Title	A probabilistic construction of the heat kernel for the $øverline¥partial$-Neumann problem on a strongly pseudoconvex Siegel domain
Author(s)	上木，直昌
Citation	大阪大学，1992，博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3091080
rights	
Note	

氏　名	上　木　直　昌（うえ き なお まさ）
博士の専攻分野の名称	博　士　（理　学）
学位記番号	第　1 0 4 7 0　号
学位授与年月日	平成 4 年 12 月 15 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 2 項該当
学位論文名	A probabilistic construction of the heat kernel for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on a strongly pseudoconvex Siegel domain （強擬凸ジーゲル領域上の $\bar{\partial}$ －ノイマン問題に対する熱方程式の基本解の確率論的構成）
論文審査委員	（主査） 教 授　池田　信行 （副査） 教 授　渡辺　　毅　　教 授　井川　　満　　助教授　真鍋　昭治郎

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では強擬凸 Siegel 領域上の $\bar{\partial}$ －ノイマン問題に対する熱方程式の基本解の確率論的構成を行なった。この領域は $D=\{Z=(z,w)\in \mathbf{C}^n\times \mathbf{C}\,;\,\mathrm{Im}\,w>|z|^2\}$ に適当な計量を与えたものである。考えるべき熱方程式は形式的に次の様に書ける：

$u=\mathrm{Re}\,w$, $r=\mathrm{Im}\,w-|z|^2$ とすると $dr-idu$ を含む (p,q)-forms の空間上で

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&(\partial_t+\Box)\,F(t,Z)=0\\
&\lim_{t\downarrow 0}F(t,Z)=f(Z)\\
&(\partial_r-i\partial u)\,F(t,Z)=0\quad \text{on}\quad bD.
\end{aligned}
$$

ここで $\Box$ は $\bar{\partial}$-Laplacian である。(1) の解を確率論的な立場で考察しようとするとき，(1) の境界条件に $i\partial_u$ があるために，Feynman-Kac の公式等を直接用いることには困難がある。しかし変数 u について Fourier 変換を施すことにより確率論的考察から (1) の解が予想され，更に (1) の基本解 $h_t(Z,Z')$ の形が予想される。

例えば，$z^j=x^j+ix^{n+j}$, $(x^1,\cdots,x^{2n})=x$ とすると

$$
(2)\qquad h_t(0,(x,u,r))=\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\,\theta(t,x,\lambda)\,\phi(t,u,r,\lambda).
$$

ここで $\phi(t,u,r,\lambda)$ は具体的に書ける関数，

$$
\theta(t,x,\lambda)=E\left[\exp(-i\lambda S_0(t))\,M(t)\,\delta_x(x(t)/\sqrt{2})\right],
$$

$x(t)$ は 2n-次元 Brown 運動，$S_0(t)$ は Lévy の確率面積と呼ばれる確率過程，$M(t)$ はある確率積分方程式の解である。$\theta(t,x,\lambda)$ は一般 Wiener 汎関数の理論によって意味が与えられる。ここで Fourier 変換が有効なのは Heisenberg 群上の B.Gaveau の研究と同じ状況が起こるからである。(2) の λ についての積分に意味を与えるために，ここではまず

$$
(3)\qquad \overline{\lim}_{\lambda\to\pm\infty}|\lambda|^{-1}\log\|\theta(t,x,\lambda)\|\leqq -n
$$

を示した。これは $\theta(t,x,\lambda)$ が振動積分であるために簡単なことではない。しかし $\theta(t,x,\lambda)$ が別の熱方程式の基本解になっていることに注目すればその半群性を用いて証明することが出来る。更に（3）を拡張することにより，確率論的に予想された基本解が良い regularity をもち，（1）の基本解の条件を満たすことが確かめられる。

なお，ここで構成した基本解は $p=0$ の時は N.Stanton が偏微分方程式論的方法によって既に得ているものである。$p=0$ の時は $M(t)$ は定数となり Lévyの公式により $\theta(t,x,\lambda)$ は通常の微積分の枠組で具体的に書ける。

しかし $p\neq 0$ の時は $\theta(t,x,\lambda)$ は通常の微積分の枠組では明確に書けず，（3）の評価はこの時に意味がある。すなわち，本論文では $p\neq 0$ の時も Wiener 空間上の振動積分の漸近挙動の研究の一つの応用として基本解の一般 Wiener 汎関数の理論の枠組での明確な表示を得たことになる。

論文審査の結果の要旨

上木君は強擬凸 Siegel 領域上の $\overline{\partial}$ －ノイマン問題に対する熱方程式の基本解を Malliavin 解析の枠組を用いて構成している。この構成のためにまず Lévy の確率面積に関連した Wiener 空間上の確率振動積分の漸近評価を求め，つぎにその結果を用いて基本解の具体的表示を与えている。これらの成果は境界条件が複素数値係数をもつ2階偏微分方程式の確率論的方法による研究に新しい道を開拓したもので，博士（理学）の学位論文として充分価値あるものと認める。