Osaka University Knowledge Archive

Title	相対論的電磁界理論に関する研究
Author(s)	藤岡, 弘
Citation	大阪大学, 1970, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1576
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

相対論的電磁界理論
に関する研究

藤　岡　　弘

昭和44年12月

相対論的電磁界理論に関する研究

藤　岡　　弘

昭和44年12月

内　容　梗　概

本論文は筆者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）に在学中行なった相対論的電磁界理論に関する研究の成果をまとめたものであり，つぎの１０章からなっている．

第１章は序論であって，宇宙工学，電波天文学等の進歩に伴って相対論的電磁界理論が工学における重要な研究課題の一つとして各方面で取り上げられるようになってきた経緯を述べるとともに，本研究がこの分野において占める地位を明らかにしたものである．

第２章においては，相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため，真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの電磁放射について考察し，相対論的効果の結果従来の静止あるいは準静止波源からの電磁放射にはみられなかった種々の特異な現象が現われることを示している．

第３章は導電性運動媒質中の電磁理論の近似解について論じたものである．ここで，近似解とは媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解をいう．特に，波源より十分遠方の点における電磁界，すなわち遠距離放射電磁界については数値計算例をあげて詳しく検討し，遠距離放射電磁界はその実数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり，その結果静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない種々の特異な現象があらわれることを示している．

第４章においては，導電性運動媒質中の電磁理論の厳密解について論じ，近似解の場合には見られなかった特異な現象があらわれることを示している．特に，導電性媒質が波の位相速度よりも大きい速度で運動する場合には，波が進むにつれて波動の振幅が増大することを*TEM*波を例にあげて示し，さらにこの現象を導電性運動媒質中の厳密な*Poynting*定理および*Minkowski*の電磁エネルギー・運動量テンソルを用い説明している．

第５章は導電性運動媒質を含む導波管の理論の近似解について論じたものである．ここでは，光速に比べて十分小さい速度で軸方向に運動する導電性

媒質を含む，任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析している．

第6章は導電性運動媒質を含む導波管の理論の厳密解について論じ，近似解の場合には見られなかった特異な現象があらわれることを示している．特に，媒質の運動速度が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき，第4章の場合と同様に波動増幅現象が起こることを示している．

第7章は，真空中を境界面と入射面の両者に平行に運動している半無限の圧縮性プラズマ流体と平面電磁波との相互作用について論じたものである．ただし，入射電磁波としてはE波およびH波の2つを考え，それぞれの場合について，反射係数，透過係数および透過波の伝搬定数などを求め，媒質が運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討している．

第8章は，異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用について論じたものである．ここでは，運動している分散性誘電体媒質と平面光波との相互作用の問題を，媒質の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い，従来の場合とは異った種々の興味ある現象があらわれることを示している．特に，異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用については数値計算例をあげて詳しく検討している．

第9章は運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる放射について論じたものである．ここでは，まずダイポールによって励振される表面波の電磁界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め，プラズマ媒質の運動が分散関係式および表面波電力等に与える影響を数値計算例をあげて詳しく検討している．ついで遠距離放射電磁界を鞍部点法によって求め，媒質の運動が放射電力に与える影響等について考察している．

第10章は結論であって，本研究の成果を総括して述べている．

以上の各章を構成する研究内容はすべて，電子通信学会雑誌，*IEEE Trans. on MTT*，*Radio Science*，*J. Appl. Phys.*，*Can. J. Phys.*，電子通信学会アンテナ・伝播研究会，電気四学会連合大会，電子通信学会全国大会，輻射科学研究会等においてすでに発表されたものである．

目　　次

第 1 章　序　　論 …… 1

第 2 章　運動電気双極子からの相対論的電磁放射 …… 5

2・1　序　　言 …… 5

2・2　静止電気双極子の放射電磁界 …… 5

2・3　運動電気双極子の放射電磁界 …… 8

2・4　放射エネルギー密度，放射電力および利得関数 …… 10

2・5　周波数の *Doppler* 効果 …… 14

2・6　検　　討 …… 15

2・7　結　　言 …… 19

付　　録 …… 19

第 3 章　導電性運動媒質中の電磁理論（I）近似解 …… 23

3・1　序　　言 …… 23

3・2　*Maxwell-Minkowski* 方程式と波動方程式 …… 24

3・3　遠距離放射電磁界 …… 30

3・4　電気形放射電磁界の性質 …… 33

3・5　電気双極子による放射 …… 36

3・6　結　　言 …… 43

第 4 章　導電性運動媒質中の電磁理論（II）厳密解 …… 45

4・1　序　　言 …… 45

4・2　*Maxwell-Minkowski* 方程式と波動方程式 …… 45

4・3　*Poynting* 定理 …… 50

4・4　平面波と波動増幅現象 …… 52

4・5　*Minkowski* の電磁エネルギー・運動量テンソルと波動増幅現象 …… 56

4・5・1　エネルギー関係式 …… 56
4・5・2　増幅波の励振 …… 61
4・6　結　　言 …… 63

第 5 章　導電性運動媒質を含む導波管の理論（I）近似解 …… 65
5・1　序　　言 …… 65
5・2　運動媒質を含む導波管内の電磁界 …… 65
5・3　非斉次伝送方程式 …… 69
5・4　斉次伝送方程式 …… 72
5・5　運動媒質を含む方形導波管のモード励振 …… 74
5・6　結　　言 …… 76

第 6 章　導電性運動媒質を含む導波管の理論（II）厳密解 …… 77
6・1　序　　言 …… 77
6・2　導波管中の電磁界 …… 77
6・3　伝搬定数 …… 79
6・4　電磁エネルギーの流れ …… 88
6・5　エネルギー関係式と波動増幅現象 …… 91
6・6　結　　言 …… 92

第 7 章　圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用 …… 95
7・1　序　　言 …… 95
7・2　静止プラズマ流体の基本方程式 …… 95
7・3　入射波がE波の場合 …… 99
7・3・1　反射波と透過波 …… 100
7・3・2　反射係数および透過係数 …… 106
7・4　入射波がH波の場合 …… 109
7・4・1　反射波と透過波 …… 109
7・4・2　反射係数および透過係数 …… 111

7・5　結　　言……115
付　　録……115

第8章　異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用……117
8・1　序　　言……117
8・2　導電性吸収媒質と非導電性吸収媒質……117
8・3　分散性誘電体媒質と光波との相互作用……120
8・3・1　静止媒質の光学的性質……120
8・3・2　運動媒質と光波との相互作用……121
8・3・3　分散曲線に関する考察……127
8・4　検討および数値計算例……132
8・5　結　　言……146

第9章　運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射……147
9・1　序　　言……147
9・2　プラズマ円柱内外の電磁界……147
9・3　表面波の励振……153
9・3・1　分散関係式……153
9・3・2　表面波電力……158
9・4　空間放射波……165
9・5　結　　言……172

第10章　結　　論……173

謝　　辞……174

文　　献……175

関連発表論文……185

第1章　序　　論

1873年，*Maxwell*の"*Treatise on Electricity and Magnetism*"によって電磁気学が物理学における最も基本的な理論体系の一つとして確立されていらい今日に至る約一世紀の間に電磁界理論は長足の進歩をとげ，現在では通信工学を始めとする電気工学あるいは電子工学等の工学の諸分野における最も重要な基礎理論の一つとなっている．ところで，従来，工学の分野において取り扱われる電磁現象は，観測者，波源および媒質の三者が相対的に静止しているか，あるいは近似的に静止していると見なせる場合に限られていた．ところが，近年，宇宙工学，電波天文学，天体物理学あるいはプラズマ工学等の急速な進歩に伴い，従来の静止系の電磁界理論では処理できない問題が出現しつつある．たとえば，最近行なわれた観測[(1),(2)]によって，太陽コロナや太陽プラズマは微粒子が相対論的な速度で運動しているものであることが明らかにされたが，このように宇宙空間を高速度で運動する物体の性質を調べるためには，運動媒質中の波動伝搬，あるいは運動物体による電磁波の反射・散乱についての理論が必要となってくる．また，最近，高速電子流を用いる新しい電子装置，例えば*MHD generator*等の開発も急速に進められている．[(3)]さらに，宇宙空間を高速度で移動する飛しょう体間，あるいはこのような飛しょう体と地上局間の通信は近い将来における重要な工学的問題であると考えられる[(4)]が，その際まず解決されねばならない問題は，アンテナからの電磁放射がアンテナの運動によってどのように影響されるかという問題である．

以上のような，従来の静止系あるいは準静止系の電磁界理論によっては取り扱うことができない問題を解くためには，光速度に比べて無視できない速度で運動する波源あるいは媒質を含む系の電磁界理論，すなわち相対論的電磁界理論が必要となってくる．相対論的電磁界理論は，また運動系の電磁界理論とも呼ばれ，いうまでもなく*Einstein*の特殊相対性理論にその基礎をおく．*Maxwell*の理論を静止媒質から運動媒質に拡張することは電磁力学の歴史上何回か試みられ，*Hertz*，*Cohn*，および*Lorentz*等を経て*Ein-*

*stein*の理論の3年後，1908年に*Minkowski*によって完成された.[5]~[7] しかし，工学の分野で相対論的電磁界理論が取り上げられるようになったのは比較的新しく，特に我が国においては著者らの研究グループが最初である.

本論文は，相対論的電磁界理論における基本的な問題，すなわち運動波源からの電磁放射，運動媒質中の電磁放射ならびに波動伝搬，および運動媒質と平面電磁波との相互作用について論じたものである.

まず，第2章においては相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため，真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの放射について考察する．運動電気双極子からの電磁放射に関する研究は比較的新しく著者ら[8]，*Ellis*[9]，および*Mott*ら[10],[11]によってそれぞれ独立に行なわれた．まず，著者らは，静止電気双極子からの放射電磁界に*Lorentz*変換を適用することによって運動電気双極子による放射電磁界を求め，放射エネルギー密度，放射電力，利得関数等について詳しく考察した．なお，同様の問題を*Liénard-Wiechert*のポテンシャルを用いて解析することもできる.[12]一方，*Ellis*および*Mott*らは，二個の電荷の運動を考えることにより，運動電気双極子の作る電磁界についてより一般的に考察している．なお，最近*Holmes*と*Ishimaru*[13]は，著者らの理論を拡張し一般の運動波源からの電磁放射現象について詳しく考察した.

つぎに，第3章および第4章では導電性運動媒質中の電磁理論について述べる．運動媒質中の電磁理論，すなわち波源と観測者とが相対的に静止しており，無限に拡がった媒質がこれら両者に対して一様に運動している場合の電磁理論は，相対論的電磁界理論の中でもきわめて重要な研究課題の一つであると考えられ，これまでに数多くの研究者による種々の興味深い結果が報告されている.[14]~[30] まず，損失のない運動媒質中の電磁理論に関する近似解は，*Compton*と*Tai*[14]，著者ら[15]および*Tseng*と*Cheng*[16],[17]によって与えられた．ここで，近似解とは媒質の運動速度が光速度に比べて十分小さい場合の解をいう．*Compton*と*Tai*は光速に比べて十分小さい速度で運動している誘電体中の単一の波源による放射電磁界を求め，ついで著者らは同様の媒質中に存在する複数個の波源，すなわちアンテナ・アレイによる放射電磁界を求めた.

Tseng と *Cheng* は著者らの解析を拡張し，運動媒質中のアンテナ・アレイの指向性合成について考察した．つぎに，このような損失のない運動媒質中の電磁理論に関する厳密解は，*Lee* と *Papas*[18],[19]，*Tai*[20] および *Compton*[21] 等によって与えられた．*Lee* と *Papas* は4元ポテンシャルに関する微分方程式を変換することによって運動媒質中の任意の波源による放射電磁界を求め，*Tai* は同様の問題を *dyadic Green* 関数を用いて解析した．また，*Compton* は運動媒質中の波動に関する一次元および二次元の *Green* 関数を求めた．以上の解析は，すべて運動媒質が損失をもたない場合の解析であるが，著者らは，導電性運動媒質中の電磁理論に関する近似解[24]～[27] と厳密解[28],[29] のそれぞれを，*Maxwell-Minkowski* 方程式をポテンシャルを導入して解くことによって求め，上述のような無損失媒質の場合にはみられない種々の特異な現象が現われることを示した．なお，最近 *Dunn* ら[30] も導電性運動媒質中の波動の厳密解について論じ，著者らと同様の結果を得ている．著者らが行なった運動媒質中の電磁理論に関する研究のうち，第3章では導電性運動媒質中の電磁理論の近似解について述べ，第4章においては同じく導電性運動媒質中の電磁理論の厳密解について述べる．

第5章および第6章では，導電性運動媒質を含む導波管の理論について述べる．運動媒質を含む導波管の解析は，最初 *Collier* と *Tai*[31] によってなされ，彼らは光速度に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管の固有伝送モードを，方形および円形導波管の個々の場合についてベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めた．引きつづいて著者ら[32]～[35] は，このような運動媒質を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析し，その特別な場合として *Collier* らの結果が得られることを示した．また，導波管中に含まれる媒質の運動速度に関する制限のない厳密な解析は，媒質に損失のない場合については *Du* と *Compton*[36] を始めとする多数の人々[37]～[42] によってなされたが，導電性運動媒質を含む導波管の厳密解は著者ら[43],[44] によって与えられた．著者らが行なった導電性運動媒質を含む導波管の解析のうち，第5章では近似解について述べ，第6章においては厳密解について述べる．

第7章および第8章では，吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用について述べる．運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題，すなわち運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，この問題が電磁界理論における基本的な問題の一つであることから各方面で活発に研究され，*Stolyarov*[45] *Tai*[46]および*Yeh*[47]，[48]を始めとする多数の人々[49]～[74]による種々の興味深い結果が得られている．ところで，*Tai*あるいは*Yeh*らの解析は損失のない通常の誘電体，もしくは衝突を考慮しないプラズマ等の場合に限られており，吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は著者ら[59]～[66]，[74]，によって初めて考察された．さて，吸収性運動媒質を取り扱う場合には，その吸収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷による寄与がない非導電性吸収媒質か，あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している導電性吸収媒質かによって取り扱いが異なってくる．そこで，まず第7章においては導電性吸収媒質の一例として衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を取り扱うつぎに，第8章において非導電性吸収媒質の一例として光領域における分散性誘電体媒質を取り扱い，特に異常分散領域における平面電磁波との相互作用について考察する．

最後に，第9章では運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射[75]～[78]について述べる．先に述べたように，境界のない無限に拡がった運動媒質中に存在する波源による電磁放射，あるいは運動媒質と平面電磁波との相互作用などに関する数多くの研究成果が報告されているが，境界を有する有限な運動媒質中に存在する波源による表面波あるいは空間放射波に関する詳しい報告はまだないように思われる．そこで，第9章ではこのような運動している有限な媒質中に存在する波源による放射の一例として，軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる放射について考察する．なお，最近*Yeh*[96]は著者らとは独立に，運動している円柱状プラズマに沿って伝搬する表面波の固有伝送モードを電磁界の変換による方法を用いて求めた．

第2章　運動電気双極子からの相対論的電磁放射[8]

2・1　序　　言

近年急速に進歩しつつある宇宙工学あるいは電波天文学に関連して，宇宙空間を高速度で運動するアンテナ等の運動波源からの電磁放射は近い将来における重要な工学的問題であると考えられる．一般に，運動している波源の速度が光速度に比べて十分小さい場合には，従来の静止系の電磁界理論をそのまま適用することができるが，波源の運動速度が光速度に比べて無視できない程に大きくなると従来知られていなかった種々の新しい現象が現われることが予想される．

そこで，本章では相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため，真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの電磁放射について考察し，放射電磁界，放射エネルギー密度，放射電力，利得関数等について *Lorentz* 変換を用いて論じ，相対論的効果の結果従来の静止あるいは準静止波源からの電磁放射にはみられなかった種々の特異な現象が現われることを示す．

なお，ここでは巨視的な電磁界理論の立場から解析し，静止電気双極子の放射電磁界に *Lorentz* 変換を適用することによって解を求めているが，同じ問題を微視的な電磁界理論の立場から取り扱い，*Liénard-Wiechert* の電磁ポテンシャルを用いて解析することもできる．[12]

2・2　静止電気双極子の放射電磁界

ここでは，静止電気双極子からの放射電磁界について考察する．いま図2・1に示すように慣性系 $K(x, y, z, t)$ を観測者の静止座標系，$K'(x', y', z', t')$ を双極子の静止座標系にとり，両慣性系は空間軸（$x-$，$y-$，$z-$，軸）をそれぞれ互いに平行に保ったまま K' が K に対してその x 軸の正の方向に速度 v で一様に運動しているものとし，さらに時刻 $t = t' = 0$ の瞬間には K' 系の原点 O' が K 系の原点 O に一致していたものとする．

ここで双極子は K' 系の座標原点に位置し，その双極子モーメントの方向

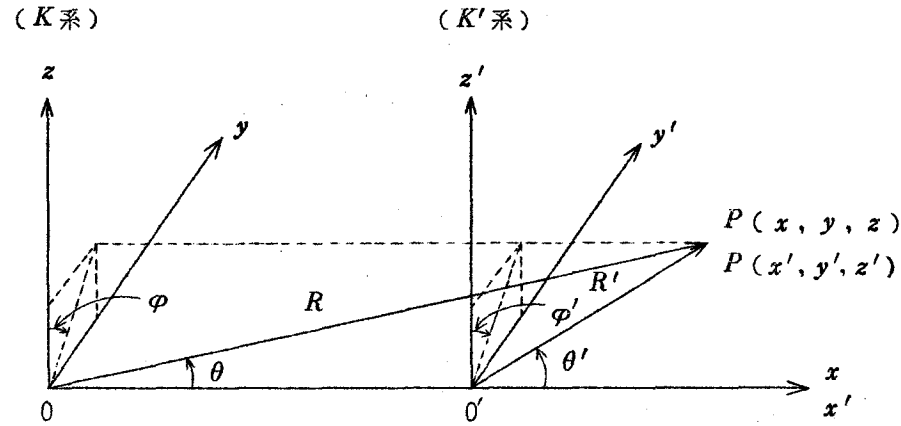

図2・1　座　標　系

は z' 軸に平行であるとすれば双極子の静止座標系（K' 系）における放射電磁界はMKS合理化単位系*を用いてつぎのようにかける。(79)

$$E_{\theta_0}' = h' \sin\theta_0', \quad E_R' = E_{\varphi_0}' = 0 \tag{2・1}$$

$$cB_{\varphi_0}' = h' \sin\theta_0', \quad B_R' = B_{\theta_0}' = 0 \tag{2・2}$$

ただし、

$$h' = -\frac{k'^2 p'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{i(k'R'-\omega' t')}}{R'} \tag{2・3}$$

ここで k'，p' および ω' はそれぞれ K' 系における伝搬定数，双極子モーメントおよび角周波数を表わし、ε_0は真空の誘電率，i は虚数単位である．また，θ_0' は z' 軸と動径ベクトル$\mathbf{R}'$とのなす角，φ_0' は方位角である．

さて，特殊相対論に基づく電磁界成分の *Lorentz* 変換式によって，K系

---

*　本論文では全章を通じてMKS合理化単位系を用いる。

における放射電磁界を求めるには上式（2・1），（2・2）をつぎのように直角座標成分で表わし，

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= h' \sin\theta_0' \cos\theta_0' \cos\varphi_0' \\ E_y' &= h' \sin\theta_0' \cos\theta_0' \sin\varphi_0' \\ E_z' &= -h' \sin^2\theta_0' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} cB_x' &= -h' \sin\theta_0' \sin\varphi_0' \\ cB_y' &= h' \sin\theta_0' \cos\varphi_0' \\ cB_z' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

さらに運動の方向，すなわち x 軸を極軸にとった場合の天頂角 θ' と方位角 φ'（図２・１参照）を用いると，

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= h' \sin\theta' \cos\theta' \cos\varphi' \\ E_y' &= h' \sin^2\theta' \sin\varphi' \cos\varphi' \\ E_z' &= -h' (\cos^2\theta' + \sin^2\theta' \sin^2\varphi') \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot4)$$

$$\left.\begin{aligned} cB_x' &= -h' \sin\theta' \sin\varphi' \\ cB_y' &= h' \cos\theta' \\ cB_z' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot5)$$

となる．ただし（θ_0'，φ_0'）は（θ'，φ'）とつぎの関係で結ばれている．

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta_0' \cos\varphi_0' &= \cos\theta' \\ \sin\theta_0' \sin\varphi_0' &= \sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta_0' &= \sin\theta' \cos\varphi' \end{aligned}\right\}$$

式（2・4），（2・5）が双極子の静止座標系（K' 系）における放射電磁界すなわち静止電気双極子からの放射電磁界の直角座標成分による表示である．

2・3　運動電気双極子の放射電磁界

双極子の静止座標系（K'系）における放射電磁界を知って観測者の静止座標系（K系）における放射電磁界を求めるには，つぎのような電磁界成分の *Lorentz* 変換式[80] によればよい．

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_x' \\ E_y &= \gamma(E_y' + c\beta B_z') \\ E_z &= \gamma(E_z' - c\beta B_y') \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6)$$

$$\left.\begin{aligned} B_x &= B_x' \\ B_y &= \gamma(B_y' - \beta E_z'/c) \\ B_z &= \gamma(B_z' + \beta E_y'/c) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7)$$

ただし，

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2},\ \beta = v/c \qquad (2\cdot8)$$

また，cは真空中の光速度を表わす．

このためまず式（2・4），（2・5）の右辺の各項に含まれている変数（R'，θ'，φ'）をK系における変数（R，θ，φ）で表わす必要があるが，ここで放射電磁波の波面について考えてみると，慣性系Kおよび K' の原点が一致した瞬間を時間の原点 $t = t' = 0$ にとったのであるから，この瞬間に双極子から放射された波が真空中を伝搬するとき波面は K と K' のそれぞれの慣性系において，光速度不変の原理により，

$$\left.\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (K\text{系}) \\ &x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (K'\text{系}) \end{aligned}\right\}$$

であらわされる．上式の関係および座標の *Lorentz* 変換式[81]，

$$\left.\begin{aligned} &x = \gamma(x' + c\beta t'),\ y = y',\ z = z' \\ &t = \gamma(t' + \beta x'/c) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot9)$$

を用いて，（R'，θ'，φ'）を（R，θ，φ）で表わすと，

$$\left.\begin{aligned} &R' = \gamma m^{-1} R \\ &\cos\theta' = m(\cos\theta - \beta),\quad \sin\theta' = \gamma^{-1} m \sin\theta \\ &\cos\varphi' = \cos\varphi,\qquad\qquad \sin\varphi' = \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2・10}$$

となる．ただし，

$$m = 1/(1 - \beta\cos\theta) \tag{2・11}$$

また，（R，θ，φ）と（x，y，z）との関係は図２・１に示すとおりである．

h' については式（２・１０）および位相が不変量であること，すなわち，

$$k'R' - \omega' t' = kR - \omega t$$

となることを用いて，

$$h' = \gamma^{-1} m h \tag{2・12}$$

となる（付録参照）．ただし，

$$h = -\frac{k'^2 p'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R} \tag{2・13}$$

ここで k および ω はそれぞれ K 系における伝搬定数および角周波数を表わす．

以上の諸式（2・4），（2・5），（2・10），（2・12）および式（2・6），（2・7）より観測者の静止座標系（K 系）における放射電磁界，すなわち速度 v で一様に運動している電気双極子からの放射電磁界はつぎのように求まる．

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \alpha^2 m^3 h(\cos\theta - \beta)\sin\theta\cos\varphi \\ E_y &= \alpha^2 m^3 h \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi \\ E_z &= -m^3 h\left\{(\cos\theta - \beta)^2 + \alpha^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi\right\} \\ &\quad -m^2 h\beta(\cos\theta - \beta) \end{aligned}\right\} \tag{2・14}$$

$$\left.\begin{aligned} cB_x &= -\alpha^2 m^3 h \sin\theta \sin\varphi \\ cB_y &= m^2 h (\cos\theta - \beta) \\ &\quad + m^3 h \beta \{ (\cos\theta - \beta)^2 + \alpha^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \} \\ cB_z &= \alpha^2 m^3 h \beta \sin^2\theta \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot15)$$

ただし，

$$\alpha = \gamma^{-1} = \sqrt{1-\beta^2} \quad (2\cdot16)$$

2・4　放射エネルギー密度，放射電力および利得関数

一般に K' 系における放射電磁界は平面電磁波とまったく同様の性質を示し，横波（$\mathbf{B}' \perp \mathbf{E}'$）であると同時に $|\mathbf{E}'|^2 = c^2 |\mathbf{B}'|^2$ なる性質をもっている．したがっていま K' 系における放射エネルギー密度を W' とし，その角度分布を $w'(\theta', \varphi')$ で表わせば，式（2・4）または（2・5）から，

$$W' = \varepsilon_0 |h'|^2 w'(\theta', \varphi') \quad (2\cdot17)$$

と書くことができ，

$$w'(\theta', \varphi') = (\cos^2\theta' + \sin^2\theta' \sin^2\varphi') \quad (2\cdot18)$$

となる．

上に述べたような性質が $K' \to K$ の変換によって変わらないことは，慣性系の変換によって変化しない不変量を電磁界テンソルの成分から求めることによってたしかめられる．すなわち，電磁界テンソル自身のスカラー積，および電磁界テンソルとその対偶テンソルとのスカラー積をとることによりつぎの２つの不変量を導くことができる．[82]

$$c^2 B^2 - E^2 = invariant \quad (2\cdot19)$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = invariant \quad (2\cdot20)$$

放射電磁界の場合には式（2・19），（2・20）の不変量は共に零となり，したがって K 系においても K' 系におけるとまったく同様の性質を示すことがわ

かる．よってK系における放射エネルギー密度をWとし，その角度分布を$w(\theta,\varphi)$で表わせば，式（2・14）または（2・15）から，

$$W=\varepsilon_0|h|^2 w(\theta,\varphi) \tag{2・21}$$

と書くことができ，

$$w(\theta,\varphi)=\alpha^4 m^4(1-\alpha^2 m^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi) \tag{2・22}$$

となる．ここでxy-，yz-，zx-の各平面上における放射エネルギー密度の角分布をそれぞれ$w_1(\theta)$，$w_2(\varphi)$，$w_3(\theta)$ とすれば式（2・22）より，

$$\left.\begin{aligned} w_1(\theta)&=\alpha^4 m^4 \\ w_2(\varphi)&=\alpha^4(1-\alpha^2\cos^2\varphi) \\ w_3(\theta)&=\alpha^4 m^6(\cos\theta-\beta)^2 \end{aligned}\right\} \tag{2・23}$$

となる．

つぎに，上に求めた放射エネルギー密度の角度分布$w(\theta,\varphi)$の意味を明らかにするため，時刻tの瞬間におけるK系における放射電磁波の波面の様子を図２・２に示す．ここで電気双極子は$x=vt=c\beta t$の位置にあり，時刻０の瞬間に双極子から放射された波は時刻０における双極子の（遅れた）位置Q_0（０，０，０）を中心とし，半径$R_0=ct$なる球S_0の面上にある．また一般に時刻τの瞬間に放射された波は，時刻τにおける双極子の（遅れた）位置Q（$c\beta\tau$，０，０）を中心とし，半径$R=c(t-\tau)$なる球Sの面上にある．したがって$w(\theta,\varphi)$は球S_0の面上の観測者によって時刻tにおいて観測される放射エネルギー密度の角度分布を表わし，これはまた一般に球Sの面上の観測者によって時刻tに観測される放射エネルギー密度の角度分布に等しい．静止電気双極子からの放射では放射エネルギー密度と放射電力の角度分布は等しくなるが，運動電気双極子から放射される電力の角度分布は$w(\theta,\varphi)$とは異なることに注意しなければならない．

すなわちWを一般に等速度運動をする任意のアンテナからの放射エネルギー密度とし，(θ,φ)の方向の単位立体角内にその運動アンテナから放射さ

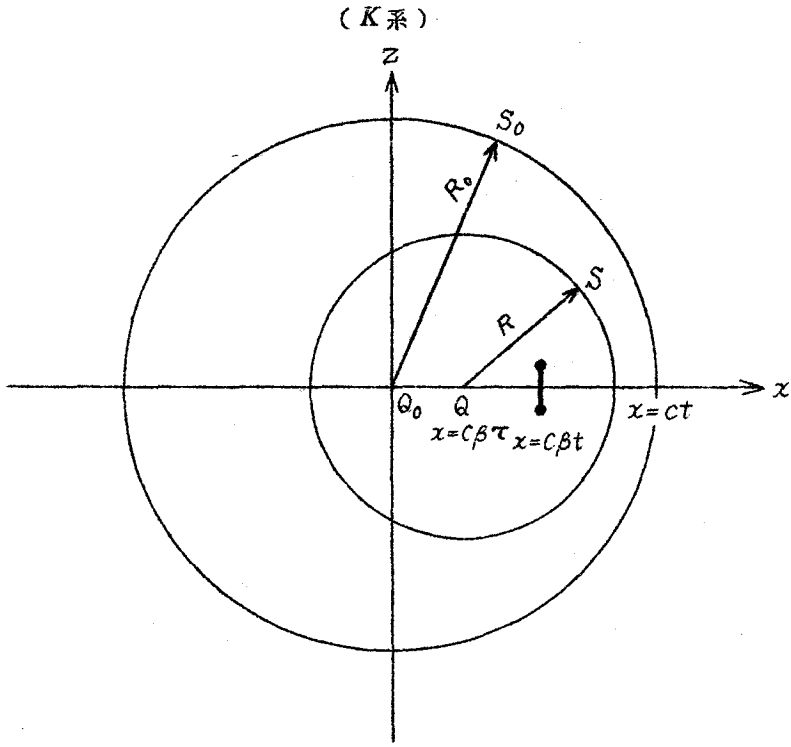

図２・２　時間 t の瞬間における波面の状態

れる電力を P とすれば、時間間隔 $d\tau$ の間に立体角 $d\Omega$ 内に放射されるエネルギーは，時間間隔 dt の間に半径 R の球面上の微少面積 $R^2 d\Omega$ を通過するエネルギーに等しく，したがって次式がなりたつ．

$$P\,d\Omega\,d\tau = (cW)R^2 d\Omega\,dt$$

上式の関係は遅れた時刻 τ と現在の時刻 t の時間微分に関する変換式[83]、

$$d\tau = m\,dt$$

を用いてつぎのようにかける．

$$P = m^{-1} R^2 (cW) \tag{2・24}$$

ここで，この運動アンテナの放射エネルギー密度および放射電力の角度分布をそれぞれ$w(\theta, \varphi)$および$p(\theta, \varphi)$で表わせば上式の関係により，

$$p(\theta, \varphi) = m^{-1} w(\theta, \varphi) \tag{2・25}$$

を得る．波源が静止している場合には$m = 1$となり，したがって，

$$p(\theta, \varphi) = w(\theta, \varphi)$$

となるわけである．つぎに，全放射電力P_{total}はPを全立体角にわたって積分することにより，

$$P_{total} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{2・26}$$

となる．

運動電気双極子については，その放射電力Pは式(2・21)を式(2・24)に代入して，

$$P = \varepsilon_0 c R^2 |h|^2 p(\theta, \varphi) \tag{2・27}$$

となり，$p(\theta, \varphi)$は式(2・22)を式(2・25)に代入して，

$$p(\theta, \varphi) = \alpha^4 m^3 (1 - \alpha^2 m^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi) \tag{2・28}$$

