

Title	はん関数を用いた非線形システムの動特性測定法に関 する研究
Author(s)	中尾, 和夫
Citation	大阪大学, 1972, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1536
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# はん関数を用いた非線形システムの 動特性測定法に関する研究

中 尾 和 夫

大风入	チ
論文目就	
	and the state of t
報告審号。學第1768号中尾和夫	
主論文は人関数を用いた非線が多るテム	40
動特性測定法に関する研究	
(主論文のうろ印刷公表したもの)	
	arran dari daki daki kulkaya kulkaya ka
1. Measurement of Characteristics of Nonlin	ear
Dynamical Systems Using Volterra Functi	ional
Series. (ホンプラはん関数級数を用いた引	線
みろシステムの動特性の測定)	
Technology Reports of the Osaka Unive	ersity
Vol. 19, No. 861	<del></del>
. 1969	
1. ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性理	廷
およびモデル化	<del></del>
計測自動制御学会論文學、	
75卷 才4号	
昭和44年10月	
	· · · · ·
1. ボルナラ級数を用いた非線形無定位系の動特性	•
<b>測定法</b>	<u> </u>

計測自動制卻學念論文集
为7卷 才 2号
昭和 46年 4月
. 1. Wiener核の可变直支関数展開による非線形分
の動持注測定法
制御工学
<b>ヤ14巻 オ10号</b>
<u> </u>
1. 2 値信号を入力とする非線形系の動特性測定法
計劃自動制卸字会論文集
才7卷 才 4 号
服和 46年 8月
(主論文のうち末公表のもの)
TFL

### 論 文 梗 概

本論文は筆者が大阪大学大学院工学研究科,博士課程(電気工学専**政)**在学中に行なったは ん関数を用いた非線形システムの動特性測定法に関する研究をまとめたものである。

現在の制御理論の進歩にはめざましいものがあるが、これらの理論のほとんどが対象の動特性が既知であるという前提のもとに理論を展開しているため、この理論が実在のシステムにうまく適用できるか否かはそのシステムの動特性が知られているかどうかに係っていると言っても過言ではない。またこの制御理論の進歩と最近の電子計算機の急速な発展により、対象とするシステムの範囲が非線形システムを含んだ領域にまで拡大されつつある。ところが実在のシステムにはその動特性があらかじめわかっているものは少なく、また非線形のシステムにまで適用可能な実際的な動特性測定法はこれまでのところ見当たらない。

本論文は以上の見地に立って一般の非線形システムの動特性をはん関数を用いて測定する方法について研究を行なったものである。

第1章では緒論として,現在の制御工学の動向について述べ,非線形システムの動特性測定の重要性と本研究の占める位置についてあきらかにする。第2章では従来から提案されている非線形システムの動特性測定法の問題点につき検討し,本研究の目的とするところをあきらかにする。また非線形システムのはん関数による記述に関して基礎的な考察を行なう。第3章ではVolterra(はん関数)級数を用いた動特性測定法を提案し,この方法によって定位性を有するシステムの動特性測定も可能であり,またあらかじめ簡単に測定対象の構造を決定できることを示す。第4章ではWienerによるLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法を拡張,発展させた可変直交関数を用いた動特性測定法を提案する。この方法によると測定結果は数式で,また最も簡単なものが得られることを示し,十分実用性があることを確かめる。第5章では入力として2値信号のみを受ける非線形システムの動特性測定法について考察し,このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を提案する。この信号を用いれば測定対象の構造かよびそのバラメータを簡単に決定できることを確かめる。第6章は全章にわたる総括である。

第1	車	粨	論	·· 1
第 2	章	非	線形システムの動特性測定に関する基礎的考察	·· <b>·2</b>
2	. 1	緒	言	. 2
2	2	非	線形システムの動特性測定の問題点	2
2	3	は	ん関数による非線形システムの入出力関係の記述	4
	2.	3. 1	Volterra (はん関数)級数による記述	4
	2.	3. 2	Wiener の直交はん関数級数による記述	6
2	4	結	言	9
第 3	章	V	olterra級数を用いた非線形システムの動特性測定法1	2
3	. 1	緒	言	2
3	2	測	定対象	. 2
3	. 3	V	olterra級数モデル 1	4
	3.	3. 1	定位性を有するシステムに対するモデル1	4
	3.	3. 2	無定位性を有するシステムに対するモデル1	4
3	4	モ	デルの次数の決定および各項の応答の決定法1	. 7
3.	5	Va	olterra核の測定法	0 5
	3.	5. 1	直接法	0
	3.	5. <b>2</b>	代数方程式法	; 1
	3.	5. 3	直接法と代数方程式法との比較,検討2	3
3.	6	実	際上の問題に対する考察	3
3.	7	測	定例2	2 4
	3.	7. 1	直接法による測定例 2	2 4
	3.	7. 2	代数方程式法による測定例 2	2 8
3.	8	結	音	3 5
第4	章	Wi	ienerの直交はん関数級数を用いた非線形システムの動特性測定法。	3 7
			一可変直交関数展開による方法一	
4.	. 1	緒	雷	3 7
4	2	可	変直交関数によるWiener核の展開3	3 7
4	3	動	特性測定法	3 9
	4.	3. 1	正規性白色信号を受ける多次元可変直交関数回路	3 9
	4.	3. 2	展開係数の測定法	4 0
	4.	3. 3	直交関数固有のバラメータの決定法	4 4
	4.	3. 4	Wienerの直交はん関数級数の次数およびその展開のための直交関数の項数の	決
			定法	4 5
4	4	測:	-	4 6
4	5	結	耆	4 9

第	5	章		2 個	直信与	号を入力とする非線形システムの動特性測定法	5 :	2
	5.	1		緒	ģ	<b>i</b>	5 :	2
	5.	2		2 催	直信号	号入力に対する非線形システムの離散値表示	5 :	2
	5.	3		動幣	守性 洇	則定法	5 4	4
		5.	3.	1	動华	等性測定のための入力信号	5 4	4
		5.	3.	2	シフ	ステムのパラメータの測定法	5 (	ô
		5.	3.	3	モラ	デルの次数の決定法	5 {	3
	5.	4		測定	三例	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	3 (	)
	<b>5</b> .	5		結	言	·	3 4	1
第	6	章.	:	結		<u></u>	3 6	3
				謝	舒	<del></del>		
				付	剱	<b>*</b> 6	3 8	}

## 第 1 章 緒 論

### 第 1 章 緒 論

現在の産業の発展には目を瞠るものがあり、これには現代の制御理論を駆使した生産工程の自動化が大いに貢献しているものと思われる。社会の高度化とともに経済性、製品の均質性、安全性、省力化などの要求がますます厳しくなり、また最近の電子計算機の発展を考えれば、さらにこの自動化の傾向は強まるものと思われる。

この自動化の推進は一方では対象とするシステムの範囲を拡大するという方向に向けられている。すなわち内部の構造が複雑なためその特性がはっきりわからなかったシステムに迄関心を広げ、なんとかその特性を把握して制御を試みようとするものである。他方では経済性、製品の均質性に対する要求から制御の質を向上させようとする方向に向けられている。すなわちこれまでシステムの特性を簡単なモデル(たとえば線形モデル)で近似して制御を行なっていたのを、上記の要求を満たすためより正確な(非線形の領域を含む)モデルを構成し、このモデルを用いてより高度な制御を行なおうとするものである。このようなシステムを制御するための理論は現代制御理論としてほど体系づけられているが、これらの理論は対象の動特性がわかっていなければほとんど適用できない。したがって上記の目的を遂行するためにはまずこのような内部の構造が未知の非線形システムの動特性を測定することが必要とされる。

また最近、工学の分野において生物から種々の技術を学びとろうという研究が注目をあびている。生物は現在の発達した科学技術でもってしても及びもつかないすばらしい機能を有している。上述の研究はこれらの機能を工学的な立場から見直し、それらの機能を取り入れて新しい技術を開発しようとするものである。そのためにはまず生物のもつ機能を解明しなければならないが、生物には未知な面が多く、物理的、化学的な解析手法によりその構造や特性がわかることは少なく、またそれらはほとんどが非線形の特性を有していると思われる。したがってこの分野においても内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定する実際的な方法が必要とされている。

これまで非線形システムの動特性測定の方法が種々研究されているが、実用化には程遠い感がある。その理由としてつぎのような点が考えられる。すなわちこれまで提案された方法の大部分は測定対象の構造に関してなんらかの仮定をおき、その仮定のもとに動特性測定の理論を展開しており、測定対象がこれらの仮定を満足するかどうかを検討する方法については全く考慮していない。したがつて得られた結果がどの程度信頼のおけるものであるかわからない。また仮定を必要としない一般的な測定方法は測定バラメータの個数を十分多く取らなければシステムの動特性を正しく測定できず、そのため測定に多大の労力を要するとともに測定結果が複雑なものとなる。

このような問題点を解決するためには、一般性のあるモデルを用いて、測定対象がこのモデルのどの形に属するかを近似度を考慮して検定しつつ、その動特性をできるだけ簡単な形で測定するという方法が考えられる。本論文ではこのような観点から一般の非線形システムの動特性をはん関数を用いて測定する方法について研究を行なった。すなわち非線形システムの動特性をはん関数モデルとしてはん関数モデルを考え、このはん関数モデルの形を近似度を考慮して決定することにより、内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定する方法を提案し、その有用なことを確かめた。

## 第 2 章 非線形システムの動特性測定 に関する基礎的考察

## 第 2 章 非線形システムの動特性測定 に関する基礎的考察

#### 2.1 緒言

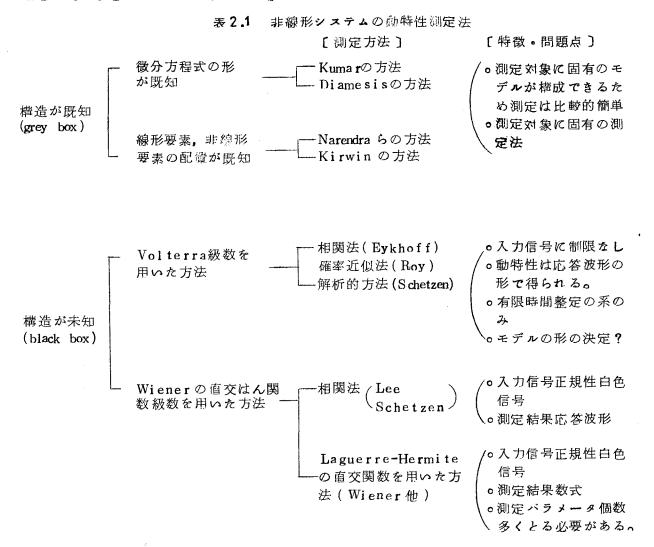
本章ではまずこれまでに提案されている非線形システムに対する動特性測定法について概説 し、それぞれの測定法が有する問題点について検討する。これより内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにはどのような点を解決しなければならないかを考え、本研究の目的とするところを明示する。

ついではん関数により非線形システムの入出力関係の表示法について説明する。はん関数によるシステムの表示は入出力関係が explicitに表わされるところから動特性の測定一入出力データからシステムの入力と出力との関係をあきらかにすることーには非常に有用である。またはん関数の形は簡単に規定できるので、内部の構造が未知の非線形系システムの動特性の測定にこのはん関数モデルを用いることは特に適している。

#### 2.2 非線形システムの動特性測定の問題点

これまで非線形システムの動特性を測定するために種々の方法が提案されている。これらの 方法は⑴測定対象の構造を既知(grey box)とするもの,②測定対象の構造を未知(black box)とするもの,に分けることができる。(I)に対する方法として微分方程式の形を既知とし て測定するKumar<sup>1)</sup>,Diamesis<sup>2)</sup>らの方法,線形要素,非線形要素(zero-memory type) の配置を既知として測定する方法 $^{3)\sim6}$ などがあるが、あらかじめ測定対象に固有のモデルが 構成できるため比較的簡単に動特性測定が行なえる。(2)の場合には考えられ得るすべての特性を含む 一般性のあるモデルを用いて動特性を測定する必要がある。とのような一般性のあるモデルとして Volterra 級数が 提案されており、そのVolterra核によりシステムの特性が決定される。またシステムへの入力信号が正規 性白色信号である場合にはこの Volter ra級数は直交化することができ、システムはWiener の直交はん関数により表わされ、動特性はWiener核により特徴づけられる。モデルに Volterra級数を用いた方法としては、その Volterra核を応答波形の形で、相関法を用いて測定 する Eykhoff<sup>7)</sup>の方法,確率近似法を用いて測定する Royと Sherman の方法 <sup>8)</sup>・解析的な関 係を用いて測定するShetzen の方法 <sup>9)</sup>などがある。これらの方法は測定に用いる入力信号に 対しては制限はないが,モデルとして用いるVolterra級数の次数をどの程度で打ち切ればよ いかに関しては全く考慮されていない。また測定対象は有限時間整定のシステム(定位性を有 するシステム)にのみ限っている。Wienerの直交はん関数を用いた方法として,Wiener核 を Laguerreの 直交関数で展開するWiener 10 ~ 12 の方法( Laguerre-Hermite の 直交関数 を用いた方法)、相関法を用いてWiener 核を応答波形の形で求めるLeeと Shetzen の方法 などがある。これらの方法は測定のための入力信号として正規性白色信号を用いなければなら ないが, Laguerre-Hermite の直交関数を用いた方法は測定結果が数式で得られるためすぐ

さま制御理論を適用できるという利点を有している。ところがこの方法は測定バラメータの個数を非常に多く取らなければ十分な精度で動特性を測定することができず、測定に多大の労力を要するとともに測定結果が複雑なものとなる。これらの動特性測定法の特徴および問題点をまとめて示すと表 2.1 のようになる <sup>14</sup>。



以上のようにこれまで提案されている非線形システムの動特性測定法は実際に適用する場合に種々の問題点を含んでおり、内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにはこれらの問題点を解決する必要がある。以下これらの問題点を解決するために、第3章では定位性を有するシステムのみならず、無定位性を有するシステムにも適用でき、またあらかじめVolterra級数の次数を簡単に決定することができる動特性測定法について研究を行ない、第4章ではWienerのLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法を拡張、発展させて、できるだけ簡単を数式モデルで非線形システムの動特性を測定する方法について提案する。

また非線形システムの動特性を一般的に測定しようとすると、どうしても測定すべきバラメータの個数が多くなり、測定がめんどうとなる。ところがシステムが入力として2値信号以外のものを受けない場合には、一般的な方法で動特性を測定する必要はなく、2値信号入力に対する非線形システムの動特性のみを測定すればよく、測定バラメータの個数は非常に少なくなる。第5章ではこのように入力として2値信号のみしか受けない非線形システムの動特性測定

の方法について研究を行なう。

まず次節では非線形システムの入出力関係を一般的に表わす Volterra級数, Wiener 直交はん関数について説明する。

#### 2.3 はん関数による非線形システムの入出力関係の記述

#### 23.1 Volterra(はん関数)級数による記述

一般の1入力1出力の非線形システムは図2.1のように表わすことができる。図において x (t)はシステムの入力, y(t)はこの入力に対するシステムの出力である。ある時刻 t におけるシステムの出力 y(t)は一般に t より過去の入力の値すべてに依存する。したがってこの関係は数学的にははん関数 H を用いて

$$y(t) = H[t; x(t'), t' \le t]$$
 (2.1)

と表わすことができる<sup>15)</sup>。システムが線形の場合には、このはん関数はよく知られているように

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \qquad (2.2)$$

なるたゝみこみ積分となる。 h(t)はシステムの動特性を表わす荷重関数である。

図2.1 |入力|出力の非線形システム

非線形システムに対しては、V.Volterra が線形システムにおけるたくみこみ積分の考え方を拡張して、式(21)をはん関数の形で表わすことを提案した $^{16}$ 。すなわち式(21)のはん関数Hがx(t') に関して連続であり、かつシステムが時間不変であれば、Fre'chet の定理を用いてシステムの出力y(t)は無限項のはん関数級数の和により

$$y(t) = H \left[ x(t'), t' \leq t \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \cdots, \tau_{n}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) \cdots x(t-\tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \cdots d\tau_{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n} \left[ h_{n} : x(t'), t' \leq t \right] \qquad (2.3)$$

と表わすことができる。当然のことながら実現性の条件よりれの(て、・て、・・・・、て、)は

 $h_n$   $(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_j, \cdots, \tau_n) = 0$  ,  $\tau_j < 0$   $(j=1, 2, \cdots, n)$  (2.4) なる関係を満足している。式(2.3)のはん関数形をVolterra(はん関数)級数と呼び,その核  $h_n$   $(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  を n 次の V olterra 核と呼ぶ。

式(23)の関係をプロック線図で表わすと図2.2のようになる。第1項目の応答 $H_0$  はシス

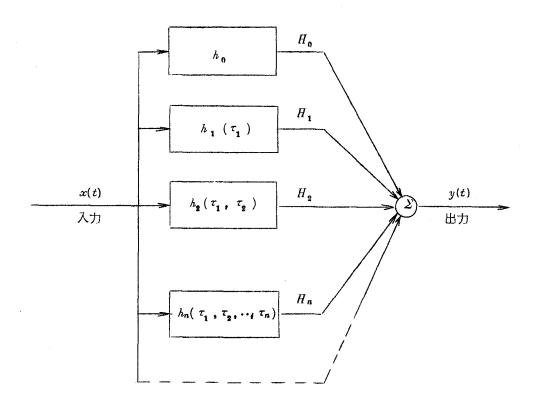


図 2.2 非線形システムの入出力関係を表わす Volterra 級数のプロック線図

テムが有する直流ゲインで定数である。第2項目の応答 $H_1$  は線形系におけるたくみとみ積分に相当し、入力x(t)と1次のVolterra核 $h_1(\tau_1)$ との単なるたくみとみ積分で表わされる。第3項目の応答 $H_2$  は入力x(t)と2次のVolterra核 $h_2(\tau_1,\tau_2)$ との2次元のたくみとみ積分で表わされる。一般に第1項目の応答 $H_n$  は入力x(t)とn次のVolterra核 $h_n(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$ とのn次元のたくみとみ積分で表わされる。

1次のVolterra核 h<sub>1</sub>(τ<sub>1</sub>)は線形系におけるインバルス応答に相当し、Volterra級数の第2項目(H<sub>1</sub>)にインバルス入力を投入することにより得られる。ところが2次以上のVolterra核は線形系におけるようなたゞ単なるインバルス応答の形では得られない。すなわち2次のVolterra核については、式(2.5)に示す一般化された2次元のたゝみこみ積分を考える。

$$H_{2}[h_{2};x_{1}(t') \cdot x_{2}(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) x_{1}(t-\tau_{1}) x_{2}(t-\tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$(2.5)$$

上式において  $x_1(t)=\delta$  (  $t-T_1$  ),  $x_2(t)=\delta$  (  $t-T_2$  ) (  $\delta(t)$ : Dirac のデルタ関数 ) とおくと

$$\begin{split} H_2[\ h_2\ ;\ \delta(t'-T_1\ )\bullet\delta(t'-T_2\ )\ ,\ t'\leq t\ ] = & \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1\ ,\ \tau_2\ )\,\delta(t-T_1-\tau_1\ ) \\ \delta(t-T_2-\tau_2\ )d\,\tau_1\ d\,\tau_2 = h_2(t-T_1\ ,\ t-T_2\ ) \end{split}$$

が得られる。これより 2 次の Volterra核  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  は異なった入力  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  により權成 される 2 次元空間における一般化た  $\Delta$  みこみ積分のインバルス応答となることがわかる。一般

にn次のVolterra核については、n次元の一般化たよみこみ積分

$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \dots \int_{0}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) x_{1}(t-\tau_{1}) x_{2}(t-\tau_{2}) \dots x_{n}(t-\tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$
(2.7)

を考え、入力として、 $x_i(t)=\delta\left(t-T_i\right)\left(i=1,\,2,\,\cdots,\,n\right)$  を加えることにより

$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \dots \int_{0}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) \delta(t - T_{1} - \tau_{1}) \delta(t - T_{2} - \tau_{2}) \dots \delta(t - T_{n} - \tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \dots$$

$$d\tau_{n} = h_{n}(t - T_{1}, t - T_{2}, \dots, t - T_{n})$$
(2.8)

が得られる。これより、 $h_n$  ( $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,…、 $\tau_n$ ) は異なった入力 $x_1$ (t),  $x_2$ (t), …,  $x_n$ (t) により構成されるn次元空間における一般化たくみこみ積分のインバルス応答となることがわかる。

以上よりわかるように Volterra 級数は線形システムにおけるたくみ込み積分の考え方を非線形システムに拡張したものであり、線形システムがインバルス応答により特徴づけられたように、非線形システムは一般化たくみこみ積分のインパルス応答すなわち Volterra 核により特徴づけられる。

#### 2.3.2 Wienerの直交はん関数級数による記述 <sup>12)</sup>

N.Wienerは非線形システムを解析する場合に、その試験信号として一様なべり密度スペクトルをもつガウス雑音(正規性白色信号)を用いることを提案した。正規性白色信号を適当にサンプリングすることにより、任意の有限時間間隔にわたる任意の時間関数を有限で0でない確率でいくらでも正確に近似できるのでこの信号に対してシステムを解析しておけば、その解析結果は如何なる入力時間関数に対しても適用することができる。

23.1 で非線形システムの入出力関係は式(23)のVolterra級数で表わされることを示したが、非線形システムが図2.3 に示すように入力として正規性白色信号を受けるときには、そのシステムの入出力関係を直交化されたはん関数を用いて表わすことができる。

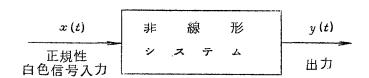


図 2.3 入力として正規性白色信号を受ける非線形システム

すなわち入力 x(t)が平均値および自己相関関数が

$$\frac{\overline{x(t)} = 0}{x(t) \cdot x(t+\tau) = K \cdot \delta(\tau)} \qquad (K: \mathbb{Z}_{2})$$

たゞし  $\frac{1}{r \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \cdot dt$ ,  $\delta(\tau)$ : Dirac のデルタ関数

なる正規性の白色信号である場合には、式(2.3)の y(t)は直交化されたはん関数の無限和に1.5

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n [w_n : x(t'), t' \le t]$$
 (2.10)

たゞし

$$\overline{W_n[w_n:x(t'), t' \leq t]W_m[w_m:x(t'), t' \leq t]} = 0 \qquad n \neq m \qquad (2.11)$$

と表わすことができる。 $W_n$  は n 次の非同次はん関数で、その形は n より低次の任意のはん関数と直交するように決められる。

0次の直交はん関数 $W_0$  はたゞ単に

$$W_0[w_0; x(t'), t' \le t] = w_0 \quad (w_0: \text{定数})$$
 (2.12)

と書ける。1次の直交はん関数W、は1次の非同次はん関数

$$W_{1} \left[ w_{1}, w_{\theta(1)} ; x(t'), t' \leq t \right] = \int_{0}^{\infty} w_{1}(\tau) x(t-\tau) d\tau + w_{\theta(1)}$$

が任意の定数 $C_o$  と直交する条件より決定される。 すなわち

$$\frac{C_0 \cdot W_1 [w_1 ; x(t'), t' \leq t]}{C_0 \cdot W_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + C_0 \cdot W_{0(1)}} = C_0 \cdot W_{0(1)} = 0$$

を得、 $C_0$  は任意であるから $w_{0(1)}$ は 0 でなければならない。したがって1次の直交はん関数として

$$W_{1} [w_{1}; x(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} w_{1}(\tau)x(t-\tau) d\tau$$
 (2.13)

を得る。2次の直交はん関数 $W_2$  は2次の非同次はん関数

$$\begin{split} W_2 \left[ \ w_2, \ w_{1(2)}, \ w_{0(2)}; \ x \ (t') \ , \quad t' \leq t \ \right] = & \int_0^\infty \int_0^\infty w_2 \left( \ \tau_1 \ , \ \tau_2 \right) x \left( \ t - \tau_1 \right) x \left( \ t - \tau_2 \right) d \ \tau_1 \ d \ \tau_2 \\ & + \int_0^\infty w_{1(2)} \left( \ \tau_1 \right) x \left( \ t - \tau_1 \right) d \ \tau_1 + w_{0(2)} \end{split}$$

が任意の定数 $C_0$  と任意の1次の同次はん関数

$$\int_{0}^{\infty} C_{1}(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

と直交する条件より決定される。 $C_{0}$  と直交することから

$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} C_{0} \cdot w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) \overline{x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})} d\tau_{1} d\tau_{2} + \int_{0}^{\infty} C_{0} \cdot w_{1(2)}(\tau_{1}) \overline{x(t-\tau_{1})} d\tau_{1} + C_{0} \cdot w_{0(2)} = 0$$

が得られ、1次の同次はん関数と直交することから

$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} C_{1}(\tau) \cdot w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) \overline{x(t-\tau)x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})} d\tau d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} C_{1}(\tau) \cdot w_{1(2)}(\tau_{1}) \overline{x(t-\tau)x(t-\tau_{1})} d\tau d\tau_{1} + \int_{0}^{\infty} C_{1}(\tau)w_{0(2)} \overline{x(t-\tau)} d\tau$$

$$= 0$$

が得られる。上式に正規性白色信号の高次モーメントに関する関係式<sup>(17)</sup>

$$\frac{x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\cdots x(t-\tau_{2m})}{(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\cdots x(t-\tau_{2m+1})} = \sum_{\substack{k=1\\ (t-\tau_1)x(t-\tau_2)\cdots x(t-\tau_{2m+1})=0}} K^m \left(\frac{m}{\pi}\delta(\tau_k-\tau_1)\right)$$

