



Title	はん関数を用いた非線形システムの動特性測定法に関する研究
Author(s)	中尾, 和夫
Citation	大阪大学, 1972, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1536
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

はん関数を用いた非線形システムの
動特性測定法に関する研究

中 尾 和 夫

論文目録

報告番号甲第1768号

中尾和夫

主論文 はん関数を用いた非線形システムの
動特性測定法に関する研究

(主論文のうち印刷公表したもの)

1. Measurement of Characteristics of Nonlinear
Dynamical Systems Using Volterra Functional
Series. (ボルテラはん関数級数を用いた非線
形システムの動特性の測定)

Technology Reports of the Osaka University
Vol. 19, No. 861

1969

1. ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性測定
およびモデル化

計測自動制御学会論文集

第5巻 第4号

昭和44年10月

1. ボルテラ級数を用いた非線形無定係数の動特性
測定法

計測自動制御学会論文集

第7巻 第2号

昭和46年4月

1. Wiener核の可変直交関数展開による非線形系の動特性測定法

制御工学

第14巻 第10号

昭和45年10月

1. 2値信号を入力とする非線形系の動特性測定法

計測自動制御学会論文集

第7巻 第4号

昭和46年8月

(主論文のうち松公表のもの)

TfL

論 文 梗 概

本論文は筆者が大阪大学大学院工学研究科，博士課程（電気工学専攻）在学中に行なったはん関数を用いた非線形システムの動特性測定法に関する研究をまとめたものである。

現在の制御理論の進歩にはめざましいものがあるが，これらの理論のほとんどが対象の動特性が既知であるという前提のもとに理論を展開しているため，この理論が実在のシステムにうまく適用できるか否かはそのシステムの動特性が知られているかどうかによって言っても過言ではない。またこの制御理論の進歩と最近の電子計算機の急速な発展により，対象とするシステムの範囲が非線形システムを含んだ領域にまで拡大されつつある。ところが実在のシステムにはその動特性があらかじめわかっているものは少なく，また非線形のシステムにまで適用可能な実際的な動特性測定法はこれまでのところ見当たらない。

本論文は以上の見地に立つて一般の非線形システムの動特性をはん関数を用いて測定する方法について研究を行なったものである。

第1章では緒論として，現在の制御工学の動向について述べ，非線形システムの動特性測定の重要性と本研究の占める位置についてあきらかにする。第2章では従来から提案されている非線形システムの動特性測定法の問題点につき検討し，本研究の目的とするところをあきらかにする。また非線形システムのはん関数による記述に関して基礎的な考察を行なう。第3章ではVolterra（はん関数）級数を用いた動特性測定法を提案し，この方法によって^黒定位性を有するシステムの動特性測定も可能であり，またあらかじめ簡単に測定対象の構造を決定できることを示す。第4章ではWienerによるLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法を拡張，発展させた可変直交関数を用いた動特性測定法を提案する。この方法によると測定結果は数式で，また最も簡単なものが得られることを示し，十分実用性があることを確かめる。第5章では入力として2値信号のみを受け取る非線形システムの動特性測定法について考察し，このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を提案する。この信号を用いれば測定対象の構造およびそのパラメータを簡単に決定できることを確かめる。第6章は全章にわたる総括である。

目 次

第1章 緒 論	1
第2章 非線形システムの動特性測定に関する基礎的考察	2
2.1 緒 言	2
2.2 非線形システムの動特性測定の問題点	2
2.3 はん関数による非線形システムの入出力関係の記述	4
2.3.1 Volterra (はん関数) 級数による記述	4
2.3.2 Wiener の直交はん関数級数による記述	6
2.4 結 言	9
第3章 Volterra級数を用いた非線形システムの動特性測定法	12
3.1 緒 言	12
3.2 測定対象	12
3.3 Volterra級数モデル	14
3.3.1 定位性を有するシステムに対するモデル	14
3.3.2 無定位性を有するシステムに対するモデル	14
3.4 モデルの次数の決定および各項の応答の決定法	17
3.5 Volterra核の測定法	20
3.5.1 直接法	20
3.5.2 代数方程式法	21
3.5.3 直接法と代数方程式法との比較, 検討	23
3.6 実際上の問題に対する考察	23
3.7 測定例	24
3.7.1 直接法による測定例	24
3.7.2 代数方程式法による測定例	28
3.8 結 言	35
第4章 Wiener の直交はん関数級数を用いた非線形システムの動特性測定法	37
—可変直交関数展開による方法—	
4.1 緒 言	37
4.2 可変直交関数によるWiener核の展開	37
4.3 動特性測定法	39
4.3.1 正規性白色信号を受ける多次元可変直交関数回路	39
4.3.2 展開係数の測定法	40
4.3.3 直交関数固有のパラメータの決定法	44
4.3.4 Wiener の直交はん関数級数の次数およびその展開のための直交関数の項数の決定法	45
4.4 測定例	46
4.5 結 言	49

第5章	2値信号を入力とする非線形システムの動特性測定法	52
5.1	緒言	52
5.2	2値信号入力に対する非線形システムの離散値表示	52
5.3	動特性測定法	54
5.3.1	動特性測定のための入力信号	54
5.3.2	システムのパラメータの測定法	56
5.3.3	モデルの次数の決定法	58
5.4	測定例	60
5.5	結言	64
第6章	結論	66
	謝辞	67
	付録	68

第 1 章 緒 論

第 1 章 緒 論

現在の産業の発展には目を眩るものがあり、これには現代の制御理論を駆使した生産工程の自動化が大いに貢献しているものと思われる。社会の高度化とともに経済性、製品の均質性、安全性、省力化などの要求がますます厳しくなり、また最近の電子計算機の発展を考えれば、さらにこの自動化の傾向は強まるものと思われる。

この自動化の推進は一方では対象とするシステムの範囲を拡大するという方向に向けられている。すなわち内部の構造が複雑なためその特性がはつきりわからなかつたシステムに迄関心を広げ、なんとかその特性を把握して制御を試みようとするものである。他方では経済性、製品の均質性に対する要求から制御の質を向上させようとする方向に向けられている。すなわちこれまでシステムの特性を簡単なモデル（たとえば線形モデル）で近似して制御を行なっていたのを、上記の要求を満たすためより正確な（非線形の領域を含む）モデルを構成し、このモデルを用いてより高度な制御を行なおうとするものである。このようなシステムを制御するための理論は現代制御理論としてほぼ体系づけられているが、これらの理論は対象の動特性がわかっていなければほとんど適用できない。したがって上記の目的を遂行するためにはまずこのような内部の構造が未知の非線形システムの動特性を測定することが必要とされる。

また最近、工学の分野において生物から種々の技術を学びとろうという研究が注目をあびている。生物は現在の発達した科学技術でもってしても及びもつかないすばらしい機能を有している。上述の研究はこれらの機能を工学的な立場から見直し、それらの機能を取り入れて新しい技術を開発しようとするものである。そのためにはまず生物のもつ機能を解明しなければならないが、生物には未知な面が多く、物理的、化学的な解析手法によりその構造や特性がわかることは少なく、またそれらはほとんどが非線形の特性を有していると思われる。したがってこの分野においても内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定する実際的な方法が必要とされている。

これまで非線形システムの動特性測定の方法が種々研究されているが、実用化には程遠い感がある。その理由としてつぎのような点が考えられる。すなわちこれまで提案された方法の大部分は測定対象の構造に関してなんらかの仮定をおき、その仮定のもとに動特性測定の理論を展開しており、測定対象がこれらの仮定を満足するかどうかを検討する方法については全く考慮していない。したがって得られた結果がどの程度信頼のおけるものであるかわからない。また仮定を必要としない一般的な測定方法は測定パラメータの個数を十分多く取らなければシステムの動特性を正しく測定できず、そのため測定に多大の労力を要するとともに測定結果が複雑なものとなる。

このような問題点を解決するためには、一般性のあるモデルを用いて、測定対象がこのモデルのどの形に属するかを近似度を考慮して検定しつつ、その動特性をできるだけ簡単な形で測定するという方法が考えられる。本論文ではこのような観点から一般の非線形システムの動特性をはん関数を用いて測定する方法について研究を行なった。すなわち非線形システムに対する一般性のあるモデルとしてはん関数モデルを考え、このはん関数モデルの形を近似度を考慮して決定することにより、内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定する方法を提案し、その有用なことを確かめた。

第 2 章 非線形システムの動特性測定 に関する基礎的考察

第 2 章 非線形システムの動特性測定 に関する基礎的考察

2.1 緒 言

本章ではまずこれまでに提案されている非線形システムに対する動特性測定法について概説し、それぞれの測定法が有する問題点について検討する。これより内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにはどのような点を解決しなければならないかを考え、本研究の目的とするところを明示する。

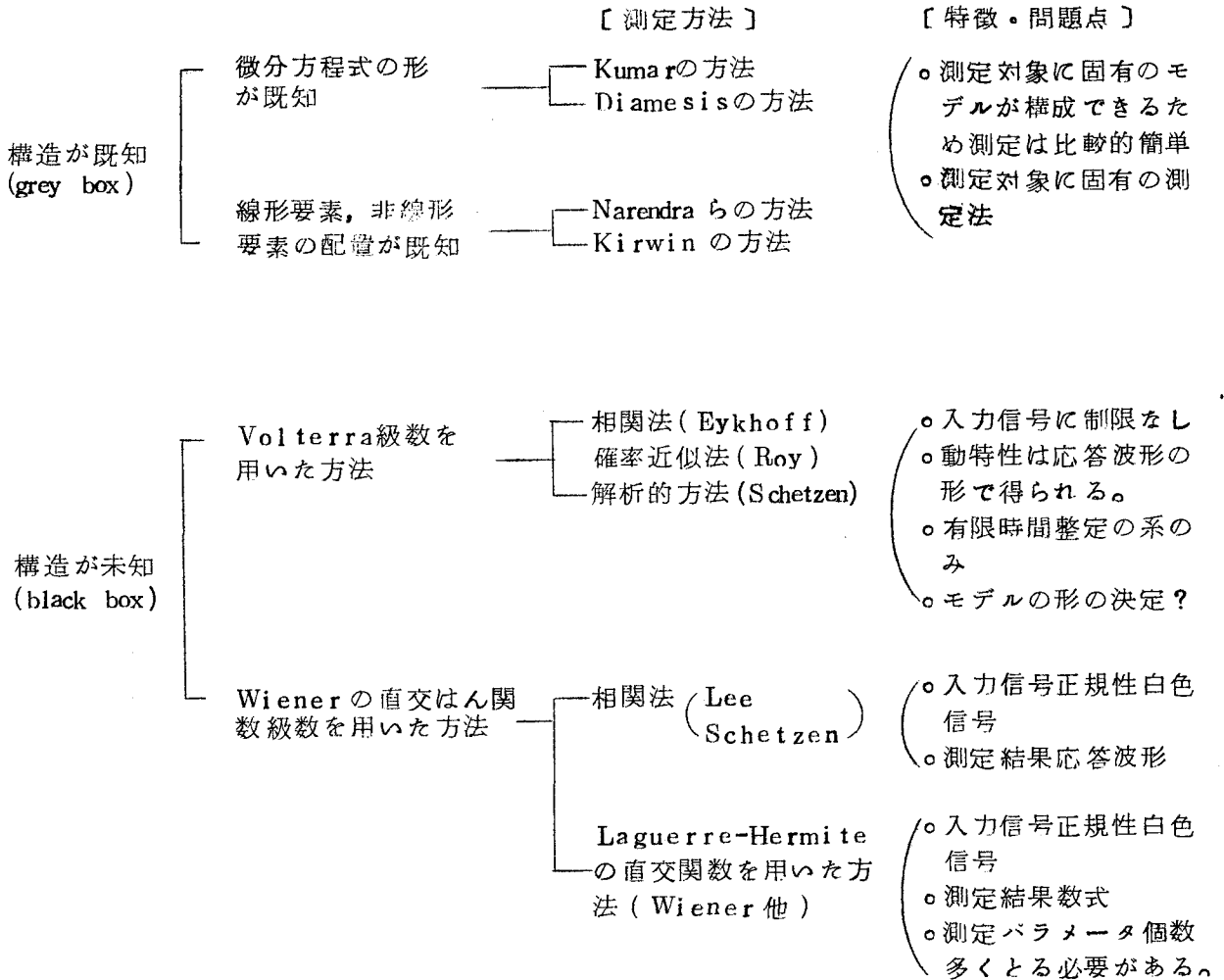
ついではん関数により非線形システムの入出力関係の表示法について説明する。はん関数によるシステムの表示は入出力関係が explicit に表わされるところから動特性の測定—入出力データからシステムの入力と出力との関係をあきらかにすること—には非常に有用である。またはん関数の形は簡単に規定できるので、内部の構造が未知の非線形系システムの動特性の測定にこのはん関数モデルを用いることは特に適している。

2.2 非線形システムの動特性測定の問題点

これまで非線形システムの動特性を測定するために種々の方法が提案されている。これらの方法は(1)測定対象の構造を既知 (grey box) とするもの、(2)測定対象の構造を未知 (black box) とするもの、に分けることができる。(1)に対する方法として微分方程式の形を既知として測定する Kumar¹⁾、Diamesis²⁾らの方法、線形要素、非線形要素 (zero-memory type) の配置を既知として測定する方法^{3)~6)}などがあるが、あらかじめ測定対象に固有のモデルが構成できるため比較的簡単に動特性測定が行なえる。(2)の場合には考えられ得るすべての特性を含む一般性のあるモデルを用いて動特性を測定する必要がある。このような一般性のあるモデルとして Volterra 級数が提案されており、その Volterra 核によりシステムの特性が決定される。またシステムへの入力信号が正規性白色信号である場合にはこの Volterra 級数は直交化することができ、システムは Wiener の直交はん関数により表わされ、動特性は Wiener 核により特徴づけられる。モデルに Volterra 級数を用いた方法としては、その Volterra 核を応答波形の形で、相関法を用いて測定する Eykhoff⁷⁾の方法、確率近似法を用いて測定する Roy と Sherman の方法⁸⁾、解析的な関係を用いて測定する Shetzen の方法⁹⁾などがある。これらの方法は測定に用いる入力信号に対しては制限はないが、モデルとして用いる Volterra 級数の次数をどの程度で打ち切ればよいかに関しては全く考慮されていない。また測定対象は有限時間整定のシステム (定位性を有するシステム) にのみ限っている。Wiener の直交はん関数を用いた方法として、Wiener 核を Laguerre の直交関数で展開する Wiener^{10)~12)}の方法 (Laguerre-Hermite の直交関数を用いた方法)、相関法を用いて Wiener 核を応答波形の形で求める Lee と Shetzen の方法¹³⁾などがある。これらの方法は測定のための入力信号として正規性白色信号を用いなければならないが、Laguerre-Hermite の直交関数を用いた方法は測定結果が数式で得られるためすぐ

さま制御理論を適用できるという利点を有している。ところがこの方法は測定パラメータの個数を非常に多く取らなければ十分な精度で動特性を測定することができず、測定に多大の労力を要するとともに測定結果が複雑なものとなる。これらの動特性測定法の特徴および問題点をまとめて示すと表2.1のようになる¹⁴⁾。

表2.1 非線形システムの動特性測定法



以上のようにこれまで提案されている非線形システムの動特性測定法は実際に適用する場合に種々の問題点を含んでおり、内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにはこれらの問題点を解決する必要がある。以下これらの問題点を解決するために、第3章では定位性を有するシステムのみならず、無定位性を有するシステムにも適用でき、またあらかじめVolterra級数の次数を簡単に決定することができる動特性測定法について研究を行ない、第4章ではWienerのLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法を拡張、発展させて、できるだけ簡単な数式モデルで非線形システムの動特性を測定する方法について提案する。

また非線形システムの動特性を一般的に測定しようとするとき、どうしても測定すべきパラメータの個数が多くなり、測定がめんどうとなる。ところがシステムが入力として2値信号以外のものを受けない場合には、一般的な方法で動特性を測定する必要はなく、2値信号入力に対する非線形システムの動特性のみを測定すればよく、測定パラメータの個数は非常に少なくなる。第5章ではこのように入力として2値信号のみしか受けない非線形システムの動特性測定

の方法について研究を行なう。

まず次節では非線形システムの入出力関係を一般的に表わす Volterra 級数, Wiener 直交はん関数について説明する。

2.3 はん関数による非線形システムの入出力関係の記述

2.3.1 Volterra (はん関数) 級数による記述

一般の 1 入力 1 出力の非線形システムは図 2.1 のように表わすことができる。図において $x(t)$ はシステムの入力, $y(t)$ はこの入力に対するシステムの出力である。ある時刻 t におけるシステムの出力 $y(t)$ は一般に t より過去の入力の値すべてに依存する。したがってこの関係は数学的にははん関数 H を用いて

$$y(t) = H [t ; x (t') , t' \leq t] \quad (2.1)$$

と表わすことができる¹⁵⁾。システムが線形の場合には, このはん関数はよく知られているように

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.2)$$

なるたゞみこみ積分となる。 $h(t)$ はシステムの動特性を表わす荷重関数である。

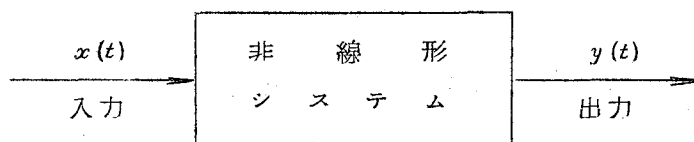


図 2.1 1 入力 1 出力の非線形システム

非線形システムに対しては, V. Volterra が線形システムにおけるたゞみこみ積分の考え方を拡張して, 式 (2.1) をはん関数の形で表わすことを提案した¹⁶⁾。すなわち式 (2.1) のはん関数 H が $x(t')$ に関して連続であり, かつシステムが時間不変であれば, Fre'chet の定理を用いてシステムの出力 $y(t)$ は無限項のはん関数級数の和により

$$\begin{aligned} y(t) &= H [x (t') , t' \leq t] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n [h_n ; x (t') , t' \leq t] \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表わすことができる。当然のことながら実現性の条件より $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ は

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) = 0, \quad \tau_j < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

なる関係を満足している。式 (2.3) のはん関数形を Volterra (はん関数) 級数と呼び, その核 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ を n 次の Volterra 核と呼ぶ。

式 (2.3) の関係をブロック線図で表わすと図 2.2 のようになる。第 1 項目の応答 H_0 はシス

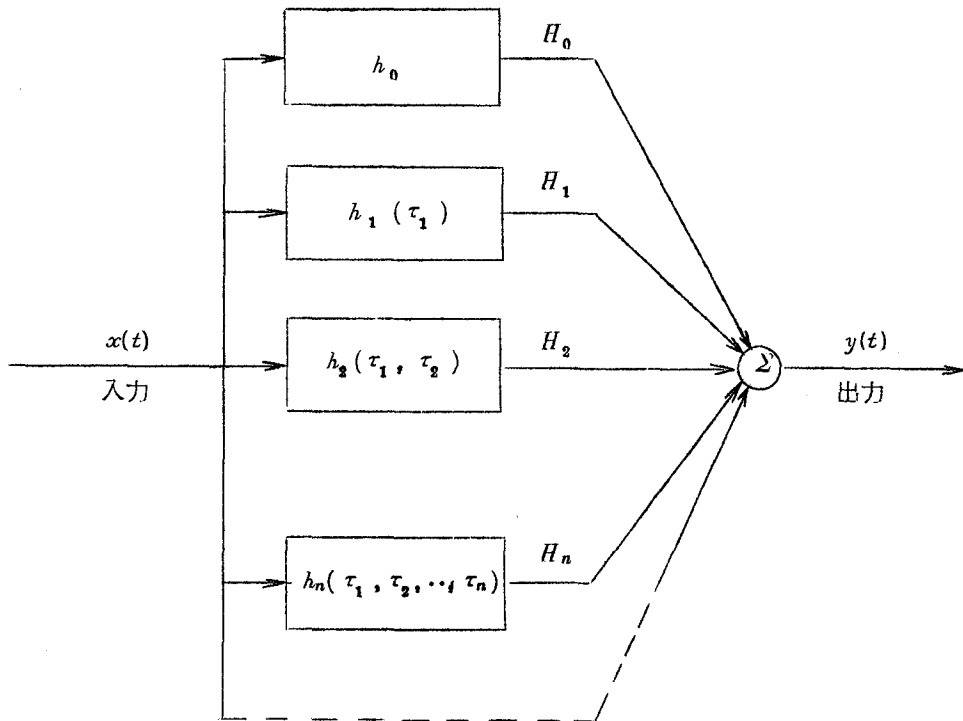


図 2.2 非線形システムの入出力関係を表わす Volterra 級数のブロック線図

システムが有する直流ゲインで定数である。第 2 項目の応答 H_1 は線形系におけるたゞみこみ積分に相当し、入力 $x(t)$ と 1 次の Volterra 核 $h_1(\tau_1)$ との単なるたゞみこみ積分で表わされる。第 3 項目の応答 H_2 は入力 $x(t)$ と 2 次の Volterra 核 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ との 2 次元のたゞみこみ積分で表わされる。一般に第 n 項目の応答 H_n は入力 $x(t)$ と n 次の Volterra 核 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ との n 次元のたゞみこみ積分で表わされる。

1 次の Volterra 核 $h_1(\tau_1)$ は線形系におけるインパルス応答に相当し、Volterra 級数の第 2 項目 (H_1) にインパルス入力を投入することにより得られる。ところが 2 次以上の Volterra 核は線形系におけるようなたゞ単なるインパルス応答の形では得られない。すなわち 2 次の Volterra 核については、式 (2.5) に示す一般化された 2 次元のたゞみこみ積分を考える。

$$H_2[h_2; x_1(t') \cdot x_2(t'), t' \leq t] = \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) x_1(t-\tau_1) x_2(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.5)$$

上式において $x_1(t) = \delta(t-T_1)$, $x_2(t) = \delta(t-T_2)$ ($\delta(t)$: Dirac のデルタ関数) とおくと

$$H_2[h_2; \delta(t'-T_1) \cdot \delta(t'-T_2), t' \leq t] = \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) \delta(t-T_1-\tau_1) \delta(t-T_2-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = h_2(t-T_1, t-T_2) \quad (2.6)$$

が得られる。これより 2 次の Volterra 核 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ は異なった入力 $x_1(t)$, $x_2(t)$ により構成される 2 次元空間における一般化たゞみこみ積分のインパルス応答となることがわかる。一般

に n 次の Volterra 核については、 n 次元の一般化たゞみこみ積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x_1(t-\tau_1) x_2(t-\tau_2) \cdots x_n(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (2.7)$$

を考え、入力として、 $x_i(t) = \delta(t - T_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を加えることにより

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \delta(t - T_1 - \tau_1) \delta(t - T_2 - \tau_2) \cdots \delta(t - T_n - \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n = h_n(t - T_1, t - T_2, \dots, t - T_n) \quad (2.8)$$

が得られる。これより、 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ は異なった入力 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ により構成される n 次元空間における一般化たゞみこみ積分のインパルス応答となることがわかる。

以上よりわかるように Volterra 級数は線形システムにおけるたゞみ込み積分の考え方を非線形システムに拡張したものであり、線形システムがインパルス応答により特徴づけられたように、非線形システムは一般化たゞみこみ積分のインパルス応答すなわち Volterra 核により特徴づけられる。

2.3.2 Wiener の直交はん関数級数による記述¹²⁾

N. Wiener は非線形システムを解析する場合に、その試験信号として一様なパワ密度スペクトルをもつガウス雑音（正規性白色信号）を用いることを提案した。正規性白色信号を適当にサンプリングすることにより、任意の有限時間間隔にわたる任意の時間関数を有限で 0 でない確率でいくらかでも正確に近似できるのでこの信号に対してシステムを解析しておけば、その解析結果は如何なる入力時間関数に対しても適用することができる。

2.3.1 で非線形システムの入出力関係は式 (2.3) の Volterra 級数で表わされることを示したが、非線形システムが図 2.3 に示すように入力として正規性白色信号を受けるときには、そのシステムの入出力関係を直交化されたはん関数を用いて表わすことができる。

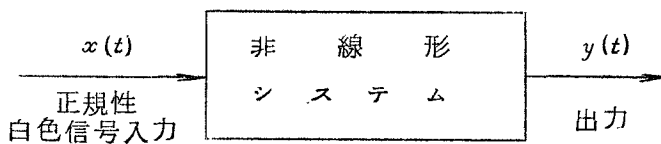


図 2.3 入力として正規性白色信号を受ける非線形システム

すなわち入力 $x(t)$ が平均値および自己相関関数が

$$\left. \begin{aligned} \overline{x(t)} &= 0 \\ \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} &= K \cdot \delta(\tau) \quad (K: \text{定数}) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

たゞし $\overline{\quad} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \quad \cdot dt$, $\delta(\tau)$: Dirac のデルタ関数

なる正規性の白色信号である場合には、式 (2.3) の $y(t)$ は直交化されたはん関数の無限和により

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \quad (2.10)$$

たゞし

$$\overline{W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] W_m[w_m; x(t'), t' \leq t]} = 0 \quad n \neq m \quad (2.11)$$

と表わすことができる。\$W_n\$ は \$n\$ 次の非同次はん関数で、その形は \$n\$ より低次の任意のはん関数と直交するように決められる。

0 次の直交はん関数 \$W_0\$ はたゞ単に

$$W_0[w_0; x(t'), t' \leq t] = w_0 \quad (w_0: \text{定数}) \quad (2.12)$$

と書ける。1 次の直交はん関数 \$W_1\$ は 1 次の非同次はん関数

$$W_1[w_1, w_{0(1)}; x(t'), t' \leq t] = \int_0^\infty w_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + w_{0(1)}$$

が任意の定数 \$C_0\$ と直交する条件より決定される。すなわち

$$\begin{aligned} \overline{C_0 \cdot W_1[w_1; x(t'), t' \leq t]} &= \int_0^\infty C_0 \cdot w_1(\tau) \overline{x(t-\tau)} d\tau + C_0 \cdot w_{0(1)} \\ &= C_0 \cdot w_{0(1)} = 0 \end{aligned}$$

を得、\$C_0\$ は任意であるから \$w_{0(1)}\$ は 0 でなければならない。したがって 1 次の直交はん関数として

$$W_1[w_1; x(t'), t' \leq t] = \int_0^\infty w_1(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.13)$$

を得る。2 次の直交はん関数 \$W_2\$ は 2 次の非同次はん関数

$$\begin{aligned} W_2[w_2, w_{1(2)}, w_{0(2)}; x(t'), t' \leq t] &= \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad + \int_0^\infty w_{1(2)}(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + w_{0(2)} \end{aligned}$$

が任意の定数 \$C_0\$ と任意の 1 次の同次はん関数

$$\int_0^\infty C_1(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

と直交する条件より決定される。\$C_0\$ と直交することから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty C_0 \cdot w_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty C_0 \cdot w_{1(2)}(\tau_1) \overline{x(t-\tau_1)} d\tau_1 \\ + C_0 \cdot w_{0(2)} = 0 \end{aligned}$$

が得られ、1 次の同次はん関数と直交することから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty C_1(\tau) \cdot w_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)} d\tau d\tau_1 d\tau_2 \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty C_1(\tau) \cdot w_{1(2)}(\tau_1) \overline{x(t-\tau) x(t-\tau_1)} d\tau d\tau_1 + \int_0^\infty C_1(\tau) w_{0(2)} \overline{x(t-\tau)} d\tau \\ = 0 \end{aligned}$$

が得られる。上式に正規性白色信号の高次モーメントに関する関係式⁽¹⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \overline{x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\cdots x(t-\tau_{2m})} &= \sum_{\substack{m \\ (\text{すべての対 } k \neq l)}} K^m \left(\frac{\pi}{\tau} \delta(\tau_k - \tau_l) \right) \\ \overline{x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\cdots x(t-\tau_{2m+1})} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

を適用することにより

$$K \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) d\tau + w_{0(2)} = 0$$

および

$$\int_0^\infty w_{1(2)}(\tau) C_1(\tau) d\tau = 0$$

なる関係式が得られる。\$C_1(\tau)\$ は任意であるから \$w_{1(2)}(\tau) = 0\$ でなければならない。ゆえに 2 次の直交はん関数として

$$W_2[w_2; x(t'), t' \leq t] = \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - K \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) d\tau \quad (2.15)$$

を得る。以下同様にして 3 次、4 次、5 次の直交はん関数を求めると

$$\begin{aligned} W_3[w_3; x(t'), t' \leq t] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad - 3K \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x(t-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} W_4[w_4; x(t'), t' \leq t] &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_4(\tau_1, \dots, \tau_4) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_4) d\tau_1 \cdots d\tau_4 \\ &\quad - 6K \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ &\quad + 3K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_4(\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} W_5[w_5; x(t'), t' \leq t] &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_5(\tau_1, \dots, \tau_5) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_5) d\tau_1 \cdots d\tau_5 \\ &\quad - 10K \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_4) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_3) d\tau_1 \cdots d\tau_4 \\ &\quad + 15K^2 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_5(\tau_1, \tau_2, \tau_2, \tau_3, \tau_3) x(t-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

となる。高次の直交はん関数も同様に求めることができる。

関数 \$w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)\$ は \$n\$ 次の Wiener 核と呼ばれ、Volterra 核と同様、非線形システムは無数個の Wiener 核により特徴づけられる。

図 2.4 はこれをブロック線図に示したものである。

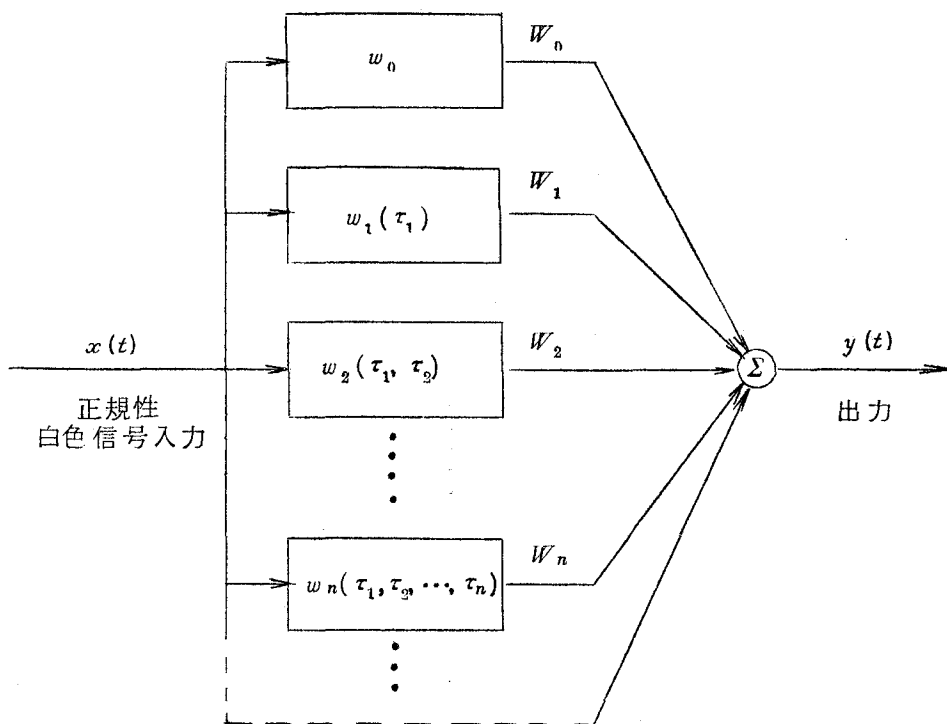


図 2.4 入力として正規性白色信号を受ける非線形システムの直交はん関数級数による表示

2.4 結 言

これまでに提案されている非線形システムに対する動特性測定法について検討し、内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにどのような点を解決すべきかを考察し、本研究の目的とするところをあきらかにした。

