



Title	非線形制御系の周波数領域における安定条件とその応用に関する研究
Author(s)	正司, 和彦
Citation	大阪大学, 1972, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1571
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

非線形制御系の周波数領域における 安定条件とその応用に関する研究

正 司 和 彦

論文目録

大阪大学

報告番号・甲第/444号

正 司 和 彦

主論文 非線形制御系の周波数領域における安定条件
とその応用に関する研究

(主論文のうち印刷公表したもの)

1. Popov の安定条件の適用法について 計測と制御 5巻10号
- Popov軌跡の一般的性質 - 昭和41年10月10日
2. Stability Analysis of Nonlinear Control Systems by Popov Criterion 大阪大学工学報告 18巻 810号
(Popovの条件による非線形制御系の安定解析) 昭和43年3月15日
3. 非線形制御系の大局的漸近安定について 制御工学 14巻6号
昭和45年6月30日
4. 有界入力に対する非線形制御系の解の 計測自動制御学会論
有界性 文集 7巻 3号
昭和46年6月30日

(主論文のうち未公表のもの)

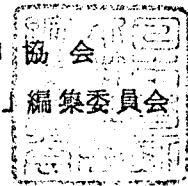
1. 時変非線形要素を有する制御系の大局的 原稿 32枚
漸近安定について システムと制御 16巻2号
日昭和47年2月29日
掲載の予定
2. ヒステリシスを有する制御系の大局的漸近 原稿13枚
安定について システムと制御
投稿中
3. Verification of Aizerman and/or 原稿 5枚
Kalman Conjecture IEEE Trans. on
(Aizerman および Kalman の推測の確認) Automatic Control
投稿中

昭和46年11月5日

正司 和彦 殿

日本自動制御協会

「システムと制御」編集委員会



前略 さきに御投稿いただきました貴原稿

~~時変非線形要素を含む制御系の大域的漸近安定性について~~

は校閲の結果、会誌「システムと制御」Vol. 16 No. 2に掲載させていただきますことになりましたのでお知らせ致します。

なお、著者校正用ゲラ刷は12月23日頃お送り致しますので、よろしくお願い致します。

敬 具

序 文

本論文は著者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電気工学専攻）在学中に行なった非線形制御系の安定問題に関する研究をまとめたものである。

制御工学において、広範な非線形制御系に適用できる統一的な安定解析法を確立し、より必要十分に近い安定条件を求めることは、重要な研究課題である。本論文では、非線形要素と線形要素とによって構成されたフィードバック制御系の安定性を Lyapunov の安定解析法によって考察し、拡張された安定条件を周波数領域で示し、さらにこの安定条件の応用について述べる。

本論文は8章からなり、第1章は緒論で、本研究の意義について述べる。第2章では、本論文で取り扱う非線形制御系の記述と平衡点についての検討を行なう。さらに安定解析を行なう場合の非線形要素の取り扱い方について考察し、拡張した Lyapunov 関数を構成する。第3章では、非線形要素が時間に依存しない場合の大局的漸近安定条件を定理にまとめ、その証明を行なう。また例題でこの安定条件がより必要十分条件に近いものであることを示す。第4章では、非線形要素が時間に依存する、いわゆる時変非線形要素の場合の大局的漸近安定条件を定理に示す。第5章では、制御系に入力が加わった場合、その出力が有界となるための条件、すなわち有界入力有界出力安定条件を考察する。第6章では、周波数領域で表わされた安定条件のなかで、とくに Popov の安定条件は、工学上応用範囲が広いので、その適用方法について論じる。ここでは安定判別だけでなく、安定度の評価法についても述べる。第7章では、非線形制御系の大局的漸近安定の判別を線形化した系において、線形理論で行なえばよいという Aizerman の推測について考察する。すなわち周波数領域における安定条件を用いた Aizerman の推測の確認方法を提案する。第8章は、本研究のおもな結果をまとめたものである。

目 次

第 1 章 緒 論	1
第 2 章 非線形制御系の安定解析	3
2.1 序 言	3
2.2 非線形制御系	3
2.2.1 系の記述	3
2.2.2 平 衡 点	8
2.2.3 安定の定義および定理	10
2.3 非線形要素の取り扱い方	14
2.4 結 言	20
第 3 章 大局的漸近安定条件	21
3.1 序 言	21
3.2 安定定理	21
3.3 適 用 例	32
3.4 定理の証明	38
3.4.1 補助定理	38
3.4.2 定理 3.1 の証明	38
3.4.3 定理 3.2 の証明	44
3.4.4 定理 3.3 の証明	48
3.5 結 言	49
第 4 章 時変非線形要素を有する制御系の大局的漸近安定条件	50
4.1 序 言	50
4.2 安定定理	50
4.3 $n(t)$ の計算	54
4.4 適 用 例	56
4.5 定理の証明	58
4.6 結 言	59
第 5 章 有界入力有界出力安定の解析	60
5.1 序 言	60

5.2	有界性の定理	60
5.3	定理の証明	65
5.3.1	定理 5.1 の証明	65
5.3.2	定理 5.2 の証明	69
5.3.3	定理 5.3 の証明	70
5.4	結 言	71
第 6 章	Popov の安定条件の適用法	72
6.1	序 言	72
6.2	Popov の安定条件	72
6.3	Popov 軌跡の一般的性質	76
6.4	Popov 軌跡の描き方	84
6.5	安定度の評価法	88
6.5.1	飽和要素を含む制御系の過渡応答線図	89
6.5.2	安定度の評価および設計	92
6.6	結 言	94
第 7 章	Aizerman の問題への応用	95
7.1	序 言	95
7.2	Aizerman の問題	95
7.3	Aizerman および Kalman の推測	97
7.3.1	確 認 法	97
7.3.2	適 用 例	103
7.4	厳密な意味での Aizerman および Kalman の推測の確認	108
7.5	結 言	110
第 8 章	結 論	111
謝 辞		113
参 考 文 献		114

記 号 表

$\underline{A}, \underline{B}$: 行 列

$\underline{a}, \underline{b}$: ベクトル

$\text{col}\{a, b\}$: a, b を要素とする縦ベクトル

$\underline{A}', \underline{a}'$: 転置行列, 転置ベクトル

$\det \underline{A}$: 行列 $\underline{A}$ の行列式

$\text{rank } \underline{A}$: 行列 $\underline{A}$ の位数

$|\underline{x}|$: ベクトル $\underline{x}$ の Euclid ノルム

$\mathcal{L}f(t)$: 関数 $f(t)$ の Laplace 変換

$\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)$: 初期時刻 t_0 , 初期状態 $\underline{x}_0$ なる常微分方程式の解

$\overline{\lim}, \underline{\lim}$: 上極限, 下極限

$\sup, \inf$: 上限, 下限

$(a, b), [a, b]$: 开区間 $a < t < b$, 閉区間 $a \leq t \leq b$

$(a, b], [a, b)$: 区間 $a < t \leq b$, 区間 $a \leq t < b$

$\text{Re } G, \text{Im } G$: G の実部, G の虚部

$a \equiv b$: a と b は恒等的に等しい

$a \triangleq b$: a と b は定義によって等しい

第 1 章 緒 論

安定性は制御系に対して要求される最も基本的な性質である。制御工学において、安定性の研究は古くから行なわれており、すでに線形制御系に対する安定解析法は体系化されている。非線形制御系の安定性は、線形系の場合と本質的に異なり、入力のおよび初期状態に依存し複雑多様であるので、一般的な安定解析法はない。非線形制御系において、非線形性が弱く近似的に線形とみなせる場合は、線形理論による安定解析法が適用できる。しかし制御系には、本質的な非線形性が内在し、それを無視できない場合や、装置の単純化や制御特性の改善のために積極的に非線形性を導入する場合が多く、非線形制御系の安定解析法の確立が必要である。

Lyapunovの安定論は微分方程式の解の安定性を、平衡点と解軌道とに注目して、状態空間で検討するものである。とくに Lyapunov の第2の方法（以下 Lyapunovの方法と略記する）は、Lyapunov関数を構成することによって、微分方程式の解の安定性を直接解析することができるので、非線形制御系の安定解析に対して有効な方法である。^{1,2}

Lyapunovの方法を非線形制御系の安定解析に初めて応用したのは Luré と Postnikov である。^{3,4} この研究は非線形要素と線形要素とによって構成される制御系に対する大局的漸近安定性を論じたもので、Luréの問題と呼ばれている。この研究では、Lyapunov関数としては制御系の状態変数の2次形式と、非線形関数の積分との和によって構成されるもの（Luré形のLyapunov関数）を用い、系のパラメータ空間で大局的漸近安定条件を示した。一ガルーマニアの数学者 Popov は Luréの問題を Lyapunovの方法とは本質的に異なった方法、すなわち制御系を積分方程式で表わし、Fourier変換と関数解析の手法を用いて論じ、安定条件を周波数領域で導いた。^{4,5} その後 Popovの安定条件は、線形部の伝達関数の極がすべてS平面の左半平面に存在する場合、Luré形のLyapunov関数が存在するための必要十分条件となることが証明され、^{4,6-10}これによって Popovの方法だけでなく Lyapunovの方法によっても周波数領域で表わされる安定条件を求めることが可能になった。

Popovの安定条件は、周波数領域で表わされ、簡単に図的安定判別が行なえるので設計にも適用し易いが、制御系の非線形要素が1価連続な関数の場合に適用が制限され、さらに十分条件を与えるにすぎない。制御工学の観点からすれば、

安定条件は適用し易いこと、より必要十分に近い安定条件であること、および広範な制御系に適用できる統一的な手法であることが要求される。そこで非線形要素が不連続関数、2価関数および時変非線形の場合に対して、多くの研究が行なわれ、Popov の安定条件あるいはそれに類似した条件がこれらの系にも適用されることが明らかになった。¹¹ また非線形要素が1価連続で単調増加関数の場合、Popov の安定条件より必要十分に近い条件が発表されている。¹² しかしより必要十分に近い安定条件を求めるためには、非線形要素の特性を十分考慮して安定解析しなければならない。非線形要素が不連続関数、2価関数あるいは時変非線形の場合は、安定解析が困難となり、特定の非線形要素に対して研究が行なわれているにすぎない。一方制御系の線形部の伝達関数の極が S 平面の左半平面だけでなく虚軸上にも存在する場合（臨界系）は、制御系を等価変換して取り扱わねばならないという特別の考慮が必要であり、一般的な臨界系に適用でき、かつ Popov の安定条件より必要十分に近い安定条件は発表されていない。

本論文では、上述の Lur'e の問題に対する研究の現状を打開するために、Lyapunov の方法による安定解析法に検討を加え、任意の非線形要素の特性を考慮することができる新しい Lur'e 形の Lyapunov 関数を提案する。この Lyapunov 関数を用いて、広範な非線形制御系に対して統一的に適用でき、かつ従来発表されている安定条件に比べ、より必要十分に近い安定条件を周波数領域で示し、さらにこの安定条件を非線形制御系の安定判別および設計に適用する方法を考察する。

第 2 章 非線形制御系の安定解析

2.1 序 言

非線形制御系の安定性は、非線形特性の多様性により複雑であり、線形制御系のように一意的には定まらない。したがって本章では、まず本論文で取り扱う非線形制御系を記述し、その平衡点について検討する。さらに工学上重要な安定の概念である大局的漸近安定および解の有界性に関する定義と定理を示す。この定理は Lyapunov の方法によって系の安定性を解析するものであるが、Lyapunov 関数の構成法については述べていない。ここでは、この定理を用いてより必要十分に近い安定条件を求めるために、非線形要素の特性を考慮することができる拡張された Lur'e 形の Lyapunov 関数を提案する。¹²⁾

2.2 非線形制御系

2.2.1 系の記述

本論文ではつぎに示す非線形制御系を考える。

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{C}'\underline{x} + u(t) \quad (\text{S.1})$$

ここで $\underline{x} = \text{col}\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ は系の状態を表わす n 次のベクトルで、 $x_i(t)$ 、($i=1, 2, \dots, n$) は状態変数と呼ばれる。 $\underline{A}$ は $n \times n$ の行列、 $\underline{a}$ および $\underline{C}$ は n 次の定数ベクトルである。 $\psi(\varepsilon, t)$ は非線形部の特性を表わす関数で、 $u(t)$ は外部入力である。

なお特殊な場合として $\psi(\varepsilon, t)$ が時間 t に依存しない場合、 $u(t) \equiv 0$ の場合がある。これらを

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{C}'\underline{x} + u(t) \quad (\text{S.2})$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{C}'\underline{x} \quad (\text{S.3})$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{C}'\underline{x} \quad (\text{S.4})$$

と表わす。以下ではこれらの制御系をそれぞれ、制御系 (S.1), (S.2), (S.3) (S.4) と呼ぶことにする。なお、制御系 (S.3) および (S.4) は外力 $u(t)$ が作用していないので、自由系 (free system) と呼ばれている。

ここで制御系 (S.1) ~ (S.4) に対してつぎのような仮定をおく。

[仮定Ⅰ] 制御系 (S.1) ~ (S.4) は Filippov の意味での解を有する。^{13~15}

[仮定Ⅱ] 対 (A, a) は完全可制御かつ、対 (A, c') は完全可観測である。⁺

[仮定Ⅲ] 行列 A の固有値は、複素平面の左半平面と虚軸上に存在する。すべての固有値が左半平面に存在する場合を A が安定な場合 と呼び、虚軸上と左半平面に存在する場合を 臨界な場合 と呼ぶ。

[仮定Ⅳ]

(i) $\varphi(\varepsilon)$ は第 1 種不連続関数⁺⁺ (以下第 1 種不連続を不連続と略記する) である。かつつぎの条件を満足する。

(a) A が安定な場合: $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で連続ならば

$$0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \leq K \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$\varepsilon=0$ で不連続ならば

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0) \quad | \varphi(\varepsilon) | < \infty \\ \varphi(-0) \leq \varphi(0) \leq \varphi(+0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

(b) A が臨界な場合, $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で連続ならば

$$0 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \leq K \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$\varepsilon=0$ で不連続ならば

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0), \quad | \varphi(\varepsilon) | < \infty \\ \varphi(-0) \leq \varphi(0) \leq \varphi(+0) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

ただし A の固有値が 複素平面の原点に 1 個または 2 個存在している場合, (2.3) 式は次式に置き変える。

+ 対 (A, a) が完全可制御であるとは, $\det[a, Aa, \dots, A^{n-1}a] \neq 0$ を意味する。
また対 (A, c') が完全可観測とは, 対 (A', c) が完全可制御であることと同値である。

++ 関数 $\varphi(\varepsilon)$ が点 ε_0 において, 右側からの極限值 $\varphi(\varepsilon_0+0)$ と, 左側からの極限值 $\varphi(\varepsilon_0-0)$ が存在するとき, $\varphi(\varepsilon)$ は ε_0 で第 1 種不連続であるという。

$$\left. \begin{aligned} 0 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \leq K & \quad (\varepsilon < \xi_1, \quad \xi_2 < \varepsilon) \\ & \quad \xi_1 \leq 0, \quad \xi_2 \geq 0 \\ \varphi(\varepsilon) = 0 & \quad (\xi_1 \leq \varepsilon \leq \xi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

(ii) $\varphi(\varepsilon, t)$ は、時間 t に関しては 1 価連続、 ε に関しては 1 価で、一般に不連続関数である。かつ、つぎの条件を満足する。

(a) A が安定な場合 : $\varphi(\varepsilon, t)$ が $\varepsilon = 0$ で連続ならば、

$$0 \leq \varphi(\varepsilon, t)/\varepsilon \leq K \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

$\varepsilon = 0$ で不連続ならば

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \varphi(\varepsilon, t)/\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0), \quad |\varphi(\varepsilon, t)| < \infty \\ \varphi(-0, t) \leq \varphi(0, t) \leq \varphi(+0, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

(b) A が臨界な場合 : $\varphi(\varepsilon, t)$ が $\varepsilon = 0$ で連続ならば

$$0 < \varphi(\varepsilon, t)/\varepsilon \leq K \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$\varepsilon = 0$ で不連続ならば

$$\left. \begin{aligned} 0 < \varphi(\varepsilon, t)/\varepsilon \quad (\varepsilon \neq 0), \quad |\varphi(\varepsilon, t)| < \infty \\ \varphi(-0, t) \leq \varphi(0, t) \leq \varphi(+0, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

ただし A の固有値が複素平面の原点に 1 個または 2 個存在する場合、(2.8) 式は次式に置き換える。

$$\left. \begin{aligned} 0 < \varphi(\varepsilon, t)/\varepsilon \leq K \quad (\varepsilon < \xi_1 \leq 0 \leq \xi_2 < \varepsilon) \\ \varphi(\varepsilon, t) = 0 \quad (\xi_1 \leq \varepsilon \leq \xi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

なお、 $\varphi(\varepsilon, t)$ が ε と t の関数に分離できる場合は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\varepsilon, t) &= h(t) \varphi(\varepsilon) \\ 0 < \inf h(t) \leq h(t) \leq \sup h(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11)$$

と表わす。なおこの場合 $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数である。

制御系 (S.1) をブロック線図に表わすと図 2.1 のようになる。この図において、 $G(s)$ は制御系の線形部の伝達関数で

$$G(s) = \underline{C}'(A - sI)^{-1}\underline{a} \quad (2.12)$$

と表わされる。ただし I は単位行列である。

仮定 IV において、(2.1) 式を満足する非線形要素 $\psi(\epsilon)$ は図 2.2 に示すように、入力軸と原点を通り傾き K の直線に囲まれる領域に存在する。したがって (2.1) 式を満足する $\psi(\epsilon)$ を、 $\psi(\epsilon)$ がセクタ $[0, K]$ に含まれる と呼ぶことにする。なお (2.3) 式のように下限を含まない場合は、セクタ $(0, K]$ と表われ、上限、下限を含まない場合は $(0, K)$ と表わす。

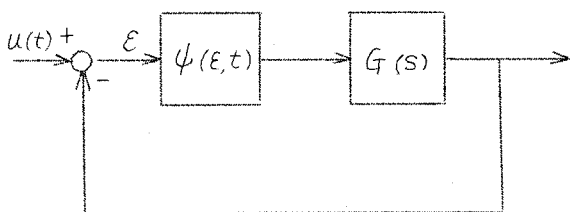


図 2.1 制御系 (S.1)

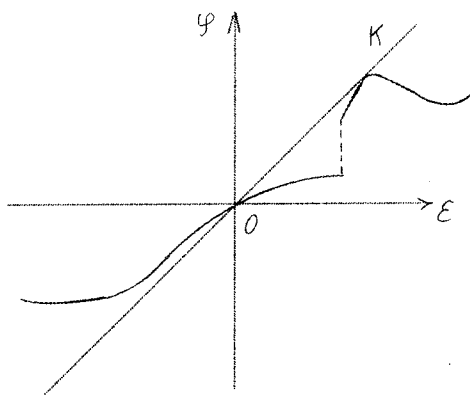


図 2.2 非線形要素

仮定 IV を満足する非線形要素の特殊な場合として $\psi(\epsilon, t) = H\epsilon$ あるいは $\psi(\epsilon) = H\epsilon$ がある。これは図 2.3 に示すように線形系であり $u(t) \equiv 0$ の場合その微分方程式は

$$\dot{x} = (\underline{A} + H\underline{a}\underline{c}')x$$

と表わされる。制御系 (S.3) または (S.4) を、このように線形化したものを 制御系 L と呼ぶことにする。制御系 L の安定判別は、 $\underline{A} + H\underline{a}\underline{c}'$ の固有値を調べればよいが、図 2.3 からわかるように、特性方程式

$$1 + HG(s) = 0 \quad \dots\dots(2.13)$$

に対し Routh-Hurwitz の方法を適用するか、 $G(j\omega)$ のベクトル軌跡を描き Nyquist の方

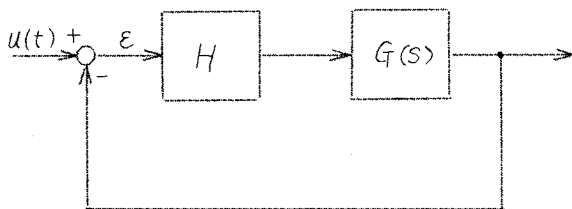


図 2.3 線形化した制御系 L

法を適用すればよい。Routh-Hurwitz の方法を適用すれば

$$H_0 < H < H_1, \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

を満足するすべての H に対して制御系 L が漸近安定となる H の区間 (H_0, H_1) が求まる。これを Hurwitz セクタ と呼ぶことにする。

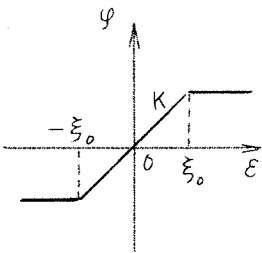
なお実際の制御系においてよく現われる、非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ の例を図 2.4 に示す。

制御系 (S.1) において A が臨界な場合は、適当な正則行列 S を選んで、 $\underline{x} = \underline{S} \tilde{x}$ なる変換を行なうと、

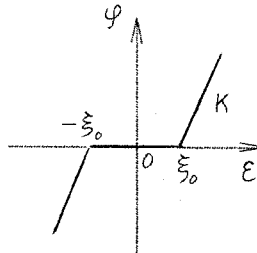
$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{a} \varphi(\varepsilon, t) \quad , \quad \varepsilon = \tilde{C}' \tilde{x} + u(t) \quad (C.1)$$

$$\tilde{A} = S^{-1} A S = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

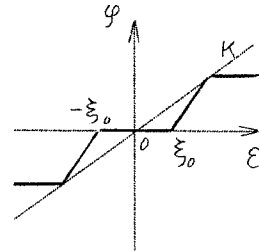
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a} = S^{-1} a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = S^{-1} C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$



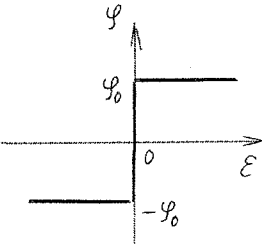
(a) 飽和



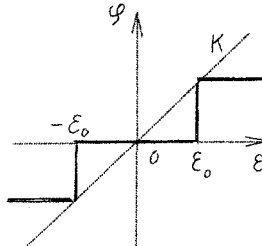
(b) 不感帯



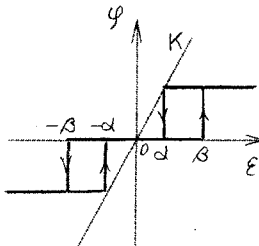
(c) 不感帯を有する飽和



(d) 理想リレー



(e) 不感帯を有するリレー



(f) 不感帯とヒステリシスを有するリレー

図 2.4 非線形要素

となる。ただし A_1 は $n_1 \times n_1$ の行列で、その固有値はすべて虚軸上に存在し、 A_2 は $n_2 \times n_2$ の行列でその固有値はすべて左半平面に存在する。また $\underline{x}_1$, $\underline{a}_1$, $\underline{c}_1$ は n_1 次, $\underline{x}_2$, $\underline{a}_2$, $\underline{c}_2$ は n_2 次のベクトルである。すなわち制御系 (C.1) は A の固有値で、虚軸上に存在するものと、左半平面に存在するものとをそれぞれ A_1 と A_2 に分離したもので、臨界な制御系の安定解析には、この式を用いるのが便利である。また制御系 (S.2) (S.3) および (S.4) に対して同様の変換を行なったものを

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{a} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \tilde{c}' \tilde{x} + u(t) \quad (C.2)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{a} \psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \tilde{c}' \tilde{x} \quad (C.3)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{a} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \tilde{c}' \tilde{x} \quad (C.4)$$

と表わす。

なお臨界な場合 (2.12) 式の伝達関数は、つぎのように表わされる。

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (2.15)$$

$$G_i(s) = \underline{c}_i' (\underline{A}_i - s \underline{I})^{-1} \underline{a}_i \quad (i=1, 2)$$

ここで $G_1(s)$ は、 $G(s)$ を部分分数展開したときの虚軸上に極を有するものの和、また $G_2(s)$ は、左半平面に極を有するものの和である。

2.2.2 平衡点

制御系 (S.3) または (C.3) において、すべての時間 $t \geq 0$ において $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$, または $\dot{\tilde{x}} = 0$ となる解が存在する。これは平衡点 (または平衡状態と呼ばれるもので、 $\underline{x}_e$ または $\tilde{x}_e$ で表わす。自由系の安定問題は系の解軌道が時間がたてばこの平衡点に近づくかどうか、すなわち平衡点の安定性について検討を行なう。したがって、ここでは制御系 (S.3) または (C.3) の平衡点について検討する。なお制御系 (S.4) または (C.4) に関しては、 $\psi(\varepsilon, t)$ を $\varphi(\varepsilon)$ に置き換えたものを考えればよいので省略する。

まず A が安定な場合を考える。 $\det A \neq 0$ であるから A^{-1} が存在する。よって制御系 (S.3) において $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$ とすると、第1式より

$$\underline{x} = -A^{-1} \underline{a} \varphi(\varepsilon, t) \quad (2.16)$$

となり、さらに第2式を考慮すると、

$$E + G(0)\psi(E, t) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

となる。ただし (2.12) 式より $G(0) = -C'A^{-1}a$ である。よって平衡点は (2.17) 式を満足する $\psi(E, t)$ によって、(2.16) 式で与えられる。

H_1 を Hurwitz セクタ の上限とすると、非線形要素のセクタの上限 K が、 $0 \leq K < H_1$ を満足しているならば、 $\psi(E, t)$ が $E=0$ で連続のとき、あるいは $E=0$ で不連続かつ $G(0) \neq 0$ のとき、平衡点は $\underline{x}_e = \underline{0}$ となる。

$\psi(E, t)$ が $E=0$ で不連続かつ $G(0)=0$ のときは

$$\underline{x}_e = -\underline{A}^{-1}\underline{a}\xi_0, \quad \sup_t \psi(+0, t) \leq \xi_0 \leq \inf_t \psi(+0, t)$$

となる。

つぎに、 $\underline{A}$ が臨界でかつ $\det \underline{A} \neq 0$ すなわち $\det \tilde{\underline{A}} \neq 0$ の場合を考える。制御系 (C.3) の平衡点 $\tilde{\underline{x}}_e$ は、 $\psi(E, t)$ が $E=0$ で連続のとき、または $E=0$ で不連続かつ $G(0) \neq 0$ のとき $\tilde{\underline{x}}_e = \underline{0}$ となる。 $\psi(E, t)$ が $E=0$ で不連続かつ $G(0)=0$ ならば $\tilde{\underline{x}}_e = -\tilde{\underline{A}}^{-1}\underline{a}\xi_0$ となる。

最後に $\det \underline{A} = 0$ すなわち伝達関数 $G(s)$ の極が s 平面の原点に存在する場合を考える。ここでは1重極、または2重極が原点に存在する場合に限定する。 $\det \underline{A}_1 = 0$, $\det \underline{A}_2 \neq 0$ であるから、制御系 (C.3) より、

$$\underline{A}_1 \underline{x}_1 + \underline{a}_1 \psi(E, t) = 0$$

$$\underline{x}_2 = -\underline{A}_2^{-1} \underline{a}_2 \psi(E, t)$$

$$E = \underline{c}_1 \underline{x}_1 + \underline{c}_2 \underline{x}_2$$

となる。よって $G(s)$ が1重極を原点に持つ場合 $\underline{A}_1 = \underline{0}$ である。仮定 II より $\underline{a}_1 \neq 0$, $\underline{c}_1 \neq 0$ であるから、平衡点 $\tilde{\underline{x}}_e = \text{col}\{\underline{x}_{1e}, \underline{x}_{2e}\}$ は、 $\psi(E, t)$ が $E=0$ で連続ならば (2.10) 式より

$$\underline{x}_{1e} = \xi, \quad \underline{x}_{2e} = \underline{0}, \quad \xi_1 \leq \underline{c}_1 \xi \leq \xi_2$$

となり、 $E=0$ で不連続ならば $\tilde{\underline{x}}_e = \underline{0}$ となる。 $G(s)$ が2重極を原点に持つ場合は、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。したがって $A_1 = \text{Col}\{a_{11}, a_{12}\}$, $C_1 = \text{Col}\{c_{11}, c_{12}\}$ とすると、仮定Ⅱより $a_{12} \neq 0$, $c_{11} \neq 0$ であるから、平衡点 $\underline{x}_e = \text{Col}\{\underline{x}_{1e}, \underline{x}_{2e}\}$ は $\psi(\varepsilon, t)$ が $\varepsilon=0$ で連続ならば

$$\underline{x}_{1e} = \text{Col}\{\xi, 0\}, \quad \underline{x}_{2e} = 0, \quad \xi_1 \leq c_{11}\xi \leq \xi_2$$

となり、 $\varepsilon=0$ で不連続ならば $\underline{x}_e = 0$ となる。

2.2.3 安定の定義および定理

制御系 (S.3) または (S.4) において、ある1つの初期値に対する解軌道 $\underline{x}^0(t)$ を考える。このとき $\underline{x}^0(t)$ の近傍から出発するもう1つの解軌道 $\underline{x}(t)$ が、時間が経過するにつれて、 $\underline{x}^0(t)$ の近傍に留まっているか、あるいは $\underline{x}^0(t)$ から離れていくかという問題は、数学的に求められた解が工学的な意味を持つかどうかという点で重要である。すなわち、初期条件のわずかな変化が、時間が十分経過しても解に対してあまり重大な影響を与えないことが必要である。このようにして Lyapunov の意味における安定の概念に達するが、これは一般性を失うことなく制御系 (S.3) または (S.4) の平衡点 $\underline{x}_e$ の安定性に帰着させることができる。^{15~17}

[定義 2.1] 安定 (Lyapunov の意味の安定) : 制御系 (S.3) または (S.4) の平衡点 $\underline{x}_e$ はつぎの条件を満足するとき安定という。すなわち、すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ が存在して、 $|\underline{x}_0 - \underline{x}_e| \leq \delta$ ならば $|\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0) - \underline{x}_e| \leq \varepsilon$ が $t \geq t_0$ に対して成立する。ここで $\underline{x}_0 \triangleq \underline{x}(t_0)$, $\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)$ は初期値 $\underline{x}_0$ に対する制御系 (S.3) または (S.4) の解である。

この Lyapunov の意味の安定は平衡点からの小さな擾乱に対して、その後の制御系の運動が平衡点近傍に留まっていることを保証するものであるが、制御工学の立場から見れば、さらに擾乱が治まった後において、その運動が時間と共に平衡点に漸近することが望ましい。このようにしてつぎの漸近安定の定義が必要となる。

[定義 2.2] 漸近安定 : 制御系 (S.3) または (S.4) の平衡点 $\underline{x}_e$ はつぎの条件を満足するとき漸近安定という。

(a) Lyapunov の意味で安定である。

(b) $\delta(t_0) > 0$ が存在して $|\underline{x}_0 - \underline{x}_e| \leq \delta$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0) - \underline{x}_e| = 0$$

この漸近安定の概念は平衡点の近傍における局所的なものであって、漸近安定の範囲が平衡点のどの位に及ぶかということに関しては言及していない。したがって、初期値の大きさに関係がない安定性、すなわち大域的な漸近安定の概念が必要となってくる。

〔定義 2.3〕 大域的漸近安定：制御系 (S.3) または (S.4) の平衡点 $\underline{x}_e$ はつぎの条件を満足するとき大域的漸近安定という。

(a) Lyapunov の意味で安定である。

(b) すべての解 $\underline{x}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で $\underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}_e$ となる。

以上は制御系に入力がない場合の安定の定義であるが、制御系に有界な入力が入作用したときに、その出力も有界であるかどうかという安定性の概念も重要である。これに関してはつぎのような、制御系 (S.1) または (S.2) の解 $\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)$ に対する安定の定義がある。¹⁵⁾

〔定義 2.4〕 解の有界性：制御系 (S.1) または (S.2) は、つぎの条件を満足するとき解は有界であるという。すなわち、すべての初期値 $\underline{x}_0 \triangleq \underline{x}(t_0)$ およびすべての $t \geq t_0$ に対して $\sup |u(t)| = M = \text{const.} < \infty$ を満足する外力 $u(t)$ に対して、 $|\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)| \leq m$ となるような有界な定数 $m(\underline{x}_0, M)$ が存在する。

つぎに工学上重要である定義 2.3 と定義 2.4 に対する定理を示す。

〔定理 2.1〕 (Yakubovich)¹⁸⁾ つぎの方程式を考える。

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

ここで $\underline{f}(\underline{x})$ は可測で有界であるとする。また、 $\underline{x} \equiv \underline{0}$ を (2.18) 式の 1 つの解とする。

- (i) 解 $\underline{x} \equiv \underline{0}$ は Lyapunov の意味で安定である。かつ以下に示す条件を満足する連続な関数 $V(\underline{x})$ が存在する。
- (ii) 任意の解 $\underline{x}(t)$ に対して $V[\underline{x}(t)]$ は非増加である。
- (iii) $V[\underline{x}(t)] \equiv \text{const.}$ のとき $t \rightarrow \infty$ で $\underline{x}(t) \rightarrow \underline{0}$ である。
- (iv) $|\underline{x}(t)| \rightarrow \infty$ となる、任意の解 $\underline{x}(t)$ に対して $\overline{\lim} V[\underline{x}(t)] = \infty$

である。

このとき解 $\underline{x}(t) \equiv 0$ は大局的漸近安定である。なお条件 (i) および (iv) はそれぞれ (i)', (iv)' に置き換えてもよい。

$$(i)' \quad V(\underline{x}) > 0 \quad (\underline{x} \neq 0), \quad V(0) = 0$$

(iv)' (2.14) 式は $t \rightarrow \infty$ で $|\underline{x}(t)| \rightarrow \infty$ となる解を持たない、ただし $(0, \infty)$ は解 $\underline{x}(t)$ が存在する区間である。

[定理 2.2]¹⁹ つぎの微分方程式を考える。

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t)$$

ここで $f(\underline{x}, t)$ は可測で有界であるとする。いま $|\underline{x}(t)| \geq R, R \geq 0$ なる $\underline{x}(t)$ に対してつぎの条件 I, II を満足する連続な関数 $V(\underline{x})$ が存在するものとする。

$$\text{I.} \quad \xi_1(|\underline{x}|) \leq V(\underline{x}) \leq \xi_2(|\underline{x}|)$$

ただし $\xi_1(y)$ は $y \geq 0$ に対して非負の連続単調非減少関数で、かつ

$\lim_{y \rightarrow \infty} \xi_1(y) = \infty$ である。また $\xi_2(y)$ は $y \geq 0$ に対して正の連続単調非減少関数である。

II すべての解 $\underline{x}(t)$ に対して $V(\underline{x}(t))$ は非増加である。

このとき $|\underline{x}_0| < R$ ならば

$$|\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)| < \alpha(R)$$

となる。ただし

$$R \geq R_1, \quad \xi_1\{\alpha(R)\} > \xi_2(R), \quad \underline{x}_0 \triangleq \underline{x}(t_0)$$

[定理 2.2 の証明] $|\underline{x}_0| \leq R$ となる R を考える。いま $\xi_1(\alpha_0) > \xi_2(R)$ となるように $\alpha_0 \triangleq \alpha(R)$ を選び、ある時刻 $t = t^* (> t_0)$ において $|\underline{x}(t^*, \underline{x}_0, t_0)| = \alpha$ と仮定する。このとき $t_0 \leq t_1 < t < t_2 \leq t^*$ なるすべての t に対して

$$|\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)| = R, \quad |\underline{x}(t_2, \underline{x}_0, t_0)| = \alpha,$$

$$R < |\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)| < \alpha_0$$

を満足する t_1, t_2 が存在する。条件 II より、

$$V\{\underline{x}(t_1)\} \leq \xi_2 \{|\underline{x}(t_1, \underline{x}_0, t_0)|\} = \xi_2(R)$$

$$V\{\underline{x}(t_2)\} \geq \xi_1 \{|\underline{x}(t_2, \underline{x}_0, t_0)|\} = \xi_1(\alpha_0)$$

となる。また条件IIより $V(x)$ は非増加であるから、

$$V\{\underline{x}(t_2, \underline{x}, t_0)\} \leq V\{\underline{x}(t_1, \underline{x}_0, t_0)\}$$

となる。よって $\xi_1(\alpha_0) \leq \xi_2(R)$ 。これは $\xi_1(\alpha_0) > \xi_2(R)$ に矛盾する。したがってすべての時刻 $t \geq t_0$ に対して $|\underline{x}(t, \underline{x}_0, t_0)| < \alpha(R)$ となる。(証明終り)。

定理2.1および2.2において用いられている関数 $V(\underline{x})$ は Lyapunov 関数と呼ばれる。なお定理2.1および2.2は、従来提案されている定理^{20~23}に比べ、 $f(\underline{x})$ または $f(\underline{x}, t)$ が不連続関数であっても適用できる点で異なる。

つぎに制御系(S.3)または(S.4)が臨界な場合の大局的漸近安定性を検討する場合に必要な極限安定について述べる。

いま、制御系(S.3)または(S.4)を線形化した制御系 L を考えると、 A が臨界な場合、このHurwitzセクタは $(0, H_1)$ となる。 A が臨界な場合の非線形形のセクタは $(0, K)$ を考えている。したがって、制御系(S.3)または(S.4)が臨界な場合に大局的漸近安定になるためには、制御系 L が十分小さな $H > 0$ に対しても漸近安定である必要がある。

〔定義2.5〕 極限安定：線形化した制御系 L が十分小さな $H > 0$ に対して漸近安定であるならば、制御系(S.3)または(S.4)は極限安定であると呼ぶ。

つぎに極限安定定理を示す。

〔定理2.3(極限安定定理)〕⁵ 制御系(S.3)または(S.2)が極限安定であるためには、 A の虚軸上に存在する固有値の重複度は2以下で、かつつぎの条件I~IVが成立することが必要かつ十分である。

I. (2.15)式において $G_1(s)$ が1重極を原点に有する場合、すなわち、

$$G_1(s) = r/s \text{ と表わされる場合}$$

$$r > 0$$

II. $G_1(s)$ が 1 重極を原点以外の虚軸上に有する場合、すなわち、

$$G_1(s) = (\alpha s + \beta) / (s^2 + \omega_0^2) \quad \text{と表わされる場合、}$$

$$\alpha > 0$$

III. $G_1(s)$ が 2 重極を原点に有する場合、すなわち $G_1(s) = \gamma_0 / s^2 + \gamma_1 / s$ と表わされる場合、

$$\gamma_0 > 0 \quad \gamma_1 > 0$$

IV. $G_1(s)$ が 2 重極を原点以外の虚軸上に有する場合、すなわち

$$G_1(s) = \gamma(s^2 - \omega_0^2) / (s^2 + \omega_0^2)^2 + (\alpha s + \beta) / (s^2 + \omega_0^2) \quad \text{と表わされる場合}$$

$$\gamma > 0, \quad \alpha > 0$$

2.3 非線形要素の取り扱い方

前節に示した定理 2.1 および 2.2 によって制御系の大局的漸近安定性、および、解の有界性の解析を行なうことができる。しかしこの定理によって得られる安定条件は十分条件であって必要十分条件ではない。また、この定理では、関数 $V(x)$ の構成方法について述べていない。したがって、必要十分に近い安定条件を与える関数 $V(x)$ をいかに構成するかということが問題になる。これに関しては多くの研究があるが、非線形要素が 1 価関数で時間に依存しない制御系 (S.4) に対しては、つぎに示す Lur'e 形の Lyapunov 関数が一般的に用いられている。^{1, 2, 4, 15, 22}

$$V = \underline{x}' P \underline{x} + \theta \int_0^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

ただし P は $n \times n$ の行列、 θ は定数である。(2.19) 式を制御系 (S.4) の解に沿って時間微分すると、

$$\dot{V} = \dot{\underline{x}}' P \underline{x} + \underline{x}' P \dot{\underline{x}} + \theta \varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

となる。いま

$$N = \{ \varepsilon - \varphi(\varepsilon) / K \} \varphi(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