を適用することにより

$$K \int_{0}^{\infty} w_{2}(\tau, \tau) d\tau + w_{0(3)} = 0$$

および

$$\int_{0}^{\infty} w_{1(2)}(\tau) C_{1}(\tau) d\tau = 0$$

なる関係式が得られる。 $C_1(\tau)$  は任意であるから $w_{1(2)}(\tau)=0$  でなければならない。ゆえに 2 次の直交はん関数として

$$W_{2}[w_{2};x(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2})x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})d\tau_{1}d\tau_{2} - K \int_{0}^{\infty} w_{2}(\tau, \tau)d\tau$$
(2.15)

を得る。以下同様にして3次、4次、5次の直交はん関数を求めると

$$W_{8}[w_{8};x(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{8}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{8}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) x(t-\tau_{8}) d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{8}$$

$$-3K \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{8}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{2}) x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} d\tau_{2} \qquad (2.16)$$

$$W_{4}[w_{4};x(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{4}(\tau_{1}, \cdots, \tau_{4}) x(t-\tau_{1}) \cdots x(t-\tau_{4}) d\tau_{1} \cdots d\tau_{4}$$

$$-6K \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{4}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{3}, \tau_{8}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{8}$$

$$+3K^{2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{4}(\tau_{1}, \tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2} \qquad (2.17)$$

$$W_{5}[w_{6};x(t'), t' \leq t] = \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{5}(\tau_{1}, \cdots, \tau_{5}) x(t-\tau_{1}) \cdots x(t-\tau_{5}) d\tau_{1} \cdots d\tau_{5}$$

$$-10K \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{5}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{3}, \tau_{4}, \tau_{4}) x(t-\tau_{1}) \cdots x(t-\tau_{3}) d\tau_{1} \cdot d\tau_{4}$$

$$+15K^{2} \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{5}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{2}, \tau_{3}, \tau_{3}) x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{3}$$

$$(2.18)$$

となる。高次の直交はん関数も同様に求めることができる。

関数 $w_n(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$ はn次のWiener核と呼ばれ、Volterra核と同様、非線形システムは無限個のWiener核により特徴づけられるo

図 2.4 はこれをブロック線図に示したものである。

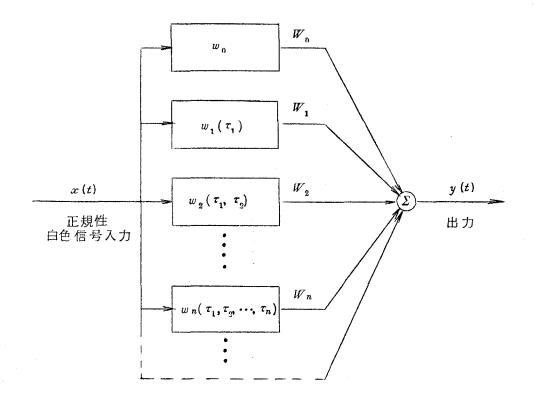


図 2.4 入力として正規性白色信号を受ける非線形 システムの直交はん関数級数による表示

#### 2.4 結 言

これまでに提案されている非線形システムに対する動特性測定法について検討し,内部構造が未知の非線形システムの動特性を測定するためにどのような点を解決すべきかを考察し,本研究の目的とするところをあきらかにした。

また非線形システムのはん関数による表示法について述べ、一般の非線形システムの入出力関係はVolterra(はん関数)級数により表わされ、その動特性はVolterra核により特徴づけられるととを示した。またシステムへの入力信号が正規性白色信号である場合には上述のボルテラ級数は直交化することができ、システムはWienerの直交はん関数級数により表わされ、動特性はWiener核により特徴づけられることを示した。

#### 第2章の参考文献

- 1) K.S.P.Kumar: Identification of Nonlinear, Nonstationary Processes; IFAC Tokyo Symposium, pp. 4.12~4.21 (1965)
- 2) I.E. Diamesis: On the determination of the Parameter of Certain

  Nonlinear Systems; Proc. IEEE, Vol. 53, 163, pp. 319~320 (1965)
- 3) 藤井, 伊藤, 喜多: リミットサイクルによる制御系動特性の測定法;計測と制御, 7巻, 4号, np. 24~33 (昭43)
- 4) K.S.Narendra & P.G.Gallman: An Iterative Method for the Identification on Nonlinear Systems Using a Hammerstein Model; 1966 Joint Automatic Control Conference, pp. 634~638 (1966)
- 5) G.J.Kirwin: The Use of a Growing Exponential for System Identification; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, Mal, p. 108 (1967)
- 6) 古谷,鈴木,藤井:多項式近似による非線形システムの動特性推定;計測自動制御学会論 文集,6巻,4号,pp.356~365 (昭45)
- 7) P. Eykhoff: Some Fundamental Aspects of Process Parameter Estimation; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-8, M.4, pp. 347~357 (1963)
- 8) R.J.Roy & J.Sherman: A Learning Technique for Volterra Series
  Representation; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-12, 166, pp. 761~764

  (1967)
- 9) M.Schetzen: Measurement of the Kernels of a Non-Linear System of Finite Order; International Journal of Control, Vol. 1, 163, pp. 251~263 (1965)
- 10 A.G.Bose: A Theory of Nonlinear Systems; M.I.T. Research Lab. Electronics, Tech. Rept. 309 (1956)
- 10 H.E.Singleton: Theory of Nonlinear Transducers; M.I.T. Research
  Lab Electronics, Tech. Rept. 160 (1950)
- 12) N.Wiener: Nonlinear Problems in Random Theory; M.I.T. Press and John Wiley & Sons (1958)
- 13) Y.W.Lee & M.Schetzen: Measurement of the Wiener Kernels of a Nonlinear System by Cross-correlation; International Journal of Control, Vol. 2, Ma 3, pp. 237~254 (1965)
- 14 中尾:はん関数を用いた非線形システムの動特性測定法(研究紹介);システムと制御,15巻,5号,pp.81~89 (昭46)
- 15) J.F.Barrett: The Use of Functionals in the Analysis of Nonlinear Physical Systems; J.of Electronics and Control, Vol. 15, MaG, pp.567 ~615 (1963)

16) V.Volterra: Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations; Dover Publications, New York (1959)
17) 宮川、佐藤、茅:不規則信号論と動特性推定; p84, コロナ社 (昭44)

第 3 章 Volterra 級数を用いた非線形システムの 動特性測定法

## 第 3 章 Volterra 級数を用いた非線形システムの 動特性測定法

#### 3.1 緒 言

前章において一般の非線形システムの入出力関係はVolterra級数で表わされることを示したが、本章ではこのVolterra級数をモデルとして用いて内部構造が未知の非線形システムの動特性をVolterra核の応答波形の形で測定する 11~31 方法について提案する。動特性測定に用いるモデルとして定位性を有するシステムのみならず、無定位性を有するシステムをも含むボルテラ級数モデルを導出する。動特性測定はまたこのVolterra級数モデルの次数を決定することにより行なわれる。そのためにシステムとモデルの応答の差に関する2乗誤差面積なる評価関数(これはシステムの入出力データより簡単に計算することができる)を導入し、これを考慮してモデルの次数を決定する。ついでこの決定にもとづいてモデルを構成し、このモデルを用いてシステムの動特性を表わすVolterra核を測定するものである。

#### 3.2 測定対象

2.3.1で一般の非線形システムの入出力関係はVolterra級数を用いて

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) \cdots x(t-\tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \cdots d\tau_{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_{n}(t)$$

$$(3.1)$$

と表わせることを示したが、ここでは積分の核にある Volterra核の物理的な意味について考察し、ここで取り扱う測定対象はその Volterra核がどのような形を有するかについて考える。

1次のVolterra核 $h_1(\tau_1)$  はすでに述べたように線形系における荷重関数に相当し、システムへの入力信号のうち $\tau_1$  時間過去の単位インバルス信号が現出力y(t)にどのような影響を及ぼすかを示したものである。2次のVolterra核 $h_2(\tau_1,\tau_2)$  は $\tau_1$  および $\tau_2$  時間過去の2個の単位インバルス信号がたがいに連携して現出力にどのような影響を及ぼすかを示すものである。一般にn次のVolterra核 $h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$ は $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$  時間過去のn個の単位インバルス信号がたがいに連携して現出力y(t)にどのような影響を及ぼすかを示すものである(図  $\sigma_1$ 0、すなわち Volterra核は過去における種々の時点の入力信号がたがいに連携して現出力 $\sigma_2$ 0、現出力にどのような影響を及ぼすかを示すものである。

実在のシステムではある程度以上過去の入力信号は現出力にほとんど影響を及ぼさないか、 その影響の仕方が一定であると見なされる場合が多いと思われる。前者は定位性を有するシステムであり、そのVolterra核はT・をある正の定数とすると、

$$h_n(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_j, ..., \tau_n) \simeq 0$$
 ,  $\tau_j \geq T_s$   $(j=1, 2, ..., n)$  (3.2) なる関係を満足している。後者はその $Volterra$ 核が

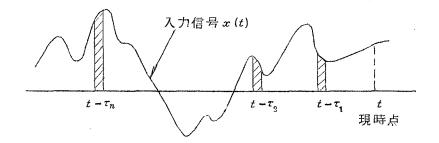
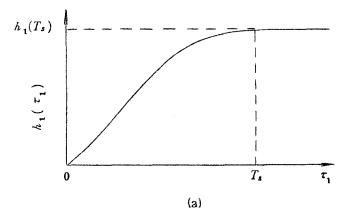


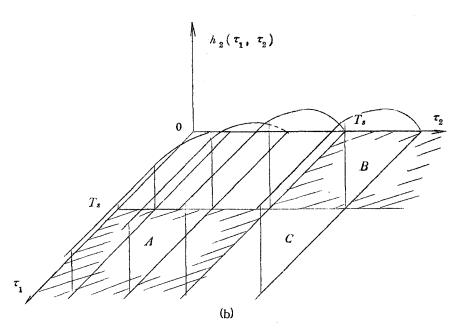
図 3.1 入力信号 x(t) の過去における値

$$h_n(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_j, ..., \tau_n) = h_n(\tau_1, \tau_2, ..., T_s, ..., \tau_n), \tau_j \ge T_s$$

$$(j=1, 2, ..., n) \qquad (3.3)$$

なる 形の無定位性を有するシステムである。すなわち 1 次の Volterra核は図 3.2 (a)に示すように 1 形の線形無定位システムのインパルス応答に相当し、2 次の Volterra核は(b)に示すように領域 A においては  $\tau_1$  軸方向に、領域 B においては  $\tau_2$  軸方向に一定の値をとり、領域 C ではその領域すべてで一定値をとるようなものである。以下高次の Volterra核も同様な形を有している。





(a) 1次のVolterra核

(b) 2次のVolterra核

本章では上述のように実在のシステムでは多いと思われる定位性を有するシステムおよび式 (3.3) の関係を満足する無定位性を有するシステムを測定対象として考える。なお式 (3.3) において  $h_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\simeq 0$  とおくと式 (3.3) は式 (3.2) に等しくなることより、定位性を有するシステムは式 (3.3) の無定位性を有するシステムの特別な場合と考えることができる。

#### 3.3 Volterra 級数モデル

システムの入出力関係を表わすVolterra級数は式(3.1)に示すように一般にそのたらみ こみ積分の積分区間が無限となり、実際にはこのましては取り扱うことはできない。そこでな んらかの方法でこれを有限時間積分のものに変換する必要がある。以下積分区間が有限の Volterra級数モデルを構成することを考える。

#### 3.3.1 定位性を有するシステムに対するモデル

システムが定位性を有する場合には、式(3.1)に式(3.2)の Volterra核に対する定位性の条件式を適用することにより

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{T_s} \int_{0}^{T_s} \cdots \int_{0}^{T_s} \int_{0}^{$$

なる関係が得られ、システムの入出力関係は有限時間積分のVolterra級数で与えられる。したがつてシステムが定位性を有することがわかっている場合には式(3.4)をシステムのモデルとして用いればよい。

#### 3.3.2 無定位性を有するシステムに対するモデル<sup>4)</sup>

システムが無定位性を有する場合にはその出力は過去にはいった入力すべての影響を受け、その入出力関係を表わす Volterra級数は必ずその積分区間が無限となり、そのまっては取り扱うことはできない。そこでこのシステムの動特性を過去の入力の影響を含めた形で表わし、その入出力関係を積分区間が有限の Volterra級数で表わすことを考える。そのために図 3.3 に示すような時間 -T 、以前の値(図 3.3 における波線部分)が未知の入力に対するシステムの応答について考察する。

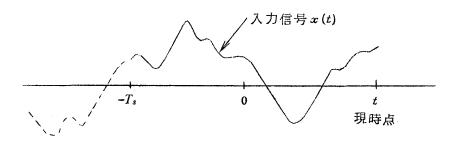


図 3.3 無定位性を有するシステムへの入力信号

時刻 t ( $\geq 0$ ) におけるシステムの応答 y(t) は積分区間が無限の式 (3.1) の Volterra 級数 で表わされるが, この積分を未知入力によるものと, 既知入力によるものとに分け, これに式 (3.3) の関係を適用すると, Volterra 級数の各項は

$$\begin{split} y_{0}(t) &= h_{0} \\ y_{1}(t) &= \int_{0}^{t+T_{s}} h_{1}(\tau_{1})x(t-\tau_{1})d\tau_{1} + \int_{t+T_{s}}^{\infty} h_{1}(\tau_{1})x(t-\tau_{1})d\tau_{1} \\ &= \int_{0}^{t+T_{s}} h_{1}(\tau_{1})x(t-\tau_{1})d\tau_{1} + h_{1}(T_{s}) \int_{t+T_{s}}^{\infty} x(t-\tau_{1})d\tau_{1} \\ &= \int_{0}^{t+T_{s}} h_{1}(\tau_{1})x(t-\tau_{1})d\tau_{1} + h_{1}(T_{s}) \cdot S_{x} \left( t \leq S_{x} \leq \int_{t+T_{s}}^{\infty} x(t-\tau_{1})d\tau_{1} \right) \\ y_{2}(t) &= \int_{0}^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} t^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} (\tau_{1}, \tau_{2})x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})d\tau_{1} d\tau_{2} \\ &+ 2 \int_{0}^{t+T_{s}} h_{2}(\tau_{1}, T_{s})x(t-\tau_{1})d\tau_{s} \cdot S_{x} \\ &+ h_{2}(T_{s}, T_{s}) \cdot S_{s}^{2} \\ &\vdots \\ y_{n}(t) &= nC_{0} \int_{0}^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} t^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n})x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})\cdots x(t-\tau_{n})d\tau_{1} d\tau_{2} \cdot d\tau_{n} \\ &+ nC_{1} \int_{0}^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+T_{s}} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n-1}, T_{s})x(t-\tau_{1})x(t-\tau_{2})\cdots \\ & x(t-\tau_{n-1})d\tau_{1} d\tau_{2} \cdot d\tau_{n-1} \cdot S_{x} \\ &+ \dots \\ &+ nC_{n-1} \int_{0}^{t+T_{s}} h_{n}(\tau_{1}, T_{s}, \dots, T_{s})x(t-\tau_{1})d\tau_{1} \cdot S_{x}^{n-1} \\ &+ nC_{n} h_{n}(T_{s}, T_{s}, \dots, T_{s}) \cdot S_{x}^{n} \end{split}$$

となる。これらの各項の応答を入力 $x(t-\tau)$  に関して同じべきの項を集めて書き直すと $y_0'(t)=h_0+h_1(T_s) \bullet S_x+h_2(T_s,T_s) \bullet S_{x_2}+\cdots+h_n(T_s,T_s,\cdots,T_s)S_x^n+\cdots$ 

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h_n (T_s, T_s, \dots, T_s) \cdot S_{x^n}$$

$$y_1'(t) = \int_0^{t+T_s} \{h_1 (\tau_1) + 2 h_2 (\tau_1, T_s) \cdot S_x + \dots + n \cdot h_n (\tau_1, T_s, \dots, T_s) S_x^{n-1} + \dots \} x(t-\tau_1) d\tau_1$$

$$= \int_0^{t+T_s} \{\sum_{n=1}^{\infty} h_n (\tau_1, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^{n-1} \} x(t-\tau_1) d\tau_1$$

$$y_2'(t) = \int_0^{t+T_s} \{h_2 (\tau_1, \tau_2) + 3 \cdot h_3 (\tau_1, \tau_2, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x + \dots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot h_n (\tau_1, \tau_2, T_s, \dots, T_s) \}$$

$$\times S_x^{n-2} \} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_0^{t+T_s} \{h_1 (\tau_1, \tau_2, \dots, T_s) \cdot S_x^{n-2} \} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_0^{t+T_s} \{h_2 (\tau_1, \tau_2) + h_2 (\tau_1, \tau_2, T_s, \dots, T_s) \cdot S_x^{n-2} \} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$y_{k}'(t) = \begin{cases} t + T_{s} & \begin{cases} t + T_{s} & \infty \\ 0 & \end{cases} & \begin{cases} t + T_{s} & \infty \\ \sum_{n=k}^{\infty} C_{n-k} & \bullet h_{n} & (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{k}, T_{s}, \dots, T_{s}) & \bullet S_{x}^{n-k} \end{cases}$$

$$x(t - \tau_{1}) x(t - \tau_{2}) \cdots x(t - \tau_{k}) d\tau_{1} d\tau_{2} \cdots d\tau_{k}$$

$$\vdots$$

が得られる。ととで上式の積分の核を

$$\sum_{n=k}^{\infty} {}_{n}C_{n-k} \cdot h_{n}\left(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{k}, T_{s}, \dots, T_{s}\right) \cdot S_{x}^{n-k} = g_{k}\left(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{k}\right) \quad (3.5)$$

とおくと、式(3.1)のVolterra級数は

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k'(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} \int_0^{t+T_s} f_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

$$\stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(g_k; x(t'), -T_s \leq t' \leq t)$$

$$(3.6)$$

となる。以上より積分区間が無限の Volterra級数は式(3.6)のように積分区間が有限の Volterra級数に変換され、時刻  $t \geq 0$  におけるシステムの挙動は  $g_k$  ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ ) (k=0, 1, 2,  $\dots$ ) と-T。以後のシステムへの入力により規定される。したがってシステムが無 定位性を有するときには、式(3.6)をシステムのモデルとして用いればよく、システムの動特性はとこで新しく定義した Volterra核  $g_k$  ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ ) (k=0, 1, 2,  $\dots$ ) により表わされる。たとし、この Volterra核は式(3.3)および式(3.5)より

$$g_{k}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{j}, \dots, \tau_{k}) = g_{k}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, T_{s}, \dots, \tau_{k}), \tau_{j} \geq T_{s}$$

$$(j = 1, 2, \dots, k)$$
(3.7)

なる関係を満足している。

式(3.6)のモデルは定位性を有するシステムに対するモデルを特別な場合として含んでいる。 すなわち定位性の条件式(3.2)を式(3.5)に適用することにより、  $g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ は

$$g_k( au_1, au_2,\cdots, au_k)=h_k( au_1, au_2,\cdots, au_k)$$
 (  $k=0$  ,  $1$  ,  $2$  ,  $\cdots$  ) となり,また  $h_k( au_1, au_2,\cdots, au_k)$  は定位性の条件を満足していることから式(  $3$  .  $6$  )は

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{t+T_{s}} \int_{0}^{t+$$

となる。これは定位性システムに対するモデル、式(3.4)と一致している。したがってシステムが定位性であるか、無定位性であるかに関係なく、システムのモデルとして式(3.6)のモデルを用いればよく、非線形システムの動特性測定は Volterra核  $g_k(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$ の測定に帰することができる。

#### 3.4 モデルの次数の決定および各項の応答の決定法 4151

前節で非線形システムは式(3.6)のVolterra級数モデルで表わされることを示したが、その次数は一般に無限次となり、実際問題としてこのようなモデルを取り扱うことはできない。そこでなんらかの形でモデルの次数を有限次で打ち切らなければならない。モデルの次数はそのモデルが測定対象の特性を十分近似できるような値に決めるのが望ましい。以下モデルの次数をモデルの近似度に着目して決定する方法について述べるとともに、任意の入力信号に対するモデルの各項の応答を測定する方法についても述べる。

測定対象の動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号をs(t)とする。 s(t)は時間  $0 \le t \le T$  で定義されており、かつとの区間における積分値は

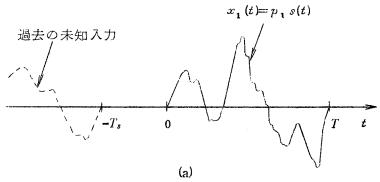
$$\int_{0}^{T} s(t) dt = 0$$
 (3.8)

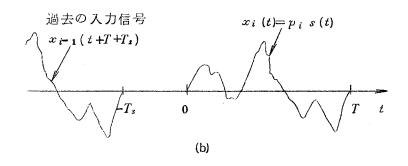
を満足するものとする(あらかじめシステムが定位性を有することがわかっている場合には s(t)は式(3.8)を満足する必要はない)。測定対象へ

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t)$$
 (  $i = 1, 2, \dots, L$  ) (3.9)

たいし  $p_i: |p_i| \le 1$  なる定数, L: + 分大なる整数

なる入力を図3.4のように投入する。このL個の入力は時間的に続けて投入するのであるが、説明の便宜上個々の入力の投入時点をt=0として話をする。最初の入力 $x_1(t)$  は 測定対象が定常状態にあるときに、すなわち過去の未知入力が切れてからT、時間後に投入する(図3.4(a))。





(a)入力信号 $x_i(t)$ , (b)入力信号 $x_i(t)$ 

図 3.4 入力信号 $x_i(t)$ の投入方法

この時のシステムの状態は式(3.6)より

$$y(t)_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k'(t)_{t=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \cdots \int_0^{T_s} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x(-\tau_1) x(-\tau_2) \cdots x(-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k$$

$$= g_0$$

である (システムが定位性を有する場合には  $y(t)_{t=0} = h_0$  となっている)  $_0$ 

つづいて投入する入力 $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , …,  $x_i(t)$ , …,  $x_L(t)$ は直前の入力の影響が消え、システムがはじめの状態  $g_0$  (定位性を有する場合には  $h_0$  )に戻ったときに加えなければならない。入力 $x_1(t)$ を切った後 $T_S$  時間経過したときのシステムの出力は式(3.6)から

$$y(t)_{t \geq T+T_s} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t-T}^{t} \int_{t-T}^{t} \dots \int_{t-T}^{t} g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) x_1(t-\tau_1) x_1(t-\tau_2) \dots$$

$$x_1(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k$$

となり、積分の下限および上限はそれぞれ  $t-T \ge T+T_s-T=T_s$ 、  $t \ge T+T_s$ であり、この区間では式(3.7)から  $g_k(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k)$  は  $g_k(T_s,T_s,\cdots,T_s)$  に等しくなることより、上式は

$$y(t)_{t \geq T+T_s} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(T_s, T_s, \dots, T_s) \left\{ \int_{t-T}^t p_1 \cdot s(t-\tau) d\tau \right\}^k$$

と書きかえられる。入力 s(t)に対する式(3.8)の関係を用いると

$$y(t)_{t>T+T} = g_0$$

となる(システムが定位性を有する場合には  $g_k$  ( $T_s$ ,  $T_s$ , …,  $T_s$ ) が

$$g_k (T_s, T_s, \dots, T_s) = h_k (T_s, T_s, \dots, T_s) \simeq 0$$
  $(k = 1, 2, \dots)$ 

なる関係を満足するため、式(3.8)に関係なく

$$y(t)_{t>T+T} = h_0$$

となる)。以上より入力 $x_1$ (t) が切れてからT。時間後にシステムの状態ははじめの状態に復帰している。したがってつづく入力 $x_2$ (t) は $x_1$ (t) を切った後T。時間経過してから投入すればよい。以下 $x_3$ (t), …,  $x_i$ (t), …,  $x_L$ (t) に関しても同様である(図 3.4(b))。つぎにこれらのL個の入力に対するシステムの応答について考察する。入力 $x_i$ (t)に対するシステムの応答をy( $p_i$ , t)とすると式(3.6)から

$$y(p_{i}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{t} \int_{0}^{t} ... \int_{0}^{t} g_{k}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{k}) p_{i} \cdot s(t - \tau_{1}) p_{i} \cdot s(t - \tau_{2}) ...$$

$$p_{i} \cdot s(t - \tau_{k}) d\tau_{1} d\tau_{2} ... d\tau_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{i}^{k} \int_{0}^{t} \int_{0}^{t} ... \int_{0}^{t} g_{k}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{k}) s(t - \tau_{1}) s(t - \tau_{2}) ... s(t - \tau_{k}) d\tau_{1} d\tau_{2} ...$$

$$d\tau_{k} = \sum_{k=0}^{\infty} G_{k}[g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t] p_{i}^{k} \quad (i = 1, 2, ..., L) \quad (3.10)$$

が得られる。上式において $G_k[g_k;s(t'),0\leq t'\leq t]$ は入力信号s(t)に対する $V_0$ Iterra級数のk項目の応答を表わしている。これを決定するため $V_0$ Iterra級数の次数をNと仮定して

式(3.10)と同形のモデル

$${}^{N}y(p_{i},t) = \sum_{k=0}^{N} {}^{N}G_{k} [{}^{N}g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t] p_{i}^{k}$$
(3.11)

を導入し、このモデルの応答と測定対象の応答の差に関する評価関数

$$J_{N} = \sum_{i=1}^{L} \{ y(p_{i}, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N}G_{k}[^{N}g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t] p_{i}^{k} \}^{2}$$
(3.12)

