電力系統の過渡安定度領域における最適制御に関する研究

山　下　勝　巳

電力系統の過渡安定度領域における最適制御に関する研究

山　下　勝　巳

内　容　梗　概

本論文は，電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うため，発電機のトルク関係の非線形特性をそのまま導入できる最適化法について研究し，その結果をまとめたものである。電力系統の安定度向上策は，事故または異常事態の発生により生じた系統動揺を，制御装置等を利用してすみやかに減衰させ安定な運転を維持させるための重要な課題である。この種の問題解決に，最近，現代制御理論の応用による最適制御に関する研究が注目されてきている。しかしながら，これらの研究は主として系統内の擾乱が十分小さい，すなわち系統を線形系で模擬できる場合を対象としたもので，大きな擾乱が発生し系統を線形系として模擬することが不可能な場合，すなわち系統の過渡安定度領域における安定度向上には検討の余地が残されている。

本論文においては，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形および拡張リアプノフ関数形のリアプノフ関数を，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数として採用し，系統本来の非線形特性を考慮できる最適化の一構成法を示している。また，測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む電力系統に対しても，系統の過渡状態を推定しうるオブザーバを設計し，それを制御系に付加すれば，本制御方式が過渡安定度領域に於ける安定度向上に対して十分役立つことを示している。

第１章においては，まず本研究の目的と意義について述べ，続いて非線形特性を考慮した最適化に対する従来の方法の特徴および本論文の研究内容の概要を述べた。

第２章においては，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形のリアプノフ関数を，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数に採用し，一般化速度を帰還する最適制御法則の導出を行った。

第３章においては，調速機効果を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を前章の手法に基づき導出すると共に，一般化速度を帰還する本制御方式が，過渡安定度領域における系統動作の改善に対して十分寄与しうることを明らかにした。

第４章においては，調速機とＡＶＲ効果を含む一機－無限大母線系統

に対する最適制御法則を前章と同様に導出すると共に，本制御方式の有効性を線形制御との過渡安定度領域に於ける動作特性の比較より示した。

第５章においては，上述の方法に改良を加え，すなわち評価関数として拡張リアプノフ関数形のリアプノフ関数を採用することにより，フィードバック信号として，一般化速度の範疇に属する状態量に限定されていたものを，一般化座標に関する状態量をも直接フィードバック信号に組み込めるようにした。

第６章においては，前章における手法の実規模系統への適用を前提とするため，多機電力系統の最も基本的な３機系統を対象に最適制御法則を導出し，更に本制御方式の導入が連系系統の過渡特性の改善に対しても十分寄与しうることを明らかにした。

第７章においては，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を，推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し，設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを構成すると共に，本オブザーバの有効性についても明らかにした。

第８章においては，上述のオブザーバの設計方法を基盤にして，電力系統の過渡状態を推定しうるオブザーバを構成し，その有効性については調速機効果を含む一機－無限大母線系統の過渡状態推定および最適制御の両面より明らかにした。

第９章においては，以上述べた電力系統の過渡安定度領域における最適制御に関する研究を総括した。

関　連　発　表　論　文

研　究　題　目	著　者　名	発　表　機　関	本論との対応
A Method of Optimization with Power System Nonlinear Properties	K.Yamashita T.Taniguchi	大阪府立大学紀要 Vol.28, No.2 (1979)	第２章 第３章
電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法 (A Method of Power System Optimization Taking into Account the Power System Nonlinearity)	谷口，山下 T.Taniguchi K.Yamashita	電気学会論文誌 第１００－Ｂ巻， ２号（昭５５） Electrical Engineering in Japan Scripta Publishing Co. Vol.100, No.1 (1980)	第２章 第４章
A Method of Optimization taking into account the non-linearity of the power torque-angle curve for a synchronous machine	K.Yamashita K.Okano T.Taniguchi	INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL Vol.35, No.3 (1982)	第５章
多機送電系統の過渡時の安定性向上を目的とした最適制御について (An Optimal Control to Improve Transient Stability of Multi-machine Power System)	山下，岡野，谷口 K.Yamashita K.Okano T.Taniguchi	電気学会論文誌 第１０２－Ｂ巻， ４号（昭５７） Electrical Engineering in Japan Scripta Publishing Co. Vol.102, No.2 (1982)	第６章

研　究　題　目	著　者　名	発　表　機　関	本論との対応
非線形変換を用いた最適オブザーバの一設計法	山下，谷口	計測自動制御学会論文集第２０巻，２号（昭５９）	第７章
On the estimation of the transient state of a synchronous machine by an optimal observer	K.Yamashita T.Taniguchi	INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL 掲載決定	第８章

講　演　論　文　集

(1) 山下，谷口，″負荷特性を考慮した電力系統の準最適制御について″昭５２電気学会全国大会１１６６
(2) 谷口，山下，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について″昭５２電気関係学会関西支部連合大会Ｇ４－２７
(3) 山下，谷口，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について（その２）″昭５３電気関係学会関西支部連合大会Ｇ４－３
(4) 山下，谷口，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について（その３）″昭５４電気学会全国大会８６８
(5) 山下，谷口，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について（その４）″昭５４電気関係学会関西支部連合大会Ｇ４－６
(6) 岡野，山下，谷口，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について（その５）″昭５５電気学会全国大会８９５
(7) 山下，岡野，谷口，″電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法について（その６）″昭５５電気学会全国大会８６３
(8) 岡野，山下，谷口，″多機送電系統の過渡安定度向上を目的とした最適制御について″昭５６電気学会全国大会８６６
(9) 山下，岡野，谷口，″準最適なオブザーバによる電力系統の状態推定について″昭５７電気学会全国大会８８９
(10) 山下，谷口，″準最適設計されたオブザーバによる電力系統の状態推定について″電気学会電力技術研究会　ＰＥ－８２－３２，７３（昭５７－９）
(11) 山下，谷口，″最適オブザーバによる同期機の過渡状態の推定について″，昭５８電気関係学会九州支部連合会大会１６３
(12) 山下，谷口，″最適設計されたオブザーバによる電力系統の過渡状態推定について″電気学会電力技術研究会　ＰＥ－８４－４４，３１（昭５９－７）
(13) 山下，谷口，″最適オブザーバを利用した電力系統の過渡状態推定および最適化について″昭５９電気関係学会九州支部連合会大会５４２

目　　　次

主　要　記　号

x_d ：発電機直軸同期リアクタンス　(p.u.)

x_q ：発電機横軸同期リアクタンス　(p.u.)

x_d' ：発電機直軸過渡リアクタンス　(p.u.)

x_t ：変圧器リアクタンス　(p.u.)

x_e ：一回線あたりの線路リアクタンス　(p.u.)

x_{12}：発電機端子と無限大母線間の全リアクタンス　(p.u.)

P_e ：発電機電気的出力　(p.u.)

P_m ：発電機機械的入力　(p.u.)

V_t ：発電機端子電圧　(p.u.)

V_{td}, V_{tq}：V_tの直軸および横軸成分電圧

I_t ：発電機流出電流　(p.u.)

I_d, I_q：I_t の直軸および横軸成分電流

M ：単位慣性定数$/\omega_0$　(sec^2/rad)

D ：制動定数　(sec/rad)

δ ：E_q'とE_B間の相差角　(rad)

δ_0 ：平常運転時におけるδ

E_q' ：界磁鎖交磁束数に比例した電圧 (p.u.)

e ：平常運転時におけるE_q'

E_{ex}：横軸電圧に換算した界磁電圧　(p.u.)

E_0 ：平常運転時における E_{ex}

E_B ：無限大母線（基準）電圧　(p.u.)

P_l ：平常運転時におけるP_m

T_g ：調速機制御系の時定数　(sec)

K_g ：調速機制御系の利得

T_0' ：発電機の開路時定数　(sec)

T_V ：ＡＶＲ制御系の時定数　(sec)

M_i ：第ｉ機の単位慣性定数 $/\omega_0$　(sec^2/rad)

D_i ：第ｉ機の制動定数　(sec/rad)

δ_i ：同期速度で回転する基準軸と第ｉ機の回転軸との相差角　(rad)

E_i：第 i 機の内部電圧　(p.u.)

B_{ij}：第 i 機と第 j 機間のサセプタンス (p.u.)

P_{li}：第 i 機の発電機機械的入力 (p.u.)

T_{gi}：第 i 機の調速機制御系の時定数　(sec)

K_{gi}：第 i 機の調速機制御系の利得

M_u：誘導電動機の単位慣性定数 (sec)

P_u：誘導電動機機械的出力 (p.u.)

x_{11}：誘導電動機一次側リアクタンス (p.u.)

x'：誘導電動機過渡リアクタンス (p.u.)

T'_u：誘導電動機の開路時定数 (sec)

Δ：変化分

T：転置

$diag$：対角要素

ω_0：$2\pi f_0$　(f_0=60H_z)

P：d/dt

第１章　緒　　論

電力系統は需要の増大に伴い年々巨大化・複雑化してきているが，最近はこれに加えて，公害問題など社会情勢からの制約のため，取得できる電源用地や送電ルートも限定され電源の大容量化・遠隔化の傾向も避けがたい情勢になってきている。このため，少数の大容量発電所と送電線による大容量長距離送電を余儀なくされ，系統計画あるいは系統運用の段階において，系統安定度に関する問題が一層重要性を増すとともに，より精度の高い解析が要求されるようになってきている。特に，このなかでも安定度向上策，すなわち事故または異常事態の発生により生じた系統動揺を，すみやかに減衰させ安定な運転を維持させるための対応策が重要な課題となり，これに関してはこれまで種々の方法が報告されてきている。その代表的なものとして，並行回線数の増加，複導体方式の採用，機器リアクタンスの減少および直列コンデンサの挿入等による系統リアクタンスを減少させる方式，しゃ断器および保護継電器の高速化等による故障の高速除去方式，また調速機および自動電圧調整器（ＡＶＲ）等の制御系の導入による機器の制御方式等が挙げられる。ここでは，機器の制御方式に着目するわけであるが，これについては現代制御理論における最適制御の適用により数学的にも物理的にも大きな展望が開けるようになり，従来より一層深い考察および検討が加えられるとともに多大な成果が得られるようになってきている。しかしながら，これらの研究は主として理論展開の容易さから，系統内の擾乱が十分小さい，すなわち系統を線形系で模擬できる場合を対象としたもので[(1)~(10)]，大きな擾乱が発生し系統を線形系として模擬することが不可能な場合，すなわち系統の過渡安定度領域まで取り扱えるものは比較的少ない。非線形系の最適化手法としては，（１）バングバング制御を行う方法[(11)~(13)]（２）線形最適制御問題を拡張する方法[(14)(15)]（３）逆最適制御問題の考え方を適用する方法[(16)(17)]などが挙げられる。（１）は，過渡動揺を最短時間で抑制できるが，開ループ制御であるため，システム特性を正確に把握していないと極めて危険な場合が生じ，特に，電力系統のように系統条件や運転点の変化に

対して非常に高感度のシステムを対象とする場合，バングバング制御方式には，やや難点があるものと考えられる。（２）は，二次形式の評価関数をもつ線形最適制御問題の展開に若干の修正を加え，電力系統の過渡安定度領域における制御の取り扱いを可能にしているが，フィードバック利得を決定する際，線形最適制御理論における行列リカッチ方程式の解を基本とするので，解析途中でシステムを線形化する必要が生じる。このため，得られるフィードバック利得は評価関数を最小にする最適フィードバック利得の近似解となり，また，この線形化のため，制御方式の適用範囲には十分留意を要するものとなる。（３）は，既知制御法則の施された閉ループ系に対して，この制御法則が最適となる評価関数の決定問題として捉えるものであり，制御法則を既知とするので，間接的な取り扱いにはなるが，非線形系そのもので理論展開のできる点に特長を有する。Ｆ．Ｅ．Ｔｈａｕ氏はこの考え方に基づいて，非線形系の最適化に対する一つの関係式を導出している。また，この関係を単一な非線形入力からなる線形モデルに適用し，制御方式として奇数倍のべき級数からなる非線形制御法則を採用すれば，最適化が簡単な代数計算によって行えることも示している[16]。しかしながら，電力系統のように発電機のトルク関係の非線形微分方程式を含むシステムに対しては，上述の関係式を成立させて解くことは非常に難しい問題と思われる。

本論文では，電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うため，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形[18]および拡張リアプノフ関数形[19]のリアプノフ関数を，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数として採用し，系統本来の非線形特性を考慮できる最適化の一構成法を示している。また，測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む電力系統に対しても，系統の過渡状態を推定しうるオブザーバを設計し，それを制御系に付加すれば，本制御方式が過渡安定度領域に於ける安定度向上に対して十分役立つことを示している。

まず，評価関数にエネルギ関数形のリアプノフ関数[18]を用いて一般化速度をフィードバックする制御方式を導出し，タービンから入る入力トルクを制御する調速機制御系を含む一機－無限大母線系統の最適化に適用している。更に，本制御方式の動作特性に与える影響を位相面軌道およ

び制御信号－時間関係図を用いて示すとともに制御の質の比較検討を行い，一般化速度を帰還する本制御方式が，過渡安定度領域における系統動作の改善に対して十分寄与しうることを明らかにしている。また，上記系統に加えて界磁電圧を制御するＡＶＲ系を考慮し，調速機とＡＶＲ制御系を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を，提案した手法にしたがって構成するとともに，本制御方式の有効性を位相面軌道および制御信号－時間関係図から示している。更に，線形制御（一階線形常微分方程式系を対象に，二次形式の時間積分の評価関数を最小にする制御）との過渡安定度領域に於ける動作特性の比較検討を行い，本制御方式によれば安定化可能な場合でも，線形制御では系を安定にすることができず，脱調に至る場合があることを示唆している。

次に，上述の方法に改良を加え，すなわち評価関数として拡張リアプノフ関数形のリアプノフ関数(19)を採用することにより，フィードバック信号として，発電機の速度偏差など一般化速度の範疇に属する状態量に限定されていたものを，発電機の位相（あるいは発電機間の位相差）など一般化座標に関する状態量をも直接フィードバック信号として制御系に組み込めるようにしている。提案した手法にしたがい，調速機制御系を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を導出するとともに，この制御方式による過渡特性を，先の一般化速度のみフィードバックする制御方式の過渡特性と比較検討することにより，一般化速度のみならず一般化座標についても直接フィードバックする本制御方式の有効性を明らかにしている。更に，この方式の実規模系統への適用を前提とするため，調速機制御系を含むＮ機の発電機からなる多機電力系統を対象系統とし，上記で示す手法に基づき最適制御法則を導出している。一例として，多機電力系統の最も基本的な３機系統を取り上げ，本制御方式の過渡時における動作特性に与える影響を，各発電機間の相差角および制御信号の時間応答から示すとともに，本制御方式の導入が，相互に干渉し合う連系系統の過渡特性の改善に対しても十分寄与しうることを明らかにしている。

最後に，電力系統のすべての状態量が制御の各時刻において，直接測定できない場合の一対応策となるオブザーバの設計を行うものであるが，

ここでは，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を[20]，推定誤差の減衰の割合（オブザーバにより得られる推定値が真値に近づく程度）を評価するのに応用し，設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを構成している。一例として，誘導電動機負荷６０％および定インピダンス負荷４０％からなる負荷特性を考慮した一機－無限大母線系統の状態推定に適用し，本オブザーバの有効性を各状態量の時間応答から明らかにしている。更に，上述の線形制御系を対象とするオブザーバの設計方法を基盤に，電力系統の過渡状態を推定しうるオブザーバを構成することにより，先の制御方式の測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む一般的な制御系への適用を可能にしている。また，調速機制御系を含む一機－無限大母線系統の過渡状態推定に本オブザーバを適用し，その有効性を各状態量の時間応答から示すとともに，推定量を用いた最適制御の過渡応答を従来の制御方式による過渡特性と比較することにより，最適制御への有効性も示している。

第２・１節　緒　言

電力系統内に，事故または異常事態が突発的に発生した場合，系統内の電力授受に異常をきたし，いわゆる系統動揺の状態になる。電力系統の安定度向上策は，この系統動揺をすみやかに減衰させ安定な運転を維持させるための重要な課題であり，これに関してはこれまで種々の方法が報告されてきている。特に，発電機における調速機およびＡＶＲ制御系の応答速度の改良に伴って，これらの制御系を導入した安定度向上策が最近注目され，あわせて，現代制御理論における最適制御の適用により，従来より一層深い考察および検討が加えられるとともに多大な成果が得られるようになってきている。しかしながら，これらの研究は主として理論展開の容易さから，系統内の擾乱が十分小さい，すなわち系統を線形系で模擬できる場合を対象としたもの[(1)~(10)]で，大きな擾乱が発生し系統を線形系として模擬することが不可能な場合，すなわち系統の過渡安定度領域まで取り扱えるものは比較的少ない。非線形系の最適化手法としては，

（１）バングバング制御を行う方法

（２）線形最適制御問題を拡張する方法

（３）逆最適制御問題の考え方を適用する方法

などが挙げられる。（１）は，直列コンデンサ[(11)]，直並列抵抗[(12)]および発電機界磁電圧[(13)]等を操作することにより過渡動揺を最短時間で抑制しているが，開ループ制御であるため，システム特性を正確に把握していないと極めて危険な場合が生じ，特に，電力系統のように系統条件や運転点の変化に対して非常に高感度のシステムを対象とする場合，バングバング制御方式には，やや難点があるものと考えられる。（２）には，電力－相差角曲線を，運転点を一つの頂点とする二つの区分的連続な線形化システムで表現し，二つの線形化システムに対する評価関数の最小化より準最適制御法則を決定する方法[(14)]，また，$px = f(x) + Bu$ で表わされた非

線形系のリアプノフ関数にクラソフスキーの方法を適用し，安定化信号を $u = -F \cdot f(x)$ の形式で求める方法等があるが[15]，基本的には，線形最適制御理論における行列リカッチ方程式の解を必要とするので，解析途中でシステムを線形化する必要が生じる。このため，得られるフィードバック利得は評価関数を最小にする最適フィードバック利得の近似解となり，また，この線形化のため，制御方式の適用範囲には十分留意を要するものとなる。（３）は，既知制御法則の施された閉ループ系に対し，この制御法則が最適となる評価関数の決定問題として捉えるものであり，制御法則を既知とするので，間接的な取り扱いにはなるが，非線形系そのもので理論展開のできる点に特長を有する。Ｆ．Ｅ．Ｔｈａｕ氏はこの考え方に基づいて，非線形系の最適化に対する一つの関係式を導出しているが[16]，電力系統のように発電機のトルク関係の非線形微分方程式を含むシステムに対して上述の関係式を成立させて解くことは非常に難しい問題と思われる。

本章では，電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うため，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形のリアプノフ関数[18]を最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数として採用し，系統本来の非線形特性を考慮できる最適化の一構成法を示すものである。

すなわち，電力系統の動特性式が一般のｎ個の二階常微分方程式系で記述されるとき，系の一般化エネルギ関数はリアプノフ関数としての性質をもち，その時間導関数は一般化速度の二次形式で与えられる。一方，定値制御問題におけるＤＰの方法によれば[23]~[25]，最適制御の決定は，積分形の評価関数の被積分項（被積分関数）と閉ループ系に対するリアプノフ関数の時間導関数の和として構成される合成関数の，制御入力に関する最小化により行うことができる。そこで，系のフィードバック制御を一般化速度の線形結合で行うものと限定し，これを電力系統に施せば，上述の合成関数はフィードバック利得の二次形式となり，二次形式の最小化手順[26]の適用により最適フィードバック利得の決定が行える。なお，この解析過程においては発電機のトルク関係の非線形特性をそのまま導入できるので，本制御方式によれば系統の最適化が過渡安定度領域まで言及しうる。

第2・2節　最適性の原理 [23][24]

制御対象の動特性式および評価関数のそれぞれが

$$\dot{x} = f(x,u)$$
$$PI = \int_t^\infty F(x,u)d\tau \qquad (2.1)$$

ここに,

x: n次元の状態ベクトル

u: r次元の制御ベクトル

$f(x,u)$: x および u に関して微分可能なn次元ベクトル関数

$F(x,u)$: x および u に関して微分可能なスカラ関数

で与えられる無限時間区間の最適レギュレータ問題の解法に,リアプノフの第2の方法と最適制御との結びつきを利用した方法を適用する。[25]

まず,上述の最適レギュレータ問題は,全時間区間〔t,∞〕において積分形評価関数を最小にする最適制御 u を求める問題であるが,ここでは最適性の原理「初期状態および初期決定がいかなるものであっても,それ以後の決定は最初の決定から生ずる状態に関して最適制御方策を構成しなければならない」より,それを見かけ上,最初の部分区間〔$t, t+\Delta t$〕における u の最適なものを求める問題に置き換え,その結果より,全時間区間〔t,∞〕を通じて最適制御 u が満たすべき条件を導出する。いま,時刻tにおける初期状態 $x(t)$ に対する評価関数の最小値としてスカラ関数 $V[x(t)]$ を

$$V[x(t)] = \min_u \int_t^\infty F(x,u)d\tau \qquad (2.2)$$

で定義する。このとき,最適化過程を〔i〕t から $t+\Delta t$ までの時間区間と〔ii〕$t+\Delta t$ から∞までの時間区間の二段階行うものとし,最適性の原理を適用すれば,(2.2)式は

$$V[x(t)] = \min_u \left\{\int_t^{t+\Delta t} F(x,u)d\tau + \int_{t+\Delta t}^\infty F(x,u)d\tau\right\}$$
$$= \min_u \left\{\int_t^{t+\Delta t} F(x,u)d\tau + V[x(t+\Delta t)]\right\} \qquad (2.3)$$

となり，更に $\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$V[x(t)] = \min_u \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \{F(x,u)\Delta t + V[x(t) + \dot{x}(t)\Delta t]\} \tag{2.4}$$

あるいは

$$\begin{aligned} &\min_u \{F(x,u) + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V[x(t)+\dot{x}(t)\Delta t] - V[x(t)]}{\Delta t}\} \\ &= \min_u \{F(x,u) + \frac{dV[x(t)]}{dt}\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

として与えられる。これは連続系に対するＤＰ（ダイナミック・プログラミング）の基礎方程式と呼ばれるものである。ここに，最適制御を閉ループ解として得るために（２．５）式を満たす解を解析的に求めなければならないが，同式を満たす解を解析的に求めることは一般に非常に困難な問題である。

ここでは，（２．５）式で示される $dV[x(t)]/dt$ が制御 u に依存した $V[x(t)]$ の時間導関数であることから $V[x(t)]$ を閉ループ系のリアプノフ関数として取り扱い，また，その関数を逆最適制御問題の立場[16]よりあらかじめ構成し（２．５）式に代入することにより，同式を満たす解を解析的に求めるものである。すなわち，最適フィードバック制御をある形式で設定し，これを制御対象に施す閉ループ系のリアプノフ関数として線形制御系に対しては状態変数の二次形式を，非線形制御系に対してはルーリエ型の範疇に属する一般化エネルギ関数を用いる。このとき，$V[x(t)]$ の時間導関数 $dV[x(t)]/dt$ を求め，これと同形式になるものを積分形評価関数の被積分項（被積分関数）に選ぶものとすれば，両関数より構成される（２．５）式の方程式は，フィードバック利得の二次形式となり，二次形式の最小化手順[26]の適用により最適フィードバック利得の決定が行える。

以上より，本手法によれば最適フィードバック制御の形式をあらかじめ規定するので間接的な取り扱いにはなるが，解析過程において系の動特性式の特別な変形を必要としないので，非線形系に対しても系統本来の非線形特性を考慮した最適化が可能となる。

ここでは，制御対象の動特性式が

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.6}$$

ここに，

x：ｎ次元の状態ベクトル

u：ｒ次元の制御ベクトル

A, B：ｎｘｎ次，ｎｘｒ次の定係数行列

で表わされる線形制御系に，前節で定式化した最適化手順を適用する。

まず，最適フィードバック制御を次式で示す状態変数の線形結合

$$u = -K^T \cdot x \tag{2.7}$$

ここに，

K：ｎｘｒ次のフィードバック利得行列

で設定し，（２．６）式に代入する。

$$\dot{x} = (A - BK^T)x \tag{2.8}$$

次に，制御対象の方程式が線形系であることから（２．８）式に対するリアプノフ関数$V(x)$を

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T Q x \tag{2.9}$$

ここに，

Q：ｎｘｎ次の正定値対称行列

で示す状態変数の二次形式として定義する。このとき，その時間導関数 $dV(x)/dt$ は（２．８）式より次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^T \dot{x} \\ &= x^T (A^T Q - KB^T Q) x \end{aligned} \tag{2.10}$$

一方，（２．５）式で示すＤＰの基礎方程式によると，最適制御は，積分形評価関数の場合，その被積分項と閉ループ系に対するリアプノフ関数の時間導関数の和として構成される合成関数の，制御入力に関する最小化により求めることができる。ここでは，閉ループ系に対するリアプノフ関数の時間導関数が（２．１０）式で与えられることを考慮し，

上述の制御対象に対する評価関数を次式で定義する。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{x^TWx + u^TRu\}\,dt \tag{2.11}$$

（２．１１）式において，行列 W および R はそれぞれｎｘｎ次およびｒｘｒ次の対称行列であり，W は半正定値,R は正定値とする。このとき，ＤＰの基礎方程式は（２．１０）式および（２．１１）式より

$$\begin{aligned}&\min_u\left[\frac{1}{2}x^TWx + \frac{1}{2}u^TRu + \frac{dV(x)}{dt}\right]\\ &= \min_u\left[\frac{1}{2}x^TWx + \frac{1}{2}u^TRu + x(A^TQ - KB^TQ)x\right]\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.12}$$

となり，更に，（２．７）式の関係を適用すれば

$$\min_K\left[x^T\{W + KRK^T - 2KB^TQ + 2A^TQ\}x\right] = 0 \tag{2.13}$$

で示すフィードバック利得 K の二次形式で表わされるので，二次形式の最小化手順[26]の適用により最適フィードバック利得の決定が行える。すなわち，（２．１３）式の行列 R が正定値で

$$\begin{aligned}\min_K\Big[x^T\{&(K^T - R^{-1}B^TQ)^TR(K^T - R^{-1}B^TQ) + W + 2A^TQ\\ &- QBR^{-1}B^TQ\}x\Big] = 0\end{aligned} \tag{2.14}$$

の形式に整理できることから，最適フィードバック利得および最小値はそれぞれ

$$\begin{aligned}&K^T = R^{-1}B^TQ\\ &x^T\{W + 2A^TQ - QBR^{-1}B^TQ\}x = 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

で与えられる。（２．１５）式の第２式が任意の x について満足されるため唯一の方法は，カッコ内の項が零であればよく，更に，二次形式では行列の対称部分のみ重要となるので

$$W + A^TQ + QA - QBR^{-1}B^TQ = 0 \tag{2.16}$$

の関係式が得られる。これは，退化したリカッチ方程式と呼ばれるもので，線形制御理論における無限時間区間の最適レギュレータ問題に対する重要な関係式となる[25]。

第２・４節　非線形制御系の最適制御

本節では，第２・２節の手法を制御対象の動特性式が自由度ｎの一般力学系における特性式

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + f(x) = Bu \tag{2.17}$$

但し

x：一般化座標でｎ次元ベクトル

$\dot{x}$：一般化速度でｎ次元ベクトル

$\ddot{x}$：一般化された加速度でｎ次元ベクトル

$f(x)$：ｎ次元ベクトル関数で一般的にxに関して連続微分可能な非線形関数

u：制御入力でｒ次元ベクトル

M：一般化質量を要素とするｎ次の正方行列

D：一般化制動要素からなるｎ次の正方行列

B：ｎｘｒ次の制御行列

で記述される場合に適用する。ここに，ラグランジュの一般化座標および一般化速度からなる古典的形式の状態変数を用いているのは，これらの変数が力学系の位置および速度に相似な物理系変数であるので，エネルギ概念を基盤とする一般化エネルギ関数の構成が容易であり，また以下に述べるように，理論展開が二階の微分方程式系のままで直接取り扱って行けるからである。

いま，最適フィードバック制御を次式で示す一般化速度の線形結合

$$u = -K^T\dot{x} \tag{2.18}$$

ここに，K：ｎｘｒ次のフィードバック利得行列

で仮定すれば，閉ループ系は

$$M\ddot{x} + (D + BK^T)\dot{x} + f(x) = 0 \tag{2.19}$$

となる。このとき，この系の一般化エネルギ関数は，（２．１９）式の両辺に正則な実数行列Qを左乗した新たな系

$$QM\ddot{x} + Q(D + BK^T)\dot{x} + Qf(x) = 0 \tag{2.20}$$

のエネルギ関数として与えられる。すなわち，（２．２０）式の系における一般化運動量ベクトル $P(x,\dot{x})$ および一般化ポテンシャル力$F(x)$は

それぞれ

$$P(x,\dot{x}) = QM\dot{x}$$
$$F(x) = Qf(x) \tag{2.21}$$

として記述することができるので，同式より一意的な状態関数を定めるためのうずなし条件

$$\frac{\partial P_i(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial P_j(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i}$$
$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \tag{2.22}$$
$$(i,j=1,2,\cdot\cdot\cdot,n)$$

を満足する Q を選定すれば，一般化運動エネルギ $T(x,\dot{x})$ および一般化ポテンシャルエネルギ $S(x)$ は

$$T(x,\dot{x}) = \int_0^{\dot{x}} [P(x,\dot{x})]^T d\dot{x}$$
$$= \frac{1}{2}\dot{x}^T(QM)^T\dot{x} \tag{2.23}$$
$$S(x) = \int_0^{x} [F(x)]^T dx$$

で与えられ，一般化エネルギ関数は

$$V(x,\dot{x}) = T(x,\dot{x}) + S(x)$$
$$= \frac{1}{2}\dot{x}^T(QM)^T\dot{x} + \int_0^{x}[F(x)]^T dx \tag{2.24}$$

となる。このとき，$V(x,\dot{x})$ の時間導関数 $dV(x,\dot{x})/dt$ は，（２．２０）式，（２．２１）式および（２．２３）式の関係を用いて次式のような一般化速度の二次形式として求められる。

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\}^T\ddot{x} + \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial x}\}^T\dot{x}$$
$$= [P(x,\dot{x})]^T\ddot{x} + [F(x)]^T\dot{x}$$
$$= (QM\dot{x})^T\ddot{x} - (QM\ddot{x})^T\dot{x}$$
$$- \{Q(D + BK^T)\dot{x}\}^T\dot{x}$$
$$= -\dot{x}^T(KB^T + D^T)Q^T\dot{x} \tag{2.25}$$

ここに，QMが（２．２２）式の第１式の成立において対称行列となることを利用している。

一方，閉ループ系のリアプノフ関数の時間導関数が（２．２５）式で表わされることを考慮し，（２．１７）式で示す系の動作特性の質を決定する評価関数を，次式で示す一般化速度および制御入力の二次形式の和として定義する。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\dot{x}^T W \dot{x} + u^T R u\}\, dt \tag{2.26}$$

（２．２６）式においてWおよびRはそれぞれｎｘｎ次およびｒｘｒ次の正定値対称行列とする。このとき，ＤＰの基礎方程式は（２．２５）式および（２．２６）式より

$$\min_u \left[\frac{1}{2}\dot{x}^T W \dot{x} + \frac{1}{2}u^T R u - \dot{x}^T(KB^TQ^T + D^TQ^T)\dot{x}\right] = 0 \tag{2.27}$$

