



|              |                                                                                   |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title        | カオス力学的アプローチによる自然対流場の研究                                                            |
| Author(s)    | 石田, 秀士                                                                            |
| Citation     | 大阪大学, 2003, 博士論文                                                                  |
| Version Type | VoR                                                                               |
| URL          | <a href="https://hdl.handle.net/11094/1572">https://hdl.handle.net/11094/1572</a> |
| rights       |                                                                                   |
| Note         |                                                                                   |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

カオス力学的アプローチによる自然対流場の研究

石田 秀士

大阪大学大学院基礎工学研究科

2003 年 1 月

# カオス力学的アプローチによる自然対流場の研究

石田 秀士

大阪大学大学院基礎工学研究科

2003 年 1 月

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 記号表 .....                                  | V  |
| 第 1 章 緒論 .....                             | 1  |
| 1.1 熱対流場におけるカオスに対する接近法 .....               | 1  |
| 1.1.1 カオス性の定義 .....                        | 1  |
| 1.1.2 散逸系とアトラクタ .....                      | 2  |
| 1.1.3 カオスの指標 .....                         | 3  |
| 1.1.4 安定性と SDIC との関連 .....                 | 5  |
| 1.1.5 カオス現象と乱流 .....                       | 6  |
| 1.2 本論文の目的・構成 .....                        | 7  |
| 1.2.1 カオスに関するこれまでの研究 .....                 | 7  |
| 1.2.1.1 カオス性指標とその周辺 .....                  | 8  |
| 1.2.1.2 熱流体場のカオス .....                     | 10 |
| 1.2.2 本論文の目的・構成 .....                      | 11 |
| 第 1 章の文献 .....                             | 15 |
| 第 2 章 密閉容器槽内部の自然対流場の準定常性とカオス性 .....        | 17 |
| 2.1 緒言 .....                               | 17 |
| 2.1.1 鉛直平行平板間の自然対流場 .....                  | 17 |
| 2.1.2 同軸二重円筒間内の自然対流場 .....                 | 19 |
| 2.1.3 本章の目的 .....                          | 19 |
| 2.2 鉛直平行平板間の自然対流場の準定常性とカオス性に関する実験的検討 ..... | 20 |
| 2.2.1 実験装置および方法 .....                      | 20 |
| 2.2.1.1 実験装置および測定方法 .....                  | 20 |
| 2.2.1.2 実験条件 .....                         | 21 |
| 2.2.2 実験結果 .....                           | 22 |
| 2.2.2.1 準定常性と 2 次流れセルの発生 .....             | 22 |
| 2.2.2.2 周波数分析 .....                        | 24 |
| 2.2.2.3 自己相関係数 .....                       | 26 |
| 2.2.2.4 最大リアプノフ指数 .....                    | 27 |
| 2.3 鉛直平行平板間の自然対流場の準定常性とカオス性に関する数値計算 .....  | 30 |
| 2.3.1 計算方法 .....                           | 30 |
| 2.3.1.1 計算モデル .....                        | 30 |
| 2.3.1.2 支配方程式 .....                        | 31 |
| 2.3.1.3 平均ヌセルト数 .....                      | 32 |
| 2.3.2 結果及び考察 .....                         | 32 |
| 2.3.2.1 計算手法の評価 .....                      | 32 |



|         |                                           |    |
|---------|-------------------------------------------|----|
| 2.3.2.2 | アスペクト比 $\alpha$ が5の場合.....                | 33 |
| 2.3.2.3 | アスペクト比 $\alpha$ が10の場合.....               | 34 |
| 2.4     | 同軸二重円筒間の自然対流場の準定常性とカオス性 .....             | 40 |
| 2.4.1   | 実験装置及び方法 .....                            | 40 |
| 2.4.1.1 | 実験装置及び測定方法.....                           | 40 |
| 2.4.1.2 | 実験条件.....                                 | 41 |
| 2.4.2   | 実験結果 .....                                | 42 |
| 2.4.2.1 | 熱対流場の定性的傾向.....                           | 42 |
| 2.4.2.2 | 周波数分析.....                                | 44 |
| 2.4.2.3 | ACC による時間スケールの算出.....                     | 45 |
| 2.4.2.4 | 最大リアプノフ指数.....                            | 46 |
| 2.5     | 結論 .....                                  | 47 |
|         | 第2章の文献 .....                              | 50 |
| 第3章     | 二次元矩形密閉容器内熱対流場に対する加振の影響 .....             | 53 |
| 3.1     | 緒言 .....                                  | 53 |
| 3.1.1   | 加振密閉容器内部の熱対流場 .....                       | 53 |
| 3.1.2   | 容器のアスペクト比の影響 .....                        | 54 |
| 3.1.3   | 加振熱対流場の非定常性 .....                         | 54 |
| 3.1.4   | 本章の目的 .....                               | 54 |
| 3.2     | 容器内振動熱対流場の熱伝達特性に対する加振の影響 .....            | 55 |
| 3.2.1   | 数値計算法 .....                               | 55 |
| 3.2.1.1 | 基礎式・計算条件.....                             | 55 |
| 3.2.1.2 | 数値計算法の基本的検討.....                          | 57 |
| 3.2.2   | 計算結果 .....                                | 60 |
| 3.2.2.1 | 平均ヌセルト数の時間変動特性.....                       | 60 |
| 3.2.2.2 | $Nu$ から再構築されたアトラクタの定性的変化.....             | 66 |
| 3.2.2.3 | $Nu$ から再構築されたアトラクタの定性的変化.....             | 67 |
| 3.3     | 振動容器内における熱対流場及びカオス性に対する容器のアスペクト比の影響 ..... | 72 |
| 3.3.1   | 計算法および定義 .....                            | 72 |
| 3.3.2   | 計算結果 .....                                | 73 |
| 3.3.2.1 | 数値計算法の基本的検討.....                          | 73 |
| 3.3.2.2 | 周波数の変化に伴う現象の変化.....                       | 74 |
| 3.3.2.3 | 周波数の変化に伴うカオス性の変化.....                     | 80 |
| 3.4     | 結論 .....                                  | 81 |
|         | 第3章の文献 .....                              | 84 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 第4章 水平加熱体上方の自然対流場の安定性とカオス性 .....   | 85  |
| 4.1 緒言 .....                       | 85  |
| 4.1.1 対流ブルーム .....                 | 85  |
| 4.1.2 壁面ブルーム .....                 | 86  |
| 4.1.3 熱対流場の安定性とカオス性 .....          | 87  |
| 4.1.4 本章の目的 .....                  | 87  |
| 4.2 対流ブルームの安定性とカオス性 .....          | 88  |
| 4.2.1 実験装置及び方法 .....               | 88  |
| 4.2.1.1 実験装置及び測定方法 .....           | 88  |
| 4.2.1.2 実験条件 .....                 | 89  |
| 4.2.2 データ解析法 .....                 | 90  |
| 4.2.2.1 次元解析 .....                 | 90  |
| 4.2.2.2 流れ場の安定性判別 .....            | 90  |
| 4.2.2.3 最大リアプノフ指数 .....            | 91  |
| 4.2.2.4 スムージング .....               | 92  |
| 4.2.3 実験結果 .....                   | 93  |
| 4.2.3.1 加熱体上方の自然対流場の安定性 .....      | 93  |
| 4.2.3.2 フィルタリングの効果 .....           | 95  |
| 4.2.3.3 カオス性と安定性との関連 .....         | 96  |
| 4.3 壁面ブルームの安定性とカオス性 .....          | 98  |
| 4.3.1 実験装置及び方法 .....               | 98  |
| 4.3.2 データ解析方法 .....                | 100 |
| 4.3.2.1 次元解析 .....                 | 100 |
| 4.3.2.2 安定性の評価 .....               | 101 |
| 4.3.2.3 最大リアプノフ指数 .....            | 102 |
| 4.3.3 結果及び考察 .....                 | 103 |
| 4.3.3.1 壁面ブルームの基本的特性 .....         | 103 |
| 4.3.3.2 人工攪乱に対する熱的応答 .....         | 105 |
| 4.4 結論 .....                       | 108 |
| 第4章の文献 .....                       | 111 |
| 第5章 本論文のまとめ .....                  | 113 |
| 5.1 各章の要約 .....                    | 113 |
| 5.2 本論文の結論 .....                   | 116 |
| 5.2.1 カオス性と既存概念との関連性 .....         | 117 |
| 5.2.2 カオス性指標を交えた流れ場の分析とその有効性 ..... | 119 |
| 5.3 今後の研究と展開 .....                 | 122 |

|                |     |
|----------------|-----|
| 第 5 章の文献 ..... | 125 |
| 謝辞 .....       | 126 |
| 発表論文 .....     | 127 |

## 記号表

|                       |   |                                                       |                   |
|-----------------------|---|-------------------------------------------------------|-------------------|
| $a$                   | : | 熱拡散係数                                                 | $[m^2/s]$         |
| $ACC$                 | : | 自己相関係数                                                | $[-]$             |
| $b$                   | : | 容器の振動振幅                                               | $[m]$             |
| $C_p$                 | : | 定圧比熱                                                  | $[W/kg^\circ C]$  |
| $D$                   | : | 加熱体の直径                                                | $[m]$             |
| $D_2$                 | : | 相関次元                                                  | $[-]$             |
| $f$                   | : | (無次元)周波数                                              | $[-]$             |
|                       | : | 攪乱周波数 (第4章)                                           | $[1/s]$           |
| $F_{peak}$            | : | パワースペクトルが極大値を示す(無次元)周波数                               | $[-]$             |
| $g$                   | : | 重力加速度                                                 | $[m/s^2]$         |
| $G$                   | : | 振動グラスホフ数 $(=b\beta\Omega(T_h-T_c)L^2/(2\nu^2))$ (第3章) | $[-]$             |
|                       | : | 修正グラスホフ数 $(=2\sqrt{2}Gr_x^{1/4})$ (第4章)               | $[-]$             |
| $Gr$                  | : | グラスホフ数                                                | $[-]$             |
| $Gr_x$                | : | (局所)修正グラスホフ数 $(=g\beta^*X^3\Theta/\nu^2)$             | $[-]$             |
| $H$                   | : | ヘヴィサイド関数 (第1章)                                        |                   |
|                       | : | 水溶液の高さ (第2章)                                          | $[m]$             |
|                       | : | 熱量を表す基本次元 (第4章)                                       | $[J]$             |
| $I$                   | : | 単位行列                                                  |                   |
| $K$                   | : | 半径比 $(=R_o/R_i)$                                      | $[-]$             |
| $k$                   | : | 熱伝導率                                                  | $[W/(m^\circ C)]$ |
| $L$                   | : | 代表長さ                                                  | $[m]$             |
|                       | : | 位相空間上の2点間の距離 (第1章)                                    |                   |
|                       | : | 長さを表す基本次元 (第4章)                                       | $[m]$             |
| $M$                   | : | 質量を表す基本次元                                             | $[kg]$            |
| $Nu$                  | : | (壁表面平均)ヌセルト数                                          | $[-]$             |
| $\overline{Nu}$       | : | 時間・壁表面平均ヌセルト数                                         | $[-]$             |
| $\overline{Nu}_{max}$ | : | 壁表面平均ヌセルト数の極大値の平均値                                    | $[-]$             |
| $\overline{Nu}_{min}$ | : | 壁表面平均ヌセルト数の極小値の平均値                                    | $[-]$             |
| $P_{Nu}$              | : | 壁表面平均ヌセルト数の平均無次元周期                                    | $[-]$             |
| $Pr$                  | : | プラントル数                                                | $[-]$             |
| $q$                   | : | ヒータによる単位面積当たりの加熱量                                     | $[W/m^2]$         |
| $R$                   | : | 半径, 半径方向座標 (2.4節)                                     | $[m]$             |
|                       | : | 無次元変動範囲(第4章)                                          | $[-]$             |
| $r$                   | : | 無次元半径方向座標                                             | $[-]$             |
| $Ra$                  | : | レイリー (レイレー) 数 $(=Pr \times Gr)$                       | $[-]$             |
| $T$                   | : | 温度                                                    | $[^\circ C]$      |
|                       | : | 時間を表す基本次元 (第4章)                                       | $[s]$             |
| $T_m$                 | : | 代表 (平均) 温度 $(=(T_h+T_c)/2)$ (2章)                      | $[^\circ C]$      |
| $t$                   | : | (無次元)時間 $(=at^*/L^2)$                                 | $[-]$             |
| $u$                   | : | X方向無次元速度成分                                            | $[-]$             |
| $V$                   | : | 速度                                                    | $[m/s]$           |

|              |   |                                                          |     |
|--------------|---|----------------------------------------------------------|-----|
|              | : | 無次元分散 (第 4 章)                                            | [-] |
| $v$          | : | Y 方向無次元速度成分                                              | [-] |
| $\mathbf{W}$ | : | ノイズの分散行列                                                 |     |
| $w$          | : | 重み係数                                                     | [-] |
| $X$          | : | X 方向座標, 成分                                               | [m] |
| $x$          | : | 無次元 X 方向座標成分                                             | [-] |
|              | : | X 方向座標成分 (第 4 章)                                         | [m] |
| $Y$          | : | Y 方向座標, 成分                                               | [m] |
| $y$          | : | 実験で得られた時系列データ                                            |     |
| $\hat{y}$    | : | スムージング後の各瞬間のデータ                                          |     |
| $\bar{y}$    | : | スムージング後の時系列データ                                           |     |
| $\bar{y}$    | : | 測定値の時間平均値                                                |     |
| $\bar{y}$    | : | 平均値のみからなる時系列データ $(= (\bar{y}, \bar{y}, \dots, \bar{y}))$ |     |
| $y$          | : | 無次元 Y 方向座標成分                                             | [-] |
|              | : | 実験で得られた各瞬間のデータ (4.2 節)                                   |     |
|              | : | Y 方向座標成分 (第 4 章)                                         | [m] |
| $Z$          | : | Z 方向座標, 成分                                               | [m] |
| $Z_r$        | : | 分配関数                                                     |     |
| $z$          | : | 無次元 Z 方向座標成分                                             | [-] |
|              | : | Z 方向座標成分 (第 4 章)                                         | [m] |

## ギリシャ文字

|                 |   |                                                                                    |                     |
|-----------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\alpha$        | : | アスペクト比 $(=H/L)$                                                                    | [-]                 |
|                 | : | 無次元空間増幅率 (第 4 章)                                                                   | [-]                 |
| $\alpha'$       | : | 無次元温度振幅比                                                                           | [-]                 |
| $\alpha^*$      | : | 空間増幅率 (第 4 章)                                                                      | [1/m]               |
| $\beta$         | : | 体膨張係数                                                                              | [1/°C]              |
|                 | : | 無次元周波数 (第 4 章)                                                                     | [-]                 |
| $\beta^*$       | : | 体膨張係数 (第 4 章)                                                                      | [1/°C]              |
| $\chi$          | : | (基本解行列の) 固有値                                                                       |                     |
| $\Delta T$      | : | 温度振幅                                                                               | [°C]                |
| $\Delta \theta$ | : | 無次元温度振幅                                                                            | [-]                 |
| $\delta$        | : | 境界層の厚みスケール                                                                         | [m]                 |
|                 | : | ストークス層の厚さ                                                                          | [m]                 |
| $\varepsilon$   | : | 確率 50% 誤差範囲                                                                        |                     |
| $\eta$          | : | 相似変数 $(=Gy/4x)$                                                                    | [-]                 |
| $\varphi$       | : | 無次元流れ関数 $(=\varphi/a_m)$                                                           | [-]                 |
| $\Lambda$       | : | 基本解行列                                                                              |                     |
| $\lambda$       | : | 最大リアプノフ指数                                                                          | [1/s]               |
| $\mu$           | : | 無次元粘性係数 $(=\mu^*(T)/\mu^*(T_m))$                                                   | [-]                 |
|                 | : | 不変測度 (第 1 章)                                                                       |                     |
| $\nu$           | : | 動粘性係数                                                                              | [m <sup>2</sup> /s] |
| $\Theta$        | : | 代表温度差 $(=T_h-T_c$ : 2.2, 2.3 節, 第 3 章) $(=qL/k$ : 2.4 節) $(=T_w-T_\infty$ : 第 4 章) | [°C]                |
|                 | : | 温度を表す基本次元 (第 4 章)                                                                  | [°C]                |
| $\theta$        | : | 無次元温度 $(=(T-T_c)/\Theta)$                                                          | [-]                 |
|                 | : | 周方向角度 (2.4 節)                                                                      | [rad]               |

|              |   |                                         |                      |
|--------------|---|-----------------------------------------|----------------------|
| $\rho$       | : | 密度                                      | [kg/m <sup>3</sup> ] |
| $\sigma_w^2$ | : | ノイズの分散                                  |                      |
| $\sigma_y^2$ | : | サンプリングデータの分散                            |                      |
| $\tau$       | : | ACC が 1/e となる(無次元)時間スケール                | [-]                  |
|              | : | 遅れ時間                                    | [s]                  |
| $\Omega$     | : | 角速度                                     | [1/s]                |
| $\omega$     | : | 無次元角速度 ( $=\Omega L^2/\nu$ )            | [-]                  |
| $\zeta$      | : | 無次元渦度 ( $=\zeta^* L^2/a_m$ )            | [-]                  |
|              | : | 分散比( $=\sigma_w^2/\sigma_y^2$ ) (第 4 章) | [-]                  |

## 下つき添字

|          |   |                                       |
|----------|---|---------------------------------------|
| c        | : | 低温側, 臨界点                              |
| d        | : | 下流側の点                                 |
| h        | : | 高温側                                   |
| i        | : | 内円筒                                   |
| inf      | : | 無限遠方 ( $=\infty$ )                    |
| L        | : | 代表値                                   |
| lp       | : | ローパスフィルタ                              |
| m        | : | 平均                                    |
| max      | : | 最大値                                   |
| min      | : | 最小値                                   |
| o        | : | 外円筒                                   |
| p        | : | 対象点                                   |
| u        | : | 上流側の点                                 |
| w        | : | 壁表面                                   |
|          | : | ノイズ (第 4 章)                           |
| +        | : | 上限                                    |
| -        | : | 下限                                    |
| $\infty$ | : | 無限遠方, 周囲                              |
| 数字       | : | 中心線上の温度定義点 (2.3 節)                    |
|          | : | 2 円筒間 $R=(R_i+R_o)/2$ 上の温度定義点 (2.4 節) |

## 第1章 緒論

決定論的な系内に生じる“ランダム的”な振る舞いである“カオス”は非線形力学の分野では特に1980年以降主要なテーマとして頻繁に扱われるようになったが、著者をはじめとする工学分野の研究者にとってあまり馴染みのある言葉とはいえない。その理由として“カオス”を扱うためには非定常現象を扱う必要があるのに対し、工学的には時間(アンサンブル)平均的な特性が重要であり、複雑な非定常現象をそのまま扱う必要性が認識されてこなかったことが主要因であると考えられる。さらにこのカオス力学的アプローチは長時間にわたる時間分解能、S/N比に優れた時系列データを必要とするが、特に本研究で扱うような熱対流場の場合、これまでは解析に用いるべきナビエ・ストークス方程式を解くための計算機的能力不足、さらには時間・空間分解能の高い測定方法の問題がこのようなアプローチを妨げる十分な理由となり得た。しかし近年の直接数値シミュレーション(DNS: Direct Numerical Simulation)[1][2]に象徴されるような計算機・計算法の発達やPIV[3]を始めとする計測技術の発達により、方法論的には熱流体場のカオスをかなり詳しく調べることが可能となっている。

そこで本論文では自然対流場に対してカオス性を判別するための種々の指標を用いた分析を行い、これを通じてカオス力学的アプローチの工学的有効性に関する基礎的検討を行うが、以下では自然対流場をはじめとする熱対流場に現れるカオス的特性を他の力学系と比較した場合の特徴とその分析・解析方法について述べる。

### 1.1 熱対流場におけるカオスに対する接近法

#### 1.1.1 カオス性の定義

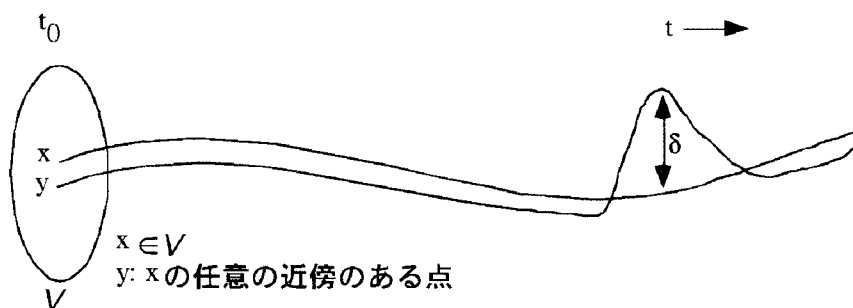


図 1.1 初期値鋭敏依存性の概念図

\* 工学とは“基礎科学を工業生産に応用して生産力を向上させるための応用的科学技術の総称”(広辞苑)であるが、本論文では“工学的”という言葉具体的なアプリケーションを想定してではなく、一般的な工業生産現場における実状や経験、手法を踏まえての応用に対する意識の意味で用いている。

“カオス”の定義は研究者によって異なるのが現状であるが、Devaney[4]は対象としている力学系(写像)について、それが定義されている領域(区間) $V$ 内で(1)初期値鋭敏依存性(SDIC: Sensitive Dependence on Initial Conditions)を持ち、(2)位相的推移的であり、かつ(3)周期点が稠密である、ときカオスであると定義している。ここで(1)は $V$ 内部の任意のある点を初期値として採用し、その点を含む領域を考えたとき、その内部の適当な点(全てではない)を別の初期値として選択すると、その領域の大きさ(すなわち初期値の差異)がいくら小さくてもその初期値の差に基づいて有限時間内(有限回の写像)にある一定の差異を生じさせることが可能であることと定義され、これはすなわちその力学系の予測不可能性を示している。このSDICの概念図を図1.1に示している。次に(2)は $V$ 内で定義された任意の開領域 $A$ から任意の領域 $B$ まで有限時間内に動く点が領域 $A$ 内に必ず存在することと定義され、これはすなわち力学的な意味での $V$ 内部の分解不可能性を示している。一方(3)は(1)(2)のような複雑性に加えてなお $V$ 内部の不動点、すなわち有限時間内に元の状態に戻るような点が $V$ 内部で、実数の集合の中の有理数の集合と同じような密度、すなわち $V$ 内部の不動点の集合 $V_f$ とその集積点の集合 $V_\infty$ の和集合が $V$ そのものに一致するような密度で存在するようなある種の規則性を有するような性質を指している。この定義の中で最も重要視されるのは(1)のSDICであり、この性質を有する力学系は一般に「カオス的」と呼ばれる[5]。本論文において“カオス性”はこの意味で用いている。このような力学系においては、実験においては初期値の誤差はもとより、測定・可視化に伴う攪乱により、そして数値解析においては丸め誤差、打ち切り誤差[6]により未来永劫にわたる現象の予測は不可能となる。

### 1.1.2 散逸系とアトラクタ

質点系における位置と運動量(速度)のようにその運動の状態を定める変数を座標に用いて空間を構成するときこれを「位相空間(状態空間)」と呼ぶ[7]。このような空間上ではある時点での運動の状態は一点(状態点)で表され、ある初期値からの運動は一本の曲線(軌道)で表現される。

熱対流現象をはじめ、多くの物理現象においてはラグランジュの意味で安定、すなわち速度、温度といった物理量は時間的に常に有限値を保っており(有界性)、さらに位相空間上の状態点で構成された領域の体積は時間の経過と共に一定値を保っているか、減少傾向を示す。このとき前者は「Hamilton系」、後者は「散逸(的)系」と呼ばれる。ある初期値に基づく運動は位相空間上である図形を描くが、ラグランジュの意味で安定な散逸系では前述の体積の減少に対応して、十分時間が経ったところで「アトラクタ」と呼ばれる図形に漸近する。そして多くの熱対流場はこの性質を満たしている。このような系でカオスの性質を調べるためにはアトラクタの性質を調べる

---

\* 単に解(物理量)が有界であるということ[8]



だけで十分である。

ただし、熱対流場は偏微分方程式系によって支配されており、常微分方程式系と異なり有限個のパラメータ(温度・速度など)を抽出することでその熱対流場の状態を一意に決定することはできない。また多くの実験では特定の点における特定のパラメータの値についての時系列データしか得られないのが普通である。

この点に関し、Takens[9]は一つの量  $x(t)$  から遅れ時間  $\tau$  を用いて次のような  $m$  次元(疑似)位相空間

$$(x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau))$$

を構成するとき、この空間内に形成されたアトラクタが、元のアトラクタの特徴を保有(再構築)していることを示した。これは埋め込みの方法(embedding technique)と呼ばれ、上記の  $m$  は「埋め込み次元」と呼ばれるが、まさにこの方法により熱対流場のカオスが分析可能になったと言っていいだろう。

以下では上述のアトラクタが存在する力学系について、そのカオス的特徴を抽出するための指標について述べる。

### 1.1.3 カオスの指標

カオスは幾つかの指標を組み合わせる判断するが、本論文に関連するものとしてリアプノフ指数と一般化次元が特に重要である。

リアプノフ指数は位相空間上の近接する2点についてその距離の単位時間当たりの増幅率の対数をとったものを時間平均したものである。一般に  $N$  次元の常微分方程式系

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) \quad (1.1)$$

において、 $\mathbf{y}$  の摂動量  $\Delta \mathbf{y}$  に関する次式のような線形化された方程式

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(t) \Delta \mathbf{y} \quad (1.2)$$

を考えると、次式を満たす基本解行列  $\Lambda(t)$

$$\dot{\Lambda}(t) = \mathbf{J}(t) \Lambda(t), \quad \Lambda(0) = \mathbf{I} \quad (1.3)$$

の固有値を  $\chi_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) とすると、常微分方程式系(1.1)に対応するリアプノフ指数  $\lambda_j$  は次式により定義される。

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\chi_j| \quad (1.4)$$

この中で最大のものが最大リアプノフ指数である。このように  $N$  次元位相空間では  $N$  個の独立な固有ベクトルの方向に対応して  $N$  個のリアプノフ指数が存在する。この指数が正の場合、対応する方向について近接する二点間の距離は時間的に指数関数的に離れ(引き延ばされ)、結果としてSDICが生じることになる。アトラクタが存在する系でリアプノフ数が正の要素があると、前述の有界性を保つために必ずリアプノ

フ数が負となる要素が存在し、この方向について軌道は接近する（折り畳まれる）ことになる。この引き延ばしと折り畳みはカオスの特徴であるが、上述の理由によりアトラクタが存在する系では、このカオス的な特徴の存在証明には  $N$  個のうち最大のリアプノフ指数  $\lambda$  が正になることを示すだけで十分であり、このとき系は SDIC を有すると判断される。この最大リアプノフ指数を効率的に計算する方法は Wolf ら [10] が提案しており、以下ではこの方法を「Wolf らの方法」と呼ぶ。この方法の詳細については次節で述べる。

次に一般化次元であるが、これはフラクタル次元（容量次元）を一般化したものである。位相空間上に構成されたアトラクタについて、それを構成する軌道に沿って一定の時間間隔で取り出した軌道上の状態点の集合を考える。もしこの図形が 1 次元的であればある軌道上の点を中心として半径  $r$  の(超)球内部に入る状態点の数は  $r$  に比例するだろう。そしてもしこの図形が 2 次元的であればその数は  $r^2$  に比例すると考えられる。このように半径  $r$  の球内部の状態点の数が  $r=0$  近傍で  $r^\nu$  に比例するときその図形の次元を  $\nu$  次元と定めることができ、このように定義された次元を「フラクタル次元」と呼ぶ。非整数次元の図形はフラクタルと定義され、一般にカオス的変動を表すアトラクタ(ストレンジアトラクタ)はフラクタルとなる。またこのフラクタル次元以外では、与えられたアトラクタの軌道に沿って一定時間間隔で抽出された状態点の組み合わせのうち、与えられた距離  $r$  より短いものの割合  $C(r)$ 、すなわち

$$C(r) = \int_{V_x} C(\mathbf{x}, r) d\mathbf{x}, \quad C(\mathbf{x}, r) = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq r} \mu(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.5)$$

を相関積分と定義し、 $r=0$  近傍で  $C(r) \propto r^\nu$  と近似した場合の指数  $\nu$  により定義される相関次元もよく用いられる。なお  $V_x$  は  $\mathbf{x}$  の定義域で、 $\mu$  は不変測度、すなわち状態点の確率密度関数である。こういった次元を一般化し、パラメータ  $q$  を含む形で表された次元が一般化次元(レニイ次元)  $D_q$  で次のように表現される [11]。

$$Z_r(q) = \int_{V_x} C^{q-1}(\mathbf{x}, r) d\mathbf{x} \quad (1.6)$$

$$D_q = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log Z_r(q)}{\log r} \quad (1.7)$$

ここで定義より  $D_2$  は相関次元に一致しており、また  $D_0$  はフラクタル次元に一致することが確認できる。一般にアトラクタの次元が 2 以上になるとフラクタル次元は通常のアプローチ(Box-Counting 法)で求めにくくなるが、相関次元は比較的簡単に求まり、この計算法を Grassberger ら [12] が提案している。フラクタル次元、相関次元の間には  $D_0 \geq D_2$  の関係があるが、多くの場合これらは非常に近い値をとると考えてよい。リアプノフ数と一般化次元は、SDIC に加えて Devaney のカオスの定義の所で述べた周期点の稠密性をも包括した概念であるコルモゴロフ(-シナイ)エントロピーを媒介にして相互に関連づけられることが知られている [13]。

これらの指標を用いるといわゆるランダムな変動とカオス的変動を区別できる。今

完全にランダムに変動する信号があったとして、その信号から Takens の埋め込みを用いてアトラクタを構成し、その図形の相関次元を計算するとちょうど埋め込み次元と一致する。この関係は埋め込み次元がいくら大きくても変わらない。一方カオスの変動を示す信号からアトラクターを構成するとその図形の相関次元はある有限の埋め込み次元以上では一定（非整数）となる。これは埋め込み次元がその変動の自由度に対応しているためで、完全にランダムな変動では支配方程式は存在せず前後の値は全く無関係、すなわち変動の自由度は無限大であるのに対して、カオスは支配方程式、すなわち有限の自由度により生成されるという事実を反映している。また上述のコルモゴロフエントロピー  $K$  を用いると非カオス系では  $K=0$ 、カオス系では  $K=\text{有限値}$ 、非決定論的なランダム系では  $K=\infty$  となる。ランダムとカオスはよく混同されるがこのように定量的に完全に区別され得る。

#### 1.1.4 安定性と SDIC との関連

ここで本論文のテーマの一つである SDIC と安定性との関連について補足しておきたい。

Lyapunov は常微分方程式の解  $\mathbf{x}(t)$  について、次の関係式を満たすとき“安定”と定義した。

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in I = [0, \infty), \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0): \|\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0)\| < \delta, \forall t \geq t_0, \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| < \varepsilon \quad (1.8)$$

“不安定”はこの否定によって定義される[8]。この不安定の概念は、“ある  $t_0 > 0$  に対する値  $\mathbf{x}(t_0)$  を含む領域を考えたとき、その内部の適当な点（全てではない）を別の  $t=t_0$  での値として選択すると、その領域の大きさ（すなわち  $t=t_0$  での値の差異）がいくら小さくてもその  $t=t_0$  での値の差に基づいて有限時間内（有限回の写像）にある一定の差を生じさせることが可能であること”と表現することができる。この“不安定”の概念図を図 1.2 に示している。

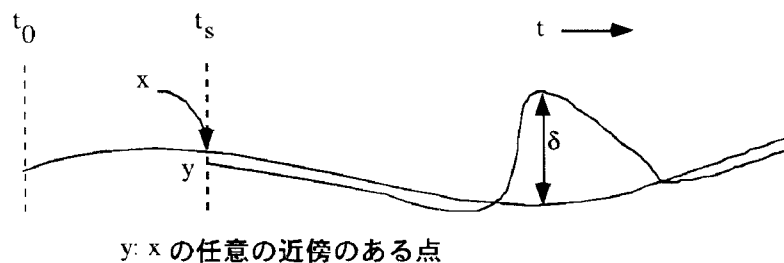


図 1.2 Lyapunov の不安定の概念図

これを 1.1.1 節の SDIC の定義と比較してみる。SDIC ではある位相空間上の領域  $V$  内の全ての初期値を対象にし、ある決められた時点以降の解とその近傍の振る舞いを問題にしているのに対して、Lyapunov の意味での不安定では考察の対象をある  $t=0$

での決められた初期値に基づく解の周辺に限定する代わりに  $t=t_0>0$  の全ての時点で解とその近傍の振る舞いを問題にしているという点では異なるものの、ある基準となる解の近傍の軌道が有限時間内に元の軌道との間にある一定の差異を生じさせ得るという点で両者は一致しており、この SDIC と Lyapunov の意味での不安定性、すなわち本論文の意味でのカオス性と不安定性は定義上はよく対応している。しかしながらさらに熱対流場の特性を考慮した場合にカオス性が不安定性に含まれるのか、一致するのかといった包含関係については別途検討する必要がある。

一般に安定性の解析の際よく用いられる線形安定性解析では、ある解に対して加えられる微小擾乱が指数関数的に増幅、減衰するときそれぞれ不安定、安定と判別しそれ以外は中立と定める。しかしこの意味での不安定は上で定義した Lyapunov の意味での不安定の条件と比べて明らかに厳しい。すなわち Lyapunov の意味での不安定では適当な時点で対象とする解との間に差異が生じさえすればよいのに対して、線形安定性解析の意味での不安定では常にある解の近傍の点はその解から離れる必要がある。それもべき乗の関数では不十分で指数関数的に離れることを要求するのである。同時に線形安定性解析の意味での安定な力学系は Lyapunov の意味での安定な系 (Lyapunov の意味で不安定でない系) と比べて条件が厳しく、説明は省略するが(大域的)指数漸近安定[8]や完全安定[8][14]に対応する概念になっている。

よって線形安定性解析の意味での不安定性と SDIC の比較のためには本来の SDIC とは別の概念を導入する必要がある。

より一般的に SDIC を測るための手段として位相空間上の近接する 2 点間の距離が近似的にある (狭義) 単調増加関数のべき乗に従って増加するとき、そのべき指数が正の場合に SDIC 有りと判別する方法が考えられる。この指数のマイナスをとったものは 2 点間距離における与えられた単調増加関数に対する特性数と定義される[15]。線形安定性解析の意味での不安定と対応づけるためにはこの単調増加関数として指数関数を選択すればよい。この場合の特性数は最大リアプノフ指数に -1 をかけたものに一致する。そこで本論文では安定性とカオス性を比較する際の指標として最大リアプノフ指数を用いている。

### 1.1.5 カオス現象と乱流

また上述の熱対流場のカオスと乱流との関連は本論文で扱う重要なテーマの一つであるが、ここで本論文の言う“乱流”を定義しておく必要があるだろう。

一般に“乱流”は層流でない流れを全て包括するほどの極めて広い概念であるが、乱流理論の研究者にとって“乱流”とは十分に発達した乱流であり、(1)微小擾乱に対する不安定性、(2)巨大自由度、(3)大きな輸送能力、(4)強い非線形性、(5)散逸性の 5 つの特徴を有する流れ場とされる[16]。ここで(1)は SDIC に相当しており、カオス力学系の特徴であるが、“乱流”においてはこの性質ゆえにその統計的性質が安定であることが重要で、乱流がカオス力学系と区別されるのは乱流が極めて大きな自由度を

持ち時間的に乱れているだけでなく、空間的に乱れており、様々なスケールの運動が複雑な相互作用を経て大きな輸送能力を持つに至っている点である。このような観点から一般に乱流研究者の間では乱流はカオスよりも狭い概念とされる[14]のが普通である。この点については実際の自然対流場の分析を通じて本研究においても明らかにする。

ここで上の意味で十分に発達した乱流とは必ずしも一様等方性乱流を指すのではない。一般に乱流状態では場の平均エネルギーが供給されるスケール（エネルギー保有領域）と乱流エネルギーが粘性により散逸するスケール（散逸領域）の間にはかなりのスケール差があり、この間をつなぐのは渦の引き延ばし(vortex stretching)に基づいて生成する回転方向並びに大小さまざまな渦運動である。この vortex stretching の構造は普遍的で平均場を支配するスケールの形状や非等方性にかかわらずこの構造が現れる空間（波数）スケール（平衡領域）における乱れの等方化をもたらす。これを「局所等方性」と呼ぶ。その結果2次元、3次元に関わらずこの平衡領域において乱流エネルギーのスペクトルはコルモゴロフの第2相似則に基づく「 $-5/3$ 乗スペクトル」と呼ばれる普遍的性質が観察される[17]。この $-5/3$ 乗スペクトルが観察されない乱流は極めてまれで、最近回転する同軸二重円筒間において発見されて話題となっている[18]ほどである。このような引き延ばし過程で乱流エネルギーは余り変化せず、このような大スケールから小スケールに渡るエネルギー伝達は「エネルギーカスケード」と呼ばれる。

一般に乱流解析を困難にするのはこのようなエネルギー保有領域と散逸領域の間のスケール差であり、散逸領域を支配する時間・空間スケールで解析を行うことは事実上不可能である。そこで多くの乱流解析は平均量と変動量の間のスケール分離に基づいてエネルギー保有領域以下のスケールの乱流現象をモデル化し、エネルギー保有領域のみでの空間スケールでの解析(乱流モデル)や平衡領域までの空間スケールでの解析(LES: Large Eddy Simulation)により、アンサンブル平均された物理量を精度よく求めることが試みられている。このように考えていくと“乱流”は乱流理論の上でも、また工学的にも十分発達した乱流に限定して議論することに特に問題は生じないと考えられる。そこで本論文では“乱流”を vortex stretching による種々のスケールの渦運動やこれに基づく平衡領域が存在し、時空間的な乱れが観察されるような十分発達した乱流の意味で用いており、以下ではこの限定を特に強調する必要があるときは「発達乱流」と呼ぶことにする。

## 1.2 本論文の目的・構成

### 1.2.1 カオスに関するこれまでの研究

これまでのカオス力学系に関する研究は(1)カオス特性を判別するための指標、もしくはその計算法、(2)離散力学系もしくは常微分方程式系に対するカオス特性に関する

研究, および(3)流体力学系を始めとする偏微分方程式系のカオスに関する研究, の大きく3つに分類できる. 本論文の目的を述べるにあたってまず本論文に関連する(1)(3)に関する研究について簡単にまとめておく.

### 1.2.1.1 カオス性指標とその周辺

まずカオス性を判別する指標に関する研究であるが, 1.1節で示したように最も重要な指標は最大リアプノフ指数 $\lambda$ である. この指標を Wolf らは離散時系列データから効率的に求める方法を提案している[10]. 彼らの論文の中では Takens の埋め込みにより, ある一つの量に関する時系列データから $\lambda$ を計算する方法のみ紹介されているが, この方法は原理的に任意の常微分方程式系について適用可能である.

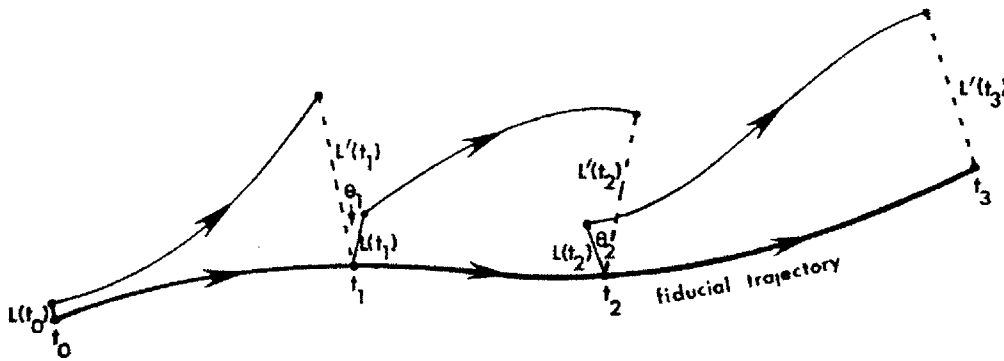


図 1.3 時間発展と参照点の置き換えの様子(Wolf ら[10]による)

この方法では離散時系列データの時間変動を説明する方程式系が与えられない, すなわち軌道の周りの接ベクトルの支配方程式が陽には与えられない場合にも適用できるものであり, 次のようなアルゴリズムに従って $\lambda$ が計算される. まず時系列データから得られる全ての状態点を適当な位相空間上にプロットしたあと, 初期状態点(時間  $t=t_0$ )の周りでその点に最も近い点を参照点として選ぶ. なおこの参照点は増幅率を求める際の誤差を小さくするため, 状態点との距離がある最小値(最小探索スケール)より大きく, ある最大値(最大探索スケール)より小さいように選ぶ. これらの点間の距離  $L_0$  がある決められた時間 $\Delta t$ (発展時間)後に  $L_1$ に変化するとき, 指数換算した場合の単位時間当たりの距離の増加率は  $\log(L_1/L_0)/\Delta t$  である. このとき変化後の2点間のベクトル  $\mathbf{v}$  をチェックしておく. 次に  $t_1=t_0+\Delta t$  における状態点の近傍で, かつその状態点からベクトル  $\mathbf{v}$  の方向に引いた直線に沿った(近い)点を参照点として選び,  $t_1$ における状態点と参照点の間の距離 $L_1$ とその $\Delta t$ 後の距離 $L_2$ から先程と同様に指数換算した増幅率を計算する. このような状態点と参照点の関係を図 1.3に示している. これを繰り返すと, ベクトル  $\mathbf{v}$  は最終的にその位相空間中で最も引き延ばされる方向, すなわち最大のリアプノフ数に対応する固有ベクトルの方向に近づき, 最大リアプノフ指数 $\lambda$ は増幅率の時間平均をとって次式から求まる.

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L_k'}{L_{k-1}} \quad (1.9)$$

ここで対数の底の2は増幅率を *bit/s* で表すために使用されているもので、必ずしも2である必要はない．式(1.9)で得られた $\lambda$ のもとでは、隣接点の間の情報は単位時間当たり $\lambda$  *bit* だけ失われることになる．Wolf らの方法を用いて $\lambda$ を計算する場合、Takens の埋め込みの方法を併用すると値を定めるべきパラメータは 1)埋め込み次元、2)遅れ時間、3)発展時間、4)最小探索スケール、5)最大探索スケールの5つであるが、これらの値の与え方については各々の場合で異なるので次章以降で説明する．

この（最大）リアプノフ指数についてはこの他に数多くの算出方法が提案されている．例えば Zeng ら[19]は常微分方程式系を線形化することによって得られる接ベクトルの発展方程式(1.2)について、行列  $J$  の近似行列を対象点周辺の接ベクトルから最小自乗法により求め、その固有値から全てのリアプノフ指数（リアプノフスペクトラム）を求める方法を提案している．そして Sano ら[20]はこれをさらに修正した方法を提案している．彼らはこれらの方法を精度の低い時系列データからリアプノフ指数を精度よく求める手法として提案しているが、著者がこれらの方法をリアプノフ指数が求まっている Lorentz モデル[21]や Henon マップ[22]として知られるそれぞれカオス性を示す常微分方程式系、離散力学系に対して適用してみたところ、最大リアプノフ指数を求めるという観点からすると Wolf らの方法に比べてこれらの方法は計算時間の増大に見合うほど精度の向上は見られなかった．そこで本論文では最大リアプノフ指数の計算にもっぱら Wolf らの方法を用いている．

次に相関次元であるが、この指標についても離散点から精度よくもとめる方法があり、Grassberger ら[12]が提案している．この方法では式(1.5)の相関積分が Heaviside 関数  $H$  を用いて、離散的に

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (1.10)$$

と表現できることを利用する．なお  $\mathbf{x}_j$  はある一定時間間隔で得られる位相空間上の状態点で総点数は  $N$  である．相関積分が求まれば  $r=0$  近傍のデータから最小二乗法により  $r$  の指数  $\nu$ ，すなわち相関次元が得られる．この方法の自然な拡張により一般化次元  $D_q$  も容易に求まるが、これを Sato ら[23]が提案している．また相関次元の求め方も各種提案されており、Jensen ら[24]は再帰時間近似(recurrence-time approximation)，すなわち位相空間上のある点からスタートしたとすると軌道に沿ってスタート点の近傍（領域）に再び戻るまでの時間（再帰時間）はその近傍の状態点の存在確率の逆数に比例すると仮定し、相関積分もしくは式(1.6)の  $Z_r(q)$ （分配関数）を求めることを提案している．この仮定は一般に妥当性が高いことが確認されているので Grassberger ら[12]の方法によって得られた相関積分と比較し、差違が現れる  $r$  の領域を調べることにによりノイズの影響を受ける空間スケールを特定することができるが、

Henon マップを用いた著者の検討によると、必要な計算時間や得られる精度はあまり変わらない．そこで本論文では相関次元の算出に Grassberger らの方法を用いている．

また最近の傾向として大域的スペクトラム(global spectrum)の方法、または  $f(\alpha)$  (エフ・アルファ)の方法がカオス力学系の特徴を抽出する方法としてよく用いられている．この理論の詳細は省略するが  $\alpha$  は位相空間上で局所的に定義される領域の大きさと内部に含まれる状態点の存在確率から定義される局所次元 (singularity) を表しており、関数  $f=f(\alpha)$  はそのような状態が実現している領域の数から定義される容量次元を表している．すなわち  $\alpha$  が位相空間上の不変測度(アトラクタ)の局所構造を抽出するためのフィルタの役割を果たしており、カントール集合のように扱いが容易なものは  $f$  と  $\alpha$  の関係が解析的に与えられる[11]．Halsey ら[25]はこのような指標を導入すると同時に、準周期運動を経てカオスに至る力学系を考察する際によく扱われる基本的な一次元力学系である次式に示すサインサークルマップ

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \quad (1.11)$$

に対してこの手法を適用して  $f(\alpha)$  の関係式を数値計算により求めている．

### 1.2.1.2 熱流体場のカオス

次に熱対流場のカオスであるが、熱流体場の基礎方程式は現実的な境界条件の下での扱いが難しいこともあって、解析的に扱えるモデルのカオス特性との関連について調べた研究が多い．Jensen ら[26][27]は水銀を作業流体に用いた場合の Rayleigh-Benard 対流と上述のサインサークルマップとの関係について実験的に調べ、自励振動によるものとは異なる振動数で熱対流場を外部から変動磁場を用いて強制的に振動させた場合、自励振動と強制振動の周波数の比が Halsey ら[25]が上述の解析に用いたものと一致するように選ぶと、サインサークルマップで確認された  $f(\alpha)$  スペクトラムが得られることを示した．また Yazaki[28]はガスを注入した円筒の長手方向に階段状の温度分布を加えた場合に観察される熱音響的振動(Taconis Oscillation)について、自励振動によるものとは異なる振動数の外部振動を超音波により与えた場合のカオスについて同様の解析を行い、サインサークルマップと同じ大域的スペクトラムを実験的に得ることに成功している．

一方 Lorentz モデルのように熱対流場の支配方程式を適当な近似により離散力学系、もしくは常微分方程式系に変換してその力学系に現れるカオスを扱う研究も行われている．例えば Davalos-Orozco ら[29]は鉛直壁に沿って流下する壁面に鉛直方向振動を加えた場合に流体表面に生じる波形について調べるため、長波長近似を施した基礎方程式(Benny 方程式[30][31])の解を数値的に検討し、加振周波数がある臨界値を越えるとそれ以下の周波数で観測される流れ方向に振幅が飽和する高調波形が観測されなくなり、流れ方向に振幅が増大し波の空間発展の様子がカオス的になることを報告している．また Mukerji ら[32]はヘリウム火炎中のすすの体積分率の時間変動をモデ



ル化した離散力学系（マップ）を提案し，実験によって得られるそのカオス的振る舞いが提案された離散力学系による振る舞いと定性的にはよく一致することを報告している．

このように熱流体場のカオスについては解析が容易になるようモデル化した力学系のカオスについて検討したものや，解析的に扱いが容易な力学系のカオスと関連する側面についてのみ比較検討を行ったものはこの他にも幾つか報告されているが，熱流体場のカオスそのものを詳細に，特にカオス性を判別する指標を用いて定量的に検討したものは非常に少ない．中林ら[33]は球対称の回転ジェット流の遷移について調べ，速度成分の時系列データから回転数を変化させた場合の流れ場の遷移について基本周波数の変化等を詳細に検討すると同時に相関次元の変化から3つの異なるカオスモードが存在することを明らかにしている．また自然対流に関しては Koizumi ら[34]が加熱円筒上方に水平板を設けた場合のプルームの時間変動について実験的に検討し，レイリー数や平板の位置を変化させた場合に3通りの流れモードが存在することを示すと同時に円柱に沿って流れがはく離する非定常流モードならびに円柱上方でプルームが振動する振動流モードでは円柱表面でのヌセルト数の分布がほとんど変わらないのにも関わらず，温度場の変動から求まるリアプノフスペクトルは異なり，振動流モードでのカオス性は非定常流モードにおけるカオス性より強いことを明らかにした．また Quere ら[35]は鉛直壁の温度を固定し，上下壁を断熱した3次元矩形密閉容器内部の自然対流場についてプラントル数  $Pr=0.71$  に固定し，レイリー数を変化させた場合の熱対流場の変化を数值的に検討し，レイリー数を大きくした場合の熱対流場の温度変動の中に折り畳み，引き延ばし構造が現れ，結果として温度変動のスペクトルが連続的となることを報告している．

しかしながら著者の知る限り密閉容器内部の熱対流場について，アスペクト比やプラントル数が大きい場合や，容器形状を変化させたり容器に振動を加えた場合のカオスや，自然対流場におけるカオス性と安定性との関連について検討したものはない．また流れのモード変化や流れ場のヒステリシスとカオス性指標の変化を結びつけて論じているものはない．

### 1.2.2 本論文の目的・構成

以上の研究経過をふまえ，本論文では自然対流場を題材にとり，熱対流場内部に発生するカオス性に関する基本的検討を行ったが，主として前述のカオス力学のアプローチや分析手法の工学的有効性に関する基本的検討を目的としている．

そのために本論文ではまず種々の熱対流場の分析を通じて工学的に重要な既存概念，すなわち準定常性\*（非定常性），安定性，ヒステリシス，乱流とカオス性との関連性について明らかにする．これは工学的には“カオス”概念を必要としない熱対

