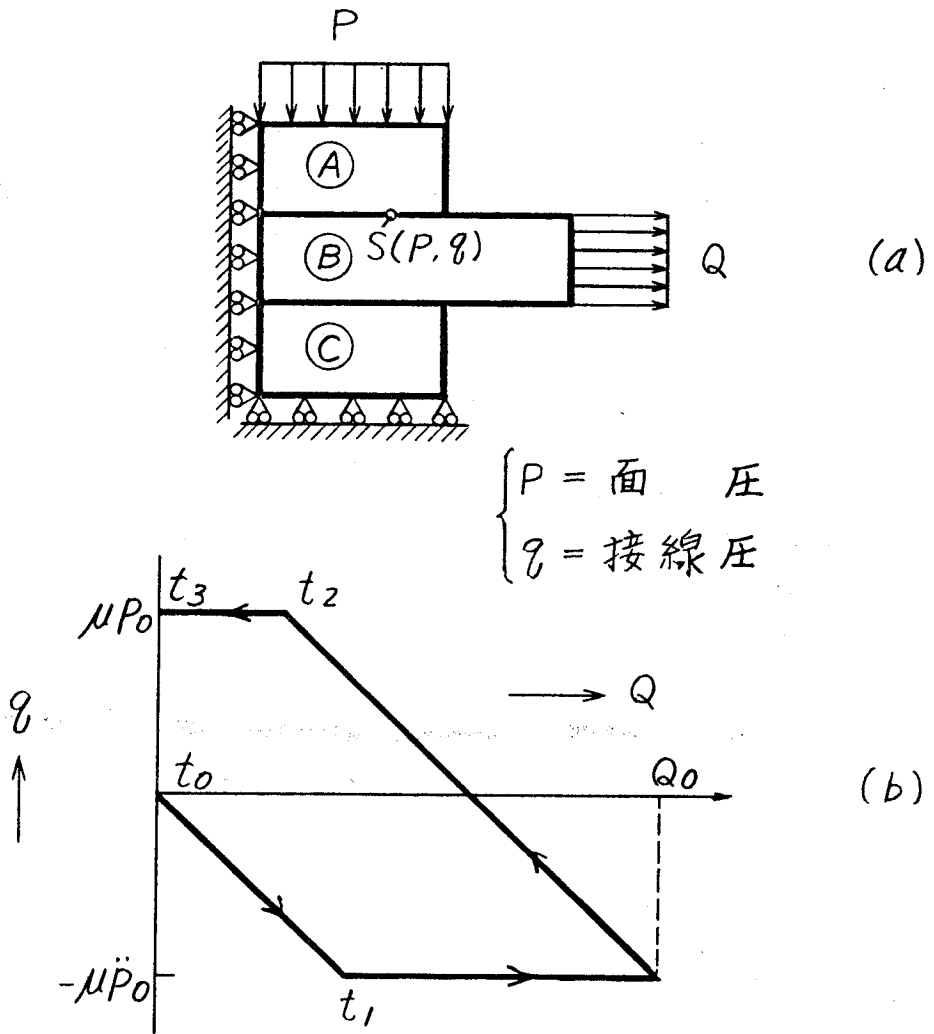


図 2. 1 接線力の非可逆性

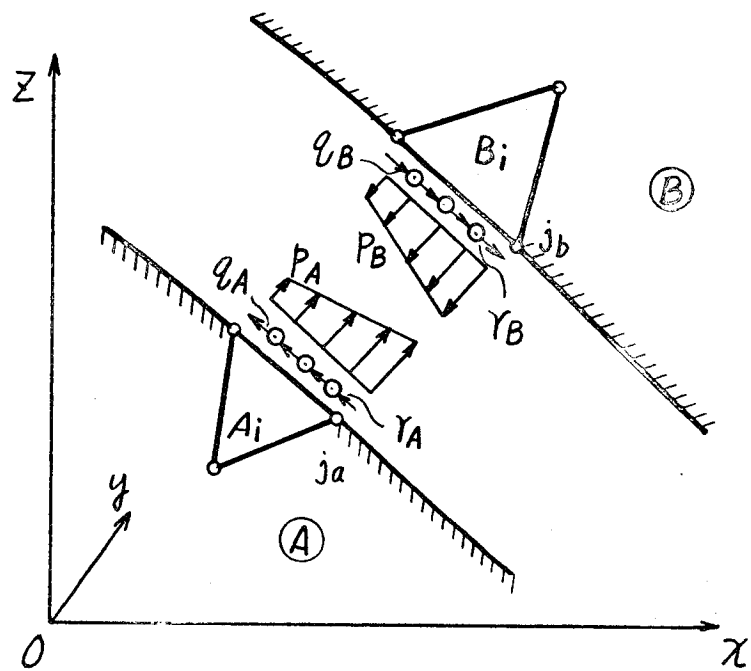


図 2.2 接触境界に作用する力

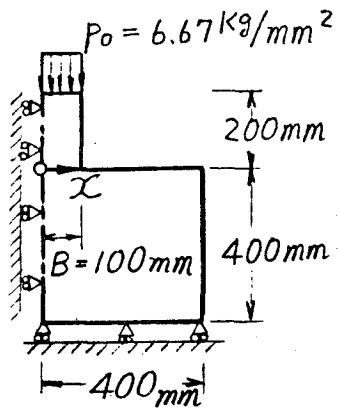


表 2.1  $\mu$  と連続条件の関係

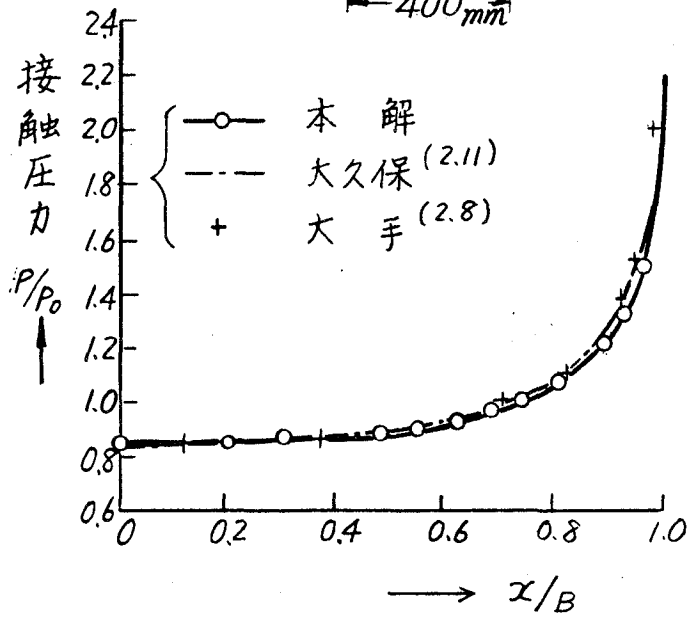
連続条件の型	$\mu$	
	二次元問題	三次元問題
(a) 連続体型	$\mathcal{O}_2$	$\mathcal{O}_3$
(b) すべり接触	$\mathcal{E}_{2,2,2} \mp \mu \mathcal{E}_{2,2,1}$	$\mathcal{E}_{3,2,2} \mp \mu \mathcal{E}_{3,2,1}$
(c) 口開き	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$

表 2.2  $\lambda$  と連続条件の関係

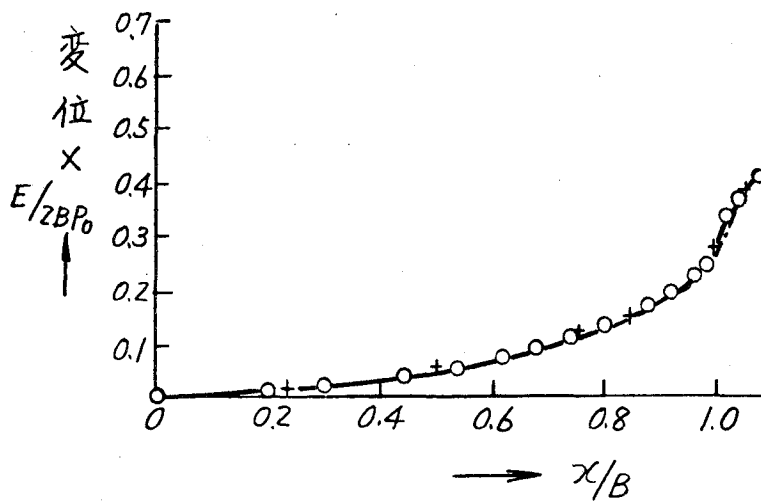
連続条件の型	$\lambda$	
	二次元問題	三次元問題
(a) 連続体型	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
(b) すべり接触	$\mathcal{E}_{2,1,1}$	$\mathcal{I}_3 - \mathcal{E}_{3,2,2}$
(c) 口開き	$\mathcal{O}_2$	$\mathcal{O}_3$



(a) 計算模型

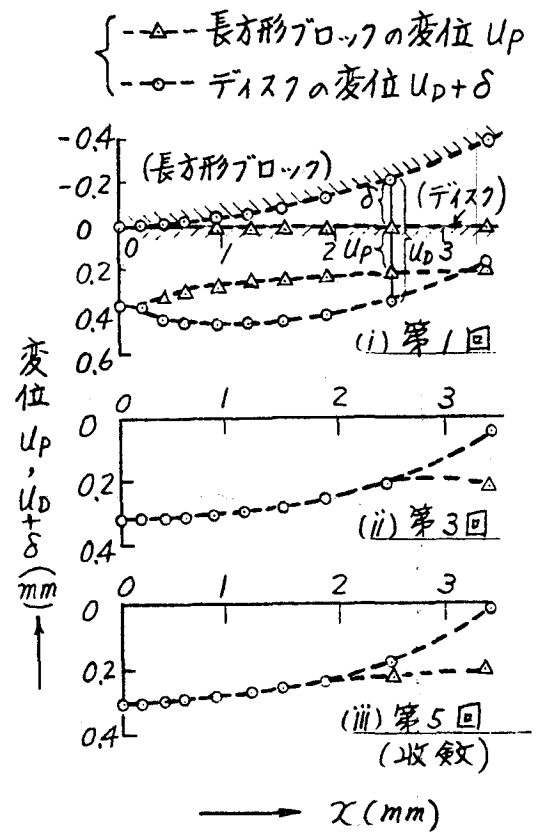
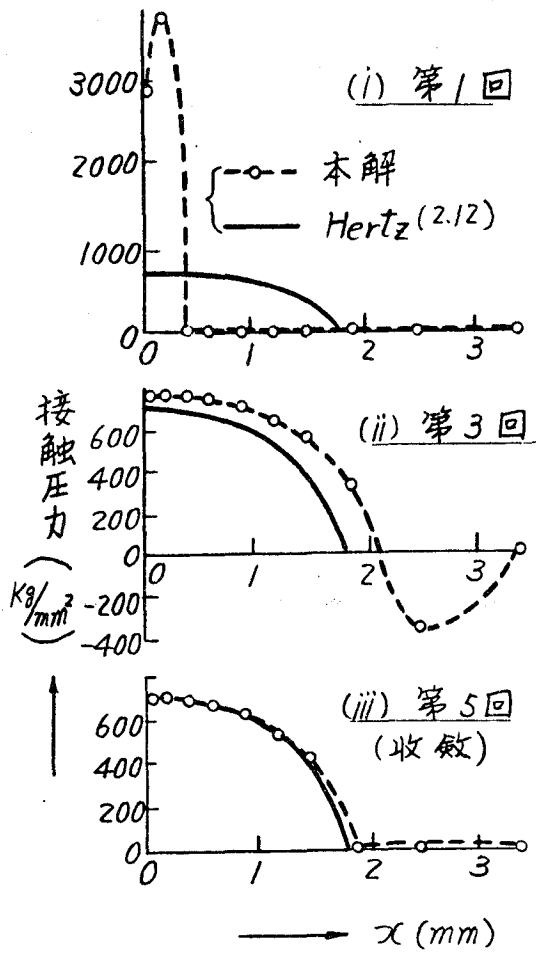
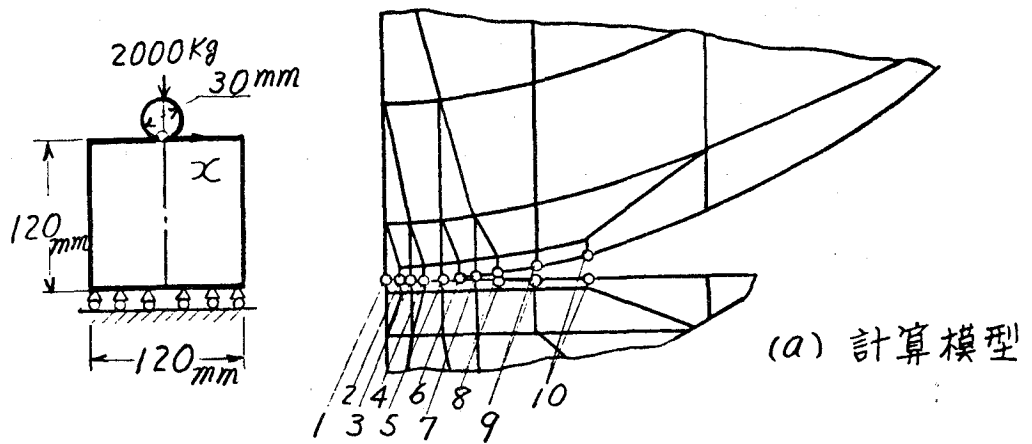


(b) 接触面の圧力分布



(c) 接触面の変位分布  
(中心の最大変位からの差)

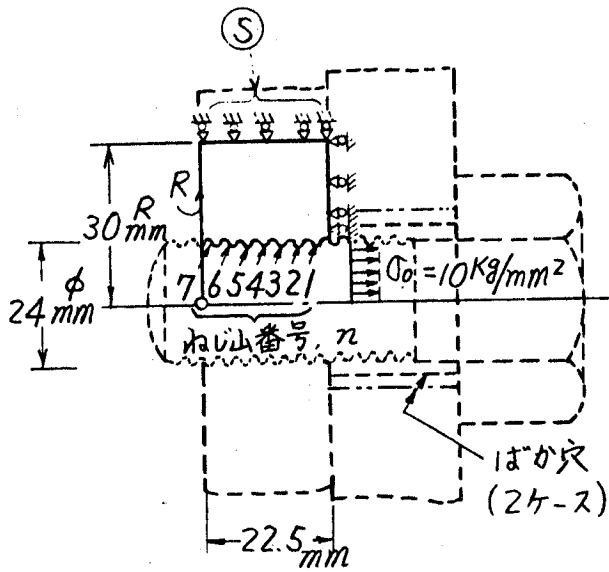
図 2.3 長方形ブロックの圧縮



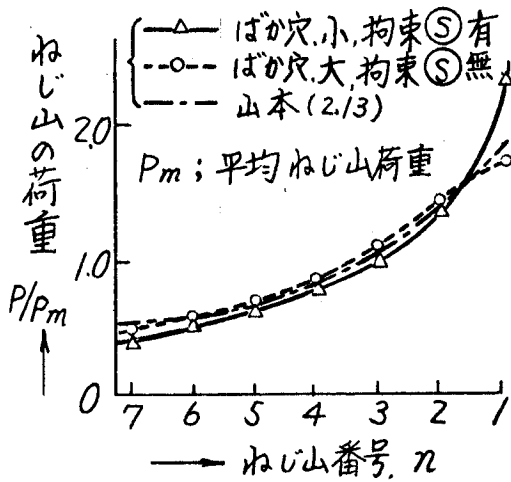
(b) 接触圧力の分布

(c) 変位分布

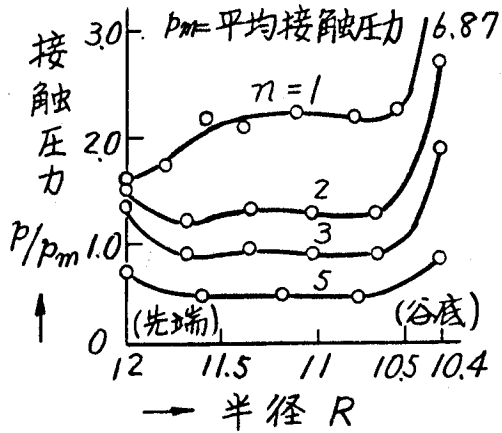
図 2.4 ディスクの長方形ブロックへの押込み



(a) 計算模型



(b) ねじ山の分担する荷重



(c) 接触圧力の分布  
(はか穴小, 拘束⑤有)

図 2.5 ねじ山の接触問題

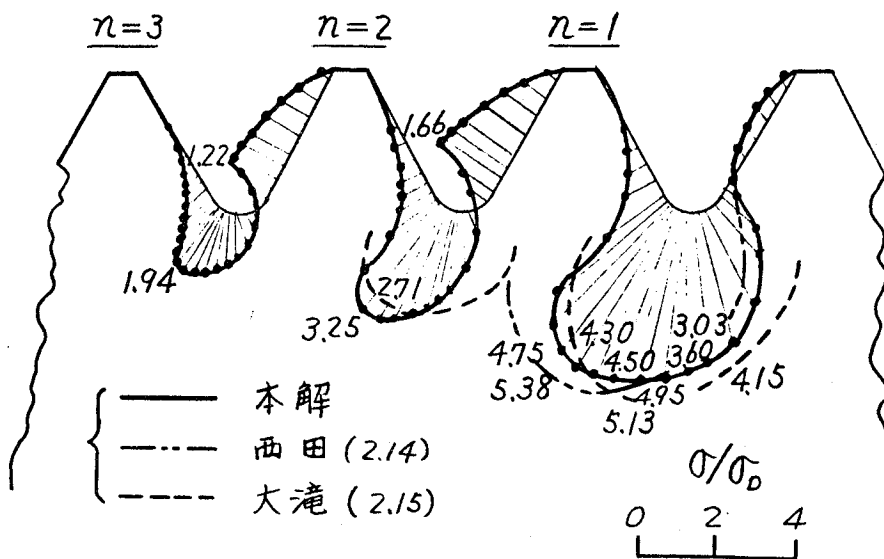
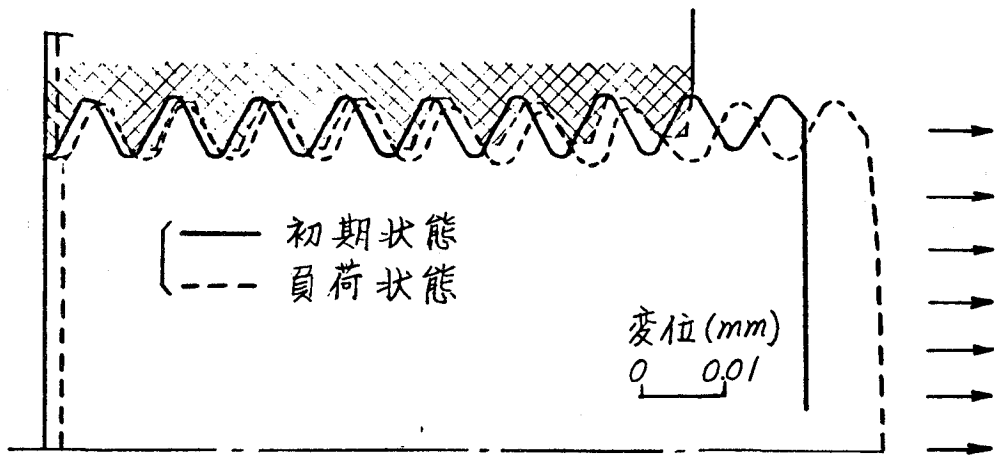
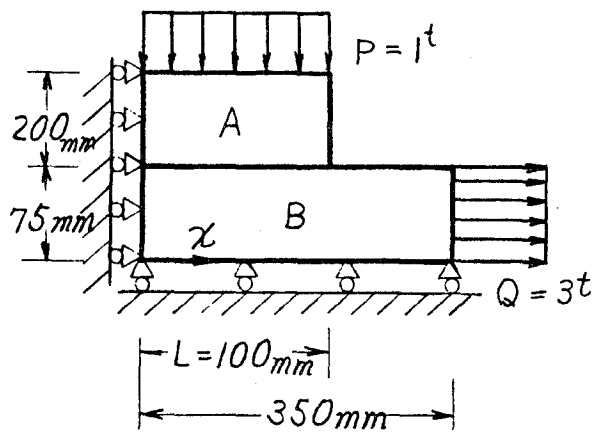
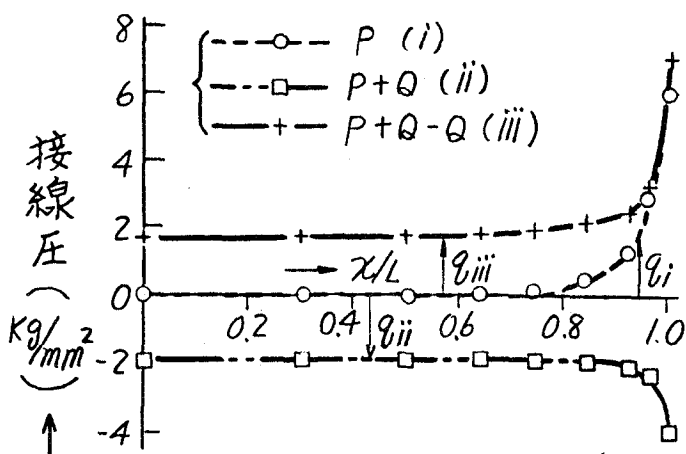


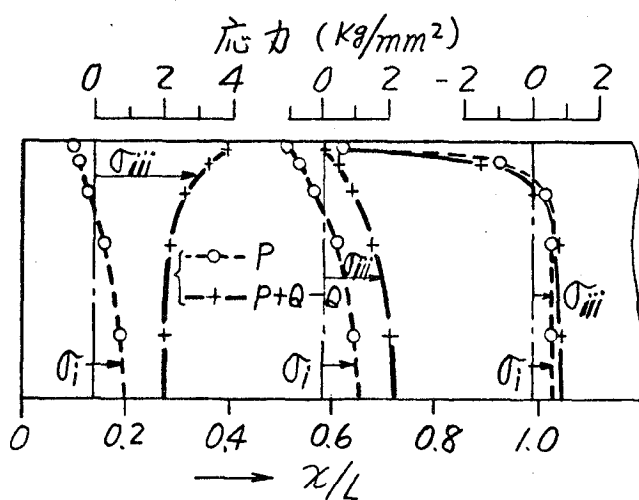
図 2.6      ねじ山の変形と応力



(a) 計算模型



(b) 接線圧の分布



(c) 軸方向応力の分布

図 2.7 履歷負荷をうける長方形ブロック

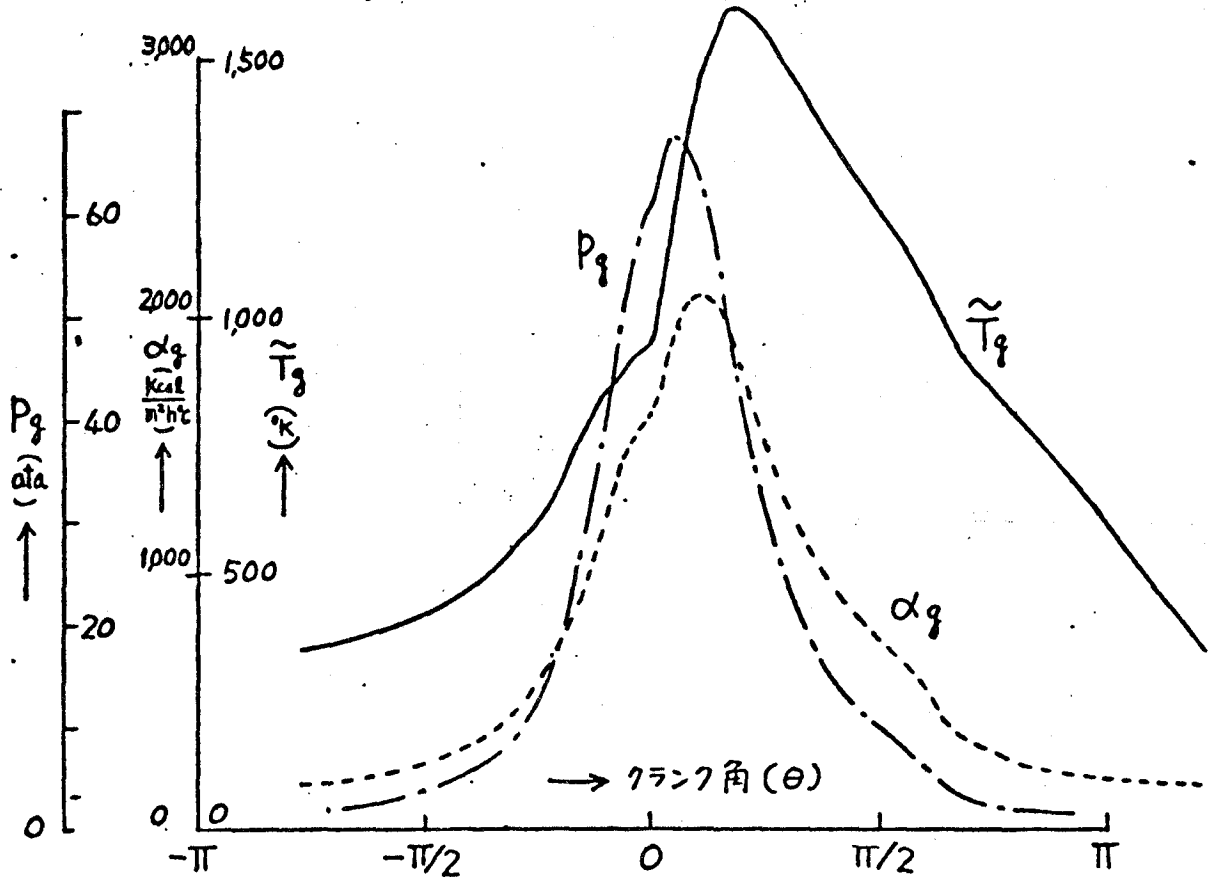


図 3. 2. 1 1 サイクル中の  $\tilde{T}_g, \alpha_g, p$  の変化の例

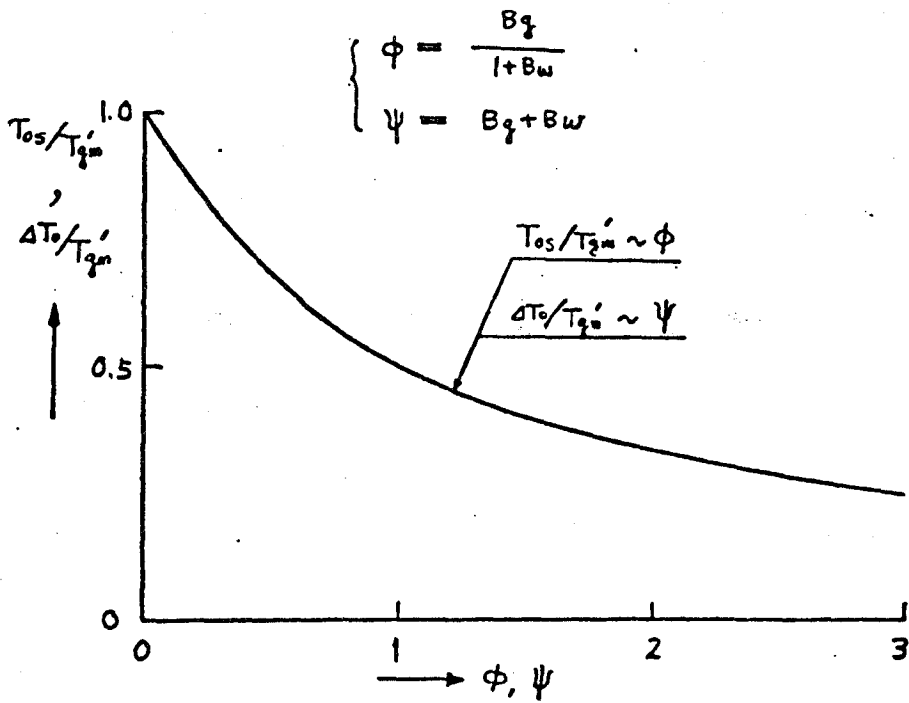


図 3. 2. 2 クラウンの表面温度と外内面温度差

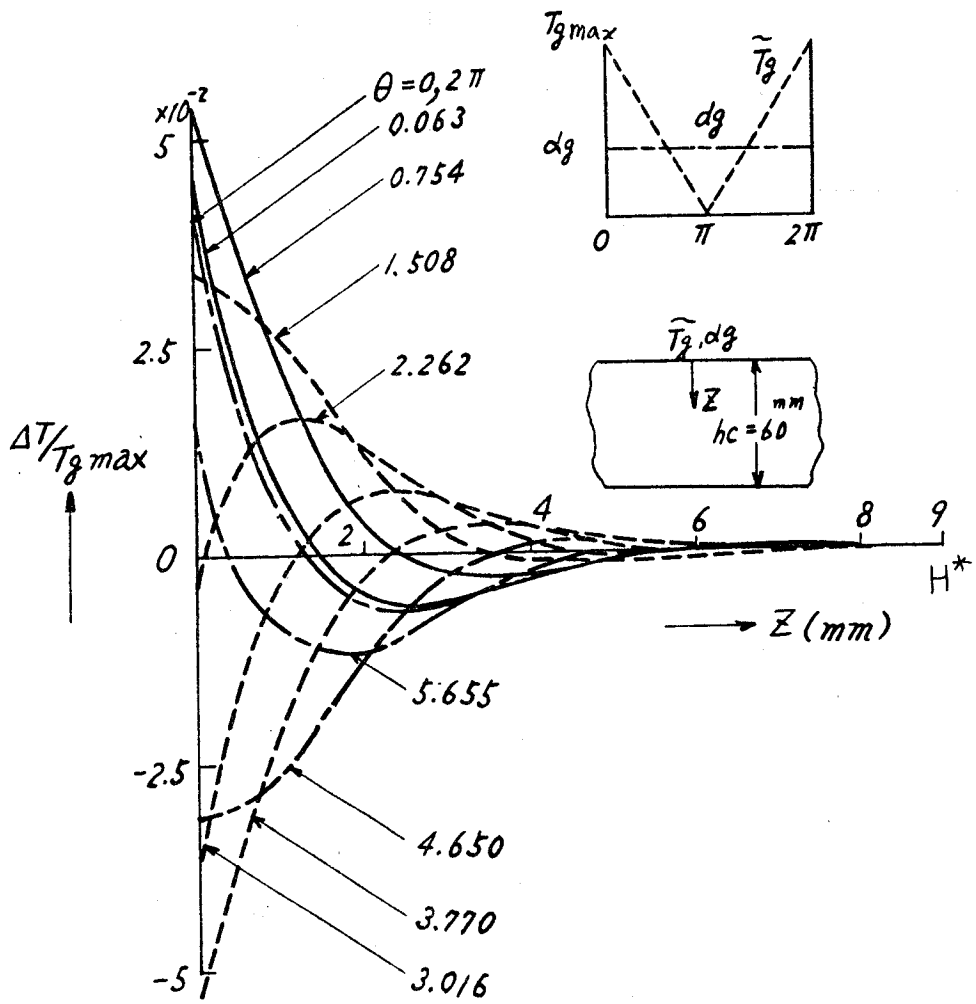


図 3. 2. 3 触火面付近のサイクル中の温度変化

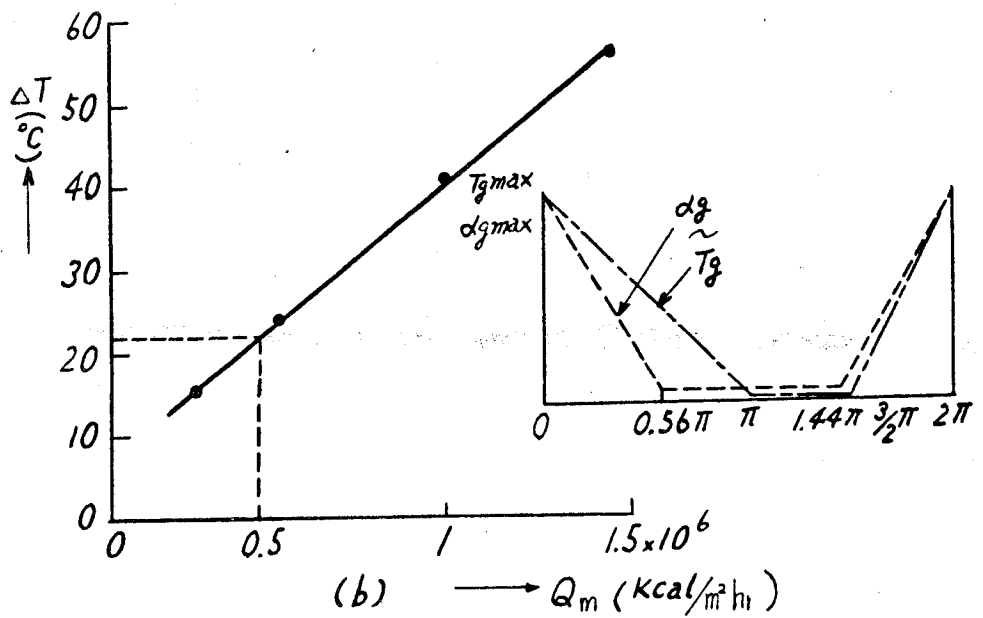


図 3. 2. 4 表面温度の変化巾と熱負荷条件の関係



一次元解析解

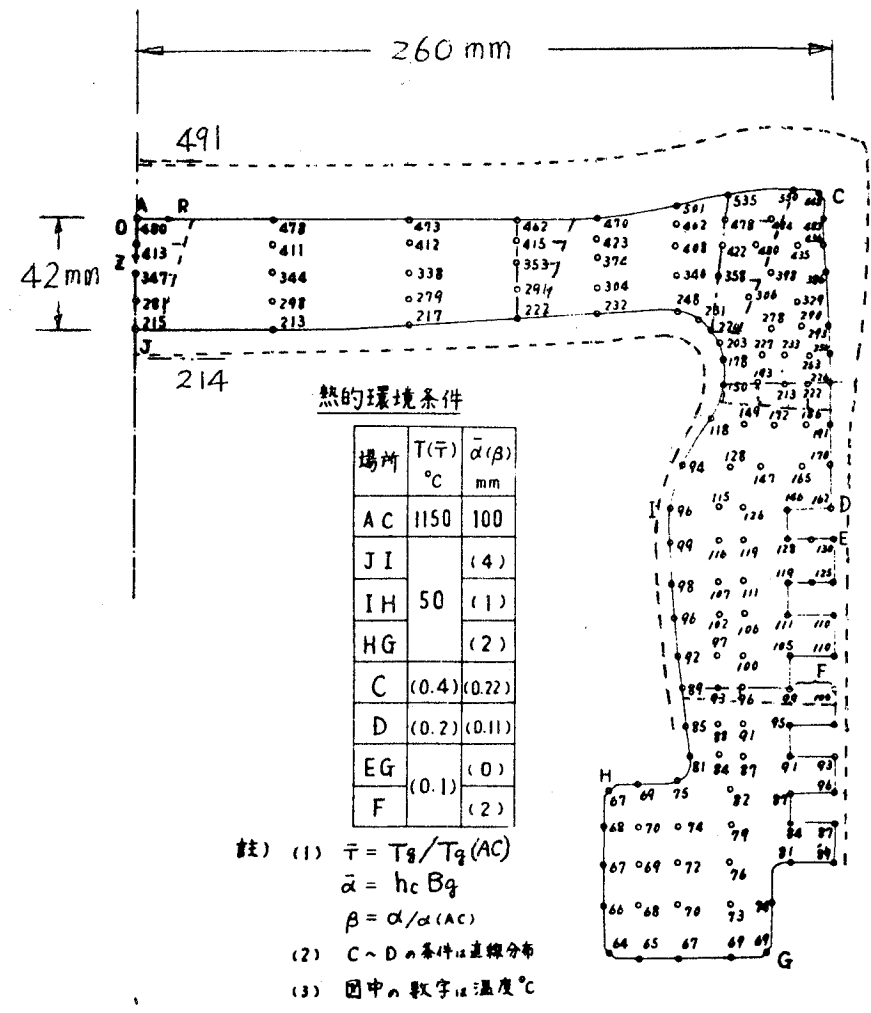
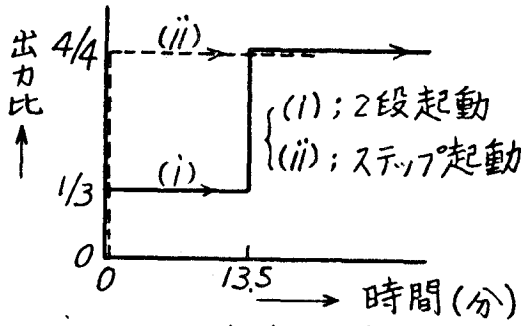
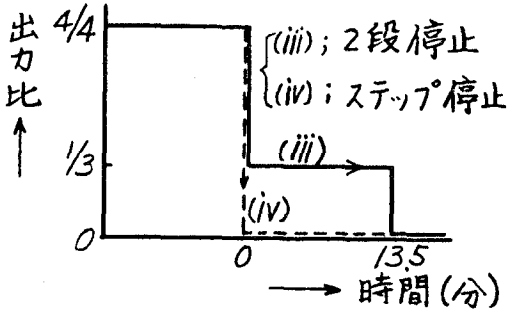


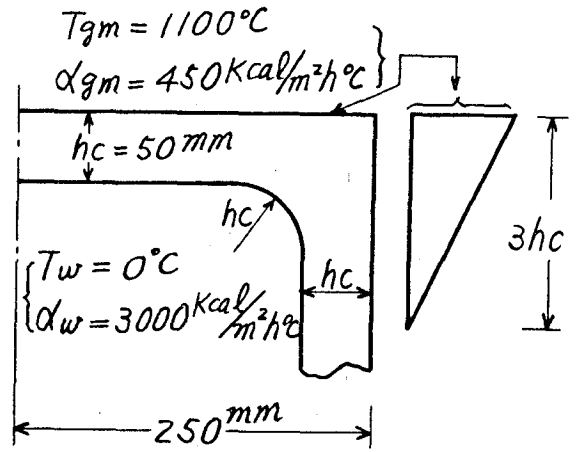
図 3. 2. 5 実用ピストンの温度分布計算例



(a) 起動条件



(b) 停止条件



(c) 構造および  
熱的境界条件

図 3. 2. 6 解析条件

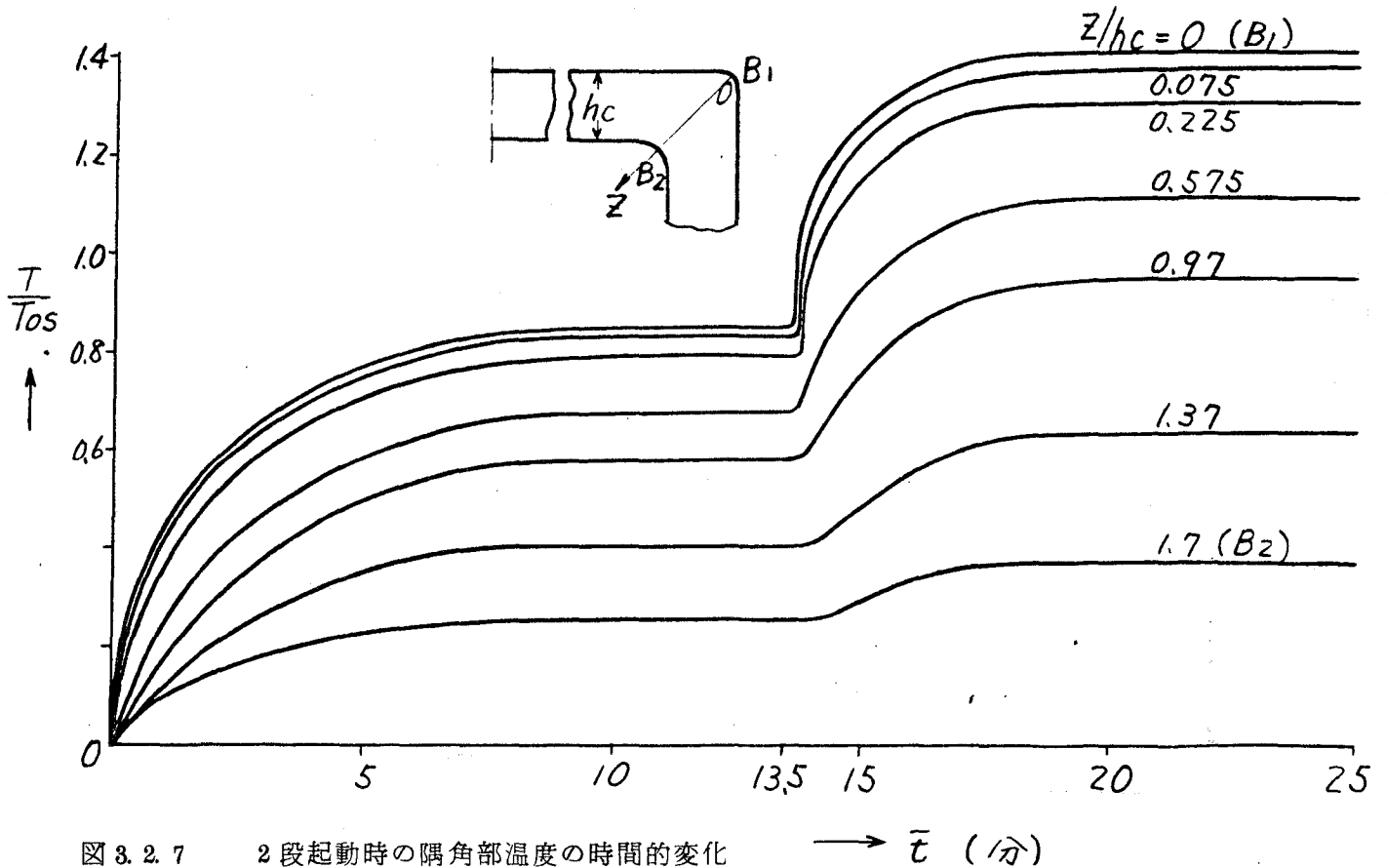


図 3. 2. 7 2 段起動時の隅角部温度の時間的变化

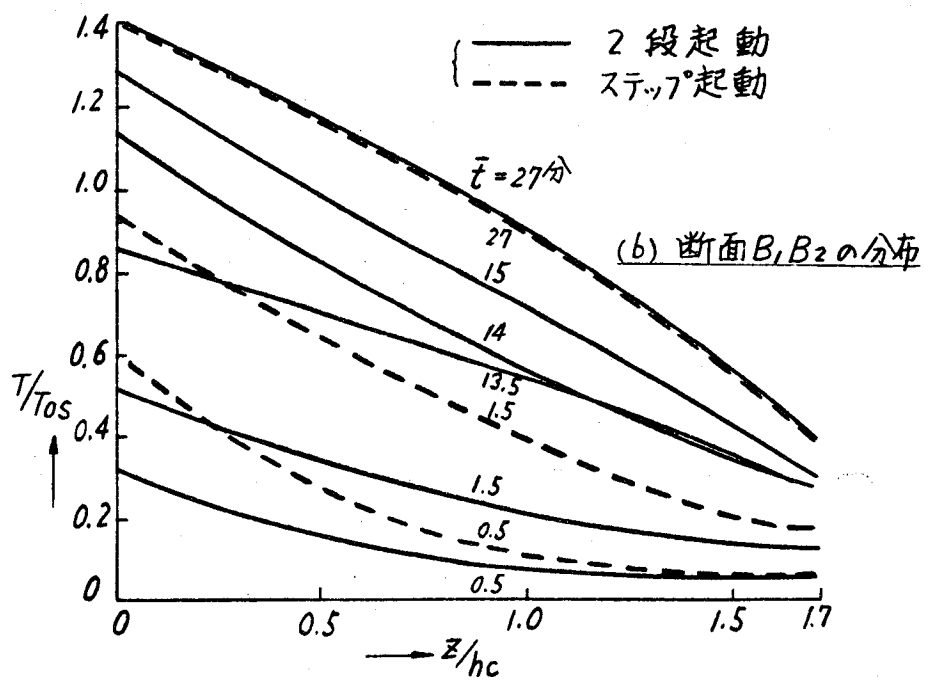
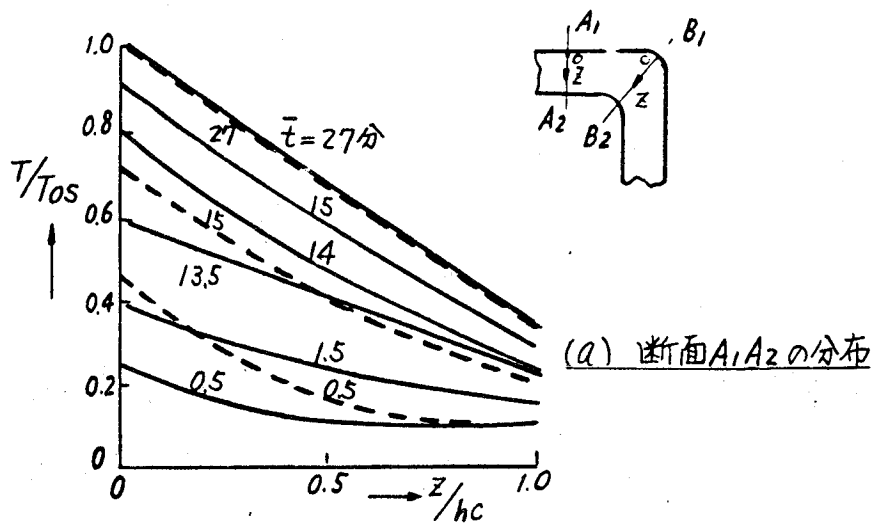


図 3. 2. 8 起動時の温度分布の変化

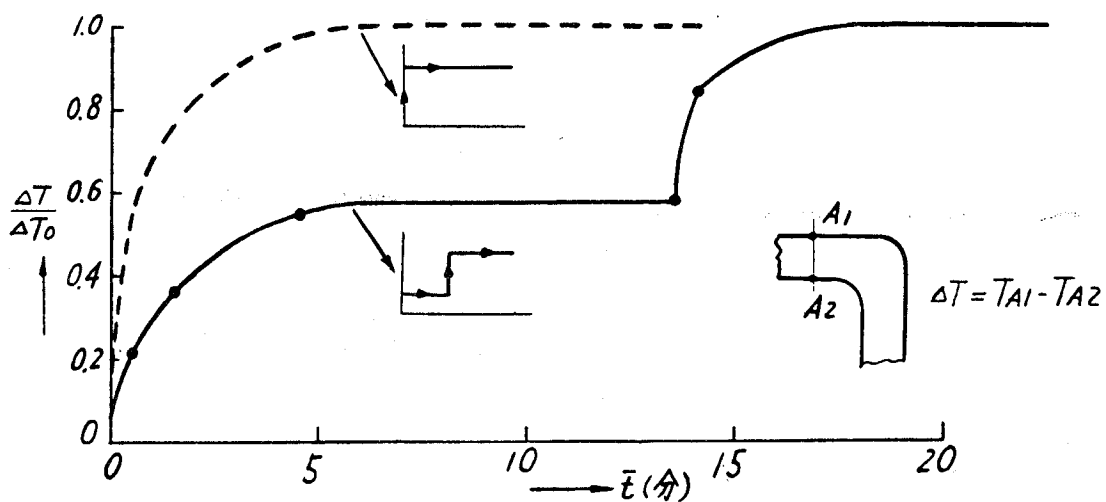


図 3. 2. 9 起動時の両表面温度差の時間的变化

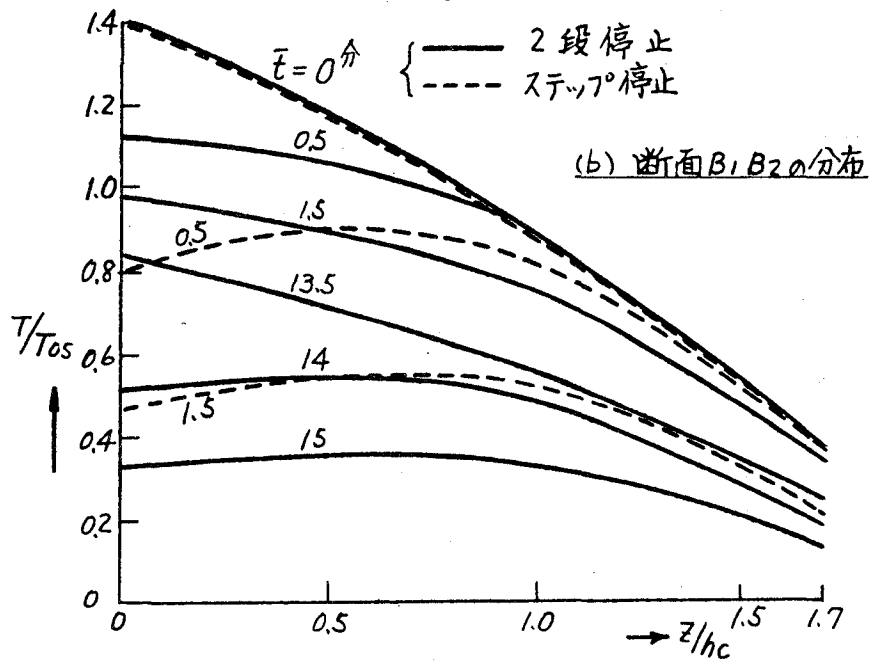
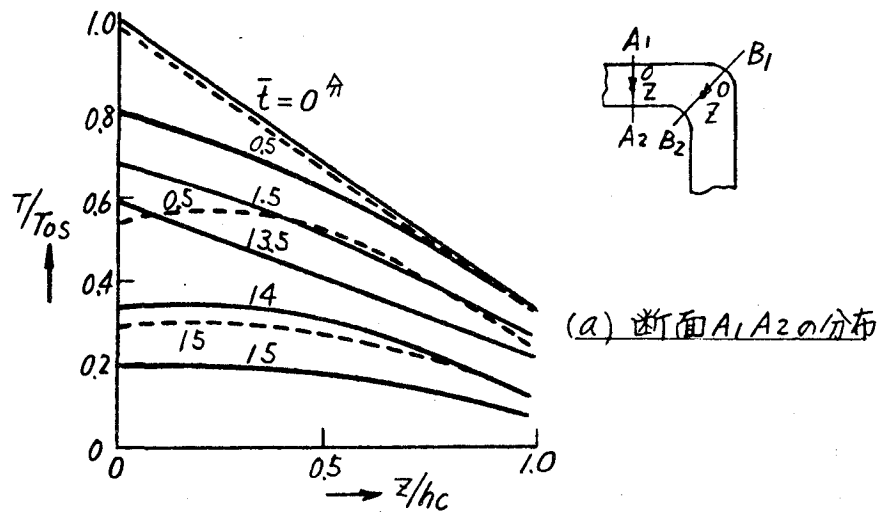
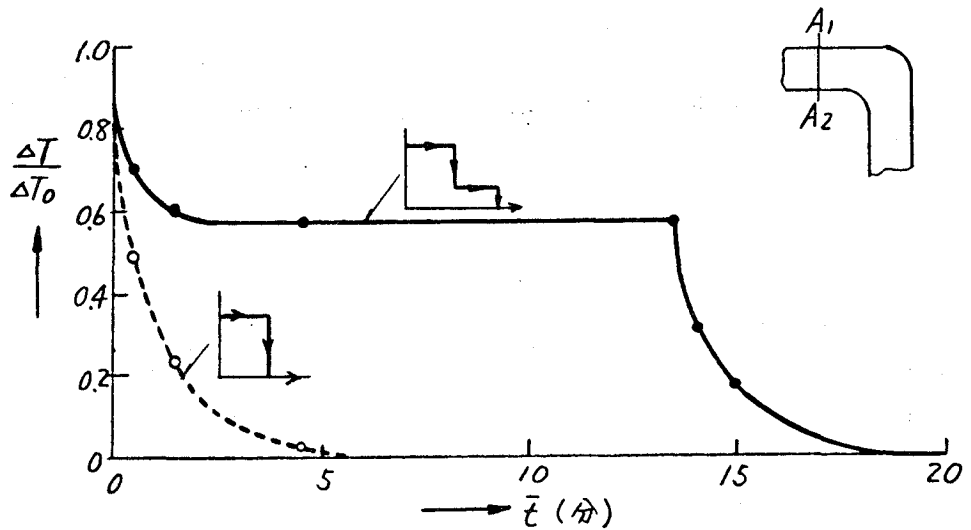