となり，更に（２．１８）式から

$$\begin{aligned}
&\min_K \left[\dot{x}^T\{W + KRK^T - 2KB^TQ^T - 2D^TQ^T\}\dot{x}\right] \\
&= \min_K \left[\dot{x}^T\{(K^T - R^{-1}B^TQ^T)^T R (K^T - R^{-1}B^TQ^T) + W \right. \\
&\qquad \left. - 2D^TQ^T - QBR^{-1}B^TQ^T\}\dot{x}\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となるので

$$K^T = R^{-1}B^TQ^T \tag{2.29}$$

のとき最小値は

$$\dot{x}^T\{W - 2D^TQ^T - QBR^{-1}B^TQ^T\}\dot{x} = 0 \tag{2.30}$$

として与えられる。この式は，任意の$\dot{x}$（間接的にx）に対して成立しなければならないことから，

$$W - QD - D^TQ^T - QBR^{-1}B^TQ^T = 0 \tag{2.31}$$

の関係が得られる。従って，（２．３１）式を（２．２４）式のリアプノフ関数が構成できる条件（うずなし条件）のもとで解けば，Qの要素はWの要素によって決定することができ，更に（２．２９）式から最適フィードバック利得Kも決定できるので，上述の関係式より非線形系の最適制御が可能となる。

第2・5節　結　言

以上本章では，系の動特性式が二階連立常微分方程式で記述されるとき，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形のリアプノフ関数を系の動作特性を表わす評価関数に採用すれば，システムの最適化が系統だった方法により行えることを明らかにした。また，本手法によれば，最適フィードバック制御の形式を一般化速度の線形結合に規定しているので間接的な取り扱いにはなるが，解析過程において系の動特性式の特別な変形を必要としないので，非線形系に対しても系統本来の非線形特性を考慮した最適化が可能となることを示した。

第３章　調速機制御系による電力系統の最適化 (21)

第３・１節　緒　言

電力系統における安定度向上策の一つに調速機制御系を導入する方法があり，この制御系の特徴は，事故または異常事態の発生により生じた系統動揺を，タービンから入る入力トルクを制御し，発電機の入出力不平衡を小さくすることにより安定度向上をはかる点にある。

本章においては，調速機制御系を一次遅れ系で近似し，同制御系を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を，前章で提案した手法にしたがって構成している。また，本制御方式の動作特性に与える影響を位相面軌道および制御信号－時間関係図を用いて示すとともに制御の質の比較検討を行い，一般化速度を帰還する本制御方式が，過渡安定度領域における系統動作の改善に対して十分寄与しうることを明らかにしている。

第３・２節　最適制御法則の決定

第３．１図に示す逓昇変圧器と二回線送電線を通じて無限大母線につながれた一機－無限大母線系統において，一次遅れ制御系で近似する調速機効果を含む一機－無限大母線系統の動特性式は，

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} &= P_m - P_e \\ \frac{d\Delta P_m}{dt} + \frac{1}{T_g}\Delta P_m &= u \end{aligned} \qquad (3.1)$$

ここに，

$$P_e = P_1 \sin\delta - P_2 \sin 2\delta$$

$$P_1 = \frac{E_q' E_B}{x_{12}+x_d'}, \qquad P_2 = \frac{(x_q - x_d')E_B^2}{2(x_{12}+x_d')(x_{12}+x_q)}$$

のように表わされる。いま，変数δおよびP_mの代わりに

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta - \delta_0 \\ x_2 &= \Delta P_m \end{aligned} \tag{3.2}$$

で示す系統の安定平衡点からの変化量を一般化座標に選べば（3．1）式は次式のような行列形式で書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\dot{x} + \begin{bmatrix} g(x_1, x_2) \\ \lambda_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3.3}$$

ここに，

$$\begin{aligned} x^T &= [x_1 \ \ x_2] \\ \eta_1 &= D/M \quad , \ \eta_2 = 1/M \ , \ \eta_3 = P_1/M \\ \lambda_1 &= 1/T_g \quad , \ P_l = P_1 sin\delta_0 - P_2 sin2\delta_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$g(x_1, x_2) = \eta_2 x_2 + \eta_3 \{sin(x_1+\delta_0) - \frac{P_2}{P_1} sin2(x_1+\delta_0) - \frac{P_l}{P_1}\}$$

設計指標となる評価関数を次式で定義する。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\dot{x}^T W \dot{x} + ru^2\}\, dt \tag{3.5}$$

ここに，

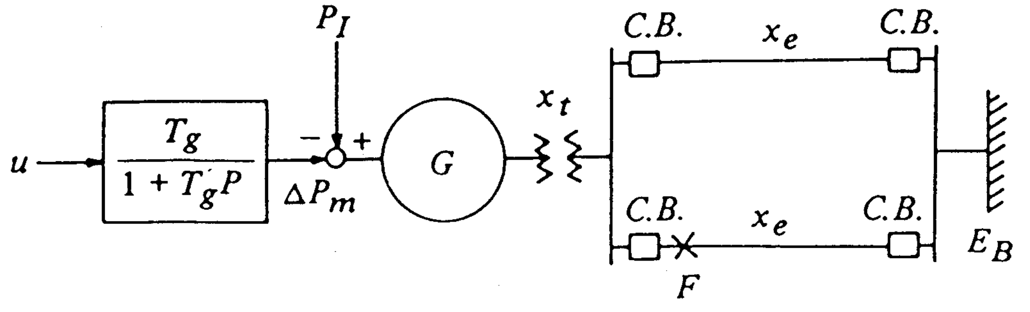
$$W = [(W_{ij}), i, j = 1,2]$$

このとき，（3．3）式に施す最適フィードバック制御を一般化速度$\dot{x}$の線形結合として

$$u = - K^T \dot{x} \tag{3.6}$$

ここに，

$$K^T = [K_1 \ \ K_2]$$



第3．1図　調速機制御系を含む一機ー無限大母線系統

で与えれば，閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ K_1 & K_2+1 \end{bmatrix}\dot{x} + \begin{bmatrix} g(x_1, x_2) \\ \lambda_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

となる。次に，（3．7）式に正則な実数行列 $Q\,[=(q_{ij}), i, j=1,2]$ を左乗した新たな系を構成し，この系の運動量ベクトル $QM\dot{x}$ およびポテンシャル力 $Qf(x)$ に対して第２章で述べたうずなし条件を適用する。このとき，Q は次式のように決定される。

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ここに，

$$q_{12} = -\eta_2 q_{11}/\lambda_1$$

また，Q の行列式は

$$|Q| = q_{11} \cdot q_{22} \tag{3.9}$$

となり

$$q_{11} \neq 0, q_{22} \neq 0 \tag{3.10}$$

において，Q は正則となる。従って，このような Q を左乗した閉ループ系の一般化エネルギ関数 $V(x, \dot{x})$ は

$$\begin{aligned} V(x, \dot{x}) &= \frac{1}{2}\dot{x}^T (QM)^T \dot{x} + \int_0^x [F(x)]^T dx \\ &= q_{11}\Big[\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \eta_3\{\cos\delta_0 - \cos(x_1+\delta_0)\} \\ &\quad - \frac{P_2}{2P_1}\eta_3\{\cos 2\delta_0 - \cos 2(x_1+\delta_0)\} \\ &\quad - \frac{P_l}{P_1}\eta_3 x_1\Big] + \frac{1}{2}q_{22}\lambda_1 x_2^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

となり，その時間導関数 $dV(x, \dot{x})/dt$ は

$$\frac{dV(x, \dot{x})}{dt} = -\dot{x}^T \begin{bmatrix} (\eta_1 - \eta_2 K_1/\lambda_1) q_{11} & K_1 q_{22} \\ -\eta_2 (K_2+1) q_{11}/\lambda_1 & (K_2+1) q_{22} \end{bmatrix} \dot{x} \tag{3.12}$$

で与えられる。このとき，最適フィードバック利得 K は，前章で示した最適化手順中の（２．２９）式より

$$
\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{\eta_2}{r\lambda_1} q_{11} \\
K_2 &= \frac{1}{r} q_{22}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

として q_{11} および q_{22} の関数で示される。また，q_{11} および q_{22} については（2．31）式より次式の関係が得られる。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\eta_2^2}{r\lambda_1^2} q_{11}^2 - 2\eta_1 q_{11} + W_{11} = 0 \\
&\frac{\eta_2}{r\lambda_1} q_{11} q_{22} + \frac{\eta_2}{\lambda_1} q_{11} + W_{12} = 0 \\
&-\frac{1}{r} q_{22}^2 - 2q_{22} + W_{22} = 0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

そこで，（3．14）式の第１式および第３式から q_{11} および q_{22} の解を（3．11）式の一般化エネルギ関数 $V(x,\dot{x})$ を正定値関数，すなわちリアプノフ関数としての条件を満足するように求めれば，

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{r\eta_1\lambda_1^2}{\eta_2^2}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r}\left(\frac{\eta_2}{\lambda_1\eta_1}\right)^2} -1\right\} \\
q_{22} &= r\left\{\sqrt{1+\frac{W_{22}}{r}} - 1\right\}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

となる。（3．15）式を（3．13）式に代入し，更に（3．4）式を用いた書き換えを行うと，最適フィードバック利得 K は

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{D}{T_g}\left\{1 - \sqrt{1+\frac{W_{11}}{r}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2}\right\} \\
K_2 &= \sqrt{1 + \frac{W_{22}}{r}} - 1
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

で与えられ，重み行列 W の対角要素中の W_{11} および W_{22} で決定される。このとき，W_{12} は（3．15）式の q_{11} および q_{22} を（3．14）式の第２式に代入することにより，W_{11} および W_{22} の関数として

$$
W_{12} = r\sqrt{1+\frac{W_{22}}{r}}\left\{\frac{D}{T_g} - \sqrt{\frac{W_{11}}{r}+\left(\frac{D}{T_g}\right)^2}\right\}
\tag{3.17}
$$

で求められる。従って，制御系設計の意図を表現する W は結果的に W_{11}

および W_{22} に集約されるが，これらの各要素の選定に対しては全体としての重み行列 W が正定値行列となるように選ばれなければならない。このとき，この重み行列 W にシルベスターの定理(23)を適用すると，W_{11} および W_{22} について

$$
\begin{aligned}
& W_{11} > 0 \\
& W_{22} > \frac{W_{11}}{2\left\{\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2} - 1\right\}}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2 - r
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

の制約式が得られ，この制約下で上述の最適化手順を適用すれば，安定化可能な制御系を構成することができる。また，この解析過程においては発電機のトルク関係の非線形特性をそのまま導入できるので，系統の最適化が過渡安定度領域まで言及しうる。

第３・３節　数値計算例と結果に対する検討

第３．１図で示す二回線送電線の送電端母線近傍の一回線のＦ点に，０．２秒間の三相短絡故障を想定し，制御は故障除去，すなわち原系に復帰すると同時に開始するものとする。ここに，比較的長い故障時間を採用しているのは，過渡安定度領域における制御効果を顕著に引き出し，本制御方式の適否を検討したいがためである。本例題系統の諸定数および初期条件は一括して第３．１表に示した。第３．２表は，評価関数の重み行列 W の値をパラメータとした場合の最適フィードバック利得 K の値の計算結果を示したものである。なお，第３．２図および第３．４図に示すＡ点は故障除去点を表わす。

まず，重み要素 W_{11} の制御効果に与える影響を調べるため第３．２表で示すＮｏ．２とＮｏ．３の場合を比較する。この場合の $x_1 - \dot{x}_1$ 位相面軌道およびそのとき制御に必要とした制御信号の時間的変化を示したものが第３．２図および第３．３図である。次に，重み要素 W_{22} の制御効果に与える影響を調べるためＮｏ．１とＮｏ．２の場合を比較する。この場合の $x_1 - \dot{x}_1$ 位相面軌道およびそのとき制御に必要とした制御信

号の時間的変化を示したものが第3．4図および第3．5図である。これらの図より明らかなように，ここで示した数値例によると，最適制御は無制御（u＝0）の場合に比べ負の方向へのオーバシュートを1/2程度に抑えることができ，本制御方式による制御効果が顕著に現われていることがわかる。なお，第3．3図および第3．5図より，必要とした制御入力は基準入力の一割程度である。

以上より，最適フィードバック利得の値をWの要素であるW_{11}およびW_{22}で決定すれば，フィードバック信号としては一般化速度の線形結合に限定されるが，非線形モデルのままで最適制御が行え，過渡安定度領域に至る制御が可能となる。

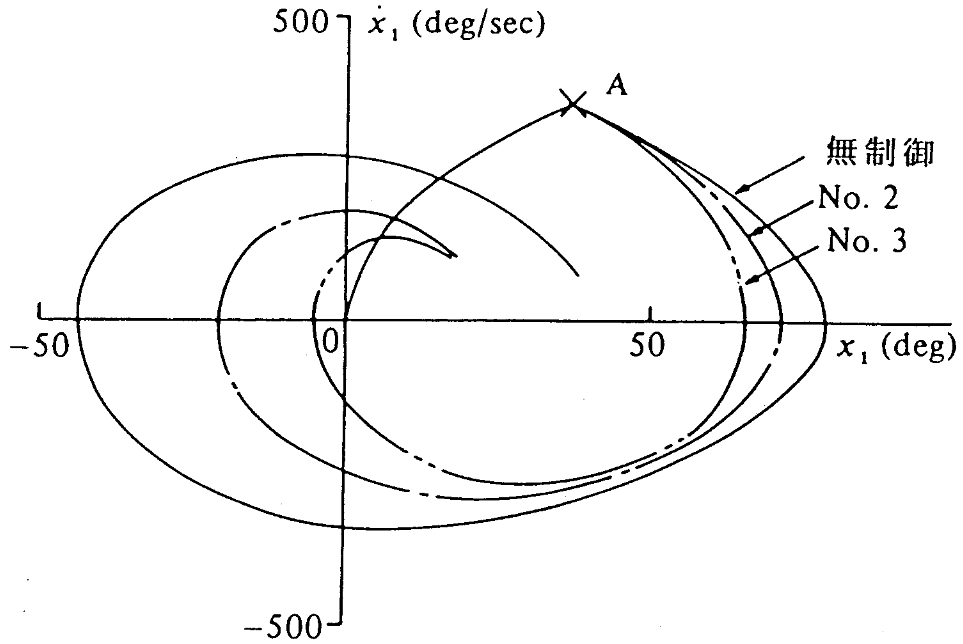
第3．1表　系統定数および初期条件

$x_d = 1.0$	$x_e = 2.0$	$E'_q = 1.208$	$\delta_0 = 40°$
$x_q = 0.6$	$x_t = 0.12$	$E_B = 1.0$	$T_g = 0.1$
$x'_d = 0.4$	$M = 0.0138$	$D = 0.0138$	$f_0 = 60$ Hz

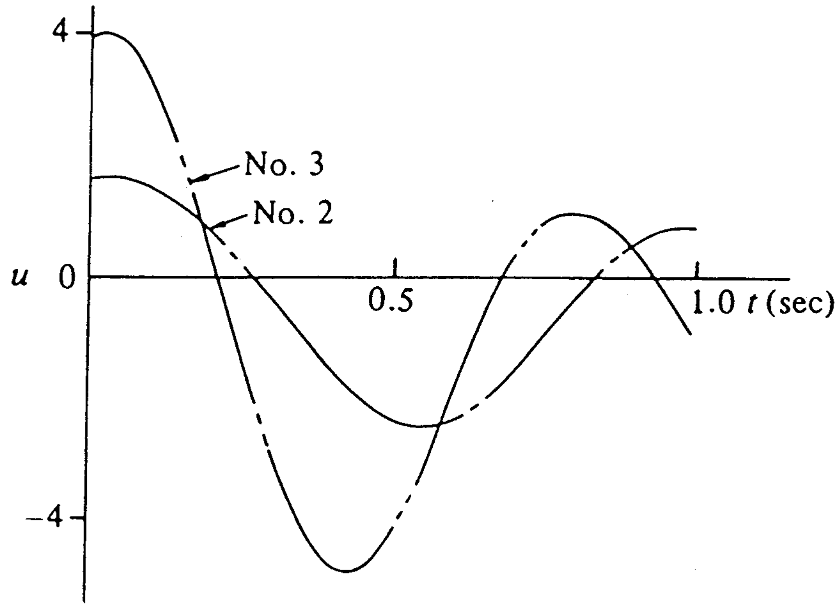
第3．2表　最適フィードバック利得

	重み		最適フィードバック利得	
	W_{11}	W_{22}	K_1	K_2
No. 1	1	4	−0.87147	1.23606
No. 2	1	10	−0.87147	2.31662
No. 3	5	10	−2.10232	2.31662

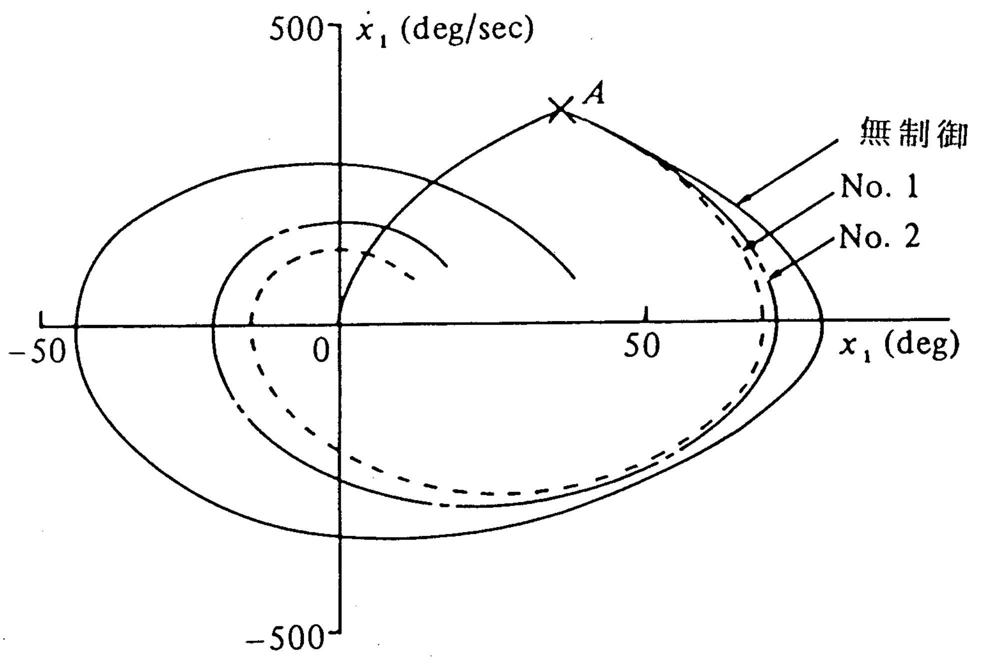
$r = 1$



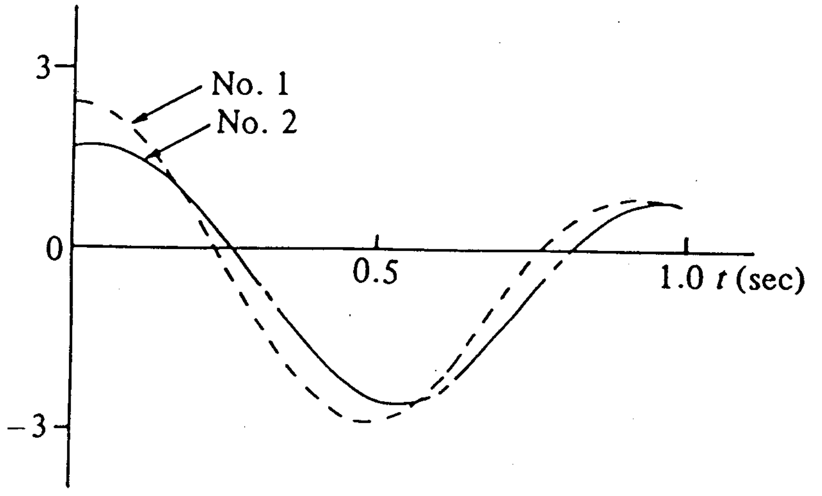
第３．２図　$x_1 - \dot{x}_1$　位相面軌道



第３．３図　制御信号と時間関係



第３．４図　x_1 － $\dot{x}_1$　位相面軌道



第３．５図　制御信号と時間関係

第3・4節　結　言

本章においては，一次遅れ制御系で近似する調速機効果を含む一機－無限大母線系統の最適制御法則を，前章で提案した手法にしたがって構成し，これを電力系統の過渡安定度領域における系統動作の改善，すなわち三相短絡故障による大擾乱時のもとでの同期機の安定化制御に適用した。また，本制御方式の動作特性に与える影響を位相面軌道および制御信号－時間関係図を用いて示すとともに，制御の質の比較検討を行い，一般化速度を帰還する本制御方式が，過渡安定度領域における系統動作の改善に対して十分寄与しうることを明らかにした。

第４章　調速機とＡＶＲ制御系による電力系統の最適化

第４・１節　緒　言

第３章で記述した系統に加えて界磁電圧を制御するＡＶＲ系を考慮し，調速機とＡＶＲ制御系を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を，第２章で提案した手法にしたがって構成する。また，本制御方式の動作特性に与える影響を位相面軌道および制御信号－時間関係図を用いて示すとともに，線形制御（一階線形常微分方程式系を対象に，二次形式の時間積分の評価関数を最小にする制御）との過渡安定度領域における動作特性の比較検討を行ない，本制御方式の有効性を示す。

第４・２節　最適制御法則の決定

第４．１図に示すような一次遅れ系で近似する調速機およびＡＶＲ制御系を含む一機－無限大母線系統の動特性式は，

$$
\begin{aligned}
&M\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e \\
&\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_0}\{E_{ex} - (x_d - x'_d)I_d - E'_q\} \\
&\frac{d\Delta P_m}{dt} + \frac{1}{T_g}\Delta P_m = u_1 \\
&\frac{d\Delta E_{ex}}{dt} + \frac{1}{T_V}\Delta E_{ex} = u_2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

但し，

$$P_e = I_d V_{td} + I_q V_{tq}$$

で与えられる。いま，変数 δ, E'_q, P_m および E_{ex} の代わりに

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \delta - \delta_0 \ , \ x_2 = E'_q - e \\
&x_3 = \Delta P_m \qquad , \ x_4 = \Delta E_{ex}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

で示す系統の安定平衡点からの変化量を一般化座標に選べば（4．1）式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_4) \\ \eta_6 x_3 \\ \eta_7 x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \tag{4.3}$$

ここに，

$$x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \ , \quad u^T = [u_1 \ u_2]$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \eta_2 x_3 + K_1(x_2+e)\sin(x_1+\delta_0) - K_2 \sin 2(x_1+\delta_0) - P_l$$

$$g_2(x_1, x_2, x_4)$$

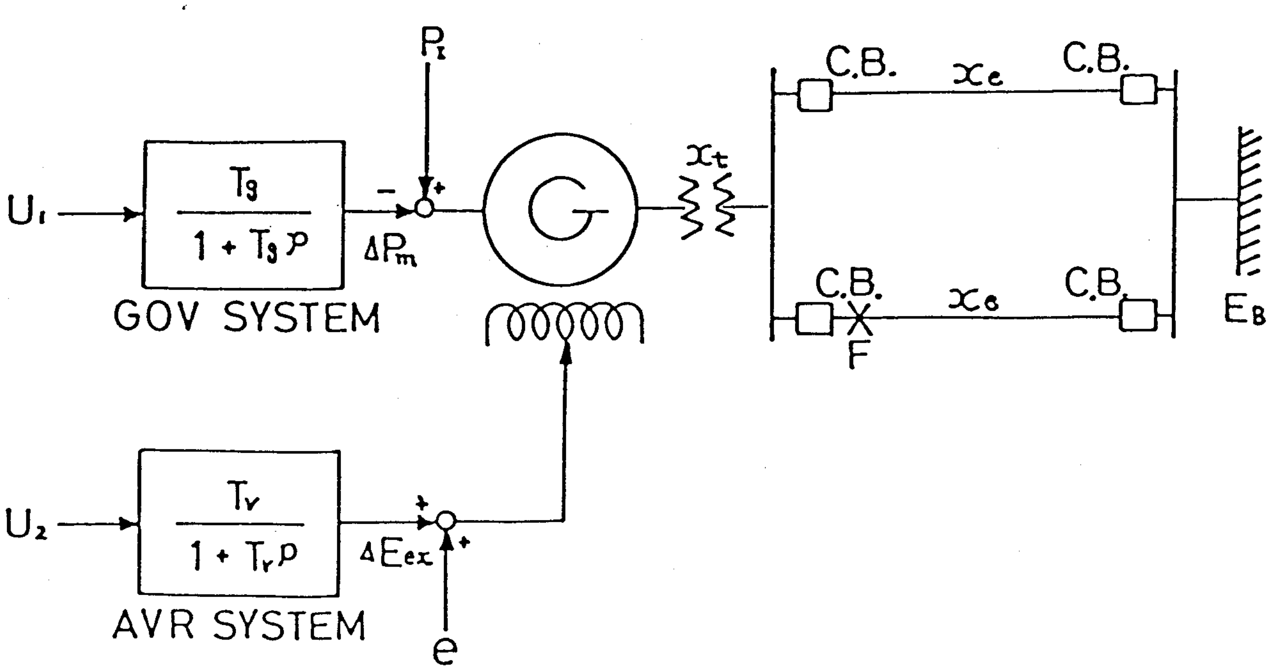
$$= \eta_3 x_2 - \eta_4 x_4 + \eta_5 \{\cos\delta_0 - \cos(x_1+\delta_0)\} \tag{4.4}$$

$$K_1 = E_B / \{M(x_{12}+x_d')\} \ , \quad K_2 = K_1(x_q - x_d')E_B / \{2(x_{12}+x_q)\}$$

$$P_l = K_1 e \sin\delta_0 - K_2 \sin 2\delta_0 \ , \quad \eta_1 = D/M \ , \quad \eta_2 = 1/M$$

$$\eta_3 = \eta_5(x_{12}+x_d)/(x_{12}+x_d') \ , \quad \eta_4 = \eta_5 K_1 M(x_d - x_d')$$

$$\eta_5 = 1/T_0' \ , \quad \eta_6 = 1/T_g \ , \quad \eta_7 = 1/T_V$$



第４．１図　調速機とＡＶＲ制御系を含む一機一無限大母線系統

（4．3）式の動作特性を規定する評価関数を次式で定義する。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{\dot{x}^T W \dot{x} + u^T R u\}\, dt \tag{4.5}$$

ここに，

$$W = [(W_{ij}), i, j = 1, 4]$$

$$R = diag[r_{11}, r_{22}]$$

このとき，最適フィードバック制御を

$$u = -K^T \dot{x} \tag{4.6}$$

ここに，

$$K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} & K_{41} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & K_{42} \end{bmatrix}$$

で与えれば，閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{11} & K_{21} & K_{31}+1 & K_{41} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} & K_{42}+1 \end{bmatrix}\dot{x} \tag{4.7}$$

$$+ \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_4) \\ \eta_6 x_3 \\ \eta_7 x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり，この系の一般化エネルギ関数 $V(x, \dot{x})$ は，４次の正則な実数行列 Q を導入することにより得られる。

まず，うずなし条件の成立より Q は次式のように決定される。

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

ここに，

$$q_{11}K_1 = q_{22}\eta_5 \quad , \quad q_{11}\eta_2 = -q_{13}\eta_6$$

$$q_{22}\eta_4 = q_{24}\eta_7$$

このとき，$\boldsymbol{Q}$ の行列式は

$$|\boldsymbol{Q}| = q_{11}q_{22}q_{33}q_{44} \tag{4.9}$$

となり，

$$q_{11} \neq 0,\ q_{22} \neq 0,\ q_{33} \neq 0,\ q_{44} \neq 0 \tag{4.10}$$

において，$\boldsymbol{Q}$ は正則となる。

従って，この $\boldsymbol{Q}$ を用いれば一般化エネルギ関数 $V(x,\dot{x})$ は

$$\begin{aligned} V(x,\dot{x}) &= \frac{1}{2}\dot{x}^T(QM)^T\dot{x} + \int_0^x [F(x)]^T dx \\ &= q_{11}[\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + K_1(x_2+e)\{\cos\delta_0 - \cos(x_1+\delta_0)\} \\ &\quad - \frac{1}{2}K_2\{\cos 2\delta_0 - \cos 2(x_1+\delta_0)\} - P_I x_1] \\ &\quad + \frac{1}{2}(q_{22}\eta_3 x_2^2 + q_{33}\eta_6 x_3^2 + q_{44}\eta_7 x_4^2) \end{aligned} \tag{4.11}$$

となり，その時間導関数 $dV(x,\dot{x})/dt$ は

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -\dot{x}^T \begin{bmatrix} q_{11}\eta_1 + q_{13}K_{11} & q_{24}K_{12} & q_{33}K_{11} & q_{44}K_{12} \\ q_{13}K_{21} & q_{22}+q_{24}K_{22} & q_{33}K_{21} & q_{44}K_{22} \\ q_{13}(K_{31}+1) & q_{24}K_{32} & q_{33}(K_{31}+1) & q_{44}K_{32} \\ q_{13}K_{41} & q_{24}(K_{42}+1) & q_{33}K_{41} & q_{44}(K_{42}+1) \end{bmatrix} \dot{x} \tag{4.12}$$

となる。このとき，最適フィードバック利得 K は（２．２９）式より

$$\begin{aligned} K^T &= \begin{bmatrix} q_{13}/r_{11} & 0 & q_{33}/r_{11} & 0 \\ 0 & q_{24}/r_{22} & 0 & q_{44}/r_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\eta_2 q_{11}/(r_{11}\eta_6) & 0 & q_{33}/r_{11} & 0 \\ 0 & K_1\eta_4 q_{11}/(r_{22}\eta_5\eta_7) & 0 & q_{44}/r_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.13}$$

として，q_{11}, q_{33} および q_{44} の関数で示される。また，（２．３１）式より次式の関係が得られる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r_{11}}\left(\frac{\eta_2}{\eta_6}q_{11}\right)^2 + 2q_{11}\eta_1 = W_{11} \\
&\frac{1}{r_{22}}\left(\frac{K_1\eta_4}{\eta_5\eta_7}q_{11}\right)^2 + 2\frac{K_1}{\eta_5}q_{11} = W_{22} \\
&\frac{1}{r_{11}}q_{33}^2 + 2q_{33} = W_{33} \\
&\frac{1}{r_{22}}q_{44}^2 + 2q_{44} = W_{44} \\
&\frac{\eta_2}{\eta_6}q_{11}\left(1+\frac{q_{33}}{r_{11}}\right) = -W_{13} \\
&\frac{K_1\eta_4}{\eta_5\eta_7}q_{11}\left(1+\frac{q_{44}}{r_{22}}\right) = W_{24}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

そこで，（４．１４）式の第１式，第３式および第４式よりq_{11}, q_{33} および q_{44} の解を（４．１１）式の一般化エネルギ関数を正定値関数，すなわちリアプノフ関数とする条件で求めれば

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{r_{11}\eta_1\eta_6^2}{\eta_2^2}\left\{\sqrt{1+\frac{\eta_2^2}{r_{11}\eta_1^2\eta_6^2}W_{11}} - 1\right\} \\
q_{33} &= r_{11}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{33}}{r_{11}}} - 1\right\} \\
q_{44} &= r_{22}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{44}}{r_{22}}} - 1\right\}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

となる。（４．１５）式を（４．１３）式に代入し，更に（４．４）式を用いた書き換えを行うと，最適フィードバック利得 K は

$$
K^T = \begin{bmatrix} \frac{D}{T_g}\left\{1-\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r_{11}}\left(\frac{T_g}{D}\right)^3}\right\} & 0 \\ 0 & \frac{r_{11}E_B^{\prime 2}DT_V(x_d-x_d^{\prime})}{r_{22}T_g^2(x_{12}+x_d^{\prime})^2}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r_{11}}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2} -1\right\} \end{bmatrix} *
$$

$$
* \begin{bmatrix} \sqrt{1+\frac{W_{33}}{r_{11}}} - 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+\frac{W_{44}}{r_{22}}} - 1 \end{bmatrix} \tag{4.16}
$$