\* 時間的には非定常状態であるにもかかわらず，その統計的状态（統計量）が定常となる性質のこと（後述）

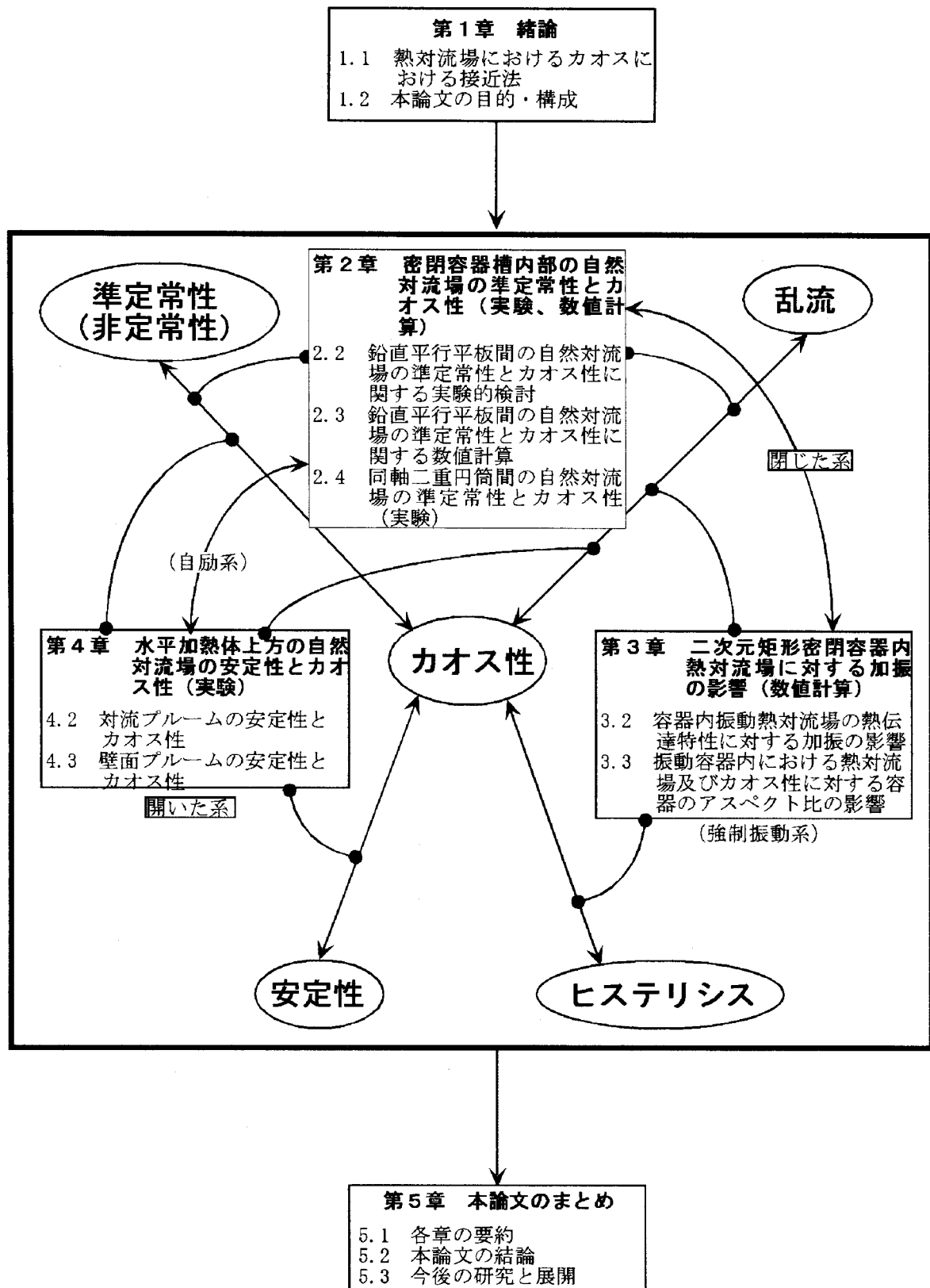


図 1.4 本論文の構成

流場の評価体系がすでにできあがっているので、カオス概念の有効性を主張するためにはまず従来からの熱・流体力学の評価体系の中に“カオス”を組み入れる必要があると考えるからである。

次に本論文では上述のカオス性を判断する手法やその他位相空間上で定義される指標群を使用することで特別な実験装置やシミュレータを要することなく流れ場の総合的分析・理解が可能となり、結果として、1)システムの不安定化の原因究明，不安定化する空間的領域の特定とこれを避けるための方策の検討，2)従来までは難しかったパラメータの変化に伴う熱対流場の変化に関する定量的分析ならびに類型化等々が可能となることを実際に示すことで、カオス力学的アプローチの工学的有効性を示す。

本論文は本章の緒論を含む5章構成であり、各章の関係を図1.4に示している。各章では種々の条件下でできるだけ一般的な結論を導くため、扱う自然対流場として自励系や強制振動系、そして閉じた系や開いた系を各種織りませ、それらに対して実験的、数値的検討を試みる構成となっている。

第2章では閉じた系でかつ自励系の例として鉛直2面の温度を固定することで水平方向に温度差を設けた鉛直平行平板間における自然対流場を扱い、温度差（グラスホフ数）を大きくした場合に1次流れとしての大循環流に加えて内部に観察される2次流れセル[36]の発生と準定常性、カオス性との関連について実験的、数値的に検討し、さらに内円筒一定加熱で外円筒温度固定の同軸二重円筒間内の自然対流場について同様の検討を実験的に行う。

第3章では閉じた系でかつ強制振動系の例として第2章と同じく水平方向に温度差を設けた二次元矩形容器に対して鉛直方向振動を加え、加振周波数を変化した場合に生じる流れ場のモード変化や内部に生じる非定常特性の変化を最大リアプノフ指数、相関次元を始めとする種々の位相空間上の指標を用いて数値的に詳細に検討する。その際Fuら[37]が指摘した加振周波数を上昇させた場合と下降させた場合の間に生じるヒステリシス現象とカオス性との関連についても併せて議論する。

第4章では開いた系でかつ自励系の例として水平加熱体上方の自然対流場を取り上げ、実験的に得られる流れ場の安定性とカオス性との関連について詳細に検討する。この中で特にカオス性が発生するメカニズムについて述べたあとで、安定性とカオス性の間の包含関係について明らかにする。

最後に第5章では各章を要約した上で、本論文としての結論を述べ、さらに本論文に関して今後の研究課題と展開について述べる。

本章の最後に本論文での基本的な立場を説明しておきたい。第2章から第4章においては温度の不規則変動を定量的に分析するため、準定常状態の時系列データから周波数分析を行ったり、Takensの埋め込みによりアトラクタを構成して最大リアプノフ指数等の指標の計算を行うが、そのような解析が意味をもつためには系がエルゴード性を有しており、またその時間的に求まる分布は初期値に依存してはならない。よ

って本論文において扱う自然対流場は十分時間が経過したあとの「準定常状態」と呼ばれる状態において時間的にその統計的状态が変化したり（例えば時空カオス）、時間変動の様子が統計的に初期値に依存したりしないと仮定する。これが本論文の基本的な立場である。

このような前提条件を満たさない場合の扱いは確率密度関数(PDF: Probability Density Function)によるものをもっとも一般的であると思われる[38]が、このようなPDFを定量的に扱う方法はまだ確立されておらず、極めて複雑となることが予想され、これを真正面から扱うことは本論文の目的を大きく逸脱してしまう。本研究の基本的立場においては場の時間平均的な（統計的）特性しか議論することができないが、本論文の目的に照らして十分であると考えられる。またそのように期待している。

## 第1章の文献

- [1] N. Kasagi, Y. Tomita and A. Kuroda, Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow, *Trans. ASME, J. Heat Trans.*, **114**(1992), 598-606
- [2] H. Kawamura, H. Abe and Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **20**(1999), 196-207
- [3] G. J. Longo and F. Stern, Biases of PIV measurement of turbulent flow and the masked correlation-based interrogation algorithm, *Exper. in Fluids*, **30**(2001), 27-35
- [4] R. L. Devaney 著 後藤憲一訳, カオス力学系入門 (第2版), (共立出版), 1990
- [5] 下條隆嗣, カオス力学入門 (シミュレーション物理学6), (近代科学社), 1992
- [6] 石田秀士, 木本日出夫, 主流を伴う衝突噴流現象に対する複合格子法の適用(第一報), *日本機械学会論文集(B編)*, **64**(1998), 2086-2093
- [7] 木村利栄, 菅野礼司, 微分形式による解析力学, (吉岡書店), 1996
- [8] 山本稔, 常微分方程式の安定性, (実教出版), 1979
- [9] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, Rand D. A. and Young L. -S. eds., (Springer, Berlin), 1981, 366-3811
- [10] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents From a Time Series, *Physica D*, **16**(1985), 285-317
- [11] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門—現象の解析と数理—, (培風館), 1992
- [12] P. Grassberger and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 346-349
- [13] 香田徹, 離散力学系のカオス (現代非線形科学シリーズ2), (コロナ社), 1998
- [14] 巽友正, 流体力学 (新物理学シリーズ21), (培風館), 1982
- [15] 斉藤利弥, 常微分方程式( ) (岩波講座基礎数学), (岩波書店), 1976
- [16] 後藤俊幸, 乱流理論の基礎 (朝倉書店), 1998
- [17] 吉澤他, 乱流解析 (数値流体力学シリーズ3, 数値流体力学編集委員会編), (東京大学出版会), 1995
- [18] C. N. Baroud, et al., Anomalous self-similarity in a turbulent rapidly rotating fluid, *Phys. Rev. Lett.*, **88**(2002), 114501
- [19] X. Zeng, R. Eykholt and R. A. Pielke, Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 3229-3232
- [20] M. Sano and Y. Sawada, Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 1082-1085
- [21] E. N. Lorentz, Deterministic Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**(1983), 130-141
- [22] M. Henon, A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50**(1976), 69-77

- [23] S. Sato, M. Sano and Y. Sawada, Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems, *Prog. Theor. Phys.* **77**(1987), 1-5
- [24] M. H. Jensen, et al., Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Benard Experiment, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2798-2801
- [25] T. C. Halsey, et al., Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets, *Phys. Rev. A*, **33**(1986), 1141-1151
- [26] M. H. Jensen, et al., Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Benard Experiment, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2798-2801
- [27] T. C. Halsey and M. H. Jensen, Spectra of Scaling Indices for Fractal Measures: Theory and Experiment, *Physica D*, **23**(1986), 112-117
- [28] T. Yazaki, Experimental Observation of Thermoacoustic Turbulence and Universal Properties at the Quasiperiodic Transition to Chaos, *Phys. Rev. E*, **48**(1993), 1806-1818
- [29] L. A. Davalos-Orozco, S. H. Davis and S. G. Bankoff, Nonlinear Instability of a Fluid Layer Flowing Down a Vertical Wall Under Imposed Time-Periodic Perturbations, *Phys. Rev. E*, **55**(1997), 374-380
- [30] D. J. Benny, Long Waves on Liquid Films, *J. Math. and Phys.*, **45**(1966), 150-155
- [31] 吉永隆夫, 液膜流の不安定性とカオス, *機械の研究*, **54**(2002), 120-125
- [32] S. Mukerji, et al., Chaotic Map Models of Soot Fluctuations in Turbulent Diffusion Flames, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **41**(1998), 4095-4112
- [33] 中林功一, 森西洋平, 小林政弘, すきま比 $\beta=0.14$ での回転2球間クエット流れの層流-乱流遷移のカオス, *日本機械学会論文集(B編)*, **63**(1997), 3499-3504
- [34] H. Koizumi and I. Hosokawa, Chaotic Behavior and Heat Transfer Performance of the Natural Convection Around a Hot Horizontal Cylinder Affected by a Flat Ceiling, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **39**(1996), 1081-1091
- [35] P. Le Quere and M. Behnia, From Onset of Unsteadiness to Chaos in a Differentially Heated Square Cavity, *J. Fluid Mech.*, **359**(1998), 81-107
- [36] 木本日出夫・宮脇陽一, 鉛直平行壁面間の自然対流場に生じる準定常流に関する研究, *日本機械学会論文集(B編)*, **55**(1989), 3680-3686
- [37] W. S. Fu and W. J. Shieh, A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**(1992), 1695-1710
- [38] H. Ishida and H. Kimoto, Probability Density Function and its Higher-Order Approach for Deterministic Systems, *Progress in Transport Phenomena (Proc. 13th Int. Symp. Trans. Phenom.)*, (2002), 417-422

## 第2章 密閉容器槽内部の自然対流場の準定常性とカオス性

### 2.1 緒言

本章では、静止しており、かつ壁面での条件（境界条件）が時間的に変化しない密閉容器槽内部に形成される熱対流場について、容器に加える熱量を大きくした場合に現れる流れ場・温度場の準定常的な振る舞い（準定常性）やカオス的振る舞い（カオス性）を取り扱う。このような密閉容器槽内部の熱対流場の特徴としては、1）熱対流場の時間変動が重力や境界条件の非定常変化ではなく、熱対流場自身のメカニズムによって生み出される（自励系）こと、2）与えられた条件を満足する時間的に一定な仮想的な熱対流場（定常解）に対して、その周りの物理量の時間変動のエネルギー（変動量の二乗平均値）が時間（アンサンブル）平均された流れ場（平均流）からもたらされて、流れに沿って量的にあるレベル以上に常に維持されること、そして、3）温度差が小さい場合に生じる流れのモードから温度差が大きい場合に生じる乱流のモードへ移行する前に2次流れセル、3次流れセル[1]を伴う比較的安定な別の流れの構造が形成されること、が挙げられる。本章ではそのような密閉容器槽内部の熱対流場のうち、1）アスペクト比、奥行き共に大きい直方体内部の熱対流場、並びに、2）同軸2重円筒間内の熱対流場を取り扱う。アスペクト比が大きい場合、端面の影響は相対的に小さくなるため1）の流れ場はしばしば平行平板間の自然対流場として扱われる。

#### 2.1.1 鉛直平行平板間の自然対流場

温度勾配のある平行平板間に生ずる自然対流に関する研究は、種々の実現象のモデル化に関連して Batchelor[2]が解析的に扱って以来数多くの研究が報告されている。この自然対流場の概念図を図 2.1(a)に示しているが、なかでも鉛直平行平板間の自然対流に関しては、比較的高プラントル数の流体を対象とした場合、グラスホフ数の増大に伴ってその流れ場は領域全体を循環する1次循環流(primary flow)から複数の局所循環流(2次流れセル:secondary flow cell)を含む流れへと変化し、さらに2次流れセル間でそれらと逆方向回転の局所循環流(3次流れセル:tertiary flow cell)が明確になる流れへと変化した後、最終的に乱流化することが知られている[3][4][5][6]。

これらの現象は定性的には密度を除く物性値の一様性と場の二次元性を仮定すれば予測可能であることが知られており[7]、これらの仮定の下でグラスホフ数の変化に伴う上述の流れの変化を流れ場の安定性[8]や分岐[9][10]によって説明する試みが行われてきた。

アスペクト比の大きい容器に対しては Seki ら[3]が鉛直側壁表面における平均ヌセルト数を実験的に調べ、その結果に基づいた幾つかの実験式を提案している。また上述の2次流れセル、3次流れセルが出現する臨界レイリー数についての実験的検討も報告されている[5]。これらの実験結果に対し、高プラントル数流体に対して粘性を一定にした場合[11]や粘性の温度依存性を考慮した計算[12][13]も行われており、その結果粘性変化は先程述べた臨界レイリー数や平均熱伝達特性に対して大きな影響を与えることが指摘されている。このため上述の流れのモードの変化に関して粘性の温度依存性[14][15]やさらに Boussinesq 近似を用いない基礎方程式系[16]による安定性解析が行われている。

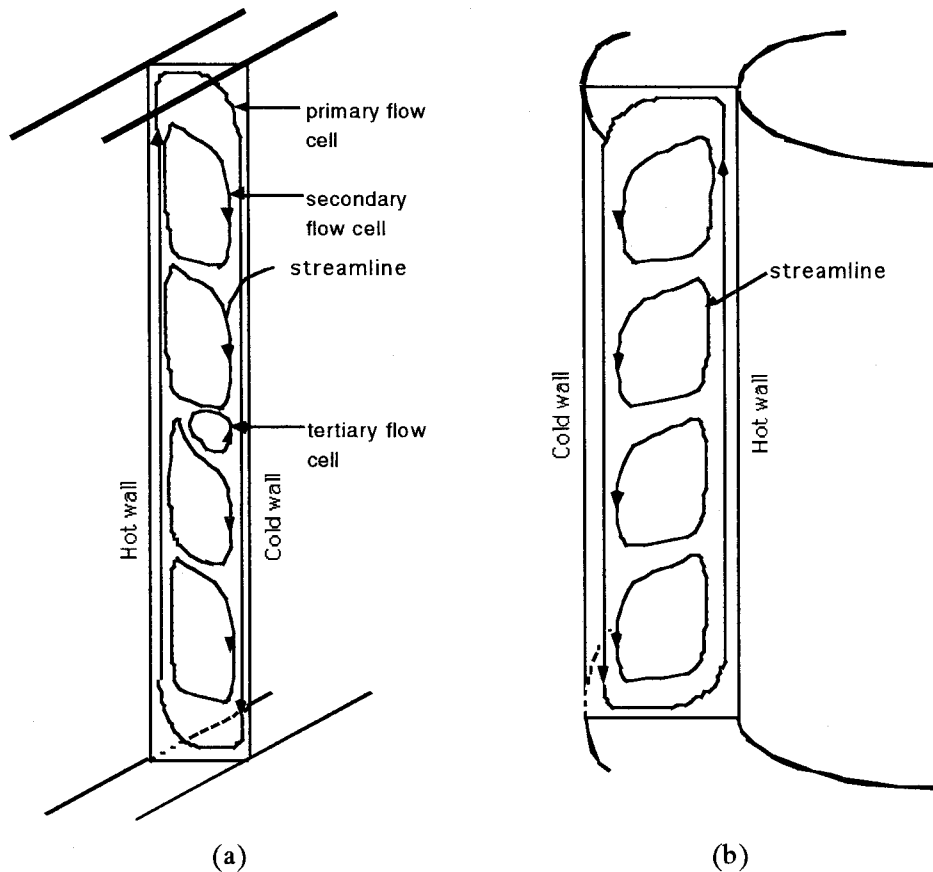


図 2.1 密閉容器層内部の自然対流場の概念図  
((a)鉛直平行平板間自然対流場,(b)同軸二重円筒間自然対流場)

また木本ら[17][18]は流体が2次流れセルの周囲を回転しながら低温、高温側壁に沿った奥行き方向に移動することで螺旋状の流跡線を描くことを実験的に明らかにしており、この現象は準定常的かつ三次元性を有することが明らかとなった。これに関しては定性的には数値解析[19]によっても確認されている。

非定常特性に関していえば Wakitani が鉛直平行平板間の自然対流場について実験的に[5]、並びに数値的に[20]に検討しており、流れ場が静的、準静的、非定常の3通



りに分類できることを明らかにしている。

### 2.1.2 同軸二重円筒間内の自然対流場

一方密閉された鉛直同軸二重円筒間内部の自然対流場は圧力容器や、原子炉とその外部シールド間の熱対流場等の物理モデルとしてこれまで数多くの研究が行われている。この流れ場の概念図を図 2.1(b)に示している。これらの多くは実用的見地から熱伝達面での壁表面平均ヌセルト数を重点的に扱っており[21][22]、系内の熱対流場を扱ったものは比較的少ない。

Fujii ら[23]は内円筒において発熱量一定とした場合について、可視化により伝熱面近傍の流れ場を4通りに分類した上で局所グラスホフ数(局所レイリー数)の変化に伴う時間平均局所ヌセルト数の変化や時間平均温度場について詳細に検討している。また熱対流場の定性的傾向についてはブシネスク近似を用いて数多くの数値計算が行われており、半径比(=外円筒半径/内円筒半径)やアスペクト比が変化した場合の流れ場の変化が論じられている[24]ほか、検査流体に水を用いた場合、最大密度線を境にして内円筒、外円筒側にそれぞれ逆回転の渦領域が発生し[25]、それぞれが鉛直方向に2次流れセルを伴って振動することが知られている[26]。しかしながら同軸二重円筒間の熱対流場の非定常特性については定性的傾向はともかく定量的に扱っているものは見あたらない。またプラントル数による影響や物性値の温度変化が非定常特性に与える影響について検討しているものも皆無である。

### 2.1.3 本章の目的

近年熱対流場の乱流よりも広い意味を持つカオス性[27][28][29]に関して数多くの報告があり、自然対流においてもその存在が確認されている[30]が、現在までのところ鉛直平板間や同軸二重円筒間の自然対流場のカオス性について検討したものはない。また上述の通り本章で扱う自然対流場に関する研究の多くは熱対流場の時間平均特性のみを扱うか、非定常性についても定性的変化を論じるものがほとんどであり、カオス性を始めとする熱対流場の準定常挙動を定量的に扱い、また流れのモード変化と結びつけて論じているものは見られない。

そこで本章ではまず鉛直平行平板間の自然対流場において作業流体に高プラントル数溶液であるグリセリン水溶液を使用し、プラントル数を固定した上で、グラスホフ数を変化させた場合に生ずる場の準定常性ならびにカオス性の変化について実験的に検討し、次に実験的に得られた特性が容器のアスペクト比や粘性の温度依存性の有無によってどのように変化するかを数値解析により比較検討を行った。

この鉛直平行平板間の流れ場は同軸二重円筒間の流れ場について内外円筒間距離を固定し、内径を無限大の極限にとった場合に相当しており、鉛直平行平板間で見られた性質が内円筒半径が有限の同軸二重円筒間内や別の温度境界条件下でどのように変化するかは興味深いところである。特に同軸二重円筒間では、実験を行う場合、

円筒型ヒータを用いることにより、複雑な制御を用いることなく内円筒加熱量一定の条件を実現しやすいこと、また鉛直平行平板間で問題となる壁面効果<sup>\*</sup>のような3次元境界条件の影響が小さく、2次元的な流れ場の特性が抽出し易いというメリットがある。そこで本章ではさらに同じ作業流体を用いて内円筒を一定発熱のヒーターで加熱した場合に、内外円筒間内に形成される自然対流場の準定常性並びにカオス性について定量的に調べ、鉛直平行平板間の自然対流場との比較検討を行った。

## 2.2 鉛直平行平板間の自然対流場の準定常性とカオス性に関する実験的検討

### 2.2.1 実験装置および方法

#### 2.2.1.1 実験装置および測定方法

実験装置の概略を図 2.2、座標軸の定義を図 2.3 に示す。試験容器は上端開放された高さ 500mm×幅 20mm×奥行き 110mm の矩形容器であり、内部に試料液として 80wt %濃度のグリセリン水溶液を満たしている。上端を開放した理由は上部からの熱電対の挿入とトラバーサによる移動を容易にするためであるが、上端の面積は小さいのでそこからの熱移動量は試験容器全体の総熱移動量に比べて小さく、断熱面と近似できる。間隔 20mm の鉛直 2 面の片方(図の左面)が加熱面であり、他方が冷却面であるが、加熱面は厚さ 1cm の黄銅製、冷却面は厚さ 3mm のパイレックスガラス製でそれぞれが高温水槽、低温水槽の一部を構成している。これらの水槽は試験容器と共に初期温度は室温に近いが、実験開始後高温側水槽においては温度制御ヒータと循環ポンプにより最終設定温度を一定に保ち、一方低温側水槽においては冷却装置によって得られた冷却水を一旦別の恒温槽内に移して温度制御ヒータで温度を制御し、これを低温側水槽との間で循環させることで最終設定温度を一定に保った。なお低温水槽と高温水槽が設定温度に達する過程はそれぞれの温度制御装置に完全に委ねた。また試験容器の両側壁(X-Z 面)は厚さ 15mm のアクリル製、下壁面は厚さ 25mm のポリアセタール製である。

試験容器内部の温度測定に際しては表面を断熱シールで巻いた直径 4mm のステンレス棒に 50mm 間隔で素線径 0.1mm の銅・コンスタンタン熱電対を 8 本取り付けて温度プループとし、これを試験容器に挿入することにより 5 秒間隔で温度場の定点観測を行った。この測定位置は  $75\text{mm} \leq Z \leq 425\text{mm}$  の範囲で  $X=10\text{mm}$ ,  $Y=60\text{mm}$  である。この温度プループの電圧データをデジタルマルチメータから GP-IB バスを介してパーソナルコンピュータに送信し、記録ならびにデータ処理を行った。

<sup>\*</sup> 図 2.3 に示すとおり平行平板に沿う奥行き方向(Y 方向)に存在する二枚の壁面により Y 方向の速度成分  $v=0$  の解は存在しなくなる。これにより  $Ra$  がいくら小さくともこの密閉容器内の流れ場は  $v \neq 0$  の意味で常に 3 次元である。

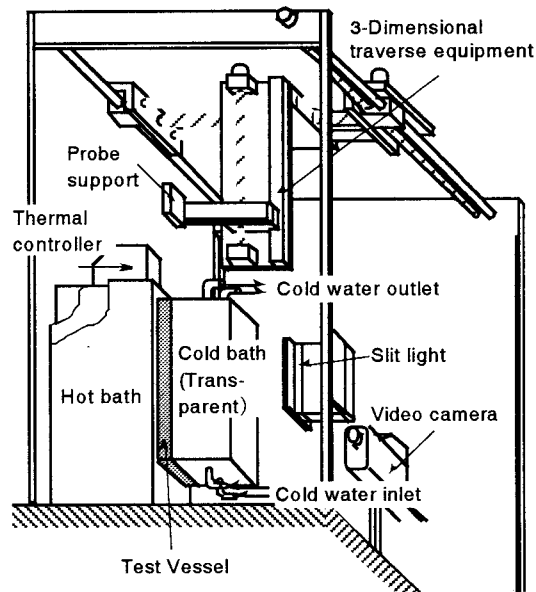


図 2.2 実験装置図

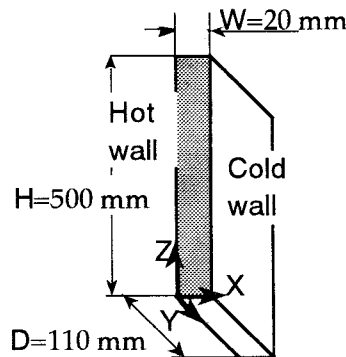


図 2.3 試験容器並びに座標定義

また試料液中にアルミ粉末を混入させ、ハロゲンランプー光学スリット系を用いて透明な低温側水槽の外部より  $Y=55\text{mm}$  の平面に照射し、容器内自然対流場の  $X$ - $Z$  面における流れ場の可視化を行った。この可視化断面を  $Y$  軸方向よりビデオ撮影して映像化し、これをパーソナルコンピュータに取り込んだ。

### 2.2.1.2 実験条件

本実験では高温側水槽の温度と低温側水槽の温度の平均値(約  $30^\circ\text{C}$ )を物性値算出の際の代表温度としており、表 2.1 に示すとおりプラントル数( $Pr$ )を一定とし、グラスホフ数( $Gr$ )を 6 通りに変化させた。ここでグラスホフ数は

$$Gr = \frac{g\beta\Theta L^3}{\nu^2}, \quad \Theta = T_h - T_c \quad (2.1)$$

$g$  : 重力加速度 [ $\text{m/s}^2$ ]       $L$  : 代表長さ (= 高温壁と低温壁の距離 =  $20[\text{mm}]$ )

表 2.1 実験条件

|                     |       |      |      |      |      |      |
|---------------------|-------|------|------|------|------|------|
| $T_h$               | 35.6  | 40.7 | 45.5 | 48.0 | 50.9 | 56.4 |
| $T_c$               | 24.5  | 19.7 | 14.6 | 12.8 | 9.6  | 4.6  |
| $Pr \times 10^{-2}$ | 2.95  | 2.95 | 2.95 | 2.95 | 2.95 | 2.95 |
| $Gr \times 10^{-3}$ | 0.370 | 1.11 | 1.76 | 2.04 | 2.32 | 3.06 |

$T_h$  : 高温側水槽の温度[°C]     $T_c$  : 低温側水槽の温度[°C]

$\beta$  : 体膨張係数                       $\nu$  : 動粘性係数

である．なおグリセリン水溶液の物性値は文献[31][32]によった．(2.1)式による代表温度差の取り方では試験水槽側の高温側・低温側内表面温度差の意味での厳密な代表温度差より大きくなるが，本節で用いている冷却，加熱面を構成するそれぞれ黄銅，ガラスによる熱抵抗は試験容器内表面での熱抵抗に比べてかなり小さく，伝熱面間の温度差と代表温度差の割合は本節で用いたグラスホフ数の範囲内ではほぼ一定で約 90 %と見積もられるため，温度差の代表値として採用して問題は生じない．

## 2.2.2 実験結果

### 2.2.2.1 準定常性と 2 次流れセルの発生

実験を開始してから試験容器内部のそれぞれの温度測定点で示す温度の時間変化を  $Gr=3.06 \times 10^3$  の場合について図 2.4 に示す．なお実次元温度  $T$  及び実時間  $t^*$  は次式により無次元化している．

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad t = a \frac{t^*}{L^2} \quad (2.2)$$

$a$  : 試料液の熱拡散係数

図 2.4 上では少々見にくいですが， $Z/L=13.75$  近辺の温度データには十分時間が経過した後も周期的な変動が見られ完全な定常状態には達していない．

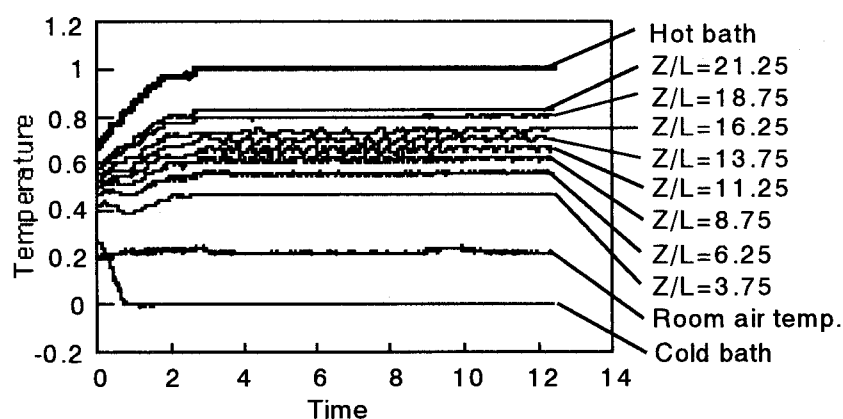


図 2.4 測定点における温度変化 ( $Gr=3.06 \times 10^3$ )

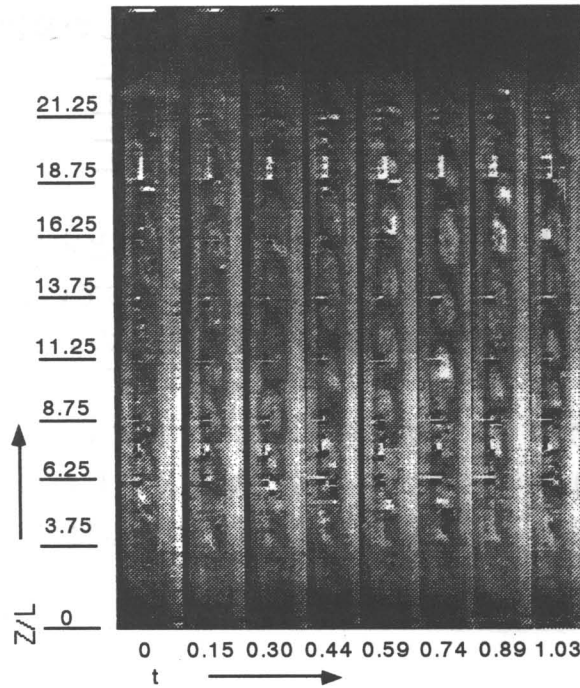


図 2.5 流れの可視化画像とその時間変化( $Y=55\text{mm}$ ,  $Gr=2.32 \times 10^3$ )

このような(非)周期的状態での  $Y=55\text{mm}$  における  $X$ - $Z$  平面上での可視化画像例を  $Gr=2.32 \times 10^3$  の場合について図 2.5 に示している。

図 2.5 は (2.2) 式で示される無次元時間間隔約 0.15 (総時間約 1.0) の可視化画像を並べたものであるが、各可視化画像は流れの様子を明確にするため 75 秒間の 50 枚の画像を重ね合わせる画像処理を施している。この図に示すように特に  $Z$  の大きいところで縦方向に並んだ渦列 (2 次流れセル) が時間の進行と共に上方に移動している。2 次流れセルは時間と共に移動や合体を繰り返すが 2 次流れセルの個数はほとんど一定である。このような非定常性挙動が現れる理由であるが、Vest らの Boussinesq 近似に基づく安定性解析によると、たとえアスペクト比が無限大の場合でも大循環流に加わる微少擾乱としての 2 次流れセルはそれが現れた段階で常に不安定であることが示されており [33]、必ずしも本実験で使用した有限高さの密閉容器の影響ではなく熱対流場に本質的な不安定に基づくものであると考えられる。

このような状態は Kimoto [18] にも示されており、準定常状態と名付けているが、本実験で扱った準定常状態における温度データは次式を満たしている。

$$|\theta_{\max} - \theta_{\min}| < 0.063 \quad (2.3)$$

ここで  $\theta_{\max}$ ,  $\theta_{\min}$  はそれぞれ準定常状態と想定される時間範囲における無次元温度の最大値、最小値である。以下では熱対流場が準定常状態となる性質のことを「準定常性」と呼ぶ。本章に限らず本論文では“準定常状態”を時間的には非定常状態であるにもかかわらず、その統計的状态が定常、すなわち時間的な平均値や分散、乱流強度

表 2.2 2 次流れセルの存在する  $Z/L$  の範囲

| $Gr \times 10^{-3}$  | 2.04 | 2.32 | 3.06 |
|----------------------|------|------|------|
| Lower limit( $Z/L$ ) | 6.27 | 4.25 | 3.75 |
| Upper limit( $Z/L$ ) | 19.3 | 19.6 | 23.3 |

のような(短)時間 (アンサンブル) 平均量が定常な状態と定義しており, 1.2.2 節で述べたように本論文ではそのような状態の存在を仮定している. 準定常状態においてはその性質から比較的短い時間帯の時間平均値からそのような統計量を求めることができる.

準定常状態におけるグラスホフ数の変化に伴う 2 次流れセルの発生範囲を表 2.2 に示す. なお  $Gr=370, 1.11 \times 10^3$  及び  $1.76 \times 10^3$  では 2 次流れセルが発生せず, 試験水槽全域を循環する 1 次循環流のみが現れるので表 2.2 では記載を省略した.

### 2.2.2.2 周波数分析

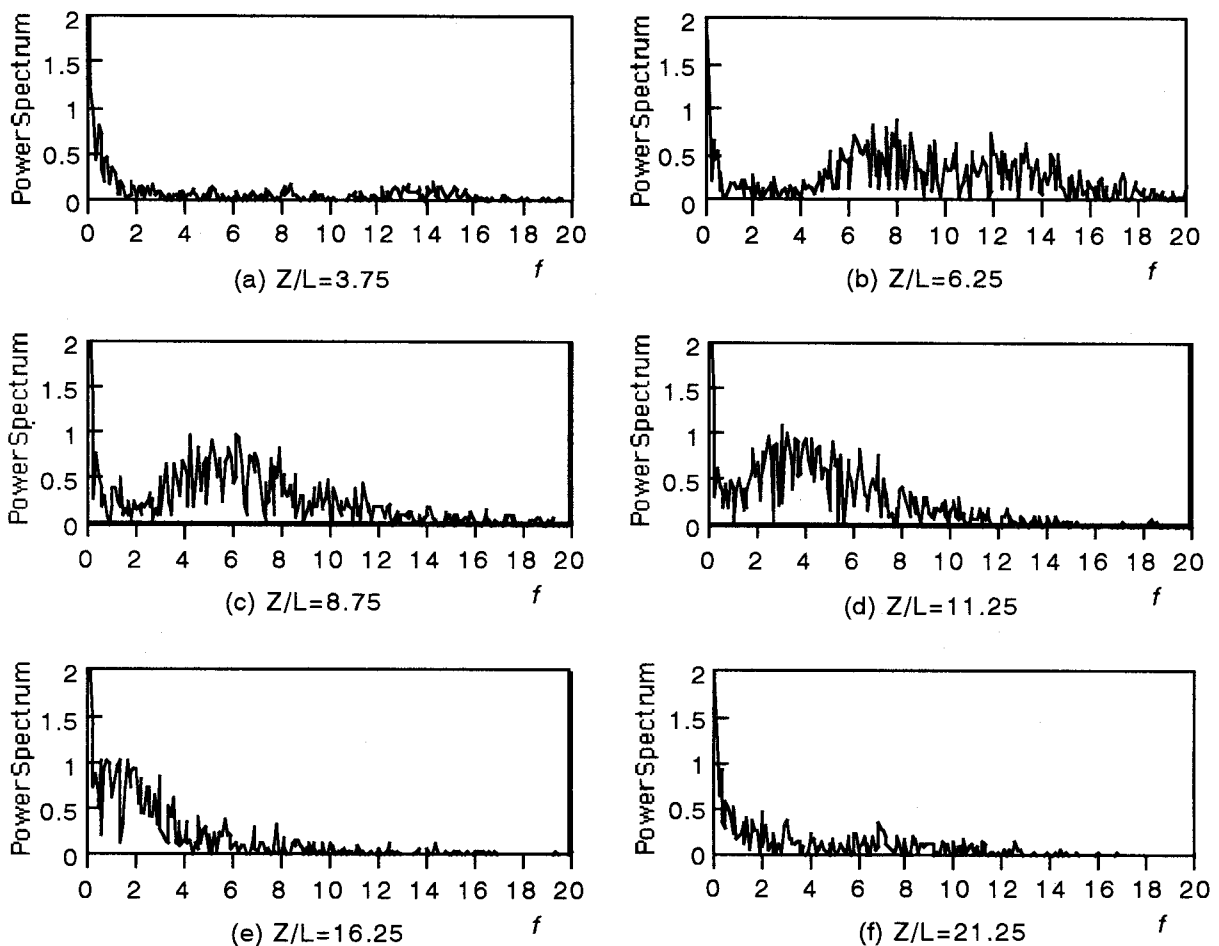


図 2.6 局所温度のパワースペクトルにおける高さ方向変化 ( $Gr=3.06 \times 10^3$ )

## 第2章 密閉容器層内部の自然対流場の準定常性とカオス性

準定常状態における温度変動の FFT による周波数分析結果の例を  $Gr=3.06 \times 10^3$  の場合について図 2.6 に示す。

本節では準定常状態の温度時系列データの解析の際は、(2.2)式の無次元化に加え、次式で示される処理を施した。

$$T_{lp}(t) = (-T(t-2\Delta t) + 4T(t-\Delta t) + 10T(t) + 4T(t+\Delta t) - T(t+2\Delta t)) / 16 \quad (2.4)$$

$T_{lp}(t)$ : 時刻  $t$  における処理後の温度      $T(t)$ : 時刻  $t$  における処理前の温度

$\Delta t$ : データサンプリング間隔 ( $=5[s]=1.24 \times 10^{-3}[-]$ )

この処理を施したデータから求まるパワースペクトルは元のデータから求まるパワースペクトルに以下の重み  $w(f)$  ( $f$ : 周波数)

$$w(f) = (1 + \cos(2\pi f\Delta t))(3 - \cos(2\pi f\Delta t)) / 4 \quad (2.5)$$

を乗じたものに等しい。この  $w(f)$  は  $f$  が 0 からナイキスト周波数( $=1/(2\Delta t)$ )まで増大するにつれて、1 から 0 まで単調減少する。したがってこれは一種の Low Pass Filter とみなすことができ、この Low Pass Filtering を施すことで実験データを解析する際にノイズの高周波数成分による影響を避けることができる。なお図 2.6 で示されている周波数領域( $0 < f < 20$ )における重み  $w(f)$  は 0.99996 以上であり、式(2.4)の操作によるパワースペクトルに対する影響は無視しうる。

図 2.6 に示すように  $Z/L$  が 3.75 及び 21.25 の場合を除いてノイズとは明らかに異なる比較的エネルギーレベルの高い周波数帯域が存在しており、これは温度場の準定常性を表している。これらの周波数帯域においては、大まかにみるとパワースペクトルは無次元周波数に対して極大値を持つ。そこで上記の周波数帯域におけるパワースペクトルのデータを抽出し、最小自乗法を用いて近似曲線

$$P_f = a f^b \exp(-cf) \quad (2.6)$$

$P_f$ : パワースペクトル,      $f$ : 無次元周波数

$a, b, c$ : 定数

を求め、 $P_f$  が極大値を示す周波数  $f (=b/c)$  をパワースペクトルの極大値を示す周波数 ( $F_{peak}$ ) と定義した。なお、(2.6)式の近似曲線は上記の周波数帯域における  $P_f$  の性質を保有する関数の中から試行錯誤により選定したが、本実験に対して得られた  $F_{peak}$  の算出結果を表 2.3 に示す。なお表 2.3 中で“—”と表示している場所では  $F_{peak}$  が検出されなかった。また表 2.3 中にないグラスホフ数については全ての  $Z/L$  の場合に対して  $F_{peak}$  は検出されなかったので記載を省略している。この表 2.3 の結果と表 2.2 を比較すると  $F_{peak}$  が存在する領域は 2 次流れセルの存在する領域によく対応している。また表 2.3 によると  $F_{peak}$  は  $Z$  の増加と共に減少しており、高温部で低く、低温部で高くなる傾向、すなわち代表温度を局所平均温度に取った場合の局所的な  $Ra$  の増加に伴って  $F_{peak}$  が減少する傾向が見られる。これは温度上昇による密度と粘性の低下に起因する

表 2.3 種々の  $Z/L$  ,  $Gr$  に対する  $F_{peak}$  の変化

| $Z/L$<br>[-] | $Gr \times 10^{-3}$ |      |      |
|--------------|---------------------|------|------|
|              | 2.04                | 2.32 | 3.06 |
| 3.75         | -                   | -    | -    |
| 6.25         | -                   | 13   | 8.3  |
| 8.75         | 8.7                 | 9.0  | 5.3  |
| 11.25        | 4.6                 | 4.8  | 3.4  |
| 13.75        | 0.34                | 2.0  | 2.3  |
| 16.25        | 0.35                | 0.22 | 0.89 |
| 18.75        | -                   | -    | -    |
| 21.25        | -                   | -    | -    |

と思われるが、そのメカニズムは未だ明らかではない。

### 2.2.2.3 自己相関係数

準定常状態における測定温度の時系列データに Low Pass Filtering を施したのち自己相関係数(Auto-Correlation Coefficient, 以下 ACC と略記)を求めた。2 次流れセルの存在する領域と存在しない領域における ACC の例として  $Z/L=11.25$  の位置での  $Gr=370$  および  $Gr=3.06 \times 10^3$  における計算結果を図 2.7 に示す。図 2.7 によると  $Gr=370$  の場合は無次元時間が 1.0 のオーダーでも自己相関係数は大きいですが、 $Gr$  が  $3.06 \times 10^3$  では自己相関係数は比較的速やかに 0 に漸近している。

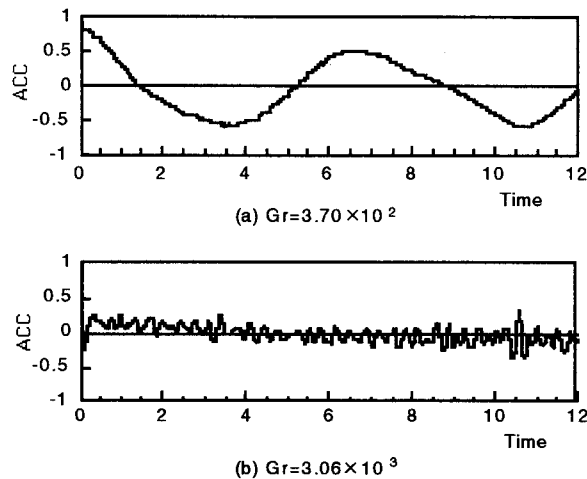


図 2.7 自己相関係数( $Z/L=11.25$ )

本実験範囲の全ての  $Gr, Z/L$  に対して ACC を求め、無次元時間が 0 近傍で自己相関係数が  $\exp(-t/\tau)$  ( $t$ : 無次元時間,  $\tau$ : 自己相関係数が  $1/e$  となる時間スケール)で表されると仮定し、最小自乗法により  $\tau$  を求めた結果を表 2.4 に示す。この表 2.4 を表 2.2 と比較すると、 $Gr=370$  の場合を除いて  $\tau$  が小さい領域 ( $\tau < 4.5 \times 10^{-2}$  程度)と 2 次流れセルの存在範囲はほぼ対応している。なお  $Gr=370$  において  $\tau$  が小さいのは、この条件下では全体として自己相関係数が大きいにも関わらず、 $\tau=0$  近傍で自己相関係数の減衰率が大きいため、これは代表温度差が小さく無次元化した場合のノイズレ



表 2.4 無次元時間スケール  $\tau$ 

| Z/L<br>[-] | Gr $\times 10^3$      |                       |                       |                       |                       |                       |
|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|            | 0.37                  | 1.11                  | 1.76                  | 2.04                  | 2.32                  | 3.06                  |
| 3.75       | $3.84 \times 10^{-2}$ | $8.53 \times 10^{-2}$ | $9.52 \times 10^{-2}$ | $4.17 \times 10^{-2}$ | $3.17 \times 10^{-2}$ | $2.99 \times 10^{-2}$ |
| 6.25       | 4.97                  | 10.3                  | 16.8                  | 3.57                  | 5.31                  | 2.53                  |
| 8.75       | 6.08                  | 7.73                  | 7.25                  | 1.53                  | 2.98                  | 2.80                  |
| 11.25      | 3.59                  | 8.67                  | 10.1                  | 2.52                  | 2.49                  | 2.99                  |
| 13.75      | 7.44                  | 7.04                  | 4.45                  | 4.50                  | 3.58                  | 2.42                  |
| 16.25      | 5.28                  | 6.36                  | 8.70                  | 3.67                  | 3.08                  | 2.63                  |
| 18.75      | 3.42                  | 9.30                  | 14.9                  | 1.82                  | 4.22                  | 3.12                  |
| 21.25      | 3.49                  | 9.57                  | 18.3                  | 5.82                  | 7.89                  | 3.80                  |

ベルが相対的に大きいことの影響であると考えられる。

#### 2.2.2.4 最大リアプノフ指数

初期値に対する鋭敏な依存性[34] (SDIC : Sensitive Dependence on Initial Conditions)は対象としている力学系がカオスであるための一つの条件となっているが,これを判断する指標である最大リアプノフ指数を準定常状態における時系列データ(データ数10000~12000)から算出した。この計算には Wolf ら[35]の方法を採用した。

Wolf らの計算法では計算の際に必要なパラメータとして 1)最大探索スケール 2)最小探索スケール 3)埋め込み次元 4)遅れ時間 5)データの置き換えにかかる発展時間の5つの値がある。まず 1)2)に関してであるが,これらは Wolf ら[35]の方法を用いて $\lambda$ を計算する際に誤差の影響を避けるために設定するスケールであるので,妥当な値として 1)については熱電対の誤差(実次元で  $0.1^\circ\text{C}$ )を無次元化した値を用い, 2)はこの値の3倍を使用した。3)4)5)については, Wolf ら[35]はこれらの値をある範囲で変化させて最適なパラメータの周辺で最大リアプノフ指数の値が変化しない(Stationarity)ことを確認することを薦めている。

そこでまず本論文においてはこれらを変化させて算出される最大リアプノフ指数の値のばらつきを調べた。Gr= $3.06 \times 10^3$  の場合について図 2.8(a)(b)(c)に(a)埋め込み次元(b)遅れ時間(c)発展時間を変化させた場合の最大リアプノフ指数の変化を示す。なお遅れ時間を変化させる際は,各時系列データに対して位相空間上の各座標値の間の相関の程度を揃えるために自己相関係数が  $1/e$  となるスケール  $\tau$  (表 2.4)を基準にとり[35],各時系列データについて  $\tau$  に対する倍率をパラメータに取った。この図 2.8(a)(b)(c)に示したそれぞれの計算に用いている2組の固定パラメータについては埋め込み次元として5,遅れ時間として $\tau$ の50%,発展時間が15ステップの3要素(以下この選択された3つの値を基本パラメータと略記する)のうち適当な組み合わせを用いている。この結果によると基本パラメータの周辺で最大リアプノフ指数の値は安定しているといえる。

以上の結果から最大リアプノフ指数の値として基本パラメータの周辺の値の平均

値を採用し、その平均値の周りの変動を全て誤差に計上してt分布(平均・分散に推定

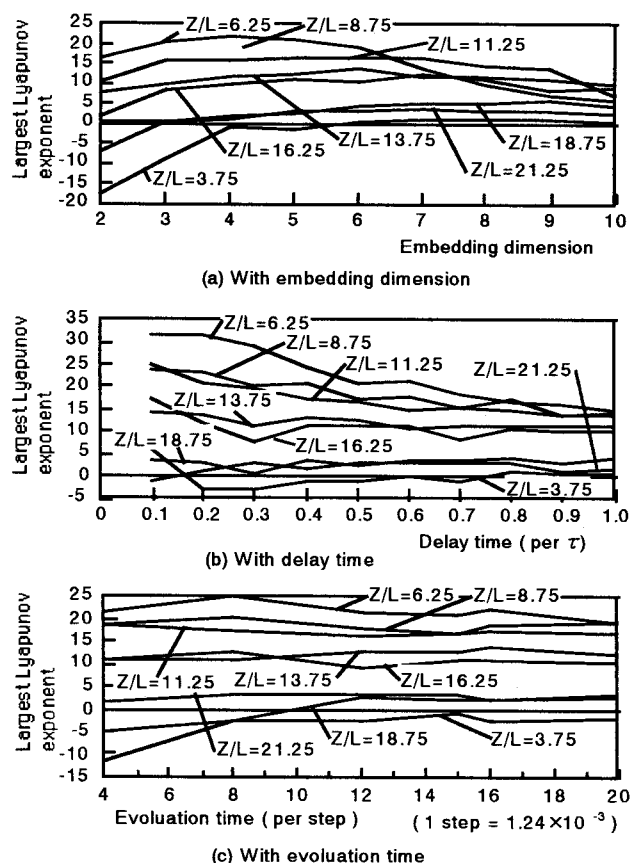


図 2.8 最大リアプノフ指数の種々のパラメータに対する'Stationarity'の確認

値を用いるときに従う確率密度分布)の値から最大リアプノフ指数が確率 50 パーセントで変動する範囲を計算し、本節ではこれを誤差範囲とした。

本節の各実験条件(グラスホフ数)・高さ( $Z/L$ )における最大リアプノフ指数とその誤差範囲を表 2.5 に示す。表 2.5 によると  $Gr=2.04 \times 10^3, L/Z=6.25$  の場合を除いて確率 50 %の変動を考慮しても最大リアプノフ指数の正負すなわちカオス性の有無の判断に影響はなく、また最大リアプノフ指数が正の値に対しては位置とグラスホフ数の変化に対する値の変化の傾向についての議論が可能である。また表 2.5 に示す最大リアプノフ指数が確率 95 パーセントで変動する範囲は表 2.5 に示す誤差範囲の約 3.33 倍に相当するが、これほど大きい値の変動を考慮しても、アスタリスクで示される数点を除いてカオス性の有無の判断について変更を要しない。

ここで表 2.5 と表 2.1 とを比較すると、最大リアプノフ指数が正すなわちカオス的な領域が 2 次流れセルの発生している領域に含まれている。すなわち  $Gr, Z/L$  平面上でカオス的な領域の周辺に 2 次流れセルが存在していながらカオス的でない中間的な領域が存在している。ちなみに最大リアプノフ指数を計算する際に遅れ時間を全時系列データに対して一定にとるとこのような中間領域は得られない。これは時系列デ

## 第2章 密閉容器層内部の自然対流場の準定常性とカオス性

表 2.5 最大リアプノフ指数  $\lambda$  (上段)並びに誤差範囲(下段)

| Z/L   | $Gr \times 10^3$      |                       |                       |                       |                        |                      |
|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|----------------------|
|       | 0.37                  | 1.11                  | 1.76                  | 2.04                  | 2.32                   | 3.06                 |
| 3.75  | -5.43<br>$\pm 0.436$  | -7.70<br>$\pm 1.47$   | -4.62<br>$\pm 0.756$  | -4.97<br>$\pm 0.311$  | -3.17<br>$\pm 1.00^*$  | -1.17<br>$\pm 0.284$ |
| 6.25  | -4.06<br>$\pm 0.376$  | -11.0<br>$\pm 1.56$   | -4.42<br>$\pm 0.848$  | -2.10<br>$\pm 0.278$  | 0.105<br>$\pm 0.128^*$ | 21.2<br>$\pm 0.407$  |
| 8.75  | -14.8<br>$\pm 2.61$   | -6.96<br>$\pm 1.55$   | -3.22<br>$\pm 0.348$  | -1.19<br>$\pm 0.237$  | 11.6<br>$\pm 0.280$    | 18.8<br>$\pm 0.295$  |
| 11.25 | -8.21<br>$\pm 1.56$   | -4.53<br>$\pm 0.592$  | -21.3<br>$\pm 6.96^*$ | -1.27<br>$\pm 0.232$  | 13.8<br>$\pm 0.146$    | 16.5<br>$\pm 0.195$  |
| 13.75 | -16.1<br>$\pm 3.77$   | -11.4<br>$\pm 1.21$   | -6.59<br>$\pm 0.505$  | -0.502<br>$\pm 0.158$ | 8.09<br>$\pm 0.137$    | 12.5<br>$\pm 0.264$  |
| 16.25 | -10.3<br>$\pm 1.22$   | -4.26<br>$\pm 1.73^*$ | -42.4<br>$\pm 8.10$   | -2.33<br>$\pm 0.285$  | 6.44<br>$\pm 0.168$    | 10.5<br>$\pm 0.181$  |
| 18.75 | -10.0<br>$\pm 3.40^*$ | -3.53<br>$\pm 0.755$  | -2.57<br>$\pm 0.613$  | -4.49<br>$\pm 0.647$  | -4.21<br>$\pm 0.390$   | 2.94<br>$\pm 0.243$  |
| 21.25 | -5.90<br>$\pm 0.310$  | -12.4<br>$\pm 3.33$   | -8.94<br>$\pm 3.51^*$ | -2.01<br>$\pm 0.232$  | -2.66<br>$\pm 0.372$   | 2.68<br>$\pm 0.203$  |