が最小となるように $^{NG}_{k}$   $[^{N}g_{k};s(t'),0\leq t'\leq t]$ を決定する、 $J_{N}$  を最小とする $^{NG}_{k}$   $[^{N}g_{k};s(t'),0\leq t'\leq t]$  の値は

$${}^{N}G^{+}=(P^{T}P)^{-1}P^{T}Y$$
 (3.13)

たゞし

$${}^{N}G^{*} = \begin{bmatrix} {}^{N}G_{0}^{*} \left[ {}^{N}g_{0}^{*} ; s\left( t' \right), & 0 \leq t' \leq t \right] \\ {}^{N}G_{1}^{*} \left[ {}^{N}g_{1}^{*} ; s\left( t' \right), & 0 \leq t' \leq t \right] \\ \vdots \\ {}^{N}G_{N}^{*} \left[ {}^{N}g_{N}^{*} ; s\left( t' \right), & 0 \leq t' \leq t \right] \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} p_{1}^{0} & p_{1}^{1} & p_{1}^{2} & \cdots & p_{1}^{N} \\ p_{2}^{0} & p_{2}^{1} & p_{2}^{2} & \cdots & p_{2}^{N} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_{L}^{0} & p_{L}^{1} & p_{L}^{2} & \cdots & p_{L}^{N} \end{bmatrix} \cdot Y = \begin{bmatrix} y \left( p_{0}, t \right) \\ y \left( p_{1}, t \right) \\ \vdots \\ y \left( p_{L}, t \right) \end{bmatrix}$$

T: 転置を表わす

で与えられる。Pはあらかじめ設定した値であり、またYは測定値であるから式(3.13)を計算することにより入力s(t)に対するN次のボルテラ級数モデルの各項の応答 $^NG^*$ を決定することができる。上で仮定したモデルの次数Nが適当であればこの $^NG^*$ を用いて式(3.11)から計算したモデルの応答 $^Ny^*(p_i,t)(i=1,2,\cdots,L)$ と、実際のシステムの応答 $y(p_i,t)(i=1,2,\cdots,L)$ とはほよ一致するはずである。これらがどの程度一致しているかを示す評価関数として測定対象の応答で正規化した2乗誤差面積

$$E_{N} = \frac{\int_{0}^{T} \int_{i=1}^{L} \{ y(p_{i}, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N}G_{k}^{+} [ {}^{N}g_{k}^{+} ; s(t'), 0 \le t' \le t ] p_{i}^{k} \}^{2} ] dt}{\int_{0}^{T} \{ \sum_{i=1}^{L} y^{2}(p_{i}, t) \} dt}$$

$$(3.14)$$

を導入する。上で仮定したNに対してこの $E_N$  を計算し、その値がある許容値。( $\geq 0$ )よりも小さくなれば、Volterra級数モデルの項数Nは適当であったと判定する。この評価関数 $E_N$  はモデルの項数Nに関して単調減少関数となり、N を増加すればいくらでも $E_N$  を小さくすることができる。また $N \to \infty$ においては $C_k^{C_k} \in S_k^{C_k}$  まs(t') 、 $0 \le t' \le t$  】は真値 $G_k \in S_k$  にs(t') 、 $0 \le t' \le t$  】に一致する(付録 s(t') 、s(t') 、s(t') の

モデルの項数Nが適当であると判断されると、式(3.13)ですでに計算されている $^NG^*$ は入力信号 $_S(t)$ に対するとの有限次のVol terra級数モデルの各項の応答を与えている。また任意の入力に対するVol terra級数モデルの各項の応答も、 $_S(t)$ をその入力波形として式(3.9)の入力に対する測定対象の応答 $_S(p_i,t)$ を測定し、モデルの次数を上で決められた値にして、式(3.13)を解くことにより求めることができる $_S(t)$ 。

#### 3.5 Volterra 核の測定法

#### 3.\*5·1 直接法 5) 6)

2.3.1 においても述べたように Volterra核は線形系におけるようなたゞ単なるインバルス 応答の形では得ることはできず、一般化されたた」みこみ積分のインバルス応答として得られ る。そのためにまず Volterra級数の各項の応答より k 次元の一般化た」みこみ積分

$$G_k \left[ g_k ; s_1(t') s_2(t') \dots s_k(t') , 0 \le t' \le t \right]$$

$$= \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t g_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k) s_1(t-\tau_1) s_2(t-\tau_2) \cdots s_k(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k$$

$$(k=1, 2, \dots, N)$$
 (3.15)

を求めることを考える。 $G_1[g_1;s_1(t'),0 \le t' \le t]$  は入力 $s_1(t)$  に対する 1 次の項の応答そのものである。 $G_2[g_2;s_1(t')s_2(t'),0 \le t' \le t]$ は

$$\{(s_1 + s_2)^2 - s_1^2 - s_2^2\} / 2! = s_1 s_2$$

なる関係式<sup>(7)</sup>を利用して

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{2} \left[ \ g_{2} \ ; \ s_{1}(t') + s_{2}(t') \ , \ 0 \leq t' \leq t \ \right] - G_{2} \left[ \ g_{2} \ ; \ s_{1}(t') \ , \ 0 \leq t' \leq t \ \right] \\ - G_{2} \left[ \ g_{2} \ ; \ s_{2}(t') \ , \ 0 \leq t' \leq t \ \right] / 2 \ ! = G_{2} \left[ \ g_{2} \ ; \ s_{1}(t') \ , \ 0 \leq t' \leq t \ \right] \\ \end{array} \right.$$

より求めることができる。すなわち入力  $s_1(t)+s_2(t)$ 、  $s_1(t)$ 、  $s_2(t)$  に対する Volterra級数の 2 次の項の応答を用いて計算することができる。同様に 3 次元の一般化た 1 みこみ積分は

$$\left\{ \left( s_1 + s_2 + s_3 \right)^3 - \left( s_1 + s_2 \right)^3 - \left( s_2 + s_3 \right)^3 - \left( s_3 + s_1 \right)^3 + s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \right\} / 3! = s_1 s_2 s_3$$

なる関係式を利用して

 $_{ }$  より計算することができる。一般に  $_{ }$  次元の一般化た  $_{ }$  みこみ積分は

$$\begin{bmatrix} G_k [ g_k; s_1(t') + s_2(t') + \dots + s_k(t'), & 0 \le t' \le t \end{bmatrix} - \{ G_k [ g_k; s_1(t') + s_2(t') + \dots + s_{k-1}(t'), \\ 0 \le t' \le t \end{bmatrix} + \dots \} + \dots + (-1)^{k-1} \{ G_k [ g_k; s_1(t'), & 0 \le t' \le t \end{bmatrix} + G_k [ g_k; s_2(t'), & 0 \le t' \le t \end{bmatrix} + \dots \} ] / k ! = G_k [ g_k; s_1(t') s_2(t') \dots s_k(t'), & 0 \le t' \le t ]$$

$$(3.1.8)$$

なる関係を用いて計算することができる。

つぎにこれらの関係式を利用して一般に k 次の Volterra核を測定する方法について述べる。 測定のための入力として

$$s_{i}(t) = u(t - T_{i}) = \begin{cases} 1 & (t \ge T_{i}) \\ 0 & (t < T_{i}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$
 (3.19)

たゞし  $T_i$  : おくれ時間

を用いる。これらの入力に対する式(3.18)の左辺の各項の応答を3.4で述べた方法により 決定する。その結果を用いて式(3.18)を計算すると

$$NG_k^{\star} [Ng_k^{\star}; u(t'-T_1)u(t'-T_2)\cdots u(t'-T_k), 0 \le t' \le t]$$

$$= \int_{0}^{t} \int_{0}^{t} \cdots \int_{0}^{t} {}^{N} g_{k}^{\star} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{k}) u (t - T_{1} - \tau_{1}) u (t - T_{2} - \tau_{2}) \cdots u (t - T_{k} - \tau_{k}) d \tau_{1} d \tau_{2} \cdots d \tau_{k}$$

$$= \int_{0}^{t - T_{1}} \int_{0}^{t - T_{2}} \cdots \int_{0}^{t - T_{k}} {}^{N} g_{k}^{\star} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{k}) d \tau_{1} d \tau_{2} \cdots d \tau_{k}$$

$$(3.20)$$

が得られる。式(3.20)はn次元空間における $\tau_1$ - $T_1$ = $\tau_2$ - $T_2$ = $\cdots$ = $\tau_n$ - $T_n$ を満足する線上の値のみを示しているにすぎない。それゆえ $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\cdots$ ,  $T_n$  の種々の値に対して式(3.20)を計算することによりn次元空間上のすべての点における値

$${}^{N}G_{k}^{\star}(t_{1}, t_{2}, \dots, t_{k}) = \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{k} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{k} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{k} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

を求めることができる。式(3.21)を $t_1$ ,  $t_2$ , …,  $t_k$  に関して偏微分すると

$$\frac{\partial^{k} \stackrel{NG_{k}^{+}}{(t_{1}, t_{2}, \cdots, t_{k})}}{\partial t_{1} \partial t_{2} \cdots \partial t_{k}} = \stackrel{N}{g_{k}^{+}} (t_{1}, t_{2}, \cdots, t_{k})$$

$$(3.22)$$

が得られ、これが求めるk次のVolterra核である。

3. 5. 2 代数方程式法 8)

3.4 においてモデルの 次数が決定されると同時に、システムの動特性を抽出するのに十分を周波数および振幅特性を有する信号 s(t)に対する Volterra級数モデルの各項の応答 $^{NG}_{k}^{*}$   $[^{N}g_{k}^{*};s(t'),0\leq t'\leq t]$   $(k=0,1,2,\cdots,N)$  がすでに得られている。ことではこの各項の応答を用いてシステムの動特性を表わす Volterra核を測定することを考える。式(3.13) により決定された Volterra級数モデルの各項の応答は入力 s(t)に対して

なる関係を有している。上式の形の積分方程式を厳密に解く方法は現在のところ見い出されていないので、上式を代数方程式で近似し、ディジタル計算機を用いて解くことを考える。これは最近の電子計算機の目覚ましい発達を考えると非常に有効な方法であると思われる。

式(3.23)を図3.5に示すように離散値幅 1 で離散値表示すると

t=r.aにおいて

$${}^{N}G_{k}^{\star}(r) \simeq \sum_{i_{1}=1}^{r} \sum_{i_{2}=1}^{r} \dots \sum_{i_{k}=1}^{r} {}^{N}g_{i_{1}, i_{2}, \dots, i_{k}}^{\star} \qquad r^{S}i_{1} \cdot r \cdot s_{i_{2}} \dots r^{S}i_{k} \Delta^{k}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, N)$$
(3.24)

たゞし

となる。Volterra核 $^Ng_{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k}$  は変数 $i_1$  ,  $i_2$  ,  $\cdots$  ,  $i_k$  に関して対称性を示すから(付録 3.2 参照),これを利用して対称な核のすべての和をあたらしく $^Ng_{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_k}$  とおき式(3.2 4)を書きなおすと,

$${}^{N}G_{k}^{*}(r) \simeq \sum_{i_{1}=1}^{r} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}} \cdots \sum_{i_{k-1}}^{i_{k-1}} {}^{N}\vec{g}_{i_{1}, i_{2}, \dots, i_{k}} {}^{r}S_{i_{1}} \cdot {}^{r}S_{i_{2}} \cdots {}^{r}S_{i_{k}} \cdot \Delta^{k}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, N)$$
(3.25)

が得られる。たゞし上式における $^Ng_{i_1,\ i_2,\cdots,\ i_k}^*$ は式(3.7)から

$${}^{N}g_{i_{1}}^{*}, i_{2}, \dots, i_{j}, \dots, i_{k} = {}^{N}g_{i_{1}}^{*}, i_{2}, \dots, M, \dots, i_{k}, \qquad i_{j} \geq M \ (j=1, 2, \dots, k)$$

$$(3.26)$$

(M:M-1<Ts/△≤M なる整数)

なる関係を満足している。したがって入力rsmとして新しく

$$r s_{M} = \sum_{i=M}^{r} r s_{i} \tag{3.2.7}$$

を定義すると、式(3.25)は

$${}^{NG_{k}^{+}(r)} \simeq \sum_{i_{1}=1}^{M} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}} \cdots \sum_{i_{k-1}}^{i_{k-1}} {}^{NG_{i_{1},i_{2},\dots,i_{k-1}}^{+}} {}^{rS_{i_{1},rS_{i_{2},\dots,rS_{i_{k}}}}} \Delta^{k}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, N)$$
(3.2.8)

のように書くことができる。式(3.28)においてい。は投入入力で既知であり、 $NG_k^*(r)$  は式(3.13)ですでに計算されているので、時点 r を測定パラメータ $^Ngi_1$ ,  $i_2$ ,  $\cdots$   $i_k$  の個数(M (M+1)…(M+k-1)/k!)だけ変化させて連立 1 次方程式をつくり、これを未知数 $^Ng_{i_1}^*$ ,  $i_2$ ,  $\cdots$ ,  $i_k$  に関して解くことにより測定対象の特性を表わす V olterra核を決定することができる。

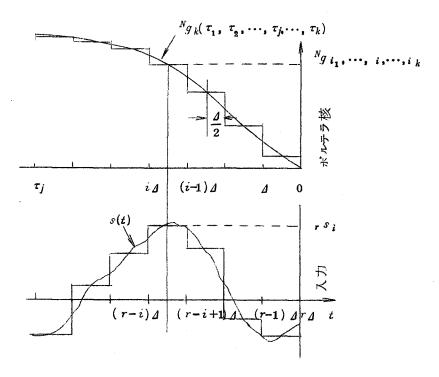


図 3.5 Volterra核と入力の離散値表示

#### 3.5.3 直接法と代数方程式法との比較,検討

Volterra核の測定の方法として、直接法と代数方程式法の二つの方法を提案したが、ことでは両者の得失について考察する。

投入する入力信号に関しては、直接法ではVolterra級数モデルの次数の決定のための入力信号のほかに、Volterra核の測定のために新しく種々の入力信号を投入しなければならないが、代数方程式法ではモデルの次数の決定の際に得られたVolterra級数モデルの各項の応答を用いてVolterra核を決定するため、別にあらためて入力信号を投入する必要はない。

また測定された応答波形を用いて実際にVolterra核を決定する段階では直接法では一般化た」みこみ積分を計算するための簡単な算術演算(式(3.18)の計算)と式(3.22)の微分演算ですむが、代数方程式法では連立1次方程式を解かなければならない。これは逆マトリクスの計算に帰されるが、モデルの次数が高次の場合とか、離散値幅 Δを小さくとり分割点の数Mを増すと逆マトリクスの演算が面倒になり、計算機の演算時間が急激に増大してくる。また必要な記憶容量もぼう大なものとなる。すなわち分割点の数をMとするとk次のVolterra核を計算するのに必要な計算機の記憶容量は測定すべきバラメータ個数がM(M+1)…(M+k-1)/k! 個であることから

(計算機の記憶容量)={ $M(M+1)\cdots(M+k-1)/k!$ } $^{*}$ で与えられる。

#### 3.6 実際上の問題に対する考察

以上述べた方法により非線形システムの動特性を測定することができるが、その際測定対象は3.2において述べたようにそのVolterra核は式(3.3)の関係を満足していなければならない。したがつて本測定法を実際に適用する場合に、あらかじめ測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうか調べる必要がある。

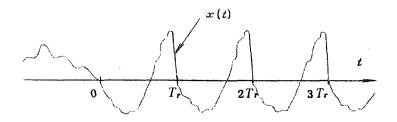


図 3.6 測定対象が式(3.3)の関係を満足するか どうかを調べるための入力信号

そのため図 3.6 に示すような  $t \ge 0$  で周期性があり(周期  $T_r$ ),かつその 1 周期にわたる最分値が 0 となる入力信号を考える。この入力信号に対するシステムの応答とそのシステムの Volterra核に関して次のような関係が成立する。すなわち上述の条件を満たす任意の入力信号に対してシステムの応答が常に

 $t \ge T_s$ を満足するすべての t に対して  $y(t) = y(t + T_r)$  (3.29)

となれば、システムの Volterra核は

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \tau_n) = h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, T_s, \dots, \tau_n), \tau_j \ge T_s$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$
(3.3)

なる形を有する(付録3.3参照)。とれより測定対象が式(3.3)を満足するかどうかは、上の条件を満たす種々の入力信号に対する測定対象の応答を測定し、式(3.29)を満足するT。が常に見いだせるかどうかにより判定することができる。とれは種々の入力信号について調べなければならないが、システムが式(3.3)の関係を満足していないにもかかわらず、式(3.29)の関係が成立するのは入力信号がごく特別な形をしている時のみであるので、実際には2、3種類の入力信号について確かめれば十分であるう。以上の方法により測定対象が式(3.3)を満足するかどうかを確かめられるが、それと同時にT。の値も知ることができる。

#### 3.7 測定例

#### 3.7.1 直接法による測定例

[例1] 測定対象として非線形微分方程式

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.8 \frac{d y(t)}{dt} + y(t) + \left(\frac{d y(t)}{dt}\right)^2 = x(t)$$
 (3.30)

で表わされるシステムを考える。式(330)においてx(t)はシステムに加わる入力、y(t)はシステムの出力を表わしている。このシステムの構造に関してはなんら先験的な情報は得られていず、たゞ入力x(t)と出力y(t)のみが測定できるものとする。

動特性測定に先だち測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうかを3.6に述べた方法により解かめる。その結果測定対象は式(3.3)を満足し、 $T.\simeq 14$ ( $\sec$ ) であるととがわかる。まずモデルの次数を決めるため最小パルス幅  $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。周期 $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。周期 $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。の加算 $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。の加算 $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。の加算 $\Delta=0.5$ ( $\sec$ )。の信号の平均値および分散をそれぞれのおよび1にとる。入力の個数 $\Delta=0.5$ ( $\cot$ 0、 $\Delta=0.5$ )として用いる。との信号の平均値および分散をそれぞれのおよび1にとる。入力の個数 $\Delta=0.5$ 0、 $\Delta=0.6$ 0 世紀文

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t)$$

なる入力を投入し、その出力  $g(p_i,t)$  を測定する。この測定結果を用いて種々のNに対して $^NG^*$  を計算し(式(3.13)を用いる)、ついでこの値を式(3.14)に代入して、モデルの次数 N が適当であるかどうかを判定する評価関数  $E_N$  を計算する。種々のNに対する  $E_N$ 

の計算結果を表 3.1 に示す。許容値 e が e = 0.3 × 1 0<sup>-2</sup> と与 えられたとすると、モデルの次数は 2 次で十分であることが わかる。つぎに 3.5.1 の方法を用いてステップ信号に対する 1 次のた > みこみ積分、

$$\int_{0}^{t_{2}} g_{1}^{+} (\tau_{1}) u (t - \tau_{1}) d \tau_{1}$$
 (3.31)

と、おくれ時間 $T_1$ , $T_2$ の二つのステップ信号に対する2次元

表  $\mathbf{5.1}$  モデルの次数を決めるための評価関数  $E_N$  の計算値

	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
N	$E_N$
1	0.131×10 <sup>0</sup>
2	$0.245 \times 10^{-2}$
3	$0.321 \times 10^{-8}$
4	$0.161 \times 10^{-4}$
5	0.158×10 <sup>-5</sup>
6	$0.957 \times 10^{-7}$

の一般化されたたゝみとみ積分

$$\int_{0}^{t} \int_{0}^{t} g_{2}^{*}(\tau_{1}, \tau_{2}) u(t-T_{1}-\tau_{1}) u(t-T_{2}-\tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$= \int_{0}^{t-T_{1}} \int_{0}^{t-T_{2}} g_{2}^{*}(\tau_{1}, \tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2} \qquad (3.32)$$

を測定する。式 (3.31) の測定結果を t に関して微分することにより 1 次の Volterra核が 得られる。 1 次の Volterra核の測定値を図 3.7 に示す。

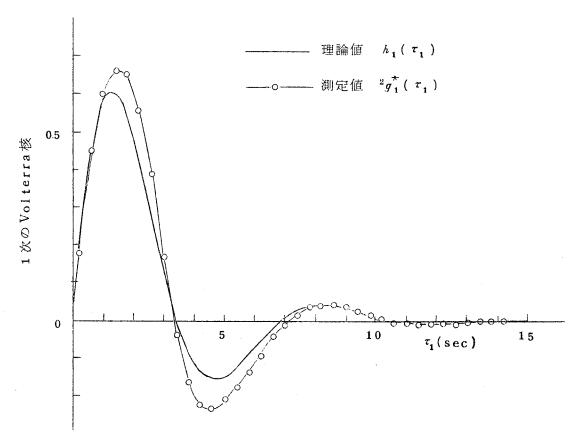


図 3.7 1次の Volterra 核の理論値と測定値

2 次の Volterra核は  $T_{\mathbf{1}}$  、  $T_{\mathbf{2}}$  を種々の値に設定して式 (  $\mathbf{3}$  .  $\mathbf{3}$  .  $\mathbf{2}$  ) を測定し,  $\mathbf{2}$  次元空間の全領域における値

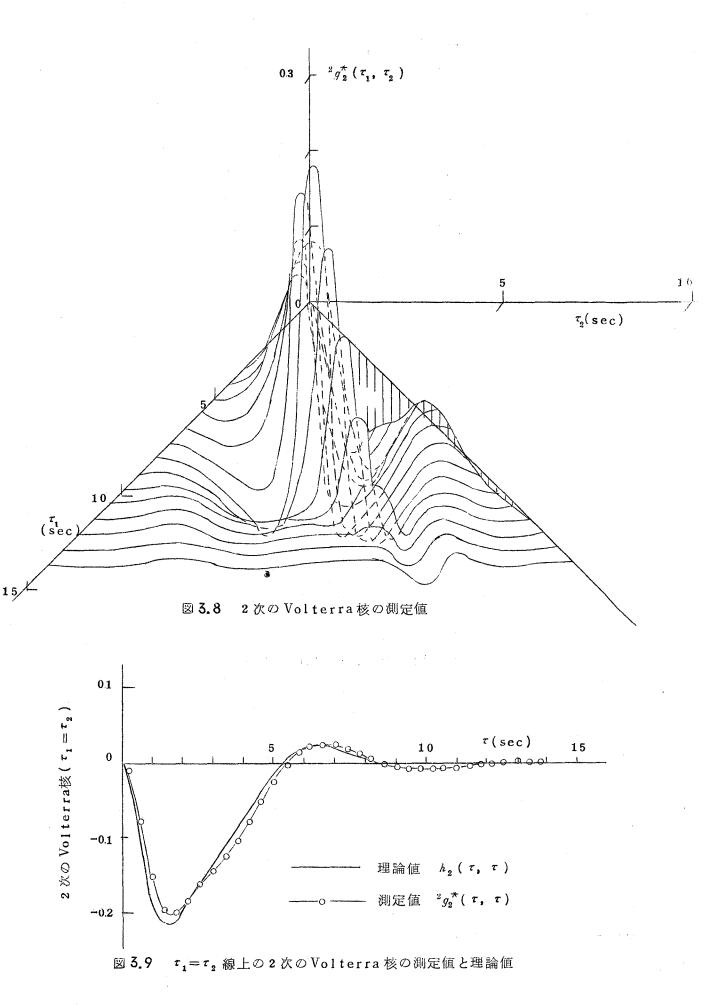
$$\int_{0}^{t_{1}} \int_{0}^{t_{2}} g_{2}^{+} (\tau_{1}, \tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

を求め、これを $t_1$ 、 $t_2$  に関して偏微分することにより求められる。 2 次の Volterra核の測定値を図 3.8 に示す。 1 次の Volterra核の理論値  $^{10}$  を図 3.7 にあわせて示し、 $\tau_1=\tau_2$  線上における 2 次の Volterra核の理論値  $^{10}$  および測定値を図 3.9 に示す。図より両者の応答はほぼ一致していることがわかる。

[例2] 測定対象として図 3.10 に示した非線形サーボ系を考える。

増幅器は

$$f[e(t)] = \tanh 2 e(t)$$



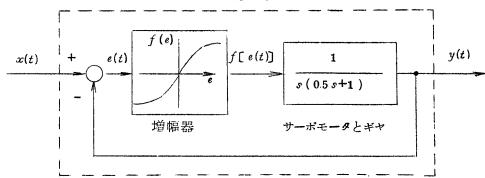


図 3.1 0 測定対象

たる飽和特性を示し、モータとギャは

$$G(s) = \frac{1}{s(0.5 s + 1)}$$

な特性を有するとする。 システムの入出力間には

$$\frac{d^{2} y(t)}{dt^{2}} + 2 \frac{d y(t)}{dt} = 2 \tanh 2 e(t)$$

なる関係がある。このシステムの破線内の構造に関してはあらかじめなんらの情報も得られていないとして動特性測定を行なう。

すると表 3.2 のようになる。許容値。が例1と同じように。=0.3×10<sup>-2</sup> で与えられたとすると表よりモデルの次数を3次にすれば十分であることがわかる。つぎにこの3次のモデルを用い、3.5.1の方法により1次、2次、3次のVolterra核を測定する。1次のVolterra核の測定値および理論値を図3.11に示す。2次のVolterra核の測定値はほどりに等しくなり理論値が奇数次のみしか値をもたないことと一致している。3次のVolterra核の測定値の一部を図3.12に示す。3次のVolterra核の理論値は簡単には計算することはできないのでここで得られた結果の良否を検討することはできないが、許容

表  $\mathbf{3.2}$  モデルの次数を 決めるための評価 関数  $E_N$  の計算値

N	$E_N$	
1	0.291×10 <sup>-1</sup>	
2	#	
3	0.113×10 <sup>-2</sup>	
4	"	
5	$0.338 \times 10^{-4}$	
6	"	١,