図 3. 2. 10 停止時の温度分布の変化



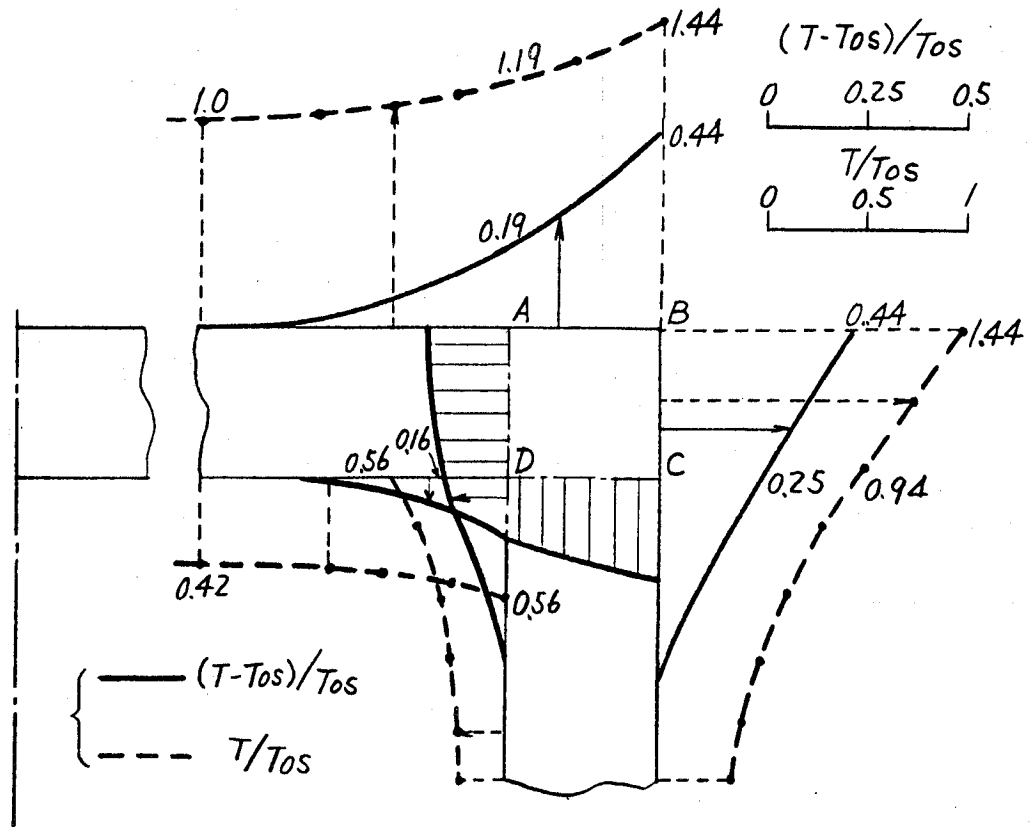


図 3.2.12 隅角部局部昇温の分布

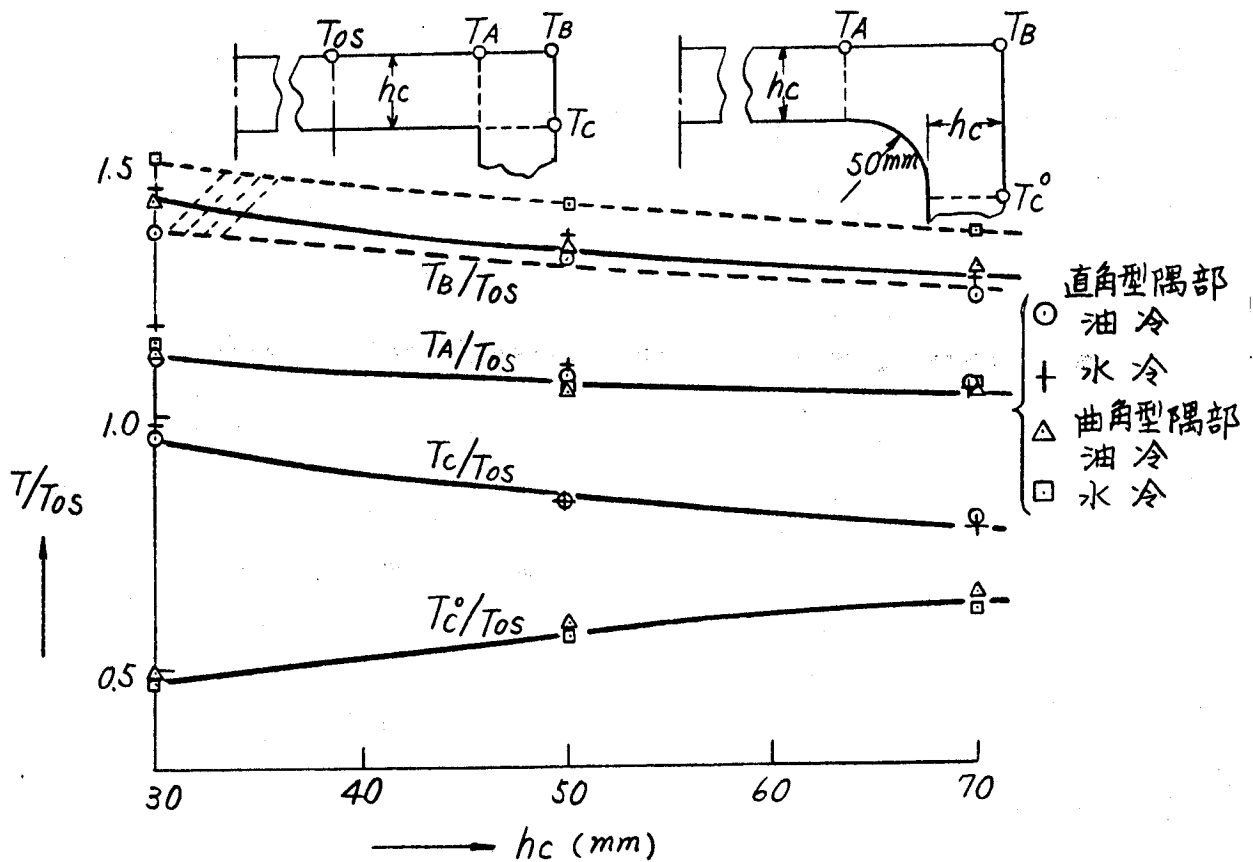


図 3.2.13 隅角部温度とクラウン肉厚の関係

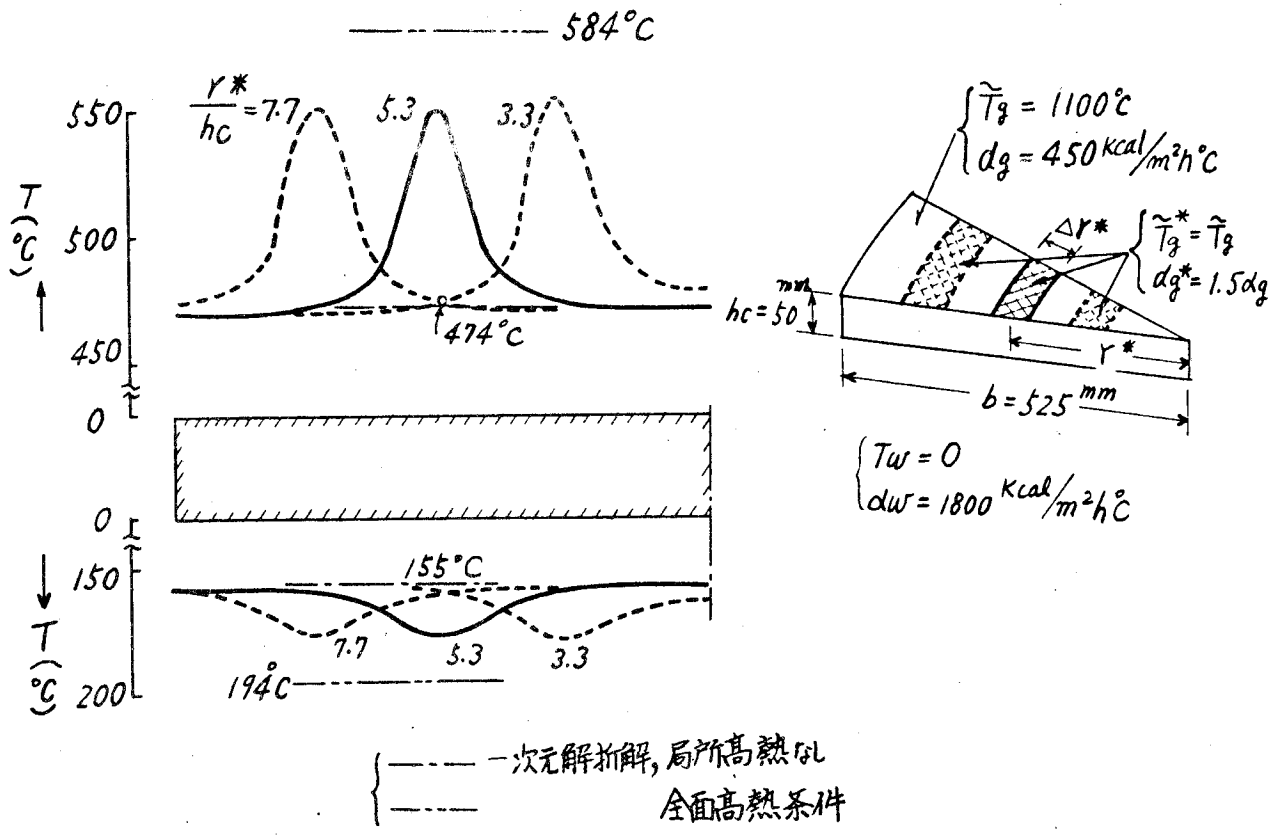


図 3. 2. 14 局所高熱による温度分布 (リング状高熱負荷)

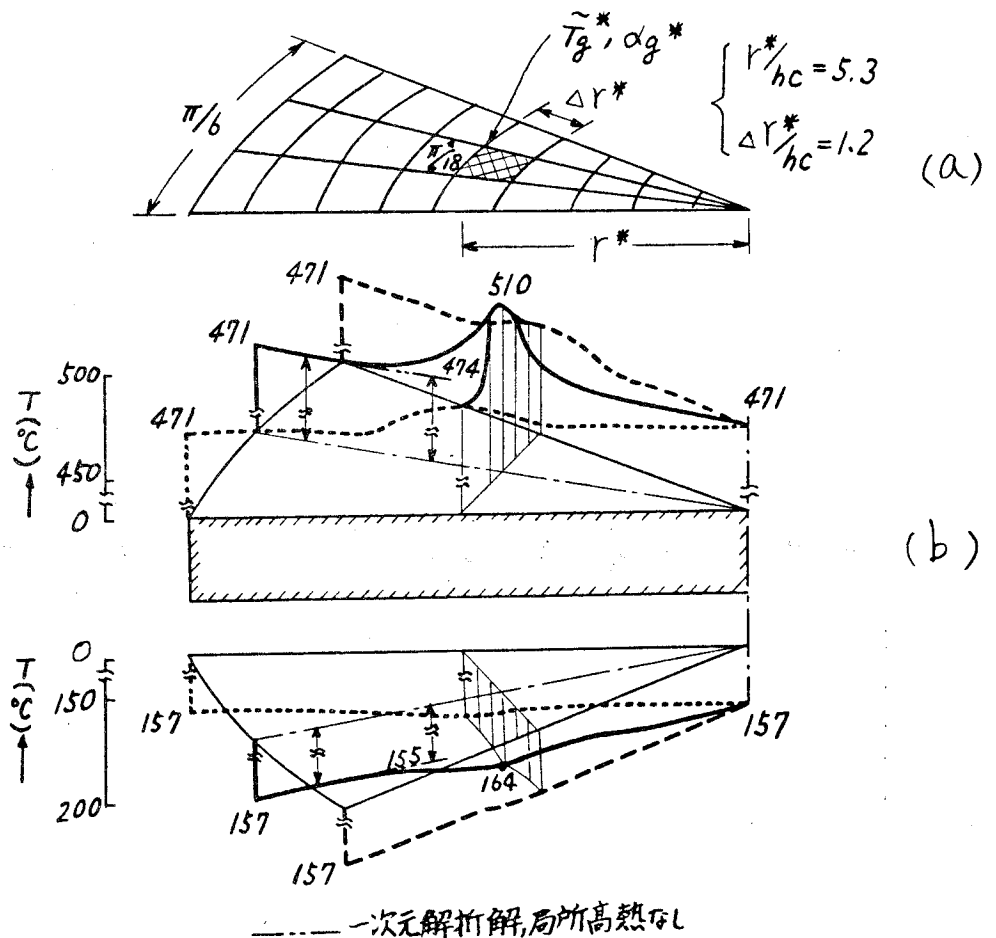


図 3. 2. 15 局所高熱による温度分布 (周方向断続)

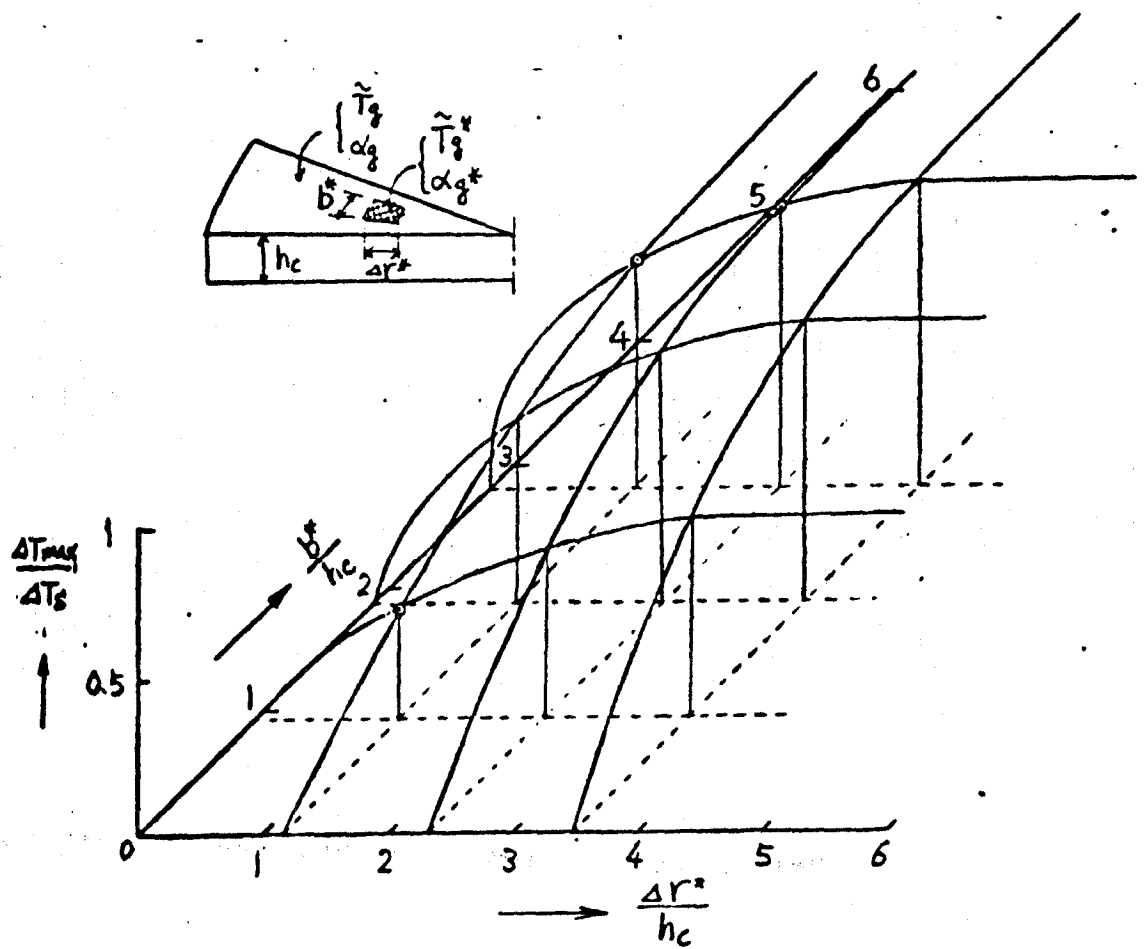


図 3.2.16 局部可熱域の巾と蝕火面最高温度の関係

表 3.3.1 計算模型と寸法比

計算模型 の名称	構造の形式	$\bar{\gamma}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\zeta}$
M1	(i)	1	0.2	/	/
M2	(ii)	1	0.2	0.1	/
M3	(ii)	1	0.2	0.2	/
M4	(ii)	1	0.2	0.5	/
M5	(iii)	1	0.2	0.1	0.2
M6	(iii)	1	0.2	0.2	0.4

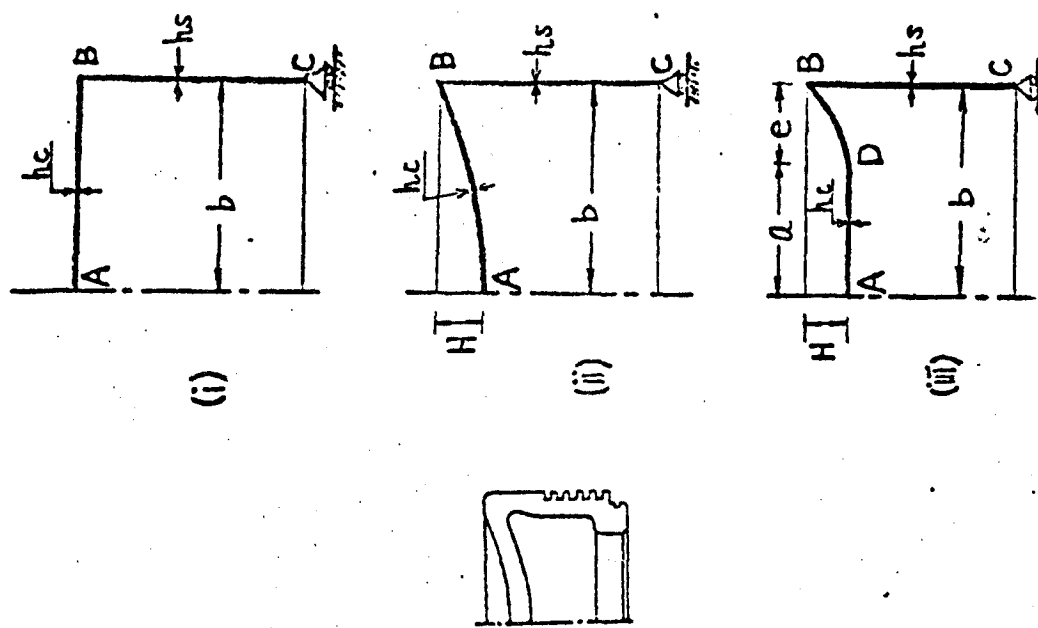


図 3.3.1 リブなしプレストンの構造様式



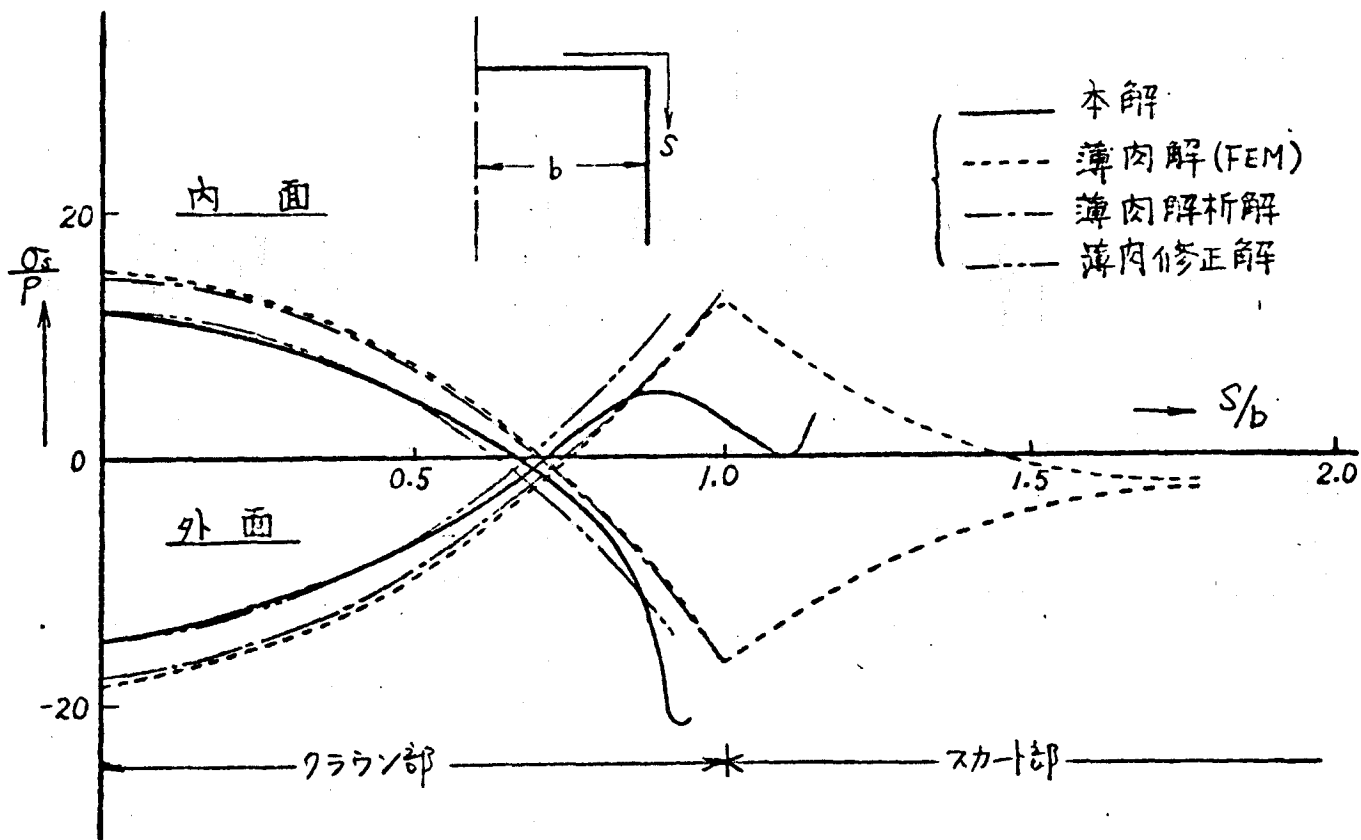


図 3.3.2 M1 のガス圧応力

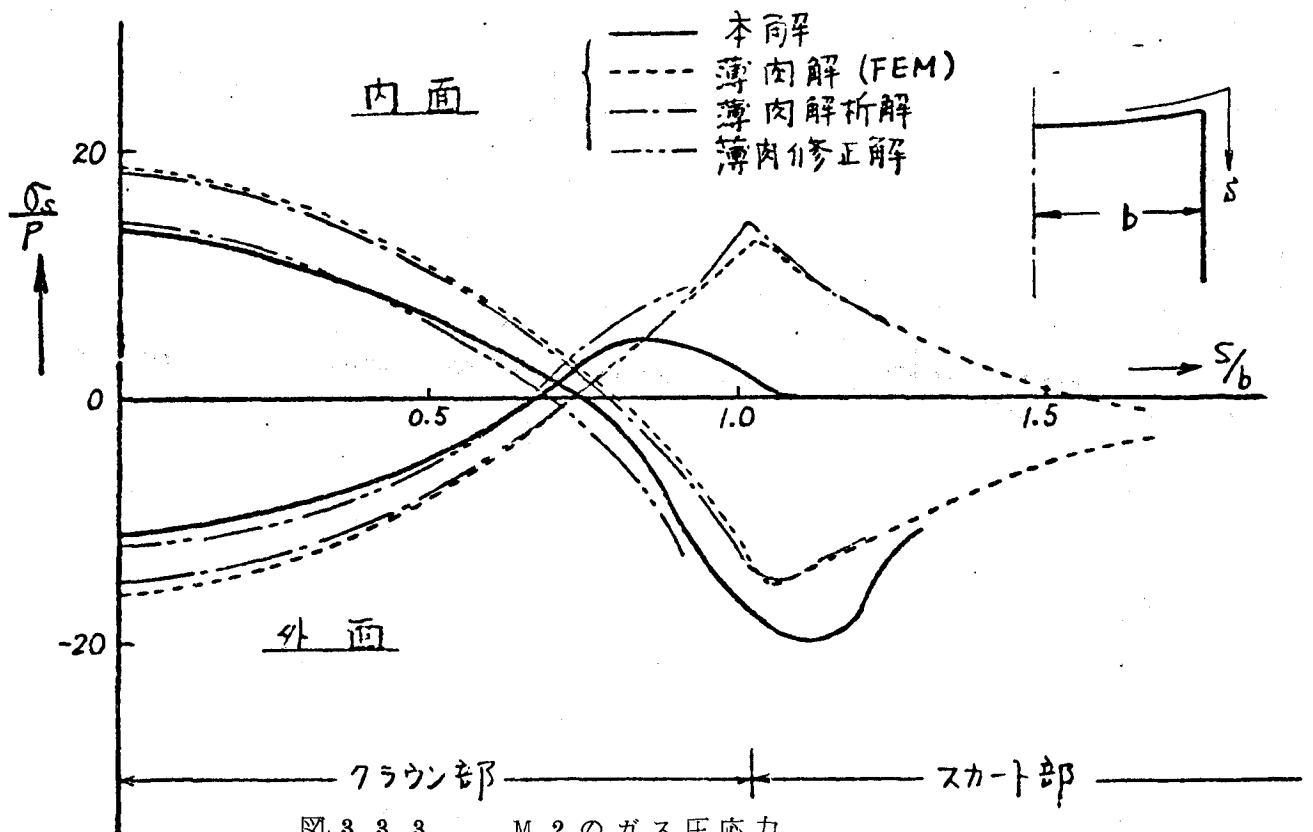


図 3.3.3 M2 のガス圧応力

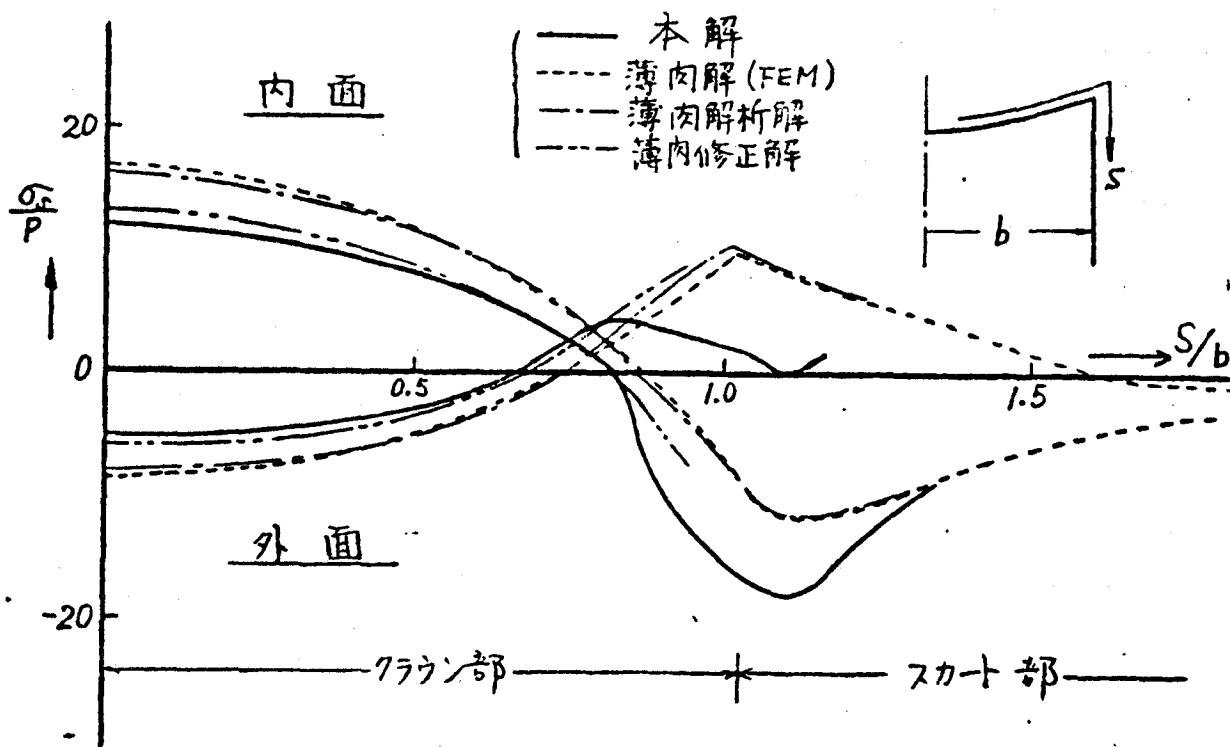


図 3. 3. 4 M 3 のガス圧応力

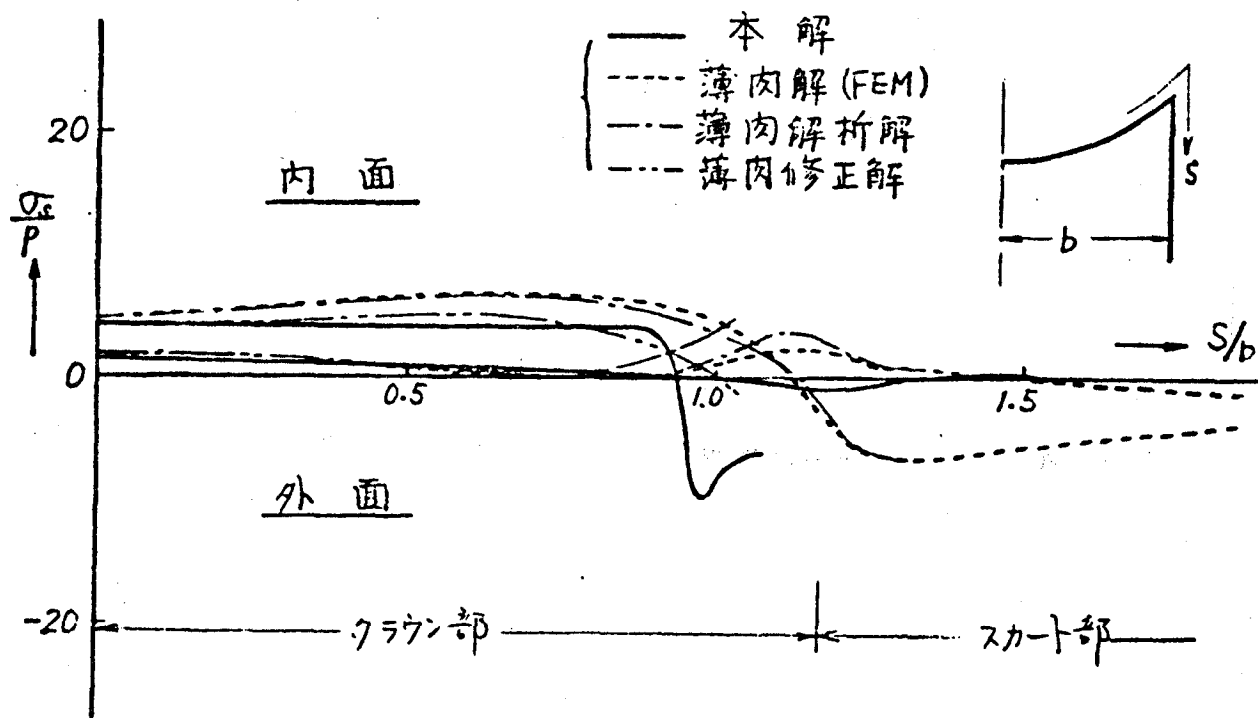


図 3. 3. 5 M 4 のガス圧応力

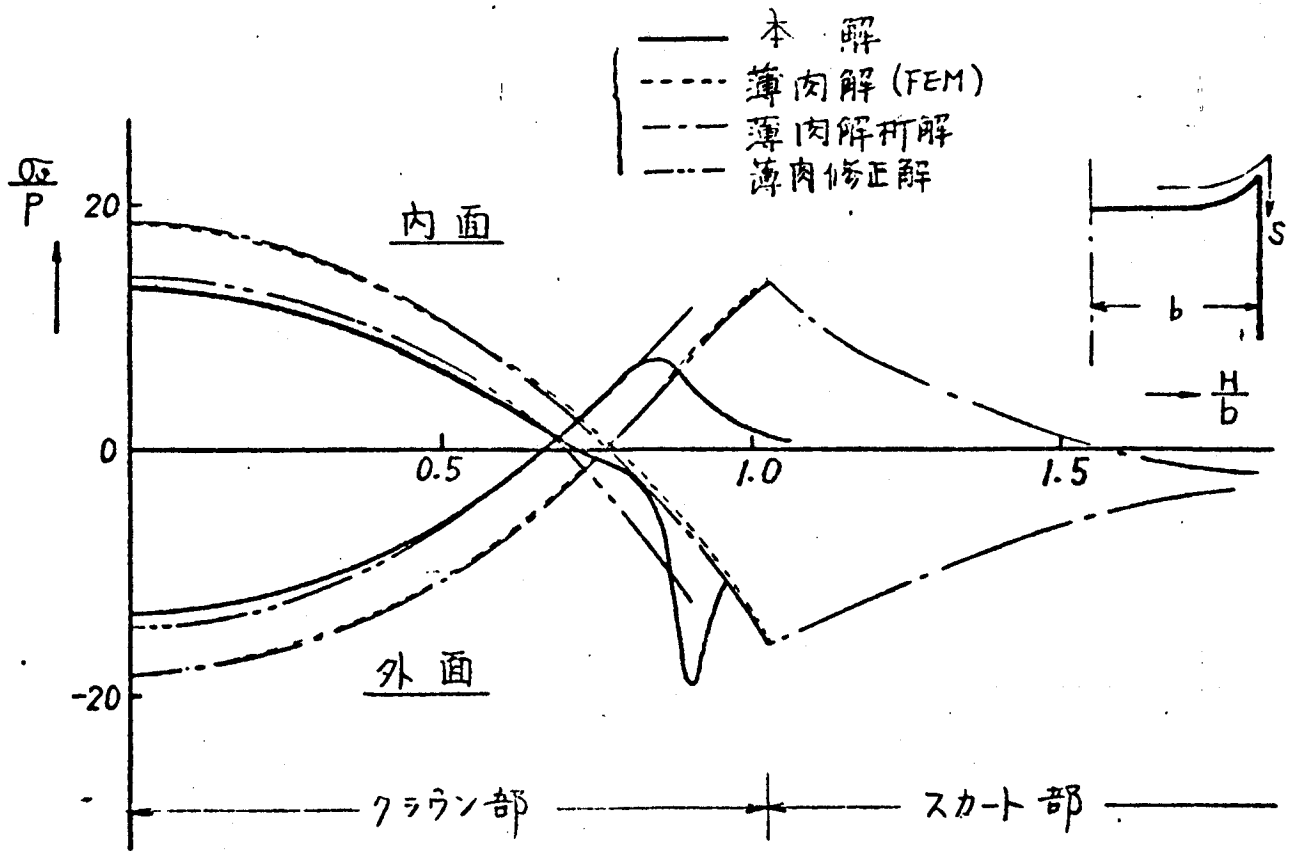


図 3.3.6 M5 のガス圧応力

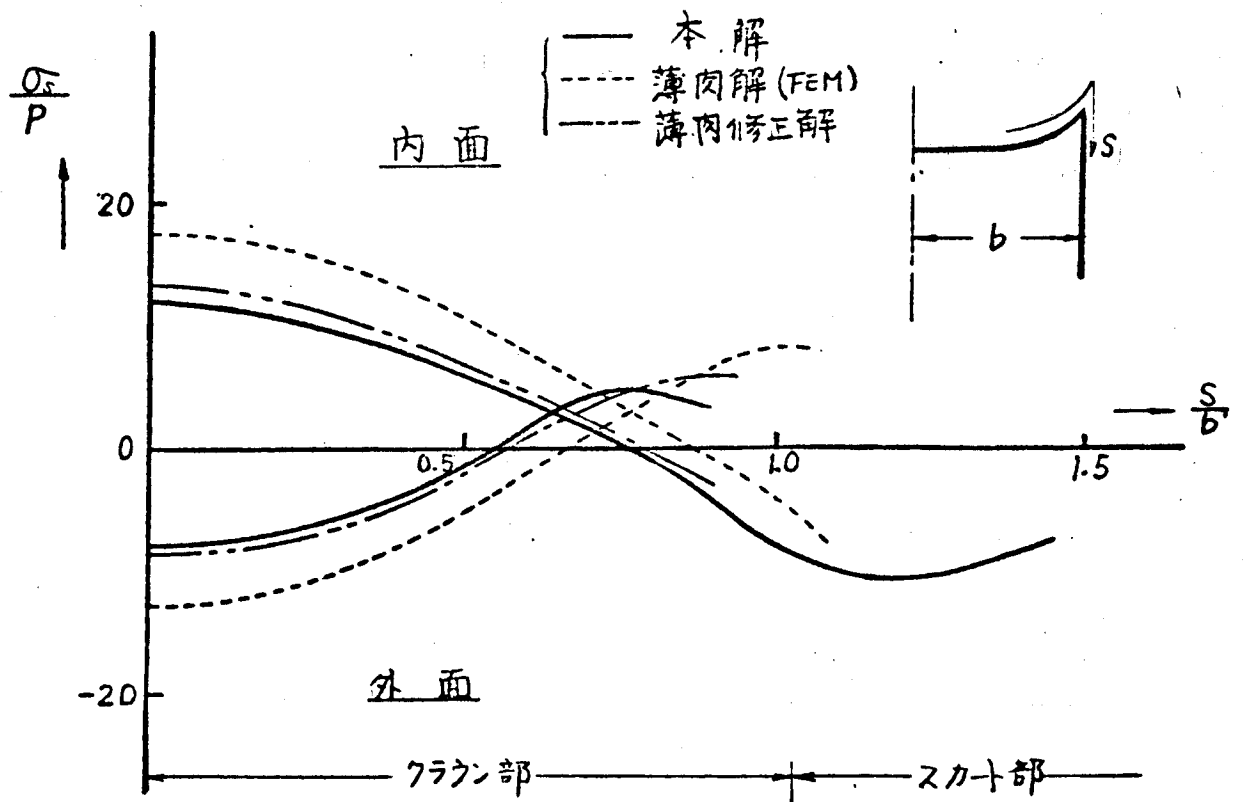


図 3.3.7 M6 のガス圧応力

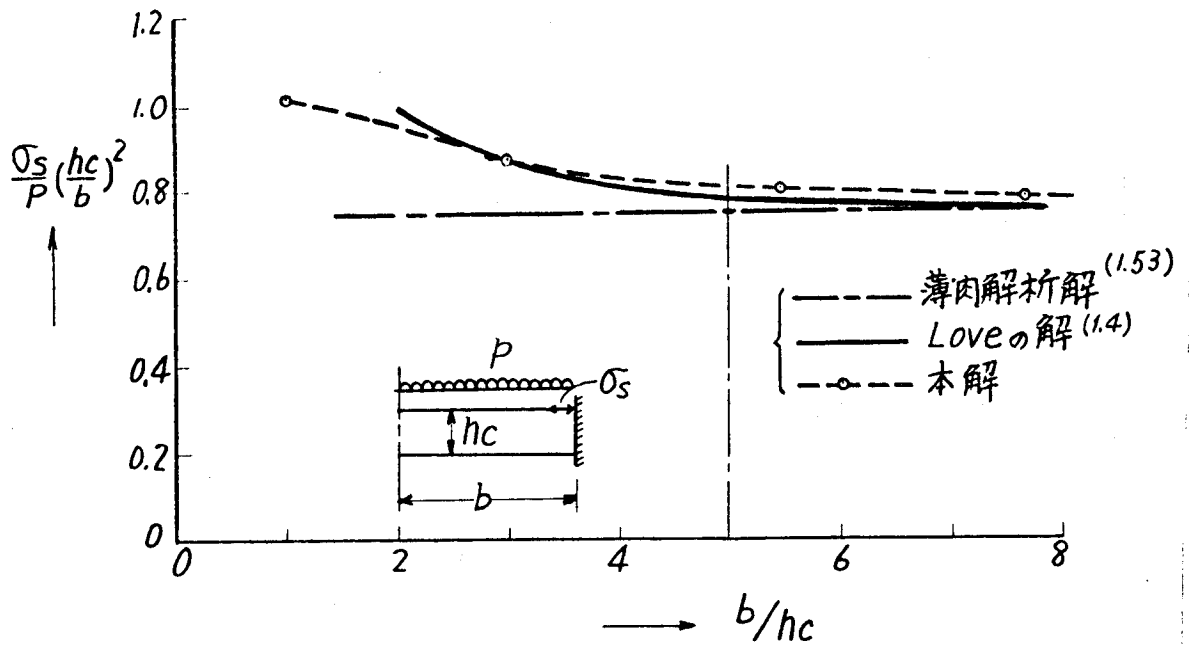


図 3. 3. 8 薄肉解と厚肉解の比較 (肉厚の影響)

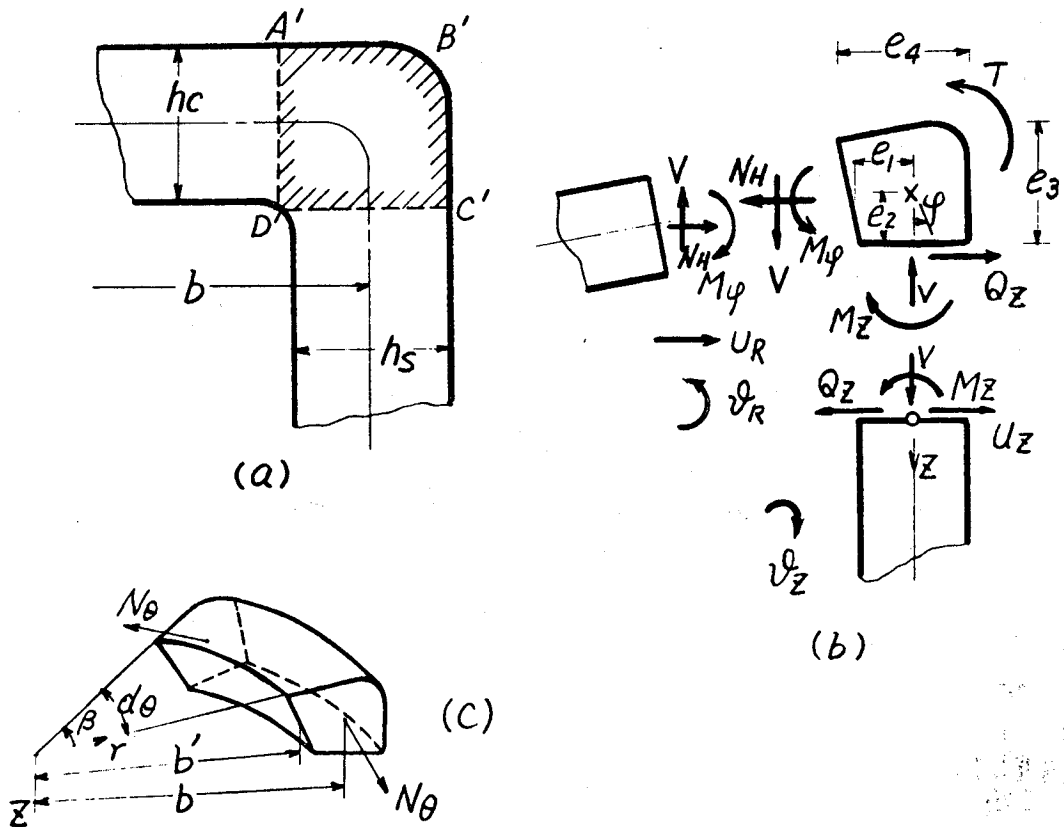


図 3. 3. 9 隅角部切口に作用する力

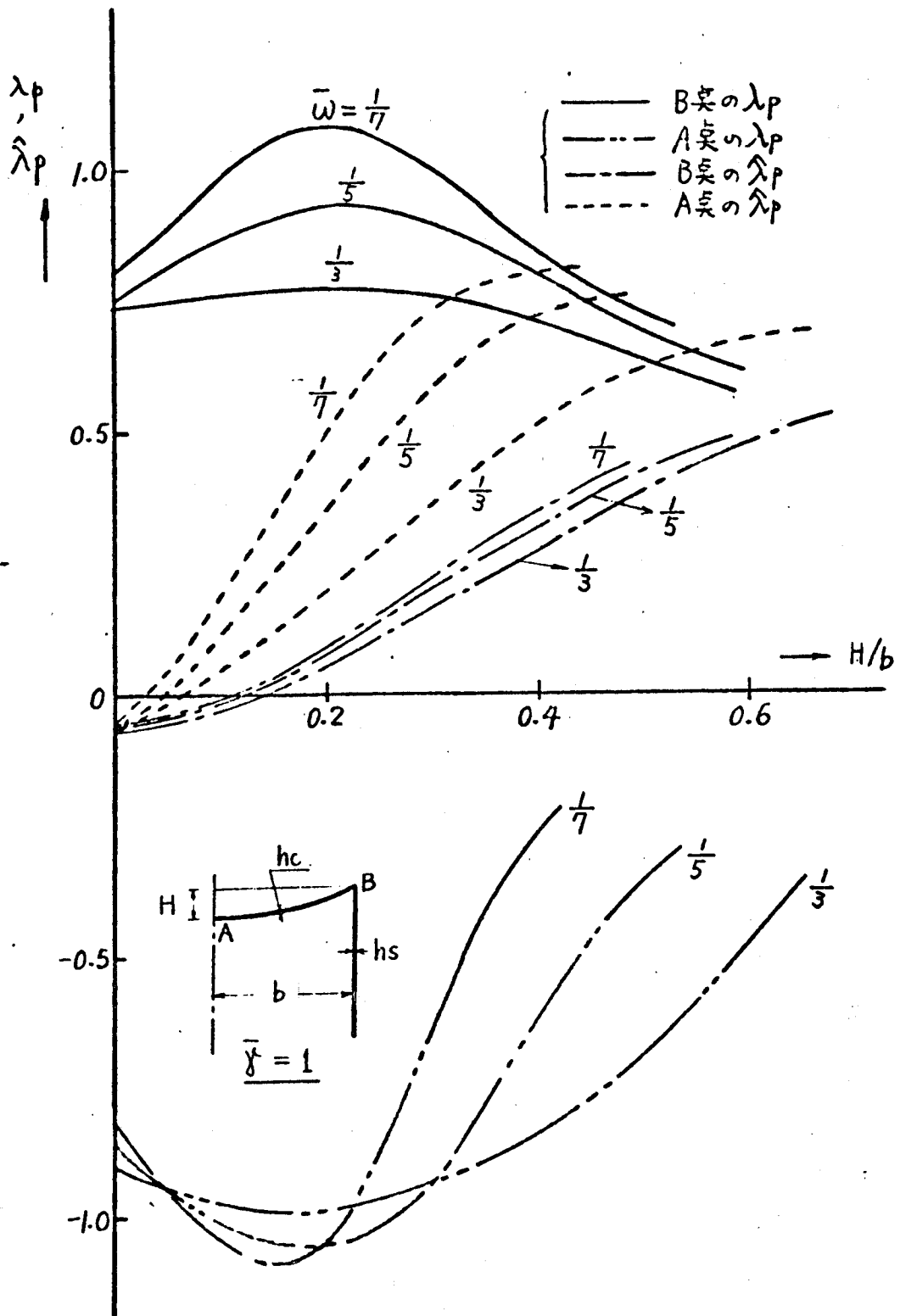


図 3. 3. 10 構造形状と主要点のガス圧応力の関係 (様式(i)(ii))

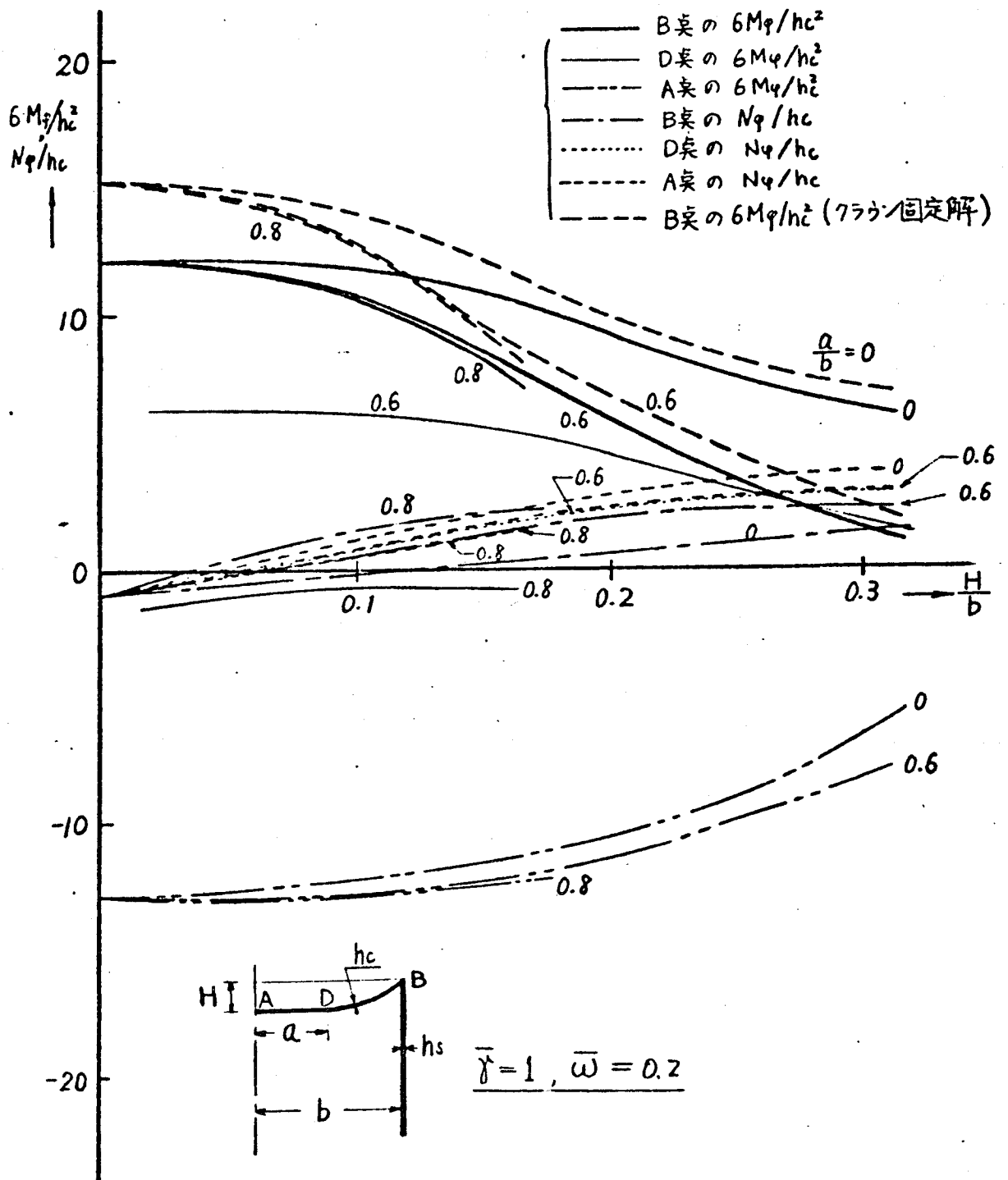


図 3. 3. 11 構造形状と主要点のガス圧応力の関係 (様式(皿))