とおき (2.20) 式の右辺に $N - N \equiv 0$ を加えて整理すると

$$-\dot{V} = \Omega(x, \varphi) + N$$

$$\Omega(x, \varphi) = x' F x + 2 f' x \varphi + p \varphi^2$$

$$-F = \underline{P} \underline{A} + \underline{A}' \underline{P} \quad -f = \underline{P} \underline{a} + \frac{1}{2} (\theta \underline{A}' \underline{c} + \underline{c})$$

$$p = \theta \underline{c}' \underline{a} + \frac{1}{K}$$

となる。仮定 IV より $N \geq 0$ である。よって $\Omega \geq 0$ となる正値行列 $\underline{P}$ および θ が存在すれば、定理 2.1 より大域的漸近安定が証明される。 $\Omega \geq 0$ となる条件を周波数領域で求めたものが Popov の安定条件で、つぎのように表わされる。⁴

$$\frac{1}{K} + \operatorname{Re}(1 + j\omega\theta) G(j\omega) > 0 \quad \dots\dots\dots (2.22)$$

この安定条件はセクタ $[0, K]$ に含まれる任意の非線形要素に対して、大域的漸近安定を保証するもので、絶対安定条件とも呼ばれている。

Popov の安定条件はセクタ $[0, K]$ に含まれる任意の 1 価関数 $\varphi(\varepsilon)$ に対して適用できる反面、非線形要素の特性を十分に考慮していないので、かならずしも必要十分に近い安定条件であるとは言えない。これは (2.21) 式の N が、 $\varphi(\varepsilon)$ がセクタ $[0, K]$ に含まれるという性質しか表わしていないからである。もし $\varphi(\varepsilon)$ が飽和要素とか、リレー要素などと分かっている場合に、 N としてこれらの非線形の特性を十分に考慮できるようなものを選ぶと、より必要十分に近い安定条件が得られるであろう。

周知のように $\varphi(\varepsilon)$ が単調非減少関数の場合、 ε の任意の 2 つの値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対して、

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varphi_1 - \varphi_2) \geq 0, \quad \varphi_1 \triangleq \varphi(\varepsilon_1), \quad \varphi_2 \triangleq \varphi(\varepsilon_2)$$

が成立する。したがって $N = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varphi_1 - \varphi_2)$ とすれば、これは $\varphi(\varepsilon)$ の単調非減少の性質を考慮したものとなる。さらに

$$N = (\varepsilon_1 - \varphi_1/K) \varphi_1 + (\varepsilon_2 - \varphi_2/K_2) \varphi_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varphi_1 - \varphi_2) \dots\dots\dots (2.23)$$

とすれば、 N は $\varphi(\varepsilon)$ が単調非減少および $0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon \leq K$ のとき $N \geq 0$ となる。

一般に N を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および φ_1, φ_2 に関する 2 次式

$$N = \underline{\Phi}' \underline{B} \underline{\Phi} + \underline{\Phi}' \underline{\Gamma} \underline{E} + \underline{E}' \underline{\Delta} \underline{E} \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varphi_1 \triangleq \varphi(\varepsilon_1) \\ \varphi_2 \triangleq \varphi(\varepsilon_2) \end{array}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} g & \frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & p \end{bmatrix} \quad \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} a, h \\ e, d \end{bmatrix} \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} l, & \frac{1}{2}m \\ \frac{1}{2}m, & n \end{bmatrix}$$

で表わせば、任意の非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ の特性を考慮することが可能になる。

(2.24) 式の N を Lyapunov 関数に用いる場合は、与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対して入力 ε の任意の 2 つの値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対して $N \geq 0$ となるように、パラメータ $\underline{B}, \underline{\Gamma}, \underline{\Delta}$ の各要素を決定すればよい。たとえば $\varphi(\varepsilon)$ が (2.2) 式 を満足する任意の関数ならば (2.24) 式において $a=1, g=-1/k, b=e=d=h=p=l=m=n=0$ とすれば $N \geq 0$ となる。また $\varphi(\varepsilon)$ が単調非減少関数ならば $g=p=-1/k, a=d=2, b=e=1, h=l=m=n=0$ とすればよい。

一般に与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対して $N \geq 0$ となるパラメータ $\underline{B}, \underline{\Gamma}, \underline{\Delta}$ の値は一意的ではなく多くの値を取り得る。たとえば $\varphi(\varepsilon)$ が (2.2) 式 を満足し、かつ単調非減少奇関数の場合は、

$$\left. \begin{array}{l} a + gk + (l - |m|)/k \geq \max\{|b|, |e|, |hk + e|\} \\ d + pk + (n - |m|)/k \geq \max\{|b|, |e|, |hk + e|\} \\ g \leq 0, \quad p \leq 0, \quad l \geq |m|, \quad n \geq |m| \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

を満足する任意のパラメータの値に対して $N \geq 0$ となる。これはつぎのようにして証明できる。

$\varphi(\varepsilon)$ は奇関数であるから $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0$ として (2.24) 式は

$$N = g\varphi_1^2 + h\varphi_1\varphi_2 + p\varphi_2^2 + a\varphi_1\varepsilon_1 + b\varphi_1\varepsilon_2 + e\varphi_2\varepsilon_1 + d\varphi_2\varepsilon_2$$

$$+ l\varepsilon_1^2 + m\varepsilon_1\varepsilon_2 + n\varepsilon_2^2 \quad (\text{複号同順}) \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

を考えればよい。 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ のときは明らかに成立する。いま $\varphi \leq k\varepsilon$ および $g \leq 0, p \leq 0$ なることに注意すれば (2.26) 式は

$$N \geq (a+gK)\varphi_1 \varepsilon_1 \pm b\varphi_1 \varepsilon_2 \pm e\varphi_2 \varepsilon_1 \pm h\varphi_1 \varphi_2 \\ + (d+pK)\varphi_2 \varepsilon_2 + l\varepsilon_1^2 \pm m\varepsilon_1 \varepsilon_2 + n\varepsilon_2^2 \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

となる。さらに $l \geq |m|$, $n \geq |m|$ を考慮すれば (2.27) 式は

$$N \geq (\varphi_1 - \varphi_2)(A_2 \varepsilon_1 \pm b\varepsilon_2) + \varphi_2 \{ (A_2 \pm e)\varepsilon_1 \pm h\varphi_1 \} \\ + (D_1 \pm b)\varphi_2 \varepsilon_2 + |m|\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

または

$$N \geq (\varphi_2 - \varphi_1)(D_2 \varepsilon_2 \pm e\varepsilon_1) + (A_1 \pm e)\varepsilon_1 \varphi_1 \\ + \varphi_1 \{ (D_2 \pm b)\varepsilon_2 \pm h\varphi_2 \} + |m|\varepsilon_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

となる。ただし

$$A_1 = a + gK + l/K, \quad A_2 = a + gK + (l - |m|)/K$$

$$D_1 = d + pK + n/K, \quad D_2 = d + pK + (n - |m|)/K$$

よって、 $\varphi(\varepsilon)$ が単調非減少関数であることと考慮すると (2.25) 式が成立すると、 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$ のときは (2.28) 式より、また $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1 \geq 0$ のときは (2.29) 式より $N \geq 0$ となる (証明終り)。

他の $\varphi(\varepsilon)$ に対してもこれと同様にしてパラメータ $\underline{B}$, $\underline{I}$, $\underline{\Delta}$ の各要素の取り得る範囲を求めることができる。代表的な非線形要素についてこれを表 2.1 に示す。この表ではより一般的な形でパラメータの条件を示したので、複雑になっているが、たとえば図 2.4 (d) に示す理想リレーの場合には表 2.1 の (a) において $K_1 = \infty$, $K_2 = K_3 = 0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} a \geq |e|, \quad d \geq |b|, \quad g \geq 0, \quad p \geq 0 \\ l \geq 0, \quad n \geq 0, \quad 4gp \geq h^2, \quad 4ln \geq m^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.30)$$

と簡単になる。

Lyapunov 関数に用いる N として (2.24) 式を考えれば、非線形要素の特性を考慮することができるが、(2.19) 式の Lyapunov 関数そのままでは、こ

$$N = g\varphi_1^2 + h\varphi_1\varphi_2 + p\varphi_2^2 + a\varphi_1\varepsilon_1 + b\varphi_1\varepsilon_2 + e\varphi_2\varepsilon_1 + d\varphi_2\varepsilon_2 + l\varepsilon_1^2 + m\varepsilon_1\varepsilon_2 + n\varepsilon_2^2$$

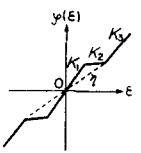
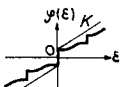
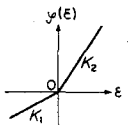
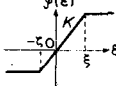
非線形要素	パラメータ条件
(a)  $\varphi(-\varepsilon) = -\varphi(\varepsilon)$ $0 \leq K_1 \leq \infty$ $-\infty \leq K_2 < \infty$ $0 \leq K_3 < \infty$ $K_2 = K_3$ のとき $\eta = K_1$	$(a+gK_1)K_1+l \geq 0, (d+pK_1)K_1+n \geq 0$ $4\{(a+gK_1)K_1+l\}\{(d+pK_1)K_1+n\} \geq \{(hK_1+b+e)K_1+m\}^2$ $(a+gK_3)K_3+l \geq 0, (d+pK_3)K_3+n \geq 0$ $4\{(a+gK_3)K_3+l\}\{(d+pK_3)K_3+n\} \geq \{(hK_3+b+e)K_3+m\}^2$ $2gK_3\eta + a(K_3+\eta) + 2l \geq hK_3\eta + bK_3 + e\eta + m$ $2pK_3\eta + d(K_3+\eta) + 2n \geq hK_3\eta + b\eta + eK_3 + m$ $K_1 - K_2 \{2gK_3\eta + a(K_3+\eta) + 2l\} \geq (\eta - K_2)(hK_1K_3 + bK_3 + eK_1 + m)$ $K_1 - K_2 \{2pK_3\eta + d(K_3+\eta) + 2n\} \geq (\eta - K_2)(hK_1K_3 + bK_1 + eK_3 + m)$ かつ Ⅰ. $0 \leq K_2 < \infty$ の場合 (i) $\begin{cases} 2gK_1K_2 + a(K_1+K_2) + 2l \geq hK_1K_2 + bK_2 + eK_1 + m \\ 2pK_1K_2 + d(K_1+K_2) + 2n \geq hK_1K_2 + bK_1 + eK_2 + m \\ (a+gK_2)K_2+l \geq 0, (d+pK_2)K_2+n \geq 0 \\ 4\{(a+gK_2)K_2+l\}\{(d+pK_2)K_2+n\} \geq \{(hK_2+b+e)K_2+m\}^2 \end{cases}$ $K_1 = K_2$ のとき 条件 (i) は削除 Ⅱ. $-\infty \leq K_2 < 0$ の場合 $(K_1 - K_2)\eta(aK_1 + 2l) \geq (\eta - K_2)K_1 eK_1 + m$ $(K_1 - K_2)\eta(dK_1 + 2n) \geq (\eta - K_2)K_1 bK_1 + m$ $l \geq 0, n \geq 0, 4ln \geq m^2$ $(aK_1 + 2l)\eta \geq K_1 e\eta + m , (dK_1 + 2n)\eta \geq K_1 b\eta + m$ $(a+g\eta)\eta + l \geq 0, (d+p\eta)\eta + n \geq 0$ (ii) $\begin{cases} 4\{(a+gK_1)K_1+l\}\{(d+p\eta)\eta+n\} \geq (hK_1\eta + bK_1 + e\eta + m)^2 \\ 4\{(a+g\eta)\eta+l\}\{(d+pK_1)K_1+n\} \geq (hK_1\eta + b\eta + eK_1 + m)^2 \end{cases}$ $K_1 = \infty$ のとき 条件 (ii) は削除
(b)  $0 \leq K < \infty$ $\varphi(-\varepsilon) = -\varphi(\varepsilon)$ φ: 増加関数	$g = h = p = 0$ $a \geq e , d \geq b , l \geq m , n \geq m$ $a + \frac{l - m }{K} \geq b , d + \frac{n - m }{K} \geq e$
(c)  $0 \leq K_1 < \infty$ $0 \leq K_2 < \infty$	$(a+gK_1)K_1+l \geq 0, (d+pK_1)K_1+n \geq 0$ $(a+gK_2)K_2+l \geq 0, (d+pK_2)K_2+n \geq 0$, かつ (i), (ii), (iii), (iv) ただし (i) $(hK_1+b+e)K_1+m \geq 0$ または $\{(hK_1+b+e)K_1+m \leq 0$ $4\{(a+gK_1)K_1+l\}\{(d+pK_1)K_1+n\} \geq \{(hK_1+b+e)K_1+m\}^2$ (ii) $(hK_2+b+e)K_2+m \geq 0$ または $\{(hK_2+b+e)K_2+m \leq 0$ $4\{(a+gK_2)K_2+l\}\{(d+pK_2)K_2+n\} \geq \{(hK_2+b+e)K_2+m\}^2$ (iii) $hK_1K_2 + bK_1 + eK_2 + m \leq 0$ または $\{hK_1K_2 + bK_1 + eK_2 + m \geq 0$ $4\{(a+gK_1)K_1+l\}\{(d+pK_2)K_2+n\} \geq (hK_1K_2 + bK_1 + eK_2 + m)^2$ (iv) $hK_1K_2 + bK_2 + eK_1 + m \leq 0$ または $\{hK_1K_2 + bK_2 + eK_1 + m \geq 0$ $4\{(a+gK_2)K_2+l\}\{(d+pK_1)K_1+n\} \geq (hK_1K_2 + bK_2 + eK_1 + m)^2$
(d)  $0 < K \leq \infty$ $\gamma = \begin{cases} \varepsilon/\zeta & \text{for } \varepsilon \geq \zeta \\ \zeta/\varepsilon & \text{for } \varepsilon < \zeta \end{cases}$	$l \geq 0, n \geq 0, 4ln \geq m^2, aK + 2l \geq 0, dK + 2n \geq 0$ $(a+gK)K+l \geq 0, (d+pK)K+n \geq 0$ $4\{(a+gK)K+l\}\{(d+pK)K+n\} \geq \{(hK+b+e)K+m\}^2$ $aK + 2l \geq \alpha(eK+m), dK + 2n \geq \beta(bK+m)$ where $\alpha = \begin{cases} \gamma & \text{for } eK+m \geq 0 \\ -1 & \text{for } eK+m \leq 0 \end{cases}, \beta = \begin{cases} \gamma & \text{for } bK+m \geq 0 \\ -1 & \text{for } bK+m \leq 0 \end{cases}$

表 2.1 $N \geq 0$ を満足するパラメータの条件

の N を用いることはできない。したがって制御系 (S.4) に対しては Lur'e 形の Lyapunov 関数を拡張したつぎの関数を考える。

$$V = \underline{x}' P \underline{x} + \theta \int_0^t \varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} dt + \sum_{i=1}^n \left\{ \theta_i \int_0^t \varphi(\varepsilon_i) \dot{\varepsilon}_i dt + \hat{\theta}_i \int_0^t \varphi(\hat{\varepsilon}_i) \dot{\hat{\varepsilon}}_i dt + \int_0^t (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) dt \right\} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_i = \underline{y}_i' \underline{x}, \quad \hat{\varepsilon}_i = \hat{\underline{y}}_i' \underline{x}$$

ここで $P, \underline{y}_i, \hat{\underline{y}}_i, \theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は未知の定数である。また $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は次式を満足するものである。

$$N_i = \underline{\underline{\chi}}_i' \underline{B}_i \underline{\underline{\chi}}_i + \underline{\underline{\chi}}_i' \underline{\Gamma}_i \underline{E}_i + \underline{E}_i' \underline{\Delta}_i \underline{E}_i \geq 0 \quad (2.32)$$

$$\hat{N}_i = \hat{\underline{\underline{\chi}}} _i' \hat{\underline{B}}_i \hat{\underline{\underline{\chi}}} _i + \hat{\underline{\underline{\chi}}} _i' \hat{\underline{\Gamma}}_i \hat{\underline{E}}_i + \hat{\underline{E}}_i' \hat{\underline{\Delta}}_i \hat{\underline{E}}_i \geq 0 \quad (2.33)$$

$$\bar{N}_i = \bar{\underline{\underline{\chi}}} _i' \bar{\underline{B}}_i \bar{\underline{\underline{\chi}}} _i + \bar{\underline{\underline{\chi}}} _i' \bar{\underline{\Gamma}}_i \bar{\underline{E}}_i + \bar{\underline{E}}_i' \bar{\underline{\Delta}}_i \bar{\underline{E}}_i \geq 0 \quad (2.34)$$

$$\underline{E}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{E}}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \hat{\varepsilon}_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\underline{E}}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \hat{\varepsilon}_i \end{bmatrix}$$

$$\varphi_i = \varphi(\varepsilon_i), \quad \hat{\varphi}_i = \varphi(\hat{\varepsilon}_i)$$

$$\underline{\underline{\chi}}_i = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\underline{\chi}}} _i = \begin{bmatrix} \varphi \\ \hat{\varphi}_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\underline{\underline{\chi}}} _i = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \hat{\varphi}_i \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} g_i, \frac{1}{2} h_i \\ \frac{1}{2} h_i, p_i \end{bmatrix}, \quad \underline{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} a_i, b_i \\ e_i, d_i \end{bmatrix}, \quad \underline{\Delta}_i = \begin{bmatrix} l_i, \frac{1}{2} m_i \\ \frac{1}{2} m_i, n_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{B}}_i = \begin{bmatrix} \hat{g}_i, \frac{1}{2} \hat{h}_i \\ \frac{1}{2} \hat{h}_i, \hat{p}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\Gamma}}_i = \begin{bmatrix} \hat{a}_i, \hat{b}_i \\ \hat{e}_i, \hat{d}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\Delta}}_i = \begin{bmatrix} \hat{l}_i, \frac{1}{2} \hat{m}_i \\ \frac{1}{2} \hat{m}_i, \hat{n}_i \end{bmatrix}$$

$$\bar{\underline{B}}_i = \begin{bmatrix} \bar{g}_i, \frac{1}{2} \bar{h}_i \\ \frac{1}{2} \bar{h}_i, \bar{p}_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\underline{\Gamma}}_i = \begin{bmatrix} \bar{a}_i, \bar{b}_i \\ \bar{e}_i, \bar{d}_i \end{bmatrix}, \quad \bar{\underline{\Delta}}_i = \begin{bmatrix} \bar{l}_i, \frac{1}{2} \bar{m}_i \\ \frac{1}{2} \bar{m}_i, \bar{n}_i \end{bmatrix}$$

$N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は (2.24) 式と形が同じである。したがって (2.32) ~ (2.34) 式を満足するパラメータ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \underline{\Delta}_i, \hat{\underline{B}}_i, \hat{\underline{\Gamma}}_i, \hat{\underline{\Delta}}_i, \bar{\underline{B}}_i, \bar{\underline{\Gamma}}_i, \bar{\underline{\Delta}}_i$ の各要素の取り得る範囲は (2.24) 式で求めたものを用いればよい。

なお、非線形要素が時変非線形要素の場合は (2.32) ~ (2.34) 式において

$\varphi, \varphi_i, \hat{\varphi}_i$ をそれぞれ $\psi, \psi_i, \hat{\psi}_i$ に置き換えればよい。ただし $\psi_i \triangleq \psi(\varepsilon_i, t)$, $\hat{\psi} \triangleq \psi(\hat{\varepsilon}_i, t)$ である。

2.4 結 言

本章ではまず本論文で取り扱われる非線形制御系を記述し、その平衡点について検討した。多くの場合平衡点は状態空間の原点になるが、非線形要素の形によっては、かならずしも平衡点が原点とは限らないので注意が必要である。つぎに工学上重要な大局的漸近安定および有界入力有界出力安定の概念を述べ、その定理を示した。これらの定理を適用して安定条件を求めるためには、Lyapunov関数を構成しなければならない。したがって、ここでは非線形要素の取り扱い方について検討し、任意の非線形要素の特性を考慮することができる新しいLyapunov関数を提案した。

第 3 章 大局的漸近安定条件

3.1 序 言

制御系に対する安定問題は Lur e らによって統一的な研究が始められ³、その後 Lur e の問題として多くの研究が発表されている。Lur e の問題とは、制御系 (S.4) の平衡点 $x_e = 0$ がセクタ $[0, K]$ に属する任意の非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ に対して大局的漸近安定になるためのパラメータ A, a, c の関係を見い出すことである。これは絶対安定問題とも呼ばれ、Lyapunov の方法で検討されていた^{22,23}が、Popov は Lyapunov の方法とはまったく異なつた解析法を用いて周波数領域でパラメータ A, a, c の関係を見い出した。⁵その後 Yakubovich, Kolman, Meyer らは、Lyapunov の方法によって、周波数領域で表わされる安定条件を求めることができることを示した。また Gelig^{24,25}, Yakubovich²⁶, 前田と児玉²⁷ は Popov の安定条件が、不連続あるいはヒステリシスなどの非線形要素を有する制御系に対しても適用できることを明らかにした。

Popov の安定条件は非線形要素の特性をあまり考慮していないので十分条件になっている。そこで非線形要素に対して 2.2 節で示した仮定 IV のほかに、非線形要素の勾配に種々の条件を加えて、より必要十分に近い安定条件を求める研究が進められた^{18,28~33}。とくに O'Shea³¹, James と Falb³³ は非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ が単調非減少関数の場合に対して、拡張された安定条件を導いている。また、前田、池田、児玉³⁴ は James と Falb の安定条件が図 2.4 (d), (e), (f) に示す不連続非線形要素に対しても適用できることを示した。しかしセクタ $[0, K]$ に含まれる任意の非線形要素に対して適用できる拡張された安定条件は得られていない。

本章では第 2 章で述べた拡張した Lur e 形の Lyapunov 関数を用いて、制御系 (S.4) の $\varphi(\varepsilon)$ が連続関数だけでなく不連続関数、2価関数である場合に対しても適用でき、かつより必要十分に近い安定条件を導く^{12,35}。また制御系 (S.4) が臨界な場合は、これを等価変換した制御系 (C.4) に Yakubovich^{36~38} と類似の解析を適用して、一般的な臨界系に対する大局的漸近安定条件を示す³⁹。

3.2 安定定理

ここでは、制御系 (S.4)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{a} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{c}' \underline{x} \quad \dots\dots\dots (S.4)$$

の大局的安定条件を $\underline{A}$ が安定な場合および臨界な場合, また $\varphi(\varepsilon)$ が 1価関数の場合および 2価関数の場合に分けて定理に示す.

〔定理 3.1〕 つぎに示す条件 I ~ IV が満足されるとき制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる.

I. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で, 2.2 節の仮定 IV の (i) (a) を満足する.

II. (i) 伝達関数 $G(s)$ の極はすべて s 平面の左半平面に存在する.

(ii) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続の場合は, $G(s)$ の零点は s 平面の原点を除く虚軸上および右半平面上には存在しない.

III.

$$\begin{aligned} \pi(s) = & - \sum_{i=1}^{\nu} (g_i + \hat{g}_i) + \operatorname{Re} \left[\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) + \theta s \right\} G(s) \right. \\ & + \sum_{i=1}^{\nu} \{ \theta_i W_i(s) + \hat{\theta}_i \hat{W}_i(s) \} \left. \right] \\ & - \sum_{i=1}^{\nu} (\underline{Y}_i^* \underline{A}_i \underline{Y}_i + \underline{\hat{Y}}_i^* \underline{\hat{A}}_i \underline{\hat{Y}}_i + \overline{\underline{Y}}_i^* \overline{\underline{A}}_i \overline{\underline{Y}}_i) \quad \dots\dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_i &= \operatorname{col} \{ G(s), W_i(s) \}, \quad \underline{\hat{Y}}_i = \operatorname{col} \{ G(s), \hat{W}_i(s) \} \\ \overline{\underline{Y}}_i &= \operatorname{col} \{ W_i(s), \hat{W}_i(s) \} \end{aligned}$$

$$W_i(s) = \frac{\{ \hat{h}_i - \bar{e}_i G(s) \} (\hat{\theta}_i s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \bar{\theta}_i \{ \hat{h}_i - \hat{e}_i G(s) \}}{(\theta_i s + d_i + \bar{a}_i) (\hat{\theta}_i s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \bar{\theta}_i \bar{e}_i} \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\hat{W}_i(s) = \frac{\{ \hat{h}_i - \hat{e}_i G(s) \} (\theta_i s + d_i + \bar{a}_i) - \bar{e}_i \{ \hat{h}_i - \bar{e}_i G(s) \}}{(\theta_i s + d_i + \bar{a}_i) (\hat{\theta}_i s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \bar{\theta}_i \bar{e}_i} \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

とおく. ただし $*$ は複素共役転置を表わし, また W_i および $\hat{W}_i$ は既約で $(n+2)$ 次であるとする. このときすべての $0 \leq \omega < \infty$ に対してつぎの条件が満足される.

$$(i) \quad \pi(j\omega) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

(ii) $\pi(j\omega) = 0$ となる ω の値を ω_k ($k=1, 2, \dots$) とすると

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} G(j\omega_k) + \frac{1}{K} &> 0 & (K \neq \infty) \\ \operatorname{Re} G(j\omega_k) &\geq 0 & (K = \infty) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

(iii)

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + \hat{a}_i) + \theta s \right\} G(s) + \theta \underline{a} + \sum_{i=1}^n \{ \bar{b}_i W_i(s) + \hat{\bar{b}}_i \hat{W}_i(s) \} \quad (3.6)$$

とおくと $N(s)/D(s)$ は既約でかつ $D(s)$ は $(n+2)$ 次である。

(iv) $\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) \neq 0$ のときは条件(ii), (iii) は削除される。また $\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) = 0$ のときは条件(ii), (iii) の代りに

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \pi(j\omega) > 0 \quad (3.7)$$

が満足されなければならない。

IV. パラメータ $\theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は非負の定数である。またパラメータ $B_i, \bar{B}_i, \underline{B}_i, \hat{B}_i, \bar{\hat{B}}_i, \underline{\hat{B}}_i, \hat{\bar{B}}_i, \bar{\underline{B}}_i, \underline{\bar{B}}_i$ の各要素の値は、与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対して (2.32), ~ (2.34) 式を満足し、かつ

$$\underline{B}_i \geq 0, \quad \hat{\underline{B}}_i \geq 0, \quad \bar{\underline{B}}_i \geq 0$$

$$M_i = - \left[\begin{array}{cc} p_i + q_i & \frac{1}{2} \bar{r}_i \\ \frac{1}{2} \bar{r}_i & \hat{p}_i + \bar{p}_i \end{array} \right] \geq 0 \quad (3.8)$$

となるように選ぶ。また $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続かつ $G(0)=0$ の場合は、(2.32)~(2.34)式において φ_1 および φ_2 を $\varphi_1 - \varepsilon_0$ および $\varphi_2 - \varepsilon_0$ と置き換えたものに対して成立しなければならない。ただし $\varphi(-0) \leq \varepsilon_0 \leq \varphi(+0)$ 。

[注3.1] 条件IIIにおいて W_i および $\hat{W}_i$ は既約であるとしているが、 $\bar{a}_i = 0$ の場合は $(\hat{\theta}_i s + \hat{d}_i + d_i)$ に関して、 $\bar{e}_i = 0$ の場合は $(\theta_i s + d_i + \bar{a}_i)$ に関して約分は許される。また $\bar{b}_i = \bar{e}_i = 0$ の場合は W_i と $\hat{W}_i$ とは同じ形になり、定理3.1は後に示す系3.1に帰着される。

[定理3.2] つぎに示す条件 I ~ VI が満足されるとき、制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる。

I. $\varphi(\varepsilon)$ は1価関数で2.3節の仮定IV.(i)(b)を満足する。

II. (i) $G(s)$ の極は S 平面の左半平面と虚軸上に存在する。

(ii) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続の場合は、 $G(s)$ の零点は、 S 平面の原点を除く虚軸上および右半平面には存在しない。

III. 制御系 (S.4) は、極限安定である。

IV.

$$\pi(s) = -\sum_{i=1}^{\nu} (g_i + \hat{g}_i) + R_e \left[\left\{ \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) + \theta s \right\} G(s) + \sum_{i=1}^{\nu} \{ \hat{b}_i W_i(s) + \hat{\hat{b}}_i \hat{W}_i(s) \} \right] \quad (3.9)$$

とおく。ただし $W_i(s)$, $\hat{W}_i(s)$ はそれぞれ (3.2), (3.3) 式に示したもので、既約でありかつ $(n+2)$ 次であるとする (ただし注 3.1 参照のこと)。このときすべての $0 \leq \omega < \infty$ に対して、つぎの条件が満足される。

$$(i) \quad \pi(j\omega) \geq 0 \quad (\omega \neq \omega_k) \quad (3.10)$$

ただし $(\pm j\omega_k \ (k=1, 2, \dots))$ は (2.14) 式における $G_1(s)$ の極である。

(ii) $G(s)$ が 2 重極を虚軸上に有する場合は

$$R_e \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) + j\omega\theta \right\} G_1(j\omega) + \sum_{i=1}^{\nu} \{ \hat{b}_i W_{ii}(j\omega) + \hat{\hat{b}}_i \hat{W}_{ii}(j\omega) \} \right\} \equiv \text{const} \quad (3.11)$$

である。ここで W_{ii} , $\hat{W}_{ii}$ はそれぞれ W_i , $\hat{W}_i$ を部分分数展開したとき s 平面の虚軸上に極を有するものの和である。

(iii) 定理 3.1 の条件 III, (ii), (iii) を満足する。

(iv) 定理 3.1 の条件 III (iv) を満足する。

V. 定理 3.1 の条件 IV が満足される。ただし $(N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i)$ は (2.32)~(2.34) 式において、 $\triangle_i = \hat{\triangle}_i = \bar{\triangle}_i = 0$ としたものである。

VI.

$$- \begin{bmatrix} \chi_0 & 0 & \chi_2 & \cdots \\ 0 & -\chi_2 & 0 & \cdots \\ \chi_2 & 0 & \chi_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} > 0 \quad (3.12)$$

が成立する。ただし

$$\chi_{k+j-2} = \left[\underline{c}_1' \left\{ \theta A_1^{k+j-1} \underline{a}_1 + \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) A_1^{k+j-2} \underline{a}_i \right\} + \sum_{i=1}^{\nu} (\hat{b}_i \underline{y}_{ii}' + \hat{\hat{b}}_i \hat{\underline{y}}_{ii}') A_1^{k+j-2} \underline{a}_i \right] \quad (3.13)$$

$$(k, j = 1, 2, \dots, n_1)$$

ここで $\underline{y}_{ii}$ および $\hat{\underline{y}}_{ii}$ はそれぞれ $W_{ii}(s) \equiv \underline{y}_{ii}' (A_1 - sI)^{-1} \underline{a}_1$ および $\hat{W}_{ii}(s) \equiv \hat{\underline{y}}_{ii}' (A_1 - sI)^{-1} \underline{a}_1$ より求めることができる。

〔注3.2〕 $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続，かつ $G(s)$ の零点が s 平面の原点を除く虚軸上と左半平面に存在する場合，定理3.1 および 3.2 によって $t \rightarrow \infty$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ なることが示される。しかし大域的漸近安定は保証されない。

〔注3.3〕 伝達関数が

$$G(s) = \frac{\gamma}{s} + G_2(s) \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

と表わされる場合，定理3.2の条件 VI は

$$\sum_{i=1}^n \{ (a_i + \hat{a}_i) \gamma + b_i \gamma_i + \hat{b}_i \hat{\gamma}_i \} > 0 \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

となる。ただし $\gamma_i, \hat{\gamma}_i$ は $W_i(s), \hat{W}_i(s)$ をつぎのように部分分数展開して与えられる。

$$W_i(s) = \frac{\gamma_i}{s} + W_{2i}(s) \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

$$\hat{W}_i(s) = \frac{\hat{\gamma}_i}{s} + \hat{W}_{2i}(s) \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

〔注3.4〕 伝達関数が

$$G(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_o^2} + G_2(s) \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

と表わされる場合，定理3.2の条件 VI は

$$\theta \beta + \sum_{i=1}^n \{ (a_i + \hat{a}_i) \alpha + b_i \alpha_i + \hat{b}_i \hat{\alpha}_i \} > 0 \quad \dots\dots\dots (3.19)$$

となる。ただし $\alpha_i, \hat{\alpha}_i$ は $W_i(s), \hat{W}_i(s)$ をつぎのように部分分数展開して与えられる。

$$W_i(s) = \frac{\alpha_i s + \beta_i}{s^2 + \omega_o^2} + W_{2i}(s) \quad \dots\dots\dots (3.20)$$

$$\hat{W}_i(s) = \frac{\hat{\alpha}_i s + \hat{\beta}_i}{s^2 + \omega_o^2} + \hat{W}_{2i}(s) \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

〔定理3.3〕 つぎに示す条件 I ~ V が満足されるとき制御系 (S.4) は大域的漸近安定となる。

I. $\varphi(\varepsilon)$ は反時計回りのヒステリシスループを有し， $\varepsilon=0$ で連続かつ 2.2

節の仮定 IV (i) (a) または (b) を満足する。

II. 定理 3.2 の条件 II を満足する。

III.

$$\begin{aligned} \pi(s) = & - \sum_{i=1}^n (\hat{g}_i + \hat{g}_i) + R_e \left[\left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i + \hat{a}_i) - \theta s \right\} G(s) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \{ \hat{b}_i W_i(s) + \hat{b}_i \hat{W}_i(s) \} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

とおくと、すべての $0 \leq \omega < \infty$ に対して定理 3.1 の条件 III の (i) ~ (iv) を満足する。ただし、 $W_i(s)$, $\hat{W}_i(s)$ は (3.2), (3.3) 式に示したもので、既約でありかつ $(n+2)$ 次とする (注 3.1 参照のこと)。

IV. パラメータ $\theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は非負の定数である。また $\underline{B}_i, \hat{\underline{B}}_i, \underline{E}_i, \hat{\underline{E}}_i, \underline{\Gamma}_i, \hat{\underline{\Gamma}}_i$ の各要素の値は、与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対して

$$N_i = \underline{\Psi}_i' \underline{B}_i \underline{\Psi}_i + \underline{\Psi}_i' \underline{\Gamma}_i \underline{E}_i \geq 0 \quad (3.23)$$

$$\hat{N}_i = \hat{\underline{\Psi}}_i' \hat{\underline{B}}_i \hat{\underline{\Psi}}_i + \hat{\underline{\Psi}}_i' \hat{\underline{\Gamma}}_i \hat{\underline{E}}_i \geq 0 \quad (3.24)$$

$$\bar{N}_i = \bar{\underline{\Psi}}_i' \bar{\underline{B}}_i \bar{\underline{\Psi}}_i + \bar{\underline{\Psi}}_i' \bar{\underline{\Gamma}}_i \bar{\underline{E}}_i \geq 0 \quad (3.25)$$

$$\underline{\Psi}_i' = [\varphi, \zeta_i], \quad \hat{\underline{\Psi}}_i' = [\varphi, \hat{\zeta}_i], \quad \bar{\underline{\Psi}}_i' = [\zeta_i, \hat{\zeta}_i]$$

$$\zeta_i \triangleq \zeta(\varepsilon_i), \quad \hat{\zeta}_i \triangleq \zeta(\hat{\varepsilon}_i)$$

を満足し、さらに (3.8) 式が成立するように選ぶ。ただし $\zeta(\varepsilon)$ は $\varphi(\varepsilon)$ において $\varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} < 0$ となる部分の関数で、すべての ε の値に対して定義される 1 価関数である。

V. $G(s)$ が臨界な場合は定理 3.2 の条件 III および VI を満足する。

[注 3.5] 図 3.1 (a) のヒステリシス要素に対する $\zeta(\varepsilon)$ を図 3.1 (b) に示す。

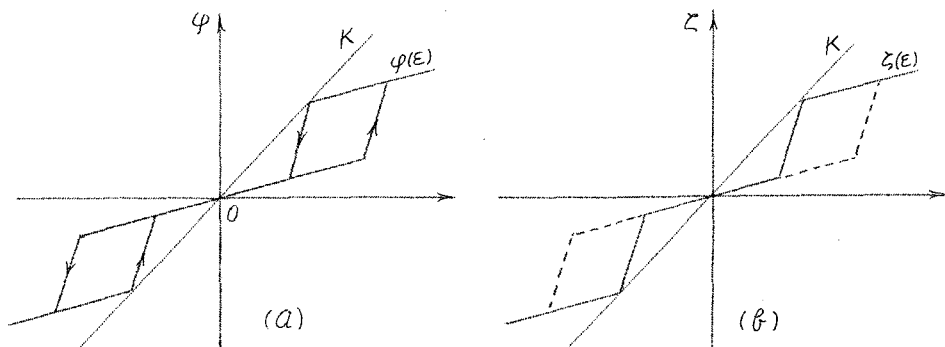


図 3.1 ヒステリシス要素 $\varphi(\varepsilon)$ に対する関数 $\zeta(\varepsilon)$

上述の定理 3.1 および 3.2 を安定判別に適用する場合には、 $\pi(s)$ に (2.32) ~ (2.34) 式のパラメータ $B_i, \Gamma_i, \Delta_i, \hat{B}_i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\Delta}_i, \bar{B}_i, \bar{\Gamma}_i, \bar{\Delta}_i$ が含まれているので、まず与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対して、このパラメータの取り得る範囲を決定しなければならない。(2.32) ~ (2.34) 式は (2.24) 式と同じ形であるので、(2.24) 式の $\underline{B}, \underline{\Gamma}, \underline{\Delta}$ に関してこれを求めておけば、 $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \dots, \underline{\Gamma}_i, \underline{\Delta}_i$ に関してはこの結果を用いればよい。表 2.1 に代表的な非線形要素に対するパラメータの取り得る範囲を示している。また、定理 3.3 における、パラメータ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \hat{B}_i, \hat{\Gamma}_i, \bar{B}_i, \bar{\Gamma}_i$ の、各要素の取り得る範囲を、代表的なヒステリシス要素について表 3.1 に示す。

つぎに簡単化した安定条件を定理の系として示す。

〔系 3.1〕 $\hat{N}_i$ と $\bar{N}_i$ を考慮しない場合、すなわち $\hat{B}_i = \hat{\Gamma}_i = \hat{\Delta}_i = \bar{B}_i = \bar{\Gamma}_i = \bar{\Delta}_i = 0$ の場合、または $\bar{b}_i = \bar{e}_i = 0$ の場合、定理 3.1 の $\pi(s)$ は

$$\pi(s) = -\sum_{i=1}^N g_i + R_e \left\{ \left(\sum_{i=1}^N a_i + \theta s \right) G(s) + \sum_{i=1}^N b_i W_i(s) \right\} - \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i^* \Delta_i \underline{Y}_i \quad (3.26)$$

$$W_i(s) = \frac{b_i - e_i G(s)}{\theta_i s + d_i} \quad (3.27)$$

となる。ただし $W_i(s)$ は既約で $(n+1)$ 次であるとする。このとき (3.6) 式は

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \left(\sum_{i=1}^N a_i + \theta s \right) G(s) + \theta \sum_{i=1}^N \underline{a}_i + \sum_{i=1}^N b_i W_i(s) \quad (3.28)$$

となり、 $\pi(j\omega) = 0$ となる ω の値が存在する場合は $N(s)/D(s)$ は既約で $D(s)$ は $(n+1)$ 次である。同様に (3.8) 式も

$$M_i(s) = p_i \geq 0 \quad (3.29)$$

となる。また定理 3.2 の $\pi(s)$ は、(3.26) 式において $\Delta_i = 0$ としたものになる。なお (3.11) および (3.13) 式もそれぞれ

$$R_e \left\{ \left(\sum_{i=1}^N a_i + j\omega\theta \right) G(j\omega) + \sum_{i=1}^N b_i W_i(j\omega) \right\} = \text{const} \quad (3.30)$$

$$\chi_{k+j-2} = \underline{c}_i' (\theta A_i^{k+j-1} \underline{a}_i + \sum_{i=1}^N a_i A_i^{k+j-2} \underline{a}_i) + \sum_{i=1}^N b_i \underline{r}_i' A_i^{k+j-2} \underline{a}_i \quad (3.31)$$

$$(k, j = 1, 2, \dots, n_i)$$

となる。なお定理 3.3 に関しても同様である。

〔注 3.6〕 この場合 (3.15) および (3.19) 式はそれぞれ

$$(27)$$

$$N_i = g_i \varphi^2 + h_i \varphi \xi_i + p_i \xi_i^2 + a_i \varphi \varepsilon + b_i \varphi \varepsilon_i + e_i \xi_i \varepsilon + d_i \xi_i \varepsilon_i$$