で与えられ，重み行列 W の対角要素中のW_{11}, W_{33} および W_{44} で決定される。このとき，W の他の要素 $W_{22}, W_{13}(=W_{31})$ および $W_{24}(=W_{42})$は，（４．１５）式の q_{11}, q_{33}および q_{44} を（４．１４）式の第２式，第５式および第６式に代入することにより W_{11}, W_{33} および W_{44} の関数として求まるので，制御

系設計の意図を表現する W は結果的に第３章で記述したと同様に対角要素に集約した表現で行うことができる。ここに，この重み行列 W の正定値を保証するためにシルベスターの定理[(23)]を適用するものであるが，行列 W を次式のように対称区分けすれば

$$\begin{bmatrix} W_\alpha & N \\ N^T & W_\beta \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

ここに，

$$W_\alpha = diag\,[W_{11}, W_{22}]$$

$$W_\beta = diag\,[W_{33}, W_{44}]$$

$$N = diag\,[W_{13}, W_{24}]$$

となり，付録１に示す変形より W の正定値の保証が

$$\begin{bmatrix} W_\alpha - NW_\beta^{-1}N^T & 0 \\ 0 & W_\beta \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

の正定値の保証に置き換えられる。従って，（４．１８）式にシルベスターの定理[(23)]を適用すれば，W_{11}, W_{33} および W_{44} について

$$W_{11} > 0$$

$$W_{33} > \frac{r_{11}}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r_{11}}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2}-1\right\} \tag{4.19}$$

$$W_{44} > \frac{r_{11}ME_B^2DTv^2(x_d-x_d')^2}{2T_0'T_g^2(x_{12}+x_d')^2}\left\{\sqrt{1+\frac{W_{11}}{r_{11}}\left(\frac{T_g}{D}\right)^2}-1\right\}$$

の制約式が得られ，この制約下で上述の最適化手順を適用すれば，安定化可能な制御系を構成することができる。

第４・３節　数値計算例と結果に対する検討

第４．１図に示す二回線送電線の送電端母線近傍の一回線のＦ点に，０．２秒間の三相短絡故障を想定し，制御は故障除去と同時に開始するものとする。系統の諸定数および初期条件は第４．１表に示している。第４．２表は，評価関数の重み行列 W の値をパラメータとした場合の最適フィードバック利得 K の値の計算結果を示したものである。

まず，重み要素 W_{11}, W_{33} および W_{44} の制御効果に与える影響を調べるた

めに，第４．２表で示すＮｏ．１とＮｏ．２，Ｎｏ．１とＮｏ．３およびＮｏ．１とＮｏ．４の場合を比較する。この場合の $x_1 - \dot{x}_1$ 位相面軌道およびそのとき制御に必要とした制御信号の時間的変化を示したものが第４．２図～第４．７図である。これらの図より明らかなように，必要とする制御入力は基準入力の一割程度であるが，本制御方式による抑制効果が，無制御の場合に比較して顕著に現われていることがわかる。

次に，本制御方式と線形制御（一階線形微分方程式系を対象に，二次形式の時間積分の評価関数を最小にする制御）との過渡安定度領域における動作特性の比較を行ったものが第４．８図である。この場合，モデル系統のＦ点に０．２２秒間の三相短絡故障を想定し，無制御では脱調に至る例を取り上げている。この図に示されるように，本制御方式では安定な動特性が得られる場合でも，線形制御では安定な動特性が得られず脱調に至る場合がある。これは，線形化によって，系の減速エネルギを実際より過大評価する結果と考える。従って，過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うには，発電機のトルク関係の非線形特性を十分留意して行かなければならないことがわかる。

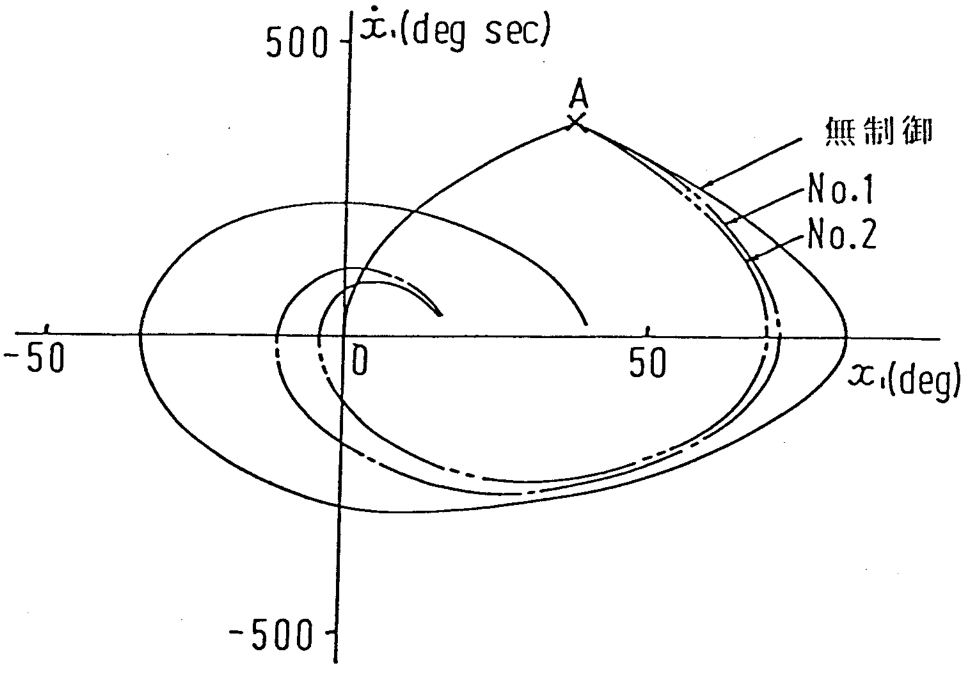
第４．１表　系統定数および初期条件

x_d=1.0	x_e=2.0	T_0'=5.0	δ_0=40°
x_d'=0.4	M=0.0138	T_g=0.1	e=1.208
x_q=0.6	D=0.0138	T_V=1.0	
x_t=0.12	E_B=1.0	f_0=60Hz	

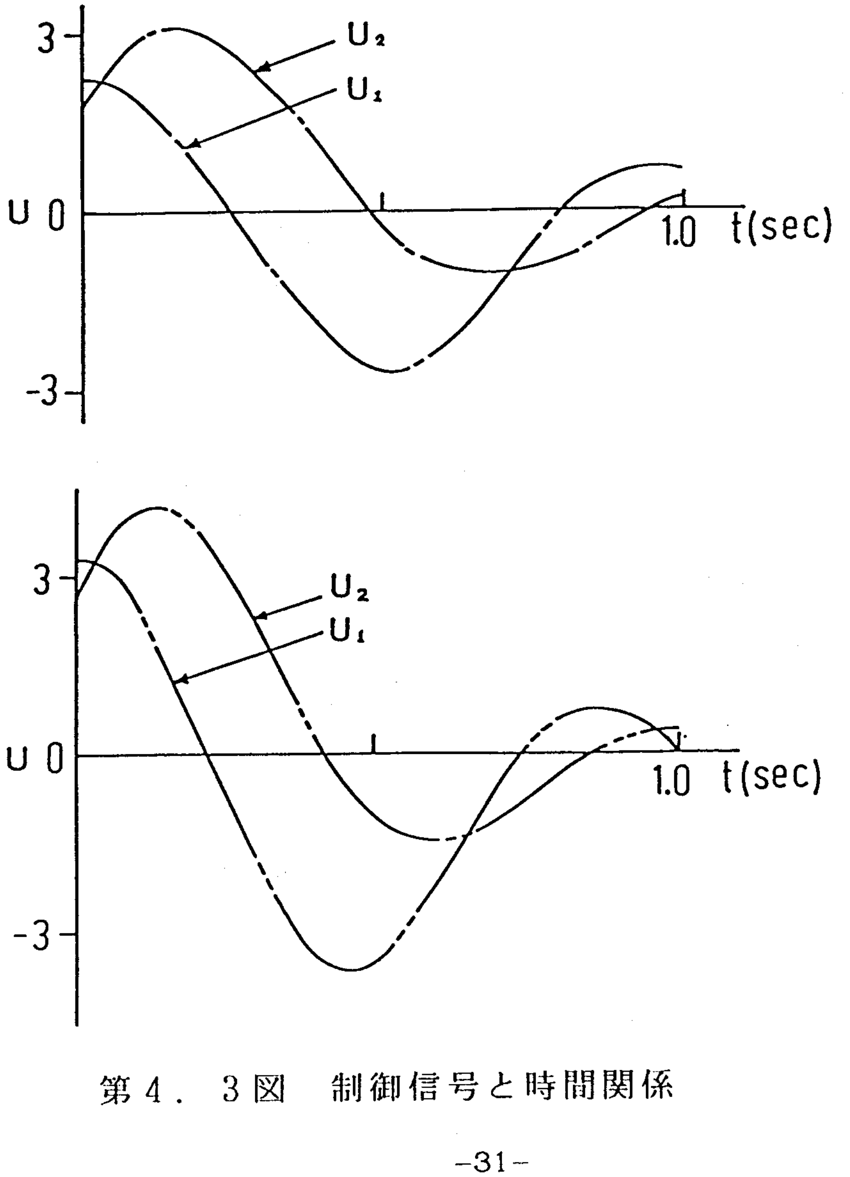
第４．２表　最適フィードバック利得

No.	重み			最適フィードバック利得			
	W_{11}	W_{33}	W_{44}	K_{11}	K_{22}	K_{31}	K_{42}
1	1	5	0.1	−0.87148	22.63190	1.44949	0.41421
2	2	5	0.1	−1.28293	33.31710	1.44949	0.41421
3	1	10	0.1	−0.87148	22.63190	2.31662	0.41421
4	1	5	10	−0.87148	22.63190	1.44949	9.04987

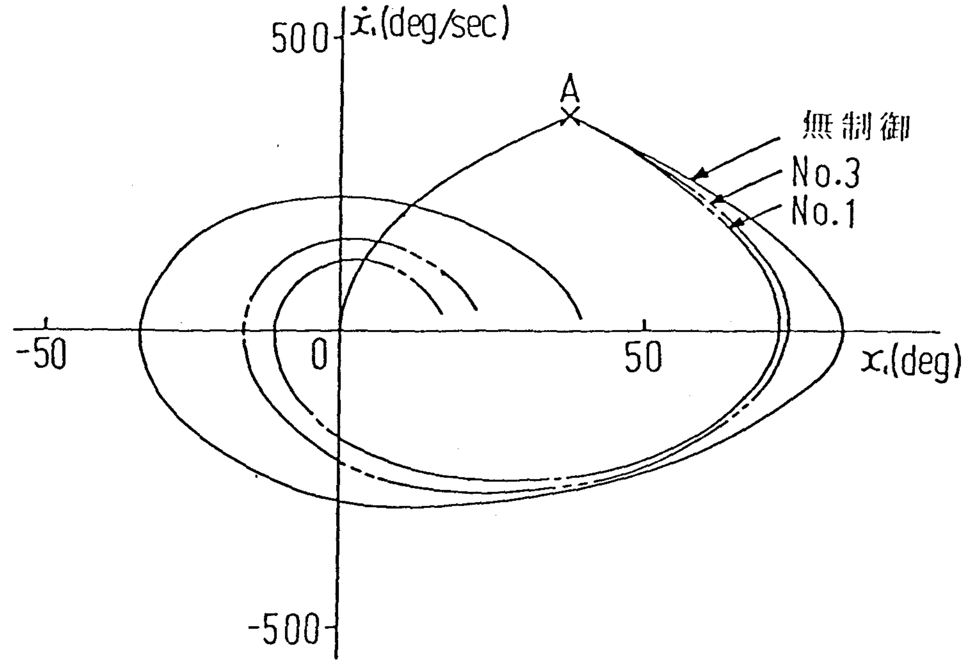
$R=diag$ (1 0.1)



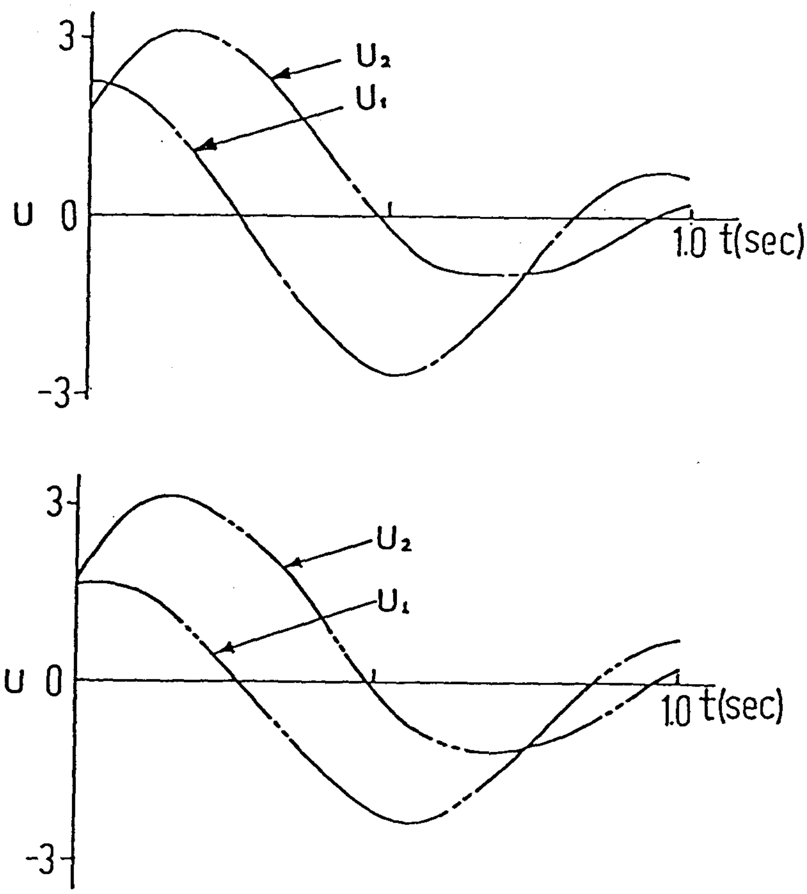
第４．２図　x_1 － $\dot{x}_1$　位相面軌道



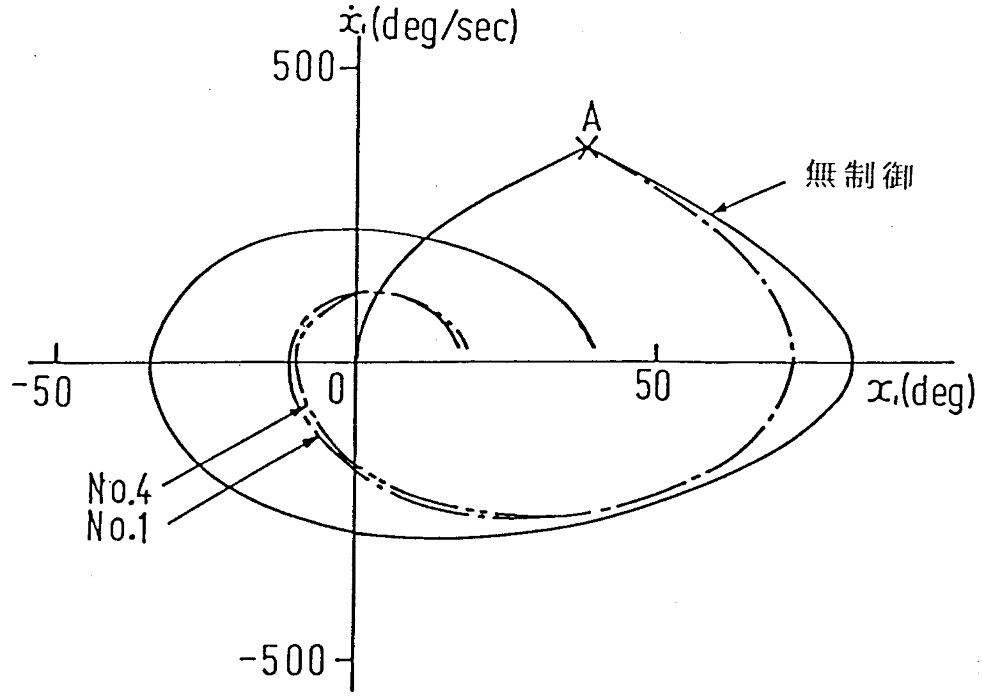
第４．３図　制御信号と時間関係



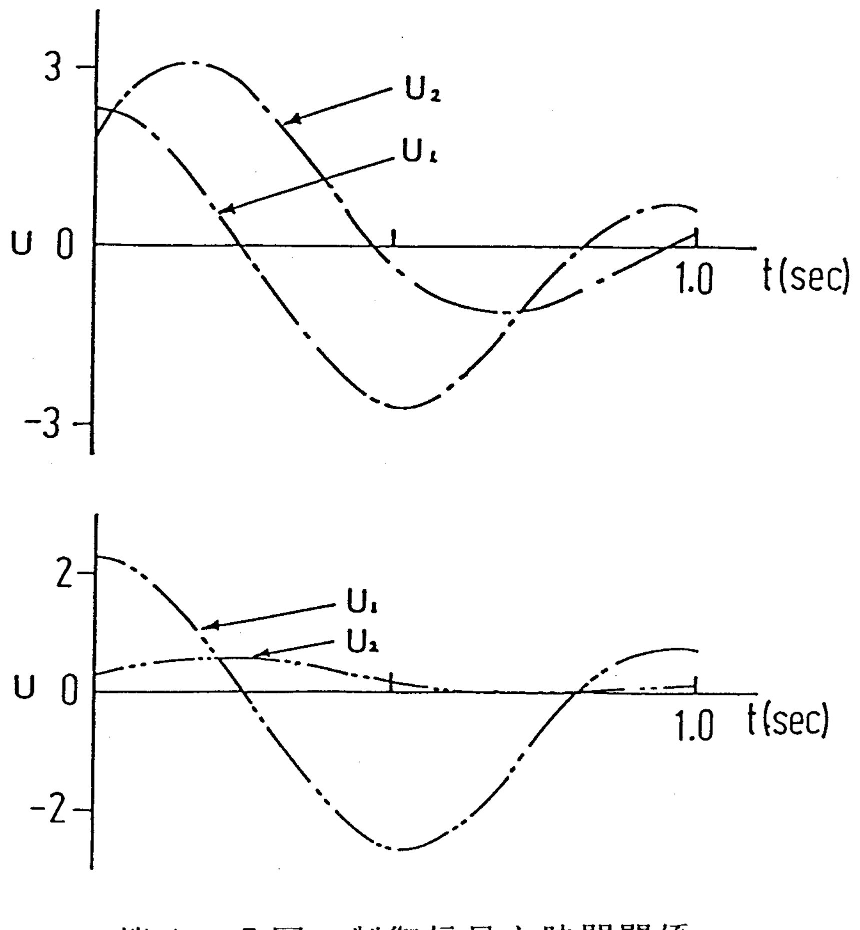
第４．４図　$x_1 - \dot{x}_1$　位相面軌道



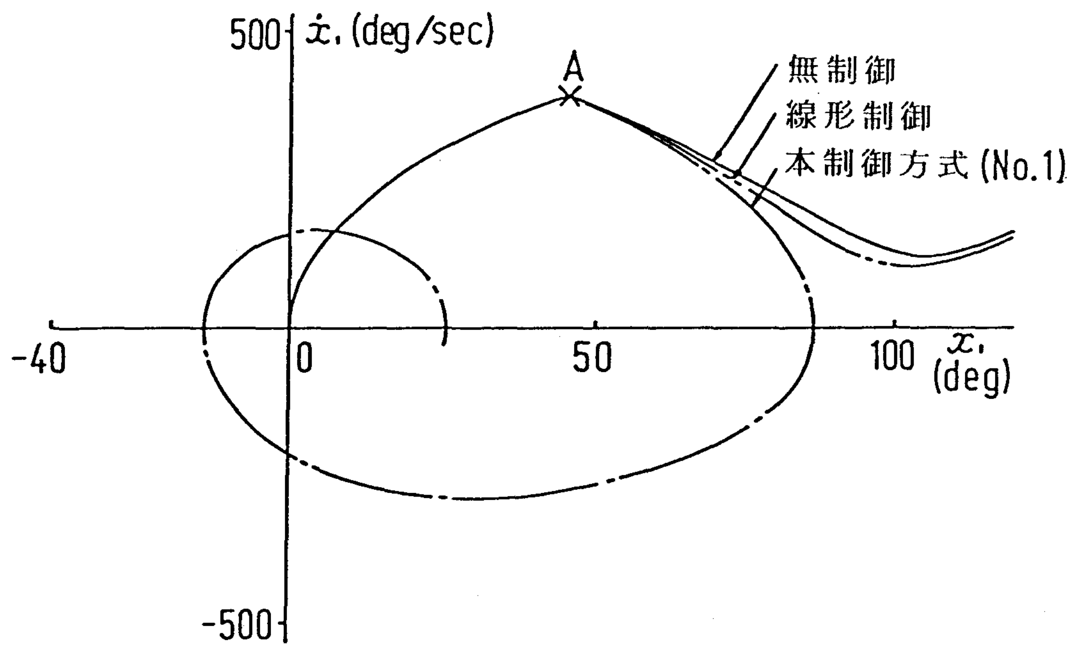
第４．５図　制御信号と時間関係



第4．6図　x_1 － $\dot{x}_1$ 位相面軌道



第4．7図　制御信号と時間関係



第4．8図　x_1 − $\dot{x}_1$ 位相面軌道

第4・4節　結　　言

ここでは，第2・4節において提案した方法にしたがって，調速機とＡＶＲ制御系を含む一機－無限大母線系統を対象とする最適制御法則を導出するとともに，本制御方式の動作特性に与える影響を位相面軌道および制御信号－時間関係図を用いて示した。また，線形制御との過渡安定度領域における動作特性の比較検討を行い，本制御方式によれば安定化可能な場合でも，線形制御では系を安定にすることができず，脱調に至る場合があることを明らかにした。

第５・１節　緒　　言

第２章では，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形のリアプノフ関数[18]を，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数として採用し，系統本来の非線形特性を考慮できる最適化の一構成法を示した。しかしながら，反面，フィードバック信号は発電機の速度偏差など，物理的に一般化速度の範疇に属する状態量に限定され，発電機の位相（あるいは発電機間の位相差）など一般化座標に関する状態量を直接フィードバック信号として制御系に取り入れるまでには至らなかった。

本章においては，この方法に改良を加え，一般化座標についても直接フィードバック信号に組み込めるような，より一般的な方法への拡張を意図するものであり，評価関数としては拡張リアプノフ関数形のリアプノフ関数[19]を採用する一つの方法を述べる。更に，提案した手法にしたがい，調速機制御系を含む一機一無限大母線系統に対する最適制御法則を導出するとともに，この制御方式による過渡特性を，先の一般化速度のみフィードバックする制御方式の過渡特性と比較検討し，一般化速度のみならず一般化座標についても直接フィードバックする本制御方式の有効性を明らかにする。

第５・２節　制御方式の導出

制御対象の動特性式が，二階連立常微分方程式系

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + f(x) = Bu \tag{5.1}$$

で記述されるとき，最適フィードバック制御を次式で示すような一般化座標および一般化速度の線形結合で設定する。

$$u = -K^T \cdot y \tag{5.2}$$

ここに，

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad , \quad K = \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}$$

K_I, K_{II}: それぞれｎｘｒ次のフィードバック利得行列

このとき，（５．２）式を（５．１）式に施せば，閉ループ系は

$$M\ddot{x} + (D + BK_{II}^T)\dot{x} + \{f(x) + BK_I^T x\} = 0 \tag{5.3}$$

となり，この系の拡張リアプノフ関数は文献１９の構成法にしたがい以下のように求められる。

まず，上式の両辺に正則な実数行列 Q を左乗した新たな系

$$H\ddot{x} + (A + QBK_{II}^T)\dot{x} + \{Qf(x) + QBK_I^T x\} = 0 \tag{5.4}$$

ここに，

$$H = QM \quad , \quad A = QD$$

を構成し，この系に対する一般化運動量ベクトル $P(\dot{\zeta})$ および一般化ポテンシャル力 $F(x)$ をそれぞれ次式で定義する。

$$\begin{aligned} P(\dot{\zeta}) &= H\dot{\zeta} \\ F(x) &= \beta x + Qf(x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここに，

$$\dot{\zeta} = \dot{x} + \alpha x$$

α, β：それぞれｎｘｎ次の未定係数行列

このとき，（５．５）式より一意的な状態関数を定めるためのうずなし条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i(\dot{\zeta})}{\partial \dot{\zeta}_j} &= \frac{\partial P_j(\dot{\zeta})}{\partial \dot{\zeta}_i} \\ \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$(i, j=1, 2, \cdots, n)$$

を満足する Q, α および β を選定すれば，拡張リアプノフ関数 $V(x, \dot{x})$ は

$$V(x, \dot{x}) = \{(\dot{x} + \alpha x)^T H(\dot{x} + \alpha x) + x^T \alpha^T (A - H\alpha)x\}/2 + \int_0^x [Qf(x)]^T dx \tag{5.7}$$

その時間導関数$dV(x,\dot{x})/dt$は

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt}$$
$$= \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial \dot{\zeta}}\}^T\dot{\zeta} + \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial x}\}^T\dot{x}$$
$$= - y^T(KB^TQ^TN^T + Z)y - x^T\alpha^TQf(x) \tag{5.8}$$

ここに，

$$N^T = [\alpha \ \ I] \quad , \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A-H\alpha \end{bmatrix}$$

で与えられる。

ここに，Hおよびβが（５．６）式の成立において対称行列となることを利用している。また，上記の展開において$dV(x,\dot{x})/dt$の半負定値を保証するため$\beta = \beta^T = \alpha^T(A - H\alpha)$とおいている。

一方，閉ループ系の拡張リアプノフ関数の時間導関数が（５．８）式で与えられることを考慮し，（５．１）式の制御対象に対する評価関数を次式で定義する。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{y^TWy + x^TLf(x) + u^TRu\}\,dt \tag{5.9}$$

ここに，

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix}$$

（５．９）式において，行列Lは$x^TLf(x) \geqq 0$を満たすｎｘｎ次の行列，行列Wは２ｎｘ２ｎ次の半正定値対称行列（W_{11},W_{12}およびW_{22}はそれぞれｎｘｎ次の部分行列）そしてRはｒｘｒ次の正定値対称行列とする。

このとき，ＤＰの基礎方程式は（５．８）式と（５．９）式より

$$\min_u [\frac{1}{2}\{y^TWy + x^TLf(x) + u^TRu\}$$
$$- y^T(KB^TQ^TN^T + Z)y - x^T\alpha^TQf(x)] = 0 \tag{5.10}$$

となり，更に，（５．２）式から

$$\min_K [y^T\{(K^T - R^{-1}B^TQ^TN^T)^TR(K^T - R^{-1}B^TQ^TN^T)$$
$$+ W - 2Z - NQBR^{-1}B^TQ^TN^T\}y$$
$$+ x^T\{L - 2\alpha^TQ\}f(x)] = 0 \tag{5.11}$$

となるので最適フィードバック利得および最小値はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&K^T = R^{-1}B^TQ^TN^T \\
&y^T\{W - 2Z - NQBR^{-1}B^TQ^TN^T\}y \\
&\qquad\qquad + x^T\{L - 2\alpha^TQ\}f(x) = 0
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

で与えられる。（5．12）式の第2式は任意の x および $\dot{x}$ に対して成立しなければならないことから，

$$
\begin{aligned}
&W - Z - Z^T - NQBR^{-1}B^TQ^TN^T = 0 \\
&L - 2\alpha^TQ = 0
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

の関係が得られる。従って，（5．13）式を（5．7）式の拡張リアプノフ関数が構成できる条件（うずなし条件）のもとで解けば，Q および α の要素は（5．9）式の重み行列によって決定することができ，更に（5．12）式の第1式より最適フィードバック利得 K も決定できるので，上述の関係式よりフィードバック信号に一般化座標も組み入れた新たな制御系を構成することができる。なお，$\alpha = 0$ を採用すれば，第2章で示した一般化速度のみフィードバックする場合に相当する。

第5・3節　調速機効果を含む電力系統への適用

ここでは，前節で記述した方法を第5．1図に示すような一次遅れ制御系で近似する調速機効果を含む一機－無限大母線系統に適用する。なお，フィードバック信号としては，従来の調速機制御系に対する付加的な信号を考える。

第5．1図に示される動特性式は

$$
\begin{aligned}
&M\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e \\
&\frac{d\Delta P_m}{dt} + \frac{1}{T_g}\Delta P_m = \frac{K_g}{\omega_0 T_g}\frac{d\delta}{dt} + u
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

但し，

$$P_e = I_d V_{td} + I_q V_{tq}$$

で記述される。いま，変数 δ および P_m の代わりに

$$x_1 = \delta - \delta_0'$$
$$x_2 = \Delta P_m \tag{5.15}$$

で示す系統の安定平衡点からの変化量を一般化座標に選べば，制御対象の動特性式は次式のような行列形式で書き換えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} g(x_1, x_2) \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{5.16}$$

ここに，

$$x^T = [x_1 \ x_2]$$

$$g(x_1, x_2) = \eta_2 x_2 + \eta_3 \{\sin(x_1+\delta_0') - \frac{P_2}{P_1} \sin 2(x_1+\delta_0') - \frac{P_I}{P_1}\}$$

$$\eta_1 = D/M \ , \ \eta_2 = 1/M \ , \ \eta_3 = P_1/M$$

$$\lambda_1 = K_g/(\omega_0 T_g) \ , \ \lambda_2 = 1/T_g \ , \ P_1 = E_q' E_B/(x_{12}+x_d')$$

$$P_2 = (x_q - x_d') E_B^2 / \{2(x_{12}+x_d')(x_{12}+x_q)\}$$

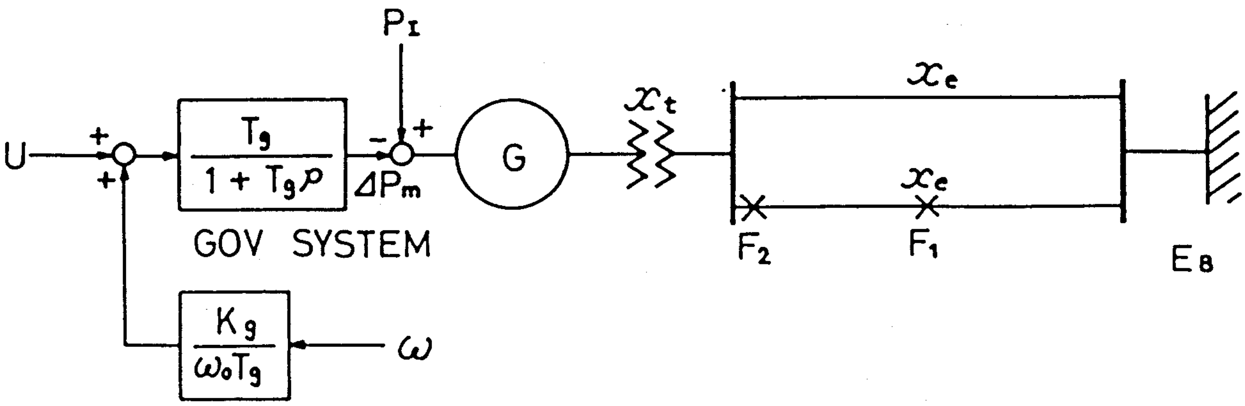
$$P_I = P_1 \sin\delta_0' - P_2 \sin 2\delta_0'$$