となる．また全放射電力は上式(2・27)，(2・28)を式(2・26)に代入して，

$$P_{total} = \frac{8}{3} \pi \cdot \varepsilon_0 c R^2 |h|^2 \tag{2・29}$$

となるが，これは静止電気双極子からの全放射電力，すなわちK'系における全放射電力P'_{total}に等しい．よって，

$$P_{total} \ (K\text{系}) = P'_{total} \ (K'\text{系}) \tag{2・30}$$

となる。

つぎに運動アンテナの利得関数$G(\theta,\varphi)$は静止アンテナの利得関数[84]と同様に，(θ,φ)の方向の単位立体角内に放射される電力と，全放射電力がこのアンテナと等しい無指向性アンテナの単位立体角当りの放射電力との比によって定義することができ，したがって，

$$G(\theta,\varphi)=\frac{P}{\frac{1}{4\pi}P_{total}} \tag{2・31}$$

となる。あるいは式(2・24),(2・26)を用いてこれを放射エネルギー密度Wで表わすと，

$$G(\theta,\varphi)=\frac{m^{-1}\cdot 4\pi R^2(cW)}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}m^{-1}(cW)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \tag{2・32}$$

となる。この定義にしたがえば，運動電気双極子の利得関数は式(2・27)～(2・29)を用いて，

$$G(\theta,\varphi)=\frac{3}{2}p(\theta,\varphi)$$

$$=\frac{3}{2}\alpha^4 m^3(1-\alpha^2 m^2\sin^2\theta\cos^2\varphi) \tag{2・33}$$

となる。ここで$\beta=0$とおくと上式は静止電気双極子の利得関数に一致する。

なお，以上の解析においては双極子モーメントの方向は速度の方向に垂直であると仮定したが，速度の方向と任意の傾きをもつ運動電気双極子からの電磁放射についても，その放射電磁界，放射エネルギー密度等を以上と同様の手順によって求めることができる。

2・5　周波数の*Doppler*効果

つぎの4成分

$$k_{1,2,3}=k_{x,y,z},\quad k_4=i\omega/c \tag{2・34}$$

をもつ波動4元ベクトルを導入し，4元ベクトルの変換式を用いると，いわゆる*Doppler* 効果，すなわち観測者に対して運動している波源から出る波の受信周波数f（K系）と，波源の固有周波数f'（K'系）との関係を容易に考察することができ

$$k_4' = \gamma (k_4 - i \beta k_1) \tag{2・35}$$

を得る。[85] さらに放射される波の方向と波源の運動方向とのなす角θを用いて，

$$f = f' \alpha m \tag{2・36}$$

とかける。あるいはfと f' との比を正規化周波数 f_N とすれば，

$$f_N(\theta) = f / f' = \alpha m \tag{2・37}$$

となる。ここでmおよびαはそれぞれ式（2・11），（2・16）に示すとおりである。式（2・36）または（2・37）が*Doppler* 効果を表わす式である。

2・6 検　　討

以上の議論から，真空中を高速度で運動する電気双極子からの放射に関してつぎのような相対論的効果が表われることがわかる。

1）放射エネルギー密度の角度分布は，式（2・22）に含まれる $\alpha m = \sqrt{1-\beta^2} / (1 - \beta \cos\theta)$ の高次項による特徴的な性質をもっている。すなわち，$\beta (= v/c)$ が0から増加するにつれて，その値は速度の方向（$\theta = 0$）においては増加し，速度と反対の方向（$\theta = \pi$）においては減少する。βをパラメータとする$w_1(\theta)$および$w_3(\theta)$の変化の様子はそれぞれ図2・3および図2・4に示すとおりであり，$\beta \to 1$，すなわち双極子の運動速度が光速度cに近づく極限においては，式（2・24）より，

$$\left.\begin{aligned} w_1(\theta = 0) = w_3(\theta = 0) &\to \infty \\ w_1(\theta \neq 0) = w_3(\theta \neq 0) &\to 0 \end{aligned}\right\} \; for\ \beta \to 1 \tag{2・38}$$

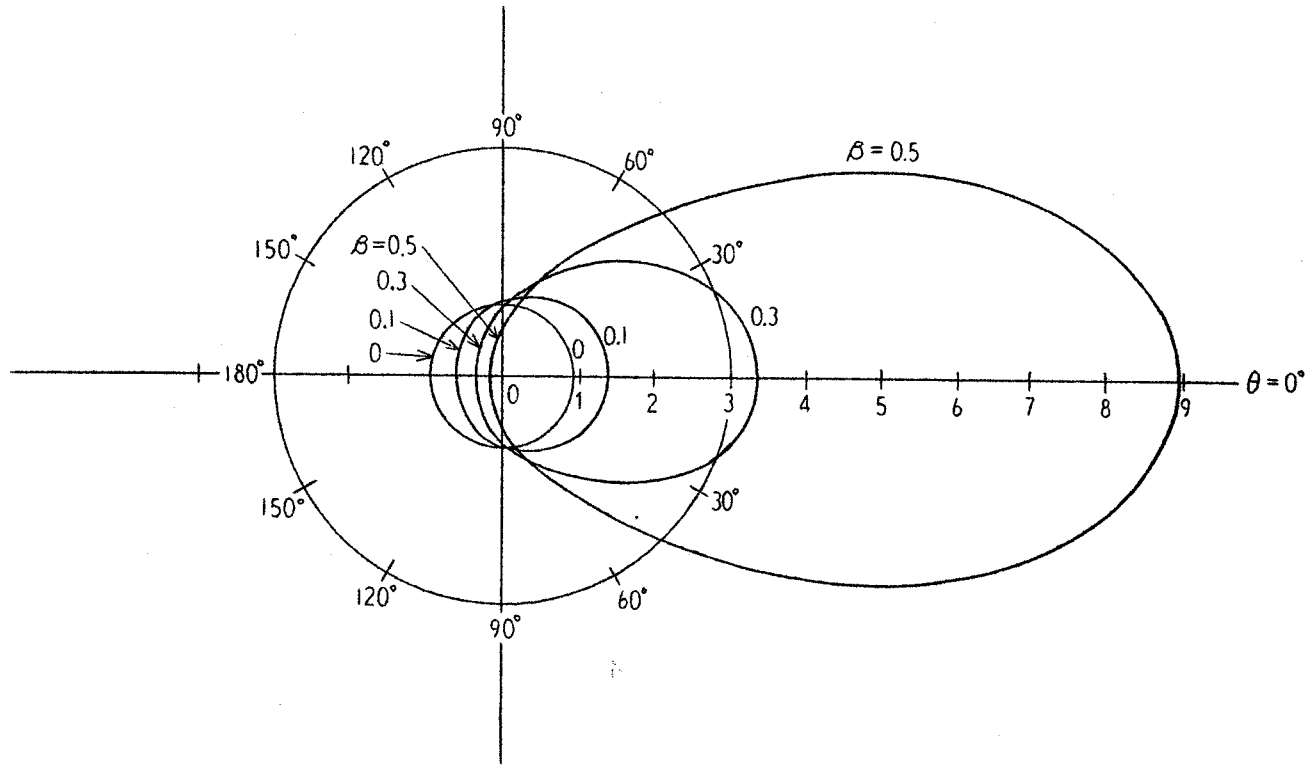

図２・３　xy 一平面における放射エネルギー密度　$w_1(\theta)$

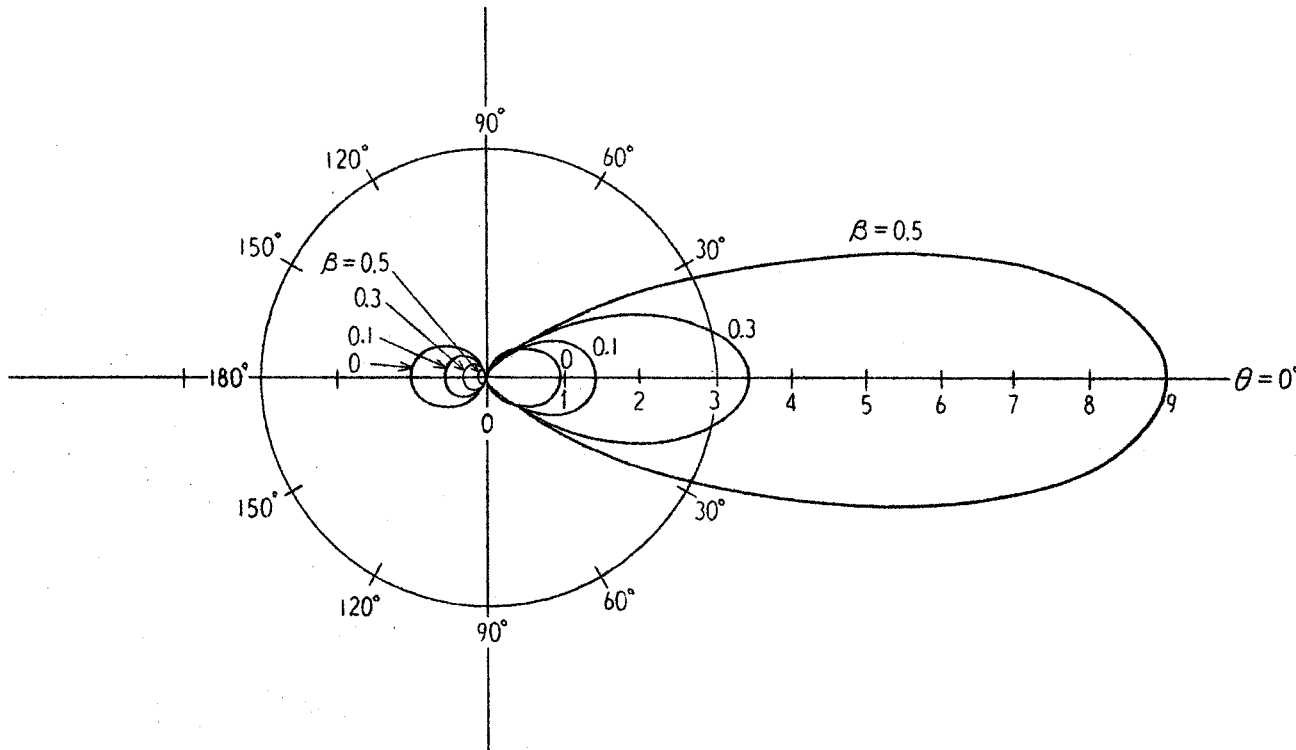

図２・４　xz 一平面における放射エネルギー密度　$w_3(\theta)$

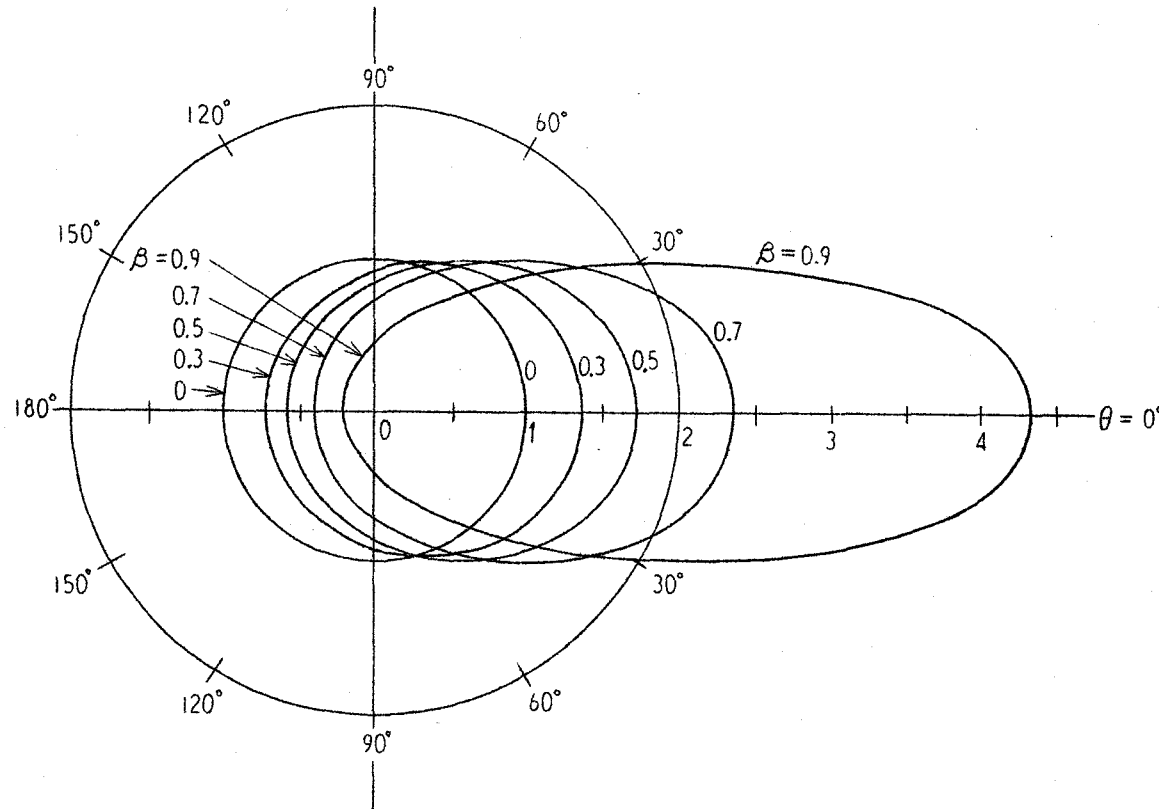

図２・５　正規化周波数　$f_N(\theta)$

となる．上に述べたような傾向は時刻 t の瞬間における放射電磁波の波面の様子を示した図２・２からも直感的にうかがうことができる．

$w_2(\varphi)$，すなわち速度と垂直な面における角度分布も式（2・23）から同様に計算することができる．

２）放射電力の角度分布および利得関数については式（2・25）および（2・33）からわかるように放射エネルギー密度の角度分布 $w(\theta,\varphi)$ とは係数 m^{-1} が異なるだけであり，したがって $p(\theta,\varphi)$ および $G(\theta,\varphi)$ は $w(\theta,\varphi)$ と同様の傾向を示し，式（2・38）の関係も同様に成立する．

３）受信周波数については，正規化周波数 $f_N(\theta)$ は $w_1(\theta)$ と同様の傾向を示し，β をパラメータとする $f_N(\theta)$ の変化の様子は図２・５に示すとおりである．正規化周波数についても放射エネルギー密度と同様 $\beta\to 1$ の極限においては，式（2・37）から，

$$f_N(\theta=0)\to\infty,\quad f_N(\theta\neq 0)\to 0,\quad for\ \beta\to 1 \qquad (2\cdot 39)$$

となる．

一般の波源は電気双極子を合成したものと考えることができ，したがって上に述べたような相対論的効果１），２），３）は電気双極子からの放射に限らず一般に等速度運動をする任意の波源からの放射に関してあらわれる傾向であると結論できる．

２・７　結　　言

相対論的な速度で運動する波源からの電磁放射の一例として，真空中を光速度に近い速度で一様に運動する電気双極子からの放射をとりあげ，放射電磁界，放射エネルギー密度，放射電力，利得関数および受信周波数の *Doppler* 効果の影響等を *Lorentz* 変換による方法を用いて論じ，電気双極子の運動速度の増加に伴って起こる現象を明らかにした．

付　　録

電磁界成分の *Lorentz* 変換式（2・6），（2・7）は，ある慣性系における電磁

界を知れば，この系に対して相対的に等速度運動をしている任意の慣性系における電磁界を求めることができることを示している．したがって観測者の静止座標系（K系）における放射電磁界を求める場合には，双極子の静止座標系（K'系）における双極子モーメントp'を知れば十分であり，K系における双極子モーメントpを知る必要はないわけであるが，K系においてpがどのように表わされるかを知ることは興味ある問題であると思われるので参考のためこれを求めてみる．

振動電気双極子モーメントの振幅は電荷qと長さlとの積で表わされ，したがってK'系およびK系における双極子モーメントはそれぞれつぎのようにかける．

$$p' = q' l' \quad (K'\text{系}) \tag{A2・1}$$

$$p = q l \quad (K\text{系}) \tag{A2・2}$$

ここで電荷量は*Lorentz*変換によって変わらない不変量であるから

$$q' = q$$

となり，したがって双極子モーメントの変換は長さの変換に等しくなる．いまK'系において，双極子モーメントの方向と速度の方向のなす角をψ'とすれば，lとl'との関係は図A2・1に示すようになる．ただし，ψは双極子モーメントの方向と速度の方向とのなすK系における角である．

図A2・1の関係より，速度方向の長さの*Lorentz*収縮を考慮して，

$$\alpha l' \cos\psi' = l \cos\psi,\ l' \sin\psi' = l \sin\psi \tag{A2・3}$$

を得る．ただしαは式(2・16)に示すとおりである．したがって，

$$l = l' \sqrt{\alpha^2 \cos^2\psi' + \sin^2\psi'},\ \alpha \tan\psi = \tan\psi' \tag{A2・4}$$

となり，これら2式より，

$$l = l' \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2\psi}} \tag{A2・5}$$

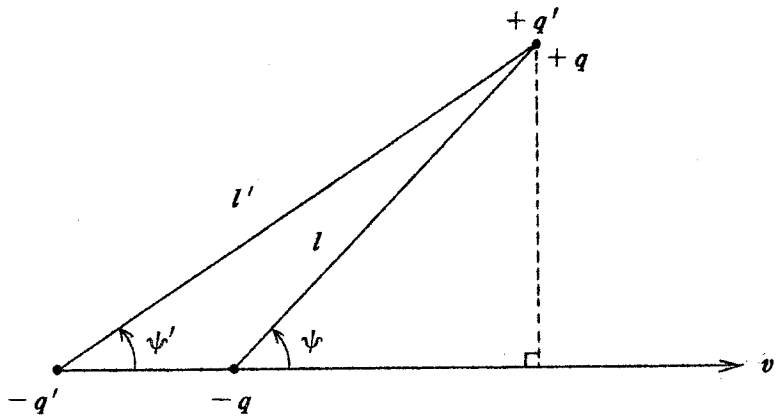

図 A 2・1　l と l' との関係

を得る。よって p と p' との一般的な変換式として次式を得る。

$$p = p' \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} \qquad (A2 \cdot 6)$$

ここで $\psi = 0$，$\pi / 2$ のとき上式はつぎのようにかける。

$$p_{\parallel} = \alpha p_{\parallel}' \ (\psi = 0), \quad p_{\perp} = p_{\perp}' \ (\psi = \pi / 2) \qquad (A2 \cdot 7)$$

本論文においては双極子モーメントの方向は速度 v の方向に垂直であると仮定したのであるから，

$$p = p' \qquad (A2 \cdot 8)$$

となる。

第3章　導電性運動媒質中の電磁理論（I）近似解[24]～[27]

3・1　序　　言

運動媒質中の電磁理論，すなわち波源と観測者とが相対的に静止しており，無限に拡がった媒質がこれら両者に対して一様に運動している場合の電磁理論は，相対論的電磁界理論の中でもきわめて重要な研究課題の一つであり，これまでに数多くの研究者による種々の興味深い結果が報告されている[14]～[30]．特に，著者らは導電性運動媒質中の電磁理論に関して，媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解，すなわち近似解[24]～[27]と媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密解[28],[29]のそれぞれを求め，媒質が無損失の場合には見られない種々の特異な現象が現われることを示した．本章においては近似解を取り扱い，厳密解に関しては次章で考察する．

媒質が無損失の場合には，放射電磁界を*dyadic Green*関数を用いて直接求めることもできる[14],[15]が，導電性媒質の場合には電磁界を直接求める方法は解析が若干複雑となり適当でないため，本章ではベクトル・ポテンシャル等の電磁界補助量を導入し，これらの補助量を用いて電磁界を表わすことを考える．

このためまず電磁界補助量の満足すべき波動方程式を*Maxwell-Minkowski*方程式から導き，この波動方程式が媒質に損失のない場合とは異なり，一次の微分項を持つ楕円形斉次2階偏微分方程式となることを示す．つぎに未知関数に適当な変換をほどこすことによって一次の微分項を消し去り，通常の形の波動方程式となし，この波動方程式の解を用いて損失のある運動媒質中における任意の波源によって生ずる電磁界を決定することができることを示す．

つぎに，波源より十分遠方の点における電磁界，すなわち遠距離放射電磁界について考察し，遠距離放射電磁界は実数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり，その結果静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない種々の特異な現象があらわれることを示す．

3・2 *Maxwell-Minkowski*方程式と波動方程式

無限に拡がった損失のある線形，等方かつ一様なる媒質（誘電率ε，透磁率μ，導電率σ）を考える．ただし，ε，μおよびσはそれぞれ時間によらない定数であると仮定する．この媒質が観測者および波源に対して一様に運動しているとき，観測者の静止座標系における電磁界はつぎの*Maxwell*方程式によって決定される．

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{J}_m\\
&\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}_f+\mathbf{J}\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}=\rho_m\\
&\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f+\rho
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot1)$$

ただし，

$\mathbf{E}$，$\mathbf{D}$ ＝観測者の静止座標系における電界ベクトル

$\mathbf{H}$，$\mathbf{B}$ ＝観測者の静止座標系における磁界ベクトル

$\mathbf{J}_f$，ρ_f ＝自由電流密度および自由電荷密度

$\mathbf{J}$，ρ ＝印加電流密度および印加電荷密度

$\mathbf{J}_m$，ρ_m ＝印加磁流密度および印加磁荷密度

ここで，媒質の速度$\mathbf{v}$が光速に比べて十分小さいものとすれば構成関係式はつぎのように与えられる．(31)

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\boldsymbol{\Lambda}\times\mathbf{H}\\
&\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}-\boldsymbol{\Lambda}\times\mathbf{E}\\
&\mathbf{J}_f=\sigma(\mathbf{E}+\mu\mathbf{v}\times\mathbf{H})\\
&\rho_f=\varepsilon_0\mu_0\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot2)$$

ただし，

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)\,\mathbf{v}$$

ここで，ε_0 および μ_0 はそれぞれ真空の誘電率および透磁率を表わす．

電磁界の時間変化を $e^{+j\omega t}$ と仮定し，式（2・1）および（3・2）から電束密度と磁束密度 $\mathbf{D}$，$\mathbf{B}$ および自由電流密度と自由電荷密度 $\mathbf{J}_f$, ρ_f を消去してつぎの *Maxwell-Minkowski* 方程式を得る．

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla} - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m \\
&(\boldsymbol{\nabla} - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \times \mathbf{H} = j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E} + \mathbf{J} \\
&(\boldsymbol{\nabla} - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{H} = \frac{q_m}{\mu} \\
&(\boldsymbol{\nabla} - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot3)$$

ただし，

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \qquad (3\cdot4)$$

また，

$$\left.\begin{aligned}
q &= \rho + \boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{J} \\
q_m &= \rho_m + \boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{J}_m
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot5)$$

Maxwell-Minkowski 方程式（3・3）を解くために，まず電磁界 $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ を，$\mathbf{J}$ および ρ がその発生源である電気形電磁界 $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ と，$\mathbf{J}_m$ および ρ_m が発生源である磁気形電磁界 $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ とに分けて考察する．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \\
\mathbf{H} &= \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot6)$$

上式を式（3・3）に代入して電気形および磁気形電磁界に関するつぎの *Maxwell-Minkowski* 方程式を得る．

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \times \mathbf{E}^{(1)} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}^{(1)} \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \times \mathbf{H}^{(1)} = j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{J} \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{H}^{(1)} = 0 \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \frac{q}{\varepsilon}
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\cdot7)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \times \mathbf{E}^{(2)} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{J}_m \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \times \mathbf{H}^{(2)} = j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}^{(2)} \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda}) \cdot \mathbf{H}^{(2)} = \frac{q_m}{\mu} \\
&(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Lambda} - \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}^{(2)} = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\cdot8)
$$

ここで電磁界および波源に関してつぎの変換を行なう．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_0^{(1)}\, exp(j\omega\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{R}) \\
&\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}_0^{(1)}\, exp(j\omega\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{R}) \\
&\mathbf{J} = \mathbf{J}_0\, exp(j\omega\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{R}) \\
&\rho = \rho_0\, exp(j\omega\boldsymbol{\Lambda}\cdot\mathbf{R})
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\cdot9)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_0^{(2)}\, exp[(j\omega\boldsymbol{\Lambda} + \mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{R}] \\
&\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}_0^{(2)}\, exp[(j\omega\boldsymbol{\Lambda} + \mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{R}] \\
&\mathbf{J}_m = \mathbf{J}_{0m}\, exp[(j\omega\boldsymbol{\Lambda} + \mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{R}] \\
&\rho_m = \rho_{0m}\, exp[(j\omega\boldsymbol{\Lambda} + \mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{R}]
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\cdot10)
$$

ただし，$\mathbf{R}$ は座標原点から観測点に向かう位置ベクトルである．上式を式(3・7)，(3・8)に代入して次式を得る．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{E}_0^{(1)} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}_0^{(1)} \\
&(\nabla - \mu\sigma\mathbf{v}) \times \mathbf{H}_0^{(1)} = j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}_0^{(1)} + \mathbf{J}_0
\end{aligned}
\right\} \qquad (3\cdot11)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{H}_0^{(1)} = 0 \\
&(\nabla - \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}_0^{(1)} = \frac{q_0}{\varepsilon} \\
&(\nabla + \mu\sigma\mathbf{v}) \times E_0^{(2)} = -j\omega\mu\,\mathbf{H}_0^{(2)} - \mathbf{J}_{0m} \\
&\nabla \times \mathbf{H}_0^{(2)} = j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{E}_0^{(2)} \\
&(\nabla + \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{H}_0^{(2)} = \frac{q_{0m}}{\mu} \\
&\nabla \cdot \mathbf{E}_0^{(2)} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot12)
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \rho_0 + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{J}_0 \\
q_{0m} &= \rho_{0m} + \boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{J}_{0m}
\end{aligned} \qquad (3\cdot13)
$$

さて，式(3・11)の第3式および式(3・12)の第4式から，電磁界補助量として，電気形ベクトル・ポテンシャル$\mathbf{A}_0^{(1)}$および磁気形ベクトル・ポテンシャル$\mathbf{A}_0^{(2)}$をそれぞれつぎのように導入することができる。

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{H}_0^{(1)} &= \nabla \times \mathbf{A}_0^{(1)} \\
\mathbf{E}_0^{(2)} &= -\nabla \times \mathbf{A}_0^{(2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot14)
$$

したがって電気形および磁気形スカラ・ポテンシャルをそれぞれ$\phi_0^{(1)}$および$\phi_0^{(2)}$とすれば，$\mathbf{E}_0^{(1)}$，$\mathbf{H}_0^{(2)}$は

$$
\left.\begin{aligned}
\mathbf{E}_0^{(1)} &= -j\omega\mu\,\mathbf{A}_0^{(1)} - \nabla\,\phi_0^{(1)} \\
\mathbf{H}_0^{(2)} &= -j\omega\hat{\varepsilon}\,\mathbf{A}_0^{(2)} - \nabla\,\phi_0^{(2)}
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot15)
$$

とかける。式(3・14)，(3・15)を式(3・11)，(3・12)に代入し，ゲージ関係式

$$
\left.\begin{aligned}
&(\nabla - \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}_0^{(1)} + j\omega\hat{\varepsilon}\phi_0^{(1)} = 0 \\
&(\nabla + \mu\sigma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}_0^{(2)} + j\omega\mu\phi_0^{(2)} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot16)
$$

を用いてベクトル・ポテンシャルおよびスカラ・ポテンシャルに関するつぎの波動方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A}_0^{(1)}-\mu\sigma(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}_0^{(1)}+\hat{k}^2\mathbf{A}_0^{(1)}&=-\mathbf{J}_0\\ \nabla^2\mathbf{A}_0^{(2)}+\mu\sigma(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}_0^{(2)}+\hat{k}^2\mathbf{A}_0^{(2)}&=-\mathbf{J}_{0m}\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot17)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi_0^{(1)}-\mu\sigma(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi_0^{(1)}+\hat{k}^2\phi_0^{(1)}&=-\frac{q_0}{\varepsilon}\\ \nabla^2\phi_0^{(2)}+\mu\sigma(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi_0^{(2)}+\hat{k}^2\phi_0^{(2)}&=-\frac{q_{0m}}{\mu}\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot18)$$

ただし，

$$\hat{k}^2=\omega^2\hat{\varepsilon}\mu=\omega^2\varepsilon\mu\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\qquad(3\cdot19)$$

またゲージ関係式（3・16）を用いて，$\mathbf{E}_0^{(1)}$ および $\mathbf{H}_0^{(2)}$ はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_0^{(1)}&=\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\left[\hat{k}^2\mathbf{A}_0^{(1)}+\nabla(\nabla-\mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{A}_0^{(1)}\right]\\ \mathbf{H}_0^{(2)}&=\frac{1}{j\omega\mu}\left[\hat{k}^2\mathbf{A}_0^{(2)}+\nabla(\nabla+\mu\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{A}_0^{(2)}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot20)$$

したがって，与えられた電磁流源 $\mathbf{J}_0$，$\mathbf{J}_{0m}$ によって生ずる電磁界を求めるには，波動方程式（3・17）を解いてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_0^{(1)}$，$\mathbf{A}_0^{(2)}$ を求め，式（3・14）および（3・20）の演算を行なえばよいことになる。

波動方程式（3・17）を解くために，一次の微分項をとりのぞき方程式の形を簡単にすることを考える。このためには式（3・17）が定数係数の楕円形線形2階偏微分方程式であることに着目して，$\mathbf{A}_0^{(1)}$，$\mathbf{A}_0^{(2)}$ のかわりに新しい未知関数 $\mathbf{T}_0^{(1)}$，$\mathbf{T}_0^{(2)}$ をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}_0^{(1)} &= \mathbf{T}_0^{(1)}\, exp\left(+\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)\\ \mathbf{A}_0^{(2)} &= \mathbf{T}_0^{(2)}\, exp\left(-\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot21)$$

なる関係によって導入すればよい．上式（3・21）を式（3・17）に代入して，$\mathbf{T}_0^{(1)}$，$\mathbf{T}_0^{(2)}$ に関するつぎの波動方程式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{T}_0^{(1)} + \hat{K}^2\mathbf{T}_0^{(1)} &= -\mathbf{F}_0^{(1)}\\ \nabla^2\mathbf{T}_0^{(2)} + \hat{K}^2\mathbf{T}_0^{(2)} &= -\mathbf{F}_0^{(2)}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot22)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}_0^{(1)} &= \mathbf{J}_0\, exp\left(-\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)\\ \mathbf{F}_0^{(2)} &= \mathbf{J}_{0m}\, exp\left(+\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot23)$$

$$\hat{K}^2 = \hat{k}^2 - \left|\frac{\mu\sigma\mathbf{v}}{2}\right|^2 \qquad (3\cdot24)$$

波動方程式（3・22）は直ちに解くことができ，境界面のない無限に広い領域においてはその解はつぎの形の全空間にわたる体積分によって与えられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0^{(1)} &= \iiint_V \mathbf{F}_0^{(1)}(\mathbf{R}')\,G(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV'\\ \mathbf{T}_0^{(2)} &= \iiint_V \mathbf{F}_0^{(2)}(\mathbf{R}')\,G(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV'\end{aligned} \qquad (3\cdot25)$$

ただし，

$$G(\mathbf{R},\mathbf{R}') = \frac{e^{-j\hat{K}|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{4\pi|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}$$

また，$\mathbf{R}'$ は波源の存在する場所を表わす．式（3・25）の積分は変数 $\mathbf{R}'$ につ

いて全空間にわたって行なわれなければならないが，波源 $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_{0m}$ が零の所の寄与はないから，実際には電流源もしくは磁流源の分布している領域にわたってのみ積分すれば十分である。

以上によって，境界面のない無限に拡がっている損失のある運動媒質中に任意の電流源もしくは磁流源が分布しているとき，これらの波源によって生ずる電磁界は波動方程式（3・22）の解（3・25）を用いて，式（3・14），（3・20）～（3・21）および（3・9）～（3・10）から決定することができる。