\* 確率 95%の範囲内での誤差が大きくカオス性の存在を判別が不可能な場合

表 2.6 最大リアプノフ指数(上段 :ローパスフィルタをかけた場合,  
下段:ローパスフィルタをかけなかった場合)

| Z/L   | $Gr \times 10^3$ |                 |                  |                    |                 |                 |
|-------|------------------|-----------------|------------------|--------------------|-----------------|-----------------|
|       | 0.37             | 1.11            | 1.76             | 2.04               | 2.32            | 3.06            |
| 3.75  | -3.07<br>(1.51)  | -4.40<br>(14.6) | -4.36<br>(2.56)  | -4.40<br>(0.389)   | -6.18<br>(4.94) | -1.26<br>(3.14) |
| 6.25  | -4.78<br>(3.91)  | -10.9<br>(7.00) | -3.24<br>(2.96)  | -1.06<br>(0.160)   | 0.854<br>(4.42) | 20.9<br>(18.3)  |
| 8.75  | -36.6<br>(-1.78) | -3.77<br>(6.65) | -4.23<br>(22.5)  | -0.522<br>(-0.138) | 12.4<br>(14.4)  | 17.1<br>(18.4)  |
| 11.25 | -6.90<br>(1.24)  | -2.39<br>(5.49) | -60.3<br>(3.36)  | -1.45<br>(-1.25)   | 14.4<br>(19.0)  | 16.7<br>(19.5)  |
| 13.75 | -14.5<br>(-1.40) | -14.5<br>(4.65) | -8.01<br>(3.32)  | -0.352<br>(-0.502) | 7.84<br>(8.94)  | 12.7<br>(14.8)  |
| 16.25 | -8.79<br>(6.42)  | -19.5<br>(8.83) | -28.2<br>(4.50)  | -1.15<br>(0.0114)  | 6.83<br>(10.4)  | 11.0<br>(13.0)  |
| 18.75 | -4.49<br>(3.22)  | -4.38<br>(4.83) | -0.359<br>(14.2) | -4.98<br>(-1.46)   | -3.71<br>(1.73) | 2.39<br>(8.74)  |
| 21.25 | -5.77<br>(4.16)  | -27.0<br>(13.9) | -6.01<br>(3.30)  | -0.846<br>(-1.94)  | -2.36<br>(3.33) | 3.28<br>(4.36)  |

一タによっては位相空間上の座標軸の値の間の相関が過度に高かったり, 不必要に遅れ時間が大きく位相空間上の点数が少なくなることにより計算精度が低下したものと考えられる。

さらに最大リアプノフ指数の確率 50 パーセントの変動のみを考慮した場合, 表 2.5

よりカオス性が存在する領域では最大リアプノフ指数は  $Gr$  が大きいほど大きく、高さが高いほど小さくなる傾向を読みとることができる。

この最大リアプノフ指数の算出にあたって Low Pass Filter の影響を調べるために、Low Pass Filtering を施したものと、施さないものについて最大リアプノフ指数を算出した。パラメータとして埋め込み次元を 5、遅れ時間を  $\tau$  (式(2.4)を施したもののについて)の 50 %、発展時間を 15step に選んだ場合の結果を表 2.6 に示している。表 2.6 より Low Pass Filtering を施さないものについては、定常な温度時系列変化を示す  $Gr$  が 370 の場合に対しても最大リアプノフ指数は正となっており、物理現象を反映していないといえる。ここで表 2.5 の誤差範囲を考慮に入れると、Low Pass Filtering を施した場合とそうでない場合の値の差は明らかに有意であり、実験データから最大リアプノフ指数を計算する場合は Low Pass Filtering が非常に有効であると言える。この結果は Wolf ら[35]の指摘と合致している。

## 2.3 鉛直平行平板間の自然対流場の準定常性とカオス性に関する数値計算

### 2.3.1 計算方法

#### 2.3.1.1 計算モデル

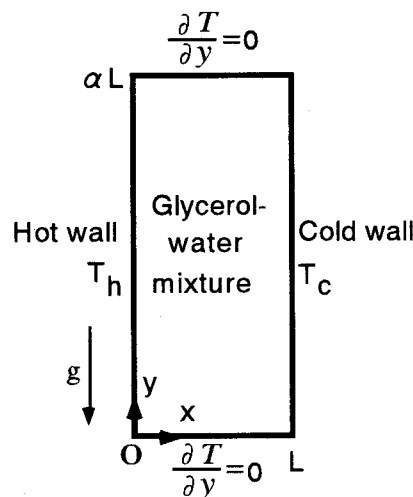


図 2.9 計算モデル

前節において得られた非定常特性がいかなる要因によるものであるか検討するため、本節では前節の条件に対応する数値計算を行う。用いた計算モデル及び座標定義を図 2.9 に示している。この容器内部の熱対流場は図に垂直な方向に一様であり、2次元であると仮定する。座標原点を図に示すとおり容器の下左隅にとり、Y 軸は左側壁に沿って鉛直上向きに、そして X 軸は容器の下面に沿って Y 軸に対して鉛直な方向にとった。図の容器の幅は  $L$  であり、高さは  $L \times$  アスペクト比  $\alpha$  である。図の左

側面は高温壁で温度  $T_h$  一定，右側面は低温壁で温度  $T_c(<T_h)$  一定とし，上下面を断熱とする．また壁面での速度は 0 とする．初期条件としては温度  $T=T_c$  で一様な静止状態をとった．

### 2.3.1.2 支配方程式

本節では厳密な基礎方程式系に対して浮力項のみの密度変化を考慮する Boussinesq 近似を適用し，基本的にはその他の物性値は一定とした．ただし後にカオス特性の定量的変化を考察するため一部粘性の温度依存性を考慮した計算を行っており，以下ではこの扱いを包括する定式化について説明する．ここで基礎方程式に対し，粘性係数以外の流体の物性値は一定とし，粘性係数は温度のみの関数であると仮定した上で，代表長さ  $L$ ，代表温度  $T_m=(T_h+T_c)/2$  における熱拡散係数  $a_m$  並びに代表温度差  $\Theta(=T_h-T_c)$  を用いて無次元化すると以下ようになる．

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \nabla^2 \varphi = -\zeta, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = & \text{Pr Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \text{Pr} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. - 4 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta, \quad (2.9)$$

ここで  $\varphi, \zeta, \theta(=(T-T_c)/\Theta)$  はそれぞれ無次元流れ関数，無次元渦度，無次元温度である．また  $\mu$  は無次元粘性係数であり，代表温度での粘性係数  $\mu_m^*$  を用いて無次元化されている． $\text{Ra}, \text{Pr}$  はそれぞれ代表長さ  $L$ ，代表温度差  $\Theta$  に基づくレイリー数，プラントル数である．本節では前節と同じく試験流体としてグリセリン水溶液を扱うが， $\mu$  の温度変化については Chen, Pearlstein[37] の提案する 4 つのパラメータを有する相関式

$$\mu(T) = De^{E/T^3 + FT + G/T} \quad (2.10)$$

を用いて計算を行った ( $T$  は実次元の温度)．ただし前述の通り本節では基本的には粘性係数が一定の場合を取り扱っており (この場合は  $\mu=1$  一定)，(2.8) 式の右辺第 3 項は 0 となる．

これらの支配方程式は有限差分法 (FDM: Finite Difference Method) を用いて数値的に解いた．離散化は高温壁，低温壁近傍で定義点を多くした不等間隔メッシュ上で対流項について 2 次精度 QUICK，拡散項について 2 次精度中心差分を用い，渦度の生成項のうち第 1 項，第 2 項には 2 次精度風上差分，その他の項は 2 次精度の離散化式を用いて離散化した．流体の支配方程式系を解くアルゴリズムには上記の基礎式で示し

ているとおり渦度-流れ関数法を使用した．また本計算ではプラントル数が高い ( $Pr=295$ ;後述)ことを考慮して，時間項の離散化には計算の安定性を確保するため後退差分（完全陰解法）を用い，収束を早めるためにマルチグリッド法(W サイクル，一部 V サイクル)[38]を適用した．

### 2.3.1.3 平均ヌセルト数

本数値解析では低温側，高温側壁表面平均ヌセルト数( $Nu$ )が一致するまで時間発展させ，それ以降を準定常状態と定義した．ここで  $Nu$  は高温側，低温側両側壁表面上での局所ヌセルト数を高さ方向に積分し，高さ $\alpha L$ (無次元高さ $\alpha$ )で割ったものとして定義している．また時間-壁表面平均ヌセルト数( $\overline{Nu}$ )は準定常状態において十分長い時間間隔で  $Nu$  を時間積分し，その時間間隔で割ったものとして定義する．

## 2.3.2 結果及び考察

### 2.3.2.1 計算手法の評価

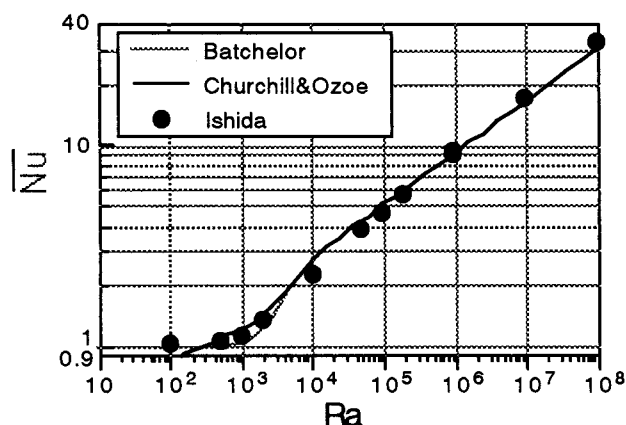


図 2.10 時間-壁表面平均ヌセルト数( $\alpha=1$ ,  $Pr=0.71$  and  $\mu=1$ )

計算による熱対流場の非定常特性を論ずる前に，本計算手法を評価するためのモデル計算を行った．まず始めに  $Pr$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  をそれぞれ 0.71, 1.0, 1.0 に固定し，レイリー数を変化させた場合の準定常状態における  $\overline{Nu}$  の計算を行い，実験結果と比較した．使用した計算格子は  $80 \times 80$  である．その結果を図 2.10 に黒丸で示しているが，図に示されているとおり本計算手法による計算結果は Batchelor[2]や Churchill, Ozoe[6]の提案している，実験結果に基づく相関式から求まる値とよく一致している\*．

次にアスペクト比 $\alpha=10$ の密閉容器に対しても同様に  $\overline{Nu}$  の計算を行った． $Pr$ と $\mu$ はそれぞれ 295 と 1.0 に固定した．用いた計算格子は  $80 \times 80$  である．その結果を Seki[3]

\* 図 2.10 において横軸は  $Ra(=PrGr)$  にとっているが，これは一般に Elder[4]のスケール解析により平均ヌセルト数が  $Pr$  に関わらず  $Ra$  の  $1/4$  乗に比例することが知られているからである．以下では  $Pr$  に関わらず  $Ra$  が同じであれば同じ特性を持つと考えられる量に関しては変数に  $Ra$  を使用する．

ら並びに Churchill, Ozoe[6]によって提案された相関式と共に図2.11に黒丸で示している．先程の場合と同様相関式から求まる値と計算値は非常によく一致している．

上の  $Ra=10^6$  の場合について  $120 \times 120$  の計算格子でも計算を試みた結果，両者は定性的にも定量的にも非常によく一致している． $\overline{Nu}$ における両者の相違は 0.01%であり，これは準定常状態における  $Nu$  の振動振幅の 2%以内に収まっている．

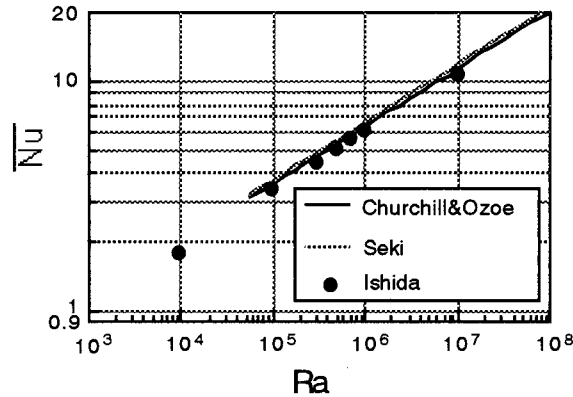


図 2.11 時間-壁表面平均ヌセルト数 ( $\alpha=10$ ,  $Pr=295$  and  $\mu=1$ )

以上の結果から上述の  $80 \times 80$  の計算格子を用いた場合， $\mu=1$ ,  $Ra < 10^7$  の条件に対して本計算手法は目的としている熱対流場の非定常特性を解析するに十分な精度を有すると判断し，この計算格子を以下の数値計算に使用した．粘性の温度依存性を考慮した数値計算に際しては，壁面近傍で温度境界層の無次元厚さスケール  $\delta$  に見合った空間分解能を持つメッシュを用意する必要があるが，その見積もりに Elder のスケール解析[4]の途中経過からも明らかのように  $\delta$  が  $Nu$  に逆比例するを利用する．上述の  $80 \times 80$  のメッシュを用いて  $\mu=1$  の場合と同じ計算精度を維持しようとする場合，Seki らの相関式[3]を参照すると上の議論より計算可能な  $Ra$  の範囲は  $10^7 \mu_h^{0.8} \sim 10^7 \mu_h$  以下と見積もられる．ここで  $\mu_h$  は高温壁表面での無次元粘性係数である．

### 2.3.2.2 アスペクト比 $\alpha$ が 5 の場合

$\alpha=5$ ,  $Pr=295$  の条件下で  $Ra$  を  $10^5$  から  $10^7$  の範囲内で変化させた場合の熱対流場の変化を粘性係数は一定として計算をおこなった．これらの場合では  $t > 0.5 \sim 1.0$  で準定常状態に達するが，準定常状態における流れ場の例として  $t=6.0$  における流線を図 2.12 に示している．この図によると  $Ra$  が増加すると容器の中央に水平方向に並ぶ双子渦が観察されるようになる．しかしながら容器のアスペクト比  $\alpha=5$  の場合では  $Ra < 10^7$  の範囲で前節で述べた縦方向に並ぶ 2 次流れセルは出現しない．

図 2.13 に  $Pr$  に対する 2 次流れセルが出現する臨界グラスホフ数  $Gr_c$  の変化を示している．図中の細い実線は  $\alpha=15$  の場合に対して Jin, Chen が提案した相関式[11]を示しているが，この式は Wakitani[5]の実験結果とよく一致している．この図上に太い実線で  $\alpha=10$  の場合の Wakitani の実験結果も併せて示しているが， $\alpha=5$  における  $Gr_c$  を

双子渦の出現する  $Gr$  の下限と定義すると  $Gr_c$  は  $6.8 \times 10^2 \sim 1.0 \times 10^3$  となり, これは  $Pr=295$  において 2 本の実線から外挿される値とよく一致している.

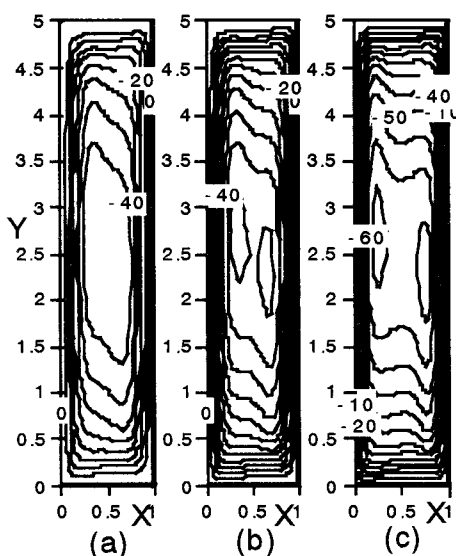


図 2.12 レイリー数の変化に伴う定常状態の流線の変化 ( $Pr=295$  and  $\alpha=5$ )

(a)  $Ra=2 \times 10^5$ . (b)  $Ra=3 \times 10^5$ . (c)  $Ra=10^6$ .

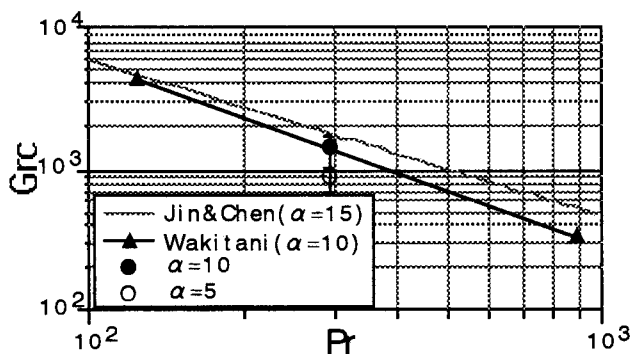


図 2.13 プラントル数の変化に伴う臨界グラスホフ数の変化

$\alpha=5$  の場合  $Ra < 10^7$  の範囲内で準定常状態における有意な温度変動は見られなかった. このことは前節で述べた空間的な 2 次流れセルの存在領域と温度変動が観察される領域とがよく一致するという事実と合致している.

### 2.3.2.3 アスペクト比 $\alpha$ が 10 の場合

同様の計算を  $\alpha=10$  の場合に対しても行った.  $Pr$  は 295 に固定し,  $Ra$  を  $10^4$  と  $10^7$  の間で変化させた. 粘性係数は基本的に一定としたが  $Ra=7 \times 10^5$  の場合に対してのみ温度による粘性の変化を考慮した計算を行った. この粘性変化を考慮した計算では試験流体を前節に合わせ 80wt% グリセリン水溶液とし, 前述の Chen, Pearlstein[38]によ



って提案された相関式(2.10)から粘性の変化を計算した．式(2.10)において 80wt%濃度では  $D=1.45 \times 10^8 [\text{cP}]$ ,  $E=2.53 \times 10^8 [\text{K}^3]$ ,  $-2.13 \times 10^{-2} [\text{K}^{-1}]$ ,  $G=-5.43 \times 10^3 [\text{K}]$ である．

粘性の温度依存性を考慮するためにはさらに代表(参照)温度  $T_m$  及び代表温度差  $\Theta$  を指定する必要があるが，前者は前節の実験に合わせ  $30^\circ\text{C}$  ( $\text{Pr}=295$ )とし，後者は  $9.12^\circ\text{C}$  とした．この  $\Theta$  は前節の実験 ( $L=20\text{mm}$ ) では  $\text{Ra}=1.5 \times 10^5$  に相当しており，この条件は温度差が小さい，すなわち前節よりも  $L$  が大きい場合の条件に相当している．同じ  $\text{Ra}$  に対して前節の実験よりも  $\Theta$  を小さくした理由は渦度の生成項による計算の不安定化を避けるためで， $\Theta$  が大きいとき計算精度を維持した上で安定に計算を進めるための計算方法については今後の検討が必要である．そこで本節では同じ  $\text{Ra}$  に対して粘性の温度依存性を考慮した場合の定性的な変化のみを論ずるにとどめる．

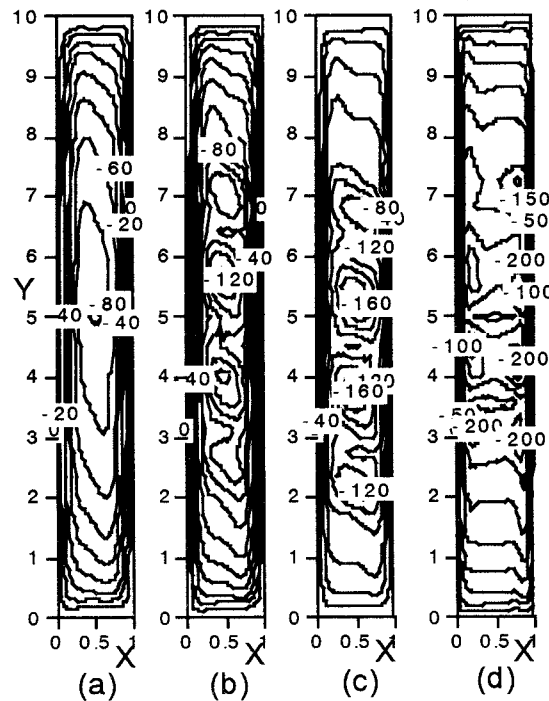


図 2.14 レイリー数の変化に伴う流線の変化 ( $t=6.0$ ,  $\text{Pr}=295$ ,  $\alpha=10$ )

(a)  $\text{Ra}=3 \times 10^5$ . (b)  $\text{Ra}=5 \times 10^5$ . (c)  $\text{Ra}=10^6$ . (d)  $\text{Ra}=10^7$ .

上に示した  $T_m$ ,  $\Theta$  の下では高温壁上の無次元粘性係数  $\mu_h$  は 0.793 となり，前述の見積もり方法に従うと  $80 \times 80$  の計算格子を用いる場合  $\text{Ra}$  は  $7.9 \times 10^6 \sim 8.3 \times 10^6$  より小さくなければならないが  $\text{Ra}=7 \times 10^5$  はこの条件を満たしている．

$\alpha=10$  の場合では計算によって求まる熱対流場は  $t>1.0 \sim 2.5$  で準定常状態に達する． $\text{Ra}$  の変化に伴う流れ場の変化の例として  $t=6.0$  における流線図を粘性係数が一定の場合について図 2.14 に示している．この図によると  $\text{Ra}$  が大きくなるにつれて容器槽内を大きく循環する流れ（一次循環流）から 2 次流れセルを伴う流れ ( $\text{Ra}=5 \times 10^5$ : 同図 (b)) へと変化し，さらに 2 次流れセル間に 3 次流れセルが生じる流れ ( $\text{Ra}=1 \times 10^6$ : 同

表 2.7 2 次流れセルが確認された  $y$  の範囲

| Ra          | $\mu=1$         |                 |                 |        |        | $\mu=\mu(T)$    |
|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------|--------|-----------------|
|             | $5 \times 10^5$ | $6 \times 10^5$ | $7 \times 10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $7 \times 10^5$ |
| Lower Limit | 2.2             | 2.0             | 1.8             | 1.7    | 1.8    | 1.5             |
| Upper Limit | 8.0             | 8.3             | 8.5             | 8.0    | 8.3    | 8.5             |

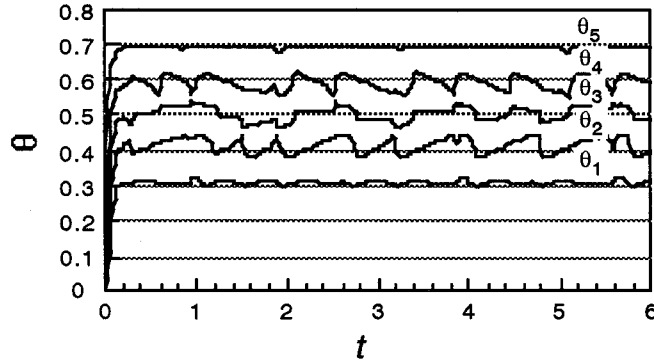


図 2.15 中心線上における温度の時間変化 ( $Ra=7 \times 10^5$ ,  $Pr=295$  and  $\mu=1$ )

図(c),  $Y=4.5$  付近)へと変化している. 従って図 2.14 から求まる 2 次流れセル発生 of 臨界グラスホフ数  $Gr_c$  は  $1.0 \times 10^3 \sim 1.7 \times 10^3$  となるが, これは図 2.13 に示した Wakitani の実験結果[5]とよく一致している. また  $Ra=10^7$  (図(d))においては  $\alpha=5$  の場合で見られたような水平方向に並ぶ双子の渦対が縦方向に並んでいる様子が見て取れる.

本節で用いた初期条件の下では先程の 2 次流れセルは常に非定常な挙動を示し, ある瞬間に容器内に存在している 2 次流れセルの数やその存在範囲は時間的に変化する[20]. 容器の鉛直方向の中心線上の温度の時間変化の例を  $Ra=7 \times 10^5$ ,  $\mu=1$  の場合について図 2.15 に示している. この図において  $\theta$  の添字 1~5 は  $x=0.5$  上の温度定義点を示しており, それぞれ  $y=1.67(\alpha/6)$ ,  $3.33(\alpha/3)$ ,  $5.0(\alpha/2)$ ,  $6.67(2\alpha/3)$  および  $8.33(5\alpha/6)$  の点に相当している.

準定常状態において 2 次流れセルが瞬間的にでも確認された  $Y$  方向の範囲を表 2.7 に示している. これを図 2.15 と比較するとこの範囲は有意な非定常温度変動が確認される範囲に一致しており, 前節の実験結果と定性的に一致している.

本計算における誤差を考慮するとき物理量の有意な時間変動は  $Ra > 5.0 \times 10^5$  の範囲で確認された. そこで以下の準定常状態における非定常特性の解析はこの  $Ra$  の範囲で行った. まず始めに中心線上の温度と  $Nu$  の時間変動について周波数分析を行った. その結果の例を図 2.16(a)~(d) に示している. 同図(a)に示されているとおり,  $Ra=7.0 \times 10^5$  の場合(同図(a))では時間変動に特徴的な周波数は検出されず, ならかな連続スペクトルが見られる. この傾向は粘性の温度依存性を考慮した場合の周波数分析結果(同図(b))でも変わらない.  $Ra$  を大きくしていくと  $Ra=1.0 \times 10^6$  (同図(c))において特徴的な周波数成分の出現の兆候が現れ,  $Ra=1.0 \times 10^7$  (同図(d))になると  $f=7.5$  とその

高調波で構成される時間変動のみが検出される．この  $f=7.5$  の変動は他の温度定義点や  $Nu$  の変動にも見られることを確認している．このようなスペクトルの定性的変化は上述のとおり  $Ra$  を大きくしていった場合に見られる2次流れセルを伴う流れから3次流れセルをも伴う流れ，さらに双子渦の発生に至る流れの定性変化によく対応している．また図には示していないが粘性一定で計算した場合では  $T_1$  と  $T_5$ ，そして  $T_2$  と  $T_4$  の周波数分析結果は定性的にも定量的にもよく一致しており，容器の中心に対して対称的な振る舞いが認められる．これは粘性が一定の場合にはいわゆる中心対称な定常解が存在しているという事実[39]\*に対応しているものと考えられる．

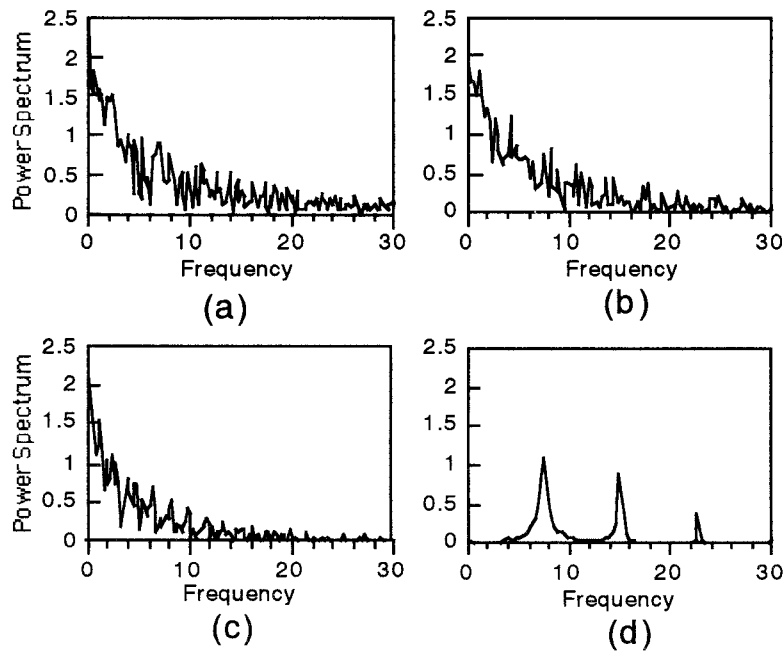


図 2.16 レイリー数の変化に伴う中心線上の温度のパワースペクトルの変化

(a)  $Ra=7 \times 10^5$  and  $\mu=1$ . (b)  $Ra=7 \times 10^5$ ,  $\mu$  の変化を考慮 (c)  $Ra=10^6$  and  $\mu=1$ . (d)  $Ra=10^7$  and  $\mu=1$ .

ただ以上の計算結果ではたとえ粘性の温度依存性を考慮しても，前節の実験結果で述べたように，2次流れセルが存在している  $Ra$  の範囲内で特徴周波数が高さ方向に減少するという傾向を見いだすことはできなかった．これは計算条件で述べたように実験の際の代表温度差  $\Theta$  は  $10^\circ\text{C}$  から  $50^\circ\text{C}$  まで変化させているのに対し，本計算では  $\Theta$  を  $9.12^\circ\text{C}$  に固定しており，高さ方向の大きな温度変化すなわち高さ方向の粘性の減少による高さ方向の局所的な  $Ra$  の増大による影響をあまり受けていないことが原因ではないかと予想される．

さらに前節と同じく準定常状態における時系列データから最小自乗法を用いて

\* 容器の中心点をはさんで対称な2点における物理量を  $A$  ならびに  $A^*$  で表現すると， $u=-u^*$ ,  $\theta=1-\theta^*$ ,  $\varphi=\varphi^*$  となる性質のこと．粘性が一定の場合，本節の境界条件下ではこのような解が存在しうる．

表 2.8 ACC に基づく時間スケール $\tau$

| Viscosity    | Ra              | $\tau$ |        |            |            |            |            |            |
|--------------|-----------------|--------|--------|------------|------------|------------|------------|------------|
|              |                 | $Nu_h$ | $Nu_c$ | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ | $\theta_4$ | $\theta_5$ |
| $\mu=1$      | $5 \times 10^5$ | 0.157  | 0.159  | 0.242      | 0.252      | 0.317      | 0.260      | 0.241      |
|              | $6 \times 10^5$ | 0.175  | 0.179  | 0.279      | 0.304      | 0.426      | 0.292      | 0.304      |
|              | $7 \times 10^5$ | 0.225  | 0.226  | 0.255      | 0.360      | 0.505      | 0.381      | 0.295      |
|              | $10^6$          | 0.240  | 0.242  | 0.242      | 0.708      | 1.553      | 0.601      | 0.321      |
|              | $10^7$          | 0.108  | 0.100  | 0.062      | 0.115      | 0.094      | 0.114      | 0.061      |
| $\mu=\mu(T)$ | $7 \times 10^5$ | 0.189  | 0.209  | 0.282      | 0.340      | 0.553      | 0.395      | 0.297      |

ACC が  $1/e$  になる時間スケール $\tau$ を計算した．計算結果を表 2.8 に示している．表中で添字 1~5 は前述の中心線上の温度定義点での値を示している．高温壁側の  $Nu(Nu_h)$  の時間変動は低温壁側( $Nu_c$ )の時間変動とほとんど同じであり,その結果両者の時間スケール $\tau$ はほとんど同じとなっている．なお  $Nu$  の変動時間スケールは中心軸上の温度変動の時間スケールに比べて小さいことに注意する必要がある．

一方中心線上の温度変動から求まる $\tau$ は  $Ra < 1.0 \times 10^6$  の範囲では  $Ra$  が增大するにつれて大きくなっている．数値計算結果からは実験的に得られた高さ方向の特徴周波数の減少を見いだせなかったが,先に述べたとおり実験では局所的な  $Ra$  が高さ方向に増大していると考えられるので,この $\tau$ の傾向は実験で得られた結果に対応しているものと考えられる．この中心線上の温度変動から求まる $\tau$ は容器の中央( $T_3$ )で最大値をとっており,パワースペクトルの上で定性的に確認された中心対称性が定量的に確認,すなわち $\tau_1 \doteq \tau_5$  かつ  $\tau_2 \doteq \tau_4$  となっていることが確認できる．また  $Ra = 7.0 \times 10^5$  の場合では中心線上の温度変動からもとまる $\tau$ と  $Nu$  からもとまる $\tau$ はともに近い値を取っているが,粘性変化を考慮した場合では高温側・低温側の  $Nu$  に関して相違が見られ,これは粘性の温度変化の影響と見ることができる．さらに  $Ra = 1.0 \times 10^7$  の場合では温度,  $Nu$  から求まる $\tau$ はほぼ一定となっており,これはこの場合に特徴的な変動周波数  $f = 7.5$  に対応しているものと考えられる．

次に SDIC の指標である最大リアプノフ指数 $\lambda$ を  $Nu$  と中心線上の温度時系列データから Wolf ら[35]の方法を用いて計算した．前節で述べたように $\lambda$ が正の時,その力学系はカオス的であるとされる．計算に用いたデータはそれぞれ  $t < 6.0$  の範囲の 10000 個のサンプリング値から構成されているが,先に述べた時間変動スケールと比べて  $t = 6.0$  は幾つかの場合を除いて十分大きい．計算の際は変動の高周波成分の影響を避けるため実験データに対してあらかじめローパスフィルターによる処理を施した．このローパスフィルターには 1 次方程式に基づく線形フィルターを 4 回施す方法 (Lawkins ら[40])を採用した．本節で用いた無次元遮断周波数は 45 である． $\lambda$ はパラメータの値に従って変化するので前節と同じく埋め込み次元,遅れ時間,発展時間の最適値の回りで値が安定していること(stationarity)を確認した上で,それらの値の平均値とその周りのばらつきから  $t$  分布の値を参照して $\lambda$ の値とその確率 50%の誤差範囲を計算した．その結果を表 2.9 に示している．

表 2.9 最大リアブノフ指数（上段）とその誤差範囲（下段）

| Viscosity    | Ra              | $\lambda$       |                 |                |                |                |                |                |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|              |                 | Nu <sub>n</sub> | Nu <sub>c</sub> | T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> |
| $\mu=1$      | $5 \times 10^5$ | 17.402          | 16.275          | 1.432          | 5.898          | 14.454         | 4.248          | 1.857          |
|              |                 | $\pm 0.523$     | $\pm 0.446$     | $\pm 0.129$    | $\pm 0.245$    | $\pm 0.898$    | $\pm 0.347$    | $\pm 0.148$    |
|              | $6 \times 10^5$ | 20.782          | 21.207          | 1.530          | 6.245          | 11.005         | 5.092          | 1.961          |
|              |                 | $\pm 0.575$     | $\pm 0.559$     | $\pm 0.100$    | $\pm 0.341$    | $\pm 0.562$    | $\pm 0.233$    | $\pm 0.086$    |
|              | $7 \times 10^5$ | 18.642          | 19.458          | 2.312          | 4.859          | 13.450         | 7.208          | 3.612          |
|              |                 | $\pm 0.562$     | $\pm 0.598$     | $\pm 0.166$    | $\pm 0.211$    | $\pm 0.250$    | $\pm 0.313$    | $\pm 0.135$    |
| $\mu=\mu(T)$ | $10^6$          | 16.839          | 13.960          | 1.999          | 3.731          | -3.276         | 2.355          | 2.780          |
|              |                 | $\pm 0.681$     | $\pm 0.402$     | $\pm 0.165$    | $\pm 0.182$    | $\pm 0.873$    | $\pm 0.345$    | $\pm 0.082$    |
|              | $10^7$          | 1.114           | 0.041           | -0.019         | -0.693         | 0.172          | -0.306         | -1.510         |
|              |                 | $\pm 0.423$     | $\pm 0.077$     | $\pm 0.064$    | $\pm 0.107$    | $\pm 0.169$    | $\pm 0.090$    | $\pm 0.226$    |
|              | $7 \times 10^5$ | 19.430          | 16.507          | 1.392          | 8.208          | 7.058          | 2.262          | 1.515          |
|              |                 | $\pm 0.628$     | $\pm 0.707$     | $\pm 0.045$    | $\pm 0.232$    | $\pm 0.363$    | $\pm 0.128$    | $\pm 0.079$    |

この表に示すとおり Nu から求まる $\lambda$ は中心線上の温度からまとまるものと比べて大きい。このことは Nu から求まる $\tau$ が中心線上の温度からまとまるものと比べて小さいことと関係がある。粘性が一定の場合では誤差範囲を考慮すると中心線上の温度から求まる $\lambda$ は $\tau$ と同様に中心対称性を持っており、容器中央で最大値をとる。また  $Ra > 10^6$  においては  $Ra$  が増加するに従って $\lambda$ は減少しているが、これは特定の周波数成分とその高調波の成分による変動が次第に支配的になっていくためである。 $Ra=10^6$  の場合では $\lambda_3$  はとても小さくなっているが、この場合ではデータの時間範囲  $t=6.0$  が変動時間スケール $\tau$ が十分大きいとはいえず、 $\lambda$ を精度よく求めることのできない系統誤差によるものであると考えられる。

一方  $Ra=7 \times 10^5$  の場合粘性の温度依存性を考慮した計算では $\lambda_2$ は中心軸上で最大値をとっており、その上方の定義点では $\lambda$ の値は次第に減少している。これは前節で述べた実験において $\lambda$ が容器の下部で最大値をとった後上方に向かって減少するという事実に対応していると考えられる。しかし本計算では表 2.7 と表 2.9 を比較して分かるようにカオス性が検出される領域が2次流れセルが存在する領域に対応しており、前者の領域が後者の領域に含まれるという前節の実験で得られた事実を確認することができなかった。実験においては有効な温度変動の誤差レベルは熱電対の誤差範囲 ( $0.1^\circ\text{C}$ ) によって与えられ、 $\lambda$ の計算の際にこの誤差範囲を考慮することが可能であるが、計算ではそのような誤差範囲を評価することは難しく、温度変動振幅が小さくなると誤差範囲内のランダムな変動の影響を受け、 $\lambda$ が大きくなってしまふことが要因ではないかと考えられる。これは数値解析結果から $\lambda$ を評価する場合の今後の課題である。

\* 実験結果から Wolf の方法を用いて $\lambda$ を求める際は最小探索スケール (scale minimum) を  $0.1^\circ\text{C}$  とすることができるが、計算結果の場合はそのようなスケールをあらかじめ与えることがかなり難しい[40]ため、本節では便宜上 scale minimum を最大変動振幅の 1% とした。

## 2.4 同軸二重円筒間の自然対流場の準定常性とカオス性

### 2.4.1 実験装置及び方法

#### 2.4.1.1 実験装置及び測定方法

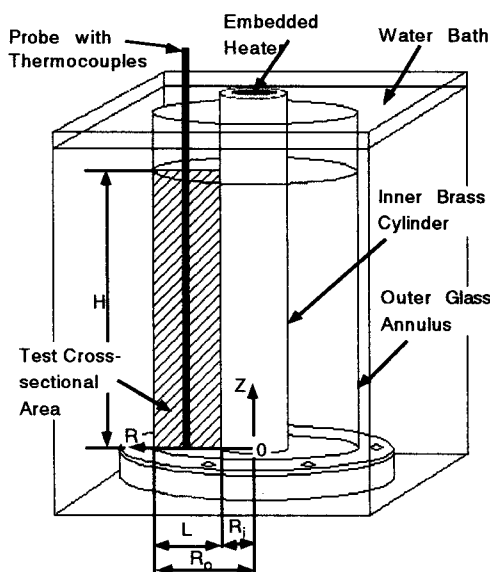


図 2.17 実験装置図

実験装置の概略図と座標軸を図 2.17 に示す．本実験においては検査体積（テストセクション）を直径 34.1mm のヒータが埋め込まれた直径 50.0mm の真鍮製内円筒と厚さ 3.6mm 内径 132.4mm のガラス製外円筒からなる同軸二重円筒間内にとる．それぞれの円筒はポリアセタール製の台座の上に固定されているが，上端は大気開放にすることで上部から検査体積内部への操作を可能にしている．この上端部については上端からの熱移動量が内外円筒間の熱移動量に比べて小さいことから 2.2 節と同じく断熱面と近似できる．本実験では内外円筒の直径は変化させないので半径比  $K(=外円筒内径 R_o/内円筒半径 R_i)$  は 2.65 一定である．

外円筒はアクリル製冷却水槽内部に設置しているが，実験中は冷却水を水槽と空冷式冷却装置との間で循環させ，その水を水槽内に設置した温度調節用ヒーターにより加熱することで水槽内温度  $T_0$  を  $10^{\circ}\text{C}$  一定(誤差  $\pm 0.2^{\circ}\text{C}$ ) に保った．また内円筒内部のヒーターに一定電圧をかけることで内円筒の発熱量を一定に保ったが，その電圧はポルトスライダを用いて調節した．作業流体には 84wt % グリセリン水溶液を用い，水溶液の高さ  $H=450\text{mm}$  を一定に保つことで図 2.17 の斜線で示される半径方向の検査面のアスペクト比  $\alpha(=H/L, L=R_o-R_i)$  を 10.9 一定に保った．

本実験では温度の測定のため 17 本の素線径 0.1mm の銅・コンスタantan 熱電対を取り付けた線状測温ブローをテストセクション上部から円筒間中央( $R=(R_i+R_o)/2$ ) に挿入し， $2 \leq Z \leq 450\text{mm}$  の範囲の温度の定点観測( $100 \leq Z \leq 450\text{mm}$  では 25mm 間隔)

を行った．その際それぞれの熱電対の起電力をデジタルマルチメータで増幅し，その電圧値を GP-IB バスを介してパソコンに5秒間隔で取り込み記録並びにデータ処理を行った．また検査流体にアルミ粉を混入させ，透明な冷却水槽外部からハロゲンランプ-光学スリット系を用いてある R-Z 断面に照射することで自然対流場を可視化し，それを同じく外部からデジタルカメラで一定時間間隔で撮影した．

#### 2.4.1.2 実験条件

本実験では参照温度を水槽内温度  $T_0$  としてこれを  $10^\circ\text{C}$  一定に保つことで作業流体のプラントル数  $Pr=1.8\times 10^3$  一定に保ち，内円筒の単位面積当たりの加熱量  $q$  を変化させることで次式で定義される代表温度差  $\Theta$  に基づくグラスホフ数  $Gr$

$$Gr = \frac{g\beta\Theta L^3}{\nu^2}, \quad \Theta=qL/k \quad (2.11)$$

を6通りに変化させた．対応するレイリー数  $Ra(=Gr\times Pr)$  はそれぞれ  $Ra=1.4, 2.0, 2.2, 2.6, 3.2$  そして  $4.3\times 10^6$  である．グリセリン水溶液の物性値は Segur[42] によった．

実験に際しては加熱量  $q=0$  で水槽内温度  $T_0=10^\circ\text{C}$  一定に保ち，このまま長時間放置することでテストセクション内で一様に温度  $T=10^\circ\text{C}$ ，速度  $\mathbf{V}=\mathbf{0}$  を実現し，これを初期条件とした．そして実験開始時にヒーター加熱量を上記の所定の値にセット・維持し，約22時間の連続実験を行った．

実験に先立って周方向角度  $\theta=0, 180^\circ$  の二つの R-Z 断面において同時に流れ場を可視化し，さらに両断面において同時に温度場を測定することであらかじめ熱対流場の周方向一様性を確認している．また実験に使用する熱電対に対しても誤差が  $\pm 0.1^\circ\text{C}$  以内に収まるよう較正した上で，それらの応答性についても問題のないことを確認している．

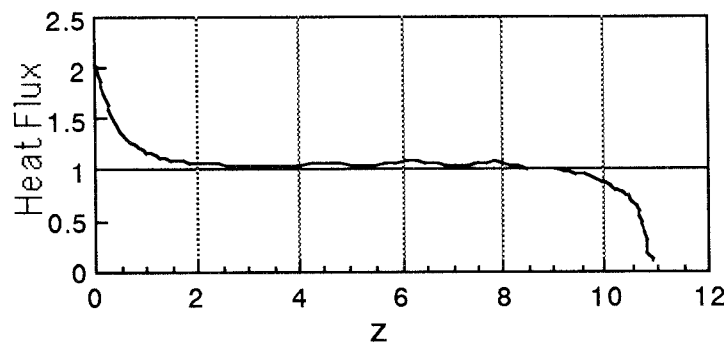


図 2.18 内円筒表面での熱流束に関する予備計算結果

また，ヒータを真鍮内円筒にはめ込むことによる内円筒表面での一定発熱条件からのズレを考察するため，数値解析による予備検討を行った．計算の際はブシネスク近似を施した粘性の温度変化を考慮しない基礎式に対して周方向の一様性を仮定して

二次元化した上でそれを有限差分法により 2 次精度で離散化して数値解を得た．数値解析結果については高さ方向の 2 次流れセルの生成や高さ方向の温度レベルの一致等の実験結果との対応を確認している．

$Ra=3.2 \times 10^6$  の場合について実際の真鍮内表面での熱流束と，ヒータの総発熱量から換算される内表面で熱流束一定とした場合の熱流束との比を図 2.18 に示している．この図に示すとおり熱流束は高さ方向にほぼ一様で，無次元高さ  $z(=Z/L)$  について  $0.5 < z < 10.5$  の範囲では実際の熱流束が一定熱流束条件下での熱流束と比較して誤差 30% の範囲内におさまっており，多くは誤差 10% 以内である．このことから本実験結果はほぼ内円筒表面で熱流束一定とした場合の実験結果とみなすことができる．

## 2.4.2 実験結果

### 2.4.2.1 熱対流場の定性的傾向

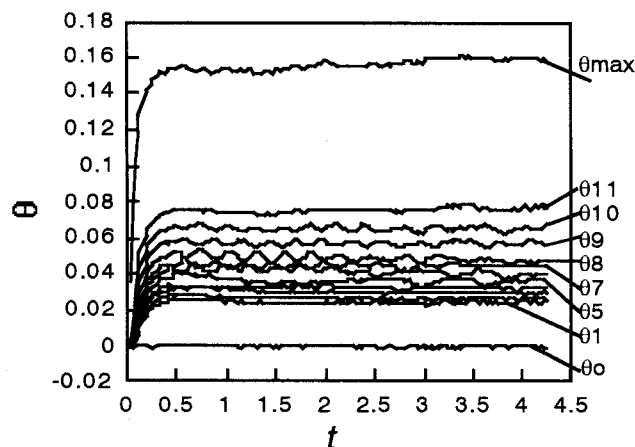


図 2.19 実験開始後の温度の時間変化

実験開始直後からの無次元温度の時間変化の例として  $Ra=3.2 \times 10^6$  の場合について図 2.19 に示している．以下で扱う無次元量は基本的に実次元の物理量を代表長さ  $L$ ，熱拡散係数  $a$ ，代表温度差  $\Theta$  で無次元化したものであり，無次元温度としては実次元温度から水槽温度  $T_0$  を差し引いたものを  $\Theta$  で割ったものを採用した．

図中で  $\theta_1 \sim \theta_{11}$  はそれぞれ  $Z=100\text{mm}$  から  $350\text{mm}$  (無次元座標  $z$  で  $2.43 \sim 8.50$ ) まで  $25\text{mm}$  間隔 11 点の各測定点での無次元温度を示しており， $\theta_{\max}$  は  $Z=H$  (作業流体の自由表面上) での無次元温度を示している．図で示されているとおり，作業流体内部の測定点での温度は無次元時間  $t=1$  以降でほぼ一定となり，測定点によっては時間平均値の周りで温度変動が見られる．図 2.20 にこの状態での可視化画像を示しているが，鉛直方向に渦列 (2 次流れセル) が形成されており，それらが移動 ( $t=0.998, 1.06$ )，生成 ( $t=1.13$ )，合体 ( $t=1.19$ ) を繰り返しているものの，2 次流れセルの総数はほとんど変化していない．このような状態を 2.2, 2.3 節と同様準定常状態と定義した．



表 2.10 2次流れセルが存在する  $z$  方向の範囲

| $Ra \times 10^{-6}$   | 1.4 | 2.0 | 2.2 | 2.6 | 3.2 | 4.3 |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Lower Limit[z]        | -   | 5.6 | 4.4 | 4.1 | 3.0 | 1.7 |
| Upper Limit[z]        | -   | 7.8 | 7.5 | 7.3 | 7.9 | 7.5 |
| Secondary Cell Number | 0   | 1   | 1-2 | 2-3 | 3-4 | 3-4 |

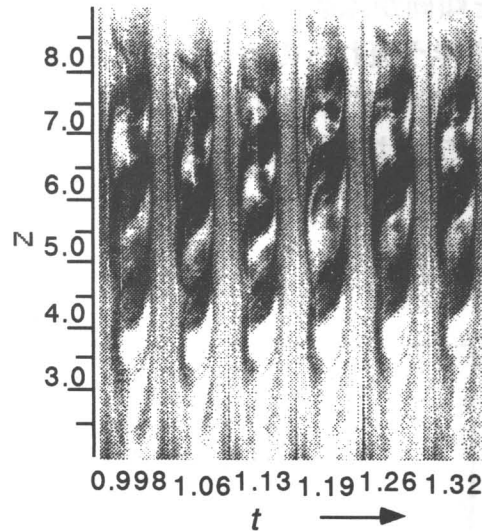


図 2.20 熱対流場の時間変化の例 ( $Ra=3.2 \times 10^6$ )

本節では準定常状態における可視化画像から鉛直方向に2次流れセルの存在が認められる範囲を調べた。その結果を表 2.10 に示しているが、レイリー数が大きくなるにつれて、2次流れセル発生範囲の上限がほぼ一定なのに対し、下限が下方へ移動している。この結果は側壁温度を固定した鉛直平行平板間の自然対流場では中心から上下方向に2次セル発生範囲が広がる傾向を示すのとは大きく異なっているが、これは一定発熱により高さ方向の温度変化（粘性変化）が大きいのと、またたとえ物性値、側壁温度共に一定であっても同軸二重円筒間内の二次元熱対流場は中心対称とはならないことの両方の影響であると考えられる。

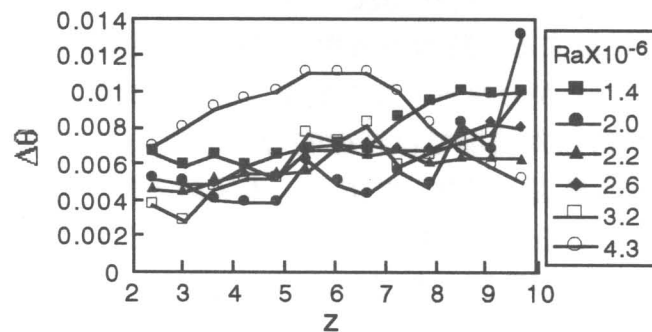


図 2.21 温度変動振幅の高さ，  $Ra$  による変化

また準定常状態における各測定点での無次元温度 $\theta_i$ の時間変動の最大値 $\theta_{i\_max}$ 及び最小値 $\theta_{i\_min}$ から温度の無次元変動振幅 $\Delta\theta(=\theta_{i\_max}-\theta_{i\_min})$ を求めた．結果を図 2.21に示している．この図に示しているとおおり，温度変動振幅は高さ方向に大きくなる傾向があり，2次流れセルの存在する領域(表 2.10)と温度振幅が大きい領域との対応は見られない． $Ra=4.3\times 10^6$ においては温度振幅が高さ方向に最大値をとったあと減少するという他の条件と異なった傾向が認められるが，これは鉛直平行平板間で観察されるトラベリングウェーブ[5]を伴う流れへの遷移の前兆現象であると考えられる．しかしながら本節においては $Ra=3.2\times 10^6$ の場合と比較して，予想される流れのモード変化を可視化画像上で確認することはできなかった．

#### 2.4.2.2 周波数分析

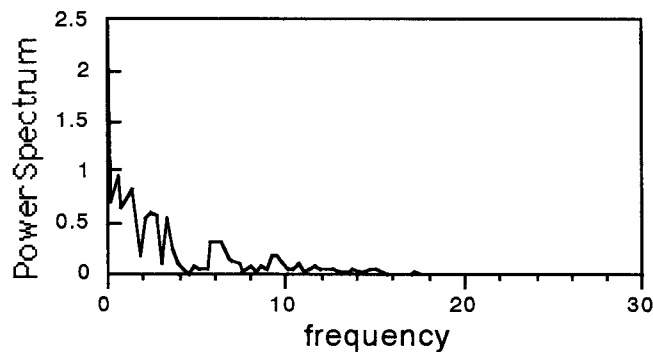


図 2.22 温度変動の周波数分析結果 ( $Ra=4.3\times 10^6$ ， $z=4.85$ )