また非線形システムのはん関数による表示法について述べ、一般の非線形システムの入出力関係は Volterra (はん関数) 級数により表わされ、その動特性は Volterra 核により特徴づけられることを示した。またシステムへの入力信号が正規性白色信号である場合には上述のボルテラ級数は直交化することができ、システムは Wiener の直交はん関数級数により表わされ、動特性は Wiener 核により特徴づけられることを示した。

第 2 章の参考文献

- 1) K.S.P.Kumar : Identification of Nonlinear, Nonstationary Processes; IFAC Tokyo Symposium, pp. 4.12~4.21 (1965)
- 2) I.E.Diamesis : On the determination of the Parameter of Certain Nonlinear Systems ; Proc. IEEE, Vol. 53, №3, pp. 319~320 (1965)
- 3) 藤井, 伊藤, 喜多 : リミットサイクルによる制御系動特性の測定法 ; 計測と制御, 7巻, 4号, pp. 24~33 (昭43)
- 4) K.S.Narendra & P.G.Gallman : An Iterative Method for the Identification on Nonlinear Systems Using a Hammerstein Model ; 1966 Joint Automatic Control Conference, pp. 634~638 (1966)
- 5) G.J.Kirwin : The Use of a Growing Exponential for System Identification ; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, №1, p. 108 (1967)
- 6) 古谷, 鈴木, 藤井 : 多項式近似による非線形システムの動特性推定 ; 計測自動制御学会論文集, 6巻, 4号, pp. 356~365 (昭45)
- 7) P.Eykhoff : Some Fundamental Aspects of Process Parameter Estimation ; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-8, №4, pp. 347~357 (1963)
- 8) R.J.Roy & J.Sherman : A Learning Technique for Volterra Series Representation ; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, №6, pp. 761~764 (1967)
- 9) M.Schetzen : Measurement of the Kernels of a Non-Linear System of Finite Order ; International Journal of Control, Vol. 1, №3, pp. 251~263 (1965)
- 10) A.G.Bose : A Theory of Nonlinear Systems ; M.I.T. Research Lab. Electronics, Tech. Rept. 309 (1956)
- 11) H.E.Singleton : Theory of Nonlinear Transducers ; M.I.T. Research Lab. Electronics, Tech. Rept. 160 (1950)
- 12) N.Wiener : Nonlinear Problems in Random Theory ; M.I.T. Press and John Wiley & Sons (1958)
- 13) Y.W.Lee & M.Schetzen : Measurement of the Wiener Kernels of a Non-linear System by Cross-correlation ; International Journal of Control, Vol. 2, №3, pp. 237~254 (1965)
- 14) 中尾 : はん関数を用いた非線形システムの動特性測定法 (研究紹介) ; システムと制御, 15巻, 5号, pp. 81~89 (昭46)
- 15) J.F.Barrett : The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems ; J.of Electronics and Control, Vol. 15, №6, pp.567~615 (1963)

- 16) V. Volterra : Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations ; Dover Publications, New York (1959)
- 17) 宮川, 佐藤, 茅 : 不規則信号論と動特性推定 ; p 84, コロナ社 (昭44)

第 3 章 Volterra 級数を用いた非線形システムの 動特性測定法

第 3 章 Volterra 級数を用いた非線形システムの 動特性測定法

3.1 緒 言

前章において一般の非線形システムの入出力関係は Volterra 級数で表わされることを示したが、本章ではこの Volterra 級数をモデルとして用いて内部構造が未知の非線形システムの動特性を Volterra 核の応答波形の形で測定する^{1)~3)}方法について提案する。動特性測定に用いるモデルとして定位性を有するシステムのみならず、無定位性を有するシステムをも含むボルテラ級数モデルを導出する。動特性測定はまたこの Volterra 級数モデルの次数を決定することにより行なわれる。そのためにシステムとモデルの応答の差に関する 2 乗誤差面積なる評価関数（これはシステムの入出力データより簡単に計算することができる）を導入し、これを考慮してモデルの次数を決定する。ついでこの決定にもとづいてモデルを構成し、このモデルを用いてシステムの動特性を表わす Volterra 核を測定するものである。

3.2 測定対象

2.3.1 で一般の非線形システムの入出力関係は Volterra 級数を用いて

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

と表わせることを示したが、ここでは積分の核にある Volterra 核の物理的な意味について考察し、ここで取り扱う測定対象はその Volterra 核がどのような形を有するかについて考える。

1 次の Volterra 核 $h_1(\tau_1)$ はすでに述べたように線形系における荷重関数に相当し、システムへの入力信号のうち τ_1 時間過去の単位インパルス信号が現出力 $y(t)$ にどのような影響を及ぼすかを示したものである。2 次の Volterra 核 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ は τ_1 および τ_2 時間過去の 2 個の単位インパルス信号がたがいに連携して現出力にどのような影響を及ぼすかを示すものである。一般に n 次の Volterra 核 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ は $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 時間過去の n 個の単位インパルス信号がたがいに連携して現出力 $y(t)$ にどのような影響を及ぼすかを示すものである（図 3.1）。すなわち Volterra 核は過去における種々の時点の入力信号がたがいに連携して現出力にどのような影響を及ぼすかを示すものである。

実在のシステムではある程度以上過去の入力信号は現出力にほとんど影響を及ぼさないか、その影響の仕方が一定であると見なされる場合が多いと思われる。前者は定位性を有するシステムであり、その Volterra 核は T_s をある正の定数とすると、

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) = 0, \tau_j \geq T_s, (j=1, 2, \dots, n) \tag{3.2}$$

なる関係を満足している。後者はその Volterra 核が

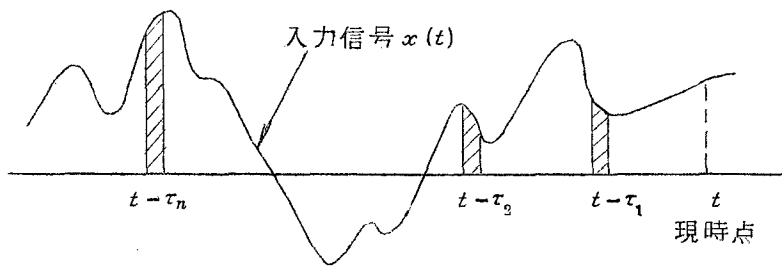
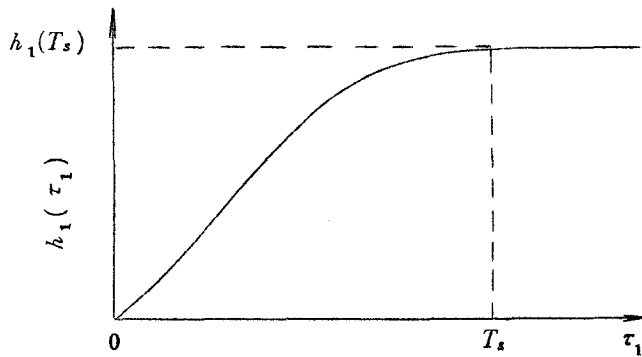


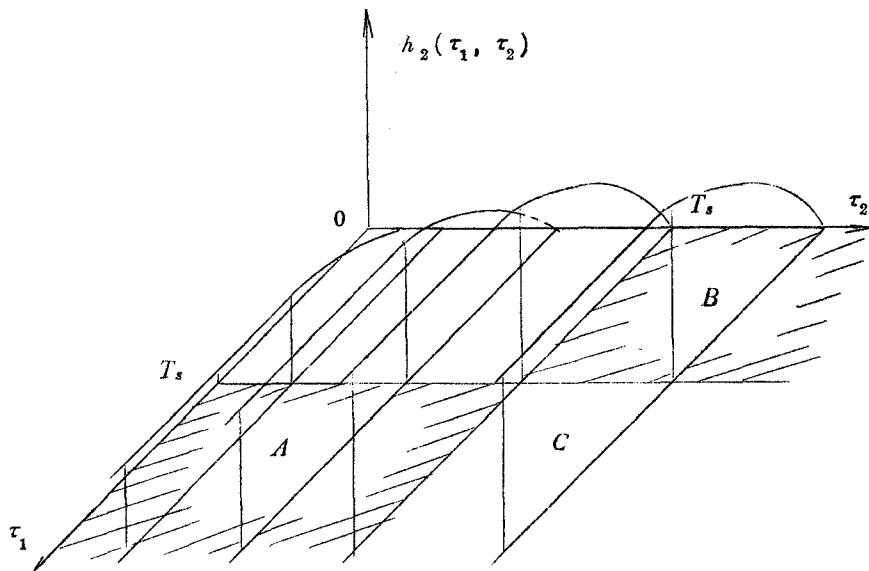
図 3.1 入力信号 $x(t)$ の過去における値

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) = h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, T_s, \dots, \tau_n), \tau_j \geq T_s \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

なる形の無定位性を有するシステムである。すなわち1次のVolterra核は図3.2(a)に示すようにI形の線形無定位システムのインパルス応答に相当し、2次のVolterra核は(b)に示すように領域Aにおいては τ_1 軸方向に、領域Bにおいては τ_2 軸方向に一定の値をとり、領域Cではその領域すべてで一定値をとるようなものである。以下高次のVolterra核も同様な形を有している。



(a)



(b)

- (a) 1 次 Volterra 核
- (b) 2 次 Volterra 核

図 3.2 式 (3.3) を満足する非線形無定位性システムの Volterra 核の波形

本章では上述のように実在のシステムでは多いと思われる定位性を有するシステムおよび式(3.3)の関係を満足する無定位性を有するシステムを測定対象として考える。なお式(3.3)において $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \approx 0$ とおくと式(3.3)は式(3.2)に等しいことより、定位性を有するシステムは式(3.3)の無定位性を有するシステムの特別な場合と考えることができる。

3.3 Volterra 級数モデル

システムの入出力関係を表わすVolterra級数は式(3.1)に示すように一般にそのたゞみこみ積分の積分区間が無限となり、実際にはこのまゝでは取り扱うことはできない。そこでなんらかの方法でこれを有限時間積分のものに変換する必要がある。以下積分区間が有限のVolterra級数モデルを構成することを考える。

3.3.1 定位性を有するシステムに対するモデル

システムが定位性を有する場合には、式(3.1)に式(3.2)のVolterra核に対する定位性の条件式を適用することにより

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (3.4)$$

なる関係が得られ、システムの入出力関係は有限時間積分のVolterra級数で与えられる。したがってシステムが定位性を有することがわかっている場合には式(3.4)をシステムのモデルとして用いればよい。

3.3.2 無定位性を有するシステムに対するモデル⁴⁾

システムが無定位性を有する場合にはその出力は過去にはいった入力すべての影響を受け、その入出力関係を表わすVolterra級数は必ずその積分区間が無限となり、そのまゝでは取り扱うことはできない。そこでこのシステムの動特性を過去の入力の影響を含めた形で表わし、その入出力関係を積分区間が有限のVolterra級数で表わすことを考える。そのため図3.3に示すような時間 $-T_s$ 以前の値(図3.3における波線部分)が未知の入力に対するシステムの応答について考察する。

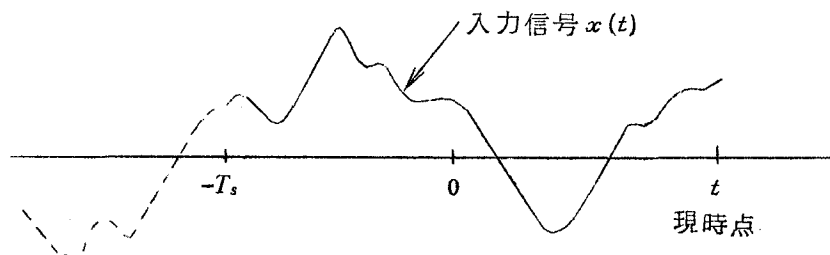


図 3.3 無定位性を有するシステムへの入力信号

時刻 t (≥ 0) におけるシステムの応答 $y(t)$ は積分区間が無限の式 (3.1) の Volterra 級数で表わされるが、この積分を未知入力によるものと、既知入力によるものとに分け、これに式 (3.3) の関係を適用すると、Volterra 級数の各項は

$$\begin{aligned}
 y_0(t) &= h_0 \\
 y_1(t) &= \int_0^{t+T_s} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_{t+T_s}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \int_0^{t+T_s} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + h_1(T_s) \int_{t+T_s}^{\infty} x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \int_0^{t+T_s} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 + h_1(T_s) \cdot S_x \left(\text{ただし } S_x = \int_{t+T_s}^{\infty} x(t-\tau_1) d\tau_1 \right) \\
 y_2(t) &= \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\quad + 2 \int_0^{t+T_s} h_2(\tau_1, T_s) x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot S_x \\
 &\quad + h_2(T_s, T_s) \cdot S_x^2 \\
 &\quad \vdots \\
 y_n(t) &= {}_n C_0 \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \cdots \int_0^{t+T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\
 &\quad + {}_n C_1 \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}, T_s) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots \\
 &\quad \quad x(t-\tau_{n-1}) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{n-1} \cdot S_x \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + {}_n C_{n-1} \int_0^{t+T_s} h_n(\tau_1, T_s, \dots, T_s) x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot S_x^{n-1} \\
 &\quad + {}_n C_n h_n(T_s, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^n \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

となる。これらの各項の応答を入力 $x(t-\tau)$ に関して同じべきの項を集めて書き直すと

$$\begin{aligned}
 y'_0(t) &= h_0 + h_1(T_s) \cdot S_x + h_2(T_s, T_s) \cdot S_x^2 + \cdots + h_n(T_s, T_s, \dots, T_s) S_x^n + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n(T_s, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^n \\
 y'_1(t) &= \int_0^{t+T_s} \{ h_1(\tau_1) + 2 h_2(\tau_1, T_s) \cdot S_x + \cdots + n \cdot h_n(\tau_1, T_s, \dots, T_s) S_x^{n-1} + \cdots \} x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \int_0^{t+T_s} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} {}_n C_{n-1} h_n(\tau_1, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^{n-1} \right\} x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 y'_2(t) &= \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \left\{ h_2(\tau_1, \tau_2) + 3 \cdot h_3(\tau_1, \tau_2, T_s) \cdot S_x + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h_n(\tau_1, \tau_2, T_s, \dots, T_s) \right. \\
 &\quad \left. \times S_x^{n-2} \right\} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} {}_n C_{n-2} \cdot h_n(\tau_1, \tau_2, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^{n-2} \right\} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}$$

$$y_k'(t) = \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \cdots \int_0^{t+T_s} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} n C_{n-k} \cdot h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, T_s, \dots, T_s) \cdot S x^{n-k} \right\} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k$$

が得られる。ここで上式の積分の核を

$$\sum_{n=k}^{\infty} n C_{n-k} \cdot h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, T_s, \dots, T_s) \cdot S x^{n-k} = g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \quad (3.5)$$

とおくと、式(3.1)のVolterra級数は

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k'(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \cdots \int_0^{t+T_s} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &\triangleq \sum_{k=0}^{\infty} G_k[g_k; x(t'), -T_s \leq t' \leq t] \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。以上より積分区間が無限のVolterra級数は式(3.6)のように積分区間が有限のVolterra級数に変換され、時刻 $t \geq 0$ におけるシステムの挙動は $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) と $-T_s$ 以後のシステムへの入力により規定される。したがってシステムが無安定性を有するときには、式(3.6)をシステムのモデルとして用いればよく、システムの動特性はここで新しく定義したVolterra核 $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) により表わされる。ただし、このVolterra核は式(3.3)および式(3.5)より

$$g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_k) = g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, T_s, \dots, \tau_k), \tau_j \geq T_s, \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (3.7)$$

なる関係を満たしている。

式(3.6)のモデルは安定性を有するシステムに対するモデルを特別な場合として含んでいる。すなわち安定性の条件式(3.2)を式(3.5)に適用することにより、 $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ は

$$g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

となり、また $h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ は安定性の条件を満たしていることから式(3.6)は

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \cdots \int_0^{t+T_s} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \cdots \int_0^{T_s} h_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots \\ &\quad d\tau_k \end{aligned}$$

となる。これは安定性システムに対するモデル、式(3.4)と一致している。したがってシステムが安定性であるか、無安定性であるかに関係なく、システムのモデルとして式(3.6)のモデルを用いればよく、非線形システムの動特性測定はVolterra核 $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ の測定に帰することができる。

3.4 モデルの次数の決定および各項の応答の決定法^{4) 5)}

前節で非線形システムは式(3.6)のVolterra級数モデルで表わされることを示したが、その次数は一般に無限次となり、実際問題としてこのようなモデルを取り扱うことはできない。そこでなんらかの形でモデルの次数を有限次で打ち切らなければならない。モデルの次数はそのモデルが測定対象の特性を十分近似できるような値に決めるのが望ましい。以下モデルの次数をモデルの近似度に着目して決定する方法について述べるとともに、任意の入力信号に対するモデルの各項の応答を測定する方法についても述べる。

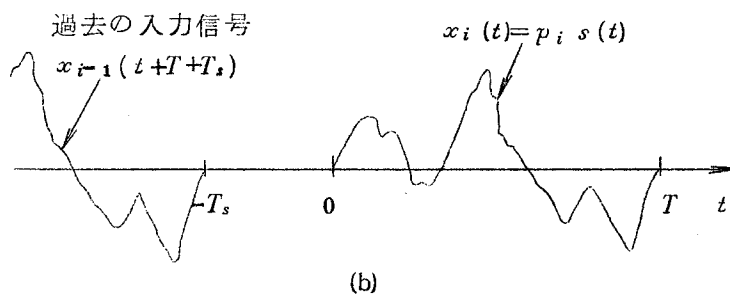
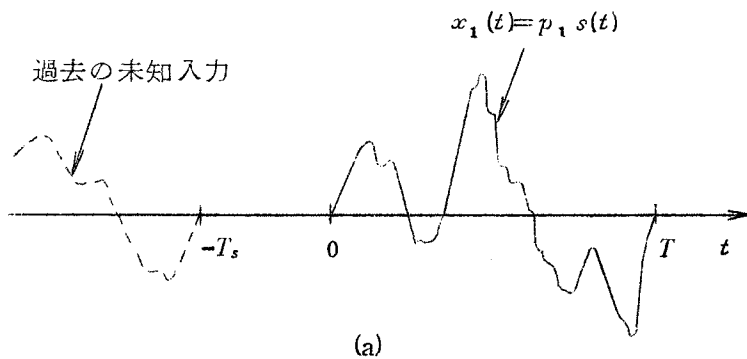
測定対象の動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号を $s(t)$ とする。 $s(t)$ は時間 $0 \leq t \leq T$ で定義されており、かつこの区間における積分値は

$$\int_0^T s(t) dt = 0 \quad (3.8)$$

を満足するものとする(あらかじめシステムが定位置性を有することがわかっている場合には $s(t)$ は式(3.8)を満足する必要はない)。測定対象へ

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t) \quad (i = 1, 2, \dots, L) \quad (3.9)$$

ただし $p_i : |p_i| \leq 1$ なる定数, L : 十分大なる整数なる入力を図3.4のように投入する。この L 個の入力は時間的に続けて投入するのであるが、説明の便宜上個々の入力の投入時点を $t = 0$ として話をする。最初の入力 $x_1(t)$ は測定対象が定常状態にあるときに、すなわち過去の未知入力が切れてから T_s 時間後に投入する(図3.4(a))。



(a) 入力信号 $x_1(t)$, (b) 入力信号 $x_i(t)$

図 3.4 入力信号 $x_i(t)$ の投入方法

この時のシステムの状態は式 (3.6) より

$$\begin{aligned} y(t)_{t=0} &= \sum_{k=0}^{\infty} y'_k(t)_{t=0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \cdots \int_0^{T_s} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(-\tau_1) x(-\tau_2) \cdots x(-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &= g_0 \end{aligned}$$

である (システムが定位性を有する場合には $y(t)_{t=0} = h_0$ となっている)。

つづいて投入する入力 $x_2(t), x_3(t), \dots, x_i(t), \dots, x_L(t)$ は直前の入力の影響が消え、システムがはじめの状態 g_0 (定位性を有する場合には h_0) に戻ったときに加えなければならない。入力 $x_1(t)$ を切った後 T_s 時間経過したときのシステムの出力は式 (3.6) から

$$\begin{aligned} y(t)_{t \geq T+T_s} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t-T}^t \int_{t-T}^t \cdots \int_{t-T}^t g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x_1(t-\tau_1) x_1(t-\tau_2) \cdots \\ &\quad x_1(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \end{aligned}$$

となり、積分の下限および上限はそれぞれ $t-T \geq T+T_s-T = T_s$ 、 $t \geq T+T_s$ であり、この区間では式 (3.7) から $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ は $g_k(T_s, T_s, \dots, T_s)$ に等しくなることより、上式は

$$y(t)_{t \geq T+T_s} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(T_s, T_s, \dots, T_s) \left\{ \int_{t-T}^t p_1 \cdot s(t-\tau) d\tau \right\}^k$$

と書きかえられる。入力 $s(t)$ に対する式 (3.8) の関係を用いると

$$y(t)_{t \geq T+T_s} = g_0$$

となる (システムが定位性を有する場合には $g_k(T_s, T_s, \dots, T_s)$ が

$$g_k(T_s, T_s, \dots, T_s) = h_k(T_s, T_s, \dots, T_s) \simeq 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

なる関係を満足するため、式 (3.8) に関係なく

$$y(t)_{t \geq T+T_s} = h_0$$

となる)。以上より入力 $x_1(t)$ が切れてから T_s 時間後にシステムの状態ははじめの状態に復帰している。したがってつづく入力 $x_2(t)$ は $x_1(t)$ を切った後 T_s 時間経過してから投入すればよい。以下 $x_3(t), \dots, x_i(t), \dots, x_L(t)$ に関しても同様である (図 3.4 (b))。

つきにこれらの L 個の入力に対するシステムの応答について考察する。入力 $x_i(t)$ に対するシステムの応答を $y(p_i, t)$ とすると式 (3.6) から

$$\begin{aligned} y(p_i, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) p_i \cdot s(t-\tau_1) p_i \cdot s(t-\tau_2) \cdots \\ &\quad p_i \cdot s(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_i^k \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) s(t-\tau_1) s(t-\tau_2) \cdots s(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots \\ &\quad d\tau_k = \sum_{k=0}^{\infty} G_k[g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p_i^k \quad (i = 1, 2, \dots, L) \quad (3.10) \end{aligned}$$

が得られる。上式において $G_k[g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ は入力信号 $s(t)$ に対する Volterra 級数の k 項目の応答を表わしている。これを決定するため Volterra 級数の次数を N と仮定して、

式 (3.1 0) と同形のモデル

$${}^N y(p_i, t) = \sum_{k=0}^N {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p_i^k \quad (3.1 1)$$

を導入し、このモデルの応答と測定対象の応答の差に関する評価関数

$$J_N = \sum_{i=1}^L \left\{ y(p_i, t) - \sum_{k=0}^N {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p_i^k \right\}^2 \quad (3.1 2)$$

が最小となるように ${}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ を決定する。 J_N を最小とする ${}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ の値は

$${}^N G^* = (P^T P)^{-1} P^T Y \quad (3.1 3)$$

ただし

$${}^N G^* = \begin{bmatrix} {}^N G_0^* [{}^N g_0^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] \\ {}^N G_1^* [{}^N g_1^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] \\ \vdots \\ {}^N G_N^* [{}^N g_N^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1^0 & p_1^1 & p_1^2 & \cdots & p_1^N \\ p_2^0 & p_2^1 & p_2^2 & \cdots & p_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_L^0 & p_L^1 & p_L^2 & \cdots & p_L^N \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(p_1, t) \\ y(p_2, t) \\ \vdots \\ y(p_L, t) \end{bmatrix}$$

T : 転置を表わす

で与えられる。 P はあらかじめ設定した値であり、また Y は測定値であるから式 (3.1 3) を計算することにより入力 $s(t)$ に対する N 次のボルテラ級数モデルの各項の応答 ${}^N G^*$ を決定することができる。上で仮定したモデルの次数 N が適当であればこの ${}^N G^*$ を用いて式 (3.1 1) から計算したモデルの応答 ${}^N y^*(p_i, t)$ ($i=1, 2, \dots, L$) と、実際のシステムの応答 $y(p_i, t)$ ($i=1, 2, \dots, L$) とはほぼ一致するはずである。これらがどの程度一致しているかを示す評価関数として測定対象の応答で正規化した 2 乗誤差面積

$$E_N = \frac{\int_0^T \left[\sum_{i=1}^L \left\{ y(p_i, t) - \sum_{k=0}^N {}^N G_k^* [{}^N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p_i^k \right\}^2 \right] dt}{\int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^L y^2(p_i, t) \right\} dt} \quad (3.1 4)$$

を導入する。上で仮定した N に対してこの E_N を計算し、その値がある許容値 ϵ (≥ 0) よりも小さくなれば、Volterra 級数モデルの項数 N は適当であったと判定する。この評価関数 E_N はモデルの項数 N に関して単調減少関数となり、 N を増加すればいくらかでも E_N を小さくすることができる。また $N \rightarrow \infty$ においては ${}^N G_k^* [{}^N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ は真値 $G_k [g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ に一致する (付録 3.1 参照)。

モデルの項数 N が適当であると判断されると、式 (3.1 3) ですでに計算されている ${}^N G^*$ は入力信号 $s(t)$ に対するこの有限次の Volterra 級数モデルの各項の応答を与えている。また任意の入力に対する Volterra 級数モデルの各項の応答も、 $s(t)$ をその入力波形として式 (3.9) の入力に対する測定対象の応答 $y(p_i, t)$ を測定し、モデルの次数を上で決められた値にして、式 (3.1 3) を解くことにより求めることができる⁵⁾。

3.5 Volterra核の測定法

3.5.1 直接法^{5) 6)}

2.3.1においても述べたようにVolterra核は線形系におけるような単なるインパルス応答の形では得ることはできず、一般化されたたゞみこみ積分のインパルス応答として得られる。そのためにもまずVolterra級数の各項の応答よりk次元の一般化たゞみこみ積分

$$G_k [g_k; s_1(t') s_2(t') \dots s_k(t'), 0 \leq t' \leq t]$$

$$= \int_0^t \int_0^{t'} \dots \int_0^{t'} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) s_1(t-\tau_1) s_2(t-\tau_2) \dots s_k(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

(k=1, 2, \dots, N) \quad (3.15)

を求めることを考える。G₁[g₁; s₁(t'), 0 ≤ t' ≤ t] は入力 s₁(t) に対する1次の項の応答そのものである。G₂[g₂; s₁(t') s₂(t'), 0 ≤ t' ≤ t] は

$$\{ (s_1 + s_2)^2 - s_1^2 - s_2^2 \} / 2! = s_1 s_2$$

なる関係式⁽⁷⁾を利用して

$$\{ G_2 [g_2; s_1(t') + s_2(t'), 0 \leq t' \leq t] - G_2 [g_2; s_1(t'), 0 \leq t' \leq t] - G_2 [g_2; s_2(t'), 0 \leq t' \leq t] \} / 2! = G_2 [g_2; s_1(t'), 0 \leq t' \leq t]$$

(3.16)

より求めることができる。すなわち入力 s₁(t) + s₂(t), s₁(t), s₂(t) に対するVolterra級数の2次の項の応答を用いて計算することができる。同様に3次元の一般化たゞみこみ積分は

$$\{ (s_1 + s_2 + s_3)^3 - (s_1 + s_2)^3 - (s_2 + s_3)^3 - (s_3 + s_1)^3 + s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \} / 3! = s_1 s_2 s_3$$

なる関係式を利用して

$$\{ G_3 [g_3; s_1(t') + s_2(t') + s_3(t'), 0 \leq t' \leq t] - G_3 [g_3; s_1(t') + s_2(t'), 0 \leq t' \leq t] - G_3 [g_3; s_2(t') + s_3(t'), 0 \leq t' \leq t] - G_3 [g_3; s_3(t') + s_1(t'), 0 \leq t' \leq t] + G_3 [g_3; s_1(t'), 0 \leq t' \leq t] + G_3 [g_3; s_2(t'), 0 \leq t' \leq t] + G_3 [g_3; s_3(t'), 0 \leq t' \leq t] \} / 3! = G_3 [g_3; s_1(t') \cdot s_2(t') \cdot s_3(t'), 0 \leq t' \leq t]$$

(3.17)

より計算することができる。一般にk次元の一般化たゞみこみ積分は

$$\{ G_k [g_k; s_1(t') + s_2(t') + \dots + s_k(t'), 0 \leq t' \leq t] - \{ G_k [g_k; s_1(t') + s_2(t') + \dots + s_{k-1}(t'), 0 \leq t' \leq t] + \dots \} + \dots + (-1)^{k-1} \{ G_k [g_k; s_1(t'), 0 \leq t' \leq t] + G_k [g_k; s_2(t'), 0 \leq t' \leq t] + \dots \} \} / k! = G_k [g_k; s_1(t') s_2(t') \dots s_k(t'), 0 \leq t' \leq t]$$

(3.18)

なる関係を用いて計算することができる。

つきにこれらの関係式を利用して一般にk次のVolterra核を測定する方法について述べる。測定のための入力として

$$s_i(t) = u(t - T_i) = \begin{cases} 1 & (t \geq T_i) \\ 0 & (t < T_i) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (3.19)$$

ただし T_i : おくれ時間

を用いる。これらの入力に対する式(3.18)の左辺の各項の応答を3.4で述べた方法により決定する。その結果を用いて式(3.18)を計算すると

$$NG_k^* [N g_k^*; u(t' - T_1) u(t' - T_2) \dots u(t' - T_k), 0 \leq t' \leq t]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t N g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) u(t-T_1-\tau_1) u(t-T_2-\tau_2) \cdots u(t-T_k-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \\
&= \int_0^{t-T_1} \int_0^{t-T_2} \cdots \int_0^{t-T_k} N g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \quad (3.20)
\end{aligned}$$

が得られる。式(3.20)は n 次元空間における $\tau_1 - T_1 = \tau_2 - T_2 = \cdots = \tau_n - T_n$ を満足する線上の値のみを示しているにすぎない。それゆえ T_1, T_2, \dots, T_n の種々の値に対して式(3.20)を計算することにより n 次元空間上のすべての点における値

$$N G_k^*(t_1, t_2, \dots, t_k) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_k} N g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \quad (3.21)$$

を求めることができる。式(3.21)を t_1, t_2, \dots, t_k に関して偏微分すると

$$\frac{\partial^k N G_k^*(t_1, t_2, \dots, t_k)}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_k} = N g_k^*(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (3.22)$$

が得られ、これが求める k 次のVolterra核である。

3.5.2 代数方程式法⁸⁾

3.4においてモデルの次数が決定されると同時に、システムの動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号 $s(t)$ に対するVolterra級数モデルの各項の応答 $N G_k^*[N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ ($k=0, 1, 2, \dots, N$)がすでに得られている。ここではこの各項の応答を用いてシステムの動特性を表わすVolterra核を測定することを考える。式(3.13)により決定されたVolterra級数モデルの各項の応答は入力 $s(t)$ に対して

$$\begin{aligned}
N G_k^*[N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] &= \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) s(t-\tau_1) s(t-\tau_2) \cdots \\
&\quad s(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

なる関係を有している。上式の形の積分方程式を厳密に解く方法は現在のところ見い出されていないので、上式を代数方程式で近似し、デジタル計算機を用いて解くことを考える。これは最近の電子計算機の目覚ましい発達を考えると非常に有効な方法であると思われる。

式(3.23)を図3.5に示すように離散値幅 Δ で離散値表示すると

$t = r \cdot \Delta$ において

$$\begin{aligned}
N G_k^*(r) &\approx \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \cdots \sum_{i_k=1}^r N g_k^*_{i_1, i_2, \dots, i_k} r^{s_{i_1}} \cdot r^{s_{i_2}} \cdots r^{s_{i_k}} \Delta^k \\
&\quad (k=0, 1, 2, \dots, N) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