3・3　遠距離放射電磁界

電流源および磁流源が空間の一部分に限定されて分布しているとき，これらの波源より十分遠方の点における電磁界，すなわち遠距離放射電磁界は，前節の結果を用いてつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^{(1)} &= \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\iiint_V [\mathbf{N}^+\times(\mathbf{N}^-\times\mathbf{J})]\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV' \\ \mathbf{H}^{(1)} &= -\iiint_V (\mathbf{N}^-\times\mathbf{J})\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV'\end{aligned}\right\} \quad (3\cdot26)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^{(2)} &= \iiint_V (\mathbf{N}^+\times\mathbf{J}_m)\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV' \\ \mathbf{H}^{(2)} &= \frac{1}{j\omega\mu}\iiint_V [\mathbf{N}^-\times(\mathbf{N}^+\times\mathbf{J}_m)]\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV'\end{aligned}\right\} \quad (3\cdot27)$$

ただし，

$$\mathbf{N}^{\pm} = j\hat{K}\mathbf{R}_0 \pm \frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v} \quad (3\cdot28)$$

$$\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}') = \frac{e^{-j\hat{K}R}}{4\pi R}\,exp\,[\,j\hat{K}\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}_0 + (j\omega\boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v})\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\,] \quad (3\cdot29)$$

ここで$\mathbf{R}_0$（$=\mathbf{R}/R$）はR方向の単位ベクトルを表わす．

式（3・28）に与えられるベクトル$\mathbf{N}^{\pm}$はその実数部と虚数部の空間的方向が異なる複素ベクトル*であり，したがって電磁界$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$も一般には実数部と虚数部の方向が異なる複素空間ベクトルとなる．ここで実際に観測される物理的に意味のある量，すなわち実物理量を複素空間ベクトル$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$と区別して$\mathring{\mathbf{E}}$，$\mathring{\mathbf{H}}$のように表わせば，これは複素空間ベクトルに時間関数$e^{+j\omega t}$を掛けたものの実数部で与えられつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}\mathring{\mathbf{E}}(\mathbf{R},t)&=Re[\mathbf{E}(\mathbf{R})e^{+j\omega t}]\\&=\mathbf{E}_r\cos\omega t-\mathbf{E}_i\sin\omega t\\\mathring{\mathbf{H}}(\mathbf{R},t)&=Re[\mathbf{H}(\mathbf{R})e^{+j\omega t}]\\&=\mathbf{H}_r\cos\omega t-\mathbf{H}_i\sin\omega t\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot30)$$

ただし，Reは複素量の実数部をとる操作を表わす．また添字rおよびiは複素量の実数部および虚数部を表わす．

式（3・26）～（3・27）から$\mathbf{E}_r$および$\mathbf{H}_r$は一般には$\mathbf{E}_i$および$\mathbf{H}_i$にそれぞれ平行ではなく，したがって電磁界は楕円偏波であることがわかる．

つぎに，式（3・26）～（3・27）から，複素ベクトル$\mathbf{N}^{\pm}$が積分変数$\mathbf{R}'$に無関係であることに注意してつぎの関係式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^{(1)}&=-\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\mathbf{N}^{+}\times\mathbf{H}^{(1)}\\\mathbf{H}^{(2)}&=\frac{1}{j\omega\mu}\mathbf{N}^{-}\times\mathbf{E}^{(2)}\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot31)$$

上式（3・31）の第1式および第2式の両辺に，左から複素ベクトル$\mathbf{N}^{-}$および$\mathbf{N}^{+}$をそれぞれベクトル的に掛け次式を得る．

---

* 複素ベクトルの演算則は実数ベクトルの演算則と同じである．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)} &= \frac{1}{j\omega\mu}\mathbf{N}^{-}\times\mathbf{E}^{(1)} \\ \mathbf{E}^{(2)} &= -\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\mathbf{N}^{+}\times\mathbf{H}^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot32)$$

上式の結果より，複素空間ベクトル$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$の複素スカラ積は常に零，すなわち

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0 \qquad (3\cdot33)$$

となることがわかるが，これは実物理場$\mathring{\mathbf{E}}$，$\mathring{\mathbf{H}}$が直交することを一般には意味しないことに注意しなければならない．$\mathring{\mathbf{E}}$と$\mathring{\mathbf{H}}$とのスカラ積は式（3・30）を用いて

$$\mathring{\mathbf{E}}\cdot\mathring{\mathbf{H}}=\mathbf{E}_r\cdot\mathbf{H}_r=\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{H}_i \qquad (3\cdot34)$$

となる．上式から，放射電磁界$\mathring{\mathbf{E}}$，$\mathring{\mathbf{H}}$は静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中における場合とは異なり一般には直交しないことがわかる（次節参照）．

つぎに，*Poynting*ベクトルの1周期間の平均値，すなわち電磁エネルギーの単位面積についての時間的平均の流れを$<\mathbf{S}>$で表わせば，

$$<\mathbf{S}>=\frac{1}{2}Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{*}) \qquad (3\cdot35)$$

となるが，放射電磁界の$<\mathbf{S}>$は式（3・31）～（3・32）の関係を用いてつぎのように表わされる．

$$<\mathbf{S}>=\frac{1}{2}Re\left[\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\left\{(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^{*})\mathbf{N}^{+}-(\mathbf{H}^{*}\cdot\mathbf{N}^{+})\mathbf{H}\right\}\right] \qquad (3\cdot36)$$

または，$\mathbf{E}$で表わせば

$$<\mathbf{S}> = -\frac{1}{2} Re \left[\frac{1}{j\omega\mu} \cdot [(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)(\mathbf{N}^-)^* - \{\mathbf{E}\cdot(\mathbf{N}^-)^*\}\mathbf{E}^*] \right] \quad (3\cdot37)$$

ここで，記号＊は複素共役ベクトルを表わす．上式から放射電磁界の$<\mathbf{S}>$は，一般には，半径方向成分だけでなく周方向成分をももつことがわかる（次節参照）．

遠距離放射電磁界$\mathring{\mathbf{E}}$，$\mathring{\mathbf{H}}$が直交しないことおよび放射*Poynting*ベクトル$<\mathbf{S}>$が周方向成分をもつことなどの特異な性質は，先に述べたように複素ベクトル$\mathbf{N}^{\pm}$，したがって複素空間ベクトル$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$の実数部と虚数部の空間的方向が異なることに起因するものであり，これは損失のある媒質が運動することによって起こり，静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では起こり得ない性質のものである。

なお，式（3・26）～（3・27）の結果は，第5章において運動媒質を含む導波管内の電磁界を求める際に導出した一次元の伝送方程式の解の三次元的拡張であると解釈することができる．

3・4　電気形放射電磁界の性質

ここでは，$\mathbf{a}$を変数$\mathbf{R}$に無関係な単位実ベクトルとして

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = J(\mathbf{R})\,\mathbf{a} \quad (3\cdot38)$$

で表わされる電流源からの放射電磁界について考察する．このとき放射電磁界$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$は式（3・26）からつぎのようにかける．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} \mathbf{N}^+ \times (\mathbf{N}^- \times \mathbf{a}) D(\mathbf{R}) \\ \mathbf{H} &= -(\mathbf{N}^- \times \mathbf{a}) D(\mathbf{R}) \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot39)$$

ただし，

$$\iiint_V J(\mathbf{R}')\,\Gamma(\mathbf{R},\mathbf{R}')\,dV' = D(\mathbf{R}) = D_r + jD_i \quad (3\cdot40)$$

なお上式（3・39）においては電気形電磁界であることを示す上部の添字(1)は繁雑さを避けるため省略してある．

式（3・39）を式（3・34）に代入して次式を得る．

$$\mathring{\mathbf{E}}\cdot\mathring{\mathbf{H}}=(\alpha'\mathbf{N}_i-\beta'\mathbf{N}_r^{+})\cdot\mathbf{a}(\mathbf{N}_r^{-}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{N}_i\,|D(\mathbf{R})|^2$$

$$=\left[(\alpha'\beta-\beta'\alpha)\mathbf{R}_0-\frac{1}{2}\beta'\mu\sigma\mathbf{v}\right]\cdot\mathbf{a}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2}\beta\mu\sigma\mathbf{v}\times\mathbf{R}_0\right)\cdot\mathbf{a}\,|D(\mathbf{R})|^2 \qquad (3\cdot41)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{N}^{\pm}=\mathbf{N}_r^{\pm}+j\mathbf{N}_i\\
&\mathbf{N}_r^{\pm}=\alpha\mathbf{R}_0\pm\frac{\mu\sigma\mathbf{v}}{2},\quad \mathbf{N}_i=\beta\mathbf{R}_0\\
&j\hat{K}=\alpha+j\beta\\
&\alpha=\omega\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}^2+\tan^2\delta}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}\right]\right]^{1/2}\\
&\beta=\omega\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}^2+\tan^2\delta}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left\{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2\tan^2\delta\right\}\right]\right]^{1/2}\\
&\tan\delta=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\text{静止媒質中の光速度}
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot42)$$

さらに，

$$\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}=\alpha'-j\beta'$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \frac{1}{\omega\varepsilon}\ \frac{\tan\delta}{1+\tan^2\delta}\\ \beta' &= \frac{1}{\omega\varepsilon}\ \frac{1}{1+\tan^2\delta}\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot43)$$

上式（3・41）から実物理量$\mathring{\mathbf{E}}$と$\mathring{\mathbf{H}}$とのスカラ積は一般には零でなく，したがって電界$\mathring{\mathbf{E}}$と磁界$\mathring{\mathbf{H}}$とは一般には互いに直交していないことがわかる．しかし，特別な場合として電流ベクトルの方向が媒質の運動の方向に平行な場合，すなわち$\mathbf{J}/\!/\mathbf{v}$のときには

$$\mathring{\mathbf{E}}\cdot\mathring{\mathbf{H}} = 0$$

となり，したがってこの場合には電界$\mathring{\mathbf{E}}$と磁界$\mathring{\mathbf{H}}$とは互いに直交する．

つぎに，*Poynting*ベクトルに関しても同様に式（3・39）の第2式を先に得た放射電磁界の$<\mathbf{S}>$を表わす式（3・36）に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}<\mathbf{S}> &= \frac{1}{2}(\alpha'\mathbf{N}_r^{+}+\beta'\mathbf{N}_i)\,|\mathbf{H}|^2\\ &\quad+\frac{1}{2}[(\alpha'D_r-\beta'D_i)\mathbf{H}_r+(\alpha'D_i+\beta'D_r)\mathbf{H}_i]\\ &\quad\cdot(\mathbf{N}_r^{-}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{N}_r^{+}\\ &= \frac{1}{2}\left[(\alpha\alpha'+\beta\beta')\mathbf{R}_0+\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma\mathbf{v}\right]|\mathbf{H}|^2\\ &\quad-\left[\left\{(\alpha\alpha'+\beta\beta')\mathbf{R}_0-\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma\mathbf{v}\right\}\times\mathbf{a}\right]\\ &\quad\cdot\left(\frac{1}{2}\alpha\mu\sigma\mathbf{v}\times\mathbf{R}_0\right)\cdot\mathbf{a}\,|D(\mathbf{R})|^2\end{aligned} \qquad (3\cdot44)$$

上式の結果からわかるように*Poynting*ベクトル$<\mathbf{S}>$は半径方向成分だけではなく周方向成分をももつ．なお，$\mathbf{J}/\!/\mathbf{v}$なる特別な場合には式（3・44）

は

$$<\mathbf{S}>=\frac{1}{2}(\alpha'\mathbf{N}_r^{+}+\beta'\mathbf{N}_i)|\mathbf{H}|^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha\alpha'+\beta\beta')\mathbf{R}_0+\frac{1}{2}\alpha'\mu\sigma\mathbf{v}\right]|\mathbf{H}|^2 \qquad (3\cdot45)$$

となる．上式からこの場合には$<\mathbf{S}>$は媒質の運動の方向に曲げられることがわかる．

3・5　電気双極子による放射

本節では導電性運動媒質中におかれた微小電気双極子による放射電磁界を，媒質の運動方向が双極子モーメント$\mathbf{p}$の方向に(1)垂直な場合(2)平行な場合のそれぞれについて考察する．

双極子は座標原点に位置し，双極子モーメントの方向はz軸に平行であるとすれば，電流密度$\mathbf{J}$はつぎのように書ける．

$$\mathbf{J}(\mathbf{R})=j\omega p\delta(\mathbf{R})\mathbf{i}_z \qquad (3\cdot46)$$

ここで，$\delta(\mathbf{R})$は*Dirac*のデルタ関数である．また，$\mathbf{p}=p\mathbf{i}_z$，ただし$\mathbf{i}_z$はz方向の単位ベクトルを表わす．

(1)　$\mathbf{p}\perp\mathbf{v}$の場合

まず媒質の運動方向が電流ベクトルに垂直な場合，すなわち$\mathbf{p}\perp\mathbf{v}$，$\mathbf{v}=v\mathbf{i}_x$（$\mathbf{i}_x$は$x$方向の単位ベクトル）なる場合について考察する．このとき，複素放射電磁界$\mathbf{E}$および$\mathbf{H}$はそれぞれ式(3・26)あるいは(3・39)を用いてつぎのように求められる．

電界：

$$E_{Rr}=\omega p\left[(\alpha'\Gamma_r+\beta'\Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right.$$

$$\left.+(\alpha'\Gamma_i-\beta'\Gamma_r)\left\{\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\sin\theta\cos\theta\cos\varphi-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\cos\theta\right\}\right]$$

$$E_{Ri} = -\omega p \Big[(\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \Big\{ \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \sin\theta \cos\theta \cos\varphi - \Big(\frac{\mu \sigma v}{2}\Big)^2 \cos\theta \Big\} - (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \sin\theta \, cns\theta \cos\varphi \Big]$$

(3・47)

$$E_{\theta r} = -\omega p [(\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i)(2\alpha\beta \sin\theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos\theta \cos\varphi) + (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin\theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos^2\theta \cos\varphi - \Big(\frac{\mu \sigma v}{2}\Big)^2 \sin\theta \}]$$

$$E_{\theta i} = \omega p [(\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \{ (\alpha^2 - \beta^2) \sin\theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos^2\theta \cos\varphi - \Big(\frac{\mu \sigma v}{2}\Big)^2 \sin\theta \} - (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r)(2\alpha\beta \sin\theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos^2\theta \cos\varphi)]$$

(3・48)

$$E_{\varphi r} = -\omega p [(\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos\theta \sin\varphi + (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos\theta \sin\varphi]$$

$$E_{\varphi i} = \omega p [(\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos\theta \sin\varphi - (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos\theta \sin\varphi]$$

(3・49)

磁界：

$$\left.\begin{aligned} H_{Rr} &= \omega p \Gamma_i \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \sin\varphi \\ H_{Ri} &= -\omega p \Gamma_r \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot50)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{\theta r} &= \omega p \Gamma_i \frac{\mu\sigma v}{2} \cos\theta \sin\varphi \\ H_{\theta i} &= -\omega p \Gamma_r \frac{\mu\sigma v}{2} \cos\theta \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot51)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{\varphi r} &= -\omega p \left[\Gamma_i \left(\alpha \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \cos\varphi \right) + \Gamma_r \beta \sin\theta \right] \\ H_{\varphi i} &= -\omega p \left[\Gamma_i \beta \sin\theta - \Gamma_r \left(\alpha \sin\theta - \frac{\mu\sigma v}{2} \cos\varphi \right) \right] \end{aligned}\right\}$$

$$(3\cdot52)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_r &= \cos\left[(\omega \Lambda \sin\theta \cos\varphi - \beta) R \right] \times \frac{1}{4\pi R} \exp \\ &\quad \left[-\left(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \cos\varphi \right) R \right] \\ \Gamma_i &= \sin\left[(\omega \Lambda \sin\theta \cos\varphi - \beta) R \right] \times \frac{1}{4\pi R} \exp \\ &\quad \left[-\left(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \cos\varphi \right) R \right] \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot53)$$

$$\Lambda = (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0) v \quad (3\cdot54)$$

なお，本節においても前節と同様に，電気形電磁界を表わす上部の添字（1）

は省略してある．

実放射電磁界$\mathring{\mathbf{E}}$および$\mathring{\mathbf{H}}$は，上に求められた電磁界成分E_{Rr}，E_{Ri}，……H_{Rr}，H_{Ri}，……等を式（3・30）に用いてそれぞれつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}\mathring{E}_R &= E_{Rr}\cos\omega t - E_{Ri}\sin\omega t\\ \mathring{E}_\theta &= E_{\theta r}\cos\omega t - E_{\theta i}\sin\omega t\\ \mathring{E}_\varphi &= E_{\varphi r}\cos\omega t - E_{\varphi i}\sin\omega t\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot55)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathring{H}_R &= H_{Rr}\cos\omega t - H_{Ri}\sin\omega t\\ \mathring{H}_\theta &= H_{\theta r}\cos\omega t - H_{\theta i}\sin\omega t\\ \mathring{H}_\varphi &= H_{\varphi r}\cos\omega t - H_{\varphi i}\sin\omega t\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot56)$$

つぎに，*Poynting*ベクトル$<\mathbf{S}>$は式（3・44）を用いてつぎのように求められる．

$$\left.\begin{aligned}<S_R> &= \frac{1}{2}\left[(\alpha\alpha'+\beta\beta')+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha'\sin\theta\cos\varphi\right]|\mathbf{H}|^2\\ &\quad-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\alpha\alpha'\sin^2\theta\sin^2\varphi\cdot\omega^2 p^2|\Gamma|^2\\ <S_\theta> &= \frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\cos\theta\cos\varphi\,|\mathbf{H}|^2\\ &\quad-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\alpha\alpha'\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cdot\omega^2 p^2|\Gamma|^2\\ <S_\varphi> &= -\frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\sin\varphi\,|\mathbf{H}|^2\\ &\quad+\left[\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha(\alpha\alpha'+\beta\beta')\sin^2\theta\sin\varphi\right.\\ &\quad\left.-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2\alpha\alpha'\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\right]\omega^2 p^2|\Gamma|^2\end{aligned}\right\}$$

（3・57）

ただし

$$|\mathbf{H}|^2=\omega^2 p^2[(\alpha^2+\beta^2)\sin^2\theta-(\mu\sigma v)\alpha\sin\theta\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2]|\Gamma|^2 \qquad (3\cdot58)$$

(2)　$\mathbf{p}/\!/\mathbf{v}$ の場合

媒質の運動方向が電流ベクトルに平行な場合，すなわち $\mathbf{p}/\!/\mathbf{v}$，$\mathbf{v}=v\,\mathbf{i}_z$ なる場合の電磁界は(1)の場合と同様にしてつぎのように求められる．

電界：

$$\left.\begin{aligned}
E_{Rr}&=-\omega p[(\alpha'\Gamma_r+\beta'\Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\sin^2\theta\\
&\quad+(\alpha'\Gamma_i-\beta'\Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\sin^2\theta]\\
E_{Ri}&=\omega p[(\alpha'\Gamma_r+\beta'\Gamma_i)\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\sin^2\theta\\
&\quad-(\alpha'\Gamma_i-\beta'\Gamma_r)\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\sin^2\theta
\end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot59)$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{\theta r}&=-\omega p[(\alpha'\Gamma_r+\beta'\Gamma_i)(2\alpha\beta\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\theta)\\
&\quad+(\alpha'\Gamma_i-\beta'\Gamma_r)\{(\alpha^2-\beta^2)\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\theta\}]\\
E_{\theta i}&=\omega p[(\alpha'\Gamma_r+\beta'\Gamma_i)\{(\alpha^2-\beta^2)\sin\theta\\
&\quad+\frac{\mu\sigma v}{2}\alpha\cos\theta\sin\theta\}-(\alpha'\Gamma_i-\beta'\Gamma_r)\\
&\quad(2\alpha\beta\sin\theta+\frac{\mu\sigma v}{2}\beta\cos\theta\sin\theta)]
\end{aligned}\right\}$$

$$(3\cdot60)$$

$$E_{\varphi r} = E_{\varphi i} = 0 \tag{3・61}$$

磁界：

$$H_{Rr} = H_{Ri} = 0 \tag{3・62}$$

$$H_{\theta r} = H_{\theta i} = 0 \tag{3・63}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{\varphi r} &= -\omega p(\alpha\Gamma_i + \beta\Gamma_r)\sin\theta \\ H_{\varphi i} &= \omega p(\alpha\Gamma_r - \beta\Gamma_i)\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{3・64}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_r &= \cos\theta[(\omega\Lambda\cos\theta - \beta)R] \times \frac{1}{4\pi R}\exp \\ &\quad [-(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta)R] \\ \Gamma_i &= \sin\theta[(\omega\Lambda\cos\theta - \beta)R] \times \frac{1}{4\pi R}\exp \\ &\quad [-(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2}\cos\theta)R] \end{aligned}\right\} \tag{3・65}$$

また，*Poynting* ベクトル$<\mathbf{S}>$は式(3・45)を用いてつぎのように求められる．

$$\left.\begin{aligned} <S_R> &= \frac{1}{2}[(\alpha\alpha' + \beta\beta') + \frac{\mu\sigma v}{2}\alpha'\cos\theta]|\mathbf{H}|^2 \\ <S_\theta> &= -\frac{\mu\sigma v}{4}\alpha'\sin\theta \cdot |\mathbf{H}|^2 \\ <S_\varphi> &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3・66}$$

ただし，

$$\mathbf{H}^2 = \omega^2 p^2(\alpha^2 + \beta^2)\sin^2\theta \cdot |\Gamma|^2 \tag{3・67}$$

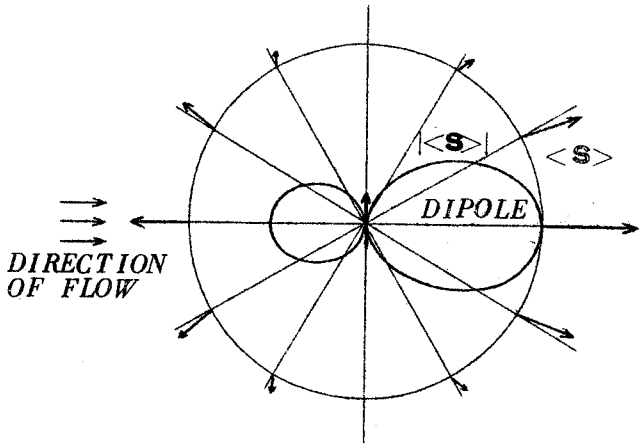

図３・１　**p** ⊥ **v** の場合の放射パターン

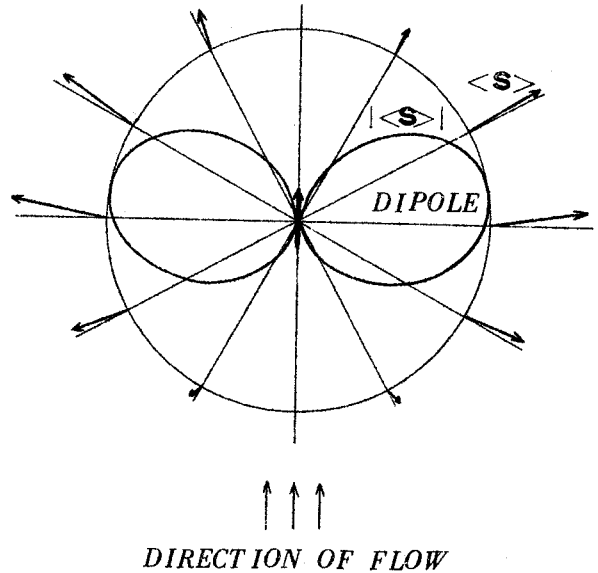

図３・２　**p** // **v** の場合の放射パターン

図３・１および３・２はそれぞれ（1）および（2）の場合の*Poynting* ベクトル＜**S**＞の様子を示す図である．図から，*Poynting*ベクトル＜**S**＞は半径方向成分のみならず周方向成分をももち，また媒質の運動方向に曲げられることがわかる．

３・６　結　　言

光速に比べて十分小さい速度で等速度運動をしている損失のある線形，等方かつ一様なる媒質中における任意の電磁流源によって生ずる電磁界をベクトル・ポテンシャル等の電磁界補助量を用いて解析した．つぎに，遠距離放射電磁界について考察し，遠距離放射電磁界は実数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり，その結果つぎのような静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない興味ある現象があらわれることを示した．

1）放射電磁界は楕円偏波である．

2）放射電界および磁界は互いに直交しない．

3）放射*Poynting* ベクトルは半径方向成分の他に周方向成分をもつ．

第4章　導電性運動媒質中の電磁理論(II)厳密解[28],[29]

4・1　序　　言

前章においては，導電性運動媒質中の電磁理論に関して，媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解，すなわち近似解を求め種々の考察をした．本章においては，媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密な解析を行い，近似解の場合にはみられない特異な現象が現われることを明らかにする．

このため，まず前章と同様に電磁界補助量として適当に定義されたベクトル・ポテンシャルを導入し，このベクトル・ポテンシャルの満足すべき波動方程式を厳密な*Maxwell-Minkowski*方程式から導き，この波動方程式を解くことによって導電性運動媒質中の任意の印加波源によって生ずる電磁界を決定できることを示す．つぎに*Poynting*定理およびエネルギー関係式を導き，厳密解を取り扱う場合には近似理論の場合とは異なった新たな解釈が必要であることを示す．さらに，このような媒質中を伝搬する平面波の性質について論じ，導電性媒質が電磁波の位相速度よりも大きな速度運動する場合には，波が進むにつれて波動の振幅が増大する，いわゆる波動増幅の現象が起こることを示し，この現象を導電性運動媒質中の厳密な*Poynting*定理を用いて説明する．最後に，*Minkowski*の電磁エネルギー・運動量テンソルから導かれるエネルギー関係式を用いて，導電性運動媒質中の波動増幅現象をさらに詳しく検討する．

なお，本章においては印加波源として電流源のみを考えているが，印加磁流源が存在する場合も前章と同様にして解くことができる．

4・2　*Maxwell-Minkowski*方程式と波動方程式

誘電率ε，透磁率μ，導電率σをもつ無限に広がった線形，等方かつ一様な媒質を考える．ただし，ε，μ，およびσはそれぞれ時間によらない定数であると仮定する．この媒質が，波源および観測者に対して一様に運動しているとき，波源および観測者の静止座標系における電磁界はつぎの*Maxwell*

方程式によって決定される．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4・1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_s \tag{4・1b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4・1c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f + \rho_s \tag{4・1d}$$

ただし，

$\mathbf{E}, \mathbf{D}$ ＝観測者の静止座標系における電界ベクトル

$\mathbf{H}, \mathbf{B}$ ＝観測者の静止座標系における磁界ベクトル

$\mathbf{J}_f, \rho_f$ ＝自由電流密度および自由電荷密度

$\mathbf{J}_s, \rho_s$ ＝印加電流密度および印加電荷密度

ここで，簡単のため媒質の運動速度 $\mathbf{v}$ を z 軸に平行，すなわち $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}_z$（$\mathbf{i}_z = z$ 軸方向の単位ベクトル）とすれば構成関係式はつぎのように与えられる[5],[20]．

$$\mathbf{B} = \mu \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E} \tag{4・2a}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \tag{4・2b}$$

$$\mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} = \gamma \sigma \left\{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \right\} \tag{4・2c}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Omega} = \frac{(n^2-1)\mathbf{v}}{(1-n^2\beta^2)c^2} = \frac{(n^2-1)\beta}{(1-n^2\beta^2)c}\,\mathbf{i}_z = \Omega\,\mathbf{i}_z \\
&\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2} \\
&\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{4・3}$$

$$n=\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}},\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\text{真空中の光速度}$$

さて，媒質の静止座標系における自由電荷密度 ρ_f' は $\mathbf{J}_f$, ρ_f とつぎの関係式[5]

$$\rho_f'=\gamma\left(\rho_f-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f}{c^2}\right) \tag{4・4}$$

によって結ばれているが，定常状態においては媒質の静止座標系における自由電荷密度は零，すなわち $\rho_f'=0$ と仮定できる[86]ので式（4・2c）から観測者の静止座標系における自由電流密度および自由電荷密度はそれぞれつぎのようにかける。

$$\mathbf{J}_f=\gamma\sigma\{\mathbf{E}+\mathbf{v}\times[\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}-\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{E}]\} \tag{4・5a}$$

$$\rho_f=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_f}{c^2} \tag{4・5b}$$

電磁界の時間変化を $e^{j\omega t}$ と仮定し，式（4・5）および式（4・2a），（4・2b）を用いて*Maxwell*方程式（4・1）から $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{J}_f$, ρ_f を消去してつぎの*Maxwell-Minkowski*方程式をうる。

$$(\nabla-j\omega\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{E}=-j\omega\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H} \tag{4・6a}$$

$$(\nabla-j\omega\boldsymbol{\Omega}-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\times\mathbf{H}=j\omega\hat{\varepsilon}\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{J}_s \tag{4・6b}$$

$$(\nabla-j\omega\boldsymbol{\Omega}-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}=\frac{\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{J}_s+\rho_s}{\varepsilon} \tag{4・6c}$$

$$(\nabla-j\omega\boldsymbol{\Omega})\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}=0 \tag{4・6d}$$

ただし，

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon\left(1-j\frac{\sigma\gamma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{4・7}$$

ここで，電磁界および波源に関してつぎのような変換を行なう．

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 exp(j\omega\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{E}_0 exp(j\omega\Omega z) \tag{4・8a}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0 exp(j\omega\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{H}_0 exp(j\omega\Omega z) \tag{4・8b}$$

$$\mathbf{J}_s=\mathbf{J}_{0s} exp(j\omega\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{J}_{0s} exp(j\omega\Omega z) \tag{4・8c}$$

$$\rho_s=\rho_{0s} exp(j\omega\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r})=\rho_{0s} exp(j\omega\Omega z) \tag{4・8d}$$

ただし，$\mathbf{r}$ は座標原点から観測点に向かう位置ベクトルである．式(4・8)を *Maxwell-Minkowski* 方程式(4・6) に代入して次式をうる．

$$\nabla\times\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_0 \tag{4・9a}$$

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\times\mathbf{H}_0=j\omega\hat{\varepsilon}\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_0+\mathbf{J}_{0s} \tag{4・9b}$$

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}_0=\frac{\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{J}_{0s}+\rho_{0s}}{\varepsilon} \tag{4・9c}$$

$$\nabla\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}_0=0 \tag{4・9d}$$

さて，式(4・9*d*)から電磁界補助量としてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_0$ をつぎのように導入することができる．

$$\mathbf{H}_0=\bar{\alpha}^{-1}\cdot[\nabla\times(\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_0)] \tag{4・10}$$

したがってスカラ・ポテンシャルを ϕ_0 とすれば，$\mathbf{E}_0$ は式(4・9*a*)から

$$\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\bar{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_0-\nabla\phi_0 \tag{4・11}$$

とかける．式(4・10)，(4・11)を式(4・9*b*)，(4・9*c*)に代入し，ゲージ関係式

$$(\nabla-\mu\sigma a\gamma\mathbf{v})\cdot\mathbf{A}_0+j\omega\hat{\varepsilon}\,a^2\phi_0=0 \tag{4・12}$$

を用いて，ベクトル・ポテンシャルに関するつぎの波動方程式をうる．

$$[\nabla\cdot\bar{\alpha}\cdot\nabla-\mu\sigma a\gamma(\mathbf{v}\cdot\nabla)+a^2\hat{k}^2]\mathbf{A}_0=-a^2\mathbf{J}_{0s} \tag{4・13}$$

ただし，

$$\hat{k}^2 = \omega^2 \hat{\varepsilon} \mu = \omega^2 \varepsilon \mu \left(1 - j \frac{\sigma \gamma}{\omega \varepsilon} \right) \tag{4・14}$$