（5．16）式の動作特性を規定する評価関数を次式で定義する。

$$PI = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{y^T W y + x^T L f(x) + r u^2\} dt \tag{5.17}$$

ここに，

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix}$$
$$= [(W_{ij}), i, j = 1, 4]$$
$$L = [(L_{ij}), i, j = 1, 2]$$



第５．１図　調速機制御系を含む一機－無限大母線系統

いま，（５．１６）式に施す最適フィードバック制御を次式で示す一般化座標および一般化速度の線形結合として与える。

$$u = -K^T \cdot y \tag{5.18}$$

ここに，

$$K^T = [K_I^T \ K_{II}^T]$$
$$= [(K_i), i = 1, 4]$$

このとき，閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ddot{x} + \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ K_3-\lambda_1 & K_4+1 \end{bmatrix}\dot{x} + \begin{bmatrix} g(x_1, x_2) \\ K_1x_1+(K_2+\lambda_2)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

となり，この系の拡張リアプノフ関数は，２次の正則な実数行列 Q および未定係数行列 α を用い，これらに前節で述べたうずなし条件を成立させることにより得られる。すなわち，うずなし条件の成立より

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & -\eta_2 q_{11}/\lambda_2 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \alpha_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta_2 q_{11}/(\lambda_1\lambda_2 q_{22}) \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

となるので，このような Q および α を用いれば（５．１９）式に対する拡張リアプノフ関数は

$$V(x,\dot{x}) = q_{11}\left[\frac{(\dot{x}_1+\alpha_{11}x_1)^2}{2} + \frac{\alpha_{11}}{2\lambda_2}\{[\lambda_2(\eta_1-\alpha_{11}) + \lambda_1\eta_2]x_1^2\right.$$
$$-2\eta_2x_1x_2 + \frac{\eta_2}{\lambda_1}x_2^2\} + \eta_3\{\cos\delta_0' - \cos(x_1+\delta_0')\}$$
$$\left. - \frac{P_2}{2P_1}\eta_3\{\cos2\delta_0' - \cos2(x_1+\delta_0')\} - \frac{P_I}{P_1}\eta_3x_1\right] + \frac{1}{2}q_{22}\lambda_2x_2^2 \tag{5.21}$$

となり，その時間導関数は

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -y^T\begin{bmatrix} -\eta_2\alpha_{11}q_{11}K_1/\lambda_2 & \eta_2\alpha_{11}q_{11}K_1/(\lambda_1\lambda_2) \\ -\eta_2\alpha_{11}q_{11}K_2/\lambda_2 & \eta_2\alpha_{11}q_{11}K_2/(\lambda_1\lambda_2) \\ -\eta_2\alpha_{11}q_{11}K_3/\lambda_2 & \eta_2\alpha_{11}q_{11}K_3/(\lambda_1\lambda_2) \\ -\eta_2\alpha_{11}q_{11}K_4/\lambda_2 & \eta_2\alpha_{11}q_{11}K_4/(\lambda_1\lambda_2) \end{bmatrix} *$$

$$
* \left.\begin{matrix}
-\eta_2 q_{11}K_1/\lambda_2 & q_{22}K_1 \\
-\eta_2 q_{11}K_2/\lambda_2 & q_{22}K_2 \\
-\eta_2 q_{11}K_3/\lambda_2 + q_{11}\{\lambda_2(\eta_1-\alpha_{11})+\lambda_1\eta_2\}/\lambda_2 & q_{22}K_3-\lambda_1 q_{22} \\
-\eta_2 q_{11}K_4/\lambda_2-\eta_2 q_{11}/\lambda_2 & q_{22}K_4+q_{22}
\end{matrix}\right] y
$$

$$
- \eta_3\alpha_{11}q_{11}\{\sin(x_1+\delta_0') - \frac{P_2}{P_1}\sin 2(x_1+\delta_0') - \frac{P_l}{P_1}\} x_1 - \frac{\eta_2}{\lambda_1}\alpha_{11}q_{11}x_2^2 \qquad (5.22)
$$

となる。このとき，最適フィードバック利得は（５．１２）式より

$$
K^T = [\ -\frac{\eta_2}{r\lambda_2}\alpha_{11}q_{11} \quad \frac{\eta_2}{r\lambda_1\lambda_2}\alpha_{11}q_{11} \quad -\frac{\eta_2}{r\lambda_2}q_{11} \quad \frac{1}{r}q_{22}\ ] \qquad (5.23)
$$

として，α_{11}, q_{11} および q_{22} の関数で示される。また，（５．１３）式より次式の関係が得られる。

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= (\eta_2\alpha_{11}q_{11}/\lambda_2)^2/r \\
W_{12} &= -(\eta_2\alpha_{11}q_{11}/\lambda_2)^2/(r\lambda_1) \\
W_{13} &= \eta_2^2\alpha_{11}q_{11}^2/(r\lambda_2^2) \\
W_{14} &= -\eta_2\alpha_{11}q_{11}q_{22}/(r\lambda_2) \\
W_{22} &= \{\eta_2\alpha_{11}q_{11}/(\lambda_1\lambda_2)\}^2/r \\
W_{23} &= -\eta_2^2\alpha_{11}q_{11}^2/(r\lambda_1\lambda_2^2) \qquad (5.24) \\
W_{24} &= \eta_2\alpha_{11}q_{11}q_{22}/(r\lambda_1\lambda_2) \\
W_{33} &= (\eta_2 q_{11}/\lambda_2)^2/r - 2\alpha_{11}q_{11} + 2(\eta_1\lambda_2+\eta_2\lambda_1)q_{11}/\lambda_2 \\
W_{34} &= -\eta_2 q_{11}q_{22}/(r\lambda_2) - \eta_2 q_{11}/\lambda_2 - q_{22}\lambda_1 \\
W_{44} &= q_{22}^2/r + 2q_{22} \\
L_{11} &= 2\alpha_{11}q_{11} \quad , \quad L_{12} = -2\eta_2\alpha_{11}q_{11}/\lambda_2 \\
L_{21} &= 0 \quad , \quad L_{22} = 2\eta_2\alpha_{11}q_{11}/(\lambda_1\lambda_2)
\end{aligned}
$$

そこで，（５．２１）式で示される拡張リアプノフ関数を正定値関数とする条件のもとで（５．２４）式の第１式，第８式および第１０式を解けば，α_{11}, q_{11}およびq_{22}は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta_2}{\lambda_2}\alpha_{11}q_{11} = \sqrt{rW_{11}} \\
&q_{11} = -\frac{r\lambda_2(\eta_1\lambda_2+\eta_2\lambda_1)}{\eta_2^2}\{1-\sqrt{1+\frac{W_{33}}{r}\frac{\eta_2^2}{(\eta_1\lambda_2+\eta_2\lambda_1)^2}+\frac{2\eta_2\lambda_2}{r(\eta_1\lambda_2+\eta_2\lambda_1)^2}\sqrt{rW_{11}}}\} \qquad (5.25) \\
&q_{22} = -r\{1-\sqrt{1+(W_{44}/r)}\}
\end{aligned}
$$

となり，更に同関係式を（５．２３）式に代入すれば最適フィードバック利得は以下のように求められる。

$$K^T = \left[-\sqrt{\frac{W_{11}}{r}} \quad \frac{\omega_0 T_g}{K_g}\sqrt{\frac{W_{11}}{r}} \quad \frac{1}{T_g}\left(D+\frac{K_g}{\omega_0}\right)\left\{1- \right.\right. *$$

$$\left.\left. * \sqrt{1+\frac{W_{33}}{r}\frac{T_g^2}{(D+K_g/\omega_0)^2} + \frac{2MT_g}{r(D+K_g/\omega_0)^2}\sqrt{rW_{11}}}\right\} \quad \sqrt{1+\frac{W_{44}}{r}} - 1\right] \tag{5.26}$$

なお，W_{11}, W_{33} および W_{44} を除く W および L の要素は（５．２４）式および（５．２５）式の関係を用いて W_{11}, W_{33} および W_{44} の関数として決定することができる。ここに，重み行列 W の半正定値の保証にシルベスターの定理[(23)]を適用すれば W_{11}, W_{33} および W_{44} について

$$0 \leqq W_{11} \leqq \frac{D_2}{M^2}\left\{W_{33} + \frac{2rK_g^2}{\omega_0^2 T_g^2}\left(1 - \sqrt{\frac{\omega_0^2 T_g^2}{rK_g^2}W_{33} + 1}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{r}\{(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 + r\}^2 - r \leqq W_{44} \leqq \frac{1}{r}\{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 + r\}^2 - r \tag{5.27}$$

ここに，

$$A = \frac{r\omega_0^2}{K_g^2}\left(D + \frac{K_g}{\omega_0}\right)^2\left\{\sqrt{C} - 1 - \frac{MT_g}{r(D + K_g/\omega_0)^2}\sqrt{rW_{11}}\right\}$$

$$B = \frac{rD\omega_0^2}{K_g^2}\left(D + \frac{K_g}{\omega_0}\right)\left\{\sqrt{C} - 1 - \frac{MT_g}{rD(D + K_g/\omega_0)}\sqrt{rW_{11}}\right\}$$

$$C = 1+ \frac{T_g^2}{r(D + K_g/\omega_0)^2}W_{33} + \frac{2MT_g}{r(D + K_g/\omega_0)^2}\sqrt{rW_{11}}$$

の制約式が得られる。

以上より，（５．２７）式の制約下で上述の最適化手順を実行すれば，簡単な代数計算処理で一般化座標および一般化速度のそれぞれをフィードバックする新しい制御系の構成ができ，更に過渡応答の改善も期待できる。

第５・４節　数値計算例と結果に対する検討

系統内に大擾乱が生じた場合の，本制御方式による制御効果を調べるため，第５．１図の F_1 点に０．１秒間の三相短絡故障を想定し，制御は故障除去，すなわち故障回線解放と同時に開始するものとする。なお，

系統の諸定数および初期条件は一括して第５．１表に示した。

第５．２表は，評価関数の重み行列 W の値をパラメータとした場合の最適フィードバック利得 K の計算結果を示したもので，Ｎｏ．１が第２章で記述した一般化速度のみフィードバックする場合に相当しＮｏ．２，Ｎｏ．３およびＮｏ．４が本制御方式の一般化座標および一般化速度のそれぞれをフィードバックする場合に相当する。

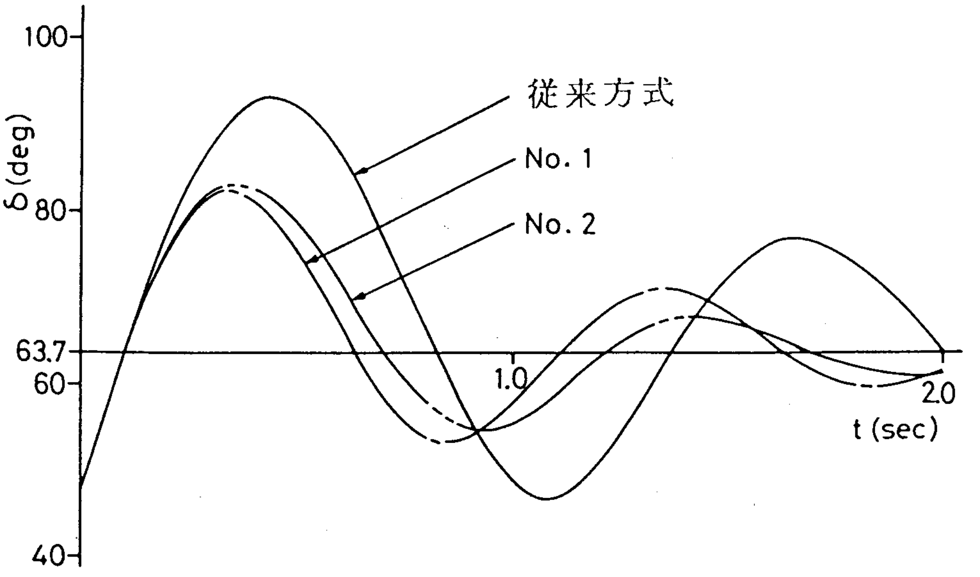
まず，重み要素 W_{11} の制御効果に与える影響を調べるためＮｏ．１とＮｏ．２の場合を比較する。この場合の位相角および速度の時間的変化を示したものが第５．２図および第５．３図である。同図よりＮｏ．２を用いた制御効果の方がＮｏ．１を用いた制御効果より優れていることがわかり，一般化座標を導入することの有効性が伺える。次に，重み要素 W_{33} および W_{44} の制御効果に与える影響を調べるためＮｏ．２とＮｏ．３およびＮｏ．３とＮｏ．４の場合を比較する。この場合の位相角および速度の時間的変化を示したものが第５．４図～第５．７図である。これらの図より明らかなように，本制御方式による抑制効果が，従来の制御方式（ｕ＝０）に比べて顕著に現われていることがわかる。

第５．１表　系統定数および初期条件

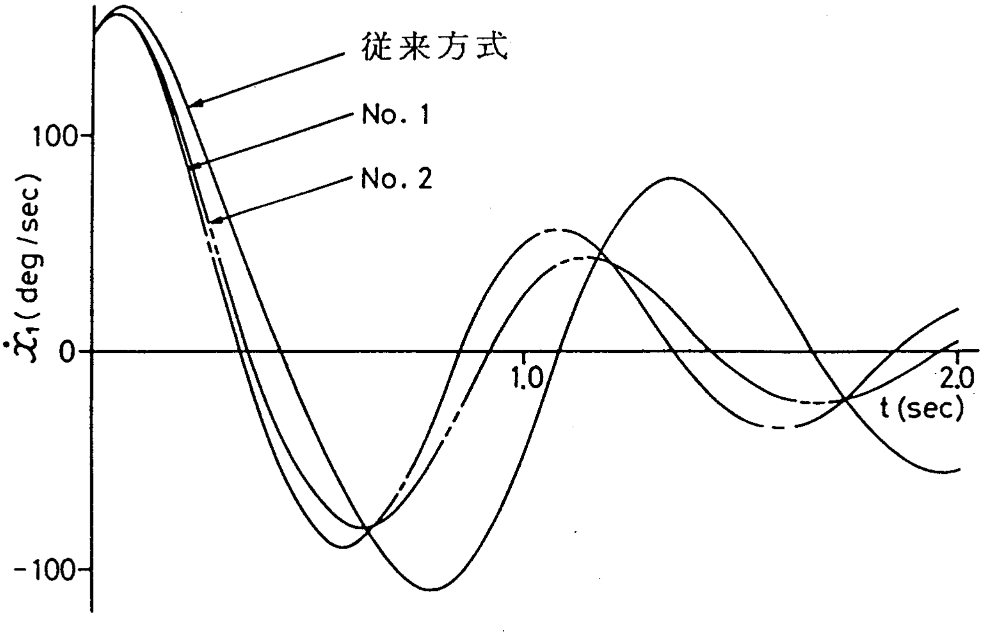
$x_d=1{\cdot}0$	$x_e=1{\cdot}0$	$T_g=0{\cdot}1$	$E'_q=1{\cdot}208$
$x'_d=0{\cdot}4$	$M=0{\cdot}0138$	$K_g=1{\cdot}0$	
$x_q=0{\cdot}6$	$D=0{\cdot}0138$	$f_0=60$ Hz	
$x_t=0{\cdot}12$	$E_B=1{\cdot}0$	$\delta_0=40°$	$(\delta'_0=63{\cdot}7°)$

第５．２表　最適フィードバック利得

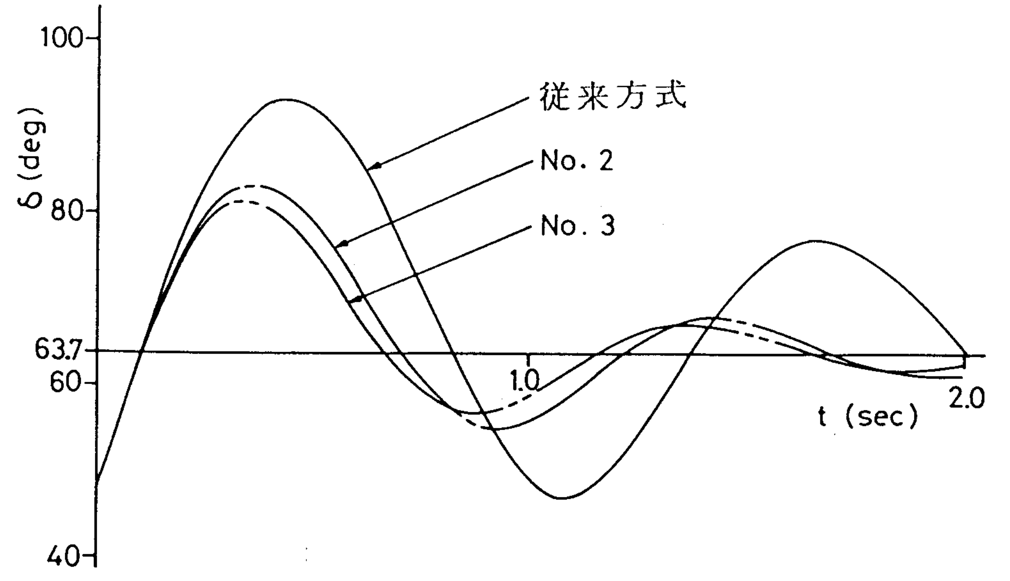
	重	み		最適フィードバック利得($r=1{\cdot}0$)			
No.	W_{11}	W_{33}	W_{44}	K_1	K_2	K_3	K_4
1	0	0·5	10	0	0	−0·561469	2·31662
2	0·1	0·5	10	−0·316228	11·9218	−0·619278	2·31662
3	0·1	1	10	−0·316228	11·9218	−0·891101	2·31662
4	0·1	1	50	−0·316228	11·9218	−0·891101	6·14143



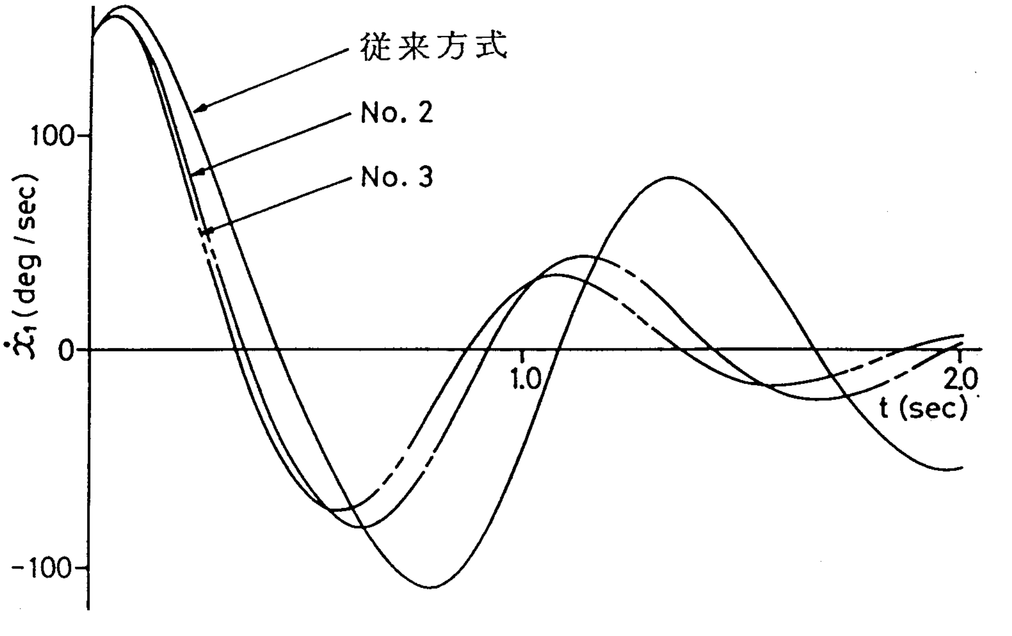
第５．２図　δ の時間応答



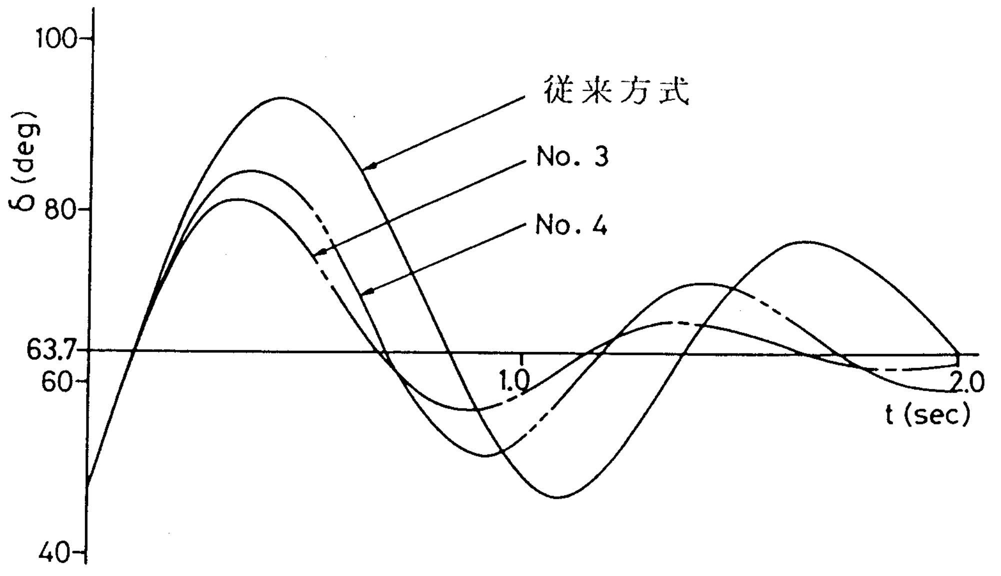
第５．３図　$\dot{x}_1$の時間応答



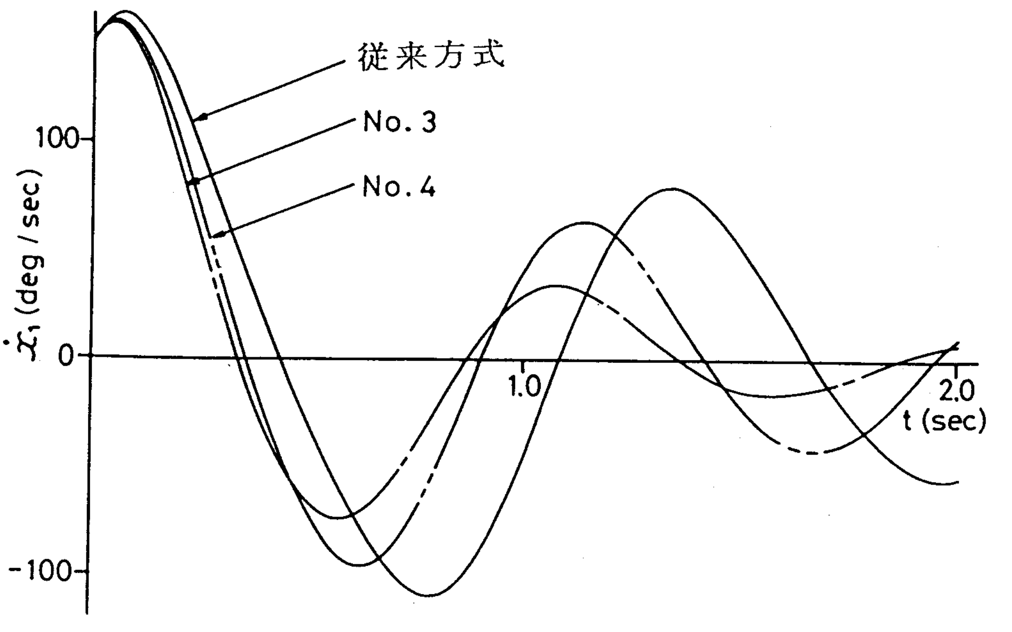
第5．4図　δ の時間応答



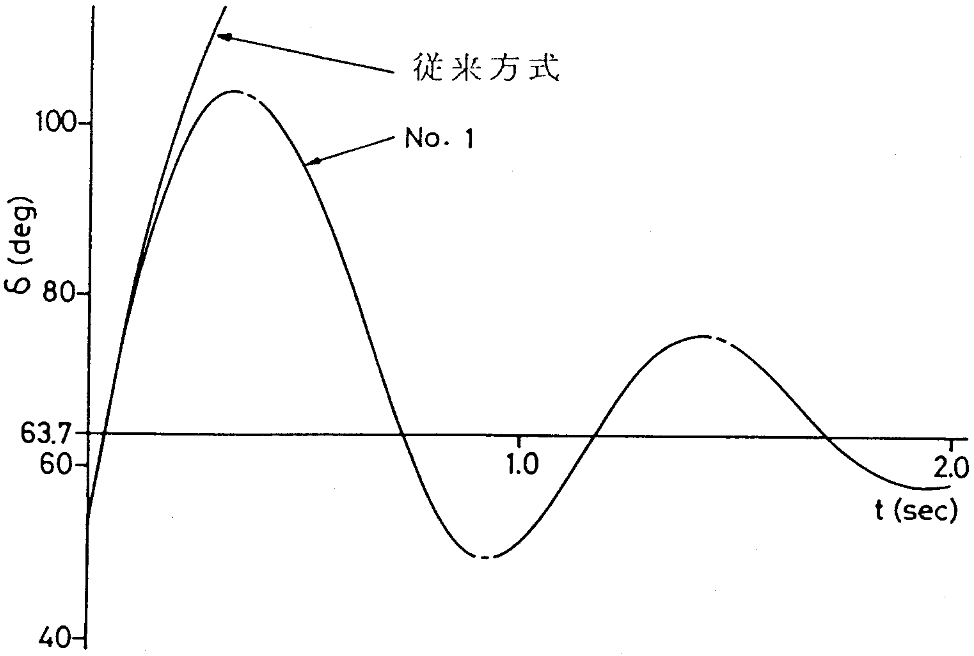
第5．5図　$\dot{x}_1$ の時間応答



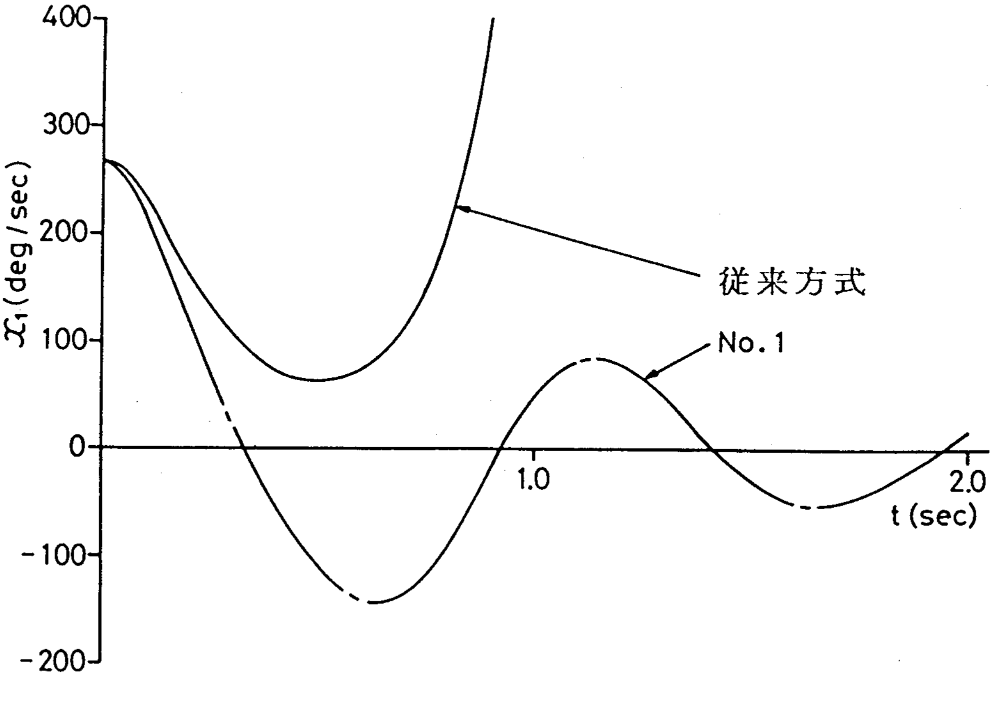
第５．６図　δ の時間応答



第５．７図　$\dot{x}_1$の時間応答



第５．８図　δ の時間応答



第５．９図　$\dot{x}_1$ の時間応答

更に，第５．１図のF_2点に三相短絡故障を想定し，制御は故障除去と同時に開始するものとする。ここで考慮する故障は非常に過酷なものである。第５．８図および第５．９図は本制御方式と従来の制御方式による過渡特性，すなわち位相角および速度の時間的変化を示したものである。同図より明らかなように，従来の制御方式では脱調に至る場合でも本制御方式では系を安定にすることができ，本制御方式の導入が，故障回線をしゃ断するしゃ断時間の余裕につながることがわかる。

以上より，評価関数を構成する重み行列は非零の非対角要素を含むことになるが，非対角要素を考慮し，かつ閉ループ系のリアプノフ関数として拡張リアプノフ関数を採用すれば，フィードバック信号として一般化座標および一般化速度のそれぞれをフィードバックできる非線形系に対する最適制御が得られ，過渡安定度領域に至る制御が可能となる。

第５・５節　結　言

本章では，第２章の方法に改良を加え，一般化座標についても直接フィードバック信号に組み込めるような，より一般的な方法への拡張を行った。更に，提案した手法にしたがい，調速機制御系を含む一機－無限大母線系統に対する最適制御法則を導出するとともに，この制御方式による過渡特性を，先の一般化速度のみフィードバックする制御方式の過渡特性と比較検討し，一般化速度のみならず一般化座標についても直接フィードバックする本制御方式の有効性を明らかにした。

第6・1節　緒　言

第5章では，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数に拡張リアプノフ関数[19]を採用し，一般化座標ならびに一般化速度のそれぞれをフィードバック信号に組み込める最適化の一構成法を示した。また，この制御方式を，調速機効果を含む一機－無限大母線系統に適用することにより，その有効性を明らかにした。

本章においては，同手法の実規模系統への適用を前提とするため，調速機効果を含む多機電力系統を対象系統として，前章で記述した手法に基づき最適制御法則を導出している。なお，多機電力系統を対象とする場合，安定平衡点の概念が一機－無限大母線系統とは異なり若干の修正を必要とするが，理論展開がブロック単位毎に取り扱える利点もある。

以上の方法を，多機電力系統の最も基本的な3機系統に適用するとともに，本制御方式の過渡時における動作特性に与える影響を，各発電機間の相差角および制御信号の時間応答から示し，本制御方式の導入が，相互に干渉し合う連系系統の過渡特性の改善に対しても十分寄与しうることを明らかにする。

第6・2節　動特性式の導出

調速機効果含むN台の発電機からなる多機電力系統において，第i番目の発電機の動特性式は

$$M_i\frac{d^2\delta_i}{dt^2} + D_i\frac{d\delta_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}E_iE_jB_{ij} \times \sin(\delta_i-\delta_j) - P_{li} + \Delta P_{mi} = 0$$

$$\frac{d\Delta P_{mi}}{dt} + \frac{1}{T_{gi}}\Delta P_{mi} = \frac{K_{gi}}{\omega_0 T_{gi}}\frac{d\delta_i}{dt} + u_i \tag{6.1}$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

で与えられる。いま，変数δ_iおよびP_{mi}の代わりに

$$x_1 = [\delta_1-\delta_1^0,\ \delta_2-\delta_2^0,\ \cdots,\ \delta_N-\delta_N^0]^T$$
$$x_2 = [\Delta P_{m1},\ \Delta P_{m2},\ \cdots,\ \Delta P_{mN}]^T \tag{6.2}$$

で示す$[\delta_i^0,\ P_{li}(i=1,\ 2,\ \cdots,N)]$からの変化量を一般化座標に選べば，（6．1）式は次式のような行列形式で書き表わすことができる。