たゞし

$$\begin{aligned}
N G_k^*(r) &= N G_k^*[N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq r\Delta] \\
N g_k^*_{i_1, i_2, \dots, i_k} &= N g_k^*[(i_1 - \frac{1}{2})\Delta, (i_2 - \frac{1}{2})\Delta, \dots, (i_k - \frac{1}{2})\Delta] \\
r^{s_{i_k}} &= s[(r - i_k + \frac{1}{2})\Delta]
\end{aligned}$$

となる。Volterra核 $N g_k^*_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ は変数 i_1, i_2, \dots, i_k に関して対称性を示すから(付録3.2参照)、これを利用して対称な核のすべての和をあたらしく $N g_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ とおき式(3.24)を書きなおすと、

$$NG_k^*(r) \approx \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} NG_{i_1, i_2, \dots, i_k}^* r^{s_{i_1}} \cdot r^{s_{i_2}} \dots r^{s_{i_k}} \Delta^k$$

($k=0, 1, 2, \dots, N$) (3.25)

が得られる。ただし上式における $NG_{i_1, i_2, \dots, i_k}^*$ は式 (3.7) から

$$NG_{i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_k}^* = NG_{i_1, i_2, \dots, M, \dots, i_k}^* \quad i_j \geq M \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

(3.26)

($M : M-1 < T_s/\Delta \leq M$ なる整数)

なる関係を満足している。したがって入力 $r s_M$ として新しく

$$r s_M = \sum_{i=M}^r r s_i$$

(3.27)

を定義すると、式 (3.25) は

$$NG_k^*(r) \approx \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} NG_{i_1, i_2, \dots, i_k}^* r^{s_{i_1}} \cdot r^{s_{i_2}} \dots r^{s_{i_k}} \Delta^k$$

($k=0, 1, 2, \dots, N$) (3.28)

のように書くことができる。式 (3.28) において $r s_i$ は投入入力で既知であり、 $NG_k^*(r)$ は式 (3.13) ですでに計算されているので、時点 r を測定パラメータ $NG_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ の個数 ($M(M+1)\dots(M+k-1)/k!$) だけ変化させて連立 1 次方程式をつくり、これを未知数 $NG_{i_1, i_2, \dots, i_k}^*$ に関して解くことにより測定対象の特性を表わす Volterra 核を決定することができる。

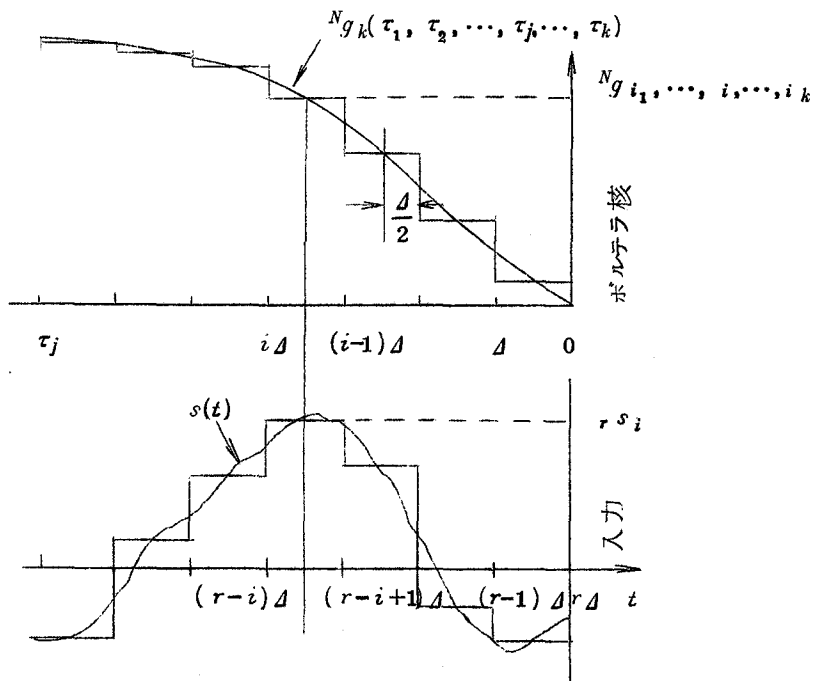


図 3.5 Volterra 核と入力の離散値表示

3.5.3 直接法と代数方程式法との比較、検討

Volterra核の測定の方法として、直接法と代数方程式法の二つの方法を提案したが、ここでは両者の得失について考察する。

投入する入力信号に関しては、直接法ではVolterra級数モデルの次数の決定のための入力信号のほかに、Volterra核の測定のために新しく種々の入力信号を投入しなければならないが、代数方程式法ではモデルの次数の決定の際に得られたVolterra級数モデルの各項の応答を用いてVolterra核を決定するため、別にあらためて入力信号を投入する必要はない。

また測定された応答波形を用いて実際にVolterra核を決定する段階では直接法では一般化した λ みこみ積分を計算するための簡単な算術演算(式(3.18)の計算)と式(3.22)の微分演算ですむが、代数方程式法では連立1次方程式を解かなければならない。これは逆マトリクスの計算に帰されるが、モデルの次数が高次の場合とか、離散値幅 Δ を小さくとり分割点数 M を増すと逆マトリクスの演算が面倒になり、計算機の演算時間が急激に増大してくる。また必要な記憶容量もぼう大なものとなる。すなわち分割点数の数を M とすると k 次のVolterra核を計算するのに必要な計算機の記憶容量は測定すべきパラメータ個数が $M(M+1)\cdots(M+k-1)/k!$ 個であることから

$$(\text{計算機の記憶容量}) = \{ M(M+1)\cdots(M+k-1)/k! \}^2$$

で与えられる。

3.6 実際上の問題に対する考察

以上述べた方法により非線形システムの動特性を測定することができるが、その際測定対象は3.2において述べたようにそのVolterra核は式(3.3)の関係を満足していなければならない。したがって本測定法を実際に適用する場合に、あらかじめ測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうか調べる必要がある。

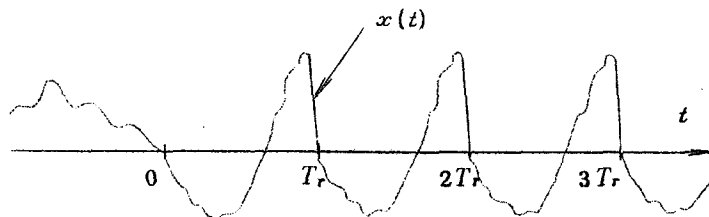


図 3.6 測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうかを調べるための入力信号

そのため図3.6に示すような $t \geq 0$ で周期性があり(周期 T_r)、かつその1周期にわたる積分値が0となる入力信号を考える。この入力信号に対するシステムの応答とそのシステムのVolterra核に関して次のような関係が成立する。すなわち上述の条件を満たす任意の入力信号に対してシステムの応答が常に

$$t \geq T_r \text{ を満足するすべての } t \text{ に対して } y(t) = y(t + T_r) \quad (3.29)$$

となれば、システムのVolterra核は

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \tau_n) = h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, T_s, \dots, \tau_n), \tau_j \geq T_s \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

なる形を有する(付録3.3参照)。これより測定対象が式(3.3)を満足するかどうかは、上の条件を満たす種々の入力信号に対する測定対象の応答を測定し、式(3.29)を満足する T_s が常に見いだせるかどうかにより判定することができる。これは種々の入力信号について調べなければならないが、システムが式(3.3)の関係を満足していないにもかかわらず、式(3.29)の関係が成立するのは入力信号がごく特別な形をしている時のみであるので、実際には2, 3種類の入力信号について確かめれば十分であろう。以上の方法により測定対象が式(3.3)を満足するかどうかを確かめられるが、それと同時に T_s の値も知ることができる。

3.7 測定例

3.7.1 直接法による測定例

[例1] 測定対象として非線形微分方程式

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.8 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 = x(t) \quad (3.30)$$

で表わされるシステムを考える。式(3.30)において $x(t)$ はシステムに加わる入力、 $y(t)$ はシステムの出力を表わしている。このシステムの構造に関してはなんら先験的な情報は得られていず、たゞ入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のみが測定できるものとする。

動特性測定に先だち測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうかを3.6に述べた方法により確かめる。その結果測定対象は式(3.3)を満足し、 $T_s \approx 14$ (sec)であることがわかる。まずモデルの次数を決めるため最小パルス幅 $\Delta = 0.5$ (sec)、周期 $T = (2^9 - 1)\Delta = 255.5$ (sec)の加算 m 系列信号⁹⁾を $s(t)$ として用いる。この信号の平均値および分散をそれぞれ0および1にとる。入力の個数 L を10、 $p_i = \pm 1.0, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4, \pm 0.2$ として測定対象へ

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t)$$

なる入力を投入し、その出力 $y(p_i, t)$ を測定する。この測定結果を用いて種々の N に対して NG^* を計算し(式(3.13)を用いる)、ついでこの値を式(3.14)に代入して、モデルの次数 N が適当であるかどうかを判定する評価関数 E_N を計算する。種々の N に対する E_N の計算結果を表3.1に示す。許容値 e が $e = 0.3 \times 10^{-2}$ と与えられたとすると、モデルの次数は2次で十分であることがわかる。つぎに3.5.1の方法を用いてステップ信号に対する1次のたゞみこみ積分、

$$\int_0^t g_1^*(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (3.31)$$

と、おくれ時間 T_1, T_2 の二つのステップ信号に対する2次元

表3.1 モデルの次数を決めるための評価関数 E_N の計算値

N	E_N
1	0.131×10^0
2	0.245×10^{-2}
3	0.321×10^{-3}
4	0.161×10^{-4}
5	0.158×10^{-5}
6	0.957×10^{-7}

の一般化されたたゞみこみ積分

$$\int_0^t \int_0^{t-\tau_1} {}_2g_2^*(\tau_1, \tau_2) u(t-T_1-\tau_1) u(t-T_2-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_0^{t-T_1} \int_0^{t-T_2} {}_2g_2^*(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.32)$$

を測定する。式(3.31)の測定結果を t に関して微分することにより1次のVolterra核が得られる。1次のVolterra核の測定値を図3.7に示す。

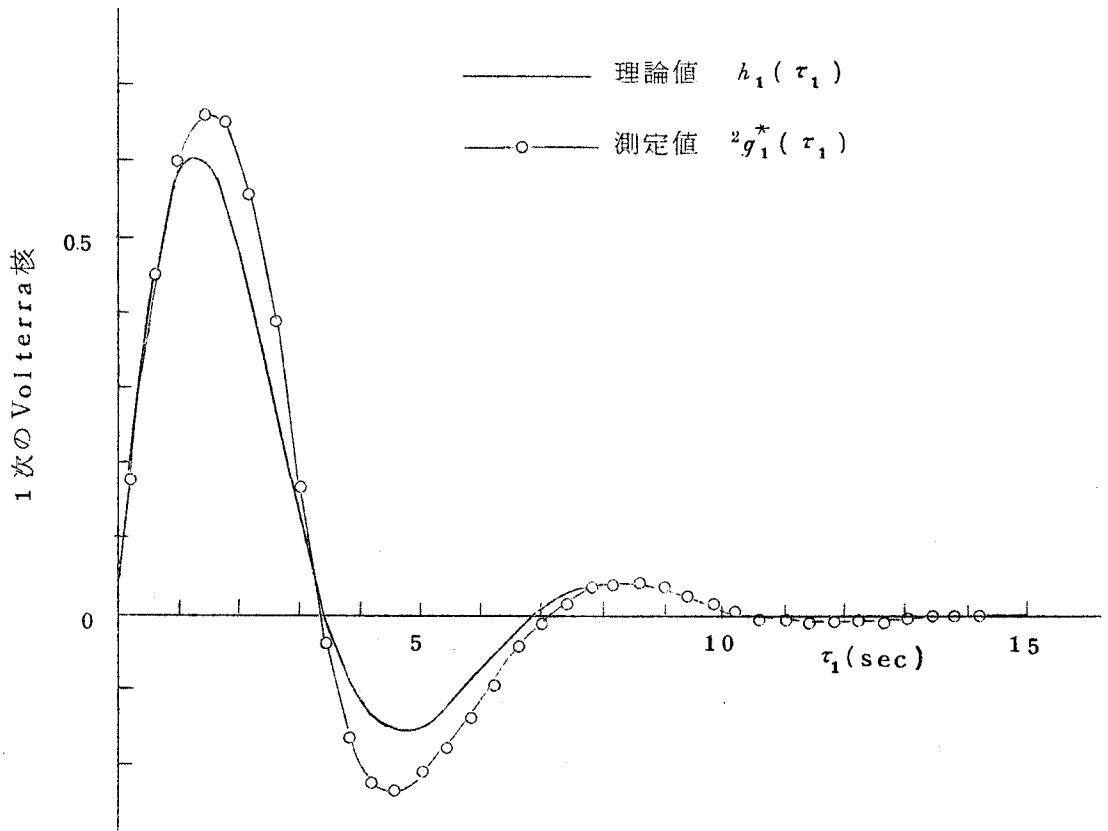


図3.7 1次のVolterra核の理論値と測定値

2次のVolterra核は T_1, T_2 を種々の値に設定して式(3.32)を測定し、2次元空間の全領域における値

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} {}_2g_2^*(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

を求め、これを t_1, t_2 に関して偏微分することにより求められる。2次のVolterra核の測定値を図3.8に示す。1次のVolterra核の理論値¹⁰⁾を図3.7にあわせて示し、 $\tau_1 = \tau_2$ 線上における2次のVolterra核の理論値¹⁰⁾および測定値を図3.9に示す。図より両者の応答はほぼ一致していることがわかる。

[例2] 測定対象として図3.10に示した非線形サーボ系を考える。

増幅器は

$$f[e(t)] = \tanh 2e(t)$$

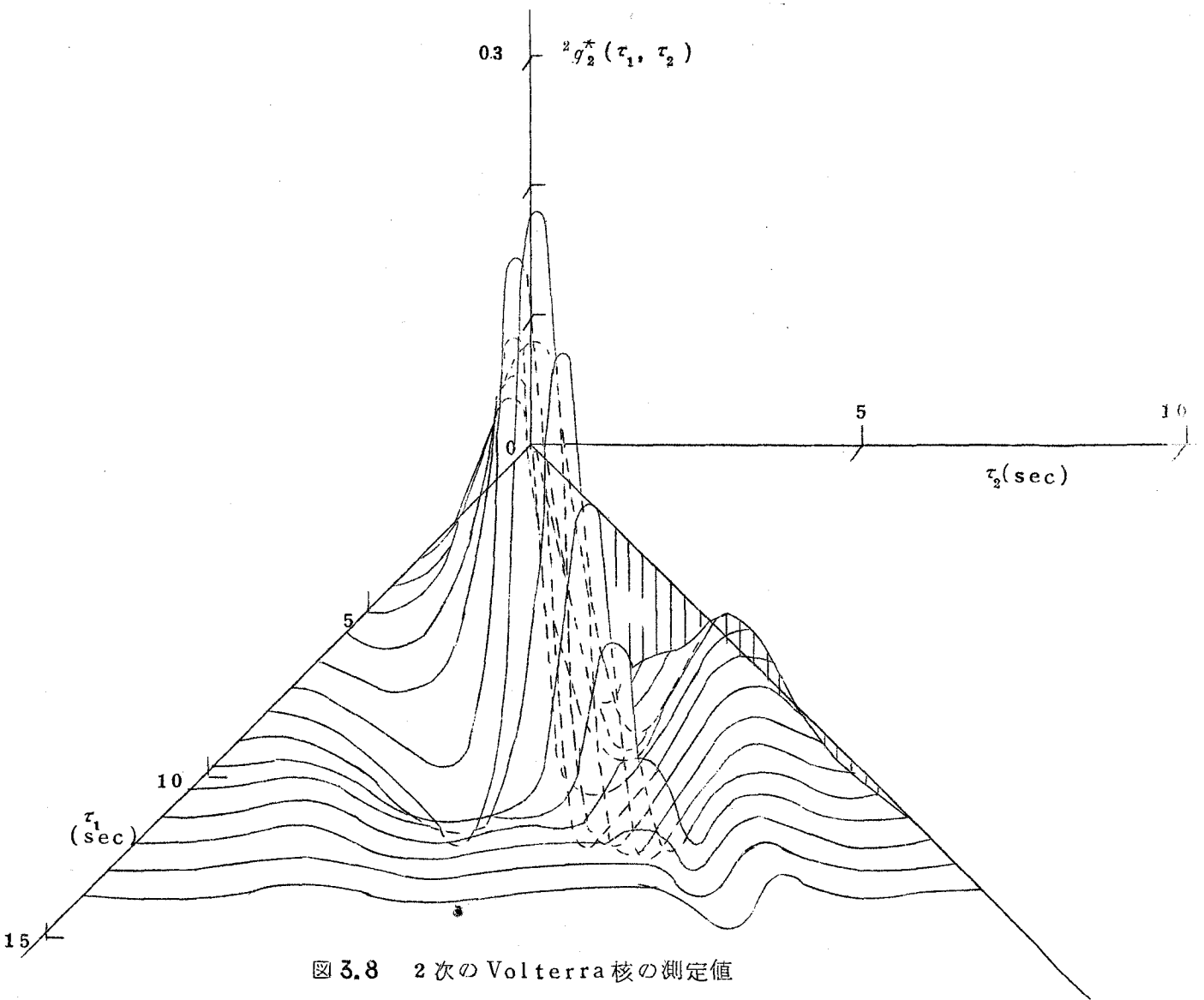


図 3.8 2 次の Volterra 核の測定値

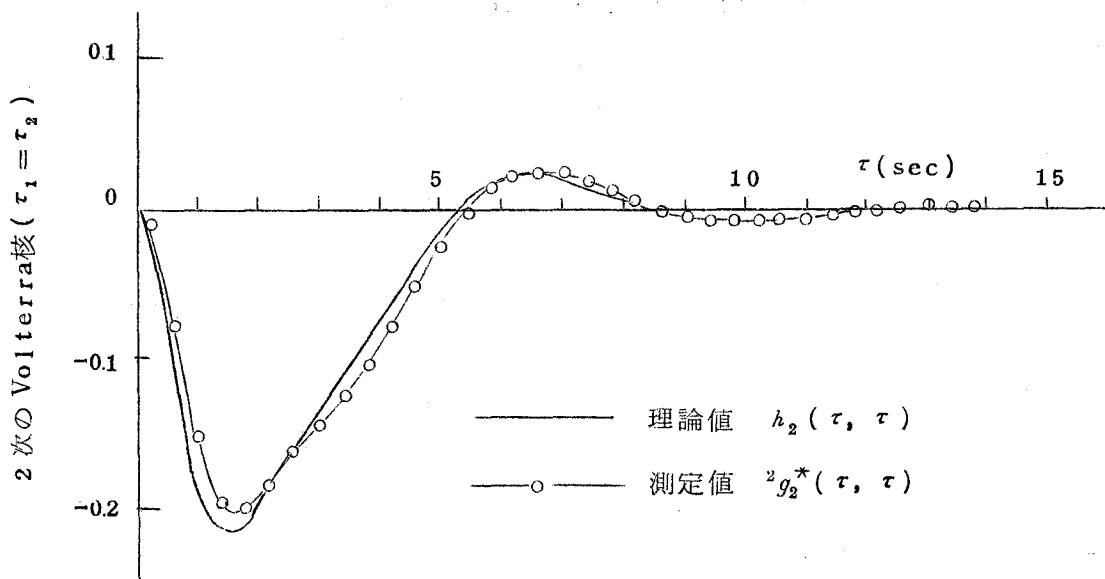


図 3.9 $\tau_1 = \tau_2$ 線上の 2 次の Volterra 核の測定値と理論値

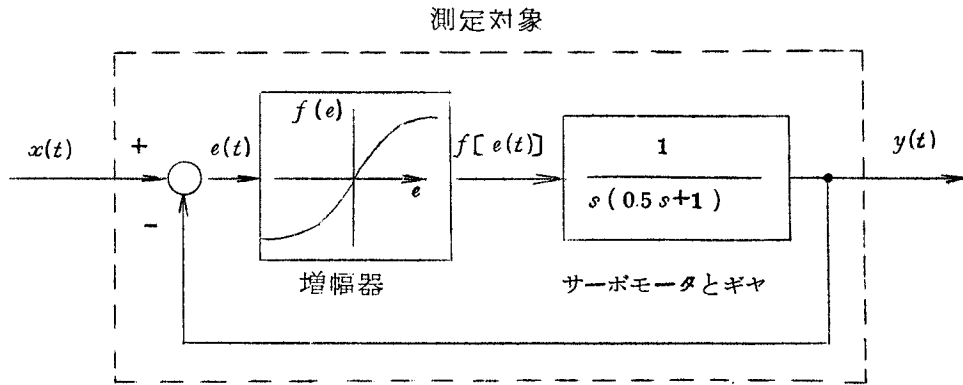


図 3.1 0 測定対象

なる飽和特性を示し、モータとギヤは

$$G(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)}$$

な特性を有するとする。システムの入出力間には

$$e(t) = x(t) - y(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} = 2 \tanh 2 e(t)$$

なる関係がある。このシステムの破線内の構造に関してはあらかじめなんらの情報も得られていないとして動特性測定を行なう。

まず 3.6 の方法によりこのシステムが測定対象に対する条件式 (3.3) を満足するかどうかを調べる。その結果測定対象に対する条件を満足し、 T_s がほぼ 6 秒であることがわかる。モデルの次数 N を決めるため例 1 と同じく $s(t)$ として最小パルス幅 $\Delta = 0.2$ (sec), 周期 $T = (2^9 - 1)\Delta = 102.2$ (sec), 平均値 0, 分散 0.25 の加算 m 系列信号を用いる。投入入力個数 L , 定数 p_i を例 1 と同じ値に選び、測定対象へ $x_i(t) = p_i \cdot s(t)$ なる入力を投入しその出力 $y(p_i, t)$ を測定する。この測定結果を用いてモデルの次数 N を決定する評価関数 E_N を計算すると表 3.2 のようになる。許容値 e が例 1 と同じように

表 3.2 モデルの次数を決めるための評価関数 E_N の計算値

$e = 0.3 \times 10^{-2}$ で与えられたとすると表よりモデルの次数を 3 次にすれば十分であることがわかる。つぎにこの 3 次のモデルを用い、3.5.1 の方法により 1 次, 2 次, 3 次の Volterra 核を測定する。1 次の Volterra 核の測定値および理論値を図 3.11 に示す。2 次の Volterra 核の測定値はほぼ 0 に等しくなり理論値が奇数次のみしか値をもたないことと一致している。3 次の Volterra 核の測定値の一部を図 3.12 に示す。3 次の Volterra 核の理論値は簡単には計算することはできないのでここで得られた結果の良否を検討することはできないが、許容

N	E_N
1	0.291×10^{-1}
2	"
3	0.113×10^{-2}
4	"
5	0.338×10^{-1}
6	"

値 $e = 0.3 \times 10^{-2}$ の範囲内で正確に求められていることは保証されている。実際にここで得られた測定結果を用いてデジタル計算機により 3 次のモデルを構成し¹⁾、このモデルとシステムに最小パルス幅 0.2 秒の 6 段の M 系列信号を低域ろ波器 $G(s) = \frac{1}{s+1}$ に通した信号を投入し、

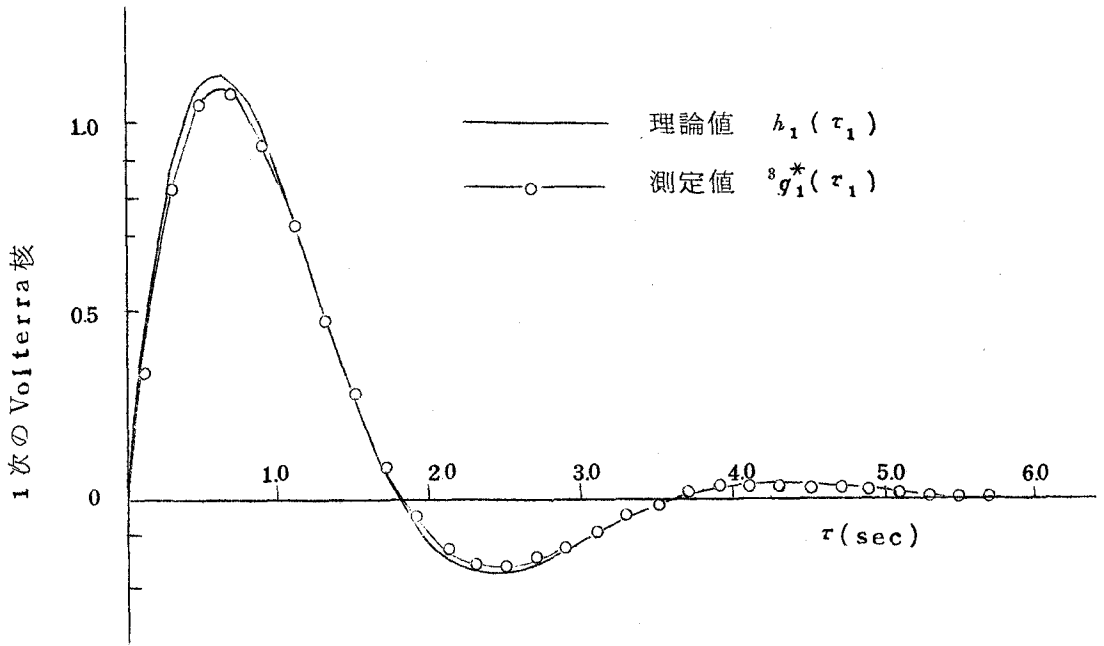


図 3.1 1 1 次 Volterra 核の測定値と理論値

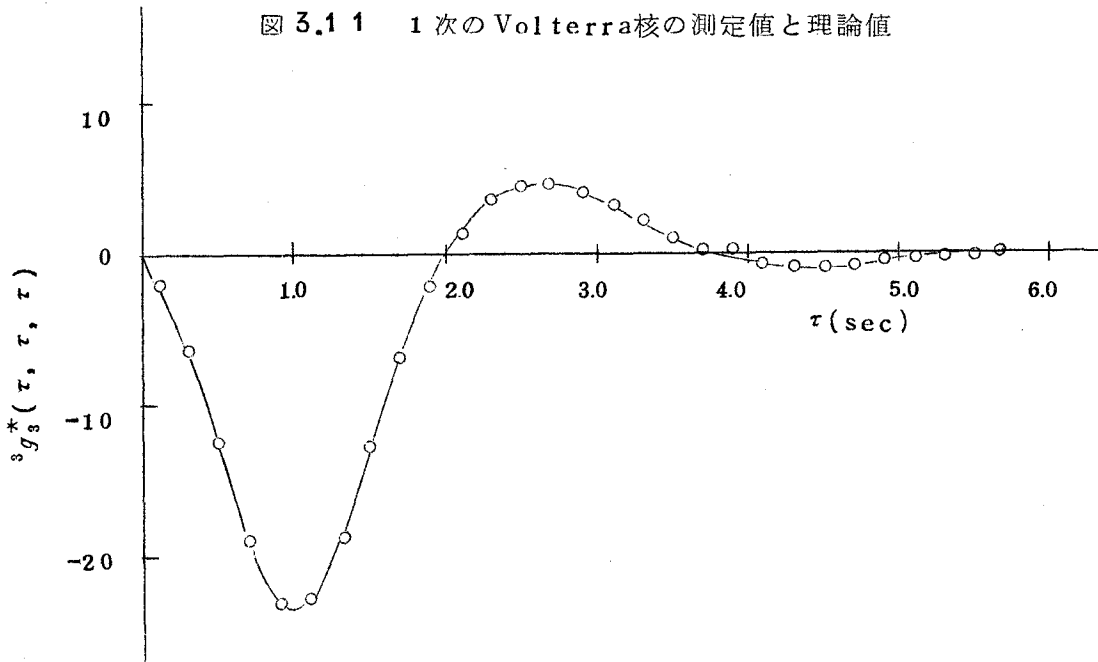


図 3.1 2 $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ 線上における 3 次 Volterra 核の測定値

それぞれの出力を測定すると図 3.1 3 のようになる。これからもここで得られたモデルと測定対象とはほぼ一致していることがわかる。

3.7.2 代数方程式法による測定例

【例 1】 測定対象として図 3.1 4 に示す非線形システムを考える。

このシステムの Volterra 核の理論値は簡単に計算することができ、

$$h_1(\tau_1) = e^{-2\tau_1}, \quad h_2(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\tau_1 + \tau_2)} \quad (3.33)$$

となる。動特性測定は破線内の構造が全くわからないとして行なう。

まず 3.6 の方法により測定対象は式 (3.3) の条件を満足し、 $T_s = 4.5$ (sec) であることが

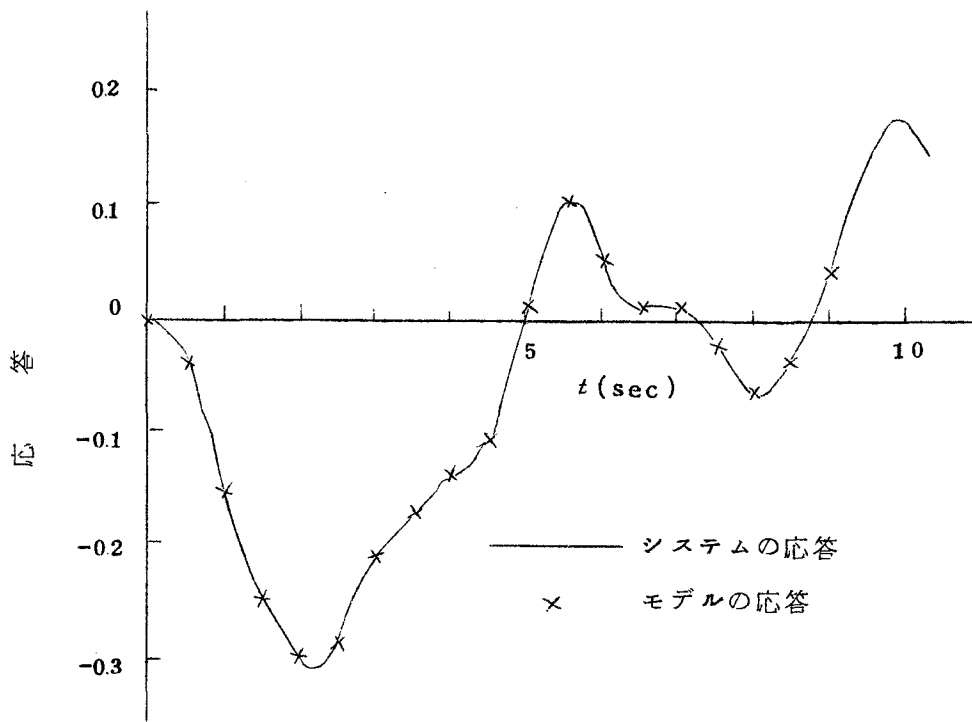


図 3.1 3 低減ろ波された m 系列信号に対するシステムとモデルの応答

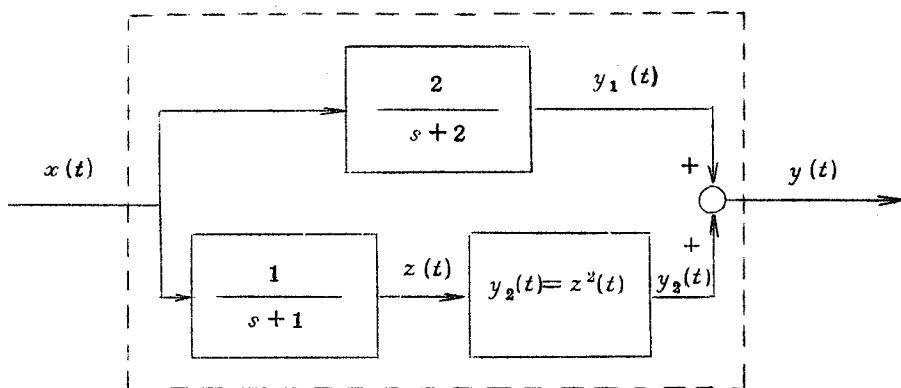


図 3.1 4 測定対象

わかる。動特性測定のための入力信号 $s(t)$ として最小パルス幅が 0.5 秒，周期 T が $T = (2^9 - 1)\Delta = 255.5$ (sec) の加算 m 系列信号を用いる。またこの信号の平均値および分散を 0 および 1 とする。測定対象へ