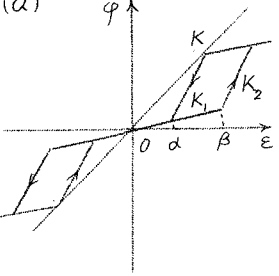
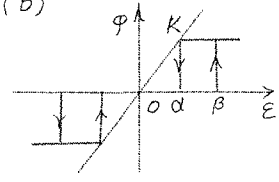
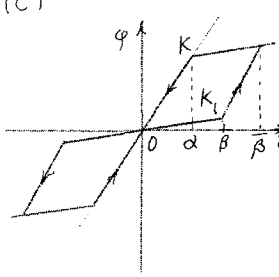
ヒステリシス要素	パラメータ条件
(a)  $\varphi(-\varepsilon) = -\varphi(\varepsilon)$ $\beta/\alpha = w$ $K_3 = \frac{wK_1(K_2 - K) + K_2(K - K_1)}{w(K_2 - K) + (K - K_1)}$	$a_i + g_i K_1 \geq 0, \quad p_i + d_i K_1 \geq 0, \quad 4(a_i + g_i K_1)(d_i + p_i K_1) \geq (h_i K_1 + b_i + e_i)^2$ $a_i + g_i K_2 \geq 0, \quad p_i + d_i K_2 \geq 0, \quad 4(a_i + g_i K_2)(d_i + p_i K_2) \geq (h_i K_2 + b_i + e_i)^2$ $2g_i K_1 K_2 + a_i(K_1 + K_2) \geq h_i K_1 K_2 + b_i K_2 + e_i K_1$ $2p_i K_1 K_2 + d_i(K_1 + K_2) \geq h_i K_1 K_2 + b_i K_1 + e_i K_2$ $2g_i K_1 K + a_i(K_1 + K) \geq h_i K_1 K + b_i K_1 + e_i K$ $2p_i K_1 K + d_i(K_1 + K) \geq h_i K_1 K + b_i K + e_i K_1$ $(K_2 - K_1) \{ 2g_i K_1 K + a_i(K_1 + K) \} \geq K_1(K_2 - K) h_i K_1 + b_i + e_i$ $(K_2 - K_1) \{ 2p_i K_1 K + d_i(K_1 + K) \} \geq w \cdot K_1(K_2 - K) h_i K_1 + b_i + e_i$ $(K_2 - K_3) \{ 2p_i K_1 K + d_i(K_1 + K) \} \geq w(K_2 - K_1) h_i K_1 K_3 + b_i K_3 + e_i K_1$
(b)  $\varphi(-\varepsilon) = -\varphi(\varepsilon)$ $\beta/\alpha = w$	$a_i + g_i K \geq h_i K + b_i$ $a_i + g_i K \geq b_i$ $d_i + p_i K \geq w \cdot e_i$ $a_i \geq e_i , \quad d_i \geq b_i$
(c)  $\varphi(-\varepsilon) = -\varphi(\varepsilon)$	$a_i + g_i K \geq 0, \quad d_i + p_i K \geq 0, \quad 4(a_i + g_i K)(d_i + p_i K) \geq (h_i K + b_i + e_i)^2$ $a_i + g_i K_1 \geq 0, \quad d_i + p_i K_1 \geq 0, \quad 4(a_i + g_i K_1)(d_i + p_i K_1) \geq (h_i K_1 + b_i + e_i)^2$ $4K_1 K(a_i + g_i K_1)(d_i + p_i K) \geq (h_i K_1 K + b_i K_1 + e_i K)^2$ $4K_1 K(a_i + g_i K)(d_i + p_i K_1) \geq (h_i K_1 K + b_i K + e_i K_1)^2$ $2g_i K_1 K + a_i(K_1 + K) \geq h_i K_1 K + b_i K_1 + e_i K$ $2p_i K_1 K + d_i(K_1 + K) \geq h_i K_1 K + b_i K + e_i K_1$ $2g_i K_1 K + a_i(K_1 + K) \geq \alpha/\beta \cdot K h_i K + b_i + e_i$ $2p_i K_1 K + d_i(K_1 + K) \geq \beta/\alpha \cdot K h_i K + b_i + e_i$

表3.1 ヒステリシス要素の場合の $N_i \geq 0$ となるパラメータの条件

$$a_i d_i > b_i e_i \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

$$\theta\beta + \sum_{i=1}^{\nu} a_i \alpha - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{b_i e_i (d_i \alpha - \theta_i \beta)}{\omega_0^2 \theta_i^2 + d_i^2} > 0 \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

と簡単化される。

〔系3.2〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図2.4(a), (b)に示す飽和または不感帯の場合、定理3.1の条件Ⅲ.(i) および条件Ⅳ. または 定理3.2の条件Ⅳ.(i) および条件Ⅴは $s=j\omega$ としてつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \pi(s) = R_e \left[\sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) + \theta s + \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(s) \right] \left\{ G(s) + \frac{1}{K} \right\} \\ + \sum_{i=1}^{\nu} l_i \left\{ \frac{1}{K} - K |G(s)|^2 \right\} \geq \delta > 0 \quad \dots\dots\dots (3.34) \end{aligned}$$

$$Z_i(s) = \frac{-d_i a_i \beta_i (s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \hat{a}_i \hat{d}_i \hat{\beta}_i (s + d_i + a_i) + d_i \bar{d}_i \hat{a}_i \hat{\gamma}_i + \hat{d}_i \bar{a}_i a_i \beta_i \hat{\beta}_i \hat{\delta}_i}{(s + d_i + \bar{a}_i)(s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \bar{a}_i \bar{d}_i \hat{\gamma}_i \hat{\delta}_i} \quad (3.35)$$

$$\theta, a_i, d_i, \hat{a}_i; \hat{d}_i, \bar{a}_i, \bar{d}_i \geq 0 \quad \dots\dots\dots (3.36)$$

$$|\beta_i|, |\hat{\beta}_i|, |\gamma_i|, |\hat{\gamma}_i| \leq 1 \quad \dots\dots\dots (3.37)$$

なお、定理3.1の条件Ⅲ.(ii)と(iii), または定理3.2の条件Ⅳ.(iii)は削除される。

〔系3.3〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図2.4(d)に示すような理想リレーでかつ $G(0) > 0$ の場合、定理3.1の条件Ⅲ.(i) および条件Ⅳ. または、定理3.2の条件Ⅳ.(i) および条件Ⅴは $s=j\omega$ としてつぎのように表わされる。

$$\pi(s) = R_e \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} (a_i + \hat{a}_i) \theta s + \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(s) \right\} G(s) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (3.38)$$

ここで $Z_i(s)$ は (3.35) 式に示すもので、またパラメータに対する条件は (3.36) および (3.37) 式と同じである。

〔系3.4〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図2.4(e)に示すような不感帯を有するリレーの場合、定理3.1の条件Ⅲ.(i) および条件Ⅳ. または定理3.2の条件Ⅳ.(i) および条件Ⅴは $s=j\omega$ としてつぎのように表わされる。

$$\pi(s) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{\nu} \{ a_i + \hat{a}_i - f_i - \hat{f}_i + R_e Z_i(s) \} + R_e \left[\sum_{i=1}^{\nu} \{ a_i + \hat{a}_i + Z_i(s) \} + \theta s \right] G(s) \geq 0 \quad (3.39)$$

ただし

$$Z_i(s) = \frac{-b_i e_i (s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \hat{b}_i \hat{e}_i (s + d_i + \bar{a}_i) + b_i \bar{b}_i \hat{e}_i + \hat{b}_i \bar{e}_i e_i}{(s + d_i + \bar{a}_i)(s + \hat{d}_i + \bar{d}_i) - \bar{b}_i \bar{e}_i} \quad (3.40)$$

$$\theta, \beta_i \geq 0$$

$$a_i \geq \max \{ |e_i|, |b_i| \beta_i, |b_i \beta_i - e_i| \}$$

$$d_i \geq \max \{ |\bar{b}_i|, |e_i| / \beta_i \}$$

$$\hat{a}_i \geq \max \{ |\hat{b}_i|, |e_i|, |\hat{b}_i - e_i| \}$$

$$\hat{d}_i \geq \max \{ |\hat{b}_i|, |\hat{e}_i| \}$$

$$\bar{a}_i \geq \max \{ |\bar{b}_i| / \beta_i, |\bar{e}_i| \}$$

$$\bar{d}_i \geq \max \{ |\bar{b}_i|, |\bar{e}_i| \beta_i \}$$

$$f_i = \max \{ |b_i| \beta_i, |b_i \beta_i - e_i| \}$$

$$\hat{f}_i = \max \{ |\hat{b}_i|, |\hat{b}_i - e_i| \}$$

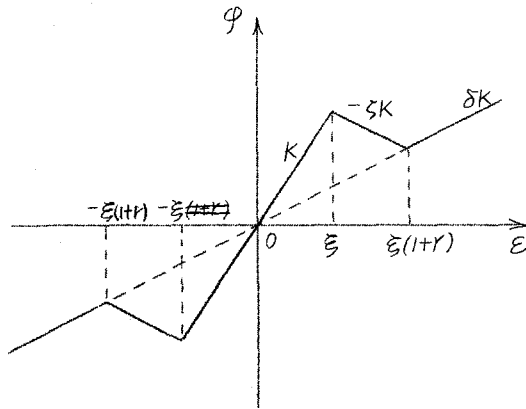


図 3.2 負のこう配を有する非線形要素

〔系 3.5〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 3.2 に示すような負のこう配を有する非線形要素の場合、定理 3.1 の条件 III.(i) および条件 IV, または定理 3.2 の条件 IV.(i) および条件 V は $s = j\omega$ としてつぎのように表わされる。

$$\pi(s) = -\frac{1}{K} \sum_{i=1}^Y (f_i + \hat{f}_i) + R_e \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^Y (a_i + \hat{a}_i) + \theta s \right\} G(s) + \sum_{i=1}^Y Z_i(s) (G(s) + \frac{1}{K}) \right\} \geq 0 \quad (3.41)$$

ここで $Z_i(s)$ は (3.40) 式と同じものである。ただパラメータの条件は

$$\theta \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \delta = \frac{1-\xi Y}{1+Y}$$

$$a_i \geq \max \{ |Q_{1i}|/2, Q_{3i}|Q_{2i}|/2, Q_{3i}|e_i| \}$$

$$d_i \geq \max \{ |Q_{1i}|/2, \beta_i Q_{3i}|b_i| \}$$

$$a_i d_i \geq \max \{ (\beta_i b_i)^2/4\delta, Q_{2i}^2/4\delta \}$$

$$f_i = \max \{ (|Q_{1i}| - 2a_i)/2\delta, (Q_{3i}|Q_{2i}| - 2a_i)/2\delta, (\beta_i b_i^2 - 4a_i d_i \delta)/4d_i \delta, \\ (Q_{2i}^2 - 4\beta_i a_i d_i \delta)/4\delta^2 \beta_i d_i \}$$

$$\hat{a}_i \geq \max \{ |\bar{Q}_{1i}|/2, Q_{3i}|\hat{Q}_{2i}|/2, Q_{3i}|\hat{e}_i| \}$$

$$\hat{d}_i \geq \max \{ |\bar{Q}_{1i}|/2, Q_{3i}|\hat{b}_i| \}$$

$$\hat{a}_i \hat{d}_i \geq \max \{ \hat{b}_i^2/4\delta, \hat{Q}_{2i}^2/4\delta \}$$

$$\hat{f}_i = \max \{ (|\hat{Q}_{1i}| - 2\hat{a}_i)/2\delta, (Q_{3i}|\hat{Q}_{2i}| - 2\hat{a}_i)/2\delta, \\ (\hat{b}_i^2 - 4\hat{a}_i \hat{d}_i \delta)/4\hat{d}_i \delta, (\hat{Q}_{2i}^2 - 4\hat{a}_i \hat{d}_i \delta)/4\delta^2 \hat{d}_i \}$$

$$\bar{a}_i = \max \{ |Q_{4i}|/2\beta_i, Q_{3i}|Q_{5i}|/2\beta_i, Q_{3i}|\bar{e}_i| \}$$

$$\bar{d}_i \geq \max \{ |Q_{4i}|/2, Q_{3i}|Q_{6i}|/2, Q_{3i}|\bar{b}_i| \}$$

$$\bar{a}_i \bar{d}_i \geq \max \{ Q_{6i}/4\beta_i \delta, Q_{5i}^2/4\beta_i \delta \}$$

ただし

$$Q_{1i} = e_i(1-\delta) + \beta_i b_i, \quad Q_{2i} = \delta(\beta_i b_i - e_i) + e_i, \quad Q_{3i} = (\delta + \alpha)/\delta(1 + \alpha)$$

$$Q_{4i} = \bar{b}_i + \beta_i \bar{e}_i, \quad Q_{5i} = \bar{b}_i \delta + \beta_i \bar{e}_i, \quad Q_{6i} = b_i + \beta_i \bar{e}_i \delta,$$

$$\hat{Q}_{1i} = \hat{e}_i(1-\delta) + \hat{b}_i, \quad \hat{Q}_{2i} = \delta(\hat{b}_i - \hat{e}_i) + \hat{e}_i$$

系 3.2 ~ 3.5 は定理および表 2.1 より、与えられた $\varphi(\varepsilon)$ に対してパラメータを簡単化して導いたものであるが、各系における $\pi(s)$ は上に示したもの

とは異なつた形にすることも可能である。

3.3 適用例

前節で示した系 3.2 ~ 3.5 を用いて最大の安定セクトを求める問題を考える。
いずれの場合も $\pi(j\omega)$ はつぎのように変形することができる。

$$\pi(j\omega) = \frac{1}{K} J(\omega) - L(\omega) \quad (3.42)$$

$\pi(j\omega) \geq 0$ となる K が存在するためには $J(\omega) \geq 0$ となることが必要である。
よつて以下ではすべての $\omega \geq 0$ に対して $J(\omega) \geq 0$ となる場合について議論を進める。いま

$$\Omega_1 \triangleq \{\omega : J(\omega) > 0, \omega \geq 0\}$$

$$\Omega_2 \triangleq \{\omega : J(\omega) = 0, \omega \geq 0\}$$

とおくと、 $\pi(j\omega) \geq 0$ は

$$\frac{1}{K} \geq \frac{L(\omega)}{J(\omega)} \quad (\omega \in \Omega_1) \quad (3.43)$$

$$L(\omega) \leq 0 \quad (\omega \in \Omega_2) \quad (3.44)$$

と表わされる。(3.44)式は K の値には関係しないので、最大の K の値 K_M は (3.43)式から決定される。ここで

$$R(\omega) \triangleq L(\omega)/J(\omega)$$

$$R_M \triangleq \max_{\omega \in \Omega_1} R(\omega)$$

とおく。 R_M はパラメータ $\theta, a_i, d_i, \dots$ によつて異なつた値を取るので、 K_M を求めるには、これらのパラメータに関して R_M を最小となるようにしなければならない。すなわち

$$R_m \triangleq \min_{\theta, a_i, d_i, \dots} \max_{\omega \in \Omega_1} R(\omega)$$

とすれば $K_M = 1/R_m$ となる。ただし $R_m \leq 0$ のときは安定セクタ $[0, \infty)$ となる。なお $R(\omega)$ は一般に複雑であるので、 R_m を決定するにはデジタル計算機を用いて極値探索法を適用すればよい。

なお、上述の方法を、 S 平面の原点以外の虚軸上に極を有する伝達関数 $G(s)$

に適用する場合はつぎの点に注意しなければならない。すなわち、 $G(s)$ が (3.18) 式のように虚軸上に一對の $s = \pm j\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$) なる極を有する場合は、

$$X(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega), \quad Y(\omega) = \omega \operatorname{Im}(j\omega) \quad \dots\dots\dots (3.45)$$

とおくと、

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} X(\omega) = \pm\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} Y(\omega) = \pm\infty$$

となる。一方 $L(\omega)$ は

$$L(\omega) = L_1(\omega)X(\omega) + L_2(\omega)Y(\omega) \quad \dots\dots\dots (3.46)$$

と表わすことができる。 $\omega \rightarrow \omega_0$ で $L(\omega) \rightarrow \pm\infty$ ならば (3.43), (3.44) 式より $\pi(j\omega) \geq 0$ となる K が存在しなくなる。(3.18) 式を使うと、

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\alpha \omega_0^2}{\beta} \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

となる^{4.40}。したがって

$$H(\omega) \triangleq L_1(\omega) + \frac{\alpha \omega_0^2}{\beta} L_2(\omega)$$

とおくと、 $\pi(j\omega) \geq 0$ となる K が存在するためには

$$H(\omega_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.48)$$

となる必要がある。

具体的な例について上述の方法を適用した結果をつぎに示す。

〔例 3.1〕 図 2.4 (a) に示す飽和要素で伝達関数が

$$G(s) = \frac{100s(s+1)}{(s^2+4s+5)(s^2+s+6)} \quad (3.49)$$

である制御系の安定セクタを求める。系 3.2 において $\nu=1$ とおき、簡単のために添字 1 を省略する。極値探索法 (ランダム法) を適用して R_m を計算した結果 $\theta=23.17^\circ$, $\alpha=1$, $d=5.016$, $\hat{\alpha}=93.36^\circ$, $\hat{d}=90.36^\circ$, $\bar{\alpha}=0.2124$, $\bar{d}=98.49^\circ$, $\beta=0.8122$, $\bar{\beta}=-0.02695$, $\gamma=0.4063$, $\hat{\gamma}=0.244^\circ$ のとき $J(\omega) \geq 0$, $R_m=0$ となり安定セクタ

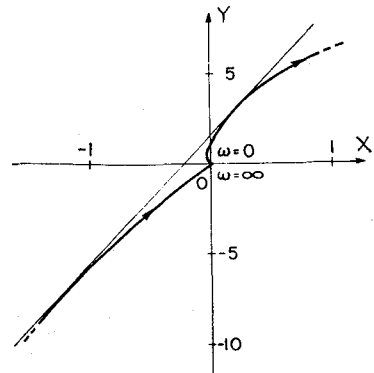


図 3.3 例 3.1 の Popov 軌跡

は $[0, \infty)$ となる。なおこの伝達関数の Popov 軌跡 (3.45) 式の $X(\omega)$ および $Y(\omega)$ の値をすべての $\omega \geq 0$ に対して X - Y 平面に描いた軌跡) は図 3.3 のようになる。これより Popov の安定条件 (2.22) 式によって与えられる安定セクタ (これを Popov セクタと呼ぶ。) は $[0, 5.34)$ であることがわかる。

〔例 3.2〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 2.4 (a) に示す飽和要素で伝達関数が

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 5)(s^2 + 4s + 2)} \quad (3.50)$$

である制御系の安定セクタを求める。この制御系が極限安定であることは明らかである。例 3.1 と同様にして、 $\nu = 1$, $\alpha = 1$, $d = 2.60$, $\hat{\alpha} = 17.1$, $\hat{d} = -2.06$, $\bar{\alpha} = 18.5$, $\bar{d} = 3.19$, $\beta = -0.503$, $\hat{\beta} = 0.208$, $\gamma = 0.849$, $\hat{\gamma} = 0.143$ (添字 1 は省略している。) とおくと、すべての $\omega \geq 0$ に対して $J(\omega) \geq 0$ となる。さらに (3.49) 式より $\theta = 9.38$ となる。このとき (3.19) 式は満足される。また $\omega \geq 0$ に対して $L(\omega) \leq 0$ となる。すなわち、 $R_m \leq 0$ となり安定セクタは $(0, \infty)$ と求まる。なお、この場合の Popov 軌跡は図 3.4 に示すようになり、これより Popov セクタは $(0, 55.6)$ となる。

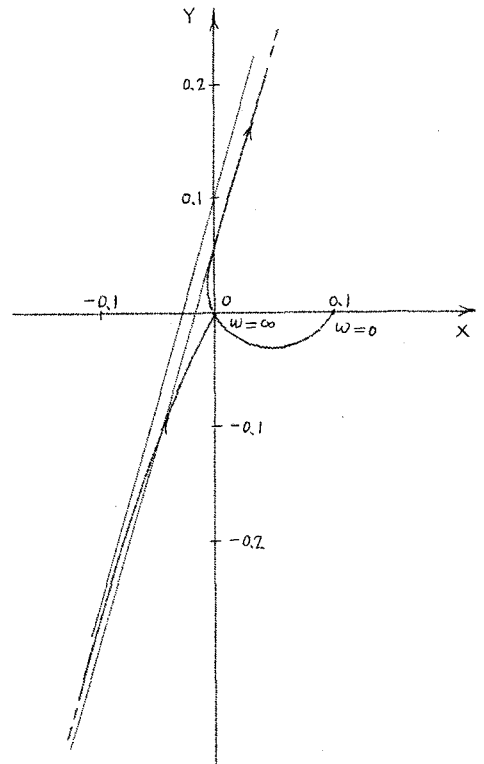


図 3.4 例 3.2 の Popov 軌跡

〔例 3.3〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 2.4 (e) に示す不感帯を有するリレーで伝達関数が例 3.1 と同じものとする。系 3.4 において $\nu = 1$ (以下添字 1 は省略), $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{e} = \hat{d} = \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{e} = \bar{d} = 0$ とする。いま、 $\theta = 1$, $\beta = 7/6$, $\alpha = 2.8$, $b = 41/35$, $e = -14$, $d = 1.2$ とおけば (3.44) 式の $\pi(s)$ は

$$\pi(s) = \frac{1}{K} \left\{ \frac{1}{30} + R_e \frac{1.64}{s + 1.2} \right\} + R_e \frac{100s(s+1)}{(s+1.2)(s^2+s+6)}$$

となる。この式の右辺第 2 項は $s = j\omega$ としたとき非負であるので、安定セクタは $[0, \infty)$ と求まる。

〔例3.4〕 $q(\varepsilon)$ が図 2.4 (e) に示す不感帯を有するリレーで伝達関数が

$$G(s) = \frac{100(s+1)(s+0.01)^2}{s(s^2+4s+5)(s^2+s+6)} \quad \dots\dots\dots (3.51)$$

を考える。これが極限定であることは明らかである。系 3.4 において $\nu=1$ (以下添字 1 は省略), $\theta=1$, $a=2.8$, $b=41/35$, $e=-1.4$, $d=1.2$, $\beta=7/6$, $\hat{a}=\hat{b}=\hat{e}=\hat{d}=\bar{a}=\bar{b}=\bar{e}=\bar{d}=0$ とすると、(3.15) 式は満足される。また、

$$J(\omega) = \frac{1}{30} + \operatorname{Re} \frac{1.64}{j\omega + 1.2}$$

$$L(\omega) = -100 \operatorname{Re} \frac{(j\omega+1)(j\omega+0.01)^2}{j\omega(j\omega+1.2)\{(j\omega)^2+j\omega+6\}}$$

となる。すべての $\omega \geq 0$ に対して、 $J(\omega) > 0$, $L(\omega) \leq 0$ となるから、 $R_m \leq 0$ となる。よって安定センタは $(0, \infty)$ と求まる。なおこの場合の Popov 軌跡は図 3.5 のようになり、これより Popov セクタは $(0, 7.92)$ と求まる。

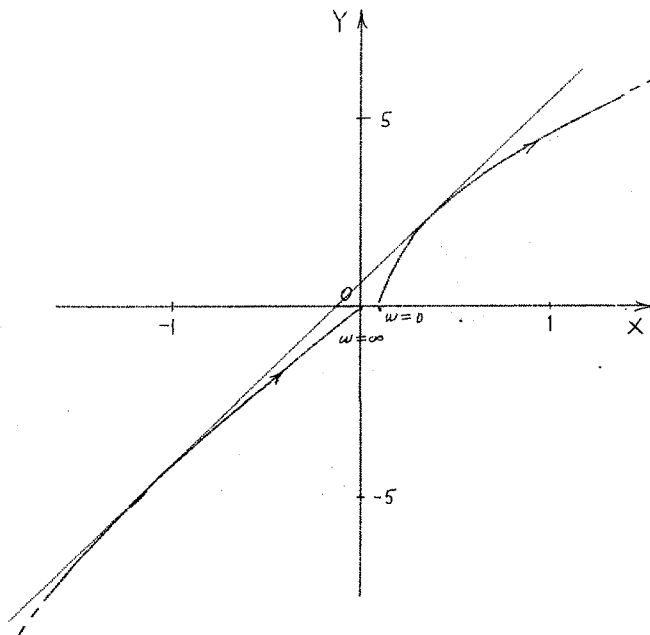


図 3.5 例 3.4 の Popov 軌跡

〔例 3.5〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 2.4 (d) に示す理想リレーで伝達関数が

$$G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 5s + 0.1}{(s^2 + 4s + 5)(s^2 + 5s + 6)} \quad \dots\dots\dots (3.52)$$

の場合を考える。系 3.3 において $\nu = 1$ (以下添字は省略), $\hat{a} = \hat{d} = \bar{a} = \bar{d} = 0$, $\theta = 1$, $\alpha = 3$, $d = 1.25$, $\beta = -0.8$ とすれば、すべての $\omega \geq 0$ に対して (3.38) 式は

$$\pi(s) = R_e \frac{(s^2 + 4.25s + 6.75)(s^3 + 6s^2 + 5s + 0.1)}{(s + 1.25)(s^2 + 4s + 5)(s^2 + 5s + 6)} > 0, \quad (s = j\omega)$$

となる。よってこの制御系は大局的漸近安定である。なおこの場合の Popov 軌跡は図 3.6 のようになり、Popov の安定条件では安定判別はできない。

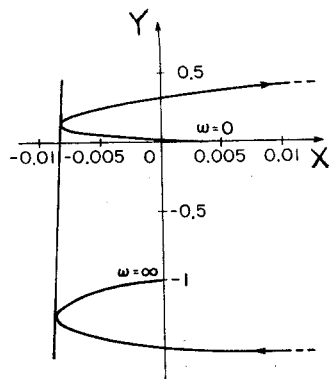


図 3.6 例 3.5 の Popov 軌跡

〔例 3.6〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 3.2 に示す非線形要素 (ただし $\zeta = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.633$) で伝達関数が

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.01)(s + 0.5)(s^2 + 0.5s + 4)} \quad (3.53)$$

の場合を考える。系 3.5 において $\nu = 1$ (以下添字 '1' は省略), $\alpha = 11.8$, $d = 0.438$, $e = -6.48$, $b = -0.345$, $\hat{a} = 2.84$, $\hat{d} = 8.87$, $\hat{e} = 0.831$, $\hat{b} = -1.10$, $\bar{a} = 0.00257$, $\bar{d} = 0.0827$, $\bar{e} = 0.000539$, $\bar{b} = -0.0133$, $\theta = 6.10$, $\beta = 6.78$ のとき、安定セクタは $[0, 2.27]$ と求まる。なおこの場合の Popov 軌跡は図 3.7 のようになり、これより Hurwitz セクタの上限は 4.51, Popov セクタは $[0, 2.11)$ と求まる。

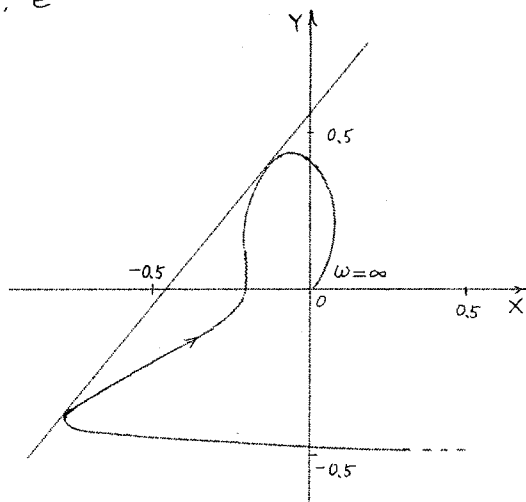


図 3.7 例 3.6 の Popov 軌跡

〔例 3.7〕 $\varphi(\varepsilon)$ が図 3.8 に示すもので (ただし $\delta = 0.293$) 伝達関数が

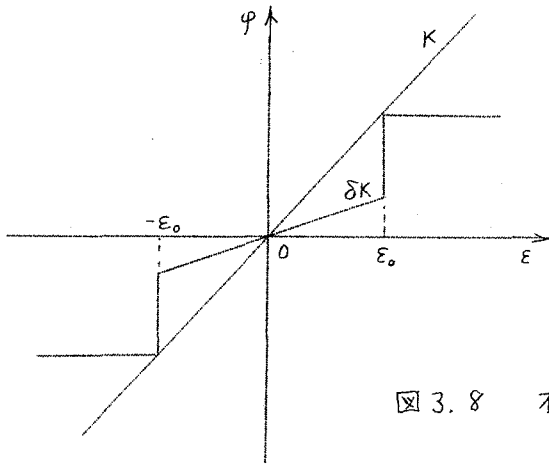


図 3.8 不連続非線要素

$$G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s^2+0.8s+16)} \quad (3.54)$$

の場合を考える。これが極限安定であることは明らかである。定理 3.2 より $\pi(s)$ は

$$\pi(s) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^n (-f_i + R_e \frac{b_i}{\theta_i s + d_i}) + R_e \left[\theta s + \sum_{i=1}^n \left\{ a_i - \frac{b_i e_i}{\theta_i s + d_i} \right\} \right] G(s)$$

となる。ただし

$$a_i \geq \max \{ |1+b_i|, |\delta+b_i|, |e_i| \}$$

$$d_i \geq \max \{ |b_i|, |1+e_i|, |\delta+e_i| \}$$

$$4a_i d_i \geq \max \{ (\delta+b_i \delta+e_i)^2 / \delta, (\delta+b_i+e_i \delta)^2 / \delta, (1+b_i+e_i)^2 \}$$

$$f_i = \max \left[\{ |\delta+b_i| - a_i \} / (\delta+1), \{ |1+b_i| - a_i \} / (\delta+1), \{ (\delta+b_i \delta+e_i)^2 - 4a_i d_i \delta \} / 4d_i \delta^2, \{ (\delta+b_i+e_i \delta)^2 - 4a_i d_i \delta \} / 4d_i \delta, \{ (1+b_i+e_i)^2 - 4a_i d_i \} / 4d_i \right]$$

いま $\nu=1$ (以下 θ_1 を除いて添字 1 は省略), $\theta=0.102$, $a=3.21$, $b=-0.648$, $e=-1.20$, $d=0.918$, $\theta_1=1.97$, $f=-2.21$ とおくと (3.15)

(37)

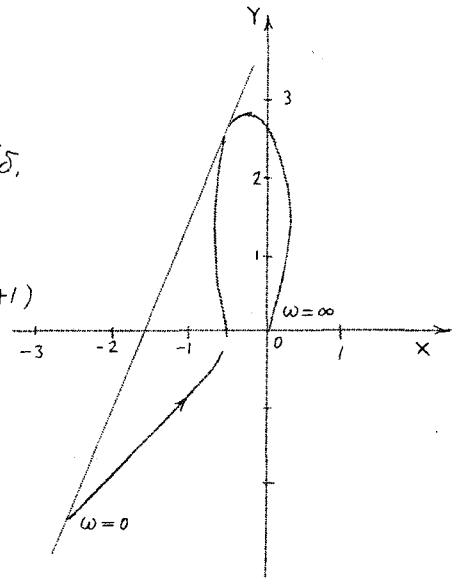


図 3.9 例 3.7 の Popov 軌跡

式は満足され、 $R_m=0.986$ となる。すなわち安定セクタは $(0, 1.01)$ と求まる。この場合の Popov 軌跡は図 3.9 のようになり、これより Hurwitz セクタは $(0, 1.76)$ 、Popov セクタは $(0, 0.65)$ と求まる。

〔例 3.8〕 $\varphi(E)$ が図 2.4(f) に示すもので伝達関数が

$$G(s) = \frac{s^2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad \dots\dots\dots (3.55)$$

の場合を考える。定理 3.3 および表 3.1 (b) を用い、 $\nu=1$ (以下 θ_1 を除き添字 1 は省略)、 $k_K=1$, $w=1.2$ として安定セクタを求めると、 $\theta=55.9$, $\alpha=513.9$, $b_1=0.0152$, $e=23.0$, $d=105$, $\theta_1=58.0$, $g_K=-513.88$ のとき $[0, 44.7]$ と求まる。なお Popov 形の安定条件を適用して安定セクタを求めると $[0, 41.5]$ となる。

3.4 定理の証明

3.4.1 補助定理

定理の証明の準備としてつぎに補助定理を示す。

〔補助定理 3.1〕 (Yokubovich)⁸ $\underline{P}=\underline{P}'$, $\underline{A}$, $\underline{D}=\underline{D}'$ は $n \times n$ の行列、 $\underline{q}$, $\underline{l}$ は n 次のベクトル、 $\underline{P} \geq 0$ とする。さらに

$$\underline{Q}(\underline{P}) = \begin{cases} \underline{E}, \underline{f} \\ \underline{f}', \underline{P} \end{cases} \quad \begin{cases} -\underline{E} = \underline{P}\underline{A} + \underline{A}'\underline{P} + \underline{R} \\ -\underline{f} = \underline{P}\underline{q} + \underline{l} \end{cases}$$

$$\pi = \underline{P} + 2\operatorname{Re} \underline{l}' \underline{A}_\omega^{-1} \underline{q} - (\underline{A}_\omega^{-1} \underline{q})^* \underline{R} \underline{A}_\omega^{-1} \underline{q} \quad \dots\dots\dots (3.56)$$

$$\underline{A}_\omega = \underline{A} - j\omega \underline{I}$$

とおく。このとき

- (i) $\underline{Q}(\underline{P}) \geq 0$ となる行列 $\underline{P}=\underline{P}'$ が存在するためには、すべての $-\infty < \omega < \infty$ に対して $\pi \geq 0$ となる必要がある。
- (ii) $\operatorname{rank} [\underline{q}, \underline{A}\underline{q}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{q}] = n$ ならば $\pi \geq 0$ はさらに十分条件となる。
- (iii) $\underline{R} \geq 0$, $\underline{A}$ は安定かつ $\operatorname{rank} [\underline{l}, \underline{A}'\underline{l}, \dots, (\underline{A}^{n-1})'\underline{l}] = n$ ならば、 $\underline{P} > 0$ となる。

3.4.2 定理 3.1 の証明

証明は第 2 章で示した Lyapunov 関数と定理 2.1 を用いて行なう。

制御系 (S. 4) に対して、さらにつぎに示す仮想的な制御系を考える。

$$\dot{\underline{y}} = \underline{B} \underline{y} + \underline{b} \varphi(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (3.57)$$

ここで $\underline{y}$ は 2 次の状態ベクトル, $\underline{B}$ は 2×2 の安定な行列, $\underline{b}$ は 2 次の定数ベクトルである。また (3.57) 式は完全可制御であるとする。制御系 (S. 4) と (3.57) 式を合成するとつぎの $(n+2)$ 次の制御系が得られる。

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C} \underline{z} + \underline{g} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{h}' \underline{z} \quad \dots\dots\dots (3.58)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{bmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} \underline{c} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & \underline{B} \end{bmatrix}$$

(3.58) 式の平衡点 $\underline{z}_e$ は ε_e を $\varphi(\varepsilon)$ の不連続点とすると, $\varepsilon_e \neq 0$ の場合は $\underline{z}_e = 0$, $\varepsilon_e = 0$ かつ $G(0) \neq 0$ の場合は $\underline{z}_e = 0$, $\varepsilon_e = 0$ かつ $G(0) = 0$ の場合は $\underline{z}_e = -\underline{C}^{-1} \underline{g} \varepsilon_e$ となる。よって制御系 (S. 4) が大局的漸近安定になることを示すには (3.58) 式が大局的漸近安定になることを示せばよい。

(3.58) 式に対して、(2.31) 式と同様なつぎの Lyapunov 関数を考える。

$$V = \underline{z}' \underline{P} \underline{z} + \theta \int_0^t \varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} dt + \sum_{i=1}^n \left\{ \theta_i \int_0^t \varphi(\varepsilon_i) \dot{\varepsilon}_i dt + \hat{\theta}_i \int_0^t \varphi(\hat{\varepsilon}_i) \dot{\hat{\varepsilon}}_i dt + \int_0^t (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) dt \right\} \quad \dots\dots\dots (3.59)$$

$$\varepsilon_i = \underline{y}_i' \underline{z}, \quad \hat{\varepsilon}_i = \hat{\underline{y}}_i' \underline{z}$$

ここで $(n+2) \times (n+2)$ の行列 $\underline{P}$ および $(n+2)$ 次のベクトル $\underline{y}_i, \hat{\underline{y}}_i$ および $\theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は未知のパラメータである。

$\varphi(\varepsilon)$ は一般に不連続関数としているので (3.58) 式の解は Filippov の意味の解を考える^{13~15}。したがって、解 $\underline{z}(t)$ は時間 t のほとんどいたるところで絶対連続関数であり、(3.59) 式の Lyapunov 関数も絶対連続となる。よって $\dot{\underline{z}}(t)$ および (3.58) 式の解軌道に沿った (3.59) 式の時間微分は存在する。また ε が $\varphi(\varepsilon)$ の不連続点の場合、 $\dot{\varepsilon} = 0$ である。よって

$$\dot{V} = \dot{\underline{z}}' \underline{P} \underline{z} + \underline{z}' \underline{P} \dot{\underline{z}} + \theta \varphi \dot{\varepsilon} + \sum (\theta_i \varphi_i \dot{\varepsilon}_i + \hat{\theta}_i \hat{\varphi}_i \dot{\hat{\varepsilon}}_i + N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i)$$

と表わすことができる。(3.58) 式を考慮してこれを整理すると、

$$-\dot{V} = \Omega(\underline{z}, \varphi) - \sum \lambda_i \varphi_i - \sum \hat{\lambda}_i \hat{\varphi}_i + \sum \underline{\mu}_i' \underline{M}_i \underline{\mu}_i \quad (3.60)$$

となる。ただし

$$\Omega(\underline{z}, \varphi) = \underline{z}' \underline{F} \underline{z} + 2 \underline{f}' \underline{z} \varphi + \rho \varphi^2 \quad (3.61)$$

$$-\underline{F} = \underline{P} \underline{C} + \underline{C}' \underline{P} + \sum \underline{R}_i \quad (3.62)$$

$$\underline{R}_i = \underline{H}_i' \underline{\Delta}_i \underline{H}_i + \underline{\hat{H}}_i' \underline{\hat{\Delta}}_i \underline{\hat{H}}_i + \underline{\bar{H}}_i' \underline{\bar{\Delta}}_i \underline{\bar{H}}_i \quad (3.63)$$

$$\underline{H}_i' = [\underline{h}, \underline{y}_i], \quad \underline{\hat{H}}_i' = [\underline{\hat{h}}, \underline{\hat{y}}_i], \quad \underline{\bar{H}}_i' = [\underline{y}_i, \underline{\hat{y}}_i]$$

$$-\underline{f} = \underline{P} \underline{g} + \underline{l} \quad (3.64)$$

$$\underline{l} = \frac{1}{2} \{ \theta \underline{C}' \underline{h} + \sum (\alpha_i + \hat{\alpha}_i) \underline{h} + \sum (\theta_i \underline{y}_i + \hat{\theta}_i \underline{\hat{y}}_i) \} \quad (3.65)$$

$$-\rho = \theta \underline{h}' \underline{g} + \sum (\underline{g}_i + \hat{\underline{g}}_i) \quad (3.66)$$

$$\lambda_i = \theta_i \dot{\varepsilon}_i + \underline{h}_i \varphi + \underline{e}_i \varepsilon + \underline{d}_i \varepsilon_i + \underline{\bar{a}}_i \varepsilon_i + \underline{\bar{e}}_i \hat{\varepsilon}_i \quad (3.67)$$

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\theta}_i \dot{\varepsilon}_i + \underline{\hat{h}}_i \varphi + \underline{\hat{e}}_i \varepsilon + \underline{\hat{d}}_i \hat{\varepsilon}_i + \underline{\bar{e}}_i \varepsilon_i + \underline{\bar{d}}_i \hat{\varepsilon}_i \quad (3.68)$$

非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続で $G(0)=0$ の場合は、平衡点は $\underline{z}_e = -\underline{C}' \underline{g} \varepsilon_0$ となるが、 $\tilde{\underline{z}} = \underline{z} - \underline{z}_e$, $\tilde{\varphi} = \varphi - \varepsilon_0$ とすると (3.58) 式は $\underline{h}' \underline{z}_e = -\underline{h}' \underline{C}' \underline{g} \varepsilon_0 = -G(0) \varepsilon_0 = 0$ であることを注意すれば

$$\dot{\tilde{\underline{z}}} = \underline{C} \tilde{\underline{z}} + \underline{g} \tilde{\varphi}, \quad \varepsilon = \underline{h}' \tilde{\underline{z}} \quad (3.69)$$