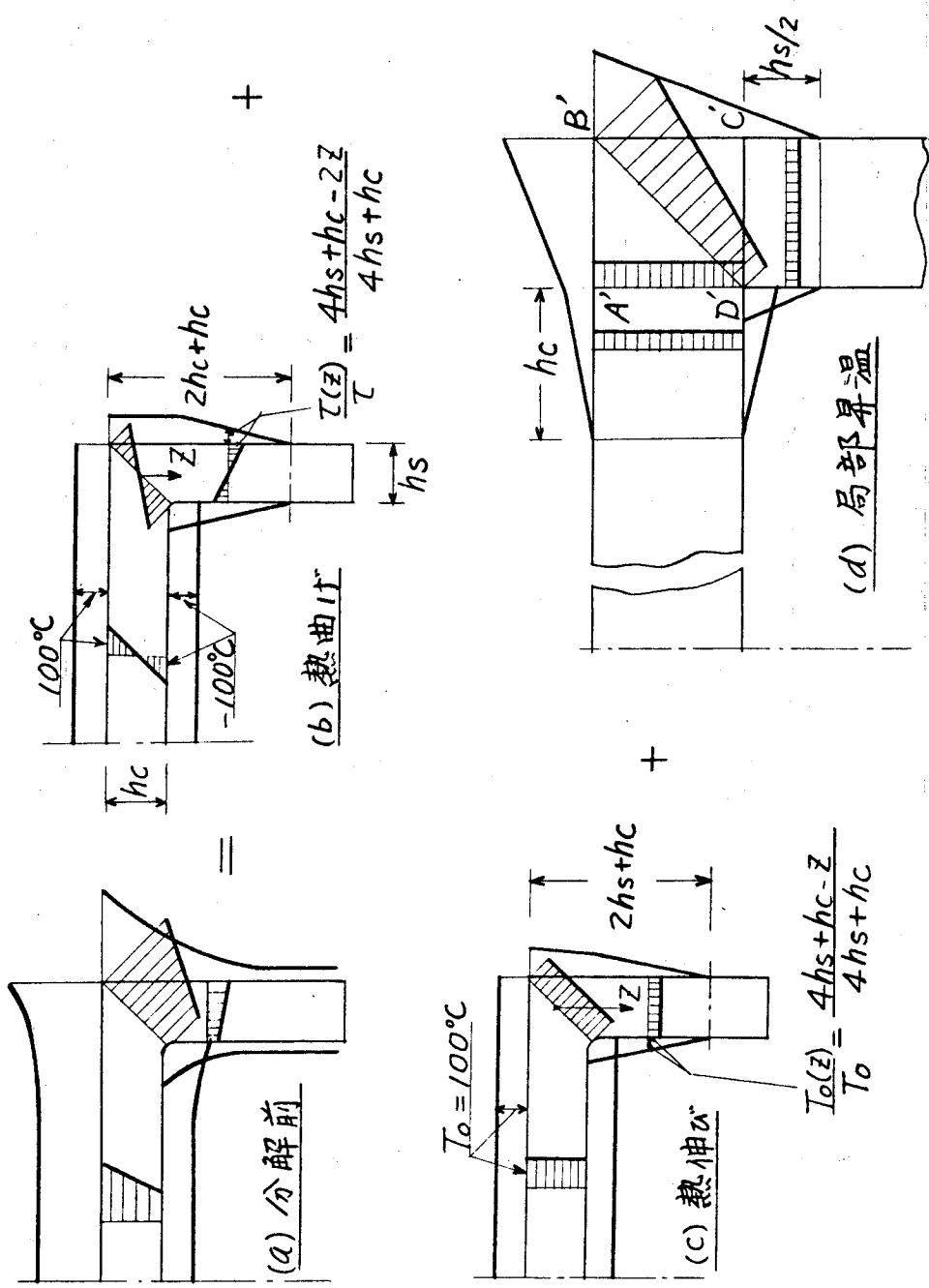


図 3. 3. 13 ピストンの温度分布の基本成分への分解



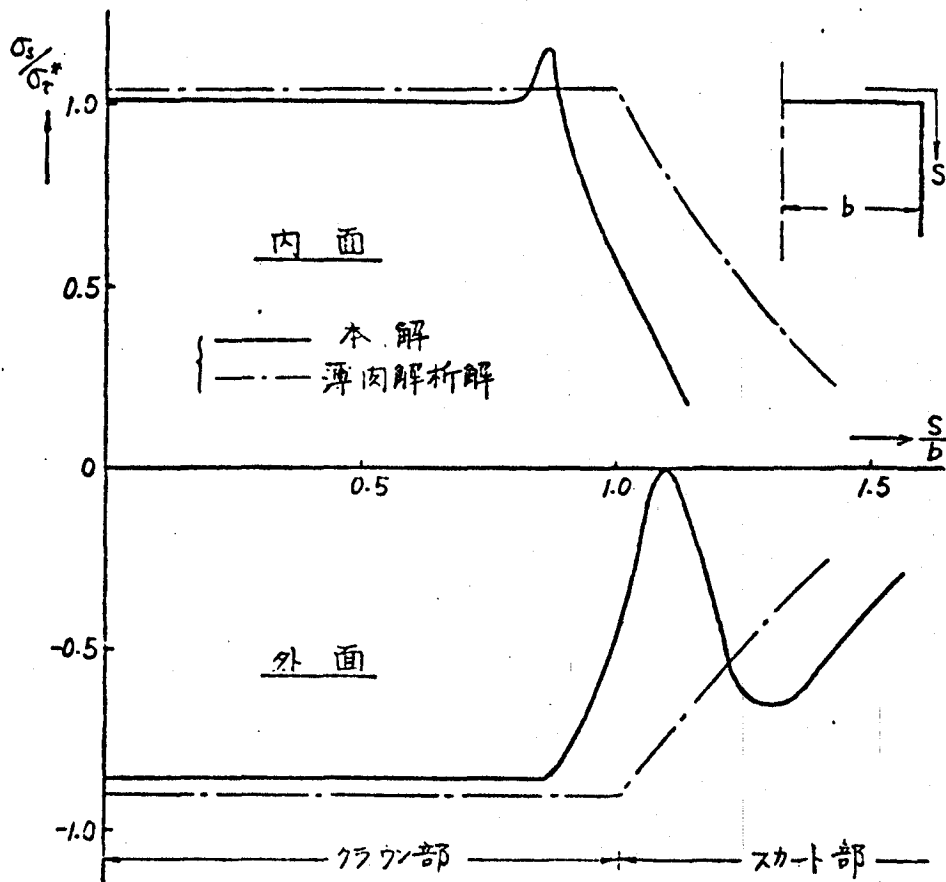


図 3. 3. 14 M 1 の熱曲げ応力

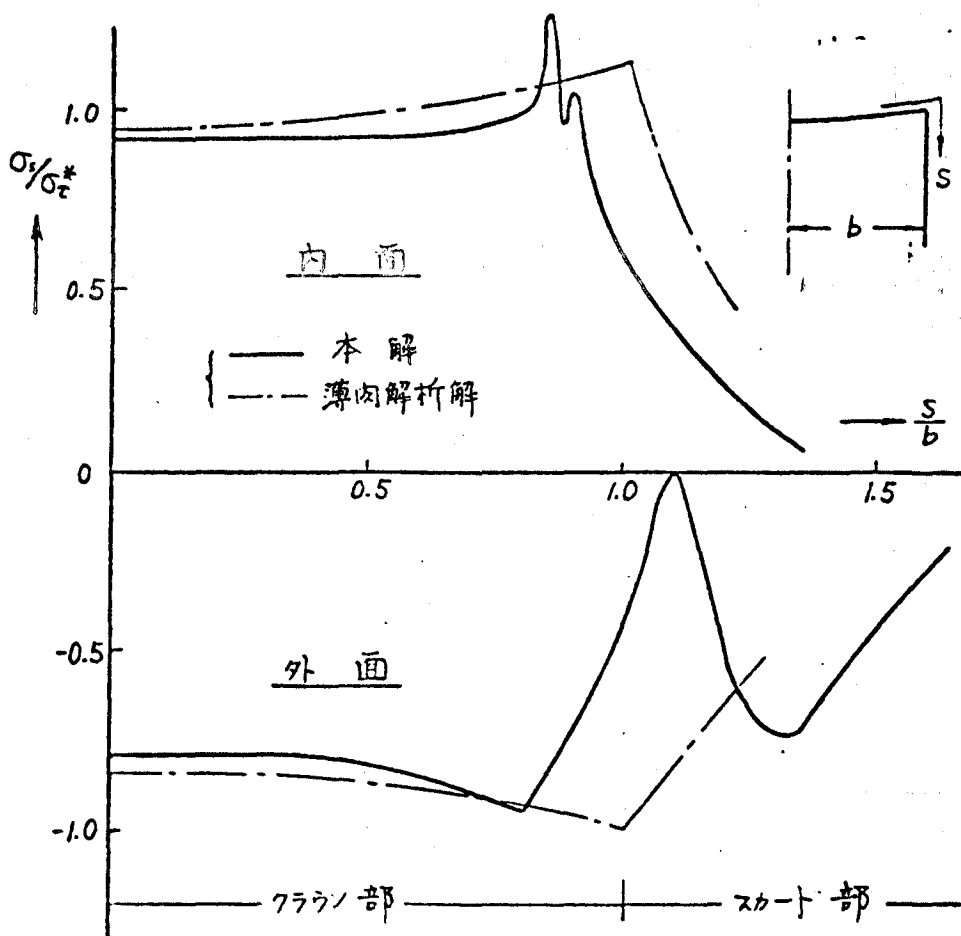


図 3. 3. 15 M 2 の熱曲げ応力

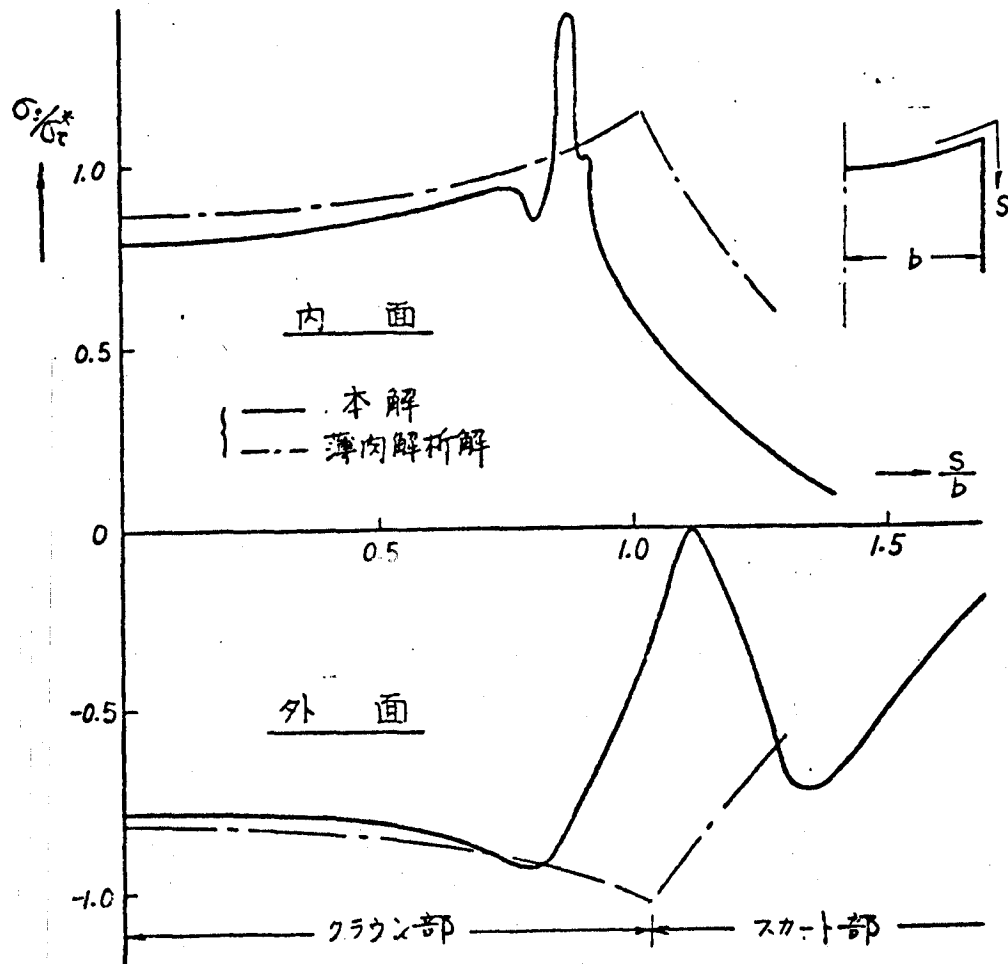


図 3. 3. 16 M 3 の熱曲げ応力

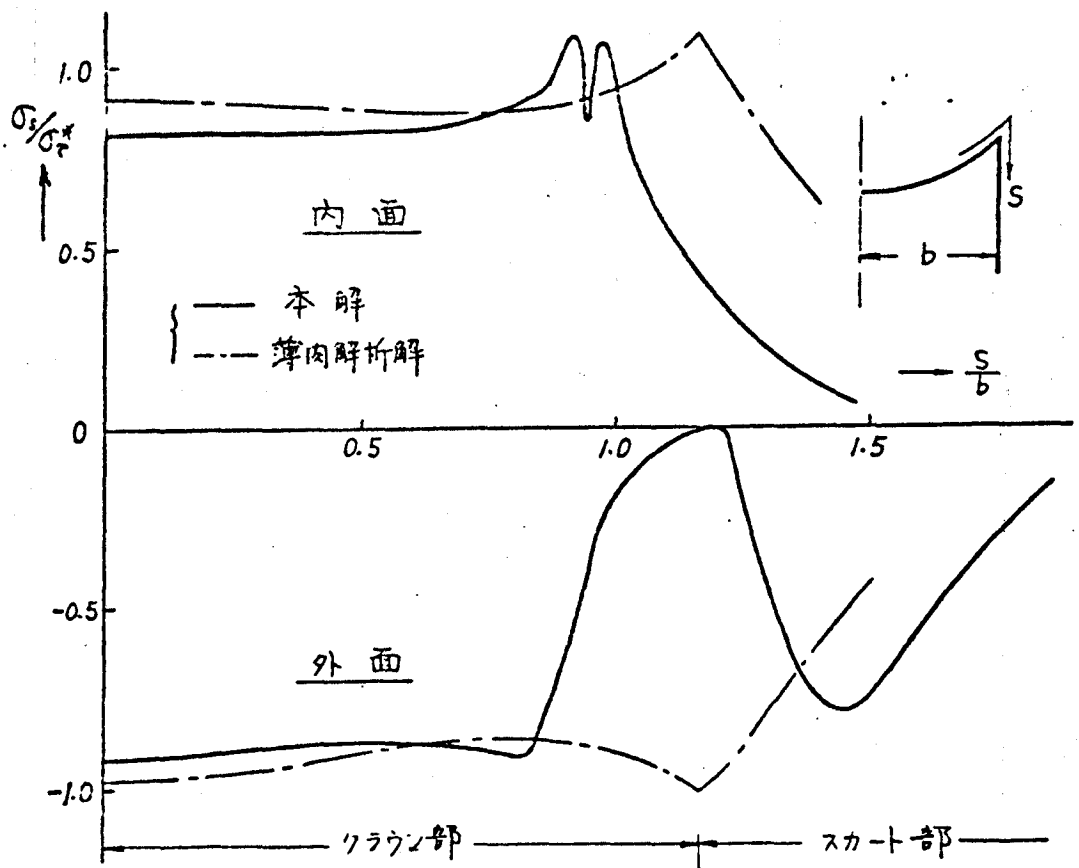


図 3. 3. 17 M 4 の熱曲げ応力

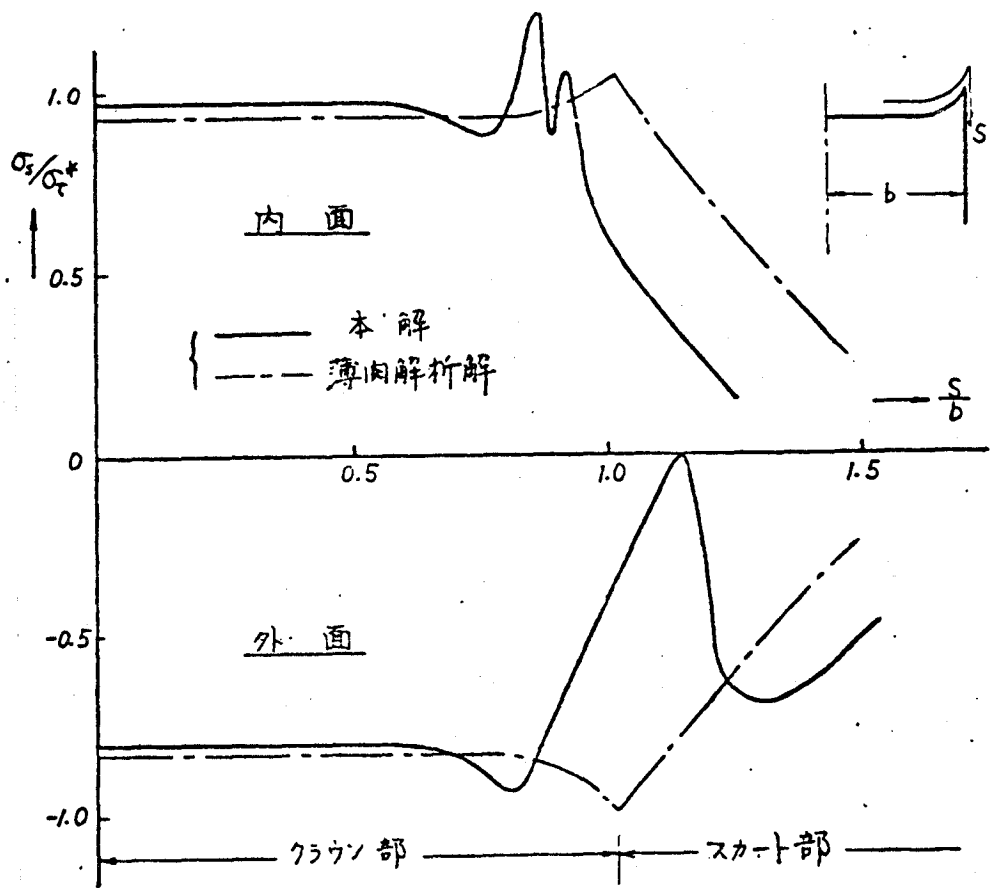


図 3.3.18 M5 の熱曲げ応力

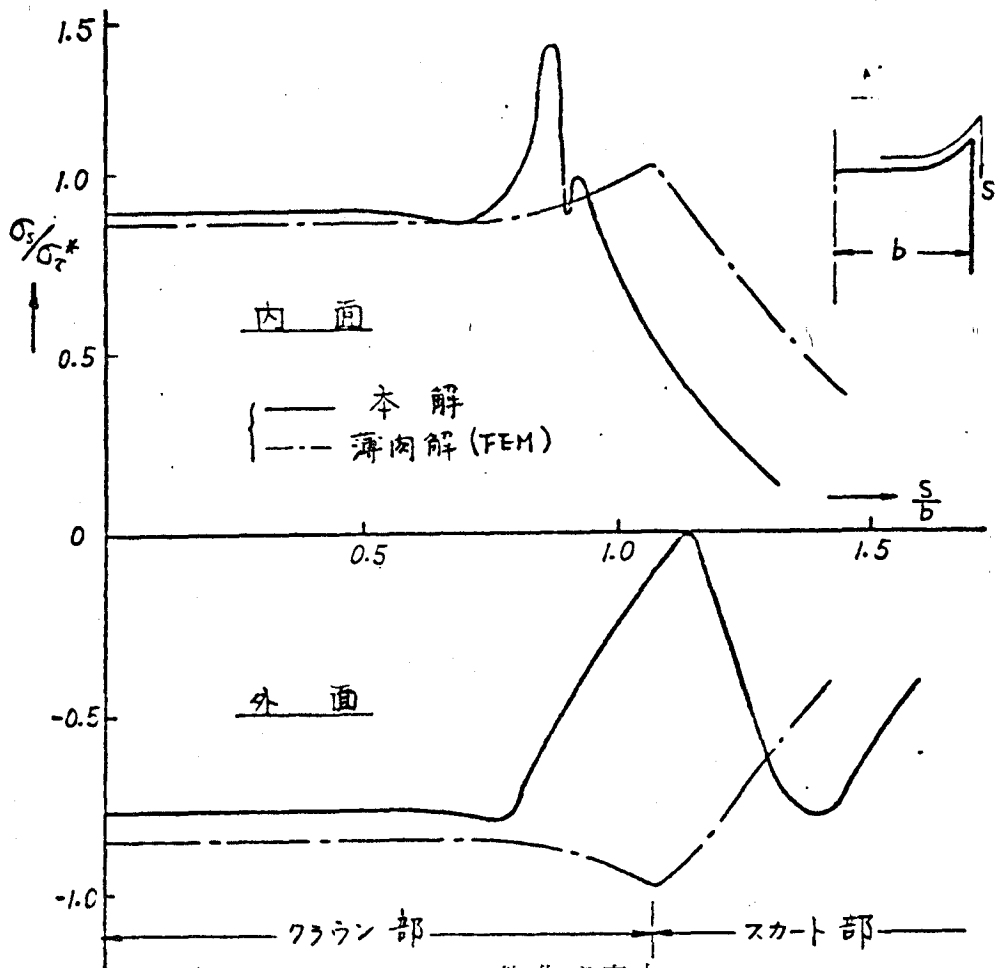


図 3.3.19 M6 の熱曲げ応力

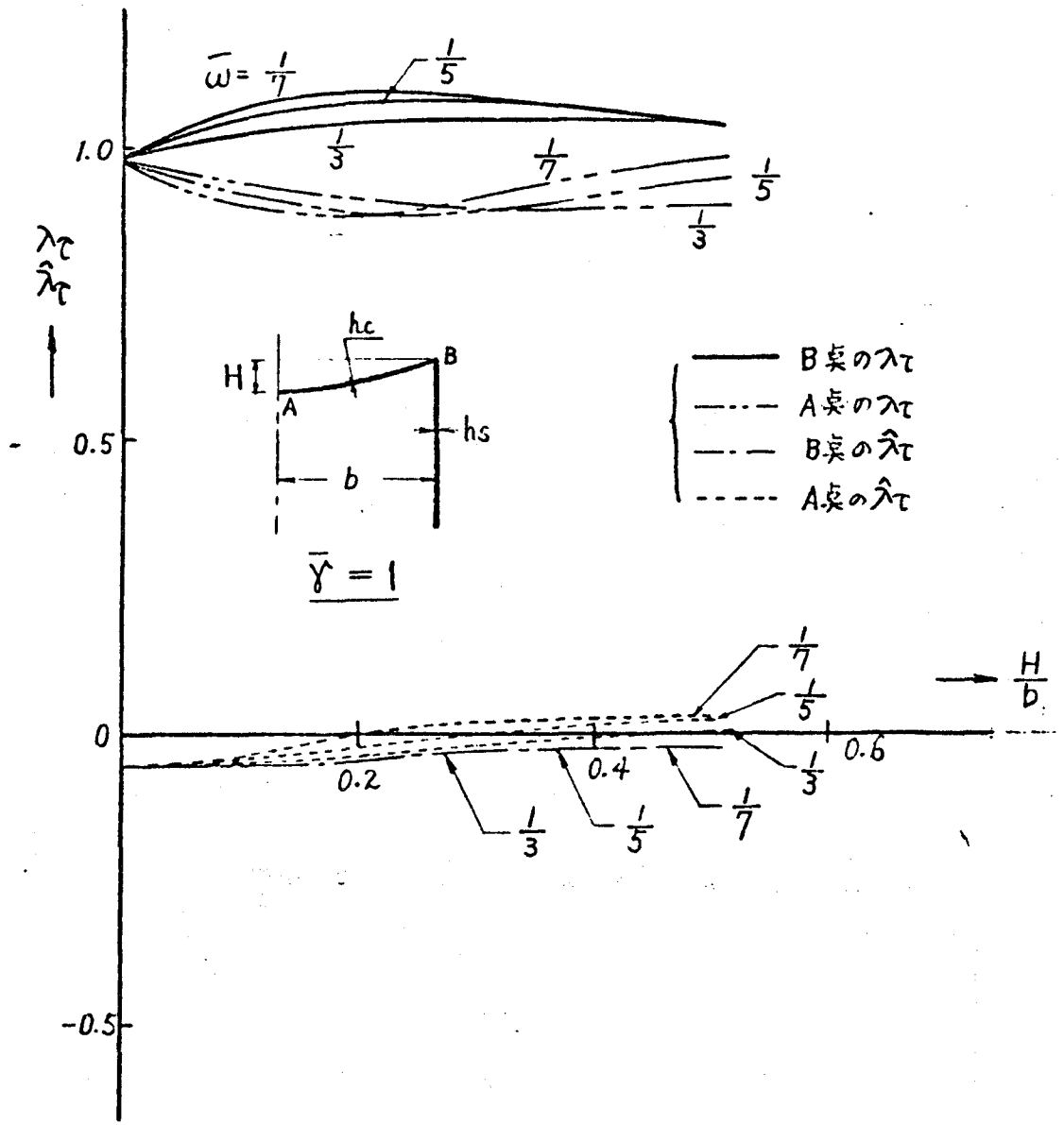


図 3. 3. 20 構造形状と主要点の熱曲げ応力の関係 (様式(i)(ii))

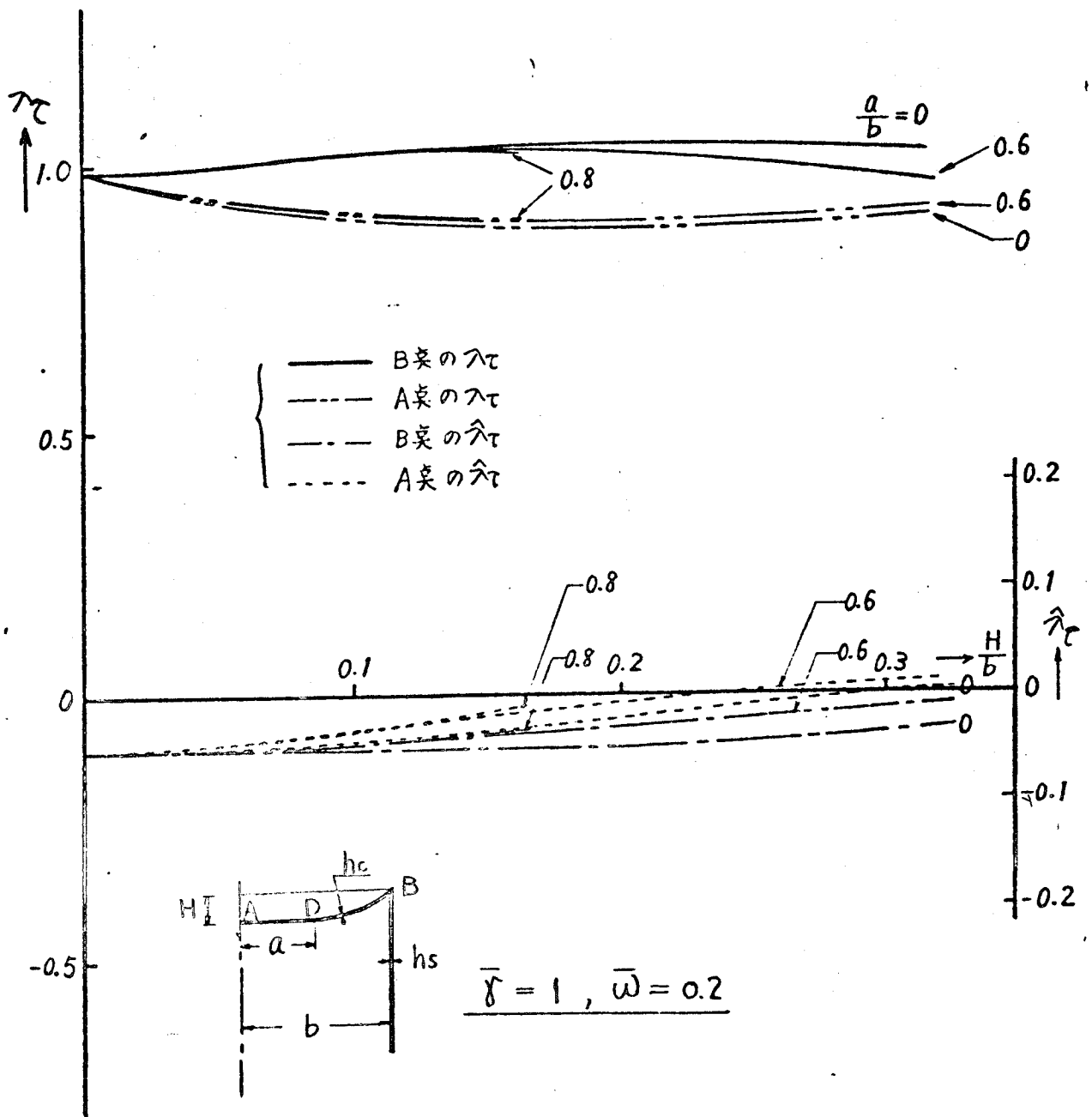


図 3. 3. 21 構造形状と主要点の熱曲げ応力の関係 (様式(Ⅲ))

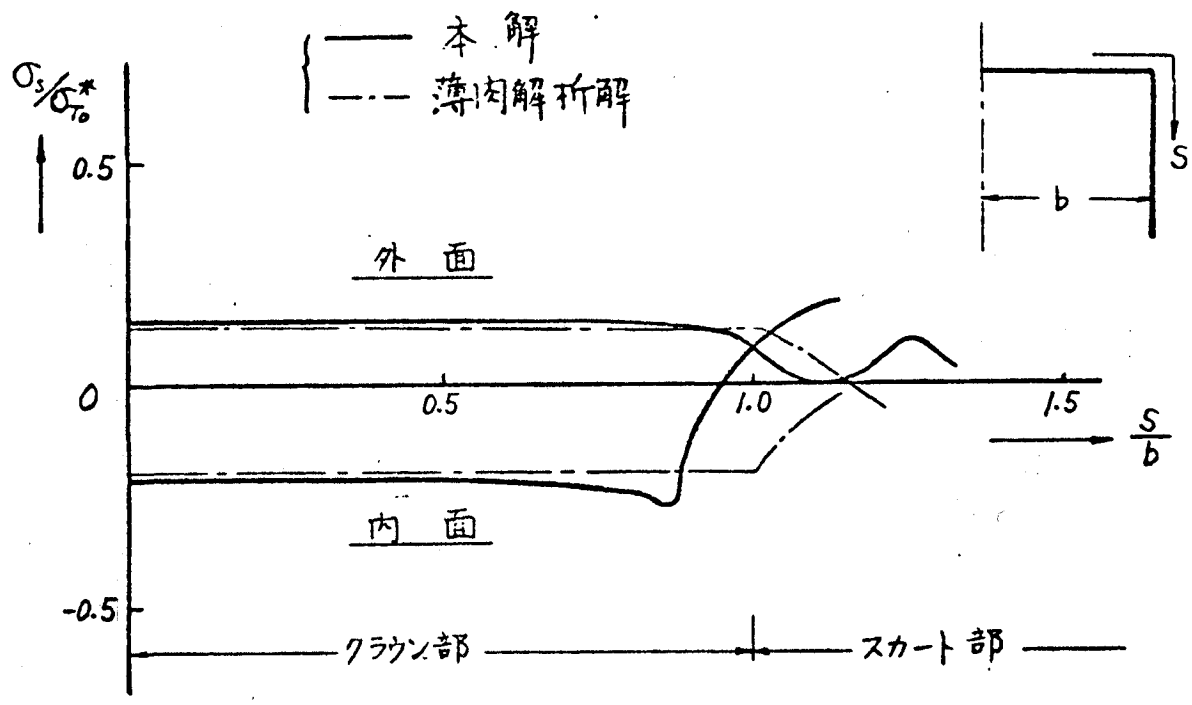


図 3. 3. 22 M 1 の熱伸び応力

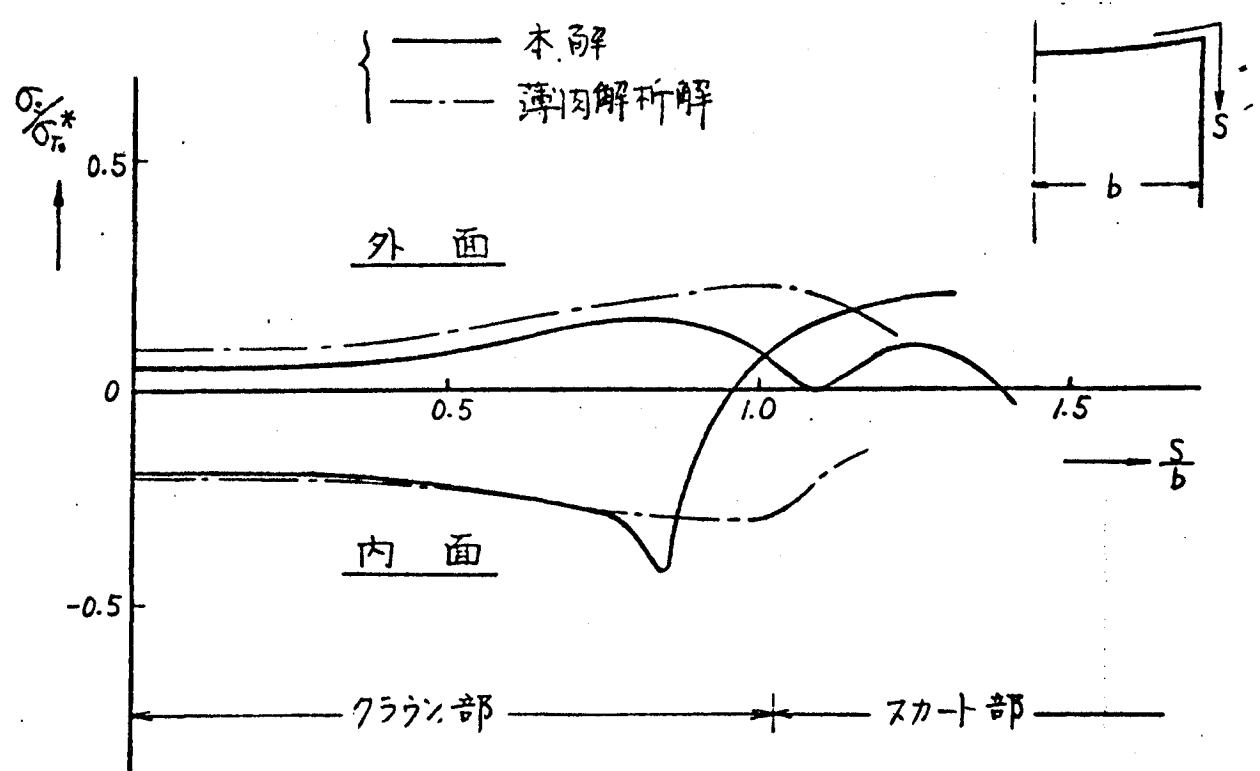


図 3. 3. 23 M 2 の熱伸び応力

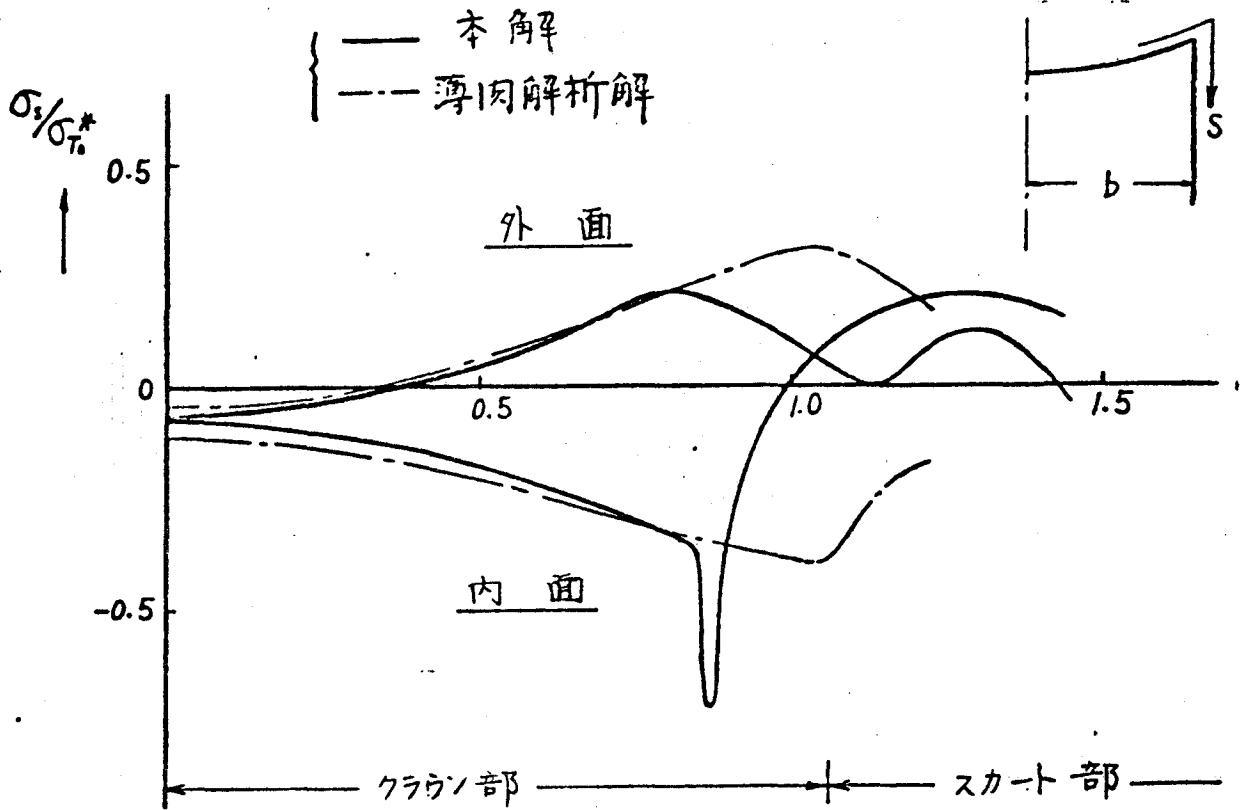


図 3. 3. 24 M 3 の熱伸び応力

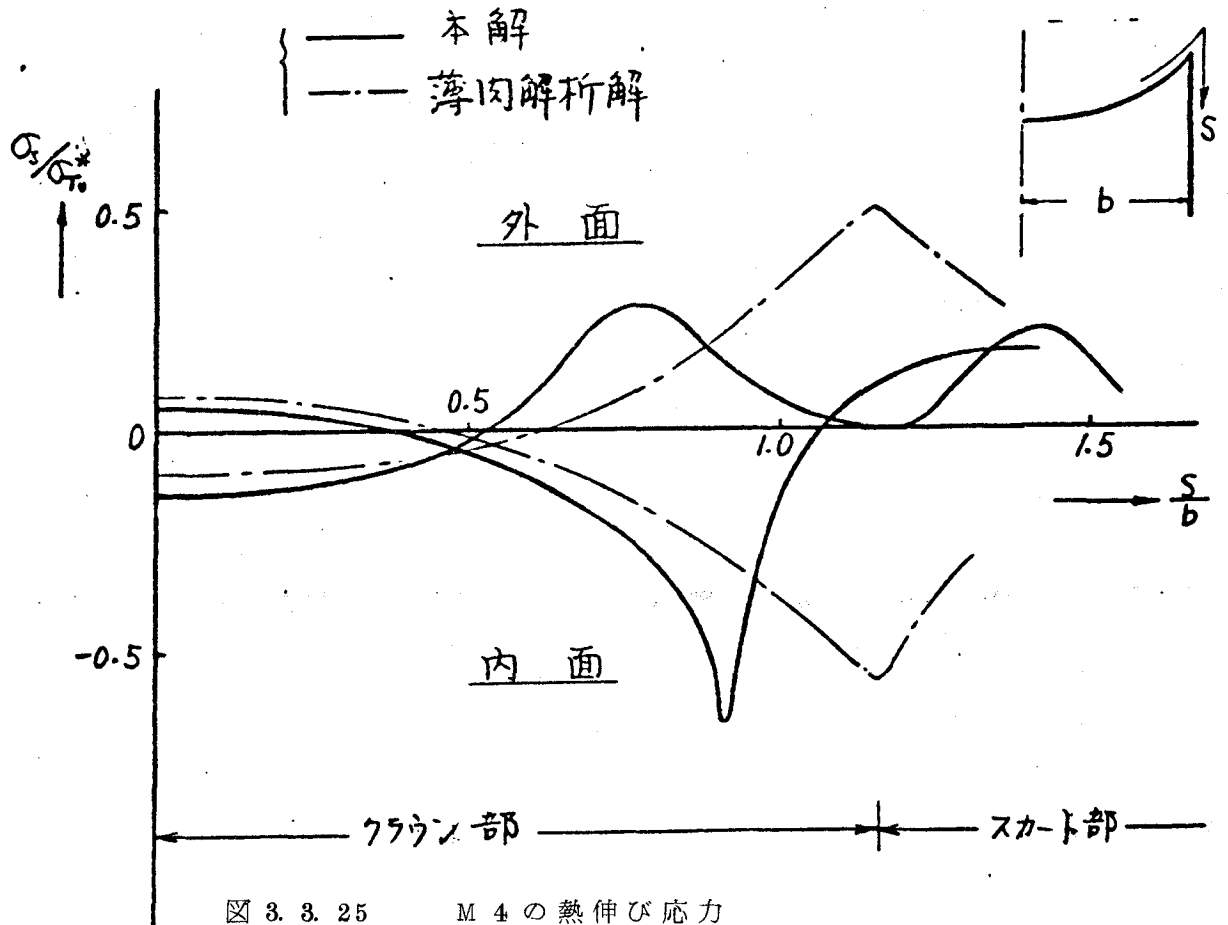


図 3. 3. 25 M 4 の熱伸び応力

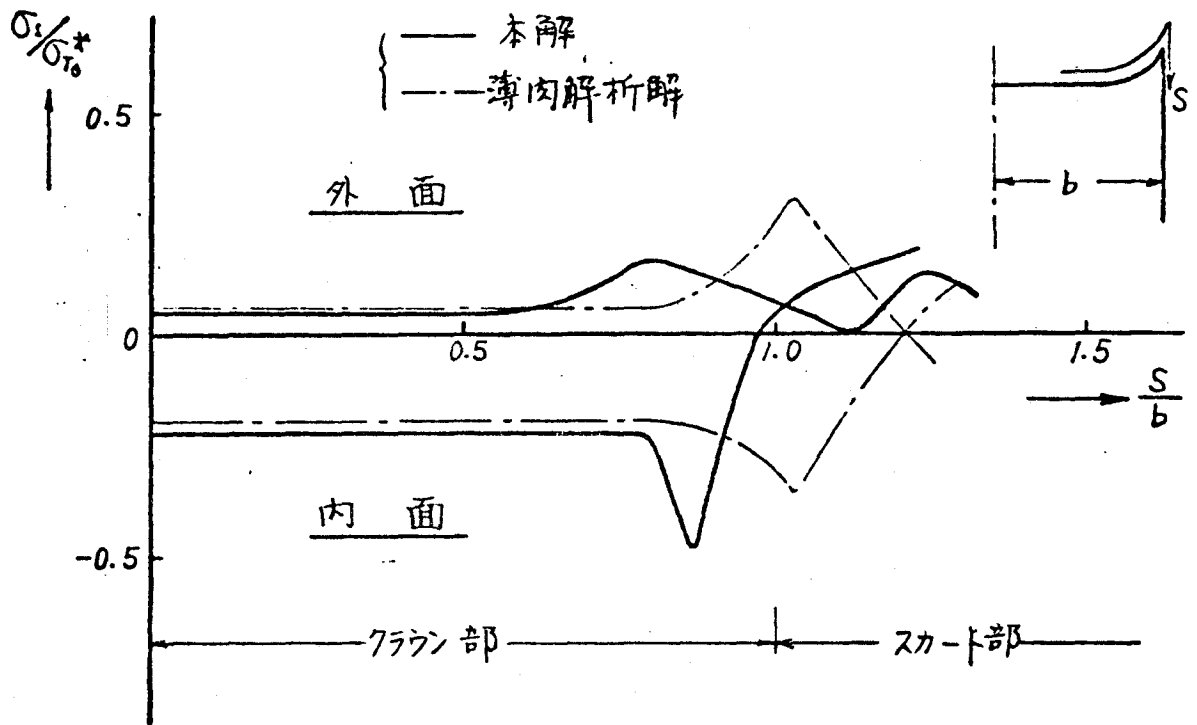


図 3.3.26 M 5 の熱伸び応力

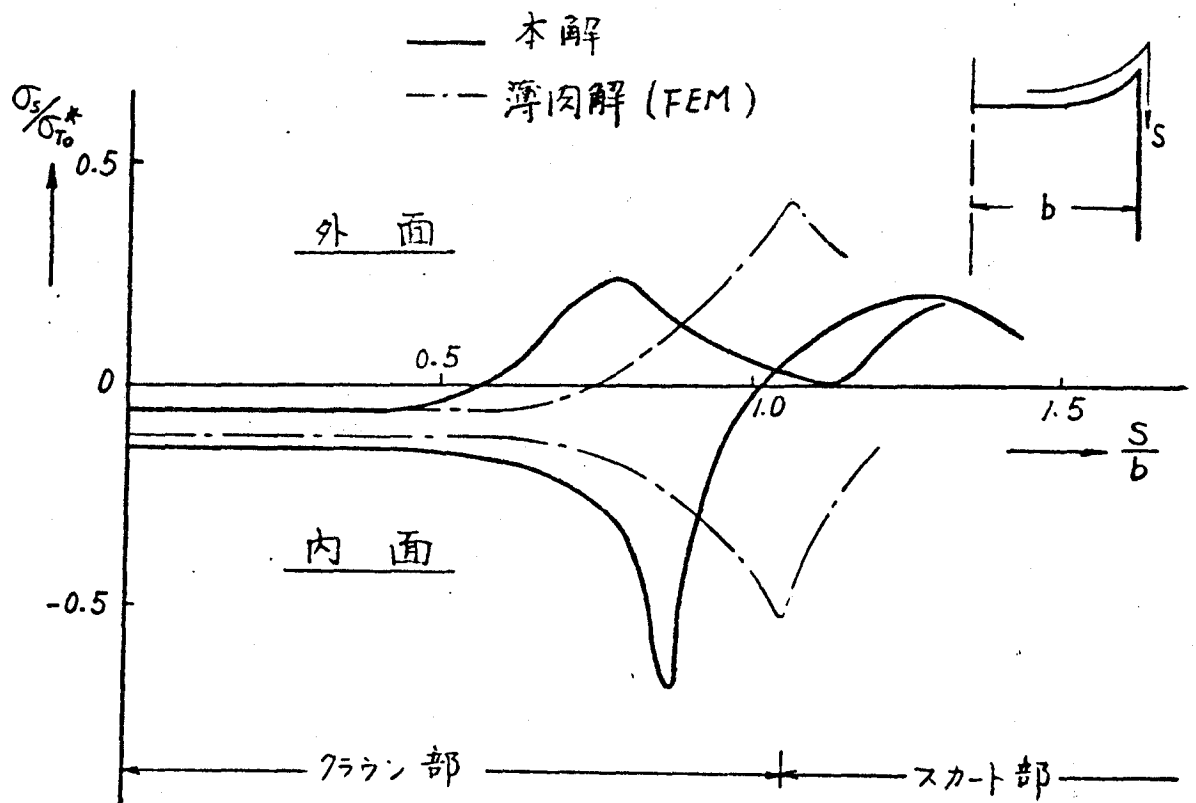


図 3.3.27 M 6 の熱伸び応力



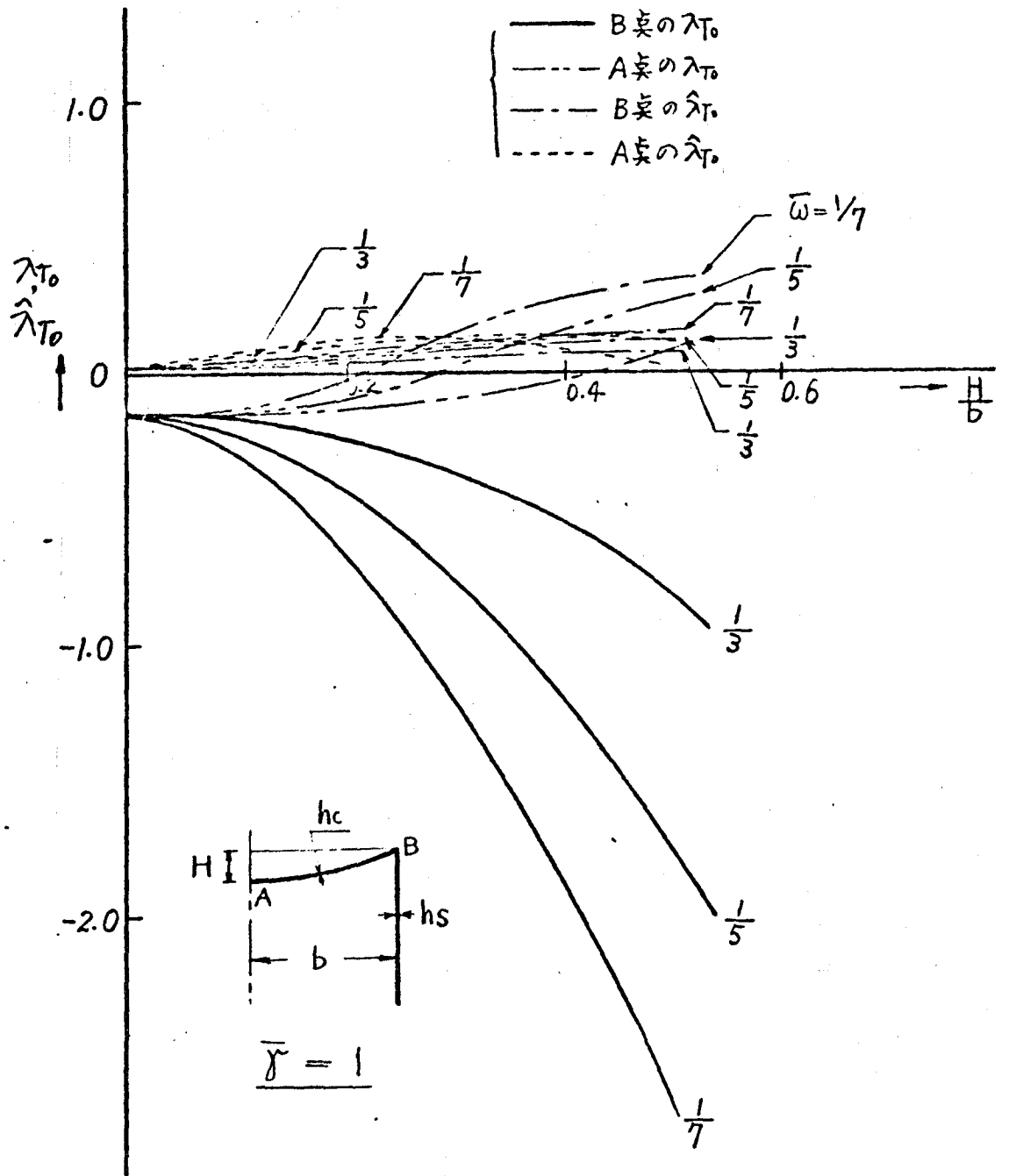


図 3. 3. 28 構造形状と主要点の熱伸び応力の関係 (様式(i)(ii))

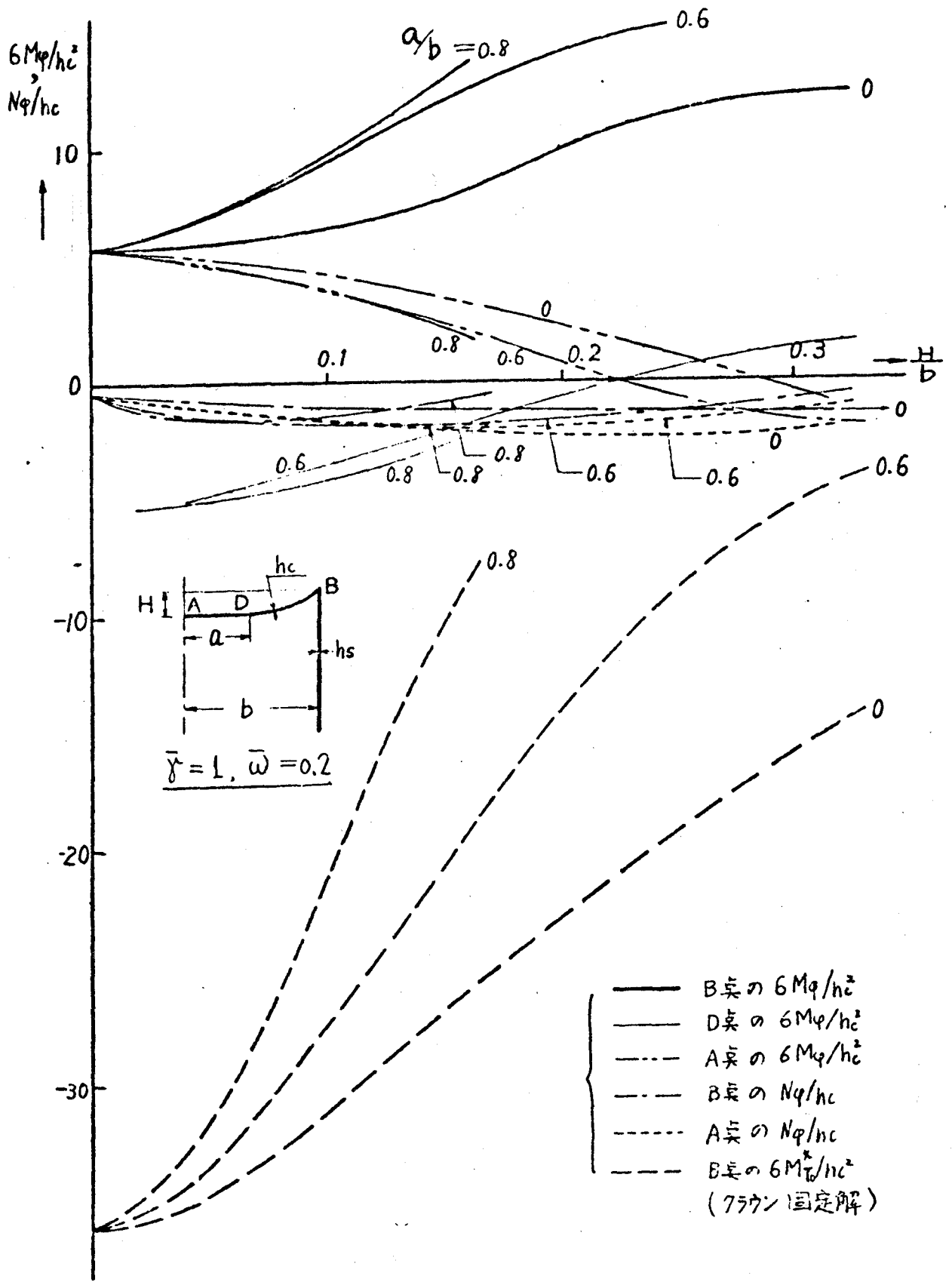


図 3. 3. 29 構造形状と主要点の熱伸び応力の関係 (様式 (Ⅲ))

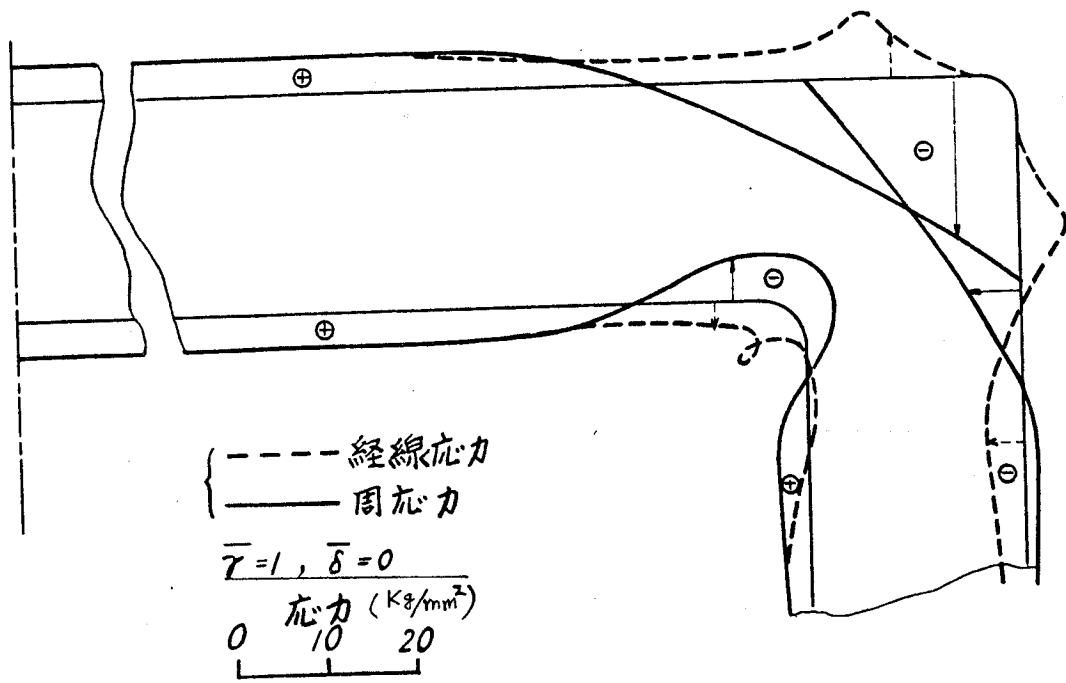


図 3. 3. 30 隅角部局部昇温による応力 (M1)