またゲージ関係式（4・12）を用いて，式（4・11）の $\mathbf{E}_0$ はつぎのように表わされる．

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\bar{\alpha}^{-1}}{j \omega \hat{\varepsilon}} \cdot \left\{ \hat{k}^2 \mathbf{A}_0 + \frac{\bar{\alpha}}{a^2} \cdot \left[\nabla \left(\nabla - \mu \sigma a \gamma \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{A}_0 \right] \right\} \tag{4・15}$$

したがって，与えられた印加波源 $\mathbf{J}_{0s}$ によって生ずる電磁界を求めるには，波動方程式（4・13）を解いてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_0$ を求め，式（4・10）および（4・15）の演算を行なえばよいことになる．

波動方程式（4・13）を解くため $\mathbf{A}_0$ のかわりに新しい未知関数 $\mathbf{T}_0$ を

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{T}_0 \, exp \left(\frac{1}{2} \mu \sigma a \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \right) = \mathbf{T}_0 \, exp \left(\frac{1}{2} \mu \sigma a \gamma v z \right) \tag{4・16}$$

なる関係によって導入する．式（4・16）を波動方程式（4・13）に代入して $\mathbf{T}_0$ に関する波動方程式

$$\left[\nabla \cdot \bar{\alpha} \cdot \nabla + \hat{K}_0^2 \right] \mathbf{T}_0 = - \mathbf{F}_0 \tag{4・17}$$

をうる．ただし，

$$\hat{K}_0^2 = a^2 \left(\hat{k}^2 - \frac{1}{4} \mu^2 \sigma^2 \gamma^2 v^2 \right) \tag{4・18a}$$

$$\mathbf{F}_0 = \alpha^2 \mathbf{J}_{0s} \, exp \left(- \frac{1}{2} \mu \sigma a \gamma v z \right) \tag{4・18b}$$

$\mathbf{T}_0$ に関する波動方程式（4・17）は *Fourier* 変換を用いて容易に解くことができる．したがって，導電性運動媒質中に存在する任意の印加波源によって生ずる電磁界 $\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ は波動方程式（4・17）の解を用いて，式（4・16），（4・10）

(4・15)，および式(4・8)の操作を順次行なうことによって決定することができる。

4・3 *Poynting*定理

式(4・1*a*)と**H**のスカラ積から式(4・1*b*)と**E**のスカラ積を差し引き，構成関係式(4・2*a*)，(4・2*b*)を用いて次式をうる。

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}(w_m + w_e) \tag{4・19}$$

ただし，

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{4・20a}$$

$$w_m = \frac{1}{2}[\mu \mathbf{H} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] = \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \tag{4・20b}$$

$$w_e = \frac{1}{2}[\varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})] = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \tag{4・20c}$$

上式において，**S**は放射電力密度を表わし，$-\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E}$は印加波源によって供給される電力の密度を表わす。$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$はその符号が正のときには媒質中で消費される電力の密度を表わし，負のとき(次節で述べるように，媒質が波の位相速度よりも大きな速度で運動するとき$\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$はその符号が負となる)には，媒質から供給される電力の密度を表わすものと解釈できる。また，w_mおよびw_eはそれぞれ磁気的および電気的エネルギー密度を表わすものと解釈できる。

電磁界が正弦的に時間変化をしている場合には，式(4・19)の*Poynting*定理はつぎのようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2}\mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} - 2j\omega(\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) \tag{4・21}$$

ここで，

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* \tag{4・22a}$$

$$<w_m> = \frac{1}{4}\left[\mu\mathbf{H}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{H}^* - \boldsymbol{\Omega}\cdot Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\right]$$

$$= \frac{1}{4}Re\left[\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*\right] \tag{4・22b}$$

$$<w_e> = \frac{1}{4}\left[\varepsilon\mathbf{E}\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{E}^* - \boldsymbol{\Omega}\cdot Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\right]$$

$$= \frac{1}{4}Re\left[\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}^*\right] \tag{4・22c}$$

ただし，Re は実数部をとる操作を表わし，記号 * は複素共役を表わす．

式（4・21）の実数部をとり，面 A によって囲まれた体積 V によって積分することにより，導電性運動媒質中におけるアンテナ放射に関するエネルギー関係式として次式をうる．

$$<P_R> = <P_s> - <P_f> \tag{4・23}$$

ただし，

$$<P_R> = Re\iint_A \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}\,dA \tag{4・24a}$$

$$<P_s> = -\frac{1}{2}Re\iiint_V \mathbf{J}_s^*\cdot\mathbf{E}\,dV \tag{4・24b}$$

$$<P_f> = \frac{1}{2}Re\iiint_V \mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}\,dV \tag{4・24c}$$

ここで，$\mathbf{n}$ は面 A の外向き法線ベクトルを表わす．式（4・24）の $<P_R>$ は

面Aを横切って外方へ放射される電力の時間平均値を表わし，$<P_s>$は体積V内に存在する波源によって供給される電力の時間平均値を表わす．つぎに，$<P_f>$はその符号が正の場合には，体積Vの媒質内で消費される電力の時間平均値を表わし，負の場合には媒質から供給される電力の時間平均値を表わすことになる．

4・4　平面波と波動増幅現象

ここでは，導電性運動媒質中を伝搬する平面波について考察する．平面波の位相項を$exp[\,j(\omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\,]$と仮定すれば，式(4・17)，(4・16)，および式(4・10)，(4・15)，(4.8)を順次用いることによって

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}-\omega\Omega z+\frac{1}{2}j\mu\sigma a\gamma v z \qquad (4\cdot25a)$$

$$\mathbf{k}_0\cdot\bar{\alpha}\cdot\mathbf{k}_0-\hat{K}_0^{\,2}=0 \qquad (4\cdot25b)$$

となる．ただし，式(4・25b)は波動方程式(4・17)の右辺の印加波源による項を0とおくことによって得られたものである．

ここで，簡単のため媒質の運動方向(z軸方向)に平行な方向に伝搬するTEM波を考え，その伝搬定数をKとすれば，電界および磁界は前節の結果を用いてつぎのように求まる．

$$\mathbf{E}=\mathbf{i}_x Ce^{j(\omega t-Kz)} \qquad (4\cdot26a)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{i}_y\frac{K+\omega\Omega}{\omega\mu a}Ce^{j(\omega t-Kz)} \qquad (4\cdot26b)$$

ただし，Cは場所および時間に無関係な定数であり，また$\mathbf{i}_x$，$\mathbf{i}_y$はそれぞれxおよびy軸方向の単位ベクトルを表わす．さて，伝搬定数Kは式(4・25)から求められ，位相係数pおよび減衰(増幅)係数qを

$$K=k(p-jq) \qquad (4\cdot27a)$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \qquad (4\cdot27b)$$

で定義すれば，p，q はそれぞれつぎのように求められる．

$$p = p^{\pm} = a\left[\pm g - \frac{(n^2-1)\beta}{(1-\beta^2)n}\right] \tag{4・28}$$

$$q = q^{\pm} = a\left[\pm h - \frac{1}{2} n\beta\gamma \tan\delta\right] \tag{4・29}$$

ただし，

$$g = \left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)^2+\gamma^2\tan^2\delta} + \left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)\right\}\right]^{1/2} \tag{4・30a}$$

$$h = \left[\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)^2+\gamma^2\tan^2\delta} - \left(1-\frac{1}{4}n^2\beta^2\gamma^2\tan^2\delta\right)\right\}\right]^{1/2} \tag{4・30b}$$

$$\tan\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{4・31}$$

したがって，伝搬定数 $K^- = k(p^- - jq^-)$ および $K^+ = k(p^+ - jq^+)$ をもつ2種類の平面波が存在することがわかる．さて，式(4・28)から直ちに分かるように，位相係数 p は $n\beta < 1$ のとき

$$p^- < 0,\quad p^+ > 0,\quad (n\beta < 1) \tag{4・32a}$$

となり，また $n\beta > 1$ のときは

$$p^- > 0,\quad p^+ > 0,\quad (n\beta > 1) \tag{4・32b}$$

となる．また，減衰（増幅）係数 q は式(4・29)から

$$q^- < 0,\quad q^+ > 0,\quad (n\beta < 1) \tag{4・33a}$$

$$q^- > 0,\quad q^+ > 0,\quad (n\beta > 1) \tag{4・33b}$$

となる．上式（4・32b），（4・33b）から明らかなように，$n\beta > 1$ のときには2つの位相係数，減衰係数はそれぞれともに正の値をとる．

さて，ここで電磁エネルギーの流れを式（4・22a）の実数部で定義すれば，式（4・26）を用いて次式をうる．

$$[\,<\mathbf{S}>\,]^{\pm} = \mathbf{i}_z\,[\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\;g\,|\,\mathbf{E}\,|^2] \tag{4・34}$$

したがって，$[\,<\mathbf{S}>\,]^{\pm}$ の符号はつぎのようになる．

$$[\,<\mathbf{S}>\,]^{-} < 0,\quad [\,<\mathbf{S}>\,]^{+} > 0 \tag{4・35}$$

式（4・32a），（4・33a）および（4・35）から，媒質が低速度で運動している場合，すなわち $n\beta < 1$ のときは，伝搬定数 K^- および K^+ をもつ波はともに減衰波であり，そのエネルギー流はそれぞれ z の負および正の方向に伝搬することがわかる．つぎに，式（4・32b），（4・33b）および（4・35）から媒質が高速度で運動している場合，すなわち $n\beta > 1$ のときには，伝搬定数 K^+ をもつ波はエネルギー流の方向が z の正方向（媒質の運動方向）である減衰波であるが，伝搬定数 K^- をもつ波はエネルギー流の方向が z の負の方向（媒質の運動方向と逆の方向）である増大波であることがわかる．このような増大波の場合の q は増幅係数と呼ぶことができる．つぎに，このような波動増幅の現象を先に導いたエネルギー関係式（4・23）を用いて説明する．

印加波源が存在しない場合にはエネルギー関係式（4・23）はつぎのようになる．

$$-Re\iint_A \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}\,dA = \frac{1}{2}Re\iiint_V \mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}\,dV \tag{4・36}$$

さて，$Re\,[\,\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}\,]$ は式（4・5a）および（4・26）を用いてつぎのように表わされる．

$$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^{\pm}=-\gamma\sigma a\,[\,-1\pm n\beta g\,]\,|\,\mathbf{E}\,|^2 \qquad (4\cdot37)$$

上式から $Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]$ の符号はつぎのようになる．

$$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^{-}>0,\ \ Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^{+}>0,\ \ (n\beta<1) \qquad (4\cdot38a)$$

$$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^{-}<0,\ \ Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^{+}>0,\ \ (n\beta>1) \qquad (4\cdot38b)$$

式（4・38b）から，$n\beta>1$ のときには伝搬定数 K^- をもつ波の $Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]$ は負となり，したがってエネルギー関係式（4・36）の右辺が負となることがわかる．式（4・36）の右辺は，媒質が静止している場合もしくは低速度（$n\beta<1$）で運動している場合には常に正の値をとり，したがって左辺は体積 V の表面 A を通って V 内に流れ込む電力を表わし，右辺は V 内で消費される電力を表わす．しかし，上の場合のように，媒質が $n\beta>1$ なる速度で波の電磁エネルギー流の進む方向と逆の方向に運動する場合には式（4・36）の右辺は負となり，したがってこの場合には左辺は体積 V の表面 A を通って V から流れ出与る電力を表わし，右辺は V 内に媒質から供給される電力を表わすことになる．

以上，*Poynting* 定理から導かれるエネルギー関係式を用いて波動増幅の現象を説明したが，次節においては *Minkowski* の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いて上記の波動増幅の現象についてさらに詳しく検討する．

表 4・1　p，q，$<\mathbf{S}>$，$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]$ の符号

	$n\beta<1$		$n\beta>1$	
	I	II	III	IV
p	$p^-<0$	$p^+>0$	$p^->0$	$p^+>0$
q	$q^-<0$	$q^+>0$	$q^->0$	$q^+>0$
$<\mathbf{S}>$	$[<\mathbf{S}>]^-<0$	$[<\mathbf{S}>]^+>0$	$[<\mathbf{S}>]^-<0$	$[<\mathbf{S}>]^+>0$
$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]$	$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^->0$	$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^+>0$	$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^-<0$	$Re\,[\,\mathbf{J}_f^{\,*}\cdot\mathbf{E}\,]^+>0$
	減衰波	減衰波	増大波	減衰波

表４・１は，p，q，$\langle \mathbf{S} \rangle$，および $Re[\mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E}]$ の符号をまとめたものである．表４・１における領域Ⅲが波動増幅の起こる場合である．

４・５　*Minkowski* の電磁エネルギー・運動量テンソルと波動増幅現象

前節では *Poynting* 定理を用いて波動増幅現象を説明したが，ここでは *Minkowski* の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いてさらに検討する．

４・５・１　エネルギー関係式

Minkowski によれば電磁界のエネルギー・運動量テンソルを S_{ik} とするとき，運動量およびエネルギーの保存則はつぎのようにかける．

$$f_i = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{4・39}$$

ここで，f_i はその値が正のときには電磁系（電磁場）から力学系（媒質）に作用する四元力の密度を表わし，また負の場合には逆に力学系から電磁系に作用する力を表わす．四元力の密度 f_i を電磁界量で表わせばつぎのようになる．

$$f_i = \left(\mathbf{f},\ \frac{j}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f)\right) \tag{4・40}$$

ただし，

$$\mathbf{f} = \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f \times \mathbf{B} \tag{4・41a}$$

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_c + \rho_f \mathbf{v} \tag{4・41b}$$

上式における $\mathbf{J}_c$ は伝導電流を表わし，$\rho_f \mathbf{v}$ は携帯電流を表わす．

式（4・39）において $i = 4$ とおくと，エネルギー保存則

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{c}{j} f_4 \tag{4・42}$$

をうる．ただし，

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) \tag{4・43a}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{4・43b}$$

$$f_h = \frac{j}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_f) \tag{4・43c}$$

式（4・43c）で表わされる f_h はさらにつぎのようにかける．

$$f_h = \frac{j}{c}(A + Q) \tag{4・44}$$

ただし，

$$A = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \tag{4・45a}$$

$$Q = (\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{J}_c = \mathbf{E}_{eff}\cdot\mathbf{J}_c \tag{4・45b}$$

ここで，Aは単位時間に単位体積あたりになされる力学的仕事を表わし，またQは単位時間に単位体積あたりに放出される力学的エネルギー以外のエネルギー量，すなわち発生する熱量を示すものと解釈できる.[6]

さて，電磁界が正弦的に時間変化しているときには式（4・42）のエネルギー保存則はつぎのようにかける．

$$-\nabla\cdot\langle\mathbf{S}\rangle = \langle W\rangle = \langle A\rangle + \langle Q\rangle \tag{4・46}$$

ただし，

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}Re[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] \tag{4・47a}$$

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2}Re[\mathbf{J}_f^*\cdot\mathbf{E}] \tag{4・47b}$$

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2}Re[\mathbf{v}\cdot(\rho_f\mathbf{E} + \mathbf{J}_f^*\times\mathbf{B})] \tag{4・47c}$$

$$<Q> = \frac{1}{2} Re[\mathbf{J}_c^* \cdot \mathbf{E}_{eff}] \qquad (4\cdot 47d)$$

上式（4・46）は当然のことながら4・3で求めた式（4・21）と一致する。ここで，$<\mathbf{S}>$は電磁エネルギー流の時間平均値を表わし，$<W>$は電磁場が媒質に対してなす全仕事量の時間平均値を表わすものと解釈できる．$<A>$は電磁場が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わし，また$<Q>$は発生する熱量の時間平均値を表わすものと解釈できる．

以上の諸量のうち，$<W>$および$<A>$はあとで示すように媒質の運動速度によって正にも負にもねりうるが，$<Q>$は媒質の運動速度の如何にかかわらず決っして負にはならない．$<Q>$が決っして負にはならないことは式（4・47d）をつぎのように書き改めることによって直ちにわかる．

$$<Q> = \frac{1}{\gamma} <Q'> = \frac{1}{2\gamma} \sigma |\mathbf{E}'|^2 \qquad (4\cdot 48a)$$

または，

$$<Q> = \frac{1}{2} \gamma \sigma Re \left[|\mathbf{E}_{eff}|^2 - \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}}{c}\right)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}^*}{c}\right) \right] \qquad (4\cdot 48b)$$

ここで，プライム記号は媒質の静止座標系における量を表わす．なお，式（4・48a）は熱力学における熱量の変換式に一致する．

さて，つぎに$<A>$について考察する．$<A>$は式（4・47c）からつぎのように表わされる．

$$<A> = \mathbf{v} \cdot \left[\frac{1}{2} Re[\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B}] \right] \qquad (4\cdot 49a)$$

$$= v <f_{\parallel}> \qquad (4\cdot 49b)$$

ここで，$<f_{\parallel}>$は*Lorentz* 力 $\mathbf{f}$ の媒質の運動方向に平行な成分の時間平均値を表わす．上式から $v<f_{\parallel}>>0$，すなわち*Lorentz* 力が媒質を加速させる方向に働くときには$<A>>0$となり，このとき$<A>$は電磁場が

媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすことがわかる．また，$v<f_{\parallel}>\,<0$，すなわち *Lorentz* 力が媒質を減速させる方向に働くときには$<A>\,<0$となり，このとき$-<A>$なる量は媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすものと解釈できる．エネルギー関係式（4・46）から$<A>\,<0$で$|<A>|>\,<Q>$なる場合には$-\nabla\cdot<\mathbf{S}>=<\bar{W}>\,<0$となり，したがって波動増幅の現象がおこることになる．このときエネルギー関係式はつぎのようにかける．

$$[\,-<\bar{W}>\,]=[\,-<A>\,]-<Q> \qquad (4\cdot50)$$

上式の右辺は，媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値から媒質中に発生する熱量の時間平均値を差し引いた量を表わし，したがって左辺は媒質が電磁場に対してなす *total* の仕事量の時間平均値を表わすことになる．

さて，4・4で述べたような媒質の運動方向に平行な方向に伝搬する*TEM*波の場合には，$<\bar{W}>$，$<A>$および$<Q>$はそれぞれつぎのように表わされる．

$$<\bar{W}>=\frac{1}{2}\gamma\sigma(1-n\beta p)\,|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot51a)$$

$$<A>=\frac{1}{2}\gamma\sigma[\,n\beta p(1-n\beta p)-(n\beta q)^2]\,|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot51b)$$

$$<Q>=\frac{1}{2}\gamma\sigma[\,(1-n\beta p)^2+(n\beta q)^2]\,|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot51c)$$

ここで，式（4・27*a*）で与えられるKを

$$K=K_r-jK_i \qquad (4\cdot52)$$

とおき，

$$v_p=\frac{\omega}{K_r}\quad,\qquad v_i=\frac{\omega}{K_i} \qquad (4\cdot53a,b)$$

で定義される量を導入する．ただし，v_p は導電性運動媒質中を伝搬する波の位相速度を表わす．このとき式（4・51a～c）はそれぞれつぎのようにかける．

$$<W> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1 - \frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot 54a)$$

$$<A> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left[\left(1 - \frac{v}{v_p}\right)\left(\frac{v}{v_p}\right) - \left(\frac{v}{v_i}\right)^2\right]|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot 54b)$$

$$<Q> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left[\left(1 - \frac{v}{v_p}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_i}\right)^2\right]|\mathbf{E}|^2 \qquad (4\cdot 54c)$$

式（4・54a）から，$<W>$は（v/v_p）＞1 の場合にのみ負になることがわかる．ここで，表4・1の領域Ⅰ～Ⅳにおける$<W>$，$<A>$および$<Q>$の符号を表4・2に示す。

表4・2　$<W>$，$<A>$，$<Q>$の符号

	$n\beta < 1$		$n\beta > 1$	
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
$<W>$	正	正	負	正
$<A>$	負	正または負	負	正または負
$<Q>$	正	正	正	正
	$\frac{v}{v_p} < 0$	$0 < \frac{v}{v_p} < 1$	$1 < \frac{v}{v_p}$	$0 < \frac{v}{v_p} < 1$

表4・2から波動増幅現象は，媒質の運動速度が媒質中を伝搬する波の位相速度より大きくなるときに起こり，またこのような現象は$n\beta < 1$ なる場合

には決っして起こらないことがわかる．

以上，導電性運動媒質中を伝搬するTEM波のエネルギー関係式について考察したが，次節では上記のような増幅波の励振について簡単に考察する．

4・5・2　増幅波の励振

前節においては導電性運動媒質中を伝搬するTEM波について考察したが，このような場合には波の位相速度v_pが運動している媒質自身の構成定数（ε，μ，σ）および媒質の運動速度vの関数となり，その結果波動増幅の現象が起こる為には$n\beta>1$なる条件が必要となる．しかし，運動媒質中を伝搬する波の位相速度を外部波源によって強制的に定めるとき，v_pはもはや運動している媒質自身の構成定数には無関係となり，（v/v_p）>1の条件は実現しやすくなる．

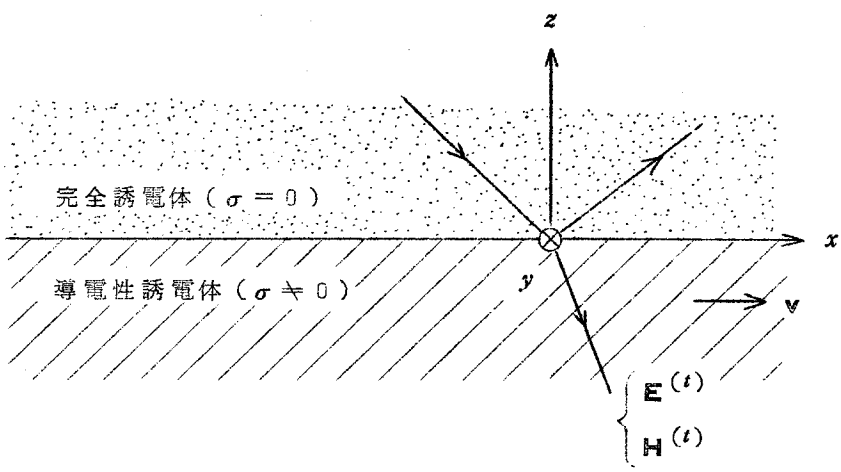

図4・1　平面波による増幅波の励振

図4・1は平面波によって導電性運動媒質中に増幅波を励振する場合の構成図である．図4・1において，$z>0$の空間は完全誘電体（$\sigma=0$），$z<0$の空間は導電性誘電体（$\sigma\neq0$）によってそれぞれ満されており，導

電性誘電体は完全誘電体に対して一定速度 v で x 軸方向に運動しているものとする．いま，入射波として電界が入射面に垂直な平面波，すなわち E 波を仮定すれば，透過波の $<W>$，$<A>$ および $<Q>$ はそれぞれつぎのように表わされる．[87]

$$<W> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (4\cdot55a)$$

$$<A> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)\left(\frac{v}{v_p}\right)|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (4\cdot55b)$$

$$<Q> = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)^2|\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (4\cdot55c)$$

ただし，$\mathbf{E}^{(t)}$ は透過波の電界を表わし，また v_p は透過波の位相速度の x 方向成分，すなわち媒質の運動方向に平行な成分を表わす．ここで，透過波の伝搬定数の x 方向成分は境界条件により入射波の伝搬定数の x 方向成分（実数量）に等しくなり，したがって v_p は完全誘電体の構成定数によって定められ，導電性誘電体の構成定数には無関係となる．式（4・55a～c）の形は，式（4・54a～c）において（v/v_i）＝0 とおいたものと一致する．式（4・55a）から，（v/v_p）＞1 のとき導電性運動媒質中に増幅波が励振されることがわかる．なお，図4・1の場合の詳しい解析は著者らの文献（87）を参照されたい．

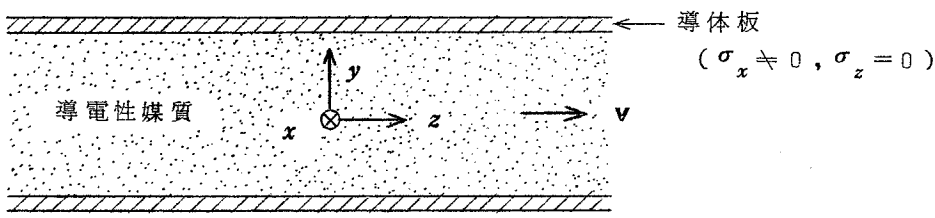

図4・2　*ac MHD generator* の原理的構成図

つぎに，波動増幅現象を *ac MHD generator*[88],[89]として用いる場合の原理的構成図を図４・２に示す．ただし，図４・２において導体板は十分薄く，またその導電率の z 方向成分は０であると仮定する．この導体板に

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}_x C_0 e^{j(\omega t - Kz)} \tag{4・56}$$

なる形の外部電圧をかけるとき，導電性運動媒質中には TE 波が励振されその伝搬定数は外部導体板上を伝搬する波の伝搬定数 K に等しくなり，したがって実数量となる．このとき $\langle W \rangle$，$\langle A \rangle$ および $\langle Q \rangle$ は式（4・55a～c）と同じ形になる．いま，*ac MHD generator* の効率 η を

$$\eta = \frac{[-\langle W \rangle]}{[-\langle A \rangle]}, \quad (v_p < v) \tag{4・57}$$

によって定義するとき η はつぎのように求められる．

$$\eta = \left(\frac{v_p}{v}\right), \quad (v_p < v) \tag{4・58}$$

したがって，η は v が v_p に等しくなる極限において最大値１をとり，v の増加と共に小さくなる．なお，効率を与える式（4・58）は，媒質の運動速度が光速度に比べて極めて小さいとして近似的に求められた式[88],[89] と一致する．

なお，最近 *Dunn* ら[30]も，導電性運動媒質中の波動について論じ著者と同様の結論を得ている．

４・６　結　　言

導電性運動媒質中の電磁界について，媒質の運動速度が光速に比べて十分小さいという近似を行なわないで厳密に解析し，近似理論の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示した．特に，媒質が電磁波の位相速度よりも大きな速度で運動する場合には波動増幅の現象が起こることを *TEM* 波を例にあげて示し，つぎにこの現象を導電性運動媒質中の厳密な *Poyn-*

ting 定理および *Minkowski* の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いて詳しく検討した．なお，最後にこのように増幅波の励振についても簡単に考察した．

第5章　導電性運動媒質を含む導波管の理論(I)近似解[32]～[35]

5・1　序　　言

運動媒質を含む導波管の解析は，最初*Collier*と*Tai*[31]によってなされ，彼等は光速度に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管の固有伝送モードを，方形および円形導波管の固々の場合についてベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めた．引きつづいて著者ら[32]～[35]は，このような運動媒質を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析し，その特別な場合として*Collier*らの結果が得られることを示した．また，導波管中に含まれる媒質の運動速度に関する制限のない厳密な解析は，媒質に損失のない場合については*Du*と*Compton*[36]を始めとする多数の人々[37]～[42]によってなされたが，導電性運動媒質を含む導波管の厳密解は著者ら[43]，[44]によって初めて与えられた．

本章においては，著者らが行なった導電性運動媒質を含む導波管の解析のうち近似解を取り扱い，厳密解に関しては次章で考察する．

5・2　運動媒質を含む導波管内の電磁界

図5・1に示されるような，軸方向に一様に運動する媒質を含む導波管内の電磁界は，媒質の速度vが光速に比べて十分小さいものと仮定すれば，つぎの*Maxwell-Minkowski*方程式によって決定される[7]．

$$\left.\begin{aligned}(\nabla - j\omega\Lambda \mathbf{1}_z)\times\mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}^* \\ (\nabla - j\omega\Lambda \mathbf{1}_z - \mu\sigma v \mathbf{1}_z)\times\mathbf{H} &= j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{J}\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

ただし，$\mathbf{1}_z$は軸(z)方向の単位ベクトルを表し，また

$$\left.\begin{aligned}\Lambda &= (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0)v \\ \hat{\varepsilon} &= \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_0,\ \mu_0 = \text{真空の誘電率および透磁率} \\ \varepsilon,\ \mu,\ \sigma = \text{静止媒質の誘電率，透磁率および導電率} \\ \mathbf{J},\ \mathbf{J}^* = \text{印加電流密度および磁流密度}\end{array}\right\} \qquad (5.2)$$

なお，上式においては時間変化 $e^{+j\omega t}$ を仮定している．

電磁界方程式（5.1）を解くために，まず

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{+j\omega\Lambda z} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{+j\omega\Lambda z} \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{+j\omega\Lambda z} \\ \mathbf{J}^* = \mathbf{J}_0^* e^{+j\omega\Lambda z}\end{array}\right\} \qquad (5.3)$$

とおく．式（5.3）を式（5.1）に代入して次式を得る．

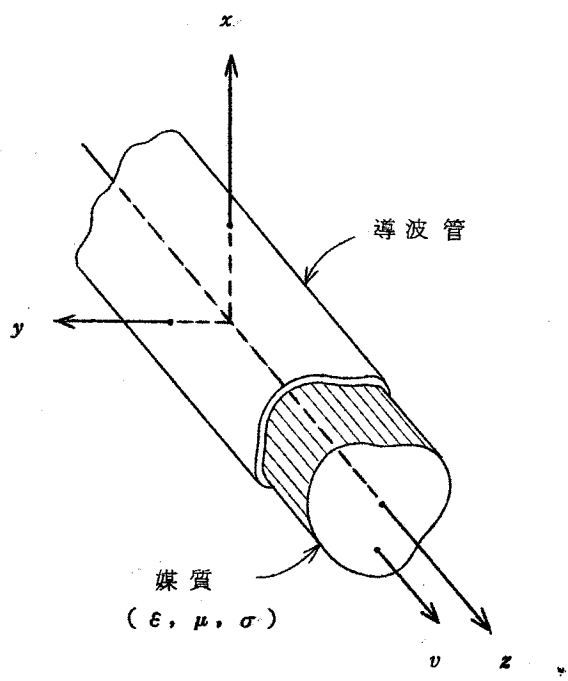

図5・1　座　標　系

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\mathbf{E}_0=-j\omega\mu\mathbf{H}_0-\mathbf{J}_0^*\\&(\nabla-\mu\sigma v\mathbf{i}_z)\times\mathbf{H}_0=j\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}_0+\mathbf{J}_0\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

さて，媒質が導波管内を軸方向に一様な速度で運動している場合には，電磁界ベクトル$\mathbf{E}$および$\mathbf{H}$の満たすべき境界条件は媒質が静止している場合と同様に，導波管壁において

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}=0\tag{5.5}$$

となる[90]．ただし，管壁は完全導体であるとし，また$\mathbf{n}$は管壁の外向き法線ベクトルを表わす．したがって，$\mathbf{E}_0$および$\mathbf{H}_0$についてもその境界条件は，

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0=0,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_0=0\tag{5.6}$$

となる．

ここで，導波管内の電磁界$\mathbf{E}_0$，$\mathbf{H}_0$をベクトルモード関数を用いて展開すればつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_{0t}&=\sum_i\left[V_i^e(z)\mathbf{M}_i^e+V_i^m(z)\mathbf{M}_i^m\right]\\\mathbf{H}_{0t}&=\sum_i\left[-I_i^e(z)\mathbf{N}_i^e+I_i^m(z)\mathbf{N}_i^m\right]\\\mathbf{E}_{0z}&=\sum_i\left[(k_i^e)^2V_{zi}(z)\mathbf{M}_{zi}\right]\\\mathbf{H}_{0z}&=\sum_i\left[(k_i^m)^2I_{zi}(z)\mathbf{N}_{zi}\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.7}$$