と表わされる。よってこの場合も平衡点 $\underline{z}_e = 0$ の場合に帰着される。したがって以下では、平衡点 $\underline{z}_e = 0$ の場合の証明をつぎのように4段階に分けて示す。

第1段階 $\dot{V} \leq 0$ なることを示す。定理の条件IVより $\underline{M}_i \geq 0$ である。よって、 $\Omega(\underline{z}, \varphi) \geq 0$ および $\lambda_i \equiv 0$, $\hat{\lambda}_i \equiv 0$ なることを示す。

まず $\Omega(\underline{z}, \varphi) \geq 0$ なることを示す。 $\rho = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega)$ であるから $\rho \geq 0$ 。よって $\sqrt{\rho} \underline{g} = \underline{f}$ とおくと、

$$\Omega = \underline{z}' (\underline{F} - \underline{g} \underline{g}') \underline{z} + (\underline{g}' \underline{z} + \sqrt{\rho} \varphi)^2$$

と表わされる。よって $\Omega \geq 0$ となるためには、

$$\left. \begin{array}{ll} \underline{P} \underline{F} - \underline{g} \underline{g}' \geq 0 & (\rho > 0) \\ \underline{F} \geq 0, \underline{f} = 0 & (\rho = 0) \end{array} \right\} \quad (3.70)$$

となることが必要かつ十分である。いま

$$\left. \begin{aligned} W_i(s) &= Y_i'(C - sI)^{-1} g \\ W_i(s) &= \hat{Y}_i'(C - sI)^{-1} g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.71)$$

とおき、 $\hat{h}'C(C-sI)^{-1}g = \hat{h}'g + sG(s)$ なることに注意すれば、補助定理 3.1 より $\pi(j\omega) \geq 0$ ならば、 $p > 0$ のときは $E - g g' \geq 0$ 、また $p = 0$ のときは $E \geq 0$ 、 $f = 0$ となる。よって $\Omega \geq 0$ となる。

つぎに $\lambda_i \equiv 0$ 、 $\hat{\lambda}_i \equiv 0$ なることを示す。(3.67)式において λ_i を Laplace 変換すると

$$\mathcal{L}\lambda_i = \theta_i s \mathcal{L}e_i + h_i \mathcal{L}\varphi + e_i \mathcal{L}E + d_i \mathcal{L}E_i + \bar{a}_i \mathcal{L}E_i + \bar{b}_i \mathcal{L}\hat{E}_i$$

となる。(3.58)、(2.12)および(3.71)式に注意すると、

$$\mathcal{L}E = -G(s)\mathcal{L}\varphi, \quad \mathcal{L}E_i = -W_i(s)\mathcal{L}\varphi, \quad \mathcal{L}\hat{E}_i = -\hat{W}_i(s)\mathcal{L}\varphi$$

であるから

$$\mathcal{L}\lambda_i = -\{(\theta_i s + d_i + \bar{a}_i)W_i + \bar{b}_i \hat{W}_i + e_i G(s) - h_i\} \mathcal{L}\varphi$$

同様に (3.68) 式より

$$\mathcal{L}\hat{\lambda}_i = -\{(\hat{\theta}_i s + \hat{d}_i + \bar{d}_i)\hat{W}_i + \bar{e}_i W_i + \hat{e}_i G(s) - \hat{h}_i\} \mathcal{L}\varphi$$

となる。よって (3.2)、(3.3) 式より $\lambda_i \equiv 0$ 、 $\hat{\lambda}_i \equiv 0$ となる。

よって $\dot{V} \leq 0$ が示された。

第2段階 $\underline{z} = 0$ 以外には $\dot{V} = 0$ を満足する (3.58) 式の解は存在しないことを示す。

(i) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で連続な場合： $\sqrt{p}g = f$ とおくと (3.70) 式より $\Omega = 0$ となるのは $\sqrt{p}q \equiv -g'z$ のときである。

いま $p \neq 0$ かつ $q'z \equiv 0$ とすると、(3.58)式は $\dot{z} = Cz$ となり、 C は安定であるから $t \rightarrow \infty$ で $z \rightarrow 0$ となる。また $p \neq 0$ かつ $q'z \neq 0$ とすると、 $z(t)$ は線形方程式

$$\dot{z} = (C - p^{-\frac{1}{2}} g g') z \dots\dots\dots (3.72)$$

の解となる。また $p = 0$ の場合は $p_0 = \sqrt{p}$ 、 $p_1 = g'g$ 、 $p_2 = g'Cg$ 、 $\dots$ 、 $p_k = g'C^{k-1}g$ かつ $p_0 = p_1 = \dots = p_{k-1} = 0$ 、 $p_k \neq 0$ とおくと、 $z(t)$ は線形方程式

$$\dot{\underline{z}} = (\underline{C} - \underline{P}_R^{-1} \underline{g} \underline{g}' \underline{C}^R) \underline{z} \quad \dots\dots\dots (3.73)$$

の解となる。いま $\dot{V} \equiv 0$ とすると (3.72) または (3.73) の解 $\underline{z}(t)$ は有界かつ概周期関数[†]となる。すなわちこれらの方程式の固有値は $\pm j\omega_i \neq 0$ であり、かつ $\pi(j\omega_i) = 0$ となる。一般に (3.72) または (3.73) 式の解 $\underline{z}(t)$ は

$$\underline{z}(t) = \sum_{i=-N}^N \underline{v}_i \{ \exp j\omega_i t \} \quad \dots\dots\dots (3.74)$$

と表わされる、ただし $\underline{v}_{-i} = \overline{\underline{v}_i}$ (— は複素共役を示す。), かつ $\omega_{-i} = -\omega_i$ である。また $\varphi(\varepsilon)$ は

$$\varphi\{\varepsilon(t)\} = \sum_{i=-N}^N \underline{u}_i \{ \exp j\omega_i t \} \quad \dots\dots\dots (3.75)$$

とかける。ただし $\underline{u}_{-i} = \overline{\underline{u}_i}$ 。 (3.74), (3.75) 式を (3.58) 式に代入すると、 $\underline{v}_i = -\underline{u}_i (\underline{C} - j\omega_i \underline{I})^{-1} \underline{g}$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi\{\varepsilon(t)\} \{ \varepsilon(t) - \varphi\{\varepsilon(t)\} / K \} dt \\ = \begin{cases} -\sum_{i=-N}^N |\underline{u}_i|^2 \{ \text{Re } G(j\omega_i) + \frac{1}{K} \} \geq 0 & (K \neq \infty) \\ -\sum_{i=-N}^N |\underline{u}_i|^2 \text{Re } G(j\omega_i) > 0 & (K = \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これは定理の条件Ⅲと矛盾する。よって $\dot{V} \equiv 0$ となるのは $\underline{z} \equiv \underline{0}$ のみである。

- (ii) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で不連続な場合 : $\varepsilon = 0$ で制御系がすべり動作を起さない場合は上述の場合に帰着する。またすべり動作を起す場合、すなわち $\varepsilon(t) \equiv 0$ の場合は

$$\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_{R-1} = 0, \quad \tau_R = \underline{R}' \underline{C}^R \underline{g} \neq 0$$

とすると、(3.58) 式はつぎのような線形方程式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} = \underline{G} \underline{z}, \quad \underline{R}' \underline{z} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.76) \\ \underline{G} = \underline{C} - \tau_R^{-1} \underline{g} \underline{R}' \underline{C}^{R+1} = \begin{bmatrix} \underline{A} - \tau_R^{-1} \underline{a} \underline{c}' \underline{A}^{R+1} & \underline{0} \\ -\tau_R^{-1} \underline{b} \underline{c}' \underline{A}^{R+1} & \underline{B} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

† 任意の $\delta > 0$ に対して $l(\delta) > 0$ が存在して、 (a, b) を任意な区間として $b - a > l(\delta)$ ならば、ある $\tau \in (a, b)$ を選んで $\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t+\tau) - f(t)| < \delta$ とできるとき $f(t)$ を概周期関数という。

行列 $\underline{G}$ の固有値は、 $\underline{B}$ の固有値と伝達関数 $G(s)$ の零点に一致する²⁴。よって定理の条件 II. (ii) より $t \rightarrow \infty$ で $\underline{z} \rightarrow \underline{0}$ となり、 $\dot{V} = 0$ となるのは $\underline{z} = \underline{0}$ のときのみである。

第3段階 $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V(\underline{z}) \rightarrow \infty$ となることを示す。 $\varphi(\varepsilon)$ は1価関数であるので

$$\int_0^t \varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} dt = \int_0^{\varepsilon(t)} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon(0)} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

となる。したがって

$$\int_0^t \varphi(\varepsilon) \dot{\varepsilon} dt \geq Y[\varepsilon(0)] \quad \dots\dots\dots (3.77)$$

と表わされる。 $Y[\varepsilon(0)]$ は、非負で $|\varepsilon(0)|$ に関して非減少関数である。よって $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V(\underline{z}) \rightarrow \infty$ を示すには $P > 0$ なることを示せばよい。

$$2 \underline{e}' (\underline{C} - s \underline{I})^{-1} \underline{g} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

であるから、条件 III. (iii) によって $\text{rank} [\underline{e}, \underline{C}'\underline{e}, \dots, (\underline{C}^{n-1})'\underline{e}] = n+2$ となる。よって補助定理 3.1 (iii) より $P > 0$ となる。

$\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) > 0$ ならば、 $E > 0$ となり $\underline{C}$ は安定であるから (3.62) 式より $P > 0$ となる。

また $\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) = 0$ の場合を考える。十分大きな s に対して

$$\begin{aligned} \pi(s) &= 2R_e \underline{e}' (\underline{C} - s \underline{I})^{-1} \underline{g} - \Sigma \{ (\underline{C} - s \underline{I})^{-1} \underline{g} \}^* R_i \{ (\underline{C} - s \underline{I})^{-1} \underline{g} \} \\ &= -2R_e \underline{e}' \left(\frac{\underline{g}}{s} + \frac{\underline{C}\underline{g}}{s^2} + \frac{\underline{C}^2\underline{g}}{s^3} + \dots \right) \\ &\quad - \Sigma \left(\frac{\underline{g}}{s} + \frac{\underline{C}\underline{g}}{s^2} + \dots \right)^* R_i \left(-\frac{\underline{g}}{s} + \frac{\underline{C}\underline{g}}{s^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $s = j\omega$ とおくと

$$\pi = 2 \underline{e}' \left[\frac{\underline{C}\underline{g}}{\omega^2} - \frac{\underline{C}^3\underline{g}}{\omega^4} + \dots \right] - \Sigma \left[\frac{\underline{g}' R_i \underline{g}}{\omega^2} - \frac{\underline{g}' \underline{C} R_i \underline{C} \underline{g}}{\omega^4} + \dots \right]$$

よって

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \pi = 2 \underline{e}' \underline{C} \underline{g} - \Sigma \underline{g}' R_i \underline{g} \quad \dots\dots\dots (3.78)$$

となる。一方

$$q'Fq = 2\ell' Cq - \Sigma q'R_i q \quad \dots\dots\dots (3.79)$$

(3.78), (3.79) 式より $q'Fq = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \pi(j\omega)$ となるから、定理の条件Ⅲ.(iv) より $F > 0$ となり、結局 $P > 0$ となる。

第4段階 平衡点 $\underline{z} = \underline{0}$ が Lyapunov の意味で安定であることを示す。
 $\underline{z}_0 \triangleq \underline{z}(0)$ とおくと、 $\dot{V}(t, \underline{z}) \leq 0$ であるから

$$V(0, \underline{z}_0) \geq V(t, \underline{z}) \geq \underline{z}(t)' P \underline{z}(t) - \Lambda(\underline{z}_0) \quad \dots\dots\dots (3.80)$$

となる。ただし $\Lambda(\underline{z}_0) \triangleq \theta \gamma[\varepsilon(0)] + \Sigma \{ \theta_i \gamma[\varepsilon_i(0)] + \hat{\theta}_i \gamma[\hat{\varepsilon}_i(0)] \}$ で $\gamma(\cdot)$ は (3.77) 式に示すものである。(3.80) 式より

$$\Lambda(\underline{z}_0) + \underline{z}_0' P \underline{z}_0 \geq \underline{z}(t)' P \underline{z}(t) \quad \dots\dots\dots (3.81)$$

となる。一方 $\alpha(|\underline{z}|) \leq \underline{z}' P \underline{z}$ となるような関数 $\alpha(w)$ が存在する。ただし、 $\alpha(w)$ は連続、単調・増加・かつ $\alpha(0) = 0$ である。また $V(t, \underline{z})$ は連続かつ $\Lambda(\underline{z}_0) + \underline{z}_0' P \underline{z}_0 = 0$ ($\underline{z}_0 = \underline{0}$) であるから、 $\beta > 0$ を与えられた数として、 $\delta(\beta) > 0$ を、 $|\underline{z}_0| < \delta$ ならば $\Lambda(\underline{z}_0) + \underline{z}_0' P \underline{z}_0 < \alpha(\beta)$ が成り立つように選ぶことができる。したがって (3.81) 式より $\alpha(|\underline{z}(t)|) < \alpha(\beta)$ となる。 $\alpha(\beta)$ の単調性によってすべての $t \geq 0$ に対して $|\underline{z}(t)| < \beta$ となる。よって $\underline{z} = \underline{0}$ は Lyapunov の意味で安定である。

以上第1～第4段階によって第2章の定理2.1の各条件が満足されることが示された。これによって (3.58) 式すなわち制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる (証明終り)。

3.4.3 定理3.2の証明

ここでは制御系 (S.4) を等価変換した制御系 (C.4) に (3.57) 式の仮想系を合成した次の制御系を考える。

$$\dot{\underline{z}} = \underline{D} \underline{z} + \underline{d} \varphi(\underline{\varepsilon}), \quad \underline{\varepsilon} = \underline{e}' \underline{z} \quad \dots\dots\dots (3.82)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{z}_1 = \underline{x}_1, \quad \underline{D}_1 = \underline{A}_1, \quad \underline{d}_1 = \underline{a}_1, \quad \underline{e}_1 = \underline{c}_1$$

$$\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \underline{y} \end{bmatrix}, \quad \underline{D}_2 = \begin{bmatrix} \underline{A}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B} \end{bmatrix}, \quad \underline{d}_2 = \begin{bmatrix} \underline{a}_2 \\ \underline{b} \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \underline{c}_2 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

(44)

(3.82) 式において、行列 $\underline{D}_1$ の固有値はすべて複素平面の虚軸上に存在し、 $\underline{D}_2$ の固有値はすべて左半平面に存在する。したがって (3.82) 式の平衡点は第2章で検討したのとまったく同様になる。

Lyapunov 関数は (3.59) 式に示したものをを用いるが、 $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は (2.32) ~ (2.34) 式において $\underline{\Delta}_i = \hat{\underline{\Delta}}_i = \bar{\underline{\Delta}}_i = \underline{0}$ としたものを用いる。

$\underline{P}, \underline{Y}_i, \hat{\underline{Y}}_i$ は

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{P}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}_i = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{1i} \\ \underline{Y}_{2i} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{Y}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\underline{Y}}_{1i} \\ \hat{\underline{Y}}_{2i} \end{bmatrix}$$

を考える。ただし $\underline{P}_1, \underline{P}_2$ はそれぞれ $n_1 \times n_1, (n_2+2) \times (n_2+2)$ の行列、 $\underline{Y}_{1i}, \hat{\underline{Y}}_{1i}$ は n_1 次、 $\underline{Y}_{2i}, \hat{\underline{Y}}_{2i}$ は (n_2+2) 次のベクトルである。

(3.82) 式の解は Filippov の意味の解を考える。Lyapunov 関数 V の時間微分は (3.60) 式で与えられる。ただし (3.61), (3.64), (3.65) 式において $\underline{F}, \underline{f}, \underline{e}$ は

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{F}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix}$$

でかつ $\underline{F}_1$ および $\underline{F}_2$ は $n_1 \times n_1$ および $(n_2+2) \times (n_2+2)$ の行列、 $\underline{F}_{12}$ は $n_1 \times (n_2+2)$ の行列、 $\underline{f}_1$ および $\underline{e}_1$ は n_1 次、 $\underline{f}_2$ および $\underline{e}_2$ は (n_2+2) 次のベクトルである。また (3.62) ~ (3.66) 式において、 $\underline{C}, \underline{g}, \underline{h}$ は $\underline{D}, \underline{d}, \underline{e}$ におきかえる。 $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続で $G(0)=0$ の場合の証明は定理3.1の証明の前で述べた理由により省略する。証明は定理3.1の場合と同様に4段階に分けて行なう。

第1段階 $\dot{V} \leq 0$ なることを示す。 $\lambda_i = 0, \hat{\lambda}_i = 0$ となることは定理3.1の場合と同様である。よって $\Omega(\underline{z}, \varphi) \geq 0$ なることを示す。

いま

$$\pi_1(s) = 2R_e \underline{e}_1' (\underline{D}_1 - s\underline{I})^{-1} \underline{d}_1 \quad \dots\dots\dots (3.83)$$

$$\pi_2(s) = \rho + 2R_e \underline{e}_2' (\underline{D}_2 - s\underline{I})^{-1} \underline{d}_2 \quad \dots\dots\dots (3.84)$$

とおくと、

$$\pi(s) = \pi_1(s) + \pi_2(s)$$

と表わされる。制御系は極限安定であることおよび条件IVの(ii)より $\pi(j\omega) \geq 0$ なら $\pi_1(j\omega) \equiv 0, \pi_2(j\omega) \geq 0$ となる。一方

$$\pi_1(j\omega) \equiv d_w^* F_1 d_w - 2R_e f_1' d_w, \quad d_w = (D_1 - j\omega I)^{-1} d_1$$

であるから $F_1 = 0, f_1 = 0$. このことより (3.70) 式は

$$\left. \begin{aligned} \rho F_2 - f_2 f_2' &\geq 0 & (\rho > 0) \\ F_2 \geq 0, f_2 &= 0 & (\rho = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.85)$$

となる。 $\pi(j\omega) \geq 0$ ならば $\pi_2(j\omega) \geq 0$ であるから、補助定理 3.1 によって (3.85) 式が成立し $\dot{V} \leq 0$ となる。

第2段階 $\dot{V} = 0$ となるのは $\underline{z} = \underline{z}_e$ のときのみであることを示す。

(i) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で連続な場合

定理 3.1 の場合と同様にして $\dot{V} = 0$ となるのは $\underline{z}_2 = 0$ のときのみであることが示される。ただし (3.73) 式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\underline{z}}_1 \\ \dot{\underline{z}}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & -\rho^{-\frac{1}{2}} d_2 q' \\ 0 & \widetilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{D} &= D_2 - \rho^{-\frac{1}{2}} d_2 q' \end{aligned}$$

と表わされる。

つぎに $\underline{z}_2 = 0$ のとき $\underline{z}_1$ は平衡点 $\underline{z}_{1e}$ になることを示す。(3.82) 式において $\underline{z}_2 = 0$ とおくと、仮定より $d_1 \neq 0$ であるから

$$\dot{\underline{z}}_1 = A_1 \underline{z}_1, \quad \varepsilon = C_1' \underline{z}_1, \quad \varphi[\varepsilon(t)] \equiv 0 \dots\dots\dots (3.86)$$

となる。

$\varepsilon \neq 0$ で $\varphi(\varepsilon) \equiv 0$ ならば $C_1' \underline{z}_1 \equiv 0$ すなわち $C_1' [\exp A_1 t] \underline{z}_1(0) \equiv 0$

となる。仮定より対 (A_1, C_1') は完全可観測であるから $\underline{z}_1(0) = 0$ すなわち $\underline{z}_1(t) \equiv 0$ となる。

つぎに $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$ で $\varphi(\varepsilon) = 0$ となる場合を考える。 $G_1(s)$ が 1 重極を原点に持つときは $A_1 = 0$ となり (3.86) 式より $\dot{\underline{z}}_1 = 0$ すなわち $\underline{z}_1 = \underline{\varepsilon}$ となる。 $G_1(s)$ が 2 重極を原点に持つときは $\underline{z}_1 = \text{col}\{z_{11}, z_{12}\}, C_1 = \text{col}\{c_{11}, c_{12}\}$ とすると (3.86) 式は

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_{11} &= z_{12}, & \dot{\underline{z}}_{12} &= 0 \\ \varepsilon &= c_{11} z_{11} + c_{12} z_{12} \end{aligned}$$

となる。 $\varphi(\varepsilon) \equiv 0$ であるから $z_{11} = \varepsilon$, $z_{12} = 0$ となる。 よって $\underline{z} = \underline{z}_e$ のときのみ $\dot{V} = 0$ となる。

(iii) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で不連続で $\varepsilon(t) \equiv 0$ すなわち、すべり動作を起こしている場合を考える。このときは定理 3.1 の場合と同様に、(3.82) 式は線形方程式となり、その固有値は $G(s)$ の零点と $\underline{B}$ の固有値に一致する²⁴。 よって $\underline{z} = \underline{0}$ のときのみ $\dot{V} = 0$ となる。

第3段階 $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V(\underline{z}) \rightarrow \infty$ なることを示す。これには $P > 0$ すなわち $P_1 > 0, P_2 > 0$ なることを示せばよい。

$\pi(j\omega) \geq 0$ ならば $\pi_1(j\omega) \equiv 0$, $\pi_2(j\omega) \geq 0$ であるから定理 3.1 の場合と同様にして $P_2 > 0$ となる。

つぎに $P_1 > 0$ なることを示す。 $E_1 = 0$ および $f_1 = 0$ であるから

$$P_1 A_1^{j-1} a_1 = (-1)^j (A_1')^{j-1} \underline{e}_1 \quad \dots\dots\dots (3.87)$$

となる。いま

$$\underline{u}_1 = \underline{a}_1, \quad \underline{u}_2 = \underline{A}_1 \underline{a}_1, \quad \dots\dots\dots, \quad \underline{u}_m = \underline{A}_1^{m-1} \underline{a}_1$$

とおくと (3.87) 式より

$$\underline{u}_h' P_1 \underline{u}_j = (-1)^h \underline{e}_1' \underline{A}_1^{h+j-2} \underline{a}_1 = (-1)^j \underline{e}_1' \underline{A}_1^{h+j-2} \underline{a}_1 \quad \dots\dots\dots (3.88)$$

$$(h, j = 1, 2, \dots\dots\dots, n_1)$$

となる。したがって $(h+j)$ が奇数のときは

$$\underline{u}_h' P_1 \underline{u}_j = 0 \quad \dots\dots\dots (3.89)$$

となる。 $\underline{u} = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots\dots, \underline{u}_{n_1}]$ および $\underline{x} = \underline{u}' P_1 \underline{u}$ とおくと、

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{u}_1' P_1 \underline{u}_1, \underline{u}_1' P_1 \underline{u}_2, \dots\dots, \underline{u}_1' P_1 \underline{u}_{n_1} \\ \underline{u}_2' P_1 \underline{u}_1, \underline{u}_2' P_1 \underline{u}_2, \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \underline{u}_{n_1}' P_1 \underline{u}_1, \dots\dots\dots \underline{u}_{n_1}' P_1 \underline{u}_{n_1} \end{bmatrix}$$

となるが、これは (3.88), (3.89) 式を考慮すると

$$\underline{X} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_0 & 0 & x_2 & \cdots \\ 0 & -x_2 & 0 & \cdots \\ x_2 & 0 & x_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

となる。ただし x_{k+j-2} は (3.13) 式で表わされる。 $\underline{U}$ は正則行列であるので $\underline{X} > 0$ と $\underline{P}_1 > 0$ は同値である。したがって条件 VI より $\underline{X} > 0$ すなわち $\underline{P}_1 > 0$ となる。

よって $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V \rightarrow \infty$ となる。

第4段階 平衡点 $\underline{z}_e$ が Lyapunov の意味で安定であることは定理 3.1 の場合と同様に示される。 $\underline{z}_e \neq 0$ の場合は $\underline{z} - \underline{z}_e$ を新しく $\underline{z}$ と考えれば $\underline{z}_e = 0$ の場合に帰着する。

以上第1～第4段階によって (3.82) 式の制御系 すなわち制御系 (S.4) は大域的漸近安定となる (証明終り)。

3.4.4 定理 3.3 の証明

証明は定理 3.1 および 3.2 と同様にして行なうことができるが、 $\varphi(\varepsilon)$ がヒステリシスを有し、ヒステリシスループが図 3.1 (a) のように反時計回りの場合は (3.77) 式は成立しないので (3.59) 式の Lyapunov 関数をそのまま使用することはできない。しかし $\varphi(\varepsilon)$ を

$$\tilde{\varphi}(\varepsilon) = K\varepsilon - \varphi(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (3.90)$$

と変換すれば

$$\int_0^t \tilde{\varphi}(\varepsilon) \dot{\varepsilon} dt \geq -\gamma[\varepsilon(0)]$$

となる。したがって Lyapunov 関数としてつぎのものを考える。

$$\begin{aligned} V = & \underline{z}' \underline{P} \underline{z} + \theta \int_0^t \{ K\varepsilon - \varphi[\varepsilon(t)] \} \dot{\varepsilon}(t) dt + \sum_{i=1}^n \{ \theta_i \int_0^t \zeta[\varepsilon_i(t)] \dot{\varepsilon}_i(t) dt \\ & + \hat{\theta}_i \int_0^t \zeta[\hat{\varepsilon}_i(t)] \dot{\hat{\varepsilon}}_i(t) dt + \int_0^t (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) dt \} \quad \dots\dots\dots (3.91) \end{aligned}$$

ただし $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は (3.23) ～ (3.25) 式に示すものである。

なお制御系 (S.4) の $\underline{A}$ が安定な場合の証明は、 $\underline{A}$ が臨界な場合の証明に帰着されるので (3.82) 式に示す制御系を考える。(3.91) 式を (3.82) 式の解

に沿って微分すると (3.60) 式のように表わされる。ただしこの場合、 $\Omega(\underline{z}, \varphi)$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}\Omega(\underline{z}, \varphi) &= \underline{z}' \underline{F} \underline{z} + 2 \underline{f}' \underline{z} \varphi + \rho \varphi^2 \\ -\underline{F} &= \underline{H} + \underline{R} \\ \underline{H} &= \underline{P} \underline{D} + \underline{D}' \underline{P} \quad , \quad \underline{R} = \frac{\theta K}{2} (\underline{e} \underline{e}' \underline{D} + \underline{D}' \underline{e} \underline{e}') \\ -\underline{f} &= \underline{f}_I + \underline{f}_{II} \quad , \quad \underline{f}_I = \underline{P} \underline{d} + \underline{e} \quad , \quad \underline{f}_{II} = \frac{\theta K}{2} \underline{e} \underline{d}' \underline{e} \\ -\underline{e} &= \frac{1}{2} \{ -\theta \underline{D}' \underline{e} + \Sigma (a_i + \hat{a}_i) \underline{e} + \Sigma (b_i \underline{y}_i + \hat{b}_i \hat{\underline{y}}_i) \} \\ -\rho &= -\theta \underline{e}' \underline{d} + \Sigma (g_i + \hat{g}_i)\end{aligned}$$

ここで

$$\Omega(\underline{z}, \varphi) = \Omega_I(\underline{z}, \varphi) + \Omega_{II}(\underline{z}, \varphi) \quad \dots\dots\dots (3.91)$$

$$\begin{aligned}\Omega_I(\underline{z}, \varphi) &= (1-\delta) \{ \underline{z}' \underline{H} \underline{z} + 2 \underline{f}'_I \underline{z} \varphi + \rho \varphi^2 \} \\ \Omega_{II}(\underline{z}, \varphi) &= \delta \{ \underline{z}' (\underline{H} + \frac{1}{\delta} \underline{R}) \underline{z} + 2 (\underline{f}'_I + \frac{1}{\delta} \underline{f}'_{II}) \underline{z} \varphi + \rho \varphi^2 \}\end{aligned}$$

と表わす。

$\pi(j\omega) \geq 0$ ならば補助定理 3.1 より $\Omega_I \geq 0$, $\Omega_{II} \geq 0$ となり、 $\lambda_i \equiv 0$, $\hat{\lambda}_i \equiv 0$, $\underline{M}_i \geq 0$ であるから、 $\dot{V} \leq 0$ が示される。また $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V \rightarrow \infty$, $\underline{z} = \underline{0}$ のときのみ $\dot{V} = 0$ および $\underline{z} = \underline{0}$ が Lyapunov の意味で安定であることは、定理 3.2 の証明と同様にして示される。したがって制御系 (S.4) は大域的漸近安定となる (証明終り)。

3.5 結 言

制御系 (S.4) の大域的漸近安定条件を定理に示した。また代表的な非線形要素を有する制御系に対する安定条件を適用し易い形にして示した。この定理は非線形要素が 1 価連続関数だけでなく、不連続あるいは 2 価関数に対しても適用でき、さらに制御系が臨界な場合にも適用できる。また定理における安定条件は非線形要素の特性を表わすパラメータを含んでいるので、この特性を考慮すれば、より必要十分に近い安定条件を得ることができる。また、代表的な非線形要素に対して定理の適用法を示し、この定理は従来の安定条件に比べより広い安定セクタを与えることを例題で示した。

第 4 章 時変非線形要素を有する制御系の大局的漸近安定条件

4.1 序 言

本章では非線形要素が入力 ε だけでなく時間 t にも依存する制御系 (S.3) の大局的漸近安定条件について検討する。このような時変数制御系に対しては、Rozenvasser⁴¹ や Brockett, Forsys⁴² が円板条件を、また Rekasius, Rowland⁴³ や Mukundan, Brooks⁴⁴ は、時変非線形要素に対して制限条件を加えて円板定理を拡張した安定条件を発表している。Bergen, Rault⁴⁵ や Chang, Davies⁴⁶, Venkatesh⁴⁷ は時変非線形要素が (2.11) 式で表わされる場合に対する安定条件を発表している。しかしこれらの安定条件は、非線形要素の特性をあまり考慮していないためにならずしも必要十分に近いとは言えない。またその適用は特定の非線形要素に限定され、不連続関数には適用できない。

ここでは、第3章で示した安定条件が時変非線形要素を有する制御系に対しても適用できることを示す³⁹ とくに時変非線形要素が (2.11) 式に示すように、定常な非線形要素と時変ゲインで構成される場合の安定条件について詳細な考察を行ない、その適用例を示す。

4.2 安定定理

ここでは制御系 (S.3)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{C}'\underline{x} \quad (\text{S.3})$$

を考える。第3章と同様に、安定条件を $\underline{A}$ が安定な場合と臨界な場合に分けて定理に示す。

{ 定理 4.1 } つぎに示す条件 I ~ IV が満足されるとき、制御系 (S.3) は大局的漸近安定となる。

I. $\psi(\varepsilon, t)$ は 1 価関数で 2.2 節の仮定 IV. (ii) (a) を満足する。

II. 定理 3.1 の条件 II を満足する。

III. 定理 3.1 の条件 III を満足する。

IV. パラメータ $\theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は非負の定数である。またパラメータ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \underline{\Delta}_i, \hat{\underline{B}}_i, \hat{\underline{\Gamma}}_i, \hat{\underline{\Delta}}_i, \underline{\bar{B}}_i, \underline{\bar{\Gamma}}_i, \underline{\bar{\Delta}}_i$ の各要素の値は、与えられた $\psi(\varepsilon, t)$ の任意の入力 $\varepsilon, \varepsilon_i, \hat{\varepsilon}_i$ およびすべての $t \geq 0$ に対して

(50)

$$n(t) \triangleq \sum_{i=1}^V (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) - \theta \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon \\ - \sum_{i=1}^V \left\{ \theta_i \int_0^{\varepsilon_i} \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon + \hat{\theta}_i \int_0^{\hat{\varepsilon}_i} \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon \right\} \geq 0 \quad (4.1)$$

を満足し、さらに

$$\underline{\Delta}_i \geq 0, \quad \hat{\Delta}_i \geq 0, \quad \bar{\Delta}_i \geq 0$$

$$M_i = - \begin{bmatrix} p_i + q_i & \frac{1}{2} \bar{r}_i \\ \frac{1}{2} \bar{r}_i & \hat{p}_i + \bar{p}_i \end{bmatrix} \geq 0$$

となるように選ぶ。(4.1)式の $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ はそれぞれ(2.32)~(2.34)式において φ を ψ に、 φ_i を ψ_i に、 $\hat{\varphi}_i$ を $\hat{\psi}_i$ に置き換えたものである。ただし $\psi_i = \psi(\varepsilon_i, t)$, $\hat{\psi}_i = \psi(\hat{\varepsilon}_i, t)$ であるか。

〔定理4.2〕 つぎに示す条件I~VIが満足されるとき、制御系(5.3)は大域的漸近安定となる。

- I. $\psi(\varepsilon, t)$ は2.2節の仮定IV.(ii)(b)を満足する。
- II. 定理3.2の条件IIを満足する。
- III. 定理3.2の条件IIIを満足する。
- IV. 定理3.2の条件IVを満足する。
- V. 定理4.1の条件IVを満足する。ただし $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は(2.32)~(2.34)式において $\underline{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i = \bar{\Delta}_i = 0$ としたものである。
- VI. 定理3.2の条件VIを満足する。

上述の定理は、定理4.1の条件IVおよび定理4.2の条件Vを除いて定理3.1および3.2とまったく同じである。したがって定理の適用法も第3章で述べたのと同様であるが、(4.1)式を満足するようにパラメータ $B_i, \Gamma_i, \Delta_i, \hat{B}_i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\Delta}_i, \bar{B}_i, \bar{\Gamma}_i, \bar{\Delta}_i$ の各要素の値を決定しなければならない。一般に(4.1)式をそのまま取り扱うのは困難であるので、つぎのように行なえばよい。

まず $\psi(\varepsilon, t)$ の入力 ε の任意の2つの値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を考えて

$$N_i \geq \theta_i \int_0^{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon + \theta_i \int_0^{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon \quad (4.2)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^V \theta_i, \quad \theta_i \geq 0$$

を満足するように、パラメータ B_i, Γ_i, Δ_i の各要素の値の取り得る範囲を求める。ただし N_i は (2.24) 式 のかわりに

$$N_i = \Phi_i' B_i \Phi + \Phi_i' \Gamma_i E + E' \Delta_i E \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \psi_1 = \psi(\varepsilon_1, t) \\ \psi_2 = \psi(\varepsilon_2, t) \end{matrix}$$

を考える。

$\hat{B}_i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\Delta}_i$ に関しては (4.2) 式において $\theta_i = 0$ とし、かつ θ_i を $\hat{\theta}_i$ に置き換えた場合のパラメータ B_i, Γ_i, Δ_i の各要素の値の取り得る範囲を、また $\bar{B}_i, \bar{\Gamma}_i, \bar{\Delta}_i$ に関しては (4.2) 式において $\theta_i = \theta_i = 0$ としたもの、すなわち $N_i \geq 0$ を満足する B_i, Γ_i, Δ_i のとり得る範囲を用いばよい。

このようにして得られたパラメータ $B_i, \Gamma_i, \Delta_i, \hat{B}_i, \hat{\Gamma}_i, \hat{\Delta}_i, \bar{B}_i, \bar{\Gamma}_i, \bar{\Delta}_i$ の各要素の値は $n(t) \geq 0$ を満足するのは明らかである。

なお $\psi(\varepsilon, t)$ の性質がまったく分らず、したがって $\partial \psi / \partial t$ が計算できない場合は $\theta = \theta_i = \hat{\theta}_i = 0$ としなければならない。この場合、安定条件 $\pi(j\omega) \geq 0$ は円板条件

$$\frac{1}{K} + R_e G(j\omega) \geq 0$$

となる。

つぎに定理の各条件を簡単化したものを定理の系として示す。

〔系 4.1〕 定理 4.1 または 4.2 において $\pi(s)$ を

$$\pi(s) = -\sum_{i=1}^r g_i + R_e \left\{ \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i + \theta s \right) G(s) + \sum_{i=1}^r \beta_i W_i(s) \right\} - \sum_{i=1}^r \gamma_i^* \Delta_i \gamma_i \quad (4.2)$$

とおく (定理 4.2 の場合は $\Delta_i = 0$ とする)。またパラメータ B_i, Γ_i, Δ_i は与えられた $\psi(\varepsilon, t)$ の入力の任意の 2 つの値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ および $t \geq 0$ に対して (4.2) 式を満足し、かつ $\Delta_i \geq 0, -p_i \geq 0$ となるように選ぶ。このとき定理 4.1 または 4.2 の各条件が成立すれば、制御系 (S.3) は大局的漸近安定となる。

〔注〕 この系は第 3 章の系 3.1 と同じものであるので詳細は系 3.1 を参照のこと。

〔系 4.2〕 つぎに示す条件 I ~ IV が満足されるとき、制御系 (S.3) は大

局的漸近安定となる。

I. $\psi(\varepsilon, t)$ は 2.2 節の仮定 IV (ii) (a) または (b) を満足し、かつすべての $t \geq 0$ に対して

$$g\psi^2 + a\varepsilon\psi + l\varepsilon^2 \geq \theta \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \psi d\varepsilon \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

を満足する。

II. 定理 3.1 または 3.2 の条件 II を満足する。

III.
$$\pi(s) = -g + R_e(a + \theta s)G(s) - l|G(s)|^2 \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

とおくと、すべての $0 \leq \omega < \infty$ に対してつぎの条件を満足する非負の定数 θ が存在する。

(i) $\pi(j\omega) \geq 0$

(ii) $\pi(j\omega) = 0$ となる ω の値を $\omega_k (k=1, 2, \dots)$ とすると

$$R_e G(j\omega_k) + \frac{1}{K} > 0 \quad (K \neq \infty)$$

$$R_e G(j\omega_k) \geq 0 \quad (K = \infty)$$

(iii) $G(s)$ は $s = -a/\theta$ なる極を持たない。

(iv) $\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) \neq 0$ のときは条件 (ii), (iii) は削除される。また $\pi(j\omega) > 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \pi(j\omega) = 0$ のときは条件 (ii), (iii) の代りに

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \pi(j\omega) > 0$$

が満足されなければならない。

IV. $G(s)$ が臨界な場合は $l=0$, かつ制御系 (S.3) は極限安定である。

[注1] 系 4 は Rekasius, Rowland の結果⁴³ を拡張して、制御系 (S.3) が臨界な場合、または $\psi(\varepsilon, t)$ が不連続関数の場合にも適用可能にしたものである。

[注2] $\psi(\varepsilon, t)$ が

$$\psi(\varepsilon, t) = k(t)\varphi(\varepsilon)$$

$$0 < k(t) \leq \sup k(t) = 1, \quad \dot{k}(t) \leq K_0$$

と表わされる場合は

$$g = -1/K, \quad a = 1, \quad l = \theta K K_0 / 2$$

とすれば、(4.5) 式は成立し、(4.6) 式の $\pi(s)$ は Bergen, Rault⁴⁹ の結果と一致する。ただし $G(s)$ が臨界な場合は $\theta=0$ または $K_0=0$ としなければならない。

4.3 $n(t)$ の計算

定理の適用法は定理 4.1 の条件 IV および定理の条件 V を除けば第 3 章の定理と同じである。したがってここでは $n(t) \geq 0$ となるパラメータ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \dots, \underline{\Delta}_i$ の各要素の値の取り得る範囲の決定方法を例を示しながら述べる。

(4.1) 式は $\psi(\varepsilon, t)$ の入力 ε の任意の 3 つの値に対して成立しなければならない。一般に計算は困難である。したがって (4.2) 式を適用することになる。以下ではとくに $\psi(\varepsilon, t)$ が

$$\psi(\varepsilon, t) = k(t) \varphi(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

$$0 < \inf k(t) \leq k(t) \leq \sup k(t) = 1$$

と表わされる場合について考えていく。

〔例 4.1〕 $\psi(\varepsilon, t)$ は (4.8) 式のように表わされ、 $\varphi(\varepsilon)$ は単調非減少関数の場合を考える。このときすべての $t > 0$ に対して

$$\left. \begin{aligned} & a_i + g_i K k(t) - \mu \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \theta_i + \frac{\ell_i - |m_i|}{K k(t)} \\ & \geq \max \{ |b_i|, |e_i|, |\hat{h}_i K k(t) + e_i| \} \\ & d_i + p_i K k(t) - \mu \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \theta_i + \frac{n_i - |m_i|}{K k(t)} \\ & \geq \max \{ |b_i|, |e_i|, |\hat{h}_i K k(t) + b_i| \} \\ & \mu = \begin{cases} 0 & (\dot{k}(t) \leq 0) \\ 1 & (\dot{k}(t) > 0) \end{cases} \\ & g_i \leq 0, \quad p_i \leq 0, \quad \ell_i \geq |m_i|, \quad n_i \geq |m_i| \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