値  $e=0.3\times10^{-2}$  の範囲内で正確に求められていることは保証されている。実際にここで得られた測定結果を用いてディジタル計算機により 3 次のモデルを構成し $^{1)}$ ,このモデルとシステムに最小パルス幅 0.2 秒の 6 段のM 系列信号を低域ろ波器  $G(s)=\frac{1}{s+1}$  に通した信号を投入し、

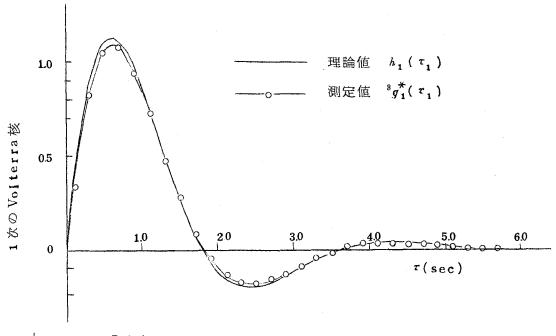


図 3.1 1 1次の Vol terra核の測定値と理論値

10

10

1.0

2.0

3.0

4.0

で(sec)

図 3.1 2 τ<sub>1</sub>=τ<sub>2</sub>=τ<sub>8</sub> 線上における 3 次の Volterra 核の測定値

それぞれの出力を測定すると図 3.1 3のようになる。これからもここで得られたモデルと測定対象とはほぶ一致していることがわかる。

3.7.2 代数方程式法による測定例

[例1] 測定対象として図3.14に示す非線形システムを考える。

このシステムの Volterra核の理論値は簡単に計算することができ,

$$h_1(\tau_1) = e^{-2\tau_1}, h_2(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\tau_1 + \tau_2)}$$
 (3.33)

となる。動特性測定は破線内の構造が全くわからないとして行なう。

まず 3.6 の方法により測定対象は式(3.3)の条件を満足し、 $T_s=4.5$ (sec)であることが

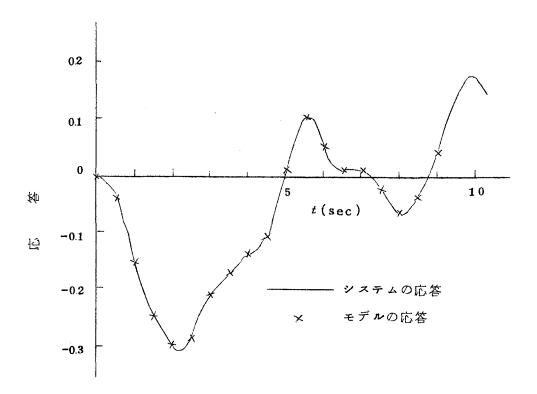


図3.13 低減ろ波された m 系列信号に対するシステムとモデルの応答

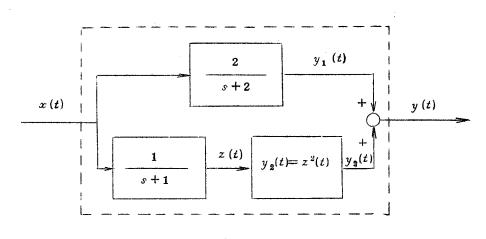


図 3.1 4 測定対象

わかる。動特性測定のための入力信号s(t)として最小バルス幅が0.5 秒,周期T が  $T=(2^0-1)$   $\Delta$  = 2.5 5.5 (sec)の加算m 系列信号を用いる。またとの信号の平均値および分散を0 および1 にとる。測定対象へ

$$x_i(t) = p_i \cdot s(t)$$
 (  $i = 1, 2, \dots, 10$  )

t > 0  $p_i = \pm 1.0, \pm 0.8, \pm 0.6, \pm 0.4, \pm 2$ 

なる入力を投入しその出力  $y(p_i,t)$  を測定する。この測定結果を用いてモデルの次数 N の種々の値に対してN  $G^*$ を計算する。モデルの次数を決定するためこのN  $G^*$ を用いて評価関数  $E_N$  (式(3.14))を計算する。その測定結果よりモデルの次数は 2 次にとれば十分であることがわかる。つぎに上ですでに計算されている V olterra 級数の 1 次および 2 次の項の応答  ${}^2G_1^*\left[{}^2g_1^*;s(t'),0\leq t'\leq t\,\right],{}^2G_2^*\left[{}^2g_2^*;s(t'),0\leq t'\leq t\,\right]$  を用いて式(3.28)を解くことにより、1 次および 2 次の V olterra 核を測定することができる。離散値幅 A を 0.5 秒とす

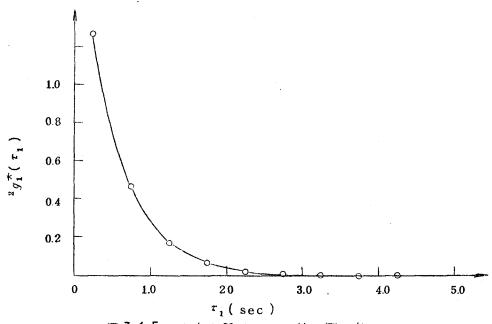
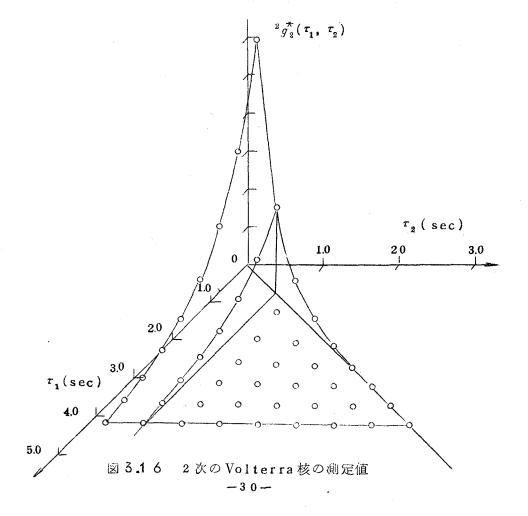


図3.15 1次のVolterra核の測定値



[例2] 図 3.17に示すシステムを考える。破線内の構造に関しては全く未知であり、入力x(t)と出力 y(t)のみが測定できるものとする。例 1 と全く同じ入力信号を用いて動特性測定を行なり。モデルの次数Nを決めるための評価関数 $E_N$ を計算すると表 3.3のようになる。

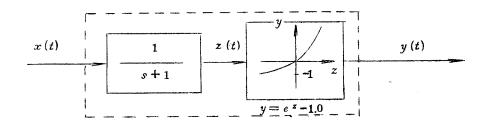
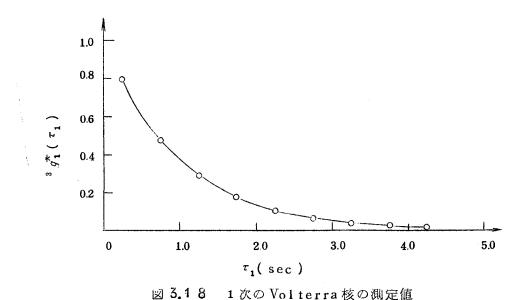


図 3.1 7 測定対象

許容値 e が  $0.3 \times 10^{-2}$  と与えられているとすればモデルの次数 N は 3 次にとれば十分であることがわかる。 1 次, 2 次。 3 次のボルテラ核は  $E_N$  の計算の際に得られた各項の応答を用いて連立方程式をつくり、それを未知数  $g_{i_1}^*$   $g_{i_1}^*$   $i_2$  ,  $g_{i_1}^*$   $i_2$   $i_3$   $i_4$   $i_$ 

表 3.3 モデルの次数を 決めるための評価 関数 $E_N$  の計算値

N	$E_N$
1	0.1 4 2 × 1 0 <sup>-0</sup>
2	$0.349 \times 10^{-2}$
3	$0.190 \times 10^{-3}$
4	0.2 9 1 × 1 0 <sup>-5</sup>
5	$0.654 \times 10^{-7}$
6	0.488×10 <sup>-9</sup>



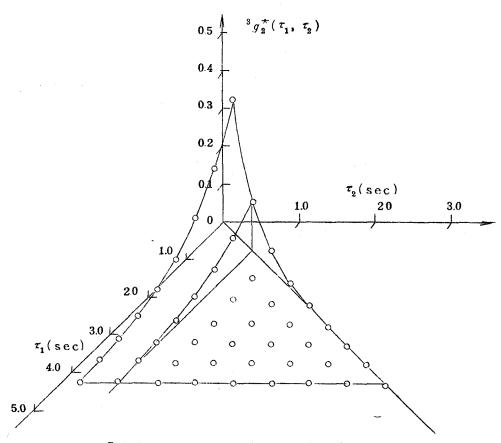


図3.19 2次のVolterra核の測定値

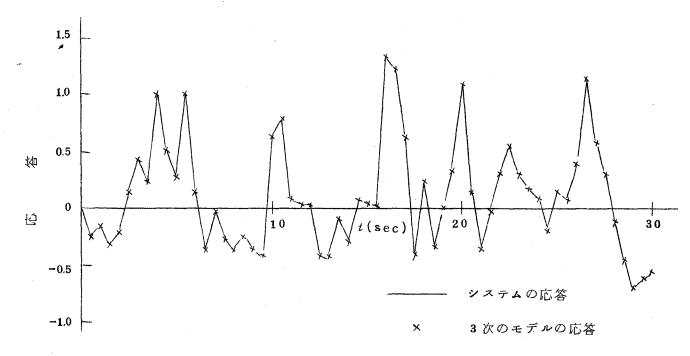


図 3.2 0 入力信号 s(t)に対するシステムとモデルの応答

[例3] 測定対象として図 3.2 1 に示す無定位性を有する非線形システムを考える。このシステムの Volterra核の理論値は

$$h_{1}(\tau_{1}) = 1 - e^{-2\tau_{1}}$$

$$h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) = (1 - e^{-\tau_{1}})(1 - e^{-\tau_{2}})$$
(3.34)

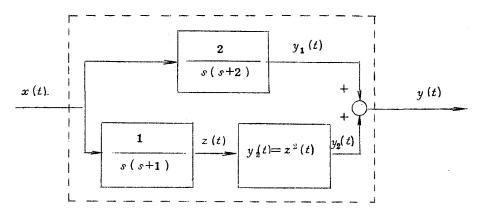


図 3.2 1 測定対象

となる。入力が過去に加わっている場合には,その過去の入力の積分値を Sェ とすると過去の入力の影響を考慮した Volterra核は式( 3.5 )から

$$g_{0} = h_{0} + h_{1} (T_{s}) \cdot S_{x} + h_{2} (T_{s}, T_{s}) \cdot S_{x}^{2} = S_{x} + S_{x}^{2}$$

$$g_{1} (\tau_{1}) = h_{1} (\tau_{1}) + 2 h_{2} (\tau_{1}, T_{s}) \cdot S_{x} = (1 - e^{-2\tau_{1}}) + 2 (1 - e^{-\tau_{1}}) \cdot S_{x}$$

$$g_{2} (\tau_{1}, \tau_{2}) = h_{2} (\tau_{1}, \tau_{2}) = (1 - e^{-\tau_{1}}) (1 - e^{-\tau_{2}})$$

$$(3.35)$$

となる。測定対象には動特性測定前に振幅 0.2 のステップ信号が 2.5 秒間はいっていたとする。すなわち測定前の入力の積分値は  $S_x=0.5$  である。動特性測定はシステムが無定位性を有することはもちろんその内部の構造および測定前の入力に関してなんら先験的な情報がないとして行なう。動特性測定に先だち測定対象が式(3.3)の関係を満足するかどうかをしらべる。その結果測定対象は式(3.3) を満たし、 $T_s=4.5$ (sec)であることがわかる。動特性測定のため入力信号 s(t)として例 1 と同じ最小バルス幅 d=0.5(sec)、周期  $T=(2^0-1)$  d=2.5 5.5(sec)の加算M 系列信号を用いる。またこの信号の平均値および分散をそれぞれ 0 と 1 にとる。

例1,例2と全く同じ方法で動特性測定を行なう。モデルの次数Nを決める評価関数 $E_N$ の計算値は表3.4のようになる。表よりモデルの次数が決まると3.5.2の方法により0次,1次,

2 次のボルテラ核を測定することができる。 0 次の Volterra 核の測定値は $^2g_0^\star$ =0.750 となる。1 次および 2 次の Volterra rra核の測定結果を図 3.2 2 および図 3.2 3 に示す。 Volterra核の理論値は(式(3.35) において  $S_x$ =0.5 とおく)

$$g_0 = 0.75$$

$$g_1 = 2 - e^{-\tau_1} - e^{-2\tau_1}$$

$$g_2 = (\tau_1, \tau_2) = (1 - e^{-\tau_1}) (1 - e^{-\tau_2})$$
(3.36)

となるが、測定結果はこの理論値とほゞ一致していることがわ かる。

表 3.4 モデルの次数を 決めるための評価 関数  $E_N$  の計算値

N	$E_N$
1	0.674×10 <sup>-0</sup>
2	$0.353 \times 10^{-11}$
3	$0.572 \times 10^{-12}$
4	$0.313 \times 10^{-12}$

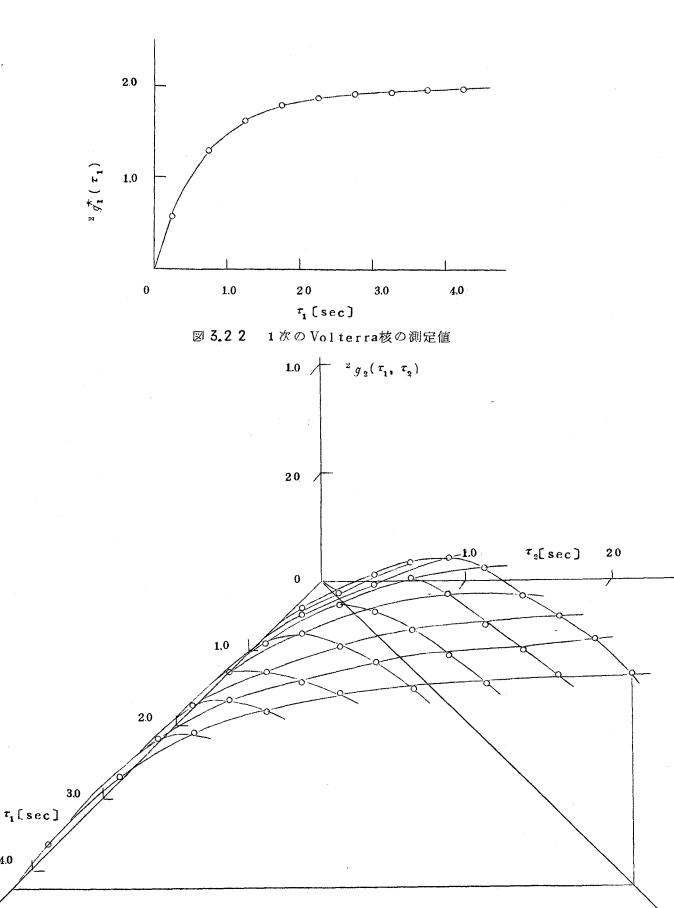


図 3.2 3 2次のVolterra核の測定値

4.0

#### 3.8 結 言

内部構造が全く未知の非線形システムの動特性をVolterra級数を用いて測定する方法を提案した。測定対象の内部構造が未知なため動特性測定は、まず測定対象がどのような形を有するかを決定し、この決定にもとづいてモデルを構成し、そのモデルを用いて測定対象の動特性を表わすバラメータを測定するという手順で行なわれる。本測定法に関して得られた結果をまとめると以下のようになる。

- (1) 本方法は Volter ra核が式(3.3)の関係を満たすシステムに適用可能であるが、実在のシステムの大部分は上述のシステムに属するものと思われ、また測定対象がこのシステムに属するかどうかは3.6 の方法によりあらかじめ判定することができる。
- (2) システムが定位性であるか、無定位性であるかはもちろんのこと、その内部構造および過去(動特性測定前)に投入された入力に関してなんらの情報も不要である。
- (3) 用いるモデルの形はシステムの Volterra級数の次数により決まるが、この次数は式 (3.14) の評価関数  $E_N$  を考慮することにより決定することができる。またこの  $E_N$  はあらかじめ簡単に計算することができる。
- (4) 動特性測定に用いる入力信号 s(t)は測定対象の動特性を抽出するのに十分を周波数および振幅特性を有する信号であれば十分で、白色性、正規性などの特別な性質を有するものは必要ではない。
- (5) Volterra核の測定のために直接法と代数方程式法を提案したが、直接法は入力の投入操作が複雑であるが、あとの測定結果の処理は簡単である。一方代数方程式法ではモデルの次数の決定のために用いた入出力データをそのまく用いればよいが、このデータの処理は逆マトリクス演算を施さねばならないので、測定パラメータ個数が多いとこの計算は手間がかかる。
- (6) 動特性測定結果は,はじめにモデルの形を近似度を考慮して決めているため,その精度は十分保証されている。

### 第3章の参考文献

- 1) 藤井,中尾:ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性測定およびモデル化;計測自動制御学会論文集,5巻,4号,pp.368~377 (昭44)
- 2) K.Fujii & N.Nakao: Measurement of Characteristics of Nonlinear Dynamical Systems Using Volterra Functional Series; Tech. Rept. Osaka Univ., Vol. 19, 16861, pp. 89~99 (1969)
- 3) 藤井,中尾:ボルテラ級数を用いた非線形無定位系の動特性測定法;計測自動制御学会論 文集,7巻,2号,pp.129~136 (昭46)
- 4) 中尾,三上,藤井:ボルテラ級数を用いた非線形無定位系の動特性測定法;第9回計測自動制御学会学術講演会予稿集,220 (昭45)
- 5) 中尾, 藤井: 既知信号を用いた非線形制御系のボルテラ級数核の測定法ーその2ー;第7回計測自動制御学会学術講演会予稿集,213 (昭43)
- 6) 藤井, 中尾: 既知信号を用いた非線形制御系のポルテラ級数核の測定法; 第12回日本自動制御協会学術講演会予稿集,106 (昭43)
- 7) D.A.George; Continuous Nonlinear Systems; M.I.T.Research Lab-Electronics, Tech. Rept. 3 5 5 (1959)
- 8) 中尾, 藤井: ボルテラ級数を用いた非線形系の動特性測定法 代数方程式法 ; 第14回 日本自動制御協会学術講演会予稿集, 132 (昭45)
- 9) 藤井,鈴木,山東:特殊アナログ演算要素の試作-雑音発生器とDLS-;アナログ技術研究会資料,8巻,2号,pp.21~34 (昭43)
- 10 Y.H.Ku & Chin Chun Su: Volterra Functional Analysis of Nonlinear Time-varying Systems; J. of the Franklin Institute, Vol. 284, 166, pp. 344~365 (1967)

# 第 4 章 Wienerの直交はん関数級数を用いた 非線形システムの動特性測定法 - 可変直交関数展開による方法 -

## 第 4 章 Wienerの直交はん関数級数を用いた 非線形システムの動特性測定法

-可変直交関数展開による方法-

## 4.1 緒 言

入力信号が正規性白色信号である場合には非線形システムの入出力関係はWienerの直交は ん関数級数により表わされ,システムはWiener核により特徴づけられる。Wienerは動特性 測定のための入力信号として正規性白色信号を用いてWiener 核を Laguerreの直交関数で展 開することにより非線形システムの動特性を測定する方法 <sup>1)</sup>を提案した。動特性の測定結果は 当然制御するのに適した形で得られるのが望ましいが、上述の方法は測定結果が数式で得られ るので,すぐさま制御理論を適用できるという利点を有している。一方との方法は実際に動特 性を測定する際につぎのような問題点を有している。すなわち一般に非線形システムは(1入 力多出力)線形のmemory要素と(多入力1出力の)zero-memoryの非線形要素の cascade 結合で表わされるが<sup>2)3)</sup>, Wienerの方法はこの線形のmemory要素をLaguerre関数で、 zero-memory の非線形要素をHermite の直交関数で展開したもの(付録41参照)に相当 しており、memory 要素を展開する関数を特別な形に固定しているため、一般に展開項は多く なり、動特性測定に多大の労力を要するとともに、測定結果が複雑になるという欠点をもって いる。ところが実在のシステムの中にはたとえは低域ろ波特性を有するものも多く(このよう な特性を有することはあらかじめわかることが多いが)このようなシステムに対しては上述の memory 要素は極の位置を適当に選ぶことにより低次の filter で十分近似できると考えられ る。このような場合には極の位置が固定されたLaguerre関数を用いずに、極の位置が可変な Kautzの直交関数 4)を用いて、その極をも最適に決定して展開項数を減少させるのが得策であ ると思われる。

このような観点から本章ではWiener核の展開のために可変直交関数系を用い、展開係数の 5)6) みならず直交関数固有のバラメータをも最適に決定するような非線形システムの動特性測定法 を提案する。

## 4.2 可変直交関数によるWiener核の展開

2.3.2 において述べたように非線形システムへの入力が正規性の白色信号である場合には、その入出力関係はWienerの直交はん関数を用いて

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \left[ w_n ; x(t'), t' \leq t \right]$$
 (2.10)

たゞし

 $\overline{W_n[w_n;x(t'), t' \leq t]}W_m[w_m;x(t'), t' \leq t] = 0$ ,  $n \neq m$  (211) と表わすことができる。また非線形システムの動特性は Volterra核によって特徴づけられたように、Wiener 核  $w_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \cdots$ ) によっても特徴づけられる。し たがってこのWiener核を求めることにより非線形システムの動特性を知ることができる。

本節ではWiener核 $w_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)(n=0, 1, 2, \cdots)$ をその形が可変な正規直交関数で展開することを考える。形が可変な正規直交関数を

$$\varphi_i \left( t; a_1, a_2, \dots, a_i \right) = \varphi_i \left( t; a_i \right) \tag{4.1}$$

とする。 $a_i=(a_1,a_2,\cdots,a_i)$  は直交関数そのものの形を決定する可変なバラメータであり、 $\varphi_i(t;a_i)$ はWiener核 $w_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)$  が $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n<0$  で恒等的に零であることから、時間  $0 \le t \le \infty$  で定義されているものを選ぶ。たいし式(4.1)の $\varphi_i(t;a_i)$  は

$$\int_{0}^{\infty} \varphi_{n} (t; \boldsymbol{a}_{n}) \varphi_{m} (t; \boldsymbol{a}_{m}) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$(4.2)$$

なる正規直交の条件を満足している。このような形が可変な正規直交関数の1 例として指数関数を1 次結合して作ったKantzの正規直交指数関数 4)

$$\mathcal{L} \left[ \varphi_i \left( t; a_1, a_2, \dots, a_i \right) \right] = \frac{\sqrt{2 a_i} \left( s - a_2 \right) \left( s - a_2 \right) \dots \left( s - a_{i-1} \right)}{\left( s + a_1 \right) \left( s + a_2 \right) \dots \left( s + a_i \right)} \tag{4.3}$$

がある。Wiener核はこのような正規直交関数を用いて

$$w_{1}(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{i} (\boldsymbol{a}_{i}) \varphi_{i} (\tau; \boldsymbol{a}_{i})$$

$$(4.4)$$

$$w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}(\boldsymbol{a}_{ij}) \varphi_{i}(\tau_{1}; \boldsymbol{a}_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; \boldsymbol{a}_{j})$$

$$(4.5)$$

$$w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \sum_{\ell=1}^{\infty} k_{ij} \dots_{\ell} (a_{ij} \dots_{\ell}) \varphi_{i}(\tau_{1}; a_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j})$$

$$\dots \varphi_{\ell}(\tau_{n}; a_{\ell})$$

$$(4.6)$$

:

 $\pi_{ij}..._{l} = (a_{1}, a_{2}, ..., a_{max}(i, j, ..., l))$ 

と展開することができる。各展開係数は

$$k_{i} (\alpha_{i}) = \int_{0}^{\infty} w_{i}(\tau) \varphi_{i} (\tau; \alpha_{i}) d\tau \qquad (4.7)$$

$$k_{ij} (\boldsymbol{a}_{ij}) = \int_0^\infty \int_0^\infty w_2 (\tau_1, \tau_2) \varphi_i (\tau_1; \boldsymbol{a}_i) \varphi_j (\tau_2; \boldsymbol{a}_j) d\tau_1 d\tau_2 \qquad (4.8)$$

$$k_{ij}..._{l} (a_{ij}..._{l}) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} ... \int_{0}^{\infty} w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{n}) \varphi_{i}(\tau_{1}; a_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j})...$$

$$\varphi_l(\tau_n; \alpha_l) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n$$
 (4.9)

より決められる。これらの関係はつぎのようにして得られる。すなわち式(4.7)は式(4.4) の両辺に $\varphi_i$ ( $\tau$ ;  $\alpha_i$ )をかけて積分することにより得られる:

$$\int_{0}^{\infty} w_{1}(\tau)\varphi_{i}(\tau; \boldsymbol{a}_{i}) d\tau = \sum_{i'=1}^{\infty} k_{i'}(\boldsymbol{a}_{i'}) \int_{0}^{\infty} \varphi_{i'}(\tau; \boldsymbol{a}_{i'}) \varphi_{i}(\tau; \boldsymbol{a}_{i}) d\tau = k_{i}(\boldsymbol{a}_{i})$$

式(4.8)は式(4.5)に $\varphi_i(\tau_1;a_i)\varphi_j(\tau_2;a_j)$ をかけて $\tau_1$ 、 $\tau_2$  に関して積分するととにより得られる:

$$\begin{split} & \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{2} \left( \tau_{1}, \tau_{2} \right) \varphi_{i} \left( \tau_{1}; a_{i} \right) \varphi_{j} \left( \tau_{2}; a_{j} \right) d\tau_{1} d\tau_{2} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j'=1}^{\infty} k_{i'j'} \left( a_{i'j'} \right) \int_{0}^{\infty} \varphi_{i'} (\tau_{1}; a_{i'}) \varphi_{i} (\tau_{1}; a_{i}) d\tau_{1} \int_{0}^{\infty} \varphi_{j'} (\tau_{2}; a_{j'}) \varphi_{j} (\tau_{2}; a_{j}) d\tau_{2} \\ &= k_{ij} \left( a_{ij} \right) \end{split}$$