次に温度場の自励振動の特徴を定量的に把握するため準定常状態における温度データの周波数分析を行った．代表的な例として $Ra=4.3\times 10^6$ ， $z=4.85$ における温度のパワースペクトルを図 2.22に示している．この例では無次元周波数 $f=6$ 付近でノイズとは明らかに異なる比較的大きなパワースペクトルが検出されているが，このような温度変動に特徴的な周波数の存在が確認された測定点を表 2.11に”○”で示している．表には示していないがこれらの特徴周波数の多くは3～6の間に分布している．

表 2.10と表 2.11を比較すると特徴周波数の存在する領域は2次セル発生領域の上部にほぼ対応していることが分かる．この結果は2.2, 2.3節において側壁温度を固定した鉛直平行平板間の自然対流場では特徴的な周波数の存在領域が2次セル発生領域にほぼ対応するという事実と異なっており，本実験条件下で特有の性質である．

また表 2.10, 表 2.11によると $Ra=4.3\times 10^6$ の場合では2次セル発生領域の上部にも特徴周波数が存在する領域が確認されている．この場合では2次セル発生領域の上限近傍で特徴周波数が3から0.5まで減少し， $z=8.5\sim 9.7$ においてほぼ0.5一定である．これは前節で述べた高さ方向の流れの構造の変化による影響と考えられる．

表 2.11 温度変動の特徴周波数が検出された測定点

| z   | Ra $\times 10^6$ |     |     |     |
|-----|------------------|-----|-----|-----|
|     | 2.2              | 2.6 | 3.2 | 4.3 |
| 2.4 | -                | -   | -   |     |
| 3.0 | -                | -   | -   | ○   |
| 3.6 | -                | -   | -   | ○   |
| 4.3 | -                | -   | -   | ○   |
| 4.9 | -                | -   | -   | ○   |
| 5.5 | ○                | ○   | -   | ○   |
| 6.1 | ○                | ○   | ○   | ○   |
| 6.7 | ○                | ○   | ○   | ○   |
| 7.3 | ○                | -   | ○   | ○   |
| 7.9 | -                | -   | ○   | ○   |
| 8.5 | -                | -   | -   | ○   |
| 9.1 | -                | -   | -   | ○   |
| 9.7 | -                | -   | -   | ○   |

(○: detected, -: not detected)

#### 2.4.2.3 ACC による時間スケールの算出

次に温度変動の時間スケールを捉える別の方法として、2.2, 2.3 節と同じ方法により準定常状態における温度の時系列データから自己相関係数(ACC)が  $1/e$  になるスケール  $\tau$  を求めた。後述の最大リアプノフ指数の計算の際に問題となる温度変動の高周波ノイズの影響を避けるため、計算にはあらかじめ測定データに対して前節で用いた一階微分方程式に基づくローパスフィルタ[40](遮断周波数  $f=20$ )を施した時系列データを用いた。結果を図 2.23 に示している。

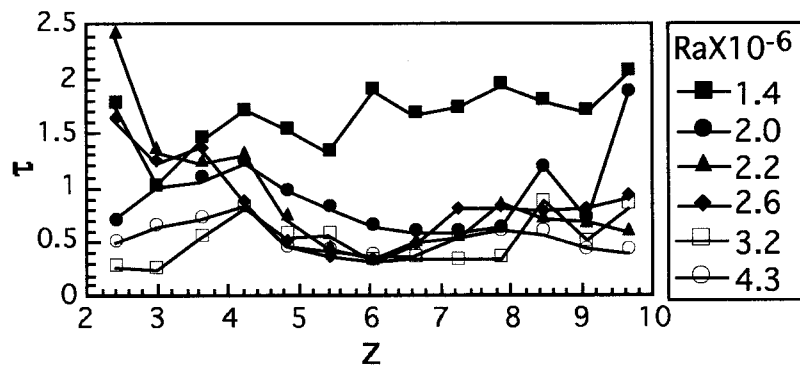

図 2.23 Ra および鉛直方向高さ  $z$  による  $\tau$  の変化

表 2.10 と図 2.23 を比較すると 2 次流れセルが存在する領域では高さの増大に伴って  $\tau$  は下に凸の変化をしており、極小値は前節の特徴周波数の逆数のオーダーにほぼ等しくなっている。その他の領域では  $\tau$  は比較的大きい。これは 2.2 節の鉛直平行平板間の自然対流場において 2 次流れセルの存在する領域で  $\tau$  が小さくなる事実と対応している。また  $Ra \times 10^6 = 2.0, 3.2$  および  $4.3$  の場合では  $z=2$  近傍で  $\tau$  が小さくなっているが、この領域ではもともと温度振幅が実次元で  $0.3^\circ\text{C}$  程度で極めて小さくノイズに

よる影響が考えられる。

また  $Ra=4.3 \times 10^6$  の場合では他の条件と異なり、2次セル発生領域の上部で $\tau$ は $z$ 方向の極小値に近い値( $\tau \leq 0.6$ )に維持されている。

#### 2.4.2.4 最大リアプノフ指数

最後に準定常状態における温度の時系列データから力学系の初期値に対する鋭敏な依存性を判別する指標である最大リアプノフ指数 $\lambda$ を求めた。計算手法としてはWolfら[35]の方法を採用し、時系列データには前節と同じく準定常状態の測定データに対してローパスフィルタを施したものを使用した。

2.2節と同様、最小探索スケールと最大探索スケールにはそれぞれ熱電対の誤差である $0.1^\circ\text{C}$ とその3倍( $0.3^\circ\text{C}$ )を用いた。このことにより $t$ で問題となった温度変動のノイズの影響を抑えることができる。次に埋め込み次元、遅れ時間、発展時間は2.2, 2.3節と同様最適値の周りで $\lambda$ がほぼ一定であること(stationarity)を確認し、それらの値の平均値とばらつきから $\lambda$ の確定値とその誤差範囲(確率 50%で変動する範囲)を計算した。遅れ時間を変化させる際は基本的にACCが $1/e$ になるスケール $\tau$ を基準とし、その値に対する倍率をパラメータにとったが、 $\tau > 0.5$ の場合についてはその基準スケールとして $\tau = 0.5$ に固定した。このような基準時間スケールを用いることにより $Ra = 1.4 \times 10^6$ ,  $2.0 \times 10^6$ において埋め込み次元を変化させた場合を除き、 $\lambda$ の stationarity を確認した。

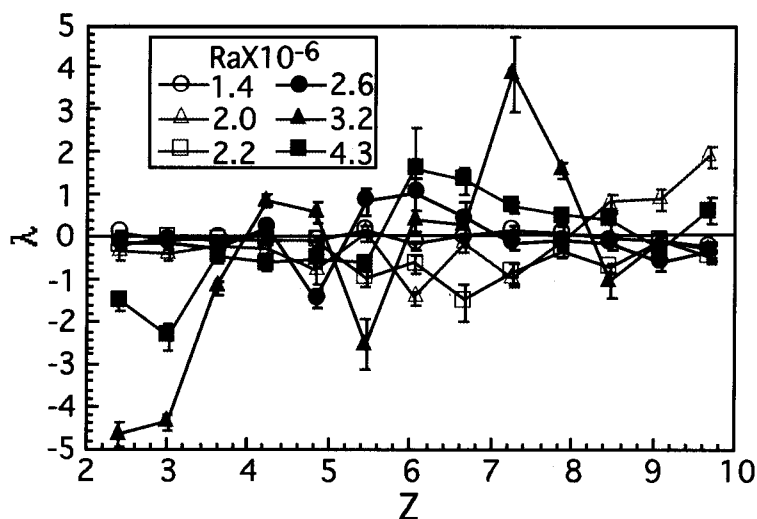


図 2.24  $Ra$  および鉛直方向高さ  $z$  による最大リアプノフ指数の変化

以上の方法により $\lambda$ とその誤差範囲を計算した結果を図 2.24に誤差線付きで示している。 $\lambda > 0$  かつ誤差範囲内部に $\lambda = 0$ の点が存在しない場合を有意なカオス性ありと判断するならば、有意なカオス性は2次流れセルが存在する5つの場合のうち、 $Ra \times 10^{-6} = 2.6, 3.2$  および  $4.3$  の3つの場合で検出され、表 2.10と図 2.24を比較するとそ

の範囲は例外を除き2次流れセルが存在する領域の最上部に位置しており、この領域は表2によると特徴周波数が検出される領域にほぼ対応している。この結果はカオス性が検出される領域が2次流れセルの存在する領域に含まれるという点では鉛直平行平板間の自然対流場の結果と一致する。また2.2節の鉛直平行平板間の結果と同じく、 $\lambda$ は高さ方向にいったん最大値をとったあと減少している。

またこの結果を図2.21の温度振幅の定性的傾向と比較すると2次流れセルの存在領域の上部では温度振幅が十分大きく、多くの場合高さ方向に増大しているにも関わらずカオス性は小さくなっているということになり、これは鉛直平行平板間の自然対流場においてカオス性の大きい領域と温度振幅の大きい領域は対応が見られたという結果と異なっている。これは主として一定発熱条件に基づく相違であると考えられるが、カオス性は本来時間変動特性の一種であって、その変動の振幅（変動エネルギー）とは無関係であるということを示す物理現象の例として注目される。

図2.24で  $Ra=1.4 \times 10^6$  並びに  $2.0 \times 10^6$  の場合のうちいくつかの測定点でのデータについて有意なカオス性が検出されている(特に  $Ra=2.0 \times 10^6$  で  $z=8.5, 9.1$  および  $9.7$  の場合)が、これらの場合では元々温度振幅が極めて小さく、また対応する位置に2次流れセルは存在しないため物理的にカオス性が検出させる理由は考えられない。完全にランダムな時系列データは無限自由度を有しており、有限の埋め込み次元では解析が不可能であるが、これらの場合で埋め込み次元に対して stationarity が確認できなかった事実を考慮すると、上述の結果はノイズの影響によるものと思われる。

また  $Ra=4.13 \times 10^6$  では2次流れセルの上部でも有意なカオス性が検出されているが、これは2.4.2.1及び2.4.2.2節で指摘した流れの構造変化によるものと考えられ、2.4.2.3節で示した $\tau$ が2次流れセルの上部で比較的小さい値を保っているという事実に対応している。

## 2.5 結論

本章ではまず水平方向に温度勾配のある鉛直平行平板間の自然対流場についてプラントル数を固定し、グラスホフ数を変化させて2次流れセルの発生範囲並びに温度場の時間変動特性を実験的に調べ、以下の結果を得た。

- (1) ノイズとは異なる温度場の時間変動成分が検出される領域、すなわち温度場が準定常性を示す領域は2次流れセルの発生領域と対応し、またそのパワースペクトルが最大となる無次元周波数  $F_{peak}$  は高さが増大するに従って小さくなる。
- (2) 測定された温度時系列データの自己相関係数が  $1/e$  となる時間スケールが小さい領域( $\tau < 4.5 \times 10^{-2}$ )は自然対流場の2次流れセルの発生領域とほぼ対応する。
- (3) 最大リアプノフ指数が正の領域すなわちカオス性を示す領域は2次流れセルの発生領域にふくまれ、その周囲に2次流れセルが発生してなおかつカオス的でない

中間領域が存在する．また最大リアプノフ指数が正の領域では最大リアプノフ指数はグラスホフ数が大きくなるにつれて大きく，そして高さが高くなるにつれて小さくなる．

- (4) 最大リアプノフ指数の算出にあたっては，計算に必要な遅れ時間の基準スケールとして自己相関係数が  $1/e$  になるスケールをとると有効である．また実験データから最大リアプノフ指数を求める際の前処理として Low Pass Filtering は非常に有効である．

次に 2.3 節では密閉容器内部の熱対流場についてその非定常性，カオス性を数値的に検討した．特に  $Ra$  や粘性の温度依存性がそれらの性質に及ぼす影響について詳細に検討し，前節の実験結果と比較した．主な結果は以下の通りである．

- (5) 容器のアスペクト比  $\alpha$  が 5 の場合， $Ra < 10^7$  の範囲では鉛直方向に形成される 2 次流れセルや，熱対流場内部の有意な温度変動は見られなかった．この非定常な挙動と 2 次流れセルの存在との関係は実験結果に対応している．この関係は  $\alpha$  が 10 の場合でも確認できた．
- (6) 粘性を一定として計算した場合には温度変動のパワースペクトル，変動の時間スケール，最大リアプノフ指数といった非定常特性が容器の中心に対して対称となることが確認できた．
- (7) 粘性の温度依存性を考慮した場合，中心軸上で最大リアプノフ指数が最大となる点は容器の下部に現れる．これは実験結果と一致する．
- (8) 実験で確認された温度変動の特徴的な周波数が高さ方向に減少するという性質は数値解析では確認できなかった．しかしながらこの事実は  $Ra$  が大きくなるに連れて自己相関係数が  $1/e$  になる時間スケールが大きくなるという事実に対応しているものと考えられる．

最後に 2.4 節では内円筒にヒータを埋め込んで加熱し，外円筒を温度一定で冷却することにより，グリセリン水溶液を注入した円筒間内部に生じる熱対流場の周波数特性，時間変動スケール並びにカオス性について実験的な検討を行い，既報の鉛直平行平板間の結果と比較考察を行った．主たる結果は以下の通りである．

- (9) レイリー数を大きくするに連れて 2 次流れセルが発生する領域は広くなるが，その上限はほぼ一定で下限が下方へ移動し，側壁温度一定の鉛直平行平板間でみられた中心対称性は見られない．
- (10) 場に特有な温度変動の周波数成分が検出される領域は 2 次流れセルが存在する領域の最上部に偏る．この点についても 2 次流れセルの存在領域と特徴周波数の検出される領域がほぼ一致する鉛直平行平板間の結果と異なる．
- (11) 2 次流れセルが観察されるレイリー数の場合では 2 次流れセルが存在する領域

## 第2章 密閉容器層内部の自然対流場の準定常性とカオス性

内部で ACC が  $1/e$  になるスケール  $\tau$  が高さ方向にいったん減少したあと増加する傾向があり, その値は 2 次流れセルの存在領域内部で全体的に小さくなるがこれは鉛直平行平板間の自然対流場の結果と対応する.

- (12) 有意な温度変動のカオス性が検出される領域は 2 次流れセルの存在する領域の最上部に位置し, これは特徴周波数の検出される領域にほぼ一致する. この結果はカオス性が検出される領域が 2 次流れセルの存在する領域に含まれるという点では鉛直平行平板間の自然対流場の結果と一致する.

本章において考察した加熱量( $Ra$ )の範囲では定常解としての 1 次循環流とは異なるものの, 熱対流場は 2 次流れセルもしくは 3 次流れセルといった組織構造を有しており, 発達乱流とは明らかに異なる. それにもかかわらず温度のカオス性が検出される空間的領域が存在していることに着目する必要がある. すなわち異[29]が指摘しているとおりカオス性は乱流(発達乱流)よりも広い意味で考える必要がある. また密閉容器槽内においては壁面でのディリクレ型境界条件(温度もしくは速度成分)により壁面近傍において理論上カオス性が消滅するので, カオス性が検出される領域は容器内部に局在すると予想されるが, 本章の結果はこれを裏付けており, これは密閉容器槽内部に生じるカオスの特徴であるとみなせる. さらに本章の結果はカオス性が存在する領域と 2 次流れセルの存在領域の相関が高いことを裏付けているが, 2 次流れセルは 1 次循環流で表される定常解に対してその周りの時間変動が生み出す 2 次的構造と見なすことができる. このような熱対流場の非線形性に基づく 2 次的な流れの構造は変動エネルギーの散逸過程と関連づけて考えることができるが, 上記の結果はこのような散逸過程とカオス性の存在を関連づけて考えることができることを示唆している. これについては 4 章及び 5 章で詳説する.

## 第 2 章の文献

- [1] 木本日出夫・宮脇陽一, 鉛直平行壁面間の自然対流場に生じる準定常流に関する研究, *日本機械学会論文集 (B編)*, **55**(1989), 3680-3686
- [2] G. K. Batchelor, Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *J. Appl. Math.*, **12**(1954), 209-233
- [3] N. Seki, S. Fukusako and H. Inaba, Visual observation of natural convection flows in a narrow vertical cavity, *J. Fluid Mech.*, **84**(1978), 695-704
- [4] J. W. Elder, Laminar free convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, **23**(1965), 77-98.
- [5] S. Wakitani, Experiments on convective instability of large Prandtl number fluids in a vertical slot, *ASME J. Heat Trans.*, **116**(1994), 120-126
- [6] S. W. Churchill and H. Ozoe, The prediction of natural convection in rectangular enclosures (*unidentified citation in* S. W. Churchill, Free convection in layers and enclosures, *Heat Exchanger Design Handbook*, **2.5.8**(1983), VDI-Verlag GmbH, Hemisphere)
- [7] G. D. Mallinson and G. De Vahl Davis, The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations, *J. Comp. Phy.*, **12**(1973), 433-461
- [8] J. E. Hart, Stability of the flow in a differentially heated inclined box, *J. Fluid Mech.*, **47**(1971), 547-576
- [9] T. Adachi and J. Mizushima, Stability of the thermal convection in a tilted square cavity, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**(1996), 1686-1698
- [10] J. Mizushima and K. Gotoh, Nonlinear evolution of the disturbance in a natural convection induced in a vertical fluid layer, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **52**(1983), 1206 -1214.
- [11] Y. Y. Jin and C. F. Chen, Instability of convection and heat transfer of high Prandtl number fluids in a vertical slot., *ASME J. Heat Trans.*, **118**(1996), 359-365.
- [12] 沓秦寅・木本日出夫, 鉛直流体槽内の自然対流場のシミュレーション(2次元モデルについての検証), *日本機械学会関西支部第 69 期定時総会講演会*, (1994), 366-368
- [13] Y. Y. Jin and C. F. Chen, Natural convection of high Prandtl number fluids with variable viscosity in a vertical slot, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **39**(1996), 2663 -2670.
- [14] Y.-M. Chen and A. J. Pearlstein, Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots, *J. Fluid Mech.*, **198**(1989), 513-541
- [15] C. F. Chen and S. Thangam, Convective stability of a variable-viscosity fluid in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, **161**(1985), 161-173.
- [16] S. A. Suslov and S. Paolucci, Stability of natural convection flow in a tall vertical enclosure under non-boussinesq conditions, *J. Fluid Mech.*, **344**(1997), 2143-2157.
- [17] 木本日出夫・宮脇陽一・今城元広, 鉛直平行壁面間の自然対流場に現れる三次元流動, *日本機械学会論文集 (B編)*, **57**(1991), 236-242



- [18] H Kimoto, On the three-dimensional flow generated in the natural convection fields of vertical rectangular slots, *Proc. 2nd China-Japan Symp. on Visualization*, (1992), 402-409
- [19] G. D. Mallinson and G. De Vahl Davis, Three-dimensional natural convection in a box: a numerical study, *J. Fluid Mech.*, **83**(1977), 1-31
- [20] S. Wakitani, Formation of cells in natural convection in a vertical slot at large Prandtl number, *J. Fluid Mech.*, **314**(1996), 299-314.
- [21] V. Prasad and F. A. Kulacki, Free convective heat transfer in a liquid-filled vertical annulus, *ASME J. Heat Transfer*, **107**(1985), 596-602
- [22] M. Keyhani, F. A. Kulacki, and R. N. Christensen, Free convection in a vertical annulus with constant heat flux on the inner wall, *ASME J. Heat Transfer*, **105**(1983), 454-459
- [23] T. Fujii et al., Experiments on natural-convection heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder to liquids, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **13**(1970), 753-787
- [24] J. A. Khan and R. Kumar, Natural convection in vertical annuli: a numerical study for constant heat flux on the inner wall, *ASME J. Heat Transfer*, **111**(1989), 909-915
- [25] C. J. Ho and Y. H. Lin, Natural convection of cold water in a vertical annulus with constant heat flux on the inner wall, *ASME J. Heat Transfer*, **112**(1990), 117-123
- [26] C. J. Ho and F. J. Tu, Transition to oscillatory natural convection of cold water in a vertical annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **41**(1998), 1559-1572
- [27] T. Yazaki, Experimental observation of thermoacoustic turbulence and universal properties at the quasiperiodic transition to chaos, *Phys. Rev. E*, **48**(1993), 1806-1818
- [28] H. Koizumi and I. Hosokawa, Chaotic behavior and heat transfer performance of the natural convection around a hot horizontal cylinder affected by a flat ceiling, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **39**(1996), 1081-1091
- [29] 巽友正, 流体力学, 培風館(1982), p.399
- [30] 増岡隆士・谷川洋文・鶴田隆治・山崎祐光, 積層多孔室内の自然対流の揺動, 第34回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1997), 611-612
- [31] 技術資料"流体の熱物性値集", 日本機械学会編, 476-479
- [32] R.B. Gallant, Physical properties of hydrocarbons, *Hydrocarbon Processing*, **46**(1967), 214-215
- [33] C. M. Vest and V. S. Arpaci, Stability of natural convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, **36**(1969), 1-15
- [34] R. L. Devaney 著, 後藤憲一訳, カオス力学系入門, 共立出版(1990), p.39
- [35] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, **16**(1985), 285-317
- [36] X. Zeng, R. Eykholt and R. A. Pielke, Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 3229-3232

- [37] Y. M. Chen and A. J. Pearlstein, Viscosity-temperature correlation for glycerol-water solutions, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **26**(1987), 1670-1672
- [38] A. Brandt, Multi-level adaptive solutions to boundary -value problems, *Math. Comp.*, **31**(1977), 333 -390
- [39] P. Le Quere, A note on multiple and unsteady solutions in two-dimensional convection in a tall cavity, *ASME J. Heat Trans.*, **112**(1990), 965-974
- [40] W. F. Lawkins, C. S. Daw, D. J. Downing and N. E. Clapp, Jr., Role of low-pass filtering in the process of attractor reconstruction from experimental chaotic time series, *Phy. Rev. E*, **47**(1993), 2520-2535
- [41] 石田秀士, 木本日出夫, 主流を伴う衝突噴流現象に対する複合格子法の適用 (第1報, 誤差解析に基づく局所細分割の効果の検討), *日本機械学会論文集 (B編)*, **64**(1998), 128-135
- [42] J. B. Segur, Physical properties of glycerol and its solutions, *Glycerol* (ed. Miner, C. S. and Dalton, N. N.), 238-334, Reinhold

## 第3章 二次元矩形密閉容器内熱対流場に対する加振の影響

### 3.1 緒言

本章では密閉容器内に誘起された熱対流場について、容器そのものを振動させることによる影響について考察する。本章で扱う容器は前章と同じく高温・低温側壁を有する二次元性を仮定した密閉容器ではあるが、鉛直方向に振動しており、容器に固定した座標系から見た場合、体積力には静止系における重力に加えて振動に基づく非定常の見かけの重力が加わる。すなわち強制振動系であり、この点で自励系である前章とは大きく異なる。また本章で扱う熱対流場は前章と同じく流れのあるモードに対してその周りの変動エネルギーは流れに沿って（アンサンブル）平均化された流れ場から常に供給されて一定レベル以上に維持されるという密閉容器の特性を有しているが、特に本章の場合、速度の変動エネルギーが主として見かけの変動重力（と速度成分の相関）によりもたらされる点が前章と大きく異なる。これにより容器内部に形成される流れ場は前章のものと比較して極めて多彩で変化に富むものとなる。

#### 3.1.1 加振密閉容器内部の熱対流場

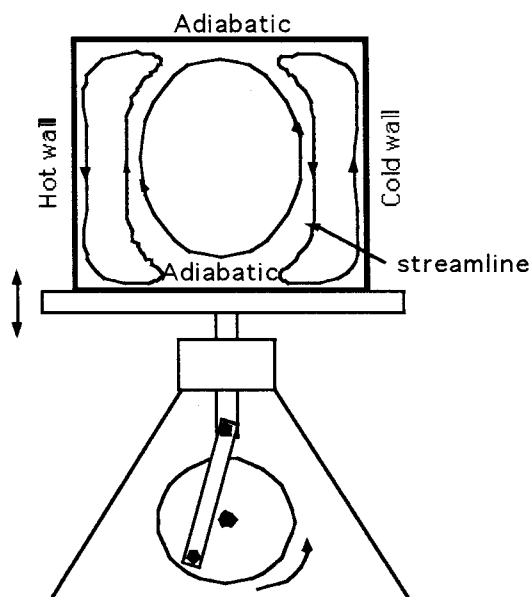


図 3.1 加振熱対流場の概念図

音波もしくは熱伝達面の直接振動により熱伝達面周辺の流体を振動させることで生じる熱対流現象については、その工学的応用を背景としてこれまで数多くの研究が

報告されている．このような熱対流場の概念図を図 3.1 に示している．これらの研究には加振による境界層に対する影響，もしくは 2 次元流れ場の安定・不安定化に関してそれに関連する側面に着目したものが多く[1][2][3]，密閉容器内部の熱対流場そのものに対する加振の影響を扱ったものは比較的少ない．

Fu らは 2 次元正方密閉容器に対して，静止定常状態の自然対流場に鉛直方向振動を加えることによって生ずる平均熱伝達率の時間変動特性ならびに熱対流場の変化を有限要素法による数値解析により類型化した上で詳細に論じており[4]，その中で共鳴現象やヒステリシス現象の存在を明らかにしている．さらに同じ温度境界条件下で流体が静止した状態から振動を加えた場合の平均熱伝達特性の過渡応答について論じている[5]．また同様の解析を鉛直円筒について Ferguson が行っている[6]．

### 3.1.2 容器のアスペクト比の影響

またこのような振動熱対流場においては容器のアスペクト比も重要なパラメータである．Fu が行っている正方容器以外の密閉容器を扱った研究例として Fobes ら[7]は水平方向に温度差を設けた直方体密閉容器に鉛直方向の振動を加え，容器のアスペクト比を変化させた場合の平均熱伝達率に対する加振の影響について実験的に検討した結果，共振周波数の前後で熱伝達が著しく促進されることを明らかにした．また Gershuni ら[8]は無重力場で容器に高周波振動を加えた場合に成立する近似を基礎方程式に施し，アスペクト比を変化させた場合の熱対流場や平均熱伝達特性の検討を数値解析により行っている．

### 3.1.3 加振熱対流場の非定常性

一方，近年熱対流場の持つカオス性については水平円柱上方や積層多孔質内の自然対流をはじめとして数多くの報告がある[9][10]．前章では自励振動系に生ずるカオスの例として鉛直平行平板間内部や同軸 2 重円筒間内に生ずる非定常熱対流場を取り上げ，グラスホフ数が増大するにつれて 2 次流れセルを伴う準定常流れ場の中にカオス性を持つ温度の時間変動が生ずること等を実験的，数值的に明らかにした．加振密閉容器に対するこのようなアプローチの例として平均熱伝達率の時間変動特性から Takens の埋め込み等[11]により得られるアトラクタ[6]やリサージュ曲線[2]の形状が加振周波数の変化に伴って定性的に変化することが報告されている．

### 3.1.4 本章の目的

このように振動する密閉容器内部に形成される非定常熱対流場は極めて複雑であるが，2 次元矩形密閉容器において加振周波数を変化させた場合に，その非定常特性に関してカオス性を判別するリアプノフ指数を始めとする物理量の定量的な変化と，流れのモード変化のような定性的変化を結びつけて論じているものは見あたらない．特に静止重力が変動による見かけの重力と同じオーダーで無視できない場合にアスペクト比を変化させて熱対流場に対する加振の影響を検討したものは流れ場の定性

的变化も含めて皆無である。

そこで本章ではまず正方形断面を有する容器内部に生ずる自然対流場について加振周波数の変化に伴う物理量の時間変動特性の変化を詳細に検討した。なお正方形断面の場合，加振周波数の変化に伴う熱対流場の変化に限れば Fu[4]が詳細に論じているので本章ではこれを扱うことを避け，もっぱら容器壁面での平均熱伝達特性の定量的な変化，特に周波数分析からみた特性の変化について数値的に詳細に検討した上で，平均熱伝達率の時間変化から Takens の埋め込み[11]によって描かれるアトラクタの定性・定量変化やカオス性の変化を調べた。

さらに容器のアスペクト比が3と5の場合について加振周波数を変化させた場合の熱対流場の変化について，アスペクト比が1の場合の結果と比較しながら数値的に検討し，さらに平均熱伝達特性の非定常特性についても流れのモード変化を考慮に入れながらカオス性の変化も含めて詳細に検討した。

## 3.2 容器内振動熱対流場の熱伝達特性に対する加振の影響

### 3.2.1 数値計算法

#### 3.2.1.1 基礎式・計算条件

本節で用いる計算モデルを図 3.2に示す。現象は紙面に垂直方向に一様で2次元のであるとして，計算には図に示す容器に固定された2次元座標を用いる。高さ・幅共にLの正方形断面容器の鉛直二面(左右側壁)の片方(図の左面)を高温壁，他方を低温壁とし，上下面を断熱面とした。これに鉛直方向の振動を加えた場合に振動最大速度が小さく流体の圧縮性が無視でき，内部の流体の物性値は一定でブシネスク近似が可能であるとする。代表温度 $\Theta$ (=高温壁温度  $T_h$  - 低温壁温度  $T_c$ )，代表長さ L 及び動粘性率 $\nu$ により無次元化された基礎式は以下の式(1)～(3)で表される。

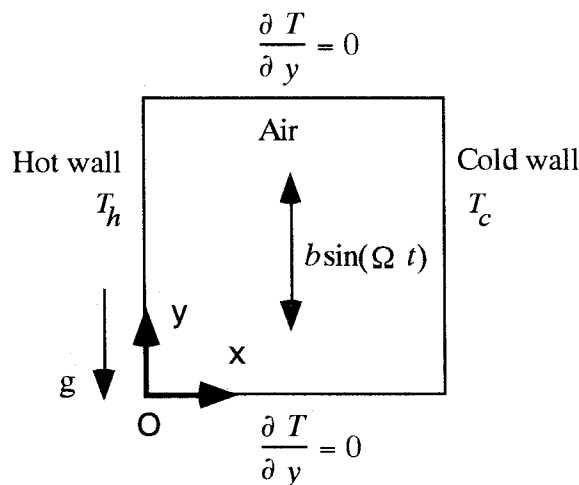


図 3.2 計算モデル

$$\nabla^2 \varphi = -\zeta, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = (Gr - \omega \sqrt{2G} \sin \omega t) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 \zeta \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \quad (3.3)$$

$\varphi$  : 無次元流れ関数                       $\zeta$  : 無次元渦度  
 $\theta$  : 無次元温度 ( $0 \leq \theta \leq 1$ )       $\omega$  : 無次元角速度

ここで $\omega$ は容器の振動角速度 $\Omega$ を以下のように無次元化したものである。

$$\omega = \Omega L^2 / \nu \quad (3.4)$$

$G$ は振動グラスホフ数[5]で、体膨張係数 $\beta$ 、容器の振動振幅 $b$ を用いて以下のように定義される。

$$G = (\beta b \Omega (T_h - T_c) L)^2 / 2\nu^2 \quad (3.5)$$

また  $Gr, Pr$  はそれぞれ  $L, \theta$  を代表長さ、代表温度差としたグラスホフ数、プラントル数である。なお、計算に際して初期条件は計算対象空間全体で温度を  $T_c$ 、流れ関数を 0 とする。そして  $t > 0$  において図 3.2 に示す左側鉛直壁温度を  $T_h$ 、右側鉛直壁温度を  $T_c$ 、上下壁面を断熱、壁面で速度 0 なる境界条件の下で、 $b \sin(\Omega t)$  で表される振動を容器全体に加えるものとする。なお座標系は容器に固定されているので、(3.2) 式の導出の際には静止した状態での重力  $g$  に振動による見かけの重力  $-b \Omega^2 \sin(\Omega t)$  を加えたものを体積力としている。

本節ではプラントル数 ( $Pr=0.71$ )、グラスホフ数 ( $Gr=1.4 \times 10^4$ )、振動グラスホフ数 ( $G=1.0 \times 10^6$ ) を固定し、無次元角速度  $\omega$  を 10 から 7680 まで変化させた。このように  $Gr, Pr$  及び  $G$  を固定して  $\omega$  を変化させる計算は  $b \Omega$  を固定して周波数を変化させる、すなわち容器に与える時間平均の運動エネルギーを固定して周波数を変化させる計算を行うことを意味している。無次元数の値を上のように定めることは例えば流体を空気として代表長さを 2.2cm、代表温度を 20°C、代表温度差を 10°C とした場合は  $b \times \Omega = 30$  [m/s] の下で  $\Omega$  を  $0.33 \leq \Omega \leq 2.5 \times 10^2$  [1/s] の範囲で変化させることに相当しているが他の選択もまた可能であり、以下では定式化の際に仮定した条件を満たす物性値を選択した場合の議論に限定している。上記の  $Pr, Gr, G$  の値は Fu[5] が用いているものと同じであるが、Fu[4] はレイリー数を変化させて検討した結果、これらの値の組み合わせを用いた場合、無次元角速度の変化に対する熱対流場の変化がより顕著に現れることを見いだしている。そこで本節でもこの値を用いた。

計算の際は基礎式を時間項について前進差分、対流項について 2 次精度 QUICK、拡散項について中心差分によりそれぞれ離散化した。また左右壁の壁表面平均ヌセルト数が一致するまで自然対流場を時間発展させ、それ以降の現象を準定常状態として扱った。本節で扱った計算パラメータの場合、計算結果は以下の関係を満たしている。

$$|\text{Nu}_{x=0} - \text{Nu}_{x=1}| / \text{Nu}_{x=0} < 6.0 \times 10^{-4}$$

ここで  $\text{Nu}_{x=0}$  及び  $\text{Nu}_{x=1}$  はそれぞれ高温壁，低温壁における壁表面平均ヌセルト数で壁面における局所ヌセルト数(それぞれ  $-\partial T / \partial x|_{x=0}$ ， $-\partial T / \partial x|_{x=1}$ )を壁面全体にわたり積分した後，壁面の大きさで割ったものであり，時間  $t$  の関数である．なお  $\omega=1496$  および 1778 では後述の通り長時間経過後も準定常状態で特徴づけられる高温側・低温側の壁表面平均ヌセルト数の一致が見られないので，想定される時間平均値の周りで変動を始める  $t>0.3$  を特に本節では準定常状態として扱い，各種の平均ヌセルト数を算出する際は高温側の局所ヌセルト数を使用した．

### 3.2.1.2 数値計算法の基本的検討

(1)加振無しの場合 本節では容器に振動を加える計算を行う前に数値計算法の基本的な検証としてまず容器に振動を加えない場合の数値計算を行った． $\text{Pr}=0.71, \text{Ra}=10^2 \sim 10^6$  の場合について  $80 \times 80$  の格子を用いて定常状態での高温壁面(低温壁面)での壁表面平均ヌセルト数( $\text{Nu}$ )を計算した結果を図 3.3 に黒丸で示す．

この図で実線・破線はそれぞれ Churchill[12], Batchelor[13]が提案した式の値を示しており，Churchill の式の適用範囲は  $10^2 \leq \text{Ra} \leq 10^9$  で，Batchelor の式は  $\text{Ra} < 10^3$  が適用範囲とされている．図 3.3 によると計算による壁表面平均ヌセルト数の値は Churchill ならびに Batchelor の式の値とよく一致しており，本節で用いる基本的な計算法は妥当であると判断できる．なお図 3.3 で  $\text{Ra}=10^4$  付近において Churchill の式による値と比べて本計算で得られた値は若干小さいが， $5.0 \times 10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^6$  の範囲内でこれと同様の傾向をもつ計算例が数多く報告されており[12]，Churchill の提案した相関式自体がこのレイリー数の範囲で壁表面平均ヌセルト数を過大評価している可能性があると思われるが，対応する範囲で行われた実験結果は見あたらない．

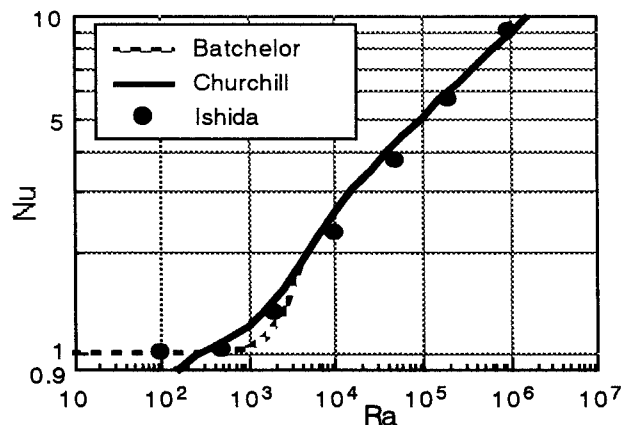


図 3.3  $\text{Ra}$  に伴う壁表面平均ヌセルト数の変化 (加振なしの場合)

(2) 加振有りの場合 容器に振動を加えた場合の数値計算手法の検証については，本節で扱っている計算対象そのものに対する実験結果は見あたらない．そこで格

子分割数の必要数を検討するために、無限平行平板間の振動熱対流場の解析解との比較を行った。本節の計算対象と同様、鉛直方向に設置された無限平行平板の片面を高温壁として温度  $T_h$ 、他面を低温壁として温度  $T_c$  で固定し、壁面での（相対）速度を 0 として両平板に  $b \sin(\omega t)$  で表現される振動を加えたとした場合、(3.1)～(3.3)と同じ無次元化を施して鉛直方向の現象の一様性を仮定した上で平板に垂直な方向に  $x$  軸を取り鉛直方向に  $y$  軸をとると、 $y$  方向の圧力勾配( $t$  のみの関数)を 0 とした場合の基礎式は以下のようなになる。

$$u=0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (Gr - \omega \sqrt{2G} \sin \omega t) \theta \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

これらの式から特解として以下のような解析解が得られる。

$$v = f(t, x, k) + f(t, x, -k) + \sqrt{2G} \cos \omega t + \frac{Gr}{6} x(x-1)(x-2) \quad (3.9)$$

$$\theta = 1-x, u=0 \quad (3.10)$$

ここで

$$f(t, x, k) = A(k) e^{kx} \sin(\omega t + kx) + B(k) e^{kx} \cos(\omega t + kx)$$

$$k = \sqrt{\omega/2}$$

$$A(k) = \frac{\sqrt{2G} \sin 2k}{2(\cosh(2k) - \cos(2k))}, \quad B(k) = \frac{\sqrt{2G}(\cos(2k) - e^{-2k})}{2(\cosh(2k) - \cos(2k))}$$

である。

一般に面の方向に振動する無限平板近傍で生ずる流れ場の境界層(Stokes 層[14])の厚さ  $\delta$  は

$$\delta/L = 4.6 \sqrt{2/\omega} = 4.6/k \quad (3.11)$$

で表され、これが本節で扱う計算対象における境界層のスケールを与えており、これは無次元角速度が大きくなるに従って小さくなる。そこで本節で用いる最大の無次元角速度である  $\omega=7680$  において上記の  $v$  に関する解析解を  $x$  方向に 80 分割して基礎式を離散化して得られた数値解と比較した結果を図 3.4 に示している。なおグラスホフ数、振動グラスホフ数は本節の条件に合わせそれぞれ  $1.4 \times 10^4$ ,  $1.0 \times 10^6$  とした。

図 3.4 に示すように解析解と数値解はよく一致しており、時間方向に 50 点 ( $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ )、空間 80 点 総数 4000 点について調べたところ  $v$  の最大値に対する相対誤差は全点について 2.1 % 以内である。同様の比較を  $\omega=10, 140, 1280, 2560$  並びに 5120 についても行ったところ、相対誤差は  $\omega=7680$  の場合に比べて小さく、調査した全点について 1.5 % 以内であり多くは 1.0 % 未満であった。本節で扱っている計算対象は実際には 2 次元正方容器であるが、容器に振動を加えた場合の影響は無限平行平板と同程



度と考えられるので、上記の結果から  $x$  方向  $y$  方向の分割数はそれぞれ 80 で十分であると考えられる。

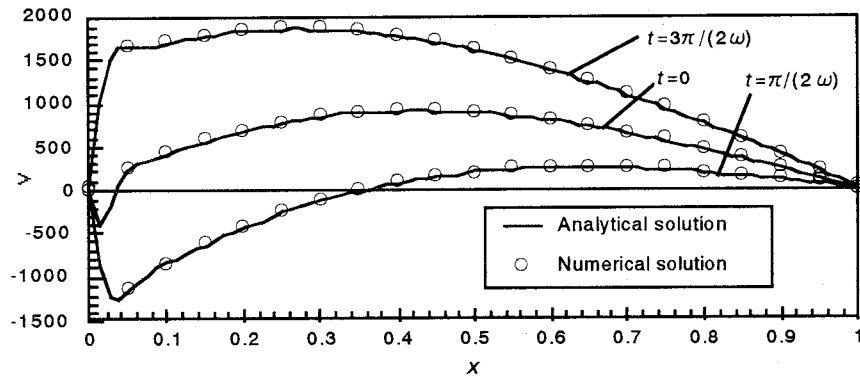


図 3.4 Y 方向速度分布の計算例 ( $\omega=7680$ )

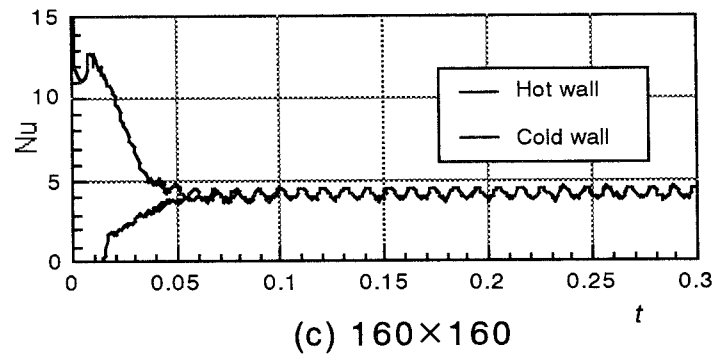
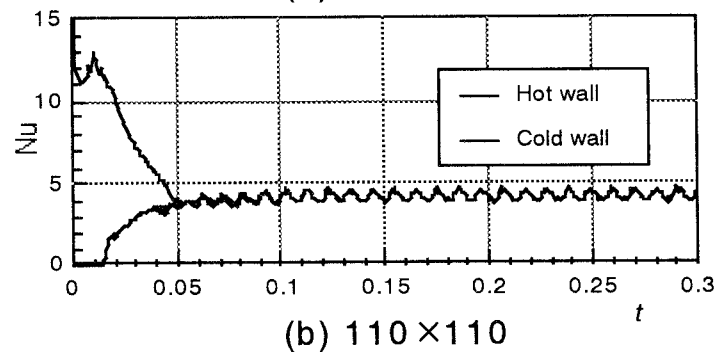
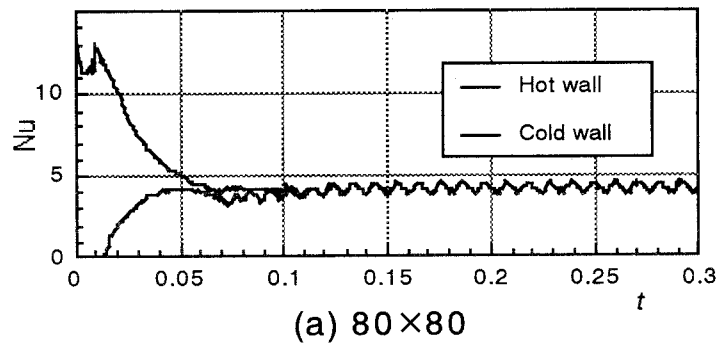


図 3.5 壁表面平均ヌセルト数の時間変化 (計算格子を変化させた場合)

表 3.1 ヌセルト数の比較

| Grid                  | 80×80                  | 110×110                | 160×160                |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\overline{Nu}$       | 4.197                  | 4.176                  | 4.162                  |
| $\overline{Nu}_{max}$ | 4.581                  | 4.561                  | 4.542                  |
| $\overline{Nu}_{min}$ | 3.821                  | 3.805                  | 3.793                  |
| $P_{Nu}$              | $1.044 \times 10^{-2}$ | $1.044 \times 10^{-2}$ | $1.048 \times 10^{-2}$ |

(3) 格子分割数の影響 実際の計算対象に対して格子分割の影響を調べるために $\omega=5120$ に対して格子分割数を $80 \times 80$ ,  $110 \times 110$  及び  $160 \times 160$ と変化させた場合の壁表面平均ヌセルト数の変化と流れ場の定性的な変化を調べた．上の3つの格子は(3.11)式で示されているストークス層の中にそれぞれ7セル, 10セル, 15セルを有する．これらの格子を用いて計算した壁表面平均ヌセルト数( $Nu$ )の時系列変化を図3.5(a)～図3.5(c)に示す．この図より低温壁, 高温壁における壁表面平均ヌセルト数はそれぞれの格子で初期に若干の差異が見られるが, 準定常状態においては位相のズレを除いて時間変動の様子が一致している．また表3.1に準定常状態における壁表面平均ヌセルト数の時間変動を $80 \times 80$ ,  $110 \times 110$ ,  $160 \times 160$ の3つの格子で計算した結果について時間・壁表面平均ヌセルト数( $\overline{Nu}$ :高温壁の壁表面平均ヌセルト数を時間方向に積分し積分時間間隔で除したもの), 極大値の平均値( $\overline{Nu}_{max}$ )および極小値の平均値( $\overline{Nu}_{min}$ ), 平均無次元周期( $P_{Nu}$ ) (それぞれ図3.5において無次元時間 $t=0.14 \sim 0.3$ の範囲で平均を取ったもの)を示しているがそれぞれ誤差1%以内で一致している．さらに図としては示していないが, これら3つの格子の計算結果について鉛直壁近傍・容器全体における流れ場の定性的傾向を詳細に調べた結果, 格子分割数の変化に伴う流れ場の傾向の変化は見られなかった．

以上の結果から, 本節では $x, y$ 軸方向にそれぞれ80分割した格子を用いて計算を行ったが, 以下に示されている計算結果は十分な精度を有すると考えている．

## 3.2.2 計算結果

### 3.2.2.1 平均ヌセルト数の時間変動特性

(1) 定性的変化 準定常状態における無次元角速度を変化させた場合の時間・壁表面平均ヌセルト数の変化を図3.6に示す．図中の実線はFuら[4]の計算結果を示しているが, このFuらの計算では初期条件に計算対象となる角速度より小さい, そして値の近い角速度における準定常状態の解を使用しており, 本節で用いている初期条件(温度が一様で静止した状態)とは異なる．しかしながら両者は $\omega=1778$ の場合を除き相対差8%以内で一致しており, 初期値による差異はほとんど見られない．

Fuら[4]は無次元角速度の変化に伴う熱伝達特性の変化を表3.2に示す5通りに分類している．Fuらに従って本章では図3.6で静止状態のヌセルト数2.25(表3.3)とほ

表 3.2 無次元角速度の変化に伴う熱対流場の変化に関する 5 類型

| Region | $Fu^{(8)}$                | Present Study             |
|--------|---------------------------|---------------------------|
| I      | $\omega < 14$             | $\omega < 14$             |
| II     | $14 \leq \omega < 155$    | $14 \leq \omega < 140$    |
| III    | $155 \leq \omega < 1270$  | $140 \leq \omega < 1778$  |
| IV     | $1270 \leq \omega < 3250$ | $1778 \leq \omega < 3100$ |
| V      | $\omega \geq 3250$        | $\omega \geq 3100$        |

表 3.3 時間-壁表面平均ヌセルト数

| $\omega$        | 0    | 10   | 40   | 991  | 1280 | 2560 | 5120 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\overline{Nu}$ | 2.25 | 2.04 | 2.67 | 5.64 | 5.94 | 4.23 | 4.21 |

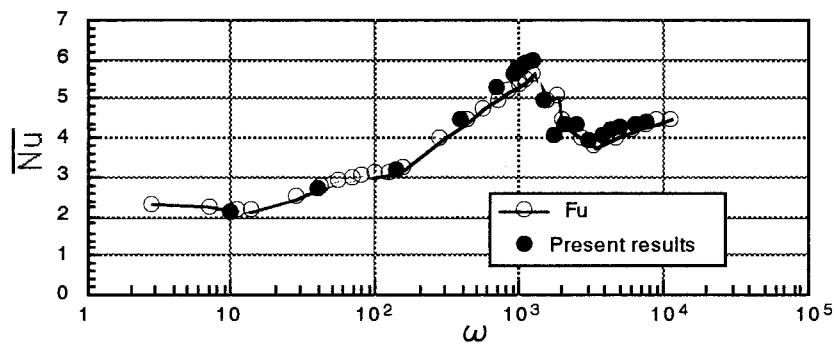


図 3.6 無次元角速度の変化に伴う時間-壁表面平均ヌセルト数の変化

ば同じ時間・壁表面平均ヌセルト数を示す $\omega=0\sim14$ を準静的対流領域(I), 熱対流場の非線形性により時間・壁表面平均ヌセルト数が静止状態のものより大きくなり始める $\omega=14\sim140$ を振動対流領域(II), 時間・壁表面平均ヌセルト数が無次元角速度に対して著しく増大する $\omega=140\sim1778$ の領域を共鳴振動対流領域(III), 一時的に時間・壁表面平均ヌセルト数が無次元角速度の増大により減少する $\omega=1778\sim3100$ の領域を中間対流領域(IV), そして最後に再び時間・壁表面平均ヌセルト数が無次元角速度の増大に伴って増加する $\omega>3100$ の領域を高周波振動対流領域(V)と定義した. なお  $Fu$  ら[4]は共鳴振動対流領域を渦度が著しく増大する領域として $\omega=140\sim1280$ の範囲で定義しているものの,  $\omega=1778$ でも渦度は依然強く, 後述の通り $\omega=1280\sim1778$ は共鳴振動対流領域で示される性質を保有しているので本節(本章)では上の無次元角速度の領域で共鳴振動対流領域を定義した. その他の領域についても範囲の設定値に若干の差異があるが, これは本節で計算を行った無次元角速度の値に基づいているからで実質的に変わりはなく,  $Fu$  の分類を採用できると考えられる.

このように壁表面平均ヌセルト数の時間変化の定性的傾向は大きく5つに分けられるが, それぞれの特性を示す代表的な角速度として $\omega=10, 40, 991, 2560$  および  $5120$  を選び, 左右壁の壁表面平均ヌセルト数の時間変化を振動を加えない場合と併せて図 3.7(a)～図 3.7(e)に示す.