が満足するようにパラメータ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \underline{\Delta}_i$ の各要素の値を選べば (4.2) 式は成立する。 $\hat{\underline{B}}_i, \hat{\underline{\Gamma}}_i, \hat{\underline{\Delta}}_i$ に関しては (4.9) 式において $\theta_i = 0$ とし、かつ $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i$

$\underline{\Delta}_i, \theta_i$ をそれぞれ $\hat{\underline{B}}_i, \hat{\underline{\Gamma}}_i, \hat{\underline{\Delta}}_i, \hat{\theta}_i$ に置き換えたものを考える。また $\bar{\underline{B}}_i, \bar{\underline{\Gamma}}_i, \bar{\underline{\Delta}}_i$ に関しては (4.9) 式で $\theta_i = \bar{\theta}_i = 0$ とし、 $\underline{B}_i, \underline{\Gamma}_i, \underline{\Delta}_i$ を $\bar{\underline{B}}_i, \bar{\underline{\Gamma}}_i, \bar{\underline{\Delta}}_i$ に置き換えたものを考えれば $n(t) \geq 0$ を満足する。

〔例 4.2〕 $\psi(\varepsilon, t)$ が (4.8) 式のように表わされ、 $\varphi(\varepsilon)$ が図 4.1 に示すような場合、すべての $t \geq 0$ に対して

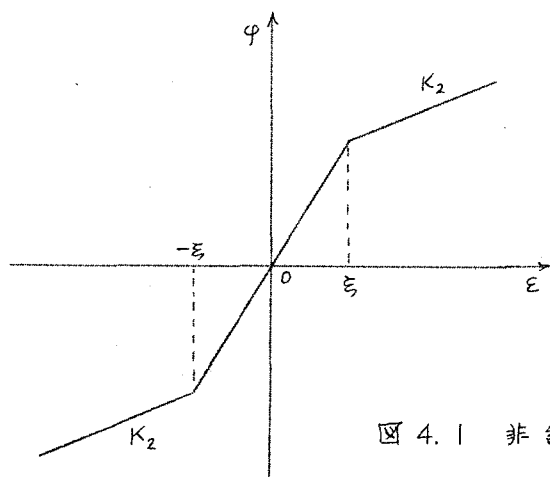


図 4.1 非線形要素

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_i(t) \{g_i K_1 \dot{h}_i(t) + a_i\} &\geq \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \\ 4 \left[\dot{h}_i(t) \{g_i K_1 \dot{h}_i(t) + a_i\} - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right] &\left[\dot{h}_i(t) \{p_i K_1 \dot{h}_i(t) + d_i\} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right] \geq \dot{h}_i^2(t) \{h_i K_1 \dot{h}_i(t) + b_i + e_i\}^2 \end{aligned} \right\} (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_i(t) \{g_i K_2 \dot{h}_i(t) + a_i\} &\geq \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \\ 4 \left[\dot{h}_i(t) \{g_i K_2 \dot{h}_i(t) + a_i\} - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right] &\left[\dot{h}_i(t) \{p_i K_2 \dot{h}_i(t) + d_i\} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right] \geq \dot{h}_i^2(t) \{h_i K_2 \dot{h}_i(t) + b_i + e_i\}^2 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_i(t) \{2g_i K_1 K_2 \dot{h}_i(t) + a_i (K_1 + K_2)\} &- \dot{h}_i(t) \theta_i K_1 \\ &\geq \dot{h}_i(t) |h_i K_1 K_2 \dot{h}_i(t) + b_i K_2 + e_i K_1| \quad \dots\dots\dots (4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_i(t) \{2p_i K_1 K_2 \dot{h}_i(t) + d_i (K_1 + K_2)\} &- \dot{h}_i(t) \theta_i K_1 \\ &\geq \dot{h}_i(t) |h_i K_1 K_2 \dot{h}_i(t) + h_i K_1 + e_i K_2| \quad \dots\dots\dots (4.13) \end{aligned}$$

($K_2 = 0$ の場合 (4.11) 式は必要なし)

が満足されれば (4.2) 式は成立する。ただし $\underline{\Delta}_i = 0$ としている。

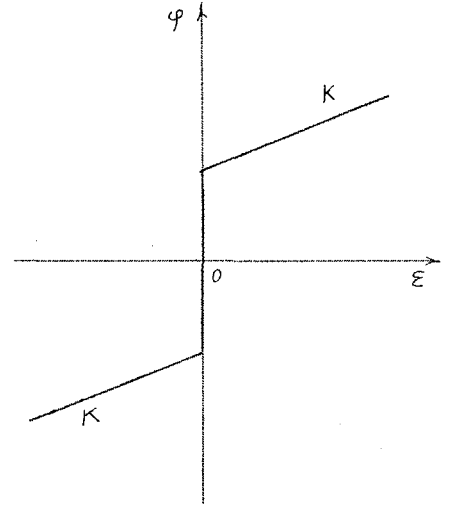
また, $\hat{B}_i, \hat{I}_i, \bar{B}_i, \bar{I}_i$ に関しても例 1 の場合と同様に考えれば $n(t) \geq 0$ となる。

〔例 4.3〕 $\psi(\varepsilon, t)$ が (4.8) 式のように表わされ、 $\varphi(\varepsilon)$ が図 4.2 に示すような場合、すべての $t \geq 0$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} 4 \left\{ \dot{h}_i(t) a_i - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right\} \left\{ \dot{h}_i(t) d_i - \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i \right\} \\ \geq \dot{h}_i^2(t) K^2 (b_i + e_i)^2 \end{aligned} \right\} (4.14)$$

$$\dot{h}_i(t) a_i \geq \frac{1}{2} \dot{h}_i(t) \theta_i$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_i(t) d_i - \dot{h}_i(t) \theta_i &\geq \dot{h}_i(t) |b_i| \\ g_i = \dot{h}_i = p_i &= 0 \end{aligned} \right\} (4.15)$$



($K=0$ のとき, (4.14) 式は必要なし.)

図 4.2 リレー要素

が満足されれば (4.2) 式は成立する。ただし $\underline{\Delta}_i = 0$ としている。また例 1 と同様に $\hat{B}_i, \hat{I}_i, \bar{B}_i, \bar{I}_i$ を決定すれば, $n(t) \geq 0$ となる。

〔例 4.4〕 $\psi(\varepsilon, t)$ が (4.8) 式のように表わされ、 $\varphi(\varepsilon)$ が図 2.3 (e) に示すような場合、すべての $t \geq 0$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_i(t) a_i - \dot{h}_i(t) \theta_i &\geq \dot{h}_i(t) |e_i| \\ \dot{h}_i(t) d_i - \dot{h}_i(t) \theta_i &\geq \dot{h}_i(t) |b_i| \\ g_i \dot{h}_i(t) K + a_i &\geq \max \{ |b_i|, |\dot{h}_i \dot{h}_i(t) K + b_i| \} \\ p_i \dot{h}_i(t) K + d_i &\geq \max \{ |e_i|, |\dot{h}_i \dot{h}_i(t) K + e_i| \} \\ g_i &\leq 0, \quad p_i \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots (4.16)$$

が満足されれば (4.2) 式は成立する。ただし $\underline{\Delta}_i = 0$ としている。また、例 1 と同様に $\hat{B}_i, \hat{I}_i, \bar{B}_i, \bar{I}_i$ を決定すれば $n(t) \geq 0$ となる。

4.4 適用例

ここでは非線形要素 $\psi(\varepsilon, t)$ が (4.8) 式のように表わされ、さらに $\varphi(\varepsilon)$ が

図2.4 (a)に示す飽和要素の場合の系4.1の適用法について述べる。

系4.1において $\Delta_i = 0$ とし、さらに $\nu = 1$ とすると (簡単のために θ_1 を除いて添字1は省略する) (4.4)式はつぎのようになる。

$$\pi(s) = -g + R_e \left\{ (a + \theta s - \frac{be}{\theta_1 s + d}) G(s) + \frac{b\dot{h}}{\theta_1 s + d} \right\} \dots\dots\dots (4.17)$$

またパラメータ $\theta, \theta_1, g, a, b, e, d, \dot{h}$ の取り得る範囲は例4.2より

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}(t)a - \dot{h}(t)\theta &\geq \dot{h}(t)|e|, \quad \dot{h}(t)d - \dot{h}(t)\theta_1 \geq \dot{h}(t)|b|, \\ \dot{h}(t)\{g\dot{h}(t)K + a\} &\geq \dot{h}(t)\theta, \\ 4\left[\dot{h}(t)\left\{\dot{h}(t)gK + a\right\} - \frac{1}{2}\dot{h}(t)\theta\right]\left\{\dot{h}(t)d - \frac{1}{2}\dot{h}(t)\theta_1\right\} \\ &\geq \dot{h}^2(t)\left\{\dot{h}(t)\dot{h}K + b + e\right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.18)$$

となる。

いま $\dot{h}(t)$ に対してさらに

$$\dot{h}(t) \leq \alpha \dot{h}(t), \quad \alpha > 0, \quad \inf \dot{h}(t) = \beta > 0 \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

なる制限条件をおく。このとき

$$g = f/K, \quad \dot{h} = 1/K$$

とすると (4.17), (4.18)式はつぎのように簡単化される。

$$\pi(s) = \frac{1}{K} \left(R_e \frac{b}{\theta_1 s + d} - f \right) + R_e \left(a + \theta s - \frac{be}{\theta_1 s + d} \right) G(s) \dots\dots\dots (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} a &\geq \alpha\theta + |e|, \quad d \geq \alpha\theta_1 + |b| \\ f &= \max \left[\frac{1}{\beta} \left\{ \frac{(\beta + b + e)^2}{2(2d - \alpha\theta_1)} - a + \frac{1}{2}\alpha\theta \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{(1 + b + e)^2}{2(2d - \alpha\theta_1)} - a + \frac{1}{2}\alpha\theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.21)$$

また (4.17), (4.18) 式において

$$d = b = e = \dot{h} = \theta_1 = 0, \quad g = -1/K$$

とおけば

$$\pi(s) = \frac{1}{K} + R_e (a + \theta s) G(s) \quad \dots\dots\dots (4.22)$$

$$\alpha \geq \max \left\{ \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \theta, \frac{\dot{k}(t)}{2k(t)} \theta + k(t) \right\} \quad \dots\dots\dots (4.23)$$

となり、Popov形の安定条件となる。

数値例として、伝達関数が第3章の例3.1と同じもので、 $k(t)$ が

$$k(t) = 0.8 - 0.2 \cos t$$

の場合⁴⁵⁾の安定セクタを求める、 $\pi(s)$ として(4.20)式を用いる。(4.19)式において $\alpha = 1/\sqrt{15}$, $\beta = 0.6$ となる。よって $\theta = 9.09$, $\theta_1 = 21.3$, $\alpha = 26.6$, $b = 12.4$, $e = -23.8$, $d = 23.4$ のとき、 $f = -24.1$ となり最大の安定セクタは $[0, \infty)$ と求まる。なお円板条件による安定セクタは $[0, 0.281]$, また、Popov セクタは $[0, 5.34]$ である。

4.5 定理の証明

証明は、定理3.1および3.2の場合と同様にして行なうことができるので、概要を述べる。まずつぎの仮想系を考える。

$$\dot{y} = \underline{B} y + \underline{b} \psi(\varepsilon, t) \quad \dots\dots\dots (4.24)$$

これは(3.57)式と同様の式である。制御系(5.3)と(4.24)式との合成系は

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C} \underline{z} + \underline{g} \psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{h}' \underline{z} \quad \dots\dots\dots (4.25)$$

また、 C が臨界な場合は

$$\dot{\underline{z}} = \underline{D} \underline{z} + \underline{d} \psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{e}' \underline{z} \quad \dots\dots\dots (4.26)$$

と表わす。これは(3.58)および(3.82)式と同様のものであるので説明は省略する。

(4.25)および(4.26)式の解 $\underline{z}(t)$ は Filippovの意味の解を、また Lyapunov関数は

$$V = \underline{z}' P \underline{z} + \theta \int_0^\varepsilon \psi(\varepsilon, t) d\varepsilon + \sum_{i=1}^N \left\{ \theta_i \int_0^{\varepsilon_i} \psi(\varepsilon, t) d\varepsilon + \hat{\theta}_i \int_0^{\hat{\varepsilon}_i} \psi(\varepsilon, t) d\varepsilon \right\} \quad \dots\dots\dots (4.27)$$

$$\varepsilon_i = \underline{r}_i' \underline{z}, \quad \hat{\varepsilon}_i = \hat{\underline{r}}_i' \underline{z}$$

を考える。

まず定理4.1の証明について述べる。(4.27)式を(4.25)式の解に沿って時間微分し、

$$\sum_{i=1}^n \{ (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) - (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) \} \equiv 0$$

を右辺に加え整理すると、

$$-\dot{V} = \Omega(\underline{z}, \psi) - \sum \lambda_i \psi_i - \sum \hat{\lambda}_i \hat{\psi}_i + n(t) + \sum \bar{\mu}_i' M_i \bar{\mu}_i \quad \dots\dots\dots (4.28)$$

となる。ここで $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ はそれぞれ (2.32) ~ (2.34) 式において φ を ψ に、 φ_i を ψ_i に、 $\hat{\varphi}_i$ を $\hat{\psi}_i$ に置き換えたものである。

$\Omega(\underline{z}, \psi), \lambda_i, \hat{\lambda}_i$ はそれぞれ (3.61), (3.67), (3.68) 式に示したのと同じものである。また $n(t)$ は (4.1) 式に示したものである。よって定理 4.1 の各条件が満足されているならば、定理 3.1 の証明第 1 ~ 第 4 段階より $-\dot{V} \geq 0$ かつ $\dot{V} = 0$ となるのは $\underline{z} = \underline{0}$ のときのみであり、 $|\underline{z}| \rightarrow \infty$ で $V \rightarrow \infty$ となり、かつ $\underline{z}_e = \underline{0}$ は Lyapunov の意味で安定である。よって (4.25) 式の制御系すなわち制御系 (5.3) は大域的漸近安定となる。なお $\underline{z}_e = -\underline{C}^{-1} \underline{g} \varepsilon_0$ ($\inf \psi(0, t) \leq \varepsilon_0 \leq \sup \psi(0, t)$) の場合は $\underline{\tilde{z}} = \underline{z} - \underline{z}_e, \tilde{\psi} = \psi - \varepsilon_0$ とすれば $\underline{z}_e = \underline{0}$ の場合に帰着される。

定理 4.2 の証明は定理 3.2 の証明を用いれば上述と同様にして行なうことができるので省略する。

4.6 結 言

時変非線形要素を有する制御系の大域的漸近安定条件について検討した。安定条件は第 3 章の定理で示したのと同じもので、従来提案されている安定条件に比べ、一般的な臨界系あるいは非線形要素が不連続関数の場合に対しても適用でき、かつより必要十分に近い安定条件になっている。定理に示された条件は複雑であるが、非線形要素の特性が分かれば、必要に応じて簡単化することができる。また定理を適用する場合、(4.1) 式を満足するパラメータを選ぶことが問題になるが、時変非線形要素が定常な非線形要素と時変ゲインに分離できる場合について、代表的なものを例にとりあげて、パラメータの取り得る範囲を示した。

第 5 章 有界入力有界出力安定の解析

5.1 序 言

大局的漸近安定性は零入力の場合の安定性であつて、工学的には制御系に入力が加わっている場合の安定性を考察しておくことも重要である。すでに種々のクラスの入力に対する安定性の研究が行なわれている。たとえば円板条件または Popov の安定条件を満足する制御系に対する有界入力有界出力安定の研究^{49~54}、 L_p ($1 \leq p \leq \infty$) に属する入力に対する L_p 安定の研究^{55~59}あるいは周期的な入力に対する周期解の存在に関する研究^{49,60,61} などがある。

本章では、解の有界性に関する定理 2.2 に基づいて制御系 (S.1) または (S.2) の解の有界性について検討する。従来の研究^{49~54}においては、出力の有界性は述べているが、出力の大きさがどのような値で制限されるかを述べているものはない。また安定条件もかならずしも必要十分に近いとは言えない。ここでは、第 3 章、第 4 章で示した大局的漸近安定の定理を満足する制御系に有界入力加わった場合、その解の大きさが有界であることを示し、さらにその大きさがある時間関数で制限されることを示す。¹⁾

5.2 有界性の定理

ここでは制御系 (S.1)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} + u(t) \quad (\text{S.1})$$

または制御系 (S.2)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} + u(t) \quad (\text{S.2})$$

を考える。ただし行列 $\underline{A}$ は安定な場合に限定する。

〔定理 5.1〕 つぎの条件 I ~ V を満足するものとする。

- I. $\psi(\varepsilon, t)$ は、2.2 節の仮定 IV.(ii)(a) を満足する。ただし $\psi(\varepsilon, t)$ は $\varepsilon = 0$ で連続、かつ $K < \infty$ とする。
- II. 伝達関数 $G(s)$ の極はすべて s 平面の左半平面に存在する。
- III. $u(t)$ は次式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \sup |u(t)| &= u_0 = \text{const.} < \infty \\ \sup |\dot{u}(t)| &= u_1 = \text{const.} < \infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

IV. $W_i(s), \hat{W}_i(s)$ は (3.2), (3.3) 式に示すものとし、

$$\pi(s) = -\sum_{i=1}^n (g_i + \hat{g}_i) + R_e \left[\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + \hat{a}_i) + \theta S \right\} G(s) + \sum_{i=1}^n \{ b_i W_i(s) + \hat{b}_i \hat{W}_i(s) \} \right] \quad (5.2)$$

とおくと、すべての $0 \leq \omega \leq \infty$ に対してつぎの条件を満足する。

$$\min_{\omega} \pi(j\omega) = \delta_0 > 0 \quad (5.3)$$

V. 定理 4.2 の条件 IV を満足する。ただし $\Delta_i = \hat{\Delta}_i = \bar{\Delta}_i = 0$ とする。

このとき制御系 (5.1) の解 $x(t, x_0, t_0)$ に関してつぎの (a) ~ (c) が成立するような $R_1, R_2, \alpha(\cdot), \gamma(\cdot), \sigma_1$ が存在する。ただし $t_0 \leq t, x_0 \equiv x(t_0)$ とする。

(a) $|x_0| \leq R_1$ のとき

$$|x(t, x_0, t_0)| < \alpha(R_1) \quad (5.4)$$

(b) $R_1 < |x_0| \leq R_2$ のとき

$$|x(t, x_0, t_0)| < \alpha(|x_0|) \quad (5.5)$$

(c) $R_2 < |x_0|$ のとき

$$|x(t, x_0, t_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \gamma(t) \quad (5.6)$$

ただし関数 $\alpha(w)$ は $w \geq 0$ において狭義単調増加関数⁺、かつ $w < \alpha(w)$ である。関数 $\gamma(t)$ は次式を満足する。

$$-\frac{\delta_0}{2\sigma_2}(t-t_0) = \log \left\{ \frac{\gamma(t) - \sigma_3}{\gamma(t_0) - \sigma_3} \right\}^{\sigma_5} \left\{ \frac{\gamma(t) + \sigma_4}{\gamma(t_0) + \sigma_4} \right\}^{\sigma_6} \quad (5.7)$$

($\gamma(t_0) \geq \sigma_3$ のとき $\gamma(t) \geq \sigma_3$, 複号同順)

また R_2 は次式を満足する。

$$\alpha(R_2) = \sigma_3 / \sqrt{\sigma_1} \quad (5.8)$$

+ すべての $w_1 < w_2$ に対して $\alpha(w_1) < \alpha(w_2)$ ($\alpha(w_1) > \alpha(w_2)$) となる関数 α を狭義単調増加 (減少) 関数と呼ぶ。

ただし $R_1, R_2, \delta_0, \gamma(t_0), \sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$) は正値定数である。

[注 5.1] (5.6) 式の $\gamma(t)$ は (5.7) 式より つぎの性質を持つ。

(i) $\gamma(t_0) > \sigma_3$ のとき, $\gamma(t)$ は狭義単調減少関数である。また $\gamma(t_0) < \sigma_3$ のとき, $\gamma(t)$ は狭義単調増加関数である。

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \sigma_3$$

[定理 5.2] つぎの条件 I ~ V を満足するものとする。

I. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で、2.2 節の仮定 IV. (i)(a) を満足する。ただし $\varphi(\varepsilon)$ は $\varepsilon=0$ で連続かつ $K < \infty$ とする。またさらに次式を満足する。

$$\sup |\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon_2)| = \varphi_m = \text{const.} < \infty \quad \dots\dots\dots (5.9)$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は任意)

II. 伝達関数 $G(s)$ の極はすべて s 平面の左半平面に存在する。

III. $u(t)$ は次式を満足する。

$$\sup |u(t)| = u_0 = \text{const.} < \infty \quad \dots\dots\dots (5.10)$$

IV. 定理 5.1 の条件 IV を満足する。

V. 定理 3.1 の条件 IV を満足する。ただし $\Delta_i = \hat{\Delta}_i = \bar{\Delta}_i = 0$ とする。

このとき制御系 (S.2) の解 $x(t, x_0, t_0)$ に関して、つぎの (a), (b) が成立するような $R_1, \alpha(\cdot), \sigma_1(\cdot), \sigma_2$ が存在する。

(a) $|x_0| \leq R_1$ のとき

$$|x(t, x_0, t_0)| < \alpha(R_1) \quad \dots\dots\dots (5.11)$$

(b) $R_1 < |x_0|$ のとき

$$|x(t, x_0, t_0)| \leq \{\sigma_1(x_0) - \alpha(R_1)\} \exp\left\{-\frac{\delta_0}{2\sigma_2}(t-t_0)\right\} + \alpha(R) \quad (5.12)$$

ただし $\alpha(w)$ は $w \geq 0$ において狭義単調増加関数かつ $w < \alpha(w)$ である。また $R_1, \delta_0, \sigma_1(x_0), \sigma_2$ は正値定数である。

[定理 5.3] つぎの条件 I ~ III を満足するものとする。

I. $\psi(\varepsilon, t)$ は、2.2 節の仮定 IV. (ii)(a) および次式を満足する。

$$\sup_{\varepsilon, t} |\psi(\varepsilon, t)| = \varphi_0 = \text{const.} < \infty \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

Ⅱ. 定理3.1の条件Ⅱを満足する。

Ⅲ. $u(t)$ は (5.1) 式を満足する。ただし非線形要素が時間に依存しない場合、すなわち $\psi(\varepsilon, t) \equiv \varphi(\varepsilon)$ の場合は $u(t)$ は (5.10) 式を満足する。

このとき制御系 (S.1) の解 $x(t, x_0, t_0)$ に関して、 $t_0 \leq t$ なるすべての t において定理5.1の(a)~(c)が成立する。ただしパラメータ $R_1, R_2, \alpha(\cdot), \delta_0, \gamma(t_0), \sigma_i (i=1, 2, \dots, 6)$ の値は定理5.1の場合と異なる。

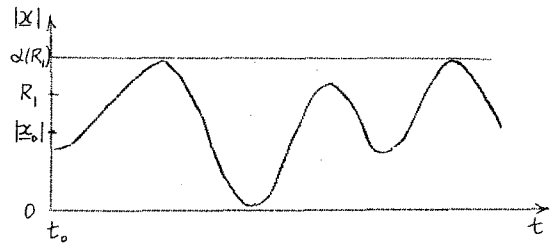
〔注5.2〕 上述の定理5.1~5.3はいずれも制御系(S.1) または (S.2) の解と平衡点とのずれの大きさ、すなわち $|x(t)|$ の有界性を述べたものであるが、図2.1において制御系の出力は $\sigma = -c'x$ であり、また

$$|\sigma| = |c'x| \leq |c| \cdot |x|$$

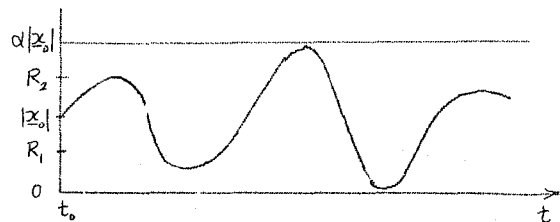
であるから $|x|$ が有界ならば出力の絶対値 $|\sigma|$ も有界となる。すなわち、有界入力有界出力安定が保証される。

〔注5.3〕 定理5.1および5.3における $R_1, R_2, \alpha(\cdot), \delta_0, \sigma_i (i=1, 2, \dots, 6)$ および定理5.2の $R_1, \alpha(\cdot), \delta, \sigma_1, \sigma_2$ は、与えられた制御系のパラメータ、入力の大きさ、非線形特性を表わすパラメータなどによって定まる定数である。詳細は証明を参照のこと。

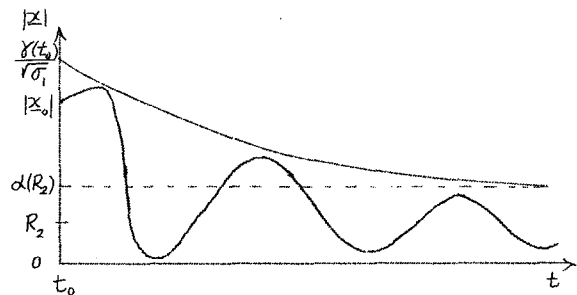
つぎに定理5.1~5.3の相互の関連を述べる。定理5.1はその特殊な場合として、非線形特性が時間に依存しない場合にも適用できるが、この



(a) $|x_0| \leq R_1$



(b) $R_1 < |x_0| \leq R_2$



(c) $R_2 < |x_0|, \delta(t_0) > \sigma_3$

図5.1 定理5.1 および5.3の図的解釈

ときには $\dot{u}(t)$ に対する制限条件のない定理 5.2 を用いればよい。

$\psi(\varepsilon, t)$ または $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で不連続の場合は定理 5.1 および 5.2 は適用できないが、非線形要素が (5.13) 式を満足する飽和形 (たとえば理想リレー など) であれば、定理 5.3 が適用できる。

$\psi(\varepsilon, t)$ または $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon = 0$ で連続かつ飽和形の場合、定理 5.1 ~ 5.3 が適用できるが、定理の不等式 (5.4) ~ (5.6), (5.11), (5.12) 式の右辺は $R_1, R_2, \alpha, \delta_0$ 。

σ_0 などの値によって定まり、それぞれ異なる。したがって定理を用いて $|x(t)|$ の大きさがどのような値で制限されるかをより厳密に知るには、これらの不等式の右辺のうち、より小さいものを用いればよい。

定理 5.1 および 5.3 において、任意の初期値に対して $t \rightarrow \infty$ で

$$|x(t, x_0, t_0)| < \alpha(R_2)$$

となり、定理 5.2 においては

$$|x(t, x_0, t_0)| < \alpha(R_1)$$

となる。一般に (5.2) 式の σ_0 が大きい程、 u_0, u_1 が小さい程、各定理の $R_1, R_2, \alpha(R_1), \alpha(R_2)$ の値は小さくなる。ただし非線形要素が時間に依存しない場合は u_1 の値には無関係である。なお外力のない場合すなわち $u(t) \equiv 0$ の場合は $\alpha(R_2) = \alpha(R_1) = 0$ となる。

つぎに定理の適用例を示す。

[例 5.1] 伝達関数が第 3 章の例 3.1 で示したもので、非線形要素は時間に依存しない場合すなわち $\psi(\varepsilon, t) \equiv \varphi(\varepsilon)$ で、 $\varphi(\varepsilon)$ が図 2.4 (a) に示す飽和要素の場合を考える。Popov の条件、

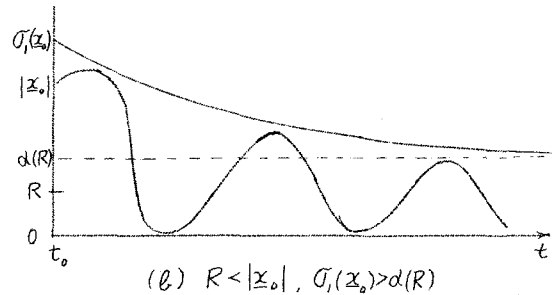
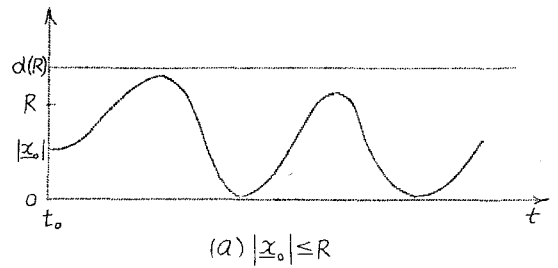


図 5.2 定理 5.2 の図的解釈

$$\pi(s) = \frac{1}{K} + R_e (1 + \theta s) G(s)$$

を用いれば、有界入力有界出力安定が保証される非線形のスクタは $\{0, 5.34\}$ となる。定理 5.2 または 5.3 を適用すれば、スクタ $\{0, \infty\}$ に対して有界入力有界出力安定を保証することができる。

〔例 5.2〕 伝達関数が第 3 章の例 3.5 に示すもので、非線形要素が図 2.4 (d) に示す理想リレーで時間に依存しない場合を考える。従来の安定条件を用いても有界入力有界出力安定かどうか判定できないが、定理 5.3 を適用すれば、有界入力有界出力安定が保証される (例 3.5 参照)。

5.3 定理の証明

制御系 (S.1) または (S.2) に対して、さらに (4.24) 式または (3.57) 式の仮想系を考え、その合成した制御系をそれぞれつぎのように表わす。

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C} \underline{z} + \underline{g} \varphi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{h}' \underline{z} + u(t) \quad (5.14)$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C} \underline{z} + \underline{g} \varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{h}' \underline{z} + u(t) \quad (5.15)$$

行列 $\underline{C}$, ベクトル $\underline{z}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ は (3.58) 式と同じものであるので説明は省略する。

また Lyapunov 関数は、(5.14) 式に対しては (4.27) 式を、(5.15) 式に対しては

$$V = \underline{z}' \underline{P} \underline{z} + \theta \int_0^{\underline{h}' \underline{z}} \varphi d\varepsilon + \sum_{i=1}^N \left\{ \theta_i \int_0^{\varepsilon_i} \varphi d\varepsilon + \hat{\theta}_i \int_0^{\hat{\varepsilon}_i} \varphi d\varepsilon \right\} \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_i = \underline{Y}_i' \underline{z}, \quad \hat{\varepsilon}_i = \hat{\underline{Y}}_i' \underline{z}$$

を考え、証明は第 2 章で示した定理 2.2 を用いて行なう。

5.3.1 定理 5.1 の証明

まず (4.27) 式の Lyapunov 関数が定理 2.2 の条件 I および II を満足することを示す。

(4.27) 式を (5.14) 式の解軌道に沿って時間微分し、右辺に

$$\sum_{i=1}^N \left\{ (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) - (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) \right\} \equiv 0$$

を加えて整理すると、

$$-\dot{V} = \Omega(\underline{z}, \psi) - \Sigma(\eta_i \psi_i + \hat{\eta}_i \hat{\psi}_i) + \Sigma \bar{\Phi}_i M_i \bar{\Phi}_i + n(t) - \theta \psi \dot{u}(t) - \Sigma \bar{\eta}_i u(t) \quad (5.17)$$

となる。ただし $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ は (2.32) ~ (2.34) 式において $\underline{\Delta}_i = \hat{\Delta}_i = \bar{\Delta}_i = \underline{0}$ とし、 $\varphi, \varphi_i, \hat{\varphi}_i$ をそれぞれ $\psi, \psi_i, \hat{\psi}_i$ に置き換えたものである。また

$$\Omega(\underline{z}, \psi) = [\underline{z}', \psi] \underline{Q} \begin{bmatrix} \underline{z} \\ \psi \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{F} & \underline{f} \\ \underline{f}' & \underline{p} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -\underline{F} = \underline{C}' \underline{P} + \underline{P} \underline{C} \\ -\underline{f} = \underline{P} \underline{g} + \underline{l} \end{array}$$

$$\underline{l} = \frac{1}{2} [\theta \underline{C}' \underline{h} + \Sigma \{ (a_i + \hat{a}_i) \underline{h} + b_i \underline{y}_i + \hat{b}_i \hat{y}_i \}]$$

$$-\underline{p} = \theta \underline{h}' \underline{g} + \Sigma (g_i + \hat{g}_i)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta_i = \theta_i \dot{\hat{\varepsilon}}_i + h_i \psi + e_i \underline{h}' \underline{z} + d_i \varepsilon_i + \bar{a}_i \varepsilon_i + \bar{b}_i \hat{\varepsilon}_i \\ \hat{\eta}_i = \hat{\theta}_i \dot{\hat{\varepsilon}}_i + \hat{h}_i \psi + \hat{e}_i \underline{h}' \underline{z} + \hat{d}_i \hat{\varepsilon}_i + \bar{e}_i \varepsilon_i + \bar{d}_i \hat{\varepsilon}_i \\ \bar{\eta}_i = (a_i + \hat{a}_i) \psi + e_i \psi_i + \hat{e}_i \hat{\psi}_i \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

である。

(3.2) および (3.3) 式より $\eta_i \equiv 0, \hat{\eta}_i \equiv 0$ となる (第3章の証明参照のこと)。

いま、* を複素共役・転置として

$$\underline{g}_\omega = (\underline{C} - j\omega \underline{I})^{-1} \underline{g}, \quad \underline{h}_\omega^* = [\underline{g}_\omega^*, -1]$$

とおくと

$$\pi(j\omega) = \underline{p} + 2 \operatorname{Re} \underline{e}' \underline{g}_\omega = \underline{h}_\omega^* \underline{Q} \underline{h}_\omega \quad (5.20)$$

となる。したがって $\lambda_i \{ \underline{Q} \}$ を行列 $\underline{Q}$ の固有値とすると

$$\pi(j\omega) \geq \min_i [\lambda_i \{ \underline{Q} \}] |\underline{h}_\omega|^2 \geq \min_i [\lambda_i \{ \underline{Q} \}]$$

となるので (5.3) 式より

$$\min_i [\lambda_i \{Q\}] = \delta_0 > 0 \quad \dots\dots\dots (5.21)$$

となる。また $\underline{P} > 0$ が存在して $\underline{Q} > 0$ となる。よって (5.18) 式より

$$\Omega(\underline{z}, \psi) \geq \delta_0 (|\underline{z}|^2 + \psi^2) \geq \delta_0 |\underline{z}|^2 \quad \dots\dots\dots (5.22)$$

となる。また定理の条件 I, III より

$$\left. \begin{aligned} |\psi| &\geq -K(|\underline{c}| |\underline{z}| + u_0) \\ |\psi_i| &\geq -K|\underline{r}_i| |\underline{z}| \\ |\hat{\psi}_i| &\geq -K|\hat{r}_i| |\underline{z}| \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.23)$$

となる。したがって $|u| \leq u_0$, $|\dot{u}| \leq u_1$ および (4.1), (5.22), (5.23) 式より

$$-\dot{V} \geq \delta_0 |\underline{z}|^2 - \sigma_7 |\underline{z}| - \sigma_8 \quad \dots\dots\dots (5.24)$$

となる。ただし

$$\sigma_7 = K \{ \theta |\underline{c}| u_1 + u_0 \Sigma (|a_i + \hat{a}_i| \cdot |\underline{c}| + |e_i| \cdot |\underline{r}_i| + |\hat{e}_i| \cdot |\hat{r}_i|) \}$$

$$\sigma_8 = K u_0 (\theta u_1 + u_1 \Sigma |a_i + \hat{a}_i|)$$

また $\theta, \theta_i, \hat{\theta}_i$ は非負の定数, $\underline{P} > 0$ であるから (4.27) 式はつぎのように表わされる。

$$\sigma_1 |\underline{z}|^2 \leq V(\underline{z}) \leq \sigma_2 |\underline{z}|^2 + \sigma_9 |\underline{z}| + \sigma_{10} \quad \dots\dots\dots (5.25)$$

ただし

$$\sigma_1 = \min_i [\lambda_i \{P\}]$$

$$\sigma_2 = \max_i [\lambda_i \{P\}] + \frac{K}{2} \{ \theta |\underline{c}|^2 + \Sigma (\theta_i |\underline{r}_i|^2 + \hat{\theta}_i |\hat{r}_i|^2) \}$$

$$\sigma_9 = K \theta |\underline{c}| u_0, \quad \sigma_{10} = \frac{1}{2} \theta u_1^2$$

よって (5.24), (5.25) 式より

$$\xi_i(w) = \sigma_i w^2 \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

$$\xi_2(w) = \sigma_2 w^2 + \sigma_9 w + \sigma_{10} \quad \dots\dots\dots (5.27)$$

$$\xi_2(w) = \delta_0 w^2 - \sigma_7 w - \sigma_8 \quad \dots\dots\dots (5.28)$$

$$R = \{ \sigma_7 + \sqrt{\sigma_7^2 + 4\delta_0 \sigma_8} \} / 2\delta_0 \quad \dots\dots\dots (5.29)$$

とおけば $|\underline{z}| \geq R_1$ であらう ($|\underline{z}| > 0$) となるので定理 2.2 の条件 I および II が満足される。すなわち

$$|\underline{z}_0| \leq R_1 \text{ のとき } |\underline{z}(t, \underline{z}_0, t_0)| < \alpha(R_1) \quad \dots\dots\dots (5.30)$$

$$R_1 < |\underline{z}| \text{ のとき } |\underline{z}(t, \underline{z}_0, t_0)| < \alpha(|\underline{z}_0|) \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

が成立する。ただし $\xi_1\{\alpha(R_1)\} > \xi_2(R_1)$, $\xi_1\{\alpha(|\underline{z}_0|)\} > \xi_2(|\underline{z}_0|)$ である。 y は仮想系の状態変数であるので $y_0 = y(t_0) = 0$ とすれば $|\underline{z}_0| = |\underline{z}_0|$ となり、また $|\underline{z}(t, \underline{z}_0, t_0)| \leq |\underline{z}(t, \underline{z}_0, t_0)|$ を用いると (5.30), (5.31) 式より定理 5.1 の (a) および (b) が証明される。

つぎに定理 5.1 の (c) を証明する。まず $|\underline{z}| \geq R_1$ について考える。
(5.25) 式より次式が成立する。

$$|\underline{z}| \leq \sqrt{V(\underline{z})/\sigma_1} \quad \dots\dots\dots (5.32)$$

よって (5.24) 式は

$$\dot{V}(\underline{z}) \leq -\delta_0 V(\underline{z})/\sigma_2 + \sigma_{11} \sqrt{V(\underline{z})} + \sigma_{12} \quad \dots\dots\dots (5.33)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_7 \sigma_2 + \delta_0 \sigma_9}{\sigma_2 \sqrt{\sigma_1}}, \quad \sigma_{12} = \sigma_8 + \frac{\delta_0 \sigma_{10}}{\sigma_2}$$

となる。この微分不等式を解くと

$$\sqrt{V(\underline{z})} \leq \gamma(t) \quad \dots\dots\dots (5.34)$$

となる。ただし

$$\gamma(t_0) = \sqrt{V(\underline{z}_0)}$$

$$\sigma_3 = \{ \sigma_2 \sigma_{11} + \sqrt{\sigma_2 (\sigma_2 \sigma_{11}^2 + 4\delta_0 \sigma_{12})} \} / 2\delta$$

$$\sigma_4 = \{ -\sigma_2 \sigma_{11} + \sqrt{\sigma_2 (\sigma_2 \sigma_{11}^2 + 4\delta_0 \sigma_{12})} \} / 2\delta$$

$$\sigma_5 = \sigma_3 / (\sigma_3 + \sigma_4) \quad , \quad \sigma_6 = \sigma_4 / (\sigma_3 + \sigma_4)$$

よって $|\underline{z}(t)| \geq R_1$ のときは (5.32), (5.34) 式より、また $|\underline{z}(t)| < R_1$ となる時間 t 以後においては、定理 2.2 より定理 5.1 の (c) が証明される。