式(4.9)も同様にして得ることができる。

Wiener 核の 直交関数展開の項数が有限の場合には式(4.7), (4.8), (4.9)の展開係数は誤差2乗積分の意味で最適のものを与えている。

すなわちn次のWiener核について考えると。

$$\int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} \{ w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) - \sum_{i=1}^{N_{1}} \sum_{j=1}^{N_{2}} \cdots \sum_{\ell=1}^{N_{n}} \gamma_{i j \dots \ell} (a_{i j \dots \ell}) \varphi_{i}(\tau_{1}; a_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j})$$

$$\varphi_{\ell}(\tau_{n}; a_{\ell}) \}^{2} d\tau_{1} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$

$$(4.10)$$

なる誤差積分は $\gamma_{ij}\cdots_l(\alpha_{ij}\cdots_l)=k_{ij}\cdots_l(\alpha_{ij}\cdots_l)$  のときに最小となっている $\gamma_{ij}$  以上より非線形システムの動特性測定は $\alpha$ を任意に決めて式(47)、(4.8)、(4.9) の展開係数を求めることに帰することができる。

## 4.3 動特性測定法

#### 4.3.1 正規性白色信号をうける多次元可変直交関数回路

図 4.1 に示すように多次元の可変直交関数回路を構成する。入力x(t)として正規性の白色信号を投入する。図 4.1(a)の 1 次元の可変直交関数回路の出力 $y_i(t)$ は

$$y_{i}(t) = \int_{0}^{\infty} \varphi_{i} \left( \sigma ; \boldsymbol{a}_{i} \right) x \left( t - \sigma \right) d \sigma$$

$$= \boldsymbol{\phi}_{1} \left[ \varphi_{i} ; x \left( t' \right), t' \leq t \right]$$

$$(4.11)$$

となり、1次の同次はん関数の形を有している。図 4.1(b)の 2次元の可変直交関数回路の出力 $y_{ii}$  (t)は

$$y_{ij}(t) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \varphi_{i}(\sigma_{1}; \alpha_{i}) \varphi_{i}(\sigma_{2}; \alpha_{j}) x(t - \sigma_{1}) x(t - \sigma_{2}) d\sigma_{1} d\sigma_{2}$$

$$= \Phi_{2}(\varphi_{i}, \varphi_{j}; x(t'), t' \leq t]$$

$$(4.12)$$

と表わされ,2次の同次はん関数の形を有している。同様に図4.1(d)の3次元の可変直交関数回路の出力 $y_{ijk}(t)$ は

$$y_{ijk}(t) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \varphi_{i}(\sigma_{1}; \boldsymbol{a}_{i}) \varphi_{j}(\sigma_{2}; \boldsymbol{a}_{j}) \varphi_{k}(\sigma_{3}; \boldsymbol{a}_{k}) x(t - \sigma_{1}) x(t - \sigma_{2}) x(t - \sigma_{3})$$

$$d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{3} = \mathcal{O}_{3} [\varphi_{i}, \varphi_{j}, \varphi_{k}; x(t'), t' \leq t]$$

$$(4.13)$$

となり、3次の同次はん関数の形を有している。一般にn次元の可変直交関数回路の出力

 $y_{ij\cdots l}(t)$ 

$$y_{ij\cdots l}(t) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} \varphi_{i}(\sigma_{1}; a_{i}) \varphi_{j}(\sigma_{2}; a_{j}) \cdots \varphi_{l}(\sigma_{n}; a_{l}) x(t-\sigma_{1})x(t-\sigma_{2})$$

$$\cdots x(t-\sigma_{n}) d\sigma_{1} d\sigma_{2} \cdots d\sigma_{n}$$

$$= \emptyset_{n} [\varphi_{i}, \varphi_{j}, \cdots, \varphi_{l}; x(t'), t' \leq t]$$

$$(4.14)$$

となり、 n 次の同次はん関数の形を有している。

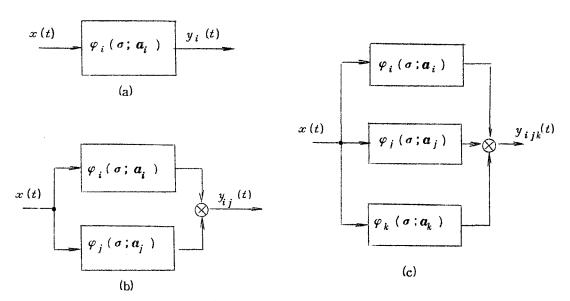


図 4.1 多次元可変直交関数回路

Wienerの直交はん関数 $W_n[u_n;x(t'), t' \leq t]$ は 2.3.2 において述べたようにn より低次の任意のはん関数とも直交するから、ここで導入したはん関数に関しても

$$W_n[w_n;x(t'),t'\leq t]$$
  $\mathcal{O}_m[\varphi_i,\varphi_j,\cdots,\varphi_q;x(t'),t'\leq t]=0$ ,  $m< n$  (4.15)なる関係が成立する。

次節でこの多次元の可変直交関数回路を用いてWiener核の展開係数  $k_{ij}$ …l( $a_{ij}$ …l)を測定する方法について述べる。

#### 4.3.2 展開係数の測定法

図4.2 に示す非線形システムの動特性を測定することを考える。



図 4.2 測定対象

動特性を測定するための入力 x(t)を, 平均値および自己相関関数が

$$\frac{\overline{x(t)} = 0}{x(t) x(t + \tau) = K \cdot \delta(\tau) \quad (K : \mathbb{Z}_{2})}$$

なる正規性の白色信号とする。

0次のWiener核 $w_0$ は入力x(t)に対する測定対象の出力y(t)の平均値そのものである。1次のWiener核の展開係数を測定するために、図 4.3に示すように測定対象と図 4.2(a)の回路にx(t)を投入し、それらの出力の積の平均値

$$\overline{y(t) y_i(t)} = \{ \sum_{n=0}^{\infty} W_n \lceil w_n; x(t'), t' \leq t \rceil \} \phi_1 \lceil \varphi_i; x(t'), t' \leq t \rceil$$
(4.16)

を計算する。式(4.15)の関係よりπが2以上の項に対しては

$$W_n$$
 [  $w_n$  ;  $x$  (  $t'$  ),  $t' \le t$  ]  $\Phi_1$  [  $\varphi_i$  ;  $x$  (  $t'$  ),  $t' \le t$  ]  $= 0$  (  $n \ge 2$  )

となる。

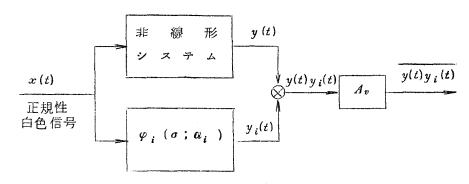


図4.3 非線形システムの1次のWiener核の展開係数の測定

n=0, 1に対しては入力x(t)関する式(2.9)の関係を用いて、それぞれ

$$W_0[w_0; x(t'), t' \leq t] \Phi_1[\varphi_i; x(t'), t' \leq t]$$

$$= w_0 \begin{cases} \varphi_i(\sigma; a_i) \overline{x(t-\sigma)} d \sigma = 0 \end{cases}$$

および

$$\begin{split} & \overline{W_1[w_1; x(t'), t' \leq t]} \varphi_1[\varphi_i; x(t'), t' \leq t] \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\sigma; a_i) \overline{x(t-\tau)} x(t-\sigma) d\tau d\sigma \\ & = K \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\sigma; a_i) \delta(\tau-\sigma) d\tau d\sigma \\ & = K \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i(\tau; a_i) d\tau \end{split}$$

なる結果が得られる。したがって式(4.16)は

$$\overline{y(t) y_i(t)} = K \int_0^\infty w_i(\tau) \varphi_i(\tau; \boldsymbol{a}_i) d\tau \qquad (4.17)$$

となる。上式と式(4.7)から1次のWiener核の展開係数は

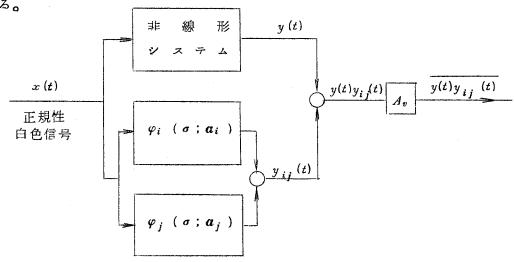
$$k_{i} (a_{i}) = \int_{0}^{\infty} w_{1}(\tau) \varphi_{i} (\tau; a_{i}) d\tau = \overline{y(t) y_{i}(t)} / K \qquad (4.18)$$

を用いて計算することができる。

2次のWiener核の展開係数を測定するため、1次の場合と同様に図4.4に示す回路を構成し、測定対象と2次元の可変直交関数回路の出力の積の平均値。

$$\frac{1}{y(t) y_{ij}(t)} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \leq t] \end{cases} \Phi_2[\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t] \tag{4.19}$$

を計算する。



2次元可変直交関数回路

図4.4 非線形システムの2次のWiener核の展開係数の測定

式(4.15)から $W_n$  の 3次以上の項と 2 次のはん関数 $\phi_n$  とは直交しているため、これらに関する項は 0 となる。n=0 、n=1 に対しては、それぞれ

$$\begin{split} & \overline{W_0[\ w_0\ ; \ x(\ t'), \ t' \leq t\ ]} \Phi_2[\ \varphi_i\ , \ \varphi_j\ ; \ x(\ t'), \ t' \leq t\ ]} \\ & = \bar{w}_0 \left\langle {}_0^\infty \right\rangle_0^\infty \varphi_i\ (\sigma_1\ ; \ a_i\ ) \ \varphi_j\ (\sigma_2\ ; \ a_j\ ) \ \overline{x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} \ d\sigma_1\ d\sigma_2 \\ & = K \cdot w_0 \left\langle {}_0^\infty \right\rangle_0^\infty \varphi_i\ (\sigma_1\ ; \ a_i\ ) \ \varphi_i\ (\ \sigma_2\ ; \ a_j\ ) \ \delta\ (\ \sigma_1-\sigma_2) \ d\sigma_1\ d\sigma_2 \\ & = K \cdot w_0 \left\langle {}_0^\infty \right\rangle_0^\omega \varphi_i\ (\ \sigma\ ; \ a_i\ ) \ \varphi_j\ (\ \sigma\ ; \ a_j\ ) \ d\sigma \\ & = K \cdot w_0 \cdot \delta_{ij} \end{split}$$

および

$$\overline{W_1 [w_1; x(t'), t' \leq t]} \Phi_2 [\varphi_i, \varphi_j; x(t'), t' \leq t]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i (\sigma_1; a_i) \varphi_j (\sigma_2; a_j) \overline{x(t-\tau)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} d\tau d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$= 0 \qquad (式(2.14) の関係から)$$

となる。 n=2の場合を計算すると

$$\overline{W_{2}[w_{2}; x(t'), t' \leq t]} \Phi_{2}[\varphi_{i}, \varphi_{j}; x(t'), t' \leq t]$$

$$= K^{2} \int_{0}^{\infty} \{w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) + w_{2}(\tau_{2}, \tau_{1})\} \varphi_{i}(\tau_{1}; a_{j}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j}) d\tau_{1} d\tau_{2} \qquad (4.20)$$

なる結果を得る(付録 4.2 参照)。 ことで  $\{w_2(\tau_1,\tau_2)+w_2(\tau_2,\tau_1)\}$  /2 をあたらしく  $w_2(\tau_1,\tau_2)$  と置きかえると(この置きかえはシステムの入出力関係にはなんら影響を及任さない(付録 3.2 参照)),式(4.19)は

$$\overline{y(t)y_{ij}(t)} = K \cdot w_0 \cdot \delta_{ij} + 2K^2 \left( \int_0^\infty w_2(\tau_1, \tau_2) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) d\tau_1 d\tau_2 \right)$$

となる。したがって式(4.8)より、2次のWiener核の展開係数は

$$k_{ij} \left( \boldsymbol{a}_{ij} \right) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{2} \left( \tau_{1}, \tau_{2} \right) \varphi_{i} \left( \tau_{1}, \boldsymbol{a}_{i} \right) \varphi_{j} \left( \tau_{2}; \boldsymbol{a}_{j} \right) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

$$= \underbrace{\left( y(t) y_{ij}(t) - K \cdot w_{0} \cdot \delta_{ij} \right) / 2 K^{2}}$$

$$(4.21)$$

を用いて計算することができる。

3次のWiener核の展開係数も同様に求めることができる。すなわち図4.5に示すように、正規性白色信号に対する測定対象と3次元の可変直交関数回路の出力の積の平均値を計算すると

$$\overline{y(t)y_{ijk}(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \overset{\infty}{\sum} W_n[w_n, x(t'), t' \leq t] \right\} \Phi_{\mathfrak{g}}[\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k; x(t'), t' \leq t] \\
= K^2 \left\{ \delta_{ij} k_k(a_k) + \delta_{jk} k_i(a_i) + \delta_{ki} k_j(a_j) \right\} \\
= 6K^3 \begin{pmatrix} \overset{\infty}{0} \begin{pmatrix} \overset{\infty}{0} \begin{pmatrix} \overset{\infty}{0} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\infty}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\omega}{0} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\omega}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1, \tau_2, \tau_3 \end{pmatrix} \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) \varphi_k(\tau_3; a_k) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
\end{cases} (4.22)$$

なる関係を得ることができる(付録 4.3 参照)。これより 3 次のWiener 核の展開係数はy(t)  $y_{ijk}(t)$  と式(4.1 8)の $k_i$   $(a_i)$  を用いて

$$k_{ijk}(\boldsymbol{a}_{ijk}) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} w_{3}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{3}) \varphi_{i}(\tau_{1}; \boldsymbol{a}_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; \boldsymbol{a}_{j}) \varphi_{k}(\tau_{3}; \boldsymbol{a}_{k}) d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{3}$$

$$= \underbrace{\left[ y(t) y_{ijk}(t) - K^{2} \left\{ \delta_{ij} k_{k}(\boldsymbol{a}_{k}) + \delta_{jk} k_{i}(\boldsymbol{a}_{i}) + \delta_{ki} k_{j}(\boldsymbol{a}_{j}) \right\} \right] / 6K^{3}}_{(4.23)}$$

から計算できる。以下同様にして高次のWiener核の展開係数を計算することができる。

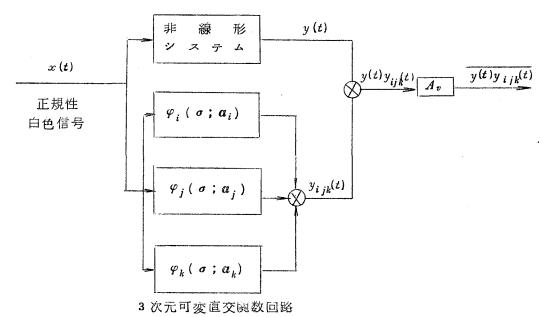


図4.5 非線形システムの3次のWiener核の展開係数の測定

#### 4.3.3 直交関数固有のバラメータの決定法

4.3.2の方法を用いて非線形システムの動特性を表わすWiener核をある形の正規直交関数により展開することができるが、この直交関数の形をある決まった形に固定するとWiener核の展開には一般に無限個の直交関数が必要となる。そこでこの直交関数の形をも最適に決定して、できるだけ少数の直交関数でシステムの動特性を測定することを考える。

直交関数固有のパラメータを $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$  とするとシステムの出力は

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n[w_n; x(t'), t' \le t]$$
 (2.10)

たゞし

$$w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \sum_{\ell=1}^{\infty} k_{ij} \dots_{\ell}(\alpha_{ij} \dots_{\ell}) \varphi_{i}(\tau_{1}; \alpha_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; \alpha_{j}) \dots$$

$$\varphi_{\ell}(\tau_{n}; \alpha_{\ell}) \qquad (4.6)$$

で表わされる。システムのモデルとして、Wienerの直交はん関数の次数がN次の、またそのWiener核を展開するための直交関数の項数がM項のモデルを用いると、モデルの出力は

ただし

$$M_{w_n}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{M} \sum_{i \neq j} (a_{ij} \dots_{\ell}) \varphi_i(\tau_1; a_i) \varphi_j(\tau_2; a_j) \dots \varphi_\ell(\tau_n; a_\ell)$$

$$(4.2.5)$$

と表わされる。このモデルのWiener核を展開するM個の直交関数 $\varphi_i$ ( $\tau$ ;  $a_i$ )(i=1, 2, … …, M)のバラメータ $a_M=(a_1,a_2,…,a_M)$  を最適に決めるためシステムとモデルの応答の差に関する2乗平均

$$P_{N,M}(a_M) = \{y(t) - my(t)\}^2 = y(t)^2 - 2y(t)_m y(t) + my(t)^2$$
(4.26)

を考え、これが最小となるように $\alpha_M$  を決定する。式(4.2.6)の第2項は $W_n$  の直交性を利用して計算すると

$$y(t)_{m}y(t) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_{n}[w_{n}; x(t'), t' \leq t] \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{N} W_{n}[Mw_{n}; x(t'), t' \leq t] \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} W_{n}[w_{n}; x(t'), t' \leq t] W_{n}[Mw_{n}; x(t'), t' \leq t]$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n! K^{n} \int_{0}^{\infty} \left( \cdots \right)_{0}^{\infty} w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \cdots, \tau_{n}) Mw_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \cdots, \tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \cdots d\tau_{n}$$

となる(付録 4.4 参照)。上式に式(4.6)および式(4.25)を代入し、 $\varphi_i$ ( $\tau$ : $\alpha_i$ )の直交性を利用して計算すると

$$\frac{M}{y(t) m \ y(t)} = w_0^2 + K \sum_{i=1}^{M} k_i^2 (a_i) + 2 K^2 \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} k_{ij}^2 (a_{ij}) + \dots \\
\dots + N! K^N \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \dots \sum_{r=1}^{M} k_{ij}^2 \dots_r (a_{ij} \dots_r)$$

$$\stackrel{\triangle}{=} Q_{N,M} (a_M) \qquad -4 4 - \qquad (4.27)$$

が得られる(付録 4.5 参照)。式(4.2 6)の第3項も同様にして

$$m \ y(t)^{2} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{N} W_{n} [M_{w_{n}} : x(t'), \ t' \leq t \ ] \right\}^{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} W_{n}^{2} [M_{w_{n}} : x(t'), \ t' \leq t \ ]$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n! K^{n} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \dots \int_{0}^{\infty} M_{w_{n}^{2}} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$

$$= w_{0}^{2} + K \sum_{i=1}^{M} k_{i}^{2} (\alpha_{i}) + 2 K^{2} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} k_{ij}^{2} (\alpha_{ij}) + \dots$$

$$\dots + N! K^{N} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \dots \sum_{r=1}^{M} k_{ij}^{2} \dots_{r} (\alpha_{ij} \dots_{r})$$

$$= Q_{N,M} (\alpha_{M})$$

$$(4.2.8)$$

となる。したがって評価関数 $P_{N,M}$  ( $\alpha_M$ )は

$$P_{N,M} (a_M) = y(t)^2 - 2 Q_{N,M} (a_M) + Q_{N,M} (a_M)$$
  
=  $y(t)^2 - Q_{N,M} (a_M)$  (4.29)

となる。上式において $y(t)^2$  は $\alpha_M$  に関係なく一定であるから、 $P_{N,M}$  ( $\alpha_M$ )を最小にすることは $Q_{N,M}$  ( $\alpha_M$ )を最大にすることと等価である。したがって直交関数固有のバラメータ $\alpha_M$  は $Q_{N,M}$  ( $\alpha_M$ )が最大となるように決定すればよい。

これより $a_M$  の最適値 $a_M^*$  の決定には、実際にモデルを構成して式(4.2.6)の評価関数を計算する必要はなく、たゞ展開係数 $k_{ij}$ ...r ( $a_{ij}$ ...r) (i, j, ... r.  $\leq M$ )のみの関数 $Q_{N,M}$  ( $a_M$ )を考慮すればよい。

4.3.4 Wienerの 直交はん関数の次数およびその展開のための直交関数の項数の決定法動特性測定を行なう場合はじめにモデルとしてWiener の直交はん関数の次数がN次、そのWiener 核を展開するための直交関数の項数をM項と仮定するが、実際にはモデルは測定対象の特性を十分近似できるものでなければならない。したがってこの仮定したモデルを用いて動特性測定を行なって得られた結果がどの程度測定対象の特性を近似しているか検討する必要がある。

直交はん関数の次数がN次、直交関数の項数がM項のモデルがどの程度測定対象の特性を近似しているかを示す評価関数として 4.3.3 においてパラメータ $\alpha_M$  を決定するのに用いた評価関数  $P_{N,M}$  ( $\alpha_M^{\tau}$ )をシステムの出力のパワで正規化した関数

$$I_{N,M} = P_{N,M} (a_M^{\star}) / y (t)^2$$

$$= \{ y (t)^2 - Q_{N,M} (a_M^{\star}) \} / y (t)^2 = 1 - Q_{N,M} (a_M^{\star}) / Q_{\infty,\infty} (a_{\infty}^{\star})$$
(4.30)

を考える。N 、M が大きくなるにしたがって上式の第2項は単調に1 に近づき、 $1_{N,M}$ は0 に近づく 7 。したがってシステムのバワおよび展開係数のみの関数 $Q_{N,M}$  ( $a_M$ ) を用いて $1_{N,M}$  を計算し、この値がある許容値  $\epsilon$  の範囲内にはいるかどうかにより、はじめに仮定したモデルが適当であったかどうかを検討することができる。

#### 4.4 測定例

「例1] 測定対象として図4.6に示す1次おくれ特性を示す線形要素と zero-memory の非線形要素が cascade につながれた非線形システムを考える。

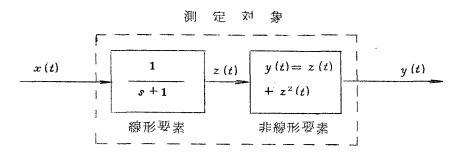


図 4.6 测定対象

このシステムの入出力関係は

$$y(t) = \int_0^\infty e^{-\tau} x(t-\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\tau_1 + \tau_2)} x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$
 (4.31)

で表わされる。動特性測定に際しては破線内の構造に関してはまったく情報はなく、たゞ入力x(t)と出力y(t)のみが観測されるものとする。

可変直交関数  $\varphi_i(t;\alpha_i)$ と して式(4.3)の Kautzの正規直交指数関数を用いる。動特性 測定のための入力 x(t)としてバワが K=1.018 の正規性白色信号を用いる。との入力に対する測定対象のパワは  $y(t)^2=1.286$  と測定される。まず Wiener の直交はん関数を 1 次に固定して直交関数の項数を順次増加してその展開係数  $k_M(\alpha_M)$  を種々の  $\alpha_M$  について測定する。との係数を用いて,直交関数の形を決める関数

$$Q_{1,M}(a_M) = w_0^2 + K \sum_{i=1}^{M} k_i^2(a_i)$$

を計算する。M=1 の場合の $Q_{1,1}$  ( $\alpha_1$ )を図 4.7 に示す。図より $\alpha_1=1.0$  のとき $Q_{1,1}$  ( $\alpha_1$ )は最大値 0.763 をとる。これよりモデルの近似度を示す評価関数  $I_{1,1}$ は式(4.30)から 0.407 となり、このモデルは不適当と判定することができる。直交関数の項数を増加しても、その展開係数はすべて 0 となり、評価関数  $I_{1,M}$  の値は不変である。つぎにWiener の直交はん関数の次数を 2 次として、直交関数のバラメータ $\alpha_M$  の決定のため評価関数

$$Q_{2,M} (a_{M}) = w_{0} + K \sum_{i=1}^{M} k_{i}^{2} (a_{i}) + 2 K^{2} \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} k_{ij}^{2} (a_{ij})$$

を測定する。M=1 の場合の $Q_{2,1}(a_1)$  を図 4.8 に示す。図より $a_1=1.0$  のとき $Q_{2,1}(a_1)$  は最大となる。この時 $I_{2,1}$ はほよりに等しくなりモデルは適当なものであることがわかる。Wiener 核の展開係数の測定値は

 $w_0=0.521$ ,  $k_1$ (1.0)=0.695,  $k_{1,1}$ (1.0)=0.503 となる。これを用いてモデルを構成すると

$$m \ y(t) = \int_{0}^{\infty} 0.983 \ e^{-\tau} x (t-\tau) d\tau + \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} 1.005 \ e^{-(\tau_{1} + \tau_{2})} x (t-\tau_{1}) x (t-\tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$