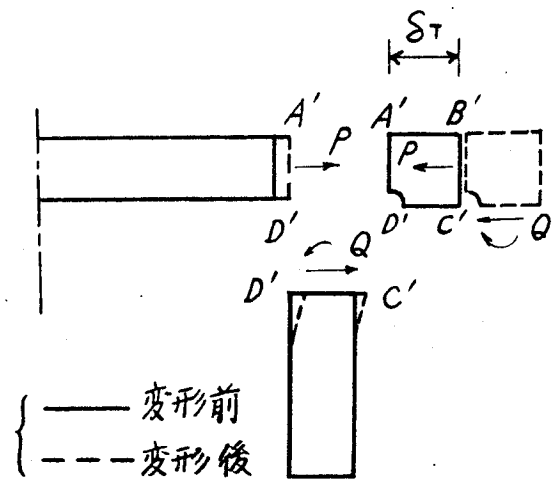


図 3. 3. 31 局部昇温で切口断面に作用する力

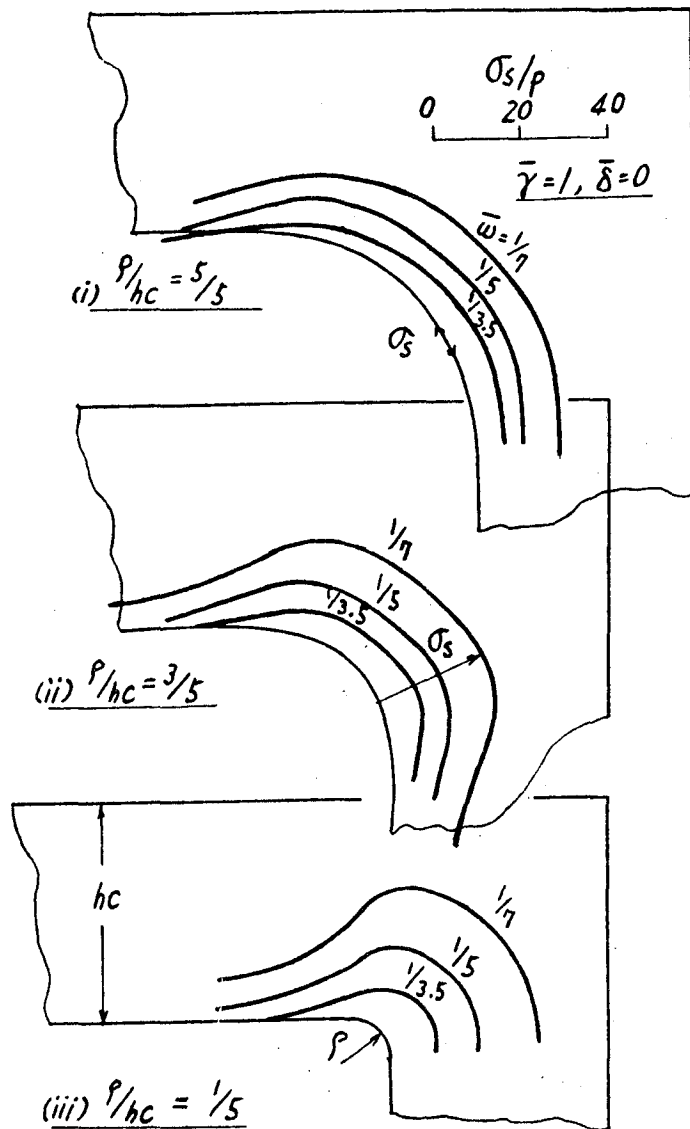


図 3. 3. 32 ガス圧荷重による隅角部の応力集中

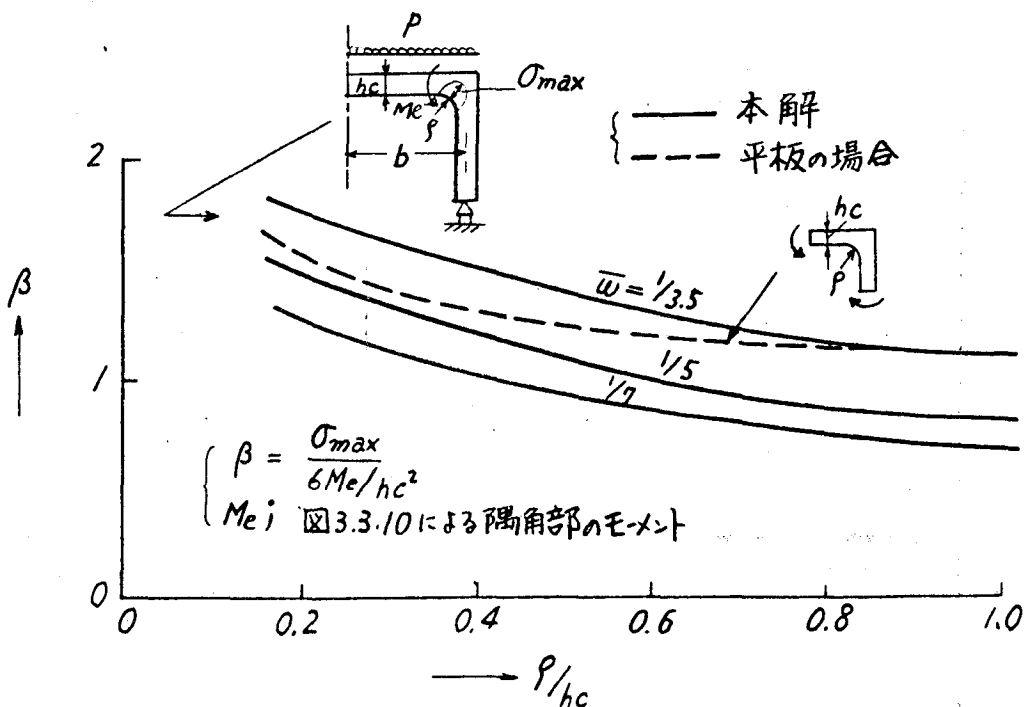


図 3. 3. 33 ガス圧荷重による隅角部の応力集中率

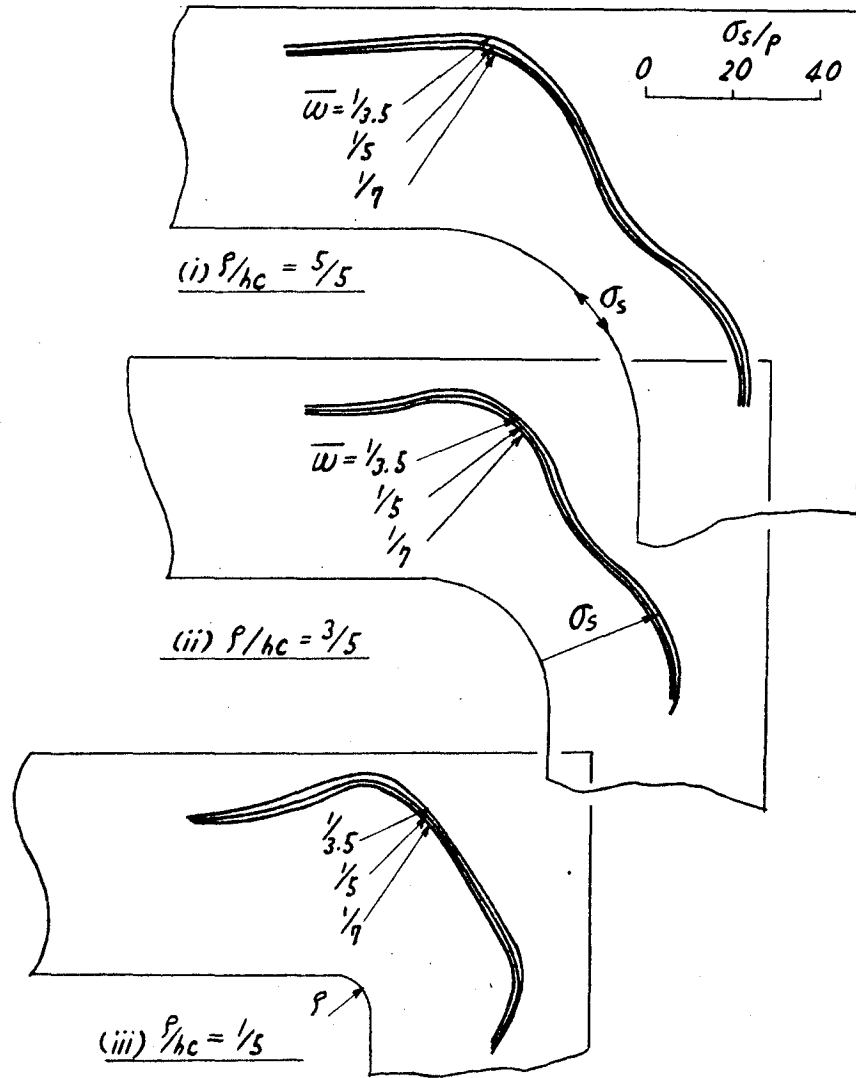


図 3. 3. 34 熱曲げによる隅角部の応力集中

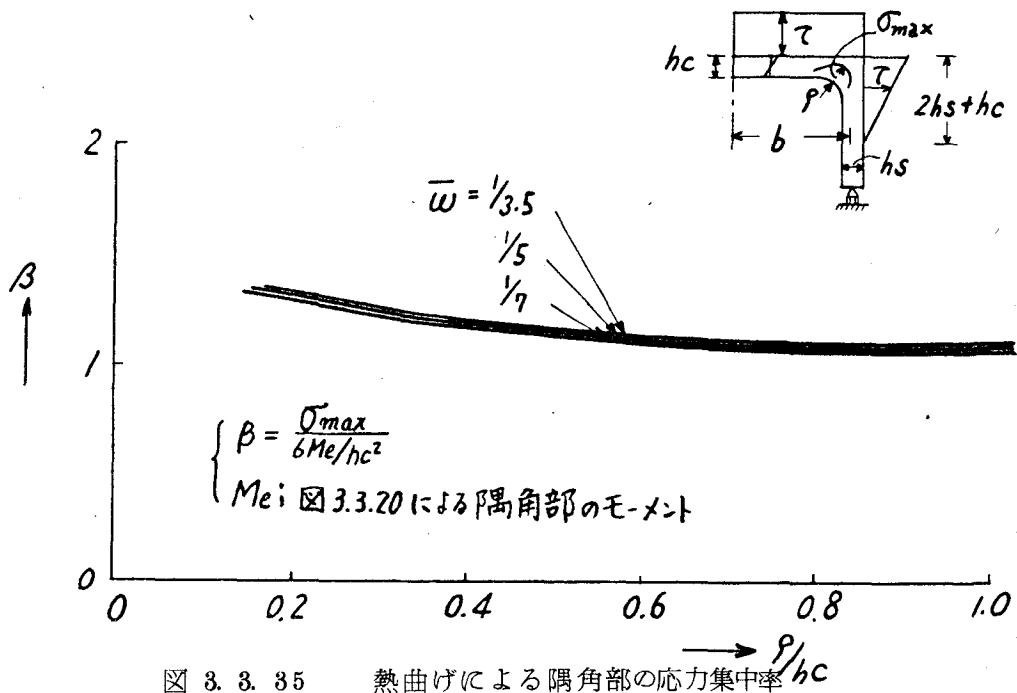


図 3. 3. 35 熱曲げによる隅角部の応力集中率  $P/hc$

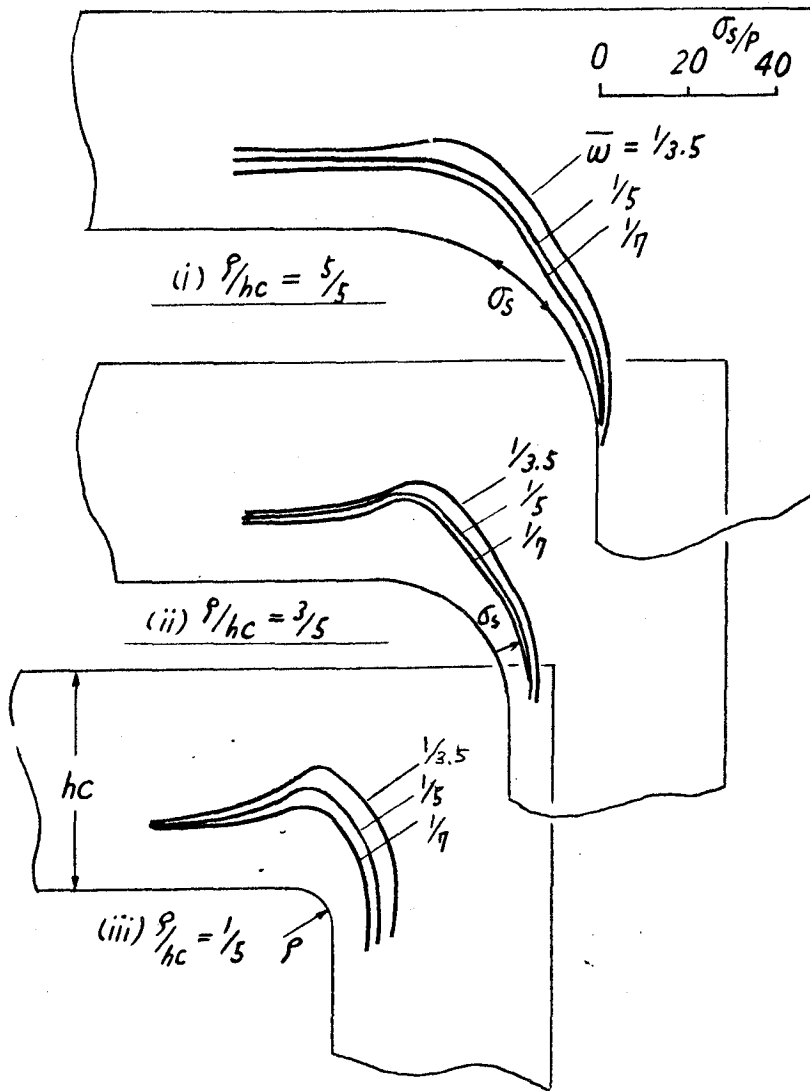


図 3. 3. 36 熱伸びによる隅角部の応力集中

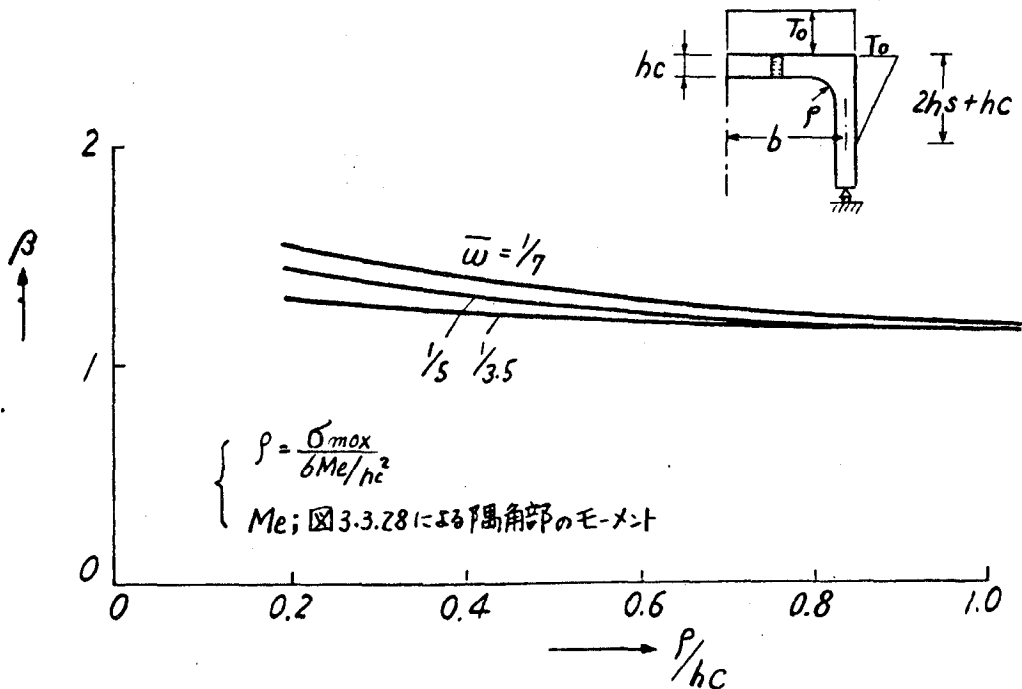


図 3. 3. 37 熱伸びによる隅角部の応力集中率

表 3. 4. 1 実験機関の主要目

要 目		A 型	B 型
シリンダ径 mm		520	520
行程 mm		900	900
出力・性能	出力 PS	4,500	5,700
	筒出力 PS/CYL	750	950
	回転数 R.P.M.	190	205
	爆発圧力 kg/cm <sup>2</sup>	72	80
	正味平均有効圧 kg/cm <sup>2</sup>	9.3	10.9
平均ピストン速度 m/s		5.70	6.15
寸法重量	全 長 mm	7,290	7,320
	全 高 mm	5,733	5,530
	重 量 ton	118	120
	馬力あたり重量 kg/PS	26.2	21.1

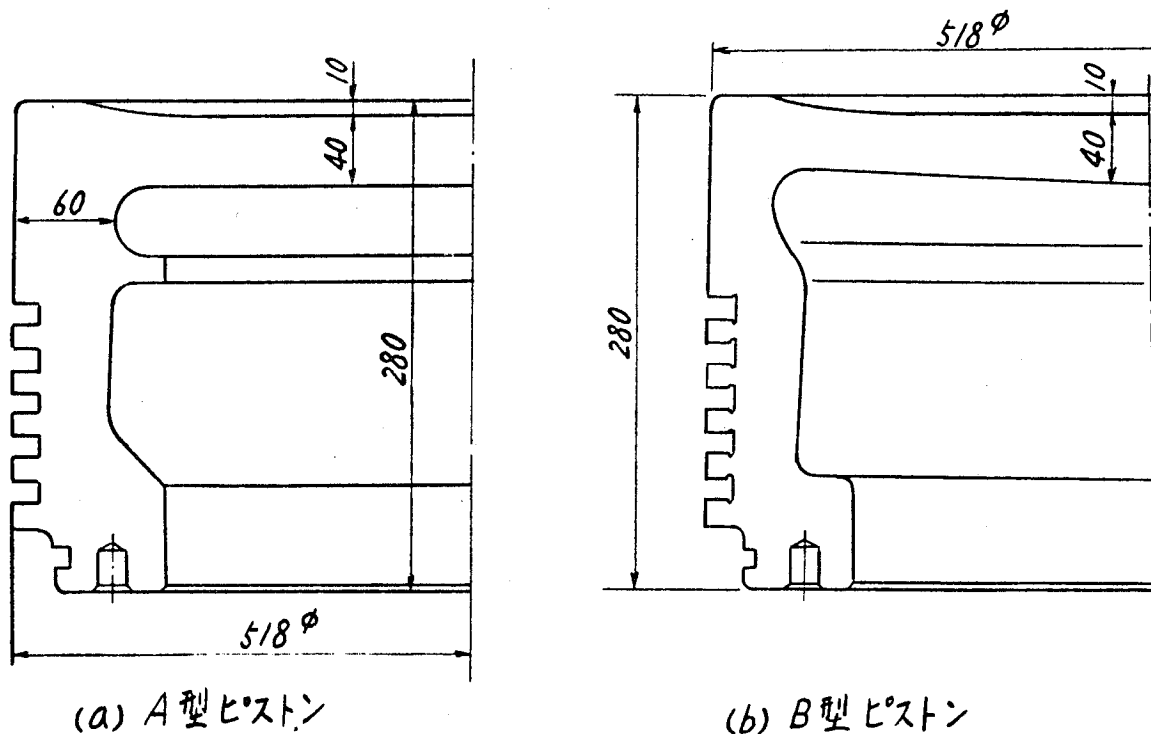


図 3. 4. 1 ピストンの供試体

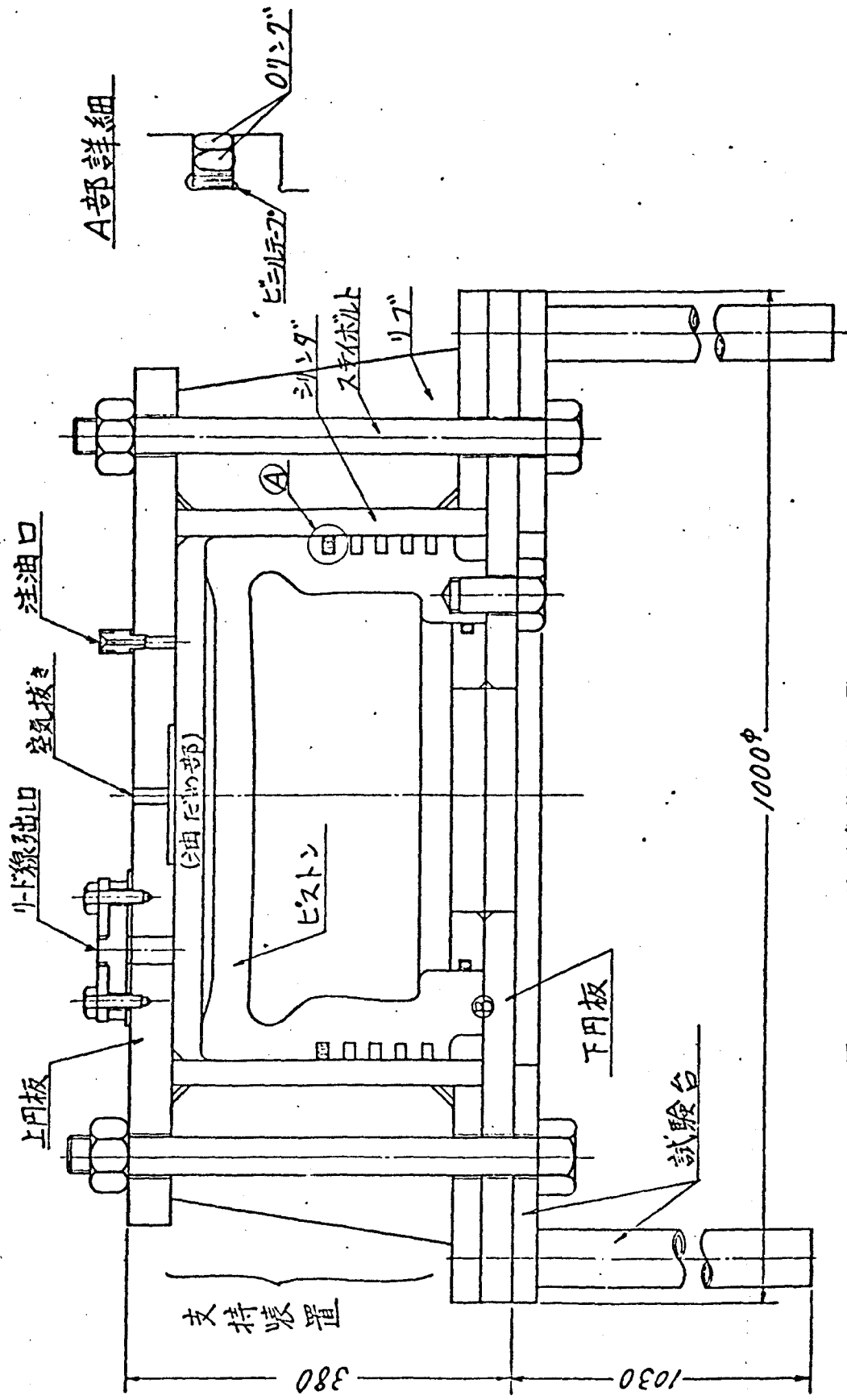
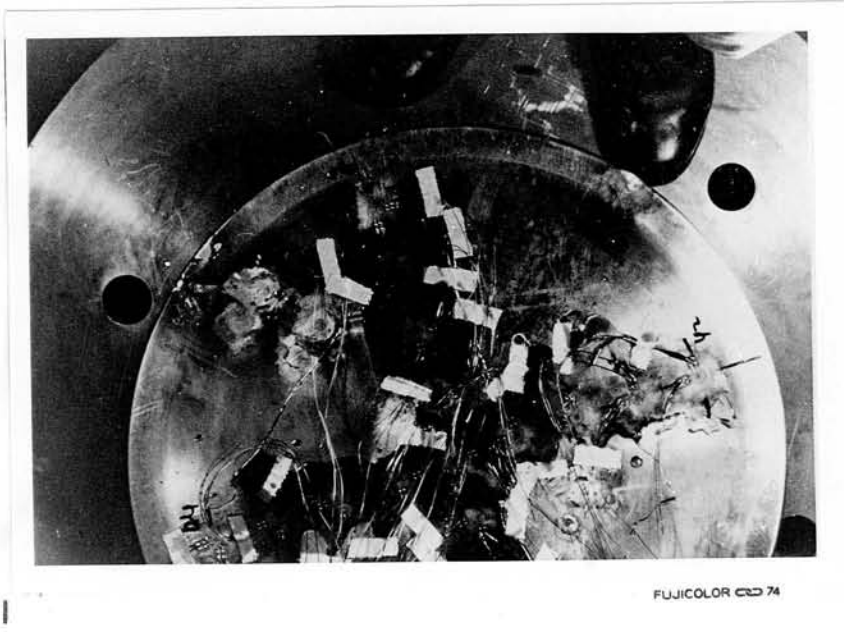
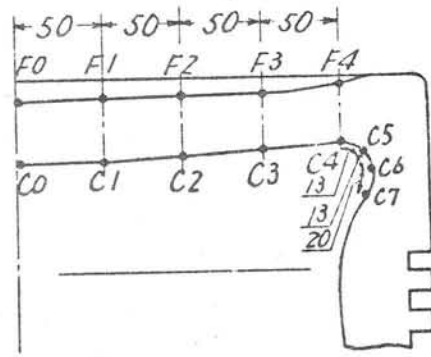


図 3. 4. 2 油圧負荷試験装置





(a) 概観



(b) 歪計測付位置

図 3. 4. 3 計測位置

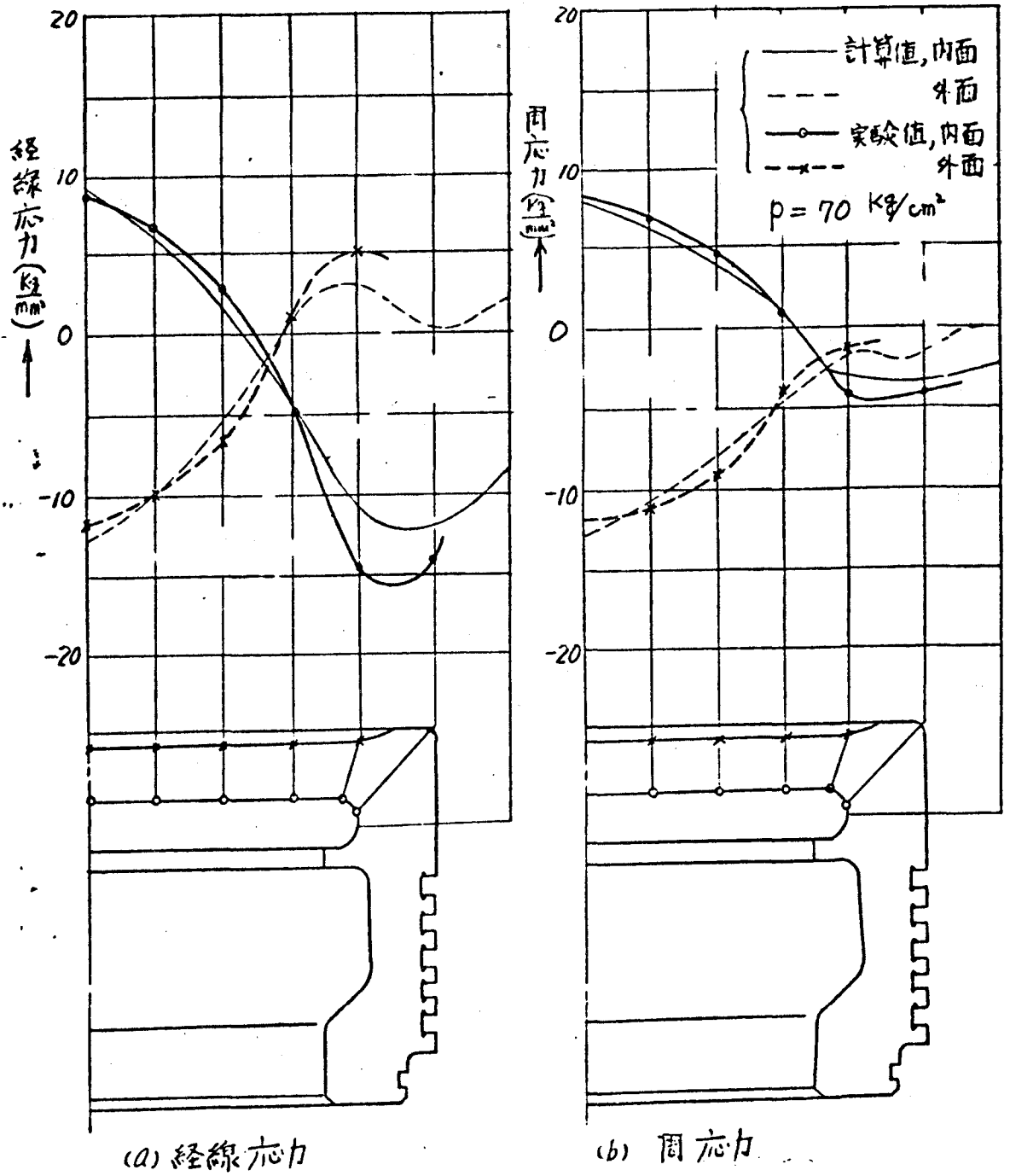


図 3. 4. 4 A 型ピストンのガス圧応力

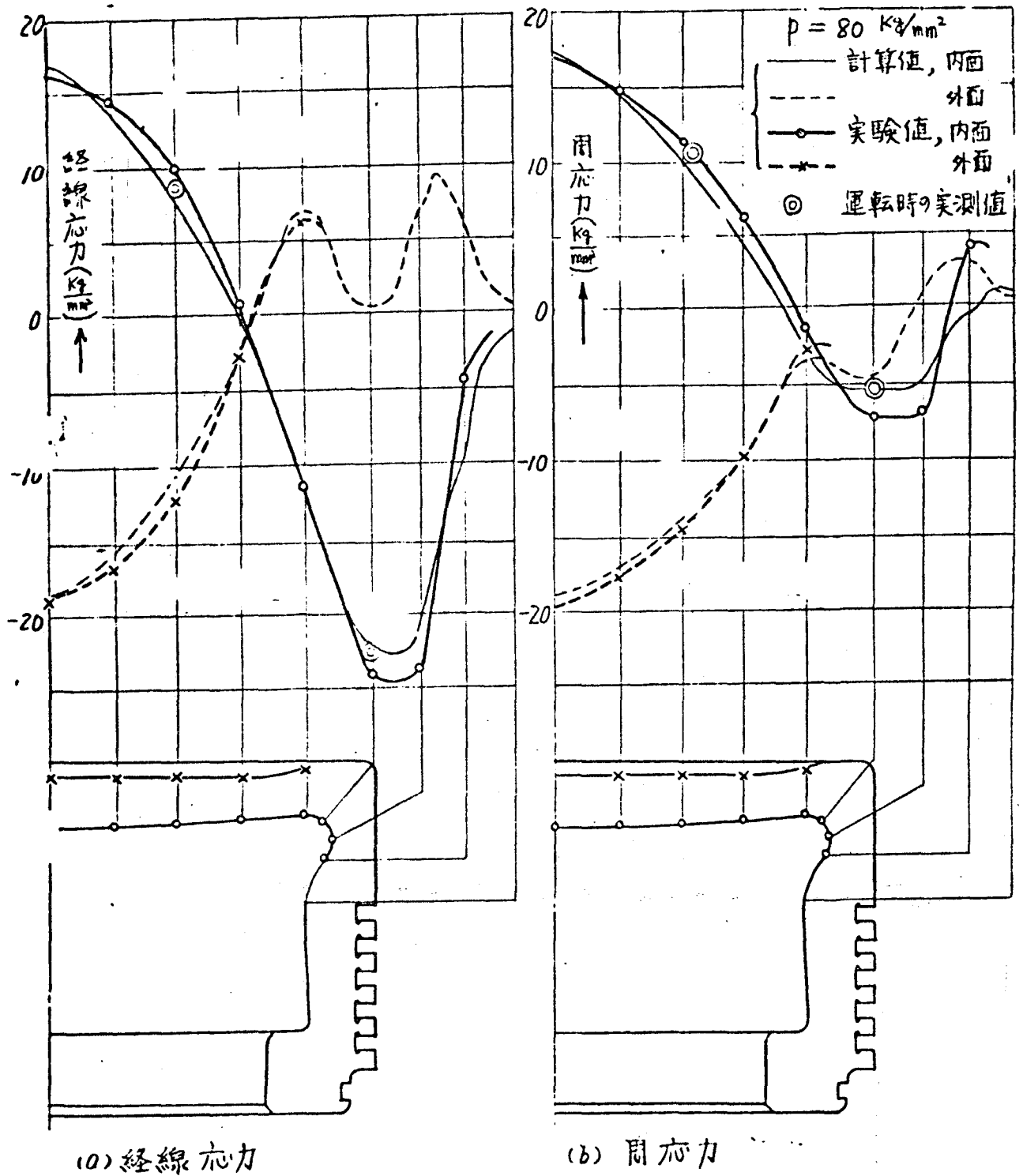


図 3. 4. 5 B型ピストンのガス圧応力

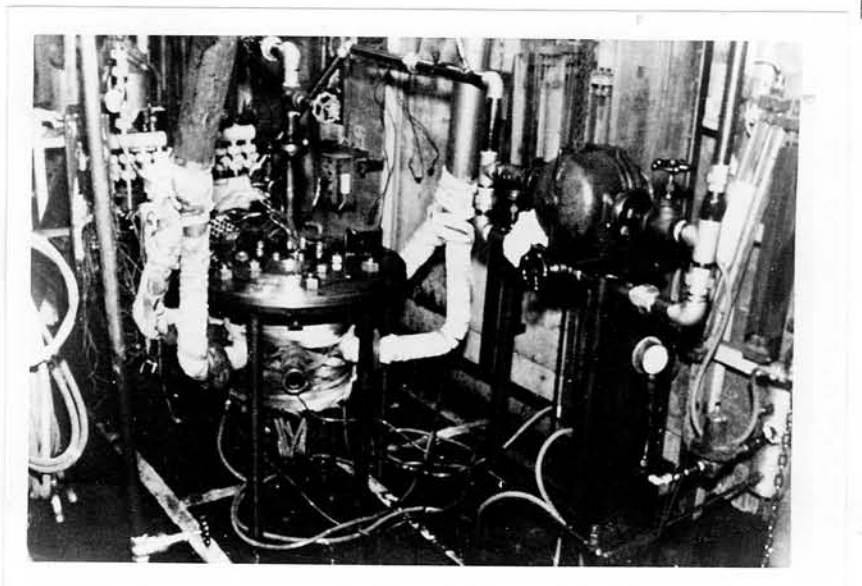
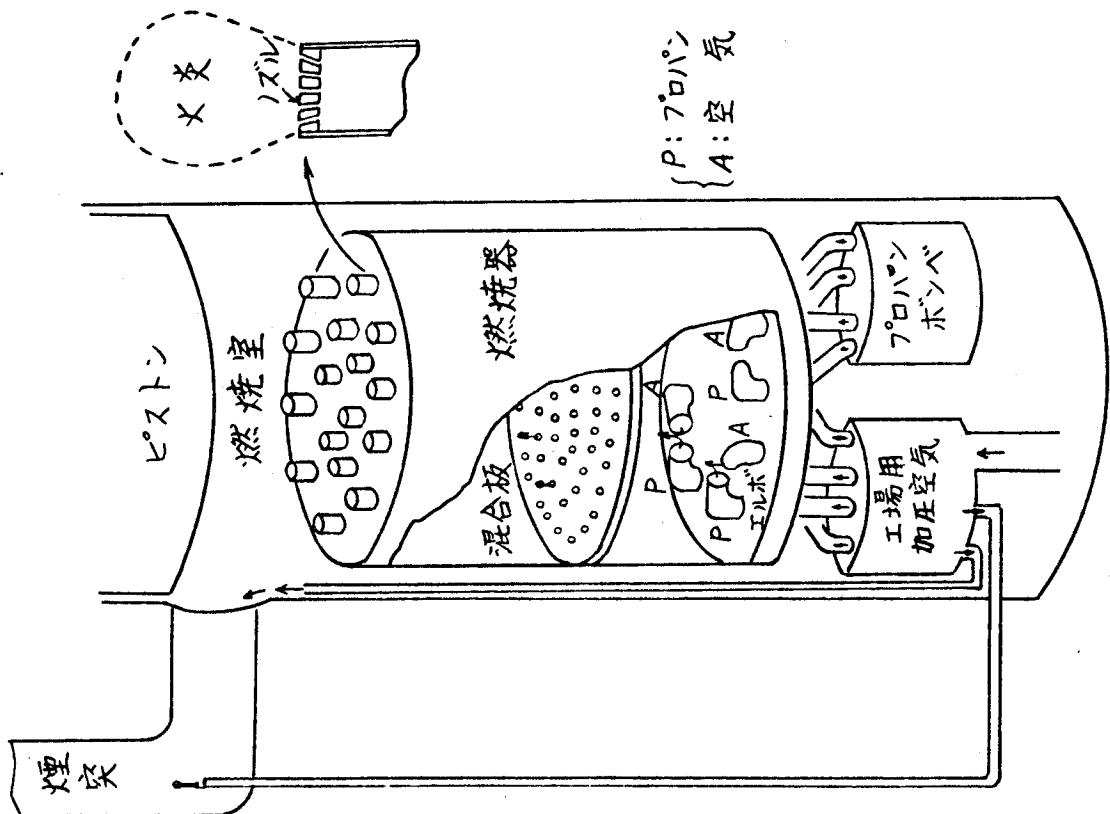
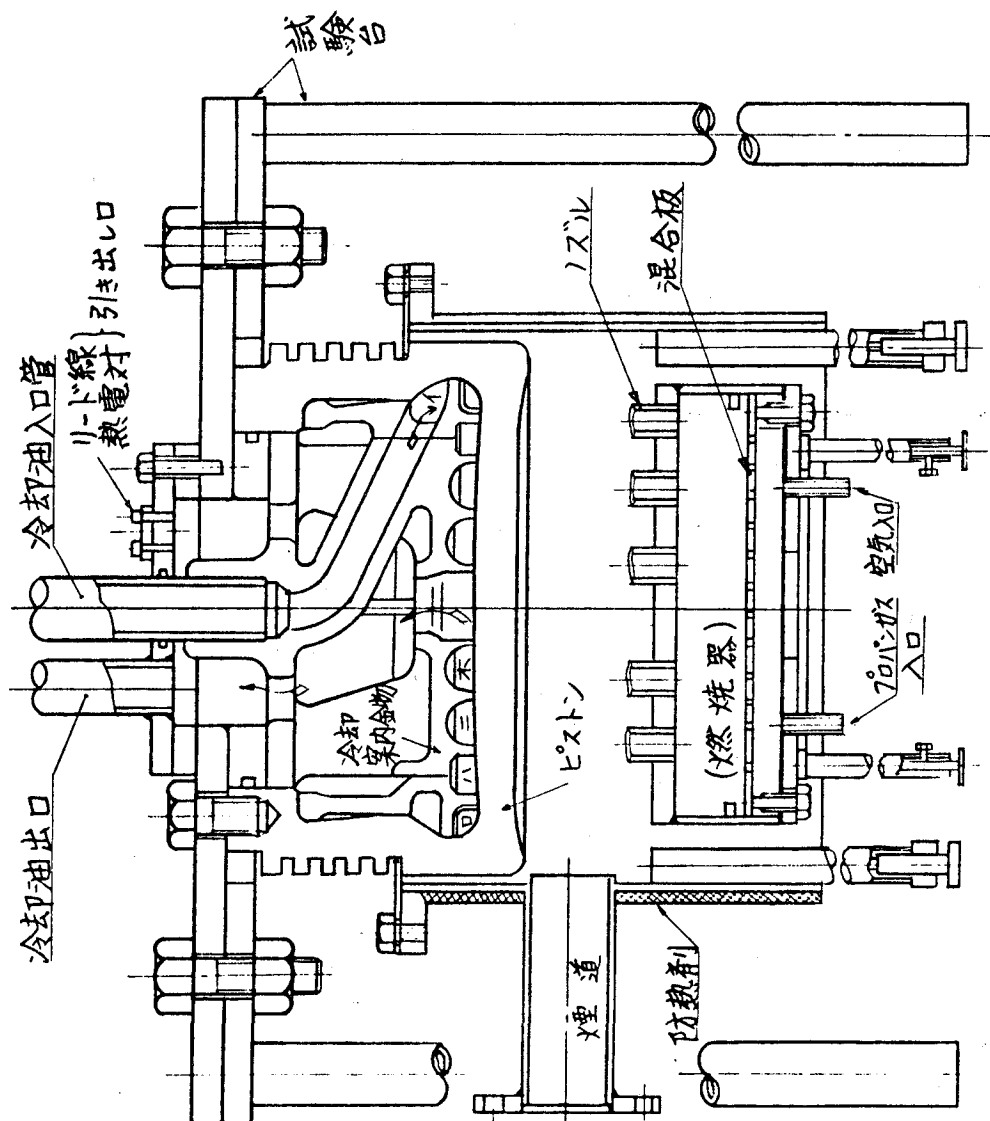


図 3. 4. 6 熱応力実験装置概観



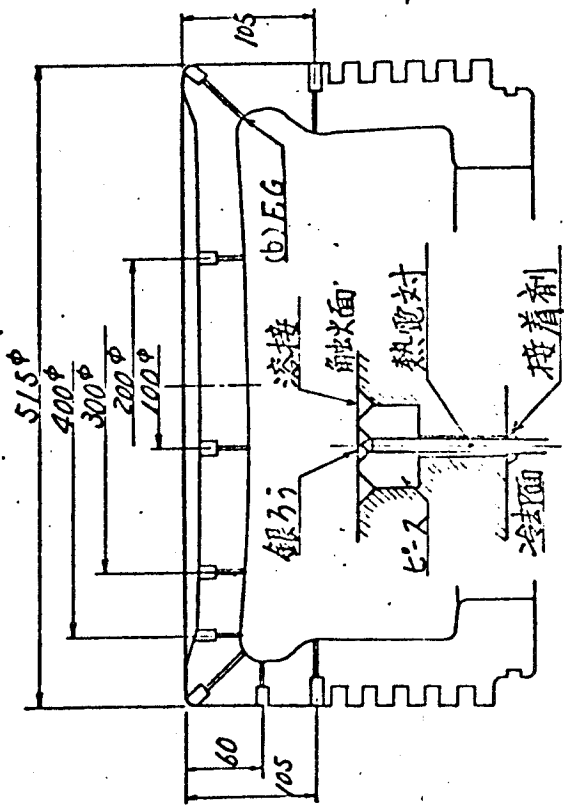
(b) 燃焼器詳細



(a) 実験装置

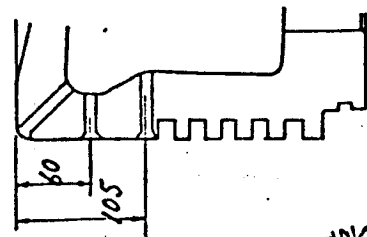
図 8. 4. 7 熱応力実験装置詳細

(a) 断面HH

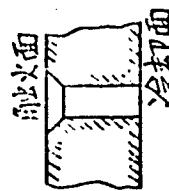


(a) 加熱側計測点

(d) 断面OE



(c) A, B, C, D



(b) 冷却側計測点

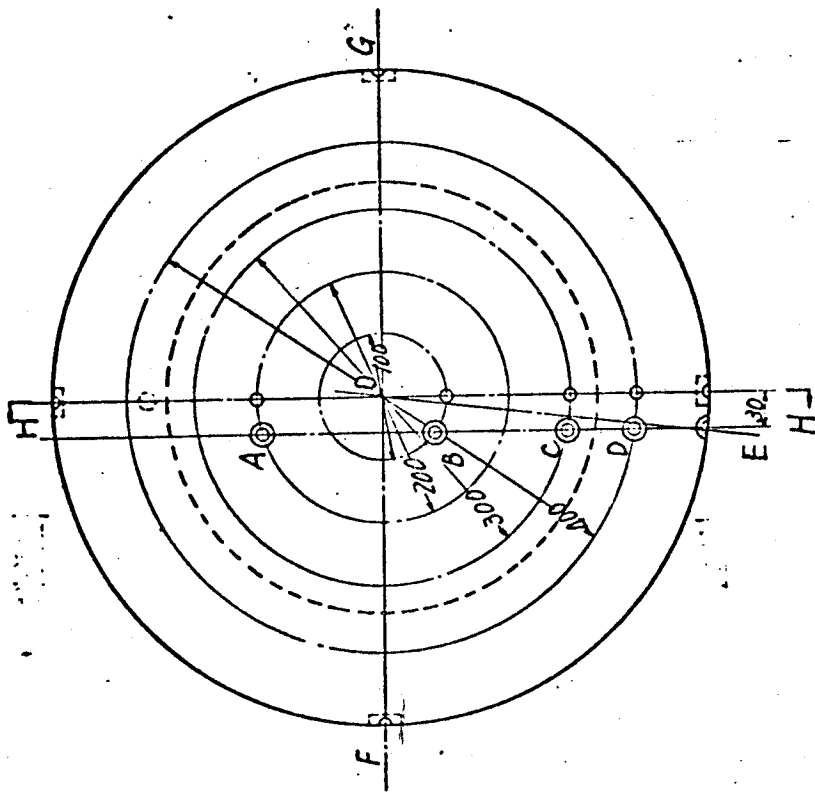


図 3. 4. 8 温度計測点の配置

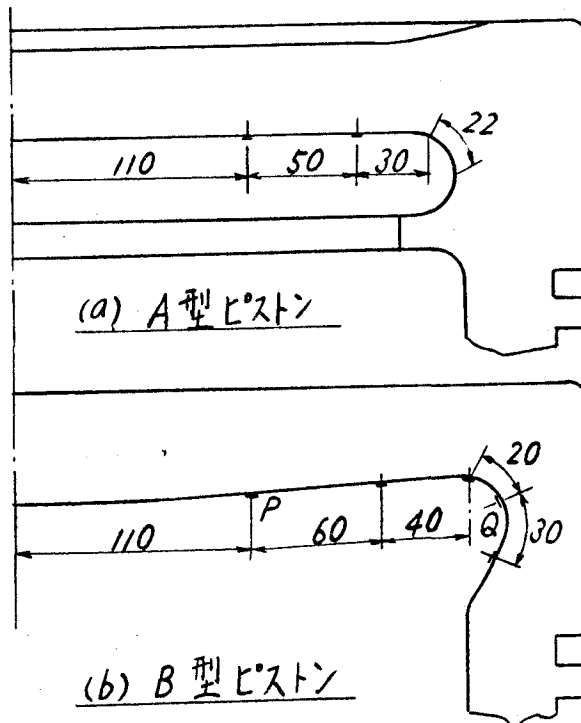


図 3. 4. 9 高温歪計のはり付け位置

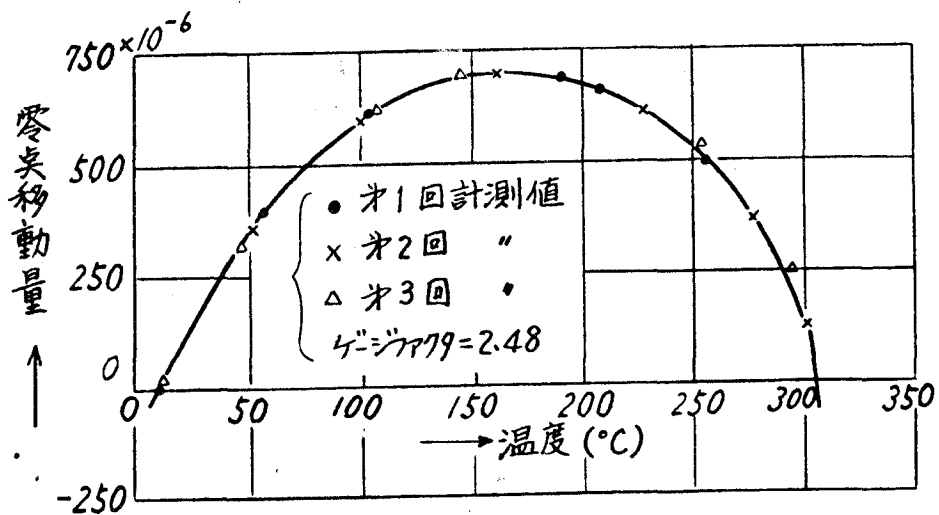
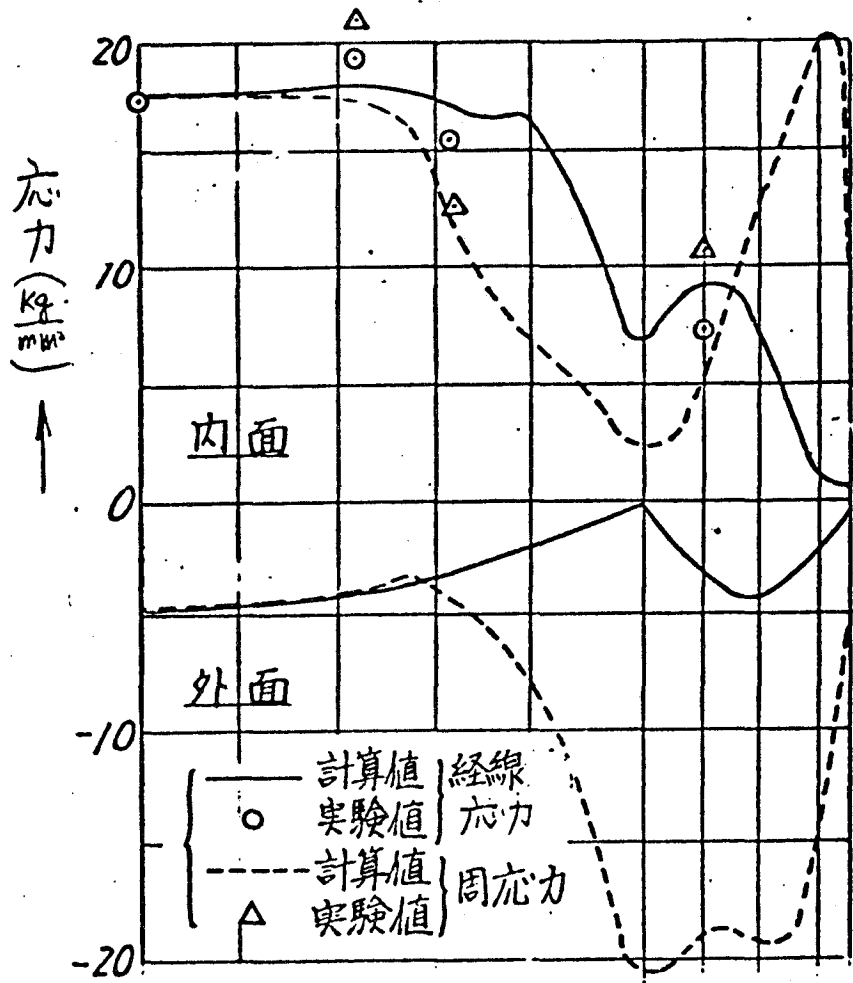
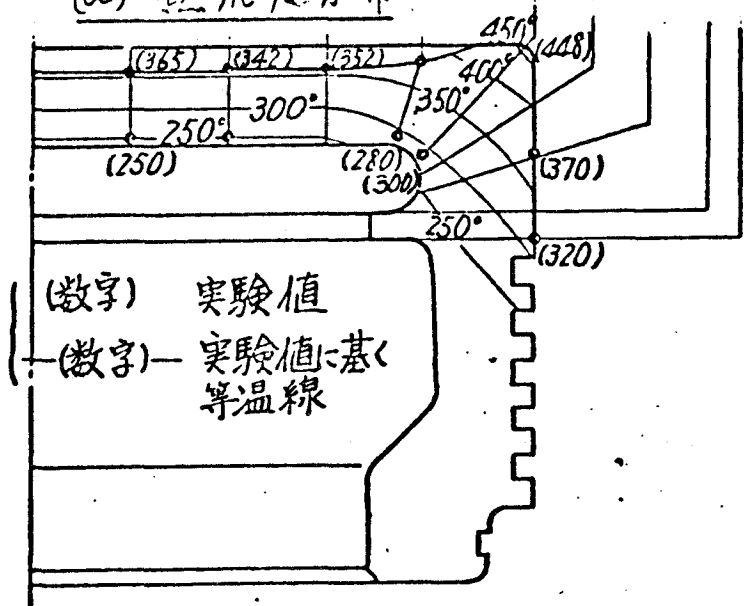