ただし，添字“t”および“z”はそれぞれ断面成分および軸方向成分を表わす．また，V_i^e，V_i^m，V_{zi}およびI_i^e，I_i^m，I_{zi}は，それぞれモード電圧および電流を表わす．さらに，ベクトルモード関数$\mathbf{M}_i^e$，$\mathbf{N}_i^e$，$\mathbf{M}_{zi}$および$\mathbf{M}_i^m$，$\mathbf{N}_i^m$，$\mathbf{N}_{zi}$はそれぞれ管壁上で境界条件

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_i^e=0\\&\partial\Phi_i^m/\partial n=0\end{aligned}\right\}\tag{5.8}$$

を満足し，方程式

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t^2 \Phi_i^e + (k_i^e)^2 \Phi_i^e = 0 \\ \nabla_t^2 \Phi_i^m + (k_i^m)^2 \Phi_i^m = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

を満たすスカラ固有関数Φ_i^eおよびΦ_i^mを用いてつぎのように定義される．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_i^e &= \nabla_t \Phi_i^e, & \mathbf{M}_i^m &= \nabla_t \Phi_i^m \times \mathbf{i}_z \\ \mathbf{N}_i^e &= \nabla_t \Phi_i^e \times \mathbf{i}_z, & \mathbf{N}_i^m &= \nabla_t \Phi_i^m \\ \mathbf{M}_{zi} &= \Phi_i^e \mathbf{i}_z, & \mathbf{N}_{zi} &= \Phi_i^m \mathbf{i}_z \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

ここで上部の添字“e”および“m”はそれぞれ電気形（TM波）および磁気形（TE波）の電磁界を表わす．また下部の添字“i”はモードの次数を表わし，以下では必要に応じて“mn”と書く．

なお，式（5.10）で与えられるベクトルモード関数に関してつぎのような直交性が成立する．

$$\left.\begin{aligned} \iint_S \mathbf{M}_i^e \cdot \mathbf{M}_j^e \, dS &= \iint_S \mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{N}_j^e \, dS \\ &= (k_i^e)^2 \iint_S \Phi_i^e \Phi_j^e \, dS = \delta_{ij} \\ \iint_S \mathbf{M}_i^m \cdot \mathbf{M}_j^m \, dS &= \iint_S \mathbf{N}_i^m \cdot \mathbf{N}_j^m \, dS \\ &= (k_i^m)^2 \iint_S \Phi_i^m \Phi_j^m \, dS = \delta_{ij} \\ \iint_S \mathbf{M}_i^e \cdot \mathbf{M}_j^m \, dS &= \iint_S \mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{N}_j^m \, dS = 0, \text{for all } i, j \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

ただし，Sは管軸に垂直な導波管断面を表わし，また

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

5．3　非斉次伝送方程式

電磁界方程式（5.4）およびモード表示式（5.7）から，境界条件（5.6）および直交関係式（5.11）を考慮してつぎの関係式を得る．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV_i^e}{dz}-\frac{\alpha_i^e}{j\omega\hat{\varepsilon}}I_i^e=\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}g_i^e(z)\\&\frac{dI_i^e}{dz}-\mu\sigma v I_i^e+j\omega\hat{\varepsilon}V_i^e=-h_i^e(z)\end{aligned}\right\}\qquad(5.12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV_i^m}{dz}+j\omega\mu I_i^m=-h_i^m(z)\\&\frac{dI_i^m}{dz}-\mu\sigma v I_i^m-\frac{\alpha_i^m}{j\omega\mu}V_i^m=-\frac{1}{j\omega\mu}g_i^m(z)\end{aligned}\right\}\qquad(5.13)$$

$$\left.\begin{aligned}&I_i^e=-j\omega\hat{\varepsilon}V_{zi}-\iint J_{0z}\Phi_i^e\,dS\\&V_i^m=-j\omega\mu I_{zi}-\iint J_{0z}^*\Phi_i^m\,dS\end{aligned}\right\}\qquad(5.14)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i^e=\hat{k}^2-(k_i^e)^2\\&\alpha_i^m=\hat{k}^2-(k_i^m)^2\\&\hat{k}^2=\omega^2\hat{\varepsilon}\mu\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\\&g_i^e(z)=j\omega\hat{\varepsilon}\iint J_{0t}^*\cdot\mathbf{N}_i^e\,dS-(k_i^e)^2\iint J_{0z}\Phi_i^e\,dS\\&g_i^m(z)=j\omega\mu\iint J_{0t}\cdot\mathbf{M}_i^m\,dS+(k_i^m)^2\iint J_{0z}^*\Phi_i^m\,dS\\&h_i^e(z)=\iint J_{0t}\cdot\mathbf{M}_i^e\,dS\\&h_i^m(z)=\iint J_{0t}^*\cdot\mathbf{N}_i^m\,dS\end{aligned}\right\}\qquad(5.15)$$

非斉次伝送方程式(5.12)および(5.13)はスカラ・グリーン関数を用いる方法によって解くことができる．まず，式(5.12)からV_i^e，I_i^eはそれぞれつぎのように求められる．

$$V_i^e(z) = \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^e - \gamma_{-i}^e} \int_{-\infty}^{z} [(\gamma_{+i}^e) g_i^e(z') + (\alpha_i^e) h_i^e(z')] e^{\gamma_{-i}^e(z-z')} dz'$$

$$+ \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^e - \gamma_{-i}^e} \int_{z}^{\infty} [(\gamma_{-i}^e) g_i^e(z') + (\alpha_i^e) h_i^e(z')] e^{\gamma_{+i}^e(z-z')} dz' \qquad (5.16)$$

$$-I_i^e(z) = -\frac{1}{\gamma_{+i}^e - \gamma_{-i}^e} \int_{-\infty}^{z} [g_i^e(z') + (\gamma_{-i}^e) h_i^e(z')] e^{\gamma_{-i}^e(z-z')} dz'$$

$$- \frac{1}{\gamma_{+i}^e - \gamma_{-i}^e} \int_{z}^{\infty} [g_i^e(z') + (\gamma_{+i}^e) h_i^e(z')] e^{\gamma_{+i}^e(z-z')} dz' \qquad (5.17)$$

ただし，

$$\gamma_{\pm i}^e = \frac{\mu\sigma v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2 + [(k_i^e)^2 - \hat{k}^2]} \qquad (5.18)$$

つぎに，式(5.13)からV_i^m，I_i^mはそれぞれつぎのように求められる．

$$V_i^m(z) = -\frac{1}{\gamma_{+i}^m - \gamma_{-i}^m} \int_{-\infty}^{z} [g_i^m(z') + (\gamma_{+i}^m) h_i^m(z')] e^{\gamma_{-i}^m(z-z')} dz'$$

$$-\frac{1}{\gamma_{+i}^{m}-\gamma_{-i}^{m}}\int_{z}^{\infty}\left[g_i^{m}(z')\right.$$

$$\left.+(\gamma_{-i}^{m})\,h_i^{m}(z')\right]\,e^{\gamma_{+i}^{m}(z-z')}\,dz' \qquad (5.19)$$

$$I_i^{m}(z)=\frac{1}{j\omega\mu}\,\frac{1}{\gamma_{+i}^{m}-\gamma_{-i}^{m}}\int_{-\infty}^{z}\left[(\gamma_{-i}^{m})\,g_i^{m}(z')\right.$$

$$\left.+(\alpha_i^{m})\,h_i^{m}(z')\right]\,e^{\gamma_{-i}^{m}(z-z')}\,dz'$$

$$+\frac{1}{j\omega\mu}\,\frac{1}{\gamma_{+i}^{m}-\gamma_{-i}^{m}}\int_{z}^{\infty}\left[(\gamma_{+i}^{m})\,g_i^{m}(z')\right.$$

$$\left.+(\alpha_i^{m})\,h_i^{m}(z')\right]\,e^{\gamma_{+i}^{m}(z-z')}\,dz' \qquad (5.20)$$

ただし，

$$\gamma_{\pm i}^{m}=\frac{\mu\sigma v}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^{2}+\left[(k_i^{m})^{2}-\hat{k}^{2}\right]} \qquad (5.21)$$

ここで，波源が有限の領域，$z_1<z<z_2$にある場合には，たとえばV_i^{e}はつぎのように書ける．

$$V_i^{e}(z)=$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\,\dfrac{1}{\gamma_{+i}^{e}-\gamma_{-i}^{e}}\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\left[(\gamma_{+i}^{e})\,g_i^{e}(z')\right. \\ \qquad\left.+(\alpha_i^{e})\,h_i^{e}(z')\right]\,e^{\gamma_{-i}^{e}(z-z')}\,dz',\ (z>z_2) & (5.22)\\ \dfrac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\,\dfrac{1}{\gamma_{+i}^{e}-\gamma_{-i}^{e}}\displaystyle\int_{z_1}^{z_2}\left[(\gamma_{-i}^{e})\,g_i^{e}(z')\right. \\ \qquad\left.+(\alpha_i^{e})\,h_i^{e}(z')\right]\,e^{\gamma_{+i}^{e}(z-z')}\,dz',\ (z<z_1) & (5.23)\end{cases}$$

I_i^{e}，V_i^{m}等についても同様である．

なお，V_{zi}，I_{zi} は上に得られたモード電流 I_i^e およびモード電圧 V_i^m を用いて式（5.14）から求められる．

以上によってモード電圧，電流はすべて求まり，したがって軸方向に運動する媒質を含む導波管内に分布する任意の電流源もしくは磁流源によって励振される電磁界は，式（5.3）および（5.7）を用いてつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E}_t &= \sum_i [V_i^e(z)\mathbf{M}_i^e + V_i^m(z)\mathbf{M}_i^m]\, e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbf{H}_t &= \sum_i [-I_i^e(z)\mathbf{N}_i^e + I_i^m(z)\mathbf{N}_i^m]\, e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbf{E}_z &= \sum_i [(k_i^e)^2 V_{zi}(z)\mathbf{M}_{zi}]\, e^{+j\omega\Lambda z} \\
\mathbf{H}_z &= \sum_i [(k_i^m)^2 I_{zi}(z)\mathbf{N}_{zi}]\, e^{+j\omega\Lambda z}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.24)$$

5．4　斉次伝送方程式

ここでは前節の特別な場合として，非斉次伝送方程式（5.12）および（5.13）の波源による項をそれぞれ零とおいて得られる斉次伝送方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_i^e}{dz} - \frac{\alpha_i^e}{j\omega\hat{\varepsilon}} I_i^e = 0 \\
&\frac{dI_i^e}{dz} - \mu\sigma v I_i^e + j\omega\hat{\varepsilon} V_i^e = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.25)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_i^m}{dz} + j\omega\mu I_i^m = 0 \\
&\frac{dI_i^m}{dz} - \mu\sigma v I_i^m - \frac{\alpha_i^m}{j\omega\mu} V_i^m = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.26)$$

を解き，運動媒質を含む導波管の，波源の存在しない場合のモード表示式を導く．

式(5.25)からI_i^eまたはV_i^eを消去することによって，TM波のモード電圧，電流の満足すべき微分方程式として次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2V_i^e}{dz^2}-\mu\sigma v\frac{dV_i^e}{dz}+\alpha_i^e V_i^e=0\\ \frac{d^2I_i^e}{dz^2}-\mu\sigma v\frac{dI_i^e}{dz}+\alpha_i^e I_i^e=0\end{aligned}\right\}\quad . \tag{5.27}$$

TE波のモード電圧，電流に関しても上と全く同様の式を得る．これらの斉次微分方程式の解，および式(5.14)において波源による項を零とおいて得られる関係式

$$\left.\begin{aligned}V_{zi}&=-\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}I_i^e\\ I_{zi}&=-\frac{1}{j\omega\mu}V_i^m\end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

を用いて，波源のない場合の電磁界はつぎのように書ける．

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_t&=\sum_i\left[Z_i^e A_i^e\mathbf{M}_i^e e^{\Gamma_i^e z}+B_i^m\mathbf{M}_i^m e^{\Gamma_i^m z}\right]\\ \mathbf{H}_t&=\sum_i\left[-A_i^e\mathbf{N}_i^e e^{\Gamma_i^e z}+Y_i^m B_i^m\mathbf{N}_i^m e^{\Gamma_i^m z}\right]\\ \mathbf{E}_z&=-\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\sum_i\left[A_i^e(k_i^e)^2\mathbf{M}_{zi}e^{\Gamma_i^e z}\right]\\ \mathbf{H}_z&=-\frac{1}{j\omega\mu}\sum_i\left[B_i^m(k_i^m)^2\mathbf{N}_{zi}e^{\Gamma_i^m z}\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_i^e&=\gamma_{\pm i}^e+j\omega\Lambda\\ \Gamma_i^m&=\gamma_{\pm i}^m+j\omega\Lambda\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_i^e &= \frac{1}{Y_i^e} = \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}}\gamma_{\mp i}^{\ e} \\ Y_i^m &= \frac{1}{Z_i^m} = -\frac{1}{j\omega\mu}\gamma_{\pm i}^{\ m} \end{aligned}\right\} \qquad (5.31)$$

また，A_i^e および B_i^m は定数である．

なお，*Collier* と *Tai*[31] は同様の問題を方形および円形導波管の場合について，ベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めているが，上式(5.29)は彼らによって得られた結果を含む，より一般的な表現式である．

5．5　運動媒質を含む方形導波管のモード励振

ここでは5．3の結果を用いて，運動媒質を含む方形導波管のモード励振の問題について考察する．

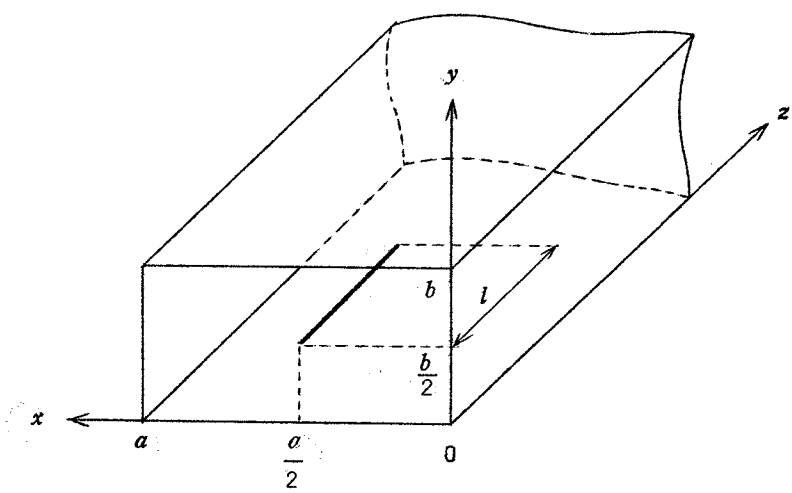

図5．2　方形導波管のモード励振

いま，座標系および導波管各部の寸法を図5．2に示すようにとり，z 方向に一様な線電流源

$$\mathbf{J} = I\cdot\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\cdot\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\mathbf{i}_z,\ (0\leqq z\leqq l) \qquad (5.32)$$

によって，TM_{11}モードを励振するものとすれば，励振されるTM_{mn}波のモード電圧$V_{mn}{}^{e}(z;z>l)$は式(5.22)を用いてつぎのように求められる．ただし，上式(5.32)においてδは$Dirac$のデルタ関数を表わす．

$$V_{mn}{}^{e}(z)=\frac{I}{\omega\hat{\varepsilon}\sqrt{ab}}\cdot\frac{k_{mn}}{K_{mn}}\cdot\frac{\gamma_{+mn}}{\Gamma_{mn}}$$

$$\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cdot(1-e^{-\Gamma_{mn}l})e^{\gamma_{-mn}z}$$

$$(z>l) \qquad (5.33)$$

ただし，

$$\Gamma_{mn}=\gamma_{-mn}+j\omega\Lambda$$

$$K_{mn}=\sqrt{[\hat{k}^2-(k_{mn}{}^2)]-\left(\frac{\mu\sigma v}{2}\right)^2} \qquad (5.34)$$

なお，上式(5.33)を導くにあたって，方形導波管のスカラ固有関数が，

$$\phi_{mn}{}^{e}=\frac{2}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{k_{mn}}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad (5.35)$$

ただし，

$$k_{mn}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (5.36)$$

となることを用いた．

ここで，TM_{11}モードに対する不要モードの発生率η_{mn}を，$z=l$におけるTM_{mn}波のモード電圧$V_{mn}{}^{e}(l)$と，TM_{11}波のモード電圧$V_{11}^{e}(l)$との比の絶対値で定義すればη_{mn}はつぎのようにかける．

$$\eta_{mn}=\left|\frac{V_{mn}{}^{e}(l)}{V_{11}^{e}(l)}\right|=\frac{k_{mn}}{k_{11}}\cdot\left|\frac{K_{11}}{K_{mn}}\right|\cdot\left|\frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{mn}}\right|$$

$$\cdot \left| \frac{\gamma_{+mn}}{\gamma_{+11}} \right| \cdot \left| \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right|$$

$$\cdot \left| \frac{1-e^{\Gamma_{mn} l}}{1-e^{\Gamma_{11} l}} \right| \qquad (5.37)$$

上式からわかるように，モードの次数m, nの両者もしくはいずれか一方が偶数の場合には$\eta_{mn}=0$となり，したがってこのような次数の不要モードは発生しないことは，媒質が静止している場合と同様である．m, nがともに奇数の場合には，上式（5.37）を数値計算することによって，不要モードの発生率は，媒質の運動の方向が電磁波のエネルギーの伝搬方向と一致している場合には，媒質が静止している場合に比べて低くなり，また逆の場合には高くなることがわかる．

5．6　結　　言

光速に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて取り扱い，この種の問題の代表的な例として方形導波管のモード励振について考察した．

第6章　導電性運動媒質を含む導波管の理論(II)厳密解[43],[44]

6.1　序　　言

前章においては，光速に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を，*Maxwell*—*Minkowski* 方程式から導かれる伝送方程式を用いて解析した．本章においては，媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密解を，変換を用いる方法によって求め近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示す．特に，媒質の運動速度が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき，無限に拡がっている導電性運動媒質中を伝搬する平面波の場合と同様に波動増幅の現象が起こることを示し，この現象を第4章において導かれたエネルギー関係式を用いて考察する．

6.2　導波管中の電磁界

誘電率 ε，透磁率 μ，導電率 σ をもつ線形，等方かつ一様なる媒質を考え，この媒質が図6.1に示すように任意の断面をもつ真直で一様な導波管中を軸方向に一様に v なる速度で運動しているものとする．ただし，ε，μ および σ はそれぞれ周波数 ω によらない定数であると仮定し，また管内に印加波源はないものとする．さらに，媒質および観測者の静止座標系における電磁界の時間変化をそれぞれ $e^{j\omega' t'}$ および $e^{j\omega t}$ と仮定する．なお，以下においてプライムのついた電磁界量は媒質の静止座標系における量を表わし，観測者の静止座標系における電磁界量にはプライムをつけないものとする．

さて，媒質の静止座標系における電磁界はつぎのように表わされる．ただし，本章においては *TE* モードのみを取扱うが，*TM* モードの場合もまったく同様に取扱うことができる．

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\parallel}' &= \mathbf{i}_z' H \exp(-jk_z' z') \\
\mathbf{H}_{\perp}' &= Y_m' (\mathbf{i}_z' \times \mathbf{E}_{\perp}') \\
\mathbf{E}_{\perp}' &= j(\omega'\mu/k_m^2)\, \mathbf{i}_z' \times \nabla_t H \exp(-jk_z' z')
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

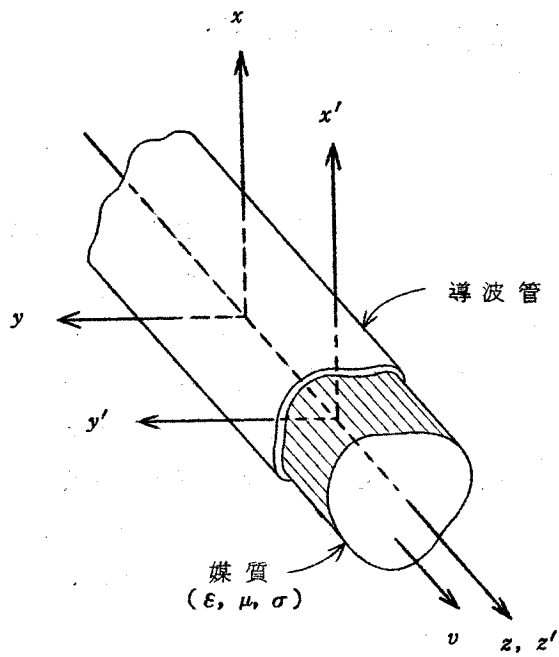

図6.1 座 標 系

上式において，Y_m' は次式によって定義される．

$$Y_m' = \frac{k_z'}{\omega'\mu} \tag{6.2}$$

また，H はつぎの方程式

$$\nabla_t^2 H + k_m^2 H = 0 \tag{6.3}$$

の解であり，管壁上での境界条件を満足しているものとする．ただし，∇_t はナブラ演算子の断面成分を表わし，

$$k_z'^2 = \omega'^2 \mu \hat{\varepsilon} - k_m^2 , \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega' \varepsilon} \right) \tag{6.4}$$

なお，電磁界表示式（6.1）において，下記の添字∥および⊥は，それぞれ管

軸に平行な成分および垂直な成分を表わす．

つぎに，観測者の静止座標系における電磁界は，*Maxwell* 方程式の共変性[90] を用いてつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{H}_{\parallel} &= \mathbf{i}_z H \exp(-jk_z z) \\ \mathbf{H}_{\perp} &= Y_m(\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_{\perp}) \\ \mathbf{E}_{\perp} &= j(\gamma^2/k_m^2)\mu\omega(1-\beta^2)\mathbf{i}_z \times \nabla_t H \exp(-jk_z z) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

ただし，Y_m はつぎのように定義される．

$$Y_m = \frac{\gamma^2}{\mu\omega}[k_z - \beta\omega/c + \beta c\mu\varepsilon(\omega - \beta k_z c)] \qquad (6.6)$$

なお，観測者の静止座標系における分散関係式は，媒質の静止座標系における分散関係式（6.4）に変換式

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta k_z c), \quad k_z' = \gamma(k_z - \beta\omega/c) \qquad (6.7)$$

ただし，c は真空中の光速度を表わし，

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (6.8)$$

を用いてつぎのように求められる．

$$\left.\begin{aligned} & k_z^2(1-\beta^2 c^2 \mu\varepsilon) + k_z[-2\beta(\omega/c)(1-c^2\mu\varepsilon) \\ & \quad -j\mu\sigma\beta c/\gamma] + (\omega/c)^2(\beta^2 - c^2\mu\varepsilon) \\ & \quad + (1-\beta^2)k_m^2 + j\mu\sigma\omega/\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.9)$$

6．3 伝搬定数

伝搬定数 k_z を位相係数 p_m および減衰（増幅）係数 q_m を用いて次式によっ

て定義する．

$$k_z = k_m (p_m - j q_m) \tag{6.10}$$

ただし，p_m および q_m の下部の添字 m はモードの次数を表わす．このとき p_m および q_m はそれぞれつぎのように求まる．まず，$1-n^2\beta^2 \neq 0$ の場合には，

$$p_m = p_m^{\pm} = \frac{1}{n(1-n^2\beta^2)}\left[\beta(1-n^2)\frac{\lambda_m}{\lambda} \pm g\right] \quad (n^2\beta^2 \neq 1) \tag{6.11}$$

$$q_m = q_m^{\pm} = \frac{1}{n(1-n^2\beta^2)}\left[-(n^2\beta/2\gamma)\tan^2\delta_0 \pm h\right] \quad (n^2\beta^2 \neq 1) \tag{6.12}$$

となる．ただし，

$$\left.\begin{aligned} g &= \sqrt{\frac{P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}} \\ h &= \sqrt{\frac{-P+\sqrt{P^2+Q^2}}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} P &= n^2(1-\beta^2)^2(\lambda_m/\lambda)^2-(1-n^2\beta^2)(1-\beta^2)n^2 \\ &\quad -(n^2\beta/2\gamma)^2\tan^2\delta_0 \\ Q &= -(1-\beta^2)(n^2/\gamma)(\lambda_m/\lambda)\tan\delta_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

なお，上式においてつぎの諸記号を導入した．

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = c\sqrt{\mu\varepsilon} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{c}{n} \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_m &= \frac{2\pi}{k_m}\\ \tan\delta &= \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\lambda}{\lambda_m}\tan\delta_0\end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

ただし，$\tan\delta_0$は$\lambda_m/\lambda=1$のときの$\tan\delta$の値を表わす．また，以下において$n>1$と仮定する．式(6.11)および(6.12)から，導電性運動媒質を含む導波管中には伝搬定数$k_z^+=k_m(p_m^+-jq_m^+)$および$k_z^-=k_m(p_m^--jq_m^-)$をもつ2種類の波が存在しうることがわかる．つぎに，$1-n^2\beta^2=0$のときのp_mおよびq_mは分散関係式(6.9)からそれぞれつぎのように求まる．

$$p_m=\frac{\beta}{n}\cdot\frac{(\lambda_m/\lambda)[2(1-\beta^2)\{(1+\beta^2)-(\lambda/\lambda_m)^2\}}{4(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0}\cdot$$

$$\cdot\frac{+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0]}{}\quad(n^2\beta^2=1) \qquad (6.16)$$

$$q_m=\frac{\beta}{n}\cdot\frac{[(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2]\sqrt{1-\beta^2}\,\tan\delta_0}{4(1-\beta^2)+(\lambda/\lambda_m)^2\tan^2\delta_0}$$

$$(n^2\beta^2=1) \qquad (6.17)$$

上式から$n^2\beta^2=1$のときには，一般には2つあるべき伝搬定数が1つに縮退することがわかる．

さて，つぎに位相係数p_mの符号について調べる．ただし，以下においては$\beta\geqq0$，すなわち媒質はzの正の方向に運動しているものと仮定する．まず，$n\beta\neq1$の場合p_m^+の符号は表6.1のようになる．ただし，表6.1におけるβ^0およびλ_m/λ^0はそれぞれつぎのように定義される．

$$\beta^0=\frac{n\tan\delta_0}{\sqrt{4(n^2-1)^2+n^2(2-n^2)\tan^2\delta_0}} \qquad (6.18)$$

$$\frac{\lambda_m}{\lambda^0}=\frac{n}{n^2-1}\sqrt{\frac{4\beta^2(1-n^2)^2-n^2\{1+\beta^2(n^2-2)\}\tan^2\delta_0}{4(n^2-\beta^2)\beta^2\gamma^2}} \qquad (6.19)$$

表6．1　p_m^+の符号（$n\beta \neq 1$）

<table>
<tr><td colspan="3">$n \leqq \sqrt{2}$，または$n > \sqrt{2}$かつ$\tan\delta_0 < \dfrac{2(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-2}}$</td></tr>
<tr><td>$\beta < \beta^0$</td><td colspan="2">$p_m^+ > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\beta > \beta^0$</td><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} < \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$p_m^+ < 0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} = \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$p_m^+ = 0$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\lambda_m}{\lambda} > \dfrac{\lambda_m}{\lambda^0}$</td><td>$p_m^+ > 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n > \sqrt{2}$かつ$\tan\delta_0 \geqq \dfrac{2(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-2}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$p_m^+ > 0$</td></tr>
</table>

表6．2　p_m^-の符号（$n\beta \neq 1$）

$0 < n\beta < 1$	$p_m^- < 0$
$n\beta > 1$	$p_m^- > 0$

つぎに，p_m^-の符号は表6．2のようになる．以上は$n\beta \neq 1$のときのp_mであるが，$n\beta = 1$のときには表6．3のようになる．ただし，表6．3におけるλ_m/λ^0は次式によって定義される．

$$\frac{\lambda_m}{\lambda^0} = \sqrt{\frac{2(1-1/n^2) - \tan^2\delta_0}{2(1-1/n^4)}} \qquad (n\beta = 1) \qquad (6.20)$$

表６．３　p_m の符号（ $n\beta = 1$ ）

$\tan\delta_0 < \sqrt{2(1-1/n^2)}$	
$\frac{\lambda_m}{\lambda} < \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m < 0$
$\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m = 0$
$\frac{\lambda_m}{\lambda} > \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m > 0$
$\tan\delta_0 \geqq \sqrt{2(1-1/n^2)}$	
$p_m > 0$	

表６．４　$q_m^{\pm}$ の符号（ $n\beta \neq 1$ ）

	$\tan\delta_0 \neq 0$	$\tan\delta_0 = 0$	
$n\beta < 1$	$q_m^+ > 0$	$\frac{\lambda_m}{\lambda} < \sqrt{\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}}$	$q_m^+ > 0$ $q_m^- < 0$
	$q_m^- < 0$	$\frac{\lambda_m}{\lambda} \geqq \sqrt{\frac{1-n^2\beta^2}{1-\beta^2}}$	$q_m^+ = 0$ $q_m^- = 0$
$n\beta > 1$	$q_m^+ > 0$ $q_m^- > 0$	$q_m^+ = 0$ $q_m^- = 0$	