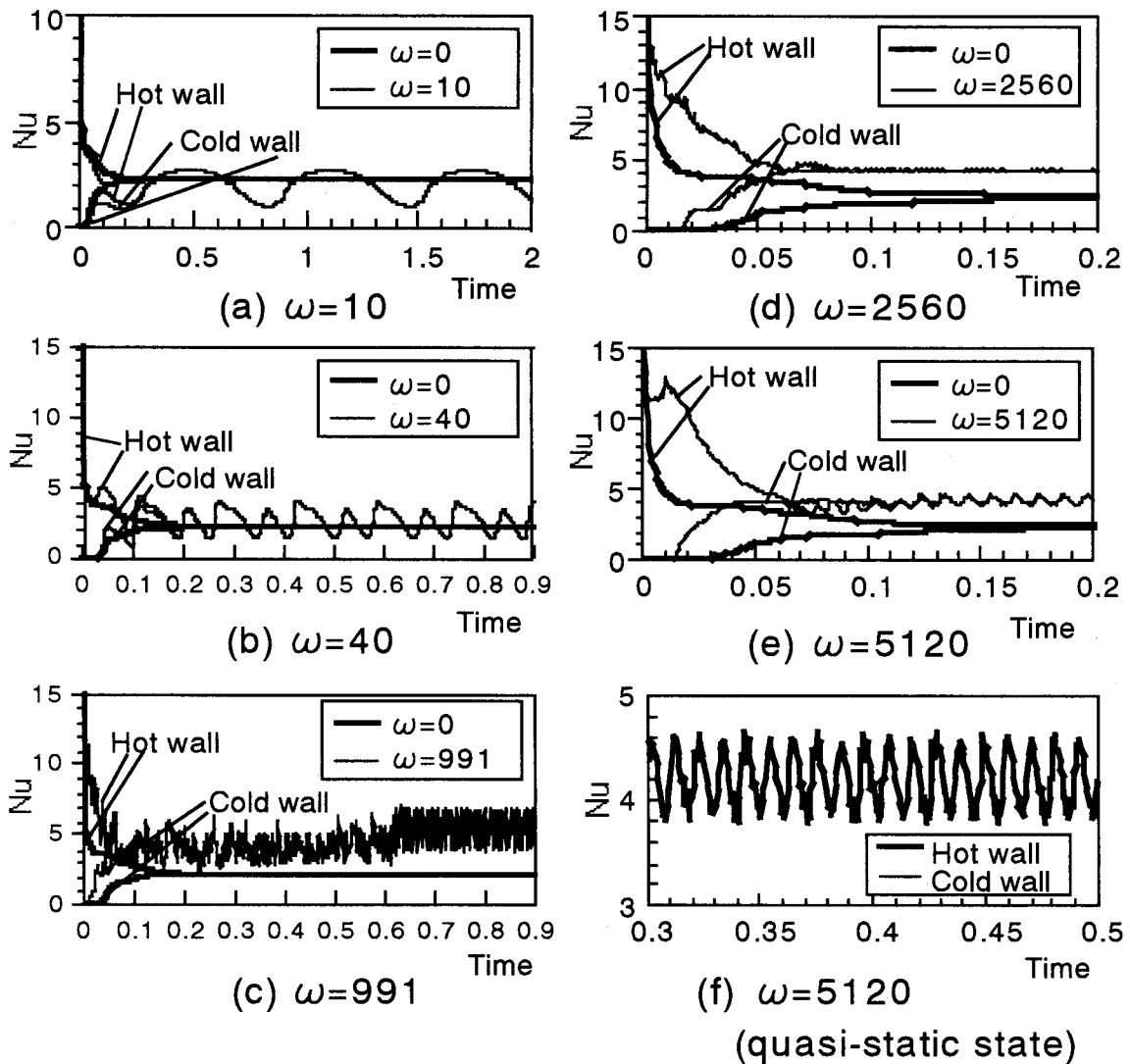


図 3.7 壁表面平均ヌセルト数の時間変化

準静的対流領域(I)に属する $\omega=10$ (無次元周波数 $f=\omega/2\pi=1.59$ )では、図 3.7(a)に示すとおり高温側・低温側の壁表面平均ヌセルト数は $t=0$ の時点から加振周波数と同じ周波数で変動しながら十分時間が経過したところで両者は一致し、 $\omega=0$ の壁表面平均ヌセルト数の周りで正弦波に似た周期変動をする。準定常状態における壁表面平均ヌセルト数の時系列データをFFTにより周波数分析した結果を図 3.8(a)に示しているが、この図より加振周波数とその高調波成分が検出でき、全体として時間変動は周期的であることが分かる。

振動対流領域(II)に属する無次元角速度 $\omega=40$ ( $f=6.4$ )の場合(図 3.7(b))では高温側・低温側壁表面平均ヌセルト数は $t=0$ の時点から加振周波数と同じ周波数で変動しながら最終的に両者は一致し $\omega=10$ の場合と同じく周期変動をするが、時間・壁表面平均ヌセルト数は静止状態の場合に比べて高く、また一周分の壁表面平均ヌセルト数の時間変化をみると $\omega=10$ の場合と違い二つのピークを持つ。準定常状態における壁表面

表 3.4  $Nu$  の不規則変動が見られる時間の上限

| $\omega$ [-] | 944 | 991 | 1039 | 1144 | 1280 | 1496 | 1778 |
|--------------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Range        | 0.1 | 0.6 | 0.3  | 1    | 1    | >10  | >10  |

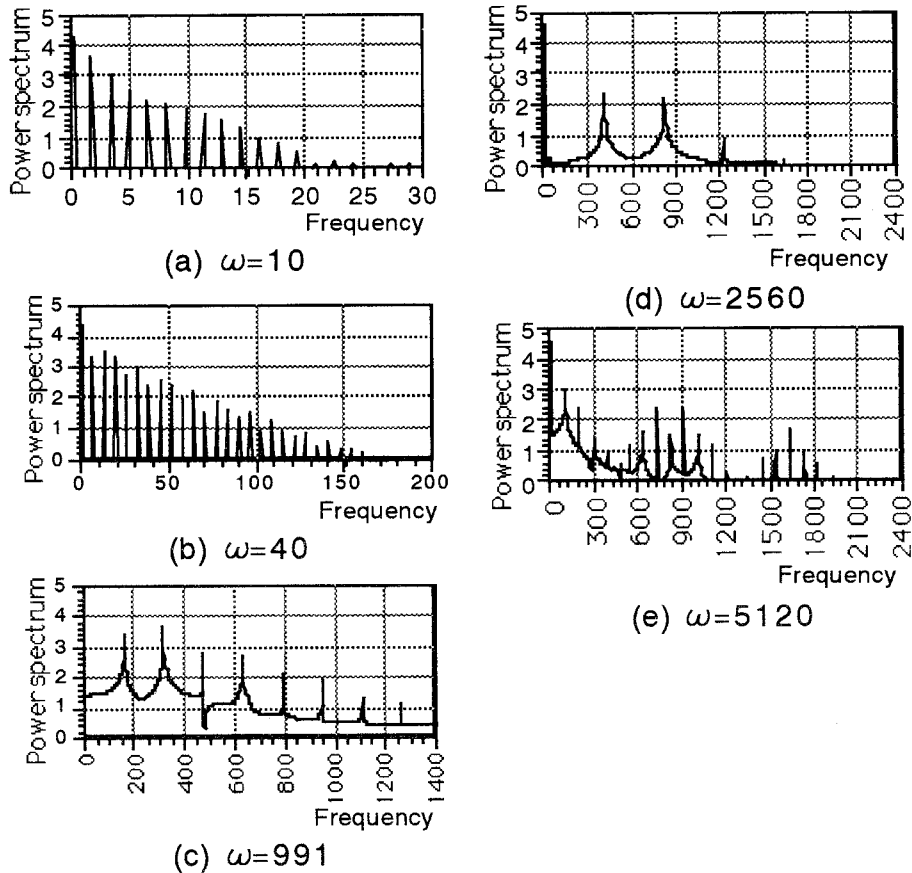


図 3.8  $Nu$  の周波数分析結果

平均ヌセルト数の時系列データを FFT 解析の結果を図 3.8(b)に示しているが、 $\omega=10$  の場合と同様に加振周波数とその高調波成分が検出でき、全体として時間変動は周期的であることが分かる。

共鳴振動対流領域(III)では $\omega=991(f=204)$ の例(図 3.7(c))に示されるように他の角速度と異なり、 $t=0$ に近いところで不規則で非周期的な壁表面平均ヌセルト数の変動が見られ、高温壁・低温壁における壁表面平均ヌセルト数が一致しない状態が現れる場合がある。このような不規則変動の見られる時間の範囲の上限値を表 3.4にまとめているが、表に示すとおり周波数が大きくなるにつれて不規則変動を示す時間範囲は大きくなる傾向が見られる。特に本節で扱った加振周波数のうち $\omega=1496$  および 1778 では無次元時間  $t < 10$  において準定常状態とはならず、 $t > 10$  で準定常状態に達する可能性はあるが、本節では計算を行っていない。また共鳴振動対流領域では表 3.3に示

すとおりの準定常状態での時間・壁表面平均ヌセルト数が静止状態に比べて著しく大きくなり $\omega=1280$ で最大値( $=5.94$ )となっている。この共鳴振動対流領域はFuら[4]が加振周波数を上げた場合に時間・壁表面平均ヌセルト数が著しく増大する領域と定義しており、渦度の最大値を生ずる角速度 $\omega=1268$ を共鳴角速度(Fuら[4]では共鳴周波数)と定義した上で対流場(ストークス層)と振動の周波数が一致するという条件に基づくスケール解析からこの値がおおよそ $\sqrt{2G}$ となることを理論的に導いている[4]。準定常状態では $\omega=1496$ および $1778$ の場合を除いて壁表面平均ヌセルト数の時間変化は周期的であり、FFT解析の結果(図3.8(c))に示すとおりの変動は加振周波数とその高調波成分で構成されている。

中間対流領域(IV)に属する $\omega=2560(f=407)$ になると図3.7(d)に示されているように、壁表面平均熱伝達率の変動振幅はきわめて小さくなり、ヌセルト数の時間変動のスケールからは平均ヌセルト数は準定常状態においてほぼ一定とみなせる。しかし実際には平均ヌセルト数はほぼ周期的な変動をしており加振周波数の増大に伴って時間・壁表面平均ヌセルト数は減少する。準定常状態では図3.8(d)に示すとおりの壁表面平均ヌセルト数の変動に加振周波数とその高調波成分が検出でき、全体として時間変動は $\omega=10, 140$ の場合と同様周期的である。

高周波振動対流領域(V)に属する $\omega=5120(f=815)$ の場合では加振周波数とは異なった低周波数の変動が顕著となり(図3.7(e))平均ヌセルト数の変動は一見周期的であるが、準定常状態における時間変動を抜き出した図3.7(f)に示すとおりの若干不規則な変動が見られる。この場合のFFT解析の結果(図3.8(e))をみると加振周波数とその高調波成分に加えて場に固有の100をピークとする周波数成分とこれらの間の和差成分があらわれ、時間変動は準周期的であることが分かる。

**(2) ヒステリシス領域** 先に述べたように共鳴振動対流領域では本節で行った初期条件の下では振動開始直後に壁表面平均ヌセルト数の非周期・不規則な変動がみられる場合があり、このような熱対流場が生ずることをFuら[5]は指摘している。本節では共鳴振動対流領域に属する無次元角速度として $\omega=140, 398, 708, 944, 991, 1039, 1144, 1280, 1496$ および $1778$ の10通りについて計算しているが、このうち $\omega \geq 944$ で振動開始直後に壁表面平均ヌセルト数の不規則変動がみられた。さらに $\omega=1496, 1778$ の場合では無次元時間10経過後(それぞれ2381, 2830周期分に相当)も不規則変動が確認された。不規則変動状態が十分長い $\omega > 1100$ について、この不規則変動状態での時間・壁表面平均ヌセルト数と、長時間経過後の準定常状態(すなわち高温側・低温側壁表面平均ヌセルト数の一致後)における時間・壁表面平均ヌセルト数をFuら[4]の計算結果とともに図3.9に示す。図中に示されているFuらの計算結果[4]のうち、黒い実線で示されているものは計算対象となる角速度より小さい近傍の角速度での解を初期値に使用した場合で、灰色の実線は計算対象となる角速度より大きい近傍の角速度での解を初期値に用いた場合でありヒステリシスが存在している。図3.9より黒並びに灰色の実線で示される時間・壁表面平均ヌセルト数は本節において振動開始

### 第3章 二次元矩形密閉容器内熱対流場に対する加振の影響

後の不規則変動状態と準定常状態における時間・壁表面平均ヌセルト数にそれぞれよく対応している．よって本節においては図 3.9で灰色の実線で示された初期の不規則変動状態が現れる $\omega = 944 \sim 1778$ をヒステリシス領域と定義する．本節ではこのヒステリシス領域を含むように，共鳴振動対流領域の範囲を $\omega = 140 \sim 1778$ で定義した．

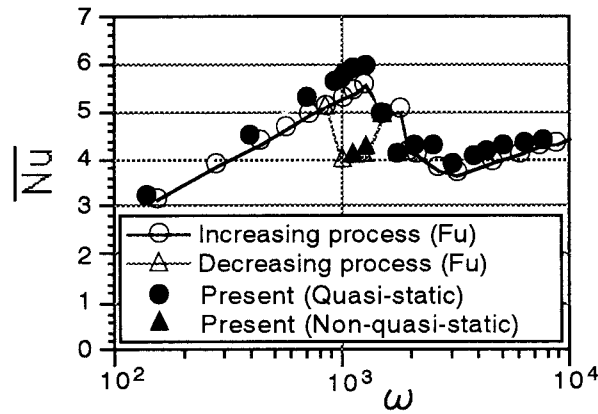


図 3.9 無次元角速度の変化に伴う時間壁表面平均ヌセルト数の変化

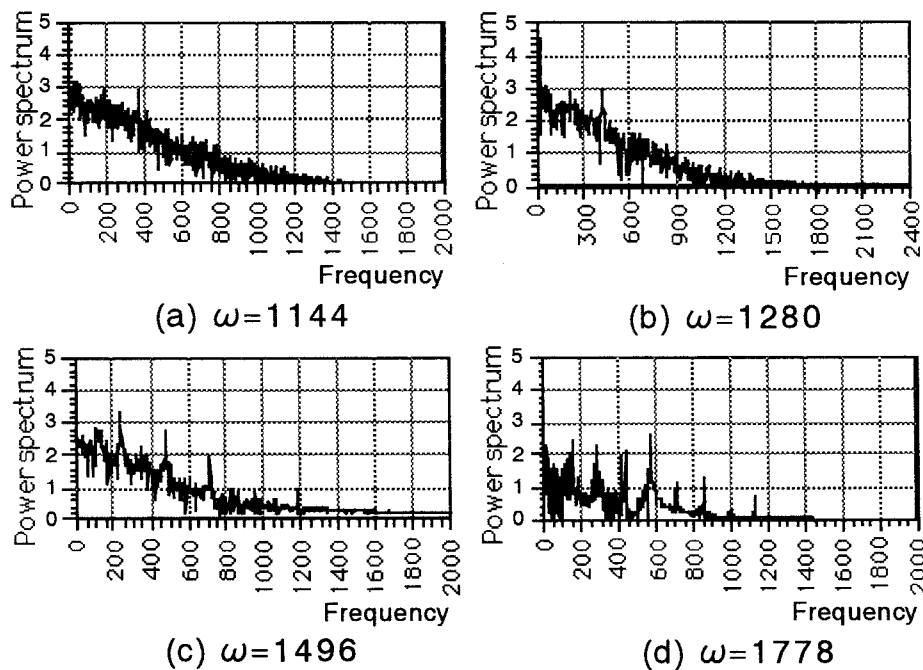


図 3.10 不規則変動状態における  $Nu$  の周波数分析結果

図 3.10にヒステリシス領域における不規則変動状態での壁表面平均ヌセルト数の時系列データに対し FFT 解析を行った結果を示す．この結果によると加振周波数とその高調波成分が検出されるものの，準定常状態でのデータと異なり全体として連続スペクトルが得られ，変動の不規則，非周期性を裏付けている．特に Fu ら[4]が指摘

している $\omega=1280$  の共鳴角速度近辺においてスペクトルは滑らかとなっている．そして加振周波数が大きくなるにつれて，加振周波数とその高調波成分以外の成分の保有するエネルギーレベルが小さくなっており，その後続くヒステリシスのない中間対流領域への遷移を見ることができる．

### 3.2.2.2 $Nu$ から再構築されたアトラクタの定性的変化

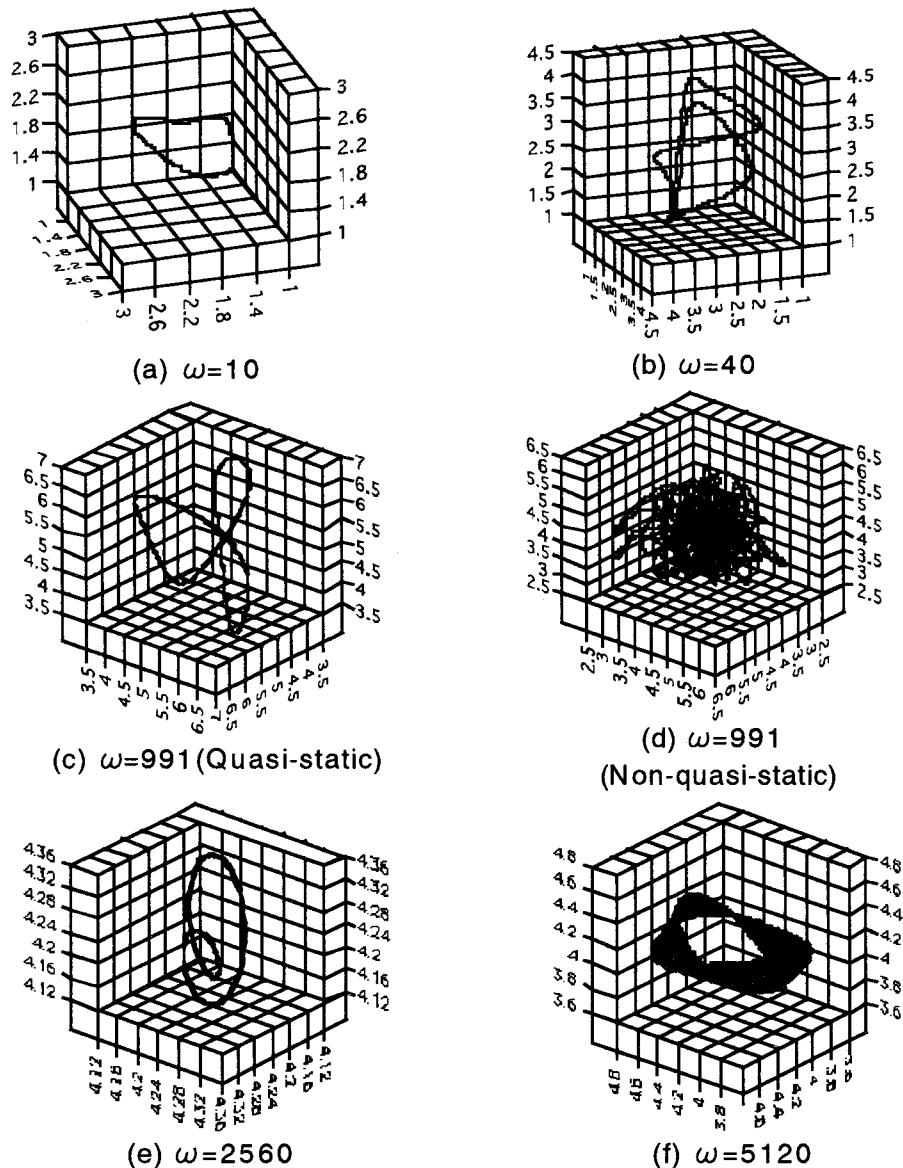


図 3.11  $Nu$  から再構築されたアトラクターの無次元角速度による変化

壁表面平均ヌセルト数の準定常状態での時間変化から Wolf ら[15]と同じく，遅れ時間 $\tau_d$ を用いて Takens の埋め込み[11]により位相空間を構成し，ある瞬間での値を基準に時間的に $\tau_d$ ,  $2\tau_d$ および $5\tau_d$ 後の平均ヌセルト数の3次元データの時間変動からアトラクタを描いたものを図 3.11(a)～図 3.11(f)に示している．この図 3.11中では遅れ時間 $\tau_d$ は 0.01 である．なお本節で扱う力学系は強制振動系であるので，正確にはこれ



らは時刻  $t$  を含めたプラス 1 次元の位相空間上の軌道の空間 3 次元部分空間に対する位相射影である。また振動を加えない場合( $\omega=0$ )におけるアトラクタは図示していないが、この場合には十分時間が経過すると壁表面平均ヌセルト数は一定となるので、アトラクタは「ポイントアトラクタ」と呼ばれる一点（座標：2.25, 2.25, 2.25）となる。

準静的対流領域(I)に属する $\omega=10$ におけるアトラクタを図3.11(a)に示しているが、この領域では壁表面平均ヌセルト数はサイン関数的な周期変動をすることから単純なリング状の一次元リミットサイクルを構成している。

振動対流領域(II)に属する $\omega=40$ においても準定常状態では周期変動が見られることから、アトラクタを描くと $\omega=10$ の場合と同様図3.11(b)に示しているとおりの一次元リミットサイクルを構成する。ただ1周期分の壁表面平均ヌセルト数の変動が準静的対流領域のように単純ではないのでその形状はリング状とはならない。

共鳴振動対流領域(III)においても準定常状態では周期変動することから、 $\omega=991$ の場合について図3.11(c)に示しているとおりのアトラクタはリング状でない一次元リミットサイクルとなる。ただ重要なのはこの領域(III)にはヒステリシス領域が含まれることで、 $\omega=991$ の場合に初期の不規則変動を示す壁表面平均ヌセルト数の時系列データ( $0.1 < t < 0.6$ )からアトラクタを描くと図3.11(d)のように閉曲線を描かずランダム性の強い形状となる。 $\omega=1496$ では壁表面平均ヌセルト数は本節で扱った時間範囲 $t < 10$ で不規則な変動を示し、そのアトラクタはランダム性の強い形状となるが、後述の最大リアプノフ指数、相関次元の値を参照するとこれはストレンジアトラクタであると判断できる。

中間対流領域(IV)に属する $\omega=2560$ においては図3.11(e)に示しているとおりのアトラクタは $\omega=40$ の場合と同じくリング状でない一次元リミットサイクルとなる。

高周波振動対流領域(V)に属する $\omega=5120$  (図3.11(f))では壁表面平均ヌセルト数の多重周期性を反映して単純な1次元とはならずメビウスの輪で知られる2次元的な幾何学図形が表れるが、これは3次元吸引リミットサイクルの一種であるツイストである。

このように不規則変動状態を含めて5つの領域はアトラクタを描くと位相空間上でそれぞれ特有の幾何学構造を持つ。

### 3.2.2.3 $Nu$ から再構築されたアトラクタの定性的変化

3.2.2.2の結果はFuら[4]が提案した加振角速度の変化に伴う壁表面平均ヌセルト数の変化を表す5つの領域(準静的対流領域、振動対流領域、共鳴振動対流領域、中間対流領域、高周波振動対流領域)を位相空間上に描かれるアトラクタの幾何学構造から求まる定量的な指標によって類型化できる可能性を示唆している。以下ではこの指標としてアトラクタ軌道座標の時間平均値、最大リアプノフ指数[15]、相関次元[16]をとりあげる。これに先立って壁表面平均ヌセルト数の変動時間スケールを調べるた

め壁表面平均ヌセルト数の時系列データから自己相関係数（Auto-correlated coefficient：以下 ACC と略記）を計算した．計算結果の例として $\omega=10$  と 1496 の場合について図 3.12(a),(b)に示している． $\omega=1496$  における時系列データ(図 3.12(b))は変動の時間スケールが小さいことを反映して $\omega=10$  の場合(図 3.12(a))と比べて ACC は時間の増大とともに一旦速やかに 0 まで減少している．

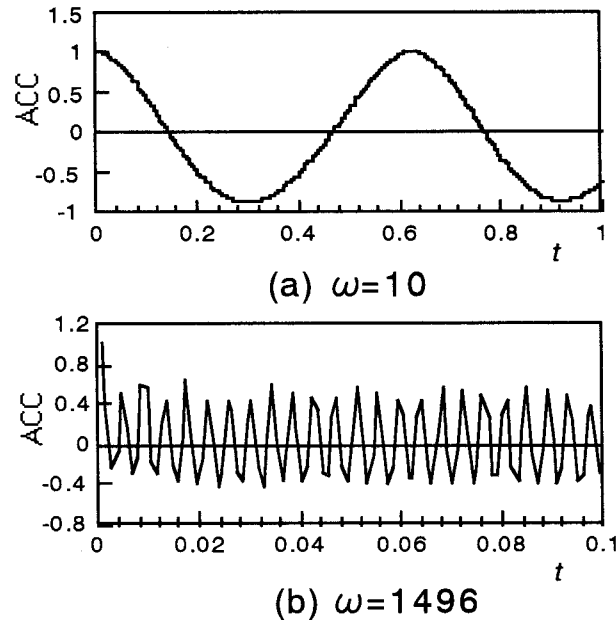


図 3.12 自己相関係数の例 ((a) $\omega=10$ , (b) $\omega=1496$ )

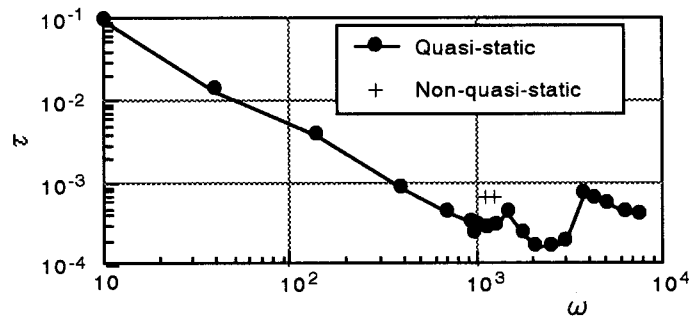


図 3.13 ACC が  $1/e$  になる時間スケール $\tau$ の無次元角速度による変化

本節で扱った全加振角速度の時系列データに対して ACC を計算し, 前章と同様  $t=0$  近傍で ACC が  $\exp(-t/\tau)$  ( $t$ : 時間,  $\tau$ : ACC が  $1/e$  となるスケール)で表されると仮定して, ACC が  $1/e$  となるスケール $\tau$ を最小自乗法により計算した．無次元角速度の変化に伴う $\tau$ の変化について図 3.13に示す．図 3.13によると共鳴振動対流領域以下の角速度の領域 $\omega < 2000$  においては $\tau$ は無次元角速度にほぼ逆比例して減少している．これはこの領域での壁表面平均ヌセルト数の変動を支配する時間スケールが $\omega$ の逆数すなわち加振周期に支配されていることを示している． $\omega > 2000$  では $\tau$ は加振周期から求ま

る時間スケールから離れ、場に固有の時間スケールを示すようになる。

無次元角速度に対する時間・壁表面平均ヌセルト数( $\overline{Nu}$ )の変化を図 3.6と図 3.9をまとめて図 3.14に示しているが、図 3.14と図 3.13を比較すると $\tau$ の減少はほぼ時間・壁表面平均ヌセルト数の増加に対応している。このことから時間・壁表面平均ヌセルト数を支配するパラメータとしての $\tau$ が非常に重要なパラメータであると判断できるが、この理由については今後の検討が必要である。

つぎに壁表面平均ヌセルト数の時系列データから Takens[11]の埋め込みによって生

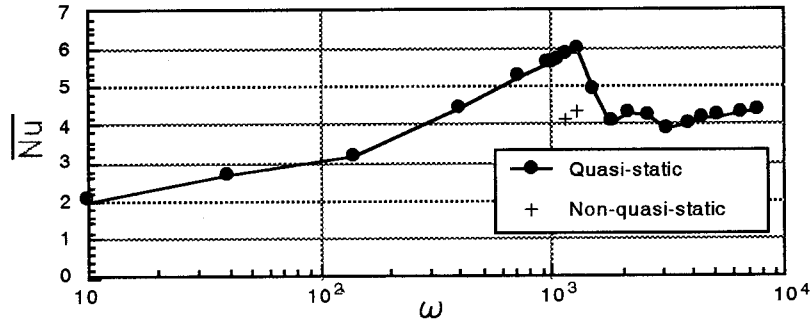


図 3.14 無次元角速度の変化に伴う時間・壁表面平均ヌセルト数の変化  
(図 3.6と図 3.9をまとめたもの)

じる媒介変数  $t$ (時間)を伴う軌道  $\mathbf{X}(t)$ は時刻  $t$ における壁表面平均ヌセルト数を  $Nu(t)$ で表すと

$$\mathbf{X}(t) = (Nu(t), Nu(t+\tau), \dots, Nu(t+(n-1)\tau)) \quad (3.12)$$

$\tau$ : 遅れ時間  $n$ : 埋め込み次元

と表現できるが、上の座標  $\mathbf{X}(t)$ の時間平均  $\bar{\mathbf{X}}$ を以下で定義する。

$$\bar{\mathbf{X}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(t) dt \quad (3.13)$$

本節で扱っている軌道  $\mathbf{X}(t)$ は最終的に図 3.11で示されているアトラクタに漸近するので、時間平均された座標  $\bar{\mathbf{X}}$ の成分は全て図 3.14で示される時間・壁表面平均ヌセルト数  $\overline{Nu}$ となり

$$\bar{\mathbf{X}} = (\overline{Nu}, \dots, \overline{Nu}) \quad (3.14)$$

と表現できる。 $\bar{\mathbf{X}}$ は準静的対流領域では $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタ周辺に存在しているが、それより大きい角速度領域では無次元角速度が増大するにつれてこのポイントアトラクタから離れていく。この $\bar{\mathbf{X}}$ は位相空間上で定義でき、上述のとおり時間・壁表面平均ヌセルト数と関係があるので位相空間上でFuらの5類型に対応する現象の変化を捉える重要な指標である。特に準静的振動対流領域と振動対流領域とはそれぞれ図 3.11(a)および(b)で示しているとおり共にリミットサイクルを構成するが、 $\bar{\mathbf{X}}$ により位相空間上で両者を分離することができる。

次にこの熱対流場の初期値に対する鋭敏な依存性(SDIC)を判断するため最大リアプノフ指数 $\lambda$ (単位は[bits/dimensionless time] : 通常定義のリアプノフ指数を  $\ln 2$  で除したもの)を準定常状態における時系列データから Wolf ら[15]の方法を用いて算出した。

Wolf らの計算法では計算の際に必要なパラメータとして 1)最大探索スケール 2)最小探索スケール 3)埋め込み次元 4)遅れ時間 5)データの置き換えにかかる発展時間の5つの値がある。まず 1)については対象時系列データの最大変動範囲の1%を用い 2)はこの値の3倍を使用した。3)4)5)については、Wolf らはこれらの値をある範囲で変化させて最適なパラメータの周辺で最大リアプノフ指数の値が変化しないことを確認することを薦めている。そこで本章では前章と同様これらの値を変化させて最大リアプノフ指数の変化を調べ、これらの値の平均値とばらつきからそれぞれ最大リアプノフ指数の評価値と誤差範囲(平均によって求まった最大リアプノフ指数が確率 50 パーセントで変動する範囲を採用)を計算した。遅れ時間を変化させる場合は自己相関係数が  $1/e$  となるスケール $\tau$ を基準にとり、各時系列データについて $\tau$ に対する倍率をパラメータに取った。これらの計算値を用いて最大リアプノフ指数を求めた結果を図 3.15 に示している。なお最大リアプノフ指数は図 3.13 の考察に基づいて代表時間スケールとして変動周期をとり $\lambda/\omega$ で表示した。

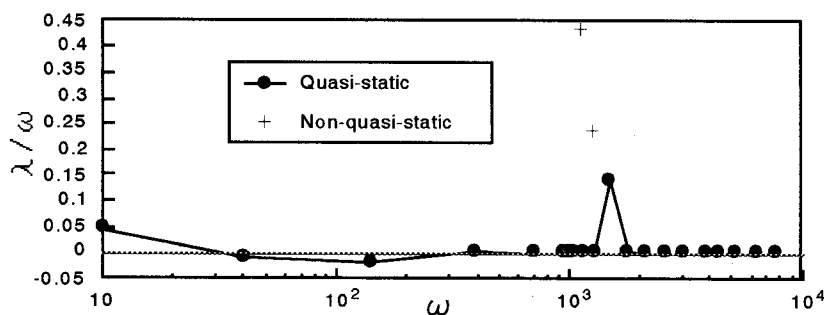


図 3.15 無次元角速度に伴う最大リアプノフ指数の変化

この表記によると $\omega > 2000$  では実際には代表時間スケールが変動周期に比べて小さくなるので、この表記では最大リアプノフ指数を過小評価する可能性があるが、もともこの領域では最大リアプノフ指数は小さく、 $\lambda/\omega$ を用いた表記による影響はほとんどない。誤差範囲は図 3.15 上に図示していないが $\lambda$ の大きい $\omega = 1144, 1280$  および 1496 の場合では比較的誤差が大きく $\omega = 1144$  で最大値 $\pm 0.02$ となる。その他のパラメータについては $\pm 0.01$ 未満である。

図にはヒステリシス領域の $\omega = 1144$  並びに 1280 における初期の不規則・非周期的な時系列データから得られた最大リアプノフ指数(記号+)も示しており、本節で例外的に準定常状態として扱った2つの場合のうち $\omega = 1496$  の場合を含めてこれらの値は $\lambda$ が正でその値は誤差を考慮しても十分大きくカオス性が検出できる。ただこの不規則・非周期的な時系列データに対する $\lambda$ の算出に際して、本章では埋め込み次元の変

化に対して $\lambda$ の値が安定する最適埋め込み次元を見いだすことができなかった．これらのデータではあらゆる3)4)5)のパラメータに対し100のオーダの最大リアプノフ指数が算出され，カオス性を有することは確実であるが，その値については上で見積もられた以上の誤差( $\pm 0.02$ )を含んでいる可能性があることを指摘しておきたい．それ以外は $\omega=10$ の場合を除いて $\lambda/\omega$ は負か0に近く，誤差範囲を考慮するとカオス性は検出されない． $\omega=10$ の場合では誤差を考慮してもなお $\lambda$ は比較的大きいが，この範囲ではアトラクタは一次元リミットサイクルで解析的には $\lambda=0$ のはずである．これはWolfらの計算アルゴリズムの中で計算の際に使用する軌道上の点に対する参照点を選択する際，時間的に近接する点を採用できないという制約から，リミットサイクルの場合に両者の点間の距離が大きくなることによる計算手法上の系統誤差と考えられる．ストレンジアトラクタもしくはツイストではこのような問題は起こらない．

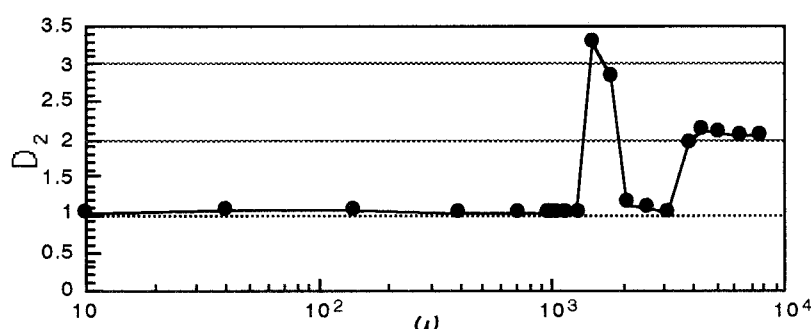


図 3.16 相関次元の無次元角速度による変化

次に位相空間上のアトラクタの次元を調べるため相関次元( $D_2$ )を算出した．この計算には Grassberger ら[16]の計算法を使用した．またカオス性を示す時系列データについては最大リアプノフ指数と同様に遅れ時間及び埋め込み次元を変化させ，相関次元の推定値と誤差範囲を計算した．これらの結果を図 3.16に示す．図 3.16によると準定常状態の相関次元は高周波振動対流領域において2次元に近い値を示し，それ以外の領域では1次元に近い．また $\omega=1496, 1778$ における初期の不規則・非周期的な時系列データでは誤差範囲( $\pm 0.15$ )を考慮しても相関次元は非整数次元であり，アトラクタはカオスの特徴であるフラクタル性を有しているといえる．

以上の結果から Fu ら[4]の5類型は位相空間上のアトラクタの形状及びアトラクタの形状を表す指標により次のように分類できることが明らかとなった．

#### (I) 準静的対流領域

アトラクタがリング状の1次元リミットサイクルでアトラクタ軌道座標の時間平均値 $\bar{x}$ が $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタ付近にあり，最大リアプノフ指数は小さく( $\lambda/\omega < 0.1$ )，相関次元1．

#### (II) 振動対流領域

アトラクタが非リング状の1次元リミットサイクルで $\bar{x}$ が $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタから離れ、最大リアプノフ指数は小さく( $\lambda/\omega < 0.05$ )、相関次元は1.

### (III)共鳴振動対流領域

準定常状態のアトラクタは非リング状の1次元リミットサイクルで $\bar{x}$ が $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタから振動対流領域に比べてさらに離れ、最大リアプノフ指数は小さく( $\lambda/\omega < 0.05$ )、相関次元は1. ヒステリシス領域においては初期の時系列データが最大リアプノフ指数大( $\lambda/\omega > 0.1$ )、相関次元が非整数次元となりカオス性を示す.

### (IV)中間対流領域

アトラクタが非リング状の1次元リミットサイクルで $\bar{x}$ が $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタから離れ、最大リアプノフ指数は小さく( $\lambda/\omega < 0.05$ )、相関次元は1.

### (V)高周波振動対流領域

アトラクタがツイストで $\bar{x}$ が $\omega=0$ の場合のポイントアトラクタから離れ、最大リアプノフ指数は小さく( $\lambda/\omega < 0.05$ )、相関次元は2.

## 3.3 振動容器内における熱対流場及びカオス性に対する容器のアスペクト比の影響

### 3.3.1 計算法および定義

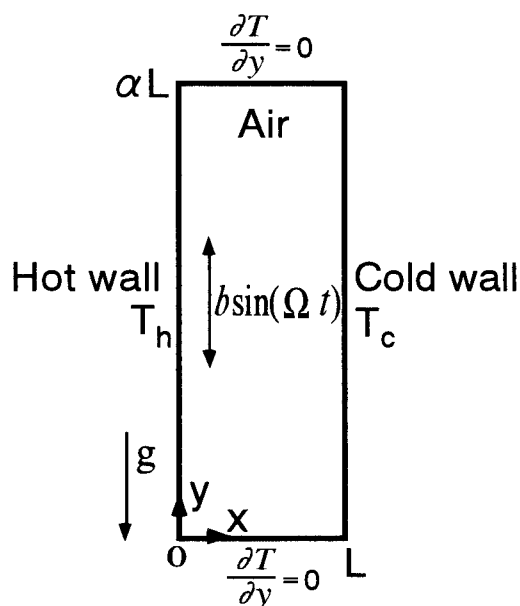


図 3.17 計算モデル

本節で用いる計算モデルを図 3.17に示す. このモデルは容器のアスペクト比 $\alpha$ が異なること以外は前節と同じである. 現象は紙面に垂直方向に一様で2次的であると

表 3.5 無次元角速度 $\omega$ に関する熱対流場の5類型

| Region | $\omega$                  |
|--------|---------------------------|
| I      | $\omega < 14$             |
| II     | $14 \leq \omega < 140$    |
| III    | $140 \leq \omega < 1778$  |
| IV     | $1778 \leq \omega < 3100$ |
| V      | $\omega \geq 3100$        |

して、計算には図に示す容器に固定された2次元座標を用いる。幅  $L$ ・高さ  $\alpha L$  の長方形断面容器の鉛直二面(左右側壁)の片方(図の左面)を高温壁とし、他方を低温壁とする。前節と同じ仮定の下にブシネスク近似を用いて基礎式をたて、代表温度差  $\Theta$ (=高温壁温度  $T_h$  - 低温壁温度  $T_c$ )、代表長さ  $L$ (容器の横幅)及び動粘性率  $\nu$  により無次元化したものを、流れ関数-渦度法により差分法で解いた。以上の定式化では容器の振動の影響は静止時の重力に振動による見かけの重力が加わる形で渦度の方程式内部に現れることになる。

初期条件、境界条件も前節と同じく計算対象空間全体で温度を  $T_c$ 、流れ関数を 0 とし、 $t > 0$  において図 3.17 に示す相対する鉛直壁について左側温度を  $T_h$ 、右側温度を  $T_c$ 、上下壁面を断熱、壁面で速度 0 なる境界条件の下で、 $b \sin(\Omega t)$  で表される振動を容器全体に加えるものとする。

本節では前節と同様プラントル数、グラスホフ数、振動グラスホフ数をそれぞれ  $0.71, 1.4 \times 10^4$  並びに  $1.0 \times 10^6$  に固定し、無次元角速度を 10 から 7680 まで変化させて検討を行った。容器のアスペクト比  $\alpha$  については 3 もしくは 5 に変化させた。また前節と同様に高温壁もしくは低温壁上の局所ヌセルト数(それぞれ  $-\partial\theta/\partial x|_{x=0}$ ,  $-\partial\theta/\partial x|_{x=1}$ )を  $y$  方向に積分して壁の  $y$  方向の長さで除したものを左右壁の壁表面平均ヌセルト数( $Nu$ )と定義し、また高温側・低温側壁表面平均ヌセルト数が一致するか、一致しない場合については想定される壁表面平均ヌセルト数の時間平均値(時間・壁表面平均ヌセルト数:  $\overline{Nu}$ )の周りで高温側及び低温側壁表面平均ヌセルト数に変動を始める時点以降の状態を準定常状態と定義した。

本節ではアスペクト比が大きい場合に、正方容器に対して  $Fu$  ら[4]が提案した無次元角速度の変化に伴う平均熱伝達特性の変化を表す5類型(I)~(V)の適用性を検討するが、対応する角速度の範囲を前節で行った考察に基づいて表 3.5 に示している。ここで(I)は準静的対流領域、(II)は振動対流領域、(III)は共鳴振動対流領域、(IV)は中間対流領域そして(V)は高周波振動対流領域である。

### 3.3.2 計算結果

#### 3.3.2.1 数値計算法の基本的検討

本節では容器に振動を加える計算を行う前に、数値計算法の基本的な検証としてまず容器に振動を加えない場合の計算を行った。 $Pr=0.71$ ,  $Ra=10^2 \sim 10^6$ ,  $\alpha=5$  の場合につ

いて  $80 \times 400$  の格子を用いて定常状態での高温壁面(低温壁面)での壁表面平均ヌセルト数を計算した結果を図 3.18 に黒丸で示す。

上で実線・破線はそれぞれ Churchill ら [12], Batchelor [13] が提案した式の値を示しており, Churchill が行っている実験値との比較検討図 [12] によると Churchill らの式は  $10^2 \alpha \leq Ra \leq 10^6 \alpha$  で, Batchelor の式は  $Ra < 500 \alpha$  で実験値とよい一致を見せている。図 3.18 によると計算による壁表面平均ヌセルト数の値は実験式と実験値の間のばらつきの範囲内でばらつきの傾向も含めて Churchill らならびに Batchelor の式の値とよく一致している。

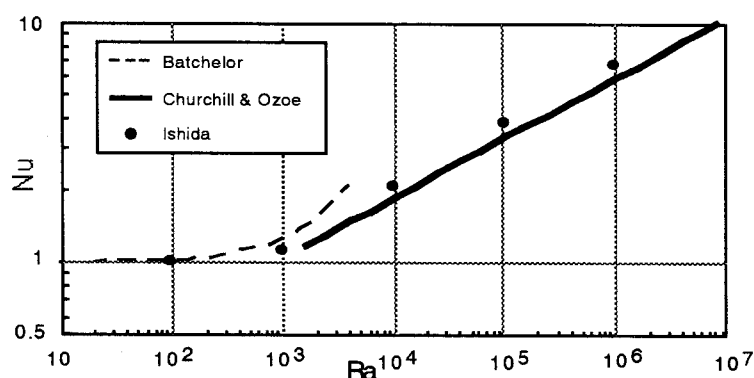


図 3.18  $Ra$  に対する  $Nu$  の変化 (振動を加えない場合)

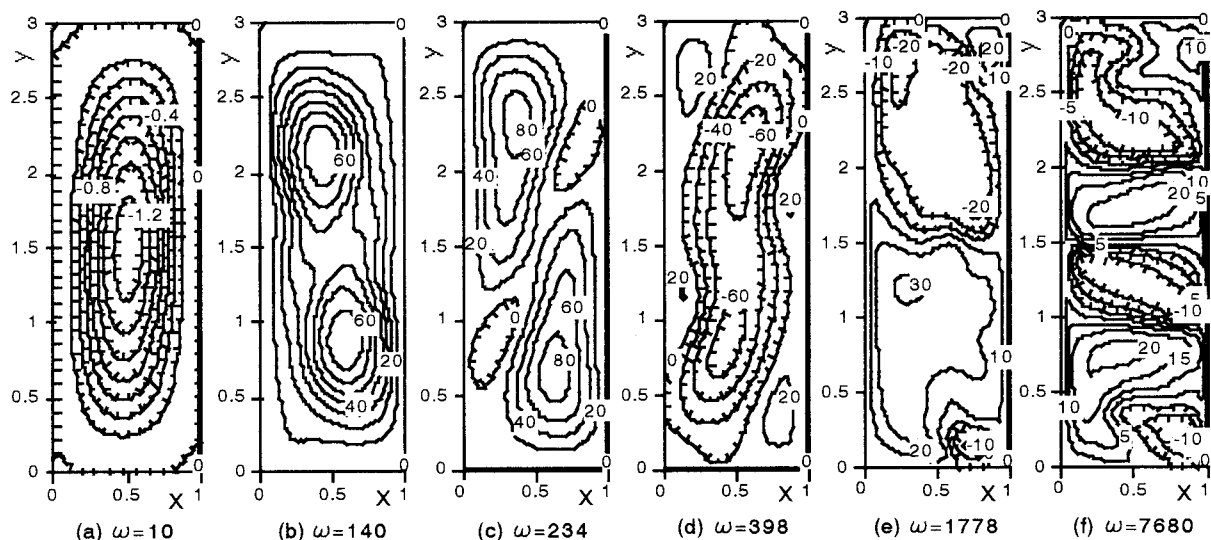
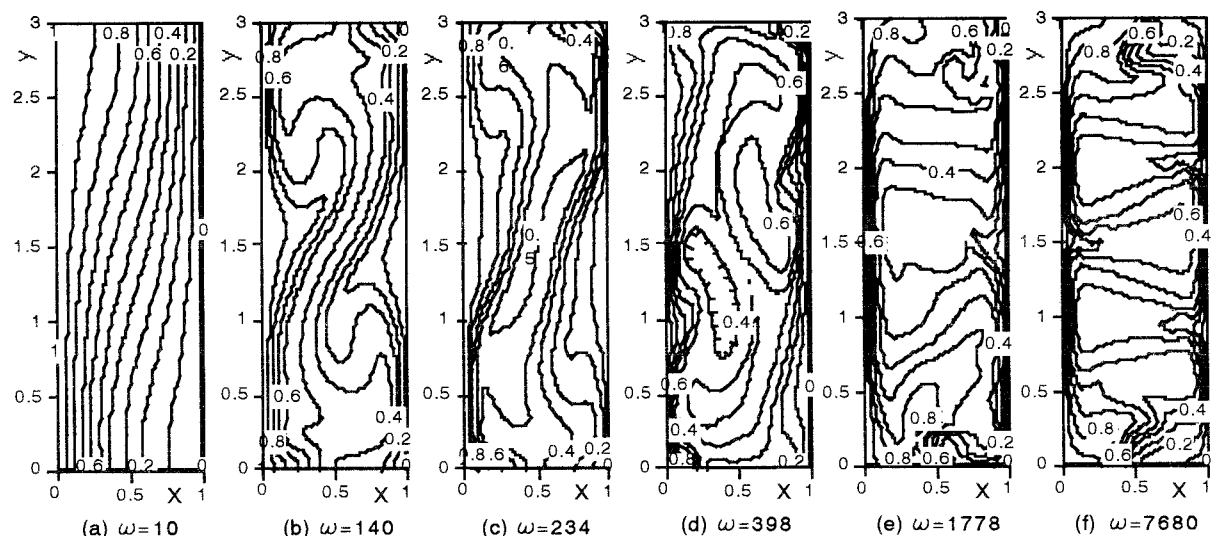
振動を加えた場合の計算の妥当性については前節で無限平行平板間の振動熱対流場の数値解と解析解との比較ならびに壁表面平均ヌセルト数のメッシュ依存性を検討して必要な計算メッシュ, タイムステップの検討を行っているが, 本節で扱っている現象に対する数値解の精度は鉛直壁近傍のストークス層の解析精度に依存していることを考慮すると, この結果はアスペクト比の大小に依存しないと考えられ, 既報と同じメッシュ幅 ( $\Delta x = \Delta y = 1/80$ ), タイムステップ ( $10^{-7}$ ) で現象の数値解析には十分であると思われる。

本節では  $x, y$  軸方向にそれぞれ 80,  $80\alpha$  分割した格子を用い, タイムステップを  $10^{-7}$  として計算を行ったが, 以上の結果から以下に示されている計算結果は十分な精度を有すると考えている。

### 3.3.2.2 周波数の変化に伴う現象の変化

(1) 熱対流場の特性 容器のアスペクト比  $\alpha$  が 3 の場合についてプラントル数, グラスホフ数, 振動グラスホフ数をそれぞれ 0.71,  $1.4 \times 10^4$  並びに  $1.0 \times 10^6$  に固定し, 加振周波数を変化させた場合の準定常状態での容器内部の流線と等温線の変化をそれぞれ図 3.19, 図 3.20 に示している。流線及び等温線は加振による見かけの重力の影響を受け非定常変化をするが, 図 3.19, 図 3.20 では加振により加わる鉛直上向きの加速度が最大となる振動の位相が  $\pi/2$  の場合について示している。




 図 3.19 流線図の例 (振動の位相 $=\pi/2$ )

 図 3.20 等温線図の例 (振動の位相 $=\pi/2$ )

準静的振動対流領域(I)に属する無次元角速度 $\omega=10$ における流線を図3.19(a)に示しているが、この角速度の場合本節で用いている  $Gr, G$  では位相が $\pi/2$  でほぼ容器に加わる重力と振動による見かけの重力の和が0 となることから対流がきわめて抑えられていることが分かる。これに伴って等温線 (図 3.20(a))は高温壁から低温壁に向かって層を成している。他の位相での熱対流場は値は異なるが定性的には静止状態の場合と同じで、容器内部には単一の大循環流 (ユニセル) が生じており、熱対流場の変動周期は容器に対する加振周期に等しい。

振動対流領域(II)に属する $\omega=40$  では図には示していないが容器に加わる y 方向加速度の影響を受け、振動の位相が $\pi/2$  で静止状態と逆方向 (反時計回り) に流れるユニセルが生じてこれにより高温領域( $\theta > 0.5$ )・低温領域( $\theta < 0.5$ )がそれぞれ容器下部・

容器上部に広がる．また同じく領域(II)に属する $\omega=140$ における流線を図 3.19(b)に示しているが，振動の位相が $\pi/2$ で反時計まわりの渦が容器内部に上下2つ生じて，これらの渦の巻き込みにより鉛直壁面近傍の高温領域及び低温領域に容器中央部に向かう突起が生ずる(図 3.20(b))．他の位相では上下の渦の合体(位相 0 及び $\pi$ )，分離(位相  $3/2\pi$ )が生じており，これらの変化は  $Fu[4]$ が $\alpha=1$ に対して明らかにした熱対流場の変化に対応している．流れの領域(II)では領域(I)と同じく，熱対流場の変動周期は加振周期に等しい．

共鳴振動対流領域(III)に属する $\omega=234$ では振動の位相が $\pi/2$ の時に大小4つのセルが生じており(図 3.19(c))，この渦の巻き込みにより低温壁近傍の低温領域が容器中央に巻き込まれている(図 3.20(c))．熱対流場の変動は一見周期的で流れ場も容器の中心点に対して対称であるが，後述の通り壁表面での平均熱伝達率の時間変動は不規則であり，周期性が見られない． $\omega=398$ では図 3.19(d)で示すとおり，大循環流のまわりに4つの逆回転渦が生じており，これは  $Fu[4]$ が行った $\alpha=1$ で同じく領域(III)に属する $\omega=1280$ における流れ場(位相  $2\pi$ )に対応するものと思われる．この時複雑な渦運動に対応して温度場は非常に複雑で，変動の周期も不規則である． $\omega=1280$ においては図に示していないが上下に時計回り・反時計回りの渦が生じ，それらが不安定で不規則な変動を示す．

中間対流領域(IV)に属する $\omega=1778$ においては，振動の位相に関わらず安定的に上下に2個のセル(角隅部の小さな渦を除く)が存在するが(図 3.19(e))，このような鉛直方向に並ぶ複数個のセルは $\alpha=1$ では見られず[4]高アスペクト比特有である．上部のセルが時計回り，下部のセルが反時計回りであることから低温壁近傍の低温領域においてセル間の流れに引きずられる形で中央部に X マイナス方向の突起が生じており(図 3.20(e))，この突起は時間的に上下に変動する．さらに $\omega=2560$ では図には示していないが上下方向にアスペクト比と同じ3個の渦が生じており，これらの渦が上から時計回り，反時計回りそして時計回りに回転することから，低温壁近傍で上から1/3の所と，高温壁近傍で下から1/3の所にそれぞれ低温領域，高温領域の突起が生じる．以上の熱対流場は比較的安定であるにも関わらず領域(I)にみられるように点対称とはなっていない．これは高周波数域では振動の振幅が小さく Y 方向の変動空間スケールが容器に対して相対的に小さくなるため振動方向に現象が一方向的になることが原因と考えられ，無限平行平板内部の熱対流場[8]にもこのような流れが確認されている．

高周波振動対流領域(V)に属する $\omega=3840, 5120$ および7680の場合では容器の上下方向に上から時計回り，反時計回りの渦が交互に4つ(角隅部の小さな渦を除く)生じており(図 3.19(f))，このことから低温領域の突起が低温壁近傍の上から1/4, 3/4の位置に生じ，一方高温領域の突起が高温壁近傍の中央に生じる．このことにより高温部・低温部が上から交互に並んでいる(図 3.20(f))．この突起は上下方向に振動するが，領域(IV)と比較して生じる渦のアスペクト比が小さいため上下の渦に抑えられてその振幅は小さく( $\omega=1778$ の場合の半分以下)になっている．

容器のアスペクト比 $\alpha$ が5の場合に加振周波数を変化させた場合の熱対流場の定性的な変化は $\alpha=3$ の場合と同様である．特に角速度の領域Ⅰ及びⅡについては定性的傾向に変化はない．しかしながら $\alpha=5$ においては領域(Ⅲ)に属する $\omega=991$ で容器の上下方向に2個のセルが振動の位相に関わらず既に安定的に存在しており，領域(Ⅳ)では $\omega$ を大きくするに従って上下方向に4個( $\omega=1778$ )からアスペクト比と同じ5個( $\omega=2813$ )のセルが生じる．領域(Ⅴ)では6個のセルから本節で扱った最大の容器振動角速度 $\omega=7680$ で8個のセルが生じることを確認している．このように高アスペクト比の場合では領域(Ⅳ)から(Ⅴ)への移行はアスペクト比より大きい数の渦の生成で特徴づけることができる．

**(2)平均熱伝達特性** 前節と同じく準定常状態での壁表面平均熱伝達率( $Nu$ )の時間変動特性について調べた．一例を図3.21に示している．以下では $\alpha=3$ の場合についての $Nu$ の特徴について述べるが， $\alpha=5$ の場合は基本的に $\alpha=3$ の場合と同じである．

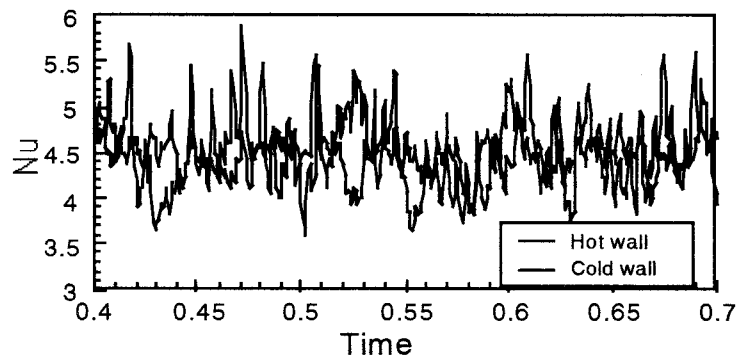


図 3.21  $Nu$  の時間変化 ( $\alpha=3, \omega=1280$ )

まず準静的振動対流領域(Ⅰ)と振動対流領域(Ⅱ)に属する $\omega$ の領域における $Nu$ の時間変化であるが，定性的には前節で述べた $\alpha=1$ の場合と同じである．領域(Ⅰ)では常にユニセルが存在することを反映して $Nu$ は時間的にサインカーブのような変動を示し，領域(Ⅱ)は見かけの方向の反転に伴う複雑な渦運動により周期的ながら1周期内部で複数の極値を持つ変動を示す．

共鳴振動対流領域(Ⅲ)に分類される $\omega$ の領域では $\alpha=1$ の場合と同じく $t>0$ で $Nu$ は不規則な変動を示す．しかしながら $\alpha=3$ の場合では $\alpha=1$ の場合のように別の流れのモード(周期変動モード)への移行は確認できず， $\alpha=1$ の場合に流れのモードが変化する目安となる $t=2$ を経過した後も本論文で計算した時間の範囲内で $Nu$ は不規則な変動を示した．この性質は $\alpha=5$ の場合にもみられ高アスペクト比の場合に特有である．また準定常状態における $\omega=1280$ での高温側・低温側の $Nu$ の変化を図3.21に示しているが，図によると $\omega=1280$ の場合では低温側の $Nu$ の振幅は高温側のものと比較して大きい．このような場合が現れるのも高アスペクト比特有の現象である．これは $\omega=1280$ の場合では上下の渦により低温壁中央部に低温領域の突起ができて上下に変動する

ことから生じている。

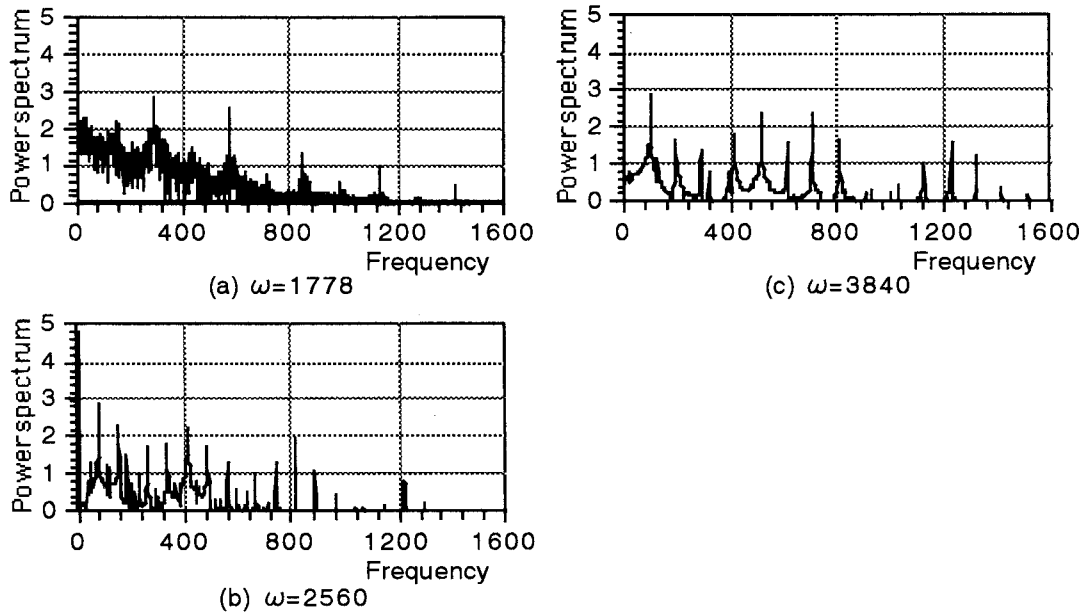


図 3.22 種々の $\omega$ に対する低温側 Nu の周波数分析結果 ( $\alpha=3$ )

中間対流領域(IV)に属する $\omega=1778$ では低温壁の Nu の FFT 解析結果(図 3.22(a))を見ると $\omega=1280$ と同じく Nu の変動に不規則性が残っており, Nu の変動に加振周波数とその高調波成分しか検出されない $\alpha=1$ の場合と大きく異なる. しかしながら $\omega=1280$ の場合と比較して上下の渦が安定的に存在することから不規則性が抑えられており, 加振周波数( $f=282$ )とその高調波成分が相対的に他の成分に比べて大きい. 領域(IV)の上限に近い $\omega=2560$ の場合では $\omega=1778$ の場合と違って低温側・高温側の Nu の振幅に大きな差が見られないがこれは容器内部にアスペクト比と同じ 3 個の渦が縦に並ぶことにより, 低温側・高温側にそれぞれ同じ数(一つ)の低温領域・高温領域の突起が生じることによる.  $\omega=2560$ の場合では Nu の変動には不規則性は見られないが, 低温壁の Nu の FFT 解析を行うと(図 3.22(b)), 加振周波数( $f=408$ )に加えて場に特有の 2 つの周波数(それぞれ  $f=44, 76$ )と, それらの高調波成分や和差成分が検出される.  $\alpha=1$ の場合では領域(IV)では加振周波数とその高調波成分しか検出されないで, このような 3 つの基本周波数を有する変動は高アスペクト比の場合に特有である.  $\alpha=5$ においてもアスペクト比と同じ 5 つの渦の生ずる $\omega=2813$ の場合で同様の変動を見せる. このように高アスペクト比の場合の領域(IV)における Nu は FFT 解析の結果からは他の領域とは異なる性質を有するものの全体的には不規則変動を示す領域(III)から周期的変動を見せる領域(V)(後述)への遷移領域と見ることができる.