図 3. 4. 10 高温歪計の零点移動曲線



(a) 熱応力分布



(b) 温度分布

図 3. 4. 1 1 A 型ピストンの温度と熱応力



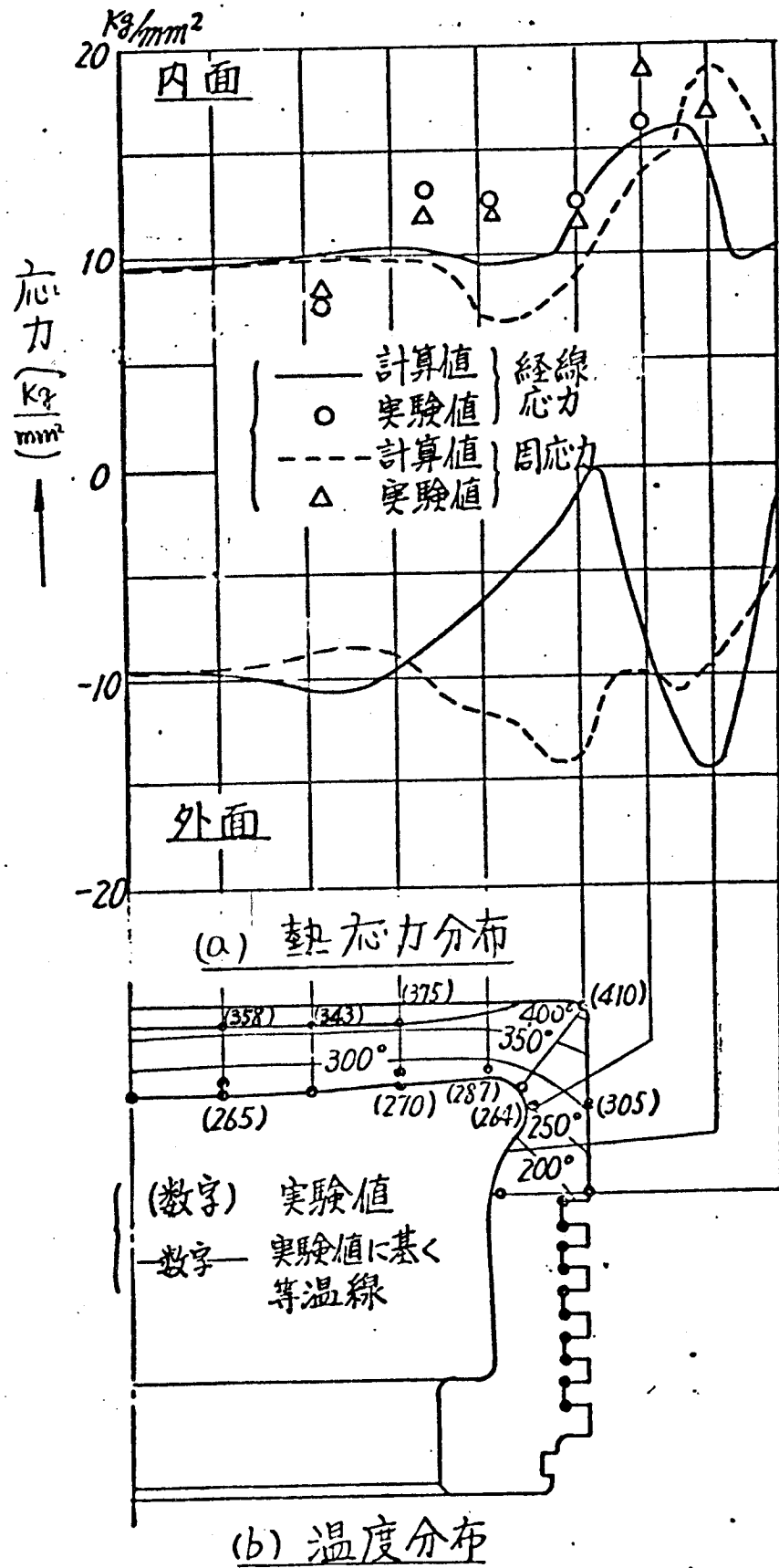


図 3. 4. 12 B 型ピストンの温度と熱応力

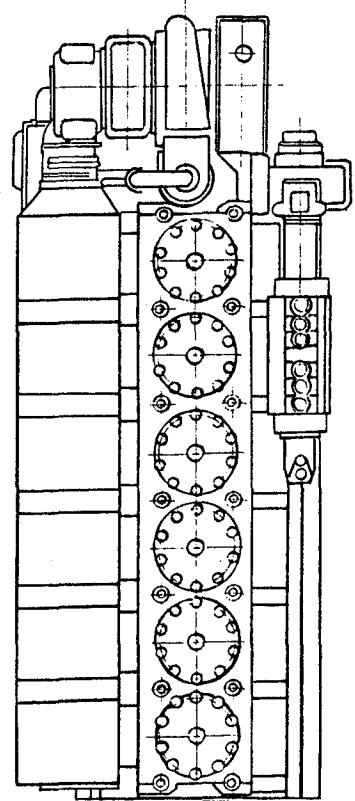
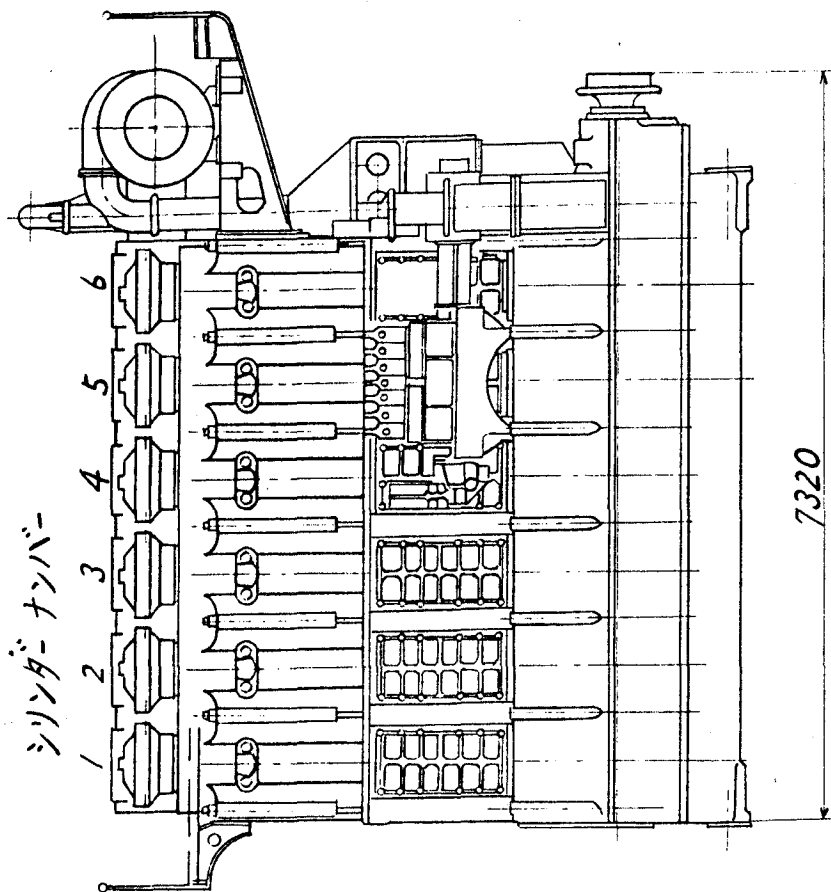
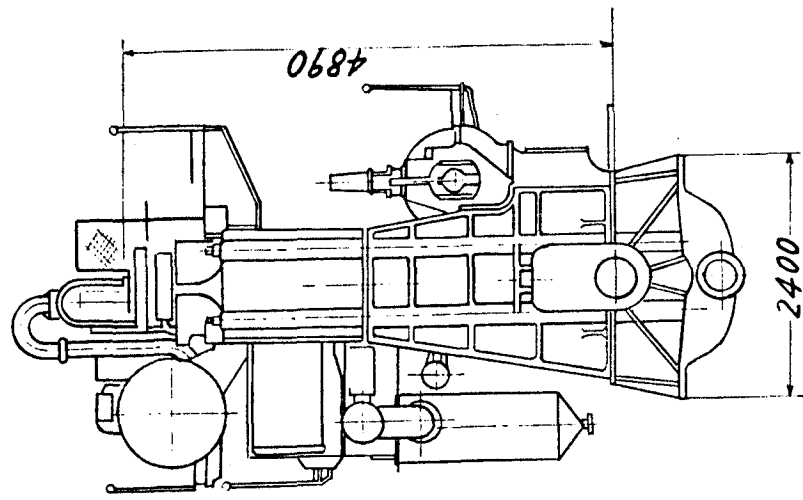


図 8.4.13 B 型用機関外観図

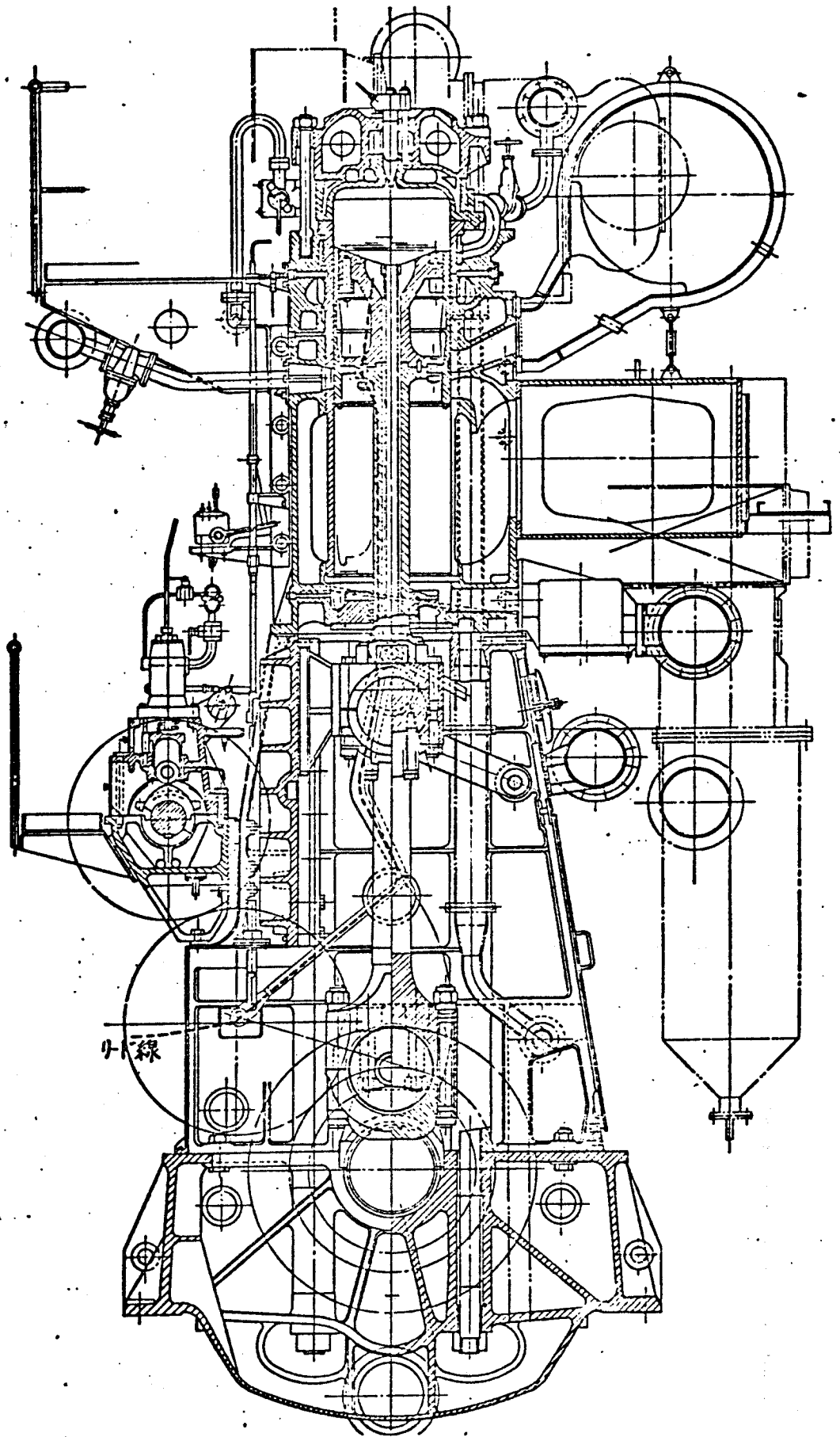
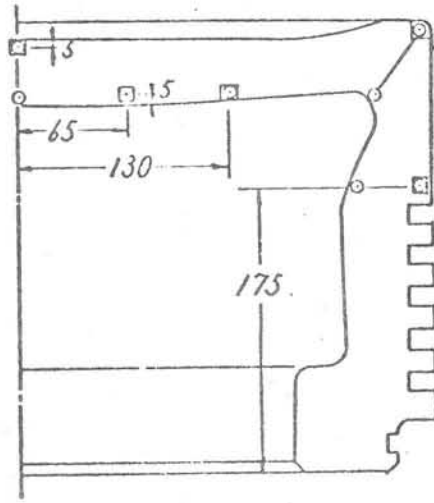


図 3. 4. 14 B 型用機関の横断面図



○ NO.5 ピストン  
 □ NO.6 ピストン

図 3. 4. 15 テンブラグの埋込み位置

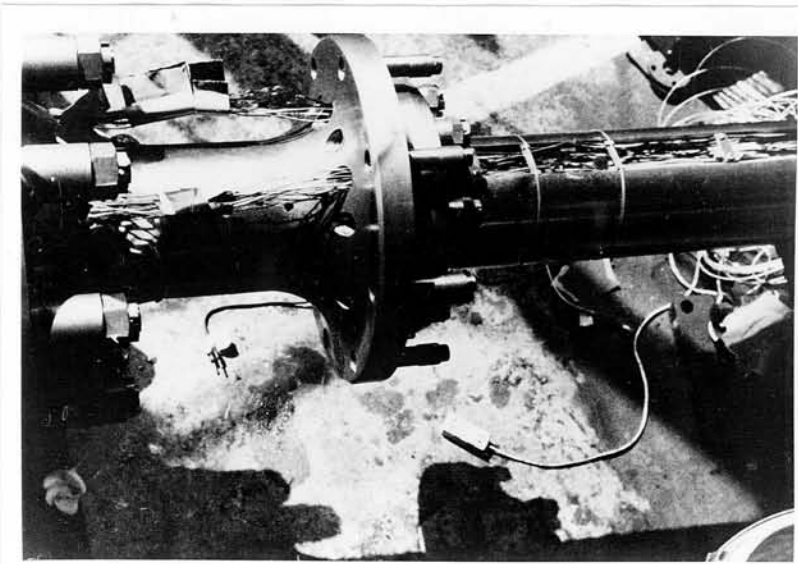
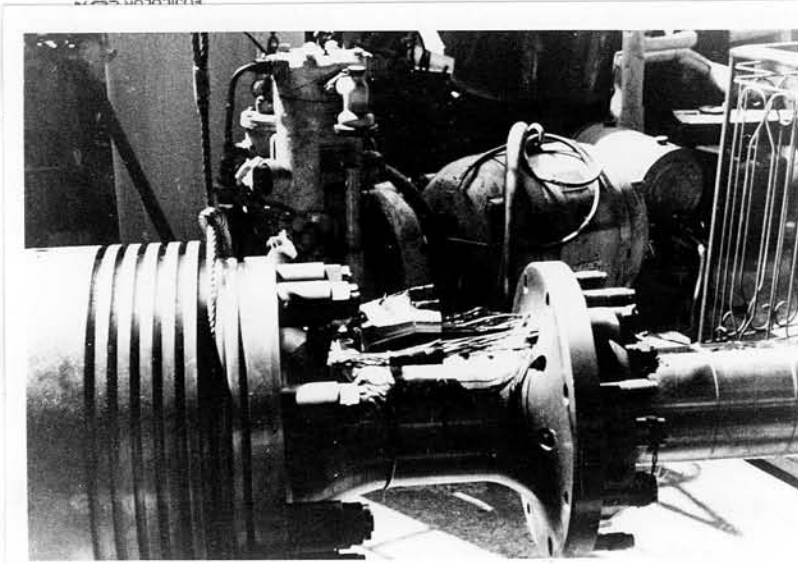


図 3. 4. 16 リード線および熱電対の取出し状況

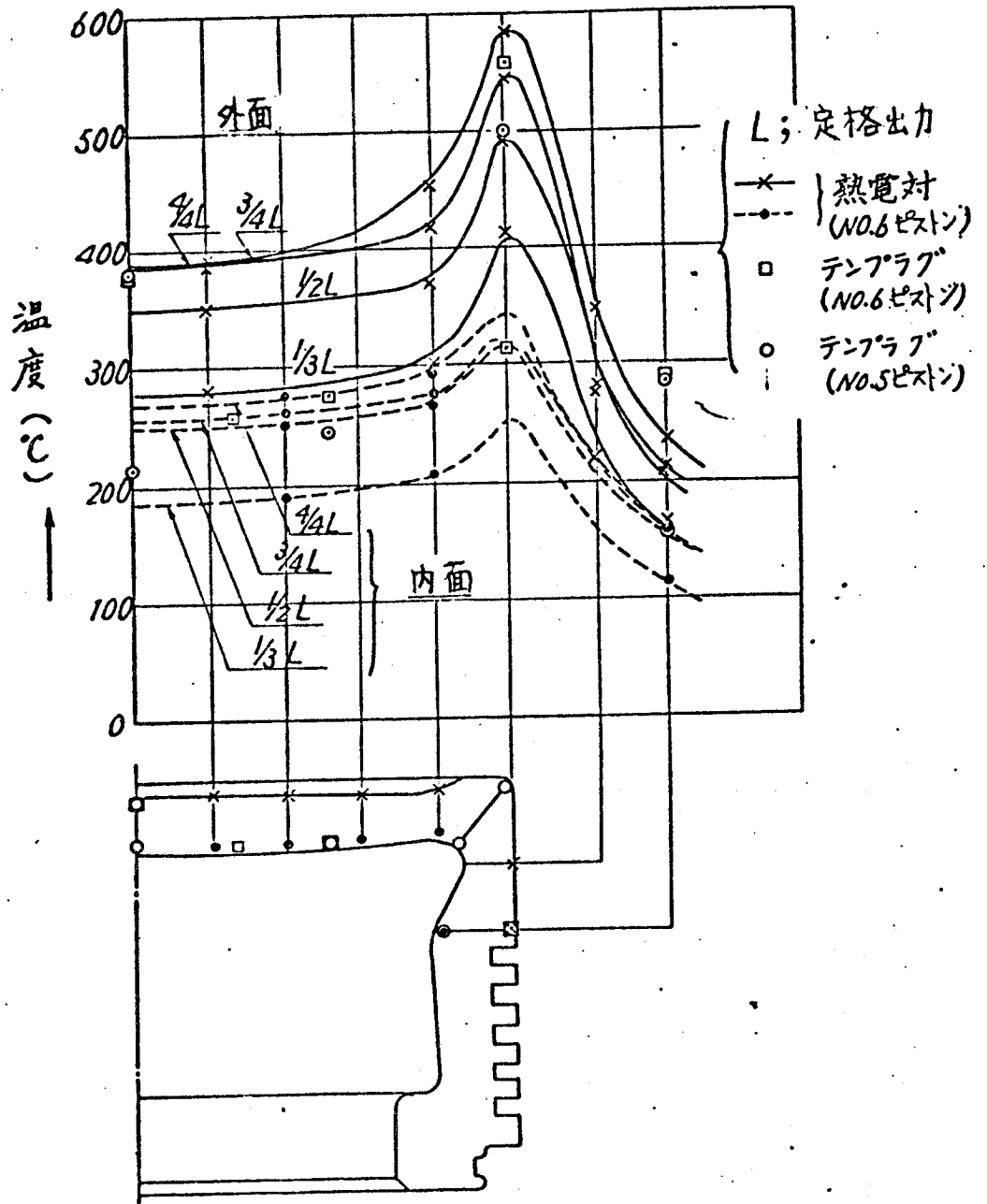


図 3. 4. 17 機関の出力による温度分布の変化

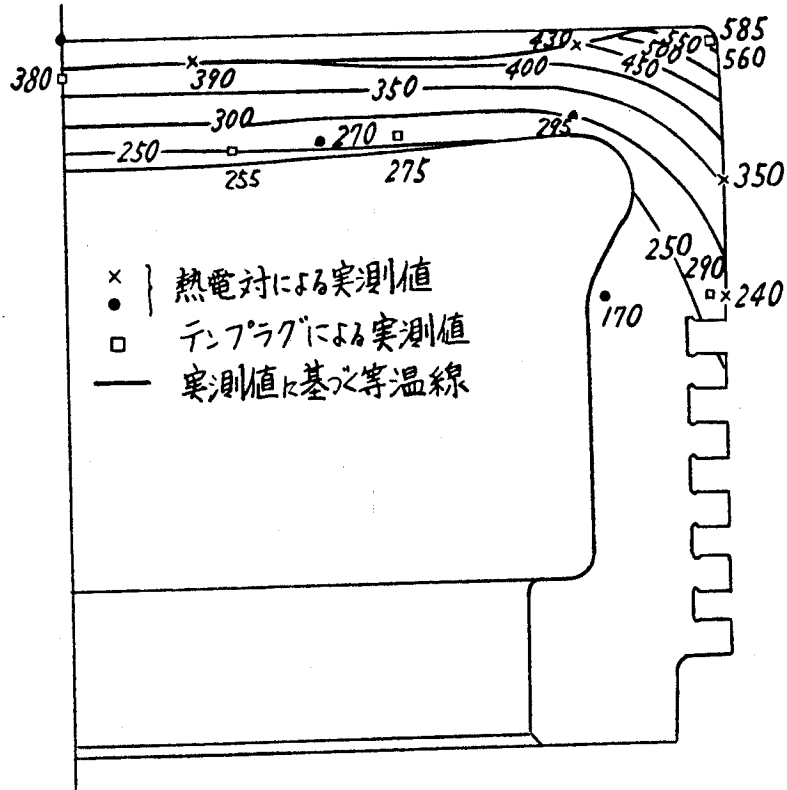


図 3. 4. 18 最大出力時のピストンの温度分布 (№ 6 ピストン)

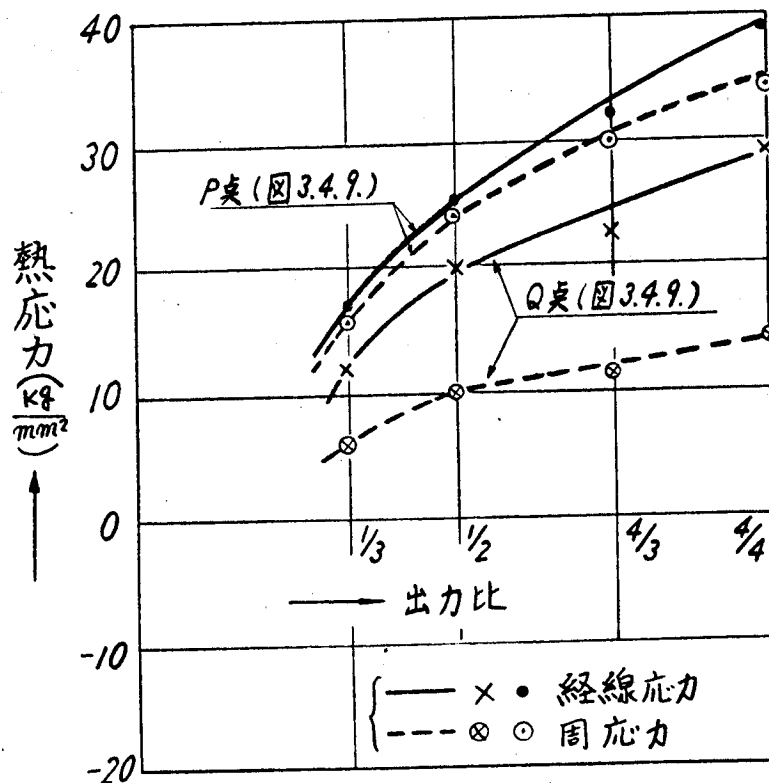


図 3. 4. 19 機関出力の変化による熱応力の変化

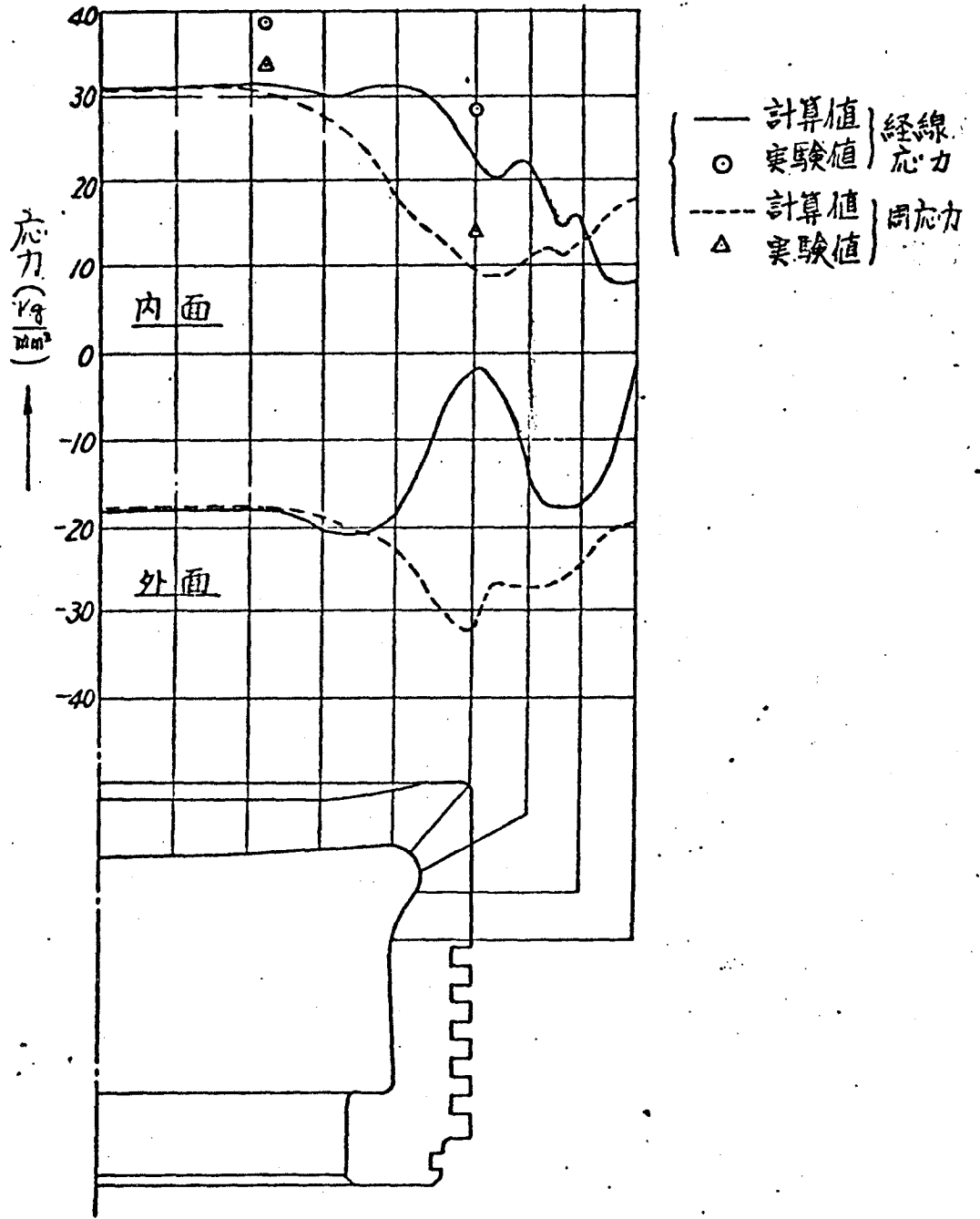


図 3. 4. 20 最高出力運転中の熱応力

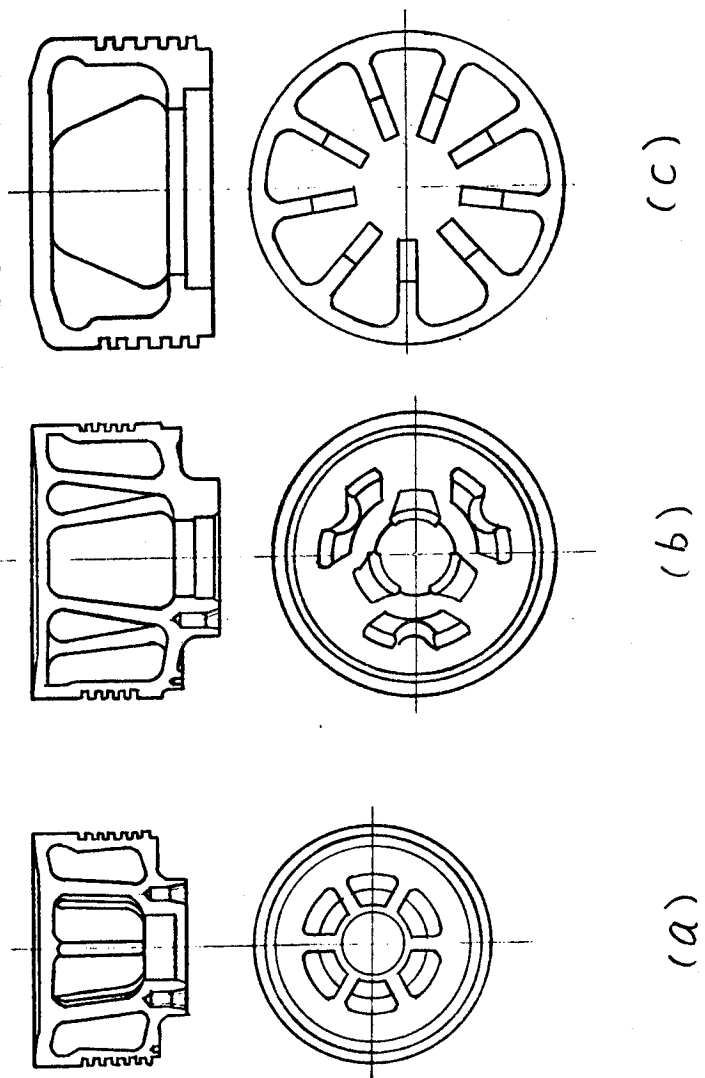
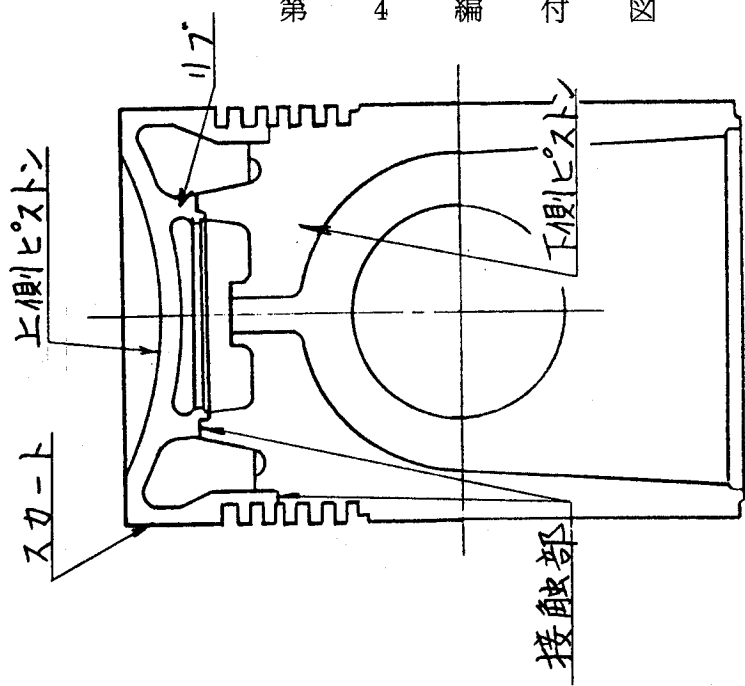


図 4.1.2 分割型ピストンの例

図 4.1.1 リップ付ピストンの構造様式



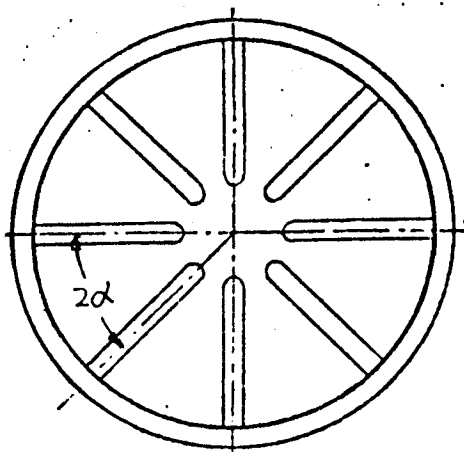
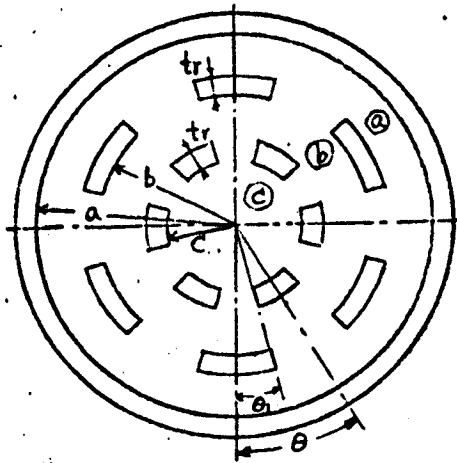
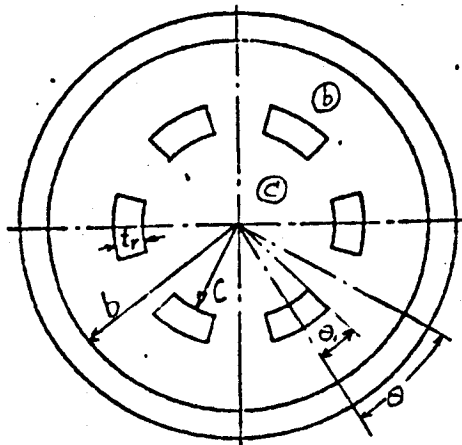


図 4. 2. 1 リブ付ピストンの計算模型

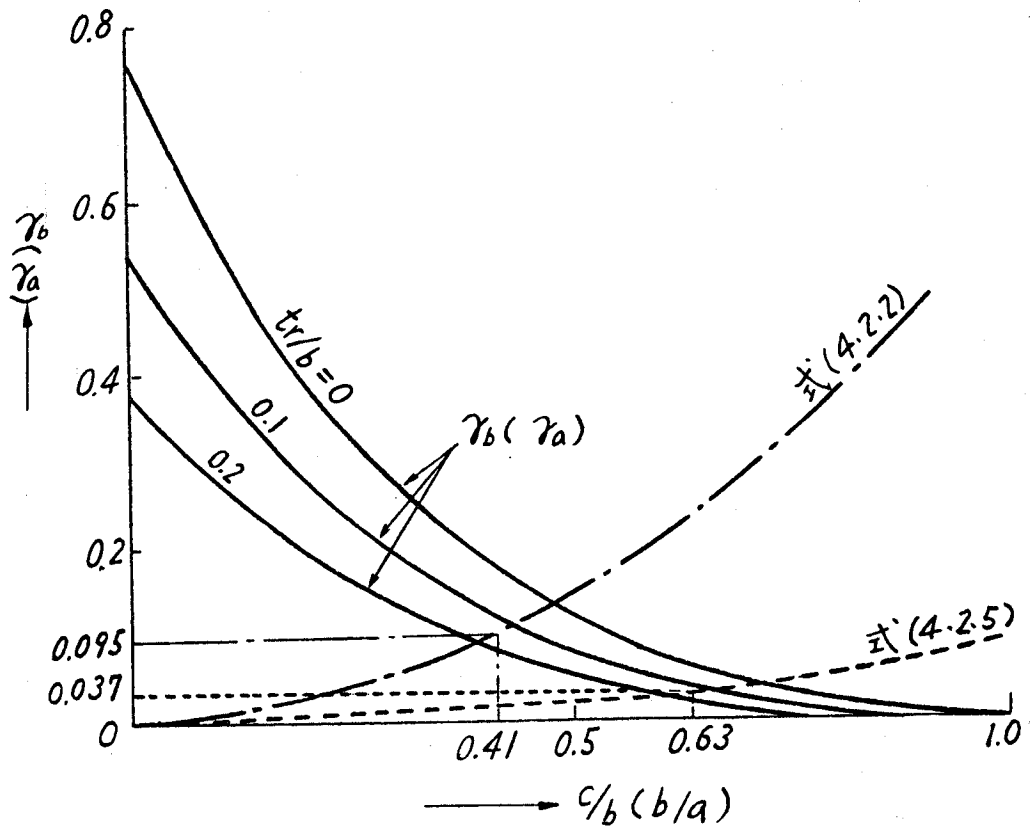


図 4.2.2  $\gamma_b \sim c/b$  と  $\gamma_a \sim b/a$  の関係

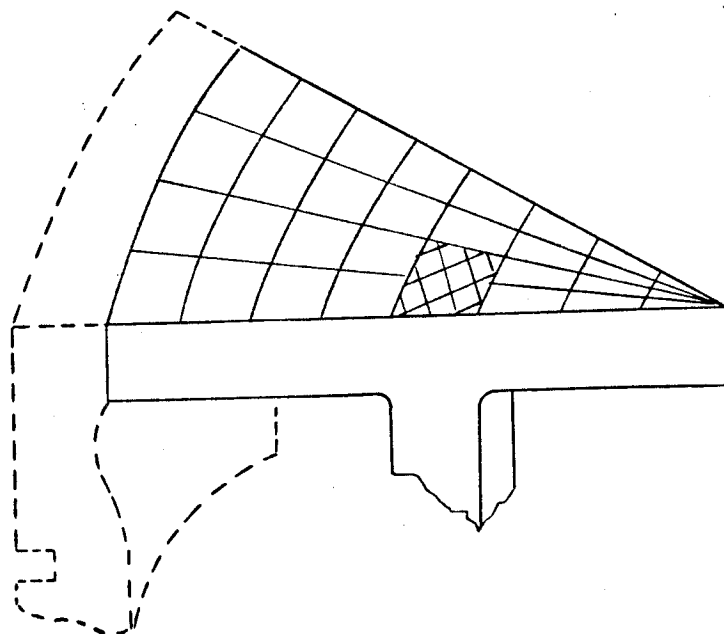


図 4.2.3 要素分割

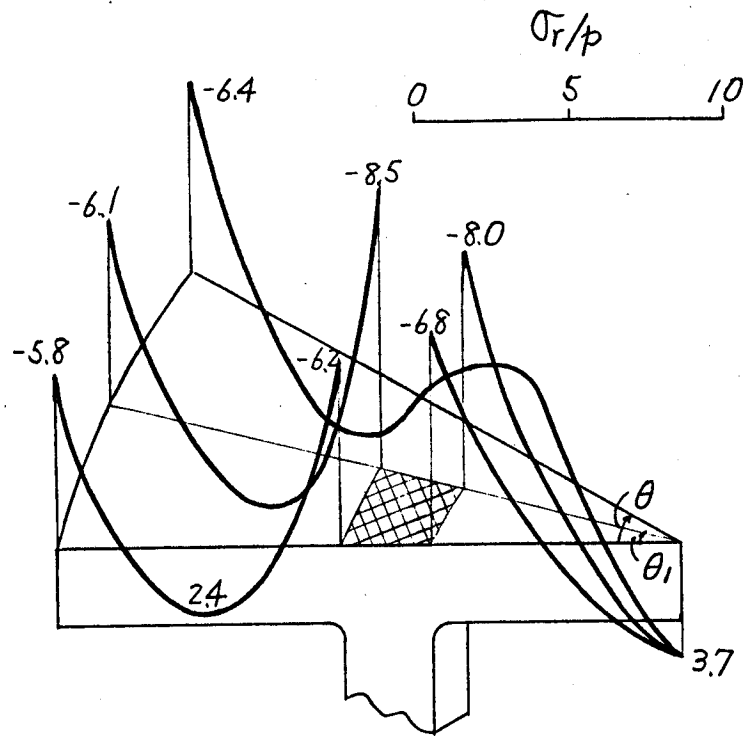


図 4. 2. 4 一円周リブ型の半径応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/2$ )

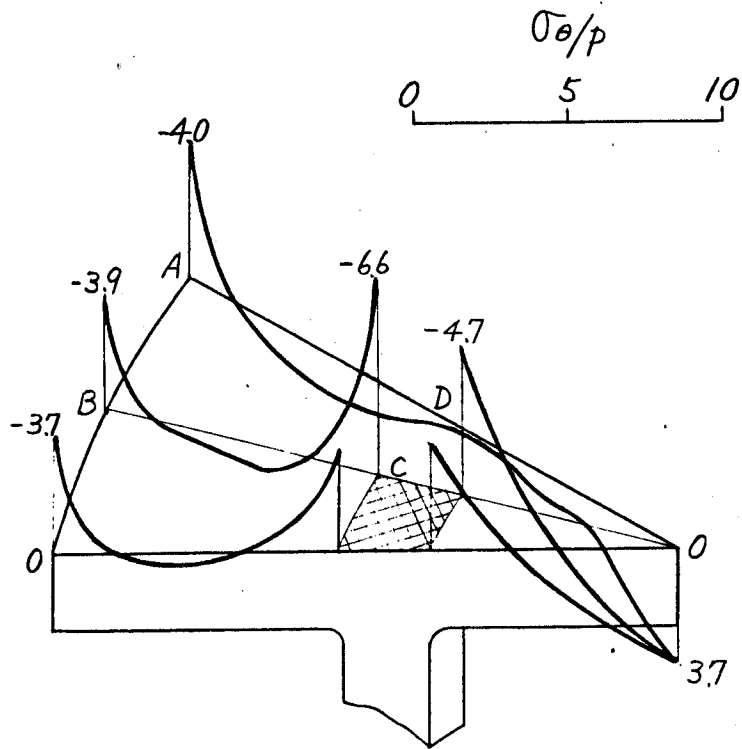


図 4. 2. 5 一円周リブ型の周応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/2$ )

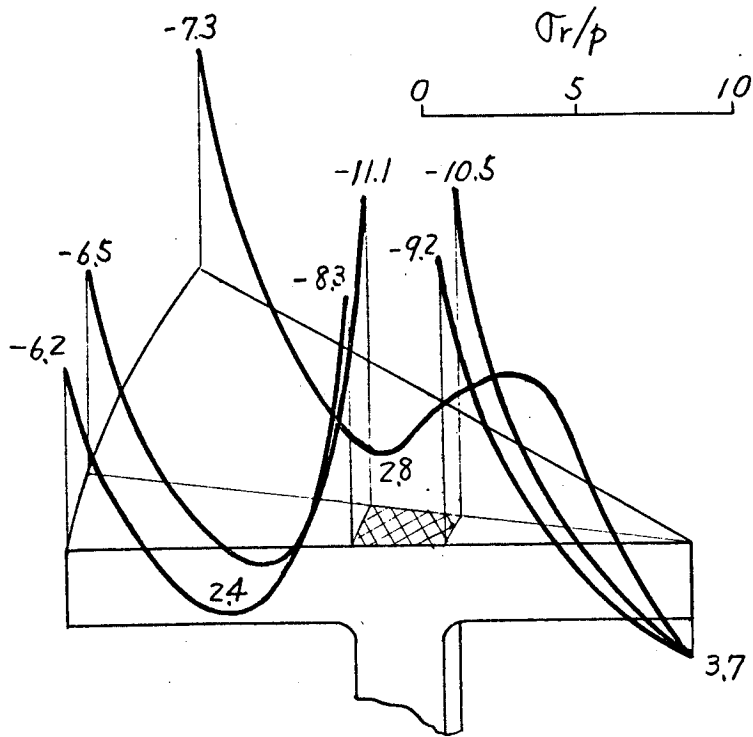


図 4. 2. 6 一円周リブ型の半径応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/4$ )

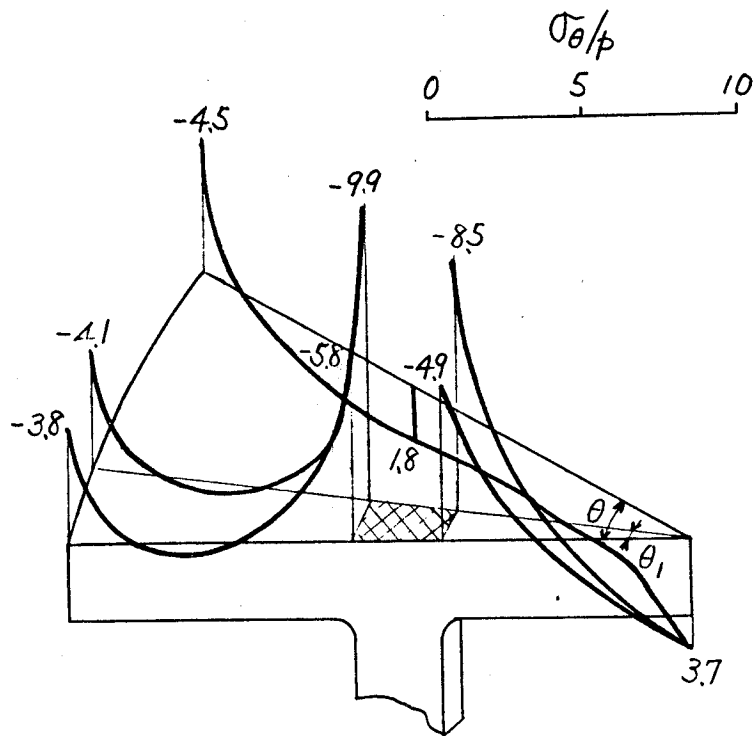


図 4. 2. 7 一円周リブ型の周応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/4$ )

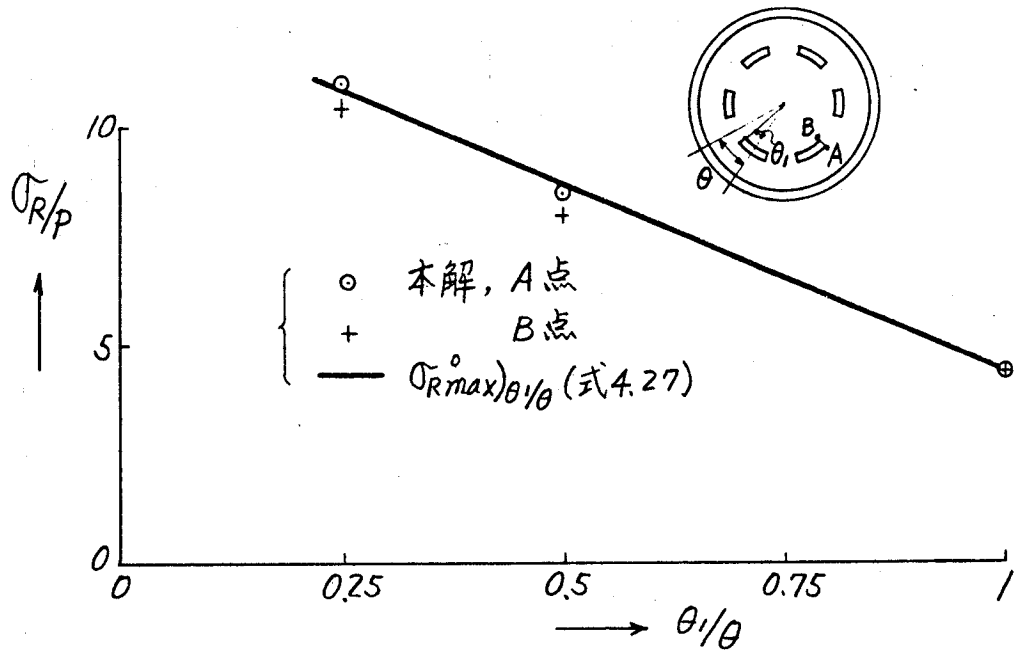


図 4. 2. 8 一円周リブ型の最大半径応力とリブ巾の関係

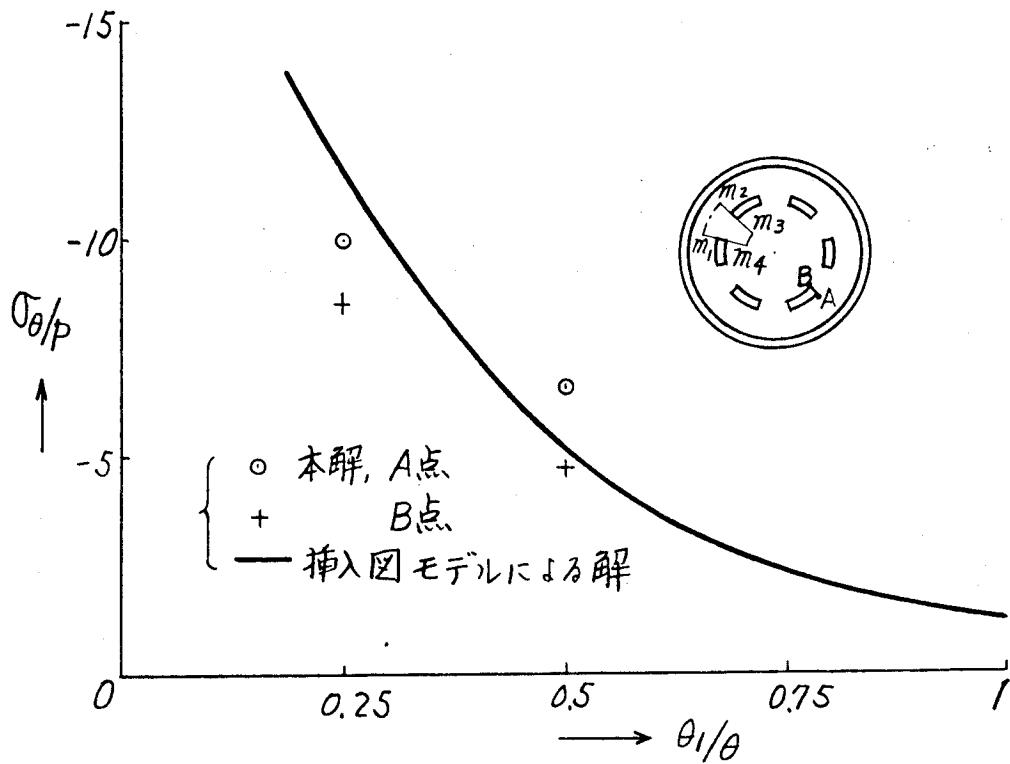


図 4. 2. 9 一円周リブ型の最大周応力とリブ巾の関係

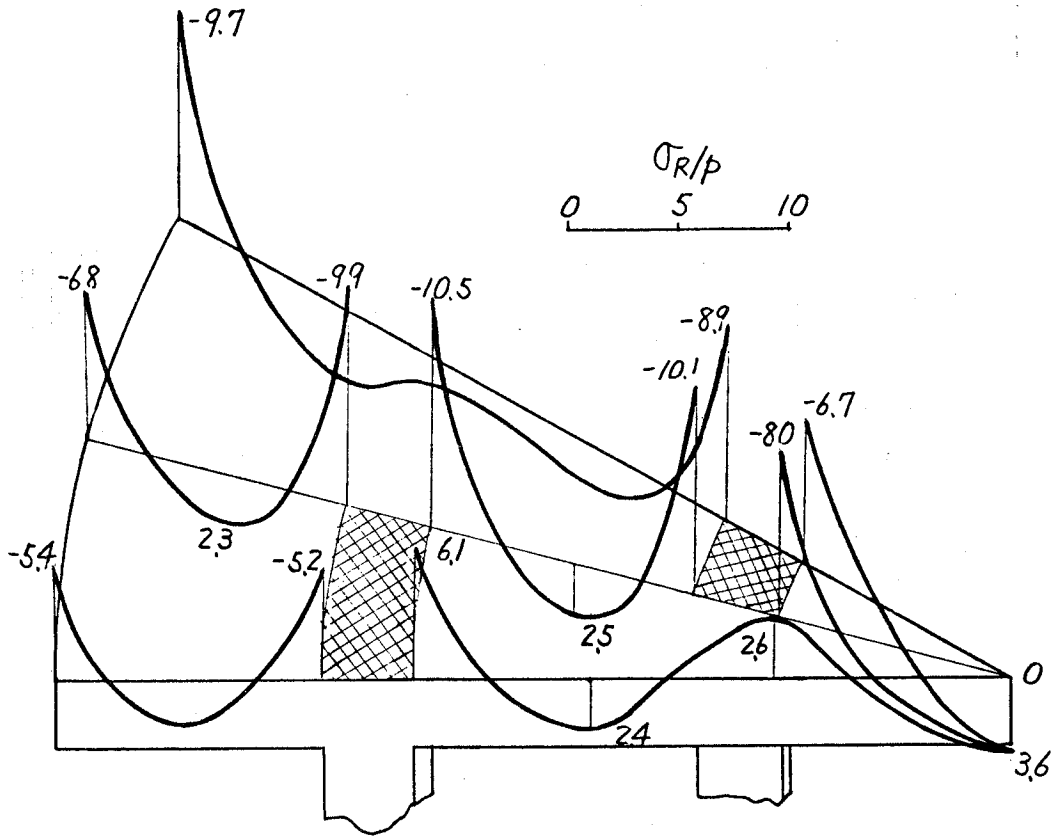


図 4. 2. 10 二円周リブ型の半径応力の分布 ( $\theta_1/\theta_2 = 1/2$ )

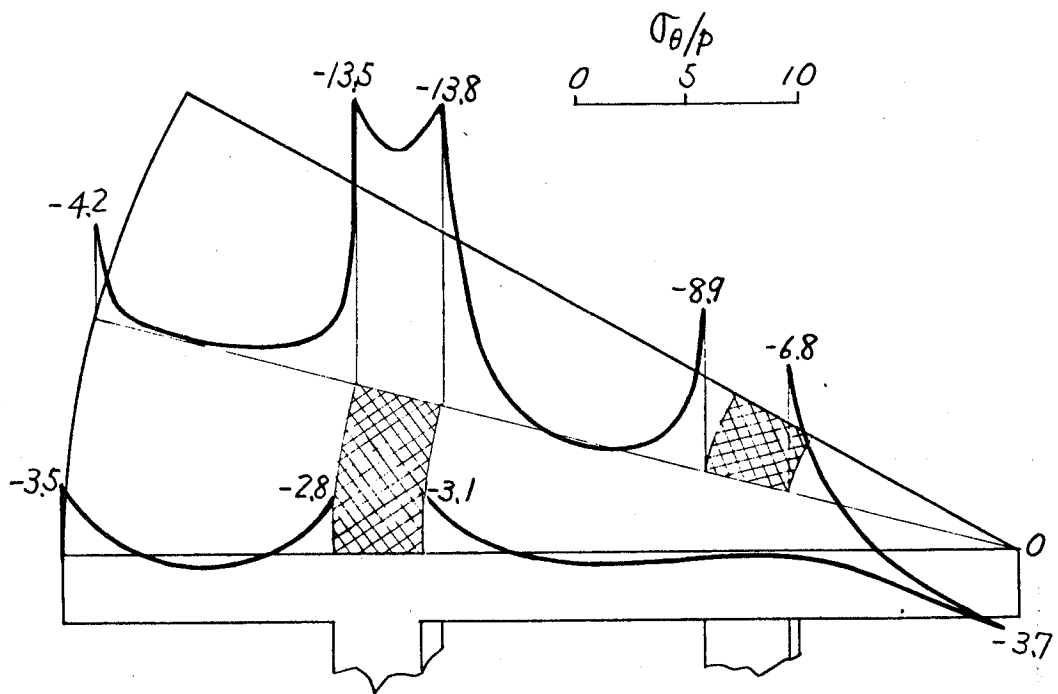


図 4. 2. 11 二円周リブ型の周応力の分布 ( $\theta_1/\theta_2 = 1/2$ )