表６．５　q_m の符号（ $n\beta = 1$ ）

$\tan\delta_0 \neq 0$	$q_m > 0$
$\tan\delta_0 = 0$	$q_m = 0$

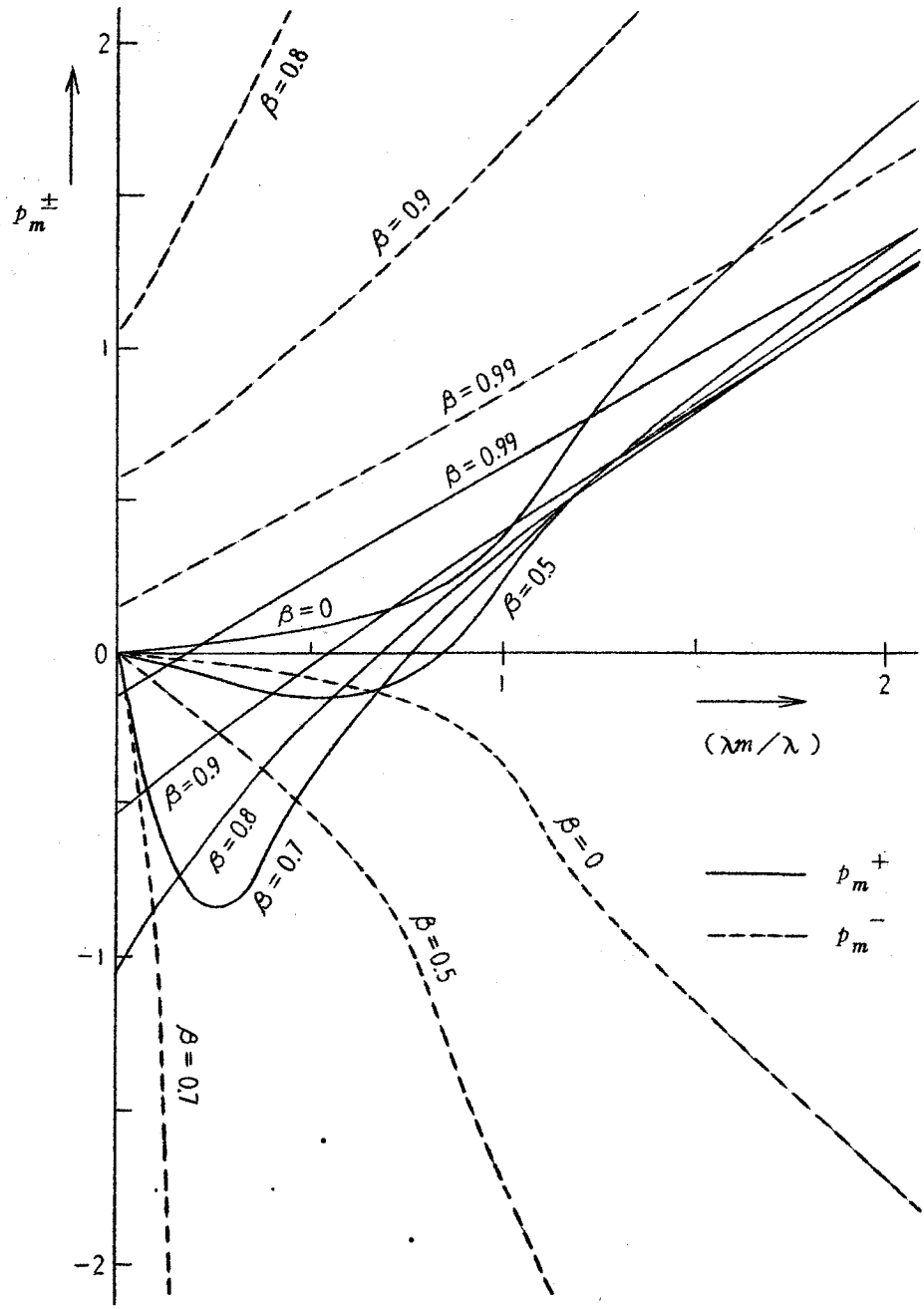

図６．２　位相係数$p_m^{\pm}$（$n\beta \neq 1$，$\tan\delta_0 = 0.3$，$n = \sqrt{2}$）

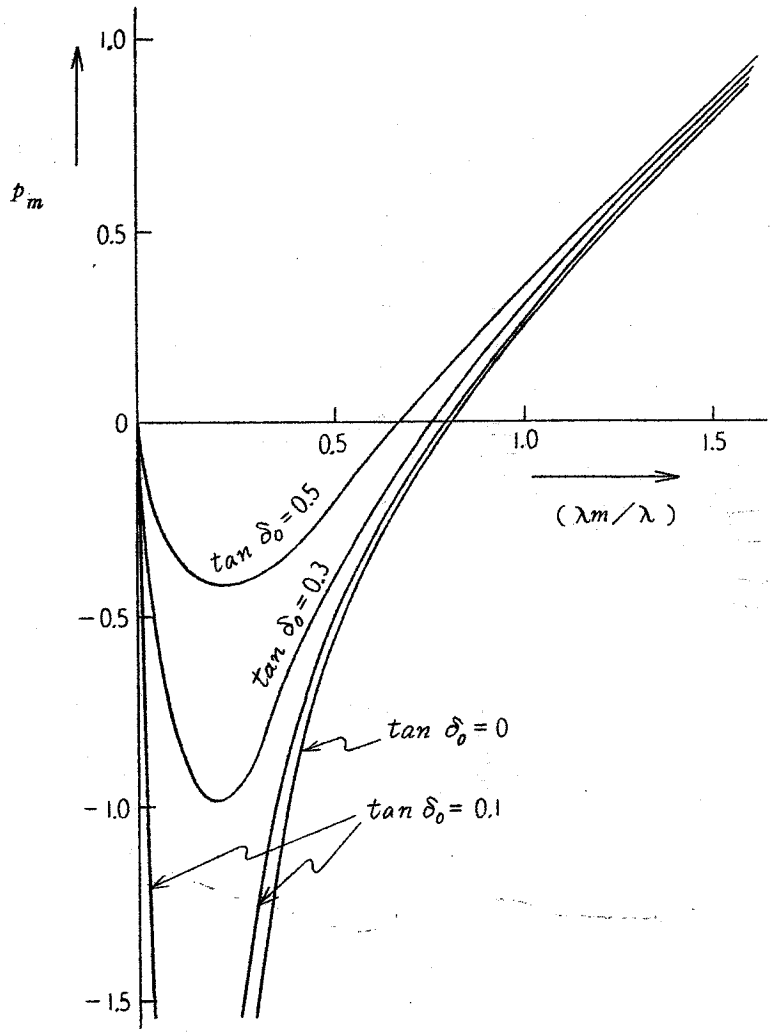

図 6．3　位相係数 p_m（$n\beta=1$，$n=\sqrt{2}$）

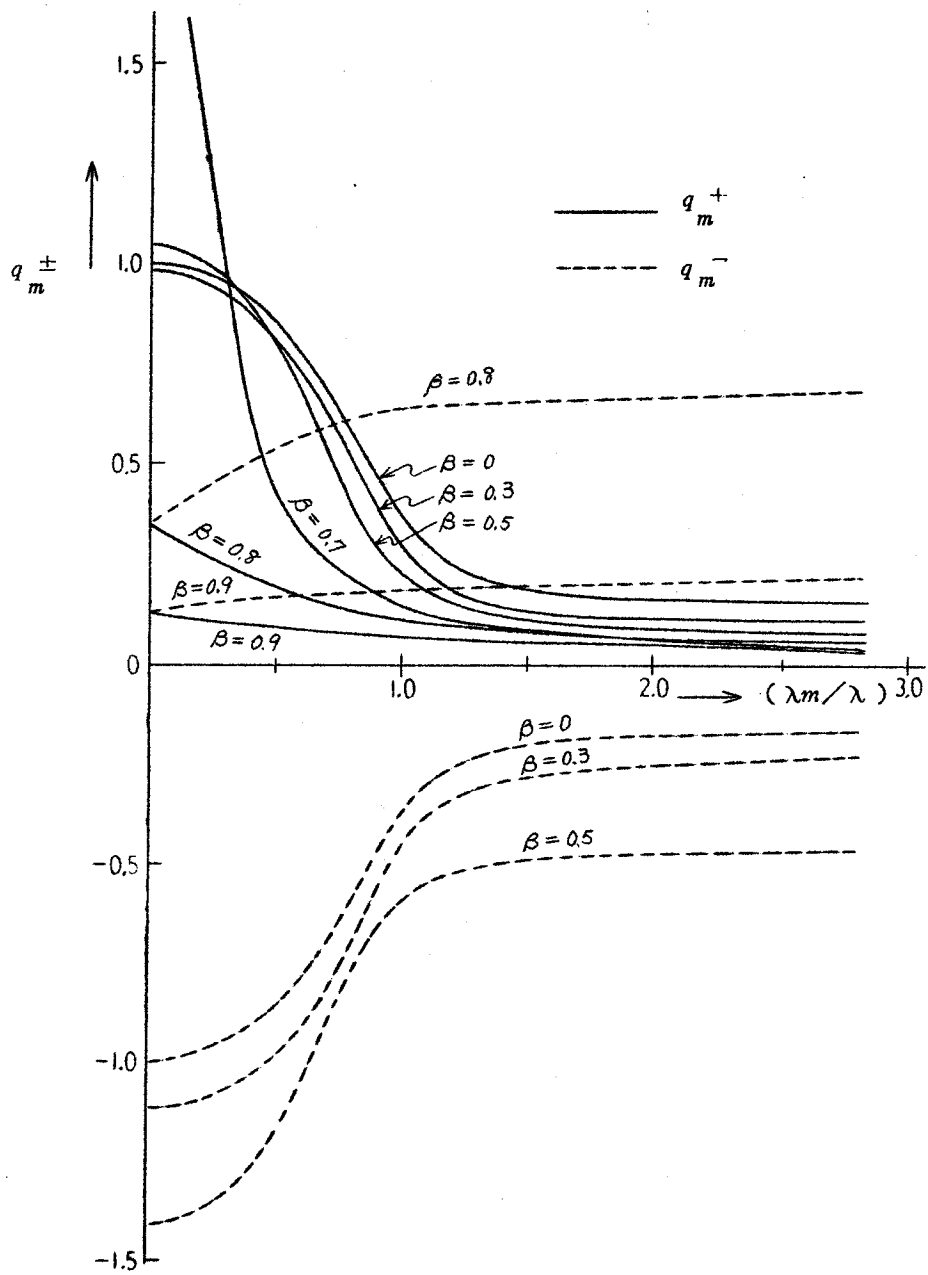

図 6．4　減衰定数 $q_m^{\pm}$（ $n\beta \fallingdotseq 1$， $\tan\delta_0 = 0.3$， $n = \sqrt{2}$ ）

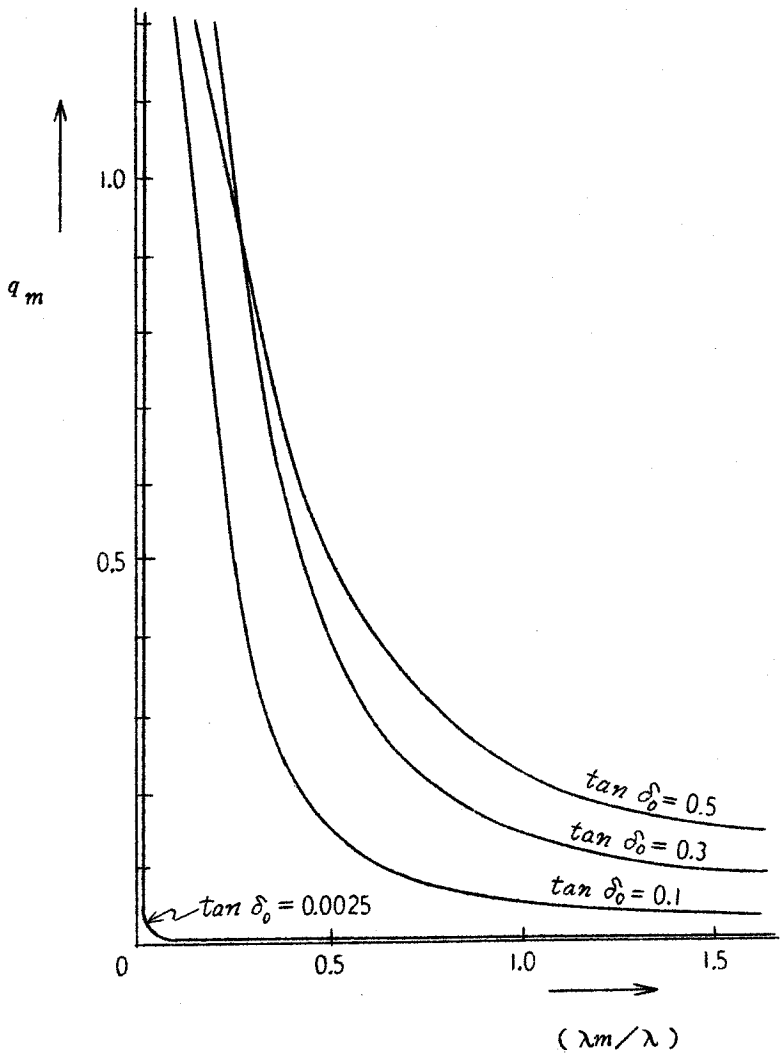

図 6．5　減衰係数 q_m（ $n\beta = 1$， $n = \sqrt{2}$ ）

図6．2および図6．3はp_mの数値計算例である．

つぎに，減衰（増幅）係数について調べる．まず，$n\beta \neq 1$のときのq_mの符号は表6．4のようになる．また，$n\beta = 1$のときには表6．5のようになる．ここで表6．4に明らかなように$n\beta > 1$のときには減衰（増幅）係数q_m^+およびq_m^-がともに正の値をとることに注意したい．図6．4および図6．5はq_mの数値計算例である．

6．4　電磁エネルギーの流れ

軸方向の電磁エネルギーの流れをPとすると，Pは複素Poyntingベクトル$\mathbf{S}$のz方向成分S_zをz軸に垂直な断面Aで積分したものの実数部であるから次式をうる．

$$P = Re \iint_A S_z \, dA \tag{6.21}$$

$$S_z = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{i}_z \tag{6.22}$$

式(6.22)を式(6.5)を用いて書き換えるとつぎのようになる．

$$S_z = \frac{1}{2} Y_m (\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp^*) \tag{6.23}$$

ここで，*は複素共役ベクトルを表わし，またReは実数部をとる操作を表わす．

上式(6.23)から電磁エネルギーの流れの方向は$Re\,[Y_m]$の符号によって決まることがわかる．式(6.6)から$Re\,[Y_m]$はつぎのように求まる．まず，$n\beta \neq 1$のとき，

$$Re\,[Y_m] = Re\,[Y_m^{\pm}] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{n(1-\beta^2)} \frac{\lambda}{\lambda_m} [\pm g]$$

$$(n\beta \neq 1) \tag{6.24}$$

つぎに，$n\beta = 1$ のとき

$$Re\,[Y_m] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (n\beta = 1) \tag{6.25}$$

上式から，

$$Re\,[Y_m^+] > 0 \quad (n\beta \neq 1) \tag{6.26}$$

$$Re\,[Y_m^-] < 0 \quad (n\beta \neq 1) \tag{6.27}$$

$$Re\,[Y_m] > 0 \quad (n\beta = 1) \tag{6.28}$$

となることがわかる．したがって，伝搬定数 k_z^- をもつ波の電磁エネルギーの流れの方向は z の負の方向であり，k_z^+ をもつ波のエネルギーの流れの方向は z の正の方向であることがわかる．また，$n\beta = 1$ のときには電磁エネルギーは常に z の正の方向に流れることがわかる．表6.4および式(6.26)，(6.27)から，媒質が低速度で運動している場合，すなわち $n\beta < 1$ のときには伝搬定数 k_z^+ および k_z^- をもつ波は減衰波であることがわかる．しかし，媒質が高速度で運動している場合，すなわち $n\beta > 1$ のときには伝搬定数 k_z^+ をもつ波は減衰波であるが，k_z^- をもつ波は，波が進むにつれて振幅が増大する，いわゆる増大波となる．次節においてこのような波動増幅の現象を第4章で導かれたエネルギー関係式を用いて検討する．また $n\beta = 1$ のときには表6.5および式(6.28)から明らかなように，波は減衰波である．図6.6は $Re\,[Y_m^+]$ の数値計算例である．ただし $Re\,[Y_m^-]$ のグラフは式(6.24)から明らかなように図6.6のグラフを横軸に対して対称に折り曲げることによって得られる．

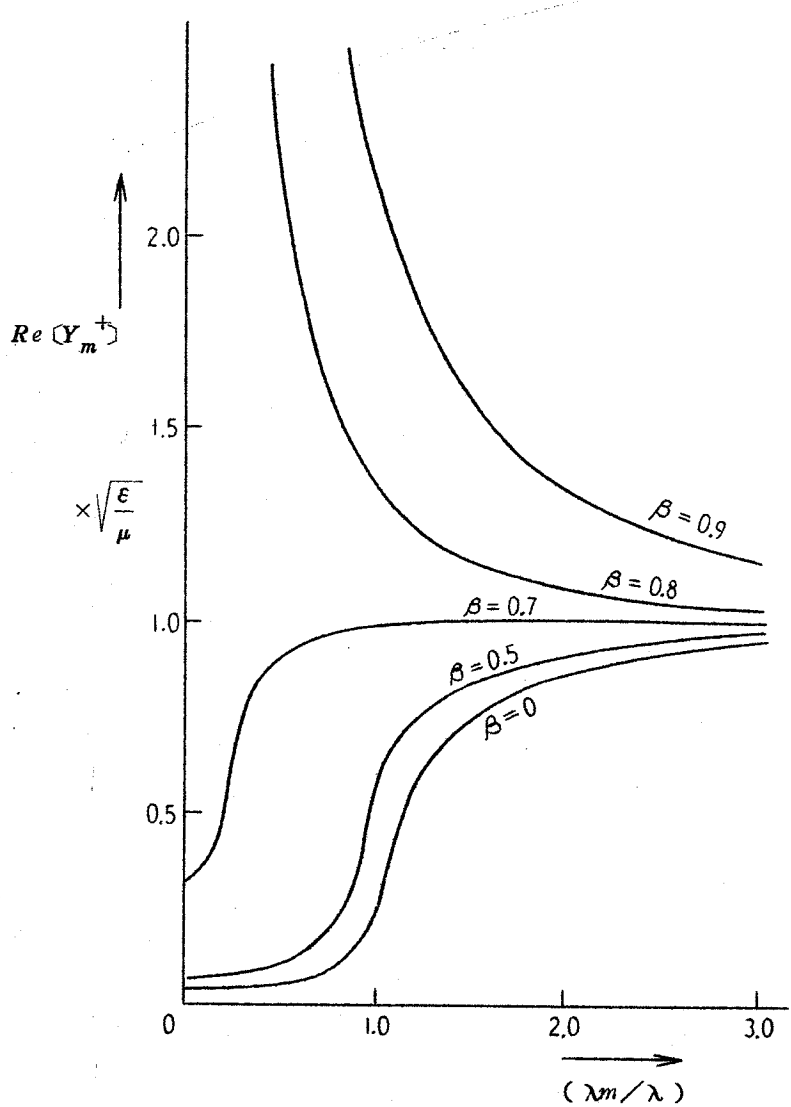

図 6．6　$Re\,[Y_m^+]$ ($n\beta \fallingdotseq 1$, $\tan\delta_0 = 0.3$, $n = \sqrt{2}$)

6．5　エネルギー関係式と波動増幅現象

ここでは，第4章において導かれたエネルギー関係式（4.46）を用いて導波管中を伝搬する波の増幅現象について考察する．

式（4.5a）で与えられる自由電流密度 $\mathbf{J}_f$ は

$$\mathbf{J}_f = \gamma\sigma a\left(1-n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Y_m\right)\mathbf{E}_\perp \tag{6.29}$$

となり，したがって式（4.47b～d）で定義される $\langle W\rangle$，$\langle A\rangle$ および $\langle Q\rangle$ なる量はそれぞれつぎのように求められる．

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma a\left[1-n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Re\,[Y_m]\right]\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.30a}$$

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma a^2\left[\left(1-n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Re\,[Y_m]\right)\left\{n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Re\,[Y_m]-(n^2-1)\gamma^2\beta^2\right\}-\left(n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Im\,[Y_m]\right)^2\right]\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.31a}$$

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma a^2\left[\left(1-n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,Re\,[Y_m]\right)^2+\left(n\beta\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,I_m[Y_m]\right)^2\right]\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.32a}$$

または，

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left(1-\frac{v}{v_p}\right)\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.30b}$$

$$\langle A\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left[\left(1-\frac{v}{v_p}\right)\left(\frac{v}{v_p}\right)-\left(\frac{v}{v_i}\right)^2\right]\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.31b}$$

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{2}\gamma\sigma\left[\left(1-\frac{v}{v_p}\right)^2+\left(\frac{v}{v_i}\right)^2\right]\left|\mathbf{E}_\perp\right|^2 \tag{6.32b}$$

ただし，I_m は複素量の虚数部をとる操作を表わし，また

$$v_p = \frac{\omega}{k_m\,p_m}\quad,\qquad v_i = \frac{\omega}{k_m\,q_m} \tag{6.33a,b}$$

ここで，v_p は導波管中を伝搬する波の位相速度を表わす．上に求められた式(6.30 b)～(6.32 b)は，無限に拡がった導電性運動媒質中を伝搬する平面波の場合の式(6.54 a～c)と同じ形をしている．さて，表6.6は$\langle W \rangle$，$\langle A \rangle$および$\langle Q \rangle$の符号を，p_m，q_mおよび$\langle S_z \rangle$の符号と共にまとめたものである．

表6.6　$\langle W \rangle$，$\langle A \rangle$および$\langle Q \rangle$の符号

	$n\beta < 1$		$n\beta > 1$	
	k_z^-	k_z^+	k_z^-	k_z^+
p_m	負	正または負	正	正または負
q_m	負	正	正	正
$\langle S_z \rangle$	負	正	負	正
$\langle W \rangle$	正	正	負	正
$\langle A \rangle$	負	正または負	負	正または負
$\langle Q \rangle$	正	正	正	正
	$\frac{v}{v_p} < 0$	$\frac{v}{v_p} < 1$	$\frac{v}{v_p} > 1$	$\frac{v}{v_p} < 1$

表6.6から，伝搬定数 k_z^- をもつ波は，$n\beta > 1$ のとき $(v/v_p) > 1$ なる関係を満足し，したがってこのとき波動増幅現象が起こることがわかる．

6.6 結　　言

導電性運動媒質を含む導波管について，媒質の運動速度が光速度に比べて

十分小さいという近似を行なわない厳密解について論じ，近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示した．特に，媒質の運動速度が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき波動増幅の現象が起こることを示し，この現象を第4章で導かれたエネルギー関係式を用いて考察した．

第7章　圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用[59]～[66]

7．1　序　　言

運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題，すなわち運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は，この問題が電磁界理論における基本的な問題の一つであることから，各方面で活発に研究され，*Stolyarov*[45]，*Tai*[46]および*Yeh*[47]，[48]を始めとする多数の人々[49]～[73]による種々の興味深い結果が得られている．ところで，*Tai*あるいは*Yeh*らの解析は損失のない通常の誘電体，もしくは衝突を考慮しないプラズマの場合に限られており，吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は著者ら[59]～[66]，[74]によって初めて考察された．第8章において詳しく述べるように，吸収性運動媒質を取り扱う場合には，その吸収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷による寄与がない非導電性吸収媒質か，あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している導電性吸収媒質かによって取り扱いが異なってくる．本章においては導電性吸収媒質の一例として衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を取り扱い，次章において非導電性吸収媒質の一例として光領域における分散性誘電体媒質を取り扱う．

本章においては，衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を考え，真空中を一様に運動しているこのような半無限プラズマ流体の境界面における平面電磁波と電磁流体波との相互作用について考察する．ただし，入射波がE波の場合および入射波がH波の場合の二つの場合を取り扱い，それぞれの場合について反射係数，透過係数および透過波の伝搬定数などを求め，媒質が運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討する．

7．2　静止プラズマ流体の基本方程式

運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用の問題を論じる前に，まず静止プラズマ流体の基本方程式について考察する．

圧縮性静止プラズマ流体を電気伝導性をもつ1つの連続媒質と考え，電磁流体的に取り扱うとき，その基本方程式はつぎのように書ける．[91]

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} \tag{7.1a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \tag{7.1b}$$

$$\mathbf{J}' = \sigma(\mathbf{E}' + \mu_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{H}') \tag{7.1c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot (\rho' \mathbf{v}') = 0 \tag{7.1d}$$

$$\rho' \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\nabla' P' + \mu_0(\mathbf{J}' \times \mathbf{H}') \tag{7.1e}$$

$$\rho' c_p \frac{DT'}{Dt'} = \frac{DP'}{Dt'} + \frac{\mathbf{J}'^2}{\sigma} \tag{7.1f}$$

$$P' = \rho' R_0 T' \tag{7.1g}$$

ただし，

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla')$$

ここで，ε_0，μ_0は真空の誘電率および透磁率を表わし，σは導電率を表わす．また，$\mathbf{v}'$，ρ'，T'，およびP'はそれぞれ流速，流体密度，温度，および圧力を表わし，R_0およびc_pはそれぞれ気体定数および定圧比熱を表わす．なお，上式においてプライムは媒質の静止座標系に属する量を表わす．ただし，式(7.1e)および(7.1f)において，粘性および熱伝導を無視した．

いま，一定の外部静磁界$\mathbf{H}_0$の中で平衡している密度ρ_0，圧力P_0のプラズマ流体に波動的な変動が起こり，磁界，密度，圧力がそれぞれ$\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$，$\rho_0+\rho'$，P_0+P'になったとする．ここで$\mathbf{H}'$，ρ'，P'はそれぞれ微少変動の部分である．また，電界，電流，流速は平衡の状態では0であるとし，波動のあるときは変動の部分$\mathbf{E}'$，$\mathbf{J}'$，$\mathbf{v}'$だけで，それは微少量であるとする．

この場合に，微少量の二次以上の項を省略すると，基本方程式（7.1）からつぎの線形方程式群が導かれる．

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} \tag{7.2a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} \tag{7.2b}$$

$$\mathbf{J}' = \sigma(\mathbf{E}' + \mu_0 \mathbf{v}' \times \mathbf{H}_0) \tag{7.2c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \rho_0(\nabla' \cdot \mathbf{v}') = 0 \tag{7.2d}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} = -\nabla' P' + \mu_0(\mathbf{J}' \times \mathbf{H}_0) \tag{7.2e}$$

$$P' = a_0^2 \rho' \tag{7.2f}$$

ここで $a_0 = \sqrt{\gamma_0 P_0 / \rho_0}$ は音速を表わし，γ_0 は断熱指数を表わす．また流体圧力と密度の間には断熱過程が成立するものとする．上に得られた線形方程式群（7.2）から，圧縮性静止プラズマ流体中を伝搬する電磁流体波として，電磁 *Alfvén* 波と電磁音波の2種類の波が存在することを示すことができる．このような静止プラズマ流体の水平な境界面に平面電磁波が入射するとき，入射波が *E* 波（電界が入射面に垂直）のときには電磁音波が，入射波が *H* 波（磁界が入射面に垂直）のときには電磁 *Alfvén* 波が励振される．

さてここで外部静磁界の方向を図7.1に示すように x' 軸に平行であるとし，位相項を $e^{j(\omega' t' - k_x'(t) x' - k_z'(t) z')}$ と仮定すれば，線形方程式群(7.2)から，x' z' 平面内を伝搬する *E* 波（ここでは電界が入射面，x' z' 平面に垂直，すなわち y' 軸に平行），および *H* 波（同様に磁界が y' 軸に平行）に対する分散関係式として，それぞれ式（7.3）および（7.4）をうる．

E 波

$$(k_z'(t))^4 + (k_z'(t))^2 \left[(k_x'(t))^2 - k_0'^2 \left(1 - j\frac{1}{m'}\right) \right.$$

$$-\left(1-j\frac{1}{m'}\frac{V_a^2}{c^2}\right)\left\{\frac{\omega'^2}{a_0^2}-(k_x'(t))^2\right\}\Bigg]$$

$$-\left[(k_x'(t))^2-k_0'^2\left(1-j\frac{1}{m'}\right)\right]\left[1-j\frac{1}{m'}\frac{V_a^2}{c^2}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\omega'^2}{a_0^2}-(k_x'(t))^2\right]+k_0'^2\frac{1}{m'^2}\frac{V_a^2}{c^2}$$

$$\cdot\left[\frac{\omega'^2}{a_0^2}-(k_x'(t))^2\right]=0 \qquad (7.3)$$

H 波

$$(k_z'(t))^2\left[1+\frac{V_a^2}{c^2}+jm'\right]+(k_x'(t))^2$$

$$\cdot\left[1+\frac{V_a^2}{c^2}+j\left(m'-\frac{1}{m'}\frac{V_a^2}{c^2}\right)\right]$$

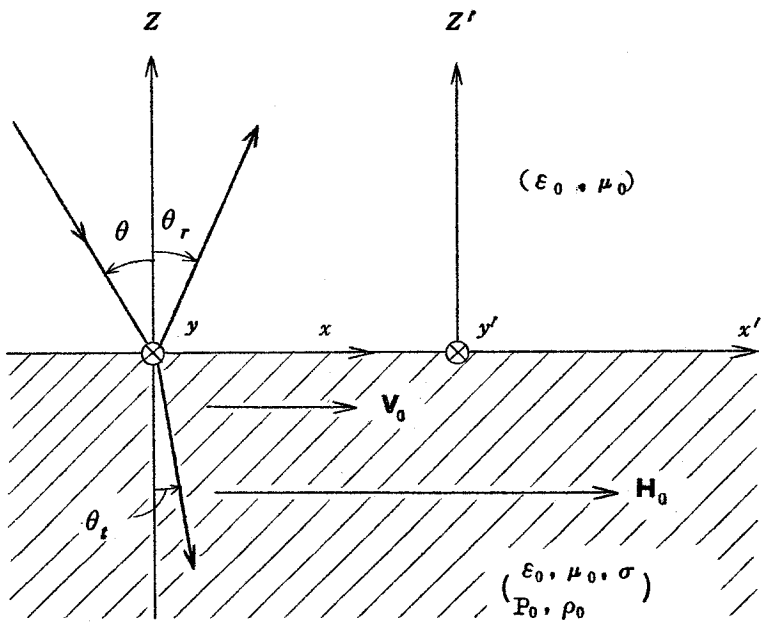

図 7．1　座　標　系

$$-k_0'^2\left(1-j\frac{1}{m'}\right)\left[1+\frac{V_a^2}{c^2}+jm'\right]=0 \qquad (7.4)$$

ただし，繁雑さを避けるため，伝搬定数にはE波およびH波を表わす添字は付けないものとする．なお，式(7.3)，(7.4)において以下の記号を導入した．

$$k_0'=\frac{\omega'}{c}\ ,\qquad m'=\frac{\varepsilon_0\,\omega'}{\sigma}\ ,\qquad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$$V_a=\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}\,H_0=\text{Alfvén 速度}$$

上式(7.3)からわかるように，入射波がE波の場合には，透過波の伝搬定数$k_z'^{(t)}$は一般には4つの解をもつ．しかし，本章の場合のように，半無限媒質中をz'の負の方向に伝搬する波に対しては，そのうち2根を解として選ぶことができ，したがって入射E波に対しては2種類の透過波が励振される．同様にH波の場合には$k_z'^{(t)}$の2つの解のうち1つがz'の負の方向に伝搬する波の伝搬定数として選ばれ，この場合には1種類の透過波が励振される．

7．3　入射波がE波の場合

図7．1に示すように，$z>0$の空間は真空であり，$z<0$の空間は前節で述べたような圧縮性プラズマ流体によって満たされているものとし，プラズマ流体は観測者に対して一定速度V_0でx軸方向に運動しているものとする．いま，真空側から一様な平面波が入射するものとするとし，本節では入射波がE波の場合，すなわち電界が入射面（xz平面）に垂直な場合を取り扱う．このとき，観測者の静止座標系$K(x,\ y,\ z,\ t)$においては，入射波はつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned}E_y^{(i)}&=E_i\,e^{j(\omega t-k_x x-k_z z)}\\H_y^{(i)}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (7.5)$$

ただし，

$$k_x = k_0 \sin\theta, \quad k_z = -k_0 \cos\theta, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

ここで，E_i は場所および時間に無関係な定数であり，ω は入射波の角周波数，θ は入射角を表わす．なお，電磁界の他の成分は上式（7.5）と *Maxwell* 方程式とから求められる．

7．3．1　反射波と透過波

入射波（7.5）は，プラズマ流体の静止座標系 K'（x', y', z', t'）においては，つぎの形に書ける．

$$\left.\begin{aligned} E_y'^{(i)} &= E_i' e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_z' z')} \\ H_y'^{(i)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

入射波（7.6）に対して，K' 系における反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる．

反射波

$$\left.\begin{aligned} E_y'^{(r)} &= E_r' e^{j(\omega' t' - k_x' x' + k_z' z')} \\ H_y'^{(r)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

透過波

$$\left.\begin{aligned} E_{y_1}'^{(t)} &= E_{t_1}' e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_{z1}'^{(t)} z')} \\ H_{y_1}'^{(t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.8a)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{y_2}'^{(t)} &= E_{t2}' e^{j(\omega' t' - k_x' x' - k_{z2}'^{(t)} z')} \\ H_{y_2}'^{(t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.8b)$$

ここで $k_{z1}'^{(t)}$ および $k_{z2}'^{(t)}$ はそれぞれ分散関係式（7.3）から決定される伝搬定数である．以下において，伝搬定数 $k_{z1}'^{(t)}$ をもつ波に属する量には添字 1