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$

ただし $p_i = \pm 1.0, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4, \pm 2$

なる入力を投入しその出力 $y(p_i, t)$ を測定する。この測定結果を用いてモデルの次数 N の種々の値に対して ${}^N G^*$ を計算する。モデルの次数を決定するためこの ${}^N G^*$ を用いて評価関数 E_N (式 (3.14)) を計算する。その測定結果よりモデルの次数は 2 次にとれば十分であることがわかる。つぎに上ですでに計算されている Volterra 級数の 1 次および 2 次の項の応答 ${}^2 G_1^* [{}^2 g_1^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$, ${}^2 G_2^* [{}^2 g_2^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t]$ を用いて式 (3.28) を解くことにより，1 次および 2 次の Volterra 核を測定することができる。離散値幅 Δ を 0.5 秒とす

ると1次のVolterra核の測定すべきパラメータ個数は9個となるので、9元の連立1次方程式を解けばよいことになる。1次のVolterra核の測定値を図3.15に示す。2次のVolterra核に関しては測定すべきパラメータ個数が $9 \times 10 / 2 = 45$ 個となるので45元の連立1次方程式を解けばよい。2次のVolterra核の測定値を図3.16に示す。測定結果は式(3.33)の理論値とよく一致している。

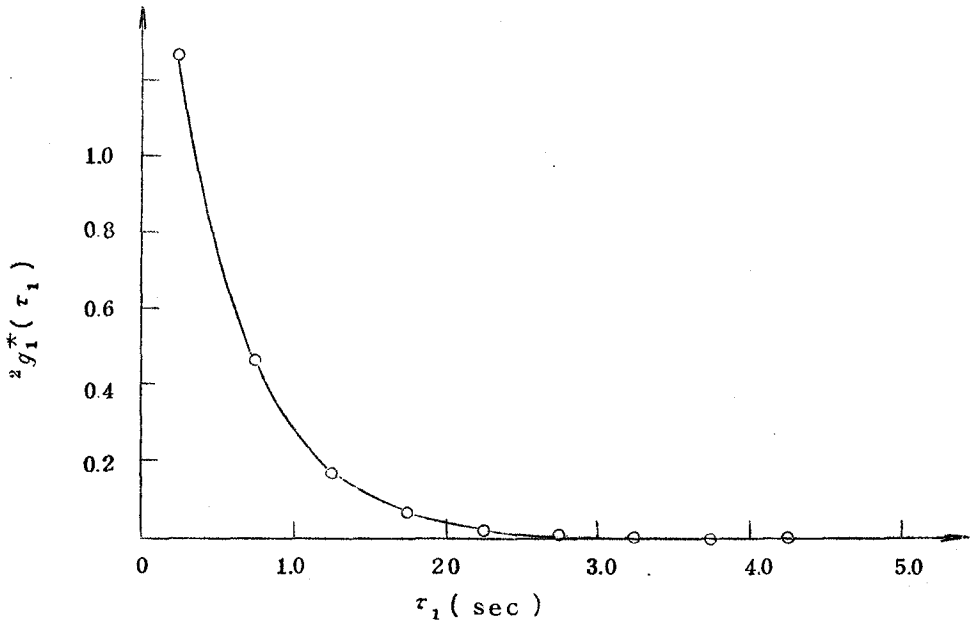


図 3.15 1 次 Volterra 核の測定値

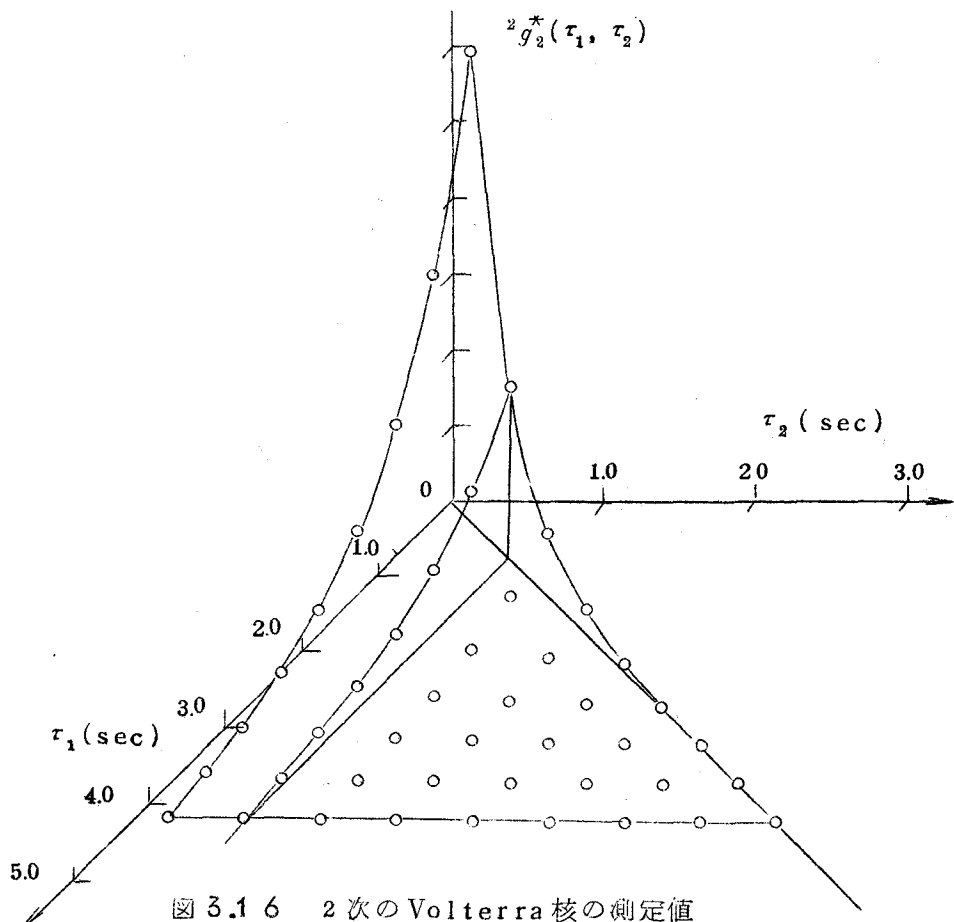


図 3.16 2 次 Volterra 核の測定値

[例2] 図3.17に示すシステムを考える。破線内の構造に関しては全く未知であり、入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のみが測定できるものとする。例1と全く同じ入力信号を用いて動特性測定を行なう。モデルの次数 N を決めるための評価関数 E_N を計算すると表3.3のようになる。

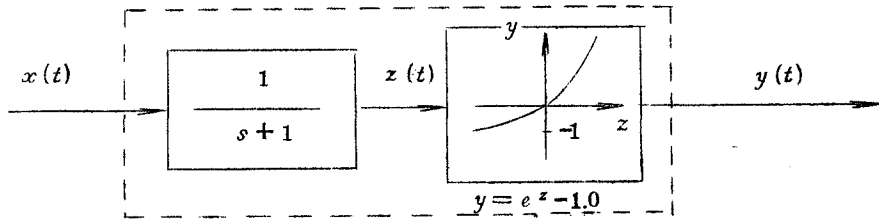


図3.17 測定対象

許容値 ϵ が 0.3×10^{-2} と与えられているとすればモデルの次数 N は3次にとれば十分であることがわかる。1次、2次、3次のボルテラ核は E_N の計算の際に得られた各項の応答を用いて連立方程式をつくり、それを未知数 ${}^3g_{i_1}^*$, ${}^3g_{i_1, i_2}^*$, ${}^3g_{i_1, i_2, i_3}^*$ ($i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, 9$)に関して解くことにより求めることができる。1次、2次のVolterra核の測定値を図3.18および図3.19に示す。またこの測定結果を用いて3次のVolterra級数モデルを構成、動特性測定に用いたのと同じ信号 $s(t)$ に対するモデルの応答とシステムの応答を示すと図3.20のようになる。図よりモデルとシステムとほぼ一致していることがよくわかる。

表3.3 モデルの次数を決めるための評価関数 E_N の計算値

N	E_N
1	0.142×10^{-0}
2	0.349×10^{-2}
3	0.190×10^{-3}
4	0.291×10^{-5}
5	0.654×10^{-7}
6	0.488×10^{-9}

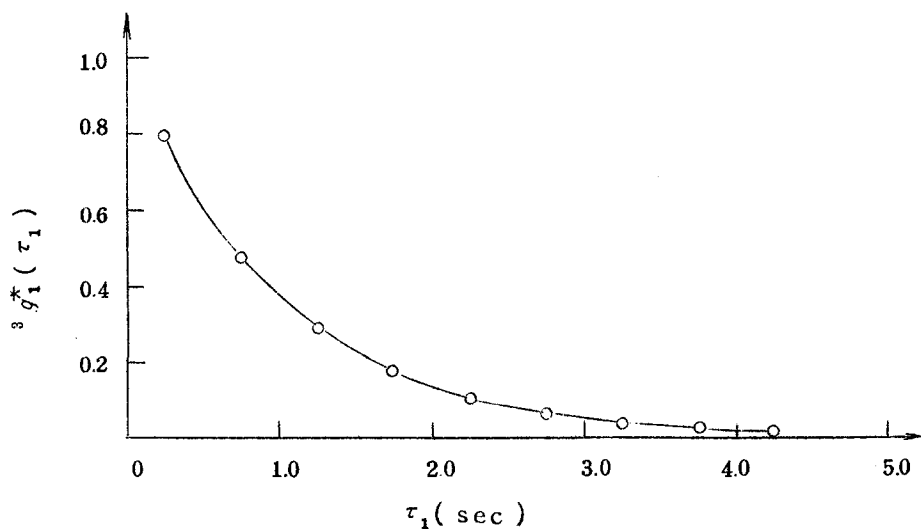


図3.18 1次のVolterra核の測定値

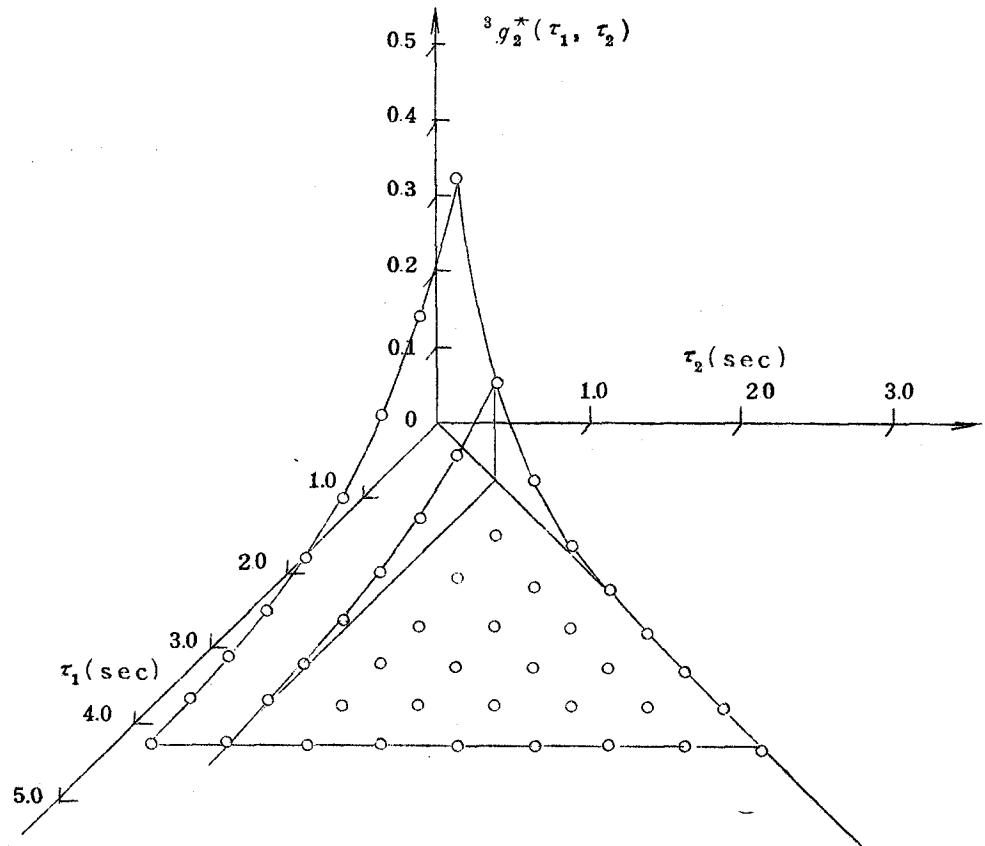


図 3.19 2 次 Volterra 核の測定値

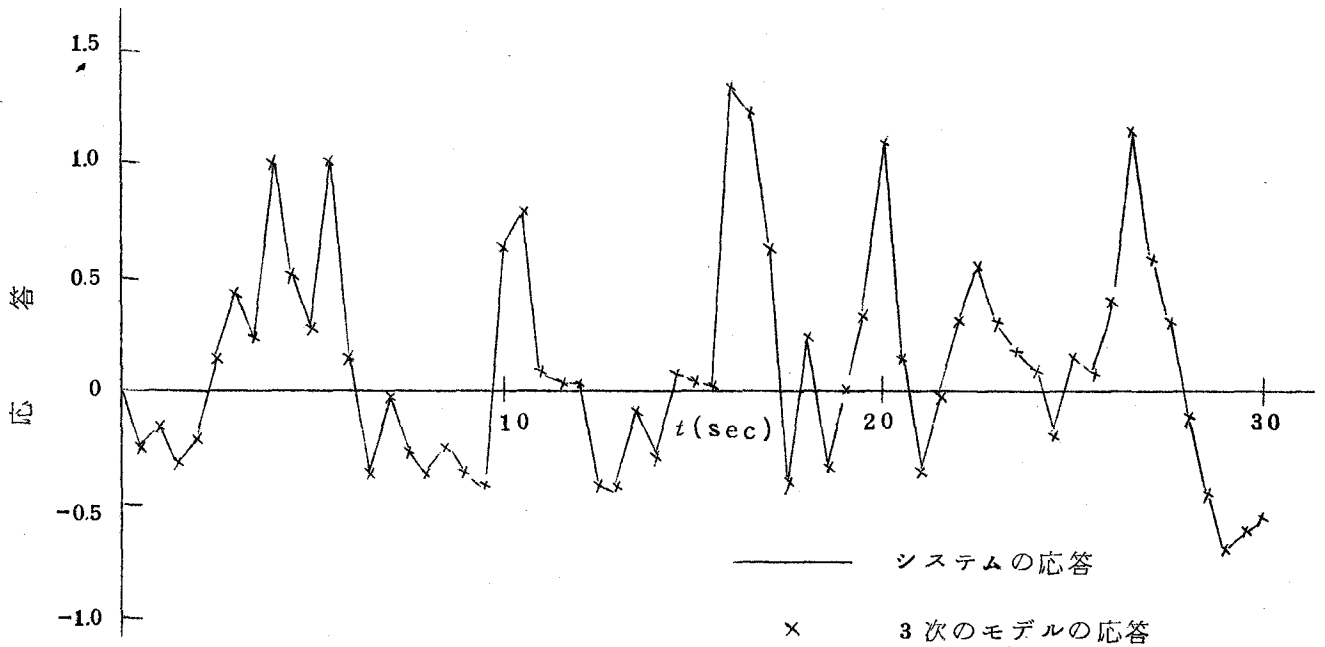


図 3.20 入力信号 $s(t)$ に対するシステムとモデルの応答

[例 3] 測定対象として図 3.21 に示す無定位性を有する非線形システムを考える。このシステムの Volterra 核の理論値は

$$\left. \begin{aligned} h_1(\tau_1) &= 1 - e^{-2\tau_1} \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= (1 - e^{-\tau_1})(1 - e^{-\tau_2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

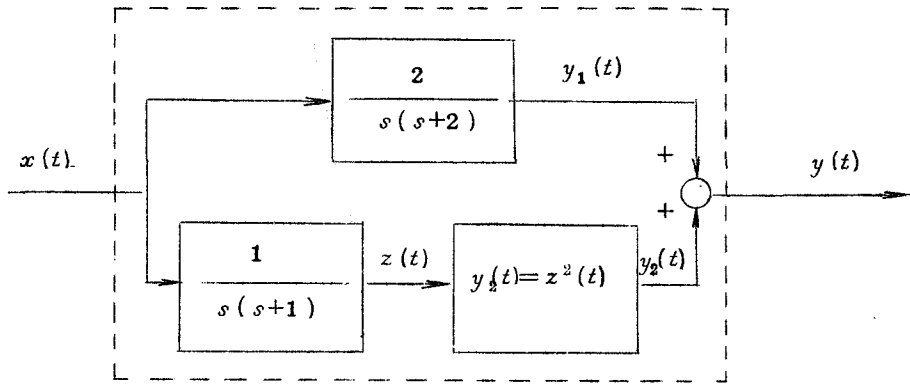


図 3.2 1 測定対象

となる。入力が過去に加わっている場合には、その過去の入力の積分値を S_x とすると過去の入力の影響を考慮した Volterra核は式 (3.5) から

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= h_0 + h_1(T_s) \cdot S_x + h_2(T_s, T_s) \cdot S_x^2 = S_x + S_x^2 \\ g_1(\tau_1) &= h_1(\tau_1) + 2 h_2(\tau_1, T_s) \cdot S_x = (1 - e^{-2\tau_1}) + 2(1 - e^{-\tau_1}) \cdot S_x \\ g_2(\tau_1, \tau_2) &= h_2(\tau_1, \tau_2) = (1 - e^{-\tau_1})(1 - e^{-\tau_2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

となる。測定対象には動特性測定前に振幅 0.2 のステップ信号が 2.5 秒間はいつていたとする。すなわち測定前の入力の積分値は $S_x = 0.5$ である。動特性測定はシステムが無定位性を有することはもちろんその内部の構造および測定前の入力に関してなんら先験的な情報がないとして行なう。動特性測定に先だち測定対象が式 (3.3) の関係を満足するかどうかをしらべる。その結果測定対象は式 (3.3) を満たし、 $T_s = 4.5$ (sec) であることがわかる。動特性測定のため入力信号 $s(t)$ として例 1 と同じ最小パルス幅 $\Delta = 0.5$ (sec), 周期 $T = (2^9 - 1)\Delta = 255.5$ (sec) の加算 M 系列信号を用いる。またこの信号の平均値および分散をそれぞれ 0 と 1 とする。

例 1, 例 2 と全く同じ方法で動特性測定を行なう。モデルの次数 N を決める評価関数 E_N の計算値は表 3.4 のようになる。表よりモデルの次数が決まると 3.5.2 の方法により 0 次, 1 次, 2 次のボルテラ核を測定することができる。0 次の Volterra 核の測定値は $g_0^* = 0.750$ となる。1 次および 2 次の Volterra 核の測定結果を図 3.2.2 および図 3.2.3 に示す。Volterra 核の理論値は式 (3.35) において $S_x = 0.5$ とおく)

表 3.4 モデルの次数を決めるための評価関数 E_N の計算値

N	E_N
1	0.674×10^{-0}
2	0.353×10^{-11}
3	0.572×10^{-12}
4	0.313×10^{-12}

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= 0.75 \\ g_1 &= 2 - e^{-\tau_1} - e^{-2\tau_1} \\ g_2(\tau_1, \tau_2) &= (1 - e^{-\tau_1})(1 - e^{-\tau_2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

となるが、測定結果はこの理論値とほぼ一致していることがわかる。

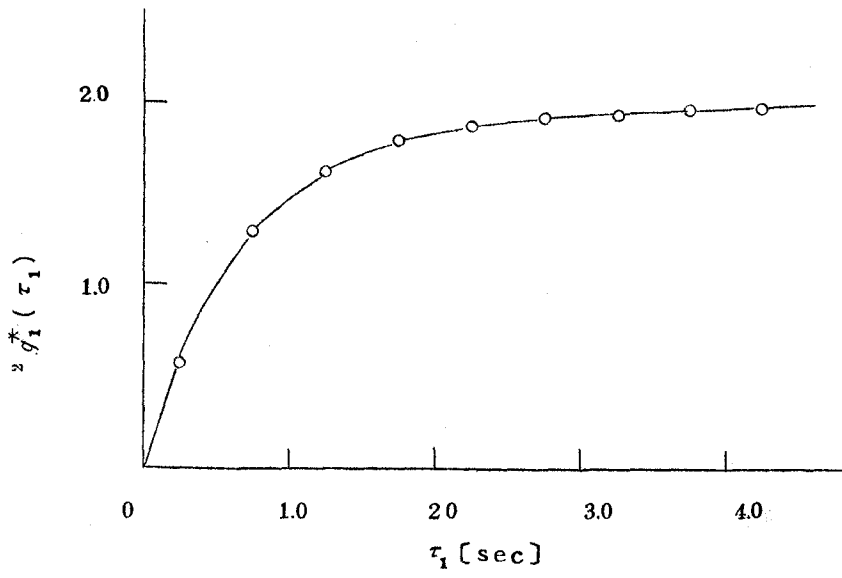


図 3.2 2 1次のVolterra核の測定値

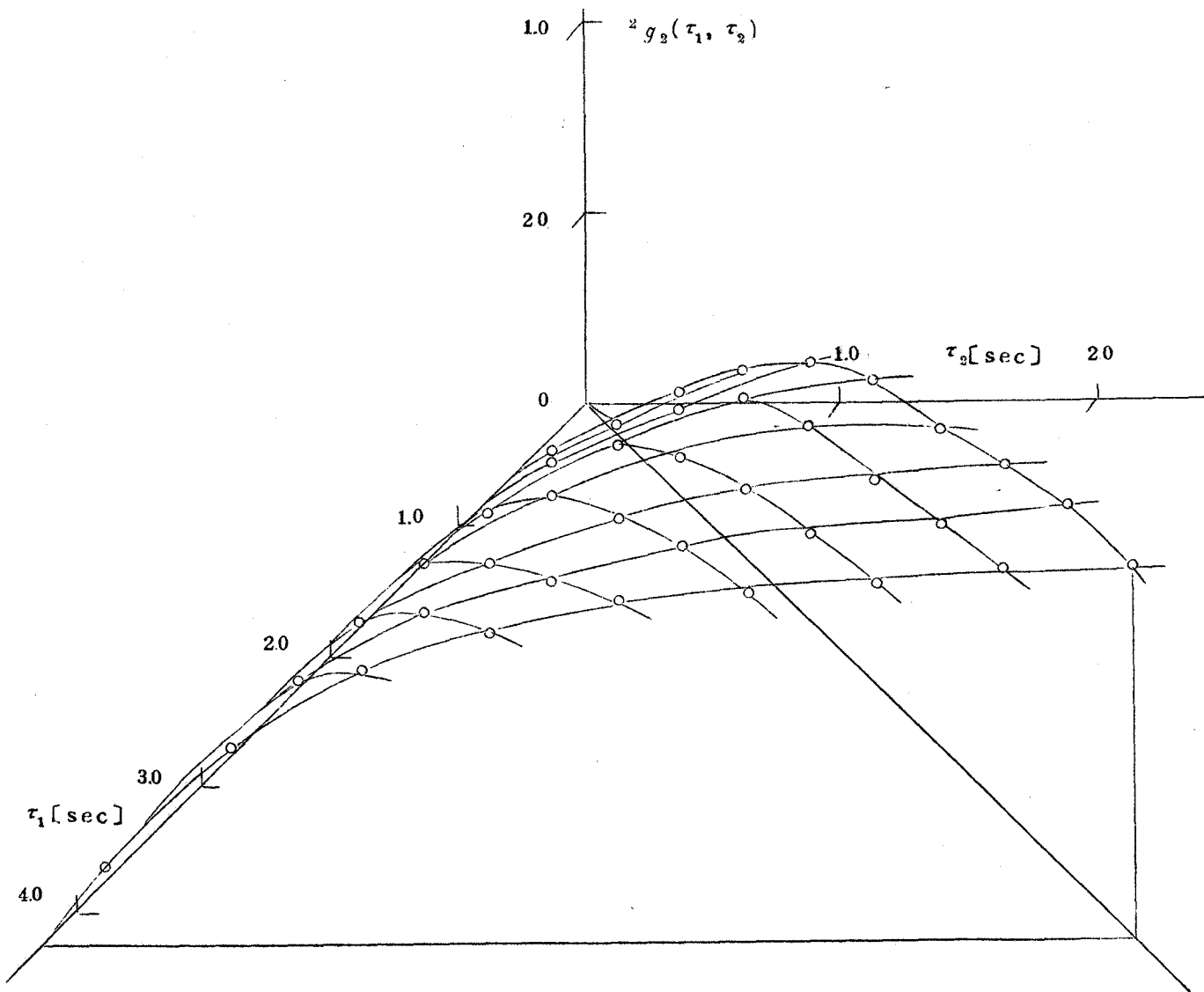


図 3.2 3 2次のVolterra核の測定値

3.8 結 言

内部構造が全く未知の非線形システムの動特性を Volterra 級数を用いて測定する方法を提案した。測定対象の内部構造が未知なため動特性測定は、まず測定対象がどのような形を有するかを決定し、この決定にもとづいてモデルを構成し、そのモデルを用いて測定対象の動特性を表わすパラメータを測定するという手順で行なわれる。本測定法に関して得られた結果をまとめると以下のようになる。

(1) 本方法は Volterra 核が式 (3.3) の関係を満たすシステムに適用可能であるが、実在のシステムの大部分は上述のシステムに属するものと思われ、また測定対象がこのシステムに属するかどうかは 3.6 の方法によりあらかじめ判定することができる。

(2) システムが定位性であるか、無定位性であるかはもちろんのこと、その内部構造および過去 (動特性測定前) に投入された入力に関してなんらの情報も不要である。

(3) 用いるモデルの形はシステムの Volterra 級数の次数により決まるが、この次数は式 (3.14) の評価関数 E_N を考慮することにより決定することができる。またこの E_N はあらかじめ簡単に計算することができる。

(4) 動特性測定に用いる入力信号 $s(t)$ は測定対象の動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号であれば十分で、白色性、正規性などの特別な性質を有するものは必要ではない。

(5) Volterra 核の測定のために直接法と代数方程式法を提案したが、直接法は入力の投入操作が複雑であるが、あとの測定結果の処理は簡単である。一方代数方程式法ではモデルの次数の決定のために用いた入出力データをそのまま用いればよいが、このデータの処理は逆マトリクス演算を施さねばならないので、測定パラメータ個数が多いとこの計算は手間がかかる。

(6) 動特性測定結果は、はじめにモデルの形を近似度を考慮して決めているため、その精度は十分保証されている。

第 3 章 の 参 考 文 献

- 1) 藤井, 中尾: ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性測定およびモデル化; 計測自動制御学会論文集, 5 巻, 4 号, pp. 368~377 (昭44)
- 2) K.Fujii & N.Nakao: Measurement of Characteristics of Nonlinear Dynamical Systems Using Volterra Functional Series; Tech. Rept. Osaka Univ., Vol. 19, No. 861, pp. 89~99 (1969)
- 3) 藤井, 中尾: ボルテラ級数を用いた非線形無定位系の動特性測定法; 計測自動制御学会論文集, 7 巻, 2 号, pp. 129~136 (昭46)
- 4) 中尾, 三上, 藤井: ボルテラ級数を用いた非線形無定位系の動特性測定法; 第9回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 220 (昭45)
- 5) 中尾, 藤井: 既知信号を用いた非線形制御系のボルテラ級数核の測定法—その2—; 第7回計測自動制御学会学術講演会予稿集, 213 (昭43)
- 6) 藤井, 中尾: 既知信号を用いた非線形制御系のボルテラ級数核の測定法; 第12回日本自動制御協会学術講演会予稿集, 106 (昭43)
- 7) D.A.George; Continuous Nonlinear Systems; M.I.T. Research Lab. Electronics, Tech. Rept. 355 (1959)
- 8) 中尾, 藤井: ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性測定法—代数方程式法—; 第14回日本自動制御協会学術講演会予稿集, 132 (昭45)
- 9) 藤井, 鈴木, 山東: 特殊アナログ演算要素の試作—雑音発生器とDLS—; アナログ技術研究会資料, 8 巻, 2 号, pp. 21~34 (昭43)
- 10) Y.H.Ku & Chin Chun Su: Volterra Functional Analysis of Nonlinear Time-varying Systems; J. of the Franklin Institute, Vol. 284, No. 6, pp. 344~365 (1967)

第 4 章 Wiener の直交はん関数級数を用いた
非線形システムの動特性測定法

—可変直交関数展開による方法—

第 4 章 Wiener の直交はん関数級数を用いた 非線形システムの動特性測定法

—可変直交関数展開による方法—

4.1 緒 言

入力信号が正規性白色信号である場合には非線形システムの入出力関係は Wiener の直交はん関数級数により表わされ、システムは Wiener 核により特徴づけられる。Wiener は動特性測定のための入力信号として正規性白色信号を用いて Wiener 核を Laguerre の直交関数で展開することにより非線形システムの動特性を測定する方法¹⁾を提案した。動特性の測定結果は当然制御するのに適した形で得られるのが望ましいが、上述の方法は測定結果が数式で得られるので、すぐさま制御理論を適用できるという利点を有している。一方この方法は実際に動特性を測定する際につきのような問題点を有している。すなわち一般に非線形システムは(1入力多出力)線形の memory 要素と(多入力1出力の) zero-memory の非線形要素の cascade 結合で表わされるが^{2) 3)}、Wiener の方法はこの線形の memory 要素を Laguerre 関数で、zero-memory の非線形要素を Hermite の直交関数で展開したもの(付録 4.1 参照)に相当しており、memory 要素を展開する関数を特別な形に固定しているため、一般に展開項は多くなり、動特性測定に多大の労力を要するとともに、測定結果が複雑になるという欠点をもっている。ところが実在のシステムの中にはたとえば低域ろ波特性を有するものも多く(このような特性を有することはあらかじめわかることが多いが)このようなシステムに対しては上述の memory 要素は極の位置を適当に選ぶことにより低次の filter で十分近似できると考えられる。このような場合には極の位置が固定された Laguerre 関数を用いずに、極の位置が可変な Kautz の直交関数⁴⁾を用いて、その極をも最適に決定して展開項数を減少させるのが得策であると思われる。

このような観点から本章では Wiener 核の展開のために可変直交関数系を用い、展開係数のみならず直交関数固有のパラメータをも最適に決定するような非線形システムの動特性測定法^{5) 6)}を提案する。

4.2 可変直交関数による Wiener 核の展開

2.3.2 において述べたように非線形システムへの入力⁵⁾が正規性の白色信号である場合には、その入出力関係は Wiener の直交はん関数を用いて

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n [w_n; x(t')], \quad t' \leq t \quad (2.10)$$

ただし

$$W_n [w_n; x(t')], \quad t' \leq t] W_m [w_m; x(t')], \quad t' \leq t] = 0, \quad n \neq m \quad (2.11)$$

と表わすことができる。また非線形システムの動特性は Volterra 核によって特徴づけられたように、Wiener 核 $w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) によっても特徴づけられる。し

たがってこのWiener核を求めることにより非線形システムの動特性を知ることができる。

本節ではWiener核 $w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)をその形が可変な正規直交関数で展開することを考える。形が可変な正規直交関数を

$$\varphi_i(t; a_1, a_2, \dots, a_i) = \varphi_i(t; \mathbf{a}_i) \quad (4.1)$$

とする。 $\mathbf{a}_i = (a_1, a_2, \dots, a_i)$ は直交関数そのものの形を決定する可変なパラメータであり、 $\varphi_i(t; \mathbf{a}_i)$ はWiener核 $w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ が $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n < 0$ で恒等的に零であることから、時間 $0 \leq t \leq \infty$ で定義されているものを選ぶ。たゞし式(4.1)の $\varphi_i(t; \mathbf{a}_i)$ は

$$\int_0^\infty \varphi_n(t; \mathbf{a}_n) \varphi_m(t; \mathbf{a}_m) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \quad (4.2)$$