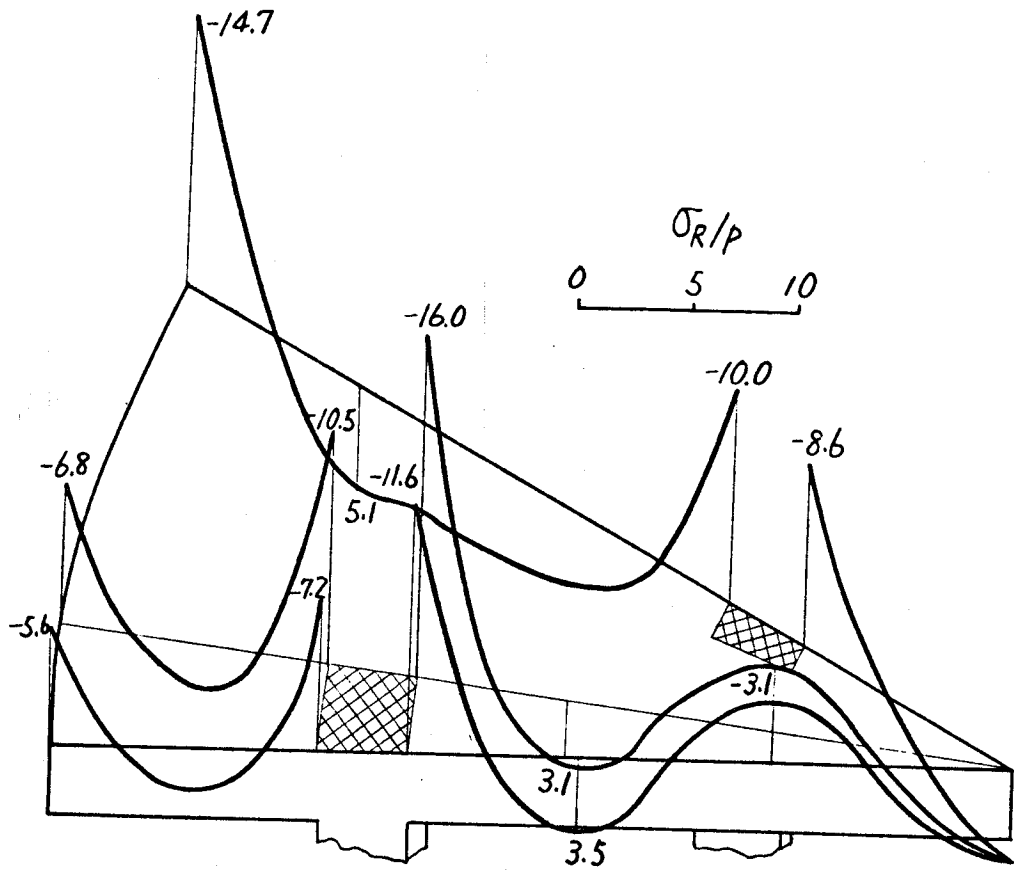


図 4. 2. 12 二円周リブ型の半径応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/4$ )

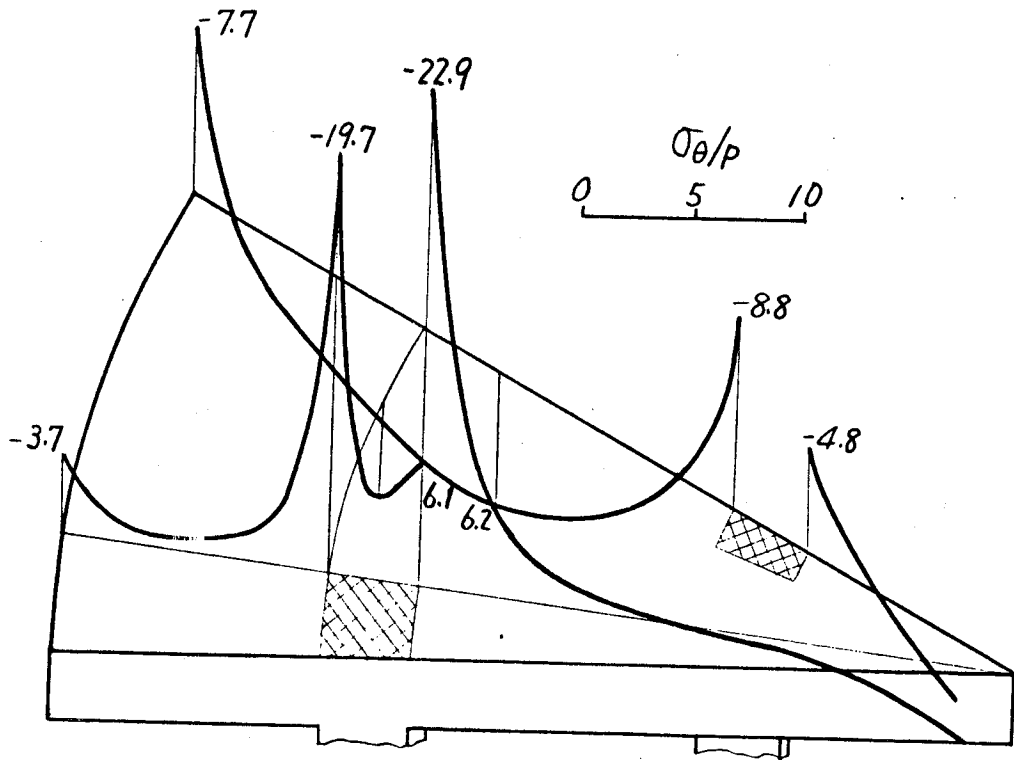


図 4. 2. 13 二円周リブ型の周応力の分布 ( $\theta_1/\theta = 1/4$ )

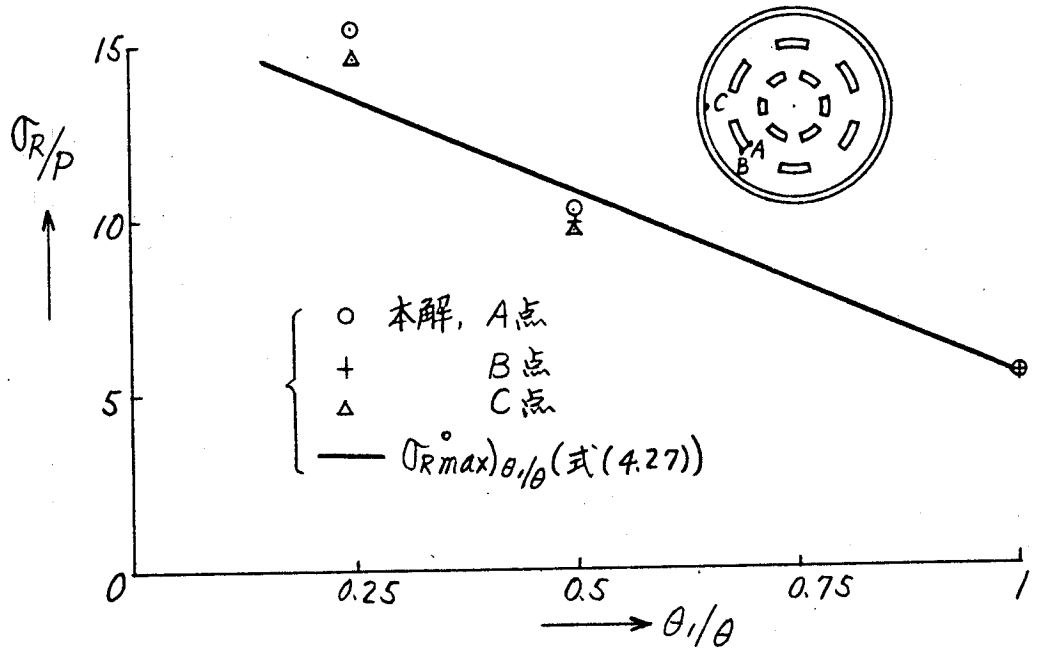


図 4. 2. 14 二円周リブ型の最大半径応力とリブ巾の関係

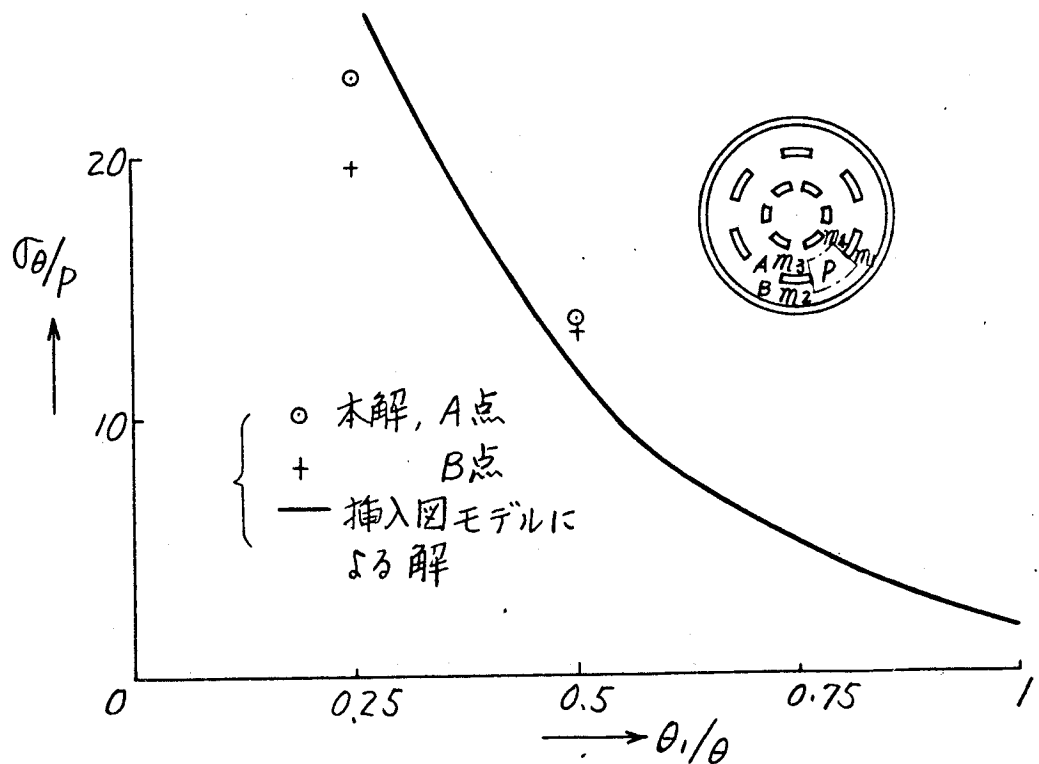


図 4. 2. 15 二円周リブ型の最大円周応力とリブ巾の関係



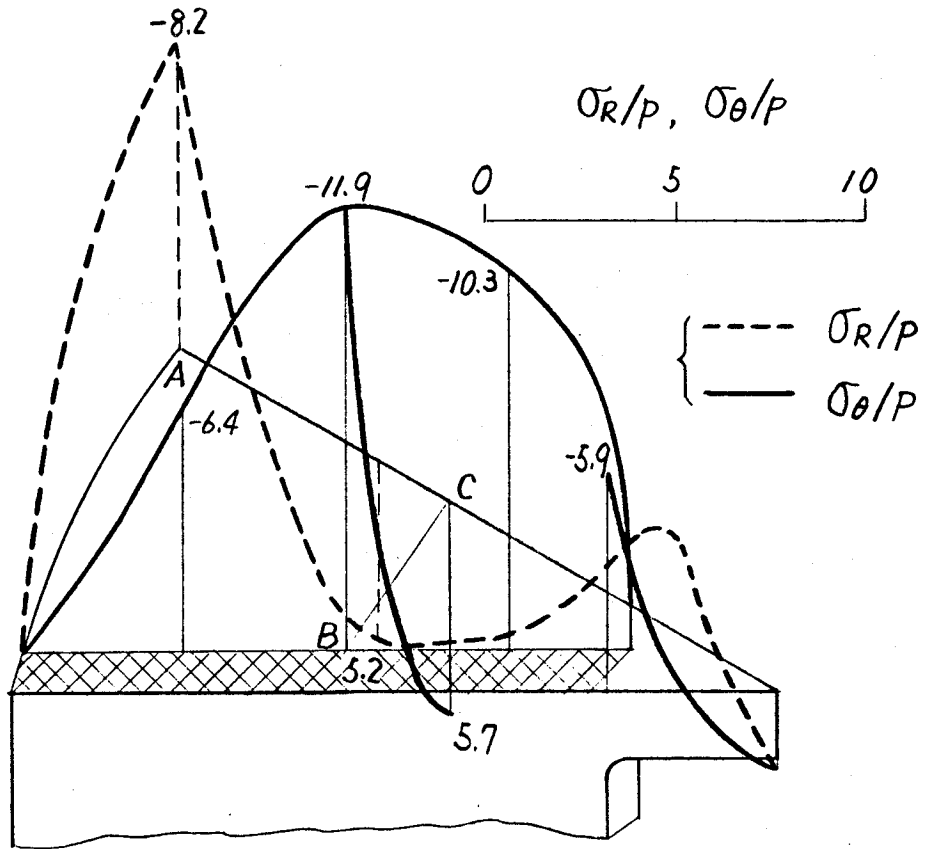


図 4. 2. 16 放射リブ型の応力分布 ( $\alpha = \pi/6$ )

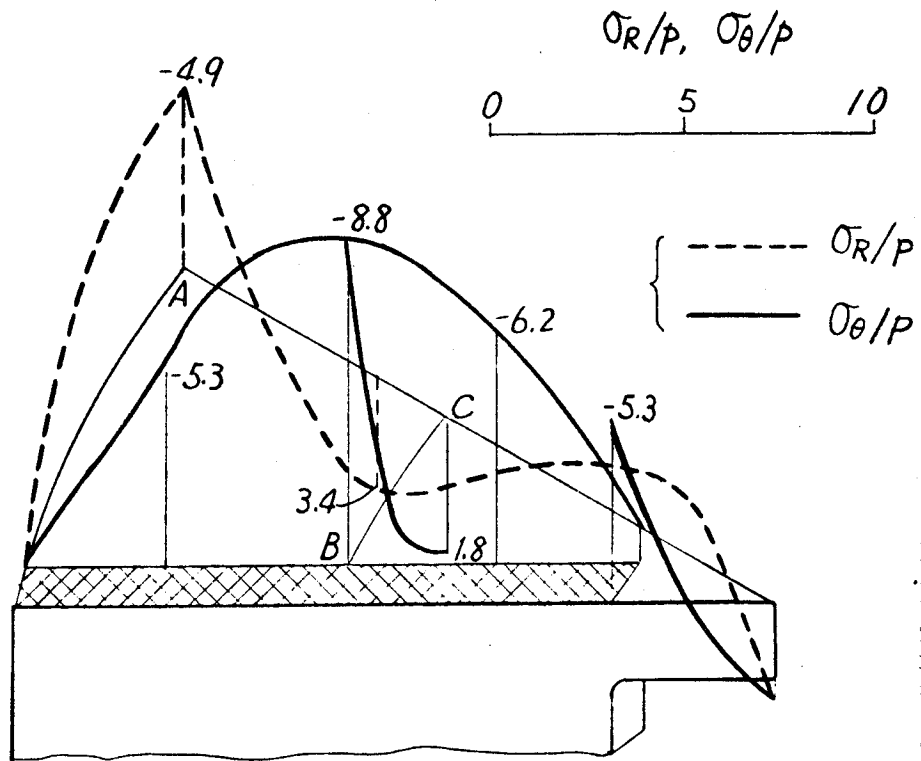


図 4. 2. 17 放射リブ型の応力分布 ( $\alpha = \pi/8$ )

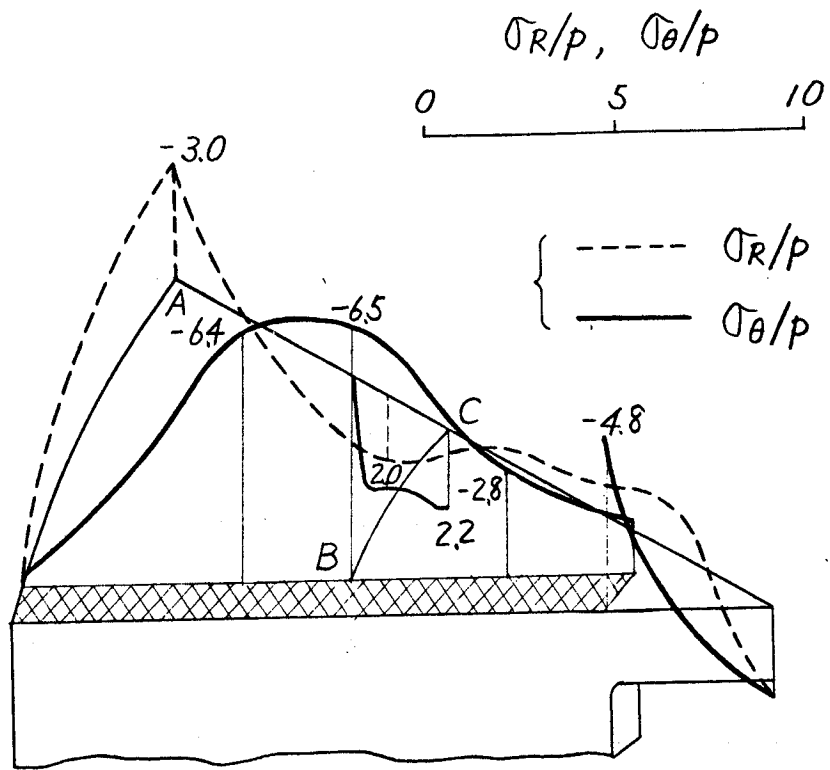


図 4. 2. 18      放射リブ型の応力分布 ( $\alpha = \pi/10$ )

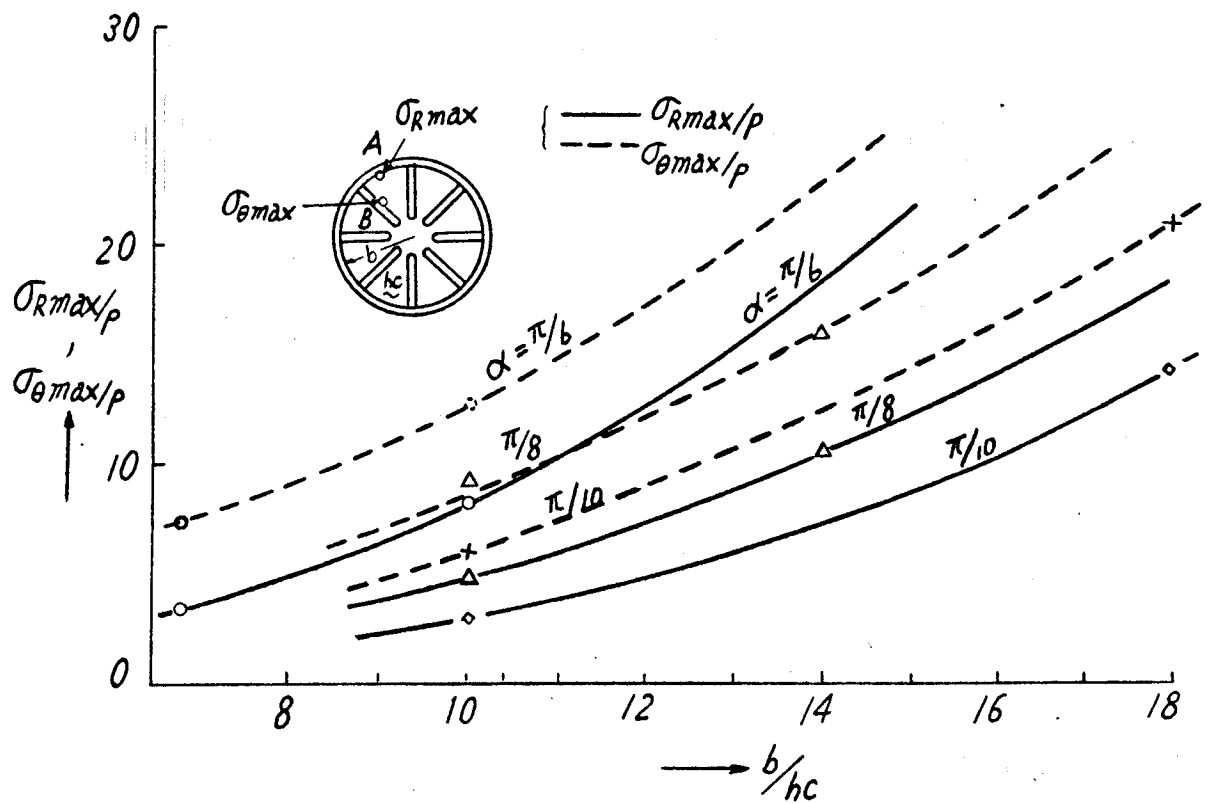


図 4. 2. 19 放射リブ型の最大応力とピストン径の関係

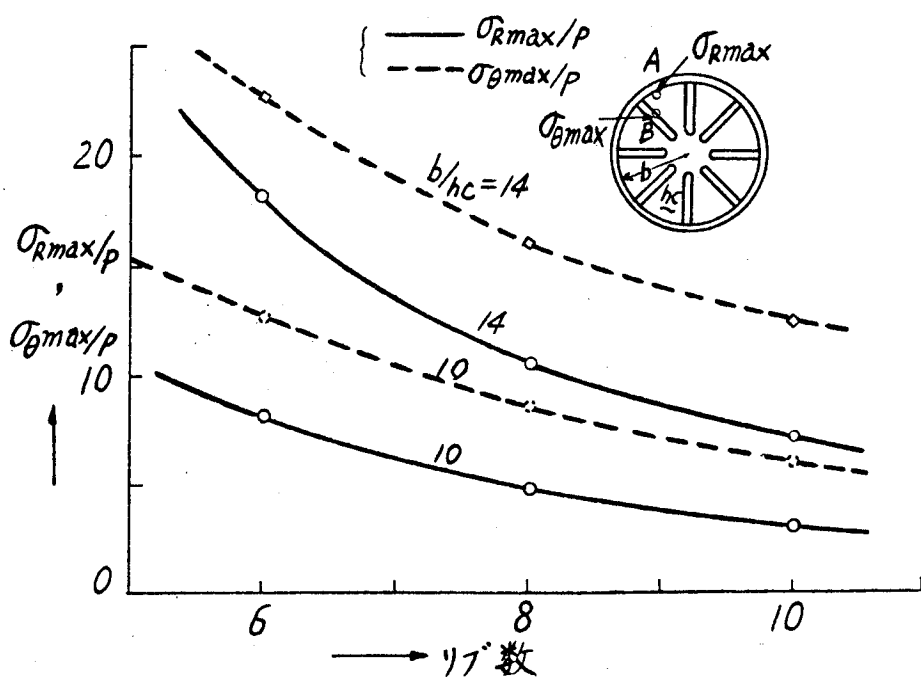


図 4. 2. 20 放射リブ型の最大応力とリブ数の関係

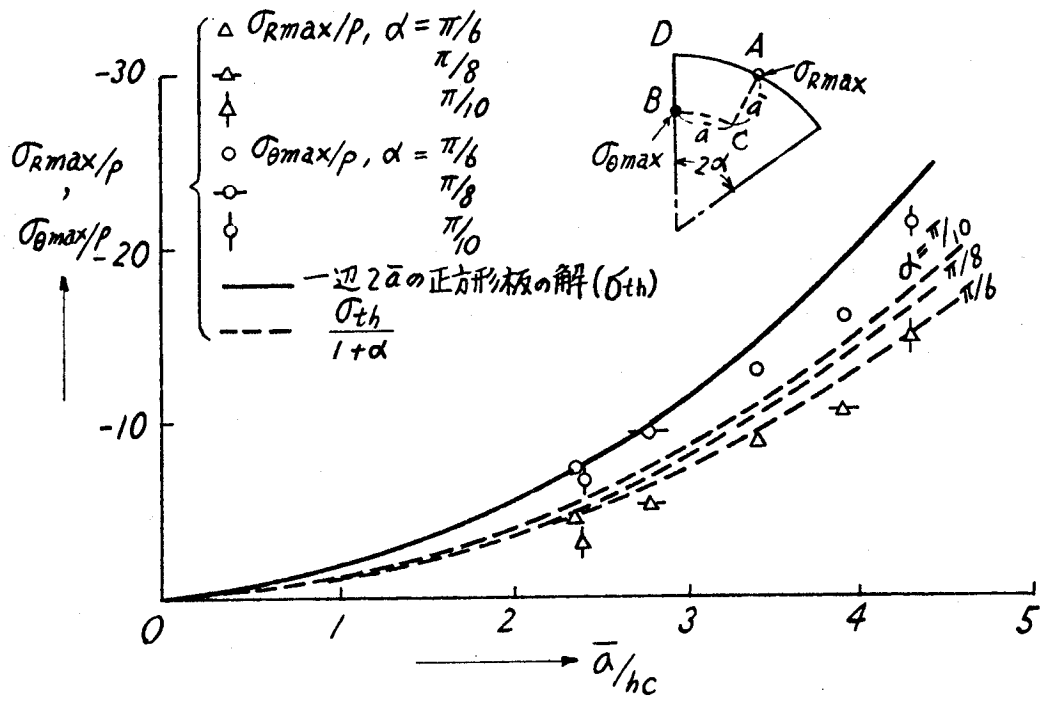


図 4. 2. 21 放射リブ型の最大応力とリブ間隔の関係

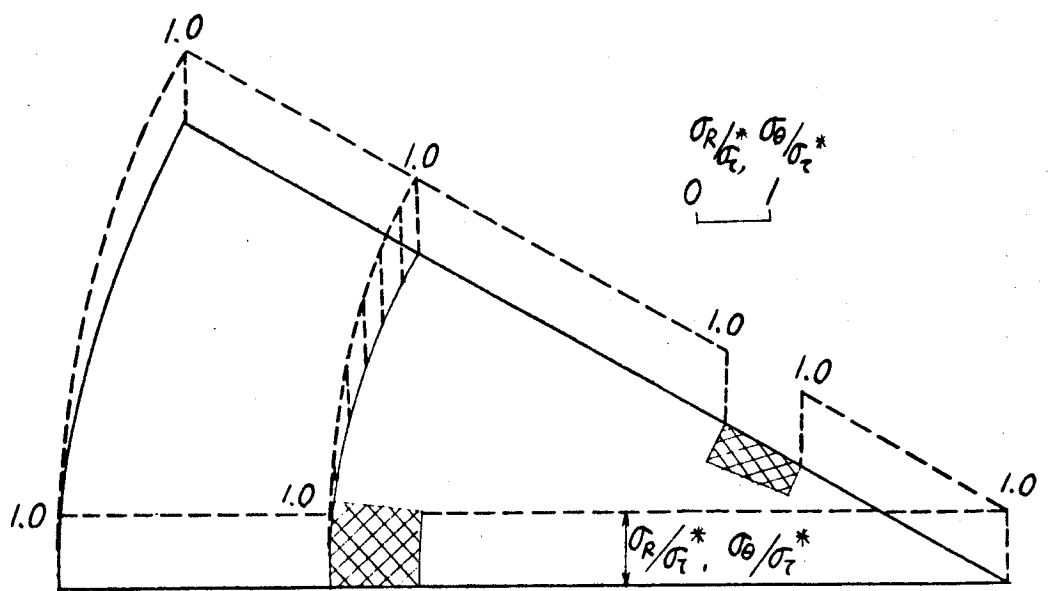
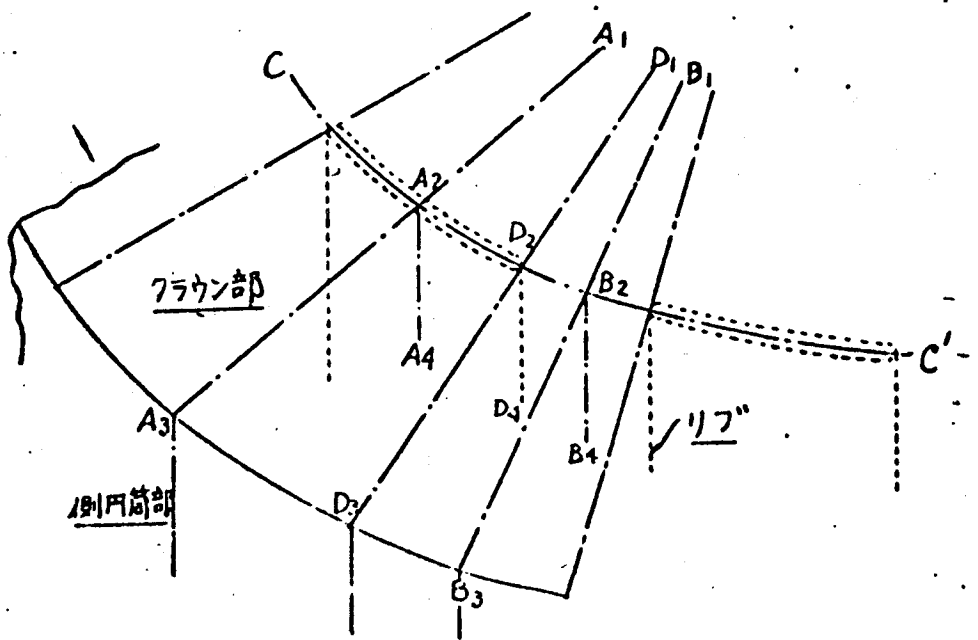
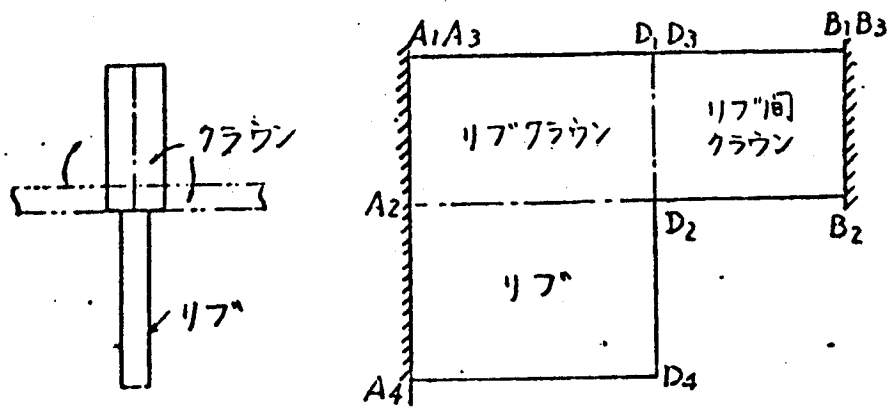


図 4. 2. 22 二円周リブ型の熱曲げによる熱応力 ( $\theta_1/\theta_2 = 1/4$ )