をつけ $k_{z_2}'^{(t)}$ をもつ波に属する量には添字2をつけるものとする．

さて，反射波および透過波の振幅 E_r' および E_{t1}'，E_{t2}' は境界条件を用いて決定されるわけであるが，2種類の透過波が存在する場合には，電界および磁界の接線成分連続の条件の他にもう1つの境界条件が必要である．ここでは，もう1つの境界条件として通常よく行なわれているように，剛体境界面の条件（$v_z' = v_{z1}' + v_{z2}' = 0$）を用いる．このとき，$E_r'$，$E_{t1}'$，$E_{t2}'$ はそれぞれつぎのように決定される．

$$E_r' = -E_i' \cdot \frac{k_0'^2 - k_x'^2 + k_{z1}'^{(t)} k_{z2}'^{(t)} - k_z'(k_{z1}'^{(t)} + k_{z2}'^{(t)}) - j\frac{k_0'^2}{m'}}{k_0'^2 - k_x'^2 + k_{z1}'^{(t)} k_{z2}'^{(t)} + k_z'(k_{z1}'^{(t)} + k_{z2}'^{(t)}) - j\frac{k_0'^2}{m'}} \tag{7.9}$$

$$E_{t1}' = E_i' \frac{2k_z'}{k_z'^{(t)} - k_{z2}'^{(t)}} \cdot \frac{k_0'^2 - k_x'^2 - (k_{z2}'^{(t)})^2 - j\frac{k_0'^2}{m'}}{k_0'^2 - k_x'^2 + k_{z1}'^{(t)} k_{z2}'^{(t)} + k_z'(k_{z1}'^{(t)} + k_{z2}'^{(t)}) - j\frac{k_0'^2}{m'}} \tag{7.10a}$$

$$E_{t2}' = E_i' \frac{-2k_z'}{k_{z1}'^{(t)} - k_{z2}'^{(t)}} \cdot \frac{k_0'^2 - k_x'^2 - (k_{z1}'^{(t)})^2 - j\frac{k_0'^2}{m'}}{k_0'^2 - k_x'^2 + k_{z1}'^{(t)} k_{z2}'^{(t)} + k_z'(k_{z1}'^{(t)} + k_{z2}'^{(t)}) - j\frac{k_0'^2}{m'}} \tag{7.10b}$$

つぎに，K系における反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる．

反射波

$$\left.\begin{aligned} E_y^{(r)} &= E_r\, e^{j(\omega^{(r)}t - k_x^{(r)}x + k_z^{(r)}z)} \\ H_y^{(r)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

透過波

$$\left.\begin{aligned} E_{y1}^{(t)} &= E_{t1} e^{j(\omega^{(t)} t - k_x^{(t)} x - k_{z1}^{(t)} z)} \\ H_{y1}^{(t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.12a)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{y2}^{(t)} &= E_{t2} e^{j(\omega^{(t)} - k_x^{(t)} x - k_{z2}^{(t)} z)} \\ H_{y2}^{(t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.12b)$$

式(7.7)，(7.8)および式(7.11)，(7.12)における電磁界諸量は，それぞれ*Lorentz*変換によって関係づけられており，それらの関係式[47]を用いてK系における反射波と透過波の角周波数，伝搬定数，および振幅を求めることができる．

まず，角周波数および伝搬定数は，つぎのように求まる．

$$\omega^{(r)} = \omega^{(t)} = \omega \qquad (7.13a)$$

$$k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x = k_0 \sin\theta \qquad (7.13b)$$

$$k_z^{(r)} = k_z = -k_0 \cos\theta \qquad (7.13c)$$

$$k_{z1}^{(t)} = -k_0(p_1 - jq_1), \qquad (q_1 > 0) \qquad (7.13d)$$

$$k_{z2}^{(t)} = -k_0(p_2 - jq_2), \qquad (q_2 > 0) \qquad (7.13e)$$

ここで，$k_{z1}^{(t)}$および$k_{z2}^{(t)}$は，つぎの四次方程式

$$(k_z^{(t)})^4 + k_0^2(A + jB)(k_z^{(t)})^2 + k_0^4(C + jD) = 0 \qquad (7.14)$$

の根のうち，$q_1 > 0$および$q_2 > 0$の条件を満足するものを取るものとする．ただし，

$$A = -\frac{c^2}{a_0^2}\gamma^2(1 - \beta\sin\theta)^2 - \cos^2\theta + \gamma^2(\sin\theta - \beta)^2$$

$$
\left.
\begin{aligned}
B &= \frac{\gamma}{m(1-\beta\sin\theta)}\left[(1-\beta\sin\theta)^2\left(1+\frac{V_a^2}{a_0^2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{V_a^2}{c^2}(\sin\theta-\beta)^2\right] \\
C &= \left[\frac{c^2}{a_0^2}\gamma^2(1-\beta\sin\theta)-\gamma^2(\sin\theta-\beta)^2\right]\cos^2\theta \\
D &= \frac{-\gamma}{m(1-\beta\sin\theta)}\left[\frac{c^2}{a_0^2}(1-\beta\sin\theta)^2\right. \\
&\quad \left. -(\sin\theta-\beta)^2\right]\left[\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2+\frac{V_a^2}{c^2}\cos^2\theta\right] \\
\beta &= \frac{V_0}{c}, \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad m=\frac{\varepsilon_0\omega}{\sigma}
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.15)
$$

ここで，p_1，q_1およびp_2，q_2は厳密には付録の式（A7．5）および（A7．6）で与えられるが，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{V_a^2}{c^2} \ll 1, \qquad \frac{a_0^2}{c^2} \ll 1 \\
&\frac{V_a^2}{c^2} \ll m, \qquad \frac{a_0^2}{c^2} \ll m
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.16)
$$

の条件がなりたつ場合には，近似的につぎのように表わされる．

$$
\left.
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{c}{a_0}\gamma(1-\beta\sin\theta) \\
q_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{m}\left(\frac{V_a}{c}\right)\left(\frac{V_a}{a_0}\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (7.17a)
$$

$$
p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\theta+\frac{1}{m^2}\frac{V_a^2}{c^2}}^{\,*} \qquad (7.17b)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\sqrt{\left(\cos^2\theta+\frac{1}{m^2}\frac{V_a^2}{c^2}\right)^2+\frac{\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2}{m^2}}\ \Bigg]^{*}\\
q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}&\sqrt{-\left(\cos^2\theta+\frac{1}{m^2}\frac{V_a^2}{c^2}\right)^{*}}\\
&+\sqrt{\left(\cos^2\theta+\frac{1}{m^2}\frac{V_a^2}{c^2}\right)^2+\frac{\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2}{m^2}}\ \Bigg]^{*}
\end{aligned}\right\}\quad(7.17b)
$$

式（7.17a）から，式（7.16）の近似がなりたつ場合には，E波によって運動プラズマ流体中に励振される２種類の透過波のうち，一方は音波であることがわかる．その減衰定数k_0q_1は流体の運動速度および入射角に無関係であり，位相定数k_0p_1に比べて非常に小さい．また，式（7.17b）から，もう一方の透過波の位相定数k_0p_2および減衰定数k_0q_2はともに音速a_0に無関係な量であり，電磁波と$Alfvén$波とが結合した波を表わしていることがわかる．図７．２はβをパラメータとするp_1の数値計算例であり，図７．３はp_2およびq_2の数値計算例である．なお，このときのq_1は０．５である．

つぎに，反射波および透過波の振幅はそれぞれつぎのように求められる．

$$
E_r=E_i\frac{K_{\mathrm{I}}-jL_{\mathrm{I}}}{K_{\mathrm{II}}-jL_{\mathrm{II}}}\qquad(7.18)
$$

$$
E_{t_1}=E_i\frac{2\cos\theta\left[\{\cos^2\theta-(p_2^2-q_2^2)\}\right.}{[(p_1-p_2)-j(q_1-q_2)]}{}^{*}
$$

$$
{}^{*}\frac{\left.+j\left\{2p_2q_1-\frac{\gamma(1-\beta\sin\theta)}{m}\right\}\right]}{[K_{\mathrm{II}}-jL_{\mathrm{II}}]}\qquad(7.19a)
$$

$$
E_{t_2}=E_i\frac{-2\cos\theta\left[\{\cos^2\theta-(p_1^2-q_1^2)\}\right.}{[(p_1-p_2)-j(q_1-q_2)]}{}^{*}
$$

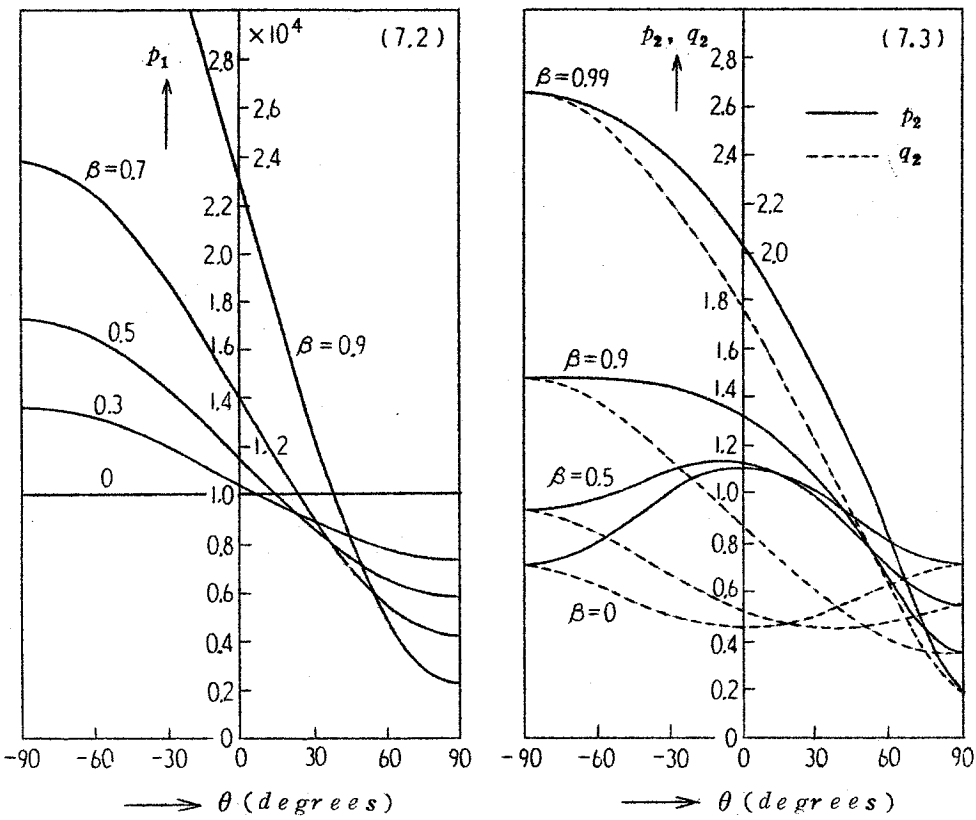

図７．２　βをパラメータとした場合の p_1の変化

（$m = 1$，$V_a / c = 10^{-2}$，$a_0 / c = 10^{-4}$）

図７．３　βをパラメータとした場合の p_2，q_2の変化

（$m = 1$，$V_a / c = 10^{-2}$，$a_0 / c = 10^{-4}$）

$$* \frac{+ j \left\{ 2 p_1 q_1 - \dfrac{\gamma (1 - \beta \sin \theta)}{m} \right\}}{[K_{II} - j L_{II}]} \qquad (7.19b)$$

ただし，

$$K_I = \cos^2\theta + (p_1 p_2 - q_1 q_2) - (p_1 + p_2) \cos \theta$$

$$K_{II} = \cos^2\theta + (p_1 p_2 - q_1 q_2) + (p_1 + p_2) \cos \theta$$

$$L_{\mathrm{I}} = p_1 q_2 + p_2 q_1 + \frac{\gamma(1-\beta \sin\theta)}{m} - (q_1 + q_2)\cos\theta$$

$$L_{\mathrm{II}} = p_1 q_2 + p_2 q_1 + \frac{\gamma(1-\beta \sin\theta)}{m} + (q_1 + q_2)\cos\theta$$

(7.20)

7.3.2　反射係数および透過係数

入射E波に対する反射係数R_Eおよび透過係数T_Eはそれぞれつぎのように定義される．

$$R_E = -\frac{(\mathbf{S}^{(r)}\cdot\mathbf{n})}{(\mathbf{S}^{(i)}\cdot\mathbf{n})} = -\frac{Re(E_y^{(r)} H_x^{(r)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \tag{7.21}$$

$$T_E = \frac{(\mathbf{S}^{(t)}\cdot\mathbf{n})}{(\mathbf{S}^{(i)}\cdot\mathbf{n})}$$

$$= \frac{Re(E_{y1}^{(t)} H_{x1}^{(t)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} + \frac{Re(E_{y2}^{(t)} H_{x2}^{(t)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})}$$

$$+ \frac{Re(E_{y1}^{(t)} H_{x2}^{(t)*} + E_{y2}^{(t)} H_{x1}^{(t)*})}{Re(E_y^{(i)} H_x^{(i)*})} \tag{7.22}$$

ただし，$\mathbf{S}^{(i)}$，$\mathbf{S}^{(r)}$および$\mathbf{S}^{(t)}$はそれぞれ境界面上における入射波，反射波，および透過波の*Poynting*ベクトルの時間平均値を表わし，$\mathbf{n}$は境界面での外向きの単位法線ベクトルを表わす．なお，Reは複素量の実数部を取る操作を表わし，記号*は複素共役ベクトルを表わす．ここで7.3.1に得られた結果を式(7.21)および(7.22)に用いることによって，反射係数および透過係数はそれぞれ次式のように求められる．

$$R_E = \frac{K_{\mathrm{I}}^2 + L_{\mathrm{I}}^2}{K_{\mathrm{II}}^2 + L_{\mathrm{II}}^2} \tag{7.23}$$

$$T_E = \frac{4\cos\theta}{K_{\mathrm{II}}^2 + L_{\mathrm{II}}^2}\Big[(p_1 + p_2)\cos^2\theta + (q_1 + q_2)$$

$$\cdot \frac{\gamma(1-\beta \sin\theta)}{m} + p_1(p_2^2+q_2^2)+p_2(p_1^2+q_1^2)\Big] \tag{7.24}$$

ただしK_{I}，K_{II}，L_{I}，L_{II}は式（7.20）に与えられており，またp_1，q_1およびp_2，q_2はそれぞれ付録の式（A7.5）および（A7.6），あるいは式（7.17）に与えられている．

式（7.23）および（7.24）からつぎの関係式を得る．

$$R_E + T_E = 1 \tag{7.25}$$

上式から，入射波がE波の場合には，反射電力と透過電力との和は入射角と媒質の運動速度のいかんにかかわらず常に入射電力に等しくなることがわかる．

図7．4および図7．5はβをパラメータとした場合の反射係数R_Eの数値計算例であり，図7．6はmをパラメータとした場合の数値計算例である．

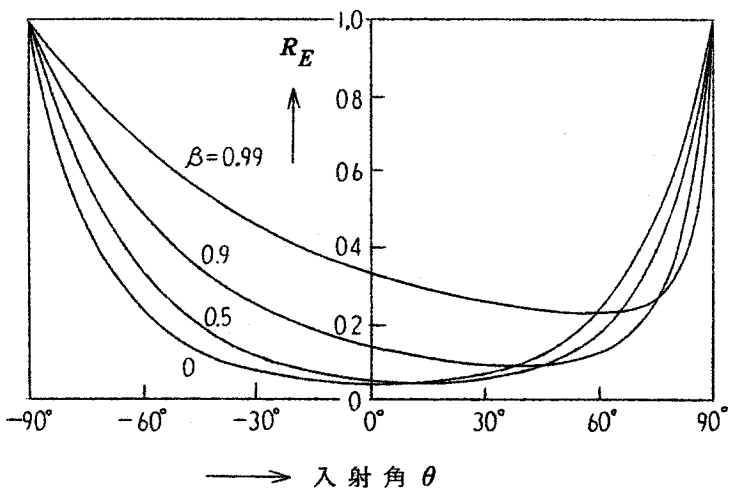

図7．4　反射係数 R_E
（$m=1$，$V_a/c=10^{-2}$，$a_0/c=10^{-4}$）

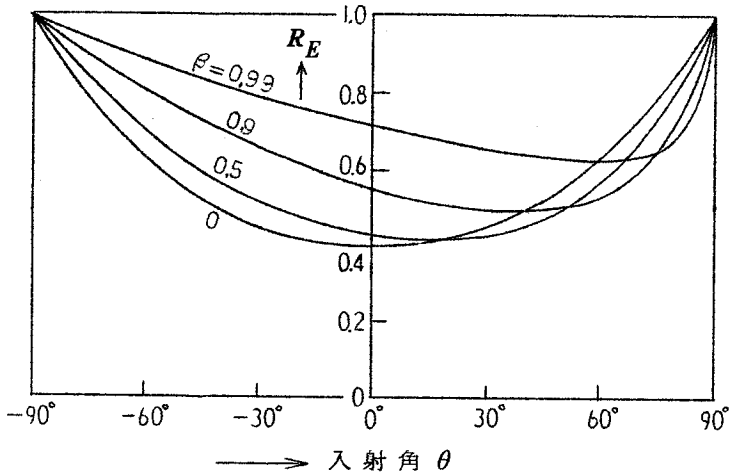

図7．5　反射係数 R_E

（$m = 0.1$，$V_a/c = 10^{-2}$，$a_0/c = 10^{-4}$）

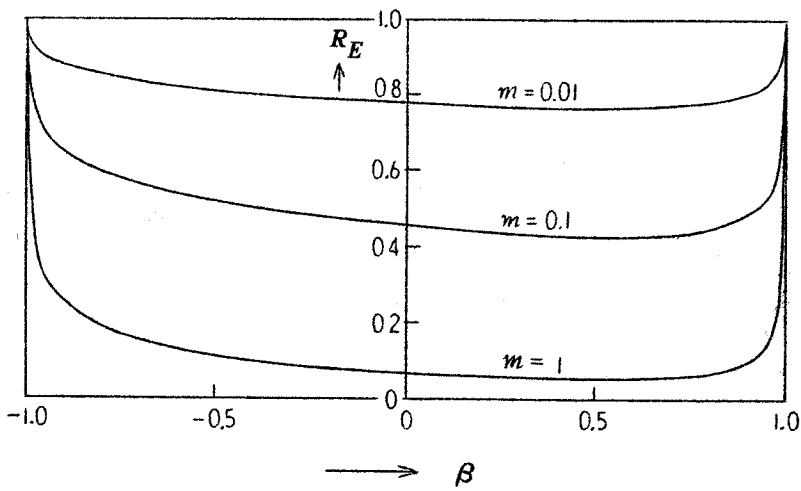

図7．6　反射係数 R_E

（$\theta = 30^\circ$，$V_a/c = 10^{-2}$，$a_0/c = 10^{-4}$）

7．4　入射波がH波の場合

本節においては，入射波がH波の場合，すなわち磁界が入射面に垂直な場合を取り扱う．このとき，入射波はK系においてつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} H_y^{(i)} &= H_i e^{j(\omega t - k_x x - k_z z)} \\ E_y^{(i)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.26)$$

7．4．1　反射波と透過波

7．3．1と同様の手順で，入射波（7.26）をK'系に変換し，K'系において問題を解く．ただし，分散関係式としては式（7.4）を用いる．なお，H波の場合には媒質中に1種類の波しか励振されないので，境界条件としては電界および磁界の接線成分連続の条件を用いれば十分である．K系での反射波および透過波を，

反射波

$$\left.\begin{aligned} H_y^{(r)} &= H_r e^{j(\omega^{(r)} t - k_x^{(r)} x + k_z^{(r)} z)} \\ E_y^{(r)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.27)$$

透過波

$$\left.\begin{aligned} H_y^{(t)} &= H_t e^{j(\omega^{(t)} t - k_x^{(t)} x - k_z^{(t)} z)} \\ E_y^{(t)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.28)$$

とすれば，前節と同様の関係式

$$\omega^{(r)} = \omega^{(t)} = \omega \qquad (7.29a)$$

$$k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x = k_0 \sin\theta \qquad (7.29b)$$

$$k_z^{(r)} = k_z = -k_0 \cos\theta \qquad (7.29c)$$

$$k_z^{(t)} = -k_0(p - jq) \qquad (7.29d)$$

をうる．ただし，

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$P = \cos^2\theta + \frac{V_a^2}{c^2}\,\frac{\gamma^2(\sin\theta - \beta)^2}{\left(1 + \frac{V_a^2}{c^2}\right)^2 + \gamma^2 m^2(1 - \beta\sin\theta)^2}$$

$$Q = -\frac{\gamma(1 - \beta\sin\theta)}{m}\left[1 - \frac{V_a^2}{c^2}\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{(\sin\theta - \beta)^2\left(1 + \frac{V_a^2}{c^2}\right)}{(1 - \beta\sin\theta)^2\left\{\left(1 + \frac{V_a^2}{c^2}\right)^2 + \gamma^2 m^2(1 - \beta\sin\theta)^2\right\}}\right]$$

つぎに，振幅 H_r および H_t はそれぞれつぎのようになる．

$$H_r = H_i\,\frac{\gamma m(1 - \beta\sin\theta)(\cos\theta - p)}{\gamma m(1 - \beta\sin\theta)(\cos\theta + p)} *$$

$$* \frac{-j\,[\cos\theta - q\gamma m(1 - \beta\sin\theta)]}{-j\,[\cos\theta + q\gamma m(1 - \beta\sin\theta)]} \qquad (7.30)$$

$$H_t = H_i\,\frac{\gamma m(1 - \beta\sin\theta)(r - js)}{(\sin\theta - \beta)\,[\gamma m(1 - \beta\sin\theta) + j]}$$

$$\cdot\,\frac{2\gamma m\cos\theta}{\gamma m(1 - \beta\sin\theta)(\cos\theta + p)} *$$

$$* \frac{}{-j\,[\cos\theta + q\gamma m(1 - \beta\sin\theta)]} \qquad (7.31)$$

ただし，

$$r = (1 - \beta\sin\theta)^2\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\gamma^2 m^2} - \frac{\beta pq}{2\gamma m}$$

$$-\beta(p^2-q^2)(1-\beta\sin\theta)$$

$$s=\beta\left[\frac{p^2-q^2}{\gamma m}-2pq(1-\beta\sin\theta)\right]$$

7．4．2　反射係数および透過係数

入射H波に対する反射係数R_Hおよび透過係数T_Hは，式（7.21），（7.22）と同様に次式で定義される．

$$R_H=-\frac{Re(E_x^{(r)}H_y^{(r)*})}{Re(E_x^{(i)}H_y^{(i)*})} \tag{7.32}$$

$$T_H=\frac{Re(E_x^{(t)}H_y^{(t)*})}{Re(E_x^{(i)}H_y^{(i)*})} \tag{7.33}$$

7．4．1で得られた結果を用いて，R_HおよびT_Hはそれぞれつぎのように求められる．

$$R_H=\frac{[\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta-p)]^2}{[\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)]^2}*$$

$$*\frac{+[\cos\theta-q\gamma m(1-\beta\sin\theta)]^2}{+[\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)]^2} \tag{7.34}$$

$$T_H=\frac{4\gamma m(1-\beta\sin\theta)^2\cos\theta}{\sin\theta-\beta}$$

$$\cdot\frac{[p\gamma m(1-\beta\sin\theta)+q]}{[\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)]^2}*$$

$$*\frac{\sin\theta-\beta p\gamma m(p^2+q^2)}{+[\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)]^2} \tag{7.35}$$

さて，プラズマ流体が静止している場合，すなわち$\beta=0$のときには，反射係数および透過係数はつぎのようになる．

$$R_H=\frac{m^2(\cos\theta-p)^2+(\cos\theta-qm)^2}{m^2(\cos\theta+p)^2+(\cos\theta+qm)^2} \tag{7.36}$$

$$T_H = \frac{4m(pm+q)\cos\theta}{m^2(\cos\theta+p)^2+(\cos\theta+qm)^2} \tag{7.37}$$

上式から，この場合にはR_HとT_Hとの和は入射角θのいかんにかかわらず常に1となり，反射電力と透過電力の和は入射電力に等しくなることがわかる．しかし，プラズマ流体が運動している場合，すなわち$\beta \neq 0$のときには，運動している導電性誘電体の場合[62],[63]と同様に，R_HとT_Hとの和は一般には1にはならず，次式で与えられる．

$$R_H + T_H = 1 + \frac{4\gamma m\beta(1-\beta\sin\theta)\cos\theta}{\sin\theta-\beta}$$

$$\cdot \frac{p\gamma m(1-\beta\sin\theta)}{[\gamma m(1-\beta\sin\theta)(\cos\theta+p)]^2} *$$

$$* \frac{[\cos^2\theta-(p^2+q^2)]+q\cos^2\theta}{+[\cos\theta+q\gamma m(1-\beta\sin\theta)]^2} \tag{7.38}$$

式(7.38)の数値計算例として示した図7.9からもわかるように，$0<\beta<1$のとき，R_H+T_Hは，

$$R_H + T_H \left\{ \begin{array}{ll} =1 & (\theta=-\pi/2) \\ >1 & (-\pi/2<\theta<\sin^{-1}\beta) \\ =1 & (\theta=\sin^{-1}\beta) \\ <1 & (\sin^{-1}\beta<\theta<\pi/2) \\ =1 & (\theta=\pi/2) \end{array} \right\} \tag{7.39}$$

となる．上の関係式から，入射角θが$-\pi/2<\theta<\sin^{-1}\beta$の場合には反射電力と透過電力の和は入射電力より大きくなり，$\sin^{-1}\beta<\theta<\pi/2$の場合には入射電力より小さくなることがわかる．ただし，式(7.34)およびその数値計算例として示した図7.7からわかるように，反射係数R_Hはβのいかんにかかわらず決して1を越えることはない．これらのことから，運動プラズマ流体にH波が入射する場合には，透過波とプラズマ流体との間にエネルギーの授受があることが結論される．

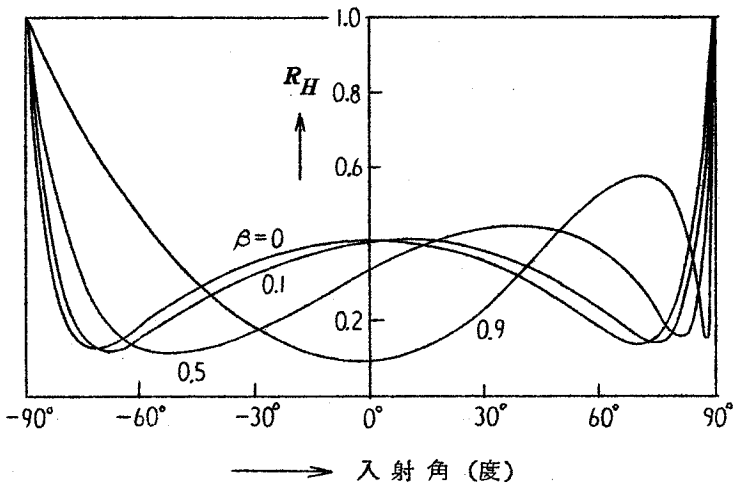

図７．７　反射係数R_H　（$m=0.1$，$V_a/c=10^{-2}$）

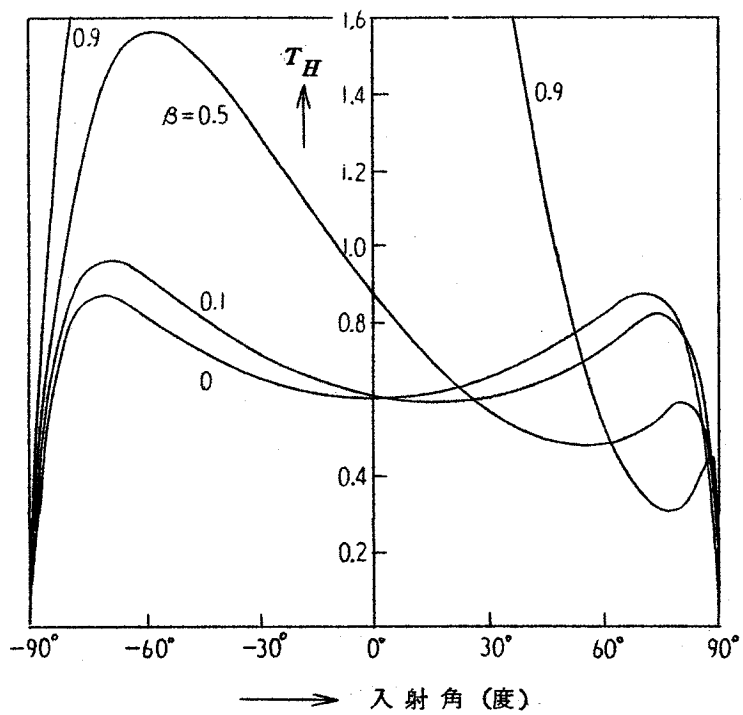

図７．８　透過係数T_H　（$m=0.1$，$V_a/c=10^{-2}$）

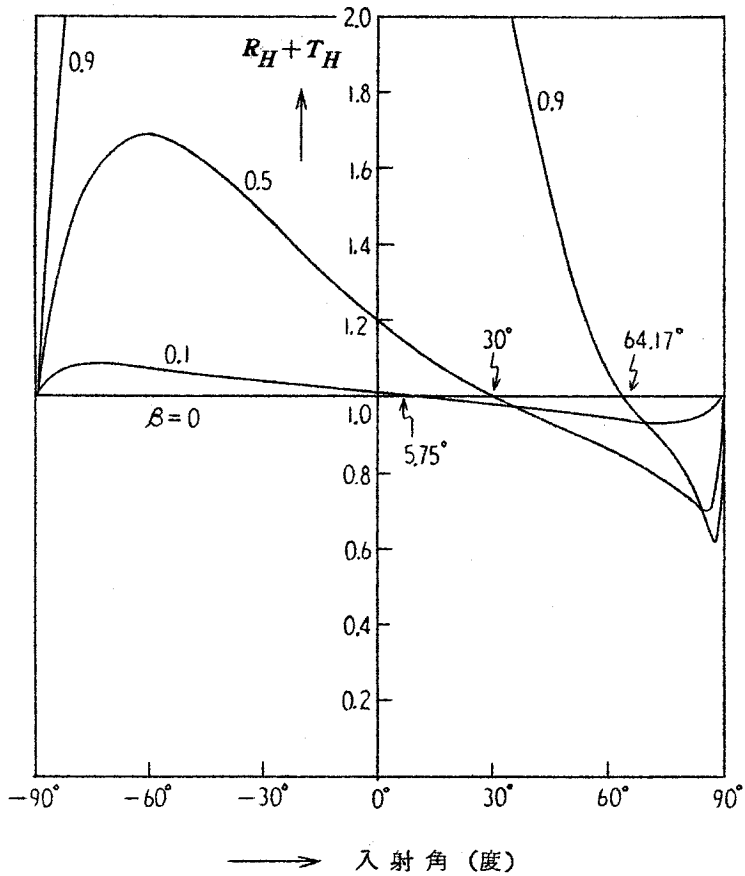

図 7．9　反射係数と透過係数の和　T_H+R_H
（$m=0.1$　$V_a/c=10^{-2}$）

なお，エネルギー関係式（7.38）の右辺第2項が，運動境界面上の表面電荷密度と透過波の電界の速度に平行な成分との相互作用によるものであることは，運動境界面上の境界条件を用いて直接導くことができるが，これに関しては著者らの文献(65)を参照されたい．反射係数R_Hと透過係数T_H，およびそれらの和R_H+T_Hの数値計算例を図7.7～図7.9に示す．

7．5　結　　言

圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用について考察した．入射平面電磁波としては，E波およびH波の２つを考え，それぞれの場合について反射係数，透過係数，および透過波の伝搬定数などを求め，媒質が運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討した．その結果，入射波がE波の場合には反射係数と透過係数の和は常に１となるが，入射波がH波の場合には両係数の和は一般には１とはならないことがわかった．

付　　録

p_1，q_1およびp_2，q_2の厳密な解は，式（7．14）からつぎのような手順で求められる．まず，

$$\left.\begin{aligned} F &= A^2 - B^2 - 4\,C \\ G &= 4\,D - 2\,A\,B \end{aligned}\right\} \qquad (A7.1)$$