5.3.2 定理 5.2 の証明

定理 5.1 の場合と同様にして行なう。まず Lyapunov 関数 (5.16) 式を時間微分すると

$$\dot{V}(\underline{z}) = \dot{\underline{z}}' \underline{P} \underline{z} + \underline{z}' \underline{P} \dot{\underline{z}} + \theta \bar{\varphi} \underline{h}' \dot{\underline{z}} + \sum (\theta_i \varphi_i \dot{\varepsilon}_i + \hat{\theta}_i \hat{\varphi}_i \dot{\varepsilon}_i) \quad \dots (5.35)$$

ただし $\bar{\varphi} \triangleq \varphi(\underline{h}' \underline{z})$ である。(2.32) ~ (2.34) 式において $\underline{\Delta}_i = \hat{\underline{\Delta}}_i = \bar{\underline{\Delta}}_i = \underline{0}$ とし、かつ ε, φ をそれぞれ $\underline{h}' \underline{z}, \bar{\varphi}$ に置き換えた $N_i, \hat{N}_i, \bar{N}_i$ を用いて、(5.35) の右辺に $\sum_{i=1}^n \{ (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) - (N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) \} \equiv 0$ を加えると

$$\begin{aligned} -\dot{V}(\underline{z}) = & \Omega(\underline{z}, \bar{\varphi}) - \sum (\eta_i \varphi_i + \hat{\eta}_i \hat{\varphi}_i) + \sum (\underline{\Phi}_i' \underline{M}_i \underline{\Phi}_i + N_i + \hat{N}_i + \bar{N}_i) \\ & + (\bar{\varphi} - \varphi) \{ 2 \underline{z}' \underline{P} \underline{g} + \theta \underline{h}' \underline{g} \bar{\varphi} - \sum (\underline{h}_i \varphi_i + \hat{\underline{h}}_i \hat{\varphi}_i) \} \quad \dots (5.36) \end{aligned}$$

となる。ここで $\Omega(\underline{z}, \bar{\varphi})$ は (5.18) 式において ψ を $\bar{\varphi}$ に置き換えたもので、 $\eta_i, \hat{\eta}_i$ は (5.19) 式において ψ を φ に置き換えたものである。定理 5.1 の場合と同様にして (5.36) 式は

$$-\dot{V}(\underline{z}) \geq \delta_0 |\underline{z}|^2 - \sigma_3 |\underline{z}| \quad \dots (5.37)$$

となる。ただし $\sigma_3 = \varphi_m \{ 2 |\underline{P} \underline{g}| + K \{ \theta |\underline{c}' \underline{a}| |\underline{c}| + \sum (|\underline{h}_i| |\underline{y}_i| + |\hat{\underline{h}}_i| |\hat{\underline{y}}_i|) \} \}$ 。また (5.25) 式と同様に (5.16) 式は

$$\sigma_4 |\underline{z}|^2 \leq V(\underline{z}) \leq \sigma_2 |\underline{z}|^2 \quad \dots (5.38)$$

$$\sigma_2 = \max_i \{ \lambda_i(\underline{P}) \} + \frac{K}{2} \{ \theta |\underline{c}|^2 + \sum (\theta_i |\underline{y}_i|^2 + \hat{\theta}_i |\hat{\underline{y}}_i|^2) \}$$

$$\sigma_4 = \min_i \{ \lambda_i(\underline{P}) \}$$

となる。よって (5.37), (5.38) 式より

$$\xi_1(w) = \sigma_4 w^2 \quad , \quad \xi_2(w) = \sigma_2 w^2$$

$$\zeta(w) = \delta_0 w^2 - \sigma_3 w \quad , \quad R = \sigma_3 / \delta_0$$

とすれば、 $|\underline{z}| \geq R_1$ のとき、 $\delta(|\underline{z}|) \geq 0$ であるので定理 2.2 より、 $|\underline{z}_0| \leq R_1$ のとき

$$|\underline{z}(t, \underline{z}_0, t_0)| < \alpha(R_1) \quad \dots\dots\dots (5.39)$$

$$\xi_1 \{\alpha(R_1)\} > \xi_2(R_1)$$

となる。よって定理 5.1 の場合と同様に定理 5.2 の (a) が証明される。

つぎに定理 5.2 (b) を証明する。 $|\underline{z}| \geq R_1$ について考える。(5.38)式より

$$|\underline{z}| \leq \sqrt{V(\underline{z})/\sigma_4} \quad \dots\dots\dots (5.40)$$

となる。また、(5.37)式を(5.38)式を用いて変形すると、

$$\dot{V}(\underline{z}) \leq -\frac{\delta_0}{\sigma_2} V(\underline{z}) + \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2}} \sqrt{V(\underline{z})} \quad \dots\dots\dots (5.41)$$

となる。この微分不等式を $\sqrt{V(\underline{z})}$ について解き $|\underline{z}(t)| \leq |\underline{z}(t)|$ および (5.40)式を用いると (5.11)式が得られる。ただし

$$\sigma_1(\underline{z}_0) = \sqrt{\frac{V(\underline{z}_0)}{\sigma_4}} \quad , \quad \alpha(R) = \frac{\sigma_3}{\delta_0} \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_4}}$$

よって定理 5.2 の (b) が証明される。

5.3.3 定理 5.3 の証明

i) 時変非線形要素の場合 : (5.12)式に注意すれば、定理 5.1 の証明における (5.24), (5.25)式の導出と同様にして次式が得られる。

$$-\dot{V}(\underline{z}) \geq \delta_0 |\underline{z}|^2 - \sigma_8 \quad \dots\dots\dots (5.42)$$

$$\sigma_1 |\underline{z}|^2 \leq V(\underline{z}) \leq \sigma_2 |\underline{z}|^2 + \sigma_9 |\underline{z}| + \sigma_{10} \quad \dots\dots\dots (5.43)$$

ただし

$$\sigma_1 = \min_i \{\lambda_i(\underline{P})\} \quad , \quad \sigma_2 = \max_i \{\lambda_i(\underline{P})\}$$

$$\sigma_8 = \varphi_0 \{ \theta u_1 + u_0 \sum (|a_i + \hat{a}_i| + |e_i| + |\hat{e}_i|) \}$$

$$\sigma_9 = \varphi_0 \{ \theta |\underline{c}| + \sum (\theta_i |r_i| + \hat{\theta}_i |\hat{r}_i|) \}$$

$$\sigma_{10} = \theta \varphi_0 u_0$$

よって(5.26)～(5.29)式の代わりに(ただし $\sigma_7=0$ にする。)

$$\xi_1(w) = \sigma_1 w^2, \quad \xi_2(w) = \sigma_2 w^2 + \sigma_9 w + \sigma_{10}$$

$$\zeta(w) = \delta_0 w^2 - \sigma_8, \quad R_1 = \sqrt{\sigma_8 / \delta_0}$$

とすれば、定理5.1の証明と同様にして定理5.3が証明できる。

ii) 非線形要素が時間に依存しない場合 : (5.16) 式の Lyapunov 関数を考えることにより、定理5.1の場合と同様にして証明できる。ただし(5.26)～(5.29)式は次式のようになる($\sigma_{10}=0$ にする)。

$$\xi_1(w) = \sigma_1 w^2, \quad \xi_2(w) = \sigma_2 w + \sigma_9 w$$

$$\zeta(w) = \delta_0 w^2 - \sigma_7 w - \sigma_8$$

$$R = \{ \sigma_7 + \sqrt{\sigma_7^2 + 4\delta_0 \sigma_8} \} / 2\delta_0$$

$$\sigma_1 = \mu_m^* \{ \lambda_i(P) \}, \quad \sigma_2 = \max_i \{ \lambda_i(P) \}, \quad \sigma_7 = 2\varphi_m |Pg|$$

$$\sigma_8 = \varphi_0 \varphi_m \{ \theta |c'a| + \sum (|\hat{k}_i| + |\hat{\hat{k}}_i|) \}$$

$$\sigma_9 = \varphi_0 \{ \theta |c| + \sum (\theta_i |\underline{r}_i| + \hat{\theta}_i |\hat{\underline{r}}_i|) \}$$

5. 4 結 言

制御系(S.1)または(S.2)において、入力が有界な場合、系の状態変数のノルムが有界になるための条件を示した。これは有界入力有界出力の意味での安定を保証する。さらに状態変数のノルムがどのような時間関数で制限されるかも示した。この安定条件は定理にまとめたが、第3章または第4章で示した大域的漸近安定を保証する条件と同様のものである。すなわち、制御系が定理3.1または4.1によって大域的漸近安定であることが保証されるならば、有界な入力に対してその出力も有界になることが保証される。ここで示した定理は、従来の結果よりも広範な非線形制御系に対して適用でき、さらにより必要十分に近い条件を与える。これに関しては例題で示した。

第 6 章 Popov の安定条件の適用法

6.1 序 言

Popov の安定判別法は制御系の線形要素に着目し、その伝達関数の周波数特性を Nyquist 軌跡と類似した軌跡で図示して安定判別を行なうもので、その実用価値は大きい。その後多くの人々の研究によって、1 価連続な非線形要素だけでなく、不連続関数、2 価関数などを含む制御系に対しても Popov の安定条件が適用できることが明らかになった。Popov の安定条件は十分条件であるので、これをより必要十分条件に近いものに拡張する研究が行なわれ、種々の安定条件が得られているが、条件式が複雑なものとなり、適用のし易さという点で Popov の安定条件に優るものはない。すなわち Popov の安定条件は他の安定条件に比べ、工学的な応用範囲が広い。

本章では、まず前章までに得られた結果をもとにして、1 価連続、2 価関数などの非線形要素、あるいは時変非線形要素を有する制御系の大域的漸近安定、有界入力有界出力安定を保証する Popov 形の安定条件を定理にまとめる。

つぎに Popov の安定条件の適用をいっそう容易にするために、図式的安定判別法において用いられている軌跡 (Popov 軌跡) の一般的性質ならびにその描き方について検討する。^{49, 62, 63}

最後に Popov の安定条件の応用として、Popov 軌跡と過渡応答線図とを結びつけた非線形制御系の安定度の評価法について述べる。^{64, 65}

6.2 Popov の安定条件

ここでは制御系

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} + u(t) \quad (S.1)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} + u(t) \quad (S.2)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\psi(\varepsilon, t), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} \quad (S.3)$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} \quad (S.4)$$

の大域的漸近安定または有界入力有界出力安定に対する Popov 形の条件を定理にまとめる。

〔定理 6.1〕 つぎの条件 I ~ IV が満足されるとき制御系 (S.4) は大域的漸
(72)

近安定となる。

I. $\varphi(\varepsilon)$ は 2.2 節の仮定 IV.(i) を満足する。

II. (i) 伝達関数 $G(s)$ の極は s 平面の左半平面または左半面と虚軸上に存在する。

(ii) $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続の場合は、 $G(s)$ の零点は s 平面の左半平面または原点 (重複度は 1) および左半平面に存在する。

(iii) $G(s)$ が臨界な場合は制御系 (S.4) は極限安定である。

III.

$$\pi_p(s) \triangleq \frac{1}{K} + R_e(1 + \theta s)G(s) \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

とおく。このときすべての $0 \leq \omega < \infty$ に対してつぎの条件を満足する定数 θ が存在する。

$$(i) \pi_p(j\omega) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

$$(ii) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \pi_p(j\omega) > 0 \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

(iii) $G(s)$ は $s = -1/\theta$ なる極を有しない。

$$\left. \begin{aligned} (iv) \frac{1}{K} + R_e G(j\omega_i) &> 0 \quad (K \neq \infty) \\ R_e G(j\omega_i) &\geq 0 \quad (K = \infty) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

($i = 1, 2, \dots$)

ここで ω_i は $\pi_p(j\omega) = 0$ となる ω の値である。

ただし $\pi_p(j\omega) > 0$ ($0 \leq \omega < \infty$) の場合は条件 (iii), (iv) は削除される。

IV. $\varphi(\varepsilon)$ が 2 価関数の場合は、ヒステリシスループが時計回りの場合は $\theta \geq 0$, 反時計回りの場合は $\theta \leq 0$ である。

〔定理 6.2〕 つぎの条件 I, II が満足されるとき制御系 (S.3) は大局的漸近安定となる。ただし $\psi(\varepsilon, t) = \bar{r}(t)\varphi(\varepsilon)$ とする。

I. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で、2.2 節の仮定 IV.(i) および

$$\bar{r}(t)\varphi(\varepsilon) \left\{ \varepsilon - \frac{1}{K} \bar{r}(t)\varphi(\varepsilon) \right\} \geq \theta \dot{\bar{r}}(t) \int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad \dots\dots\dots (6.5)$$

を満足する。ただし

$$0 < \inf \bar{r}(t) \leq \bar{r}(t) \leq \sup \bar{r}(t) = 1 \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

II. 定理 6.1 の条件 II および III を満足する。

〔定理 6.3〕 つぎの条件 I ~ IV を満足する制御系 (S.1) を考える。ただし $\varphi(\varepsilon, t) = k(t)\varphi(\varepsilon)$ とする。

- I. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で 2.2 節の仮定 IV (i) (a) および (6.5) 式を満足する。ただし $\varphi(\varepsilon)$ は $\varepsilon=0$ で連続で、かつ $K < \infty$ とする。 $k(t)$ は (6.6) 式を満足する。
- II. 伝達関数 $G(s)$ の極はすべて s 平面の左半平面に存在する。
- III. $u(t)$ は (5.1) 式を満足する。
- IV. すべての $0 \leq \omega \leq \infty$ に対して次式を満足する非負の定数 θ が存在する。

$$\min_{\omega} \pi_p(j\omega) \geq \delta_0 > 0 \quad \dots\dots\dots (6.7)$$

このとき制御系 (S.1) の解 $x(t, x_0, t_0)$ に関して定理 5.1 の (a) ~ (c) が成立する。なお条件 I はつぎの I' に置き換えてもよい。ただしこの場合パラメータ $R_1, R_2, \alpha(\cdot), \delta_0, \gamma(t_0), \sigma_i (i=1, \dots, 6)$ の値は異なる。

I'. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で 2.2 節の仮定 IV (i) と (6.5) 式および次式を満足する。

$$\sup |\varphi(\varepsilon)| = \varphi_0 < \infty \quad \dots\dots\dots (6.8)$$

ただし $\varphi(\varepsilon)$ が $\varepsilon=0$ で不連続の場合は、 $G(s)$ の零点は s 平面の原点 (重複度 1) および左半平面以外には存在しないものとする。

〔定理 6.4〕 つぎの条件 I ~ IV を満足する制御系 (S.2) を考える。

- I. $\varphi(\varepsilon)$ は 1 価関数で 2.2 節の仮定 IV (i) (a) および

$$\sup |\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon_2)| = \varphi_m < \infty \quad \dots\dots\dots (6.9)$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 任意)

を満足する。ただし $\varphi(\varepsilon)$ は $\varepsilon=0$ で連続、かつ $K < \infty$ とする。

- II. 伝達関数 $G(s)$ の極はすべて s 平面の左半平面に存在する。
- III. $u(t)$ は (5.10) 式を満足する。
- IV. 定理 6.3 の条件 IV を満足する。

このとき制御系 (S.2) の解 $x(t, x_0, t_0)$ に関して定理 5.2 の (a) および (b) が成立する。

上述の定理 6.1 ~ 6.4 は第 3 ~ 5 章で示した定理から導くことができる。ただし第 3, 4 章の定理では $\theta \geq 0$ としているので、定理 6.1 および 6.2 におい

で $\theta < 0$ の場合の証明が必要であるが、これに関しては文献4. p.161 と同様に
して行なうことができるので省略する。

上述の定理を用いて安定判別を行なう場合には $\pi_p(j\omega) \geq 0$ を示さなければ
ならない。つぎにこれを図式的に行なう方法について述べる。

まず、つぎに示すような周波数特性 $G^*(\omega)$ を定義する。

$$X(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) \quad , \quad Y(\omega) = \omega \operatorname{Im} G(j\omega) \quad \dots\dots\dots (6.10)$$

$$G^*(\omega) = X + jY \quad \dots\dots\dots (6.11)$$

$\omega \geq 0$ に対する $G^*(\omega)$ の軌跡を X - Y 平面に描いたものを Popov 軌跡と呼ぶ。
一方 π_p は (6.1) 式を用いると

$$\pi_p = X - \theta Y + \frac{1}{K} \quad \dots\dots\dots (6.12)$$

と表わされる。

結局、安定条件 $\pi_p(j\omega) \geq 0$ は X - Y 平面に描いた Popov 軌跡が直線

$$Y - \theta Y + \frac{1}{K} = 0 \quad \dots\dots\dots (6.13)$$

の右側に存在すればよいことになる。(6.13) 式の直線は点 $(-1/k, 0)$ をつね
に通る、 θ はこの直線のこう配に関係するが任意の実数値であるから最も広い
安定領域を与えるように選べばよいわけである。したがって系の線形部分の
Popov 軌跡さえ描けば容易に安定判別が行なえる。図6.1において (a) の場

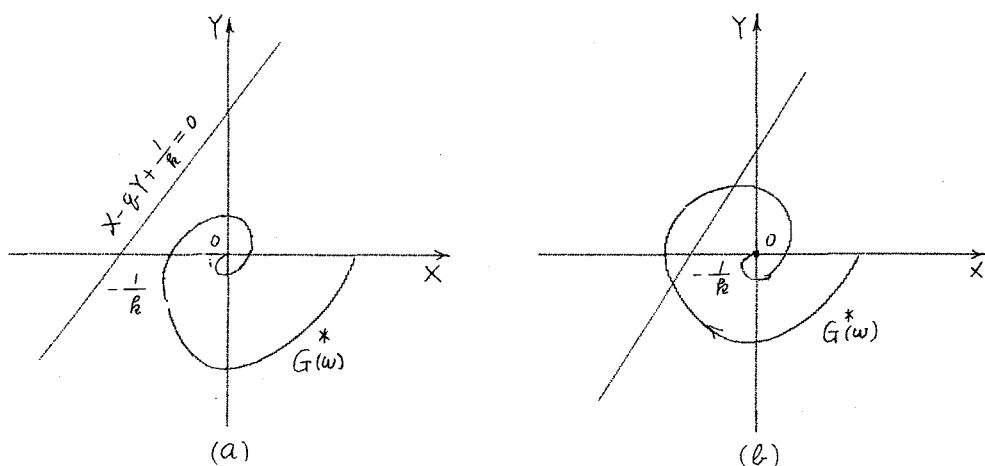


図 6.1 $\pi_p(j\omega) \geq 0$ の図的解法

合は安定であるが (b) のように直線 (6.13) と Popov 軌跡が交点を持つと安定とは判別できない。

なお第 2 章で示した極限安定条件は Popov 軌跡 $G^*(\omega)$ を用いればつぎのように表わすことができる。

〔極限安定条件〕 (Aizerman, Gantmacher)^{4, 70}

- I. $G(s)$ の極で s 平面の虚軸上に存在するものの重複度は 2 以下で、かつ つぎの条件を満足する。
- II. 1 重極が原点に存在している場合

$$\operatorname{Im} G^*(0) < 0 \quad \dots\dots\dots (6.14)$$

- III. 1 重極が原点以外の虚軸上に存在している場合

この極を $j\omega_0$ とし、 δ を任意の小さな正数とすると ω が $\omega_0 + \delta \rightarrow \infty \rightarrow 0 \rightarrow \omega_0 - \delta$ と変化するとき $G^*(\omega)$ の軌跡がつねに点 $-\infty + j0$ を左側に見ながら移動しなければならない。ここで $G^*(\infty)$ と $G^*(0)$ の点が一致していない場合には、この軌跡上においてこれら 2 点間は直線で結ばれているものとする。

- IV. 2 重極が原点に存在している場合

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} G^*(\omega) = -\infty \quad \dots\dots\dots (6.15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} G^*(\omega) < 0 \quad \dots\dots\dots (6.16)$$

- V. 2 重極が原点以外の虚軸上に存在している場合

この極を $j\omega_0$ とすると

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0 - 0} \operatorname{Re} G^*(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0 + 0} \operatorname{Re} G^*(\omega) = -\infty \quad \dots\dots\dots (6.17)$$

かつ δ を任意の小さな正数とすると、

$$\operatorname{Im} G^*(\omega) \begin{cases} > 0 & \omega_0 - \delta < \omega < \omega_0 \\ < 0 & \omega_0 < \omega < \omega_0 + \delta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6.18)$$

6.3 Popov 軌跡の一般的性質

前節で述べたように与えられた系に関して Popov 軌跡と (6.13) 式の直線を描けば非線形制御系の安定判別を行なうことができる。(6.13) 式の直線は容易に描けるが、Popov 軌跡は系の伝達関数 $G(s)$ によってその形は種々異なった

ものになる。たとえば伝達関数が

$$G(s) = K/s$$

の場合は

$$X = 0, \quad Y = -K$$

となり、すべての $\omega \geq 0$ に対して Popov 軌跡は点 $(0, -K)$ となる。

また

$$G(s) = \frac{K}{Ts+1}$$

の場合は

$$X = \frac{K}{T^2\omega^2+1}, \quad Y = -\frac{KT\omega^2}{T^2\omega^2+1}$$

となり、これから

$$Y = \frac{1}{T}X - \frac{K}{T} \quad \dots\dots\dots (6.19)$$

となって 図 6.2 に示すような直線になる。

この場合ゲイン定数 K が変化すると図中の (1), (2) の直線のように Popov 軌跡は平行移動する。また時定数 T が変化すれば、

(6.19) 式からわかるようにそのこう配が変化する。Popov 軌跡上のある周波数 ω_i に対する点を見い出すには、原点を通る直線

$$Y = -T\omega_i^2 X$$

をひき、Popov 軌跡との交点から求めればよい。この直線は T が一定なら K が変化しても ω_i に対して一定の直線となる。

さらに伝達関数が

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

となると 図 6.3 に示すように点 $(-K(T_1+T_2), -K)$ から出発し原点に至る曲線となる。

このような Popov 軌跡の一般的性質を知つ

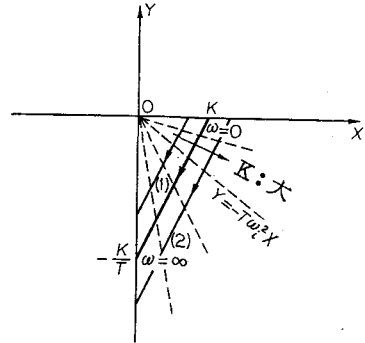


図 6.2 $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ の Popov 軌跡

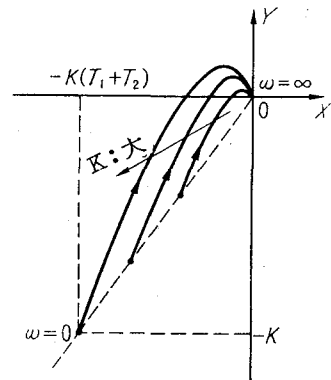


図 6.3 $G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ の Popov 軌跡

ていれば、定理 6.1 ~ 6.4 の適用が容易になるだけでなく、後に述べるように安定度の評価への適用も容易になる。したがって以下では Popov 軌跡の性質について検討する。

まず Popov 軌跡の形状に最も関係がある $\omega=0$ および ∞ に対する位置すなわち出発点と終着点について検討する。

(i) $\omega=0$ の場合 (出発点)

伝達関数を一般に

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \dots\dots\dots (6.20)$$

$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots\dots\dots + b_m \quad \dots\dots\dots (6.21)$$

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots\dots + a_n \quad \dots\dots\dots (6.22)$$

$$(n > m)$$

と表わす。ここで m, n は正の整数で $N(s)$ と $D(s)$ は共通因子を持たないものとする。

伝達関数 $G(s)$ の極がすべて負の実部を持つ場合は、 $\omega=0$ のとき

$$G(0) = \frac{N(0)}{D(0)} = \frac{b_m}{a_n}$$

となり、Popov 軌跡は X 軸上の $(b_m/a_n, 0)$ なる点から始まることになる。

$G(s)$ の極のうち 1 個だけが原点にあつて他は虚軸の左に分布している場合は $G(s)$ を $s=0$ の近傍で Laurent 展開すると

$$G(s) = \frac{c_0}{s} + c_1 + c_2 s + c_3 s^2 + \dots\dots\dots (6.23)$$

となる。したがって X, Y はそれぞれ

$$X = c_1 - c_3(\omega)^2 + \dots\dots\dots$$

$$Y = -c_0 + c_2 \omega^2 - \dots\dots\dots$$

と表わされ、 $\omega=0$ においてそれぞれ

$$X = c_1, \quad Y = -c_0 \quad \dots\dots\dots (6.24)$$

となる。

いまこの場合の伝達関数を

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{s(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1})}, \quad (a_{n-1} \neq 0, b_m \neq 0) \dots (6.25)$$

と表わすと、 c_0 および c_1 はそれぞれ (6.25) 式から

$$c_0 = \frac{b_m}{a_{n-1}}, \quad c_1 = \frac{a_{n-1} b_{m-1} - a_{n-2} b_m}{a_{n-1}^2} \dots (6.26)$$

と計算される。けっきょく Popov 軌跡は点

$$\left(\frac{a_{n-1} b_{m-1} - a_{n-2} b_m}{a_{n-1}^2}, -\frac{b_m}{a_{n-1}} \right)$$

から出発することになる。

また $G(s)$ が 2 重極を原点に持つ場合は伝達関数を

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{s^2(s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2})} \quad (a_{n-2} \neq 0, b_m \neq 0) \dots (6.27)$$

と表わすと、 $s=0$ の近傍でこれを展開して

$$G(s) = \frac{c_0}{s^2} + \frac{c_1}{s} + c_2 + c_3 s + \dots, \quad \dots (6.28)$$

X, Y はそれぞれ

$$X = -\frac{c_0}{\omega^2} + c_2 - \dots, \quad Y = -c_1 + c_3 \omega^2 - \dots$$

となる。これから $\omega=0$ では

$$X = +\infty \text{ or } -\infty,$$

$$Y = -c_1, \dots (6.29)$$

となり Popov 軌跡は、

$\omega \rightarrow 0$ にしたがって X 軸

に平行な直線に漸近する

ことになる。ここで c_0 ,

c_1 は (6.27) 式から

$$c_0 = \frac{b_m}{a_{n-2}},$$

$$c_1 = \frac{a_{n-2} b_{m-1} - a_{n-3} b_m}{a_{n-2}^2}$$

$$\dots (6.30)$$

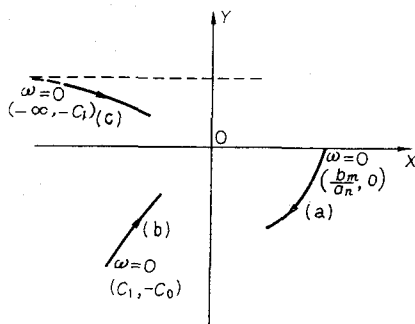


図 6.4 Popov 軌跡の出発点

と計算される。ここで (6.29) 式の X の符号は (6.30) 式の c_0 すなわち b_m の符号によって決まる。

以上3つの場合を図示するとそれぞれ図6.4の(a),(b),(c)となる。

(ii) $\omega \rightarrow \infty$ の場合 (終着点)

(6.20) 式において, $n-m \geq 2$ の場合は

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G^*(\omega) = 0$$

となり Popov 軌跡は $X-Y$ 平面の原点に漸近する。 $n-m=1$ の場合は

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} X = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} Y = -b_0.$$

となり Y 軸上の点 $(0, -b_0)$ に漸近することになる。

つぎに Popov 軌跡が $\omega \rightarrow \infty$ でどの方向からこれらの点に漸近していくかについて検討してみる。

(6.20) 式をつぎのように展開する。

$$G(s) = \frac{c_0}{s^{n-m}} + \frac{c_1}{s^{n-m+1}} + \frac{c_2}{s^{n-m+2}} + \dots, \quad \dots\dots\dots (6.31)$$

$n-m=2\ell$ ($\ell=1, 2, 3, \dots$) の場合, (6.30) 式から X および Y はそれぞれつぎのようになる。

$$X = (-1)^\ell \frac{c_0}{\omega^{2\ell}} + (-1)^{\ell+1} \frac{c_2}{\omega^{2(\ell+1)}} + \dots$$

$$Y = -(-1)^\ell \frac{c_1}{\omega^{2\ell}} - (-1)^{\ell+1} \frac{c_3}{\omega^{2(\ell+1)}} - \dots$$

したがってこれから

$$c_1 X + c_0 Y = (-1)^{\ell+1} \{c_1 c_2 - c_0 c_3\} \frac{1}{\omega^{2(\ell+1)}} + \dots$$

となるから, $\omega \rightarrow \infty$ で Popov 軌跡は近似的に

$$Y = -\frac{c_1}{c_0} X \quad \dots\dots\dots (6.32)$$

なる直線にそって原点に漸近することになる。

$-m=2\ell+1$ ($\ell=0, 1, 2, \dots$) の場合, (6.31) 式から X および Y はそれぞれつぎのようになる。

$$X = (-1)^{\ell+1} \frac{C_1}{\omega^{2(\ell+1)}} + (-1)^{\ell+2} \frac{C_3}{\omega^{2(\ell+2)}} + \dots \quad (6.33)$$

$$Y = -(-1)^\ell \frac{C_0}{\omega^{2\ell}} - (-1)^{\ell+1} \frac{C_2}{\omega^{2(\ell+1)}} - \dots \quad (6.34)$$

$\ell \neq 0$ のときは $\omega \rightarrow \infty$ で (6.33), (6.34) 式から Popov 軌跡は Y 軸に漸近して原点にはいることがわかる。この場合, ℓ が奇数のとき正の Y 軸, ℓ が偶数のときは負の Y 軸が漸近線になる。 $\ell = 0$ すなわち $n-m=1$ のときは (6.33), (6.34) 式から

$$C_2 X + C_1 (Y + C_0) = \{C_2 C_3 - C_1 C_4\} \frac{1}{\omega^4} + \dots$$

となる。けっきょく $\omega \rightarrow \infty$ で

$$Y = -\frac{C_2}{C_1} X - C_0 \quad (6.35)$$

なる直線に沿って Y 軸上の点に漸近することになる。

ここで C_0, C_1, C_2 は (6.20) 式からそれぞれつぎのように計算される。

$$\begin{aligned} C_0 &= b_0, & C_1 &= b_1 - b_0 a_1 \\ C_2 &= a_1^2 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_0 + b_2 \end{aligned}$$

以上の結果をまとめて表 6.1 に示しておく。なお具体的な例に関しては、表 6.2 に示したのでこれを参照していただきたい。

(iii) $G(s)$ の極で原点以外の虚軸上に分布しているものがある場合

いまこの極を $j\omega_0$ とし、1 重極であるとする。 $G(s)$ を $s = j\omega_0$ の近傍で Laurent 展開すると、

$$G(s) = \frac{C_0}{s - j\omega_0} + C_1 + C_2 (s - j\omega_0) + C_3 (s - j\omega_0)^2 + \dots, \quad (6.36)$$

となる。ここで

$$C_i = d_i + j e_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

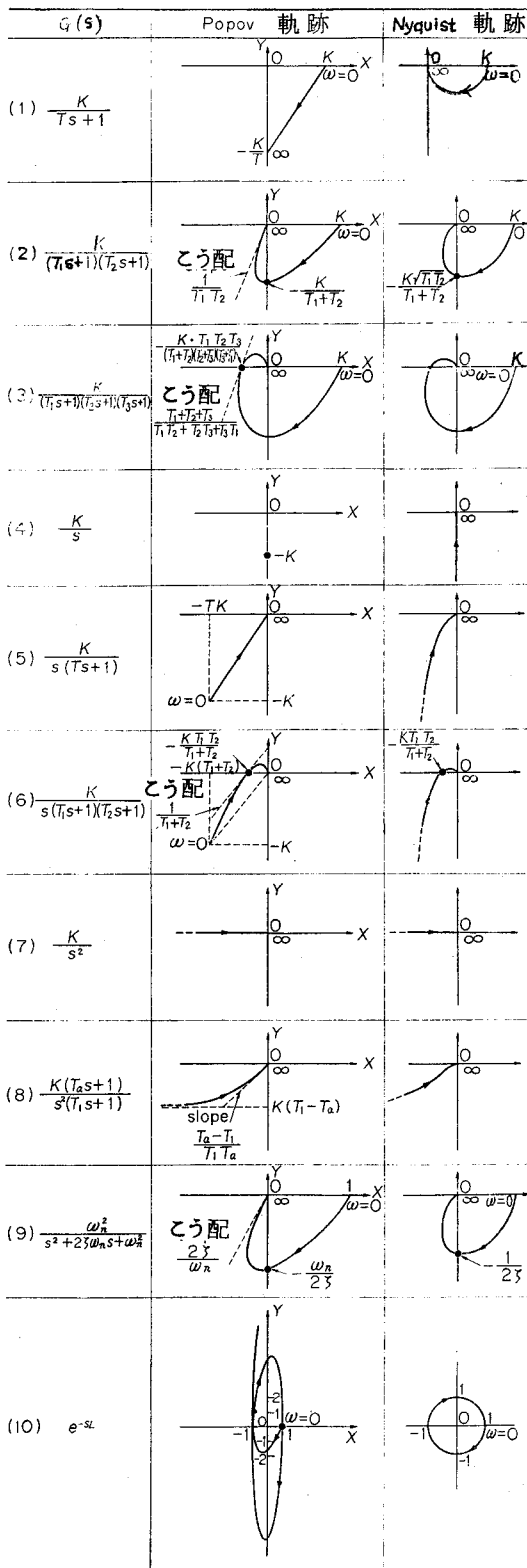
とすると、 X, Y はそれぞれ

$$X = \frac{e_0}{\omega - \omega_0} + d_1 - e_2 (\omega - \omega_0) + \dots \quad (6.37)$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

(1) 出発点 ($\omega = 0$)	$G(s)$ の極力がすべて s 平面の左半平面に存在する場合 : $\left(\frac{b_m}{a_n}, 0 \right)$
	$G(s)$ の極のうち 1 個が s 平面の原点に、他はすべて左半平面に存在する場合 ($a_n = 0$) : $\left(\frac{a_{n-1} b_{m-1} - a_{n-2} b_m}{a_{n-1}^2}, -\frac{b_m}{a_n} \right)$
	$G(s)$ の極のうち 2 個が s 平面の原点に、他はすべて左半平面に存在する場合 ($a_n = a_{n-1} = 0$) : $\left(-\infty, -\frac{a_{n-3} b_{m-1} - a_{n-3} b_m}{a_{n-2}^2} \right) \quad \text{ただし } b_m > 0$ $\left(-\infty, -\frac{a_{n-3} b_{m-1} - a_{n-3} b_m}{a_{n-2}^2} \right) \quad \text{ただし } b_m < 0$
(2) 終着点 ($\omega \rightarrow \infty$)	$n - m \geq 2$ の場合 : (a) $n - m = 2\ell$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) のとき、つぎの直線に沿って原点に入る。 $Y = \frac{b_1 - b_0 a_1}{b_0} X$ (b) $n - m = 2\ell + 1$ のとき、ℓ が奇数ならば正の Y 軸に、ℓ が偶数ならば負の Y 軸に沿って原点に入る。
	$n - m = 1$ の場合 : つぎの直線に沿って点 $(0, -b_0)$ に入る。 $Y = \frac{a_1^2 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_0 + b_2}{b_1 - b_0 a_1} X - b_0$

表 6.1 Popov 軌跡の出発点および終着点



$$Y = -\frac{d_0 \omega_0}{\omega - \omega_0} + e_1 \omega_0 - d_0 + (e_1 + e_2 \omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots \quad (6.38)$$

となる。(6.37)(6.38)式から

$$X + \frac{e_0}{d_0 \omega_0} Y - d_1 + (d_0 - e_1 \omega_0) \frac{e_0}{d_0 \omega_0} - (e_1 - e_2 + e_2 \omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots = 0$$

となって、 $\omega = \omega_0$ とすると、

$$X + \frac{e_0}{d_0 \omega_0} Y - d_1 + (d_0 - e_1 \omega_0) \frac{e_0}{d_0 \omega_0} = 0 \quad (6.39)$$

となる。すなわち伝達関数が $S = j\omega_0$ なる1重極を持つと Popov 軌跡は $\omega \rightarrow \omega_0$ に近づいて (6.39) 式に示した直線に漸近しながら無限遠点に向かう2つの枝に分離することになる。ここで C_0 および C_1 は伝達関数 $G(s)$ から

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} (s - j\omega_0) G(s), \quad C_1 = \lim_{s \rightarrow j\omega_0} \frac{d}{ds} [(s - j\omega_0) G(s)]$$

として計算される。たとえば伝達関数が $G(s) = 1/(s+1)(s^2+1)$ の場合は Popov 軌跡は図6.5に示すようになる。

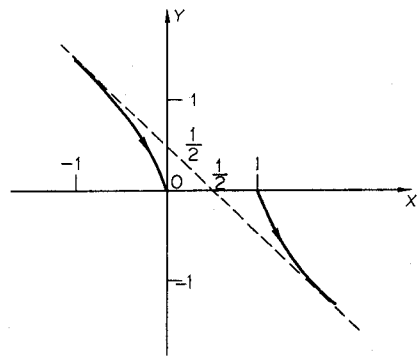


図6.5 $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$ の Popov 軌跡

表6.2 代表的な伝達関数の Popov 軌跡と Nyquist 軌跡 (83)

以上 Popov 軌跡に関する一般的な性質を述べたが、これらの特徴を知っておけば、伝達関数の形から Popov 軌跡の概形を推定することができ、安定判別も行ない易くなる。代表的な伝達関数に関して Popov 軌跡の概形を表 6.2 にまとめた。なお Nyquist 軌跡と比較できるように、これも同時に示しておいた。

6.4 Popov 軌跡の描き方

すでに述べた Popov 軌跡の一般的な性質からその概形を描くことができるがさらにそれを詳細に描く方法について述べる。

与えられた伝達関数 $G(s)$ の Popov 軌跡は s を $j\omega$ に置き換え、各 ω に対して X, Y を求めて、その値を $X-Y$ 平面に取り、これらの点をつなぎ合わせると描けるわけである。しかし先に指摘したように表 6.2 の (1) および (4) に示した 1 次要素は直線および点となるので、この特徴を利用すれば簡単に描くことができる。すなわち伝達関数 $G(s)$ が K/s および $K/(Ts+1)$ なる 1 次要素の部分分数に展開できる場合は、各 1 次要素の Popov 軌跡 (点および直線) を描き、これらの点や直線の加え合わせで、 $G(s)$ の Popov 軌跡を作図することができる。また 2 次振動要素 $\omega_n^2/(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)$ の場合にはこれを規準化し、 ζ をパラメータとして軌跡を描いておき、与えられたパラメータに対してこれを写し取って描くことにする。

われわれが取り扱う多くの伝達関数は (6.20) 式に示したような s の多項式 $N(s)$ と $D(s)$ の比で表わされ、これらの係数はすべて実数であるから、伝達関数 $G(s)$ は上に示した実係数の 1 次要素と 2 次要素に分解できる。したがって大多数の伝達関数はすでに述べた方法によって比較的容易に Popov 軌跡を描くことができる。つぎに具体例をあげながら種々の場合に対して Popov 軌跡の描き方を述べる。

(1) 伝達関数が 1 次要素の結合として表わされる場合

伝達関数 $G(s)$ が

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)}, \quad T_i \neq T_j \quad (i \neq j) \quad (6.40)$$

と表わされる場合を考える。これを部分分数展開すると、

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{T_i s + 1} \quad (6.41)$$

となる。ここで K_i は

$$K_i = \lim_{s \rightarrow -(1/T_i)} (T_i s + 1) \frac{N(s)}{D(s)}$$

として求まる。

また伝達関数が積分要素を含んでいる場合は、

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s \prod_{i=1}^{n-1} (T_i s + 1)} \quad \dots\dots\dots (6.42)$$

とすると、これを部分分数に展開して

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i}{T_i s + 1} \quad \dots\dots\dots (6.43)$$

となる。ここで K_0 は

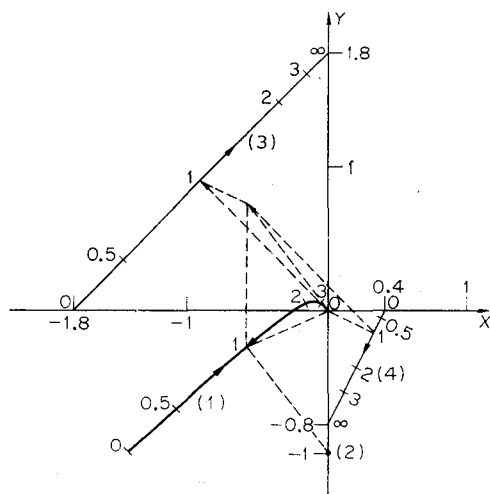
$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{N(s)}{D(s)}$$