(a) リブとクラウンの取合部



(b)  $A_1 \sim A_4 \sim B_4 \sim B_1$  の模型化

図 4. 3. 1 対象構造の模型化

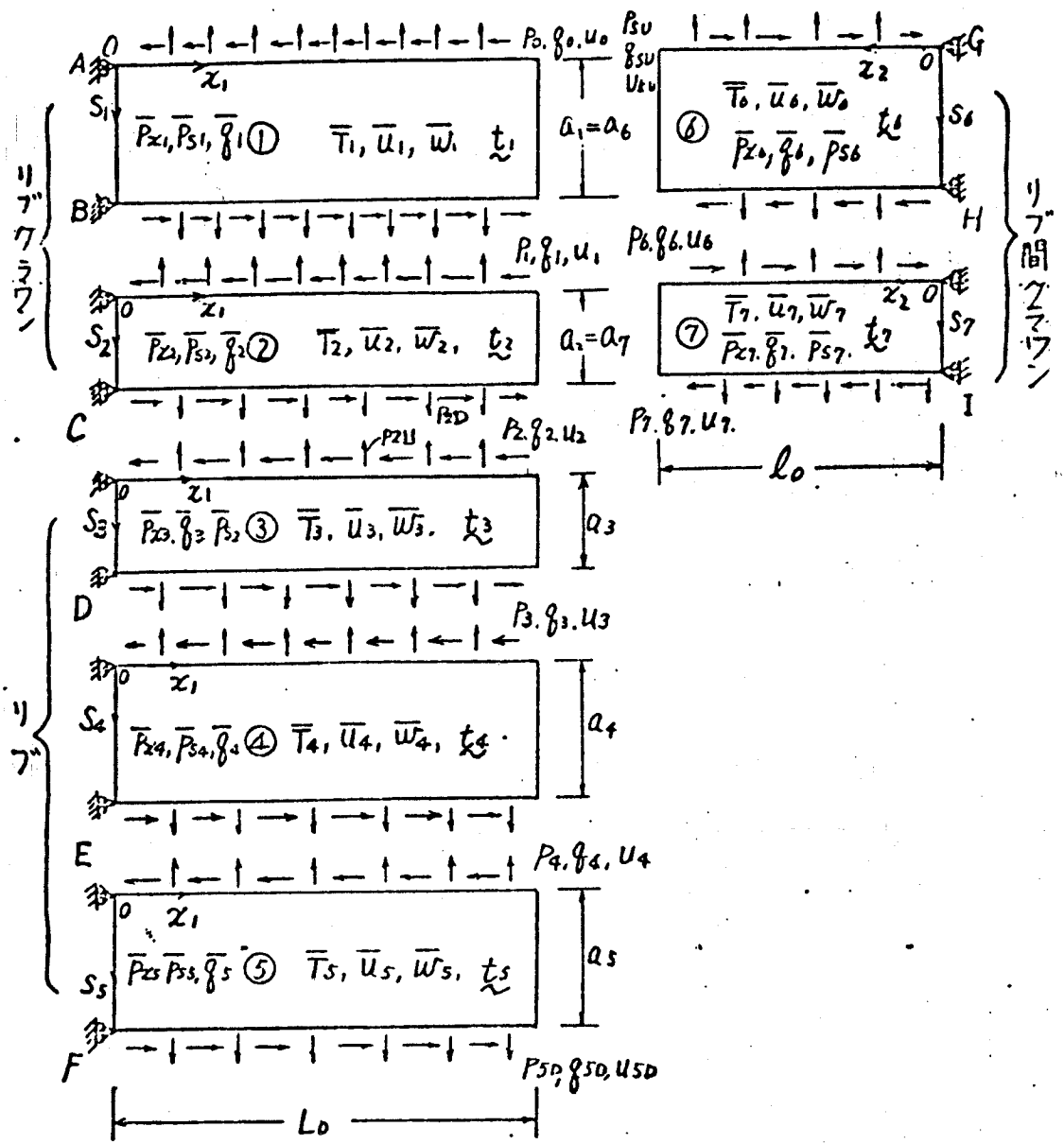


図 4. 3. 2 計算模型

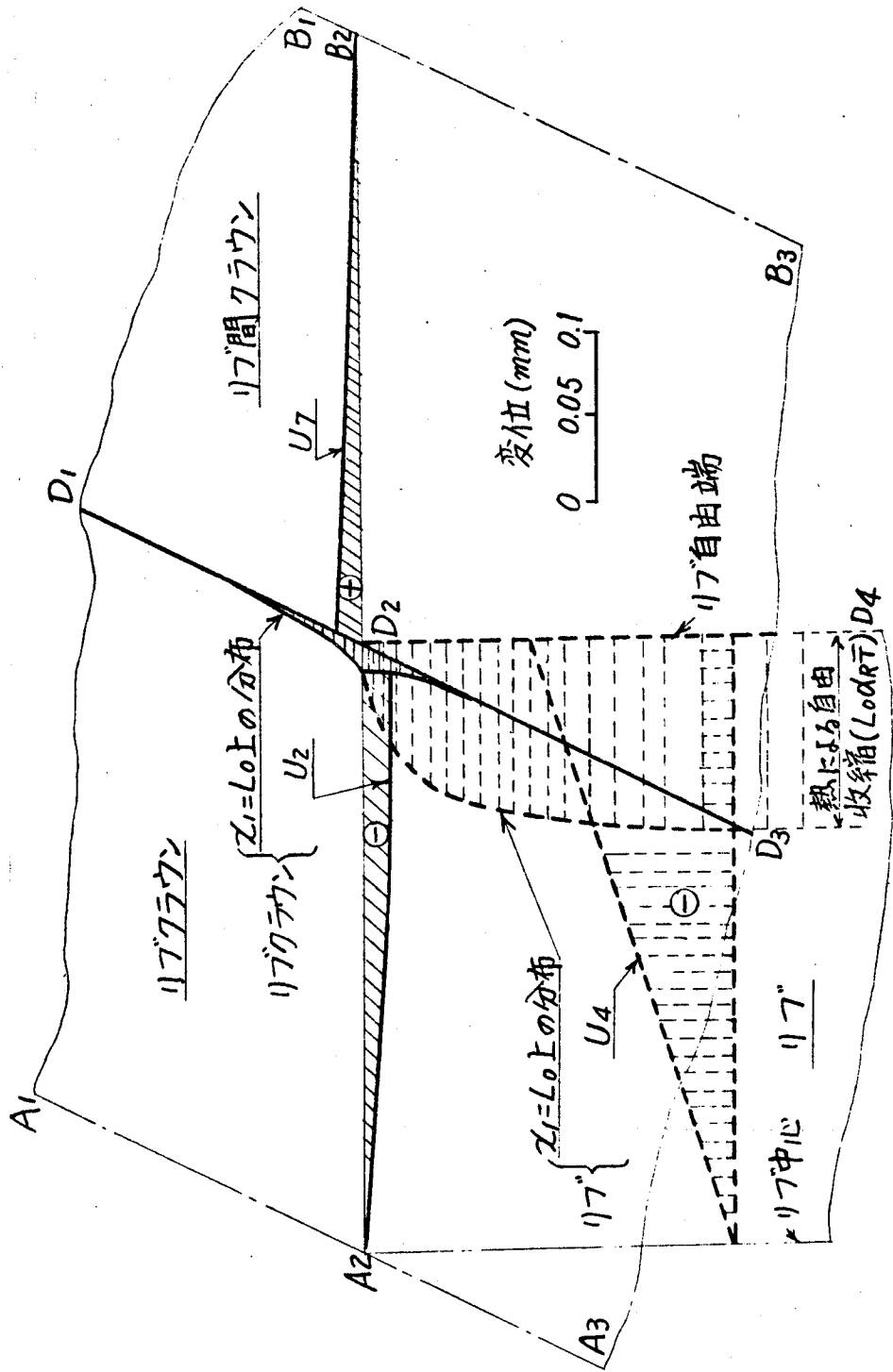


図 4. 3. 3 軸方向変位の分布

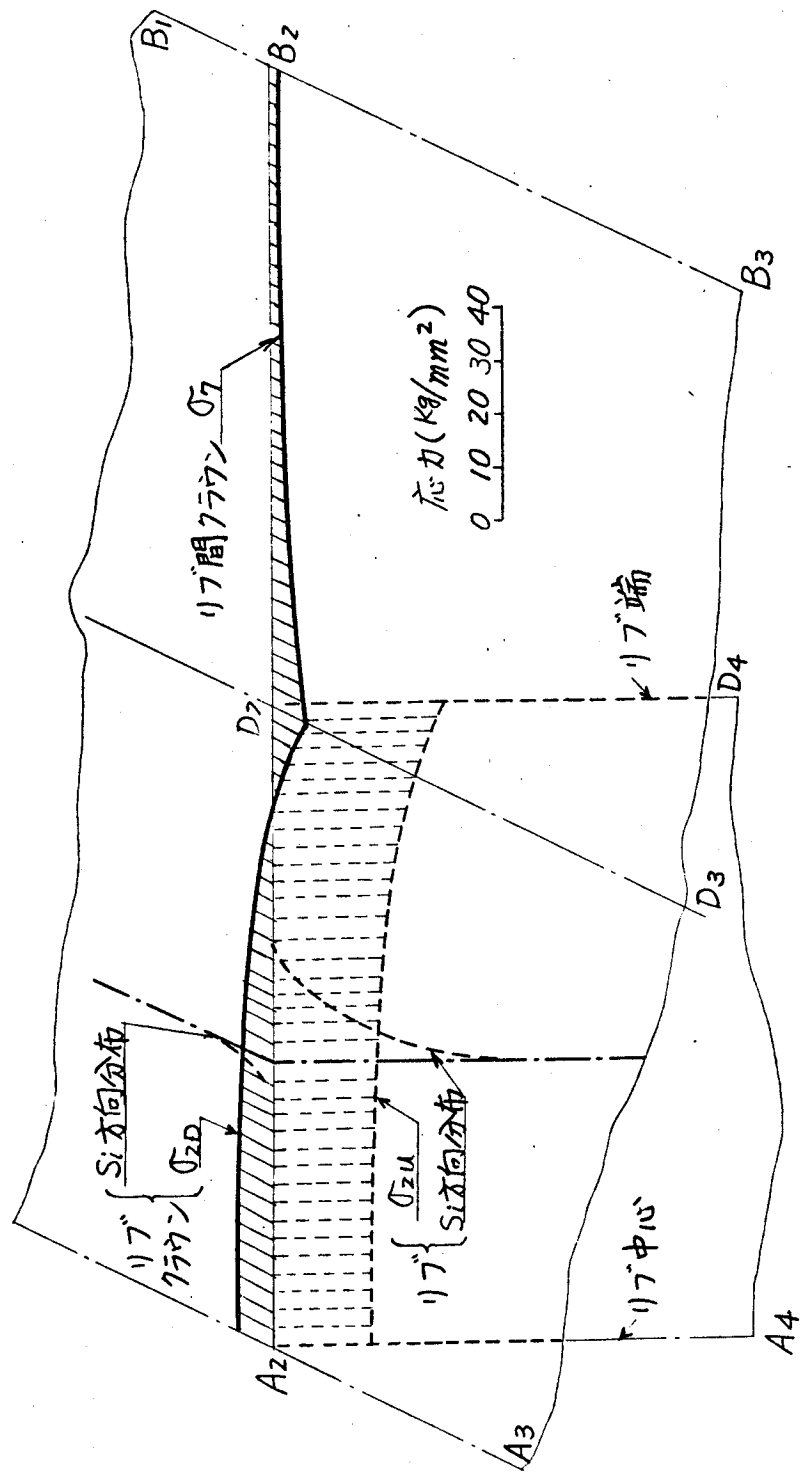


図 4. 3. 4 軸方向応力の分布



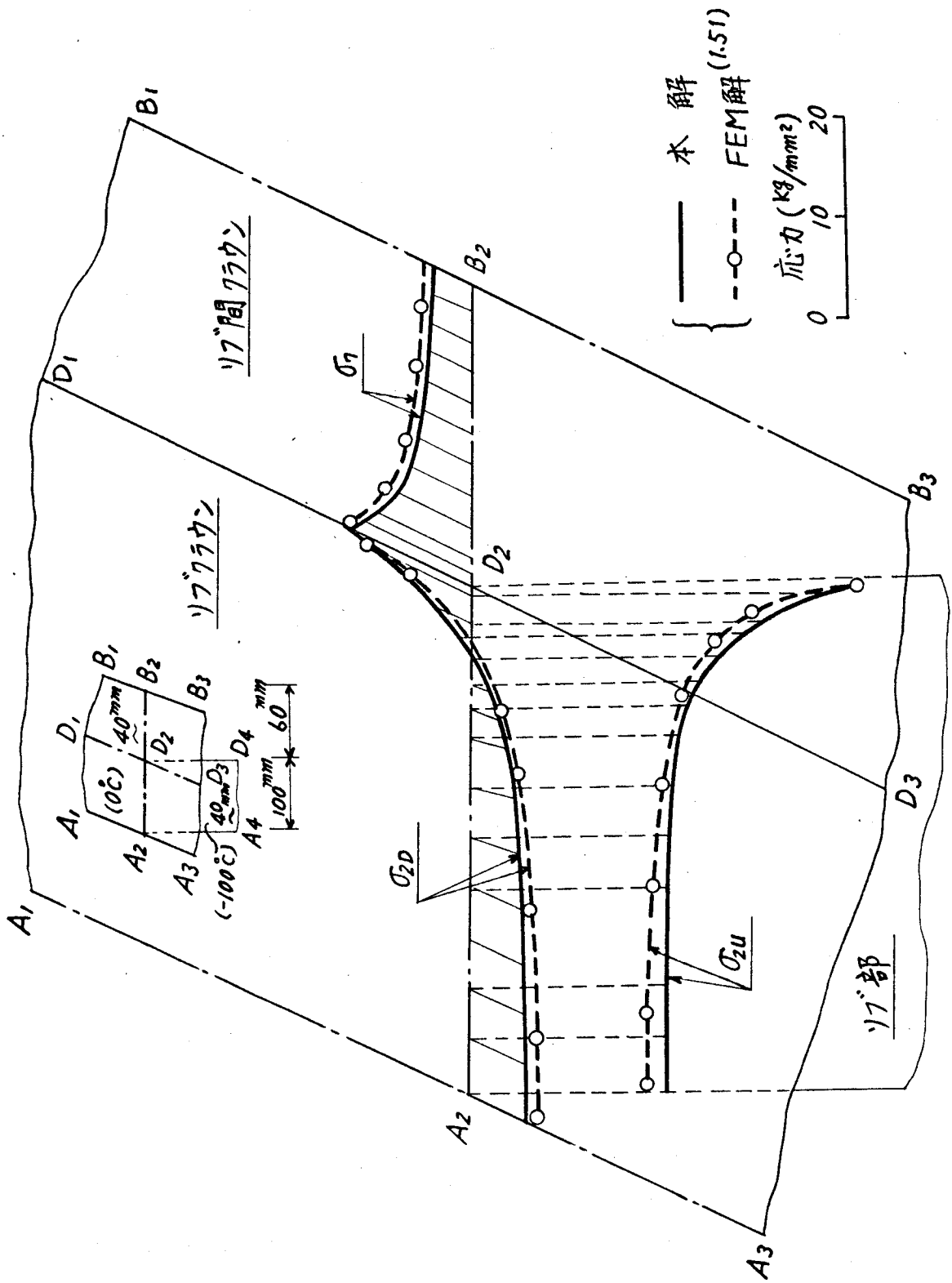


図 4.3.5 有限要素法による解との比較

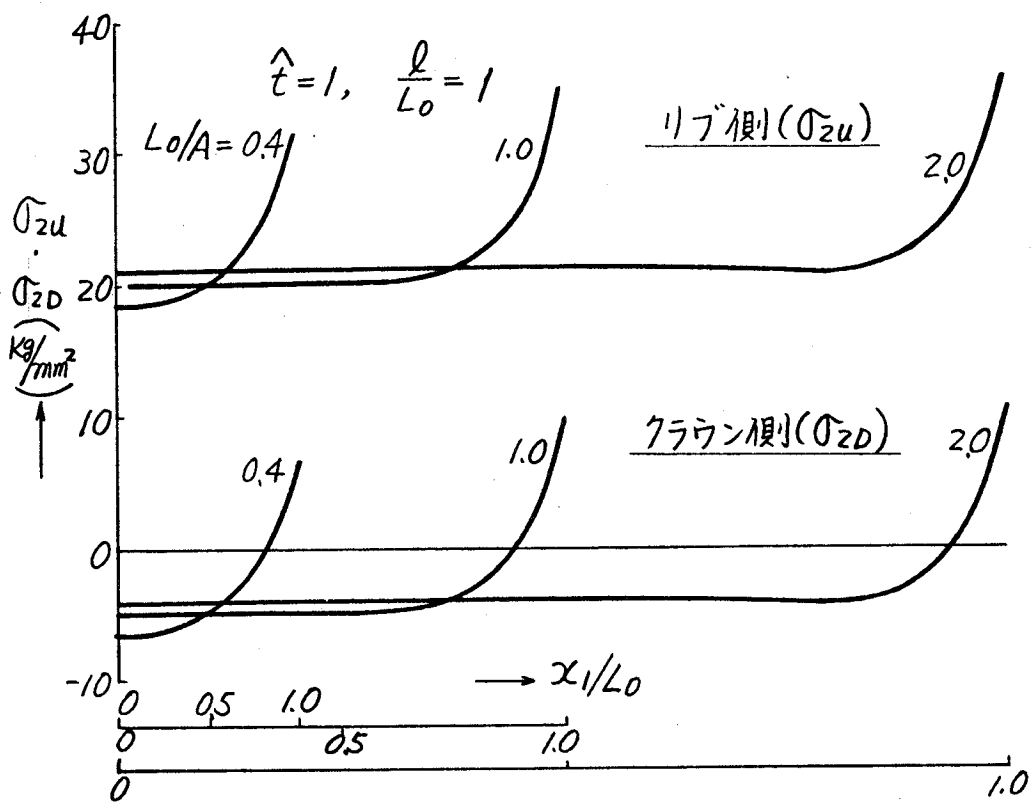


図 4. 3. 6 リブ巾による接合縁の軸方向応力分布の変化

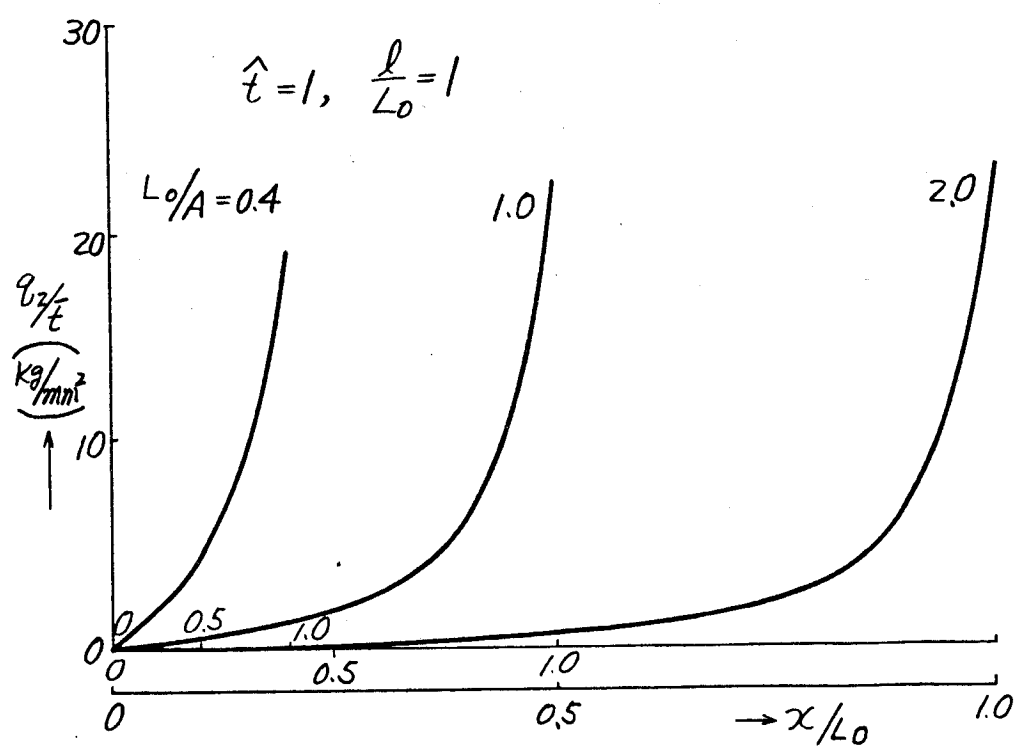


図 4. 3. 7 リブ巾による接合縁の剪断応力分布の変化

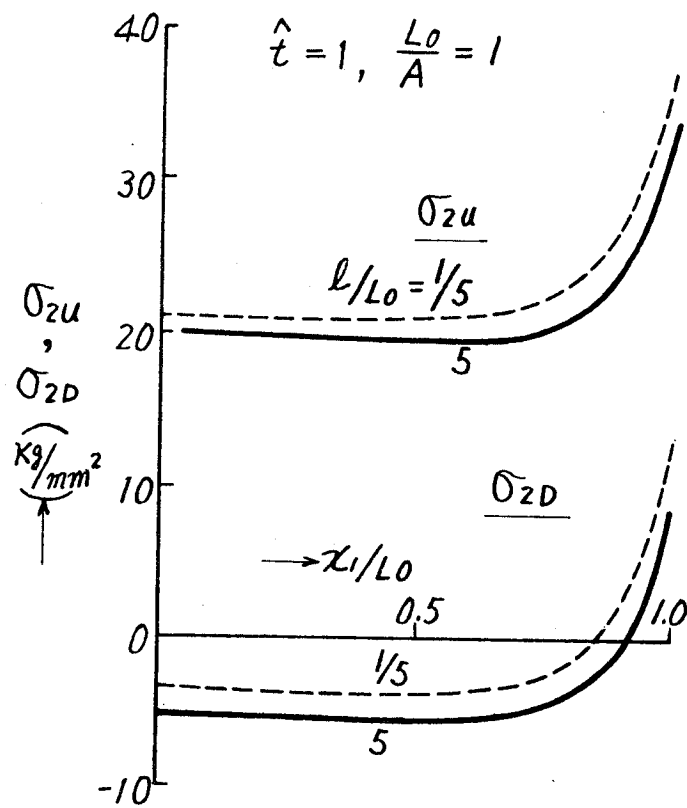


図 4. 3. 8 リブ間隔による接合縁の軸方向応力分布の変化

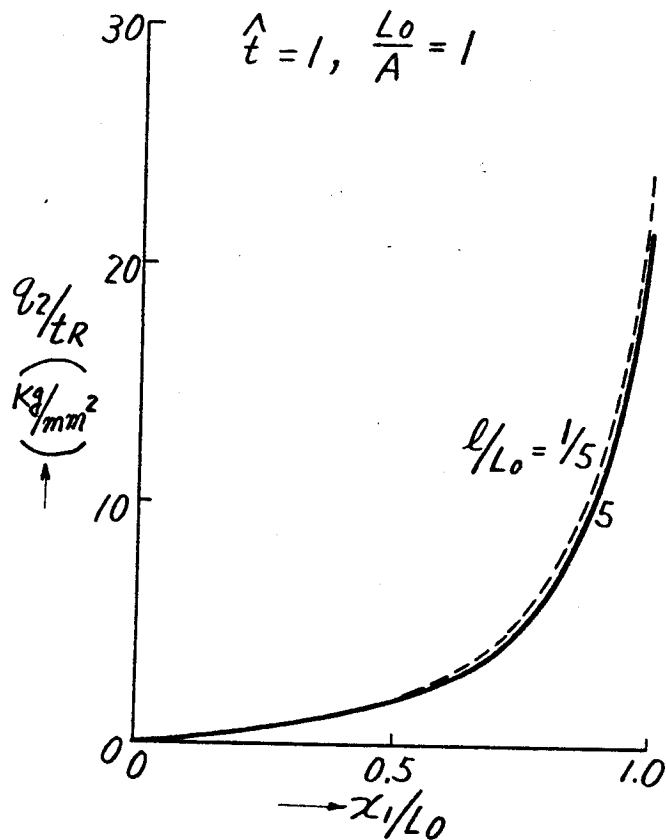


図 4. 3. 9 リブ間隔による接合縁の剪断応力分布の変化

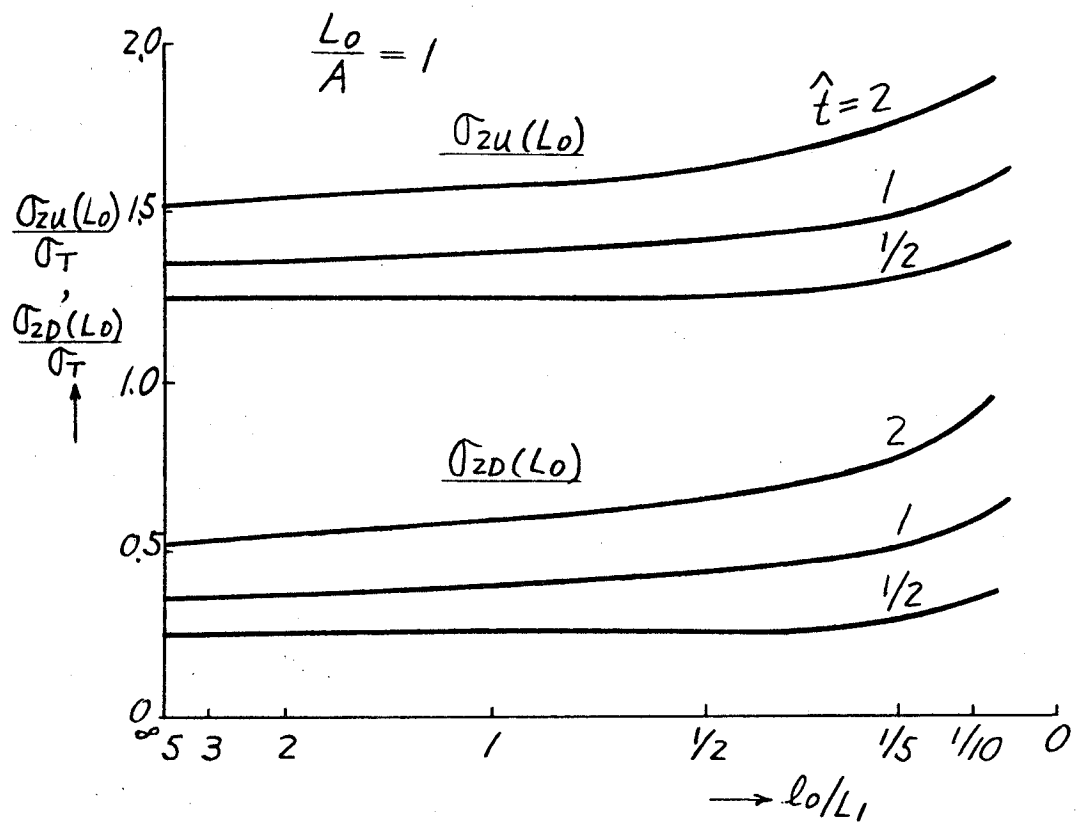


図 4. 3. 10 リブ間隔と最大応力の関係

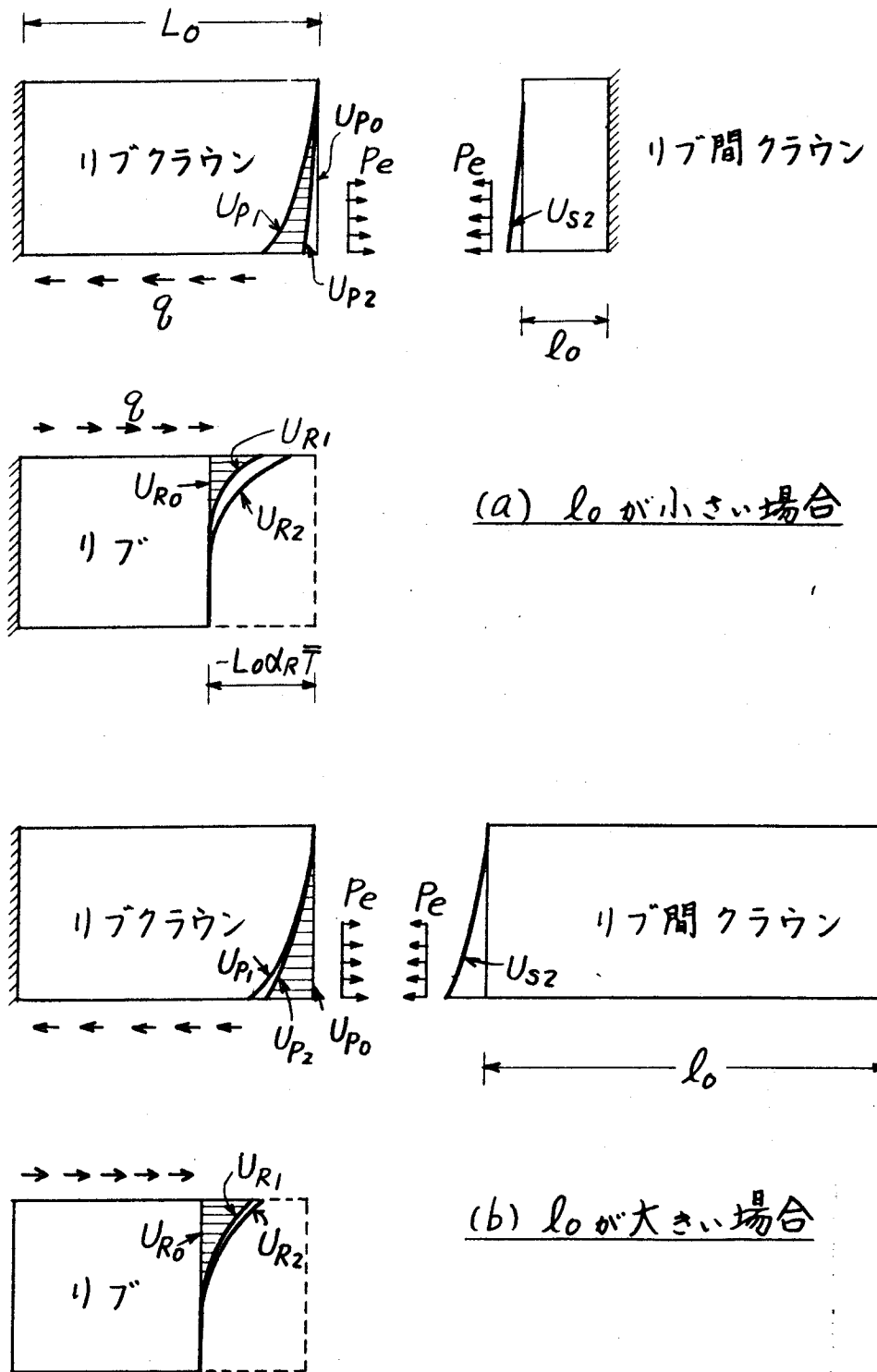


図 4. 3. 11 リブ間隔によるリブ端変形の変化

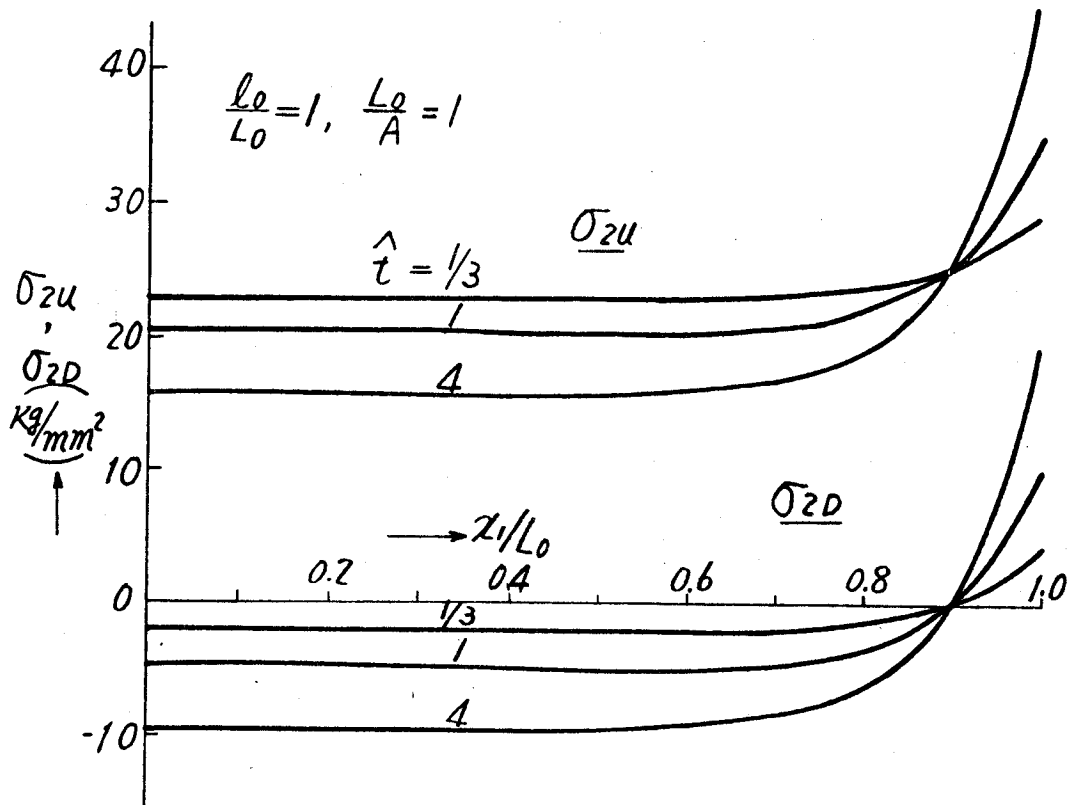


図 4. 3. 12 リブ厚さによる接合縁の軸方向応力分布の変化

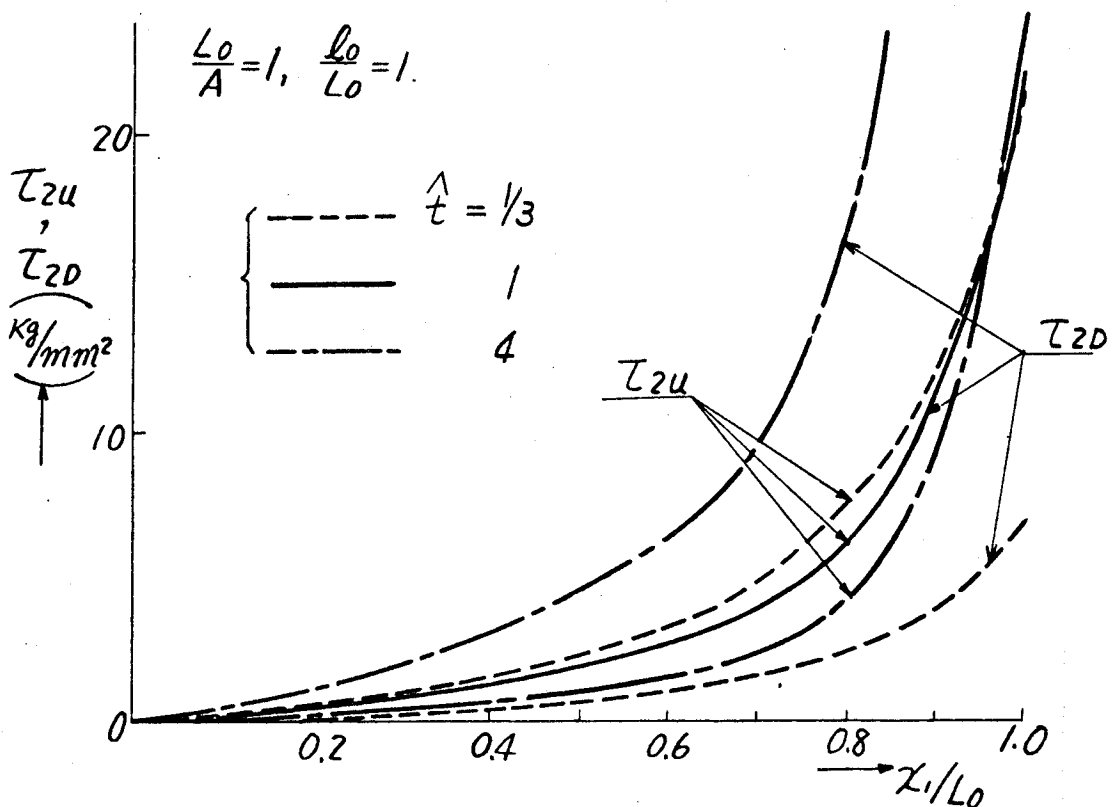


図 4. 3. 13 リブ厚さによる剪断応力分布の変化

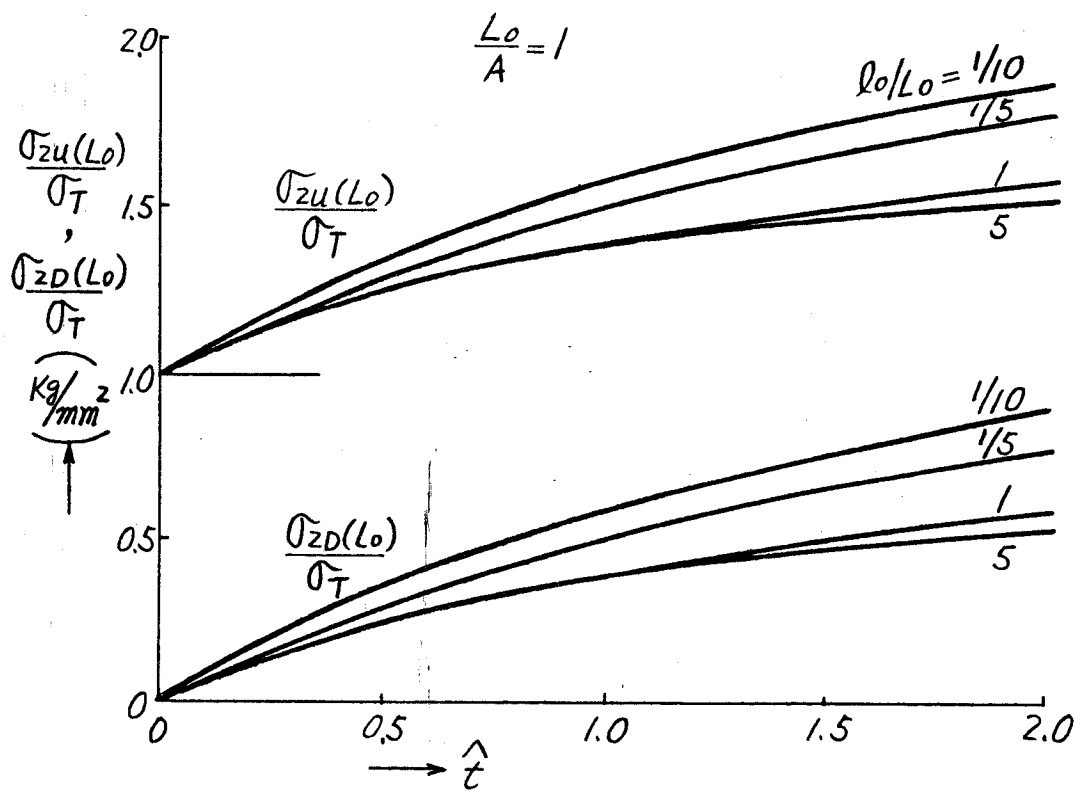
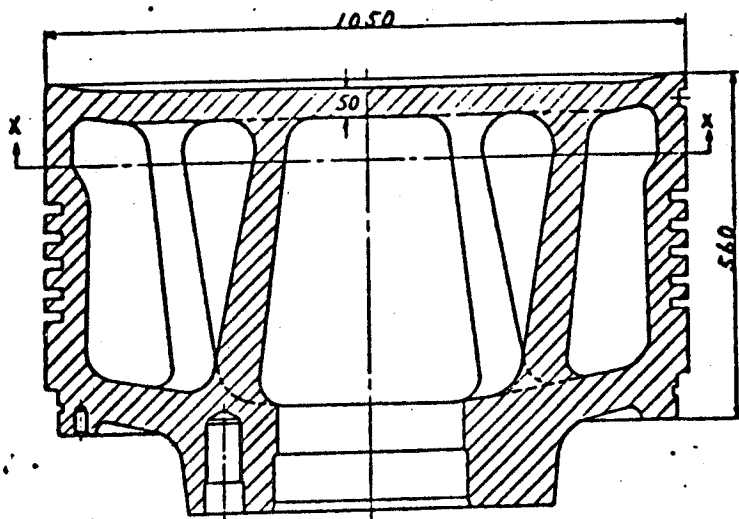
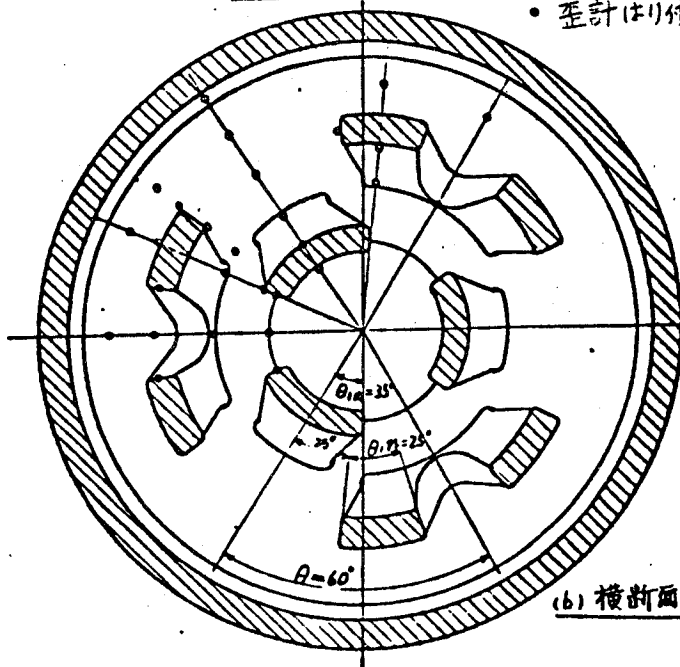


図 4. 3. 14 リブ厚さと最大応力の関係



(a) 軸断面

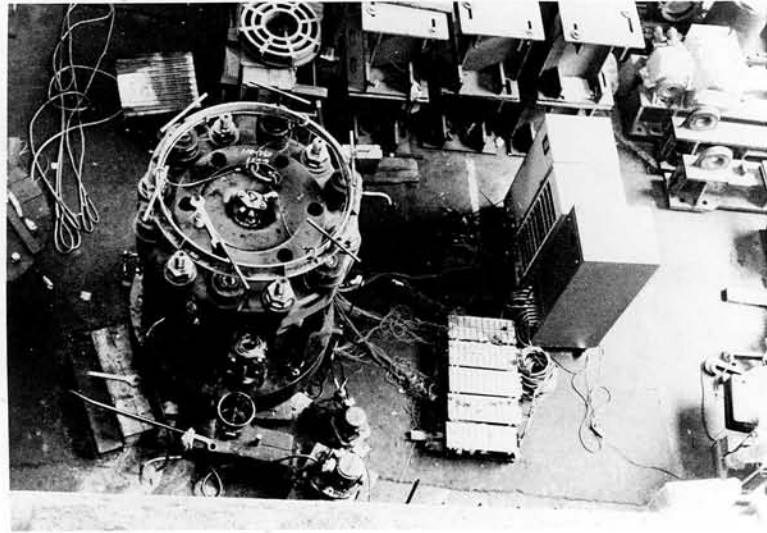
• 歪計はり付位置



(b) 横断面X-X

図 4. 4. 1 実験用ピストン





FUJICOLOR 75

図 4. 4. 2 実験装置概観

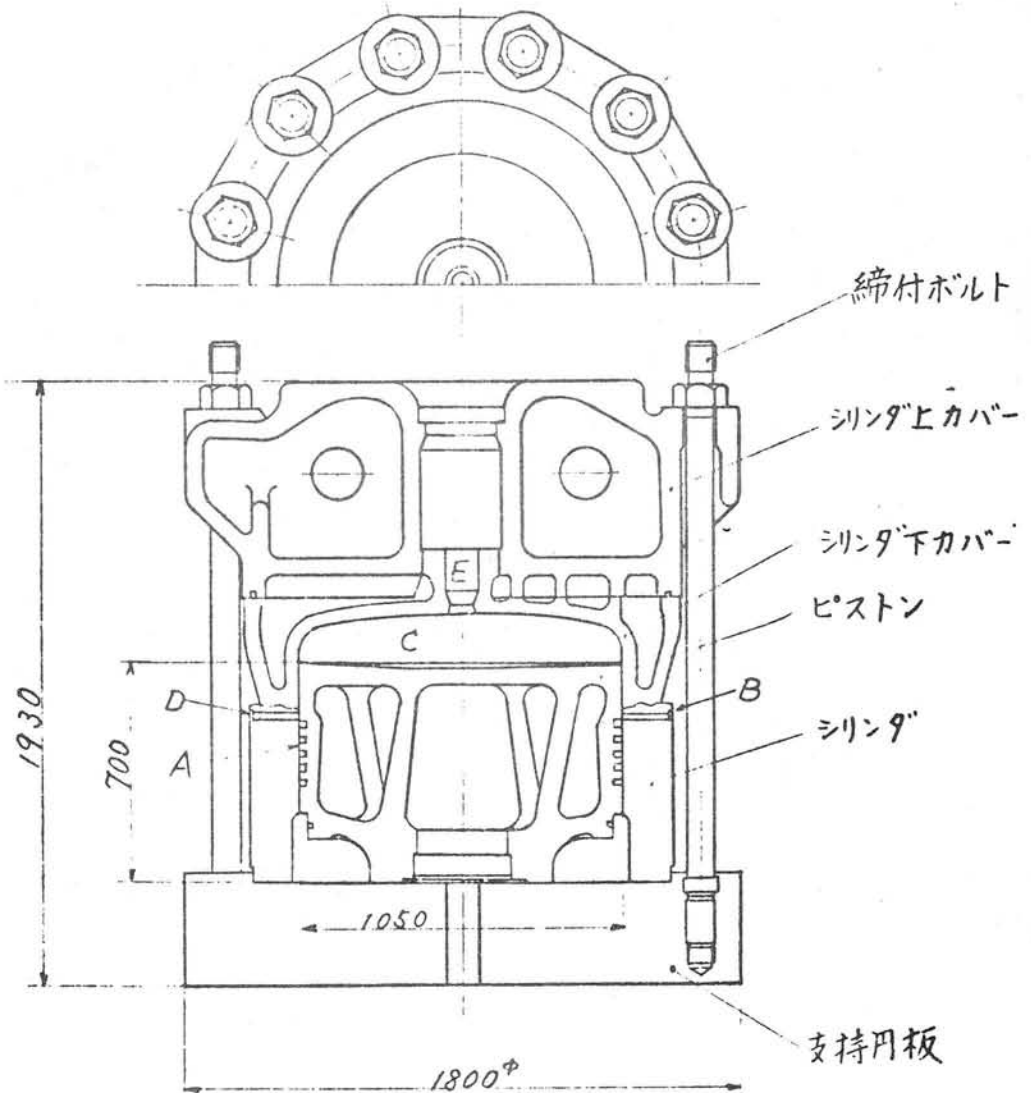


図 4. 4. 3 加圧実験装置



図 4. 4. 4 歪計はり付けの状況

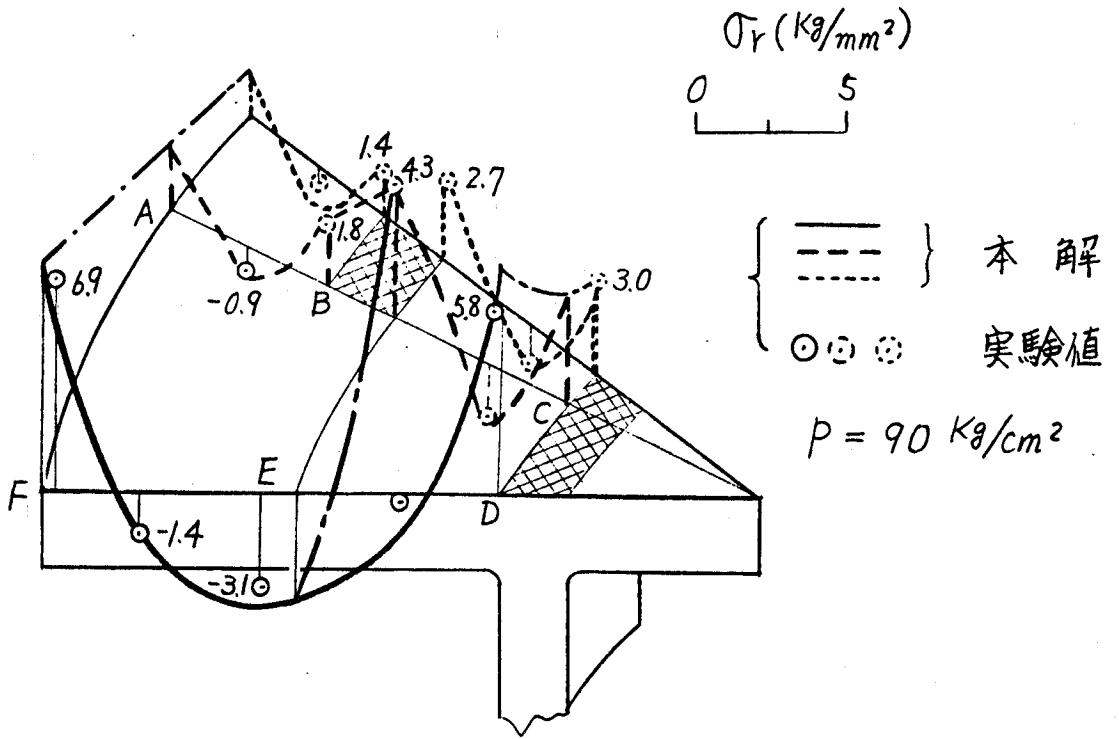


図 4. 4. 5 二円周型実用ピストンの半径応力の分布

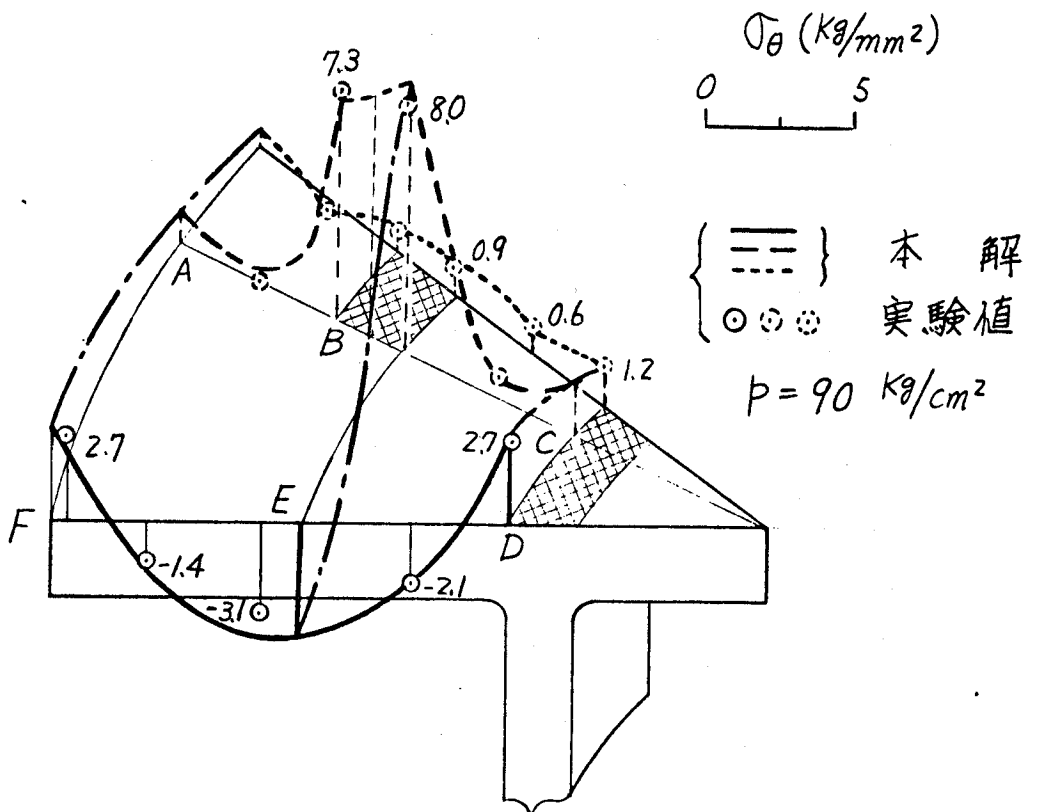


図 4. 4. 6 二円周型実用ピストンの周応力分布

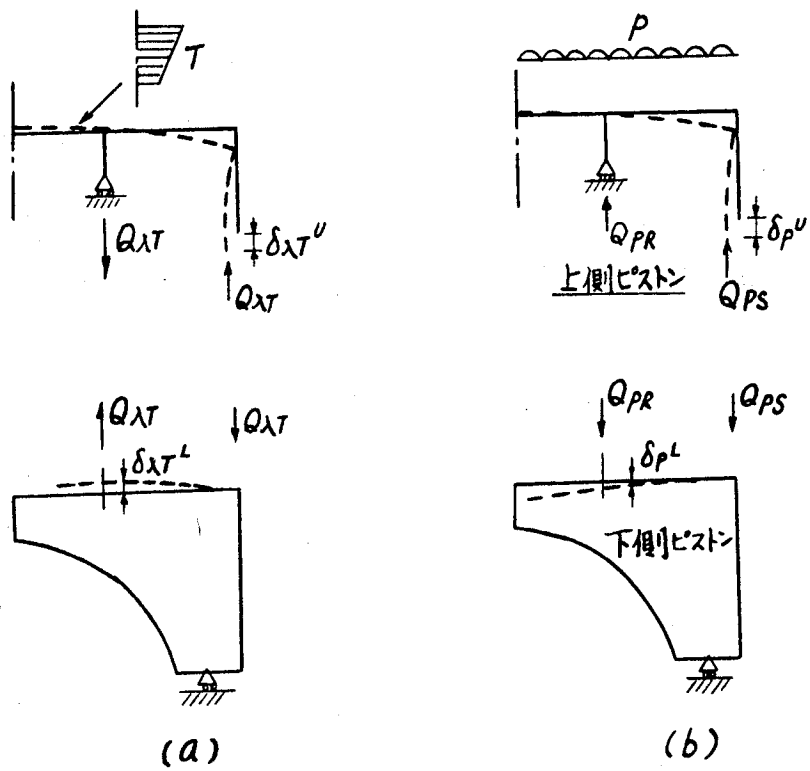


図 4.5.1 分割型ピストンの挙動の分解

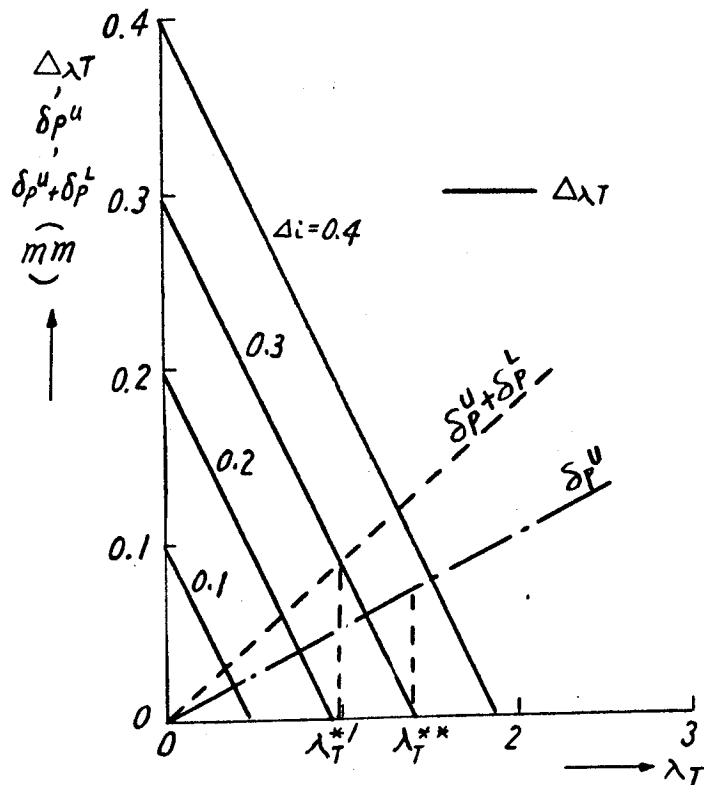


図 4.5.2 ガス圧重畳時の接触開始時期と初期すきまの関係

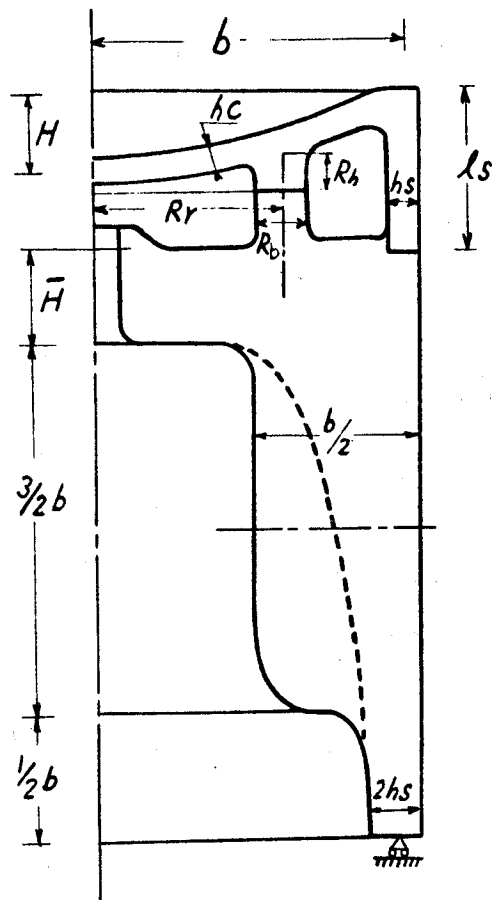


図 4. 5. 3 分割型ピストンの主要部寸法

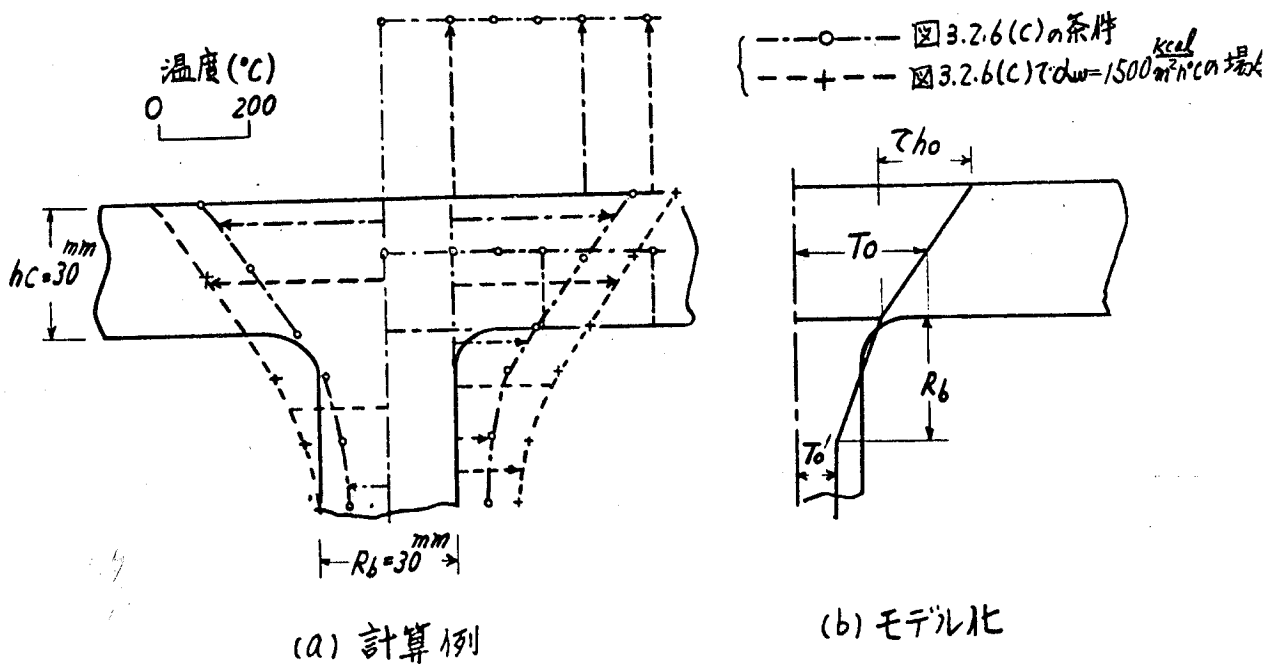


図 4. 5. 4 リブの温度分布とそのモデル化

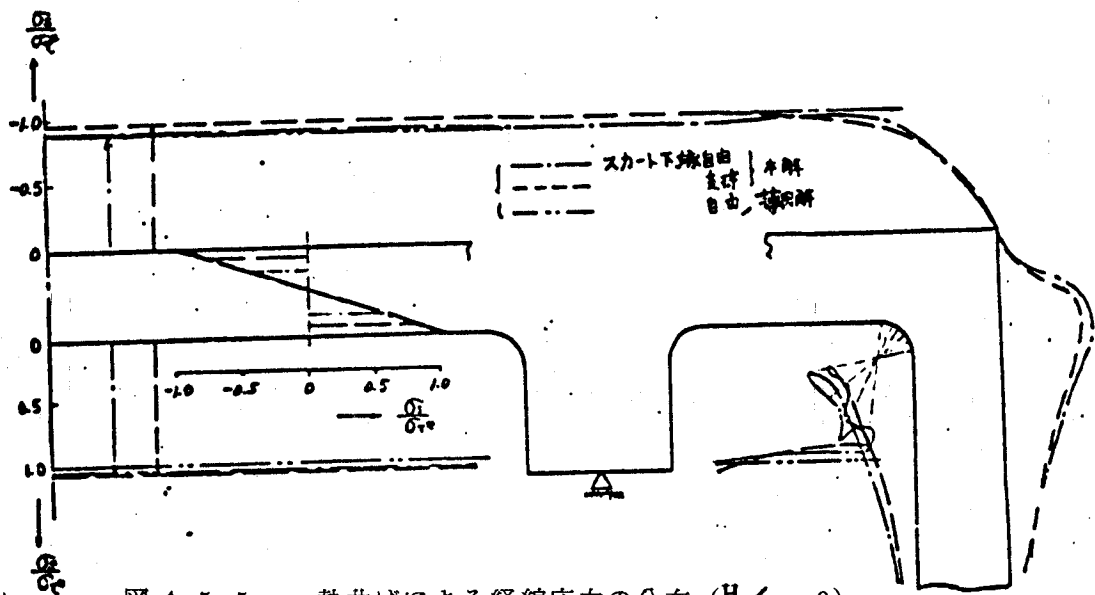


図 4.5.5 熱曲げによる経線応力の分布 ( $H/b=0$ )

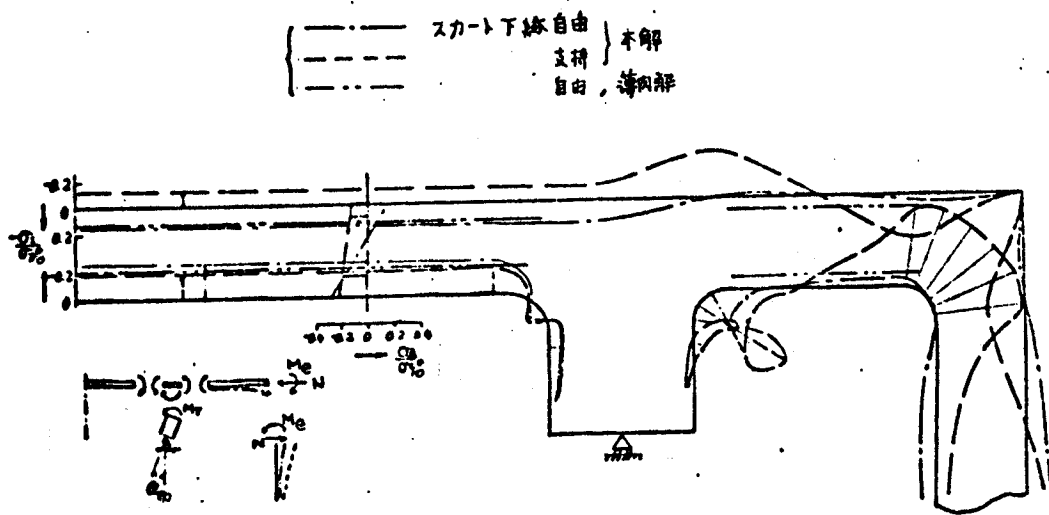


図 4.5.6 熱伸びによる経線応力の分布

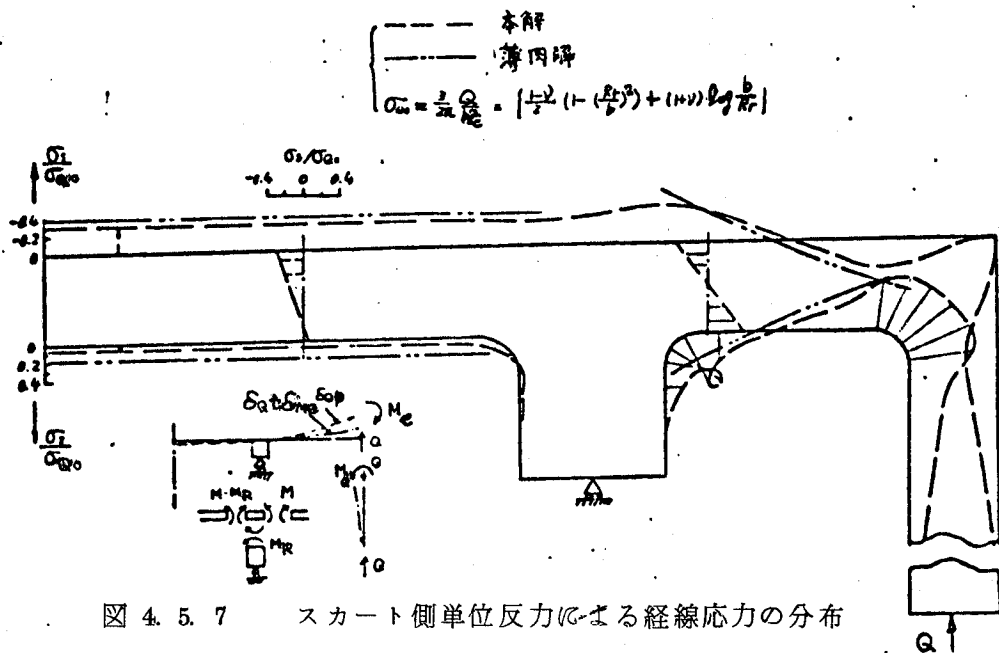


図 4.5.7 スカート側単位反力による経線応力の分布

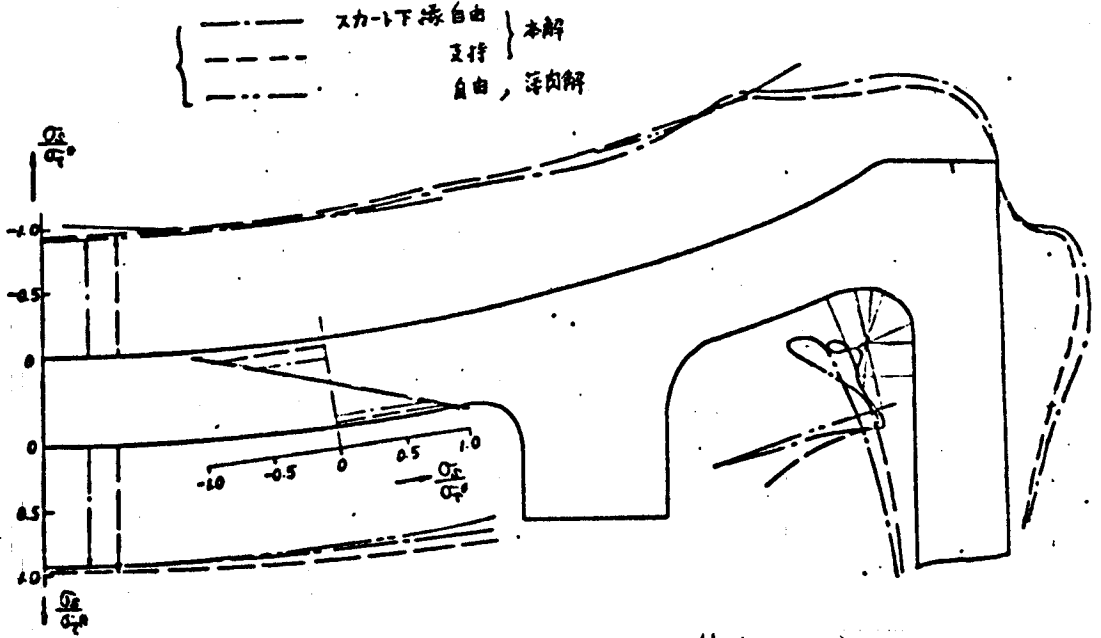


図 4.5.8 熱曲げによる経線応力の分布 ( $H/b=0.2$ )

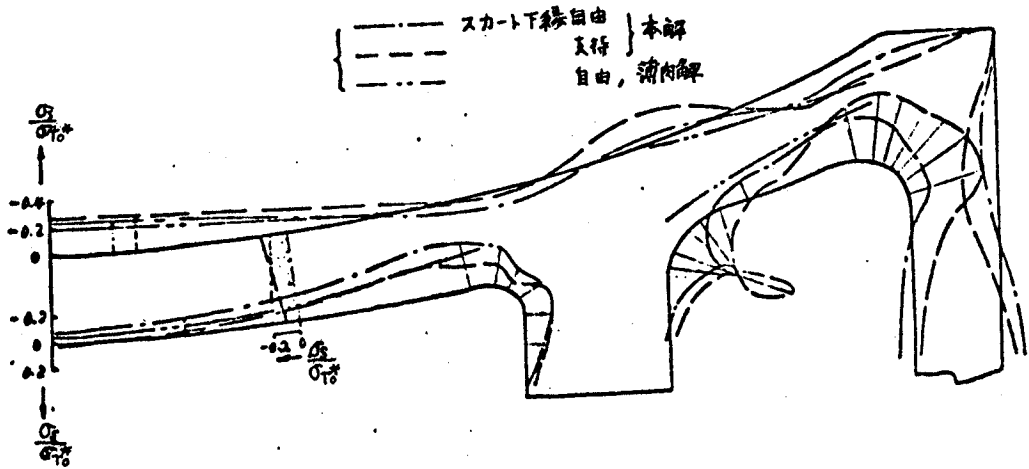


図 4.5.9 熱伸びによる経線応力の分布

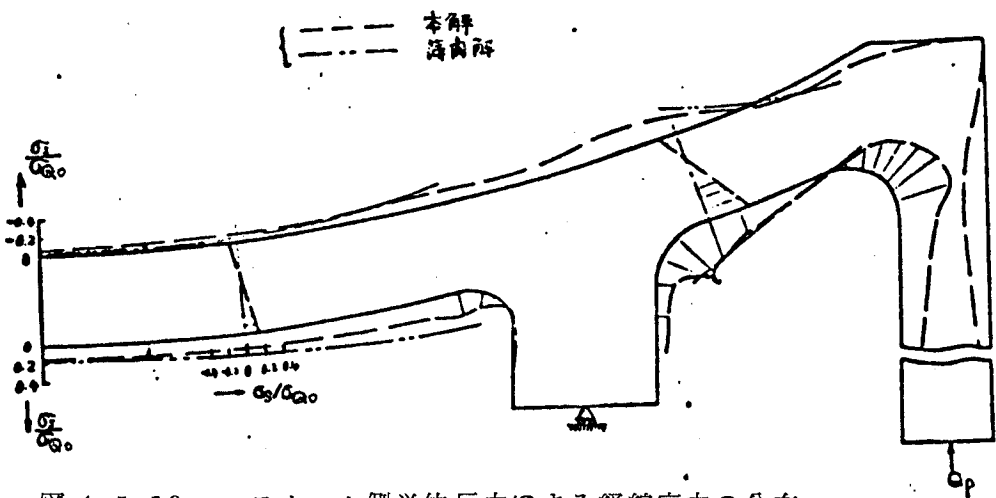


図 4.5.10 スカート側単位反力による経線応力の分布

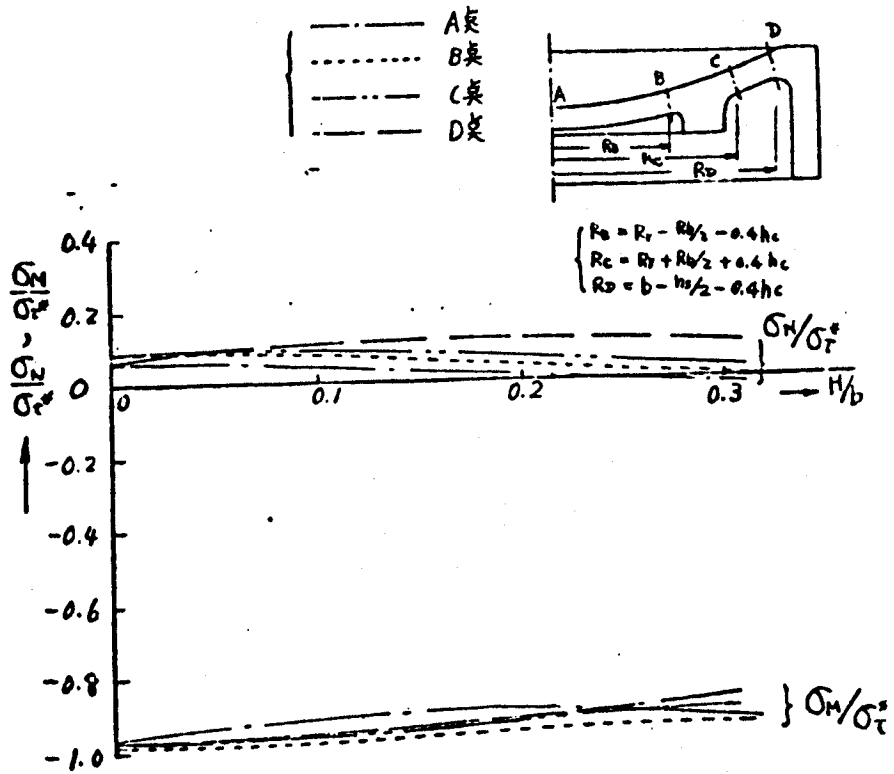


図 4. 5. 11 熱曲げによる主要断面の曲げ応力および膜応力の変化 ( $R_r/b=0.6$ )