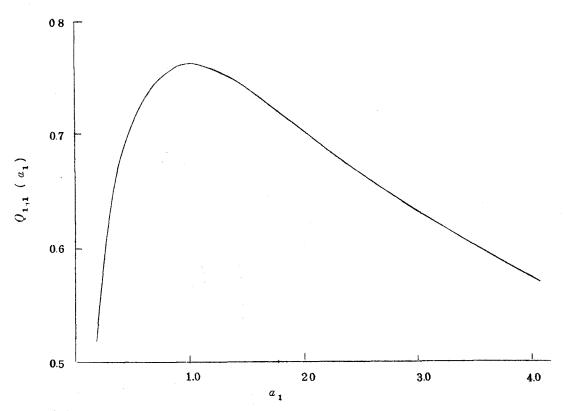


図 4.7 直交関数の形を決定するための関数  $Q_{1,1}(a_1)$  (モデルの次数:1 次 ) の測定値

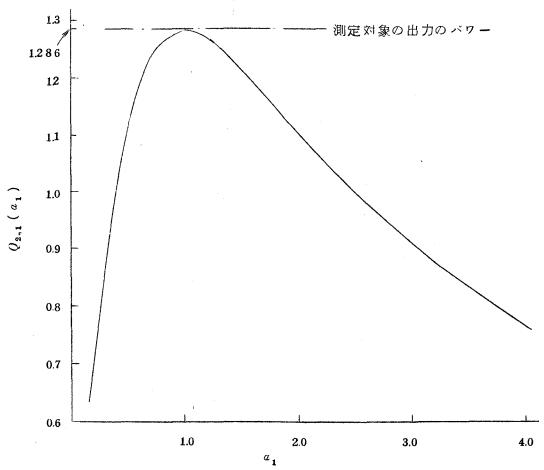


図 4.8 直交関数の形を決定するための関数  $Q_{2,1}(a_1)$  (モデルの次数:2 次の測定値 -4.7-

が得られ、これは測定対象の入出力関係を表わす式(4.3.1)とほぶ一致している。 [例2] 測定対象として図4.6のシステムの線形部分が

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

なる2次遅れ特性を有する非線形システムを考える。

入力x(t)としてK=0.982の正規性白色信号を加え、Wiener核の展開のための直交関数 $\varphi_i(t:a_i)$  は例1と同じくKautzの正規直交指数関数を用いる。システムの出力パワーは $y(t)^2=0.649$  と測定される。例1と同じ方法でWienerの直交はん関数の次数N、直交関数の項数Mを増加させながら展開係数の測定、直交関数の形の決定。モデルの検定を順次行なう。N=2、M=2の場合に直交関数のバラメータ $a_1$ 、 $a_2$ の種々の値に対して

$$Q_{2,2}(a_1, a_2) = w_0 + K \sum_{i=1}^{2} k_i (a_i) + 2 K^2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} k_{ij}^2 (a_i, a_j)$$

を計算すると図4.9のようになる。

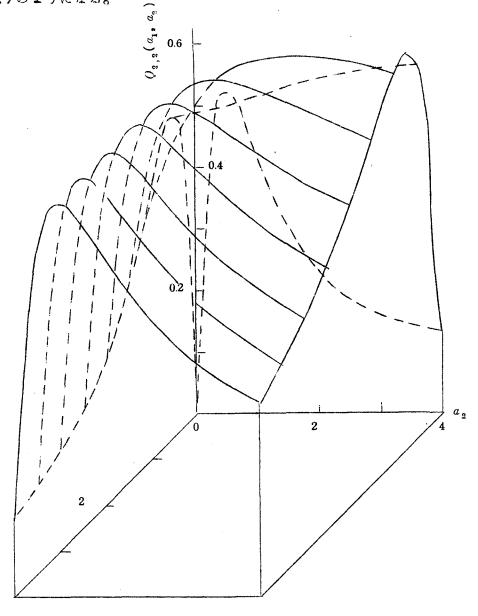


図 4.9 直交関数の形を決定するための関数  $(Q_{2,2}(a_1,a_2))$  (モデルの次数:2次)の測定値

図から $a_1=1.0$ ,  $a_2=20$  (または $a_1=20$ ,  $a_2=1.0$ )のとき $Q_{22}(a_1,a_2)$  は最大となり、モデルの近似度を示す評価関数 $I_{22}$ はほゞ0 に等しくなる。このときの展開係数の測定値は、 $w_0=0.303$  (0.327),  $k_1$  (1.0)=0.459 (0.471),  $k_2$  (1.0, 2.0)=-0.322 (-0.333)  $k_{1,1}$  (1.0)=0.247 (0.222),  $k_{2,2}$  (1.0, 2.0)=0.129 (0.111),  $k_{1,2}$  (1.0, 2.0)=-0.162 (-0.157) (たゞし()内は理論値を示す)となりほゞ理論値と一致している。この測定値を用いて実際にモデルを構成し、図 4.1 0 (a)に示す入力に対するシステムの応答 y (a)とこのモデルの応答を測定すると図 a10 (a)になる。これからもモデルはシステムにほゞ一致していることがわかる。

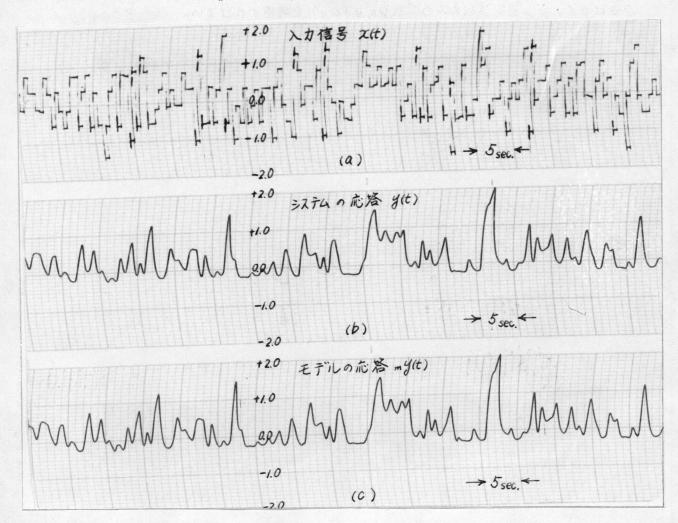


図4.10 ある入力信号 x(1) に対するシステムとモデルの応答

## 4.5 結 言

動特性測定のための入力信号として正規性白色信号を用い、Wiener核を可変直交関数で展開することによりできるだけ簡単な形で非線形システムの動特性を測定する方法を提案した。得られた結果を要約すると下記のようになる。

(1) この方法はWienerによるLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法(付録 4.1 参照)を拡張、発展させたもので、システムの動特性を表わすWiener核の直交関数展開は必要最小限の項数で行なえる。

- (2) 展開係数の測定はWienerの方法では多次元のHermite 関数発生回路(付図 4.3 参照)を必要とし、複雑となるが、本方法は図 4.1 に示した簡単な多次元直交関数回路を用いて行なうことができる。
- (3) Wienerの方法においては Laguerre関数の scale facfor (式(付1.1))の決め方に関してはなんら考慮されていないが、この scale facfor の最適決定は本方法の特別な場合(すなわち式(4.3)の Kautzの 直交関数において $a_1, a_2=\cdots=a_i=a$ とした場合に相当)として取り扱うことができる。
- (4) 直交関数の形の最適決定は実際にモデルを構成し、式(4.2.6)の評価関数を計算する必要はなく、たい展開係数のみの関数 $Q_{N,M}(a_M)$ を考慮すればよい。
- (5) 現在の極値探索法では調整パラメータ $\alpha_M$  の個数は3個程度が限度であるが,実在のシステムの中には直交関数の項数を3項程度にとれば十分近似できるものが多いことより,本方法の適用範囲はかなり広いものと思われる。
  - (6) モデルの近似の良さも展開係数のみの関数(式(4.30))で表わされる。
- (7) 入力信号が非白色性の場合には shaping filter が有効で Lee と Shetzen の方法 <sup>8)</sup> を適用することができる。
- (8) 動特性はWiener核を直交関数で展開した数式の形で得られるのですぐさま制御理論 9) を適用することができる。

The State of the S

#### 第4章の参考文献

- 1) 第2章の参考文献12)
- 2) Y.W.Lee, N.Levinson & W.T.Martin: Selected Papers of Norbert Wiener: The M.I.T.Press, Cambridge (1964)
- 3) H.L.Van Trees: Synthesis of Optimum Nonlinear Control Systems; The M.I.T.Press, Cambridge (1962)
- 4) W.H.Kautz: Transient Synthesis in the Time Domain; IRE Trans. on CT, Vol. CT-1, 163, pp. 29~39 (1954)
- 5) 中尾, 藤井: 可変直交関数を用いた非線形系の動特性測定法: 第12回自動制御連合講演会予稿集, 113 (昭44)
- 6) 藤井,中尾:Wiener核の可変直交関数展開による非線形系の動特性測定法:制御工学, 14巻,10号,pp.7~15 (昭45)
- 7) 末岡清市:応用数学講座第3巻-級数および直交関数系; pp. 122~132, コロナ社 (昭39)
- 8) 第2章の参考文献13)
- 9) S.H.Kyong & E.P.Gyftopoulos: A Direct Method for a Class of Optimal Control Problems; IEEE Trans. on AC, Vol. AC-13, Ma3, pp. 240~245 (1968)

第 5 章 2値信号を入力と**する非線**形システムの 動特性**測**定法

## 第 5 章 2値信号を入力とする非線形システムの 動特性測定法

### 5.1 緒 言

第3章および第4章で非線形システムの動特性をVolterra核あるいはWiener核の形で測定する方法について述べたが,非線形システムの動特性をこのように一般的に測定しようとすると、どうしても測定すべきパラメータの個数が多くなり,測定がめんどうとなる。ところが実在のシステムの中にはもともと入力として2値信号のみしか受けないシステムが多く存在する。たとえば筋肉の収縮機構を考えてみると筋肉は中枢神経からの命令をパルス信号として受け、その命令にしたがって所望の張力あるいは収縮力を発生するのであるが(図5.1),この場合中枢神経からのパルス信号は一定振幅のものであるので,このシステムの入力信号は2値信号であると考えられる「)。またシステムを実際に制御する場合にも,経済性,動作の確実性、などの理由から on-off の制御装置がよく採用される 2)。このような場合にはシステムの動特性は一般の入力信号に対して知る必要はなく,たゞ2値信号入力に対してのみ知ればよい。

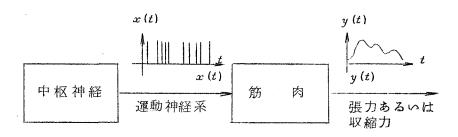


図5.1 筋肉の収縮機構

本章ではこのように入力として2値信号のみしか受けないシステムの動特性を測定する方法について研究を行ない、このようなシステムの動特性を測定するのに有効な入力信号を提案し、この信号を用いればモデルの形およびそのバラメータを簡単に決定できることを確かめた。

#### 5.2 2 値信号入力に対する非線形システムの離散値表示

測定対象として図 5.2 に示す定位性を有する一般の非線形システムを考える。

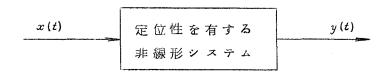


図 5.2 测定対象

図においてx(t)はシステムへの入力,y(t)はこの入力に対するシステムの出力であり,入力x(t)は図 5.3に示すようにA,Bという値のみをとる 2 値信号が投入されるものとする。測定対

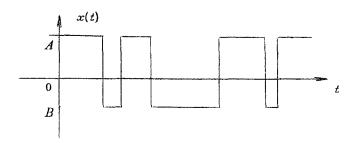


図 5.3 測定対象への入力信号

象の入出力関係は第2章においても述べたように無限次のボルテラ級数により

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) \dots x(t-\tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$

$$(5.1)$$

と表わされる。システムが定位性を有することからVolterra核は

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) \simeq 0$$
,  $\tau_j \geq T_s$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) (5.2)
$$T_s:$$
 整定時間

なる関係を有しており、式(5.1)はその積分範囲が有限のVolterra級数

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{0}^{T_s} \int_{0}^{T_s} \int_{0}^{T_s} \int_{0}^{T_s} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \right)$$

(5.3)

に書きかえられる。測定対象への入力信号x(t)はA, Bという2つの値をとるが,この信号は1, -1という値をとる2値信号m(t)を用いて

$$x(t) = a \cdot m(t) + b \tag{5.4}$$

 $\hbar \stackrel{\checkmark}{\smile} L \quad a = \frac{1}{2} (A - B), \quad b = \frac{1}{2} (A + B)$ 

と表わすことができる。この関係を式(5.3)に代入し、m(t)に関して同じべきの項を集めて書きなおすと

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{n}) \{a \cdot m(t - \tau_{1}) + b\} \{a \cdot m(t - \tau_{2}) + b\} ...$$

$$\{a \cdot m(t - \tau_{n}) + b\} d\tau_{1} d\tau_{2} ... d\tau_{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} d^{n} \{h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{n}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} i C_{n} \cdot b^{i-n} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} h_{i}(\tau_{1}, \tau_{2}, ..., \tau_{i}) dt + d\tau_{n+2} ... d\tau_{i} \} m(t - \tau_{1}) m(t - \tau_{2}) ... m(t - \tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} ... d\tau_{n}$$

$$(5.5)$$

が得られる。ことで上式の積分の核をあたらしく

$$a^{n} \{ h_{n} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} {}_{i} C_{n} \cdot b^{-n} \begin{cases} T_{s} / T_{s} \\ 0 \end{cases} 0 \qquad 0 \end{cases} \begin{pmatrix} T_{s} / T_{s} / T_{s} \\ h_{i} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{i}) d \tau_{n+1} d \tau_{n+2} \cdots d \tau_{i} \}$$

$$\stackrel{\triangle}{=} b_{n} (\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) \qquad (5.6)$$

とおくと、システムの出力は

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_$$

で表わされる。これより A , B という値をとる 2 値信号入力に対するシステムの入出力関係は,1 , -1 という正規化された値をとる 2 値信号入力に対する関係式に変換することができる。変換前の V ol terra核  $h_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  は定位性の条件を満足しているので,変換された V ol terra核  $b_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$  も当然

$$b_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) \simeq 0$$
  $\tau_j \geq T_s$   $(j=1, 2, \dots, n)$  (5.8) なる定位性の条件を満足している。

式 (5.7) を離散値幅  $\Delta$  で離散値表示すると t=r。  $\Delta$  において

$$y(r) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=1}^{M} \sum_{i_2=1}^{M} \sum_{i_n=1}^{M} b_{i_1}, i_2, \dots, i_n \cdot r m_{i_1}, i_2, \dots, i_n \right\}$$
 (5.9)

たいし

となる。システムの Volterra核 に相当する  $b_{i_1}, i_2, \cdots, i_n$  が変数  $i_1, i_2, \cdots, i_n$  に関して対称性を示すこと,入力 $rm_i$ が $rm_i^2=1$  となることを考慮すると式(5.9)は

$$y(r) \approx \sum_{n=0}^{M} \begin{cases} \sum_{i_1=1}^{M} \sum_{i_2=1}^{i_1=1} \cdots \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}-1} \beta_{i_1}, i_2, \cdots, i_{n+rm} i_1, i_2, \cdots, i_n \end{cases}$$

$$= m^{T}(r) \cdot \beta \qquad (5.10)$$

たゞし

$$m^{T}(r) = (1, rm_{1}, rm_{2}, ..., rm_{M}, rm_{21}, ..., rm_{M}, M-1, ..., rm_{M}, M-1, ..., 1)$$
 $\beta^{T} = (\beta_{0}, \beta_{1}, \beta_{2}, ..., \beta_{M}, \beta_{2}, ..., \beta_{M}, M-1, ..., \beta_{M}, M-1, ..., 1)$ 
 $T$ : 転置を表わす

のように簡単化することができる。

以上より 2 値信号を入力とする一般の定位性を有する非線形システムの入出力関係は式 (5.10) で表わされ、その特性はパラメータ $\beta$  によって特徴づけられる。したがってその動特性測定はバラメータ $\beta$ の測定に帰することができる。

#### 5.3 動特性測定法

#### 5.3.1 動特性測定のための入力信号

測定対象は定位性を有するので、時点 $r \cdot \Delta r$ におけるシステムの出力y(r)は過去のM個の入力の時点列 $rm_1$ , $rm_2$ , $\cdots$ , $rm_M$ の影響を受ける。システムへの入力は2値すなわち $rm_i=1$  あるいは-1のみをとるので、システムの出力に影響を及ぼす過去の入力 $\{rm_1,rm_2,\cdots,rm_M\}$ の組合わせは $2^M$  個存在する。したがって動特性を完全に測定するためには、これらすべての組合わせを含む信号を入力信号として用いなければならない。また動特性測定のための入力信

号はその入出力の測定データからシステムの動特性を表わすパラメータを簡単に計算できるようなものであることが望ましい。本節ではこのような組合わせをすべて含んだ、しかもシステムを特徴づけるパラメータの測定が簡単な入力信号を提案する。

線形システムの動特性測定のために m 系列信号  $^{5)}$  (最大周期列信号) がよく用いられるが、この信号は上記の  $^{2M}$  個の組合わせのうち  $^{1}$  はかりの組合わせ  $\{1,1,\cdots,1\}$  または  $^{-1}$  はかりの組合わせ  $\{-1,-1,\cdots,-1\}$  を除いた  $^{2M}$  -1 個の組合わせすべてを含んだ周期が  $(^{2M}$  -1 )  $^{2}$  の信号である。したがって  $^{2}$  不列信号に  $^{1}$  はかりの組合わせあるいは  $^{-1}$  はかりの組合わせを適当に挿入することにより,  $^{2M}$  個のすべての組合わせを含んだ周期  $^{2}$ 

r m 1 rm 3 r m 3 1 1 1 - 1 2 1 1 系ら 3 1 - 1 1 - 1 4 5 - 1 号組 6 か合 らわ 7 1 | 得せ 8

表 5.1 入力の組合わせ (M=3)

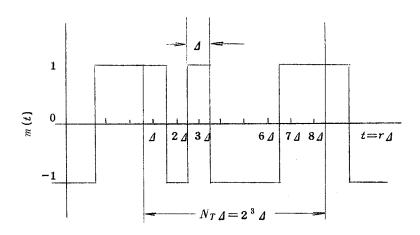


図 5.4 すべての組合わせを含んだ入力信号m(t)の波形 (M=3)

つぎにこのようにして得られた入力信号はどのような性質を有するかについて考察する。入力信号 $-m_i$ ( $1 \le i \le M$ )はrが $2 \sim 2^M$ の間ではm系列信号に等しいから $-m_i$ と $-m_j$ の積は

$$rm_{i_1} \cdot rm_{i_2} (= rm_{i_1}, i_2) = rm_{i_l}, 2 \le r \le 2^M$$
 (5.11)

のように位相の異なった同一のm系列信号になる。 $i_1$ は $i_1$ , $i_2$ から決まる値である。同様に信号 $rm_i$ の高次の積に関しても

$$r m i_1 \cdot r m_{i_2} \cdots r m_{i_n} (= r m_{i_1}, i_2, \cdots, i_n) = r m_{i_p}, 2 \le r \le 2^M$$

$$(M \ge i_1 > i_2 > \cdots > i_n)$$
(5.12)

なる関係が得られる。ととで $i_p$  は $i_1$ ,  $i_2$ , …,  $i_n$ から決まる値である $^{5)}$ 。式(5.12)の関係を用いると入力信号 $_rm_i$ の高次の積 $_rm_{i_1}$ ,  $i_2$ , …,  $_in$ ( $M>i_1>i_2>\dots>i_n$ )の相関は

$$\frac{1}{N_{T}} \sum_{r=1}^{N_{T}} r^{m} i_{1}, i_{2}, \dots, i_{n} \cdot r^{m} j_{1}, j_{2}, \dots, j_{k}$$

$$= \frac{1}{2^{M}} \{ 1^{m} i_{1}, i_{2}, \dots, i_{n} \cdot 1^{m} j_{1}, j_{2}, \dots, j_{k} + \sum_{r=2}^{2^{M}} r^{m} i_{1}, i_{2}, \dots, i_{n} \cdot r^{m} j_{1}, j_{2}, \dots j_{k} \}$$

$$= \frac{1}{2^{M}} \{ 1 \cdot 1 + \sum_{r=2}^{2^{M}} r^{m} i_{p} \cdot r^{m} j_{p} \}$$

$$= \begin{cases} 1 : n = k \quad \text{かo} \quad i_{1} = j_{1} (l = 1, 2, \dots, n) \text{ obs} \\ 0 : \text{その他の場合} \end{cases} \tag{5.13}$$

なる関係を満足している。またその平均値は

$$\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} r \, m_{i_1}, \, i_2, \cdots, \, i_n = \frac{1}{2^M} \sum_{r=1}^{2^M} r \, m_{i_p}$$

$$= \frac{1}{2^M} (_1 \, m_{i_p} + \sum_{r=2}^{2^M} r \, m_{i_p})$$

$$= \frac{1}{2^M} \{ 1 + (-1) \}$$

$$= 0 \qquad (5.14)$$

となる。以上よりことで提案した信号m(t)は動特性測定に必要な入力のすべての組合わせを含み、かつその信号の高次の積の相関は直交性を有し、平均値は0となることがわかる。

次節ではこの信号m(t)を入力信号として用い、システムの特性を表わすバラメータ $\beta$  を測定する方法について述べる。

5.3.2 システムのバラメータの測定法

前節で提案した信号m(t)を用い、測定対象へ

$$x(t) = a \cdot m(t) + b \tag{5.4}$$

なる入力信号を投入する。 この入力に対する測定対象の応答は離散的に式(5.10)により

$$y(r) = \sum_{n=0}^{M} \left\{ \sum_{i_{1}=1}^{M} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}=1} \dots \sum_{i_{n}=1}^{i_{n-1}-1} \beta_{i_{1}}, i_{2}, \dots, i_{n} \circ r^{m} i_{1}, i_{2}, \dots, i_{n} \right\}$$

$$= m^{T}(r) \cdot \beta \qquad (5.10)$$

と表わされる。バラメータetaを決定するため式(5.10)と同形の次数がN次のモデル

$$N_{y}(r) = \sum_{n=0}^{N} \left\{ \sum_{i_{1}=1}^{M} \sum_{i_{2}=1}^{i_{1}-1} \cdots \sum_{i_{n}=1}^{N} \beta_{i_{1}}, i_{2}, \cdots, i_{n} \cdot r^{m} i_{1}, i_{2}, \cdots, i_{n} \right\} 
 = N_{Pii}T(r) \cdot N \beta$$
(5.15)

たいし

$${}^{N}m^{T}(r) = (1, rm_{1}, rm_{2}, \cdots, rm_{M}, rm_{21}, \cdots, rm_{M}, M-1, \cdots, rm_{M}, M-1, \cdots, M-N+1)$$

$${}^{N}\beta^{T} = ({}^{N}\beta_{0}, {}^{N}\beta_{1}, {}^{N}\beta_{2}, \cdots, {}^{N}\beta_{M}, {}^{N}\beta_{21}, \cdots, {}^{N}\beta_{M}, M-1, \cdots, {}^{N}\beta_{M}, M-1, \cdots, M-N+1)$$

を導入する。ことでこのモデルの応答と測定対象の応答の差に関して

$$J_N({}^{N}\!\beta) = \sum_{r=1}^{N_T} \{ y(r) - {}^{N}y(r) \}^2 = \sum_{r=1}^{N_T} \{ y(r) - {}^{N}m^T(r) \cdot {}^{N}\beta \}^2$$
 (5.16)

なる評価関数を考え,との評価関数が最小となるようにモデルのバラメータ $^Neta$  を決定する。 $J_N(^Neta)$  を最小にする $^Neta$  の値は

$${}^{N}\beta^{+} = ({}^{N}M^{T} \cdot {}^{N}M)^{-1} {}^{N}M^{T} \cdot Y \tag{5.1.7}$$

たいし

$${}^{N}M = \begin{bmatrix} {}^{N}m^{T} & (1) \\ {}^{N}m^{T} & (2) \\ \vdots \\ {}^{N}m^{T} & (N_{T}) \end{bmatrix} , Y = \begin{bmatrix} y & (1) \\ y & (2) \\ \vdots \\ y & (N_{T}) \end{bmatrix}$$

で与えられる。 $^{N}M^{T}$ ・ $^{N}M$  を計算すると

$${}^{N}M^{T} \cdot {}^{N}M = \sum_{r=1}^{N_{T}} {}^{N}m(r) \cdot {}^{N}m^{T} (r)$$

$$=\begin{bmatrix} N_{T} & N$$

となり、入力信号m(t)は前節で述べたように式(5.13)の関係を満足するので、このマトリククスは対角要素だけが残り、結局

$$NM^T \bullet NM = N_T \bullet \Pi$$
 ,  $\Pi : 単位マトリクス$  (5.18)

のように簡単な形になる。これよりモデルのパラメータは

$${}^{N}\beta^{*} = \frac{1}{N_{T}} {}^{N}N^{T}Y = \frac{1}{N_{T}} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{T}} {}^{N}m(r) \cdot y(r) \right\}$$
 (5.19)

すなわち

$${}^{N}\beta_{j_{1}}^{\star}, {}_{j_{2}}, ..., {}_{j_{k}} = \frac{1}{N_{T}} \sum_{r=1}^{N_{T}} {}^{r}m_{j_{1}}, {}_{j_{2}}, ..., {}_{j_{k}} \bullet y(r)$$
 (5.19')

で与えられ、モデルのパラメータの計算はこのバラメータに対応する入力とシステムの出力と

の相関を計算すればよいことがわかる。

一方式(5.19)を用いて計算したモデルのバラメータ $^{N}\beta_{j_1}^{*}$ ,  $j_2$ , …,  $j_k$  はシステムのバラメータ $^{\beta}\beta_{j_1}$ ,  $j_2$ , …,  $j_k$  に等しくなるととが容易に導かれる。すなわち式(5.10)の両辺に $^{rm}j_1$ ,  $j_2$ , …,  $j_k$ を掛けて,入力信号の1周期にわたって平均すると

$$\frac{1}{N_{T}} \sum_{r=1}^{N_{T}} y(r) \cdot_{r} m_{j_{1}}, j_{2}, \dots, j_{k}$$

$$= \frac{1}{N_{T}} \sum_{r=1}^{N_{T}} \sum_{n=0}^{M} \left\{ \sum_{i_{1}=1}^{M} \sum_{i_{2}=1}^{N_{T}-1} \beta_{i_{1}}, i_{2}, \dots, i_{n} \cdot_{r} m_{i_{1}}, i_{2}, \dots, i_{n} \right\}_{r} m_{j_{1}}, j_{2}, \dots, j_{k}$$

$$= \frac{1}{N_{T}} \sum_{n=0}^{M} \left\{ \sum_{i_{1}=1}^{M} \sum_{i_{2}=1}^{M} \sum_{i_{n}=1}^{N_{T}-1} \beta_{i_{1}}, i_{2}, \dots, i_{n} \left( \sum_{r=1}^{N_{T}} r m_{i_{1}}, i_{2}, \dots, i_{n} \cdot_{r} m_{j_{1}}, j_{2}, \dots, j_{k} \right) \right\}$$