高周波振動対流領域(V)に属する $\omega=3840$ の場合では Nu にうなりにも似た変動が見られる. 低温壁の Nu の FFT 解析の結果(図 3.22(c))では場に固有の周波数成分( $f=100$ )と加振周波数( $f=611$ )の 2 つの基本周波数成分とそれらの高調波成分及び和差成分が

現れ、 $\alpha=1$  で領域(V)の場合と同じ特徴を示す．アスペクト比が大きいときの特徴として $\alpha=3$  の場合は $\alpha=1$  の場合と異なり，低温側の  $Nu$  の振幅が高温側のものと比べて大きくなっているが，これは容器内に上下方向に並ぶ4つの渦により，低温側に2つ，高温側に1つと低温側の方が突起の数が多いことで説明できる．また  $Nu$  の変動振幅が領域(IV)の場合と同程度で， $\alpha=1$  の場合のように領域(IV)に比べて変動振幅が大きくなることも特徴としてあげられる．

(3)時間・空間平均ヌセルト数 準定常状態における時間・空間平均ヌセルト数  $\overline{Nu}$  を図 3.23 に示す．図では各アスペクト比で  $\overline{Nu}$  の値を振動を加えない場合の  $\overline{Nu}$  ( $=Nu$ ) である  $\overline{Nu}_{\omega=0}$  で規格化している． $\alpha=1$  の場合については Fu[4] と前節の値を用いた．

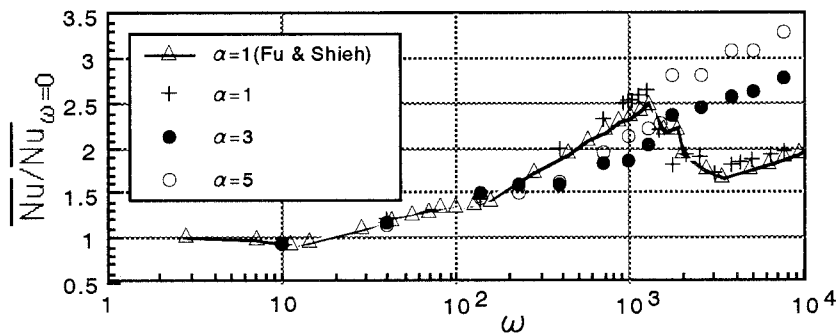


図 3.23 アスペクト比 $\alpha$ ，無次元角速度 $\omega$ に伴う  $\overline{Nu}$  の変化

振動熱対流場の $\omega$ の領域(I)と(II)では  $Nu$  の定性的傾向が同じであることを反映してアスペクト比に関わらず同じ曲線上に乗っていることが分かる．領域(III)に入ると $\alpha=3,5$  の場合では $\alpha=1$  の場合の値に比べて小さくなるが，これは  $Nu$  の変動が不規則であるからであり，前節で述べた $\alpha=1$  の場合で領域(III)において不規則変動モードにおける  $\overline{Nu}$  は周期変動モードにおける値に比べて小さくなることに対応している．領域(IV)においては $\alpha=3,5$  の場合では $\alpha=1$  の場合と異なり  $\overline{Nu}$  の減少が見られないが，これは高アスペクト比の場合，領域(IV)は(III)と(V)の間の定性的傾向を示し，熱対流場を見てもこの領域に特有の傾向を示さないことに対応している．このように高アスペクト比の場合には $\alpha=1$  の場合とは異なり中間対流領域(IV)を  $\overline{Nu}$  の変化で特徴づけることはできない．領域(V)においては高アスペクト比の場合は正方容器の場合に比べて  $\overline{Nu}$  の値が大きい，これは上下に並ぶ渦の数が多くなればなるほど壁面での温度境界層が薄くなるためで， $\alpha=3$  の場合より $\alpha=5$  の場合の方が値が大きいのもこの事実から説明できる．なお領域(V)では高アスペクト比の場合で値がばらついているが，これはアスペクト比が大きい場合に特有の  $Nu$  の低周波変動の影響であり，より定量的な議論を行うためにはより長時間の計算値から平均を求める必要があるだろう．

### 3.3.2.3 周波数の変化に伴うカオス性の変化

(1) 自己相関係数 前節と同じ計算法で  $Nu$  の時系列データから自己相関係数が  $1/e$  となる時間スケール  $\tau$  を求めた。  $\tau$  は時間  $t=0$  からの時間の増大に伴う自己相関係数の減少の度合いを表しており、  $\tau$  が小さいほど減少の度合いが大きい。 各  $\alpha$  について  $\omega$  を変化させた場合の  $\tau$  の変化を図 3.24 に示す。  $\alpha=1$  については前報の値を用いた。 また  $\alpha=3,5$  については高温側及び低温側の  $Nu$  が一致しない場合については両方の値を図に示している。

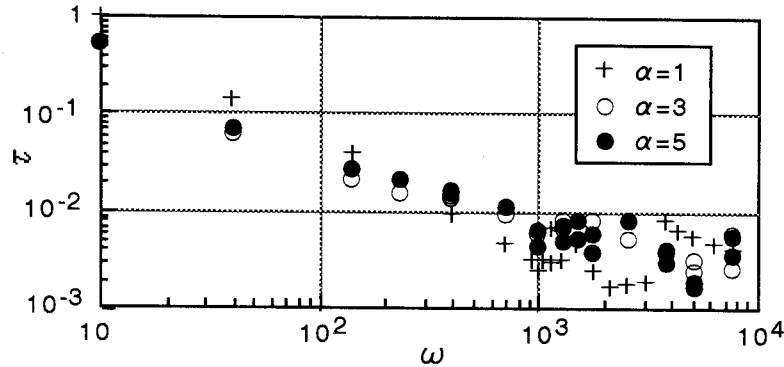
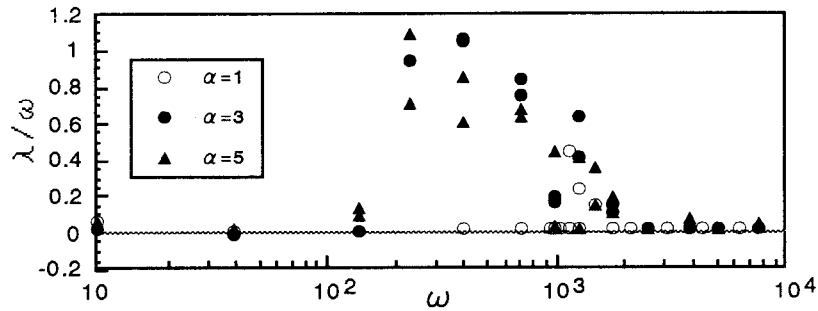


図 3.24  $\alpha, \omega$  共に変化させた場合の時間スケール  $\tau$  の変化

前節で示したように  $\alpha=1$  の場合では  $\omega$  に対する  $\overline{Nu}$  の増加は  $\tau$  の減少にほぼ完全に対応していたが、  $\alpha=3,5$  の場合についても図 3.23 上で見ると領域(V)を除いて  $\alpha, \omega$  を変化させた場合に  $\overline{Nu}$  の増加は  $\tau$  の減少にほぼ対応している。 しかしながら領域(V)においては  $\overline{Nu}$  の増加を  $\tau$  の減少では説明できない。 この  $\overline{Nu}$  の増加は容器内部に生成される渦の増加という別の機構を考慮する必要があると思われる。

(2) 最大リアプノフ指数 次に  $Nu$  の時系列データから SDIC の存在の有無を確かめるため最大リアプノフ指数を  $Nu$  の時系列データから算出した。  $\lambda$  の計算法は前節と同じく Wolf らの方法を用い、計算の際に必要なパラメータのうち埋め込み次元、遅れ時間、データの置き換えにかかる発展時間の3つについてはこれらの値をある範囲で変化させて  $\lambda$  の変化を調べ、これらの値の平均値とばらつきからそれぞれ  $\lambda$  の評価値と誤差範囲(平均によって求めた  $\lambda$  が確率 50 パーセントで変動する範囲を採用)を計算した。遅れ時間を変化させる場合は自己相関係数が  $1/e$  となるスケール  $\tau$  を基準にとり、各時系列データについて  $\tau$  に対する倍率をパラメータに取った。

これらの計算値を用いて  $\lambda$  を求めた結果を前節の  $\alpha=1$  の結果と共に図 3.25 に示している。  $\alpha=3,5$  については高温側及び低温側の  $Nu$  が一致しない場合では両方の値を図に示している。 なお  $\lambda$  は図 3.24 の考察に基づいて前報と同じく代表時間スケールとして変動周期をとり  $\lambda/\omega$  で表示した。 誤差範囲は図 3.25 上に図示していないが  $\lambda$  の大きい場合で比較的誤差が大きく  $\alpha=5$  ,  $\omega=991$  で最大値  $\pm 0.05$  ( $\omega$  で規格化)となる。 その他の多くのパラメータでは誤差は  $\pm 0.01$  未満である。


 図 3.25  $\alpha, \omega$ 共に変化させた場合の最大リアプノフ指数 $\lambda$ の変化

前節でも考察したように一般に Wolf らの方法は $\lambda$ の絶対値が小さいところで誤差(系統誤差)が大きいと考えられるので, このことを考慮して $\lambda > 0.1$  でカオス性有りと判断するとすれば, 高アスペクト比の場合ではカオス性が検出される領域は振動対流領域(III)に対応していることが分かる. このようにカオス性を考慮すると高アスペクト比の場合について領域(III)と(IV)の分離が可能となる.

また $\lambda$ は $\alpha=3, 5$ ではそれぞれ $\omega=398, 234$ (高温壁側)で最大値を取っており, この値はFuらが述べた熱対流場の共鳴角速度 $\omega=1280$ とは異なっている. これらの角速度は $\alpha=3, 5$ ともに容器内部に安定的に2個のセルが形成される手前であり, 内部の流れ場は大小の渦が入り交じる複雑な様相を呈していることが, カオス性の極大値を取る要因であると考えられる.

図 3.25に示している高温壁・低温壁での  $Nu$  から求まる $\lambda$ の差については $\alpha=3, 5$ の場合では誤差を考慮すると領域(III)を除いて有意差は見られなかった. 領域(III)においては安定的に2個のセルが形成され, それにより低温壁・高温壁間で  $Nu$  の振幅に差が見られる場合では $\lambda$ に有意差が見られ, 高温壁における  $Nu$  のカオス性は低温壁のものと比較して小さかった. これは前に述べた低温側の突起の影響と考えられる. しかしながら  $Nu$  の振幅の差が小さくても有意差が認められる場合( $\alpha=3$ で $\omega=708$ の場合並びに $\alpha=5$ で $\omega=140, 234, 398$ の場合)があり, この理由については今後の検討が必要である.

### 3.4 結論

本章では鉛直2面の一方を加熱, 他方を冷却, その他の面を断熱とした2次元正方形容器に鉛直方向振動を加え, 無次元角速度を変化させた場合の壁表面平均ヌセルト数の変化を定量的に調べ, さらにその変化と壁表面平均ヌセルト数から再構築されるアトラクタに現れる変化とを比較考察することで以下の結論を得た.

- (1)本章で用いた計算手法は本章で扱った計算条件下で起こる現象を再現する十分な精度を持つ.
- (2)本章で用いた初期条件はFuら[4]の用いたものとは異なるが時間・壁表面平均ヌセ

ルト数はよく一致する．したがって  $Fu$  らの提案した無次元角速度の変化に伴う現象の変化の5つの類型化は有効である．

- (3) $Fu$  らの5類型に基づく壁表面平均ヌセルト数の時系列データの定性的傾向の変化はFFT解析の結果でよく説明でき、加振周波数の増大に伴う周波数分析結果の変化は大きく分けて a)加振周波数とその高調波成分からなる領域、 b)連続スペクトル、そして c)加振周波数とは別に場に固有の周波数が支配的となる領域、の3つの領域に分けられる．
- (4) $Fu$  らの指摘したヒステリシスの現れる無次元角速度の領域は、本章で用いた初期条件下では  $t=0$  で振動を開始した直後から壁表面平均ヌセルト数が不規則・非周期的な変動を見せる領域に対応しており、この初期の不規則性は無次元角速度が大きくなるにつれて弱まる．
- (5) $Fu$  らの提案した5類型に対応する空間平均ヌセルト数の定性的変化は、ヒステリシス領域における初期の不規則変動状態も含めて Takens の埋め込みにより再構築されたアトラクタの形状変化に対応がつく．
- (6)自己相関係数が  $1/e$  になるスケールは時間空間平均ヌセルト数の変化を捉える重要なパラメータである．
- (7) $Fu$  らの5類型に基づく壁表面平均ヌセルト数の時系列データの定性的傾向の変化は、(5)により最大リアプノフ指数をはじめとする位相空間上でのみ定義される各種の指標の変化に対応がつき、これらの指標により分類が可能である．

さらに本章では鉛直2面の一方を加熱、他方を冷却、その他の面を断熱としたアスペクト比 $\alpha$ が3もしくは5の2次元矩形容器に鉛直方向振動を加え、その無次元角速度を変化させた場合に生ずる壁表面平均ヌセルト数の時間変化とその時系列データから検出されるカオス性との関係について調べ、アスペクト比が1の場合の結果と比較して以下の結論を得た．

- (8)容器のアスペクト比が大きい場合  $Fu$  らの提案した5類型に対応する壁表面平均ヌセルト数の現象面から見た定性的変化はアスペクト比が1の場合と比較して明確ではなく、 $Fu$  らの5類型はそのまま適用できない．しかしながら熱対流場の持つカオス性の変化も考慮すると、 $Fu$  らの5類型は壁表面平均ヌセルト数の特性の変化をよく捉えている．ただアスペクト比が大きくなるにつれて容器内部に鉛直方向に並ぶ渦の数が多くなり、この渦の数に従って壁表面平均ヌセルト数の特性は細かく変化する．
- (9)高温壁・低温壁における壁表面平均ヌセルト数からカオス性の大きさを示す最大リアプノフ指数の値を求めると $\alpha=3,5$ の時 $\omega=234, 398$ でそれぞれ最大値を取るが、この値は安定的に2個のセルが形成される直前の角速度に対応しており、熱対流場の共鳴周波数 $\omega=1280$ とは大きく異なる．



- (10)  $\alpha=1$  の場合では自己相関係数が  $1/e$  になるスケールは時間空間平均ヌセルト数の変化をよく捉えていたが、高アスペクト比の場合では無次元加振周波数が大きい領域で必ずしも当てはまらない。さらに容器内に存在する渦による熱伝達促進機構について考慮する必要がある。
- (11) 高アスペクト比の場合には高温壁・低温壁それぞれの壁表面平均ヌセルト数の変動振幅が異なる場合があるが、これは低温壁・高温壁上に生ずるそれぞれ低温領域・高温領域の突起の数のアンバランスによるものであり、容器内に存在する渦の数に起因している。このような場合、特にカオス性が検出される場合には高温壁・低温壁間で最大リアプノフ指数に有意差が見られた。

本章では強制振動系の例として密閉容器に正弦波で表される振動を加えた場合の熱対流場を扱ったが、自励系と違ってこの場合熱対流場内部に時間的に定常な流れ場は存在しない。自励系を扱った前章では流れのモード変化の考察に用いたパラメータは  $Gr(Ra)$  であったが、本章の場合は無次元角速度  $\omega$  がそれに対応している。自励系の場合安定な定常解として  $Ra$  が小さいときに一次循環流（大循環流）が現れているが、本章の場合は  $\omega$  が小さい時に観察される加振周波数とその高調波成分で構成される変動を有する熱対流場がこれに対応している。前章では代表パラメータの小さい場合の流れのモードに対して、その周りの微小変動エネルギーの散逸過程で生じる流れの構造の生成（2次、3次流れセル）とカオス性の発生が対応していたが、本章においても  $Nu$  のカオス性が検出される共鳴振動対流領域においては、低周波数モードでは観察されない局所的で不規則な複数の渦構造が新たに生成しており、この意味で本章の強制振動系においても変動エネルギーの散逸過程とカオス性の存在との対応が認められる。高周波数振動対流領域においては縦方向に渦が複数個並ぶ構造が現れカオス性が減衰するが、これはこの流れのモードが安定であるからであり、安定な流れのモードの生成によるカオス性の減衰の例としては2.3節で述べた双子渦が縦方向に複数個現れる流れのモードが挙げられる。いずれにせよ前章と同じく本章においても不規則変動モードにおいて代表長さと同じオーダーの空間スケールを有する局所的に秩序だった流れの構造が現れており、乱流(発達乱流)とは異なるにも関わらず、熱対流場内部にカオス的な変動が検出されたことに注意する必要がある。すなわちカオス性の検出される流れ場と乱流は同義ではない。この点については次章でも考察する。

### 第 3 章の文献

- [1] P. M. Gresho and R. L. Sani, The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer, *J. Fluid Math.*, **40** (1970), 783-806
- [2] S. Biringern and L. J. Peltier, Numerical simulation of 3-D Benard convection with gravitational modulation, *Phys. Fluid A*, **2**(1990), 754-764
- [3] V. Uspenskii and J. J. Faver, High frequency vibration and natural convection in Bridgman-scheme crystal growth, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **37**(1994), 691-698
- [4] W. S. Fu and W. J. Shieh, A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**(1992), 1695-1710
- [5] W. S. Fu and W. J. Shieh, Transient thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36**(1993), 437-452
- [6] F. T. Ferguson, Thermovibrational convection in a vertical cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**(1996), 2895-2906
- [7] R. E. Forbes, C. T. Carley and C. J. Bell, Vibration effects on convective heat transfer in enclosure, *ASME J. Heat Transfer*, **92**(1970), 429-438
- [8] G. Z. Gershuni and Ye. M. Zhukhovitskiy, Vibration-induced thermal convection in weightlessness, *Fluid Mech. -Sov. Res.*, **15**(1986), 63-84
- [9] H. Koizumi and I. Hosokawa, Chaotic behavior and heat transfer performance of the natural convection around a hot horizontal cylinder affected by a flat ceiling, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**(1996), 1081-1091
- [10] 増岡隆士・谷川洋文その他 2 名, 積層多孔室内の自然対流の揺動, 第 34 回日本伝熱シンポジウム講演論文集, (1997), 611-612
- [11] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, Rand D. A. and Young L. -S. eds., (Springer, Berlin), 1981, 366-381
- [12] S. W. Churchill, Free convection in layers and enclosures, *Heat exchanger design handbook*, **2.5.8**(1983), VDI-Verlag GmbH, Hemisphere
- [13] G. K. Batchelor, Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *J. Appl. Math.*, **12**(1954), 209-233
- [14] G. G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**, Pt. II, 8-106 [Math. Phys. Papers **3**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1-141]
- [15] A. Wolf et al., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, **16**(1985), 285-317
- [16] P. Grassberger and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Phys. Lev. Ret.*, **50**(1983), 346-349

## 第4章 水平加熱体上方の自然対流場の安定性とカオス性

### 4.1 緒言

本章では開いた系で自励系の例として水平加熱体上方の自然対流場を取り扱う。この熱対流場は水平加熱体に投入された熱量とその周囲の密度変化に基づく重力（浮力）によってのみ誘起される，すなわち流れ場全体から見てその平均エネルギーの投入箇所が加熱体周辺に局在している。このためある定常解の周りの変動エネルギーは加熱体周辺を除くと平均場から供給されず，密閉容器の場合と違って流れ方向に変動エネルギーをあるレベル以上に維持することができない。その結果として後述の通り流れ方向に変動エネルギーは減衰し，流れのモードが変化する様子が観測される。

このような水平加熱体上方の熱対流場であるが，本章では水平加熱体上方に生じた熱対流場（プルーム）が壁面等の影響を受けない対流プルームの場合と壁面に埋め込まれた加熱体上方に生じる壁面プルームの場合の双方を扱う。

#### 4.1.1 対流プルーム

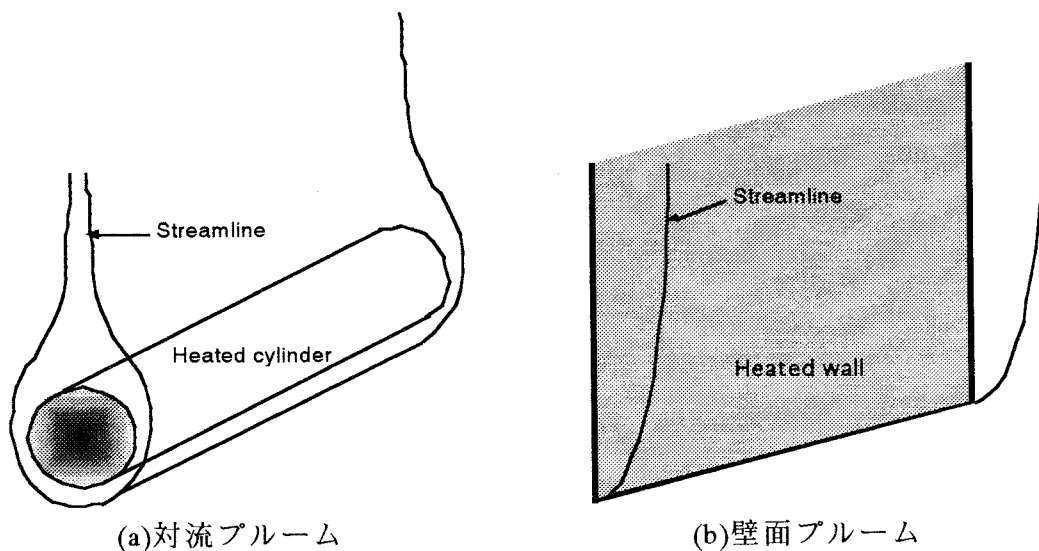


図 4.1 加熱体上方の自然対流場の概念図

壁面等の束縛のない加熱体上方の自然対流場は対流プルーム(Convective Plume)と呼ばれ，流体中のヒーター上方の熱対流場等の基本的なモデルとして，これまで数多くの研究が報告されている[1]。概念図を図 4.1(a)に示している。特に線熱源上方の自然対流場に関しては，点熱源上方と比較して，二次元性に基づいて数学的取り扱いが容易になるため研究の数が多い。

Fujii[2]は境界層近似ならびに Boussinesq 近似を施した基礎式に対して相似変数を導入することで熱対流場の方程式を常微分方程式化し、点熱源並びに線熱源上方の定常熱対流場について種々の  $Pr$  に対して数値解や一部解析解を求めている。また Pera ら[3]は線熱源上方の自然対流場の安定性を準平行流近似を施した擾乱方程式系の固有値問題を数値的に解くことによって調べ、無次元高さ  $G$ 、無次元周波数 $\beta$ の2次元空間上の中立曲線を求めると共に、熱源鉛直上方の2次元平面上で対称擾乱と反対称擾乱を導入した場合のブルームに対する影響を比較検討した結果、反対称擾乱によるブルームの不安定効果がより大きいことを指摘している。また Bill ら[4]は線熱源上方の自然対流場の遷移について実験的に調べ、人工攪乱を導入しない状態ではある遮断周波数以下の周波数成分の乱れが選択的に増幅されることや非線形効果により乱流強度が流れに沿って増加から減少に転じることを報告している。上述の Pera らの安定性解析では準平行流近似を用いているため加熱源近傍、すなわち  $G$  が小さい領域での安定性を論じることができないが、この点に関して Haaland ら[5]は攪乱方程式に非平行流的な取り扱いを施し  $G$ - $\beta$ 空間上の中立曲線の下枝を得ることに成功している。しかしながらこの方法ではそもそも基礎式に境界層近似を施しているので  $G$  が小さい領域で得られた臨界グラスホフ数が妥当かどうか疑問が残るところである。そこで球[6]や円柱[7][8]といった有限径の加熱体上方の定常流れ場について、加熱体近傍で Boussinesq 近似のみを施した基礎式を適用し、加熱体からの鉛直方向距離  $X$  が大きいところで点熱源、線熱源の相似解に一致するような漸近展開を施す解析的研究も種々の接続条件下で行われているが、 $X$  が小さい領域での安定性解析を行っているものは皆無である。

#### 4.1.2 壁面ブルーム

一方壁面ブルーム(Wall Plume)、すなわち側壁に埋め込まれたヒーターや側壁そのものを加熱することによって誘起された熱対流場は浮力駆動系の基本的な物理モデルとしてこれまで数多くの研究が報告されている[1]。この対流場の概念図を図 4.1(b)に示している。

Nachtsheim[9]は等温鉛直壁近傍に形成される自然対流場の安定性について数値的に調べ、浮力による乱れを考慮して温度場と流れ場を連立させた攪乱の発展方程式を扱うことにより初めて中立曲線の上で下枝を得ることに成功した。この結果は温度場と速度場の間の相互作用が極めて重要であることを示しており、下枝の領域は浮力に基づく不安定領域であると結論づけることができる。Gill ら[10]はこのような不安定領域の分岐が高プラントル数の流体( $Pr > 2$ )において顕著であることを数値的に示している。また Hieber ら[11]はこのような二つの流れの不安定領域を分割する境界線“branch cut”を一定増幅率曲線の特性に基づいて定義し、branch cut より上側の不安定領域を mode 1、下側の下枝の不安定領域を mode 2 と呼ぶことを提案している。

また Jaluria ら[12]は鉛直壁に埋め込まれた線熱源から立ち上る壁面ブルームについ

て解析を行い、そのブルームの安定性については Wakitani[13]が側壁の傾斜角を変えながら数値解析により検討を行っている。Wakitani は側壁を下向きに傾斜させることにより壁面ブルームが安定化することを示すと共に mode2 すなわち浮力により生じる不安定モードにおける攪乱の増幅率は mode1 と比べて小さいことを指摘している。後者に関しては Dring ら[14]の解析によると高周波数擾乱では低周波数擾乱と比較して攪乱の増幅率や伝搬速度が大きく、また低周波数擾乱の伝搬波長は先端からの鉛直方向距離と比較してかなり長いことが示されている。この長波長擾乱の不安定については Daniels ら[15]が急激な初期温度変動を伴う温度一定の鉛直壁近傍の壁面ブルームについて調べている。

上に述べた解析結果に対しては実験的にこれらを概ね支持する結果が報告されている[1][16]。しかしながら一定熱流束に加熱された側壁により誘起されるブルームに関しては実験的に得られた中立曲線[17]は解析的に得られたものと比べてより高さの低い方向にシフトすることが示されており[1]、これは田中ら[18]の解析によると安定性解析の際に平行流近似を用いたことによる影響であると考えられる。

### 4.1.3 熱対流場の安定性とカオス性

近年熱対流場の持つカオス性と熱対流現象との関係について数多くの報告がある。特に Takens の埋め込み[19]やカオス特性に関する種々の指標を高精度で評価する手法[20][21]を用いることで現実の熱対流場のカオス特性を調べることができるようになった[22]。例えば本章で扱うブルームに関して Koizumi ら[23]は天井板を有する円柱加熱体上方の自然対流場について円柱に対する加熱量や天井板の高さを変化させて流れ場のカオス性の変化を詳細に論じている。しかしながら熱対流現象の持つ安定性とカオス性との関連について検討したものは見あたらない。

第1章の1.1.4項において述べたように SDIC と不安定の概念の間には有限時間内に近接する軌道の間にある一定の差異を生じさせうるという点で対応関係が見られる。しかし同値ではない。現象の支配方程式の上では存在しうる解析解の実現可能性を判断する上で安定性は極めて重要な概念であり、本論文の目的であるカオス力学的アプローチの有効性を判断する上でこの SDIC との関連を調べることは不可欠である。特に安定性の判別の多くが線形安定性解析から求まる物理量の時間（空間）増幅率によっていることを考慮すると、この増幅率と1.1.4項の議論により位相空間上の時間増幅率という点でこれに対応する SDIC の指標である最大リアプノフ指数との関係を調べることは非常に興味のあるところである。

### 4.1.4 本章の目的

そこで本章ではまず空気中に置かれた水平線熱源ならびに円柱熱源上方の自然対流場を取り上げ、現象の安定性とカオス性との関連について実験的に検討を行った。円柱熱源上方の自然対流場については安定性に関する論文は見あたらないが、本章で

は円柱熱源上方の対流ブルームの安定性を判別するとともに、次元解析に基づいて Pera ら[3]の行った線熱源に対する線形安定性解析の結果との比較検討も行った。

次にカオス性の指標として最大リアプノフ指数[20]を取り上げ、カオス性と安定性との関連を調べた。この最大リアプノフ指数や相関次元[21]をはじめとするカオス性指標を実験的に得られた時系列データから求める際は2, 3章でも示したとおりローパスフィルタリングが有効であることが明らかとなっているが[20][24], ノイズの低周波成分が無視できない時系列データに対しては有効でない。そこで本章ではノイズを濾波[25]するためにカルマンフィルタ[26]に基づいたスムージングを導入し, この有効性についても併せて検討した。

さらに本章では水平線熱源を埋め込んだ鉛直壁近傍に形成される壁面ブルームについても安定性とカオス性との関連性を実験的に検討した。場の安定性については攪乱の増幅率とその誤差範囲を用いて分類し, さらに温度変動の時系列データからカオス性を調べ, 安定性との間で比較検討を行った。

## 4.2 対流ブルームの安定性とカオス性

### 4.2.1 実験装置及び方法

#### 4.2.1.1 実験装置及び測定方法

実験装置の概略図を図 4.2 に示す。本節で用いる座標系は図 4.2 に示すとおり実験小室中に水平に設置された加熱体最上部で加熱体の軸方向の中央部を原点にとり, 鉛直上向きに X 軸, 加熱体の軸方向に Z 軸, X,Z に垂直方向に Y 軸をとった。

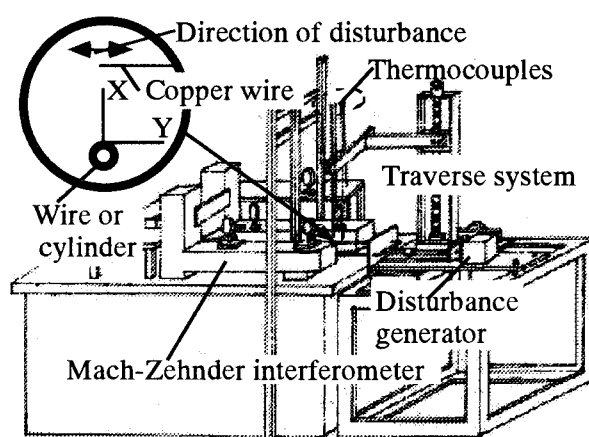


図 4.2 実験装置図

実験に使用した加熱体は細線と3種類の円柱である。細線としては直径  $D=0.1\text{mm}$  長さ  $200\text{mm}$  のニクロム線を用い, 円柱として基本的に直径  $9.6\text{mm}$  長さ  $200\text{mm}$  の円

柱型ヒータを用いているが、外径が円柱型ヒータの2倍、3倍の真鍮の円筒にその円柱型ヒータをはめ込むことで、円柱直径  $D$  を 9.6mm, 19.2mm および 28.8mm の3通りに変化させた。

温度測定には直径 0.1mm の銅-コンスタンタン熱電対を4本使用し、それぞれの温度測定部をZ軸方向に5mm間隔、X方向に30mmずつずらして3次元移動装置のサポートに固定した。これによりX,Y方向に関してパソコンからの信号による遠隔移動操作が可能である。短時間に大量の温度データを取得するため、熱電対の起電力データはアンプ回路で増幅し、A/D変換ボードを介してパソコンに送信し、記録ならびにデータ処理を行った。これにより各測定点で温度データを1/100秒間隔で得ることができる。また本実験ではマッハツェンダー干渉法を用いてプルームを可視化し、その画像をビデオカメラでモニタすることによって温度測定の際にプルームが鉛直で熱電対がプルーム内部に存在することを確認した。

本節に限らず本章では安定性の判別のための空間増幅率をある特定の周波数に対する温度振幅の高さ方向変化から実験的に求めているが、対流場の周囲に存在する自然発生的な攪乱は非常に小さいのでこの攪乱による温度振幅の変化から増幅率を精度よく求めることは難しい。そこで本節では補助的な微少攪乱発生装置を使用しており、この装置はパソコンを用いて周期的に発生させた信号をステレオアンプで増幅してオーディオスピーカーコイルを駆動し、その振動を加熱体の上方近傍に水平に設置した弦に伝える構造となっている。この弦は直径 0.2mm の銅線であり振動の際の振幅は約 2mm に設定されている。

### 4.2.1.2 実験条件

本節では加熱体上方の自然対流場の安定性を判別するために自然対流場に微少人工攪乱を加え、温度の時間変化を測定した。加熱体は前節で述べたとおり細線と3種類の直径を持つ円柱の計4通りに変化させた。また加熱体に加える加熱量は  $16\text{W/m}$ (単位加熱体長さあたり)から  $48\text{W/m}$  まで  $8\text{ W/m}$  ごとに5通りに変化させ、攪乱周波数は1Hzから6Hzまで約1Hzごと(正確にはそれぞれ0.98, 1.96, 3.03, 4.17, 5.06 および 5.76Hz)に6通りに変化させた。以上の各パラメータに対して  $Y=0$  で高さ  $X=50, 80, 110$  および 140 の4点における温度を熱電対を用いて10秒間測定し、各点で一回の実験につき1000個の温度データを得た。そしてこれらの実験を1パラメータにつき3～4回繰り返した。

実験に際しては攪乱導入時の幾つかのパラメータで直径 0.025mm の熱電対を用いて温度測定を行い、直径 0.1mm の熱電対を用いた場合の温度のパワースペクトルの比較から実験に用いた熱電対の応答性については問題がないことを確認している。また本節では水平加熱体上方の2次元熱対流場を扱うが、あらかじめ予備実験として熱電対が設置されている範囲ではZ軸方向の温度場が一様で2次元であることを確認している。

## 4.2.2 データ解析法

### 4.2.2.1 次元解析

自然対流場においては運動エネルギーと熱エネルギー間のエネルギー輸送は無視できるので熱量を別個の基本次元とみなして  $H$  で表すと物理量は長さ  $L$  , 質量  $M$  , 時間  $T$  , 温度  $\Theta$  , 熱量  $H$  の5つの基本次元で表現される次元を有する. いま  $X$  軸上のある点における流れ場の安定性を判別する際に必要となる温度及び対流場の空間増幅率  $\alpha^*$  を考える. ここで  $\Theta = T_0 - T_\infty$  で  $T_0 (= T_0(X))$  は  $X$  軸上の対象となる点の温度,  $T_\infty$  は周囲温度とし, また  $\beta^*$  は体膨張率,  $g$  は重力加速度とすると,  $\alpha^*$  は  $\Theta, \beta^* g$  , 粘性係数  $\mu$  , 熱伝導率  $k$  , 定圧比熱  $C_p$  , 加熱体の直径  $D$  , 高さ  $X$  , 周波数  $f$  , そして密度  $\rho$  の関数となると考えられる. そこで  $\pi$  定理より無次元量を作る際の基本的な物理量として  $\beta^* g, \mu, k, X, \rho$  を採用するとその他の物理量はこれらにより無次元化できて  $f_1$  をある関数として次のように表現できる.

$$\alpha^* X = f_1(Gr_x, Pr, \frac{fX^2}{\nu}, \frac{X}{D}) \quad (4.1)$$

ここで  $Gr_x$  は修正グラスホフ数であり以下で定義される.

$$Gr_x = \frac{g\beta^* X^3 \Theta}{\nu^2} \quad (4.2)$$

また  $Pr$  はプラントル数である. (4.1)式においてプラントル数を固定し, 線熱源として  $X/D \rightarrow \infty$  とすると  $\alpha^* X$  は  $Pr, Gr_x$  の2変数の関数となるが, この結果は細線の場合の線形安定性解析における結果の表示法(Pera ら[3])に一致している. 実際には Pera らの安定性解析では  $Gr_x, fX^2/\nu$  の代わりにこれらの関数として求まる以下の  $G, \beta$  を用いており, 細線の結果との比較を容易にするため本節でもこれに従う.

$$G = 2\sqrt{2}Gr_x^{1/4}, \quad \beta = \frac{32\pi X^2 f}{\nu G^3} \quad (4.3)$$

また後述の最大リアプノフ指数  $\lambda$  についても同様に無次元化できて  $f_2$  をある関数とすると次のように表現できる.

$$\frac{\lambda X^2}{\nu} = f_2(G, \beta, Pr, \frac{X}{D}) \quad (4.4)$$

以上により熱対流場の安定性( $\alpha^*$ )とカオス性( $\lambda$ )は同一の4次元空間上での比較が可能である.

#### 4.2.2.2 流れ場の安定性判別

本節では Pera ら[3]の行った線形安定性解析に基づいて, 流れ場にある一定の周波数の微小人工攪乱を導入し, 攪乱の空間発展型増幅を想定して実験的に流れ場の安定性判別を行った. これは擾乱の増幅率を実験的に測定することを考えると時間発展型



## 第4章 水平加熱体上方の自然対流場の安定性とカオス性

を想定するよりも容易であるためである。乱れの空間的増幅率と時間的増幅率の間には厳密な関係は存在しないが、両者は変動の群速度を係数とする比例関係にあることが知られている[27]。よって中立安定については時間的成長と空間的成長の間に差はない。乱れの空間増幅率の変化に基づく安定性解析の場合  $G$ 、 $\beta$ 、空間増幅率  $\alpha^*$  を実験的に求める必要がある。まず  $G$ 、 $\beta$  を求める際に必要な物性値は  $T_\infty$  を周囲温度とした上でこの温度での空気の物性値を用い、 $\beta$  に現れる周波数  $f$  については人工攪乱の周波数を用いた。次に温度測定点での温度  $T_0$  であるが、これについては攪乱を加えない状態での温度測定を数回行い各データの時間平均値の算術平均値を採用した。この評価では攪乱により静止時の温度と攪乱導入時の時間平均温度が異なることによる影響を受ける可能性があるが、この方法の妥当性については4.2.3節で議論する。また温度の空間増幅率については上流側・下流側の温度振幅の比から求めている。具体的にはまず攪乱を導入した場合の各点での温度時系列データに対して高速フーリエ変換(FFT)をかけ、攪乱周波数における変動振幅  $\Delta T$  を求めた。なお本節では同一条件(同じ  $G$ 、 $\beta$ )での実験を3～4回繰り返して行っているのでそれぞれの時系列データから変動振幅を求め、対応する実験条件での変動温度振幅としてその平均値  $\overline{\Delta T}$  を採用した。これを各点での温度差  $\Theta$  で除した値  $\overline{\Delta \theta} (= \overline{\Delta T} / \Theta)$  を算出し、上流側の  $\overline{\Delta \theta}_1$  の値と下流側の値  $\overline{\Delta \theta}_2$  の比  $\alpha' (= \overline{\Delta \theta}_2 / \overline{\Delta \theta}_1)$  を求めた。この値の対数を取ったものを温度の空間的な測定間隔 30mm で割ったものが空間増幅率  $\alpha^*$  に相当する。本節ではこうして実験的に得られた  $\alpha'$  には誤差があることを考慮して以下のような基準を設けて安定・不安定を判別した。

$$\begin{aligned}\alpha' > 1.1 & : \text{不安定} \\ 0.9 \leq \alpha' \leq 1.1 & : \text{中立} \\ \alpha' < 0.9 & : \text{安定}\end{aligned}$$

この判定基準に用いられている閾値は事前に与えられるものではなく、便宜的に導入したものである。線熱源上方の対流場の安定・不安定を実験的に判別する際に上の基準を用いると、後述の通り線形安定性解析による予測結果とよく対応することが確認できる。以上の方法により  $X=50, 80, 110\text{mm}$  の3点についてその地点における流れの安定性を判断した。この方法は加振周波数の成分のみを抽出することで時系列データに混入するノイズの影響を避けることができる。

### 4.2.2.3 最大リアプノフ指数

本節では熱対流場の安定性とカオス性の関連を調べるため、各測定点における温度時系列データから最大リアプノフ指数  $\lambda$  を計算した。リアプノフ指数は物理的にはある瞬間の物理量(対象変数)のわずかな変化が拡大する場合の拡大率(指数換算)を時間平均したものに相当しており、初期値に対する鋭敏な依存性(SDIC: Sensitive Dependence on Initial Conditions)を評価する指標であるが、1章で述べたとおり指数換

算された増幅率を扱うという点で、乱れの空間（時間）増幅率の正負で安定性を判別する線形安定性解析の意味での安定性に対応するカオス性指標となっている．計算には 2,3 章と同じく Wolf ら[20]の方法を用いた． $\lambda$ の計算の際に必要なパラメータのうち位相空間上の隣接点を決定する際の最小距離は基本的に温度データの誤差である  $0.1^{\circ}\text{C}$ を採用し、埋め込み次元、遅れ時間、データの置き換えにかかる発展時間の 3 つについては 2, 3 章と同じくある値を基準にその周りでこれらの値を変化させて  $\lambda$ の値に変化が生じない(stationarity)ことを確認した．なお遅れ時間を変化させる場合は自己相関係数が 0.9 となるスケール  $\tau$ を基準にとり、各時系列データについて  $\tau$ に対する倍率をパラメータに取った．また本節では同一条件での実験を繰り返して行っているのでそれぞれ時系列データに対して同様に stationarity を調べた．そしてこの時系列データの変化もパラメータに含め、上記 4 変数を変化させた場合の  $\lambda$ の値の平均値とばらつきからそれぞれ  $\lambda$ の評価値と誤差範囲(平均によって求まった  $\lambda$ が確率 50 パーセントで変動する範囲を採用)を計算した．また本節では計算に用いた各温度時系列データの温度点数は 1000 点で比較的少ないが、データを 100 点から 1000 点まで変化させて  $\lambda$ を計算した結果  $\lambda$ の stationarity が確認でき、その値のばらつきは上記の 3 変数を変化させた場合のばらつきに比べて小さい(約 10 %)ことを確認している．これは本実験で用いた時系列データの場合には自己相関係数が  $1/e$  になる時間スケールがサンプリング間隔のオーダーできわめて小さく、また  $\lambda$ の値は理論的には遅れ時間に依存しないことによるものと考えられる．

#### 4.2.2.4 スムージング

一般に実験データから最大リアプノフ指数を始めとするカオス性指標を計算する際は実験データに対するローパスフィルタリングの有効性が指摘されている[20][24]．しかしながら本節で扱っているような周波数全域に渡ってノイズの影響が現れる実験データに対しては有効でない．そこで本節では得られた温度時系列データに対してカルマンフィルタ[25][26]に基づいたスムージングを施した．

実験で得られた時系列データから定義されるランダム系列  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  ( $y_1, y_2, \dots$ は等時間間隔で得られたサンプリングデータで個数は  $N$  個)は弱定常であり、それぞれのデータは正確な値にそれとは無相関の平均 0, 分散行列  $\mathbf{w}$  のノイズが加わったものと仮定する．このとき最小二乗推定量としてスムージング後のデータ  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N)$  を求めると次のようになる．

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{W} \mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \quad (4.5)$$

なお  $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N)$  で  $\bar{y}$  はデータの平均値である．また  $\mathbf{Y}$  はサンプリングデータ  $\mathbf{y}$  の分散行列 (Toeplitz 行列) であり、その要素は得られた時系列データから標本(共)分散関数の形で直接求める．本節では分散の値を有限の時系列データから予測するとの立場から(共)分散には不偏推定量を採用した．標本共分散関数をデータから推定する際の自

由度は相関を求める際のデータ間の時間差 $\tau$ が大きくなるに従って小さくなるが、これによる誤差の影響を避けるため、本節ではある $\tau$ で推定される共分散関数の値がサンプリングデータの分散 $\sigma_y^2$ の5%より小さい場合はそれ以降の共分散関数は0として扱った。

式(4.5)を適用する際にはノイズの分散行列 $\mathbf{w}$ をあらかじめ求めておく必要があるが、これは非常に困難である。そこで本節では $\mathbf{w}$ を変化させて、式(4.5)から求めたスムージング後のデータの特性的変化を調べる方法を採用したが、 $\mathbf{w}$ の各要素を変化させるのは計算上困難である。

ノイズの分散 $\sigma_w^2$ が小さいときノイズはほぼホワイトノイズとみなせてこのとき $\mathbf{w}$ は $\sigma_w^2 \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$ :単位行列)となる。一方ノイズレベルが大きいときノイズの自己相関は無視できず $\sigma_w^2 \rightarrow \sigma_y^2$ で $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{Y}$ となる。そこで本節では $\mathbf{w}$ を $\sigma_w^2$ の関数として次のようにモデル化して未知変数をノイズの分散 $\sigma_w^2$ に集約させ、 $\sigma_w^2$ を $\mathbf{w}$ を変化させる際のパラメータに取った。

$$\mathbf{W}(\sigma_w^2) = \sigma_w^2 \mathbf{I} + \vartheta(\sigma_w^2)(\mathbf{Y} - \sigma_y^2 \mathbf{I}) \quad (4.6)$$