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + g(x) = Bu \tag{6.3}$$

ここに，

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} M_1^{-1}D_1 & 0 \\ -\Lambda & I \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & M_1^{-1} \\ 0 & \eta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} M_1^{-1}C^T f(Cx_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$M_1 = diag(M_i),\ D_1 = diag(D_i)$$
$$\Lambda = diag[K_{gi}/(\omega_0 T_{gi})],\ \eta = diag(1/T_{gi})$$
$$(i=1,2,\cdots,N)$$
$$u = [u_1,\ u_2,\ \cdots,u_N]^T$$
$$f(Cx_1) = [f_1(\sigma_1),\ f_2(\sigma_2),\ \cdots,\ f_L(\sigma_L)]^T$$
$$f_k(\sigma_k) = E_iE_jB_{ij}\{\sin(\sigma_k + \delta_{ij}^0) - \sin\delta_{ij}^0\}$$
$$L = N(N-1)/2,\quad \sigma_k = x_i - x_j$$
$$k = (i-1)N - i(i+1)/2 + j$$
$$1 \leqq i < j \leqq N$$
$$\delta_{ij}^0 = \delta_i^0 - \delta_j^0$$

（6．3）式においてCは

$$\sigma = Cx_1 \tag{6.4}$$

の関係を満たすＬｘＮ次の行列であり，$f_k(\sigma_k)$は$\sigma_k = 0$の近傍の有界な領域において

$$\sigma_k f_k(\sigma_k) > 0$$
$$f_k(0) = 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ L) \tag{6.5}$$

を満たす非線形関数である。なお，（6．3）式で示される系の安定平衡点は，その平衡解より次式となる。

$$\xi = 0, \quad \dot{x} = 0 \tag{6.6}$$

ここに，

$$\xi = \begin{bmatrix} \sigma \\ x_2 \end{bmatrix}$$

第６・３節　最適制御法則の決定

前節で記述した多機電力系統に対し最適フィードバック制御を設定するわけであるが，系の平衡解が（６．６）式で表わされることを考慮して，ここでは以下のように設定する。

$$u = -K^T y \tag{6.7}$$

ここに，

$$K = \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \xi \\ x \end{bmatrix}$$

K_I, K_{II}:（Ｌ＋Ｎ）ｘＮ次，２ＮｘＮ次のフィードバック利得行列

このとき，閉ループ系は

$$M\ddot{x} + (D + BK_{II}^T)\dot{x} + \{g(x) + BK_I^T\xi\} = 0 \tag{6.8}$$

となり，この系の拡張リアプノフ関数は前章と同様に構成できる。

まず，（６．８）式の両辺に正則な２Ｎｘ２Ｎ次の実数行列

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

ここに，

$Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$：それぞれＮｘＮ次の行列

を左乗した相似な系

$$H\ddot{x} + (A + QBK_{II}^T)\dot{x} + \{G(x) + QBK_I^T\xi\} = 0 \tag{6.10}$$

ここに，

$$H = QM, \quad A = QD, \quad G(x) = Qg(x)$$

を対象に，系の一般化運動量ベクトルおよび一般化ポテンシャルを

$$P(\dot{\zeta}) = H\dot{\zeta}$$
$$F(x) = \beta x + G(x) \tag{6.11}$$

ここに,

$$\dot{\zeta} = \dot{x} + \alpha x$$

α, β : それぞれ2Nx2N次の未定係数行列

の形式で定義する。(6.11)式から一意的な状態関数が定まるための条件(うずなし条件)は

$$\frac{\partial P(\dot{\zeta})}{\partial \dot{\zeta}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \beta + \begin{bmatrix} 0 & Q_{11}M_1^{-1}+Q_{12}\eta \\ 0 & Q_{22}\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11}M_1^{-1}C^T\partial f(\sigma)/\partial\sigma C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

ここに,

$$\partial f(\sigma)/\partial\sigma = diag[\partial f_i(\sigma_i)/\partial\sigma_i] \qquad (i=1,2,\cdots,L)$$

で示される$P(\dot{\zeta})$および$F(x)$のヤコビアンがそれぞれ対称行列となることである。これより,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= mM_1 + lM_1 1 M_1 \\ Q_{12} &= -Q_{11}M_1^{-1}\eta^{-1} \\ Q_{21} &= 0 \ , \ Q_{22}\eta = [Q_{22}\eta]^T \end{aligned} \tag{6.13}$$

ここに,

m, l: 任意定数

$\mathbf{1}$: すべての要素が1であるNxN次の行列

と, βが対称行列であれば十分である。このとき, (6.8)式に対する拡張リアプノフ関数は

$$\begin{aligned} V(x,\dot{x}) &= \int_0^{\dot{\zeta}} [P(\dot{\zeta})]^T d\dot{\zeta} + \int_0^x [F(x)]^T dx \\ &= \{(\dot{x}+\alpha x)^T H(\dot{x}+\alpha x) + x^T\beta x\}/2 \\ &+ \int_0^x [G(x)]^T dx \end{aligned} \tag{6.14}$$

の形式で与えられる。また, その時間導関数は次式となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} &= \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial \dot{\zeta}}\}^T\ddot{\zeta} + \{\frac{\partial V(x,\dot{x})}{\partial x}\}^T\dot{x} \\
&= -\dot{x}^T(A-H\alpha)\dot{x} - x^T[\alpha^T(A-H\alpha)-\beta]\dot{x} \\
&\quad - x^T\alpha^T G(x) - \dot{x}^T QBK_I^T\dot{x} - \dot{x}^T QBK_I^T\xi \\
&\quad - x^T\alpha^T QBK_I^T\dot{x} - x^T\alpha^T QBK_I^T\xi
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

ここに，Hおよびβが（６．１２）式の成立において対称行列となることを利用している。

次に，前記で得られた条件を基盤にQ,αおよびβなどの各係数行列の選定をリアプノフ関数構成の立場で考える。なお，ここでは（６．４）式および（６．６）式で示す状態変数の性質上，すなわち$x_1 = 0$以外にも$\sigma = 0$を満たす解が存在することから，当初，拡張リアプノフ関数をxおよび$\dot{x}$に関して，$V(x,\dot{x}) \geqq 0$および$dV(x,\dot{x})/dt \leqq 0$となる条件で求めて行くが，この関数はx_1をσに書き換えることにより，（６．５）式で示す領域内でリアプノフ関数の性質を満足することになる。[29]

まず，（６．１５）式で示される$dV(x,\dot{x})/dt \leqq 0$を成立させるための十分条件として，同式の右辺第１項，第２項および第３項に関して，（６．１６）式～（６．１８）式が得られる。

$$A-H\alpha \geqq 0 \tag{6.16}$$

$$\alpha^T(A-H\alpha)-\beta = 0 \tag{6.17}$$

$$x^T\alpha^T G(x) \geqq 0 \tag{6.18}$$

（６．１６）式および（６．１７）式は，（６．１５）式の第１項および第２項が任意のxおよび$\dot{x}$について半負定値となるための条件から導かれる。なお，（６．１５）式の右辺第４項以下に関しては，後述の最適フィードバック利得が決定される時点において，$dV(x,\dot{x})/dt \leqq 0$の保証に適用される。

いま，便宜上，行列αを

$$\alpha^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

ここに，

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$：それぞれＮｘＮ次の行列

と定義すれば，（６．１８）式は

$$x^T\alpha^T G(x) = x^T\begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12}Q_{22}\eta \\ 0 & \alpha_{22}Q_{22}\eta \end{bmatrix}x + x^T\begin{bmatrix} \alpha_{11}Q_{11}M_1^{-1}C^T f(Cx_1) \\ \alpha_{21}Q_{11}M_1^{-1}C^T f(Cx_1) \end{bmatrix} \geqq 0 \qquad (6.20)$$

となり，第１項より

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22}Q_{22}\eta \geqq 0 \qquad (6.21)$$

また，第２項より

$$\alpha_{11}Q_{11}M_1^{-1}C^T = nC^T, \quad \alpha_{21}Q_{11}M_1^{-1}C^T = 0 \qquad (6.22)$$

ここに，$n \geqq 0$となる任意定数

となる。なお，(６．２１）式および（６．２２）式の関係は（６．５）式のもとで成立するものである。このとき，（６．２２）式の行列α_{11}およびα_{21}は次式で表わすことができる。

$$\alpha_{11} = (nI+S'1)M_1Q_1^{-1}, \quad \alpha_{21} = S''1M_1Q_1^{-1} \qquad (6.23)$$

ここに，

S', S''：それぞれＮｘＮ次の行列

次に，（６．１７）式よりβは

$$\beta = \alpha^T(A-H\alpha)$$

$$= \begin{bmatrix} (nI+S'1)D' - (nI+S'1)M_1Q_1^{-1}M_1(nI+1S'^T) & -(nI+S'1)\eta^{-1} - (nI+S'1)M_1Q_1^{-1}M_1 1S''^T \\ S''1D' - \alpha_{22}Q_{22}\Lambda - S''1M_1Q_1^{-1}M_1(nI+1S'^T) & -S''1\eta^{-1} + \alpha_{22}Q_{22} - S''1M_1Q_1^{-1}M_1 1S''^T \end{bmatrix} \qquad (6.24)$$

ここに，

$$D' = D_1 + \eta^{-1}\Lambda = diag(D_i + K_{gi}/\omega_0)$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

で示されるが，（６．１２）式でβを対称行列とするので（６．２４）式より次式の関係が導かれる。

$$S' = sD', \quad S'' = -s\eta^{-1}, \quad Q_{22}\alpha_{22} = n\Lambda^{-1}\eta^{-1} \qquad (6.25)$$

ここに，

s：任意定数

（６．１６）式は

$$A-H\alpha = \begin{bmatrix} mD' - nM_1 + (l-s)M_1 1 D' & -m\eta^{-1} - (l-s)M_1 1 \eta^{-1} \\ -Q_{22}\Lambda & Q_{22} \end{bmatrix} \geqq 0 \qquad (6.26)$$

となり，m,n,l,s および Q_{22} に関して半正定値を保証することになるが，（６．２６）式を満たす m,n,l,s および Q_{22} の一般的関係を求めることは困難であるから，特別な場合として任意定数 l および s を $l=s$ に，Q_{22} を対角行列とする場合について考える。このとき，（６．２６）式にシルベスターの定理[23]を適用すれば，m,n および Q_{22} について次式の関係が得られる。

$$0 \leqq n \leqq \min_{1\leqq i\leqq N}(D_i/M_i)m$$

$$m(\omega_0 T_{gi}/K_{gi})^2\{\sqrt{D_i+K_{gi}/\omega_0-nM_i/m} - \sqrt{D_i - nM_i/m}\}^2 \qquad (6.27)$$

$$\leqq q_{N+i} \leqq m(\omega_0 T_{gi}/K_{gi})^2\{\sqrt{D_i+K_{gi}/\omega_0-nM_i/m}+\sqrt{D_i-nM_i/m}\}^2$$

$$(i=1,2,\cdot\cdot\cdot,N)$$

ここに，

q_{N+i}：Q_{22}の第（ｉ，ｉ）成分

一方，（６．１４）式で示す$V(x,\dot{x})$の半正値性を保証するための十分条件として

$$H \geqq 0 \qquad (6.28)$$

$$\beta \geqq 0 \qquad (6.29)$$

$$\int_0^x [G(x)]^T dx \geqq 0 \qquad (6.30)$$

を与える。（６．２８）式は，Q が正則な行列であることを考慮に入れて整理すると

$$Q_{11} = mM_1 + lM_1 1 M_1 > 0 \qquad (6.31)$$

となり，また，Q_{11} の第ｋ次の主小行列式が

$$m^{k-1}(l\sum_{i=1}^{k}M_i + m)\prod_{i=1}^{k}M_i \qquad (6.32)$$

となることから，（６．３１）式より m および l について次式の関係が

得られる。

$$m > 0 \quad , \quad l > -m/\sum_{i=1}^{N} M_i \tag{6.33}$$

（６．２９）式は，（６．２４）式で求めたβを（６．２７）式の条件をもとにしてシルベスターの定理(23)を適用すると，lおよびnについて次式を与える。

$$l \geqq -n \,/\, \sum_{i=1}^{N}(D_i + K_{gi}/\omega_0) \tag{6.34}$$

（６．３０）式は，（６．１２）式および（６．１３）式の関係を用いて

$$\int_0^x [G(x)]^T dx = \frac{1}{2} x_2^T Q_{22} \eta x_2 + m\int_0^{\sigma} [f(\sigma)]^T d\sigma \tag{6.35}$$

と書き換えることができるので，（６．５）式および（６．２７）式の関係において必然的に満足している。従って，任意定数であるm, n, lおよびQ_{22}を（６．２７）式，（６．３３）式および（６．３４）式のもとで選べば，（６．１４）式で示す$V(x,\dot{x})$は半正定値な関数として

$$V(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}[\dot{x}_1^T \; x_1^T \; x_2^T] \times \begin{bmatrix} mM_1 + lM_1 1 M_1 & nM_1 + lM_1 1 D' & -lM_1 1 \eta^{-1} \\ nM_1 + lD' 1 M_1 & nD' + lD' 1 D' & -n\eta^{-1} - lD' 1 \eta^{-1} \\ -l\eta^{-1} 1 M_1 & -n\eta^{-1} - l\eta^{-1} 1 D' & n\Lambda^{-1}\eta^{-1} + l\eta^{-1} 1 \eta^{-1} + Q_{22}\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + m\int_0^{\sigma} [f(\sigma)]^T d\sigma \tag{6.36}$$

で与えられるが，多機系統を対象とする本例では安定平衡点は$x_1 = 0$ではなく，発電機間の相差角，つまり$\sigma = 0$であるので，付録２にしたがい，（６．３６）式の$V(x,\dot{x})$をσの関数に書き直す必要がある。すなわち，任意定数であるnおよびlを（６．３４）式の不等式内で

$$n = -l\sum_{i=1}^{N}(D_i + \frac{K_{gi}}{\omega_0}) \tag{6.37}$$

の関係を満たすように選べば，付録２の関係式より，（６．３６）式のx_1にかかる部分行列が

$$\begin{aligned} nD' + lD' 1 D' &= -lC^T D_E C \\ nM_1 + lM_1 1 D' &= -lM_1 D'^{-1} C^T D_E C \\ -n\eta^{-1} - l\eta^{-1} 1 D' &= l\eta^{-1} D'^{-1} C^T D_E C \end{aligned} \tag{6.38}$$

ここに，

$$D_E = diag\,[D_1'D_2', D_1'D_3', \cdots, D_{N-1}'D_N']$$

と書き換えることができ，（６．３６）式の $V(x,\dot{x})$ は σ, x_2 および $\dot{x}_1$ の正定値関数として

$$V(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}[\dot{x}_1^T \ \sigma^T \ x_2^T]$$
$$\times \begin{bmatrix} mM_1 + lM_1 1M_1 & -lM_1 D'^{-1} C^T D_E & -lM_1 1\eta^{-1} \\ -lD_E C D'^{-1} M_1 & -lD_E & lD_E C D'^{-1}\eta^{-1} \\ -l\eta^{-1} 1 M_1 & l\eta^{-1} D'^{-1} C^T D_E & n\Lambda^{-1}\eta^{-1} + l\eta^{-1} 1 \eta^{-1} + Q_{22}\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \sigma \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \ m\int_0^{\sigma} [f(\sigma)]^T d\sigma \tag{6.39}$$

また，その時間導関数は（６．１５）式に付録３の関係を適用し，y について整理することにより

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -y^T [KB^T Q^T N^T + Z]\, y \ - \ n\sigma^T f(\sigma) \tag{6.40}$$

ここに，

$$N = \begin{bmatrix} \alpha_E \\ I \end{bmatrix} \quad \alpha_E = \begin{bmatrix} -lD_E C D'^{-1} M_1 Q_{11}^{-1} & 0 \\ -l\eta^{-1} 1 M_1 Q_{11}^{-1} & nQ_{22}^{-1}\Lambda^{-1}\eta^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \beta_E & 0 \\ 0 & A - H\alpha \end{bmatrix}, \ \beta_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n\Lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

α_E, β_E：（Ｌ＋Ｎ）ｘ２Ｎ次，（Ｌ＋Ｎ）ｘ（Ｌ＋Ｎ）次の行列

で与えられる。なお，（６．３７）式の条件下では，（６．２７）式，（６．３３）式および（６．３４）式の制約式は（６．２７）式に集約される。

一方，閉ループ系の拡張リアプノフ関数の時間導関数が（６．４０）式で与えられることを考慮して，（６．３）式の制御対象における評価関数を次式で与える。

$$PI = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \{y^T W y + \sigma^T L f(\sigma) + u^T R u\}\, dt \tag{6.41}$$

（６．４１）式において，行列 L は $\sigma^T L f(\sigma) \geq 0$ を満たすＬｘＬ次の行列，行列 W および R は，それぞれ（Ｌ＋３Ｎ）ｘ（Ｌ＋３Ｎ）次およびＮｘＮ次の対称行列であり，W は半正定値，R は正定値とする。

このとき，（6．40）式および（6．41）式を用いてDPの基礎方程式を構成し，これに二次形式の最小化手順を適用すれば，最適フィードバック利得は[26]

$$K^T = R^{-1}B^TQ^TN^T \tag{6.42}$$

ここに，

$$\begin{aligned} W - Z - Z^T - NQBR^{-1}B^TQ^TN^T &= 0 \\ L &= 2nI \end{aligned} \tag{6.43}$$

で与えられる。このとき，（6．42）式で決定された最適フィードバック利得を（6．40）式に代入すると，（6．40）式で示される拡張リアプノフ関数の時間導関数は

$$\frac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -y^T[NQBR^{-1}B^TQ^TN^T + Z]y - n\sigma^T f(\sigma) \leqq 0 \tag{6.44}$$

となり，（6．27）式の条件のもとで（6．14）式の$V(x,\dot{x})$は，リアプノフ関数としての条件を備えることになる。

いま，（6．43）式から，任意定数であるm, lおよびQ_{22}の各要素を（6．27）式の条件下で求めると，W_1, W_{N+L+k}および$[W_{2N+L+i}(i=1,N)]$の関数として，それぞれ次式のように一義的に決定することができる。

$$\begin{aligned} l &= -\sqrt{W_1/A_1} \\ m &= A_2 + \sqrt{A_2^2 + r_k\eta_k^2(W_{N+L+k} - A_3)} \\ q_{N+i} &= r_i\{\sqrt{1 + W_{2N+L+i}/r_i} - 1\} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \end{aligned} \tag{6.45}$$

ここに，

$$A_1 = (r_1\eta_1^2D_1' + r_2\eta_2^2D_2')/(r_1r_2\eta_1^2\eta_2^2)$$

$$A_2 = \sqrt{W_1/A_1}M_k - r_k\eta_k^2D_k'$$

$$A_3 = \sqrt{W_1/A_1}M_k\sum_{j=1}^{N}\{\sqrt{W_1/A_1}M_k/(r_j\eta_j^2) - 2D_j'\}$$

r_i, D_i', W_i：それぞれ R, D', W の第（i，i）成分

（6．45）式において，添字kは$\min_{1\leq i\leq N}(M_i/D_i)$を満たすiの値を示す。なお，$W_1, W_{N+L+k}$および$[W_{2N+L+i}(i=1,N)]$を除く$W$および$L$の要素は，上述の（6．43）式の関係より，$W_1, W_{N+L+k}$および$[W_{2N+L+i}(i=1,N)]$の重みの関数

として決定することができる。ここに，この重み行列 W の半正定値の保証を（6．27）式のもとで行うと，W_1, W_{N+L+k} および $\{W_{2N+L+i}(i=1,N)\}$ について

$$W_1 \geqq 0$$

$$W_{N+L+k} \geqq A_3 + M_k\sqrt{W_1/A_1}A_4 \sum_{j=1}^{N} D_j'/(r_k \eta_k D_k)$$

$$r_i\{A_5(\omega_0 T_{gi}/K_{gi})\{\sqrt{D_i+K_{gi}/\omega_0-A_6 M_i} - \sqrt{D_i-A_6 M_i}\}^2/r_i+1\}^2$$

$$-r_i \leqq W_{2N+L+i} \leqq r_i\{A_5(\omega_0 T_{gi}/K_{gi})\{\sqrt{D_i+K_{gi}/\omega_0-A_6 M_i} \tag{6.46}$$

$$+ \sqrt{D_i-A_6 M_i}\}^2/r_i + 1\}^2 - r_i$$

$$(i=1,2,\cdot\cdot\cdot,N)$$

ここに，

$$A_4 = M_k\sqrt{W_1/A_1}\sum_{j=1}^{N} D_j'/(D_k \eta_k) + 2(r_k \eta_k D_k' - M_k\sqrt{W_1/A_1}/\eta_k)$$

$$A_5 = A_2 + \sqrt{A_2^2 + r_k \eta_k^2 (W_{N+L+K} - A_3)}$$

$$A_6 = \sqrt{W_1/A_1}\sum_{j=1}^{N} D_j'/A_5$$

が得られ，この制約下で W の半正定値の保証がなされる。

以上より，（6．46）式で示される不等式条件内の，W_1, W_{N+L+k} および $\{W_{2N+L+i}(i=1,N)\}$ に対して（6．42）式および（6．45）式の関係を適用すれば，簡単な行列計算処理で短時間に発電機間の相差角および発電機の速度偏差などをフィードバックする制御系を構成することができ，相互に干渉し合う連系系統の過渡特性の改善をはかることができる。

第６・４節　数値計算例と結果に対する検討

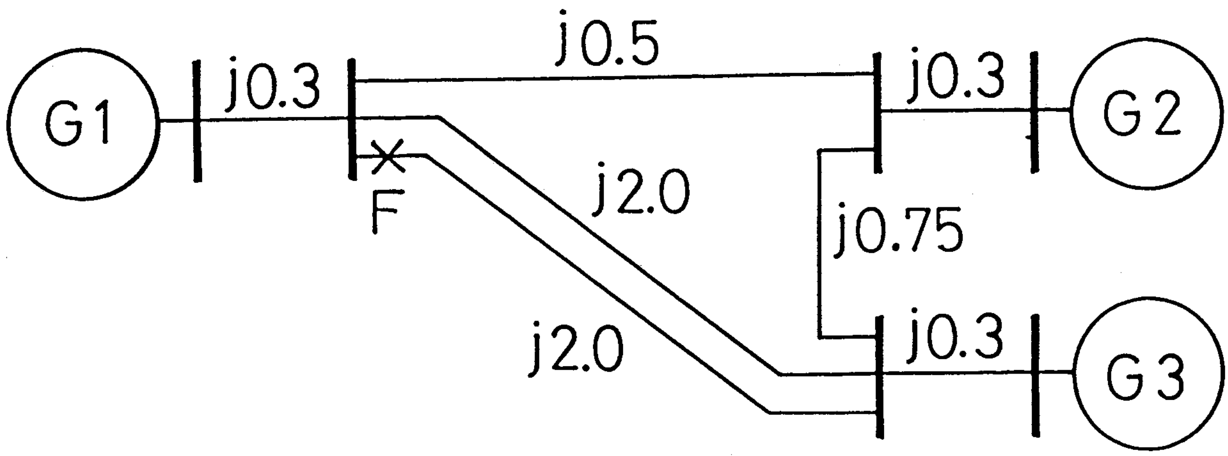
多機系統のモデルとして，第６．１図に示す三機系統を用い，同期機に付属した調速機制御系は同図（ｂ）のモデルを用いる。このモデル系統の諸定数および初期条件は一括して第６．１表に示した。

系統内に大擾乱が生じた場合の，本制御方式による制御効果を調べるために第６．１図のＦ点（Ｇ１発電機の母線端近傍の１回線）に０．１秒と，従来の制御系 ($u = 0$) では脱調に至る例として０．１７秒の三相

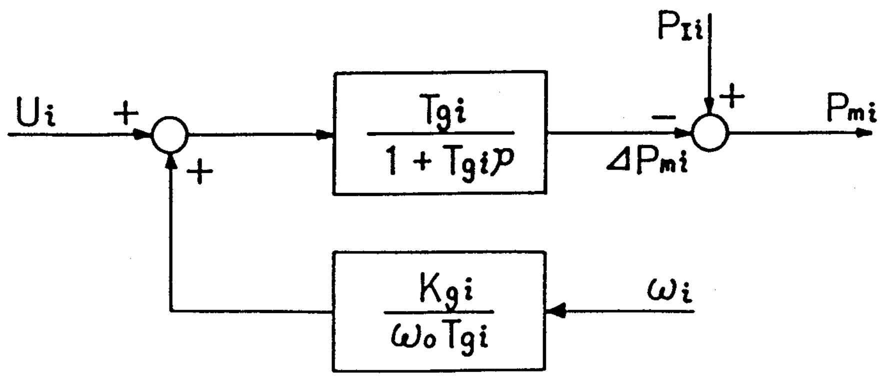
短絡故障をそれぞれ想定し，制御は故障回線除去と同時に開始するものとする。なお，参考のために平常時（２回線送電），Ｆ点故障時および故障除去時（１回線送電）のサセプタンス行列を第６．２表に示した。

第６．３表は，評価関数の重み行列Wの一要素であるW_1の値をパラメータとした場合の，最適フィードバック利得行列Kの値の計算結果を示したもので，Ｎｏ．１が一般化速度のみフィードバックする場合に相当し，Ｎｏ．２が本法の一般化座標および一般化速度のそれぞれをフィードバックする場合に相当する。

第６．２図および第６．３図は，Ｆ点に０．１秒の，また第６．４図および第６．５図には０．１７秒の三相短絡故障の生じたときの第３号機を基準とした第１号機および第２号機の相差角およびそのとき制御に必要とした制御信号の時間応答を示している。比較のため，第６．４図には，一般化速度のみフィードバックする制御方式（Ｎｏ．１に相当）による相差角の時間応答を付記している。



(a) Model system



(b) GOV system

第６．１図　モデル三機系統

第6．1表　系統定数および初期条件

第1号機

M_1=0.0138　　D_1=0.0134　　E_1=1.0

T_{g1}=0.1　　K_{g1}=1.0　　P_{l1}=0.5

δ_{13}^0=43.6°（二回線送電）　δ_{13}^0=53.5°（一回線送電）

第2号機

M_2=0.0138　　D_2=0.0131　　E_2=1.0

T_{g2}=0.1　　K_{g2}=1.0　　P_{l2}=0.2

δ_{23}^0=33.3°（二回線送電）　δ_{23}^0=39.7°（一回線送電）

第3号機

M_3=0.0138　　D_3=0.0138　　E_3=1.0

T_{g3}=0.1　　K_{g3}=1.0　　P_{l3}=−0.7

第6．2表　サセプタンス行列

平常時のサセプタンス

	G1	G2	G3
G1	−1.2643	0.7279	0.5363
G2	0.7279	−1.3282	0.6002
G3	0.5363	0.6002	−1.1366

故障時のサセプタンス

	G1	G2	G3
G1	−3.2276	0.0352	0.0176
G2	0.0352	−1.5726	0.4172
G3	0.0176	0.4172	−1.2737

故障除去時のサセプタンス

	G1	G2	G3
G1	−1.1409	0.7382	0.4026
G2	0.7382	−1.3273	0.5891
G3	0.4026	0.5891	−0.9917

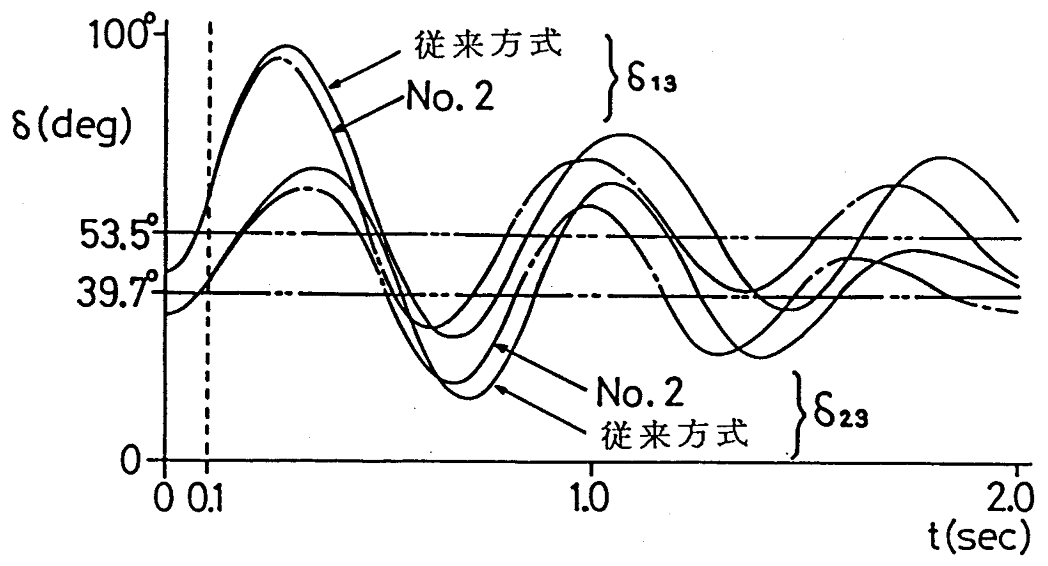
第6．３表　最適フィードバック利得行列

	No．1			No．2		
	フィードバック利得行列			フィードバック利得行列		
K_I	0.0	0.0	0.0	−0.2214	0.2257	0.0
	0.0	0.0	0.0	−0.2313	0.0	0.2257
	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.2313	0.2214
	0.0	0.0	0.0	24.1737	−1.4060	−1.4060
	0.0	0.0	0.0	−1.4060	24.1737	−1.4060
	0.0	0.0	0.0	−1.4060	−1.4060	24.1737
K_{II}	−0.8548	0.0	0.0	−0.8796	0.1940	0.1940
	0.0	−0.8548	0.0	0.1940	−0.8796	0.1940
	0.0	0.0	−0.8548	0.1940	0.1940	−0.8796
	4.5677	0.0	0.0	4.5677	0.0	0.0
	0.0	4.8309	0.0	0.0	4.8309	0.0
	0.0	0.0	4.2915	0.0	0.0	4.2915

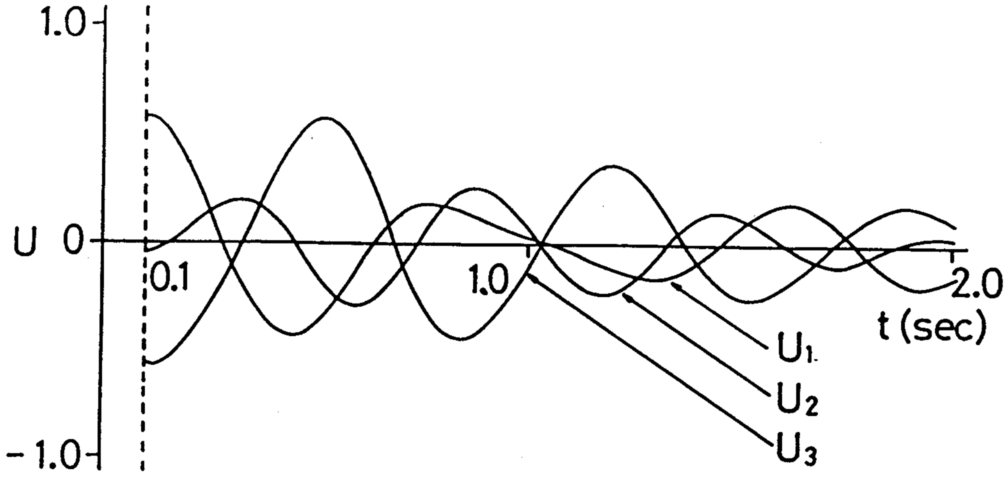
No．1 ：W_1=0.0，W_8=1.0，W_{10}=30.0，W_{11}=33.0，W_{12}=27.0