となり、入力信号に対する式(5.13)の関係より、システムのパラメータに関して

$$\frac{1}{N_T} \sum_{r=1}^{N_T} y(r) \cdot r m_{j_1}, j_2, \dots, j_k = \beta_{j_1}, j_2, \dots, j_k$$
 (5.20)

なる結果が得られる。式(5.19)と式(5.20)より

$${}^{N}\beta_{j_{1}}^{k}, j_{2}, \cdots, j_{k}=\beta_{j_{1}}, j_{2}, \cdots, j_{k}$$
 (5.2 1)

となることがわかる。

以上より測定対象の動特性を表わすパラメータの測定は式(5.19)の簡単を計算により行なうことができ、その測定値は用いるモデルの次数 N に関係なくシステムの真のパラメータに一致したものが得られる。パラメータ $\beta$  を測定するための回路を図5.5 (a)に示す。入力  $r^m j_1, j_2, \cdots, j_k$  と出力 y(r) の乗算は入力が 2 値であるので図5.5 (b) に示すように リレーを用いて行なうことができる。

#### 5.3.3 モデルの次数の決定法

測定対象の形に関してなんらの情報もないので、測定対象のモデルの形をなんらかの方法で決める必要がある。モデルの形はそのモデルが測定対象の特性を十分近似できるようなものに選ばなければならない。 N次のモデルがどの程度測定対象の特性を近似するかを表わす評価関数として測定対象とモデルの応答の2乗誤差面積を測定対象の応答で正規化した

$$E_{N} = \frac{\sum_{r=1}^{N_{T}} \{ y^{(r)} - N y^{(r)} \}^{2}}{\sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r)} = \frac{J_{N} (N \beta^{+})}{\sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r)}$$

$$(5.22)$$

なる評価関数を考える。分子の $J_N(^Neta^*)$ は

$$J_{N}({}^{N}\beta^{*}) = \sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r) - 2 \sum_{r=1}^{N_{T}} y(r) \cdot {}^{N}y^{*}(r) + \sum_{r=1}^{N_{T}} {}^{N}y^{*}^{2}(r)$$

$$= \sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r) - 2 \left\{ \sum_{r=1}^{N_{T}} y(r) \cdot {}^{N}y^{2}(r) \right\} {}^{N}\beta^{*} + {}^{N}\beta^{*}^{T} \left\{ \sum_{r=1}^{N_{T}} {}^{N}m(r) \cdot {}^{N}m^{T}(r) \right\} {}^{N}\beta^{*}$$

となり、式(5.19)および式(5.18)の関係を用いると

$$J_{N}({}^{N}\beta^{*}) = \sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r) - 2 \cdot N_{T} \cdot {}^{N}\beta^{*T} \cdot {}^{N}\beta^{*T} \cdot {}^{N}\beta^{*T} \cdot {}^{N}\beta^{*T}$$

$$= \sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r) - N_{T} \cdot {}^{N}\beta^{*T} \cdot {}^{N}\beta^{*T}$$

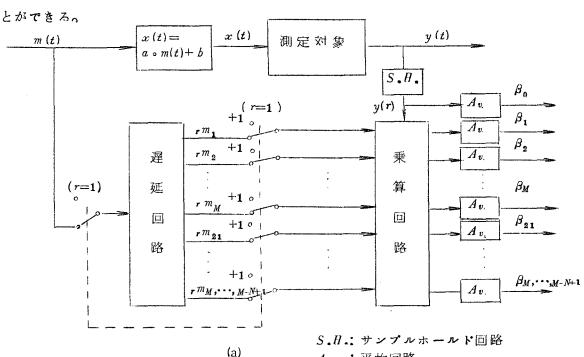
となる。 したがって評価関数  $E_N$  は

$$E_{N}=1\frac{\frac{N\beta^{*T} \cdot N\beta^{*}}{1}}{\frac{1}{N_{T}} \sum_{r=1}^{N_{T}} y^{2}(r)} = 1 - \frac{\frac{N\beta^{*T} \cdot N\beta^{*}}{\beta^{T} \cdot \beta}}{\beta^{T} \cdot \beta}$$

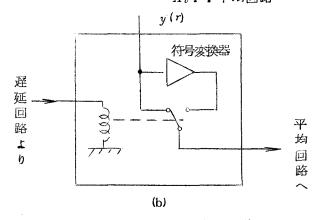
$$(5.24)$$

で与えられる。 $E_N$  はモデルの次数Nの増加とともに単調に減少し、Nがシステムの次数Mに 等しくなったときに0に等しくなる $^{6)}$ 。これより $E_N$ がある許容値 $\epsilon$ の範囲内にはいったとき  $\kappa$ 、その次数Nをモデルの次数とすればよい。またこの許容関数 $E_N$  はシステムのパワー

 $\begin{pmatrix} 1 & N_T \\ \hline & \Sigma & y^2(r) \end{pmatrix}$  と 5.3.2 で測定されたモデルのバラメータのみを用いて簡単に計算すると



 $A_v$ . : 平均回路



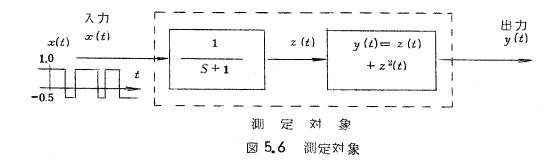
(a) パラメータ側定回路

(b) 乗算回路

図 5.5 バラメータ $\beta$ の測定回路

#### 5.4 測定例

[例1] 測定対象として図 5.6 に示す非線形システムを考える。破線内の構成は未知で入力x(t) と出力y(t)のみが観測できるものとし、システムへの入力信号はA=1.0 とB=-0.5の 2 値をとる信号のみが投入されるものとする。



測定対象の動特性を表わすバラメータの理論値は

$$\beta_{0} = b + b^{2} + a^{2} \frac{e^{-\Delta} - e^{-(2M+1)\Delta}}{1 - e^{-2\Delta}} \cdot \Delta^{2}$$

$$\beta_{i_{1}} = a \left(1 + {}_{2}C_{1} \cdot b\right) e^{-\left(i_{1} - \frac{1}{2}\right)\Delta} \cdot \Delta$$

$$\beta_{i_{2}}, i_{1} = 2 a^{2} e^{-\left(i_{1} + i_{2} - 1\right)\Delta} \cdot \Delta^{2}$$

$$\uparrow C : L \quad a = (A - B) / 2, \quad b = (A + B) / 2$$

$$(5.25)$$

である(付録 5.1 参照)。測定間隔  $\Delta$  を 0.5 secに、モデルの近似度を表わす評価関数  $E_N$  の許容値  $\epsilon$  を  $\epsilon=10^{-8}$  にとる。測定対象の整定時間  $T_s$  を  $\Delta$  ~ 5 secとしM を  $M=T_s/\Delta\simeq 9$  に選ぶ。周期が  $\Delta^{8}\Delta$  の 5.3.1 で説明した信号 m(t) を 用い、測定対象に式(5.4)の入力

$$x(t) = 0.75 m(t) + 0.25$$

を投入する。図 5.5の回路を用いてモデルのバラメータを測定し、この測定結果からモデルの近似度を表わす評価関数  $E_N$  を種々のNに対して計算する。その結果を表 5.2 に示す。これよ

りモデルの次数は 2次で十分であることがわかる。また参考のためモデルのバラメータ個数  $(N_p)$  と $\sqrt{E_N}$  との関係を示すと図 5.7のようになる。測定対象のバラメータの測定値と式(5.25)より計算される理論値を表 5.3に示す。この測定バラメータを用いて 2次のモデルを構成し、図 5.8 (b)に示した 2 値入力に対するシステムとこのモデルの応答を測定すると図 5.8 (a)のようになる。図より両者の応答はよく一致していることがわかる。

表 **5.2** モデルの近似 度を表わす評価 関数*EN*の計算値

N	$E_N$
0	0.6201×100
1	0.3867×10 <sup>-1</sup>
2	0.1324×10 <sup>-4</sup>

[例2] 測定対象として飽和要素が含まれた図 5.9 に示す非線形システムを考える。飽和要素は  $y_2(t)$ = t anh z(t) で表わされるものとする。システムへの入力信号 x(t)は A=1.0, B=0 の 2 値をとる信号が投入されている。動特性測定に際して図 5 9の破線内の構造に関して情報はまったくないものとする。例1 と同様に,測定間隔  $\Delta$  を 0.5 secに,  $\epsilon$  を  $10^{-3}$  にとる。システムの整定時間  $T_s$  を  $4\sim5$  sec程度であるとし,M を 9 に選ぶ。周期  $2^9$   $\Delta$  の信号 m(t) を

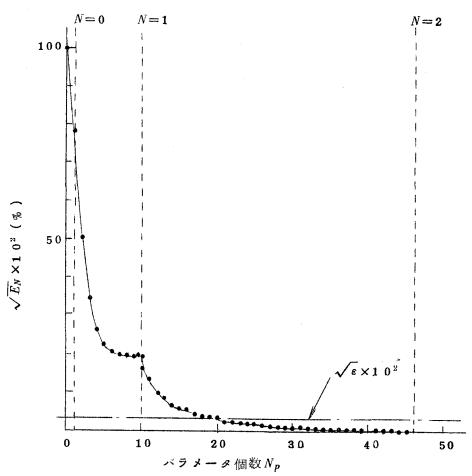


図 5.7 モデルのパラメータ個数  $N_P$ と $\sqrt{E_N}$  との関係 表 5.3 測定対象のパラメータの理論値および測定値

(b) 2次のパラメータ

#### (a) 0次および1次の パラメータ

i 1	<sup>2</sup> β <sup>*</sup> <sub>1</sub>	β ι,
0	0.4 5 0 4	0.4503
1	0.4428	0.4381
2	0.2686	0.2 6 5 7
3	0.1629	0.1612
4	0.0988	0.0977
5	0.0600	0.0593
6	0.0386	0.0 3 6 0
7	0.0228	0.0218
8	0.0 1 3 7	0.0132
9	0.0083	0.0080

$i_1$	$i_2$	$^{2}\beta_{i_{1}, i_{2}}^{*}$	$\beta_{i_1, i_2}$	i,	$i_2$	$ ^{2} \beta_{i_{1}, i_{2}}^{*}$	$\beta_{i_1}$ , $i_2$
2	1	0.1056	0.1 0 3 5	7	4	0.0 0 2 0	0.0019
3	1	0.0641	0.0 6 2 8		5	0.0012	0.0011
	2	0.0389	0.0381		6	0.0009	0.0 0 0 7
4	1	0.0389	0.0 3 8 1	8	1	0.0 0 5 3	0.0052
	2	0.0 2 3 6	0.0 2 3 1		2	0.0032	0.0031
	3	0.0 1 4 3	0.0140		3	0.0038	0.0 0 1 9
5	1	0.0236	0.0231		4	0.0012	0.0 0 1 1
	2	0.0143	0.0140		5	0.0008	0.0 0 0 7
	3	0.0087	0.0085		6	0.0005	0.0004
	4	0.0053	0.0052		7	0.0004	0.0 0 0 3
6	1	0.0193	0.0 1 4 0	9	1	0.0032	0.0031
	.2	0.0087	0.0 0 8 5		2	0.0020	0.0019
	3	0.0053	0.0052		3	0.0012	0.0011
	4	0.0032	0.0 0 3 1		4	0.0019	0.0007
	5	0.0 0 2 3	0.0 0 1 9		5	0.0005	0.0004
7	1	0.0087	0.0085		6	0.0 0 0 3	0.0003
	2	0.0083	0.0 0 5 2		7	0.0 0 0 2	0.0002
	3	0.0 0 3 2	0.0 0 3 1		8	0.0002	0.0001

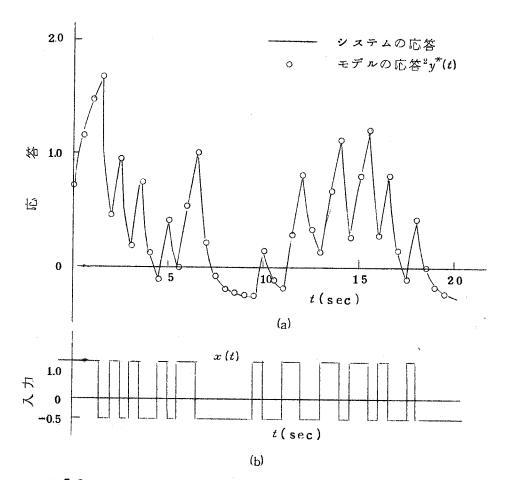
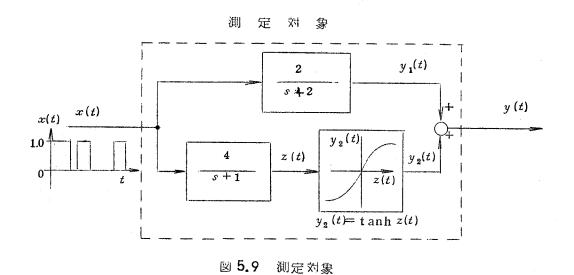


図 5.8 ある入力信号 x(t) に対するシステムとモデルの応答波形



用いて得られる。

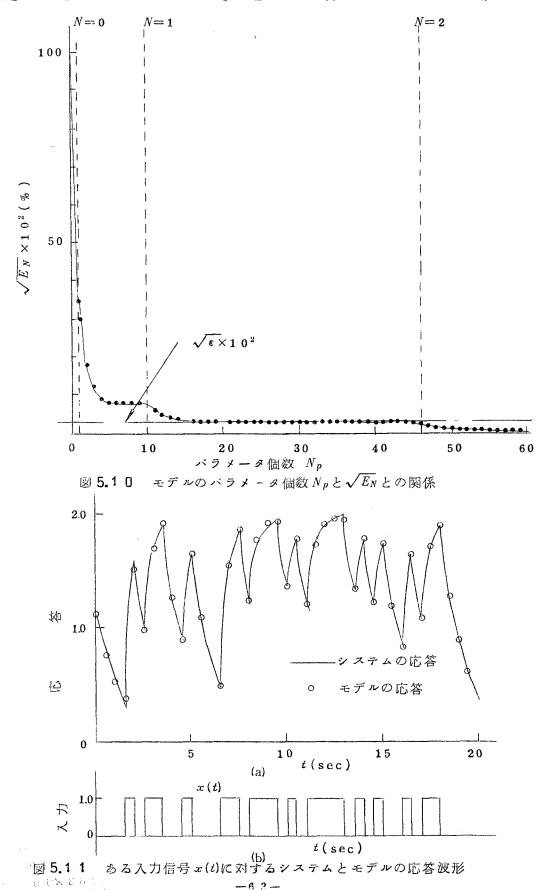
x(t) = 0.5 m(t) + 0.5

なる信号を入力信号として用いて動特性測定を行なり。 バラメータの測定結果を用いてモデルの次数を決定する 評価関数 $E_N$  を計算すると表5.4のようになる。またモ

表 5.4 評価関数 Enの計算値

N	$E_N$	
0	$1.219 \times 10^{-1}$	
1	$6.813 \times 10^{-3}$	
2	$8.432 \times 10^{-4}$	
3	$1.703 \times 10^{-5}$	
4	$4.2 6 3 \times 10^{-7}$	

デルのバラメータ個数を $N_P$  と $\sqrt{E_N}$  の関係を示すと図  $5.1\,0$  のようになる。これよりモデルが $E_N \le \epsilon$  を満足するためには,N を 2 次にとれば十分であることがわかる。以上の測定結果を用いて 2 次のモデルを構成し,図  $5.1\,1$  (b)に示す入力信号に対するこのモデルとシステムの応答を測定すると図  $5.1\,1$  (a)のようになる。両者はほど一致していることがわかる。



#### 5.5 結 言

システムが2値信号入力のみしか受けない場合には、そのシステムの動特性は一般の入力信号に対して知る必要はなく、たい2値信号に対してのみ知ればよい。本章ではこのように入力として2値信号のみしか受けないシステムの動特性を測定する方法についての研究を行ない、このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を見出し、この信号を用いれば簡単にシステムの動特性を測定できることを確かめた。本方法の特徴についてきとめると以下のようになる。

- (1) 動特性測定に用いる入力信号はm 系列信号を少し修正することにより簡単に作ることができる。
- (2) システムの動特性を表わすバラメータは式(5.19)に示すようにこのパラメータに対応する入力とシステムの出力との相関で与えられ、このバラメータを測定するための回路は図5.5に示すように遅延回路とリレーで駆動される乗算回路を用いて実現できる。
- (3) 測定されたパラメー $g^N\beta^*$ は用いるモデルの次数Nに関係なくシステムの真のパラメータに一致したものが得られる(式(5.21))。
- (4) モデルの良否は測定 されたパラメータと測定対象の出力のパワーのみを用いて簡単に判定することができる(式(5.24)。またモデルの形は5.3.3 において述べたように次数Nで規定するという方法以外に、パラメータ個数 $N_p$  で規定する方法も考えられる。たとえば測定例1 ではモデルの形を次数で規定するとモデルのパラメータ個数は4.5 個必要となるが、モデルの形をパラメータ個数 $N_p$  で規定すると2.0 個でよいことがわかる(図5.7)。
- (5) 多値信号を入力とする非線形系の動特性を測定する場合へも容易に理論を拡張することができる<sup>4)</sup>。

#### 第5章の参考文武

- 1) 阪本,若林:医用電子。生体工学概論; pp. 85~109, コロナ社 (昭42)
- 2) オンオフ制御分科会:オンオフ制御;日本機械学会 (昭43)
- 3) 真鍋,中尾,藤井:2値信号を入力とする非線形系の動特性測定法:第9回計測制御学会 学術講演会予稿集,219 (昭45)
- 4) 真鍋,中尾,藤井:2値信号を入力とする非線形系の動特性測定法:計測自動制御学会論 文集,7巻,4号,pp.331~339 (昭46)
- 5) 佐藤, 井戸川: m 系列の二三の性質とその応用;計測自動制御学会論文集,2巻,2号(昭41)
- 6) 第4章の参考文献 7)

# 第6章結論

### 第6章結論

これまでに提案されている非線形システムの動特性測定法は実際に適用する場合に種々の問題点を有している。筆者はこれらの問題点を解決するためにシステムのモデルとしてはん関数を用いて非線形システムの動特性を一般的に測定する方法について研究を行なった。本研究において提案した各種の測定法に関して得られた結果はそれぞれの章の結言において述べた通りであるが、本章ではこれらの測定法の相互の関連および個々の測定法に関して得られた結果を総括的に記述することにする。

- (1) Volterra級数を用いた方法(第3章の方法)は定位性(有限時間整定)のシステムのみならず無定位性のシステムにも適用できるが、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法(第4章の方法)は有限時間整定のシステムのみに限られる。また前者の方法は測定のために用いる入力信号は測定対象の動特性を抽出するのに十分な周波数および振幅特性を有する信号であればどのようなものでもよく、正規性、白色性などの特別な性質を有する信号は必要ではないが、後者の方法は正規性白色信号を入力信号として投入しなければならない。
- (2) 動特性の測定結果は Volterra級数を用いた方法では Volterra核の応答波形の形で得られるので制御理論を適用する場合には不便であるが、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法では数式の形で得られるのですぐさま制御理論を適用できるという長所を有している。
- (3) 本研究において提案した方法はすべてモデルの形を近似度を考慮して決定しているため、動特性の測定結果は十分信頼のおけるものが得られる。またこの近似度は Volterra級数の入力信号の振幅に対する顕著な性質(式(3.10))を利用することによりあらかじめ簡単に計算することができ、Wienerの直交はん関数級数を用いた方法では式(4.30)で、また2値信号入力を受ける非線形システムに対しては式(5.24)で与えられ、これらは測定パラメータのみの関数であるので、実際にモデルを構成することなく、簡単に評価することができる。
- (4) Wienerによって提案されたLaguerre-Hermiteの直交関数を用いた方法は非線形システムの動特性を測定するための一般的な考え方を与えたものとして価値があるが、測定に多大の労力を要するとともに、測定結果が複雑になるという実際上の問題点を有している。第4章で提案したWienerの直交はん関数級数を用いた方法はこれらの問題を解決するものであり、バラメータの測定は図4.1に示した簡単な多次元直交関数回路を用いて行なうことができる。
- (5) 実在のシステムの中にはもともと入力として2値信号のみしか受けないシステムが多く存在する。このようなシステムに対しては一般の入力信号に対して動特性を測定する必要はなく,たゞ2値信号入力に対してのみ測定を行なえばよく,モデルの形も簡単になる。このようなシステムの動特性測定に有効な入力信号を提案し,この信号を用いれば動特性測定が簡単化されることを確かめた。
- (6) 2 値信号を入力とする非線形システムの動特性の測定法は多値信号を入力とする非線形 系の動特性にも容易にその理論を拡張することができる。

# 謝辞

本研究の実施にあたり終始御懇篤なる御指導,御鞭撻を賜わつた藤井克彦教授,西村正太郎教授に心より感謝の意を表わします。また常に有益なる御助言,御教示下さった鈴木胖助教授に謝意を表します。

また大学院在学中, 御指導, 御教示いたよいた山村豊教授, 大石嘉雄教授, 山中千代衛教授 および川辺和夫教授に厚くお礼申し上げます。

本研究を行なうにあたって種々の御援助を得た藤井研究室,西村研究室の諸氏に深く謝意を表します。とくに本研究について有益な御討論をいたゞいた村上吉繁講師,北村新三助手,笠井健助手,黒田英三助手,ならびに森田龍彌彌助手に厚くお礼申し上げます。さらに研究に直接御協力を得た大学院学生真鍋道孝君,ならびに卒業研究としてこの研究に協力された三上博明君に感謝いたします。

#### 付録3.1 収束の保証

式 (3.9) において $p_i$  は定数でLは十分大なる整数とした。いま $p_i$  を連続変数におきかえると式 (3.10), (3.11) はそれぞれ

$$y(p, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(g_k; s(t'), 0 \le t' \le t) p^k$$
 (43-1.1)

$$^{N}y(p,t) = \sum_{k=0}^{N} ^{N}G_{k}[^{N}g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t]p^{k}$$
 (\(\forall 3 - 1 \cdot 2\)

となる。たゞしpは(p |  $\leq$  1なる連続変数である。式(3.12)の評価関数 $J_N$  もまた積分記号を用いて

$$J_{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N}G_{k} \in {}^{N}g_{k} ; s(t'), 0 \le t' \le t \} p^{k} \}^{2} dp \qquad (\text{$d$} 3 - 1 \cdot 3)$$

と書きかえられる。

式(付3-1・1)は正規直交関数,

$$L_k(p) = \sum_{j=0}^k C_{kj} p^j \qquad (k=0, 1, \dots, \infty)$$

たゞし

$$\begin{cases} 1 & L_n(p) \ L_m(p) \ dp = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

を用いて

$$y(p, t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k [g_k; s(t'), 0 \le t' \le t] p^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(p)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{j=0}^{k} C_{kj} p^j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} A_i C_{ik}\right) p^k \qquad (43-1.4)$$

と書くことができる。ここで評価関数

$$\int_{-1}^{1} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} A_k L_k(p) \}^2 dp$$

$$= \int_{-1}^{1} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} \left( \sum_{i=k}^{N} A_i C_{ik} \right) p^k \}^2 dp$$

$$= \int_{-1}^{1} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N} G_k [{}^{N} g_k; s(t'), 0 \le t' \le t ] p^k \}^2 dp$$

$$= \int_{-1}^{1} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N} G_k [{}^{N} g_k; s(t'), 0 \le t' \le t ] p^k \}^2 dp \qquad ( 3 - 1 \cdot 5)$$

$$= \int_{-1}^{N} \{ y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} {}^{N} G_k [{}^{N} g_k; s(t'), 0 \le t' \le t ] p^k \}^2 dp$$

たゞし

$$\sum_{i=k}^{N} {}^{N}A_{i} C_{ik} = {}^{N}G_{k} \left( {}^{N}g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t \right)$$
 (付3-1.6)

を考える。

$$\frac{\partial J_N}{\partial^N A_n} = \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \quad \frac{\partial^N G_n}{\partial^N A_n} = \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \quad \frac{\partial \begin{pmatrix} \sum_{i=n}^N A_i C_{in} \end{pmatrix}}{\partial^N A_n}$$

$$= C_{nn} \frac{\partial J_N}{\partial^N G_n} \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