なる正規直交の条件を満足している。このような形が可変な正規直交関数の1例として指数関数を1次結合して作ったKantzの正規直交指数関数⁴⁾

$$\mathcal{L}[\varphi_i(t; a_1, a_2, \dots, a_i)] = \frac{\sqrt{2} a_i (s-a_2)(s-a_2)\dots(s-a_{i-1})}{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_i)} \quad (4.3)$$

がある。Wiener核はこのような正規直交関数を用いて

$$w_1(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(\mathbf{a}_i) \varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i) \quad (4.4)$$

$$w_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(\mathbf{a}_{ij}) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \quad (4.5)$$

⋮

$$w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \sum_{l=1}^{\infty} k_{ij\dots l}(\mathbf{a}_{ij\dots l}) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \dots \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \quad (4.6)$$

⋮

たゞし $\mathbf{a}_{ij\dots l} = (a_1, a_2, \dots, a_{\max(i, j, \dots, l)})$

と展開することができる。各展開係数は

$$k_i(\mathbf{a}_i) = \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i) d\tau \quad (4.7)$$

$$k_{ij}(\mathbf{a}_{ij}) = \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.8)$$

⋮

$$k_{ij\dots l}(\mathbf{a}_{ij\dots l}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \dots \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (4.9)$$

より決められる。これらの関係はつきのようにして得られる。すなわち式(4.7)は式(4.4)の両辺に $\varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i)$ をかけて積分することにより得られる：

$$\int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i) d\tau = \sum_{i'=1}^{\infty} k_{i'}(\mathbf{a}_{i'}) \int_0^\infty \varphi_{i'}(\tau; \mathbf{a}_{i'}) \varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i) d\tau = k_i(\mathbf{a}_i)$$

式(4.8)は式(4.5)に $\varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j)$ をかけて τ_1, τ_2 に関して積分することにより得られる:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty k_{ij}(\mathbf{a}_{ij}) \int_0^\infty \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) d\tau_1 \int_0^\infty \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) d\tau_2 \\ &= k_{ij}(\mathbf{a}_{ij}) \end{aligned}$$

式(4.9)も同様にして得ることができる。

Wiener核の直交関数展開の項数が有限の場合には式(4.7), (4.8), (4.9)の展開係数は誤差2乗積分の意味で最適のものを与えている。

すなわち n 次のWiener核について考えると,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \{ w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \cdots \sum_{l=1}^N \gamma_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l}) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \\ & \quad \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \}^2 d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

なる誤差積分は $\gamma_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l}) = k_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l})$ のときに最小となっている⁷⁾。

以上より非線形システムの動特性測定は \mathbf{a} を任意に決めて式(4.7), (4.8), (4.9)の展開係数を求めることに帰することができる。

4.3 動特性測定法

4.3.1 正規性白色信号をうける多次元可変直交関数回路

図4.1に示すように多次元の変直交関数回路を構成する。入力 $x(t)$ として正規性の白色信号を投入する。図4.1(a)の1次元の変直交関数回路の出力 $y_i(t)$ は

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \int_0^\infty \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) x(t-\sigma) d\sigma \\ &= \mathcal{O}_1[\varphi_i; x(t'), t' \leq t] \end{aligned} \quad (4.11)$$

となり、1次の同次はん関数の形を有している。図4.1(b)の2次元の変直交関数回路の出力 $y_{ij}(t)$ は

$$\begin{aligned} y_{ij}(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= \mathcal{O}_2(\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

と表わされ、2次の同次はん関数の形を有している。同様に図4.1(c)の3次元の変直交関数回路の出力 $y_{ijk}(t)$ は

$$\begin{aligned} y_{ijk}(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) \\ & \quad d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = \mathcal{O}_3(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

となり、3次の同次はん関数の形を有している。一般に n 次元の変直交関数回路の出力

$y_{ij\dots l}(t)$ は

$$\begin{aligned}
 y_{ij\dots l}(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \dots \varphi_l(\sigma_n; a_l) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) \\
 &\quad \dots x(t-\sigma_n) d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n \\
 &= \mathcal{O}_n[\varphi_i, \varphi_j, \dots, \varphi_l; x(t'), t' \leq t] \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

となり、 n 次の同次はん関数の形を有している。

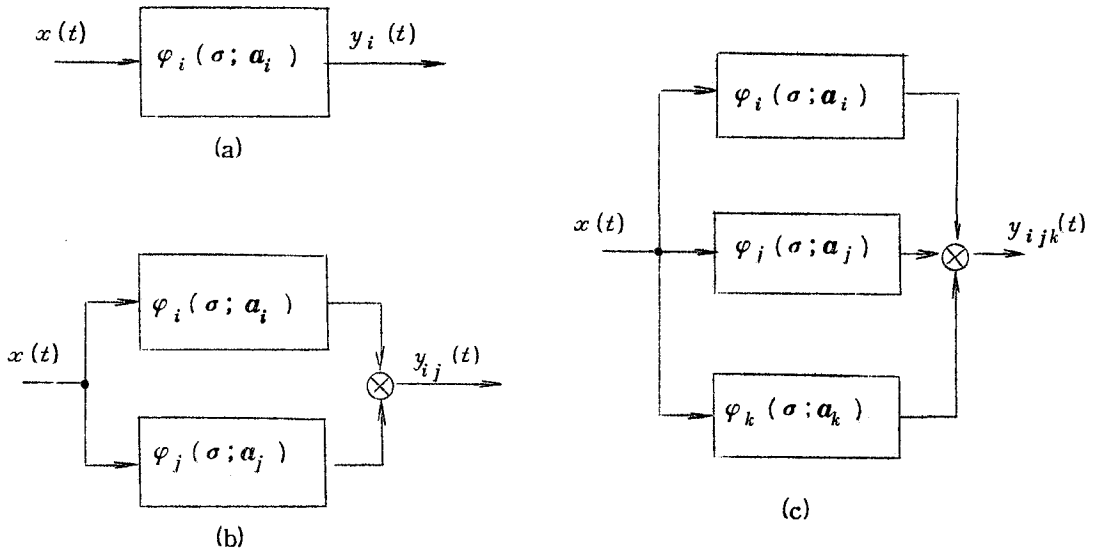


図 4.1 多次元可変直交関数回路

Wiener の直交はん関数 $W_n[w_n; x(t'), t' \leq t]$ は 2.3.2 において述べたように n より低次の任意のはん関数とも直交するから、ここで導入したはん関数についても

$$\overline{W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \mathcal{O}_m[\varphi_i, \varphi_j, \dots, \varphi_q; x(t'), t' \leq t]} = 0, \quad m < n \quad (4.15)$$

なる関係が成立する。

次節でこの多次元の変可変直交関数回路を用いて Wiener 核の展開係数 $k_{ij\dots l}(a_{ij\dots l})$ を測定する方法について述べる。

4.3.2 展開係数の測定法

図 4.2 に示す非線形システムの動特性を測定することを考える。

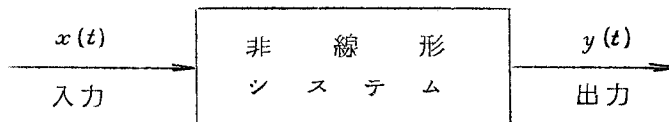


図 4.2 測定対象

動特性を測定するための入力 $x(t)$ を、平均値および自己相関関数が

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{x(t)} &= 0 \\
 \overline{x(t)x(t+\tau)} &= K \cdot \delta(\tau) \quad (K: \text{定数})
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

なる正規性の白色信号とする。

0 次の Wiener 核 w_0 は入力 $x(t)$ に対する測定対象の出力 $y(t)$ の平均値そのものである。1 次の Wiener 核の展開係数を測定するために、図 4.3 に示すように測定対象と図 4.2 (a) の回路に $x(t)$ を投入し、それらの出力の積の平均値

$$\overline{y(t) y_i(t)} = \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_n [w_n; x(t'), t' \leq t] \right\} \Phi_1 [\varphi_i; x(t'), t' \leq t]} \quad (4.16)$$

を計算する。式 (4.15) の関係より n が 2 以上の項に対しては

$$W_n [w_n; x(t'), t' \leq t] \Phi_1 [\varphi_i; x(t'), t' \leq t] = 0 \quad (n \geq 2)$$

となる。

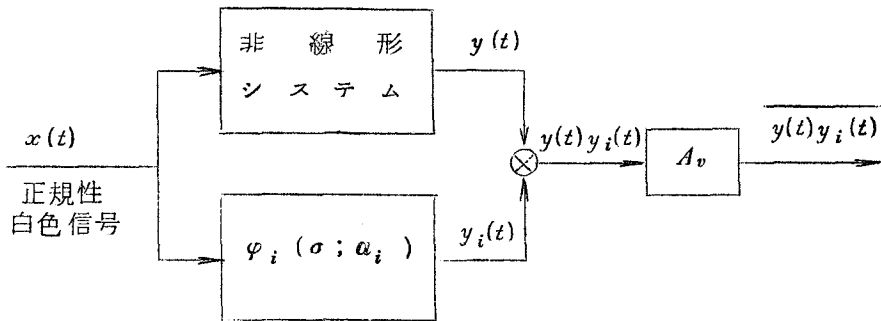


図 4.3 非線形システムの 1 次の Wiener 核の展開係数の測定

$n = 0, 1$ に対しては入力 $x(t)$ に関する式 (2.9) の関係を用いて、それぞれ

$$\begin{aligned} & \overline{W_0 [w_0; x(t'), t' \leq t] \Phi_1 [\varphi_i; x(t'), t' \leq t]} \\ &= w_0 \int_0^{\infty} \overline{\varphi_i(\sigma; a_i) x(t-\sigma)} d\sigma = 0 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \overline{W_1 [w_1; x(t'), t' \leq t] \Phi_1 [\varphi_i; x(t'), t' \leq t]} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(\tau) \overline{\varphi_i(\sigma; a_i) x(t-\tau) x(t-\sigma)} d\tau d\sigma \\ &= K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(\tau) \varphi_i(\sigma; a_i) \delta(\tau-\sigma) d\tau d\sigma \\ &= K \int_0^{\infty} w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) d\tau \end{aligned}$$

なる結果が得られる。したがって式 (4.16) は

$$\overline{y(t) y_i(t)} = K \int_0^{\infty} w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) d\tau \quad (4.17)$$

となる。上式と式 (4.7) から 1 次の Wiener 核の展開係数は

$$k_i(a_i) = \int_0^{\infty} w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) d\tau = \overline{y(t) y_i(t)} / K \quad (4.18)$$

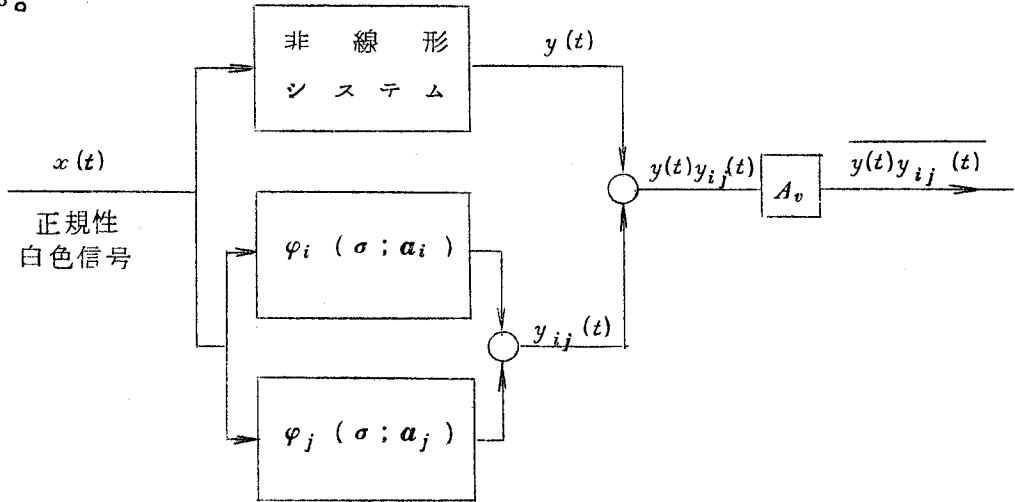
を用いて計算することができる。

2 次の Wiener 核の展開係数を測定するため、1 次の場合と同様に図 4.4 に示す回路を構成し、測定対象と 2 次元の可変直交関数回路の出力の積の平均値、

$$\overline{y(t)y_{ij}(t)} = \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \right\} \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]}$$

(4.19)

を計算する。



2次元可変直交関数回路

図 4.4 非線形システムの 2 次の Wiener 核の展開係数の測定

式 (4.15) から W_n の 3 次以上の項と 2 次のはん関数 Φ_2 とは直交しているため、これらに関する項は 0 となる。 $n=0, n=1$ に対しては、それぞれ

$$\begin{aligned} & \overline{W_0[w_0; x(t'), t' \leq t] \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]} \\ &= \dot{w}_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \overline{x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= K \cdot w_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= K \cdot w_0 \int_0^{\infty} \varphi_i(\sigma; a_i) \varphi_j(\sigma; a_j) d\sigma \\ &= K \cdot w_0 \cdot \delta_{ij} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \overline{W_1[w_1; x(t'), t' \leq t] \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(\tau) \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \overline{x(t-\tau)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 \\ &= 0 \quad (\text{式 (2.14) の関係から}) \end{aligned}$$

となる。 $n=2$ の場合を計算すると

$$\begin{aligned} & \overline{W_2[w_2; x(t'), t' \leq t] \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]} \\ &= K^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{w_2(\tau_1, \tau_2) + w_2(\tau_2, \tau_1)\} \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

なる結果を得る（付録 4.2 参照）。ここで $\{w_2(\tau_1, \tau_2) + w_2(\tau_2, \tau_1)\} / 2$ をあたらしく $w_2(\tau_1, \tau_2)$ と置きかえると（この置きかえはシステムの入出力関係にはなんら影響を及ぼさない（付録 3.2 参照））、式（4.19）は

$$\overline{y(t)y_{ij}(t)} = K \cdot w_0 \cdot \delta_{ij} + 2K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2$$

となる。したがって式（4.8）より、2次のWiener核の展開係数は

$$k_{ij}(a_{ij}) = \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= (\overline{y(t)y_{ij}(t)} - K \cdot w_0 \cdot \delta_{ij}) / 2K^2 \quad (4.21)$$

を用いて計算することができる。

3次のWiener核の展開係数も同様に求めることができる。すなわち図 4.5 に示すように、正規性白色信号に対する測定対象と3次元の可変直交関数回路の出力の積の平均値を計算すると

$$\overline{y(t)y_{ijk}(t)} = \left\{ \sum_{n=0}^\infty W_n[w_n, x(t'), t' \leq t] \right\} \Phi_3[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t]$$

$$= K^3 \{ \delta_{ij} k_k(a_k) + \delta_{jk} k_i(a_i) + \delta_{ki} k_j(a_j) \}$$

$$= 6K^3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) \varphi_k(\tau_3; a_k) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

$$(4.22)$$

なる関係を得ることができる（付録 4.3 参照）。これより3次のWiener核の展開係数は

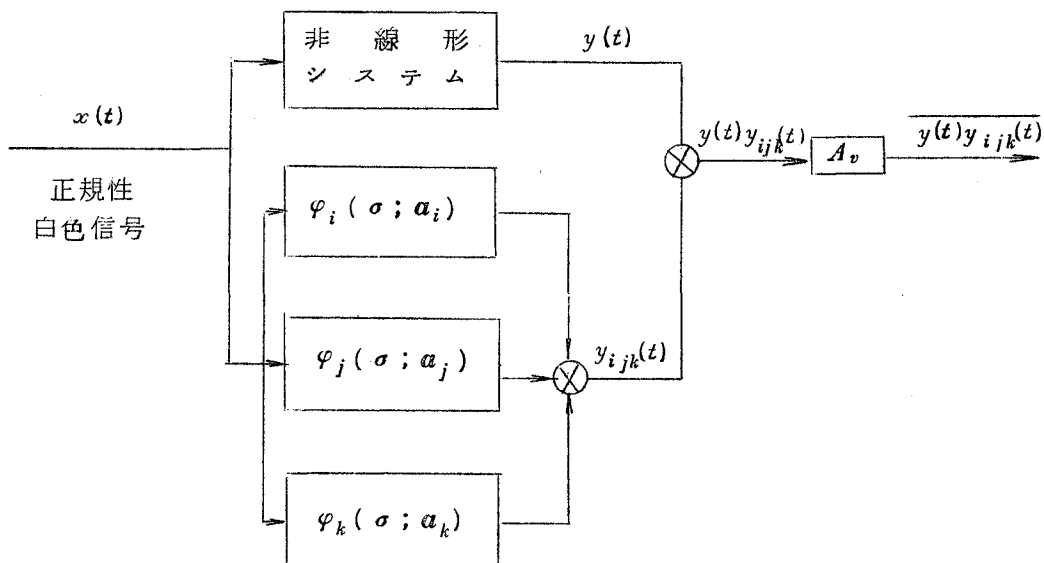
$\overline{y(t)y_{ijk}(t)}$ と式（4.18）の $k_i(a_i)$ を用いて

$$k_{ijk}(a_{ijk}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) \varphi_k(\tau_3; a_k) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

$$= [\overline{y(t)y_{ijk}(t)} - K^3 \{ \delta_{ij} k_k(a_k) + \delta_{jk} k_i(a_i) + \delta_{ki} k_j(a_j) \}] / 6K^3$$

$$(4.23)$$

から計算できる。以下同様にして高次のWiener核の展開係数を計算することができる。



3次元可変直交関数回路

図 4.5 非線形システムの3次のWiener核の展開係数の測定

4.3.3 直交関数固有のパラメータの決定法

4.3.2の方法を用いて非線形システムの動特性を表わすWiener核をある形の正規直交関数により展開することができるが、この直交関数の形をある決まった形に固定するとWiener核の展開には一般に無限個の直交関数が必要となる。そこでこの直交関数の形をも最適に決定して、できるだけ少数の直交関数でシステムの動特性を測定することを考える。

直交関数固有のパラメータを $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M, \dots)$ とするとシステムの出力は

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \quad (2.10)$$

ただし

$$w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \sum_{l=1}^{\infty} k_{ij\dots l}(\mathbf{a}_{ij\dots l}) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \dots \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \quad (4.6)$$

で表わされる。システムのモデルとして、Wienerの直交関数関数の次数が N 次の、またそのWiener核を展開するための直交関数の項数が M 項のモデルを用いると、モデルの出力は

$$m y(t) = \sum_{n=0}^N W_n[M w_n; x(t'), t' \leq t] \quad (4.24)$$

ただし

$$M w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dots \sum_{l=1}^M k_{ij\dots l}(\mathbf{a}_{ij\dots l}) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \dots \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \quad (4.25)$$

と表わされる。このモデルのWiener核を展開する M 個の直交関数 $\varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i)$ ($i=1, 2, \dots, M$) のパラメータ $\mathbf{a}_M = (a_1, a_2, \dots, a_M)$ を最適に決めるためシステムとモデルの応答の差に関する2乗平均

$$P_{N,M}(\mathbf{a}_M) = \overline{\{y(t) - m y(t)\}^2} = \overline{y(t)^2 - 2y(t)m y(t) + m y(t)^2} \quad (4.26)$$

を考え、これが最小となるように \mathbf{a}_M を決定する。式(4.26)の第2項は W_n の直交性を利用して計算すると

$$\begin{aligned} \overline{y(t)m y(t)} &= \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \right\} \left\{ \sum_{n=0}^N W_n[M w_n; x(t'), t' \leq t] \right\}} \\ &= \sum_{n=0}^N \overline{W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] W_n[M w_n; x(t'), t' \leq t]} \\ &= \sum_{n=0}^N n! K^n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) M w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \end{aligned}$$

となる(付録4.4参照)。上式に式(4.6)および式(4.25)を代入し、 $\varphi_i(\tau; \mathbf{a}_i)$ の直交性を利用して計算すると

$$\begin{aligned} \overline{y(t)m y(t)} &= w_0^2 + K \sum_{i=1}^M k_i^2(\mathbf{a}_i) + 2K^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M k_{ij}^2(\mathbf{a}_{ij}) + \dots \\ &\quad \dots + N! K^N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dots \sum_{r=1}^M k_{ij\dots r}^2(\mathbf{a}_{ij\dots r}) \\ &\triangleq Q_{N,M}(\mathbf{a}_M) \end{aligned} \quad (4.27)$$

が得られる(付録4.5参照)。式(4.26)の第3項も同様にして

$$\begin{aligned}
 {}_m y(t)^2 &= \left\{ \sum_{n=0}^N W_n [M_{w_n}; x(t'), t' \leq t] \right\}^2 \\
 &= \sum_{n=0}^N W_n^2 [M_{w_n}; x(t'), t' \leq t] \\
 &= \sum_{n=0}^N n! K^n \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty M_{w_n}^2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\
 &= w_0^2 + K \sum_{i=1}^M k_i^2(\mathbf{a}_i) + 2K^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M k_{ij}^2(\mathbf{a}_{ij}) + \dots \\
 &\quad \dots + N! K^N \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \cdots \sum_{r=1}^M k_{ij \dots r}^2(\mathbf{a}_{ij \dots r}) \\
 &= Q_{N,M}(\mathbf{a}_M) \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

となる。したがって評価関数 $P_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ は

$$\begin{aligned}
 P_{N,M}(\mathbf{a}_M) &= y(t)^2 - 2Q_{N,M}(\mathbf{a}_M) + Q_{N,M}(\mathbf{a}_M) \\
 &= y(t)^2 - Q_{N,M}(\mathbf{a}_M) \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

となる。上式において $y(t)^2$ は \mathbf{a}_M に関係なく一定であるから、 $P_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ を最小にすることは $Q_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ を最大にすることと等価である。したがって直交関数固有のパラメータ \mathbf{a}_M は $Q_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ が最大となるように決定すればよい。

これより \mathbf{a}_M の最適値 \mathbf{a}_M^* の決定には、実際にモデルを構成して式(4.26)の評価関数を計算する必要はなく、たゞ展開係数 $k_{ij \dots r}(\mathbf{a}_{ij \dots r})$ ($i, j, \dots, r, \leq M$) のみの関数 $Q_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ を考慮すればよい。

4.3.4 Wienerの直交はん関数の次数およびその展開のための直交関数の項数の決定法

動特性測定を行なう場合はじめにモデルとしてWienerの直交はん関数の次数が N 次、そのWiener核を展開するための直交関数の項数を M 項と仮定するが、実際にはモデルは測定対象の特性を十分近似できるものでなければならない。したがってこの仮定したモデルを用いて動特性測定を行なって得られた結果がどの程度測定対象の特性を近似しているか検討する必要がある。

直交はん関数の次数が N 次、直交関数の項数が M 項のモデルがどの程度測定対象の特性を近似しているかを示す評価関数として4.3.3においてパラメータ \mathbf{a}_M を決定するのに用いた評価関数 $P_{N,M}(\mathbf{a}_M^*)$ をシステムの出力のパワーで正規化した関数

$$\begin{aligned}
 I_{N,M} &= P_{N,M}(\mathbf{a}_M^*) / y(t)^2 \\
 &= \{ y(t)^2 - Q_{N,M}(\mathbf{a}_M^*) \} / y(t)^2 = 1 - Q_{N,M}(\mathbf{a}_M^*) / Q_{\infty,\infty}(\mathbf{a}_\infty^*) \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

を考える。 N, M が大きくなるにしたがって上式の第2項は単調に1に近づき、 $I_{N,M}$ は0に近づく⁷⁾。したがってシステムのパワーおよび展開係数のみの関数 $Q_{N,M}(\mathbf{a}_M)$ を用いて $I_{N,M}$ を計算し、この値がある許容値 ϵ の範囲内にはいるかどうかにより、はじめに仮定したモデルが適当であったかどうかを検討することができる。

4.4 測定例

〔例1〕 測定対象として図4.6に示す1次おくれ特性を示す線形要素と zero-memory の非線形要素が cascade につながれた非線形システムを考える。

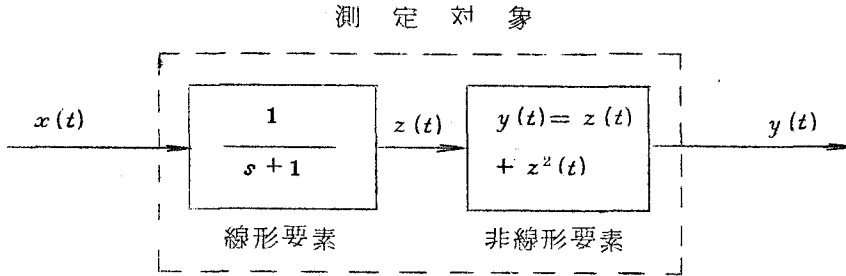


図4.6 測定対象

このシステムの入出力関係は

$$y(t) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} x(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\tau_1+\tau_2)} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.31)$$

で表わされる。動特性測定に際しては破線内の構造に関してはまったく情報はなく、たゞ入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のみが観測されるものとする。

可変直交関数 $\varphi_i(t; \mathbf{a}_i)$ として式(4.3)のKautzの正規直交指数関数を用いる。動特性測定のための入力 $x(t)$ としてパワーが $K = 1.018$ の正規性白色信号を用いる。この入力に対する測定対象のパワーは $y(t)^2 = 1.286$ と測定される。まずWienerの直交はん関数を1次に固定して直交関数の項数を順次増加してその展開係数 $k_M(\mathbf{a}_M)$ を種々の \mathbf{a}_M について測定する。この係数を用いて、直交関数の形を決める関数

$$Q_{1,M}(\mathbf{a}_M) = w_0^2 + K \sum_{i=1}^M k_i^2(\mathbf{a}_i)$$

を計算する。 $M=1$ の場合の $Q_{1,1}(\mathbf{a}_1)$ を図4.7に示す。図より $\mathbf{a}_1=1.0$ のとき $Q_{1,1}(\mathbf{a}_1)$ は最大値 0.763 をとる。これよりモデルの近似度を示す評価関数 $I_{1,1}$ は式(4.30)から 0.407 となり、このモデルは不相当と判定することができる。直交関数の項数を増加しても、その展開係数はすべて0となり、評価関数 $I_{1,M}$ の値は不変である。つぎにWienerの直交はん関数の次数を2次として、直交関数のパラメータ \mathbf{a}_M の決定のため評価関数

$$Q_{2,M}(\mathbf{a}_M) = w_0 + K \sum_{i=1}^M k_i^2(\mathbf{a}_i) + 2K^2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M k_{ij}^2(\mathbf{a}_{ij})$$

を測定する。 $M=1$ の場合の $Q_{2,1}(\mathbf{a}_1)$ を図4.8に示す。図より $\mathbf{a}_1=1.0$ のとき $Q_{2,1}(\mathbf{a}_1)$ は最大となる。この時 $I_{2,1}$ はほぼ0に等しくなりモデルは適当なものであることがわかる。

Wiener核の展開係数の測定値は

$$w_0 = 0.521, \quad k_1(1.0) = 0.695, \quad k_{1,1}(1.0) = 0.503$$

となる。これを用いてモデルを構成すると

$${}_m y(t) = \int_0^{\infty} 0.983 e^{-\tau} x(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 1.005 e^{-(\tau_1+\tau_2)} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

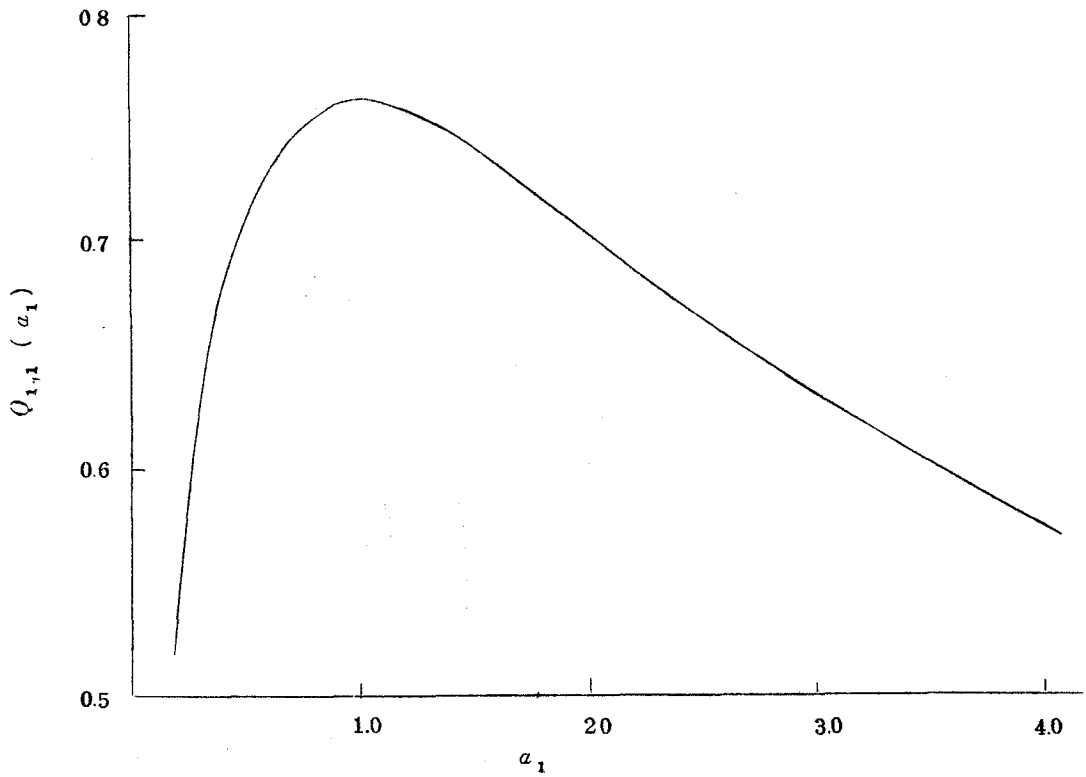


図 4.7 直交関数の形を決定するための関数 $Q_{1,1}(a_1)$ (モデルの次数: 1 次) の測定値

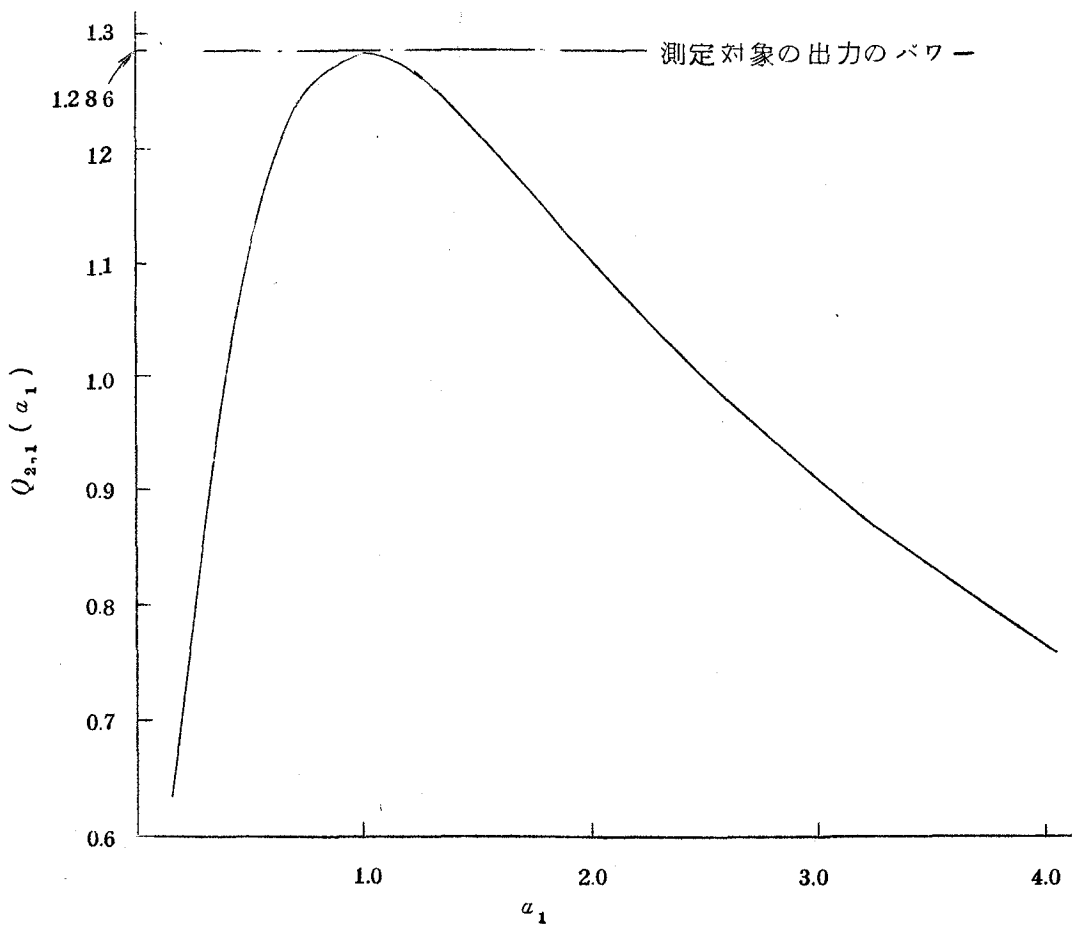


図 4.8 直交関数の形を決定するための関数 $Q_{2,1}(a_1)$ (モデルの次数: 2 次) の測定値

が得られ、これは測定対象の入出力関係を表わす式(4.3.1)とほぼ一致している。

[例2] 測定対象として図4.6のシステムの線形部分が

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

なる2次遅れ特性を有する非線形システムを考える。

入力 $x(t)$ として $K=0.982$ の正規性白色信号を加え、Wiener核の展開のための直交関数 $\varphi_i(t; a_i)$ は例1と同じくKautzの正規直交指数関数を用いる。システムの出カパワーは $\overline{y(t)^2} = 0.649$ と測定される。例1と同じ方法でWienerの直交はん関数の次数 N 、直交関数の項数 M を増加させながら展開係数の測定、直交関数の形の決定、モデルの検定を順次行なう。 $N=2, M=2$ の場合に直交関数のパラメータ a_1, a_2 の種々の値に対して

$$Q_{2,2}(a_1, a_2) = w_0 + K \sum_{i=1}^2 k_i(a_i) + 2K^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{ij}^2(a_i, a_j)$$