として求まる。

したがって (6.40) または (6.42) 式で表わされる伝達関数の Popov 軌跡は (6.41) または (6.43) 式を使用して描ける。たとえば図 6.6 に示すように、伝達関数が $G(s) = (0.1s+1)/s(s+1)(0.5s+1)$ の場合には、部分分数展開して

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+1} + \frac{0.4}{0.5s+1}$$

とする。第 1, 第 2, 第 3 項はそれぞれ図において (2), (3), および (4) となり、これらを合成すると $G(s)$ の Popov 軌跡 (図の (1)) が求まる。また図中の破線は、Popov 軌跡上の $\omega=1$ に対する点が図の (2), (3) および (4) の $\omega=1$ に対する点からのベクトル和として求められるこ



- (1) $\frac{0.1s+1}{s(s+1)(0.5s+1)}$ の Popov 軌跡
- (2) $\frac{1}{s}$ の Popov 軌跡
- (3) $-\frac{1.8}{s+1}$ の Popov 軌跡
- (4) $\frac{0.4}{0.5s+1}$ の Popov 軌跡

図 6.6 $G(s) = \frac{0.1s+1}{s(s+1)(0.5s+1)}$ の Popov 軌跡の作図法

とを示したものである。

- (2) 伝達関数が2次振動要素を含んでいる場合
伝達関数が

$$G(s) = \frac{N(s)}{D_0(s)(s^2 + \zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad \dots\dots\dots (6.44)$$

と表わされる場合を考える。ここで $D_0(s)$ は(6.40)または(6.42)式と同じ形のもの、すなわち1次要素で構成されているものとする。このときの展開式は

$$G(s) = G_0(s) + \frac{as+b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \dots\dots\dots (6.45)$$

となる。ここで $G_0(s)$ は(6.41)または(6.43)式で表わされる展開式である。したがって $G(s)$ の Popov 軌跡はすでに述べた $G_0(s)$ の Popov 軌跡と(6.45)式の第2項の Popov 軌跡を合成することによって作図される。ここで a, b はつぎのようにして計算される。

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \alpha + \beta_j)(s + \alpha - \beta_j)$$

とすると α, β は

$$\alpha = \zeta\omega_n, \quad \beta = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

であるから a, b はそれぞれ(6.44)式から

$$a = \frac{1}{2\beta_j} \left[\frac{N(-\alpha + \beta_j)}{D_0(-\alpha + \beta_j)} - \frac{N(-\alpha - \beta_j)}{D_0(-\alpha - \beta_j)} \right] \quad \dots\dots\dots (6.46)$$

$$b = \alpha a + \frac{1}{2} \left[\frac{N(-\alpha + \beta_j)}{D_0(-\alpha + \beta_j)} + \frac{N(-\alpha - \beta_j)}{D_0(-\alpha - \beta_j)} \right] \quad \dots\dots\dots (6.47)$$

となる。

つぎに(6.45)式の第2項に示される2次振動要素の Popov 軌跡の描き方について述べる。これをそのまま描くのは容易でないので

$$\frac{as+b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{as}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \dots\dots\dots (6.48)$$

と2個の2次振動要素に分離し、それぞれの Popov 軌跡を合成することにする。

まず(6.48)式の第2項は

$$\frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{b/\omega_n^2}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1} = \frac{b/\omega_n^2}{u^2 + 2\zeta u + 1}, \quad (u = s/\omega_n) \cdot (6.49)$$

となるから、この Popov 軌跡は $1/(u^2 + 2\zeta u + 1)$ の軌跡から求めることができる。すなわち図 6.7 において、この Popov 軌跡 (図の実線) は $1/\{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1\}$ の軌跡 (図の破線) を ω_n および Y 座標に関して b/ω_n^2 倍することによって求めることができる。また $1/\{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1\}$ の軌跡は $1/(u^2 + 2\zeta u + 1)$ の軌跡 (図の実線) から求められるが、 $1/(u^2 + 2\zeta u + 1)$ の軌跡は縦軸に $\omega/\omega_n \operatorname{Im} G(j\omega)$ を単位として描いているので、これを縦軸方向に ω_n 倍して求めなければならない。なおこの図に $b/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ の Popov 軌跡上の周波数 ω_i に対する点 P を $1/(u^2 + 2\zeta u + 1)$ の軌跡から求める方法を示した。

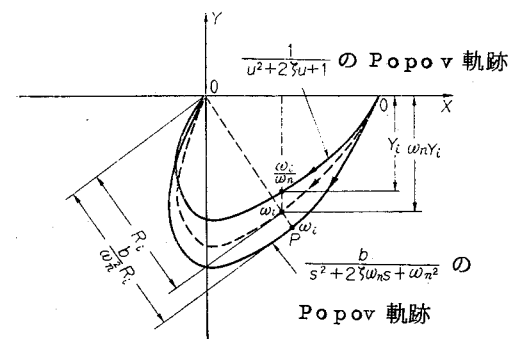


図 6.7 $\frac{b}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ の Popov 軌跡の作図法

つぎに (6.48) 式の第 1 項は

$$\begin{aligned} \frac{as}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} &= \frac{a/\omega_n \cdot s/\omega_n}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1} \\ &= \frac{a/\omega_n \cdot u}{u^2 + 2\zeta u + 1} \end{aligned} \quad (6.50)$$

となるから、この Popov 軌跡は $u/(u^2 + 2\zeta u + 1)$ の軌跡から上に述べた方法とまったく同様にして描くことができる。

なおこの場合に、図 6.8 の (a), (b) に示したような、 ζ をパラメータとして詳しい $1/(u^2 + 2\zeta u + 1)$

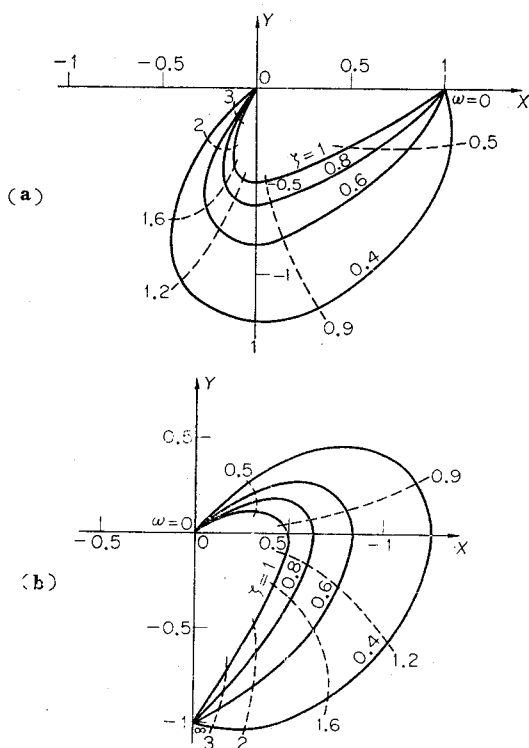


図 6.8 種々の ζ に対する (a) $\frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$ (b) $\frac{s}{s^2 + 2\zeta s + 1}$ の Popov 軌跡

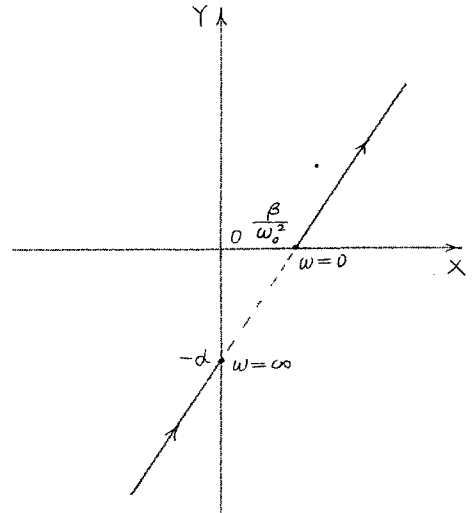
および $u/(u^2+2\zeta u+1)$ の Popov 軌跡を作図しておき、これを利用すれば便利である。

(3) 伝達関数が2重極を持つ場合

この場合伝達関数 $G(s)$ を部分分数展開すると、新しく K/s^2 , $K/(Ts+1)^2$ なる項が出てくる。

いま $G(s)$ が2重極を原点に持っている場合、すなわち K/s^2 なる項を含んでいる場合を考えてみると、すでに述べたように、 ω が0に近づくと $G(s)$ の Popov 軌跡は X 軸に平行な直線に漸近する。したがって ω が小さい所ではこのことを考慮し、また他の ω の値に対してはすでに述べた方法により、各構成要素の軌跡を合成することによって $G(s)$ の Popov 軌跡を描くことができる。

また $K/(Ts+1)^2$ の Popov 軌跡は (6.48) 式の第2項の場合と同様の方法で描くことができる。すなわち $\omega_n=1/T$, $\zeta=1$, $b=K/T^2$ とすればよい。



(4) 伝達関数が $1/(s^2+\omega_0^2)$ なる要素を含んでいる場合

この場合 $G(s)$ を部分分数展開すると $(\alpha s + \beta)/(s^2 + \omega_0^2)$ の項を含むことになる。この要素の Popov 軌跡は

$$Y = \frac{\alpha \omega_0^2}{\beta} X - \alpha, \quad (X < 0, \frac{\beta}{\omega_0^2} < X) \quad (6.51)$$

図 6.9 $\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$ の Popov 軌跡

なる直線で表わされ、これを図示すると図 6.9 のようになる。したがって ω の値が ω_0 の近傍以外では $G(s)$ の Popov 軌跡は各要素の Popov 軌跡の合成で求められる。さらに ω が ω_0 の近傍における $G(s)$ の Popov 軌跡はすでに述べたように無限遠点に向かう2つの枝に分かれ、このとき漸近線は (6.39) 式から求められるので、これを考慮して描けばよい。

6.5 安定度の評価法

自動制御系を設計する場合、安定性だけでなく安定度も問題となる。線形系の場合、Nyquist線形から、相対安定度の目安であるゲイン余有、位相余有を知ることができる。一方(6.11)式からわかるように、Popov軌跡はNyquist軌跡を縦方向に ω 倍して伸縮したものである。このことを考慮すれば、つぎのようにしてゲイン余有をPopov軌跡から知ることも可能である。

ゲイン余有は、Nyquist軌跡の実軸との交点と虚軸との距離によって与えられる。一方Popov軌跡のX軸との交点の値はNyquist軌跡の実軸の交点の値と一致する。したがって図6.10に示すように、ゲイン余有はPopov軌跡(実線)におけるX軸との交点とY軸との距離 Q によって表わされる。

位相余有は図6.10においてNyquist軌跡(破線)と原点を中心とした単位円との交点 P と、点 $(-1+j0)$ が原点に対して張る角 θ で定義される。この位相余有を与える周波数 ω のPopov軌跡上の点は図に示した P^* になる。この場合単位円がNyquist軌跡上に点 P を与えるが、Popov軌跡に対しては楕円

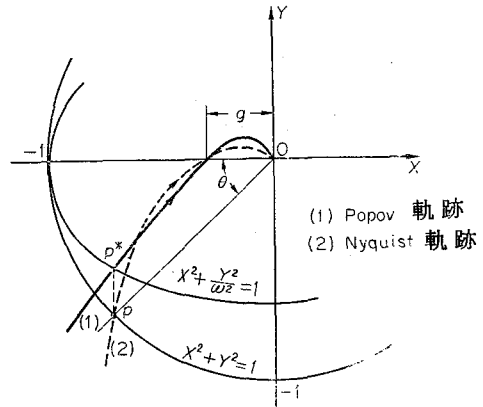


図 6.10 Popov 軌跡によるゲイン余有と位相余有

$$X^2 + \frac{Y^2}{\omega^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (6.52)$$

が点 P^* を与えることになる。したがってPopov軌跡から位相余有 θ を知るには、種々の ω に対する(6.52)式の楕円を描いた紙片を作製しておく。これを ω の値を記入したPopov軌跡上に重ねて、両方の ω の値が一致する点 P^* を見い出す。つぎにこの点をY軸に平行に移動して単位円上に点 P をとり、この点と点 $(-1+j0)$ が原点に対して張る角 θ を見ればよいことになる。

非線形系に対しては、このような安定度の評価は一般的に行なうことはできない。しかし非線形要素と伝達関数をそれぞれ特定のものに限れば、Popov軌跡と過渡応答線図とを結びつけた安定度の評価が可能である。^{64~66}

6.5.1 飽和要素を含む制御系の過渡応答線図

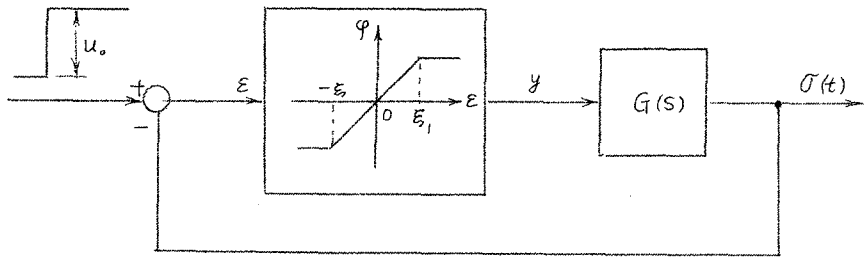


図 6.11 飽和要素を有する制御系

ここでは 図 6.11 に示す飽和要素を含む制御系にステップ入力加わった場合を考える。線形部の伝達関数は

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)}$$

とし、飽和特性は傾き 1、飽和の高さを ε_1 とする。

いま $T_2/T_1 = a$ 、 $T_1 K = A$ として $G(s)$ を規準化すると

$$G(s) = \frac{A}{s(s+1)(as+1)} \quad \dots\dots\dots (6.53)$$

となり、 $a=0$ の場合が 2 次系に相当する。

(6.53) 式の Popov 軌跡は 図 6.12 のようになる。図 6.11 の制御系の大局的漸近安定の限界は Popov 軌跡が点 $(-1 + j0)$ を通るときである。図 6.12 に示すように点 $(-1 + j0)$ がこの Popov 軌跡を仰ぐ角度を α とする。図からわかるように Popov 軌跡が点 $(-1 + j0)$ に近づくとき α は大となり安定限界のとき $\alpha = 180^\circ$ となる。よってこの α は安定度の目安に

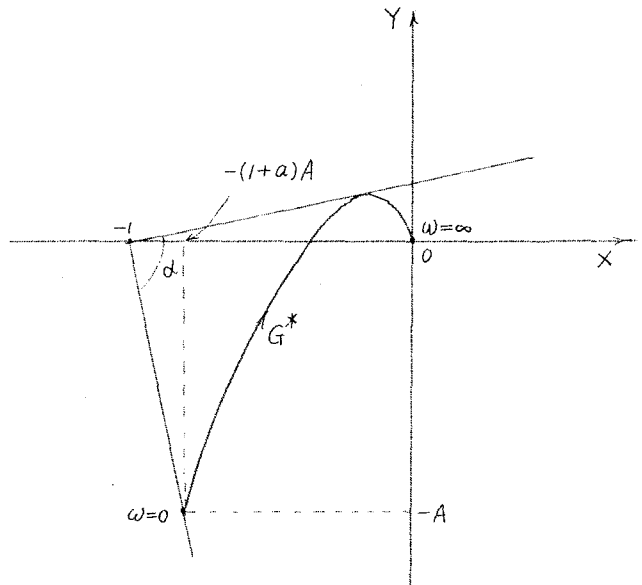


図 6.12 α の定義

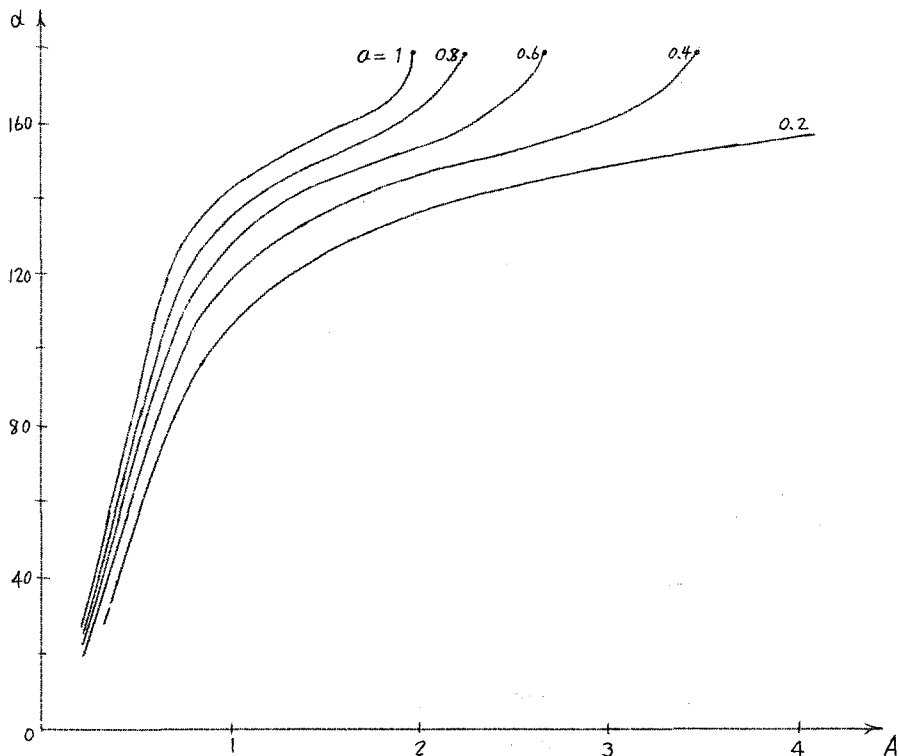


図 6.13 系のパラメータと α の関係

なると考えられる。なお α と系のパラメータとの関係は図 6.13 のようになる。これは横軸に A を、縦軸に α をとり、 α をパラメータとして描いたものである。

つぎにこの系の過渡応答と α との関係を検討する。過渡応答の特性を表わす目安として、図 6.14 に示すように、ステップ入力に対する最大行き過ぎ量の割合 ($A_m\%$) と立上り時間 (T_θ sec) を定義する。

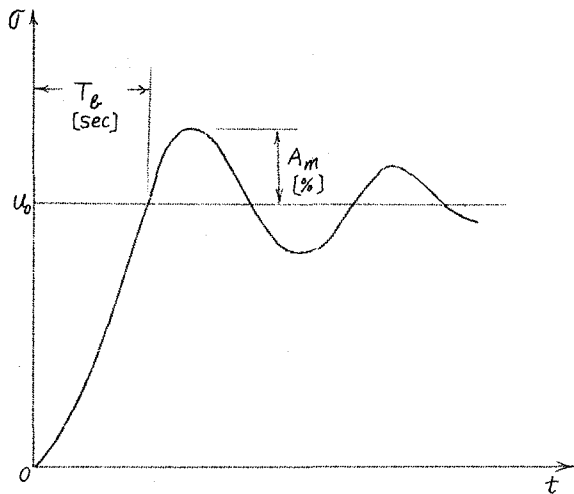


図 6.14 A_m , T_θ の定義

(6.53) 式の伝達関数を持つ

制御系の高さ u_0 のステップ入力に対する A_m と T_θ をアナログ計算機で求め、 α および系のパラメータとの関係を表わしたものが図 6.15 の過渡応答線図で

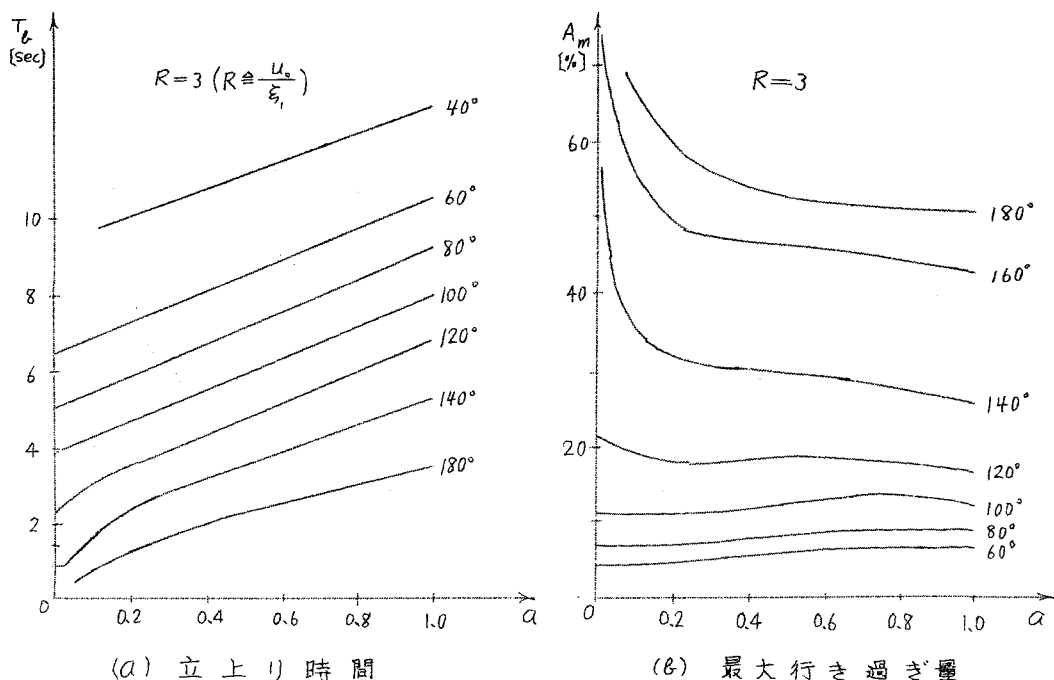


図 6.15 過渡応答線図

ある。ここで R は、ステップの高さ u_s を飽和の高さ ξ_1 で規準化したものである。 $R=1$ は線形の場合である。図 6.15 (a) は横軸に a を、縦軸に立上り時間 T_b をとり、 α をパラメータにして $R=3$ の場合を描いたものである。(b) 図は同様に A_m について $R=3$ の場合を描いたものである。

図 6.15 (a) において $0.2 \leq a \leq 1$ 、 $60^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ$ の範囲ではほぼ平行な直線になっている。したがって立上り時間に関しては次式が得られる。

$$T_b = (R+1)a - (0.0126R + 0.0223)\alpha + 2.285R + 3.18$$

$$0.2 \leq a \leq 1, \quad 60^\circ \leq \alpha \leq 130^\circ \quad \dots\dots\dots (6.54)$$

図 6.15 (b) において、 α が一定ならば $0.2 \leq a \leq 1.0$ の範囲で A_m はほぼ一定の値を示している。よってこの線図から横軸に α 、縦軸に A_m をとり、 R をパラメータとして新しい線図を作成した。これを図 6.16 に示す。

$0 \leq a \leq 0.2$ の範囲では上述のような簡単な線図または式を導くことができないので図 6.15 を用いなければならない。

6.5.2 安定度の評価および設計

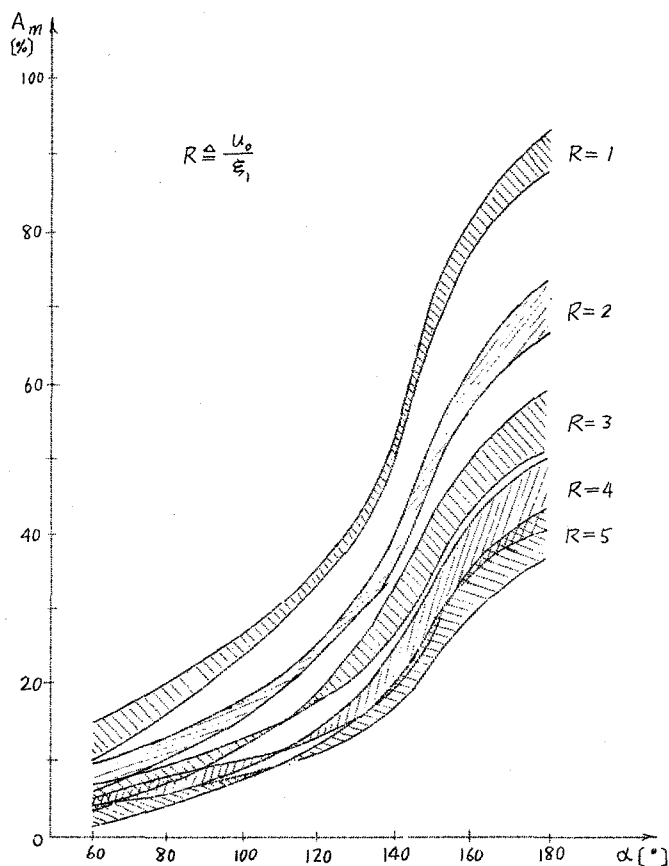


図 6.16 過渡応答線図 (α と A_m との関係)

ここでは上で示した過渡応答線図を用いて、図 6.11 に示す制御系の安定度の評価法および設計法について述べる。

最大行き過ぎ量と α との関係は図 6.15 (b) に示される。入力が大きさがわかっている場合、Popov 軌跡の α を読み取ることにより、この線図を利用して、その系の最大行き過ぎ量を知ることができる。非線形の度合が増すと、同じ α の値に対する最大行き過ぎ量は小さくなる。たとえば $R=5$ の場合は、安定限界で最大行き過ぎ量は約 40% であるが、 $R=1$ 、すなわち線形の場合は安定限界で行き過ぎ量は約 90% となる。一方 α が大きくなれば最大行き過ぎ量も大きくなる。 α が $110^\circ \sim 160^\circ$ の範囲では、 α の変化に対する最大行き過ぎ量の変化は比較的大きい、図 6.15 (b) より、 α が約 110° 以下の範囲では時定数 a が大きくなると最大行き過ぎ量は大きくなる、 α がそれ以上の範囲では、時定数 a が大きくなると逆に最大行き過ぎ量は減少する傾向にあるが、 $0.2 < a < 1$ の

範囲では 5% 程度の変化である。例えば伝達関数が、

$$G(s) = \frac{1.3}{s(0.15s+1)(0.06s+1)} \quad \dots\dots\dots (6.55)$$

$$G(s) = \frac{11.4}{s(0.25s+1)(0.04s+1)} \quad \dots\dots\dots (6.56)$$

の場合を考える。(6.55) 式を規準化すると $\alpha=0.6$, $A=1.3$ となり、(6.56) 式の場合は $\alpha=0.2$, $A=2.28$ となる。したがって図 6.13 よりどちらも $\alpha=140^\circ$ の Popov 軌跡となる。図 6.15 より最大行き過ぎ量はほぼ等しい値 ($R=2$ では 36~40%) をとることがわかる。

立ち上がり時間については (6.54) 式を利用すればよい。 α が大きく、あるいは R が小さくなると立ち上がり時間は減少し、 R の大きい範囲では α の少しの変化に対して立ち上がり時間は比較的大きく変化する。

もし図 6.11 に示す制御系の設計を最大行き過ぎ量と立ち上がり時間で行なうならば、過渡応答線図は設計に利用できる。たとえば、最大行き過ぎ量が指定され、入力の大きさも与えられた場合は、図 6.16 から Popov 軌跡の α の値が決まる。その α に対して、図 6.13 から系のパラメータを決定することができる。

最大行き過ぎ量と立ち上がり時間が指定された場合には、図 6.15 (b) から指定された最大行き過ぎ量に対する α を決める。この α を用いて立ち上がり時間の仕様を満たす時定数 α を (6.54) 式から計算で求める、最後に図 13 を用いてゲイン A を決めることができる。

6.6 結 言

Popov の安定条件の適用方法について検討した。まず制御系 (S.1)~(S.4) に対する Popov の安定条件を定理にまとめた。

またこれらの定理を安定判別に適用する場合に用いられる Popov 軌跡の性質を明らかにするとともに、各種の伝達関数についてこの軌跡を簡単に描く方法を提案した。これによって Popov の安定条件の適用が容易になった。

Popov の安定条件の適用例として、飽和要素を有する制御系の安定度の評価を、Popov 軌跡と過渡応答線図とを結びつけて行なう方法を述べた。すなわち (6.54) 式および図 6.16 を利用すれば与えられた制御系の Popov 軌跡からその系の最大行き過ぎ量および立ち上がり時間が分かり安定度の評価を行なうことができる。

第 7 章 Aizerman の問題への応用

7. 1 序 言

非線形制御系の大局的漸近安定性は第 3, 第 4 および 6 章で示した定理を適用して調べればよいが、線形系の場合に比べ一般に困難である。したがって、もし非線形部が何らかの方法で等価な線形要素に置き換えることが可能ならば、図 2.1 のかわりに図 2.3 を考えることにより、制御系の安定解析に線形理論が適用できるだけでなく、系の設計も容易となり非常に有益である。この等価線形化による安定判別法については種々の方法が研究されている。⁶⁷ なかでも、Aizerman の方法は非線形要素を線形ゲインで置き換えて、Routh-Hurwitz の安定判別法を適用しようというもので、Aizerman の推測と呼ばれている。この推測は一般には正しくないが、これが正しい結果を与える制御系も多く存在する。したがってこの推測が正しい結果を与えるのはどのような制御系であるかを見い出すことは工学上重要である。

本章では、まず Popov の安定条件とそれを拡張した Dewey と Jury²⁹ の安定条件とを用いて、Aizerman の推測とその特殊な場合である Karman の推測の確認方法を提案する。さらにこの確認法を用いて Aizerman および Kalman の推測の成立する系を示す。^{62, 63, 68, 69}

7. 2 Aizerman の問題

Aizerman は制御系 (S.4)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{a}\varphi(\varepsilon), \quad \varepsilon = \underline{c}'\underline{x} \quad (\text{S.4})$$

に対してつぎのような推測を下した。

「制御系 (S.4) において、 $\varphi(\varepsilon)$ を $H\varepsilon$ に置き変えた制御系

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} + H\underline{a}\underline{c}')\underline{x} \quad (\text{L})$$

を考える。(図 2.3 参照)。もし、線形化された制御系 (L) が $H_0 < H < H_1$ なるすべての H に対して漸近安定ならば

$$H_0 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < H_1, \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (7.1)$$

を満足する $\varphi(\varepsilon)$ に対して制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる。」

この推測に関して反例が見い出されており、一般に正しくないことが知られている。^{67, 70~73}しかし工学上よく現われる多くの低次系はこの推測を有効にしていることも証明されている。^{67, 74~82}

Kalman は $\varphi(\varepsilon)$ が ε に関して微分可能であるという条件のもとで Aizerman の推測より弱いつぎのような推測を考えた。^{83, 84}

「もし制御系 L が $H_0 < H < H_1$ なるすべての H に対して漸近安定ならば、

$$H_0 < d\varphi/d\varepsilon < H_1, \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (7.2)$$

を満足する $\varphi(\varepsilon)$ に対して制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる。」

上述の Aizerman の推測および Kalman の推測は Hurwitz セクタ (H_0, H_1) と非線形要素のセクタとを比較している。 H_0 は一般に負の値も取り得るが、実際の制御系においては $\varphi(\varepsilon)$ は

$$0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < K \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (7.3)$$

を満足するものを取り扱う場合が多い。したがって線形系 L の安定セクタも Hurwitz セクタより狭い $[0, H_1)$ を考えこれと非線形要素のセクタとを比較しても工学的には十分実用性がある。また、非線形要素が一般に

$$K_1 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < K_2 \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0$$

と表わされるものでも、 $\varphi_1(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - (K_1 + \delta)\varepsilon$ なる変換を行なうことにより $-\delta < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < K_2 - K_1 - \delta$ となり (7.3) 式に帰着させることができる。ただし δ は十分小さな正の値である。

よって本章では Aizerman および Kalman の推測をつぎのように定義する。

[Aizerman の推測] もし制御系 L が $0 \leq H < H_1$ なるすべての H に対して漸近安定ならば

$$0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < H_1 \quad (\varepsilon \neq 0), \quad \varphi(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (7.4)$$

を満足する 1 価関数 (不連続であってもよい) $\varphi(\varepsilon)$ に対して制御系 (S.4) は大局的漸近安定となる。

[Kalman の推測] もし制御系 L が $0 \leq H < H_1$ なるすべての H に対して漸近安定ならば

$$0 \leq d\varphi/d\varepsilon < H_1 \quad \dots\dots\dots (7.5)$$

を満足する $\varphi(\varepsilon)$ に対して制御系 (5.4) は大局的漸近安定となる。

この定義に対して、始めに示した Hurwitz セクタと比較する推測をそれぞれ“数値的な意味での Aizerman の推測”, “厳密な意味での Kalman の推測”と呼ぶことにする。

なお行列 A が臨界な場合は Hurwitz セクタは $(0, H_1)$ となるので (7.4) および (7.5) 式において等号は除く。

7.3 Aizerman および Kalman の推測

7.3.1 確認法

Popov の安定条件は Nyquist の安定判別法と類似した安定判別法が行なえるので Aizerman の推測の確認に適用できる。また Dewey と Jury の提案した安定条件は非線形要素の微分値 $d\varphi/d\varepsilon$ を考慮したもので特殊な場合として Popov の安定条件を含み、しかも Popov の安定条件と類似した図式的安定判別法が行なえる。したがってここではつぎに示す Dewey と Jury の安定条件を適用して、Aizerman および Kalman の推測の確認法について述べる。

[定理 7.1] (Dewey, Jury)²⁹ すべての $\omega \geq 0$ に対して

$$\frac{1}{K} + \operatorname{Re} \left(1 + \frac{j\omega\theta}{1 + K\omega^2} \right) G(j\omega) > 0 \quad \dots\dots\dots (7.6)$$

を満足する定数 θ および $K \geq 0$ が存在すれば、(7.3) 式および

$$0 \leq d\varphi/d\varepsilon < K \quad \dots\dots\dots (7.7)$$

$$\overline{\lim}_{|\varepsilon| \rightarrow \infty} \theta \left\{ \int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon - \frac{\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{2} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (7.8)$$

を満足する $\varphi(\varepsilon)$ に対して制御系 (5.4) は大局的漸近安定となる。なお制御系 (5.4) が臨界な場合は (7.3) 式において等号は除かれ、かつ極限安定条件を満足しなければならない。

[注] 上述の安定条件において $K=0$ とすれば (7.6) 式は Popov の安定条件になる。なおこの場合条件 (7.7) および (7.8) 式は削除される。

いま

$$X = R_e G(j\omega), \quad Y = \omega I_m G(j\omega), \quad Y^* = Y/(1 + \kappa\omega^2)$$

とおくと (7.6) 式は

$$X - \theta Y^* + \frac{1}{K} > 0 \quad \dots\dots\dots (7.9)$$

となる。ここで Popov 軌跡 $G^*(\omega) = X + jY$ に対応して新しく

$$G_o^*(\omega) = X + jY^* \quad \dots\dots\dots (7.10)$$

なる軌跡を定義し、 G_o^* 軌跡と呼ぶことにする。(7.9)式からわかるように、 $X - Y^*$ 平面に描いた G_o^* 軌跡が直線 $X - \theta Y^* + 1/K = 0$ の右側に存在すれば (7.6) 式が成立する。

つぎに上述の G_o^* 軌跡を用いた図式的安定判別法を適用して Aizerman および Kalman の推測の確証法について述べる。

いま図 7.1 (a) に示すように、 X 軸と G_o^* 軌跡の交点のうち最も左側のものを点 P とする。この点 P の X 座標の値は $G(j\omega)$ の Nyquist 軌跡のそれと同じ値である。この値を γ とすると、 γ は G_o^* 軌跡の性質より、負または零の値をとる。もし点 P における G_o^* 軌跡の接線 l が点 P 以外で G_o^* 軌跡と交わらなければ制御系 (S.4) は $0 \leq \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < 1/|r|$ なる $\varphi(\varepsilon)$ に対して大域的漸近安

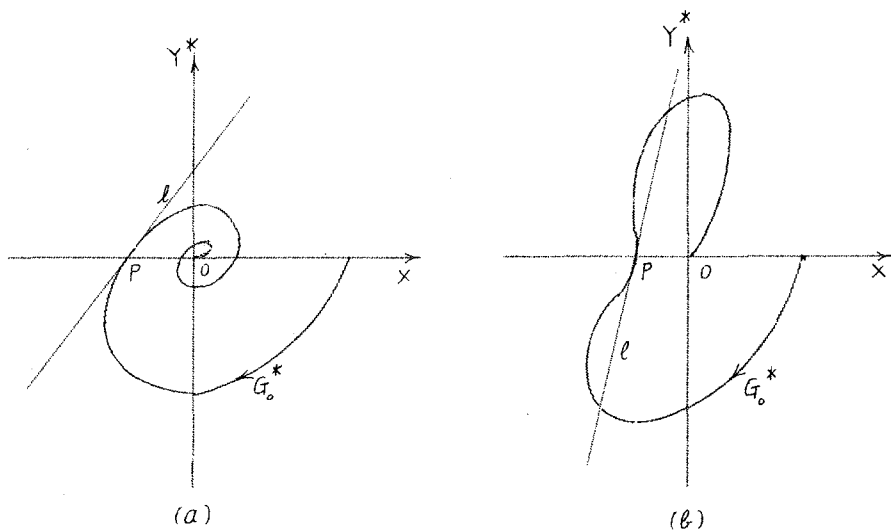


図 7.1 G_o^* 軌跡

定となる。一方 G_0^* 軌跡の定義からわかるように線形化した制御系 L は $0 \leq H < 1/|l|$ なるすべての H に対して漸近安定である。よつてこの場合 $K > 0$ ならば Kalman の推測が、また $K=0$ ならば Aizerman の推測が成立する。これは代数的にはすべての $\omega \geq 0$ に対して次式が成立することを意味する。

$$X - Y^*/m - Y \geq 0 \quad \dots\dots\dots (7.11)$$

ここで m は接線 l の傾きである。もし図 7.1 (b) に示すように接線 l が P 以外で G_0^* 軌跡と交わるならば、これらの推測が成立するかどうかは確認できない。

上述の図式的な推測の確認法は直観的であるが、伝達関数 $G(s)$ のパラメータが数値で与えられないと適用できないので一般的ではない。したがつてここでは G_0^* 軌跡を考慮しながら (7.11) 式を用いた確認法を述べる。

なおここでは伝達関数 $G(s)$ はつぎのように表わされるものに限定する。

$$(A) \quad G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad \dots\dots\dots (7.12)$$

$$m \leq n-1, \quad a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad a_n \geq 0$$

もし $a_n = 0$ ならば $b_m > 0$ (これは極限安定の条件)

$$(B) \quad G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{(s^2 + \omega_0^2)(s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2})} \quad \dots\dots\dots (7.13)$$

$$\omega_0 > 0, \quad m \leq n-1, \quad a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-3), \quad a_{n-2} \geq 0$$

もし $a_{n-2} = 0$ ならば $b_m > 0$

なお (7.12) および (7.13) 式において、多項式 $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$ (もし $a_n = 0$ の場合は $s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$) および $s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2} = 0$ (もし $a_{n-2} = 0$ の場合は $s^{n-3} + a_1 s^{n-4} + \dots + a_{n-3} = 0$) は Hurwitz 多項式であると仮定する。

(A) の場合

(7.12) 式をつぎのように変形する。

$$G(s) = \frac{N_1(s^2) + s N_2(s^2)}{D_1(s^2) + s D_2(s^2)}$$

ここで

$$u = -s^2, \quad n_i = N_i(-u), \quad d_i = D_i(-u), \quad (i=1, 2)$$

とおくと、 X および Y はつぎのように表わされる。

$$X = \frac{f(u)}{h(u)}, \quad Y = \frac{g(u)}{h(u)}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f(u) &= n_1 d_1 + u n_2 d_2 \\ g(u) &= u(n_2 d_1 - n_1 d_2) \\ h(u) &= d_1^2 + u d_2^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.14)$$

いま θ_0 を G_0^* 軌跡上の点 P における u の値とする。ただし $\theta_0 \neq \infty$ と仮定する。この θ_0 は $g(u)=0$ から求められる。また γ は

$$\gamma = \frac{f(\theta_0)}{h(\theta_0)} \dots\dots\dots (7.15)$$

と表わされる。

ここで $f_1(u)$, $g_1(u)$ をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} (u-\theta_0)f_1(u) &\equiv \frac{h(\theta_0)f(u) - f(\theta_0)h(u)}{h(\theta_0)} \\ (u-\theta_0)g_1(u) &\equiv g(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7.16)$$