ここで $\vartheta(\sigma_w^2)$ は $\sigma_w^2$ に対して単調増加の重み関数であり、 $\vartheta(0) = 0, \vartheta(\sigma_y^2) = 1$ である。本節では次式で定義される分散比 $\varsigma$

$$\varsigma = \sigma_w^2 / \sigma_y^2, \quad 0 \leq \varsigma \leq 1 \quad (4.7)$$

を用いて重み関数を $\vartheta(\varsigma) = \varsigma^n$ と表現した。ここで $\vartheta(\varsigma)$ の指数 $n$ は $\sigma_w^2 \rightarrow 0$ で $\mathbf{w} \rightarrow \sigma_w^2 \mathbf{I}$ となる条件、もしくは $\mathbf{w}$ の各要素が $\varsigma \mathbf{Y}$ の各要素の値より小さいという条件を課すならば $n > 1$ である必要があり、本節では $n=2$ を用いた。ちなみに $n \rightarrow \infty$ に対してノイズの分散関数はホワイトノイズの場合の分散関数 $\sigma_w^2 \mathbf{I}$ に近づく。

また本節ではカオス性の各指標を計算する際に有効性が確認されているローパスフィルタも併せて使用したが、これは Lawkins ら[24]と同じく一階微分方程式に基づいた線形フィルタをデータに対して4回施す方法を採用した。その際の遮断周波数は20Hzである。

### 4.2.3 実験結果

#### 4.2.3.1 加熱体上方の自然対流場の安定性

攪乱の空間増幅型を仮定して安定判別を行う場合、空気の場合を考えて $Pr=0.71$ と固定すると(4.1)式より無次元化空間増幅率 $\alpha^*X$ は $G, \beta, X/D$ の3変数の関数となる。よって細線の場合と異なり安定判別はこれら3変数を独立変数とした3次元空間上で行う必要がある。したがって $X/D$ の変化(加熱体形状の変化)に伴う安定性の変化を考察するには $X/D$ 軸に垂直に適当な断面で切って中立曲線の変化を考察することが望ましいが、本節の場合データ数が少ないためこれを行うことができない。そこで本節では次に示すとおり領域を $X/D$ について4つに分け、それぞれに対する安定・不安

定判別の結果を同一の  $G-\beta$  2次元空間上に表示することで安定曲線の定性変化を調べた。

|            |   |                          |
|------------|---|--------------------------|
| 領域 I       | : | $X/D \leq 3.0$           |
| 領域 II      | : | $3.0 < X/D \leq 5.5$     |
| 領域 III     | : | $5.5 < X/D < 12.0$       |
| 領域 IV (細線) | : | $500 \leq X/D \leq 1100$ |

上の  $X/D$  の分類に用いた領域の数並びに閾値については特に物理的な根拠はなく、それぞれの領域に属するデータ数 ( $G$ ,  $\beta$  の組み合わせ) が同じになるように決定した。以上の領域分類に基づいて 3.3 節の方法に従って  $G$ ,  $\beta$  を実験的に求め、そのパラメータにおける流れ場の安定性を判別した結果を図 4.3 に示している。図で黒丸は不安定、白丸は安定、三角は中立をそれぞれ表している。

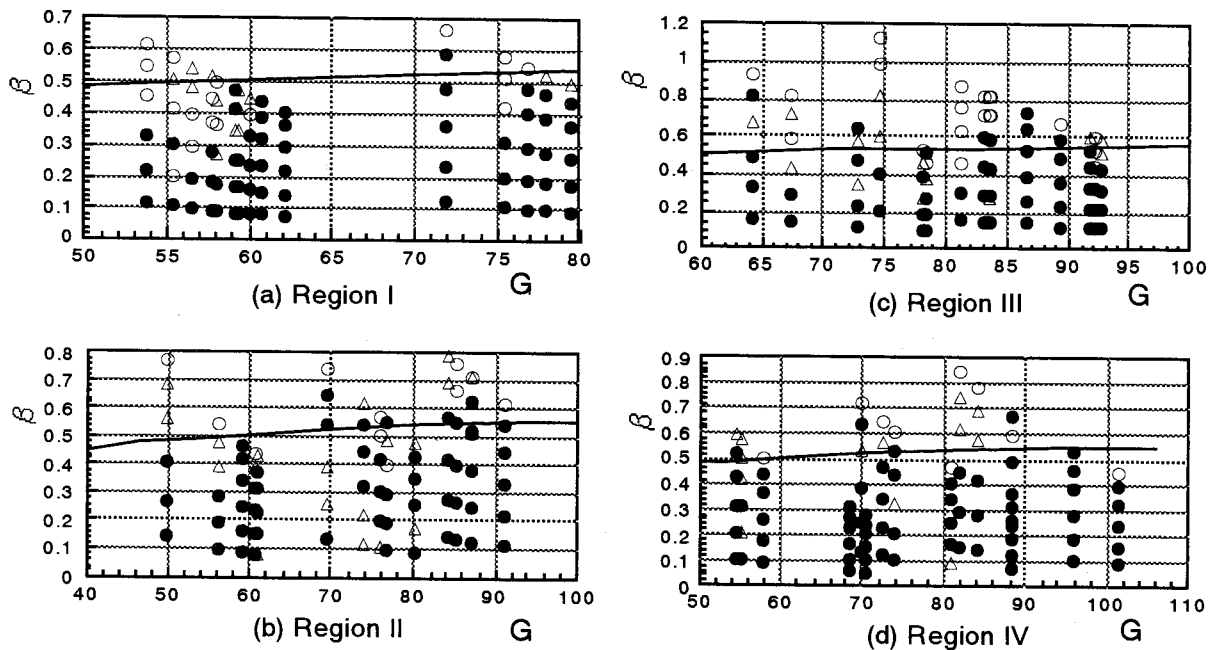


図 4.3 水平加熱体上方の自然対流場の安定-不安定特性  
(●:不安定, ○:安定, △:中立, —:Pera and Gebhart<sup>7)</sup>(1963))

図 4.3(a)~(d)には Pera ら[3]による細線の場合の理論中立曲線も併せて載せているがそれぞれの領域においてこの中立曲線と比較すると、領域 I で  $G$  が小さいとき  $\beta$  のより小さい領域に安定領域が広がっていること、そして他の領域においては実験で求めた安定不安定領域と細線の場合の理論中立曲線から判断される安定不安定領域は非常によく対応することが分かる。領域 I の結果は安定性における  $X/D$  依存性を示しており、領域 IV の結果は本節で用いた実験による安定性解析手法の妥当性を示している。さらに領域 II 及び III の結果は安定性における  $X/D$  の依存性は  $X/D > 3.0$  においては小さいことを示している。

4.2.3.2 フィルタリングの効果

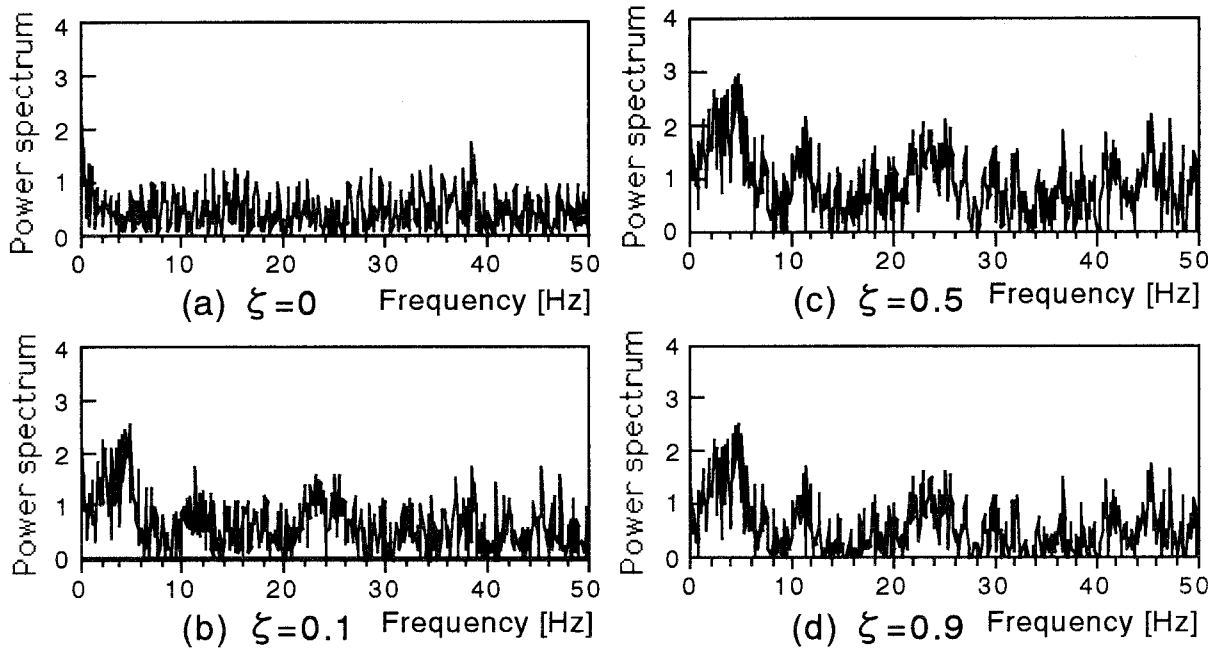


図 4.4 周波数分析結果 (Case1:  $G=79.5, \beta=0.1$ )

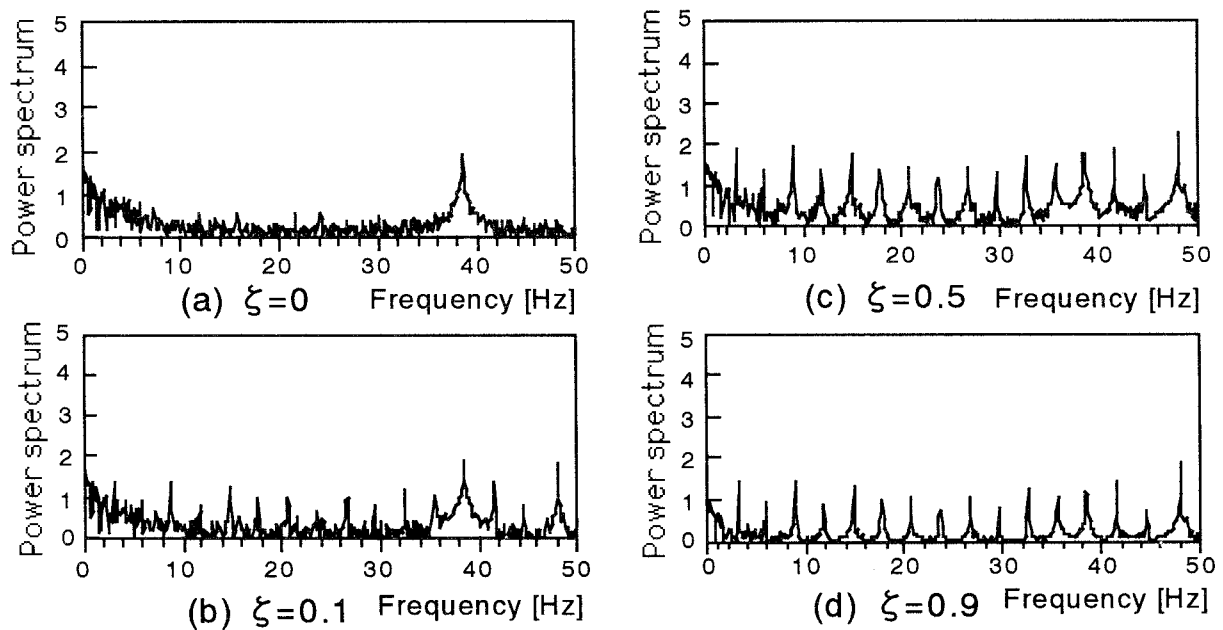


図 4.5 周波数分析結果 (Case2:  $G=81, \beta=0.85$ )

まずカルマンフィルタに基づく時系列データのスムージング手法の妥当性を検討するため 4.2.3.1 節において流れ場が安定もしくは不安定と判別された時系列データを幾つか選び, それらについて式(4.7)で定義されるノイズと時系列データの分散比と

を変化させながらスムージング前後の FFT 解析によるパワースペクトルの比較を行った．不安定，安定領域における代表 2 例（それぞれケース 1，ケース 2）の結果を図 4.4(a)～(d)ならびに図 4.5(a)～(d)に示している．ここでケース 1 は加熱円柱の直径が 28.8mm，加熱量 40W，攪乱周波数が 1Hz で高さ 80mm の場合であり，図 4.3(a)において  $G=79.5$ ， $\beta=0.1$  の点に対応している．またケース 2 は加熱円柱の直径が 9.6mm，加熱量 24W，攪乱周波数が 6Hz で高さ 110mm の場合であり図 4.3(c)において  $G=81$ ， $\beta=0.85$  の点に対応している．

スムージング前のデータ(図 4.4(a))では FFT 解析の結果はほぼ平坦な連続スペクトルとなっており，また図 4.5(a)では攪乱周波数である 6Hz もしくはその高調波成分は検出されず，38Hz という非常に大きな周波数近辺で保有するエネルギーレベルが高くなっている．これらの結果は測定系に起因するノイズの影響を受けており，時系列データに対して何らかの処理が必要であることが分かるが，図 4.4(a)，図 4.5(a)から単純なローパスフィルタリングのみでは不十分であることは明らかである．一方カルマンフィルタに基づくスムージング後のデータ図 4.4(b)～(d)では低周波成分の保有するエネルギーレベルが相対的に高い連続スペクトルとなっており，図 4.5(b)～(d)では攪乱周波数並びに 2 倍周期の低調波とその高調波を検出しており物理的に整合性の高い結果が得られている．4.2.2.4 節に示しているとおりが大きくなるに連れてノイズ除去効果は大きくなり，図 4.5(d)に見られるように  $\xi=0.9$  において完全にノイズは除去されてほぼ線スペクトルが得られている．一方  $\xi$  の変化に対するパワースペクトルの変化を見ると，絶対値は変化するものの周波数間のパワースペクトルの大小関係は余り変化せず，定数倍すれば相互にほぼ対応しており，これは  $\xi$  を変化させた場合のスムージング後のデータは平均値の周りで定数倍すればそれぞれ対応することを示している．最大リアプノフ指数は時系列データの線形変換に対して不変であり，このことは  $\xi$  の変化に対してカオス性がほぼ一定である可能性を示している．

次にローパスフィルタリングの効果についてであるが，後述の通り 2.2 節と同じくカオス性の低減効果が見られた．しかしながらこのフィルタリングの妥当性は物理現象との関連から判断すべきであり，これについては次節で議論する．

#### 4.2.3.3 カオス性と安定性との関連

4.2.2.4 節で述べた方法を用いて分散比  $\xi$  を変化させた場合の最大リアプノフ指数の変化を調べた．定性的には式(4.5),式(4.6)から  $\xi$  が 0 の時スムージング後のデータ  $\hat{y}$  は  $y$  そのものとなり， $\xi$  が 1 のとき  $\hat{y}$  は  $\bar{y}$  となるので， $\xi$  を 0 から 1 まで変化させた場合，スムージング後の時系列データから得られる温度の変動エネルギー(分散)は  $\sigma_y^2$  から 0 まで変化し，さらに最大リアプノフ指数は生データに対して得られる最大リアプノフ指数から 0 まで連続的に変化する．

このような傾向を  $G$ ， $\beta$  空間上で確認することが望ましいが， $\xi$  を 0.3 から 0.8 まで変化させたスムージング後のデータからは後述の通りほとんどの場合でカオス性

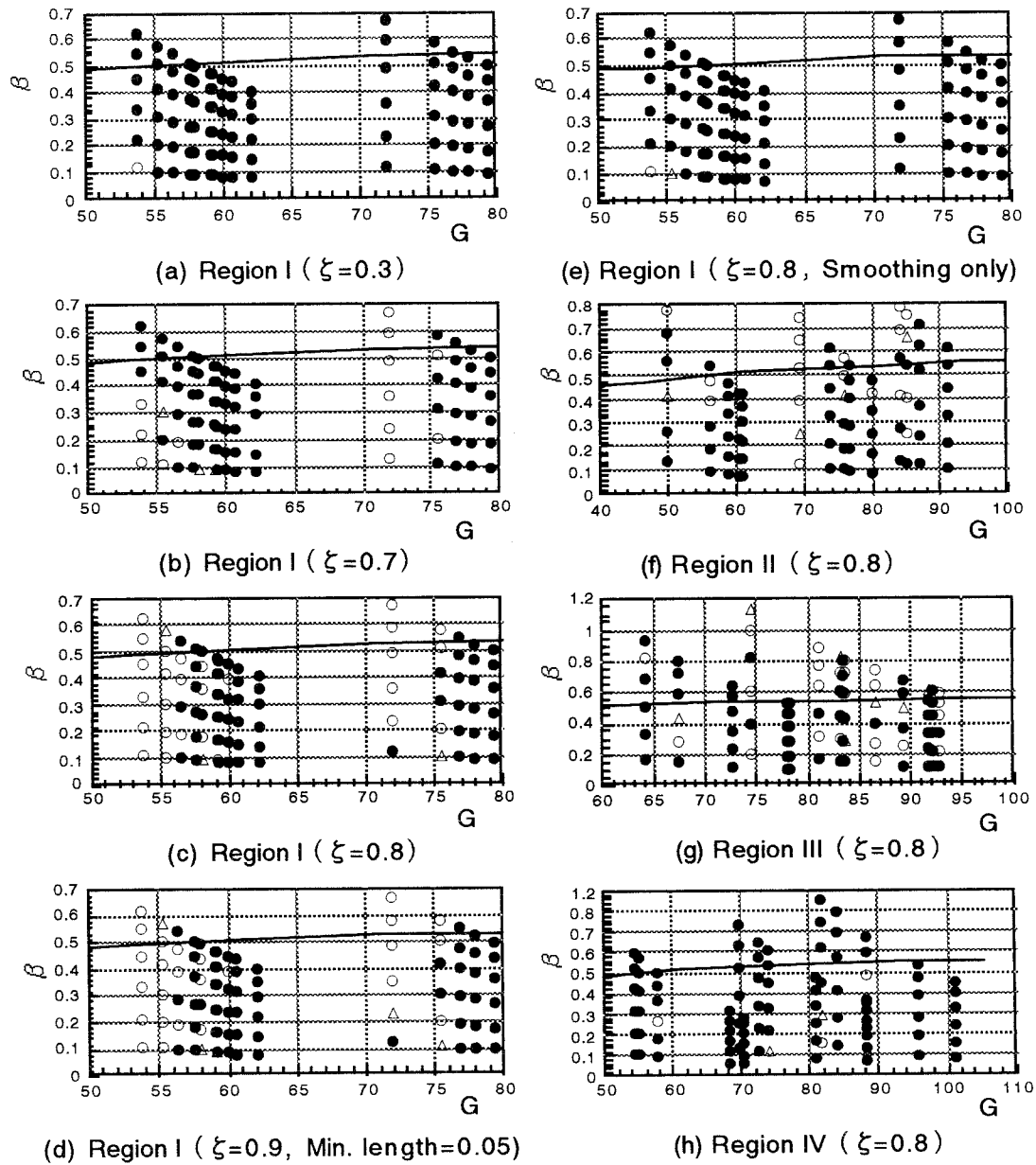


図 4.6 水平加熱体上方の自然対流場のカオス特性  
(●:  $\lambda > 0$ , ○:  $\lambda < 0$ , △: 中立, —: Pera and Gebhalt[3](1963))

が検出された．そこで主としてスムージング後のデータに対してローパスフィルタリングを施した時系列データから最大リアプノフ指数を計算し， $\zeta$ に対する値の変化を調べた結果を図 4.6(a)～(h)に示している．図 4.6では 4.2.2.3 節で述べた方法を用いて評価した最大リアプノフ指数の計算誤差を考慮しても最大リアプノフ指数が正と判断される場合に黒丸，負と判断される場合を白丸で示しており，それ以外は白抜き三角で示している．ちなみに式(4.3)の左辺で示される無次元化リアプノフ指数の値は，黒丸で示される多くの場合では  $10^2 \sim 10^3$  のオーダーである．

X/D に対する領域 I について  $\zeta$  を変化させた結果を図 4.6(a)～(d)に示しているが前

述の通り $\xi$ が大きくなるに連れてカオス性が減少する傾向が見られる。 $\xi=0.9$  (図 4.6(d))では 4.2.2.3 で述べた位相空間上の隣接点を決定する際の最小距離を 0.1 から 0.05 に変化させた場合、 $\xi=0.8$  とほぼ同じ結果(図 4.6(c))が得られた。これは 4.2.3.2 節で述べたように $\xi$ の変化に対して周波数間のパワースペクトルの大小関係は余り変化が見られないという事実と前述の $\xi$ の増加による温度の変動エネルギーの減少による影響と考えられる。また $\xi=0.8$ によるスムージング後のデータに対してローパスフィルタをかけない場合の結果を図 4.6(e)に示しているが、ほとんどの場合でカオス性を検出しており、ローパスフィルタリングの効果は明らかである。なお図には示していないが他の領域及び他の $\xi$ に対しても似たような傾向が見られた。

図 4.6(c),(f),(g),(h)は $\xi=0.8$ の場合の X/D の領域がそれぞれ I, II, III, IV の結果を示しているが、この結果を 4.2.3.1 節で述べた流れ場の安定性判別結果(図 4.3(a)~(d))と比較すると、X/D の小さい領域 I, II では G,  $\beta$ 空間上で熱対流場が不安定を示す領域はカオス性が検出される領域にほぼ対応している。このことは本節で扱った自然対流場においては流れ場の空間発展型増幅から評価した結果(図 4.3)と最大リアプノフ指数すなわち位相空間上でのアトラクタの時間的な乖離の度合いを計算するという意味で時間発展型増幅から評価した結果が対応したことを示しており注目に値する。領域 III, IV では $\xi$ をいくら変化させてもそのような対応は見られず、多くの場合でカオス性が検出される。これは不安定な周波数成分が存在するという意味での G-X/D 臨界面を越えると、空間中に存在する種々の周波数擾乱のうち不安定成分が増幅され、結果として G, X/D が大きい(高さが高い)ところで流れ場がカオス的になるためであると考えられる。ただ残念ながら本節で用いた方法では $\xi$ を確定することができないため G,  $\beta$ 空間上で流れ場の安定領域とカオス性が検出される領域の包含関係を議論することはできない。この議論のためには自然揺動状態でのカオス性評価や物理的なノイズの除去が必要であり、今後の課題である。

## 4.3 壁面ブルームの安定性とカオス性

### 4.3.1 実験装置及び方法

本節では前節で行った対流ブルームの実験の問題点を考慮に入れ、壁面ブルームの安定性とカオス性の関連についての実験的検討を行う。

壁面ブルームのような自然対流場は外力による影響を非常に受けやすいので、そのような外乱を遮断するため実験室内部にさらに実験小室(幅 3370mm, 高さ 3500mm, 奥行き 3440mm)を設け、この小室内の床面に防振ゴムを敷いた台の上に実験用網箱および 3 次元移動装置を設置した。実験用網箱を図 4.7 に示している。

この網箱の側壁は厚さ 3mm の透明アクリル板、前面と上面は外乱防止及び自然対流場の整流効果を考えてナイロンメッシュスクリーンで覆っている。下面は厚さ 5mm の黄銅板である。網箱の前面から 180mm の位置に鉛直に設置したベークライト板(高



さ 1100mm, 幅 350mm, 厚さ 3mm)を実験用壁面とし, この壁面の下端より高さ 5mm の位置に線径 0.2mm のニクロム線を水平に埋め込みこれを線熱源とした. 壁面に形成されるプルームを模式的に図 4.7に示している. 本章では熱源の加熱量を 40W/m に固定している.

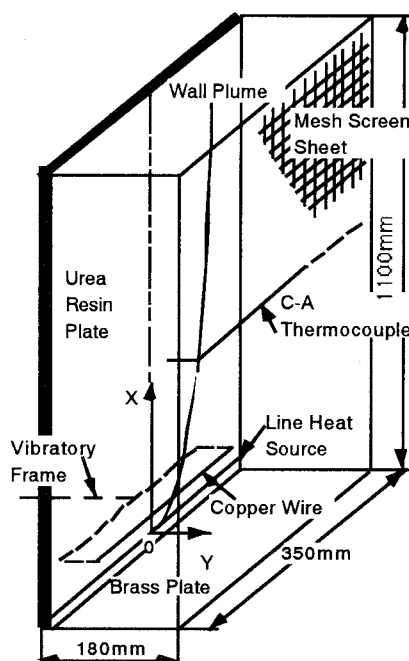


図 4.7 実験用網箱及び座標定義

なお鉛直のベークライト板の背面には実験用の線熱源の設置場所と同じ高さに線熱源を配置し, ベークライト板の表裏が面对称の同じ自然対流場になるようにすることによって壁面の断熱条件が満たされるように配慮している.

この自然対流場の安定性を調べる際には前節と同じく実験精度を高めるため, 壁面に設置した線熱源の 15mm 上方に熱源と平行に線径 0.2mm の銅線を張り, この銅線をコンピュータ制御されたパルスモータ駆動の加振装置を用いて約 1.5mm の一定振幅で振動させることにより, 0.5Hz~2.0Hz(0.51, 0.72, 1.0, 1.35, 2.02Hz)の微小人工攪乱を壁面プルームに導入した. この攪乱周波数はパルスモータに送るパルス間隔を変化させることによって制御した.

温度場の測定に用いるプローブには素線径 0.1mm のクロメル・アルメル熱電対が接続されているが, この熱電対は前節で検討したとおり十分な応答性を有している. この熱電対プローブはサポートを介して3次元移動装置に取り付けられており, コンピュータ制御により任意の位置で温度測定ができるようになっている. そして特定の点での熱電対の起電力はノイズの混入の少ないデジタルマルチメータを用いてサンプリング周波数 10Hz で 100 秒間の測定を行い, GP-IB バスを介してパソコンに転送し, データの記録と必要なデータ処理を行った.

自然対流場の安定性を調べる前に予備実験として網箱内部の詳細な温度分布測定を行って自然対流場の2次元性と層流域の定常性を確認し、これらの結果に基づいて本実験ではもっぱら線熱源の中央を通る鉛直壁に垂直な鉛直平面内の温度分布測定を行った。以下の図では座標系の原点は図4.7に示すとおり線熱源中央にとり、X軸を鉛直方向、Y方向を鉛直壁に垂直な方向、そしてZ方向を壁面に沿って水平方向にとっている。

実験中は小室を密閉し、3次元移動装置を小室外部からコンピュータで制御した。実験中の小室内部の温度は結果的にほとんど一定であり、高さ方向の温度勾配は0.5°C/m程度に抑えられていた。また空気中の温度変動の分散は熱電対の誤差レベル以下であった。それゆえ実験小室の温度変動による影響は無視できる。

### 4.3.2 データ解析方法

#### 4.3.2.1 次元解析

自然対流場においては熱量に関する基本次元 H は独立しているとみなせるので、本節で扱う熱対流場の基本次元は質量 M，長さ L，時間 T，温度  $\Theta$ ，そして熱量 H である。一方後述の安定性解析で扱う人工攪乱を加えた状態での温度の空間増幅率  $\alpha^*$  は代表温度差  $\Theta$ ，浮力パラメータ  $\beta^*g$ ， $\mu$ ， $k$ ， $C_p$ ， $X$ ， $f$  そして  $\rho$  の関数になると考えられる。ここで

$\Theta$ : 代表温度差(=  $T_w - T_\infty$ )

$T_w$ : X 軸に沿った(平板上の)局所温度

$T_\infty$ : 周囲温度

$\beta^*$ : 体膨張係数

$g$ : 重力加速度

$\mu$ : 粘性係数

$k$ : 熱伝導率

$C_p$ : 定圧比熱

$f$ : 攪乱周波数

である。それゆえ基本的な物理量として  $\beta^*g$ ， $\mu$ ， $k$ ， $x$  そして  $\rho$  をとると， Buckingham の  $\Pi$  定理から次式が得られる。

$$\alpha^* x = f_1(Gr_x, Pr, \frac{fx^2}{\nu}) \quad (4.8)$$

上式において  $Pr$  はプラントル数であり，  $Gr_x$  は次式で定義される局所グラスホフ数である。

$$Gr_x = \frac{g\beta^* x^3 \Theta}{\nu^2} \quad (4.9)$$

式(4.8)から  $\alpha^* x$  は  $Pr$  を固定するとき  $Gr_x$  と  $fx^2/\nu$  のみの関数となる。この結果は線形安定性解析の結果(Wakitani[13])の表記法に対応するものである。実際には Wakitani が行った線形安定性解析では次式で定義される変数  $G, \beta$

$$G = 4 \left( \frac{g\beta^* x^3 \Theta}{4\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \beta = \frac{32\pi f x^2}{\nu G^3} \quad (4.10)$$

を用いて結果を表示しており、この  $G, \beta$  の表現は代表長さ  $L_r$ 、代表速度  $V_r$  として次式を採用し、無次元化を行った場合に得られる。

$$L_r = 4x/G, \quad V_r = \nu G^2/(4x) \quad (4.11)$$

式(4.10), (4.11)で用いられているスケーリングを採用すると式(4.8)の別の表現として次式が得られる。

$$\alpha = \frac{4\alpha^* x}{G} = f_1(G, \beta, Pr) \quad (4.12)$$

全く同じ定式化をカオス特性を判断する指標の一種であり[1/s]の次元を有する最大リアプノフ指数 $\lambda$ に適用すると次のような無次元関係式が得られる。

$$\frac{16\lambda x^2}{\nu G^3} = f_2(G, \beta, Pr) \quad (4.13)$$

$Pr$  が一定であるとする、これらの関係式により壁面ブルームの安定性( $\alpha$ )とカオス特性 ( $\lambda$ )は同じ  $G$ - $\beta$  2次元平面上で比較することが可能となる。同様に  $Y$  方向座標は式(4.11)で示される代表長さを用いて無次元化すると以下ようになる。

$$\eta = y/L_r = \frac{Gy}{4x} \quad (4.14)$$

#### 4.3.2.2 安定性の評価

本節ではある特定の点における流れ場の安定性を前節と同じく乱れの空間発展型増幅を想定して上に述べた  $G, \beta$  および  $\alpha$  を実験的に評価することによって決定した。まず最初に熱電対を  $X$  軸に沿って動かし、人工攪乱を加えない状態での鉛直壁上の表面温度  $T_w(X)$  を測定し、周囲温度  $T_\infty$  から代表温度差  $\Theta(X) (= T_w - T_\infty)$  を評価した。周囲温度  $T_\infty$  はまた  $\nu, \beta^*$  の物性値を評価するのに使用した。次に前節で述べた方法と同様の方法により壁面ブルーム内部に人工攪乱を導入し、攪乱による温度振幅の高さ方向変化を調べた。測定の際は大きな測定温度振幅を確保するため  $Y$  方向の変曲点によって定義される曲線に沿って  $X$  方向に  $\Delta x (= 2\text{mm})$  間隔で熱電対を移動させ、同一条件下での測定をそれぞれ 10 回づつ (ただし 2.02Hz の場合に対しては 4 回のみ) 行った。温度振幅としては壁面ブルームの自然揺動による影響を避けるため加振周波数成分における温度振幅  $\Delta T$  を FFT を用いて評価し、これを人工攪乱に対応する温度振幅として再定義した。その上で無次元温度振幅  $\Delta\theta (= \Delta T/\Theta)$  の  $X$  方向変化を最小自乗法を用いて 3 次多項式で近似し、近似式の周りの測定値の不偏分散から各点での確率 50% の誤差範囲  $\epsilon_{\Delta\theta}$  を計算した。こうして求めた多項式と誤差範囲を用いて各点での温度振幅比  $\alpha'$  とその誤差範囲  $\epsilon_{\alpha'}$ 、ならびに無次元空間増幅率  $\alpha$  を次のように評価した。

$$\alpha' = \frac{\Delta\theta_d}{\Delta\theta_p}, \quad \varepsilon_{\alpha'} = \frac{\varepsilon_{\Delta\theta_d}}{\Delta\theta_p} \quad (4.15)$$

$$\alpha = \frac{4x}{G\Delta x} \ln(\alpha') = \frac{4x}{G\Delta x} \ln(\Delta\theta_d / \Delta\theta_p) \quad (4.16)$$

ここで下付き文字 p,d はそれぞれある特定の測定点における量と，その下流側の量を示している．壁面ブルームの自然揺動の波長は X 方向の測定間隔 $\Delta x=2\text{mm}$  に比べて非常に長いため，ある測定点での温度振幅 $\Delta T$  のばらつきとその下流側のばらつきとの間の相関は非常に高いと思われる．それゆえ式(4.15)で評価された誤差 $\varepsilon_{\alpha'}$ は $\alpha'$ の実際の確率 50%に基づく誤差範囲よりもかなり大きいことが予想される．しかしながら本節では前節とは異なり各測定点での温度変動は時間的に同時に測定していないため温度測定点間の温度変動の相関は評価できず，それゆえ上で述べた実際の誤差範囲を求めることはできない．以上の方法で評価された誤差を考慮し，本節では式(4.15)と(4.16)からある特定の点での流れ場の安定性を次のように判断した．

$$\begin{aligned} \alpha_+ > 0 & : \text{不安定} \\ \alpha_+ \alpha_- \leq 0 & : \text{中立} \\ \alpha_+ < 0 & : \text{安定} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ここで $\alpha_{\pm}$ は次のように定義されている．

$$\alpha_{\pm} = \frac{4x}{G\Delta x} \ln(\alpha' \pm \varepsilon_{\alpha'}) \quad (4.18)$$

実際には流れ場は非線形性に基づく折り畳み効果によりその空間増幅率を上方に向かって常に正に維持することはできない．その結果として生じる流れ場は極めて大きな温度変動を伴うため上の定義に従うと流れ場は中立と判断されてしまう．このことは線形安定性解析の意味で中立点，もしくは G の中立領域の決定を困難にする．そこで本節では X 方向に流れ場が中立領域を経て一旦不安定と判別された場合，その点の下流での流れ場を全て不安定と判別した．

#### 4.3.2.3 最大リアプノフ指数

本節ではまた上記の方法によって評価された安定性とカオス性を比較するため，前節と同じく人工攪乱を加えて得られた温度の時系列データから最大リアプノフ指数 $\lambda$ を Wolf[20]の方法を用いて計算した．

第 2，3 章で用いた方法に従い， $\lambda$ を計算する際に用いるパラメータすなわち埋め込み次元，遅れ時間，発展時間を変えながら $\lambda$ の計算を行い $\lambda$ の stationarity を確認した．遅れ時間を変化させる際は前章までと同じく自己相関係数が  $1/e$  になる時間スケール $\tau$ を参照時間スケールにとり，その遅れ時間との比をパラメータにとった．また 2.2 節と同じく熱電対の誤差  $0.1^\circ\text{C}$  を最小探索スケールに適用した．

最も適当なパラメータの値についてその周辺の値を適用した場合の $\lambda$ の変動を誤差

とみなし, 対応するパラメータの範囲での $\lambda$ の平均値とばらつきから $\lambda$ の値とその確率50%の変動誤差範囲 $\varepsilon_\lambda$ を計算した. なお本節では同一条件下での実験を何回か繰り返して行っているので, 計算に使用するデータの変更を4番目のパラメータとみなし, このパラメータに関しての $\lambda$ のばらつきも上記の評価の上で考慮している.

本節で $\lambda$ の計算に用いたデータ点数は1000で比較的小さいが, データサンプリング時間100秒は温度変動の参照時間スケール $\tau$ に比べて十分大きく, 前節と同じくデータ点数の変化に対する $\lambda$ の stationarity がとれていると考えられる. このことは $\lambda$ は理論的には遅れ時間によらないという事実に基づいている. 上述の方法によって評価された $\lambda$ とその誤差範囲から $\lambda$ の符号を以下のように判別した.

$$\begin{aligned} \lambda - \varepsilon_\lambda > 0 & : \lambda > 0 \\ -\varepsilon_\lambda \leq \lambda \leq \varepsilon_\lambda & : \text{中立} \\ \lambda + \varepsilon_\lambda < 0 & : \lambda < 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

### 4.3.3 結果及び考察

#### 4.3.3.1 壁面ブルームの基本的特性

(1) 壁面での温度分布 まず最初の実験として人工攪乱を加えない状態で壁面ブルームの温度測定を行った. ブルームの温度分布は周囲温度 $T_\infty$ や周囲の条件の影響を受けるが, X軸(鉛直壁面)に沿った温度分布の例を図4.8に示している.

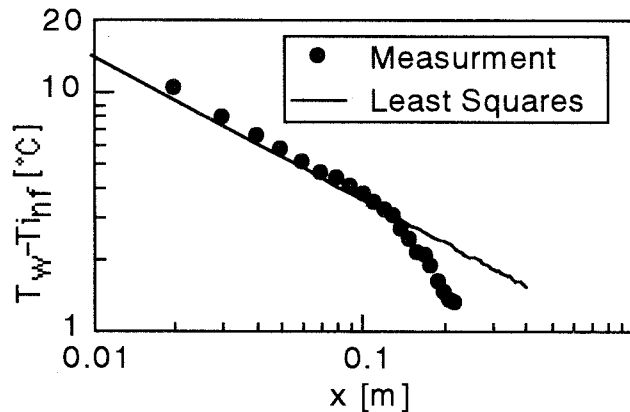


図 4.8 壁面温度分布

境界層近似並びに Boussinesq 近似による基礎式を用いた理論的検討[12][13]によると, 壁面での温度分布は次のように表現できる.

$$\Theta = T_w - T_\infty = Nx^{-\frac{3}{5}}, \quad (4.20)$$

ここで $N$ は比例定数であり, 本節ではそれぞれの温度分布に対して最小自乗法を用いて計算で求めた. 例として図4.8の温度分布に対して求めた相関式を図中に実線で

示しているが、基本的には測定値は式(4.20)で表現される温度分布によく一致している。しかしながら  $x > 0.1\text{m}$  では相関式と比較して急激に温度が低下しており、これは後述の壁面ブルームの壁面からのはく離によるものと考えられる。この急激な温度低下が見られる高さは環境条件によるが本節で得られた実験データでは  $0.1\text{m}$  から  $0.2\text{m}$  の間に分布している。同様に比例定数  $N$  は  $T_\infty$  によって変化するが、本節で得られた実験データでは  $N$  は  $1.0$  の周りに分布しており、相関係数は全て  $0.99$  以上の値が得られている。本節では代表温度差  $\Theta$  を対応する静止状態（周囲状態）での実験データから得られる  $N$  を用いて式(4.20)により評価し、無次元温度  $\theta$  を  $\theta = (T - T_\infty) / \Theta$  により求めた。

**(2) Y 方向の温度変化** さらに人工攪乱を加えない状態で Y 軸に平行な方向の温度分布を調べた。種々の高さにおける Y 方向の無次元温度分布を図 4.9 に示している。

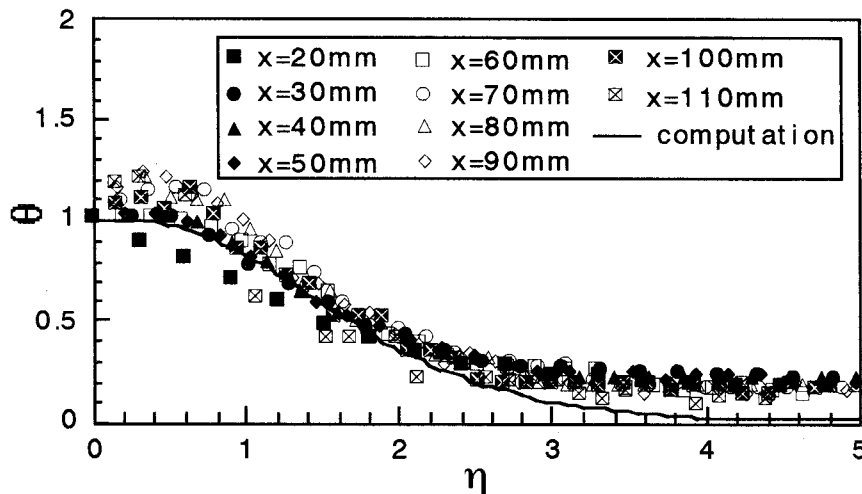


図 4.9 Y 方向温度分布

実線は Jaluria ら[12]の方法に基づいて計算した理論上の温度分布を示しているが、本節で得られた実験結果はこの理論温度分布によく一致している。 $x > 0.07\text{m}$  の場合では温度の極大値を示す点が Y 方向に移動しているが、これは壁面ブルームの鉛直壁面からののはく離を意味しており、後述のブルーム内の擾乱の増幅によるものである。この壁面でのブルームのはく離は壁面で補助加熱を施すことで抑えられることが知られている[28]が、本節ではそのような補助加熱は行わなかった。後述の Wakitani[13]の線形安定性解析結果は Jaluria ら[12]が行っているのと同じく境界層近似並びに Boussinesq 近似を施した流れの基礎式に基づいているが、この基礎式に基づく定常解は上で述べたように測定による流れ場の基本的特性をよく捉えている。ただ  $\eta > 2$  において理論値と異なり  $\theta$  は  $0$  と異なる値で一定となっているが、これは加熱された壁面からの輻射と前面のメッシュスクリーンの存在によるものであり、熱電対挿入や小部屋内部の流体乱れの影響を最小限度に抑えるために実験的には避けることはできな

い. この定常解から Y 方向温度分布の変曲点は $\eta=1.43$ (=一定)と求まるが, 4.3.2.2 節で述べたとおり人工攪乱導入による実験の際はこの曲線に沿って熱電対を移動させて温度測定を行った.

#### 4.3.3.2 人工攪乱に対する熱的応答

**(1)基本的な流れの特性** 本節では壁面ブルームの安定性を評価するため壁面ブルーム内部に一定周波数の人工攪乱を導入したが, この評価に先立って人工攪乱導入状態での流れ場の基本的特性を調べた. 無次元化した時間平均温度  $\theta_{\text{mean}}$  の分布を導入周波数を変えながら図 4.10 に示している. それぞれの曲線は同一周波数条件下で得られた各時系列データの時間平均温度  $\theta_{\text{mean}}$  の平均値を示している. 図 4.11 の温度変動の分散のグラフと図 4.12 の温度変動範囲のグラフも同一周波数条件下で得られた複数個の値の平均値を示している.

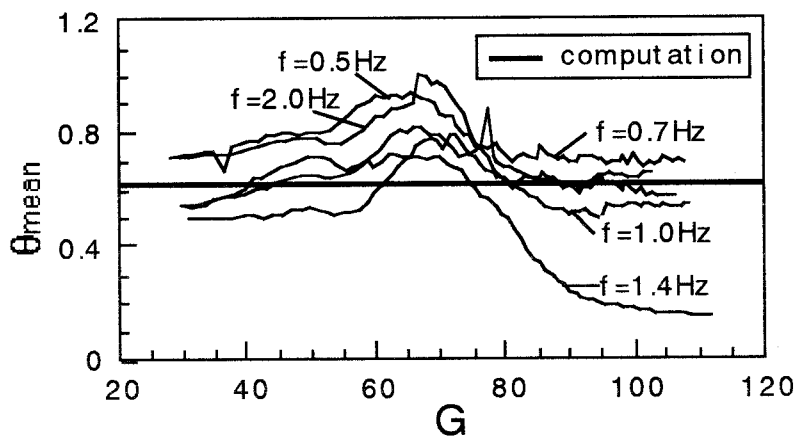


図 4.10 時間平均温度の分布

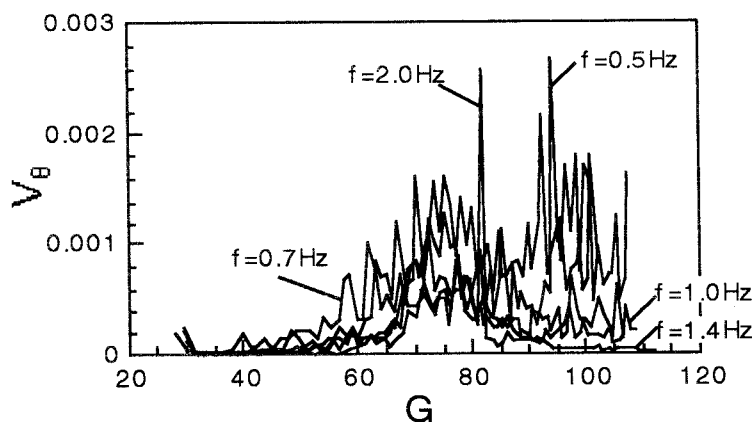


図 4.11 温度変動の分散

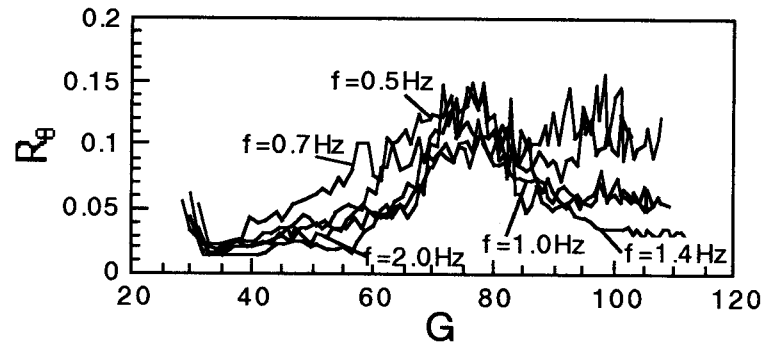


図 4.12 温度変動の範囲

温度測定は前述の通り  $\eta=1.43$  の曲線に沿って行われており、それゆえ図 4.9 で示されている温度の計算値は図 4.10 では一定値（太い実線）となる。図に示されているとおり  $G$  が小さい時  $\theta_{\text{mean}}$  は計算値の周辺に維持されているが  $G=50$  を越えると  $\theta_{\text{mean}}$  の増大は顕著となり、 $G=70$  近辺で極大値をとったあと、単調減少している。また温度の無次元分散  $V_\theta$  ( $\theta$  の分散: 図 4.11) と無次元温度変動範囲  $R_\theta (= \theta_{\text{max}} - \theta_{\text{min}}$ : 図 4.12) はともに  $70 < G < 85$  の範囲内で非常に大きな値を示している。

**(2) 壁面ブルームの安定性** 4.3.2.2 節で述べた方法により種々の攪乱周波数、すなわち 0.51, 0.72, 1.0, 1.35 および 2.02 Hz に対して温度の無次元増幅率  $\alpha$  とその上限および下限  $\alpha_\pm$  を実験的に調べた。例として  $f=1.35$  Hz の場合について図 4.13 に示している。この図ではエラーバーの上限及び下限がそれぞれ  $\alpha_+$ ,  $\alpha_-$  を示している。この図から式(4.17)より壁面ブルームは(1)  $G < 45$  で中立、(2)  $45 \leq G < 50$  で安定、(3)  $50 \leq G < 60$  で中立、そして(4)  $G \geq 60$  で不安定と判別できる。 $G=60$  は前述のとおり  $\theta_{\text{mean}}$  の顕著な増加が観察される  $G$  の下限値に相当しており、壁面ブルームの不安定化がそのような温度増加、すなわち混合を促進していることが分かる。

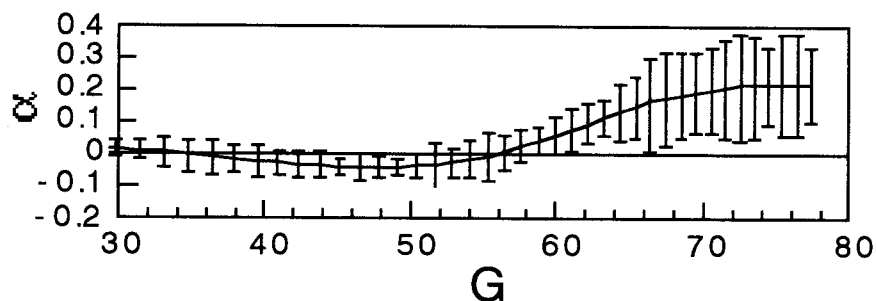


図 4.13 無次元増幅率とその誤差範囲( $f=1.35$  Hz)

同様にして他の攪乱周波数の場合に対しても式(4.17)により安定-不安定特性の分類を行った。結果を図 4.14 に示している。図中で“●”, “+”, “△”はそれぞれ不安定, 安定, 中立を示している。実線は鉛直壁面近傍の壁面ブルームに対して解析的に得られた一定温度増幅率曲線(Wakitani[13])を示している。



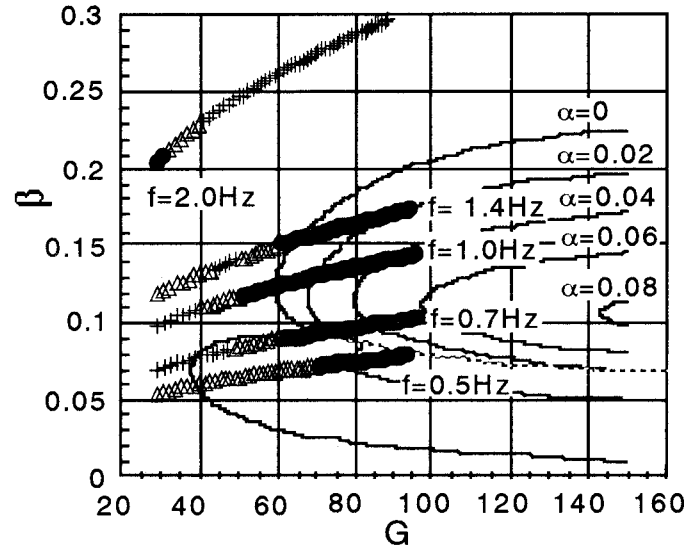


図 4.14 壁面ブルームの安定-不安定特性

(●:不安定, +:安定, △:中立, -:一定増幅率曲線[13], --:Branch cut[13])

中立曲線( $\alpha=0$ )と本実験で得られた流れ場の安定性を比較すると、高周波数の場合(1.0 および 1.4Hz)では実験で得られた中立領域はやや  $G$  の小さい方向へずれており、これは田中ら[18]が指摘している平行流近似による影響が考えられる。低周波数の場合(0.51 および 0.72Hz)では逆に増幅率は抑えられているが、これは mode2、すなわち図 4.14 で点線で示している“branch cut”[13]より下の不安定領域、における攪乱の伝搬速度が mode1 と比較して相対的に小さく、またその攪乱の伝搬波長が先端からの鉛直方向距離と比較して極めて長いことによる影響[14][15]が考えられる。ちなみに  $f > 1.0$  の場合で  $G < 40$  の高さの低い領域でも中立もしくは不安定な温度変動が観察されているが、これは攪乱発生装置の振幅を固定しているため導入周波数が大きい場合には壁面ブルームに投入される乱れのエネルギーが大きくなることによる影響が考えられる。

**(3) 壁面ブルームのカオス性** 最後に Wolf ら方法[20]を用いて人工攪乱導入時の温度時系列データから最大リアプノフ指数  $\lambda$  を求めた。温度の正弦関数的な変化はカオス性評価に影響を及ぼさないので、導入攪乱周波数  $f$  は  $G$ - $\beta$  空間上で与えられた時系列データの特徴周波数としての利用が可能である。4.3.2.3 節で述べた方法で  $\lambda$  とその誤差範囲を計算し、式(4.19)の分類に基づいてカオス性の有無を決定した。結果を図 4.15 に示している。

この図に示すとおり、 $G$  の増加に伴い  $G=70$  の近辺で  $\lambda$  は負から正もしくは中立に変化しているが、この特性は導入周波数  $f$  によらない。 $G=70$  は mode1 において増幅率が正となる周波数成分が存在する下限値( $G=50$ )より大きいことを考慮すると、このカオス性は周囲から壁面ブルームに導入される乱れのうち不安定な周波数成分の増幅と関係があると考えられる。ここで  $G > 70$  の領域は  $\theta_{\text{mean}}$  が  $G$  の増加と共に単調減

少する領域に対応しており(図 4.10),  $G > 85$  に対しては温度変動のカオス的振る舞いが弱められ $\lambda$ の符号は負に反転しているということに注意しなければならない. さらに  $70 < G < 85$  の範囲では温度の分散と温度変動の範囲が大きくなる領域に対応している(図 4.11, 図 4.12)ことにも注目すべきである. すなわち流れ場に生成されるカオス性は線形メカニズムによって増幅された(発達した)温度変動のエネルギーカスケード, すなわち非線形過程によるものであり,  $G > 85$  でのカオス性の減衰は変動エネルギーの散逸によるものであると考えられる.