を計算すると図4.9のようになる。

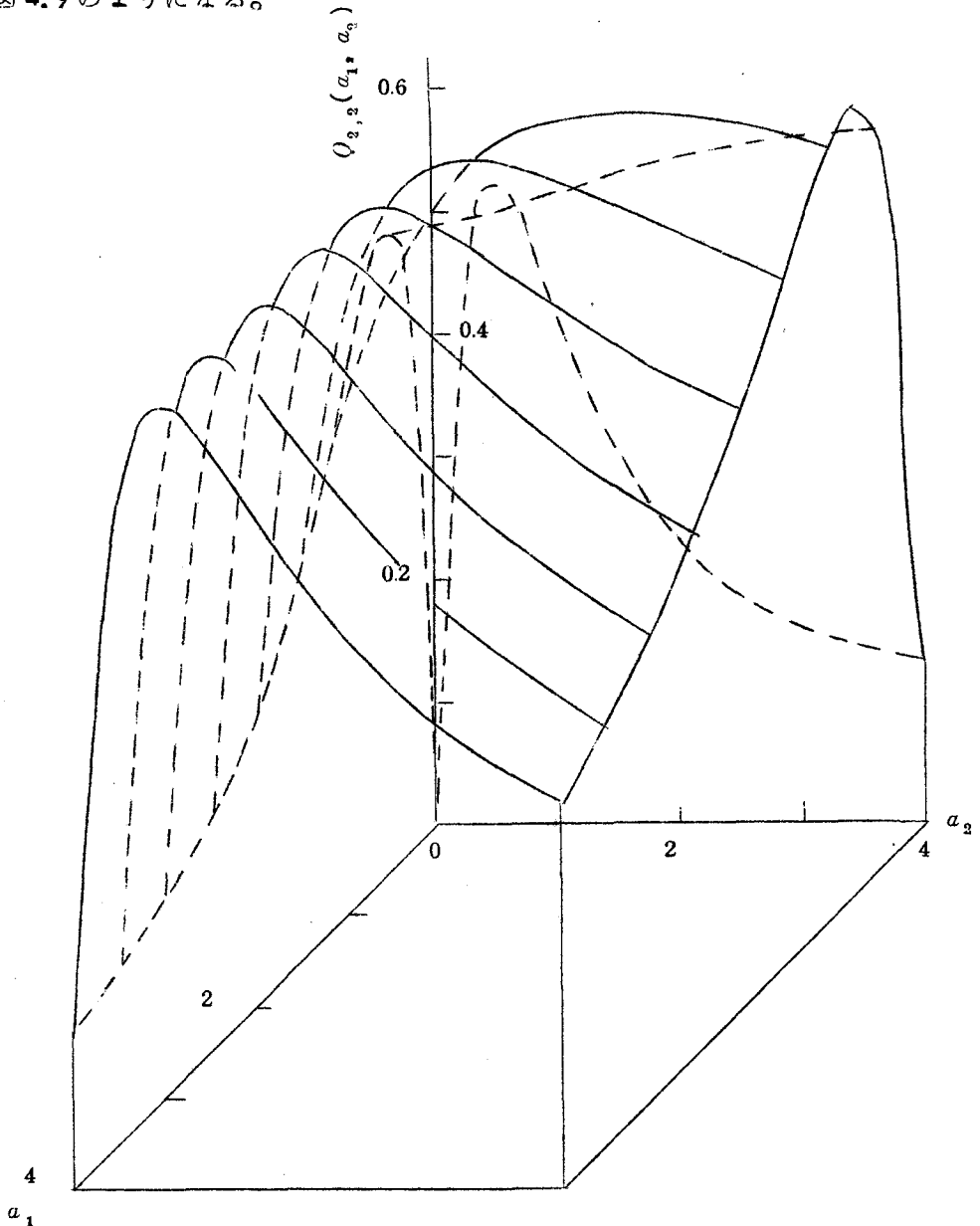


図4.9 直交関数の形を決定するための関数 $Q_{2,2}(a_1, a_2)$ (モデルの次数: 2次)の測定値

図から $a_1=1.0$, $a_2=2.0$ (または $a_1=2.0$, $a_2=1.0$) のとき $Q_{2,2}(a_1, a_2)$ は最大となり, モデルの近似度を示す評価関数 $I_{2,2}$ はほぼ 0 に等しくなる。このときの展開係数の測定値は, $w_0=0.303 (0.327)$, $k_{1,1}(1.0)=0.459 (0.471)$, $k_{2,2}(1.0, 2.0)=-0.322 (-0.333)$, $k_{1,1}(1.0)=0.247 (0.222)$, $k_{2,2}(1.0, 2.0)=0.129 (0.111)$, $k_{1,2}(1.0, 2.0)=-0.162 (-0.157)$ (ただし () 内は理論値を示す) となりほぼ理論値と一致している。この測定値を用いて実際にモデルを構成し, 図 4.10(a) に示す入力に対するシステムの応答 $y(t)$ とこのモデルの応答を測定すると図 4.10(b), (c) のようになる。これからもモデルはシステムにほぼ一致していることがわかる。

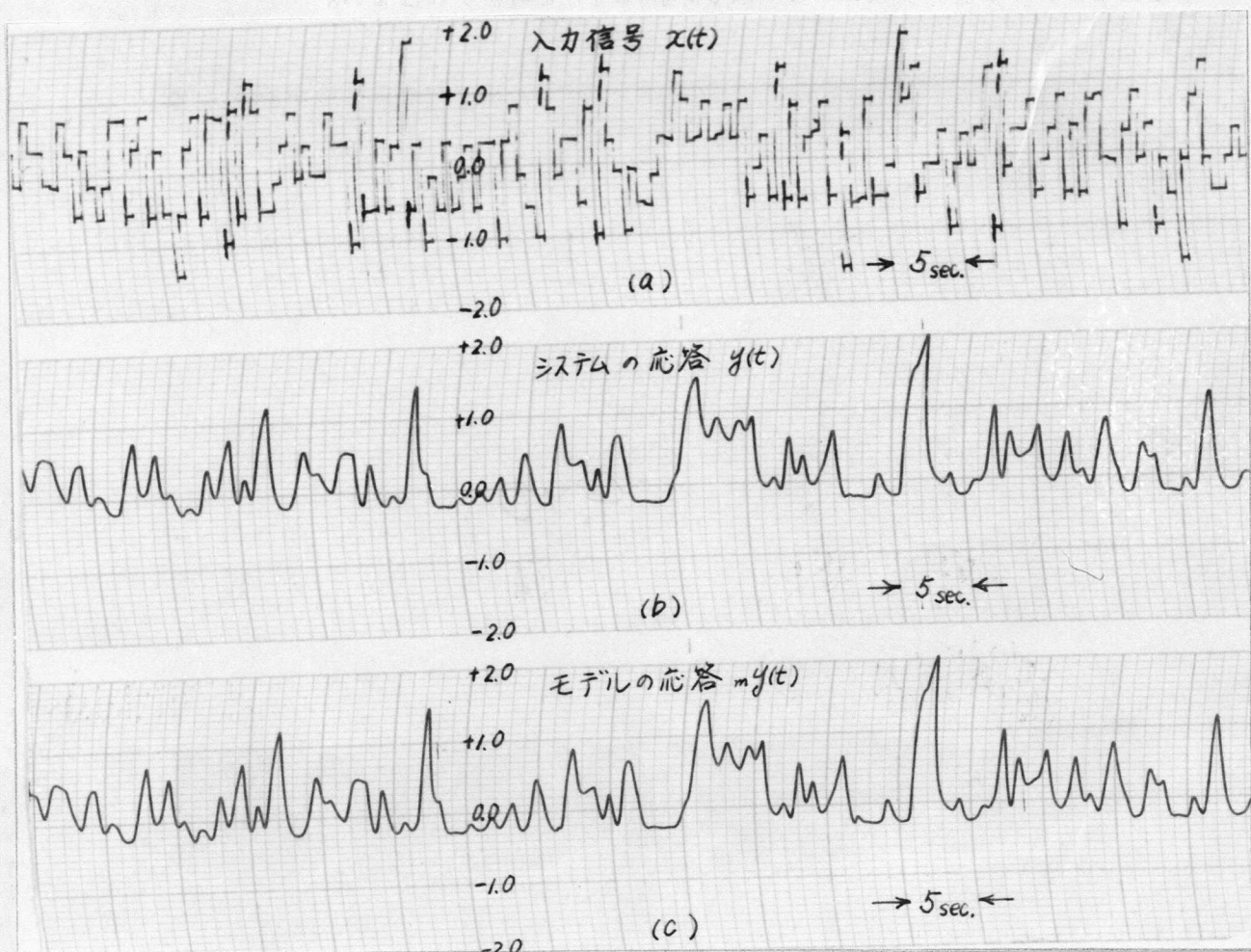


図 4.10 ある入力信号 $x(t)$ に対するシステムとモデルの応答

4.5 結 言

動特性測定のための入力信号として正規性白色信号を用い, Wiener 核を可変直交関数で展開することによりできるだけ簡単な形で非線形システムの動特性を測定する方法を提案した。得られた結果を要約すると下記のようなになる。

(1) この方法は Wiener による Laguerre-Hermite の直交関数を用いた方法 (付録 4.1 参照) を拡張, 発展させたもので, システムの動特性を表わす Wiener 核の直交関数展開は必要最小限の項数で行なえる。

(2) 展開係数の測定はWienerの方法では多次元の Hermite 関数発生回路 (付図 4.3 参照) を必要とし、複雑となるが、本方法は図 4.1 に示した簡単な多次元直交関数回路を用いて行うことができる。

(3) Wienerの方法においてはLaguerre関数の scale factor (式(付 1.1))の決め方に関してはなんら考慮されていないが、この scale factor の最適決定は本方法の特別な場合 (すなわち式(4.3)のKautzの直交関数において $a_1, a_2 = \dots = a_i = a$ とした場合に相当) として取り扱うことができる。

(4) 直交関数の形の最適決定は実際にモデルを構成し、式(4.2.6)の評価関数を計算する必要はなく、たゞ展開係数のみの関数 $O_{N,M}(a_M)$ を考慮すればよい。

(5) 現在の極値探索法では調整パラメータ a_M の個数は3個程度が限度であるが、実在のシステムの中には直交関数の項数を3項程度にとれば十分近似できるものが多いことより、本方法の適用範囲はかなり広いものと思われる。

(6) モデルの近似の良さも展開係数のみの関数(式(4.3.0))で表わされる。

(7) 入力信号が非白色性の場合には shaping filter が有効で Lee と Shetzen の方法⁸⁾ を適用することができる。

(8) 動特性は Wiener 核を直交関数で展開した数式の形で得られるのですぐさま制御理論⁹⁾ を適用することができる。

第 4 章 の 参 考 文 献

- 1) 第 2 章 の 参 考 文 献 12)
- 2) Y.W.Lee, N.Levinson & W.T.Martin : Selected Papers of Norbert Wiener ; The M.I.T.Press, Cambridge (1964)
- 3) H.L.Van Trees : Synthesis of Optimum Nonlinear Control Systems ; The M.I.T.Press, Cambridge (1962)
- 4) W.H.Kautz : Transient Synthesis in the Time Domain ; IRE Trans. on CT, Vol. CT-1, № 3, pp 29~39 (1954)
- 5) 中尾, 藤井 : 可変直交関数を用いた非線形系の動特性測定法 ; 第 1 2 回 自動制御連合講演会予稿集, 113 (昭 4 4)
- 6) 藤井, 中尾 : Wiener 核の可変直交関数展開による非線形系の動特性測定法 ; 制御工学, 14 巻, 10 号, pp. 7~15 (昭 4 5)
- 7) 末岡清市 : 応用数学講座第 3 巻一級数および直交関数系 ; pp. 122~132, コロナ社 (昭 3 9)
- 8) 第 2 章 の 参 考 文 献 13)
- 9) S.H.Kyong & E.P.Gyftopoulos : A Direct Method for a Class of Optimal Control Problems ; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-13, № 3, pp. 240~245 (1968)

第 5 章 2値信号を入力とする非線形システムの 動特性測定法

第 5 章 2値信号を入力とする非線形システムの動特性測定法

5.1 緒 言

第3章および第4章で非線形システムの動特性をVolterra核あるいはWiener核の形で測定する方法について述べたが、非線形システムの動特性をこのように一般的に測定しようとすると、どうしても測定すべきパラメータの個数が多くなり、測定がめんどうとなる。ところが実在のシステムの中にはもともと入力として2値信号のみしか受けないシステムが多く存在する。たとえば筋肉の収縮機構を考えてみると筋肉は中枢神経からの命令をパルス信号として受け、その命令にしたがって所望の張力あるいは収縮力を発生するのであるが(図5.1)、この場合中枢神経からのパルス信号は一定振幅のものであるので、このシステムの入力信号は2値信号であると考えられる¹⁾。またシステムを実際に制御する場合にも、経済性、動作の確実性、などの理由からon-offの制御装置がよく採用される²⁾。このような場合にはシステムの動特性は一般の入力信号に対して知る必要はなく、たゞ2値信号入力に対してのみ知ればよい。

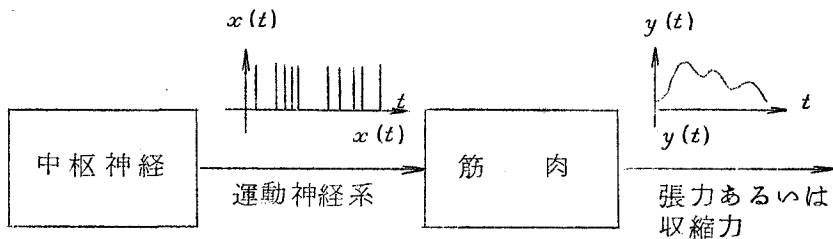


図 5.1 筋肉の収縮機構

本章ではこのように入力として2値信号のみしか受けないシステムの動特性を測定する方法について研究を行ない、このようなシステムの動特性を測定するのに有効な入力信号を提案^{3) 4)}し、この信号を用いればモデルの形およびそのパラメータを簡単に決定できることを確かめた。

5.2 2値信号入力に対する非線形システムの離散値表示

測定対象として図5.2に示す定位性を有する一般の非線形システムを考える。

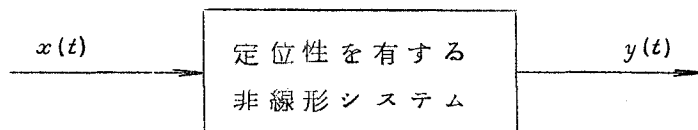


図 5.2 測定対象

図において $x(t)$ はシステムへの入力、 $y(t)$ はこの入力に対するシステムの出力であり、入力 $x(t)$ は図5.3に示すように A 、 B という値のみをとる2値信号が投入されるものとする。測定対

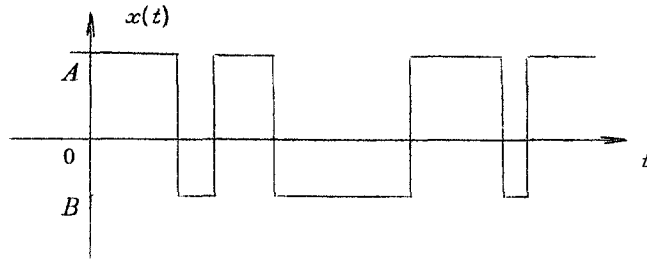


図 5.3 測定対象への入力信号

象の入出力関係は第2章においても述べたように無限次のボルテラ級数により

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (5.1)$$

と表わされる。システムが定位性を有することから Volterra核は

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) \approx 0, \quad \tau_j \geq T_s, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (5.2)$$

T_s : 整定時間

なる関係を有しており、式(5.1)はその積分範囲が有限の Volterra級数

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (5.3)$$

に書きかえられる。測定対象への入力信号 $x(t)$ は A, B という2つの値をとるが、この信号は $1, -1$ という値をとる2値信号 $m(t)$ を用いて

$$x(t) = a \cdot m(t) + b \quad (5.4)$$

ただし $a = \frac{1}{2}(A - B)$, $b = \frac{1}{2}(A + B)$

と表わすことができる。この関係を式(5.3)に代入し、 $m(t)$ に関して同じべきの項を集めて書きなおすと

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \{a \cdot m(t-\tau_1) + b\} \{a \cdot m(t-\tau_2) + b\} \dots \\ &\quad \{a \cdot m(t-\tau_n) + b\} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} a^n \{ h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} {}_i C_n \cdot b^{i-n} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \\ &\quad d\tau_{n+1} d\tau_{n+2} \dots d\tau_i \} m(t-\tau_1) m(t-\tau_2) \dots m(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

が得られる。ここで上式の積分の核をあたらしく

$$\begin{aligned} &a^n \{ h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} {}_i C_n \cdot b^{i-n} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} h_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) d\tau_{n+1} d\tau_{n+2} \dots d\tau_i \} \\ &\triangleq b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \end{aligned} \quad (5.6)$$

とおくと、システムの出力は

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \dots \int_0^{T_s} b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) m(t-\tau_1) m(t-\tau_2) \dots m(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (5.7)$$

で表わされる。これより A, B という値をとる 2 値信号入力に対するシステムの入出力関係は、 $1, -1$ という正規化された値をとる 2 値信号入力に対する関係式に変換することができる。変換前の Volterra 核 $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ は定位性の条件を満足しているので、変換された Volterra 核 $b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ も当然

$$b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) \approx 0 \quad \tau_j \geq T_s \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (5.8)$$

なる定位性の条件を満足している。

式 (5.7) を離散値幅 Δ で離散値表示すると $t = r \cdot \Delta$ において

$$y(r) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^M \dots \sum_{i_n=1}^M b_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \right\} \quad (5.9)$$

ただし

$$y(r) = y(r \Delta)$$

$$b_{i_1, i_2, \dots, i_n} = b[(i_1 - \frac{1}{2})\Delta, (i_2 - \frac{1}{2})\Delta, \dots, (i_n - \frac{1}{2})\Delta] \Delta^n$$

$$r^{m_i} = m[(r - i + \frac{1}{2})\Delta]$$

$$r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n}} = r^{m_{i_1}} \cdot r^{m_{i_2}} \dots r^{m_{i_n}}$$

$$(M : M-1 < T_s/\Delta \leq M \text{ なる整数})$$

となる。システムの Volterra 核に相当する b_{i_1, i_2, \dots, i_n} が変数 i_1, i_2, \dots, i_n に関して対称性を示すこと、入力 r^{m_i} が $r^{m_i} = 1$ となることを考慮すると式 (5.9) は

$$\begin{aligned} y(r) &\approx \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} b_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \right\} \\ &= \mathbf{m}^T(r) \cdot \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ただし

$$\mathbf{m}^T(r) = (1, r^{m_1}, r^{m_2}, \dots, r^{m_M}, r^{m_{21}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}, \dots, 1)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M, \beta_{2,1}, \dots, \beta_{M, M-1}, \dots, \beta_{M, M-1}, \dots, 1)$$

T : 転置を表わす

のように簡単化することができる。

以上より 2 値信号を入力とする一般の定位性を有する非線形システムの入出力関係は式 (5.10) で表わされ、その特性はパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ によって特徴づけられる。したがってその動特性測定はパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の測定に帰することができる。

5.3 動特性測定法

5.3.1 動特性測定のための入力信号

測定対象は定位性を有するので、時点 $r \cdot \Delta$ におけるシステムの入出力 $y(r)$ は過去の M 個の入力の時点列 $r^{m_1}, r^{m_2}, \dots, r^{m_M}$ の影響を受ける。システムへの入力は 2 値すなわち $r^{m_i} = 1$ あるいは -1 のみをとるので、システムの入出力に影響を及ぼす過去の入力 $\{r^{m_1}, r^{m_2}, \dots, r^{m_M}\}$ の組み合わせは 2^M 個存在する。したがって動特性を完全に測定するためには、これらすべての組み合わせを含む信号を入力信号として用いなければならない。また動特性測定のための入力信

号はその入出力の測定データからシステムの動特性を表わすパラメータを簡単に計算できるようなものであることが望ましい。本節ではこのような組合わせをすべて含んだ、しかもシステムを特徴づけるパラメータの測定が簡単な入力信号を提案する。

線形システムの動特性測定のために m 系列信号⁵⁾ (最大周期列信号) がよく用いられるが、この信号は上記の 2^M 個の組合わせのうち 1 ばかりの組合わせ $\{1, 1, \dots, 1\}$ または -1 ばかりの組合わせ $\{-1, -1, \dots, -1\}$ を除いた $2^M - 1$ 個の組合わせすべてを含んだ周期が $(2^M - 1)\Delta$ の信号である。したがって m 系列信号に 1 ばかりの組合わせあるいは -1 ばかりの組合わせを適当に挿入することにより、 2^M 個のすべての組合わせを含んだ周期 $N_T \cdot \Delta = 2^M \Delta$ の信号を作ることができる。 -1 ばかりの組合わせ $\{-1, -1, \dots, -1\}$ を含む平均値 $-1/(2^M - 1)$ の m 系列信号を用いて上記の信号を作ること考える。時点 $r = 1$ では $\{ {}_1 m_1, {}_1 m_2, \dots, {}_1 m_M \} = \{ 1, 1, 1, \dots, 1 \}$ なる 1 ばかりの組合わせを用い、 $r = 2$ 以後は m 系列信号から得られる組合わせ、すなわち $r = 2$ においては $\{ {}_2 m_1, {}_2 m_2, \dots, {}_2 m_M \} = \{ -1, 1, 1, \dots, 1 \}$ 、 $r = 3$ においては \dots 、 $r = 2^M$ では $\{ {}_{2^M} m_1, {}_{2^M} m_2, \dots, {}_{2^M} m_M \} = \{ 1, 1, 1, \dots, 1, -1 \}$ なる組合わせを用いる。 $M = 3$ の場合について各時点の組合わせを示すと表 5.1 のようになり、この組合わせを発生する信号 $m(t)$ は図 5.4 のようになる。1 ばかりの組合わせを含む平均値 $1/(2^M - 1)$ の m 系列信号に関しても同様にこのような信号をつくることできる。

表 5.1 入力組合わせ ($M = 3$)

r	${}_r m_1$	${}_r m_2$	${}_r m_3$	
1	1	1	1	} m 系ら 列れ る 信 号 組 合 わ せ 得
2	-1	1	1	
3	1	-1	1	
4	-1	1	-1	
5	-1	-1	1	
6	-1	-1	-1	
7	1	-1	-1	
8	1	1	-1	

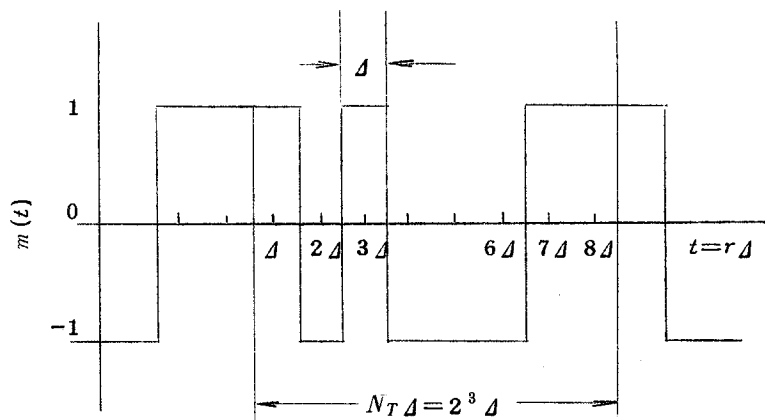


図 5.4 すべての組合わせを含んだ入力信号 $m(t)$ の波形 ($M = 3$)

つぎにこのようにして得られた入力信号はどのような性質を有するかについて考察する。入力信号 $r m_i$ ($1 \leq i \leq M$) は r が $2 \sim 2^M$ の間では m 系列信号に等しいから $r m_i$ と $r m_j$ の積は

$$r m_{i_1} \cdot r m_{i_2} (= r m_{i_1, i_2}) = r m_{i_l}, \quad 2 \leq r \leq 2^M \quad (5.11)$$

$$(i_1 > i_2)$$

のように位相の異なった同一の m 系列信号になる。 i_l は i_1, i_2 から決まる値である。同様に信号 $r m_i$ の高次の積についても

$$r m_{i_1} \cdot r m_{i_2} \cdots r m_{i_n} (= r m_{i_1, i_2, \dots, i_n}) = r m_{i_p}, \quad 2 \leq r \leq 2^M \quad (5.12)$$

$$(M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_n)$$

なる関係が得られる。ここで i_p は i_1, i_2, \dots, i_n から決まる値である⁵⁾。式 (5.12) の関係を用いると入力信号 $r m_i$ の高次の積 $r m_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ ($M \geq i_1 > i_2 > \dots > i_n$) の相関は

$$\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} r m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r m_{j_1, j_2, \dots, j_k}$$

$$= \frac{1}{2^M} \left\{ 1 \cdot 1 + \sum_{r=2}^{2^M} r m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r m_{j_1, j_2, \dots, j_k} \right\}$$

$$= \frac{1}{2^M} \left\{ 1 \cdot 1 + \sum_{r=2}^{2^M} r m_{i_p} \cdot r m_{j_p} \right\}$$

$$= \begin{cases} 1 : n = k \text{ かつ } i_l = j_l \ (l = 1, 2, \dots, n) \text{ の場合} \\ 0 : \text{その他の場合} \end{cases} \quad (5.13)$$

なる関係を満足している。またその平均値は

$$\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} r m_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \frac{1}{2^M} \sum_{r=1}^{2^M} r m_{i_p}$$

$$= \frac{1}{2^M} \left(1 \cdot m_{i_p} + \sum_{r=2}^{2^M} r m_{i_p} \right)$$

$$= \frac{1}{2^M} \{ 1 + (-1) \}$$

$$= 0 \quad (5.14)$$

となる。以上よりここで提案した信号 $m(t)$ は動特性測定に必要な入力のすべての組合わせを含み、かつその信号の高次の積の相関は直交性を有し、平均値は 0 となることがわかる。

次節ではこの信号 $m(t)$ を入力信号として用い、システムの特性を表わすパラメータ β を測定する方法について述べる。

5.3.2 システムのパラメータの測定法

前節で提案した信号 $m(t)$ を用い、測定対象へ

$$x(t) = a \cdot m(t) + b \quad (5.4)$$

たゞし $a = \frac{1}{2}(A - B)$, $b = \frac{1}{2}(A + B)$

なる入力信号を投入する。この入力に対する測定対象の応答は離散的に式 (5.10) により

$$y(r) = \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \beta_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r m_{i_1, i_2, \dots, i_n} \right\}$$

$$= m^T(r) \cdot \beta \quad (5.10)$$

と表わされる。パラメータ β を決定するため式 (5.10) と同形の次数が N 次のモデル

$$\begin{aligned} N y(r) &= \sum_{n=0}^N \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} N \beta_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \right\} \\ &= N m^T(r) \cdot N \beta \end{aligned} \quad (5.15)$$

ただし

$$\begin{aligned} N m^T(r) &= (1, r^{m_1}, r^{m_2}, \dots, r^{m_M}, r^{m_{2,1}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}, \dots, r^{m_{M, M-1}}) \\ N \beta^T &= (N \beta_0, N \beta_1, N \beta_2, \dots, N \beta_M, N \beta_{2,1}, \dots, N \beta_{M, M-1}, \dots, N \beta_{M, M-1}, \dots, N \beta_{M, M-1}) \end{aligned}$$

を導入する。ここでこのモデルの応答と測定対象の応答の差に関して

$$J_N(N\beta) = \sum_{r=1}^{N_T} \{ y(r) - N y(r) \}^2 = \sum_{r=1}^{N_T} \{ y(r) - N m^T(r) \cdot N \beta \}^2 \quad (5.16)$$

なる評価関数を考え、この評価関数が最小となるようにモデルのパラメータ $N\beta$ を決定する。 $J_N(N\beta)$ を最小にする $N\beta$ の値は

$$N \beta^* = (N M^T \cdot N M)^{-1} N M^T \cdot Y \quad (5.17)$$

ただし

$$N M = \begin{bmatrix} N m^T(1) \\ N m^T(2) \\ \vdots \\ N m^T(N_T) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N_T) \end{bmatrix}$$

で与えられる。 $N M^T \cdot N M$ を計算すると

$$\begin{aligned} N M^T \cdot N M &= \sum_{r=1}^{N_T} N m(r) \cdot N m^T(r) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{N_T} 1^2 & \sum_{r=1}^{N_T} 1 \cdot r^{m_1} & \sum_{r=1}^{N_T} 1 \cdot r^{m_2} & \dots & \sum_{r=1}^{N_T} 1 \cdot r^{m_{M, M-1}, \dots, M-N+1} \\ \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_1} \cdot 1 & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_1^2} & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_1} \cdot r^{m_2} & \dots & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_1} \cdot r^{m_{M, M-1}, \dots, M-N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_M, \dots, M-N+1} \cdot 1 & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_M, \dots, M-N+1} & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_M, \dots, M-N+1} \cdot r^{m_2} & \dots & \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_M, \dots, M-N+1}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、入力信号 $m(t)$ は前節で述べたように式 (5.13) の関係を満足するので、このマトリクスは対角要素だけが残る、結局

$$N M^T \cdot N M = N_T \cdot \Pi, \quad \Pi: \text{単位マトリクス} \quad (5.18)$$

のように簡単な形になる。これよりモデルのパラメータは

$$N \beta^* = \frac{1}{N_T} N M^T Y = \frac{1}{N_T} \left\{ \sum_{r=1}^{N_T} N m(r) \cdot y(r) \right\} \quad (5.19)$$