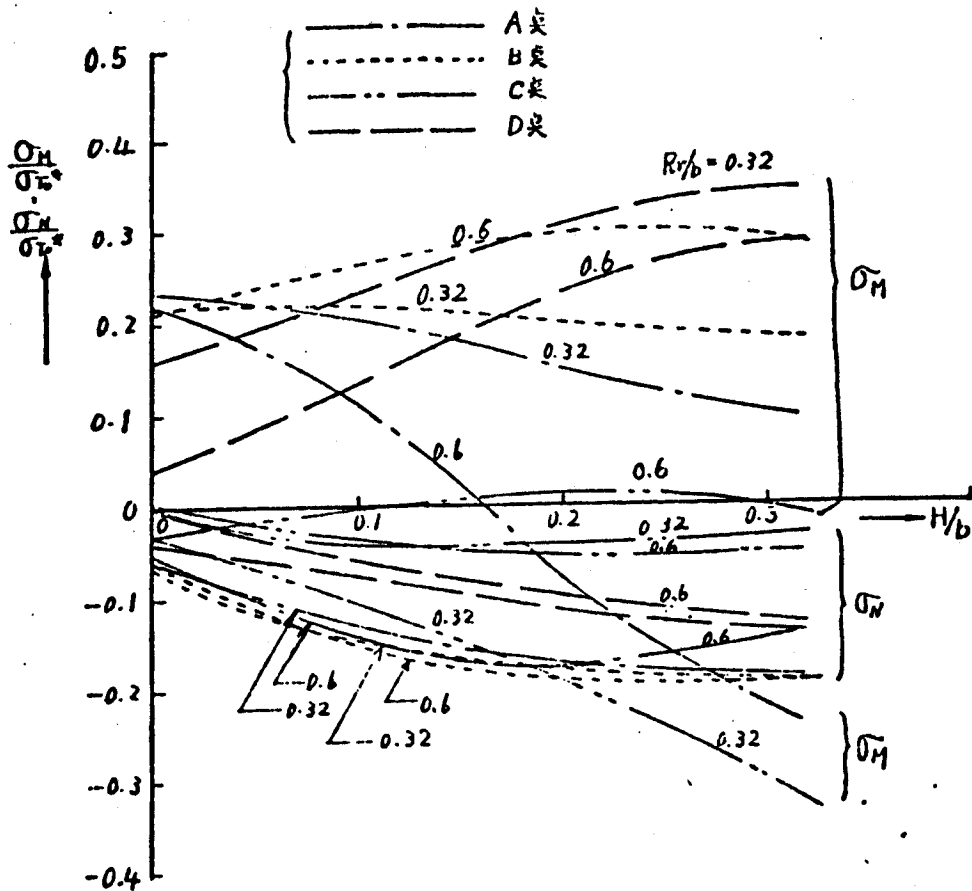


図 4. 5. 12 熱伸びによる主要断面の曲げ応力および膜応力の変化



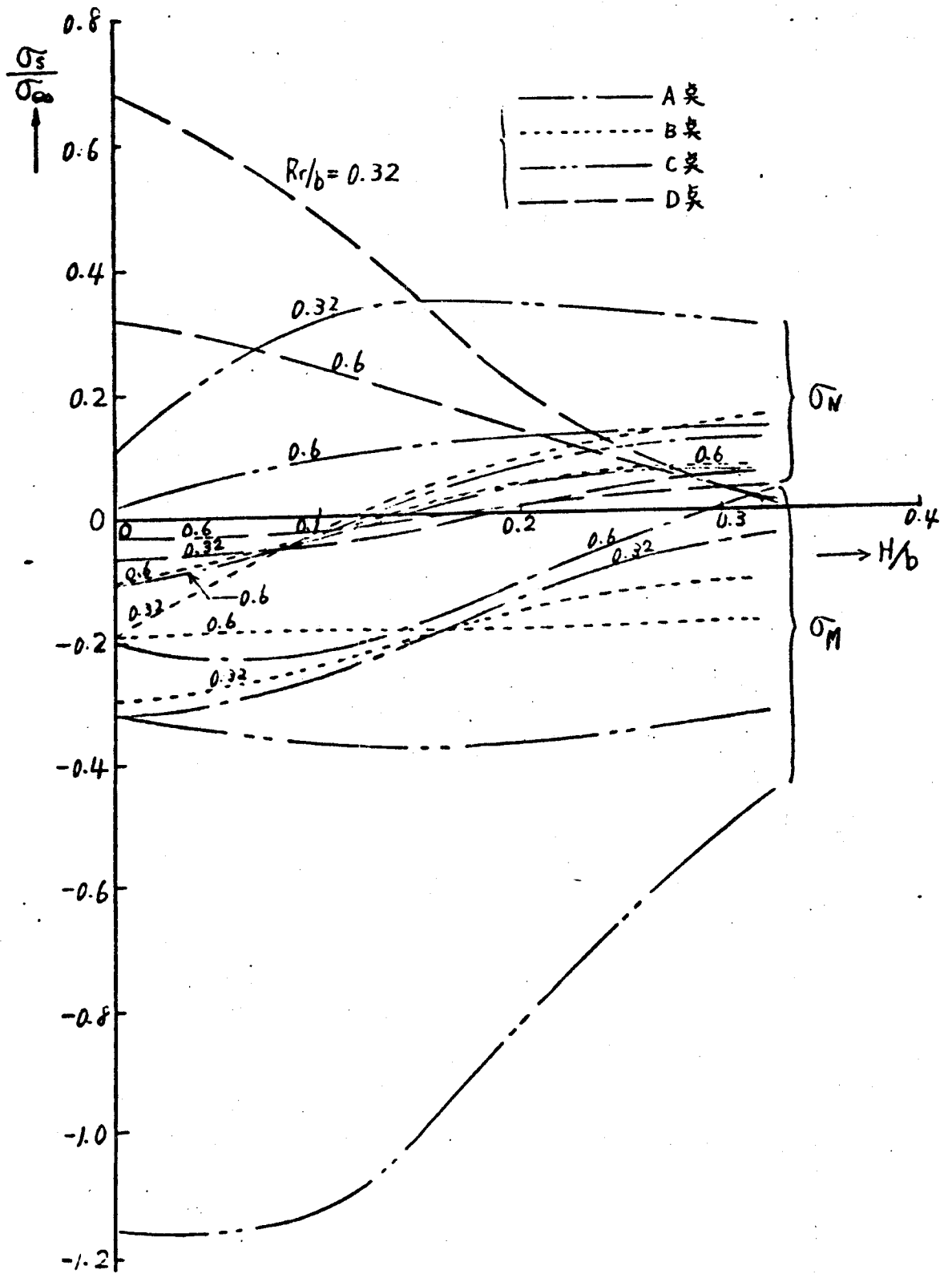


図 4. 5. 13 スカート側単位反力による主要断面の曲げ  
応力および膜応力の変化

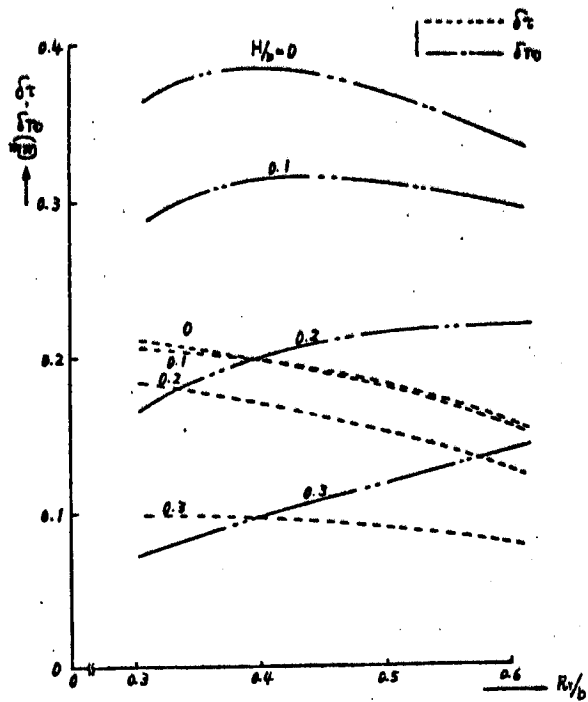


図 4. 5. 14 構造形状による  $\delta\tau, \delta\tau_0$  の変化

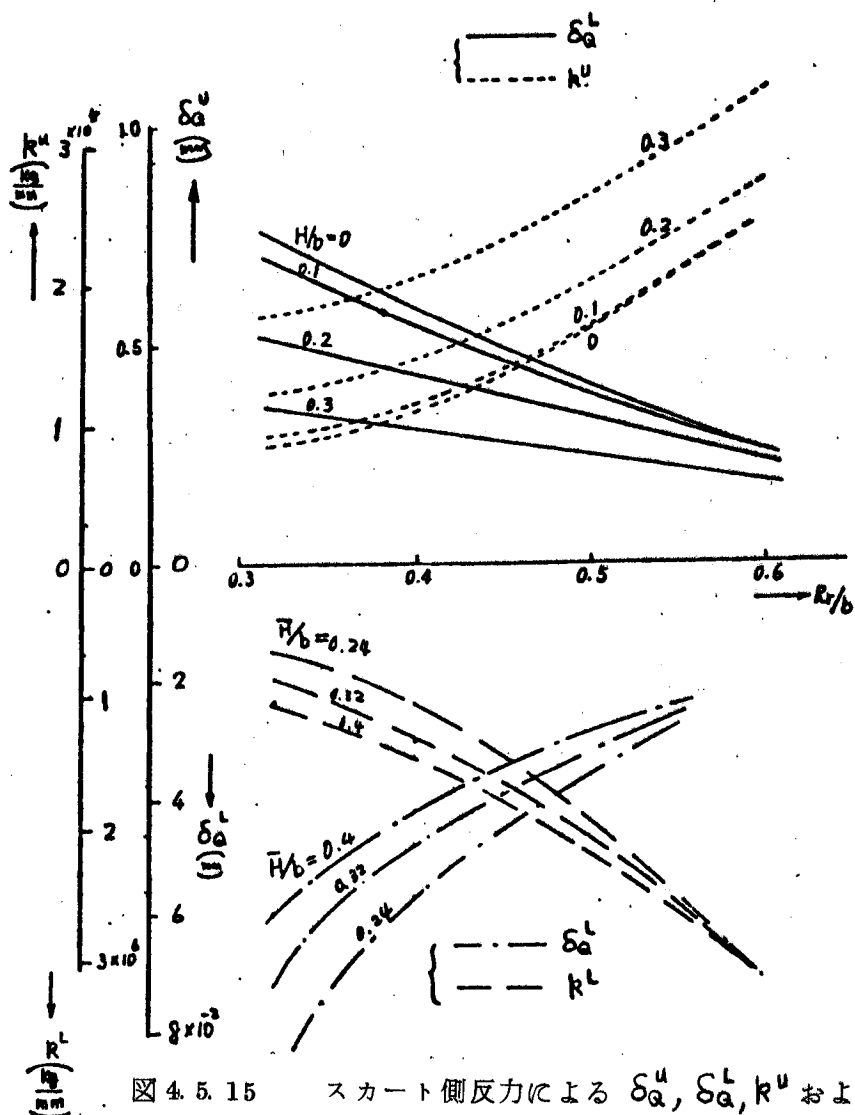


図 4. 5. 15 スカート側反力による  $\delta_a^U, \delta_a^L, k^U$  および  $k^L$  の変化

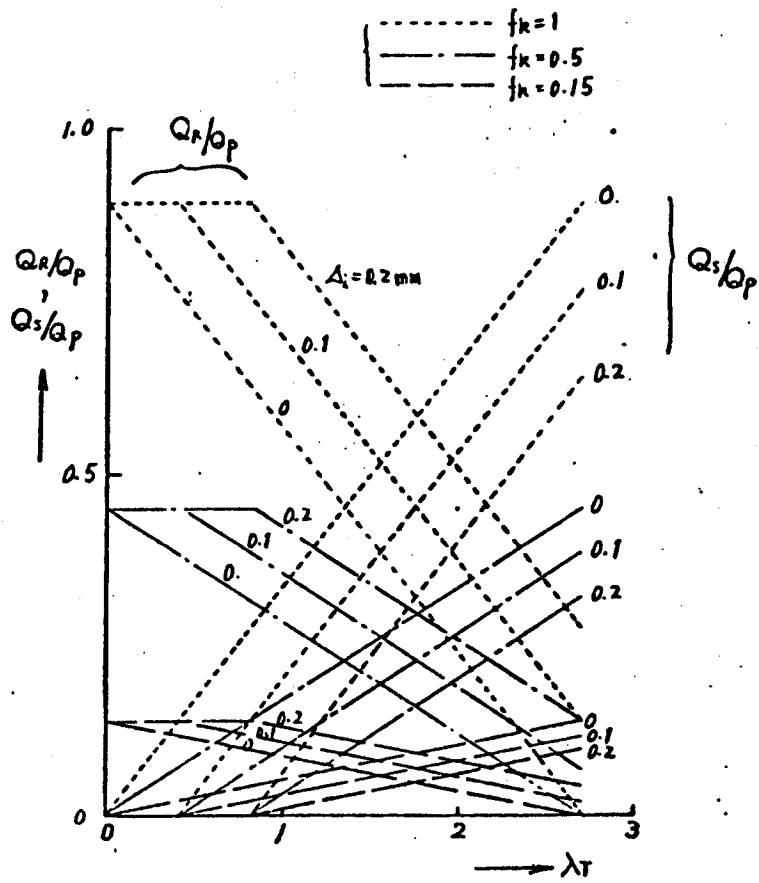


図 4. 5. 16  $\lambda T$  によるリブ側およびスカート側反力の変化  
( $H/b=0$ ,  $Rr/b=0.6$ )

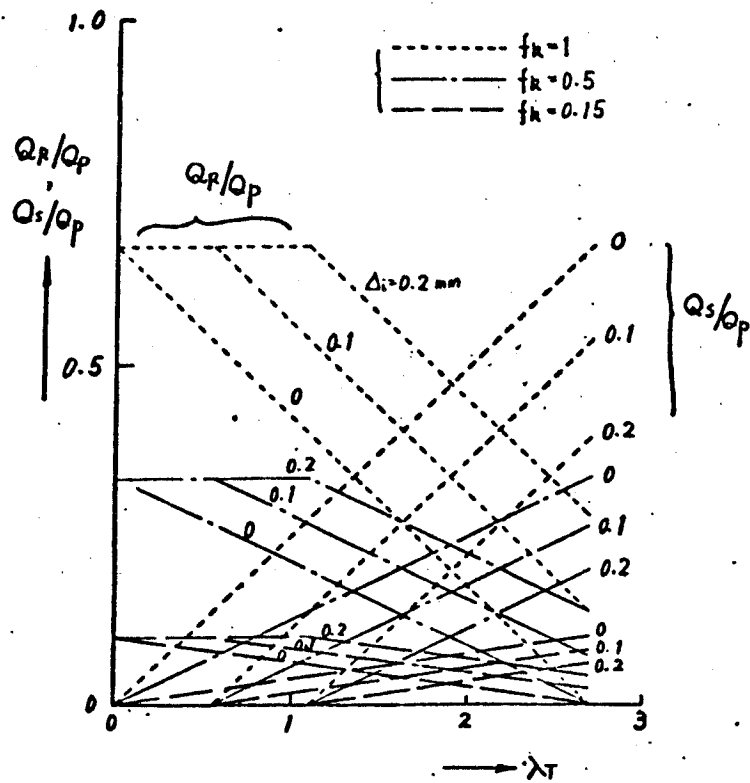


図 4. 5. 17  $\lambda T$  によるリブ側およびスカート側反力の変化  
( $H/b=0.2$ ,  $Rr/b=0.6$ )

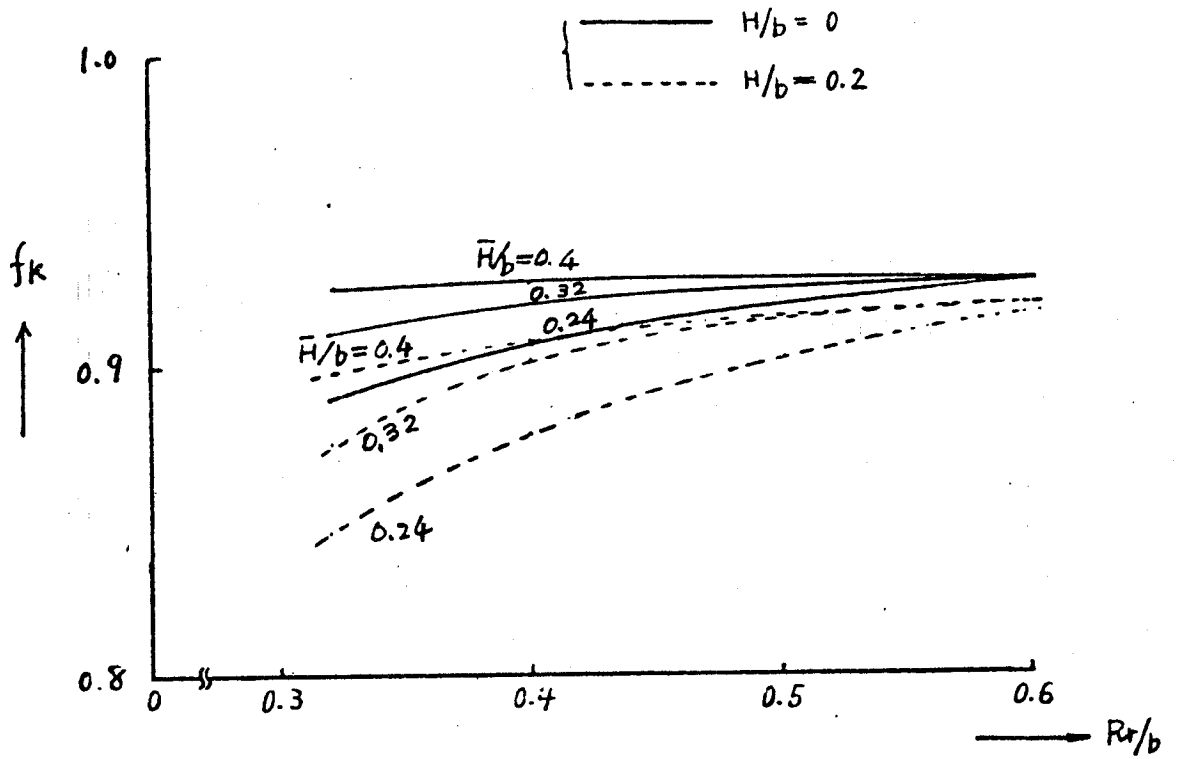


図 4. 5. 18 構造形状による  $f_k$  の変化

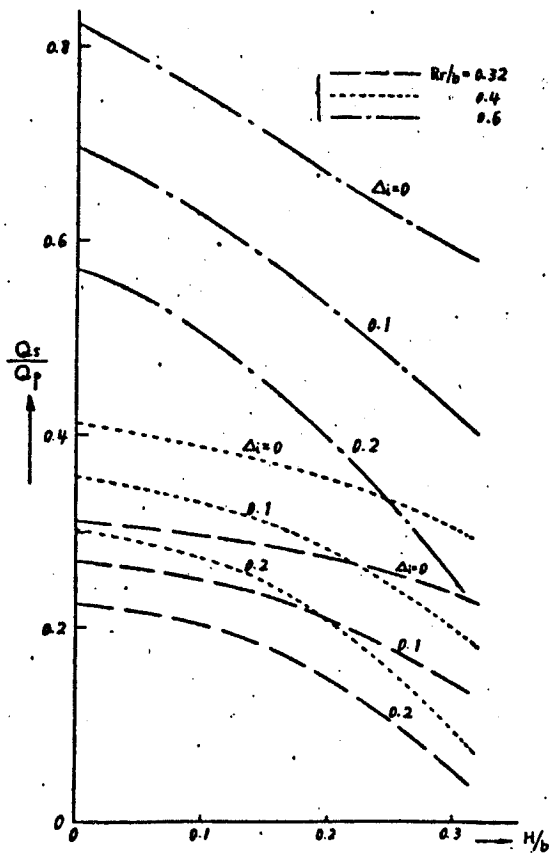


図 4. 5. 19 熱負荷によるスカート側反力の構造形状による変化  
( $f_k = 1, \lambda_T = 2.7$ )

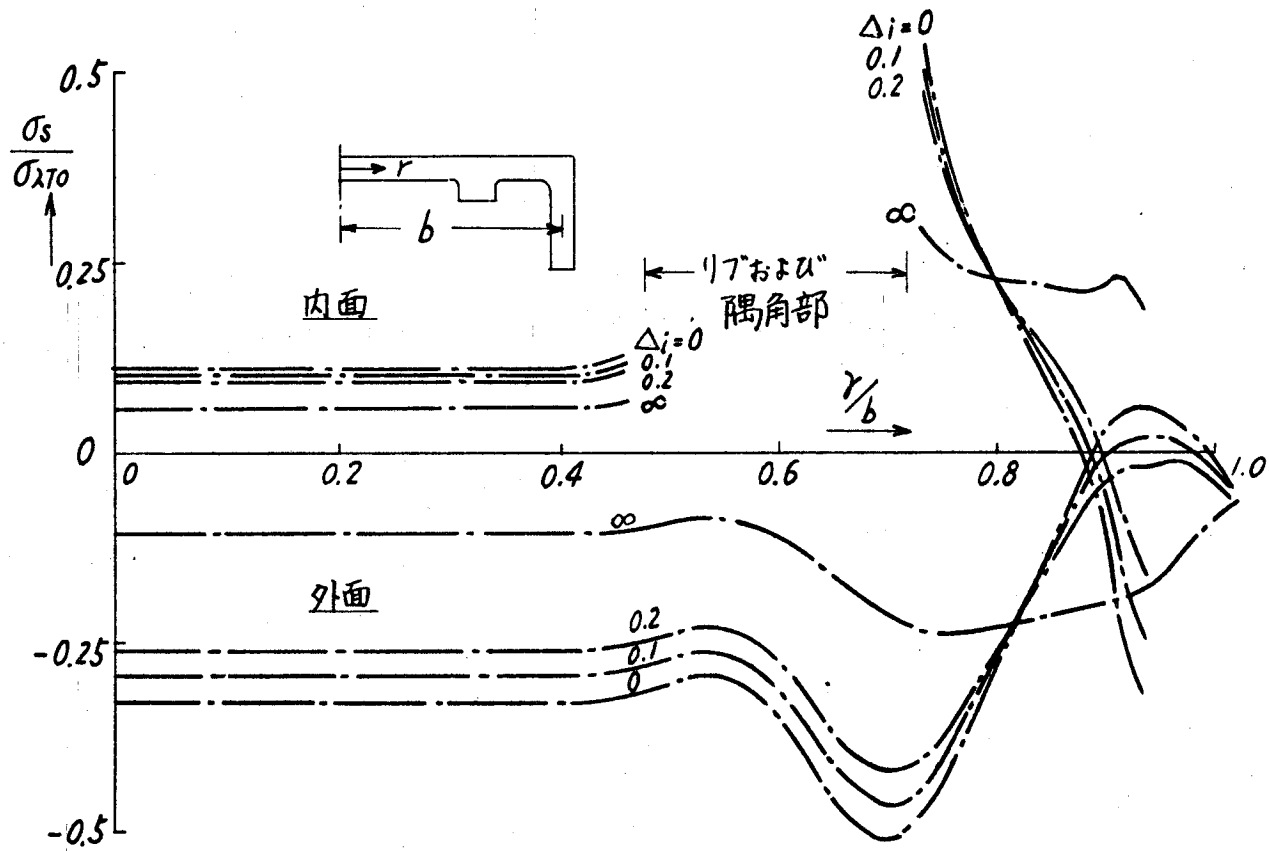


図 4.5.20 熱負荷によるクラウンの経線応力の分布  
 ( $H/b=0$ ,  $Rr/b=0.6$ , 入  $T=2.7$ )

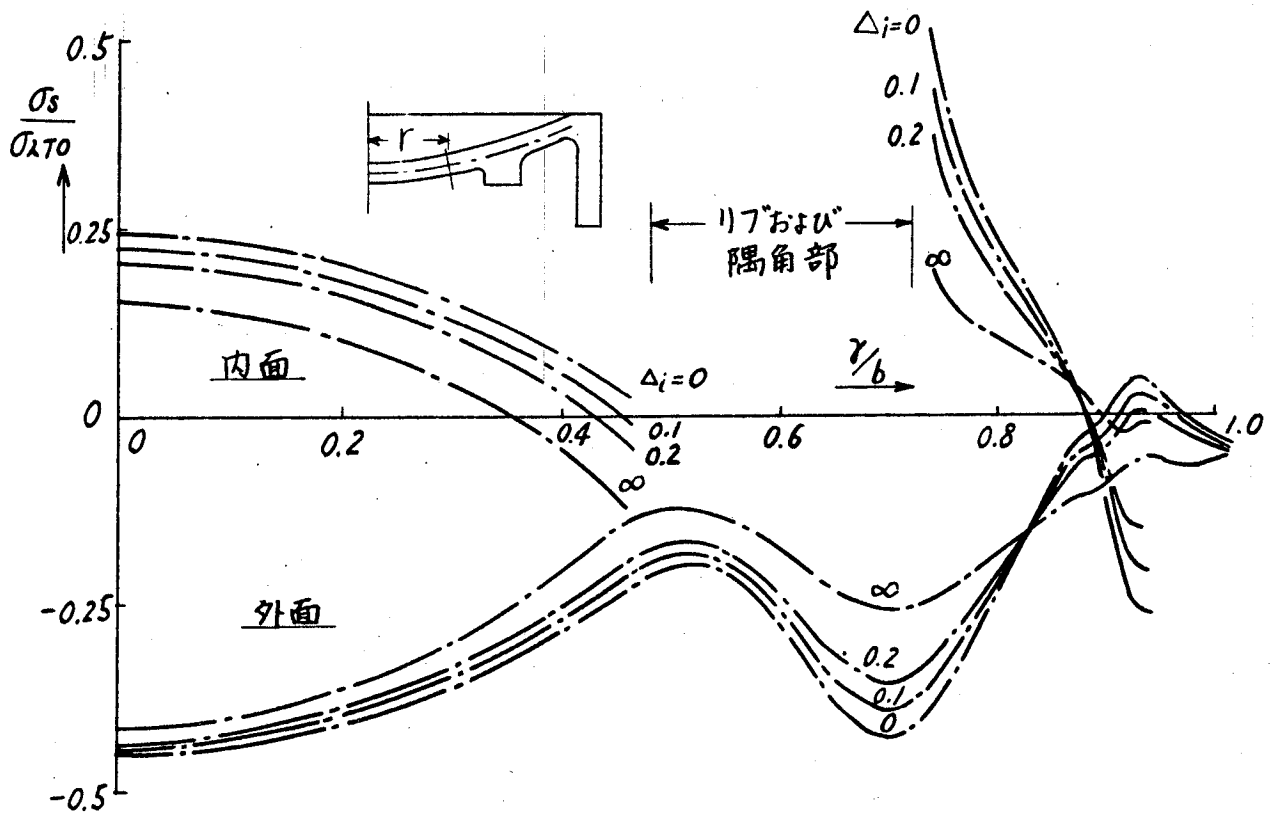


図 4.5.21 熱負荷によるクラウンの経線応力の分布  
 ( $H/b=0.2$ ,  $Rr/b=0.6$ , 入  $T=2.7$ )

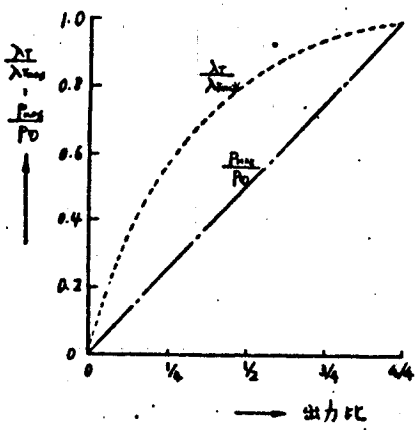


図 4. 5. 22 入TとPmaxの関係

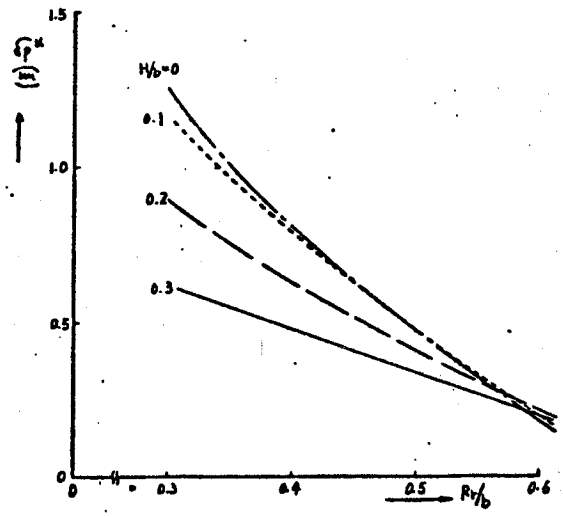


図 4. 5. 23 単位ガス圧荷重によるスカート下縁の変形

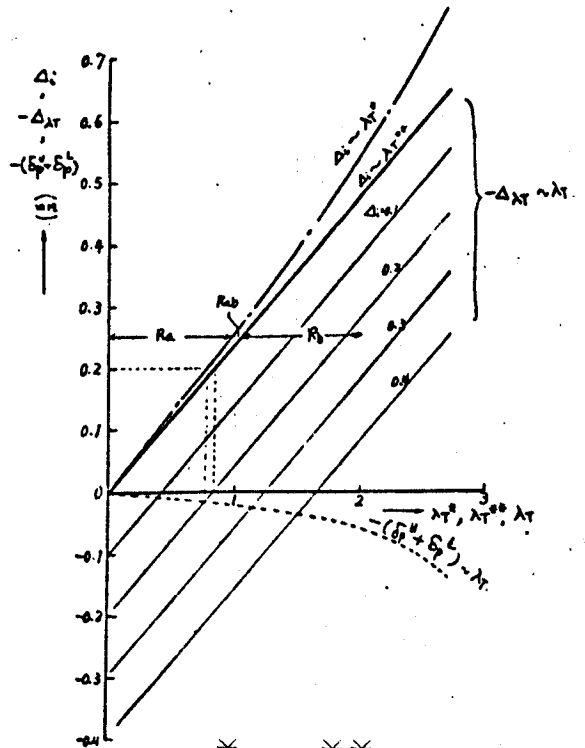


図 4. 5. 24 入T\*, 入T\*\*, とdelta\_iの関係

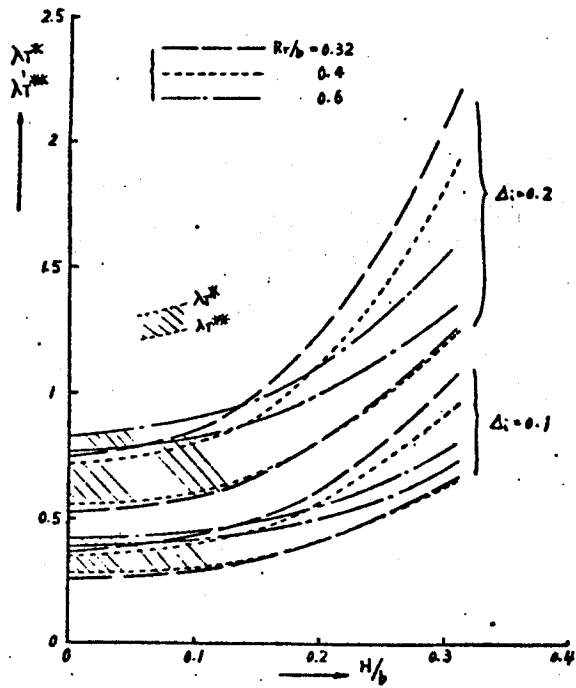


図 4. 5. 25 構造形状による  $\lambda_T^*$ ,  $\lambda_T^{**}$  の変化 ( $f_R=1$ )

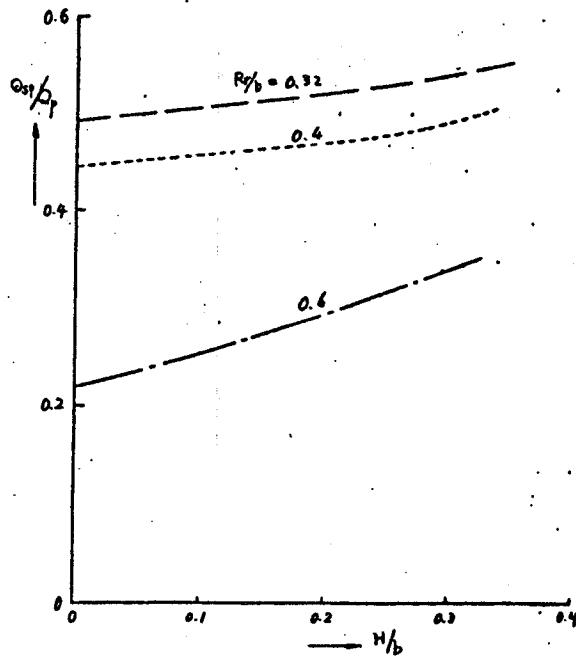


図 4. 5. 26 ガス圧単位荷重によるスカート側反力  
( $f_R=1, \Delta i=0$ )





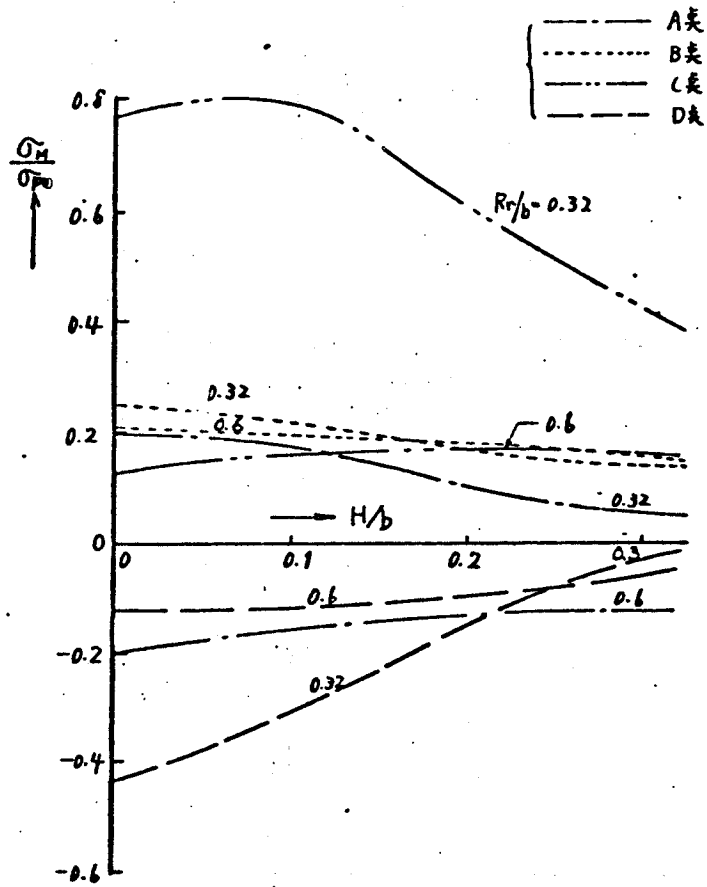


図 4.5.29 ガス圧単位荷重による構造主要点の曲げ応力の変化  
( $f_R=1, \Delta i = \infty$ )

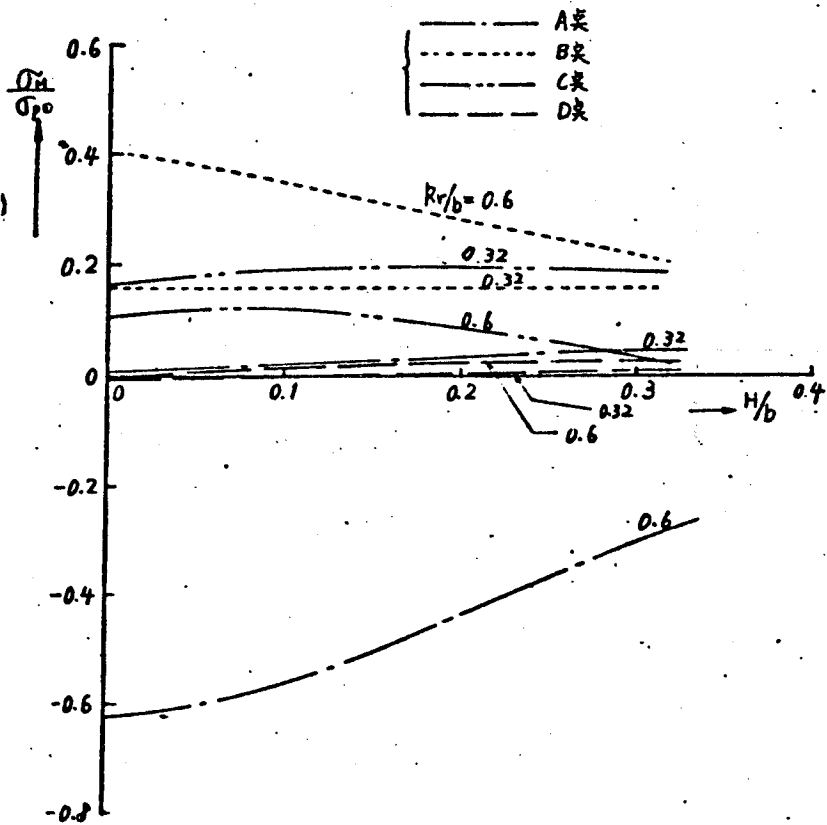


図 4.5.30 ガス圧単位荷重による構造主要点の曲げ応力の変化  
( $f_R=1, \Delta i = 0$ )

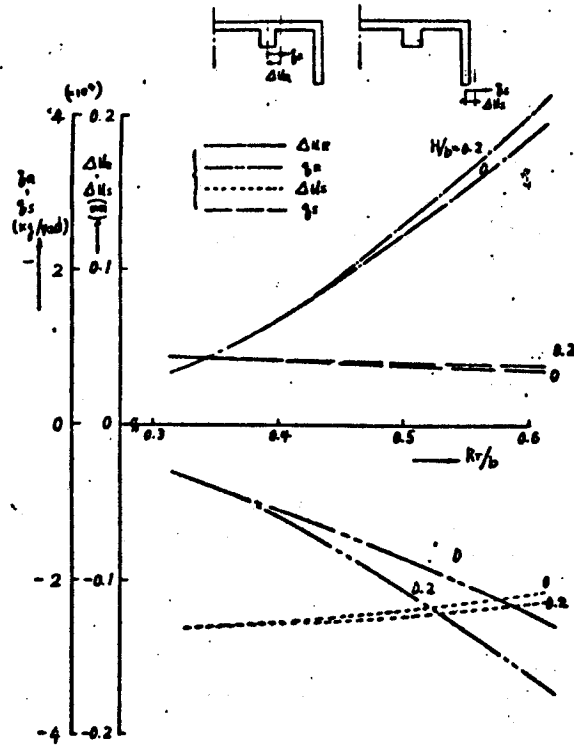


図 4. 5. 31 入 T による接触面のすべりおよびその拘束に要する力  
 ( $f_R = 1, \Delta i = 0, \text{入 T} = 2.7$ )

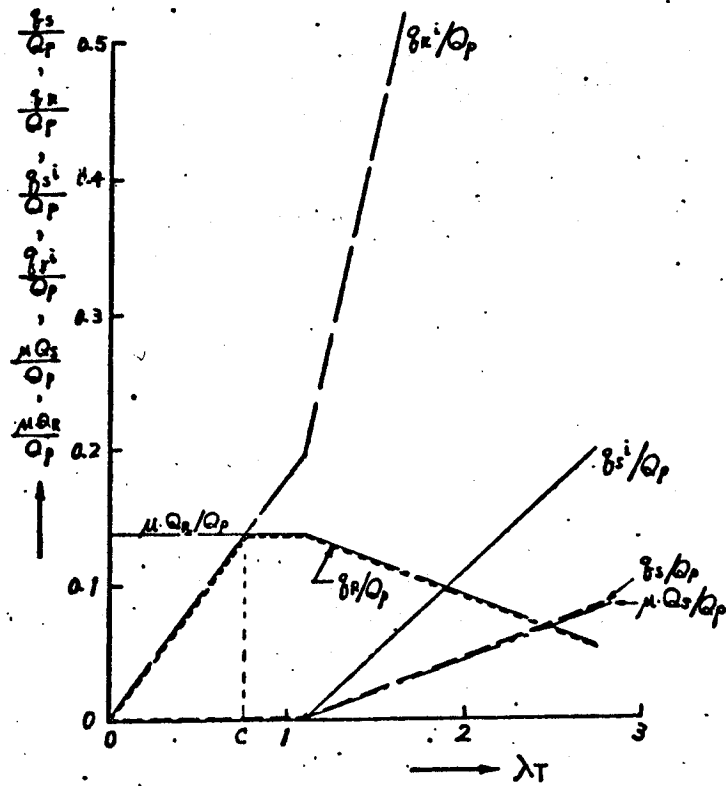


図 4. 5. 32 入 T による接線力の変化の一例  
 ( $H/b = 0.2, Rr/b = 0.6, \Delta i = 0.2$ )

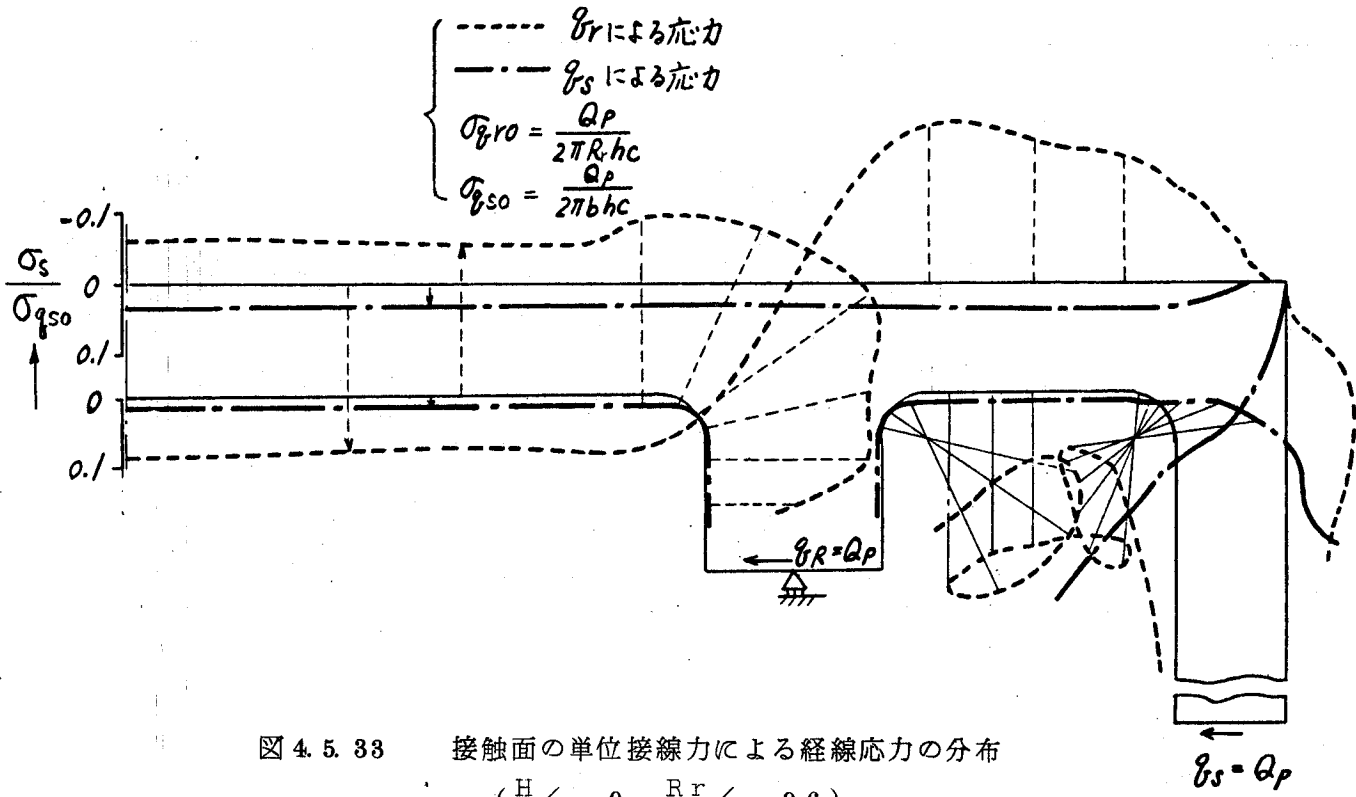


図 4.5.33 接触面の単位接線力による経線応力の分布  
 $(H/b=0, Rr/b=0.6)$

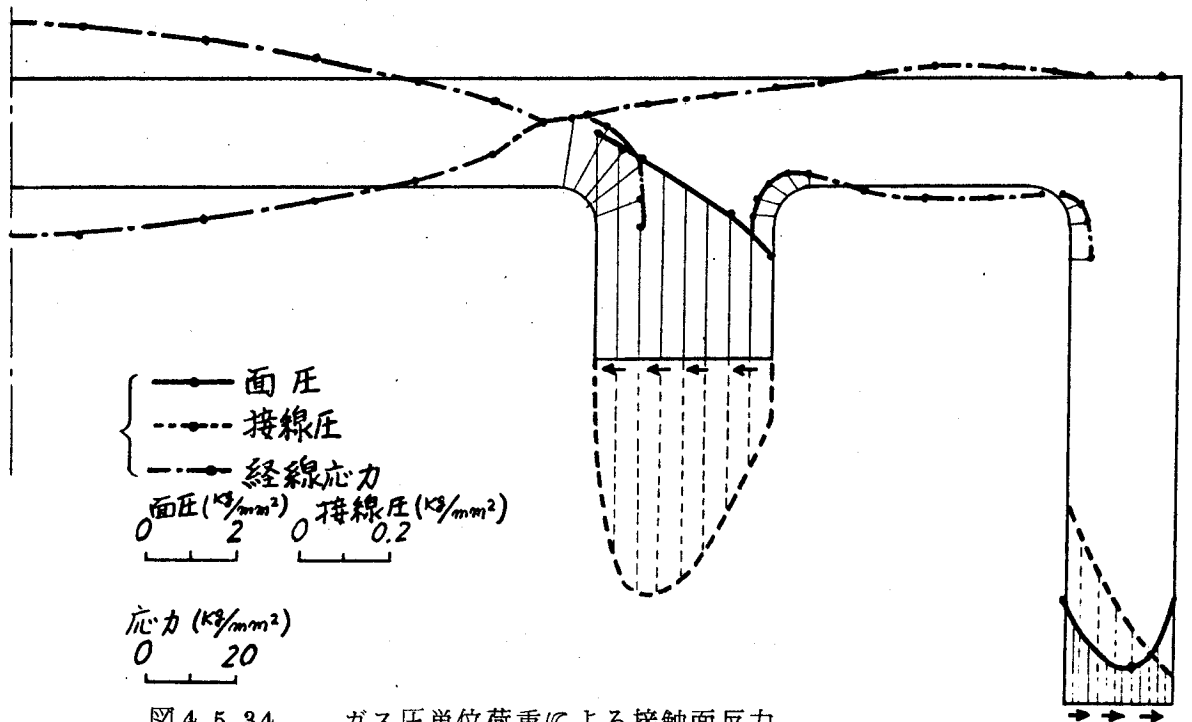


図 4.5.34 ガス圧単位荷重による接触面反力  
 および接線力の分布 ( $\Delta i = 0$ )

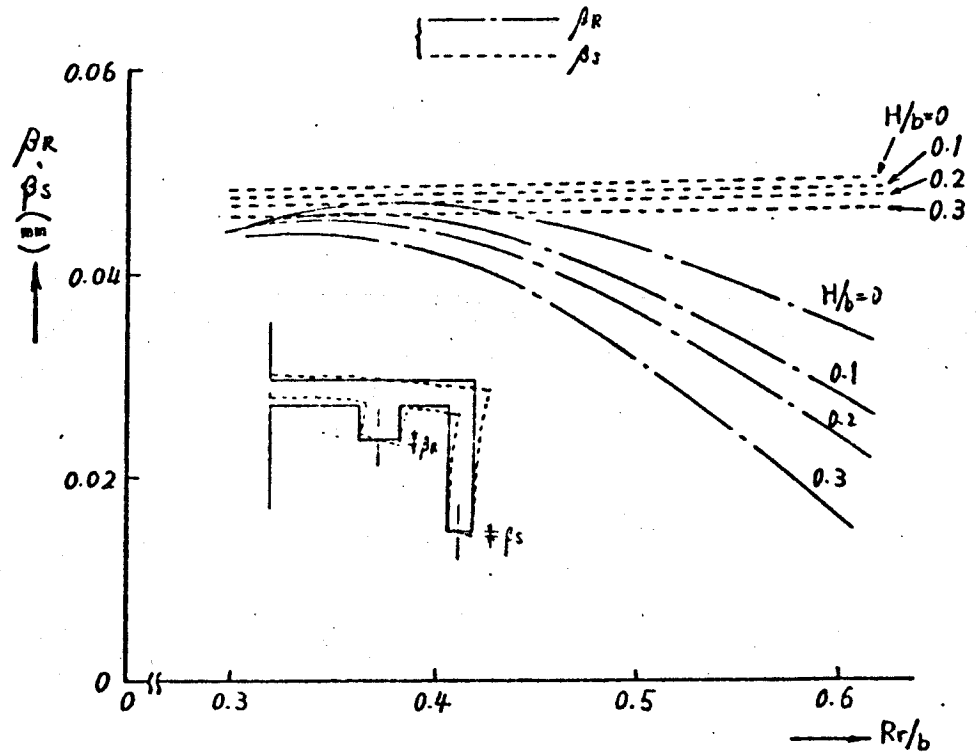


図 4. 5. 35 入 T による接触面の傾き  
 ( $f_R=1, \Delta i=0, \text{入 T}=2.7$ )

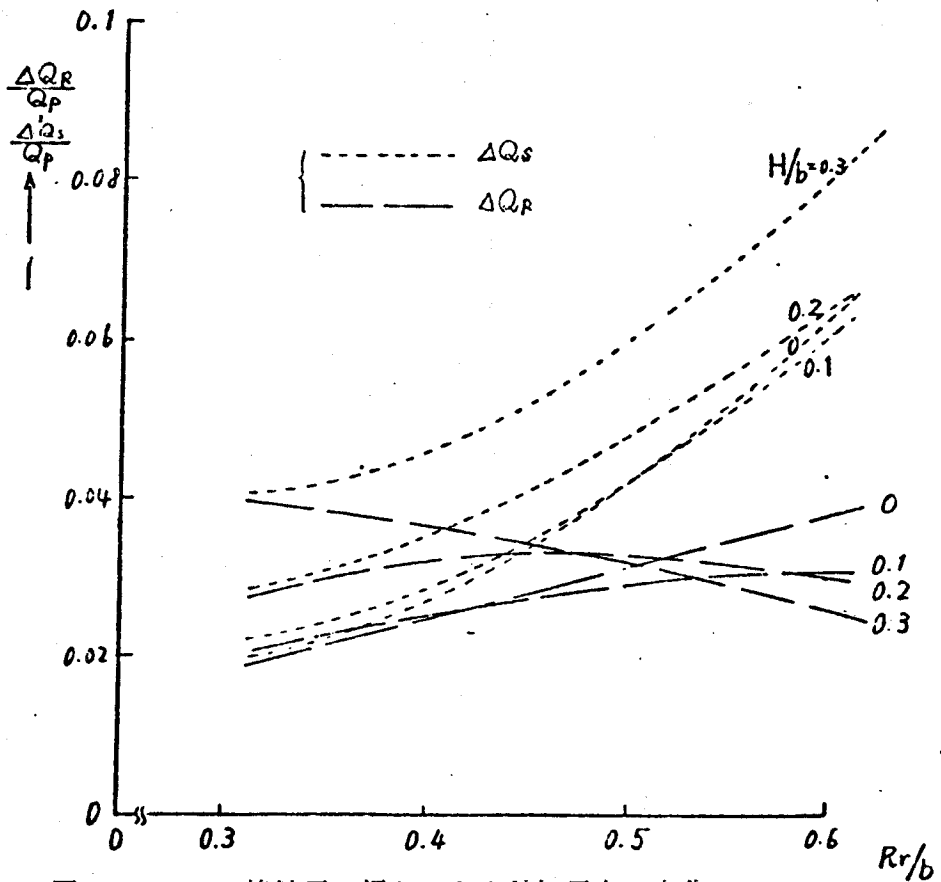


図 4. 5. 36 接触面の傾きによる付加反力の変化  
 ( $f_R=1, \Delta i=0, \text{入 T}=2.7$ )

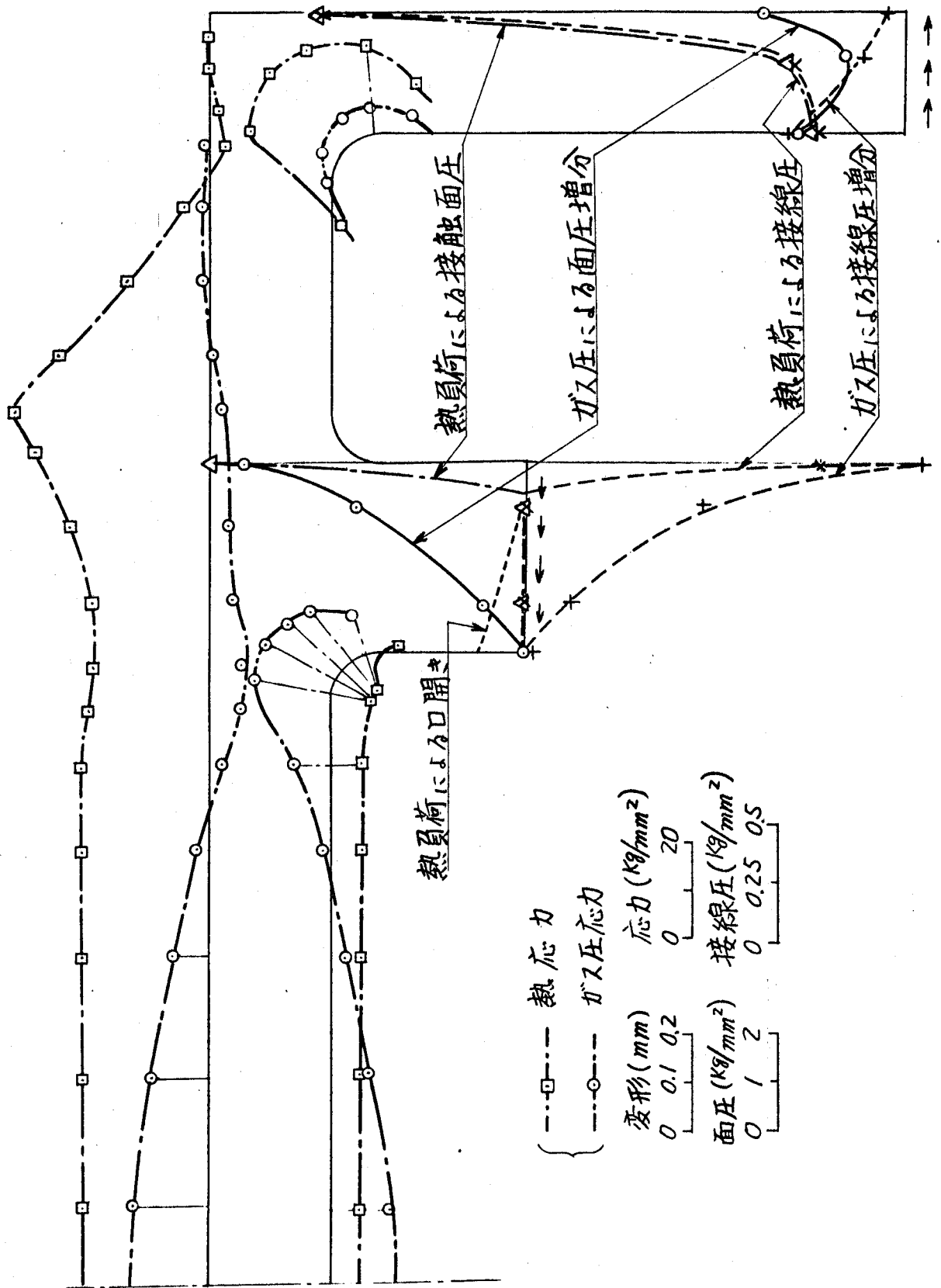


図 4. 5. 37 熱負荷と重畳ガス圧による接触面圧および接線圧分布の変化