No．2 ：W_1=0.1，W_8=1.0，W_{10}=30.0，W_{11}=33.0，W_{12}=27.0

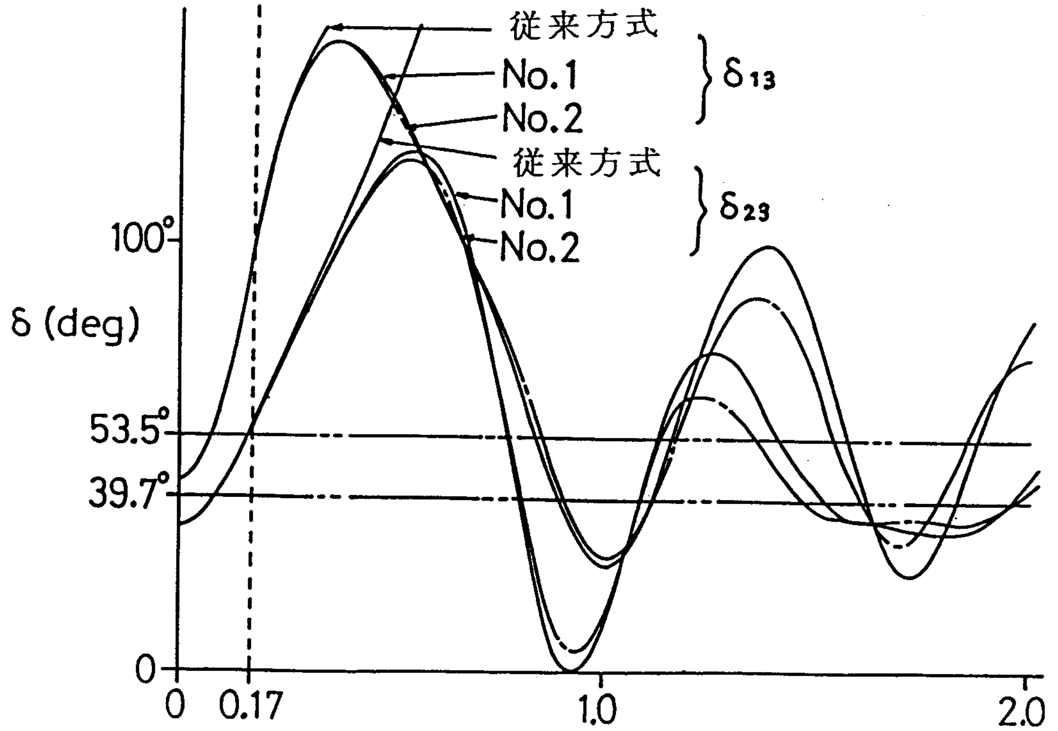
$R=diag(1\ \ 1\ \ 1)$



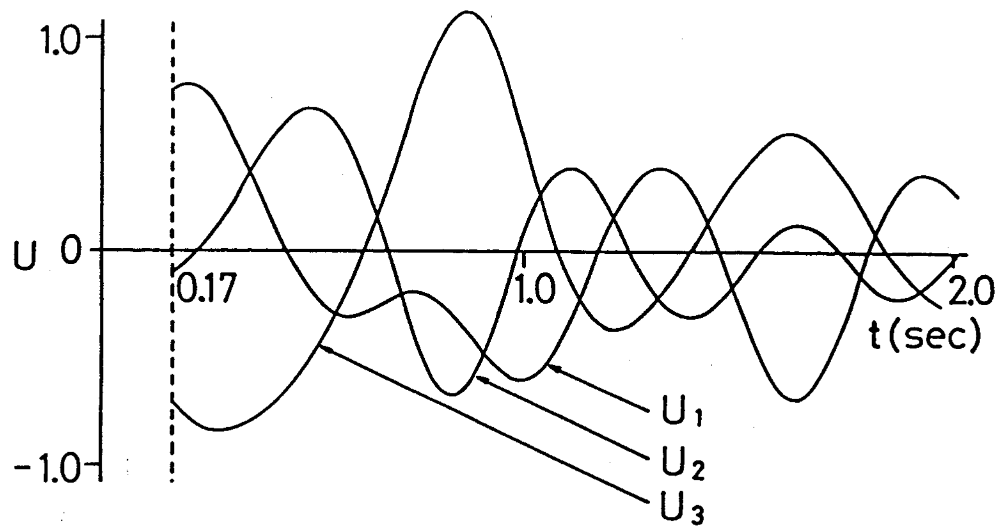
第6．２図　δ_{13}，δ_{23} の時間応答



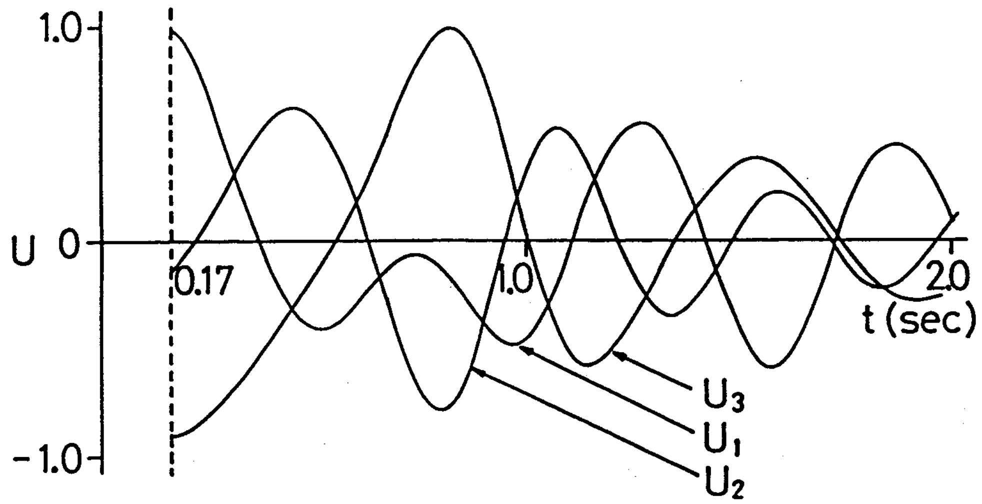
第６．３図　制御信号と時間関係



第６．４図　δ_{13}, δ_{23} の時間応答



（a） No. 1



（b） No. 2

第６．５図　制御信号と時間関係

これらの図より明らかなように，本制御方式（Ｎｏ．２に相当）は，従来の制御方式に比べて更に過渡応答の改善に有効な作用を与えるとともに，しゃ断時間の余裕につながることがわかる。なお，このとき必要とした制御入力は，基準入力の一割程度であることが第６．３図および第６．５図からわかる。また，第６．４図に示す各発電機間相差角の時間応答から明らかなように，Ｎｏ．１とＮｏ．２の第２波において，Ｎｏ．２の振幅がＮｏ．１のそれより１０度以上抑制され，第２波以降の動揺抑制に一般化座標導入の効果が，顕著にあらわれていることがわかる。

以上より，フィードバック信号として発電機間の相差角および発電機の速度偏差のそれぞれをフィードバックする本制御方式を用いれば，相互に干渉し合う連系系統の過渡特性の改善に対しても十分寄与しうる。

第６・５節　結　言

本章においては，第５章で示した手法の実規模系統への適用を前提とするため，調速機効果を含む多機電力系統を対象系統として，前章で記述した手法に従って最適制御法則を導出した。一例として，多機電力系統の最も基本的な３機系統に本制御方式を適用するとともに，過渡時における動作特性に与える影響を，各発電機間の相差角および制御信号の時間応答から示し，本制御方式の導入が，相互に干渉し合う連系系統の過渡特性の改善に対しても十分寄与しうることを明らかにした。

第７章　非線形変換を用いた最適オブザーバの構成[30]

第７・１節　緒　　言

電力系統の安定度向上をはかる際，その状態量をできる限り正確に把握しなければならないが，電力系統では測定不可能あるいは測定困難な状態量が必ず存在するので何らかの対応策が必要となる。ここでは，この対応策の一つとしてオブザーバを導入する方法を取り上げる。一般に，オブザーバ設計においては，初期時刻における推定値と真値との差異にかかわらず時間の経過とともに推定値を真値に近づけることを目的とするので，オブザーバ問題は極配置問題としてとらえることができる[31]。しかしながら，更に速やかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ設計を考える場合には，極配置問題からは適切な極指定の情報は得られない。

本章においては，これらの点を考慮し，極指定の立場からはなれた推定誤差の減衰の割合（オブザーバにより得られる推定値が真値に近づく程度）に着目した一つの方法を示す。すなわち，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を[20]，推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに，一つの評価関数の最小化により速やかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行う。

以上の構成法を一般的に述べるとともに，一例として，誘導電動機負荷６０％および定インピーダンス負荷４０％からなる負荷特性を考慮した一機－無限大母線系統の状態推定に適用し，本オブザーバの有効性を示す。

第７・２節　最適オブザーバの構成

電力系統の動特性式は一般に非線形となるが，基準運転点近傍ではそ

の状態方程式および出力方程式はそれぞれ

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{7.1}$$

$$y = Cx \tag{7.2}$$

ここに，

x ：n次元の状態ベクトル

y ：m次元の観測ベクトルで $m \leqq n$

A, C ：ｎｘｎ次およびｍｘｎ次の定係数行列で可観測

で与えられる。いま，（７．２）式で示される観測量 y に基づいて，（７．１）式で示される系の状態を推定するオブザーバを

$$\frac{dz}{dt} = Az + G(y - Cz) \tag{7.3}$$

ここに，

z ：n次元ベクトルの推定値

G ：ｎｘｍ次のオブザーバ利得

とする。このとき，真値 x と推定値 z との差を

$$e = x - z \tag{7.4}$$

で定義すれば，（７．１）式および（７．３）式より

$$\frac{de}{dt} = (A - GC)e \tag{7.5}$$

となる誤差方程式が得られる。

一般に，ｎ次のオブザーバ設計では，（７．５）式の特性方程式の固有値を希望の値にするようにオブザーバ利得を決定するが，ここでは，極指定の立場からはなれた推定誤差の減衰の割合に着目した一つの方法論を示す。すなわち，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を[20]，推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し，設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに，一つの評価関数の最小化によりすみやかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行う。

Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏の提案した非線形変換を[20]応用し

$$R^2 = e^T Pe \tag{7.6}$$

$$e = R\varepsilon \tag{7.7}$$

ここに

P ：ｎｘｎ次の正定な実対称行列

ε ：ｎ次元の変数ベクトル

となる変換を考える。まず，（７．６）式の時間微分をとり，それに（７．５）式を代入し（７．７）式の変数変換を施せば

$$\frac{dR}{dt} = -WR \tag{7.8}$$

ここに，

$$W = -\varepsilon^T \{(A - GC)^T P + P(A - GC)\}\varepsilon/2 \tag{7.9}$$

となる。また，（７．６）式および（７．７）式から次式の関係が得られる。

$$F = \varepsilon^T P\varepsilon = 1 \tag{7.10}$$

それゆえ，推定誤差 e の収れんに関する問題は，（７．１０）式の制約下での（７．９）式で示される W の取り扱いになる。（７．９）式および（７．１０）式はそれぞれ ε に関する二次形式であることから，次式で示す線形変換を用いることにより同時対角化を行うことができる。[32]

$$\varepsilon = T\Gamma \tag{7.11}$$

ここに，

$$T = D^{-1}L \ , \ P = D^T D$$

$$D = HN^T \ , \ H = diag(h_i)$$

$$\Sigma = diag(\sigma_i) \ , \ h_i = \sqrt{\sigma_i}$$

但し，σ_i は P の固有値,L,N はそれぞれ直交行列である。（付録４参照）

このとき，（７．９）式および（７．１０）式の W および F は

$$W = \Gamma^T \Lambda\Gamma \tag{7.12}$$

$$F = \Gamma^T \Gamma = 1 \tag{7.13}$$

ここに，

$$\Lambda = -L^T(D^{-1})^T\{(A - GC)^T P + P(A - GC)\}D^{-1}L/2 \tag{7.14}$$

となる。このことから，（７．９）式の W の値は（７．１４）式の最小固有値 λ_1 および最大固有値 λ_n により，以下のように制約を受ける。

$$\lambda_1 \leqq W \leqq \lambda_n \tag{7.15}$$

このとき，e^TPe は R が（７．８）式の関係より

$$R(t) = R(0)exp(-\int_0^t Wds) \tag{7.16}$$

となり，また，W の値が（７．１５）式で示される不等式内に存在することから

$$e(0)^TPe(0)exp[-2\lambda_n t] \leqq e^TPe \leqq e(0)^TPe(0)exp[-2\lambda_1 t] \tag{7.17}$$

の範囲におさえられる。従って，e^TPe の収れん速度の上限は最小固有値 λ_1 によって支配され，λ_1 を設計で希望する値またはそれ以上の値に設定すれば，希望の速度以上で推定誤差を減衰させうるオブザーバを構成することができる。

いま，設計の希望値を $\alpha>0$ とするとき

$$L^T(D^{-1})^TQD^{-1}L \geqq 0 \tag{7.18}$$

の関係を用い，α からなる行列 αI に加えると

$$\lambda_{min}[\alpha I + \frac{1}{2}L^T(D^{-1})^TQD^{-1}L] \geqq \lambda_{min}[\alpha I] \ (=\alpha) \tag{7.19}$$

の不等式が得られる。[32] ここに，Q はｎｘｎ次の半正定値対称行列，I はｎｘｎ次の単位行列，λ_{min} 〔・〕はカッコ内の最小固有値を意味する。なお，α としては $(A + \alpha I,\ C)$ の可観測性を満足するものを考える。このとき，（７．１９）式の左辺と（７．１４）式の Λ を等式で結び整理することにより得られる

$$(A + \alpha I - GC)^TP + P(A + \alpha I - GC) = -Q \tag{7.20}$$

の関係式は，（７．１４）式で示される最小固有値が少なくとも α 以上であることを保証するものである。従って，（７．２０）式を満たすオブザーバ利得を得ることができれば，希望以上の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを設計できるわけである。なお，（７．２０）式はＴａｒｎとＲａｓｉｓ氏が文献３３で示した関係式の一部となる。ここでは，一つの評価関数として（７．１７）式で示される $e(0)^tPe(0)$ および G のノルムとの和を考え，それを（７．２０）式の等式条件下で最小化することにより，（７．２０）式を満たし，また提案した評価関数に

対して最適となるオブザーバ利得 G を一義的に，かつ系統立った方法で求めるものである。なお，上記の評価関数を最小化することの物理的な意義は，$e(0)^TPe(0)$ の最小化が（７．１７）式の振幅を最小にしてすみやかな推定誤差の減衰を与えるとともに，G のノルムの最小化が観測量 y に存在する高周波雑音の増幅を避けることにつながる。

いま，初期推定誤差の期待値が

$$E[e(0)] = 0 \tag{7.21}$$

で，かつその分散が

$$E[e(0)e(0)^T] = I \tag{7.22}$$

で与えられる場合，（７．１７）式の $e(0)^TPe(0)$ は $tr\ P$ となる。但し，$tr\ [\cdot]$ はカッコ内の行列の対角要素の和を意味する。

ゆえに，本問題は（７．２０）式の拘束条件のもとで

$$J = tr\ P + tr\ GG^T \tag{7.23}$$

を最小にするオブザーバ利得 G を決定する問題に帰着される。

まず，ラグランジュ乗数を表わすｎｘｎ次の対称行列 S を導入し，汎関数 Φ を

$$\begin{aligned}\Phi(P,S,G) = tr\ P + tr\ GG^T + tr\ [S\{(A + \alpha I - GC)^T P \\ + P(A + \alpha I - GC) + Q\}]\end{aligned} \tag{7.24}$$

で定義する。最小化の手順にしたがい，（７．２４）式を G,P および S のそれぞれで偏微分し零とおいて解けば，最小値のための必要条件

$$G = PSC^T \tag{7.25}$$

$$(A + \alpha I - GC)S + S(A + \alpha I - GC)^T + I = 0 \tag{7.26}$$

$$(A + \alpha I - GC)^T P + P(A + \alpha I - GC) + Q = 0 \tag{7.27}$$

が与えられる。（付録５参照）

一方，希望値 α の決定については以下のように行う。すなわち，t_1 秒後における $e^TPe/e(0)^TPe(0)$ の値を $1/\mu$ より小さくする場合（７．１７）式から得られる関係式

$$\begin{aligned}\frac{e^TPe}{e(0)^TPe(0)} &\leq \frac{e(0)^TPe(0)}{e(0)^TPe(0)}\, exp(-2\lambda_1 t) \\ &= \exp(-2\lambda_1 t)\end{aligned} \tag{7.28}$$

の右辺と $1/\mu$ を等しくおき，それに t_1 を代入するすることにより

$$-2\alpha t_1 = ln(1/\mu) \tag{7.29}$$

すなわち，

$$\alpha = \frac{1}{2t_1} ln(\mu) \tag{7.30}$$

として求める。従って，（７．３０）式より希望値αを決め，そのαで（７．２５）式～（７．２７）式を同時に解けば，希望以上の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを一義的に決定することができる。なお，（７．２５）式～（７．２７）式に対する解は次の手順の繰り返しで求められる。

手順１：$(A + \alpha I \ , C)$が可観測であることから $(A + \alpha I - GC)$ を安定にするオブザーバ利得Gが存在し，これを初期値と考える。

手順２：（７．２６）式および（７．２７）式にこのGを代入し，同式を解くことによりSおよびPを求める。[34]

手順３：（７．２５）式にSおよびPを代入しG^*を求めるとともに，新しいGを $G = G + \beta(G^* - G)$ として考える。但し，βは収束改善のためのスカラ量

手順４：上記のGを用いて手順２に戻る。

以上のアルゴリズムを，G,S およびPが適当な精度で収束するまで繰り返す。

第７・３節　数値計算例と結果に対する検討

ここでは，誘導電動機のような回転機負荷および定インピーダンス負荷からなる一機－無限大母線系統を対象に，本オブザーバの有効性について検討を加える。第７．１図に示すモデル系統において，系統負荷構成は一例として，誘導電動機負荷 I.M.６０％および定インピダンス負荷Z_{load}４０％からなるものとする。なお，系統定数および初期条件はそれぞれ第７．１表および第７．２表に示す。第７．１図において，回路のアドミッタンスの一般形を$\dot{Y}_{ij} = Y_{ij}\varepsilon^{j\varphi_{ij}}(i, j = 1,2,3)$で表わすと系統の電流・電圧関係式は次式で表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \dot{Y}_{13} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \dot{Y}_{23} \\ \dot{Y}_{31} & \dot{Y}_{32} & \dot{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

（７．３１）式において，E_1, E_2, E_3は発電機の過渡リアクタンス背後電圧，無限大母線電圧および誘導電動機負荷の内部電圧を示す。

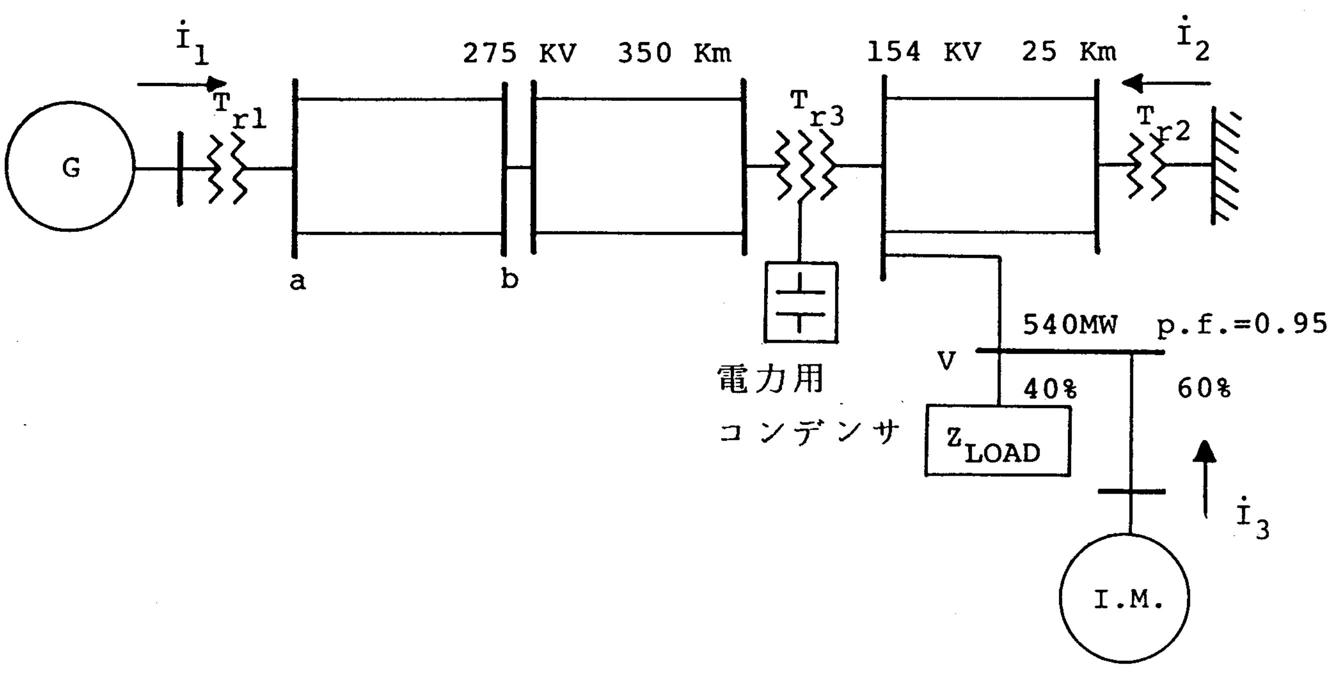
このとき，発電機に関する動特性式は，平常運転時における負荷点電圧Ｖ基準によるE_1の相差角δ_1,速度ω_1および過渡リアクタンス背後電圧E_1を状態変数に選ぶことにより次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= \omega_1 \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{\omega_0}{M}(P_m - P_e) \\ \frac{dE_1}{dt} &= \frac{1}{T'_0}\{E_{ex} - (x_d - x'_d)I_d - E_1\} \end{aligned} \tag{7.32}$$

ここに，

$$P_e = R_{eal}[\bar{E}_1\dot{I}_1],\ I_d = I_m[\dot{E}_1\bar{I}_1/|\dot{E}_1|]$$

なお，$\bar{E}_1$は$\dot{E}_1$の共役複素量を示し，またE_1の変化は界磁鎖交磁束数に比例した電圧の変化に準じるものとした。(35)



第７．１図　系統負荷特性を考慮した一機－無限大母線系統

第７．１表　　系　統　定　数

発電機	x_d			0.6051
	x'_d			0.2017
	T'_0			6.0
	M			14.4
変圧器	リアクタンス	T_{r1}		0.0756
		T_{r2}		0.0722
		T_{r3}	1_{ry}	0.0290
			2_{ry}	0.0087
			3_{ry}	0.0058
送電線（１回線）	インピーダンス	350 km		0.0622 ＋ j0.5581
		25 km		0.0166 ＋ j0.1070
誘導機	r_{11}	1_{ry}		0.0135
	r_{22}	2_{ry}		0.0135
	x_{11}	1_{ry}		1.2001
	x_{22}	2_{ry}		1.1923
	x_{12}			1.1597
	M_u			7.26

(250 KV, 200MVA base)

第７．２表　　初　期　条　件

δ_1 (rad)	ω_1 (rad/sec)	E_1 (p.u.)
0.7543	0.0	1.308
S	E_{md} (p.u.)	E_{mq} (p.u.)
0.0241	0.9248	−0.1182
P_m (p.u.)	E_2 (p.u.)	v (p.u.)
1.57	1.045	1.0

また，回転機負荷である誘導電導機負荷に関する動特性式は，スリップsおよび内部電圧$\dot{E}_3 = E_{md} + jE_{mq}$を状態変数にとることにより次式で与えられる。[36]

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{M_u}(P_u - P_s)$$
$$\frac{d\dot{E}_3}{dt} = -js\omega_0\dot{E}_3 - \frac{1}{T'_u}\{\dot{E}_3 + j(x_{11}-x')\dot{I}_3\} \tag{7.33}$$

ここに，

$$P_s = R_{eal}\{-\bar{E}_3\dot{I}_3\}$$

これらの動特性式を基準運転点で線形化し，観測量としては発電機側で容易に測定できる量，すなわち有効電力P_eおよび発電機の端子電圧V_tを用いれば次式のシステム方程式が得られる。（付録6参照）

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Delta\delta_1\\ \Delta\omega_1\\ \Delta E_1\\ \Delta s\\ \Delta E_{md}\\ \Delta E_{mq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ -38.34 & 0.0 & -40.6 & 0.0 & -24.84 & 25.3\\ -0.0733 & 0.0 & -0.2711 & 0.0 & 0.04967 & 0.04876\\ -0.1135 & 0.0 & -0.1007 & 0.0 & -0.058 & 0.8153\\ -4.358 & 0.0 & 3.706 & -44.56 & -30.04 & 12.14\\ 4.847 & 0.0 & 3.332 & -348.6 & -12.14 & -30.04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_1\\ \Delta\omega_1\\ \Delta E_1\\ \Delta s\\ \Delta E_{md}\\ \Delta E_{mq}\end{bmatrix} \tag{7.34}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta P_t\\ \Delta V_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.464 & 0.0 & 1.551 & 0.0 & 0.9488 & -0.9664\\ -0.1675 & 0.0 & 0.6749 & 0.0 & 0,1765 & 0.1117\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_1\\ \Delta\omega_1\\ \Delta E_1\\ \Delta s\\ \Delta E_{md}\\ \Delta E_{mq}\end{bmatrix} \tag{7.35}$$

但し，（7．33）式の第2式の$\dot{E}_3$は複素量であるので，同式を実部および虚部からなる2式に分解し線形化を行っている。

次に，推定誤差の減衰の割合を表わすαを決定するわけであるが，ここでは一例としてt＝0．5秒で$e^TPe/e(0)^TPe(0)$の値を1/50以下にするものを考える。このとき，（7．30）式より$\alpha = 3.912$となる。従って，このαを用い，また，半正定値対称行列Qを単位行列として上記の（7．25）式～（7．27）式を解けば，P,SおよびGはそれぞれ以下のように一義的に決定される。

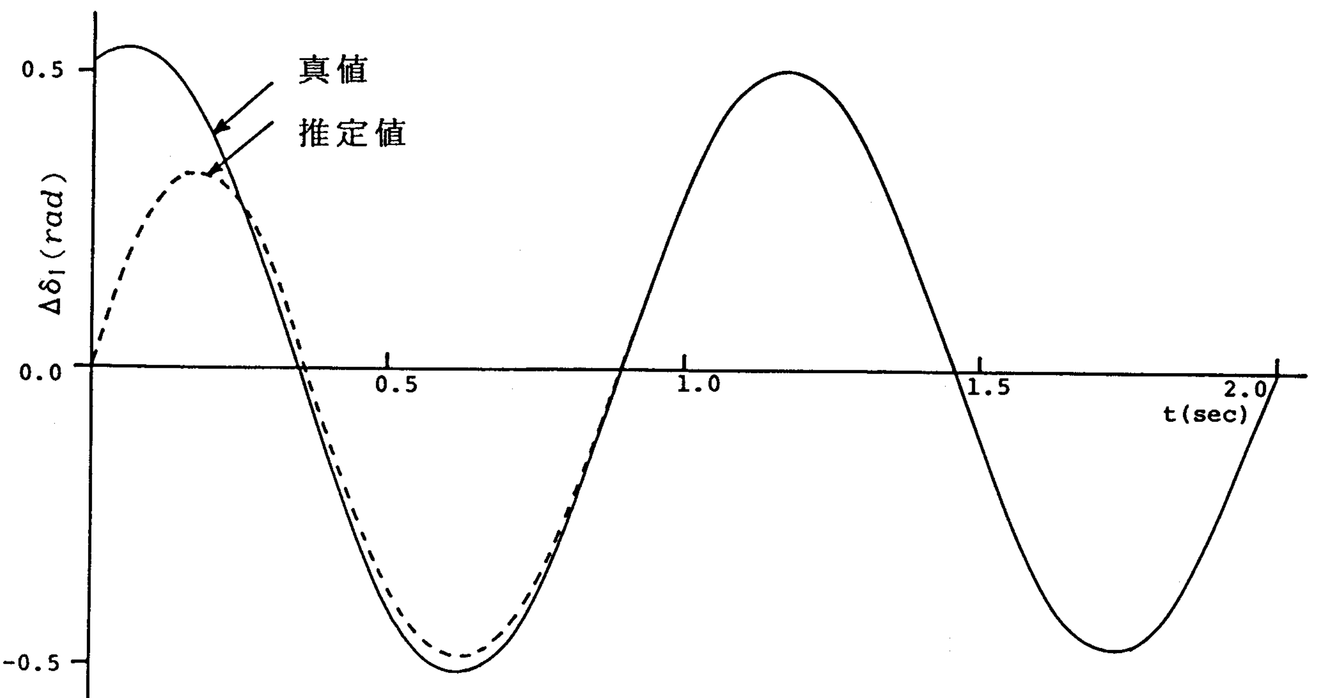
$$P=\begin{bmatrix}17.46 & -2.975 & 28.04 & -21.97 & -1.882 & 0.4903\\ -2.975 & 0.6328 & -4.912 & 1.398 & 0.1471 & -0.0504\\ 28.04 & -4.912 & 49.39 & -27.92 & -3.298 & 0.9223\\ -21.97 & 1.398 & -27.92 & 204.9 & 8.225 & 1.249\\ -1.882 & 0.1471 & -3.298 & 8.225 & 0.6231 & -0.0678\\ 0.4903 & -0.0504 & 0.9223 & 1.249 & -0.0678 & 0.1040\end{bmatrix} \tag{7.36}$$

$$
S=\begin{bmatrix} 16.49 & 10.48 & -7.204 & -0.28 & 1.209 & 6.671 \\ 10.48 & 225.7 & 7.661 & 0.33 & 2.414 & -1.588 \\ -7.204 & 7.661 & 4.547 & 0.0335 & 0.8609 & -1.826 \\ -0.28 & 0.33 & 0.0335 & 0.1767 & -0.8563 & -1.759 \\ 1.209 & 2.414 & 0.8609 & -0.8563 & 6.074 & 9.862 \\ 6.671 & -1.588 & -1.826 & -1.759 & 9.862 & 20.11 \end{bmatrix} \quad (7.37)
$$