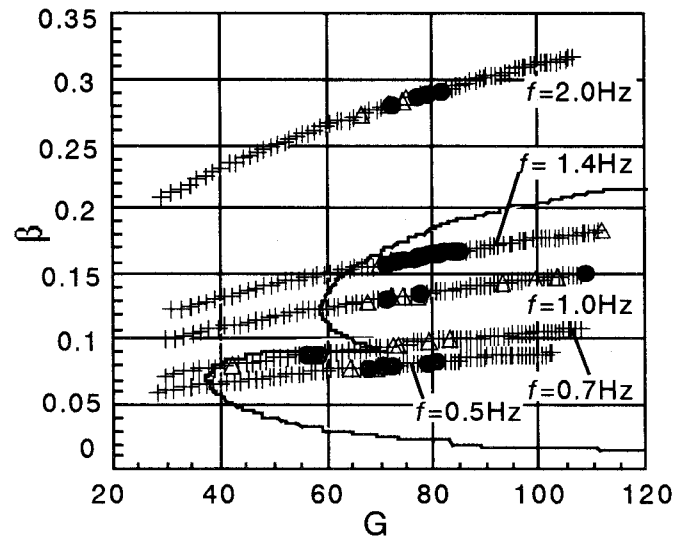


図 4.15 壁面ブルームのカオス特性  
(●:  $\lambda > 0$ , +:  $\lambda < 0$ ,  $\Delta$ : 中立, -: 中立曲線[13])

結果として壁面ブルームの流れの領域は(1) 安定領域, ( $G < 50$ ), (2) 乱れ増幅領域( $50 \leq G < 70$ ), (3) カオス領域( $70 \leq G < 85$ ), (4) 非カオス的領域( $G \geq 85$ )の4つに分類できるが, これらの領域はそれぞれ(1)層流, (2)遷移, (3)乱流, (4)再層流化後の流れの領域にそれぞれ対応しており, 以上の結果からカオス的変動が見られる  $G$  の領域は線形安定性解析の意味で不安定な領域内部に含まれ, 領域(3), (4)における流れの特性は流れ場の非線形性の影響を極めて強く受けているということが分かった.

#### 4.4 結論

本章ではまず実験小室中に置かれた水平加熱体上方の自然対流場に人工攪乱を導入し, 熱対流場の安定・不安定判別を行うと同時に人工攪乱導入時の温度時系列データに対してカルマンフィルタに基づくスムージングとローパスフィルタリングを施し, その時系列データからカオス性として最大リアプノフ指数を評価した結果, 以下の事柄が明らかとなった.

(1)本章で用いた水平加熱細線上方に生ずる自然対流場の実験による安定判別結果は

Pera ら[3]の線形安定性解析の結果とよく一致し、本節で用いた安定・不安定判別法は妥当であると判断できる。

- (2) 水平加熱円柱上方の自然対流場の場合を細線の場合と比較すると、加熱体からの鉛直方向距離と円柱直径との比が 3.0 以下の領域においては修正グラスホフ数の小さい領域で安定領域が大きい。
- (3) 実験的に得られた時系列データからカオス性指標を計算する際には、本節で扱ったような全周波数成分に対してノイズの影響が無視できない時系列データに対してはローパスフィルタリングを施すだけでは不十分で、カルマンフィルタのような濾波フィルタリングを施す必要がある。
- (4) 水平円柱上方の自然対流場において加熱体からの鉛直方向距離と円柱直径との比が 5.5 以下の領域において最大リアプノフ指数が正の領域と熱対流場が不安定になる領域との間に対応が見られる。

また本章では鉛直壁に埋め込まれた水平線熱源によって誘起される壁面ブルームの安定性を実験的に調べた上でカオス性を判断する一つの指標である最大リアプノフ指数 $\lambda$ を計算して、安定性とカオス性の関係について検討した。主要な結果は以下の通りである。

- (5) 壁面ブルームの定常的な流れ場の特性については境界層近似並びに通常よく行われている Boussinesq 近似を施した基礎式に基づく数値解析結果とよく一致する。
- (6) 高周波数の攪乱に対しては  $G$  の小さい領域への中立領域のずれが観察されたが、これは田中ら[18]の指摘している平行流近似による影響によるものであると考えられる。低周波数の場合では逆に中立領域の  $G$  の大きい領域へのズレが観察されたが、これは Dring ら[16]の指摘している導入攪乱の長波長伝搬を支持するものであると考えられる。
- (7)  $G$  が大きくなるにつれて正の空間増幅率を持つ周波数成分が現れるある臨界点より上の領域で温度のカオス的変動が観察され、その後そのカオス性は抑制される。この変化は増幅された温度変動のエネルギーカスケードとその結果としての変動エネルギーの散逸により説明が付く。
- (8) 壁面ブルームの流れの領域は 4 つの領域、すなわち安定領域、乱れ増幅領域、カオス的領域、非カオス的領域に分類できるが、これらは層流、遷移、乱流、再層流化後の流れの領域にそれぞれ対応している。

4.2 節では水平加熱体上方の自然対流場の安定性とカオス性を扱ったが、壁面を有しないためブルームの揺動自体が極めて不安定であること、さらに本実験環境下で不可避なノイズの影響により流れ場の安定性については主として  $X/D < 3.0$  の領域において細線の場合( $D=0$  の極限)と比較して加熱体の有限径による影響が強く現れることを示すにとどまっており、またデータ解析に用いた 1 自由度のカルマンフィルタの影響

からカオス性と安定性との関係性が示唆されるもののその包含関係までは議論できなかった．4.3節ではこれらの問題点を解決することで温度のカオス的領域が線形安定性解析の意味で不安定な領域に含まれており，カオス的流れ場の発生が乱れの増幅そのものではなく，増幅された乱れエネルギーの散逸過程と関係があることを示している．この結果から熱対流場のカオス性は，流れ場のあるモードに混入する乱れが線形メカニズムによって増幅されるとき，そのエネルギーを散逸させるための流れのモード変化を伴う非線形過程（本章の場合乱流）で現れると考えられる．すなわちカオス性は線形安定性解析の意味での不安定よりも狭い概念であると結論することができる．

第4章の文献

- [1] B. Gebhart, Natural convection flow, instability, and transition, *ASME J. Heat Trans.*, **91**(1969), 293-309
- [2] T. Fujii, Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **6**(1963), 597-606
- [3] L. Pera and B. Gebhart On the stability of laminar plumes: some numerical solutions and experiments, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **14**(1963), 597-606
- [4] R. G. Bill, Jr. and B. Gebhart, The transition of plane plumes, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **18**(1975), 513-526
- [5] S. E. Haaland and E. M. Sparrow, Stability of buoyant boundary layers and plumes, taking account of nonparallelism of the basic flows, *ASME J. Heat Trans.*, **95**(1973), 295-301
- [6] F. E. Fendell, Laminar natural convection about an isothermally heated sphere at small Grashof number, *J. Fluid Mech.*, **34**(1968), 163-176
- [7] S. Nakai and T. Okazaki, Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers-1, pure convection, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **18**(1975), 387-396
- [8] A. Linan and V. N. Kurdyumov, Laminar free convection induced by a line heat source, and heat transfer from wires at small Grashof numbers, *J. Fluid Mech.*, **362**(1998), 199-227
- [9] P. R. Nachtsheim, Stability of free-convection boundary-layer flows, *NASA Technical Note. D-2089*, 1963.
- [10] A. E. Gill and A. Davey, Instabilities of a buoyancy-driven system, *J. Fluid Mech.*, **35**(1969), 775-798
- [11] C. A. Hieber and B. Gebhart, Stability of Vertical Natural Convection Boundary Layers, *J. Fluid Mech.*, **48**(1971), 625-646
- [12] Y. Jaluria and B. Gebhart, Buoyancy-induced flow arising from a line thermal source on an adiabatic vertical surface, *Int. J. Heat Mass Trans.*, **20**(1977), 153-157
- [13] S. Wakitani, Instability of a two-dimensional wall plume, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **53**(1984), 148-155
- [14] R. P. Dring and B. Gebhart, A Theoretical investigation of disturbance amplification in external laminar natural convection, *J. Fluid Mech.*, **34**(1968), 551-564
- [15] P. G. Daniels and J. C. Patterson, On the long-wave instability of natural-convection boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **335**(1997), 57-73
- [16] R. P. Dring and B. Gebhart, An experimental investigation of disturbance amplification in external laminar natural convection flow. *J. Fluid Mech.*, **36**(1969), 447-464
- [17] C. E. Polymeropoulos and B. Gebhart, Incipient instability in free convection laminar boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **30**(1967), 225-239
- [18] 田中宏和, 辻俊博, 長野靖尚, 熱駆動流の安定性解析, 第31回日本伝熱シンポ

ジウム, 1994, 232-234

- [19] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, in *Lecture Notes in Mathematics*, **898**, Rand D. A. and Young L. -S. eds., (Springer, Berlin), 1981, 366-381
- [20] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents From a Time Series, *Physica D*, **16**(1985), 285-317
- [21] P. Grassberger and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Phys. Lev. Ret.*, **50**(1983), 346-349
- [22] T. Yazaki, Experimental Observation of Thermoacoustic Turbulence and Universal Properties at the Quasiperiodic Transition to Chaos, *Phys. Rev. E*, **48**(1993), 1806-1818
- [23] H. Koizumi and I. Hosokawa, Chaotic behavior and heat transfer performance of the natural convection around a hot horizontal cylinder affected by a flat ceiling, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **39**(1996), 1081-1091
- [24] W. F. Lawkins, C. S. Daw, D. J. Downing and N. E. Clapp, Jr., Role of low-pass filtering in the process of attractor reconstruction from experimental chaotic time series, *Phy. Rev. E*, **47**(1993), 2520-2535
- [25] 有本卓, カルマンフィルター, 産業図書, 1977
- [26] R.E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems, *ASME J. Basic Eng.*, **82**(1960), 35-45
- [27] M. Gaster, A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, **14**(1962), 222-224
- [28] H. Kimoto, H. Ishida and H. Ueki, On the thermal field of a wall plume (the response to artificial disturbances), *Heat Trans.- Asian Res.*, **28**(1999), 559-572

## 第5章 本論文のまとめ

### 5.1 各章の要約

第1章ではまず本論文で扱うカオスの熱流体現象における側面について概説した上で、本論文の目的及び構成について詳述した。

本論文の扱う熱流体の現象は基本的に散逸系とみなすことができ、そのカオス的振る舞いは Takens の埋め込みに基づいて構成される位相空間上のアトラクタを用いて分析可能である。“カオス”の定義として多くの研究者は初期値に対する鋭敏な依存性(SDIC: Sensitive Dependence on Initial Conditions)を重要視しており、これを有する力学系は一般に「カオス的」と呼ばれる。本論文において“カオス性”はこの意味で用いている。SDICの存在は最大リアプノフ指数が正であるという事実によって特徴づけられる(定義ではない)が、この最大リアプノフ数の計算方法としては種々の方法を検討した結果 Wolf ら[1]によるものが最適であると判断し、本論文ではもっぱらこの方法を実験、数値計算結果に現れるカオス性の有無及びその強度の分析に用いている。またカオスを生み出す自由度としてのアトラクタの次元を求めることもまた重要であり、実験や計算によって得られる離散データからこれを求めるには Grassberger ら[2]の方法に基づく相関次元の算出が有効であることが確認された。さらに本論文ではカオス性と安定性の比較も行っているが、一般に安定性の判別に用いられる線形安定性解析では安定性を有するための条件が完全安定に対応するような厳しいものである。これに対応する SDIC の条件に関して考察が必要である。この条件には本論文で用いている最大リアプノフ指数が正という条件がまさに適当であることが示された。また本論文では乱流とカオスとの関連についても議論しているが、本論文で言う“乱流”とは Reynolds 数やグラスホフ数が大きい場合に現れる、vortex stretching に基づく大小、方向様々の渦構造の生成という普遍的構造、もしくはその構造に基づいてコルモゴロフの第2相似則から導かれる $-5/3$ 乗スペクトルを有する波数領域である平衡領域が存在し、時空間的にも乱れている十分発達した乱流(発達乱流)の意味で用いているが、このような限定は乱流理論の観点から、また工学的必要性に基づいて乱流解析を行う観点から特に問題は生じないと考えられる。

本論文では熱対流場のもつカオス性に関する研究が十分に行われていないことをふまえ、自然対流場を題材にとり、まず熱流体工学分野での評価体系の中に“カオス”を取り込むことを目的として工学上重要な既存概念である準定常性、安定性、ヒステリシス、乱流とカオス性との関連について検討している。次に実際の自然対流場に対してカオス性を判別する指標を用いた分析を行うことで流れ場の総合分析が可能となり、特別な実験装置やシミュレータを用いることなく、1)システムの不安定化の原

因究明と不安定化しうる空間的領域の特定,そしてこれを通じたシステム安定化のための代替案の検討, 2)パラメータの変化に伴う現象の変化の定量的分析と類型化等々が可能となることを示すことで,このようなカオス力学的アプローチが工学的に極めて有効であることを示すことも目的としている.そこで各章では種々の条件下でできるだけ一般的な結論を導くため,扱う自然対流場として自励系や強制振動系,そして閉じた系や開いた系を各種織りませ,それらに対して実験的,数値的検討を試みる構成となっている.

第2章では自励系で閉じた系の自然対流場の一例として密閉容器内部に構成される熱対流場について実験的・数値的に検討し,プラントル数を固定し,グラスホフ数を変化させた場合の流れ場の定性的な変化と,温度の時間変化から得られる変動スペクトルの変化やカオス性の有無を始めとする定量的変化との比較を行った.

まず鉛直二面の温度を固定することで水平方向に温度差を設け,試験流体にプラントル数の大きいグリセリン水溶液を用いた場合に形成される鉛直平行平板間の自然対流場について実験的に検討した.グラスホフ数が大きい場合に内部に形成される2次流れセルの存在する空間的領域は温度の時間変動に特徴的な周波数が存在する領域,すなわち温度の準定常性が現れる領域と一致しており,その特徴周波数は高さ方向に小さくなる.また温度変動の時系列データから得られる自己相関係数が  $1/e$  になる時間スケールは2次流れセル内部で低下し,また2次流れセル内部に最大リアプノフ指数が正,すなわちカオス性が検出される領域が含まれることが明らかとなった.この最大リアプノフ指数が正の領域では最大リアプノフ指数はグラスホフ数が大きくなるにつれて大きく,そして高さが高くなるにつれて小さくなる.

次にこの鉛直平行平板間の自然対流場について非定常性,カオス性を数値的に検討した.特に  $Ra$  や粘性の温度依存性がそれらの性質に及ぼす影響について詳細に検討し,実験結果と比較した.粘性を一定として計算した場合には温度変動のパワースペクトル,変動の時間スケール,最大リアプノフ指数といった非定常特性が容器の中心に対して対称となることが確認されたが,粘性の温度依存性を考慮した計算では中心軸上で最大リアプノフ指数が最大となる点は容器の下部に現れる.これは実験結果と一致しており,非定常特性に対して粘性の温度依存性が大きな影響を与えることが明らかとなった.

また内円筒にヒータを埋め込んで加熱し,外円筒を温度一定で冷却することにより,グリセリン水溶液を注入した円筒間内部に生じる熱対流場の周波数特性,時間変動スケール並びにカオス性について実験的に検討し,鉛直平行平板間の自然対流場と比較した.この円筒管内部では2次流れセルの存在する領域や温度変動の特徴周波数が検出される領域は円筒間の上部に偏り,高さ方向に中心対称的な鉛直平行平板間と異なっている.これは内円筒一定熱流束の条件ではたとえ物性値が温度変動しない場合でも,中心対称の解が存在しないことによるものであると考えられるが,2次流れセル



の存在領域内部にカオスの温度変動が検出される領域が含まれる点では一致している。

第3章では閉じた系で強制振動系の自然対流場の一例として鉛直2面の一方を加熱，他方を冷却，その他の面を断熱とした2次元矩形容器に鉛直方向振動を加え，無次元角速度を変化させた場合に生じる自然対流場について数値的に検討し，内部の対流場の定性的変化や壁表面平均ヌセルト数の時間変動特性の定量的変化について考察した。

正方密閉容器の場合には  $Fu[3]$  が無次元角速度の変化に伴う現象の変化について5つの類型化を提案しているが，これらは壁表面平均ヌセルト数の周波数特性の変化やその時系列データから得られるアトラクタの形状変化，並びに時間平均位置，最大リアプノフ指数，相関次元といった位相空間上の指標の変化に完全に対応がつく。また  $Fu$  らの指摘したヒステリシスの現れる無次元角速度の領域は，本研究で用いた初期条件下では  $t=0$  で振動を開始した直後から壁表面平均ヌセルト数が不規則・非周期的な変動を見せる領域に対応しており，この初期の不規則性は無次元角速度が大きくなるにつれて弱まる。またこの正方密閉容器では壁表面平均ヌセルト数の時間変化から求まる自己相関係数が  $1/e$  となる時間スケールの増加（減少）は時間・壁表面平均ヌセルト数の減少（増加）に完全に対応しており，この時間スケールが現象を支配する時間スケールとして極めて重要な役割を果たしていることが理解できる。

次に容器のアスペクト比を3もしくは5にした場合について調べ，アスペクト比が1の場合と比較した。容器のアスペクト比が大きくなると  $Fu$  らの提案した5類型に対応する壁表面平均ヌセルト数の現象面から見た定性的変化はアスペクト比が1の場合と比較して明確ではなく， $Fu$  らの5類型はそのまま適用できない。しかしながら熱対流場の持つカオス性の変化も考慮すると， $Fu$  らの5類型は壁表面平均ヌセルト数の特性の変化をよく捉えている。ただアスペクト比が大きくなるにつれて容器内部に鉛直方向に並ぶ渦の数が多くなり，この数の変化に伴って変動特性は細分化されることが明らかとなった。このような現象の変化は正方容器の場合と同じく，位相空間上に再構築されるアトラクタの幾何学構造の変化や，周波数特性の変化と対応がつく。また正方容器の場合と異なり，アスペクト比が大きい場合は共鳴周波数と異なる周波数において最大リアプノフ数は最大値をとり，それは安定的に内部に2個のセルが形成されるモードの直前の周波数に対応している。さらにこの場合では正方容器の場合と異なり，自己相関係数から求まる時間スケールの減少は必ずしも時間・壁表面平均ヌセルト数の増加につながらず，また低温側，高温側の壁表面平均ヌセルト数の時間変動特性のアンバランスも観測された。これらの相違はアスペクト比が大きい場合に観察される鉛直方向の多数の渦による高温側，低温側の熱伝達の時間特性の変化に基づくものである。

第4章では開いた系で自励系の一例として実験小室中におかれた水平加熱体上方

の自然対流場をとりあげ、人工攪乱を導入した場合の温度時系列データから熱対流場の安定・不安定判別を実験的に行うと同時に、同じ時系列データからカオス性として最大リアプノフ指数を計算し、安定性とカオス性の比較検討を行った。

まず自由空間中に水平加熱体を設置した場合であるが、あらかじめ加熱体として空間中に細線を張り、実験的に得られる安定性と Pera ら[4]が行った線形安定性解析の結果を比較した結果よく一致し、本論文で行っている実験方法は妥当であると判断した。水平加熱体に円柱を用いる場合、安定性を決定するパラメータは細線の場合の修正グラスホフ数と無次元周波数に加えて加熱体からの高さで円柱直径の比を考慮しなければならない。水平加熱円柱上方の自然対流場の場合を細線の場合と比較すると、加熱体からの鉛直方向距離と円柱直径との比が3.0以下の領域においては修正グラスホフ数の小さい領域で安定領域が大きいことが確認された。次にカオス性と安定性の比較であるが、鉛直方向距離と円柱直径の比が5.5以下の領域では安定領域と非カオス的領域の間に対応が見られた。この比が大きくなると安定領域と非カオス的領域の対応が見られずほぼ全ての場合でカオス的になるが、これは不安定な周波数成分が存在し始める臨界条件を越えると、自然界に存在する種々の周波数擾乱のうち不安定な成分が増幅されて加振周波数に関わらず流れがカオス的になるためであると考えられる。ただこの実験の場合には温度時系列データに含まれるノイズを除去するのに1自由度を有するカルマンフィルタリングを施しており、安定領域とカオス領域の包含関係について確定することができなかった。

次に断熱鉛直壁に埋め込まれた水平線熱源によって誘起される壁面ブルームについて同様の安定性解析並びに安定性とカオス性の比較を行った。まずブルームの安定性に関して高周波数の人工攪乱を導入した場合には、Wakitani[5]の線形安定性解析の結果と比較して、中立領域の修正グラスホフ数の小さい領域へのずれが観察されたが、これは田中ら[6]の指摘している平行流近似による影響によるものであると考えられる。また低周波数の場合では逆に中立領域の修正グラスホフ数の大きい領域へのズレが観察されたが、これは Dring ら[7]の指摘している導入攪乱の長波長伝搬を支持するものであると考えられる。次にカオス性に関しては修正グラスホフ数が大きくなるにつれて正の空間増幅率を持つ周波数成分が現れるある臨界点より上の領域で温度のカオス的変動が観察され、その後そのカオス性は抑制されることが明らかとなった。結果として壁面ブルームの流れの領域は4つの領域、すなわち安定領域、乱れ増幅領域、カオス的領域、非カオス的領域に分類できるが、これらはそれぞれ層流、遷移、乱流、再層流後の流れの領域にそれぞれ対応している。

## 5.2 本論文の結論

本論文では自然対流場のカオス性に関する基本的検討として第2章において自励系の例として密閉容器槽内部の自然対流場、第3章において強制振動系の例として矩

形密閉容器を鉛直方向に振動させた場合に内部に生じる自然対流場,並びに第4章において安定性とカオス性の比較のため水平加熱体上方の自然対流場を取り上げた.最後に本節では以上の結果から本論文のまとめとして準定常性,安定性,ヒステリシス,乱流といった旧来からの概念とカオスとの関連性とカオス性指標を交えた流れ場の分析とその有効性について述べておきたい.

### 5.2.1 カオス性と既存概念との関連性

まずカオス性と乱流との関係であるが,第2,3,4章で明らかとなったように温度変動にカオス性が現れる空間的領域における流れ場は必ずしも平衡領域,すなわち vortex stretching による大小方向様々の渦構造を持つ流れ場である発達乱流ではない.第4章の場合には温度のカオス的変動が見られる領域では非常に細分化され確かに発達乱流として観察される渦構造が存在している.しかし一方で第2章の場合にはカオス的変動が見られる領域には2次流れ,3次流れセルといった代表長さのスケールの組織渦構造が不規則に上下する様子が観察され,同様に第3章の場合には低周波数モードでは観察されない局所的で不規則だが代表長さのオーダーの複数の渦構造が観察される.すなわち異[8]が指摘しているとおり,カオスは乱流(発達乱流)よりも広い概念として捉える必要がある.また第4章においては壁面ブルームについて線形安定性解析の意味での安定性を実験的に判別し,温度変動に現れるカオス性との比較を行った結果,リアプノフ指数が正という意味でのカオス性は線形安定性解析の意味での不安定に含まれる概念であることが明らかとなった.すなわち流れ場の中には線形メカニズムによる擾乱の増幅が起こっていながらカオス性を示さない流れが存在することになる.線形メカニズムのみを採りだして考えると擾乱は無限に増幅されるが実際は熱対流場の物理量は有界,すなわち Lagrange の意味で安定[9]であり,これを実現するメカニズムは非線形メカニズム以外にはない.実際,増幅された温度の変動エネルギーは流れ方向にカオス性を示す領域を通じて減衰している.すなわちカオスはあくまで熱対流場の非線形メカニズムが生み出すのであって,改めて N-S 方程式の慣性項の重要性が認識されるところである.すなわち本論文の結果からカオスは発達乱流よりも広く,線形安定性解析の意味での不安定よりも狭い概念であることが示された.

次に準定常性についてであるが,第2章の平行平板間の自然対流場においてカオス的溫度変動を示す領域は準定常性を示す2次流れ領域内部に完全に含まれ,結果として準定常的な流れ場の中に非カオス的領域が存在することを明らかにした.このような領域の存在は同じく第2章の同軸二重円筒間の上部において温度振幅が大きいにも関わらずカオス性が減衰するような領域や上述の乱れ増幅領域,すなわち準定常的変動を見せるにも関わらず非カオス的な領域の存在によっても確認できる.これらの結果からカオス性が準定常性よりも狭い概念であることは明らかである.

それでは不安定性と準定常性との関係はどうか.現象が線形安定性解析の意味での

安定であれば、自然界に存在する微小擾乱は指数関数的に減少するので定常解は安定に維持され、準定常的な変動は観測されない。よって準定常性は線形安定性解析の意味で安定でない、すなわち不安定か中立の領域に含まれていることは確かであるが、この中立に含まれるもののうち指数関数よりも弱い、べき乗関数を始めとする任意の単調増加関数に従って微小擾乱が増大する場合でも流れ場の準定常性は観測されると考えられる。すなわち準定常性は線形安定性解析の意味での不安定よりも広く、Lyapunov の意味での不安定[9]とほぼ同義であると予想される。以上の結果をまとめると既存概念とカオス性の関係は図 5.1 のように表現できる

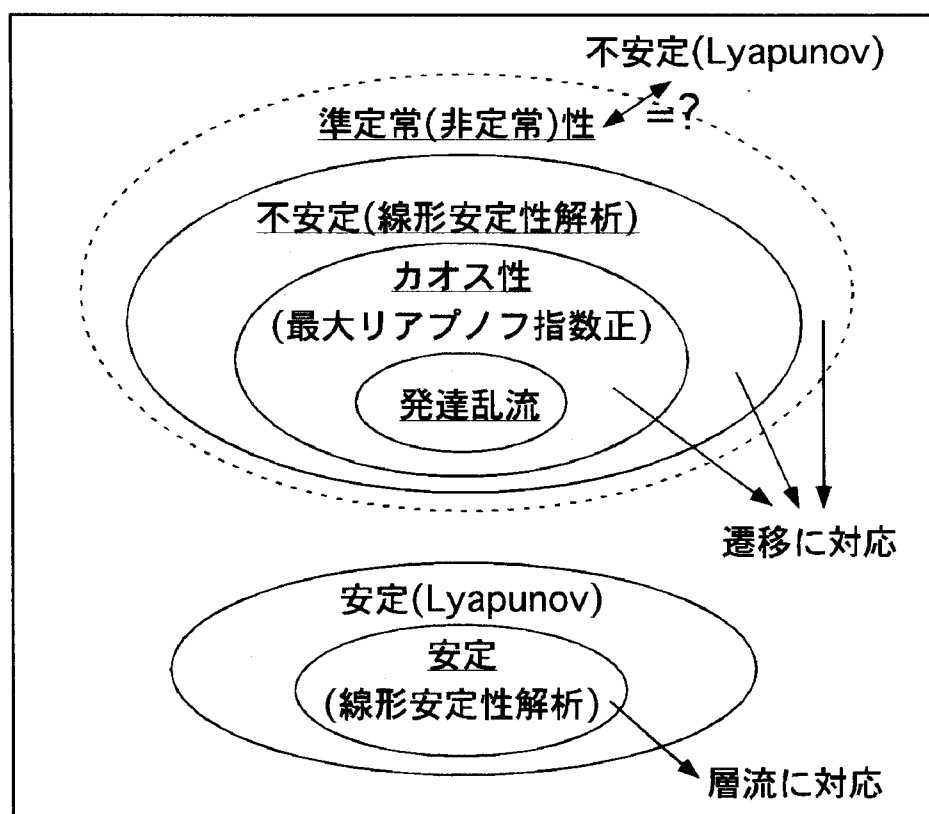


図 5.1 既存概念とカオスとの関連性

最後にヒステリシスとカオスとの関連についてであるが、第 3 章の正方容器に対して鉛直方向振動を加えた場合において、振動開始直後に壁表面平均ヌセルト数のカオス的時間変動が観察される(加振)周波数領域はヒステリシスが観察される領域に対応していることを明らかにした。このヒステリシスは同一の境界条件下での異なる定常解(周期解)に依拠している。

ここでこの初期の不規則な変動は周期解とは見なされない。しかし本論文で行ったように基礎方程式を離散化して数値的に解く場合、加振周波数  $f$  とその高調波のみからなる周期解については周期を  $T(=1/f)$  とすると、ある時間  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) に対して  $t+nT$  ( $n$ : 0 以上の整数)における物理量(定義点での値)と  $t+(n+1)T$  における物理量の間の関係

をユークリッド空間(次元は離散化の際の定義点の数)上の離散写像(定義域に関しては連続)と見なすことができ,さらに初期値(上のユークリッド空間上の初期座標点)からこの写像を繰り返すことによって得られる値域とその集積点をこの写像の定義域 $\Omega$ と考えると, Brouwer の不動点定理<sup>\*</sup>を適用することができて,そのような周期解( $0 \leq t < T$  をパラメータとする写像の不動点)が $\Omega$ 内部に少なくとも一つ存在することを示すことができる.

このとき上述のカオスと不安定との関連を考慮するとこの不規則変動の値域内部に存在する周期解は不安定であり,最終的に移行する準定常状態で表現される周期解は安定であるといえる. ヒステリシスとカオスとの関係は他の既存概念と違い,単純な包含関係で表せないが,このような安定性の異なる複数の定常解,周期解の存在は種々のカオスへのシナリオ[10]の中で Feigenbaum ルート, Pomeau-Manneville ルートにおいて本質的な役割を果たすことが知られている.

### 5.2.2 カオス性指標を交えた流れ場の分析とその有効性

上述のようにカオス性と既存概念との関係は明らかとなった. では“カオス”の工学的有効性は何か. 以下ではカオス性指標から見た流れ場の分析を通じてこれを明らかにしたい.

まず流れ場がカオス的となる理由,すなわちカオスへのシナリオについてであるが,カオス性指標と周波数分析のような既存の分析指標を用いると明らかにできる場合がある. 第3章の2次元加振熱対流場において,正方容器の場合に共鳴振動対流領域の中の2つの周期解が存在する加振周波数の領域が現れ,本論文ではヒステリシス領域と名付けた. 上述の議論に従うと一方の周期解が安定,他方が不安定と結論できる. この正方容器の場合にはこのヒステリシス領域が終了する $\omega=1400$ より若干大きい $\omega=1496,1778$ において $t < 10$ では準定常状態に移行しない“安定した”不規則運動が観察された. これは逆接線分岐(サドル・ノード型分岐)によるカオス化[10],すなわち Pomeau-Manneville ルートに相当している. またアスペクト比が大きいケースでは高周波数振動対流領域においては壁表面平均ヌセルト数の時間変動に加振周波数と異なる場に固有で互いに素な周波数が一つ現れ,中間対流領域において場に固有な2つの互いに素な周波数が現れたあとに,共鳴振動対流領域全域に渡る壁表面平均ヌセルト数のカオス的変動が観察される. これは加振周波数を減少させる方向で考えた場合,上述の変化は Hopf 分岐を繰り返してカオス化する Ruelle-Takens ルートによるカオス化[10]とみなせる.

さてこのように対象となるシステムが不安定となる場合, 5.2.1 節で明らかにしたようにカオス性は不安定性に含まれる概念であるので,カオス性指標はシステムの安定化の指針となりうる. すなわちカオス性を減じる方向がシステムを安定化する方向

<sup>\*</sup>  $\Omega$ を  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  の有界凸閉集合とし,  $f$  を  $\Omega$  から  $\Omega$  の中への連続写像とすれば  $f$  は不動点を持つ. すなわち  $f(x)=x$  となる  $x \in \Omega$  が存在する.

であり、測定可能な物理量の時系列データから計算されるカオス性指標の値の変化から可変パラメータの最適値が決定できる。

一般には上記のような議論を行うためには解の安定性を判別する必要がある。この場合実験的には4章で行ったように人工攪乱装置が必要となるが、これはあらゆるシステム設計において用意できるものではない。また解析的には安定性解析には定常解、すなわち境界値問題の解を複数個求めた上で、それぞれの解に加わる攪乱の発展方程式についてその（一般化）固有値問題を解く必要があるが、工学においてよく使用される有限差分法<sup>\*</sup>の場合、定常解は基本的には初期値問題として時間発展型に解いて得られるものである。不安定な定常解や与えられた境界条件において可能な全ての定常解を求めることは一般に不可能である。また攪乱の発展方程式の離散化の際に慣性項に計算の安定化のため風上差分を使用する必要があるが、この場合数値粘性を付加<sup>\*\*</sup>することによる安定化がシステムの安定性そのものの判別に支障をきたすことになる。以上の理由により多くの工学現場においては分岐や安定性を議論することはあまり現実的とは言えない。一方でカオス性指標を用いたシステム分析は上述のとおり対象となる力学系の変化についての総合的な分析を可能にするが、この分析には特別な実験装置やシミュレータを必要としないという点が極めて重要であり、工学的に極めて有効であるといえる。

一方第4章においてカオスの温度変動が見られる領域は温度、速度の変動エネルギーが微小スケールの渦運動を生成していくエネルギーカスケードの領域に対応しており、その結果として変動エネルギーが散逸するとカオス性も消滅することを示した。つまり流れ場のカオス性は線形メカニズムによって増幅された変動エネルギーを散逸させるために流れのモード変化（2次流れの生成）を伴う非線形過程が励起されている領域で発生しているのである。この2次流れは第2章では2次流れ、3次流れセルであり、第3章では不規則な渦運動であり、第4章では乱流である。したがってカオス的な変動が観察される領域はアンサンブル平均量からのエネルギー供給を受ける領域の近傍である必要がある。第2章の場合では密閉容器であるので左右の鉛直壁近傍の浮力と鉛直壁の間を通過する熱量（の相関）に基づいて速度、温度の変動エネルギーは平均量から常に流れに沿って供給を受け、また第3章の場合では速度の変動エネルギーが任意の地点で見かけの重力変動による仕事により供給を受け、発生した速度変動と温度変動の相関を通じて温度変動のエネルギーが供給される。結果として2、3章の場合では条件によってはディリクレ型境界条件を課している壁面近傍を除くほぼ全域で温度のカオス的な変動が観測される。特に第3章の振動熱対流場の場合は浮

---

<sup>\*</sup>一般に NS 方程式を数値的に解く方法としては有限差分法以外に境界要素法、スペクトル法、有限要素法が代表的であるが、境界要素法、スペクトル法は適用対象とする物理空間の形状や境界条件には大きな制約があり、一方有限要素法は慣性項の離散化に対して計算を安定化させ、精度よく流れ場を求める方法が必ずしも確立されているとはいえず、また各要素の形状を記憶するための大きな計算メモリを必要とする。

<sup>\*\*</sup>一般に物理量の偶数回微分項を擬似的に付加する。

力でなく振動による見かけの重力に基づいているので温度がほぼ一定の温度境界層内部においてさえも不規則温度変動が現れ、結果として壁面の物理量である壁表面平均ヌセルト数にカオス性が現れる。一方第4章の場合では速度変動、温度変動のエネルギーの供給源は線熱源近傍に局在しており、その結果流れに沿って乱れエネルギーの散逸構造は維持されず、十分下流でカオス的流れ場は消滅してしまう。これが流れの再層流化、非カオス化であると考えられる。このようにカオス性はエネルギーの散逸構造と関連性があり、流れが不安定な空間的領域はカオス性を示す空間的領域を含むので、流体機器等の設計において不安定化しうる空間的領域をあらかじめ見積もるのに有効である。

第3章においては加振周波数の変化に伴う現象の定性的変化を位相空間上で再構築されるアトラクタの形状等、位相空間上で定義される指標を用いて完全にそして定量的に区別が可能であることを示した。第2章の場合ではこの現象の変化と位相空間上の指標の変化について特に述べてはいないが、(1)2次セルの発生していない領域、(2)2次セル発生領域内部だが温度変動がカオス的でない領域、(3)2次セル発生領域内部のカオス的溫度変動領域の3つは位相空間上でそれぞれ、(1)では時間的に変動が見られないのでアトラクタを再構築するとポイントアトラクタ、(2)では温度変動は周期的であるのでリミットサイクルやツイスト、トーラスのような整数次元のアトラクタ(3)ではストレンジアトラクタのように分類でき、第3章の場合と同様に位相空間上の指標を用いて定量的に区別可能である。同様に第4.3節の場合では水平加熱体上方のプルームの変化について(1)層流領域、(2)遷移領域、(3)乱流領域、(4)再層流化後の流れ領域は(1)ポイントアトラクタ、(2)整数次元アトラクタ、(3)ストレンジアトラクタ、(4)整数次元アトラクタの形で完全に区別可能である。このような結果は自然対流場の流れのモード変化は位相空間上の指標の変化により定量的に分析が可能であることを示しており、注目に値する。

さらに位相空間上の指標を用いた流れのモード変化の分析の中で明らかとなったことは定性的には一見カタストロフ的、離散的なモード変化でも指標の変化の上では連続変化と捉えられることである。第3章の例では加振周波数の増加に伴って正方容器内の流れ場は共鳴振動対流領域から中間対流領域を経て高周波振動対流領域に変化し、一見極めて離散的な変化である。しかし最大リアプノフ指数を見ると共鳴振動対流領域では明らかに正であったものが、加振周波数を大きくしていくとその後中間対流領域の直前で特定の周波数とその高調波成分が相対的に増大すると共に最大リアプノフ指数が減少し、中間対流領域において0となるという連続変化を見せる。相関次元においても同様である。このことは流れのモード変化を分析し、逆に定義する上でこれらの位相空間上の指標が極めて有効であることを示している。

これらをシステム設計の上で考えると同様のシステム(機器)においては可変パラメータの変化に伴って同様のモード変化をすると考えられるが、カオス性指標はこれらの間の定量的比較を可能にし、それによって明らかとなる対応関係を通じて、過去

のシステム（製品）の経験を現在のシステムに当てはめることが可能となる。従来の周波数分析のような手法ではカオス性が現れた場合、連続スペクトルが得られるだけで定量比較は不可能であることを考えると、カオス性指標の工学的有効性が理解できる。

### 5.3 今後の研究と展開

本論文ではカオスもしくはそれに関連する指標群の工学的応用をめざして、乱流、安定性、ヒステリシスといった概念とカオス性との関連性について調べるとともに、カオスに関連する指標の有効性について明らかにした。

今後は時系列データ解析ツールとして従来の周波数分析等に本論文で紹介した指標を加え、技術者全体でその有効性について検討し、経験を蓄積する必要があるのではないかと考えている。つまり“カオス”の工学的有効性の確認と適用例の蓄積が短期的に見て今後の研究課題と言えるだろう。

カオス性指標は本論文で紹介したもの以外にもたくさんあるが、一般に種々のカオス性指標を精度よく求めるためにはデータ点数が多い（時間的に長い）時系列データが必要となる。本論文で用いた実験、数値計算による時系列データはあらゆる指標を精度よく求めるためには十分なものではない。第1章において一般化次元について説明したが一般に次数  $q$  が大きくなると距離  $r$  が小さいところでの統計にノイズの影響がより強く現れる[10]。カオスは SDIC を有しているのでノイズのレベルをいくら小さくしたとしてもその影響を未来永劫に渡ってある一定レベル以下に抑えることなど不可能であるが、ノイズのレベルを抑えることでノイズの影響が時系列データに現れるまでの時間を長くすることができ、結果としてより豊富で精度の高い時系列データが得られる。このようなデータを得るためには実験的には細心の注意を払うと同時に PIV[12]を始めとする非接触的な測定方法を考える必要がある。また数値計算においては離散化の際の打ち切り誤差を抑えるための努力として、本論文のような2次精度ではなく、もっと高精度の離散化式の利用[13]やスペクトル法[14]による計算が必要となるだろう。このように種々のカオス性解析手法を適用する場合、時系列データに要求されるノイズレベルはどれくらいか、またそれを実現する実験的・数値的手法は何らかの検討が必要となろう。

また本研究では熱対流場のカオスとしては自然対流場のような少数自由度系のカオスを取り上げたが、乱流のような多自由度系のカオスを定量的に扱う方法は確立されていない。工学的にはアンサンブル平均量の振る舞いが重要であるので、このような多自由度のカオスをそのまま扱う必要はないと考えられるが、自然対流場と同様の有効性を保つための手法の確立が必要である。例えば上述のような努力により時間・空間分解能の高い時系列データが得られたと仮定すると、アンサンブル平均量の時間空間的振る舞いはデータにローパスフィルタをかけたものに相当するので、そのよう



なフィルタリングにより変動自由度を落とした上で既存のカオス解析を適用する方法が考えられる。以上のようなカオス解析の高度化や適用範囲の広範囲化が中期的な課題である。

また次の段階としてこのような時系列データによる解析そのものに意味があるかの検討が不可欠となる。第1章で述べたように、本論文で行っている解析が意味をもつためには構造安定性や時系列データの統計的状态に関する初期値に対する非依存性が要求されるが、熱流体の方程式系はこの条件を満たしていることがすでに証明されているわけではなく、カオス特性の分析精度を上げていくと、あるレベル以上でこの影響が無視できなくなるだろう。この時第1章で述べたように PDF もしくは不変測度の方程式を直接扱う必要が生じる。著者はこの検討をすでに始めており、確率密度関数(PDF)とその高階 PDF の輸送方程式を Grassmann 代数(外積代数)を用いて導出することを提案している[15]。

この方法では常微分方程式系、流体力学系双方に対して Grassmann 代数を用いて PDF の局所的保存の条件、すなわち PDF の定義から直接 PDF の輸送方程式を導出することができる。特に流体力学系においては無次元次元空間上の PDF を取り扱う必要性が生ずるが、これを定義し取り扱う上で Grassmann 代数は本質的な役割を果たす。流体力学系において導出された方程式はモデル化の必要のない完全な方程式であり、“通常の”方程式はその方程式を物理量の任意空間微分によって構成された空間全体で積分することによって導出される。

これらの種々の PDF の輸送方程式は Lie 微分を用いた表現が可能であることを背景とした優れた対称性を持っている。Lagrange 的 PDF を含む、常微分方程式系に対する PDF 輸送方程式は時間をパラメータとして扱った物理量の間の一般座標変換に対して不変であり、また同様に Euler 的 PDF の輸送方程式は時間、空間座標をパラメータとする物理量の間の一般座標変換に対して不変であることが証明できる。この結果を用いると2点もしくは多点相関 PDF の輸送方程式が導出できて、それらは通常の PDF 輸送方程式と全く同じ数学的形式を持っている。

また PDF そのものの変動を記述する PDF を2階の PDF と定義し、その PDF やさらに高階の PDF の輸送方程式を導出することもできる。さらに PDF の輸送方程式またはそれに付随する保存則が経路線ではなく、経路管に基づく領域上の作用積分を用いて Hamilton 原理から直接導出できることを示すことができる。

この PDF に関して Pope は流体力学系において物理量の空間微分に関する変数で張られる空間全体に渡って上述の完全な方程式を平均することにより、有限次元空間上の方程式に変換する(この解釈は上述の著者の研究の中で与えられる)と同時に、その過程で生じたアンサンブル平均項をモデル化することで、この平均化された方程式を解く方法を提案している[16]。このように PDF の輸送方程式を解くためには有限次元化が不可欠であるが、この方法は Pope が用いたものだけではない。例えばミクロな揺らぎである揺動力を適当な座標変換された空間上で導入し、有限次元化を図る写

像完結近似[17]や繰り込みの方法を援用した射影演算子法（森の方法）[18]が有力であるが，確立された方法は現在のところなく，この有限次元化の方法そのものが研究課題となる．ここで述べたように，オリジナルの PDF の輸送方程式は優れた対称性を有しており，有限次元化の際にこのような性質が保有される形式を用いることで，Pope らが提案している方法よりも精度が高い解析法が生み出せる可能性がある．PDF の方法は工学的に極めて重要であり，これが長期的な研究課題であるといえるだろう．

第5章の文献

- [1] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents From a Time Series, *Physica D*, **16**(1985), 285-317
- [2] P. Grassberger and I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 346-349
- [3] W. S. Fu and W. J. Shieh, A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **35**(1992), 1695-1710
- [4] L. Pera and B. Gebhart On the stability of laminar plumes: some numerical solutions and experiments, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **14**(1963), 597-606
- [5] S. Wakitani, Instability of a two-dimensional wall plume, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **53**(1984), 148-155
- [6] 田中宏和, 辻俊博, 長野靖尚, 熱駆動流の安定性解析, 第31回日本伝熱シンポジウム, 1994, 232-234
- [7] R. P. Dring and B. Gebhart, An experimental investigation of disturbance amplification in external laminar natural convection flow. *J. Fluid Mech.*, **36**(1969), 447-464
- [8] 巽友正, 流体力学, 培風館(1982), p.399
- [9] 山本稔, 常微分方程式の安定性, (実教出版), 1979
- [10] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門—現象の解析と数理—, (培風館), 1992
- [11] 下條隆嗣, カオス力学入門 (シミュレーション物理学6), (近代科学社), 1992
- [12] Gui, J. Longo and F. Stern, Biases of PIV measurement of turbulent flow and the masked correlation-based interrogation algorithm, *Exper. in Fluids*, **30**(2001), 27-35
- [13] H. Kawamura, H. Abe and Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **20**(1999), 196-207
- [14] N. Kasagi, Y. Tomita and A. Kuroda, Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow, *Trans. ASME, J. Heat Trans.*, **114**(1992), 598-606
- [15] H. Ishida and H. Kimoto, Probability density function and its higher-order approach for deterministic systems", *Progress in Transport Phenomena (Proc. 13th Int. Symp. Trans. Phenom.)*, (2002), 417-422
- [16] S. B. Pope, Transport equation for the joint probability density function of velocity and scalars in turbulent flow, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 588-596
- [17] 後藤俊幸, 乱流理論の基礎, 朝倉書店(1998), p.186
- [18] 藤坂博一, 非平衡系の統計力学, 産業図書(1998), p.81

## 謝辞

本研究を遂行するにあたり，大阪大学大学院基礎工学研究科木本日出夫教授に終始懇切丁寧な御指導を賜りました．ここに記して深甚なる謝意を表します．また本論文をまとめるにあたり，査読をして頂くとともに有益な御助言を賜りました，同研究科吉川孝雄教授，杉本信正教授に厚く御礼申し上げます．

また，大阪大学大学院基礎工学研究科桃瀬一成助教授には特に数値解析手法に関して貴重でかつ適切な御助言を賜り，また同研究科大和卓司技官には実験器具の製作・指導はもとより，本研究の遂行にあたって普段より便宜を図っていただきました．ここに記して謝意を表します．

本研究に関わる実験，解析の遂行に関して貴重で献身的なご助力を頂いた久禮一樹氏（現，(株)コマツ），吉岡剛氏（現，パシフィックコンサルタンツ(株)），山下隆之氏，（現，ヒューレット・パカード・ソリューション・デリバリ(株)），五味学氏（現，村田機械(株)）の各氏をはじめ，大阪大学大学院基礎工学研究科機械科学分野木本研究室の方々に深く御礼申し上げます．

本論文をまとめるにあたり，折に触れ叱咤激励し，貴重な御助言を賜った大阪電気通信大学工学部第2部機械工学科大西潤治教授，三菱重工（株）高砂研究所の武石賢一郎主幹研究員ならびに大阪大学大学院基礎工学研究科機械科学分野のスタッフの皆様には謝意を表します．また本研究の遂行を陰ながら応援してくださった私の友人と，祖父母・両親そして妻尚子に心より感謝いたします．

また，本論文の一部の研究には日本学術振興会平成 13-14 年度科学研究費補助金奨励研究(A)（No.13750171）の援助を頂きました．ここに記して謝意を表します．

## 発表論文

### 本論文に関係するもの

#### 第1章

1. 石田秀士, 木本日出夫, 解説文-"自然対流場における流れのモード変化, 安定性とカオス性", *機械の研究*, **54**(2002), 83-89.

#### 第2章

2. 石田秀士, 久禮一樹, 木本日出夫, "鉛直平行平板間の自然対流場の準定常性とカオス性", *日本機械学会論文集(B編)*, **65**(1999), 761-767.; Ishida, H., Kure, K. and Kimoto, H., "Quasi-static and Chaotic Characteristics of the Natural Convection Field in a Vertical Slot", *Heat Trans.- Asian Res.*, **30**(2001), 40-53.
3. Ishida, H. and Kimoto, H., "Unsteady and Chaotic Characteristics of the Natural Convection Field in Vertical Slots", *Proc. 4th JSME-KSME Thermal Eng. Conf.*, **2**(2000), 251-256.
4. 石田秀士, 五味学, 木本日出夫, "同軸二重円筒間の自然対流場の準定常性とカオス性", *日本機械学会論文集(B編)*, **67**(2001), 798-803.; Ishida, H., Gomi, M. and Kimoto, H., "Quasi-static and Chaotic Characteristics of the Natural Convection Field Between Concentric Vertical Annuli", *Heat Trans.- Asian Res.*, **31**(2002), 486-497.

#### 第3章

5. 石田秀士, 木本日出夫, "容器内自然対流場における平均熱伝達特性に対する加振の影響", *日本機械学会論文集(B編)*, **65**(1999), 2413-2419.; Ishida, H. and Kimoto, H., "Vibration Effects on the Average Heat Transfer Characteristics of the Natural Convection Field in a Square Enclosure", *Heat Trans.- Asian Res.*, **29**(2000), 545-558.
6. 石田秀士, 木本日出夫, "容器内の振動熱対流場における平均熱伝達率の時系列データから 再構築されるアトラクタの幾何学構造", *日本機械学会論文集(B編)*, **65**(1999), 2420-2425.; Ishida, H. and Kimoto, H., "The Structure of Attractors Reconstructed with Time- Evolution Data of Average Heat Transfer on Thermal Convection Field in a Vibrating Square Enclosure", *Heat Trans.- Asian Res.*, **30**(2001), 11-21.
7. 石田秀士, 木本日出夫, "振動容器内における熱対流場及びカオス性に対する容器のアスペクト 比の影響", *日本機械学会論文集(B編)*, **66**(2000), 810-817.
8. Ishida, H. and Kimoto, H., "On Semi-Steady Natural Convection Fields in Vertical Slot", *CD-Rom Proc. Int. Conf. Optical Technology and Image Processing in Fluid, Thermal and*

#### 第4章

9. 石田秀士, 吉岡剛, 山下隆之, 木本日出夫, "水平加熱体上方の自然対流場の安定性とカオス性", *日本機械学会論文集(B 編)*, **66**(2000), 1845-1852; Ishida, H. and Kimoto, H., "Stability and Chaotic Characteristics of the Unsteady Flow above Horizontal Heat Sources", *Turbulence, Heat and Mass Trans. (Proc. 3rd Int. Symp. Turbulence, Heat and Mass Trans.)*, **3**(2000), 307-314.
10. Ishida, H., Yamashita, T. and Kimoto, H., "Stability and Chaotic Characteristics of a Wall Plume", *Int. J. Heat Mass Trans.*, **45**(2002), 3471-3476.

#### 本論文が参照しているもの

11. 石田秀士, 木本日出夫, "主流を伴う衝突噴流現象に対する複合格子法の適用(第一報)", *日本機械学会論文集(B 編)*, **64**(1998), 2086-2093.; Ishida, H. and Kimoto, H., "A Study of Impingement Jet Cooling in a Rectangular Conduit", *Proc. 10th Int. Symp. Trans. Phenom.*, **1**(1997), 275-280 (第1章にて参照).
12. Ishida, H. and Kimoto, H., "Probability Density Function and its Higher-Order Approach for Deterministic Systems", *Progress in Transport Phenomena (Proc. 13th Int. Symp. Trans. Phenom.)*, (2002), 417-422 (第1, 5章にて参照).
13. 木本日出夫, 喜田真行, 石田秀士, 植木宏, "壁面プルーブの温度場について", *日本機械学会論文集(B 編)*, **64**(1998), 188-195.; Kimoto, H., Ishida, H. and Ueki, H., "On the Thermal Field of a Wall Plume( The Response to Artificial Disturbances)", *Heat Trans.-Asian Res.*, **28**(1999), 559-572 (第4章にて参照).