なる関係が成立し、 $C_{nn}$   $\pm$  0  $\pm$  b  $\partial$   $J_N/\partial^N A_n = 0$  のとき必ず  $\partial$   $J_N/\partial^N G_n = 0$  となる。したがって $J_N$   $e^N A_n$  に関して最小にすることと、 $^N G_n$  に関して最小にすることは等価である。これより $J_N$  の最小値は

$$J_{N,min} = \begin{cases} 1 & y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} NG_{k}^{\star} [Ng_{k}^{\star}; s(t'), 0 \le t' \le t] p^{k} \}^{2} dp \\ = \int_{-1}^{1} & y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} NA_{k}^{\star} L_{n}(p) \}^{2} dp \\ = \int_{-1}^{1} & y(p, t) - \sum_{k=0}^{N} A_{k} L_{k}(p) \}^{2} dp \\ = \int_{-1}^{1} & y^{2}(p, t) dp - \sum_{k=0}^{N} A_{k}^{2} L_{k}(p) \}^{2} dp \end{cases}$$

$$(43.-3.7)$$

となる。したがって $J_N$ ,  $_{min}$  はN に関して単調減少となり $N=\infty$ において0 となる。式(3.14)の評価関数 $E_N$  に関しても同様のことがいえる。また式 $(付3-1\cdot 6)$ と式 $(付3-1\cdot 4)$  から

$$\lim_{N \to \infty} {}^{N}G_{k}^{\star} \left[ {}^{N}G_{k}^{\star}; s(t'), 0 \le t' \le t \right] = \sum_{i=k}^{\infty} A_{i}^{\star} C_{ik} = \sum_{i=k}^{\infty} A_{i} C_{ik}$$

$$= G_{k} \left[ g_{k}; s(t'), 0 \le t' \le t \right]$$

となり、 $N = \infty K T^{K}_{k} U^{G}_{k} K$  に等しくなる。

#### 付録3.2 Volterra 核の対称性

2次のVolterra核について説明する。 2次のVolterra核  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  が対称でないときには  $h_2(\tau_1, \tau_2)$  のかわりに

$$sy.h_{2}(\tau_{1},\tau_{2}) = \frac{h_{2}(\tau_{1},\tau_{2}) + h_{2}(\tau_{2},\tau_{1})}{2!}$$

なる新しい対称なVolterra核 $sy. h_2(\tau_1, \tau_2)$ を考える。この対称なVolterra核を有するシステムの応答は

$$\begin{split} & \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} sy. \, h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) d\tau_{1} \, d\tau_{2} \\ &= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) + h_{2}(\tau_{2}, \tau_{1})}{2!} \, x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) d\tau_{1} \, d\tau_{2} \\ &= \frac{1}{2!} \left\{ \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2} + \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h_{2}(\tau_{2}, \tau_{1}) x(t-\tau_{2}) x(t-\tau_{1}) d\tau_{2} \, d\tau_{1} \right\} \\ &= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) d\tau_{1} \, d\tau_{2} \end{split}$$

となり、 $h_2(\tau_1,\tau_2)$ と全く同じ特性を有することがわかる。したがってVolterra核は対称性を有すると考えることができる。

#### 付録3.3 ボルテラ核の形の検定

入力x(t)は任意であるから式(3.29)の関係は Volterra級数の各項の応答に関する関係 $t \ge T_s$  を満足するすべての t に対して  $y_n(t) = y_n(t+T_r)$  ( $n=1,2,\cdots$ ) (付3-3・1)

と書きなおすことができる。 n 項目の応答 y x(t) および y n(t+Tr)はそれぞれ

$$y_{n}(t) = \int_{0}^{\infty} d\tau_{1} \int_{0}^{\infty} d\tau_{2} \cdots \int_{0}^{\infty} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{1}) x(t-\tau_{2}) \cdots x(t-\tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i+1} \cdots \int_{t}^{\infty} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{1}) \cdots x(t-\tau_{i})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{i}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i} \ 1 \cdots \int_{t}^{\infty} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{i}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i} \ 1 \cdots \int_{t}^{\infty} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} \int_{0}^{t} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} \int_{0}^{t} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} \int_{0}^{t} d\tau_{n} \ h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$= \sum_{i=0}^{n} {}_{n}C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{n$$

ひよば

$$y_{n}(t+T_{r}) = \sum_{i=0}^{n} C_{i} \int_{0}^{t} x(t+T_{r}-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t+T_{r}-\tau_{i}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i+1} \cdots$$

$$\int_{t}^{\infty} d\tau_{n} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t+T_{r}-\tau_{i+1}) \cdots x(t+T_{r}-\tau_{n}) \qquad ( 3-3 \cdot 3)$$

となる。入力x(t)は  $t \ge 0$  にて周期性を有するため

$$x(t+T_r-\tau_i)=x(t-\tau_i)$$
,  $t\geq \tau_i$   $(i=1, 2, \dots, n)$ 

たる関係が成立する。この関係を用いると式(付3-3・3)は

$$y_{n}(t+T_{r}) = \sum_{i=0}^{n} C_{i} \int_{0}^{t} x(t-\tau_{1}) d\tau_{1} \cdots \int_{0}^{t} x(t-\tau_{i}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i+1} \cdots \int_{t}^{\infty} d\tau_{n} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n})$$

$$x(t+T_{r}-\tau_{i+1}) \cdots x(t+T_{r}-\tau_{n}) \qquad ( 3-3 \cdot 3')$$

となる。式(付3-3・1)より

$$y_{n}(t) - y_{n}(t + T_{r}) = \sum_{i=0}^{n-1} {n \choose i} x(t - \tau_{1}) d\tau_{i} \cdots \int_{0}^{t} x(t - \tau_{i}) d\tau_{i} \int_{t}^{\infty} d\tau_{i-1} \cdots \int_{t}^{\infty} d\tau_{n}$$

$$h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) \{ x(t - \tau_{i+1}) \cdots x(t - \tau_{n}) - x(t + T_{r} - \tau_{i+1}) \cdots$$

$$x(t + T_{r} - \tau_{n}) \}$$

$$= 0 \qquad (\{ t \mid 3 - 3 \cdot 4 \})$$

が得られる。任意のx(t)に対して式(付3-3・4)が成立するためには

$$\int_{t}^{\infty} d\tau_{i+1} \cdots \int_{t}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) \{ x(t-\tau_{i+1}) \cdots x(t-\tau_{n}) - x(t+T_{r}-\tau_{i+1}) \cdots x(t+T_{r}-\tau_{n}) \} = 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1) \qquad (43 - 3 \cdot 5)$$

が同時に成立しなければならない。 i=n-1 に対しては

$$\int_{t}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) \{x(t-\tau_{1})-x(t+T_{r}-\tau_{n})\} d\tau_{n}$$

$$= \int_{t}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} - \int_{t}^{t+T_{r}} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t+T_{r}-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$- \int_{t+T_{r}}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t+T_{r}-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$= \int_{t}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t-\tau_{n}) d\tau_{n} - \int_{t}^{t+T_{r}} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t+T_{r}-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$- \int_{t}^{\infty} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}+T_{r}) x(t-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$= \int_{t}^{\infty} \{h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) - h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}+T_{r})\} x(t-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$+ \int_{t}^{t+T_{r}} h_{n}(\tau_{1}, \dots, \tau_{n}) x(t+T_{r}-\tau_{n}) d\tau_{n}$$

$$= 0$$

が得られ, x(t)が任意であることおよび

$$\begin{cases} T_r \\ x(t+mT_r) d \ t=0 \end{cases} \qquad (m=0, 1, 2, \cdots)$$

が成立することから

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = h_n(\tau_1, \dots, \tau_n + T_r) \quad (\tau_n \ge t)$$

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = -\Xi \text{ (d)} \quad (t + T_r > \tau_n \ge t)$$

$$(d) \quad (d) \quad (d$$

なる関係が成立しなければならない。上式は  $t \geq T$  なるすべての t に対して成立するから式 (付3-3・6)は

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = h_n(\tau_1, \dots, T_s) \quad (\tau_n \ge T_s)$$

となる。Volterra核は対称性を示すことより、上式が成立すれば必ず

$$h_n (\tau_1, \dots, \tau_j, \dots, \tau_n) = h_n (\tau_1, \dots, T_s, \dots, \tau_n) (\tau_j \ge T_s)$$
 (付3 - 3 o 7)
$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

が成立する。式(付3-3-7) の関係が成立するとi=n-2に対して式(付3-3-5)の関係

は常に成立する。 すなわち  $t \ge T_s$  なる t に対して

となる。iの他の値に対しても同様のことがいえる。以上より式(付3-3.1)の関係が成立すれば式(付3-3.7)の関係が常に成立する。またVolterra級数の他の項に関しても式(付3-3.7)と同様な関係式を得ることができ、結局式(3.29)が成立すれば式(付3-3.7)はすべてのnに対して成立する。

#### 付録4.1 Laguerre-Hermiteの直交関数による非線形システムの記述

一般の非線形システムの入出力関係は2つの操作を施すことにより表わされる。すなわちはじめの操作は現時点までのシステムの入力をある1組の係数によって特徴づけることである。時間  $0 \le t \le \infty$  で定義された

$$\int_{0}^{\infty} l_{n}(t) l_{m}(t) dt = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

なる関係を満たす正規直交関数  $l_n(t)$  を考えると、入力の過去における状態はこの  $l_n(t)$  を用いて

$$x (t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \ell_n(\tau) \qquad (\tau \ge 0)$$

と表わすことができる。たゞし展開係数 $C_n(t)$ は

$$C_n(t) = \int_0^\infty x(t-\tau) /_n(\tau) d\tau$$

で与えられる。したがって現時点 t までのシステムへの入力の状態はこの展開係数  $C_n(t)$  (n = 1, 2, …)により特徴づけられる。第2の操作はこの係数  $C_n(t)$  (n = 1, 2, …)を現出力 y(t) に関係づけることである。これは  $C_n(t)$  に zero-memory の非線形演算を施すことにより行なえる。すなわちシステムの出力 y(t)は

 $y(t)=F\left[\begin{array}{c}c_1(t),c_2(t),\cdots\end{array}\right]$  F: zero-memory の非線形関数で与えられる。Wiener は入力を展開するための正規直交関数  $\ell_n(t)$  として

$$l_{n}(t) = \frac{\sqrt{a}}{n-1} e^{at/2} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1}e^{-at})$$

$$\begin{cases} l_{n}(t) = \frac{\sqrt{a}(s-a/2)^{n-1}}{(s+a/2)^{n}} \end{cases}$$

$$(n=1, 2, \dots), a>0 \quad (\forall 4-1.1)$$

$$a: scale factor$$

なる Laguerre関数を用い(付図 4.1 ),係数  $C_n(t)(n=1,2,\cdots)$  と出力 y(t)とを関係づける関数 F として多次元の Hermite 関数を用い,出力 y(t)を

$$y(t) = F(c_1(t), c_2(t), \dots)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \{ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \dots \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{i,j}, \dots, k \ H_i(c_1) \ H_i(c_2) \dots H_k(c_n) \}$$
 (\(\frac{1}{4} - 1.2\))

で表わした。たゞしH;(c)は

$$\begin{pmatrix} \infty \\ H_i(c) H_j(c) e^{-\frac{c^2}{2}} dc = \delta_{ij} \end{pmatrix}$$
 (\forall 4 - 1.3)

なる関係を満足するHermite の正規直交関数

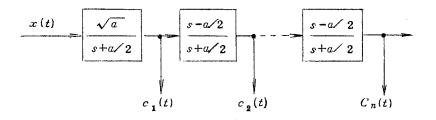
$$H_{0}(c) = (2\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$H_{1}(c) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \cdot c$$

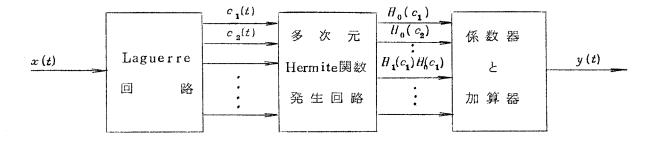
$$H_{2}(c) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} (c^{2}-1)$$

$$H_{3}(c) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{6}} (c^{3}-3c)$$

である。この Laguerre-Hermite の直交関数を用いたシステムの入出力関係の記述をプロック線図で表わすと付図 4.2 のようになる。



付図 4.1 x(t)を特徴づけるための Laguerre 回路



付図 4.2 Laguerre-Hermiteの直交関数による非線形システムの記述

非線形システムの動特性は式(付 4-1.2)の展開係数  $\beta_{i,j},\cdots,k$ ( $i,j,\cdots,k=0,1$ ,  $2,\cdots$ )により特徴づけられるが、つぎにこの展開係数をシステムの入出力データを用いて測定することを考える。非線形システムと付図 4.1 の Laguerre 回路に正規性の白色信号を投入する Laguerre 回路の出力  $c_n$  の結合確率密度関数は

$$p(c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{\left\{-\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)\right\}}$$
 (\(\frac{1}{4} - 1.4\))

で与えられる。式(付 4-1.2 )の両辺に  $H_i(c_i)H_j(c_2)\cdots H_k(c_n)$ を掛けて,  $-\infty < t < +\infty$  の全範囲にわたって平均すると

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t) H_i(c_1) H_j(c_2) \cdots H_k(c_n) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left\{ \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i',j'}, \dots, k' H_i'(c_1) H_i(c_1) H_j'(c_2) H_j(c_2) \dots \sum_{i'=0}^{\infty} \beta_{i',j'}, \dots, k' H_i'(c_n) H_k(c_n) \right\} dt \qquad (54 - 1.5)$$

なる関係が得られる(説明の便宜上  $\lim_{n\to\infty}$  は管略する)。上式の右辺の時間平均は信号のエルゴード性より集合平均で置き換えることができ、式(付4-1.5)は

$$y(t)H_{i}(c_{1})H_{j}(c_{2})\cdots H_{k}(c_{n})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \cdots \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i',j',\cdots k'} H_{i}'(c_{1})H_{i}(c_{1})H_{j}'(c_{2})H_{j}(c_{2})\cdots H_{k}'(c_{n})H_{k}(c_{n}) \}$$

$$p(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{n})dc_{1} dc_{2}\cdots dc_{n} \qquad (474-1.6)$$

となる $_{\mathbf{c}_1}, c_2, \cdots, c_n$ の結合確率密度関数は式(付4-1.4)で与えられるから、式(付4-1.6)は

$$y(t) H_{i}(c_{1}) H_{j}(c_{2}) \cdots H_{k}(c_{n})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{i'=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \beta_{i j} \cdots_{k} \int_{-\infty}^{\infty} H_{i}(c_{1}) H_{i}(c_{1}) e^{-\frac{c_{1}^{2}}{2}} dc_{1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{j}(c_{2}) H_{j}(c_{2}) e^{-\frac{c_{2}^{2}}{2}} dc_{2}$$

$$\cdots \int_{-\infty}^{\infty} H_{k}(c_{n}) H_{k}(c_{n}) e^{-\frac{c_{n}^{2}}{2}} dc_{n}$$

となり、これにHermite の直交関数に対する(付4-1.3)の関係式を適用することにより、

$$\frac{1}{y(t)H_{i}(c_{1})H_{j}(c_{2})\cdots H_{k}(c_{n})} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\beta_{ij}\cdots k \qquad (4-1.7)$$

なる関係が得られる。これよりシステムの動特性を表わすバラメータβij····kは

$$\beta_{ij}\cdots_{k}=(2\pi)^{n/2}\overline{y(t)H_{i}(c_{1})H_{j}(c_{2})\cdots H_{k}(c_{n})} \qquad (\text{$d$4-18})$$

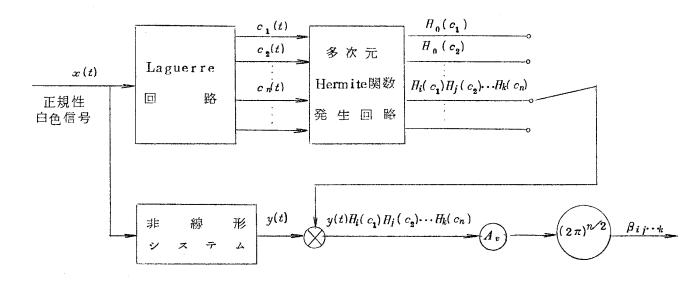
を用いて測定することができる。

システムの出力 y(t) を有限個の Laguerre 係数  $c_n$  と Hermi teの 直交関数  $H_k(c_n)$  で近似する場合には式(付 4-1. 8)により得られる展開係数は 2 乗誤差の時間平均の意味で最適のものを与えている。 すなわち

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \{ y(t) - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \dots \sum_{\ell=0}^{N} \alpha_{ij} \dots_{\ell} H_{i}(c_{1}) H_{j}(c_{2}) \dots H_{l}(c_{L}) \}^{2} dt \quad (\text{$f$4-19})$$

なる関数は $\alpha_{ij}\cdots_{i}=\beta_{ij}\cdots_{i}$ のときに最小となっている。

システムの動特性を表わすバラメータ  $\beta_{ij}\cdots_k$  を測定するための回路を付図 4.3 に示す。



付図 4.3 バラメータβij···kの測定回路

#### 付録4.2 式(4.20)の導出

$$+ K^{2} \int_{0}^{\infty} \left\{ w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) + w_{2}(\tau_{2}, \tau_{1}) \right\} \varphi_{i}(\tau_{1}; \alpha_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; \alpha_{j}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$
 
$$- K^{2} \int_{0}^{\infty} \left( w_{2}(\tau, \tau) \varphi_{i}(\sigma; \alpha_{i}) \varphi_{j}(\sigma; \alpha_{j}) d\tau d\sigma \right)$$
 
$$= K^{2} \int_{0}^{\infty} \left\{ w_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) + w_{2}(\tau_{2}, \tau_{1}) \right\} \varphi_{i}(\tau_{1}; \alpha_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; \alpha_{j}) d\tau_{1} d\tau_{2}$$
 が得られる。

#### 付録4.3 式(4.22)の導出

 $W_n$  の 4 次以上の項と 3 次のはん関数とは直交するため、これらに関する項は 0 となる。 n

$$= 0 \ \text{Kill}$$

$$= 0 \ \text{Kill}$$

$$= w_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_i \left(\sigma_1; \alpha_i\right) \varphi_j \left(\sigma_2; \alpha_j\right) \varphi_k \left(\sigma_3; \alpha_k\right) \overline{x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) x(t - \sigma_3)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

$$= 0$$

$$\geq \frac{\pi}{2} \sum_0 n = 1 \ \text{Kill}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i \left(\sigma_1; \alpha_i\right) \varphi_j \left(\sigma_2; \alpha_j\right) \varphi_k \left(\sigma_3; \alpha_k\right) \overline{x(t - \tau) x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) x(t - \sigma_3)}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i \left(\sigma_1; \alpha_i\right) \varphi_j \left(\sigma_2; \alpha_j\right) \varphi_k \left(\sigma_3; \alpha_k\right) \overline{x(t - \tau) x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) x(t - \sigma_3)}$$

$$\times d\tau \ d\sigma_1 \ d\sigma_2 \ d\sigma_3$$

$$= K^2 \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau) \varphi_i \left(\sigma_1; \alpha_i\right) \varphi_j \left(\sigma_2; \alpha_j\right) \varphi_k \left(\sigma_3; \alpha_k\right) \left\{ \delta(\tau - \sigma_1) \delta(\sigma_2 - \sigma_3) \right\}$$

$$+ \delta(\tau - \sigma_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_3) + \delta(\tau - \sigma_3) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \right\} \ d\tau \ d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

$$+ \delta (\tau - \sigma_2) \delta (\sigma_1 - \sigma_3) + \delta (\tau - \sigma_3) \delta (\sigma_1 - \sigma_2) \} d\tau d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

$$= K^2 \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \begin{cases} \omega_1(\tau) \varphi_i (\tau; \alpha_i) \varphi_j (\sigma; \alpha_j) \varphi_k (\sigma; \alpha_k) + \omega_1(\tau) \varphi_j (\tau; \alpha_j) \end{cases}$$

 $\times \varphi_i (\sigma; a_i) \varphi_k (\sigma; a_k) +_{w_i} (\tau) \varphi_k (\tau; a_k) \varphi_i (\tau; a_i) \varphi_i (\sigma; a_i) \} d\tau d\sigma$ となり、ここで直交関数に対する式(4.2)の関係を用いると上式は

( 上式 ) = 
$$K^2$$
 {  $\delta_{jk}$   $\int_0^\infty w_1(\tau)\varphi_i(\tau;a_i) d\tau + \delta_{ik}$   $\int_0^\infty w_1(\tau)\varphi_i(\tau;a_j) d\tau$  +  $\delta_{ij}$   $\int_0^\infty w_1(\tau)\varphi_k(\tau;a_k) d\tau$  }

となる。 n=2に関する項は

$$= 6K^3 \int_0^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \!\! \right)_0^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \!\! \right)_0^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \!\! \right)_0^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \infty \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_1 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_1 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \right)_i^\infty \!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \right)_i^\infty \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left( \!\!\! \begin{array}{c} \tau_2 \\ 0 \end{array} \!\!\! \left($$

#### 付録 4.4 $\overline{y(t)}_{m} y(t)$ の導出 - その 1 -

が得られる。まったく同様にして一般にnの場合には

$$W_n [w_n; x(t'), t' \leq t] W_n [Mw_n; x(t'), t' \leq t]$$

$$= n! K^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_n (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) Mw_n (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n$$

が得られる。

## 付録 4.5 $\overline{y(t)_m y(t)}$ の導出 - その 2 -

$$\int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} w_{n}(\tau_{1}, \tau_{2}, \dots, \tau_{n}) M_{w_{n}}(\tau_{1}, \tau_{2}, \tau_{n}) d\tau_{1} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \cdots \int_{0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ccccc} \sum \sum \sum \cdots \sum \sum k_{ij,\dots,l} (a_{ij},\dots_{l}) \varphi_{j}(\tau_{1}; a_{i}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j}) \dots \varphi_{l}(\tau_{n}; a_{l}) \right\}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{ccccc} \sum \sum \sum \cdots \sum \sum K_{ij} \dots_{l} (a_{ij},\dots_{l}) \varphi_{i}'(\tau_{1}; a_{i}') \varphi_{j}'(\tau_{2}; a_{j}') \dots \varphi_{l}'(\tau_{n}; a_{l}') \right\} d\tau_{1} d\tau_{2} d\tau_{2} \dots d\tau_{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum \sum \cdots \sum \sum \sum \sum K_{ij} (\tau_{1}; a_{i}') M_{ij}' \dots (a_{ij},\dots_{l}') k_{ij}' \dots (a_{ij},\dots_{l}') \int_{0}^{\infty} \varphi_{i}(\tau_{1}; a_{i}') d\tau_{1}$$

$$\times \varphi_{i}'(\tau_{1}; a_{i}') d\tau_{1}$$

$$\times \int_{0}^{\infty} \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j}) \varphi_{j}(\tau_{2}; a_{j}) d\tau_{2} \dots \int_{0}^{\infty} \varphi_{l}(\tau_{n}; a_{l}) \varphi_{l}'(\tau_{n}; a_{l}') d\tau_{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum \sum \cdots \sum \sum \sum \sum \sum \sum \sum K_{ij} \dots M_{ij} (a_{ij},\dots_{l}) k_{ij}' \dots (a_{ij},\dots_{l}') \delta_{ii}' \cdot \delta_{jj}' \dots \delta_{ll}'$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum \sum \cdots \sum K_{i} \sum \sum \sum K_{ij} \dots (a_{ij},\dots_{l})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum \sum \cdots \sum K_{i} \sum k_{ij}' \dots (a_{ij},\dots_{l})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum \sum \cdots \sum K_{i} \sum k_{ij}' \dots (a_{ij},\dots_{l})$$

#### 付録5.1 測定対象のパラメータの理論値の計算

図 5.5 のシステムの Volterra核は

$$h_1(\tau) = e^{-\tau}$$
 $h_2(\tau_1, \tau_2) = e^{-(\tau_1 + \tau_2)}$ 

である。したがって変換後の Volterra核は式(5.6)より

$$b_{0} = a^{0} \left\{ {}_{1}C_{0} \right\}_{0}^{T_{s}} h_{1}(\tau) d\tau + {}_{2}C_{0} b^{2} \int_{0}^{T_{s}} \int_{0}^{T_{s}} h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) d\tau_{1} d\tau_{2} \right\}$$

$$= b + b^{2}$$

$$b_{1}(\tau_{1}) = a \left\{ h_{1}(\tau_{1}) + {}_{2}C_{1} b \right\} \begin{pmatrix} T_{s} \\ h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) d \tau_{2} \end{pmatrix} = a \left( 1 + {}_{2}C_{1} b \right) e^{-\tau_{1}}$$

$$b_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) = a^{2} h_{2}(\tau_{1}, \tau_{2}) = a^{2} e^{-(\tau_{1} + \tau_{2})}$$

と計算される。この Volterra核を離散値表示すると

$$b_0 = b + b^2$$

$$b_{i_1} = a \left( 1 + {}_{2}C_{1} \cdot b \right) e^{-\left( i_1 - \frac{1}{2} \right)} A_{\bullet A}$$

$$b_{i_1}, i_2 = a^2 e^{-(i_1 + i_2 - 1)} A \cdot A^2$$

となる。したがってバラメータ $\beta$ は(Volterra核 b の対称性と入力 $rm_i$ が $rm_i^2=1$ なる関係を満足することから)

$$\beta_{0} = b_{0} + \sum_{i=1}^{M} b_{i}, i = b + b^{2} + a^{2} \sum_{i=1}^{M} e^{-(2i-1)} \Delta \cdot \Delta^{2}$$

$$= b + b^{2} + a^{2} e^{-\Delta} \frac{1 - e^{-2M\Delta}}{1 - e^{-2\Delta}} \cdot \Delta^{2}$$

$$\beta_{i_{1}} = a \left( 1 + {}_{2}C_{1} \cdot b \right) e^{-(i_{1} - \frac{1}{2})} \Delta \cdot \Delta$$

$$\beta_{i_{1}}, i_{2} = 2 a^{2} e^{-(i_{1} + i_{2} - 1)} \Delta \cdot \Delta^{2}$$

となるの