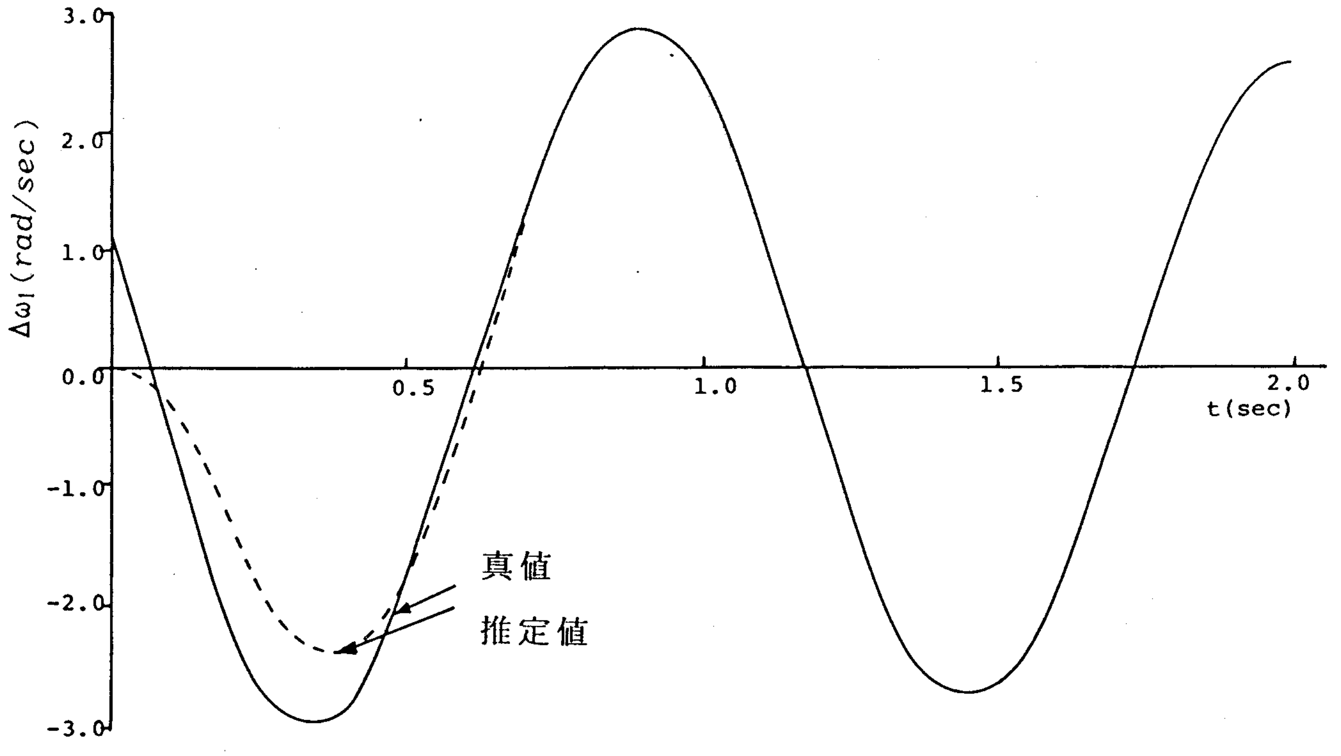
$$
G^T=\begin{bmatrix} 3.987 & 2.112 & 1.958 & -0.463 & -2.690 & 1.732 \\ -6.738 & 1.301 & 4.575 & -0.2889 & -1.638 & 0.088 \end{bmatrix} \quad (7.38)
$$

いま，第７．１図のａ－ｂ区間の一回線に０．５秒間の開放故障を想定し，推定は故障除去，すなわち，原系に復帰すると同時に開始するものとする。なお，オブザーバの先験値としてはシステムの最終状態であるZ(0)=0を用いる。第７．２図～第７．７図は，本手法に基づいたオブザーバによる推定結果を示したものである。参考のため，初期時および０．５秒後におけるe^TPeの値を示すとそれぞれ1.924および0.007となる。これらの図より明らかなように，本オブザーバによれば発電機側で容易に測定できる観測量から負荷の挙動を推定することができる。また，初期時および０．５秒後におけるe^TPeの値からわかるように，設計で希望した速度以上の速さで推定値が真値に近づいていくことがわかる。

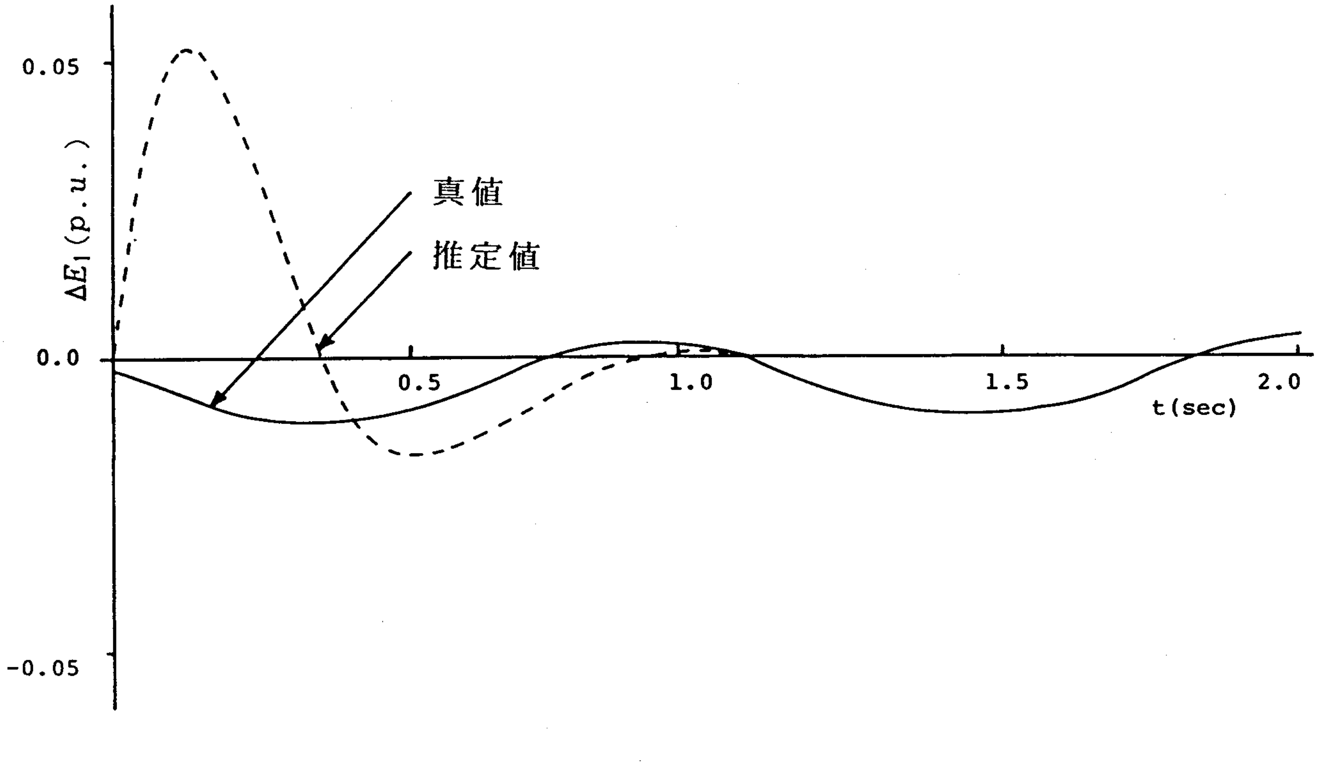
以上より，設計の希望値αを（７．３０）式で定め，このαに対して（７．２５）式～（７．２７）式の非線形代数方程式を解けば，所望の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを一義的に決定することができる。



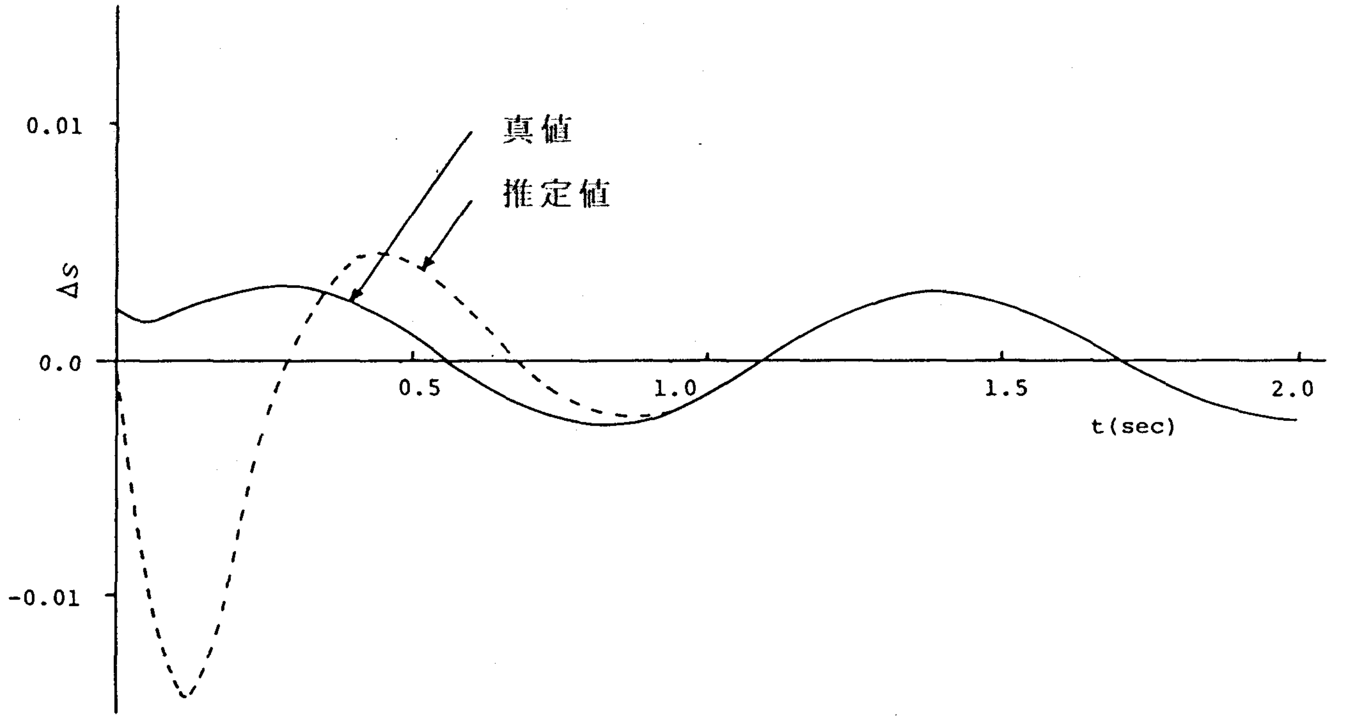
第７．２図　$\Delta\delta_1$ の時間応答



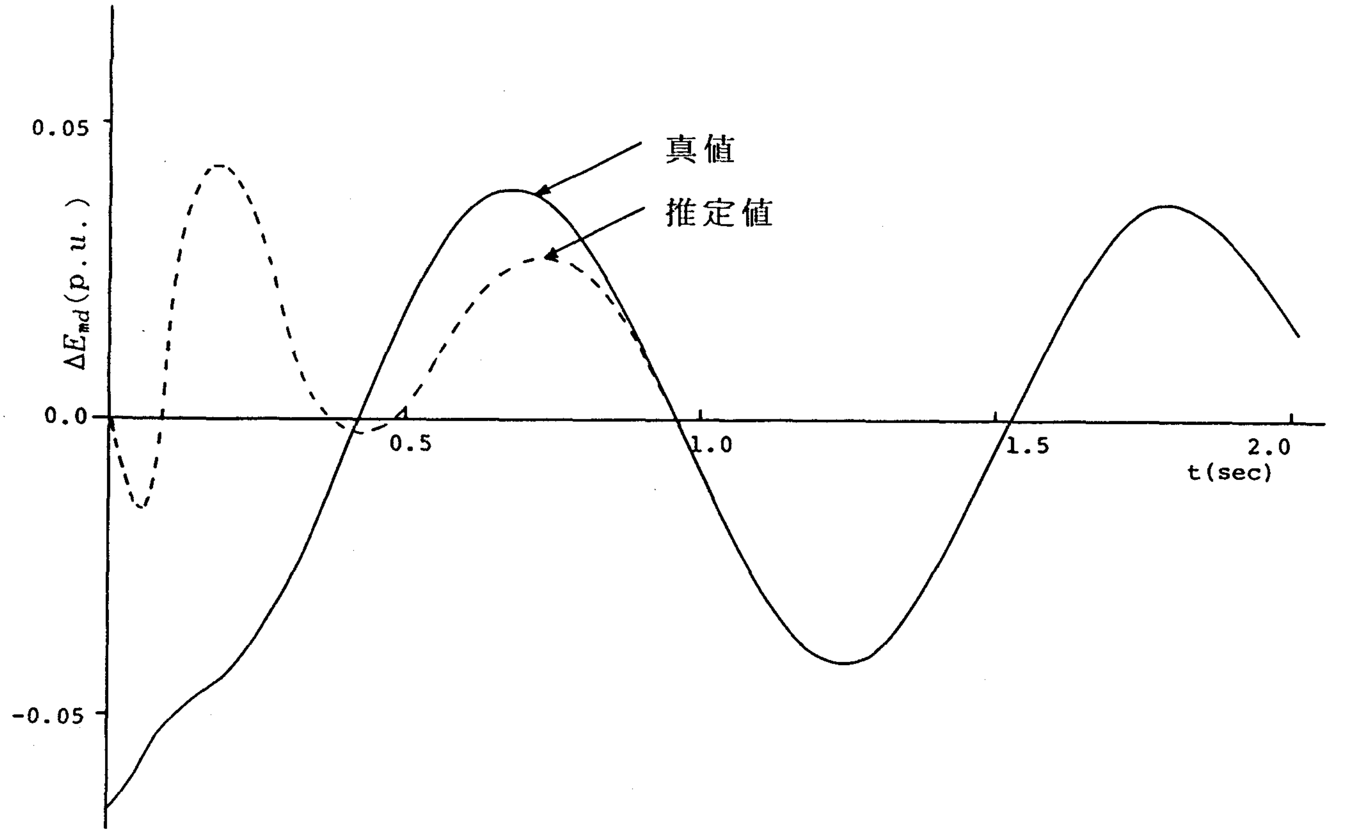
第7．3図　$\Delta\omega_1$ の時間応答



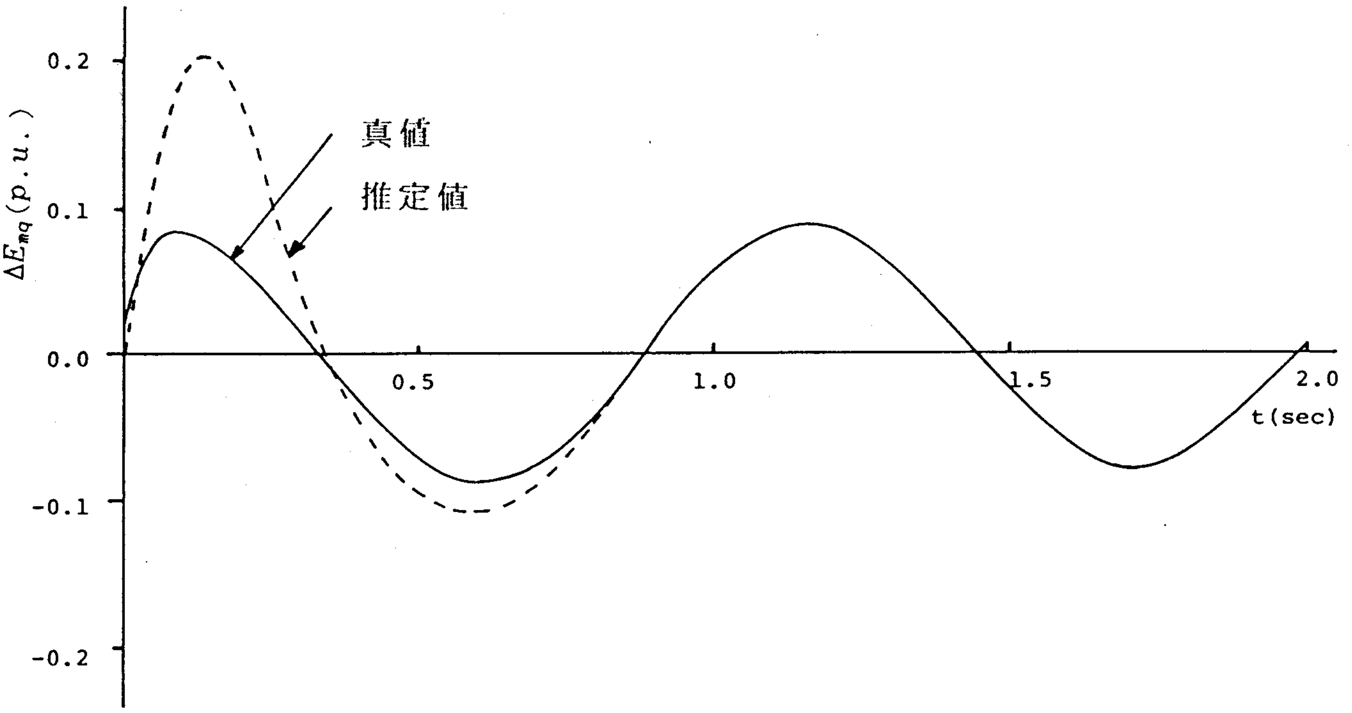
第7．4図　ΔE_1 の時間応答



第7．5図　Δs の時間応答



第7．6図　ΔE_{md} の時間応答



第７．７図　ΔE_{mq} の時間応答

第７・４節　結　　言

本章においては，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を，推定誤差の減衰の割合を評価するのに応用し設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに，一つの評価関数の最小化により速やかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行なった。一例として，誘導電動機負荷６０％および定インピーダンス負荷４０％からなる負荷特性を考慮した一機－無限大母線系統の状態推定に適用し，本オブザーバの有効性を各状態量の時間応答から明らかにした。

第8章　最適オブザーバを利用した電力系統の過渡状態推定および最適化[37]

第8・1節　緒　　言

先に，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形[18]および拡張リアプノフ関数形[19]のリアプノフ関数を，最適化手順中の系の動作特性を表わす評価関数に採用し，系統本来の非線形特性を考慮できる最適化の一構成法を示した。この方法は，すべての状態量が直接測定可能であることを前提とするものであり，測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む一般的な制御系に対して適用する場合には適当なオブザーバを用いて全状態量を推定し，それを利用する等の何らかの対応策が必要となる。

本章は，この観点に基づき電力系統の過渡状態を推定しうる最適オブザーバの一構成法を示したもので，前章の線形制御系を対象に構成した最適オブザーバの一拡張である。

以上の構成法を一般的に述べるとともに，一次遅れ制御系で近似する調速機効果を含む一機－無限大母線系統の過渡状態推定に適用し，本オブザーバの有効性を調べる。更に，推定量を用いた最適制御の過渡特性を従来の制御方式による過渡特性と比較することにより，最適制御への有効性も調べる。

第8・2節　最適オブザーバの構成

電力系統の動特性式は次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) + Bu \tag{8.1}$$

$$y = Cx + g(x) \tag{8.2}$$

ここに，

x ：n次元の状態ベクトル

u ：r次元の制御ベクトル

y ：m次元の観測ベクトルで　$m \leqq n$

$f(x), g(x)$：xに関して連続微分可能な非線形関数

A, B, C ：ｎｘｎ次，ｎｘｒ次およびｍｘｎ次の定係数行列で（A, C）は可観測

いま，測定可能な入力および出力に基づいて（８．１）式で示される系の状態を推定するオブザーバを

$$\frac{dz}{dt} = Az + f(z) + G[y - Cz - g(z)] + Bu \tag{8.3}$$

ここに，

z ：ｎ次元ベクトルの推定値

G ：ｎｘｍ次のオブザーバ利得

とする。このとき，真値xと推定値zとの差を

$$e = x - z \tag{8.4}$$

で定義すれば，（８．１）式および（８．３）式より

$$\frac{de}{dt} = (A - GC)e + h(x) - h(z) \tag{8.5}$$

ここに，

$$h(x) = f(x) - Gg(x) \tag{8.6}$$

となる誤差方程式が得られ，（８．５）式にA．M．Ｌｅｔｏｖ氏の非線形変換[20]を応用することにより推定誤差の減衰の割合を評価することができる。

すなわち，

$$R^2 = e^T Pe \tag{8.7}$$

$$e = R\varepsilon \tag{8.8}$$

ここに，

P ：ｎｘｎ次の正定な実対称行列

ε ：ｎ次元の変数ベクトル

となる非線形変換を考える。まず，（８．７）式の時間微分をとり，それに（８．５）式を代入し（８．８）式の変数変換を施せば，

$$\frac{dR}{dt} = -WR + \frac{\psi}{R} \tag{8.9}$$

ここに，

$$W = -\varepsilon^T\{(A - GC)^T P + P(A - GC)\}\varepsilon/2 \tag{8.10}$$

$$\psi = e^T P\{h(x) - h(z)\} \tag{8.11}$$

となる。このとき，（８．９）式より（付録７参照）

$$R(t) \leqq R(0)exp[-\int_0^t (W - \frac{|\psi|}{R^2})\ d\tau\ ] \tag{8.12}$$

が得られ，また（８．７）式より次式が得られる。

$$\lambda_{min}(P)\|x - z\|^2 \leqq R^2 \leqq \lambda_{max}(P)\|x - z\|^2 \tag{8.13}$$

ここに，$\|\cdot\|$はユークリッドノルムを示し，$\lambda_{min}(P)$，$\lambda_{max}(P)$はそれぞれ行列Pの最小および最大固有値を示す。従って，（８．１２）式および（８．１３）式より推定誤差の減衰の割合をあらわす$\|x - z\|$の収れん速度は次式で評価される。

$$\|x - z\| \leqq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\|x(0) - z(0)\|\exp[-\int_0^t (W - \frac{|\psi|}{R^2})\ d\tau] \tag{8.14}$$

上記の関係式から明らかなように$\|x - z\|$の収れん速度は$W - |\psi|/R^2$と$\lambda_{max}(P)/\lambda_{min}(P)$の値に密接に関係している。すなわち，$W - |\psi|/R^2$を希望値$\alpha$に等しくすることができれば，$\|x - z\|$は少なくとも$\exp(-\alpha t)$より速く収れんすることがわかり，また$\lambda_{max}(P)/\lambda_{min}(P)$を最小化できれば（８．１４）式の振幅が最小となることからすみやかな収れんを与えるオブザーバを構成することができる。

まず，$\|x - z\|$の収れん速度を決める一要素である$|\psi|/R^2$の上限値を求めるため，ベクトル値関数$h(x)$に平均値の定理を適用する。

$$h(x) - h(z) = Je \tag{8.15}$$

ここに，

$$J_{ij} = \frac{\partial h_i(z_1+\theta e_1, z_2+\theta e_2, \ldots\ldots, z_n+\theta e_n)}{\partial z_j} \tag{8.16}$$

$$(0<\theta<1)$$

この結果を（８．１１）式に代入し（８．８）式の変数変換を施せばψ/R^2は

$$\psi/R^2 = \varepsilon^T PJ\varepsilon \tag{8.17}$$

(32)

となり，更にＳｃｈｗａｒｔｚの不等式を用いて書き直すと以下のようになる。

$$|\psi|/R^2 \leqq \|J\|_u \|P\| \|\varepsilon\|^2 \tag{8.18}$$

ここに，

$$\|J\|_u = \sqrt{tr(J^TJ)} \quad , \quad \|P\| = |\lambda_{max}(P)| \tag{8.19}$$

但し，tr（・）はトレース演算子を意味する。

従って，$|\psi|/R^2$ の値は

$$|\psi|/R^2 \leqq \lambda_{max}(P)\ J \|\varepsilon\|^2 \tag{8.20}$$

ここに，

$$J = \max \|J\|_u \tag{8.21}$$

によって上限から抑えられる。ここで，J に対して（８．１９）式で示すノルムを用いたのは（８．２１）式の J が（８．１９）式より比較的容易に求められることによる。

一方，設計の希望値を $\alpha>0$ とし（８．１０）式の W を次式で定義する。

$$W = \alpha + \varepsilon^T Q\varepsilon/2$$

$$(\geqq \alpha + \lambda_{min}(Q)\|\varepsilon\|^2/2) \tag{8.22}$$

ここに，α は$(A + \alpha I, C)$の可観測性を満足するものを考え，また Q としては次式の関係を満たすｎｘｎ次の半正定値対称行列を考える。

$$\lambda_{min}(Q)\|\varepsilon\|^2/2 \geqq \lambda_{max}(P) J \|\varepsilon\|^2 \tag{8.23}$$

このとき，（８．２２）式の右辺と（８．１０）式の W を等式で結び整理することにより得られる

$$(A + \alpha I - GC)^T P + P(A + \alpha I - GC) = -Q \tag{8.24}$$

と（８．２３）式の不等式から得られる

$$\lambda_{min}(Q)/2\lambda_{max}(P) \geqq J \tag{8.25}$$

の関係式は，（８．２０）式および（８．２２）式から明らかなように $W - |\psi|/R^2$ の値が α 以上であることを保証している。従って，上記の関係を満足するオブザーバ利得 G を得ることができれば，希望以上の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを設計できる。なお，上式は，ＴａｒｎとＲａｓｉｓ氏が文献３３で示した関係式と同様な結果であるが，同式を満足させるオブザーバ利得 G を決定することは非常に難しい問題である。ここでは，一つの評価関数として $\lambda_{max}(P)/\lambda_{min}(P)$ および G のノルムとの和を考え，それを（８．２４）式および（８．２５）式の制約条件下で最小化することにより（８．２４）式および（８．２５）

式を満たし，また提案した評価関数に対して最適となるオブザーバ利得を一義的に，かつ系統立った方法で求めるものである。

ゆえに，本問題は（８．２４）式および（８．２５）式の拘束条件のもとで

$$H = tr(GG^T) + \{\lambda_{max}(P) - \lambda_{min}(P)\}^2 \qquad (8.26)$$

を最小にする最適オブザーバ利得 G を決定する問題に帰着される。なお，この問題の最適化は，上式から明らかなように不等式制約をもつとともに関数の導関数の利用が難しいこと等から直接探索法であるＲｏｓｅｎｂｒｏｃｋ氏の手法[38]が有効と考える。従って，同手法を（８．２４）式のリアプノフ方程式の解法[34]と組み合わせることにより上記の最適化を図る。以下に，このアルゴリズムを簡単に示すが，この考え方は最適フィードバック利得決定に対する計算手順を基礎とするものである[39]。

手順１：$(A + \alpha I, C)$が可観測であることから$(A + \alpha I - GC)$を安定にするオブザーバ利得 G が存在し，これを初期値と考える。

手順２：オブザーバ利得 G のｎｘｍ個の要素を修正することにより，（８．２４）式の制約下で評価関数

$$\Phi = 2\lambda_{max}(P)J, \quad \rho_1 \leqq 0 \qquad (8.27)$$

を最小化する。ここに，ρ_1 は

$$\rho_1 = Real\{\lambda_{max}(A + \alpha I - GC)\} \qquad (8.28)$$

で与えられ，$Real(\cdot)$ はカッコ内の実部を意味する。なお，ρ_1の値に対する評価関数へのペナルティは文献３８に準じて課し，以上の最小化を（８．２５）式の不等式が満たされるまで行う。

手順３：手順２で得られたオブザーバ利得を初期値とし（８．２４）式の制約下で次式の評価関数を最小化する。

$$H = tr(GG^T) + \{\lambda_{max}(P) - \lambda_{min}(P)\}^2, \quad \rho_1 \leqq 0, \quad \rho_2 \leqq 0 \qquad (8.29)$$

ここに，

$$\rho_2 = 2\lambda_{max}(P)J - \lambda_{min}(Q) \qquad (8.30)$$

計算は手順２と同様に行い G の値が収れんするまで繰り返す。

上記の手順を実行すれば，希望の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバ利得を一義的に，かつ系統立った方法で求めることができ，また得られるオブザーバ利得は（８．２６）式の評価関数を最小化していることから，良い推定を与えるオブザーバと考えることができる。

第８・３節　数値計算例と結果に対する検討

前節で述べ方法を，第５章で示す第５．１図の一次遅れ制御系で近似する調速機効果を含む一機－無限大母線系統に適用する。なお，系統の諸定数および初期条件は第５．１表に示した値を採用する。

第５．１図で示される動特性式は，

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} &= P_m - P_e \\ \frac{d\Delta P_m}{dt} + \frac{1}{T_g}\Delta P_m &= \frac{K_g}{\omega_0 T_g}\frac{d\delta}{dt} + u \end{aligned} \tag{8.31}$$

ここに，

$$P_e = I_d V_{td} + I_q V_{tq} \tag{8.32}$$

となり，状態変数を

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta - \delta_0' \\ x_2 &= \omega\,(=d\delta/dt) \\ x_3 &= \Delta P_m \end{aligned} \tag{8.33}$$

で定義すれば，（８．３１）式の動特性式は（８．１）式の形式で示される。なお，その係数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -D/M & -1/M \\ 0 & K_g/\omega_0 T_g & -1/T_g \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ f(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1/M\{P_1 \sin(x_1+\delta_0') - P_2 \sin 2(x_1+\delta_0') - P_l\} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.34}$$

ここに，

$$P_1 = \frac{E_q' E_B}{x_{12} + x_d'} \quad , \quad P_2 = \frac{(x_q - x_d')\ E_B^2}{2(x_{12}+x_d')(x_{12}+x_q)} \tag{8.35}$$

$$P_l = P_1 \sin\delta_0' - P_2 \sin 2\delta_0'$$

但し，δ_0'は故障除去後の安定平衡点を示す。

観測量としては，発電機側で容易に測定できる量，すなわち有効電力P_eおよび端子電圧V_tを用いる。なお，端子電圧に関しては第８．１図より明らかなように，その線形化特性が非線形特性の非常に良い近似を与えることから，オブザーバ設計に対し線形近似の特性式を利用する。

このとき，（８．２）式の各係数は

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} P_1 \sin(x_1+\delta_0') - P_2 \sin 2(x_1+\delta_0') - P_l \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.36}$$

ここに，

$$c_{12} = \frac{\partial V_t}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \tag{8.37}$$

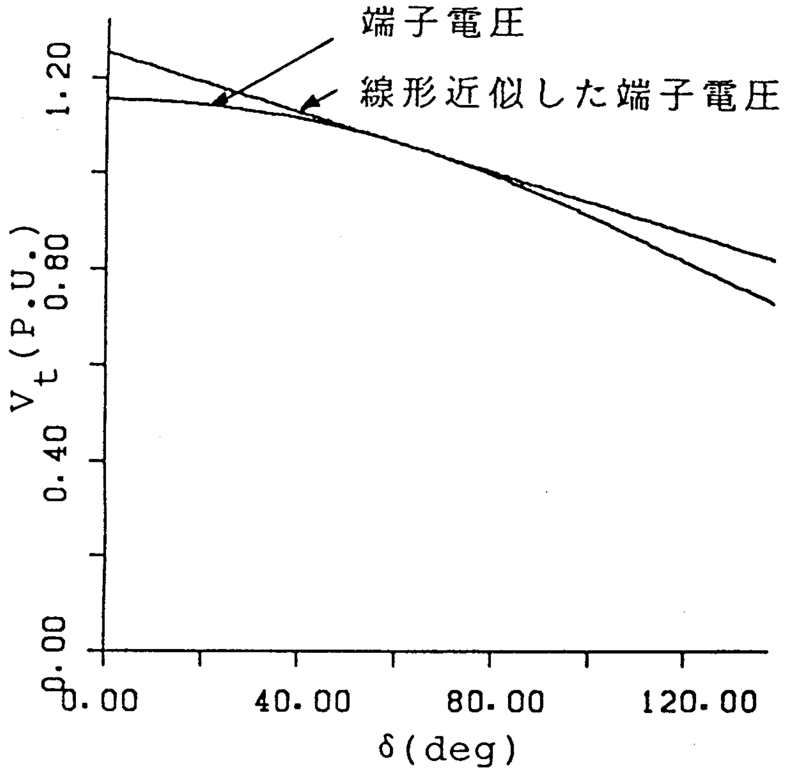
で示され（A,C）が可観測となることから，希望値αを（A，C）の可観測性を保持，すなわち（$A + \alpha I$，C）の可観測性を満足するように選定すれば，手順１のオブザーバ利得Gが必ず存在し最適オブザーバ構成を行うことができる。

次に，本オブザーバの有効性を示すため，（８．３１）式のシステムを対象とするわけであるが，ここでは一例として$\alpha = 5$，$Q = I$を考え，（８．２４）式～（８．２６）式を計算する。このとき，最適オブザーバ利得は以下のように求められる。