すなわち

$$N \beta_{j_1, j_2, \dots, j_k}^* = \frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}} \cdot y(r) \quad (5.19')$$

で与えられ、モデルのパラメータの計算はこのパラメータに対応する入力とシステムの出力と

の相関を計算すればよいことがわかる。

一方式 (5.19) を用いて計算したモデルのパラメータ $N\beta_{j_1, j_2, \dots, j_k}^*$ はシステムのパラメータ $\beta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ に等しくなることが容易に導かれる。すなわち式 (5.10) の両辺に $r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}}$ を掛けて、入力信号の 1 周期にわたって平均すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} y(r) \cdot r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}} \\ &= \frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \beta_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \right\} r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}} \\ &= \frac{1}{N_T} \sum_{n=0}^M \left\{ \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \dots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \beta_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left(\sum_{r=1}^{N_T} r^{m_{i_1, i_2, \dots, i_n} + m_{j_1, j_2, \dots, j_k}} \right) \right\} \end{aligned}$$

となり、入力信号に対する式 (5.13) の関係より、システムのパラメータに関して

$$\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} y(r) \cdot r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}} = \beta_{j_1, j_2, \dots, j_k} \quad (5.20)$$

なる結果が得られる。式 (5.19) と式 (5.20) より

$$N\beta_{j_1, j_2, \dots, j_k}^* = \beta_{j_1, j_2, \dots, j_k} \quad (5.21)$$

となることがわかる。

以上より測定対象の動特性を表わすパラメータの測定は式 (5.19) の簡単な計算により行なうことができ、その測定値は用いるモデルの次数 N に関係なくシステムの真のパラメータに一致したものが得られる。パラメータ β を測定するための回路を図 5.5(a) に示す。入力 $r^{m_{j_1, j_2, \dots, j_k}}$ と出力 $y(r)$ の乗算は入力が 2 値であるので図 5.5(b) に示すようにリレーを用いて行なうことができる。

5.3.3 モデルの次数の決定法

測定対象の形に関してなんらの情報もないので、測定対象のモデルの形をなんらかの方法で決める必要がある。モデルの形はそのモデルが測定対象の特性を十分近似できるようなものを選びなければならない。 N 次のモデルがどの程度測定対象の特性を近似するかを表わす評価関数として測定対象とモデルの応答の 2 乗誤差面積を測定対象の応答で正規化した

$$E_N = \frac{\sum_{r=1}^{N_T} \{ y(r) - N y^*(r) \}^2}{\sum_{r=1}^{N_T} y^2(r)} = \frac{J_N(N\beta^*)}{\sum_{r=1}^{N_T} y^2(r)} \quad (5.22)$$

なる評価関数を考える。分子の $J_N(N\beta^*)$ は

$$\begin{aligned} J_N(N\beta^*) &= \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r) - 2 \sum_{r=1}^{N_T} y(r) \cdot N y^*(r) + \sum_{r=1}^{N_T} N y^*(r)^2 \\ &= \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r) - 2 \left\{ \sum_{r=1}^{N_T} y(r) \cdot N m^T(r) \right\} N\beta^* + N\beta^{*T} \left\{ \sum_{r=1}^{N_T} N m(r) \cdot N m^T(r) \right\} N\beta^* \end{aligned}$$

となり、式 (5.19) および式 (5.18) の関係を用いると

$$\begin{aligned}
 J_N(N\beta^*) &= \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r) - 2 \cdot N_T \cdot N\beta^{*T} \cdot N\beta^* + N_T \cdot N\beta^{*T} \cdot N\beta^* \\
 &= \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r) - N_T \cdot N\beta^{*T} \cdot N\beta^*
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

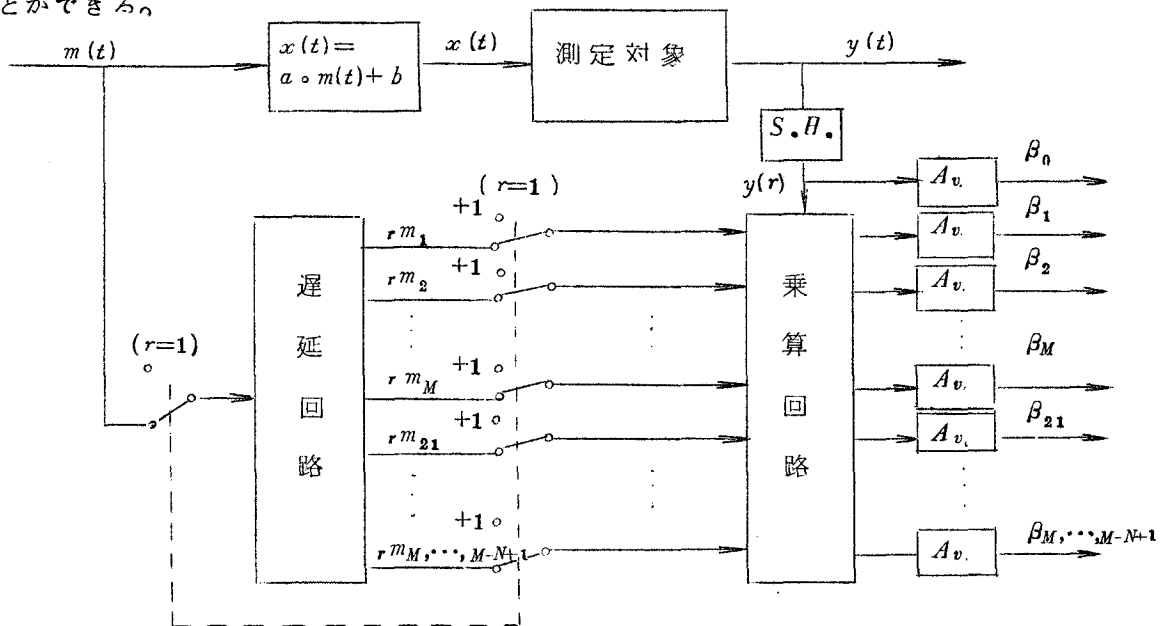
となる。したがって評価関数 E_N は

$$E_N = 1 - \frac{N\beta^{*T} \cdot N\beta^*}{\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r)} = 1 - \frac{N\beta^{*T} \cdot N\beta^*}{\beta^T \cdot \beta}
 \tag{5.24}$$

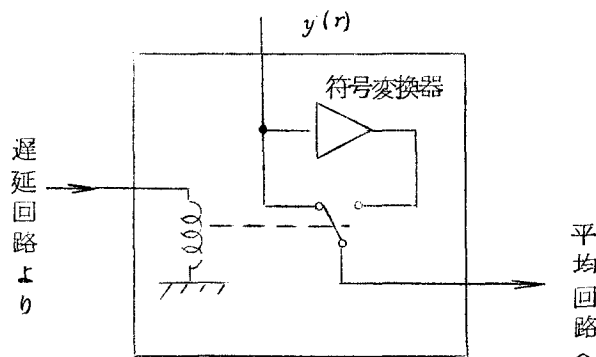
で与えられる。 E_N はモデルの次数 N の増加とともに単調に減少し、 N がシステムの次数 M に等しくなったときに 0 に等しくなる⁶⁾。これより E_N がある許容値 ϵ の範囲内にはいつたときに、その次数 N をモデルの次数とすればよい。またこの許容関数 E_N はシステムのパワー

$\left(\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} y^2(r) \right)$ と 5.3.2 で測定されたモデルのパラメータのみを用いて簡単に計算すること

とができる。



(a) S.H.: サンプルホールド回路
Av.: 平均回路



(a) パラメータ測定回路
(b) 乗算回路

図 5.5 パラメータ β の測定回路

5.4 測定例

〔例1〕 測定対象として図5.6に示す非線形システムを考える。破線内の構成は未知で入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のみが観測できるものとし、システムへの入力信号は $A=1.0$ と $B=-0.5$ の2値をとる信号のみが投入されるものとする。

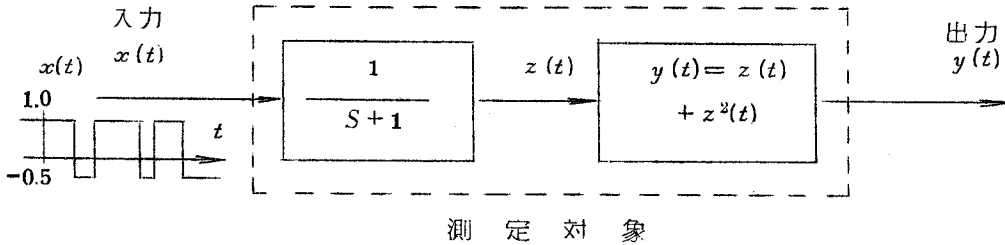


図 5.6 測定対象

測定対象の動特性を表わすパラメータの理論値は

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= b + b^2 + a^2 \frac{e^{-\Delta} - e^{-(2M+1)\Delta}}{1 - e^{-2\Delta}} \cdot \Delta^2 \\ \beta_{i_1} &= a(1 + {}_2C_1 \cdot b) e^{-(i_1 - \frac{1}{2})\Delta} \cdot \Delta \\ \beta_{i_2, i_1} &= 2a^2 e^{-(i_1 + i_2 - 1)\Delta} \cdot \Delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

ただし $a = (A - B) / 2$, $b = (A + B) / 2$

である(付録5.1参照)。測定間隔 Δ を0.5 secに、モデルの近似度を表わす評価関数 E_N の許容値 ϵ を $\epsilon = 10^{-3}$ にとる。測定対象の整定時間 T_s を4~5 secとし M を $M = T_s / \Delta = 9$ に選ぶ。周期が $2^\circ\Delta$ の5.3.1で説明した信号 $m(t)$ を用い、測定対象に式(5.4)の入力

$$x(t) = 0.75m(t) + 0.25$$

を投入する。図5.5の回路を用いてモデルのパラメータを測定し、この測定結果からモデルの近似度を表わす評価関数 E_N を種々の N に対して計算する。その結果を表5.2に示す。これよりモデルの次数は2次で十分であることがわかる。また参考のためモデルのパラメータ個数(N_p)と $\sqrt{E_N}$ との関係を示すと図5.7のようになる。測定対象のパラメータの測定値と式(5.25)より計算される理論値を表5.3に示す。この測定パラメータを用いて2次のモデルを構成し、図5.8(b)に示した2値入力に対するシステムとこのモデルの応答を測定すると図5.8(a)のようになる。図より両者の応答はよく一致していることがわかる。

表 5.2 モデルの近似度を表わす評価関数 E_N の計算値

N	E_N
0	0.6201×10^0
1	0.3867×10^{-1}
2	0.1324×10^{-4}

〔例2〕 測定対象として飽和要素が含まれた図5.9に示す非線形システムを考える。飽和要素は $y_2(t) = \tanh z(t)$ で表わされるものとする。システムへの入力信号 $x(t)$ は $A=1.0$, $B=0$ の2値をとる信号が投入されている。動特性測定に際して図5.9の破線内の構造に関して情報はまったくないものとする。例1と同様に、測定間隔 Δ を0.5 secに、 ϵ を 10^{-3} にとる。システムの整定時間 T_s を4~5 sec程度であると、 M を9に選ぶ。周期 $2^\circ\Delta$ の信号 $m(t)$ を

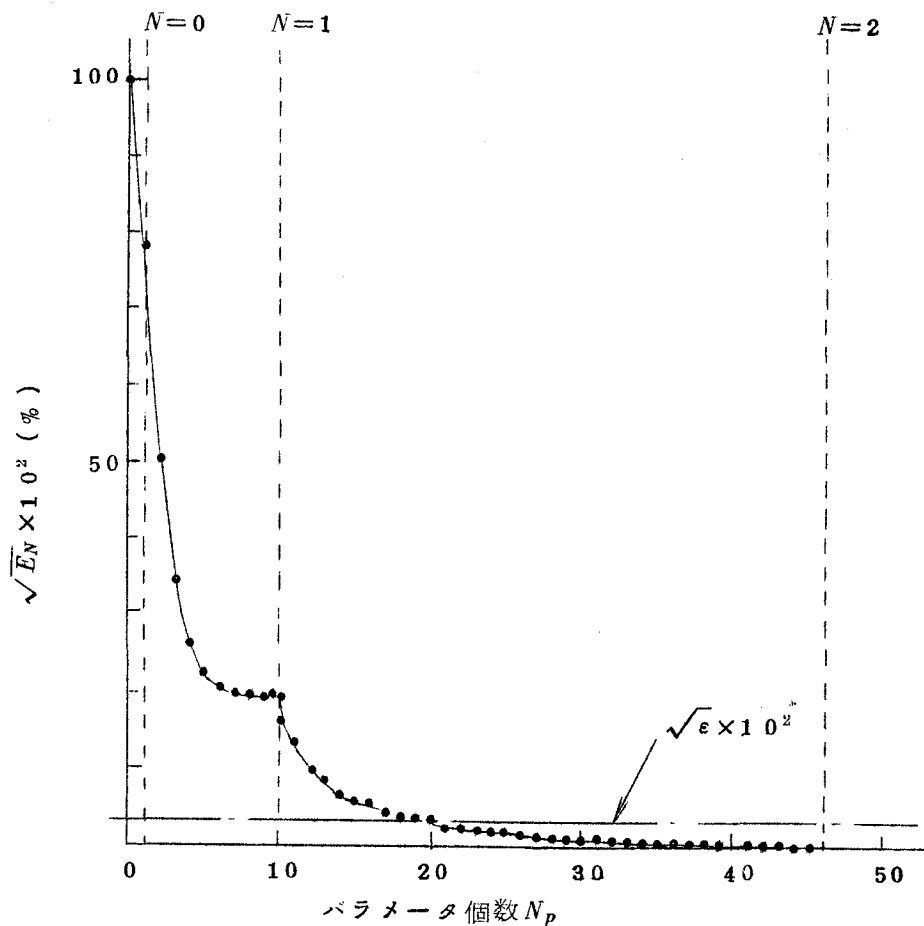


図 5.7 モデルのパラメータ個数 N_p と $\sqrt{E_N}$ との関係

表 5.3 測定対象のパラメータの理論値および測定値

(b) 2 次のパラメータ

(a) 0 次および 1 次のパラメータ

i_1	${}^2\beta_{i_1}^*$	β_{i_1}
0	0.4504	0.4503
1	0.4428	0.4381
2	0.2686	0.2657
3	0.1629	0.1612
4	0.0988	0.0977
5	0.0600	0.0593
6	0.0386	0.0360
7	0.0228	0.0218
8	0.0137	0.0132
9	0.0083	0.0080

i_1	i_2	${}^2\beta_{i_1, i_2}^*$	β_{i_1, i_2}	i_1	i_2	${}^2\beta_{i_1, i_2}^*$	β_{i_1, i_2}
2	1	0.1056	0.1035	7	4	0.0020	0.0019
3	1	0.0641	0.0628	5	5	0.0012	0.0011
2	2	0.0389	0.0381	6	6	0.0009	0.0007
4	1	0.0389	0.0381	8	1	0.0053	0.0052
2	2	0.0236	0.0231	2	2	0.0032	0.0031
3	3	0.0143	0.0140	3	3	0.0038	0.0019
5	1	0.0236	0.0231	4	4	0.0012	0.0011
2	2	0.0143	0.0140	5	5	0.0008	0.0007
3	3	0.0087	0.0085	6	6	0.0005	0.0004
4	4	0.0053	0.0052	7	7	0.0004	0.0003
6	1	0.0193	0.0140	9	1	0.0032	0.0031
2	2	0.0087	0.0085	2	2	0.0020	0.0019
3	3	0.0053	0.0052	3	3	0.0012	0.0011
4	4	0.0032	0.0031	4	4	0.0019	0.0007
5	5	0.0023	0.0019	5	5	0.0005	0.0004
7	1	0.0087	0.0085	6	6	0.0003	0.0003
2	2	0.0083	0.0052	7	7	0.0002	0.0002
3	3	0.0032	0.0031	8	8	0.0002	0.0001

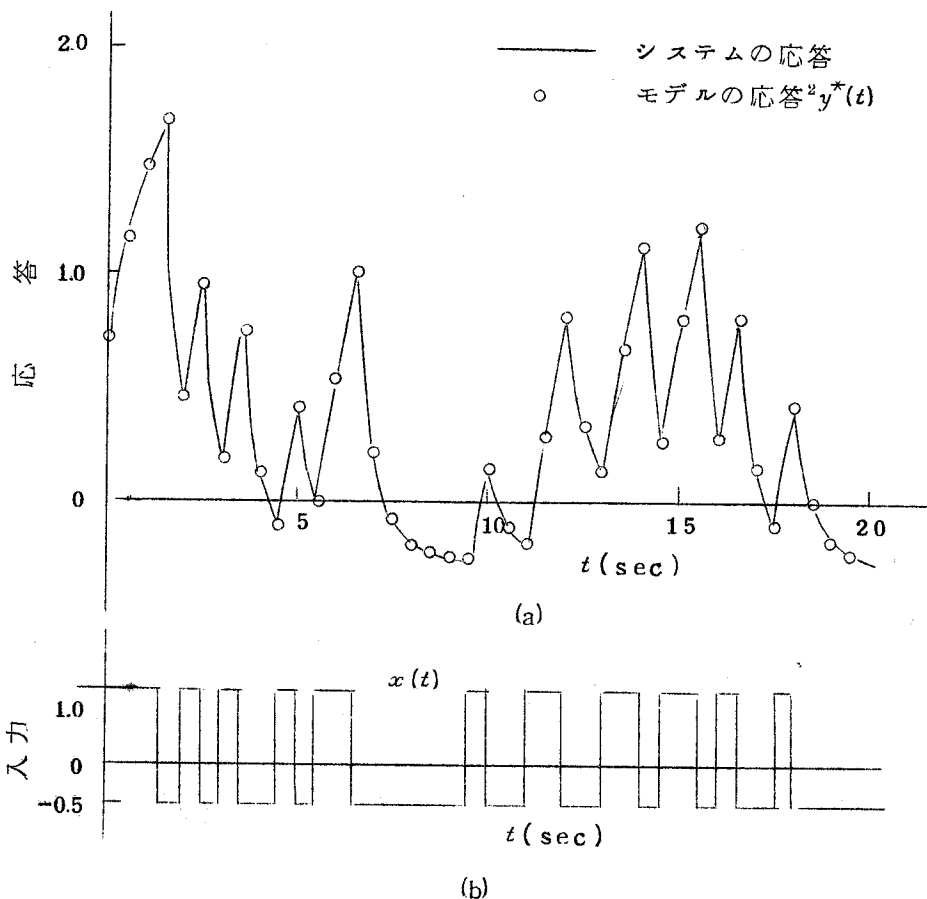


図 5.8 ある入力信号 $x(t)$ に対するシステムとモデルの応答波形

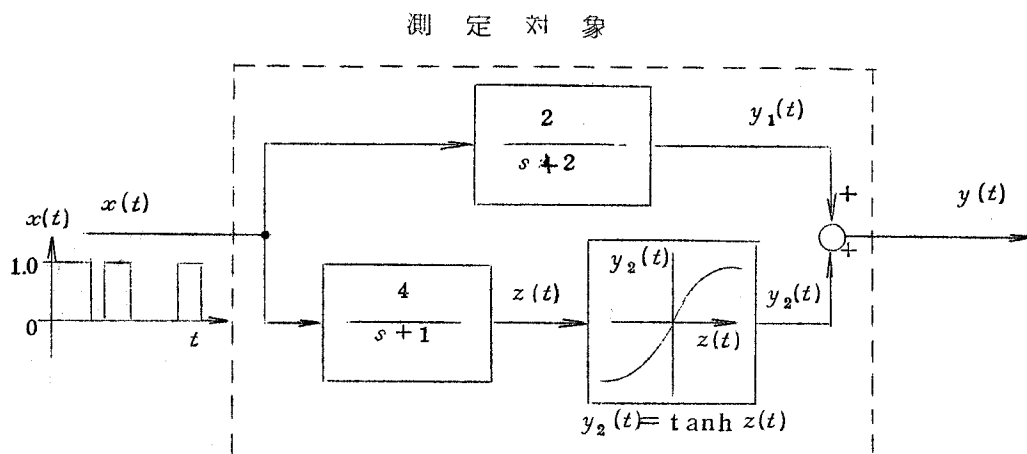


図 5.9 測定対象

用いて得られる。

$$x(t) = 0.5 m(t) + 0.5$$

なる信号を入力信号として用いて動特性測定を行なう。パラメータの測定結果を用いてモデルの次数を決定する評価関数 E_N を計算すると表 5.4 のようになる。またモ

表 5.4 評価関数 E_N の計算値

N	E_N
0	1.219×10^{-1}
1	6.813×10^{-3}
2	8.432×10^{-4}
3	1.703×10^{-5}
4	4.263×10^{-7}

デルのパラメータ個数を N_p と $\sqrt{E_N}$ の関係を示すと図 5.10 のようになる。これよりモデルが $E_N \leq \epsilon$ を満足するためには、 N を 2 次にとれば十分であることがわかる。以上の測定結果を用いて 2 次のモデルを構成し、図 5.11(b) に示す入力信号に対するこのモデルとシステムの応答を測定すると図 5.11(a) のようになる。両者はほぼ一致していることがわかる。

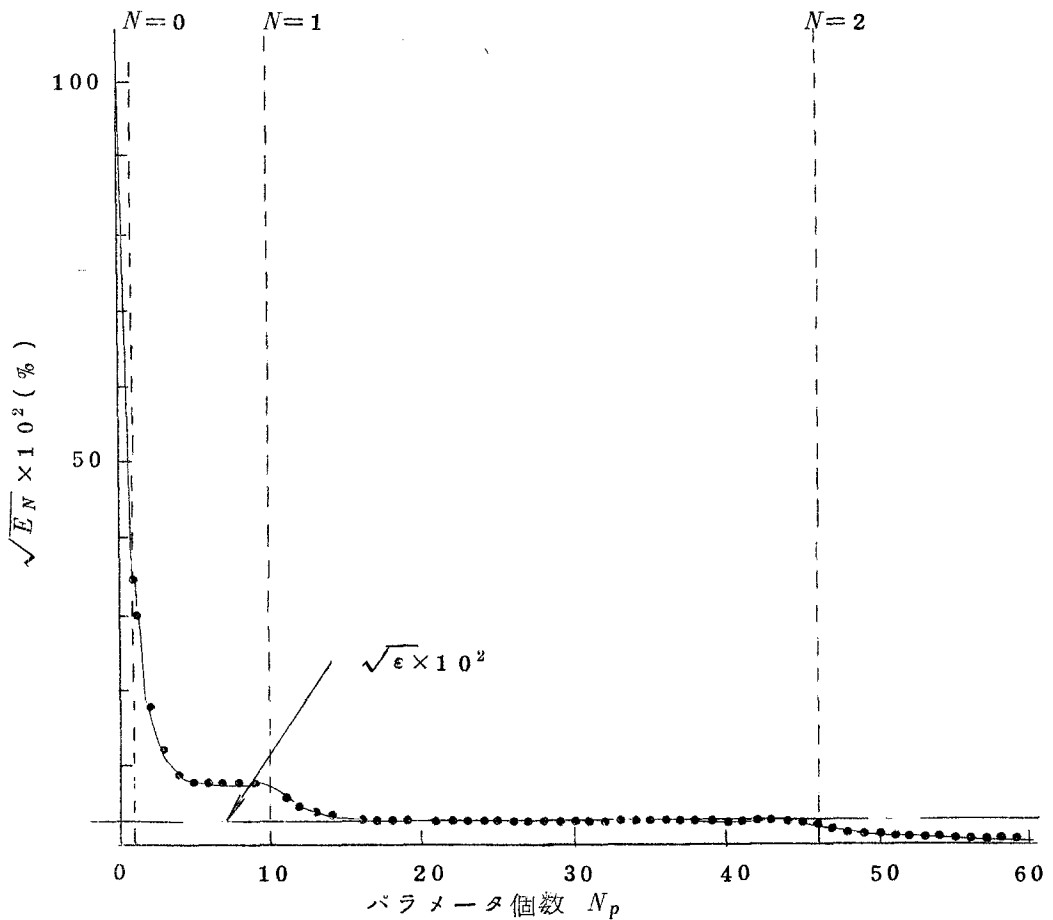


図 5.10 モデルのパラメータ個数 N_p と $\sqrt{E_N}$ との関係

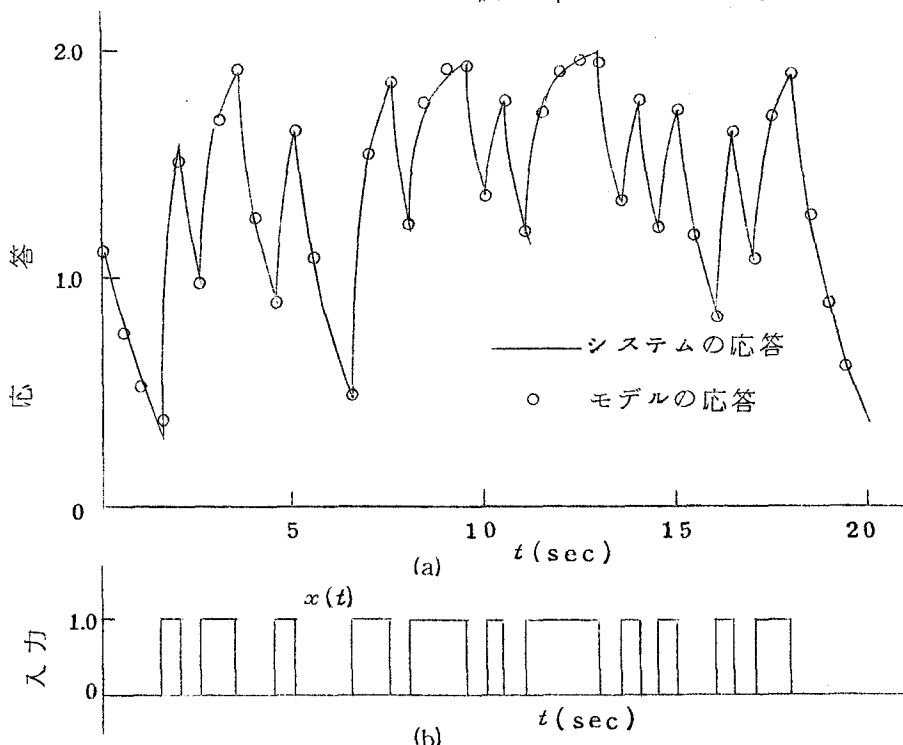


図 5.11 ある入力信号 $x(t)$ に対するシステムとモデルの応答波形

5.5 結 言

システムが2値信号入力のみしか受けない場合には、そのシステムの動特性は一般の入力信号に対して知る必要はなく、たと2値信号に対してのみ知ればよい。本章ではこのように入力として2値信号のみしか受けないシステムの動特性を測定する方法についての研究を行ない、このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を見出し、この信号を用いれば簡単にシステムの動特性を測定できることを確かめた。本方法の特徴についてまとめると以下のようになる。

(1) 動特性測定に用いる入力信号は m 系列信号を少し修正することにより簡単に作るができる。

(2) システムの動特性を表わすパラメータは式(5.19)に示すようにこのパラメータに対応する入力とシステムの出力の相関で与えられ、このパラメータを測定するための回路は図5.5に示すように遅延回路とリレーで駆動される乗算回路を用いて実現できる。

(3) 測定されたパラメータ $N\beta^*$ は用いるモデルの次数 N に関係なくシステムの真のパラメータに一致したものが得られる(式(5.21))。

(4) モデルの良否は測定されたパラメータと測定対象の出力のパワーのみを用いて簡単に判定することができる(式(5.24))。またモデルの形は5.3.3において述べたように次数 N で規定するという方法以外に、パラメータ個数 N_p で規定する方法も考えられる。たとえば測定例1ではモデルの形を次数で規定するとモデルのパラメータ個数は45個必要となるが、モデルの形をパラメータ個数 N_p で規定すると20個でよいことがわかる(図5.7)。

(5) 多値信号を入力とする非線形系の動特性を測定する場合へも容易に理論を拡張することができる⁴⁾。

第 5 章の参考文献

- 1) 阪本, 若林: 医用電子・生体工学概論; pp. 85~109, コロナ社 (昭42)
- 2) オンオフ制御分科会: オンオフ制御; 日本機械学会 (昭43)
- 3) 真鍋, 中尾, 藤井: 2値信号を入力とする非線形系の動特性測定法; 第9回計測制御学会
学術講演会予稿集, 219 (昭45)
- 4) 真鍋, 中尾, 藤井: 2値信号を入力とする非線形系の動特性測定法; 計測自動制御学会論
文集, 7巻, 4号, pp. 331~339 (昭46)
- 5) 佐藤, 井戸川: m 系列の二三の性質とその応用; 計測自動制御学会論文集, 2巻, 2号
(昭41)
- 6) 第4章の参考文献 7)

第 6 章 結 論

第 6 章 結 論

これまでに提案されている非線形システムの動特性測定法は実際に適用する場合に種々の問題点を有している。筆者はこれらの問題点を解決するためにシステムのモデルとしては関数を用いて非線形システムの動特性を一般的に測定する方法について研究を行なった。本研究において提案した各種の測定法に関して得られた結果はそれぞれの章の結言において述べた通りであるが、本章ではこれらの測定法の相互の関連および個々の測定法に関して得られた結果を総括的に記述することにする。

(1) Volterra級数を用いた方法(第3章の方法)は定位性(有限時間整定)のシステムのみならず無定位性のシステムにも適用できるが、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法(第4章の方法)は有限時間整定のシステムのみに限られる。また前者の方法は測定のために用いる入力信号は測定対象の動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号であればどのようなものでもよく、正規性、白色性などの特別な性質を有する信号は必要ではないが、後者の方法は正規性白色信号を入力信号として投入しなければならない。

(2) 動特性の測定結果はVolterra級数を用いた方法ではVolterra核の応答波形の形で得られるので制御理論を適用する場合には不便であるが、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法では数式の形で得られるのですぐさま制御理論を適用できるという長所を有している。

(3) 本研究において提案した方法はすべてモデルの形を近似度を考慮して決定しているため、動特性の測定結果は十分信頼のおけるものが得られる。またこの近似度はVolterra級数の入力信号の振幅に対する顕著な性質(式(3.10))を利用することによりあらかじめ簡単に計算することができ、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法では式(4.30)で、また2値信号入力を受ける非線形システムに対しては式(5.24)で与えられ、これらは測定パラメータのみの関数であるので、実際にモデルを構成することなく、簡単に評価することができる。

(4) Wienerによって提案されたLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法は非線形システムの動特性を測定するための一般的な考え方を与えたものとして価値があるが、測定に多大の労力を要するとともに、測定結果が複雑になるという実際上の問題点を有している。第4章で提案したWienerの直交はん関数級数を用いた方法はこれらの問題を解決するものであり、パラメータの測定は図4.1に示した簡単な多次元直交関数回路を用いて行なうことができる。

(5) 実在のシステムの中にはもともと入力として2値信号のみしか受けないシステムが多く存在する。このようなシステムに対しては一般の入力信号に対して動特性を測定する必要はなく、たゞ2値信号入力に対してのみ測定を行えばよく、モデルの形も簡単になる。このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を提案し、この信号を用いれば動特性測定が簡単化されることを確かめた。

(6) 2値信号を入力とする非線形システムの動特性の測定法は多値信号を入力とする非線形系の動特性にも容易にその理論を拡張することができる。

謝 辞

本研究の実施にあたり終始御懇篤なる御指導，御鞭撻を賜わった藤井克彦教授，西村正太郎教授に心より感謝の意を表わします。また常に有益なる御助言，御教示下さった鈴木胖助教授に謝意を表します。