これを用いると接線 ℓ のこう配 m はつぎのように与えられる

$$m = \frac{\frac{dY}{du}}{\frac{dX}{du}} \bigg|_{u=\theta_0} = \frac{g_1(\theta_0)}{(1+\kappa\theta_0)f_1(\theta_0)} \dots\dots\dots (7.17)$$

よって (7.15), (7.16), (7.17) 式を用いると、 $g_1(\theta_0) \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} X - Y^*/m - \gamma \\ = \frac{(u-\theta_0)}{g_1(\theta_0)(1+\kappa u)h(u)} \left[g_1(\theta_0)f_1(u) - f_1(\theta_0)g_1(u) \right. \\ \left. + \kappa \{ g_1(\theta_0)u f_1(u) - \theta_0 f_1(\theta_0)g_1(u) \} \right] \end{aligned}$$

となる。よって (7.11) 式はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_1(\theta_0)} [R_1(u) + \kappa R_1^*(u)] &\geq 0 & (g_1(\theta_0) \neq 0) \\ g(u) &\leq 0 & (g_1(\theta_0) = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.18)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} (u - \theta_0) R_1(u) &\equiv g_1(\theta_0) f_1(u) - f_1(\theta_0) g_1(u) \\ (u - \theta_0) R_1^*(u) &\equiv g_1(\theta_0) u f_1(u) - \theta_0 f_1(\theta_0) g_1(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.19)$$

結局、すべての $u \geq 0$ に対して、(7.18) 式を満足する定数 $\kappa > 0$ が存在すれば、Kalman の推測が成立する。また $\kappa = 0$ に対して (7.18) 式が成立すれば、Aizerman の推測が成立する。

(B) の場合

(7.13) 式を、つぎのように変形する。

$$G(s) = \frac{N_1(s^2) + s N_2(s^2)}{(s^2 + \omega_0^2) [D_1(s^2) + s D_2(s^2)]}$$

X および Y はつぎのように表わされる。

$$X = - \frac{f(u)}{(u - \omega_0^2) h(u)}, \quad Y = - \frac{g(u)}{(u - \omega_0^2) h(u)}$$

この場合 G_0^* 軌跡は $\omega \rightarrow \omega_0$ に従って 1 つの直線に漸近しながら無限遠点に向かう 2 つの枝に分離する。この直線のこう配 m_0 はつぎのように与えられる。

$$m_0 = \frac{g(\omega_0^2)}{(1 + \kappa \omega_0^2) f(\omega_0^2)} \dots\dots\dots (7.20)$$

よって (7.11) 式はつぎのようになる。

$$X - Y^* / m_0 - Y \geq 0 \dots\dots\dots (7.21)$$

一方 $f_2(u)$, $g_2(u)$ を

$$\left. \begin{aligned} (u - \theta_0) f_2(u) &\equiv \frac{1}{(\theta_0 - \omega_0^2) h(\theta_0)} \left[\theta_0 h(\theta_0) f(u) - f(\theta_0) u h(u) \right. \\ &\quad \left. - \omega_0^2 \{ h(\theta_0) f(u) - f(\theta_0) h(u) \} \right] \\ (u - \theta_0) g_2(u) &\equiv g(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.22)$$

と定義すると、接線 l のこう配 m はつぎのように与えられる。

$$m = \frac{g_2(\theta_0)}{(1 + K\theta_0)f_2(\theta_0)} \dots\dots\dots (7.23)$$

Aizerman または Kalman の推測が成立するためには、図 7.2 に示すように

$$m = m_0 \dots\dots\dots (7.24)$$

が満足されなければならない。

よって (7.24) 式および $Y = -f/\theta_0 - \omega_0^2$ なることに注意すれば (7.21) 式はつぎのように表わされる。

$$\frac{1}{g_2(\omega_0^2)} R_2(u) \geq 0 \quad \cdot (7.25)$$

ただし

$$(u - \omega_0^2)(u - \theta_0) R_2(u) \equiv f_2(\omega_0^2) g_2(u) - g_2(\omega_0^2) f_2(u) \\ + K \{ \omega_0^2 f_2(\omega_0^2) g_2(u) - g_2(\omega_0^2) u f_2(u) \} \dots\dots\dots (7.26)$$

結局すべての $u \geq 0$ に対して (7.25) 式を満足する定数 $K > 0$ が存在すれば Kalman の推測が成立する。また $K = 0$ に対して (7.25) 式が成立すれば、Aizerman の推測が成立する。

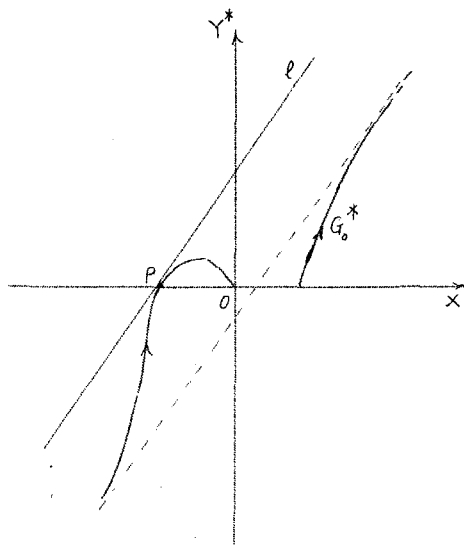
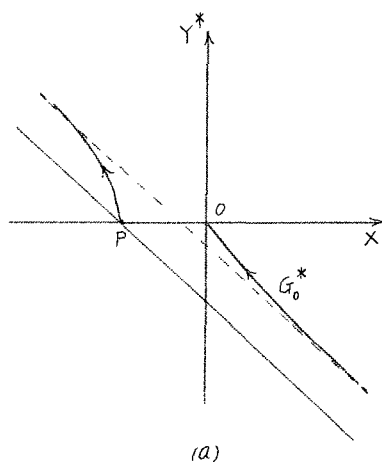
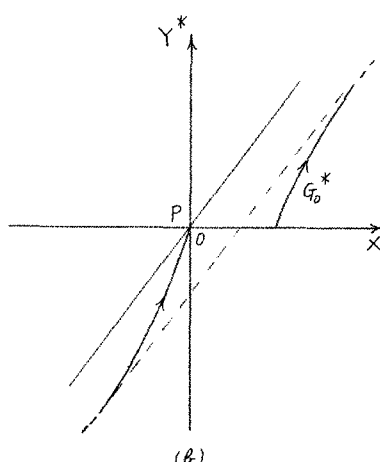


図 7.2 G_0^* 軌跡



(a)



(b)

図 7.3 G_0^* 軌跡

とくに $\theta_0 = 0$ または $\theta_0 = \infty$ のときは、図 7.3 に示すように、点 P はそれぞれ G_0^* 軌跡の出発点または終着点となる。この場合は点 P を通る直線は G_0^* 軌跡に接する必要はない。したがって (7.24) 式の条件は削除される。よって (7.21) 式はつぎのように表わされる。

$$\frac{1}{g_2(\omega_0^2)} [R_3(u) + \kappa R_3^*(u)] \geq 0 \quad (\theta_0 = 0) \quad \dots\dots (7.27)$$

$$\frac{1}{g(\omega_0^2)} [R_4(u) + \kappa R_4^*(u)] \geq 0 \quad (\theta_0 = \infty) \quad \dots\dots (7.28)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} (u - \omega_0^2) R_3(u) &\equiv f_2(\omega_0^2) g_2(u) - g_2(\omega_0^2) f_2(u) \\ (u - \omega_0^2) R_3^*(u) &\equiv \omega_0^2 f_2(\omega_0^2) g_2(u) - g_2(\omega_0^2) u f_2(u) \\ (u - \omega_0^2) R_4(u) &\equiv f(\omega_0^2) g(u) - g(\omega_0^2) f(u) \\ (u - \omega_0^2) R_4^*(u) &\equiv \omega_0^2 f(\omega_0^2) g(u) - g(\omega_0^2) u f(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots (7.29)$$

(7.29) 式において、 $f_2(u)$ 、 $g_2(u)$ は (7.23) 式で $\theta_0 = 0$ として求められる。

Aizerman および Kalman の推測の確認は (7.18), (7.25), (7.27), (7.29) 式によって数学的に厳密に行なうことができる。しかし、これらの式を適用するには θ_0 を決定しなければならない。これにはつぎのように G_0^* 軌跡のかわりに Popov 軌跡 G^* を用いればよい。すなわち、 G_0^* 軌跡は Popov 軌跡の Y 軸を $1/(1 + \kappa u)$ 倍したものである。したがって θ_0 の値は κ の値には関係なく、伝達関数 $G(s)$ のパラメータによって決まる。よって θ_0 の値を知るには、 $\kappa = 0$ の場合、すなわち Popov 軌跡の概形を描いて、これと $g(u)/f(u) = 0$ を満足する u の値とを比較すればよい。

7.3.2 Aizerman および Kalman の推測が成立する制御系

まず上で得られた結果の適用方法を例題で示す。

〔例題 7.1〕 伝達関数が

$$G(s) = \frac{s^2 + b}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad \begin{aligned} a_1 a_2 &> a_3 \geq 0 \\ a_1 &> 0, a_2 > 0 \end{aligned}$$

と表わされる場合、

$$n_1 = -u + a_3, \quad n = 0$$

$$d_1 = -a_1 u + a_3, \quad d_2 = -u + a_2$$

となるから

$$f(u) = (u-b)(a_1 u - a_3), \quad g(u) = -u(u-b)(u-a_2)$$

$$h(u) = (a_1 u - a_3)^2 + u(u-a_2)^2$$

と求まる。

この場合、Popov 軌跡は図 7.4 に示すように b の値によって 4 つの形に分けられる。したがって以下ではこの 4 つの場合にわけて確認を行なう。

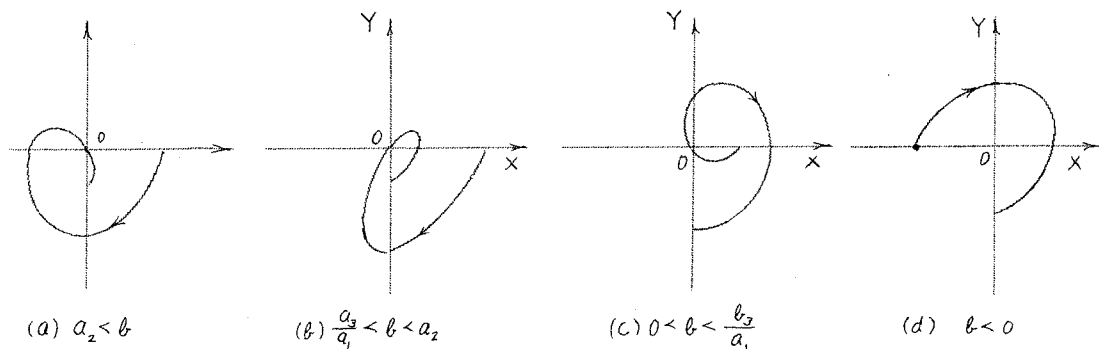


図 7.4 Popov 軌跡

(a) $a_2 \leq b$ の場合 : u が $0 \sim \infty$ に変化した場合の X および Y の符号の変化は表 7.1 に示すようになる。よって Popov 軌跡の概形は図 7.4 (a) のように描かれる。この図より $\theta_0 = a_2$ であることがわかる。したがって $f_1(u)$, $g_1(u)$ は、

u	0		$\frac{a_3}{a_1}$		a_2		b		∞
X	$\frac{b}{a_3}$	+	0	-	$\frac{a_2 - b}{a_1 a_2 - a_3}$	-	0	+	0
Y	0	-	-	-	0	+	0	-	$-b$

表 7.1 X と Y の符号変化

$$f_1(u) = \frac{1}{a_1 a_2 - a_3} \{ (a_1 u - a_3)(a_1 b - a_3) - (a_2 - b) u (u - a_2) \}$$

$$g_1(u) = -u(u-b)$$

となる。また $R_1(u)$ は

$$R_1(u) = \frac{1}{a_1 a_2 - a_3} \left[\{ (a_1 b - a_3)(a_1 a_2 - a_3) + a_2 (a_2 - b)^2 \} u + a_3 (a_1 b - a_3)(b - a_2) \right]$$

と表わされる。これより、 $0 \leq a_3/a_1 < a_2 \leq b$ なることに注意すれば $\kappa = 0$ に対して (7.18) 式が成立することがわかる。

よってこの場合 Aizerman の推測が成立する。

(b) $a_3/a_1 < b < a_2$ の場合：この場合は図 7.4 (b) より $\theta_0 = b$ であることがわかる。よって

$$\frac{R_1(u)}{g_1(\theta_0)} = \frac{(a_1 b - a_3)u + a_3(a_2 - b)}{b(a_2 - b)} > 0$$

となる。すなわちこの場合も Aizerman の推測が成立する。

(c) $0 < b < a_3/a_1$ の場合：図 7.4 (c) より $\theta_0 = b$ と求まる。よって

$$\frac{1}{g_1(\theta_0)} [R_1(u) + \kappa R^*(u)] = \frac{1}{b(a_2 - b)} \left[\{ (a_1 b - a_3) + \kappa b(a_1 a_2 - a_3) \} u + a_3(a_2 - b) \right] \quad (7.30)$$

となる。 $b(a_1 a_2 - a_3) > 0$ であるから $\kappa \geq (a_3 - a_1 b)/b(a_1 a_2 - a_3)$ となるように κ を選ぶことができる。よって、この場合 Kalman の推測が成立する。なお $\kappa = 0$ の場合 (7.30) 式の右辺はすべての $u \geq 0$ に対して正となり得ないので Aizerman の推測が成立するかどうかは分らない。

(d) $b < 0$ の場合：図 7.4 (c) より $\theta_0 = 0$ と求まる。よって

$$\frac{1}{g_1(\theta_0)} [R_1(u) + \kappa R^*(u)] = -\frac{1}{a_2 a_3 b} \left[\{ A + \kappa a_3 b(a_3 - a_1 a_2) \} u + B - \kappa a_3 b^2(a_3 - a_1 a_2) \right] \quad (7.31)$$

$$A = a_2 b(b - a_2) - a_3(a_3 - a_1 b)$$

$$B = a_2^2 b(a_2 - b) - (a_3 - b)(a_1 a_2 b - a_3 b - a_2 a_3)$$

G(S)	パラメータの制限	
	Aizerman の推測	Kalman の推測
$\frac{b_0 S + b_1}{S^3 + a_1 S^2 + a_2 S + a_3}$	制限なし	
$\frac{b_0 S^2 + b_2}{S^3 + a_1 S^2 + a_2 S + a_3}$	1. $b_0 > 0, b_2/b_0 \geq a_3/a_1$ 2. $b_0 > 0, 0 > b_2, A \geq 0, B \geq 0$ 3. $0 > b_0, b_2 \geq 0, C \geq 0$ 4. $0 > b_0, 0 > b_2, C \geq 0, a_3/a_1 > b_2/b_0$ 5. $0 > b_0, a_2 > b_2/b_0 > a_3/a_1, A \geq 0, B \geq 0$ 6. $0 > b_0, b_2/b_0 > a_2, B \geq 0$	1. $b_0 > 0, a_3/a_1 > b_2/b_0, b_2 \neq 0$ 2. $b_0 > 0, 0 > b_2$ 3. $0 > b_0, b_2 \geq 0$ 4. $0 > b_0, 0 > b_2, a_3/a_1 > b_2/b_0$
$\frac{b_0 S^2 + b_1 S}{S^3 + a_1 S^2 + a_2 S + a_3}$	1. $a_1 b_0 \geq b_1 > 0, a_2 b_1 > a_3 b_0 > 0$ 2. $b_1 > a_1 b_0 > 0, C(B-A) > AB$	1. $a_1 b_0 > b_1 > 0, a_3 b_0 > a_2 b_1$ 2. $A = (a_3 b_0 - a_2 b_1)/(a_1 b_0 - b_1)$ $B = \frac{a_2 b_0 - a_1 b_1 - \sqrt{(a_2 b_0 - a_1 b_1)^2 + 4 a_3 b_0 b_1}}{2 b_0}$ $C = \frac{a_2 b_0 - a_1 b_1 + \sqrt{(a_2 b_0 - a_1 b_1)^2 + 4 a_3 b_0 b_1}}{2 b_0}$
$\frac{b_0}{S^4 + a_1 S^3 + a_2 S^2 + a_3 S + a_4}$	1. $b_0 > 0, A \geq 0$ 2. $b_0 > 0, 4B \geq A^2 a_3/a_1$ 3. $0 > b_0, a_1^2 > 2a_2, C > 0$ 4. $0 > b_0, 4C > (a_1^2 - 2a_2)^2 a_3/a_1$	1. $A = a_1^2 + 2a_3/a_1 - 2a_2$ 2. $B = a_4(a_2 - a_3/a_1)$ 3. $C = (a_2^2 a_3 - a_1 a_4 + a_3 a_4 - a_1 a_3^2)/a_1$

$\frac{b_0 s^2 + b_2}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$	1. $a_3/a_1 > b_2/b_0 > (a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_4})/2$.		
$\frac{b_0 s^3 + b_2 s}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$	1. $B > b_2/b_0 > a_3/a_1$, $a_2 a_3/a_1 \geq a_4 + a_2 b_2/a_1 b_0$.	1. $a_3/a_1 > b_2/b_0 > A$, $a_2 b_2/b_0 > a_3 b_2/a_1$.	$A = (a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_4})/2$ $B = (a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_4})/2$
$\frac{b_0}{s(s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4)}$ ($b_0 > 0$)	1. $a_1^2 \geq 2a_3 a_1$, $a_1^2(A - a_3/a_1)(2B - a_3/a_1) \geq B^2(A - B)$, 2. $4\{a_1^2(A - a_3/a_1)(2B - a_3/a_1) + B^2(B - A)\} \geq (a_3/a_1 - A)(a_1^2 - 2a_3/a_1)^2$.		$A = (a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_4})/2$ $B = (a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_4})/2$
$\frac{b_0}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + a_1 s + a_2)}$	1. $0 > b_0$, $a_1^2 \geq 2a_2$.	1. $0 > b_0$, $a_2 - \omega_0^2 \geq (a_1^2 - 2a_2)^2$	
$\frac{b_0 s + b_1}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + a_1 s + a_2)}$	1. $b_1 > a_1 b_0 > 0$, $a_2 b_0 > a_1 b_1$, $B > \omega_0^2 > A$. 2. $0 > b_1$, $B > \omega_0^2$, $A(B - \omega_0^2)(a_1^2 - 2a_2) \geq a_2^2(\omega_0^2 - A)$.	1. $b_1 > a_1 b_0 > 0$, $a_2 b_0 > a_1 b_1$, $A > \omega_0^2$	$A = a_2 b_1 / (b_1 - a_1 b_0)$ $B = (a_2 b_0 - a_1 b_1) / b_0$

表 7.2 Aizerman および Kalman の推測が成立する制御系

となる。 $A \geq K a_3 b (a_3 - a_1 a_2)$ および $B \geq K a_3 b^2 (a_3 - a_1 a_2)$ を満足する正の定数 K を選ぶことができる。 よって、この場合、Kalman の推測が成立する。 一方 $A \geq 0$, $B \geq 0$ の場合 $K = 0$ に対して (7.31) 式の右辺は正となる。 よって $G(s)$ のパラメータに対して $A \geq 0$, $B \geq 0$ なる条件を加えれば Aizerman の推測が成立する。

上述の例と同様にして、(7.18), (7.25), (7.27), (7.29) 式を、よく現われる伝達関数に対して適用して、推測が成立することを確認したものを表 7.2 に示す。

7.4 厳密な意味での Aizerman および Kalman の推測の確認

前節で述べた Aizerman および Kalman の推測は Hurwitz セクタと非線形要素のセクタを比較する厳密な意味での Aizerman および Kalman の推測ではない。すなわち非線形要素のセクタの下限を零にしている。しかし前節の確認法は非線形要素のセクタを適当に変換することによって厳密な意味での、Aizerman および Kalman 推測の確認にも適用できる。

いま線形化した制御系 L の Hurwitz セクタが (H_0, H_1) であるとする。このとき、

$$\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - H_0 \varepsilon \quad \dots\dots\dots (7.32)$$

なる変換を行なえば、制御系 (S.4) はつぎのように表わされる。

$$\dot{\underline{x}} = \tilde{A} \underline{x} + \underline{a} \tilde{\varphi}(\varepsilon) \quad , \quad \varepsilon = \underline{c}' \underline{x} \quad \dots\dots\dots (7.33)$$

$$\tilde{A} = A + H_0 \underline{a} \underline{c}'$$

(7.33) 式の制御系において、 $\tilde{\varphi} = H \varepsilon$ とおいて線形化すれば、

$$\dot{\underline{x}} = (\tilde{A} + H \underline{a} \underline{c}') \underline{x} \quad \dots\dots\dots (7.34)$$

となり、この場合の Hurwitz セクタは $(0, H_2)$ となる。ただし、 $H_2 = H_1 - H_0$ である。また $\tilde{A}$ の固有値は虚軸上に存在し、(7.33) 式は臨界な制御系になっている。

結局、厳密な意味での Aizerman および Kalman の推測の確認は、前節で述べた確認法において、制御系 (S.4) が臨界な場合に相当する。すなわち、

制御系が与えられた場合、まず線形化した制御系の Hurwitz セクタ の下限 H_0 を求める。つぎに (7.33) 式の制御系の伝達関数 $\tilde{G}(s)$

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + H_0 G(s)} \quad \dots\dots\dots (7.35)$$

を求める。 $\tilde{G}(s)$ は (7.12) 式で $a_n = 0$ としたものか、あるいは (7.13) 式の形になる。よって伝達関数 $\tilde{G}(s)$ について前節で示した確認法を適用すればよい。

〔例 7.2〕 つぎの伝達関数を考える。

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4} \quad \dots\dots\dots (7.36)$$

この分母が Hurwitz 多項式であるためには

$$\left. \begin{aligned} a_1, a_2, a_3 > 0, \quad a_4 \geq 0, \quad a_1 a_2 > a_3 \\ (a_1 a_2 - a_3) a_3 > a_1^2 a_4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.37)$$

を満足しなければならない。また、 $\varphi(\varepsilon) = H\varepsilon$ と線形化した制御系の Hurwitz セクタ (H_0, H_1) は

$$H_0 = -a_4, \quad H_1 = \frac{1}{a_1^2} (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)$$

となる。よって

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{s(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)}$$

となるので、表 7.2 より

$$a_1^3 + 2a_3 \geq 2a_1 a_2 \quad \dots\dots\dots (7.38)$$

ならば Aizerman の推測が成立する。

すなわち、(7.36) 式の伝達関数を有する制御系は (7.37) 式および (7.38) 式を満足する場合、

$$-a_4 < \varphi(\varepsilon)/\varepsilon < \frac{1}{a_1^2} (a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4)$$

なる 1 価関数の非線形要素 $\varphi(\varepsilon)$ に対して大域的漸近安定となる。

上述の例のように、他の多くの伝達関数に対しても、Hurwitz セクタの下

限 H_0 を求め、 $G(s)$ を $\tilde{G}(s)$ に変換したものを考えれば、表 7.2 を用いること
によつて厳密な意味での Aizerman あるいは Kalman の推測が成立するかどうか
を知ることができる。

7.5 結 言

Aizerman および Kalman の推測の確認法について述べた。従来は Lyapunov
の方法を用いてこの推測の確認が行なわれていたが、ここでは周波数領域で表
わされた大域的漸近安定条件を用いて行なつた。この方法は Lyapunov 関数に
よる方法にくらべ、高次系に対してこの推測が成立することを証明できるので
便利である。ここで述べた確認法は、非線形要素のセクタの下限は零とし、上
限が、線形化した系 L の Hurwitz セクタ の上限に一致するかどうかという狭
い意味での Aizerman および Kalman の推測に対するものである。しかし 7.4
節で述べたように、制御系を等価変換したものと考えれば、7.3 節の方法がそ
のまま適用でき、厳密な意味での Aizerman および Kalman の推測の確認が行
なえる。なお表 7.2 には種々の伝達関数に対して本手法を適用し、推測が成立
することを確認したものを示した。

第 8 章 結 論

非線形制御系の大局的漸近安定に関して *Lyapunov* の方法を用いて検討し、周波数領域における安定条件を導いた。またこの安定条件の実際の制御系への応用について検討した。つきにおもな研究成果をまとめる。

1. 非線形要素の取り扱い方について検討し、非線形要素の特性を考慮できる関数を *Lyapunov* 関数に導入した。これによって非線形要素が連続関数だけでなく、不連続関数、2 価関数あるいは時変非線形要素を有する制御系の安定解析が統一的行なうことができ、かつより必要十分に近い安定条件を求めることが可能になった (第 2 章)。
2. 上述の *Lyapunov* 関数を用いて非線形制御系の大局的漸近安定条件を導出し、定理にまとめた。第 3 章では非線形要素が時間に依存しない場合、第 4 章では時間に依存する時変非線形要素の場合を示した。この定理における安定条件は、非線形要素の特性を表わすパラメータを含んでおり、この特性を十分考慮することによって、より必要十分に近い安定条件になる。さらにこの定理は各種の非線形要素に対して適用でき、かつ制御系が臨界な場合でも統一的に取り扱うことが可能である。代表的な非線形要素を有する制御系に関しては、定理を適用し易い形にして示した。
3. 非線形制御系が第 3 章、第 4 章で示した大局的漸近安定定理を満足しているとき、有界な外部入力に対して制御系の出力は有界になることを明らかにした。さらにこのときの制御系の解析は指数関数またはそれに類似した関数で評価されることを示した。これによって従来、有界入力に対して出力が有界になるかどうか不明であった多くの制御系に対して安定判別が可能になった (第 5 章)。
4. 第 3～5 章で示した安定定理は、特殊な場合として、*Popov* の安定条件を含んでいる。*Popov* の安定条件は、簡単な図式的方法で安定判別ができ、工学上応用面が広いので、大局的漸近安定および有界入力有界出力安定に関する *Popov* の条件を定理にまとめた (第 6 章)。
5. *Popov* の安定判別法において用いられる *Popov* 軌跡の一般的性質を明らかにするとともに、各種の伝達関数に対して、*Popov* 軌跡を簡単に描く方法を示し

た。これによつて Popov の安定条件の適用が一層容易になつた (第 6 章)。

6. 飽和要素を有する制御系の過渡応答線図と Popov 軌跡との関係を検討し、Popov 軌跡を用いて、非線形制御系の安定度の評価が行なえることを示した。また Popov 軌跡を制御系の設計に適用する手法を示した (第 6 章)
7. 周波数領域で表わされた安定条件を用いて、Aizerman および Kalman の推測を確認する一般的な方法について考察した。従来この推測が正しいことが確認されていなかった多くの制御系に対してこれを適用し、推測が成立することを明らかにした (第 7 章)。

謝

辞

本論文を結ぶにあたり、本研究の端緒を与え、直接理解ある御指導、御鞭撻を賜わった藤井克彦教授、ならびに終始懇切な御指導、御助言を賜わった西村正太郎教授に心から感謝致します。また鈴木胖助教授、村上吉繁講師はじめ藤井研究室、西村研究室の諸氏には数々の有益な御教示、御討論をいただいた。ここに記して心から感謝の意を表します。

また大学院在学中、適切なる御教示をいただいた工学部電気工学教室山村豊教授、犬石嘉雄教授、山中千代衛教授、川辺和夫教授、基礎工学部移井良文教授、ならびに工学部通信工学教室児玉慎三助教授の各先生方に厚く御礼申し上げる。

本研究の遂行に際し、西村研究室北村新三助手には、絶えず御討論および御援助をいただいた。また本研究の一部は大学院生西部邦彦君ならびに佐藤光威君とともに行なつたものである。また卒業生松浦泰則君は卒業研究として本研究に協力された。ここに記して深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) W. Hahn : Theory and application of Liapunov's direct method ; Prentice-Hall (1963)
- 2) 平井, 北村 : リアプノフ関数の構成と制御系の安定問題 ; 計測と制御, 6, 2, pp. 103-114 (1967)
- 3) A. I. Lur'e and V. N. Postnikov : On the theory of stability of control systems ; PMM, 8, 3 (1944)
- 4) M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher : Absolute stability of regulator system ; Holden-Day (1964)
- 5) V. M. Popov : Absolute stability of nonlinear systems of automatic control ; Avtom. i Telemekh., 22, 8, pp. 961-979 (1961)
- 6) V. A. Yakubovich : Solution of certain matrix inequalities occurring in the theory of automatic controls ; DAN SSSR, 143, 6, pp. 1304-1307 (1962)
- 7) V. A. Yakubovich : Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory ; DAN SSSR, 156, 2 (1964)
- 8) V. A. Yakubovich : Periodic and almost periodic limit states of controlled systems with several, in general, discontinuous nonlinearities ; DAN SSSR, 171, 3, (1966)
- 9) R. E. Kalman : Lyapunov function for the problem of Lur'e in automatic control ; Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 49, pp. 201-205 (1963)
- 10) K. R. Meyer : On the existence of Lyapunov function for

the problem of Lur $\acute{e}$; SIAM J. Control, 3, 3, pp. 373-389 (1965)

- 11) 正司 : 非線形制御系の大局的漸近安定条件 ; システムと制御 ; 15, 2, pp. 167-171 (1971)
- 12) 藤井, 正司, 西部 : 非線形制御系の大局的漸近安定について ; 制御工学, 14, 6, pp. 362-371 (1970)
- 13) A. G. Filippov : Differential equations with discontinuous right-hand side ; Math. Sb., 51, (93), 1, pp. 99-128 (1960)
- 14) A. G. Filippov : Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand side to nonlinear problems in automatic control ; Proc. of the 1st IFAC Congress, 1, pp. 1098-1100 (1960)
- 15) D. Šilijak : Nonlinear systems ; John Wiley and Sons Inc. (1969)
- 16) J. L. Willems : Stability theory of dynamical systems ; Thomas Nelson and Sons Ltd. (1970)
- 17) ハラナイ : 微分方程式 ; 吉岡書店 (1968)
- 18) V. A. Yakubovich : The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems II ; Avtom. i Telemekh., 26, 4, pp. 577-590 (1965)
- 19) 西部, 正司, 藤井 : 有界入力に対する非線形制御系の解の有界性 ; 計測自動制御学会論文集, 7, 3, pp. 254-262, (1971)
- 20) T. Yoshizawa : Liapunov's function and boundedness of solutions ; Funkcialaj Ekvacioj, 2, pp. 95-142 (1959)
- 21) T. Yoshizawa : Stability theory by Liapunov's second method ; The Mathematical Society of Japan (1966)

- 22) J. La Salle and S. Lefschetz : Stability by Liapunov's direct method with applications ; Academic Press (1961)
- 23) S. Lefschetz : Stability of nonlinear control systems ; Academic Press (1965)
- 24) A.K. Gel'fand : Investigation of stability of nonlinear discontinuous automatic control system with a nonunique equilibrium state ; Avtom. i Telemekh., 25, 2, pp. 153-160 (1964)
- 25) A.K. Gel'fand and O.I. Komarnitskaya : Absolute stability in critical cases of nonlinear system with a nonunique equilibrium state ; Avtom. i Telemekh., 27, 8, pp. 5-14 (1966)
- 26) V. A. Yakubovich ; The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems III ; Avtom. i Telemekh., 26, 5, pp. 753-763 (1965)
- 27) 前田, 兎玉 : リレー制御系の安定問題の解析 ; 電子通信学会誌, 52-C, 3, pp. 143-150 (1968)
- 28) R.W. Brockett and J. L. Willems : Frequency domain stability criteria - Pt. I and II ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-10, pp. 255-261, pp. 407-413 (1965)
- 29) A. G. Deway and E. I. Jury : A stability inequality for a class of nonlinear feedback systems ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-11, 1, pp. 54-62 (1966)
- 30) K. S. Narendra and C. P. Neuman : Stability of a class of differential ; SIAM J. Control, 4, 2, pp. 295-308 (1966)
- 31) R. P. O'Shea : An improved frequency time domain stability criterion for autonomous continuous systems ; IEEE

Trans. Automatic Control, AC-12, 6, pp. 725-731 (1967)

- 32) M. A. L. Thathachar, M. D. Srinash and H. K. Ramapriyan : On a modified Lur  problem ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-12, 6, pp. 731-739 (1967)
- 33) G. Zames and P. L. Falb : Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities ; SIAM J. Control, 6, 1, pp. 89-108 (1968)
- 34) 前田, 池田, 児王 : 不連続非線形要素の安定問題 ; 計測と制御, 9, 5, pp. 335-350 (1970)
- 35) 藤井, 正司, 佐藤 : ヒステリシスを有する制御系の大局的漸近安定について ; システムと制御 (投稿中)
- 36) V. A. Yakubovich : Absolute stability of nonlinear control systems in critical cases I ; Avtom. i Telemekh., 24, 3, pp. 293-303 (1963)
- 37) V. A. Yakubovich : Absolute stability of nonlinear control systems in critical cases II ; Avtom. i Telemekh., 24, 6, pp. 717-731 (1963)
- 38) V. A. Yakubovich : Absolute stability of nonlinear control systems in critical cases III ; Avtom. i Telemekh., 25, 5, pp. 601-612 (1964)
- 39) 藤井, 正司, 西部 : 時変非線形要素を有する制御系の大局的漸近安定について ; システムと制御, 16, 2, (1972)
- 40) 藤井, 正司 : Popov の安定判別の適用方法について ; 計測と制御, 5, 10, pp. 709-717 (1966)
- 41) E. N. Rozenvasser : The absolute stability of nonlinear systems ; Avtom. i Telemekh., 24, 3, pp. 304-313 (1963)

- 42) R.W. Brockett and L.J. Forys : On the stability of systems containing a time-varying gain ; Proc. Second Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, pp. 413 - 430 (1964)
- 43) Z.V. Rekasius and J.R. Rowland : A stability criterion for feedback systems containing a single time-varying nonlinear element ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-10 , 3, pp. 352-354 (1965)
- 44) R. Mukundan and E.J. Brooks : On the stability of a nonlinear nonstationary system ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-12 , 2, pp. 216-217 (1967)
- 45) A.R. Bergen and A.J. Rault : Absolute input-output stability of feedback systems with a single time-varying gain ; J. of Franklin Ins, 286, 4, pp. 280-294 (1968)
- 46) T.L. Chang and M.S. Davies : The absolute stability of nonlinear systems involving a time-varying gain ; Proc Seventh annual Allerton Conference on circuit and System Theory, pp. 721-729 (1969)
- 47) Y. V. Venkatesh : Noncausal multipliers for nonlinear system stability ; IEEE Trans. Automatic control, AC-15 , 2, pp. 195-204 (1970)
- 48) J.C. Hsu and A.U. Meyer : Modern control principles and applications ; Mc Graw-Hill Book Company (1968)
- 49) V. A. Yakubovich : The matrix-inequality method in the theory of the stability of nonlinear control systems I ; Avtom. i Telemekh., 25, 7, pp. 1017-1029 (1964)
- 50) L. A. Zadeh and E. Polak : System theory ; Mc Graw-Hill Book Company , pp. 315-346 (1969)

- 51) I.W. Sandberg : Some stability results related to those of V. M. Popov ; BSTJ, 44, pp. 2133-2148 (1965)
- 52) A.R. Bergen, R.P. Iwens and A.J. Rault : On input-output stability of nonlinear feedback systems ; IEEE Trans Automatic Control, AC-11, 5, pp. 742-744 (1966)
- 53) P.P. Varaiya and R. Liu : Bounded-input/bounded-output stability for the Luré problem ; IEEE Trans Automatic Control, AC-11, 5, pp. 745-746 (1966)
- 54) G. Zames : On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Pt. I and II ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-11, pp. 228-238, pp. 465-476 (1966)
- 55) I.W. Sandberg : A frequency-domain condition for the stability of feedback systems containing a single time-varying nonlinear element ; BSTJ, 43, pp. 1601-1608 (1964)
- 56) I.W. Sandberg : On the boundedness of solutions of nonlinear integral equations ; BSTJ, 44, pp. 439-453 (1965)
- 57) I.W. Sandberg : Some results on the theory of physical systems governed by nonlinear functional equations BSTJ, 44, pp. 871-898 (1965)
- 58) M. I. Freedman : L_2 -stability of time-varying systems ; SIAM J. Control, 6, 4, pp. 559-578 (1968)
- 59) M.Y. Wu and C.A. Desor : L_p -stability ($1 \leq p \leq \infty$) of nonlinear time-varying feedback systems ; SIAM J. Control, 7, 2, pp. 356-364 (1969)
- 60) I.W. Sandberg : On the response of nonlinear control systems to periodic input signals ; BSTJ, 43, pp. 911-926 (1964)
- 61) A.R. Bergen and R.L. Franks : On periodic responses of

nonlinear feedback systems ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, 1, pp.146-147 (1970)

- 62) 藤井, 正司. : Popov の安定判別の適用方法について ; 電気通信学会非直線理論研究会資料, 66. 12-11 (1966)
- 63) K. Fujii and K. Shoji : Stability analysis of nonlinear control systems by Popov criterion ; Technology Reports of the Osaka University. 18, 810, pp. 105-117 (1968)
- 64) 西村, 藤井, 正司 ; 線形および非線形制御系の評価法について ; 昭和41年電気四学会連合大会, 1812 (1966)
- 65) 藤井, 正司, 松浦 ; 非線形制御系の相対安定度について ; 昭和42年電気四学会連合大会, 2591 (1967)
- 66) 松浦 ; 非線形制御系の安定度について ; 大阪大学工学部卒業論文 (1967)
- 67) 児玉, 須田, 白川 ; 非線形制御系の安定判別法における線形化法-I, II ; 制御工学, 14, pp. 694-707, pp. 751-762 (1970)
- 68) 藤井, 正司 : 絶対安定問題における Aizerman の推測について ; 第11回日本自動制御協会学術講演会, 102 (1967)
- 69) 藤井, 正司 : Aizerman の推測の確認法について ; 第6回計測自動制御学会学術講演会, 106 (1967)
- 70) N.N. Krasovskii : Theorems on stability of motions determined by a system of two equations ; PMM, 16, 5, pp. 547-554 (1952)
- 71) V.A. Pliss : An investigation of a nonlinear system of three differential equations ; DAN SSSR, 117, 2, pp. 184-187 (1957)
- 72) A.G. Dewey and E.I. Jury ; A note on Aizerman's conjecture ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-10, 4, pp. 482-483 (1965)
- 73) R.E. Fitts : Two counterexamples to Aizerman's conjecture ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-11, 3, pp. 553-556 (1966)
- (120)

- 74) V. A. Pliss : Some problems of the theory of stability of motion in the whole ; Leningr. Univ. Press (1958)
- 75) A.R. Bergen and I.J. Williams : Verification of Aizerman's conjecture for a class of third order systems ; IRE Trans. Automatic Control, AC-7, 3, pp.42-46 (1962)
- 76) E.A. Barbashin : Stability of the solution of a certain nonlinear third-order equation ; PMM, 16, 5, pp.629-631 (1952)
- 77) 児王, 白川 : 非線形制御系の安定問題に関する Aizerman の推測について ; 第6回自動制御連合大会 (1963)
- 78) R. Reisoig : Criteria for the behavior of certain control systems ; Proc Third IFAC, London, 23B.1~23B.6 (1966)
- 79) H. Shirakawa : Stability of a class of third-order nonlinear differential equation ; IEEE Trans. Automatic Control, AC-13, 2, pp. 202-203 (1968)
- 80) G. Schmidt und G. Preusche : Popovs Stabilitätssatz als mittel zer teilweisen Bestätigung von Aizermans Vermutung ; Regelungstechnik, 15, 1, pp. 20-25 (1967)
- 81) M.L. Cartwright : On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order ; Quart. J. Mech. and Appl. Math., 9, Pt. 2, pp. 185-194 (1956)
- 82) Y.H. Ku and N.N. Puri : On Liapunov functions of high order nonlinear systems ; J. of the Franklin Inst., 276, 5, pp. 349-364 (1963)
- 83) R.E. Kalman : Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems ; Trans. ASME, 79, pp.553-556 (1957)
- 84) R.E. Kalman and J.E. Bertram : Control systems analysis (121)

and design via the second method of Lyapunov, Pt. I;
Trans. ASME, 82, pp. 371-393. (1960)