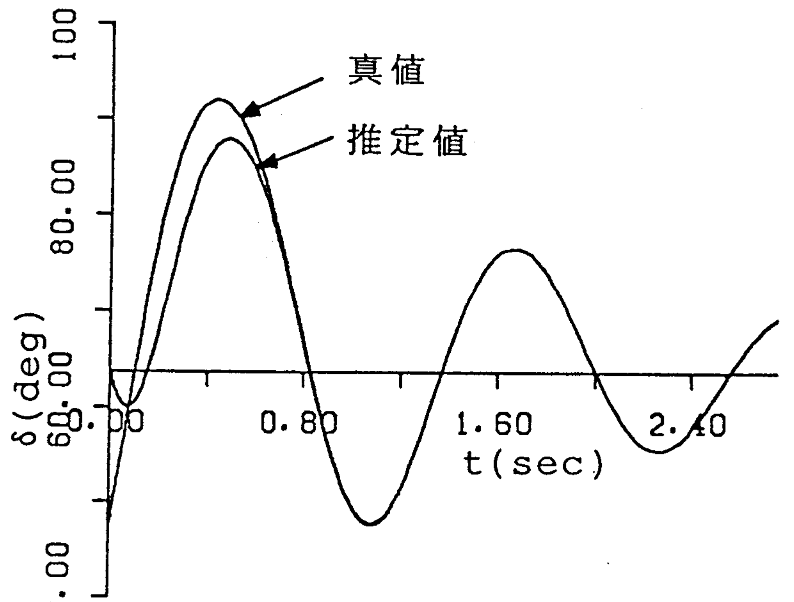
$$G = \begin{bmatrix} 0.0 & -42.261 \\ -72.454 & -203.119 \\ 0.0 & -8.577 \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

いま，第５．１図に示すモデル系統の一回線の中央（F_1点）に０．１秒間の三相短絡故障を想定し，推定は故障除去，すなわち故障回線開放と同時に開始するものとする。なお，オブザーバの先験値としてはシステムの最終状態を用い，最適制御は第５．２表のＮｏ．３で示す利得を

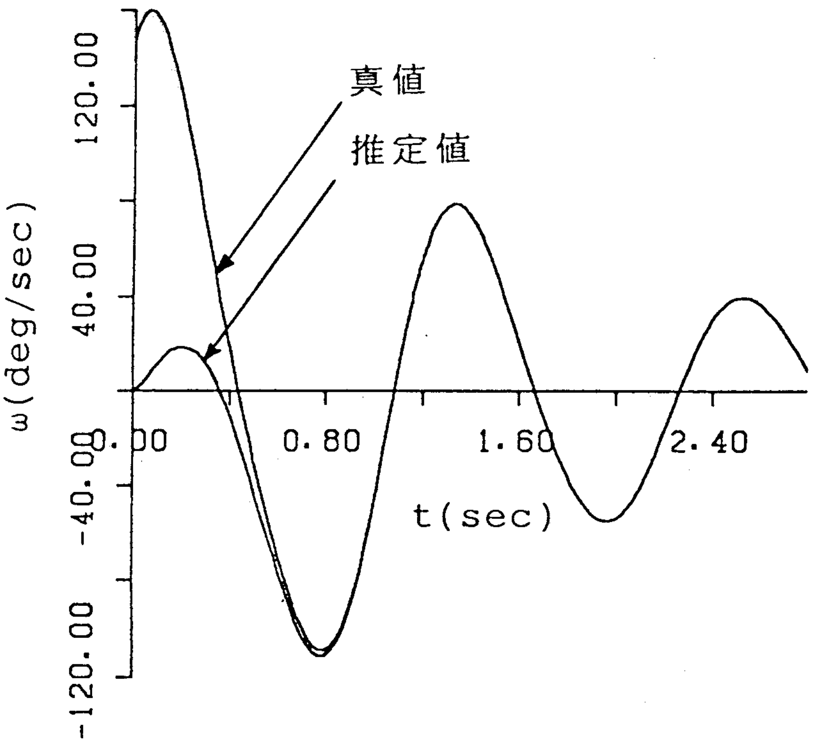
利用する。第８．２図～第８．４図は，本手法に基づいたオブザーバによる推定結果を従来の制御系（ｕ＝０）に対して適用したもので，また，第８．５図および第８．６図は推定量を用いた最適制御による過渡応答を，従来の制御方式による過渡応答と比較したものである。



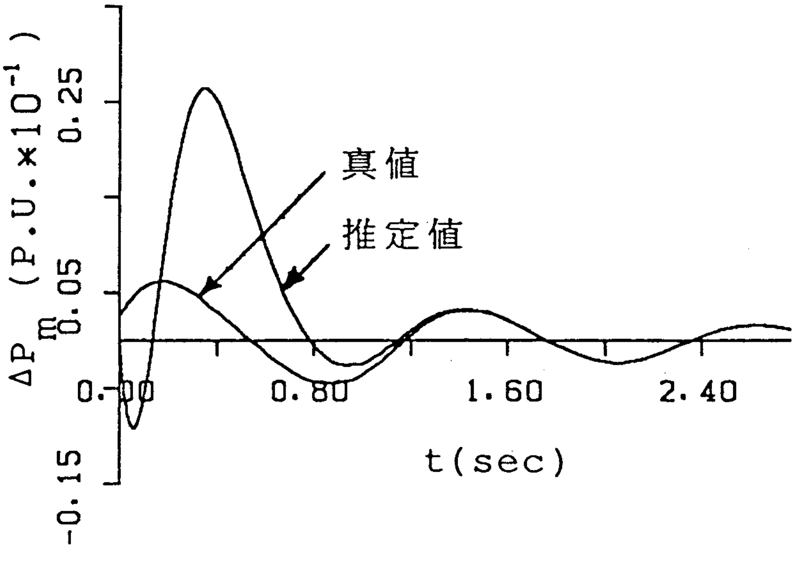
第８．１図　位相角と端子電圧の関係



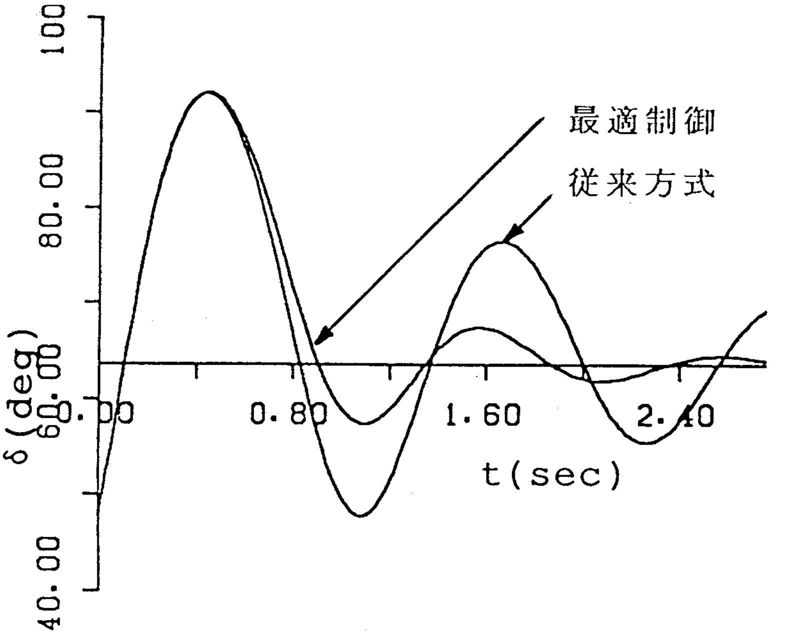
第８．２図　δ の時間応答



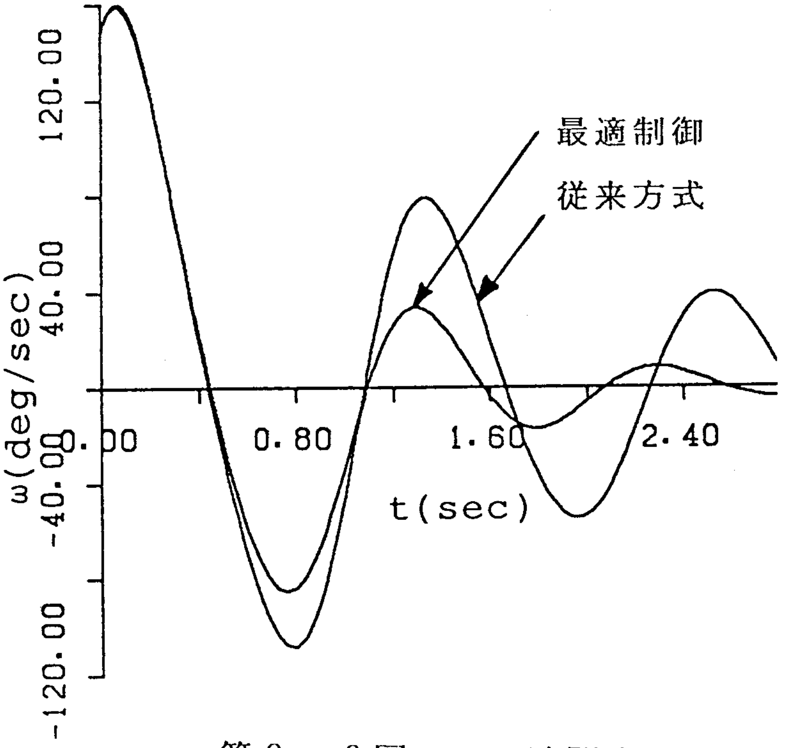
第８．３図　ω　の時間応答



第８．４図　ΔP_m の時間応答



第8．5図　δ の時間応答



第8．6図　ω の時間応答

第８．２図～第８．４図より明らかなように，本オブザーバによれば発電機側で容易に測定できる観測量からシステムの全状態量を推定することができ，また，第８．５図および第８．６図より明らかなように，推定量を用いた最適制御への有効性も十分あらわれていることがわかる。

以上より，設計の希望値αを設定し，このαに対して（８．２４）式～（８．２６）式で示す最適化を行えば，所望の速度で推定誤差を減衰させうるオブザーバを一義的に決定することができる。

第８・４節　結　　言

本章では，第７章で示した方法を拡張し，電力系統の過渡状態を推定しうるオブザーバを構成した。一例として，一次遅れ制御系で近似する調速機効果をもつ一機－無限大母線系統の過渡状態推定に本オブザーバ適用し，その有効性を各状態量の時間応答から示すとともに，推定量を用いた最適制御の過渡応答を，従来の制御方式による過渡応答と比較検討することにより，最適制御への有効性も示した。

第9章　結　　論

本論文では，電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うため，発電機のトルク関係の非線形特性をそのまま導入できる最適化法について研究をまとめたもので，本研究で得られた成果を総括すれば次のとおりである。

（１）系の動特性式が二階連立常微分方程式で記述されるとき，ラグランジュの状態関数に基づくエネルギ関数形および拡張リアプノフ関数形のリアプノフ関数を系の動作特性を表わす評価関数に採用すれば，システムの最適化が系統だった方法により行える。また，最適フィードバック制御の形式をあらかじめ規定するので間接的な取り扱いにはなるが，解析過程において系の動特性式の特別な変形を必要としないので，非線形系に対しても系統本来の非線形特性を考慮した最適化が可能となる。

（２）Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏が制御の質を評価するさい用いた非線形変換を，推定誤差の減衰の割合（オブザーバにより得られる推定値が真値に近づく程度）を評価するのに応用し設計者の希望に即した速度で推定誤差を減衰させるとともに，一つの評価関数の最小化により速やかな収れんおよび観測量の雑音による影響の軽減に対しても有効なオブザーバ構成を行った。この方法は，線形系・非線形系を問わず系の状態量を推定することができるので，電力系統の過渡状態推定に対しても有効な手法となる。

（３）本制御方式は，電力系統のすべての状態量が制御の各時刻において，直接測定可能であることを前提とするもので，測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む一般的な制御系への適用を可能にするには，適当なオブザーバを用いて全状態量を推定する必要がある。この観点に基づき，Ａ．Ｍ．Ｌｅｔｏｖ氏の非線形変換を応用したオブザーバを導入し，それを制御系に付加することにより，先の制御方式の測定不可能あるいは測定困難な状態量を含む一般的な制御系に対する過渡安定度向上を可能にしている。

今後さらに検討すべき問題としては，

（１）調速機およびＡＶＲ系を一次遅れ制御系として取り扱っているが，更に，厳密な表現で記述したモデルへの適用

（２）系統規模の拡大に伴う計算アルゴリズムの複雑さ，地域相互間の情報伝達量の多さおよび制御の即時性の困難さ等を考慮し，地域分散形の制御方式の作成

（３）ディジタル計算機の利用を前提とした制御方式のディジタル化・ソフト化

等が考えられる。

以上，本論文においては，電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題を取り扱うため，発電機のトルク関係の非線形特性をそのまま導入できる最適化の一手法を開発し，これを調速機およびＡＶＲ制御系を含む種々の電力系統に適用してその妥当性を示した。これらの研究成果が，今後の電力系統の過渡安定度領域における最適制御問題の解析において，多少なりとも寄与すれば幸いである。

文　　献

(1) Y.N. Yu, K. Vongsuriya , L.N. Wedman; Application of an optimal control theory to a power system, IEEE Trans., PAS-89, No.1, p.55 (1970)

(2) C.E.Fosha,Jr., O.I.Elgerd ; The megawatt -frequency control problem: a new approach via optimal control theory, IEEE Trans., PAS-89, No.4, p.563 (1970)

(3) J.H.Anderson; The control of a synchronous machine using optimal control theory, Proc. IEEE, Vol.59, No.1, p.25 (1971)

(4) R.K. Cavin , M.C. Budge , P. Rasmussen; An optimal linear systems approach to load-frequency control, IEEE Trans., PAS-90, No.6, p.2474 (1971)

(5) S. Elangovan , A.Kuppurajulu; Suboptimal control of power systems using simplified models, IEEE Trans., PAS-91, No.3, p.911 (1972)

(6) H.A.M. Moussa , Y.N.Yu; Optimal power system stabilization through excitation and/or governor control, IEEE Trans., PAS-91, No.3, p.1166 (1972)

(7) A.K.D. Sarkar , N.D.Rao;Stabilization of a synchronous machine through output feedback control, IEEE Trans., PAS-92, No.1, p.159 (1973)

(8) J.H. Anderson , V.M. Raina; Power system excitation and governor design using optimal control theory, Int. J. Control , Vol.19, No.2, p.289 (1974)

(9) G. Srinivasan, N.D. Rao , S. Elangovan; Stabilization of a power system through output feedback, Proc. IEEE, Vol.64, No.3, p.370 (1976)

(10) V.H. Quintana , M.A. Zohdy , J.H. Anderson; On the design of output feedback excitation controllers of synchronous machines, IEEE Trans., PAS-95, No.3, p.954 (1976)

(11) N. Ramarao , D.K.Reitan; Improvement of power system transient stability using optimal control: bang-bang control of reactance, IEEE Trans., PAS-89,No.5,p. 975 (1970)

(12) 中村，武藤：直・並列抵抗の最適Ｂａｎｇ－Ｂａｎｇ制御による電力系統の過渡安定度向上，電気学会論文誌，９６－Ｂ，Ｎｏ．３，ｐ．１４７（昭５１）

(13) A. Rajagopalan , M.V. Hariharan; Bang-bang excitation control, IEEE Trans., PAS-93,No.3,p. 703 (1974)

(14) A.B.R. Kumar , E.F. Richards; A suboptimal control law to improve the transient stability of power systems, IEEE Trans., PAS-95,No.1, p.243 (1976)

(15) 檜山，須山：電力系統の非線形性を考慮に入れた安定化制御，電気学会論文誌，９７－Ｂ，Ｎｏ．１０，ｐ．６０９（昭５２）

(16) F.E. Thau; On the inverse optimum control problem for a class of nonlinear autonomous systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-12, No.6, p.674 (1967)

(17) S.P. Panda; Comments on "On the inverse optimum control problem for a class of nonlinear autonomous systems", IEEE Trans. Autom. Control, AC-16, No.10, p.509 (1971)

(18) 谷口，宮城：電力系統のリアプノフ関数構成の一方法，電気学会論文誌，９７－Ｂ，Ｎｏ．５，ｐ．２７１（昭５２）

(19) 谷口：電力系統の拡張したリアプノフ関数構成の一方法，電気学会論文誌，９８－Ｂ，Ｎｏ．４，ｐ．３５５（昭５３）

(20) A.M. Letov; The problem of quality for nonlinear self-regulating systems with quadratic metric, IRE Trans., CT-7, No.4, p.469 (1960)

(21) K. Yamashita , T. Taniguchi; A method of optimization with power system nonlinear properties, Bull. of Univ. of Osaka Prefecture, Vol.28, No.2, p.139 (1979)

(22) 谷口，山下：電力系統の非線形特性を考慮した最適化の一手法，電気学会論文誌，１００－Ｂ，Ｎｏ．２，ｐ．１０１（昭５５）

(23) 市川：システム理論と最適制御，朝倉書店（昭４５）

(24) L.A. Zadeh , E. Polak; System theory, Inter-University Electronics Series, Vol.8, McGraw-Hill (1969)

(25) D.G. Schultz , J.L. Melsa; State functions and linear control systems, McGraw-Hill (1967)

(26) 深尾，豊田：電力系統へのコンピュータの応用，産業図書（昭４７）

(27) K. Yamashita, K. Okano , T. Taniguchi; A method of optimization taking into account the non-linearity of the power torque-angle curve for a synchronous machine, Int. J. Control, Vol.35, No.3, p.545 (1982)

(28) 山下，岡野，谷口：多機送電系統の過渡時の安定性向上を目的とした最適制御について，電気学会論文誌，１０２－Ｂ，Ｎｏ．４，ｐ．２４３（昭５７）

(29) J.L. Willems; A partial stability approach to the problem of transient power system stability, Int. J. Control, Vol.19, No.1, p.1 (1974)

(30) 山下，谷口：非線形変換を用いた最適オブザーバの一設計法，計測自動制御学会論文集，Ｖｏｌ．２０，Ｎｏ．２，ｐ．９３（昭５９）

(31) D.G. Luenberger; Observers for multivariable systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-11,No.2, p.190 (1966)

(32) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会（昭５３）

(33) T.J. Tarn , Y. Rasis; Observers for nonlinear stochastic systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-21,No.4, p.441 (1976)

(34) P.G. Smith; Numerical solution of the matrix equation $AX+XA^T+B=0$, IEEE Trans. Autom. Control, AC-16,No.3, p.278 (1971)

(35) M.W. Siddiqee; Direct method of Lyapunov and transient stability analysis, Ph. D. thesis,University of Minnesota, U.S.A. (1967)

(36) 谷口，中村：安定度解析のための誘導電動機負荷の表現法，電気学会論文誌，９２－Ｂ，Ｎｏ．５，ｐ．３２３（昭４７）

(37) K. Yamashita , T. Taniguchi; On the estimation of transient state of a synchronous machine by optimal observer, Int.J. Control (掲載決定)

(38) H.H. Rosenbrock; An automatic method for finding the greatest or least value of a function, Computer Journal, Vol.3, p.175 (1960)

(39) E.J. Davison , N.S. Rau; The optimal output feedback control of a synchronous machine, IEEE Trans., PAS-90, No.5, p.2123 (1971)

(40) 山本：常微分方程式の安定性，実教出版（昭５４）

付　　　録

付録１　　行列 W の変形

対称区分けされた行列 W を以下のように変形する。

$$\begin{bmatrix} W_\alpha & N \\ N^T & W_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -NW_\beta^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & -NW_\beta^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} W_\alpha & N \\ N^T & W_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I & NW_\beta^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -NW_\beta^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_\alpha & N \\ N^T & W_\beta \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & 0 \\ -W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_\alpha - NW_\beta^{-1}N^T & 0 \\ 0 & W_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_\beta^{-1}N^T & I \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

付録２　　σ への変換式

状態変数 x_1 を σ に変換する一つの解法として次の関係式を用いる。

$$(\sum_{i=1}^{N} e_i)[E - (1/\sum_{i=1}^{N} e_i)E1E] = C^T diag[\lambda_k] C \qquad (A.2)$$

ここに,

$$\lambda_k = e_i e_j$$

$$k = (i-1)N - i(i+1)/2 + j \; (1 \leqq i < j \leqq N)$$

E ：Ｎｘ Ｎ次の対角行列

e_i ：E の第（ｉ，ｉ）成分

付録3　（6．40）式の導出

（6．23）式の第1式より，α_{11}は

$$\alpha_{11} = (nI+S'1)M_1Q_{11}^{-1}$$

$$= (nI+lD'1)M_1Q_{11}^{-1} \quad (A.3)$$

$$= (nD'+lD'1D')D'^{-1}M_1Q_{11}^{-1}$$

となり，更に（6．38）式の関係より

$$\alpha_{11} = -lC^TD_ECD'^{-1}M_1Q_{11}^{-1} \quad (A.4)$$

となる。従って，$x^T\alpha^T$は

$$x^T\alpha^T = [x_1^T \ x_2^T]\begin{bmatrix} -lC^TD_ECD'^{-1}M_1Q_{11}^{-1} & 0 \\ -l\eta^{-1}1M_1Q_{11}^{-1} & nQ_{22}^{-1}\Lambda^{-1}\eta^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= [x_1^T \ x_2^T]\begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -lD_ECD'^{-1}M_1Q_{11}^{-1} & 0 \\ -l\eta^{-1}1M_1Q_{11}^{-1} & nQ_{22}^{-1}\Lambda^{-1}\eta^{-1} \end{bmatrix} = \xi^T\alpha_E \quad (A.5)$$

となり，（6．15）式の$x^T\alpha^TQBK^T_{1l}\dot{x}$および$x^T\alpha^TQBK^T_1\xi$は，それぞれ次式に書き直すことができる。

$$x^T\alpha^TQBK^T_{1l}\dot{x} = \xi^T\alpha_EQBK^T_{1l}\dot{x}$$

$$x^T\alpha^TQBK^T_1\xi = \xi^T\alpha_EQBK^T_1\xi \quad (A.6)$$

付録4　WおよびFの同時対角化

（7．12）式，（7．13）式および（7．14）式を導出するに際し，（7．9）式および（7．10）式をそれぞれ以下のように示す。

$$W = \varepsilon^T\tilde{P}\varepsilon \quad (A.7)$$

$$F = \varepsilon^TP\varepsilon = 1 \quad (A.8)$$

ここに，

$$\tilde{P} = -\{(A - GC)^TP + P(A - GC)\}/2$$

いま，（A．8）式のPが正定な実対称行列より直交行列Nを用いて

$$N^TPN = \Sigma = H^2 \quad (A.9)$$

のように対角化されるので，行列Pを

$$P = D^T D \tag{A.10}$$

として表わすことができる。ただし，各行列はそれぞれ（７．１１）式に示したものに相当する。

このとき，この D を用いた新しい行列 P^* を

$$P^* = (D^{-1})^T \tilde{P} D^{-1} \tag{A.11}$$

で定義する。上式の P^* は，$\tilde{P}$ が実対称行列より P^* も実対称行列となり直交行列 L により対角化される。

$$L^T P^* L = \Lambda \tag{A.12}$$

したがって，（７．１１）式で示す線形変換を（Ａ．７）式および（Ａ．８）式に施せば，W および F はそれぞれ

$$\begin{aligned} W &= \Gamma^T T^T \tilde{P} T \Gamma \\ &= \Gamma^T L^T (D^{-1})^T \tilde{P} D^{-1} L \Gamma \\ &= \Gamma^T \Lambda \Gamma \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} F &= \Gamma^T T^T P T \Gamma \\ &= \Gamma^T L^T (D^{-1})^T P D^{-1} L \Gamma \\ &= \Gamma^T \Gamma = 1 \end{aligned} \tag{A.14}$$

のように同時対角化される。

付録５　　汎関数Φの最小のための必要条件

（７．２５）式，（７．２６）式および（７．２７）式で示す関係は，（７．２４）式のΦを G,P および S のそれぞれで偏微分し零とおくことにより得られる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial G} = 2G - PSC^T - PSC^T = 0 \tag{A.15}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = (A + \alpha I - GC)S + S(A + \alpha I - GC)^T + I = 0 \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S} = (A + \alpha I - GC)^T P + P(A + \alpha I - GC) + Q = 0 \tag{A.17}$$

付録6　システム方程式の導出

（７．３１）式で示す電圧 $\dot{E}_1, \dot{E}_2$ および $\dot{E}_3$を

$$\dot{E}_i = E_i \varepsilon^{j\delta_i} \quad (i = 1,2)$$
$$\dot{E}_3 = E_{md} + jE_{mq} \qquad (A.18)$$

で表わせば P_e, P_s および I_dは

$$\begin{aligned} P_e &= Real\,[\bar{E}_1 \dot{I}_1] \\ &= E_1^2 Y_{11}\cos\varphi_{11} + E_1E_2Y_{12}\cos(\delta_1-\delta_2-\varphi_{12}) \\ &\quad + E_1Y_{13}\{E_{md}\cos(\delta_1-\varphi_{13}) + E_{mq}\sin(\delta_1-\varphi_{13})\} \end{aligned} \qquad (A.19)$$

$$\begin{aligned} P_s &= Real\,[-\bar{E}_3 \dot{I}_3] \\ &= -E_1Y_{13}\{E_{md}\cos(\delta_1+\varphi_{13}) + E_{mq}\sin(\delta_1+\varphi_{13})\} \\ &\quad - E_2Y_{23}\{E_{md}\cos(\delta_2+\varphi_{23}) + E_{mq}\sin(\delta_2+\varphi_{23})\} \\ &\quad - (E_{md}^2+E_{mq}^2)Y_{33}\cos\varphi_{33} \end{aligned} \qquad (A.20)$$

$$\begin{aligned} I_d &= I_m[\dot{E}_1 \bar{I}_1/|\dot{E}_1|] \\ &= -E_1Y_{11}\sin\varphi_{11} + E_2Y_{12}\sin(\delta_1-\delta_2-\varphi_{12}) \\ &\quad + E_{md}Y_{13}\sin(\delta_1-\varphi_{13}) - E_{mq}Y_{13}\cos(\delta_1-\varphi_{13}) \end{aligned} \qquad (A.21)$$

となる。従って，状態方程式は，（７．３２）式および（７．３３）式に上式を代入し整理することにより次式で与えられる。

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \omega_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{\omega_0}{M}[P_m - E_1^2Y_{11}\cos\varphi_{11} - E_1E_2Y_{12}\cos(\delta_1-\delta_2-\varphi_{12}) \\ &\quad - E_1Y_{13}\{E_{md}\cos(\delta_1-\varphi_{13}) + E_{mq}\sin(\delta_1-\varphi_{13})\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= \frac{1}{T_0'}[E_{ex} - E_1 + (x_d-x_d')\{E_1Y_{11}\sin\varphi_{11} - E_2Y_{12}\sin(\delta_1-\delta_2-\varphi_{12}) \\ &\quad - E_{md}Y_{13}\sin(\delta_1-\varphi_{13}) + E_{mq}Y_{13}\cos(\delta_1-\varphi_{13})\}] \end{aligned} \qquad (A.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{M_u}[P_u + E_1Y_{13}\{E_{md}\cos(\delta_1+\varphi_{13}) + E_{mq}\sin(\delta_1+\varphi_{13})\} \\ &\quad + E_2Y_{23}\{E_{md}\cos(\delta_2+\varphi_{23}) + E_{mq}\sin(\delta_2+\varphi_{23})\} \\ &\quad + (E_{md}^2+E_{mq}^2)Y_{33}\cos\varphi_{33}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{md}}{dt} &= s\omega_0E_{mq} - \frac{1}{T_u'}E_{md} + \frac{x_{11}-x'}{T_u'}[E_1Y_{13}\sin(\delta_1+\varphi_{13}) \\ &\quad + E_2Y_{23}\sin(\delta_2+\varphi_{23}) + Y_{33}\{E_{md}\sin\varphi_{33} + E_{mq}\cos\varphi_{33}\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{mq}}{dt} &= -s\omega_0E_{md} - \frac{1}{T_u'}E_{mq} - \frac{x_{11}-x'}{T_u'}[E_1Y_{13}\cos(\delta_1+\varphi_{13}) \\ &\quad + E_2Y_{23}\cos(\delta_2+\varphi_{23}) + Y_{33}\{E_{md}\cos\varphi_{33} - E_{mq}\sin\varphi_{33}\}] \end{aligned}$$

一方，出力方程式の有効電力は（A．１９）式で与えられ，また，端子電圧は

$$\dot{V}_t = V_{td} + jV_{tq} = \dot{E}_1 - jx_d'\dot{I}_1 \tag{A.23}$$

の関係式より

$$\begin{aligned} V_{td} &= E_1\cos\delta_1 + x_d'E_1Y_{11}\sin(\delta_1+\varphi_{11}) \\ &\quad + x_d'E_2Y_{12}\sin(\delta_2+\varphi_{12}) \\ &\quad + x_d'Y_{13}\{E_{md}\sin\varphi_{13} + E_{mq}\cos\varphi_{13}\} \\ V_{tq} &= E_1\sin\delta_1 - x_d'E_1Y_{11}\cos(\delta_1+\varphi_{11}) \\ &\quad - x_d'E_2Y_{12}\cos(\delta_2+\varphi_{12}) \\ &\quad - x_d'Y_{13}\{E_{md}\cos\varphi_{13} - E_{mq}\sin\varphi_{13}\} \end{aligned} \tag{A.24}$$

を求め，次式に代入することにより得られる。

$$V_t = \sqrt{V_{td}^2 + V_{tq}^2} \tag{A.25}$$

以上より（A．２２）式，（A．１９）式および（A．２５）式のそれぞれを基準運転点で線形化すれば（７．３４）式および（７．３５）式のシステム方程式が導出される。

付録７　（８．１２）式の導出

（８．９）式と等価な積分方程式が

$$R(t) = \left[R(0) + \int_0^t \frac{\psi(s)}{R(s)}\exp\left(\int_0^s W\,dt\right)ds\right]\exp\left(-\int_0^t W\,dt\right) \tag{A.26}$$

で与えられることから，次式が得られる。

$$R(t)\exp\left(\int_0^t W\,dt\right) \leq R(0) + \int_0^t \frac{|\psi(s)|}{R^2(s)}R(s)\exp\left(\int_0^s W\,dt\right)ds \tag{A.27}$$

従って，（A．２７）式にＧｒｏｎｗａｌｌの不等式[(40)]を適用すれば，

$$R(t) \leq R(0)\exp\left[-\int_0^t \left(W - \frac{|\psi(\tau)|}{R^2(\tau)}\right)d\tau\right] \tag{A.28}$$

となる。

謝　　辞

本論文は，著者が大阪府立大学大学院博士課程在学中ならびに琉球大学に奉職の後，谷口経雄講師御指導のもとに研究を行ったものをまとめたものである。本研究を進めるにあたり，終始暖かい御指導を戴いた谷口経雄講師に心より感謝の意を表わします。

また，本論文をまとめるにあたり，種々御指導と御配慮を賜わった，大阪大学電気工学科　藤井克彦教授，木下仁志教授，鈴木胖教授ならびに同電子工学科　児玉慎三教授に深く感謝致します。

また，日頃暖かい御激励および御配慮をはかって戴きました大阪府立大学　畑四郎学長，琉球大学電子・情報工学科　宮城隼夫助教授，同電気工学科　上里勝実助教授ならびに同電子・情報工学科，同電気工学科，同短期大学部電気工学科の諸氏に深く感謝致します。

更に，本論文を作成するにあたり，種々手伝って戴いた琉球大学電子・情報工学科卒研生　岸本憲作君，櫛田隆君，平瀬修君ならびに屋良昌慶君の諸氏に感謝致します。

最後に，これまでの研究生活を可能にし，暖かく見守って下さった両親に感謝致します。