また大学院在学中，御指導，御教示いただいた山村豊教授，大石嘉雄教授，山中千代衛教授および川辺和夫教授に厚くお礼申し上げます。

本研究を行なうにあたって種々の御援助を得た藤井研究室，西村研究室の諸氏に深く謝意を表します。とくに本研究について有益な御討論をいただいた村上吉繁講師，北村新三助手，笠井健助手，黒田英三助手，ならびに森田龍彌彌助手に厚くお礼申し上げます。さらに研究に直接御協力を得た大学院学生真鍋道孝君，ならびに卒業研究としてこの研究に協力された三上博明君に感謝いたします。

付 録

付録 3.1 収束の保証

式 (3.9) において p_i は定数で L は十分大なる整数とした。いま p_i を連続変数におきかえると式 (3.10), (3.11) はそれぞれ

$$y(p, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k [g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k \quad (\text{付3-1.1})$$

$${}^N y(p, t) = \sum_{k=0}^N {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k \quad (\text{付3-1.2})$$

となる。ただし p は $|p| \leq 1$ なる連続変数である。式 (3.12) の評価関数 J_N もまた積分記号を用いて

$$J_N = \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k \right\}^2 dp \quad (\text{付3-1.3})$$

と書きかえられる。

式 (付3-1.1) は正規直交関数,

$$L_k(p) = \sum_{j=0}^k C_{kj} p^j \quad (k=0, 1, \dots, \infty)$$

ただし

$$\int_{-1}^1 L_n(p) L_m(p) dp = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

を用いて

$$\begin{aligned} y(p, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} G_k [g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(p) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{j=0}^k C_{kj} p^j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} A_i C_{ik} \right) p^k \end{aligned} \quad (\text{付3-1.4})$$

と書くことができる。ここで評価関数

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N {}^N A_k L_k(p) \right\}^2 dp \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N \left(\sum_{i=k}^N {}^N A_i C_{ik} \right) p^k \right\}^2 dp \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k \right\}^2 dp \quad (\text{付3-1.5}) \\ &= J_N \end{aligned}$$

ただし

$$\sum_{i=k}^N {}^N A_i C_{ik} = {}^N G_k [{}^N g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] \quad (\text{付3-1.6})$$

を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_N}{\partial^N A_n} &= \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \frac{\partial^N G_n}{\partial^N A_n} = \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \frac{\partial \left(\sum_{i=n}^N A_i C_{in} \right)}{\partial^N A_n} \\ &= C_{nn} \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \quad (n=0, 1, \dots, N) \end{aligned}$$

なる関係が成立し、 $C_{nn} \neq 0$ より $\partial J_N / \partial^N A_n = 0$ のとき必ず $\partial J_N / \partial^N G_n = 0$ となる。したがって J_N を A_n に関して最小にすることと、 G_n に関して最小にすることは等価である。これより J_N の最小値は

$$\begin{aligned} J_{N, \min} &= \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N {}^N G_k^* [{}^N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] p^k \right\}^2 dp \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N {}^N A_k^* L_n(p) \right\}^2 dp \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ y(p, t) - \sum_{k=0}^N A_k L_k(p) \right\}^2 dp \\ &= \int_{-1}^1 y^2(p, t) dp - \sum_{k=0}^N A_k^2 \end{aligned} \quad (\text{付3-3.7})$$

となる。したがって $J_{N, \min}$ は N に関して単調減少となり $N = \infty$ において 0 となる。式 (3.14) の評価関数 E_N に関して同様のことがいえる。また式 (付3-1.6) と式 (付3-1.4) から

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} {}^N G_k^* [{}^N g_k^*; s(t'), 0 \leq t' \leq t] &= \sum_{i=k}^{\infty} A_i^* C_{ik} = \sum_{i=k}^{\infty} A_i C_{ik} \\ &= G_k [g_k; s(t'), 0 \leq t' \leq t] \end{aligned}$$

となり、 $N = \infty$ にて ${}^N G_k^*$ は G_k に等しくなる。

付録3.2 Volterra核の対称性

2次のVolterra核について説明する。2次のVolterra核 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ が対称でないときには $h_2(\tau_1, \tau_2)$ のかわりに

$$sy.h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)}{2}$$

なる新しい対称なVolterra核 $sy.h_2(\tau_1, \tau_2)$ を考える。この対称なVolterra核を有するシステムの応答は

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sy. } h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)}{2} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_2, \tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_1) d\tau_2 d\tau_1 \right\} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

となり、 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ と全く同じ特性を有することがわかる。したがって Volterra 核は対称性を有すると考えることができる。

付録 3.3 ボルテラ核の形の検定

入力 $x(t)$ は任意であるから式 (3.2.9) の関係は Volterra 級数の各項の応答に関する関係

$$t \geq T_r \text{ を満足するすべての } t \text{ に対して } y_n(t) = y_n(t + T_r) \quad (n=1, 2, \dots)$$

(付 3-3.1)

と書きなおすことができる。 n 項目の応答 $y_n(t)$ および $y_n(t + T_r)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
y_n(t) &= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \cdots \int_0^\infty d\tau_n h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \cdots x(t-\tau_n) \\
&= \sum_{i=0}^n {}_n C_i \int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^t d\tau_i \int_t^\infty d\tau_{i+1} \cdots \int_t^\infty d\tau_n h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) \cdots x(t-\tau_i) \\
&\quad x(t-\tau_{i+1}) \cdots x(t-\tau_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n {}_n C_i \int_0^t x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdots \int_0^t x(t-\tau_i) d\tau_i \int_t^\infty d\tau_{i+1} \cdots \int_t^\infty d\tau_n h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \\
&\quad x(t-\tau_{i+1}) \cdots x(t-\tau_n)
\end{aligned}$$

(付 3-3.2)

および

$$y_n(t + T_r) = \sum_{i=0}^n {}_n C_i \int_0^t x(t + T_r - \tau_1) d\tau_1 \cdots \int_0^t x(t + T_r - \tau_i) d\tau_i \int_t^\infty d\tau_{i+1} \cdots$$

$$\int_t^\infty d\tau_n h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t + T_r - \tau_{i+1}) \cdots x(t + T_r - \tau_n) \quad (\text{付 3-3.3})$$

となる。入力 $x(t)$ は $t \geq 0$ にて周期性を有するため

$$x(t + T_r - \tau_i) = x(t - \tau_i), \quad t \geq \tau_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

なる関係が成立する。この関係を用いると式 (付 3-3.3) は

$$\begin{aligned}
y_n(t + T_r) &= \sum_{i=0}^n {}_n C_i \int_0^t x(t - \tau_1) d\tau_1 \cdots \int_0^t x(t - \tau_i) d\tau_i \int_t^\infty d\tau_{i+1} \cdots \int_t^\infty d\tau_n h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \\
&\quad x(t + T_r - \tau_{i+1}) \cdots x(t + T_r - \tau_n)
\end{aligned}$$

(付 3-3.3')

となる。式 (付 3-3.1) より

$$\begin{aligned}
y_n(t) - y_n(t+T_r) &= \sum_{i=0}^{n-1} {}_n C_i \int_0^t x(t-\tau_1) d\tau_1 \cdots \int_0^t x(t-\tau_i) d\tau_i \int_t^\infty d\tau_{i-1} \cdots \int_t^\infty d\tau_n \\
&\quad h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \{ x(t-\tau_{i+1}) \cdots x(t-\tau_n) - x(t+T_r-\tau_{i+1}) \cdots \\
&\quad x(t+T_r-\tau_n) \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{付3-3.4}$$

が得られる。任意の $x(t)$ に対して式 (付3-3.4) が成立するためには

$$\int_t^\infty d\tau_{i+1} \cdots \int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \{ x(t-\tau_{i+1}) \cdots x(t-\tau_n) - x(t+T_r-\tau_{i+1}) \cdots x(t+T_r-\tau_n) \} = 0$$

($i=0, 1, \dots, n-1$) (付3-3.5)

が同時に成立しなければならぬ。 $i=n-1$ に対しては

$$\begin{aligned}
&\int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \{ x(t-\tau_n) - x(t+T_r-\tau_n) \} d\tau_n \\
&= \int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_n) d\tau_n - \int_t^{t+T_r} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t+T_r-\tau_n) d\tau_n \\
&\quad - \int_{t+T_r}^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t+T_r-\tau_n) d\tau_n \\
&= \int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t-\tau_n) d\tau_n - \int_t^{t+T_r} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t+T_r-\tau_n) d\tau_n \\
&\quad - \int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n+T_r) x(t-\tau_n) d\tau_n \\
&= \int_t^\infty \{ h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) - h_n(\tau_1, \dots, \tau_n+T_r) \} x(t-\tau_n) d\tau_n \\
&\quad + \int_t^{t+T_r} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t+T_r-\tau_n) d\tau_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

が得られ、 $x(t)$ が任意であることおよび

$$\int_0^{T_r} x(t+mT_r) dt = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

が成立することから

$$\left. \begin{aligned}
h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) &= h_n(\tau_1, \dots, \tau_n+T_r) \quad (\tau_n \geq t) \\
h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) &= \text{一定値} \quad (t+T_r > \tau_n \geq t)
\end{aligned} \right\} \tag{付3-3.6}$$

なる関係が成立しなければならぬ。上式は $t \geq T_r$ なるすべての t に対して成立するから式 (付3-3.6) は

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = h_n(\tau_1, \dots, T_r) \quad (\tau_n \geq T_r)$$

となる。Volterra核は対称性を示すことより、上式が成立すれば必ず

$$\begin{aligned}
h_n(\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) &= h_n(\tau_1, \dots, T_r, \dots, \tau_n) \quad (\tau_j \geq T_r) \\
&\quad (j=1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{付3-3.7}$$

が成立する。式 (付3-3.7) の関係が成立すると $i=n-2$ に対して式 (付3-3.5) の関係

は常に成立する。すなわち $t \geq T_s$ なる t に対して

$$\begin{aligned}
 & \int_t^\infty \int_t^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n) \{ x(t-\tau_{n-1})x(t-\tau_n) - x(t+T_r-\tau_{n-1})x(t+T_r-\tau_n) \} \\
 & \quad d\tau_{n-1} d\tau_n \\
 &= h_n(\tau_1, \dots, T_s, T_s) \int_t^\infty \int_t^\infty \{ x(t-\tau_{n-1})x(t-\tau_n) - x(t+T_r-\tau_{n-1})x(t+T_r-\tau_n) \} d\tau_{n-1} d\tau_n \\
 &= h_n(\tau_1, \dots, T_s, T_s) \left[\left\{ \int_t^\infty x(t-\tau) d\tau \right\}^2 - \left\{ \int_t^{t+T_r} x(t+T_r-\tau) d\tau \right\}^2 \right. \\
 & \quad \left. - 2 \int_t^{t+T_r} x(t+T_r-\tau) d\tau \int_{t+T_r}^\infty x(t+T_r-\tau') d\tau' - \left\{ \int_{t+T_r}^\infty x(t+T_r-\tau) d\tau \right\}^2 \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{付3-3.8}$$

となる。 i の他の値に対して同様のことがいえる。以上より式 (付3-3.1) の関係が成立すれば式 (付3-3.7) の関係が常に成立する。また Volterra 級数の他の項に関しても式 (付3-3.7) と同様な関係式を得ることができ、結局式 (3.29) が成立すれば式 (付3-3.7) はすべての n に対して成立する。

付録 4.1 Laguerre-Hermite の直交関数による非線形システムの記述

一般の非線形システムの入出力関係は 2 つの操作を施すことにより表わされる。すなわちはじめの操作は現時点までのシステムの入力のある 1 組の係数によって特徴づけることである。時間 $0 \leq t \leq \infty$ で定義された

$$\int_0^\infty l_n(t) l_m(t) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

なる関係を満たす正規直交関数 $l_n(t)$ を考えると、入力 of 過去における状態はこの $l_n(t)$ を用いて

$$x(t-\tau) = \sum_{n=1}^\infty C_n(t) l_n(\tau) \quad (\tau \geq 0)$$

と表わすことができる。たゞし展開係数 $C_n(t)$ は

$$C_n(t) = \int_0^\infty x(t-\tau) l_n(\tau) d\tau$$

で与えられる。したがって現時点 t までのシステムへの入力の状態はこの展開係数 $C_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) により特徴づけられる。第 2 の操作はこの係数 $C_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) を現出力 $y(t)$ に関係づけることである。これは $C_n(t)$ に zero-memory の非線形演算を施すことにより行なえる。すなわちシステム of 出力 $y(t)$ は

$$y(t) = F [c_1(t), c_2(t), \dots] \quad F : \text{zero-memory の非線形関数}$$

で与えられる。Wiener は入力を展開するための正規直交関数 $l_n(t)$ として

$$\left. \begin{aligned}
 l_n(t) &= \frac{\sqrt{a}}{n-1} e^{at/2} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1} e^{-at}) \\
 \mathcal{L}[l_n(t)] &= \frac{\sqrt{a} (s-a/2)^{n-1}}{(s+a/2)^n}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &(n=1, 2, \dots), a > 0 \quad (\text{付4-1.1}) \\
 &a : \text{scale factor}
 \end{aligned}$$

なる Laguerre 関数を用い (付図 4.1), 係数 $C_n(t)$ ($n=1, 2, \dots$) と出力 $y(t)$ とを関係づける関数 F として多次元の Hermite 関数を用い, 出力 $y(t)$ を

$$\begin{aligned}
 y(t) &= F [c_1(t), c_2(t), \dots] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{i,j,\dots,k} H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n) \right\} \quad (\text{付4-1.2})
 \end{aligned}$$

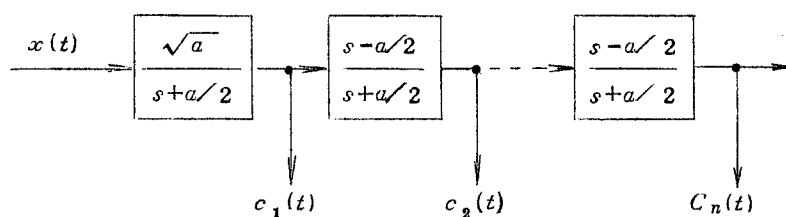
で表わした。ただし $H_i(c)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(c) H_j(c) e^{-\frac{c^2}{2}} dc = \delta_{ij} \quad (\text{付4-1.3})$$

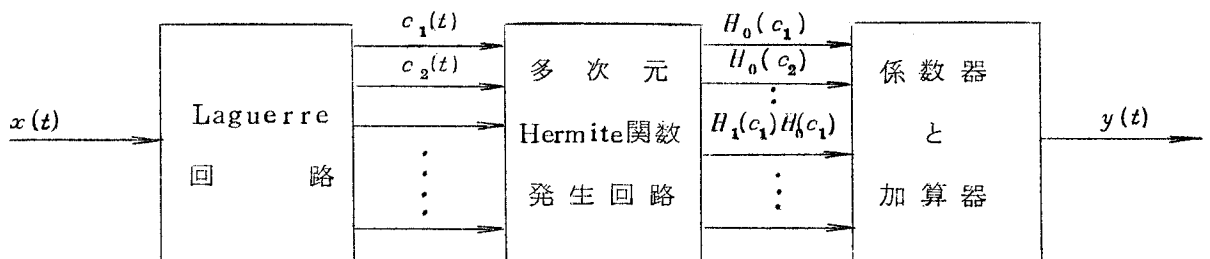
なる関係を満足する Hermite の正規直交関数

$$\left. \begin{aligned}
 H_0(c) &= (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \\
 H_1(c) &= (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \cdot c \\
 H_2(c) &= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} (c^2 - 1) \\
 H_3(c) &= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{6}} (c^3 - 3c) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\}$$

である。この Laguerre-Hermite の直交関数を用いたシステムの入出力関係の記述をブロック線図で表わすと付図 4.2 のようになる。



付図 4.1 $x(t)$ を特徴づけるための Laguerre 回路



付図 4.2 Laguerre-Hermite の直交関数による非線形システムの記述

非線形システムの動特性は式(付4-1.2)の展開係数 $\beta_{i,j,\dots,k}$ ($i, j, \dots, k=0, 1, 2, \dots$)により特徴づけられるが、つぎにこの展開係数をシステムの入出力データを用いて測定することを考える。非線形システムと付図4.1のLaguerre回路に正規性の白色信号を投入するLaguerre回路の出力 c_n の結合確率密度関数は

$$p(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)} \quad (\text{付4-1.4})$$

で与えられる。式(付4-1.2)の両辺に $H_i(c_1)H_j(c_2)\dots H_k(c_n)$ を掛けて、 $-\infty < t < +\infty$ の全範囲にわたって平均すると

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \dots \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i',j',\dots,k'} H_{i'}(c_1) H_{i'}(c_1) H_{j'}(c_2) H_{j'}(c_2) \dots \right. \\ & \quad \left. \dots H_{k'}(c_n) H_{k'}(c_n) \right\} dt \end{aligned} \quad (\text{付4-1.5})$$

なる関係が得られる(説明の便宜上 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ は省略する)。上式の右辺の時間平均は信号のエルゴード性より集合平均で置き換えることができ、式(付4-1.5)は

$$\begin{aligned} & \overline{y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n)} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \dots \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i',j',\dots,k'} H_{i'}(c_1) H_{i'}(c_1) H_{j'}(c_2) H_{j'}(c_2) \dots H_{k'}(c_n) H_{k'}(c_n) \right\} \right. \\ & \quad \left. p(c_1, c_2, \dots, c_n) dc_1 dc_2 \dots dc_n \right) \end{aligned} \quad (\text{付4-1.6})$$

となる。 c_1, c_2, \dots, c_n の結合確率密度関数は式(付4-1.4)で与えられるから、式(付4-1.6)は

$$\begin{aligned} & \overline{y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \dots \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i',j',\dots,k'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{i'}(c_1) H_{i'}(c_1) e^{-\frac{c_1^2}{2}} dc_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{j'}(c_2) H_{j'}(c_2) e^{-\frac{c_2^2}{2}} dc_2 \right) \\ & \quad \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{k'}(c_n) H_{k'}(c_n) e^{-\frac{c_n^2}{2}} dc_n \right) \end{aligned}$$

となり、これにHermiteの直交関数に対する(付4-1.3)の関係式を適用することにより、

$$\overline{y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \beta_{ij\dots k} \quad (\text{付4-1.7})$$

なる関係が得られる。これよりシステムの動特性を表わすパラメータ $\beta_{ij\dots k}$ は

$$\beta_{ij\dots k} = (2\pi)^{n/2} \overline{y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_k(c_n)} \quad (\text{付4-1.8})$$

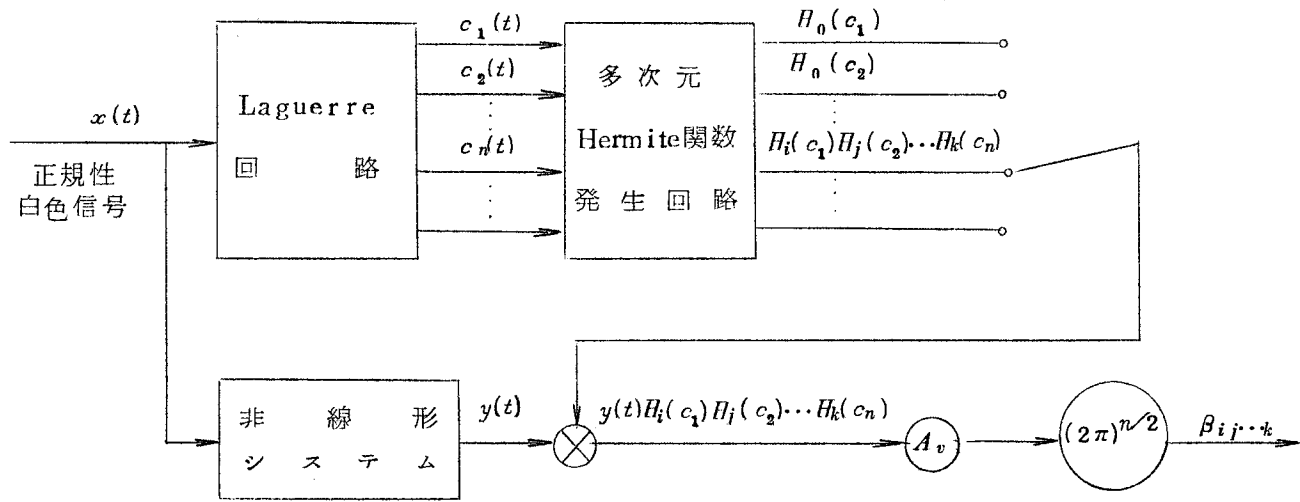
を用いて測定することができる。

システムの入出力 $y(t)$ を有限個のLaguerre係数 c_n とHermiteの直交関数 $H_k(c_n)$ で近似する場合には式(付4-1.8)により得られる展開係数は2乗誤差の時間平均の意味で最適のものを与えている。すなわち

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ y(t) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \dots \sum_{l=0}^N \alpha_{ij\dots l} H_i(c_1) H_j(c_2) \dots H_l(c_n) \right\}^2 dt \quad (\text{付4-1.9})$$

なる関数は $\alpha_{ij} \dots l = \beta_{ij} \dots l$ のときに最小となっている。

システムの動特性を表わすパラメータ $\beta_{ij} \dots k$ を測定するための回路を付図 4.3 に示す。



付図 4.3 パラメータ $\beta_{ij} \dots k$ の測定回路

付録 4.2 式 (4.20) の導出

$$\begin{aligned}
 & \overline{W_2[w_2; x(t'), t' \leq t] \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]} \\
 = & \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - K \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) d\tau \right\} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \\
 & \times \overline{x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2} \\
 = & \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \overline{x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2} \\
 & - K \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \overline{x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\tau d\sigma_1 d\sigma_2}
 \end{aligned}$$

となる。上式に正規性白色信号の高次モーメントに関する式 (2.14) の関係を適用することにより

$$\begin{aligned}
 & K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \{ \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) \\
 & + \delta(\tau_1 - \sigma_2) \delta(\tau_2 - \sigma_1) \} d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \\
 & - K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 \\
 = & K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma; \mathbf{a}_j) d\tau d\sigma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \{w_2(\tau_1, \tau_2) + w_2(\tau_2, \tau_1)\} \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2 \\
& - K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \sigma) \varphi_i(\sigma; a_i) \varphi_j(\sigma; a_j) d\tau d\sigma \\
& = K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \{w_2(\tau_1, \tau_2) + w_2(\tau_2, \tau_1)\} \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

が得られる。

付録 4.3 式 (4.22) の導出

W_n の 4 次以上の項と 3 次のはん関数とは直交するため、これらに関する項は 0 となる。 $n = 0$ に対しては

$$\begin{aligned}
& \overline{W_0[w_0; x(t'), t' \leq t] \Phi_3[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t]} \\
& = w_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \varphi_k(\sigma_3; a_k) \overline{x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)x(t-\sigma_3)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = 0
\end{aligned}$$

となる。 $n = 1$ に対しては

$$\begin{aligned}
& \overline{W_1[w_1; x(t'), t' \leq t] \Phi_3[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t]} \\
& = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \varphi_k(\sigma_3; a_k) \overline{x(t-\tau)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)x(t-\sigma_3)} \\
& \quad \times d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = K^2 \int_0^\infty \dots \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\sigma_1; a_i) \varphi_j(\sigma_2; a_j) \varphi_k(\sigma_3; a_k) \{ \delta(\tau-\sigma_1)\delta(\sigma_2-\sigma_3) \\
& \quad + \delta(\tau-\sigma_2)\delta(\sigma_1-\sigma_3) + \delta(\tau-\sigma_3)\delta(\sigma_1-\sigma_2) \} d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \{ w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) \varphi_j(\sigma; a_j) \varphi_k(\sigma; a_k) + w_1(\tau) \varphi_j(\tau; a_j) \\
& \quad \times \varphi_i(\sigma; a_i) \varphi_k(\sigma; a_k) + w_1(\tau) \varphi_k(\tau; a_k) \varphi_i(\tau; a_i) \varphi_j(\sigma; a_j) \} d\tau d\sigma
\end{aligned}$$

となり、ここで直交関数に対する式 (4.2) の関係を用いると上式は

$$\begin{aligned}
(上式) & = K^2 \{ \delta_{jk} \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) d\tau + \delta_{ik} \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_j) d\tau \\
& \quad + \delta_{ij} \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_k(\tau; a_k) d\tau \}
\end{aligned}$$

となる。 $n = 2$ に関する項は

$$\begin{aligned}
& \overline{W_2[w_2; x(t'), t' \leq t] \Phi_3[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t]} \\
& = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - K \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) d\tau \right\} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \\
& \quad \times \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) \\
& \quad \times x(t-\sigma_3) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& \quad - K \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) \\
& \quad \times d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = 0
\end{aligned}$$

となる。 $n=3$ に関する項は

$$\begin{aligned}
& \overline{W_3[w_3; x(t'), t' \leq t] \Phi_3[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t]} \\
& = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 3K \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) x(t-\tau_1) \right. \\
& \quad \left. \times d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\
& \quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) \\
& \quad \times x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& \quad - 3K \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_i(\sigma_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma_3; \mathbf{a}_k) x(t-\tau_1) x(t-\sigma_1) \\
& \quad \times x(t-\sigma_2) x(t-\sigma_3) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \\
& = K^3 \left\{ 6 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\tau_3; \mathbf{a}_k) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right. \\
& \quad + 3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_k(\sigma; \mathbf{a}_k) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \\
& \quad + 3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_j(\tau_1; \mathbf{a}_j) \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) \varphi_k(\sigma; \mathbf{a}_k) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \\
& \quad + 3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_k(\tau_1; \mathbf{a}_k) \varphi_j(\sigma; \mathbf{a}_j) \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \left. \right\} \\
& \quad - 3K^2 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\sigma; \mathbf{a}_j) \varphi_k(\sigma; \mathbf{a}_k) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \right. \\
& \quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_j(\tau_1; \mathbf{a}_j) \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) \varphi_k(\sigma; \mathbf{a}_k) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \\
& \quad \left. + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_2) \varphi_k(\tau_1; \mathbf{a}_k) \varphi_j(\sigma; \mathbf{a}_j) \varphi_i(\sigma; \mathbf{a}_i) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \right.
\end{aligned}$$

$$= 6K^3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) \varphi_k(\tau_3; a_k) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

となる。以上をまとめることにより式(4.22)が得られる。

付録4.4 $\overline{y(t) {}_m y(t)}$ の導出 - その1 -

$n=2$ について説明する。

$$\begin{aligned} & \overline{W_2[w_2; x(t'), t' \leq t] W_2[Mw_2; x(t'), t' \leq t]} \\ &= \overline{\left[\int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - K \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) d\tau \right]} \\ & \quad \times \overline{\left[\int_0^\infty \int_0^\infty Mw_2(\sigma_1, \sigma_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 - K \int_0^\infty Mw_2(\sigma, \sigma) d\sigma \right]} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\sigma_1, \sigma_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & \quad - K \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\sigma, \sigma) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \\ & \quad - K \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma_1, \sigma_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & \quad + K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma \\ &= K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\sigma_1, \sigma_2) \{ \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) \\ & \quad + \delta(\tau_1, \sigma_2) \delta(\tau_2 - \sigma_1) \} d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & \quad - K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\sigma, \sigma) \delta(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma \\ & \quad - K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma_1, \sigma_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 \\ & \quad + K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma \\ &= K^2 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma + \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right. \\ & \quad + \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\tau_2, \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 - \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma \\ & \quad \left. - \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma + \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau, \tau) Mw_2(\sigma, \sigma) d\tau d\sigma \right\} \\ &= K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \{ Mw_2(\tau_1, \tau_2) + Mw_2(\tau_2, \tau_1) \} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= 2K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) Mw_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

が得られる。まったく同様にして一般に n の場合には

$$\begin{aligned} & \overline{W_n [w_n; x(t'), t' \leq t] W_n [{}^M w_n; x(t'), t' \leq t]} \\ &= n! K^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) {}^M w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \end{aligned}$$

が得られる。

付録 4.5 $\overline{y(t)_m y(t)}$ の導出 - その 2 -

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) {}^M w_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \cdots \sum_{l=1}^\infty k_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l}) \varphi_j(\tau_1; \mathbf{a}_i) \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \cdots \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \right\} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{i'=1}^M \sum_{j'=1}^M \cdots \sum_{l'=1}^M K_{i'j' \dots l'}(\mathbf{a}_{i'j' \dots l'}) \varphi_{i'}(\tau_1; \mathbf{a}_{i'}) \varphi_{j'}(\tau_2; \mathbf{a}_{j'}) \cdots \varphi_{l'}(\tau_n; \mathbf{a}_{l'}) \right\} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \cdots \sum_{l=1}^\infty \sum_{i'=1}^M \sum_{j'=1}^M \cdots \sum_{l'=1}^M k_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l}) k_{i'j' \dots l'}(\mathbf{a}_{i'j' \dots l'}) \int_0^\infty \varphi_i(\tau_1; \mathbf{a}_i) \\ & \quad \times \varphi_{i'}(\tau_1; \mathbf{a}_{i'}) d\tau_1 \\ & \quad \times \int_0^\infty \varphi_j(\tau_2; \mathbf{a}_j) \varphi_{j'}(\tau_2; \mathbf{a}_{j'}) d\tau_2 \cdots \int_0^\infty \varphi_l(\tau_n; \mathbf{a}_l) \varphi_{l'}(\tau_n; \mathbf{a}_{l'}) d\tau_n \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \cdots \sum_{l=1}^\infty \sum_{i'=1}^M \sum_{j'=1}^M \cdots \sum_{l'=1}^M k_{ij \dots l}(\mathbf{a}_{ij \dots l}) k_{i'j' \dots l'}(\mathbf{a}_{i'j' \dots l'}) \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'} \cdots \delta_{ll'} \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \cdots \sum_{l=1}^M k_{ij \dots l}^2(\mathbf{a}_{ij \dots l}) \end{aligned}$$

付録 5.1 測定対象のパラメータの理論値の計算

図 5.5 のシステムの Volterra 核は

$$\begin{aligned} h_1(\tau) &= e^{-\tau} \\ h_2(\tau_1, \tau_2) &= e^{-(\tau_1 + \tau_2)} \end{aligned}$$

である。したがって変換後の Volterra 核は式 (5.6) より

$$\begin{aligned} b_0 &= a^0 \left\{ {}_1 C_0 \int_0^{T_s} h_1(\tau) d\tau + {}_2 C_0 \cdot b^2 \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} h_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\ &= b + b^2 \end{aligned}$$

$$b_1(\tau_1) = a \left\{ h_1(\tau_1) + {}_2 C_1 \cdot b \int_0^{T_s} h_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \right\} = a (1 + {}_2 C_1 \cdot b) e^{-\tau_1}$$

$$b_2(\tau_1, \tau_2) = a^2 h_2(\tau_1, \tau_2) = a^2 e^{-(\tau_1 + \tau_2)}$$

と計算される。この Volterra 核を離散値表示すると

$$b_0 = b + b^2$$

$$b_{i_1} = a (1 + {}_2C_1 \cdot b) e^{-(i_1 - \frac{1}{2})\Delta} \cdot \Delta$$

$$b_{i_1, i_2} = a^2 e^{-(i_1 + i_2 - 1)\Delta} \cdot \Delta^2$$

となる。したがってパラメータ β は (Volterra 核 b の対称性と入力 r_i が $r_i^2 = 1$ なる関係を満足することから)

$$\beta_0 = b_0 + \sum_{i=1}^M b_{i, i} = b + b^2 + a^2 \sum_{i=1}^M e^{-(2i-1)\Delta} \cdot \Delta^2$$

$$= b + b^2 + a^2 e^{-\Delta} \frac{1 - e^{-2M\Delta}}{1 - e^{-2\Delta}} \cdot \Delta^2$$

$$\beta_{i_1} = a (1 + {}_2C_1 \cdot b) e^{-(i_1 - \frac{1}{2})\Delta} \cdot \Delta$$

$$\beta_{i_1, i_2} = 2 a^2 e^{-(i_1 + i_2 - 1)\Delta} \cdot \Delta^2$$

となる。