とおく．ここでA，B，C，Dは式（7．15）に与えられている．このF，Gを用いてつぎのようにe，fを決める．

$G \geqq 0$のとき，

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{F + \sqrt{F^2 + G^2}} \\ f &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-F + \sqrt{F^2 + G^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A7.2a)$$

$G < 0$のとき，

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{F + \sqrt{F^2 + G^2}} \\ f &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-F + \sqrt{F^2 + G^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A7.2b)$$

さらに，g，h，およびt，uを，

$$\left.\begin{aligned} g &= -A + e \\ h &= B + f \end{aligned}\right\} \qquad (A7.3)$$

$$\left.\begin{aligned} t &= -A - e \\ u &= B - f \end{aligned}\right\} \qquad (A7.4)$$

とすれば，p_1，q_1，およびp_2，q_2はg，h，およびt，uを用いてつぎのように求められる．

$h \geqq 0$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{g + \sqrt{g^2 + h^2}} \\ q_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g + \sqrt{g^2 + h^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A7.5a)$$

$h < 0$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{g + \sqrt{g^2 + h^2}} \\ q_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{-g + \sqrt{g^2 + h^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A7.5b)$$

および

$u \geqq 0$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{t + \sqrt{t^2 + u^2}} \\ q_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{-t + \sqrt{t^2 + u^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (A7.6a)$$

$u < 0$ のとき，

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{t + \sqrt{t^2 + u^2}} \\ q_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{-t + \sqrt{t^2 + u^2}} \end{aligned}\right\}$$

上式（$A7.5$）および（$A7.6$）から，式（7.6）の近似がなりたつ場合には，$h \geqq 0$，$u \geqq 0$ となり，p_1，q_1およびp_2，q_2はそれぞれ式（7.17a），（7.17b）のようになる．

第8章　異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用[74]

8.1　序　　言

近年，科学技術の進歩に伴って高性能の電磁波の検出器が開発され，観測される波長領域が急速に拡大されつつあり，赤外線天文学ないしはX線天文学は電波天文学のなかでも重要な位置を占めつつある．特に，1966年に初めて赤外線星が発見されてから，赤外線による宇宙観測は非常に豊富な成果を生みつつある．[92]一方，このような電波天文学あるいは宇宙工学の急速な進歩に伴い，相対論的電磁界理論は工学の分野における重要な研究課題となり，すでに数多くの研究成果が報告されている．例えば，7.1において述べたように運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は，数多くの人々によって研究され幾多の興味深い結果が報告されている．しかし，従来の研究は，運動媒質と比較的低周波の電磁波との相互作用の問題に限られており，赤外線あるいは紫外線等の光波との相互作用の問題を取り扱う場合にはそのまま適用できない．

そこで，本章では，真空中を境界面と入射面の両者に平行に運動している半無限の分散性誘電体媒質と平面光波との相互作用の問題を，媒質中の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い，従来の場合とは異なった種々の興味ある現象が現われることを示す．特に，異常分散領域における光波と媒質の相互作用については，数値計算例をあげて詳しく検討し，媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにする．

8.2　導電性吸収媒質と非導電性吸収媒質

静止媒質中の電磁界を記述する巨視的な*Maxwell*方程式は，微視的な*Maxwell*方程式を平均化することによって直接得られつぎのようにかける．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.1a}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{J} \tag{8.1b}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{8.1c}$$

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho \tag{8.1d}$$

ただし，$\mathbf{E}$および$\mathbf{B}$は電界の強さおよび磁束密度を表わし，ε_0およびμ_0はそれぞれ真空中の誘電率および透磁率を表わす．ここで，媒質中において原子核に束縛された電子すなわち束縛電子の電荷密度および電流密度をそれぞれρ_{bound}および$\mathbf{J}_{bound}$で表わし，原子核に束縛されない電子，すなわち自由電子の電荷密度および電流密度をそれぞれρ_{free}および$\mathbf{J}_{free}$で表わせば，式(8.1)に含まれるρおよび$\mathbf{J}$はそれぞれつぎのように表わされる．

$$\rho=\rho_{bound}+\rho_{free} \tag{8.2a}$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{bound}+\mathbf{J}_{free} \tag{8.2b}$$

以上，媒質中の荷電粒子として電子のみを考慮したが，イオンが存在するときには，その振動ももちろん媒質の光学的性質に寄与するが，この種の粒子の共鳴振動数は小さいので，特に赤外の領域において重要である．したがって，赤外領域における光学的性質が問題となるような場合には，電子の振動のかわりにイオンの振動を考慮すればよい．さて，ρ_{bound}および$\mathbf{J}_{bound}$は，媒質の電気分極ベクトル$\mathbf{P}$および磁気分極ベクトル$\mathbf{M}$を導入することによってつぎのように表わされる．

$$\rho_{bound}=-\nabla\cdot\mathbf{P} \tag{8.3a}$$

$$\mathbf{J}_{bound}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M} \tag{8.3b}$$

ここで，媒質に吸収がある場合，その吸収を束縛電荷による吸収と自由電荷による吸収とに分けて考え，自由電荷に基づく吸収が存在する場合にはその媒質を“導電性吸収媒質”と呼び，たとえ媒質が吸収性であっても，その吸

収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷の寄与がない場合にはこの媒質を“非導電性吸収媒質”と呼ぶことにする．もちろん，媒質中には，一般には束縛電荷および自由電荷が同時に存在し，したがって両者を完全に分離して考えることはできないが，自由電荷による寄与が束縛電荷による寄与に比べて無視出来るほどに小さくなる周波数領域が存在するとき，その周波数領域において，この媒質は非導電性吸収媒質と呼ぶことができる．

つぎに，電束密度**D**および磁界の強さ**H**を

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M} \tag{8.4a,b}$$

によって導入すれば*Maxwell* の方程式（8.1）は

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.5a}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}_{free} \tag{8.5b}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{8.5c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{free} \tag{8.5d}$$

となる．なお，媒質の誘電率εおよび透磁率μを導入することによって式（8.4*a*）および（8.4*b*）はそれぞれつぎのように表わされる．

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \tag{8.6a,b}$$

上式（8.5*a*）および（8.5*b*）から，媒質が静止している場合には自由電荷の存在の有無にかかわらず，電磁界**E**および**H**の接線成分は境界面においてそれぞれ連続になる．[93] さて，*Minkowski* によれば，式（8.5*a*）～（8.5*d*）の形の*Maxwell* 方程式が*Lorentz* 変換のもとに共変的であり，したがって運動媒質中においても式（8.5*a*）～（8.5*d*）の形の*Maxwell* 方程式がそのままなりたつ．[90] このことから，真空中を境界面に平行に運動している媒質

に対して，たとえ媒質が吸収性であってもそれが束縛電荷のみの寄与によるものであれば，境界面上において電磁界の接線成分が連続となり，したがって境界面上における反射係数と透過係数の和が常に1となることを証明することができる（次節以降参照）。また自由電荷が媒質の吸収に寄与しているときには，境界面上において磁界の接線成分が一般には不連続となり，したがって反射係数と透過係数の和が1とはならないことは，著者らによって報告されている。[65]

このように，運動している吸収性媒質を取り扱うときには，その吸収が束縛電荷のみによるものであり，自由電荷による寄与がない（非導電性吸収媒質）か，あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している（導電性吸収媒質）かを明確に区別する必要がある。

8．3　分散性誘電体媒質と光波との相互作用

8．3．1　静止媒質の光学的性質

運動媒質と平面光波との相互作用の問題を論じる前に，まず静止媒質の光学的性質について考察する。無限に拡がった非導電性の分散性誘電体媒質を考える。したがって，媒質中には自由電荷は存在しないものとする。さらに，媒質は等方性であると仮定する。このとき，角周波数ω'の電界$\mathbf{E}'$の中での電子の定常的な調和振動に対して，電気分極ベクトル$\mathbf{P}'$は次式で与えられる。[94]

$$\mathbf{P}' = \frac{N(e^2/m)}{\omega_0^2 - \omega'^2 + jg\omega'}\mathbf{E}' \tag{8.7}$$

ただし，プライム記号は媒質の静止座標系$K'(x', y', z', t')$における電磁界量であることを表わす。なお，

m＝電子の質量

e＝電子の電荷量

N＝単位体積中の束縛電子の数

ω_0＝電子の共鳴角周波数（固有振動数）

g＝媒質の吸収係数

電子の固有振動数ω_0は通常遠紫外部にあるが，比較的低周波の領域（マイクロ波領域～赤外領域）における光学的性質が問題となる場合には，電子のかわりにイオンの振動を考え，式（8.7)における$N(e^2/m)$を$(N/f)[(fe)^2/M]$とすればよい。[94] ただしfはイオンの原子価数であり，Mはイオンの換算質量を表わす。さて，この媒質の誘電率をεとすれば（本章においては，透磁率は真空の透磁率に等しいと仮定する。したがって，常に$\mu=\mu_0$とおく），式（8.4a），（8.6a）および（8.7)から次式を得る。

$$\varepsilon=\varepsilon_0\left[1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2+jg\omega'}\right] \tag{8.8}$$

ただし，

$$\omega_p^2=\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \tag{8.9}$$

ここで，この媒質中を伝搬する平面光波の伝搬定数をk'とすれば，

$$k'^2=\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)=k_0^2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \tag{8.10}$$

であるから

$$k'^2=k_0^2\left[1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2+jg\omega'}\right] \tag{8.11}$$

となる。ただし，式（8.10）におけるcは真空中の光速度を表わす。なお屈折率をn'_aとすれば次式がなりたつ。

$$n_a'^2=\left(\frac{k'}{k_0}\right)^2=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega'^2+jg\omega'} \tag{8.12}$$

ただし，添字aは吸収（*absorption*）性媒質の屈折率であることを表わす。

8．3．2　運動媒質と光波との相互作用

つぎに，真空中を一様に運動しているこのような媒質と光波との相互作用の問題を取り扱う。図8．1に示すように$z>0$の空間は真空（ε_0，μ_0）で

あり，$z<0$の空間は分散性誘電体媒質（ε，μ_0）によって満されていをものとし，媒質は観測者に対して一定速度vでx軸方向に運動しているものとする。いま真空側から一様な平面光波が入射するものとし，波はE波（電界

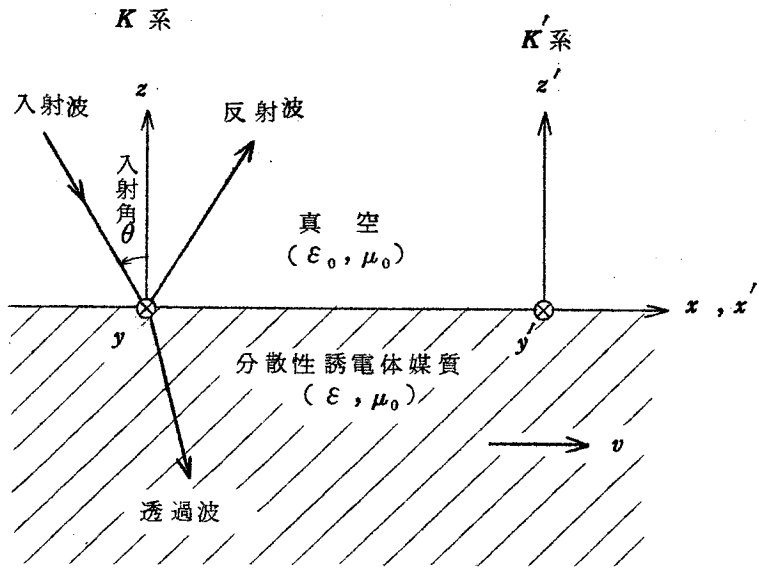

図８．１　座　標　系

が入射面に垂直な場合）もしくはH波（磁界が入射面に垂直な場合）であるとする。このとき，観測者の静止座標系K（x，y，z，t）においては，入射波はつぎのように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(i)} \\ H_y^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_i \\ H_i \end{Bmatrix} exp[j(\omega t - k_x x - k_z z)] \qquad (8.13\,{}^{a}_{b})$$

$$\begin{Bmatrix} H_y^{(i)} \\ E_y^{(i)} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (8.14\,{}^{a}_{b})$$

ただし，

$$k_x = k_0 \sin\theta \quad , \quad k_z = -k_0 \cos\theta \tag{8.15}$$

ここで，式(8.13a)，(8.14a)はE波を表わし，式(8.13b)，(8.14b)はH波を表わす。これらの式において，E_i，H_iはともに場所および時間に無関係な定数であり，ωは入射波の角周波数，θは入射角を表わす。つぎにK系における反射波および透過波はそれぞれつぎのようにかける。

反射波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(r)} \\ H_y^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_r \\ H_r \end{Bmatrix} \exp[j(\omega t - k_x x + k_z z)] \tag{8.16 a/b}$$

$$\begin{Bmatrix} H_y^{(r)} \\ E_y^{(r)} \end{Bmatrix} = 0 \tag{8.17 a/b}$$

透過波

$$\begin{Bmatrix} E_y^{(t)} \\ H_y^{(t)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_t \\ H_t \end{Bmatrix} \exp[j(\omega t - k_x x - k_z^{(t)} z)] \tag{8.18 a/a}$$

$$\begin{Bmatrix} H_y^{(t)} \\ E_y^{(t)} \end{Bmatrix} = 0 \tag{8.19 a/b}$$

さて，K系における入射波(8.13)，(8.14)を*Lorentz*変換を用いてK'系に移し，K'系において通常の方法によって解を求め，得られた解をK系に移すことによってK系における反射波(8.16)，(8.17)および透過波(8.18)，(8.19)における未知係数(E_r，E_t)あるいは(H_r，H_t)をE_iあるいはH_iの関数として決定することができる。また，透過波の伝搬定数$k_z^{(t)}$は，関係式

$$\left(k_z^{(t)}\right)^2 = \left(k_z'^{(t)}\right)^2 = k'^2 - k_x'^2 \tag{8.20}$$

に，式（8.11）および変換式

$$k_x' = \gamma(k_x - \beta k_0) = \gamma k_0(\sin\theta - \beta) \tag{8.21a}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - v k_x) = \gamma\omega(1 - \beta\sin\theta) \tag{8.21b}$$

ただし，

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8.22}$$

を代入することによって求められる．いま，$k_z^{(t)}$を位相係数pと減衰係数qを用いて

$$k_z^{(t)} = \mp k_0(p - jq) \tag{8.23}$$

のごとく表わすとき，pおよびqはそれぞれつぎのように決定される．

$$p = [\{P + (P^2 + Q^2)^{1/2}\}/2]^{1/2} \tag{8.24a}$$

$$q = [\{-P + (P^2 + Q^2)^{1/2}\}/2]^{1/2} \tag{8.24b}$$

ただし，

$$P = \cos^2\theta + \frac{a}{a^2 + b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2(1 - \beta\sin\theta)^2 \tag{8.25a}$$

$$Q = \frac{b}{a^2 + b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2(1 - \beta\sin\theta)^2 \tag{8.25b}$$

ここで，

$$a = 1 - M_0^2\gamma^2(1 - \beta\sin\theta)^2 \tag{8.26a}$$

$$b=\left(\frac{M_0}{M_g}\right)M_0\gamma(1-\beta\sin\theta) \tag{8.26b}$$

$$M_0=\frac{\omega}{\omega_0}\ ,\quad M_p=\frac{\omega}{\omega_p}\ ,\quad M_g=\frac{\omega}{g} \tag{8.27a,b,c}$$

なお，式(8.27a)〜(8.27c)から，(M_0/M_p)および(M_0/M_g)はそれぞれ

$$\frac{M_0}{M_p}=\frac{\omega_p}{\omega_0}\ ,\quad \frac{M_0}{M_g}=\frac{g}{\omega_0} \tag{8.28a,b}$$

となり，したがって周波数ωに無関係な定数であることがわかる．つぎに，運動媒質中の屈折率n_aを静止媒質中の屈折率にならって，

$$n_a=\frac{k}{k_0}=\frac{[(k_z^{(t)})^2+k_x^2]^{1/2}}{k_0} \tag{8.29}$$

で定義するとき，n_aはつぎのように求められる．

$$n_a=n-j\kappa \tag{8.30}$$

ここで，

$$n=[\{U+(U^2+V^2)^{1/2}\}/2]^{1/2} \tag{8.31a}$$

$$\kappa=[\{-U+(U^2+V^2)^{1/2}\}/2]^{1/2} \tag{8.31b}$$

ただし，U，Vは次式で定義される．

$$n_a^2=U-jV \tag{8.32}$$

ここで，

$$U=1+\frac{a}{a^2+b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2 \tag{8.33a}$$

$$V=\frac{b}{a^2+b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2 \tag{8.33b}$$

つぎに，反射係数および透過係数を求める．反射係数Rおよび透過係数Tをそれぞれ，境界面上における反射波と入射波，および透過波と入射波との*Poynting*ベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義すればRおよびTはそれぞれつぎのようにかける．

$$R=-\left[\frac{\mathbf{S}^{(r)}\cdot\mathbf{i}_z}{\mathbf{S}^{(i)}\cdot\mathbf{i}_z}\right]=-\left[\frac{Re(\mathbf{E}^{(r)}\times\mathbf{H}^{(r)*})\cdot\mathbf{i}_z}{Re(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(i)*})\cdot\mathbf{i}_z}\right] \tag{8.34a}$$

$$T=\left[\frac{\mathbf{S}^{(t)}\cdot\mathbf{i}_z}{\mathbf{S}^{(i)}\cdot\mathbf{i}_z}\right]=\left[\frac{Re(\mathbf{E}^{(t)}\times\mathbf{H}^{(t)*})\cdot\mathbf{i}_z}{Re(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(i)*})\cdot\mathbf{i}_z}\right] \tag{8.34b}$$

ただし，$\mathbf{S}^{(i)}$，$\mathbf{S}^{(r)}$および$\mathbf{S}^{(t)}$はそれぞれ入射波，反射波および透過波の境界面上における*Poynting*ベクトルの時間平均値を表わし，$\mathbf{i}_z$はz方向の単位ベクトルを表わす．なおR_eは複素量の実部をとる操作を表わし，記号*は複素共役ベクトルを表わす．反射係数および透過係数を上式のように定義すれば，入射E波およびH波に対する反射係数と透過係数はそれぞれつぎのように求められる．

$$R_E=\frac{(\cos\theta-p)^2+q^2}{(\cos\theta+p)^2+q^2} \tag{8.35a}$$

$$T_E=\frac{4p\cos\theta}{(\cos\theta+p)^2+q^2} \tag{8.35b}$$

および，

$$R_H=\frac{(\varepsilon_r\cos\theta-p)^2+(\varepsilon_i\cos\theta-q)^2}{(\varepsilon_r\cos\theta+p)^2+(\varepsilon_i\cos\theta+q)^2} \tag{8.36a}$$

$$T_H=\frac{4(p\varepsilon_r+q\varepsilon_i)\cos\theta}{(\varepsilon_r\cos\theta+p)^2+(\varepsilon_i\cos\theta+q)^2} \tag{8.63.b}$$

ただし，

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\varepsilon_r-j\varepsilon_i \tag{8.37}$$

ここで，

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{a}{a^2 + b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \qquad (8.38a)$$

$$\varepsilon_i = \frac{b}{a^2 + b^2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right) \qquad (8.38b)$$

上式（8.35）および（8.36）から，次式を得る．

$$R_E + T_E = 1 \quad , \quad R_H + T_H = 1 \qquad (8.39a, b)$$

したがって，運動している媒質が吸収性であっても非導電性の場合には，反射係数と透過係数の和は常に 1 に等しいことがわかる．

8．3．3　分散曲線に関する考察

式（8.33a）および（8.33b）の示す曲線，すなわち（M_0, U）曲線および（M_0, V）曲線を（標準形の）分散曲線と呼び，特に，（M_0, V）曲線を吸収曲線と呼ぶ．ここでは，媒質の運動が分散曲線に与える影響について考察する．

式（8.33a）から明らかなように，（M_0, U）曲線は

$$M_0 = \alpha\left[1 \mp \left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right]^{1/2} \qquad (8.40)$$

だだし，

$$\alpha = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \sin\theta)} \qquad (8.41)$$

において極値をもつ．極（最）大値および極（最）小値をそれぞれ U_{max} および U_{min} とすれば，

$$U_{max} = 1 + \frac{\alpha^{-2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\left[2 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right]} \qquad (8.42a)$$

$$U_{min}=1-\frac{\alpha^{-2}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\left[2+\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right]} \tag{8.42b}$$

となる。(M_0, U)曲線においてUの値が周波数M_0と共に増加する領域を正常分散領域，減少する領域を異常分散領域と呼ぶが，式(8.40)から異常分散領域の幅ΔM_0は

$$\Delta M_0=\alpha\left[\left\{1+\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right\}^{1/2}-\left\{1-\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right\}^{1/2}\right] \tag{8.43}$$

となり，したがって媒質が静止している場合に比べてα倍になることがわかる。また，(M_0, V)曲線は式(8.33b)から直ちに分るように

$$M_0=\alpha\left[\frac{\left\{2-\left(\frac{M_0}{M_g}\right)^2\right\}+\sqrt{\left\{2-\left(\frac{M_0}{M_g}\right)^2\right\}^2+12}}{6}\right]^{1/2} \tag{8.44}$$

において極(最)大値V_{max}をとる。

ここで，(M_0/M_g)は小さな値とし，$(M_0/M_g)^2$は(M_0/M_g)に比べて無視でき，また必要な場合には(M_0/M_g)を1に比べて無視できるものとすると，式(8.40)，(8.42)，(8.43)から明らかなように(M_0, U)曲線は

$$M_0=\alpha\left[1\mp\frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right] \tag{8.45}$$

において，極値

$$U_{max}=1+\frac{\alpha^{-2}}{2}\frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \tag{8.46a}$$

$$U_{min}=1-\frac{\alpha^{-2}}{2}\frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \tag{8.46b}$$

をもつ。したがって，異常分散領域の幅 ΔM_0は

$$\Delta M_0=\alpha\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \tag{8.47}$$

となる。また，このような近似を行えば

$$M_0=M_{or}=\alpha \tag{8.48}$$

において，$U=1$ となり，このとき (M_0, V) 曲線は極（最）大値

$$V_{max}=\alpha^{-2}\frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \tag{8.49}$$

となる。なお，(M_0, V)曲線は，(M_0, U) 曲線が極値をとるM_0において

$$V=\frac{1}{2}V_{max} \tag{8.50}$$

となり，したがって (M_0, V) 曲線の半値幅は異常分散領域の幅 ΔM_0に等しくなる。図８．２は，これらの様子を示したものである。

以上のことから，(M_0/M_g)が十分小さい場合には，媒質が運動することによって，固有振動数は媒質が静止しているときの固有振動数 ω_0に比べて α 倍になり，また，(M_0, U) 曲線における異常分散領域の幅 ΔM_0，したがって (M_0, V) 曲線における半値幅も媒質が静止しているときのそれに比べて α 倍になることがわかる。また，式(8.46a)，(8.46b)および(8.49)から

$$\Delta U=U_{max}-U_{min}=V_{max} \tag{8.51}$$

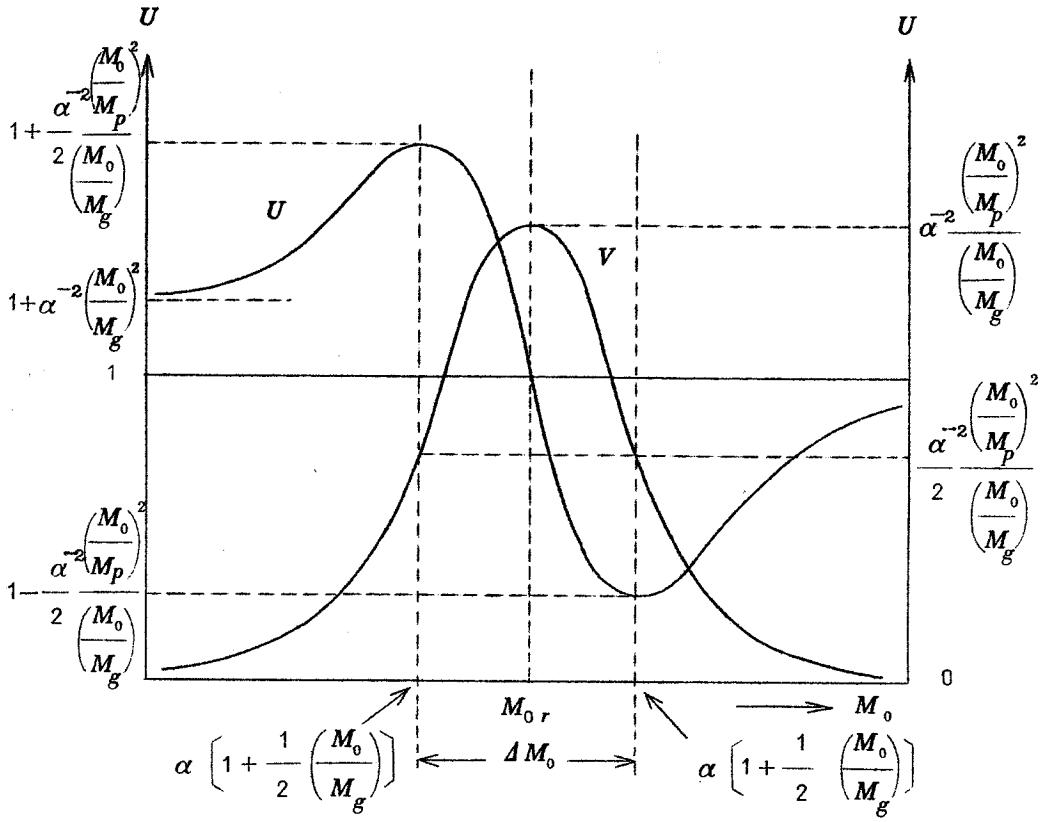

図８．２　分　散　曲　線

なる関係があり，ΔM_0が，媒質が静止しているときのα倍になるとき，異常分散領域の長さΔUは（$1/\alpha^2$）倍になることがわかる．

つぎに，異常分散領域の幅ΔM_0の速度依存性について考察する．式（8.47）からわかるようにΔM_0の速度依存性は係数αの速度依存性に等しい．αは式（8.41）に与えられているが，この式より$\sin\theta \leqq 0$のときαは速度βの増加と共に1から0まで単調に減小し，また，$\sin\theta > 0$のときには，$\beta = \sin\theta$において極大値$\alpha_{max} = \sec\theta$をもつことがわかる．したがって，$\Delta M_0$は$\sin\theta \leqq 0$のときは，$\beta$の増加と共に（$M_0/M_g$）から0に単調に減少し，$\sin\theta > 0$のときには$\beta = \sin\theta$において極大値

$$(\Delta M_0)_{max}=\left(\frac{M_0}{M_g}\right)\sec\theta \qquad (8.52)$$

図８．３は，この様子を表わしたものである．

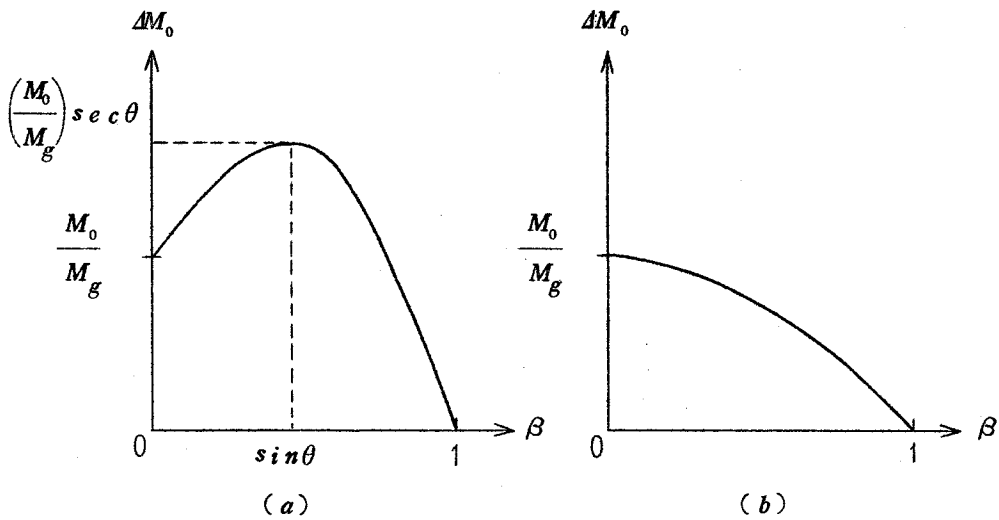

図８．３　ΔM_0の速度依存性
$(a)\sin\theta>0$，$(b)\sin\theta\leqq 0$

さて，無限に拡がった運動媒質中を平面光波が，媒質の運動速度に平行な方向に伝搬する場合の分散曲線の性質は上に得られた式(8.40)〜(8.52)において$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$とおくことによって求められるが，媒質の吸収が十分小さい場合には式(8.45)〜(8.52)からつぎのことがわかる．まず，媒質の運動方向と逆の方向に伝搬する場合($\theta=-\pi/2$)には，

$$\Delta M_0=\alpha\left(\frac{M_0}{M_g}\right)=M_{or}\left(\frac{M_0}{M_g}\right)=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \qquad (8.53)$$

となり，したがってβが0から1まで増加するとき，共鳴点M_{or}は1から0まで，また異常分散領域の幅ΔM_0は(M_0/M_g)から0までそれぞれ単調に減少する．すなわち，媒質の運動によって共鳴点は振動数の低い方へずれ，また

異常分散領域の幅はせまくなる。つぎに，媒質の運動方向に伝搬する場合（$\theta=\pi/2$）には，

$$\Delta M_0=\alpha\left(\frac{M_0}{M_g}\right)=M_{or}\left(\frac{M_0}{M_g}\right)=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \tag{8.54}$$

となり，したがってβが0から1に増加するとき，M_{or}は1から∞に，またΔM_0は(M_0/M_g)から∞に，それぞれ単調増加する。すなわち，媒質の運動によって，共鳴点は振動数の高い方へずれ，また異常分散領域の幅はひろがることがわかる。

8．4　検討および数値計算例

図8.4および図8.5は，異常分散領域を表わす（M_0, U）曲線および吸収曲線（M_0, V）曲線の数値計算例である。両図において，$(M_0/M_g)=0.01$, $(M_0/M_p)=0.1$であり，入射角は（a）$\theta=0°$,（b）$\theta=45°$である。これらのパラメータの値は以下の図8.6～8.8においても同様である。ただし，図8.4（a）～（b）において横軸はM_0のかわりに(M_0-M_{or})をとってあり，したがって横軸が0の点は$M_0=M_{or}$なる点（共鳴点）を表わす。なお，媒質の運動速度の変化に伴う共鳴点M_{or}の移動は図の下部に別に示してある。図8.5～8.8および図8.10においても横軸は(M_0-M_{or})であるが，共鳴点M_{or}の移動を示す図8.4（a）～（b）と同様であるので省略してある。さて，図8.4（a）および8.5（a）は，$\theta=0°$のときは，式（8.47）で与えられる異常分散領域の幅，したがって吸収曲線の半値幅ΔM_0が，媒質の運動速度の増加と共にせまくなり，同時に式（8.51）で表わされる$\Delta U=U_{max}-U_{min}=V_{max}$なる値が増加する様子を示している。また，図8.4（b）および8.5（b）は，$\theta=45°$のときには，ΔM_0が$\beta=sin(45°)=1/\sqrt{2}$において極大となり，同時に$\Delta U=V_{max}$の値はこのとき極小となる様子を示している。図8.6～8.7は，それぞれ式（8.24a）および（8.24b）で表わされる位相係数pおよび減衰係数qの数値計算例である。図8.8は，式（8.35a）で与えられる入射E波に対する反射係数R_Eの数値計算例である。図8.7および図8.8から，吸収が極大になる

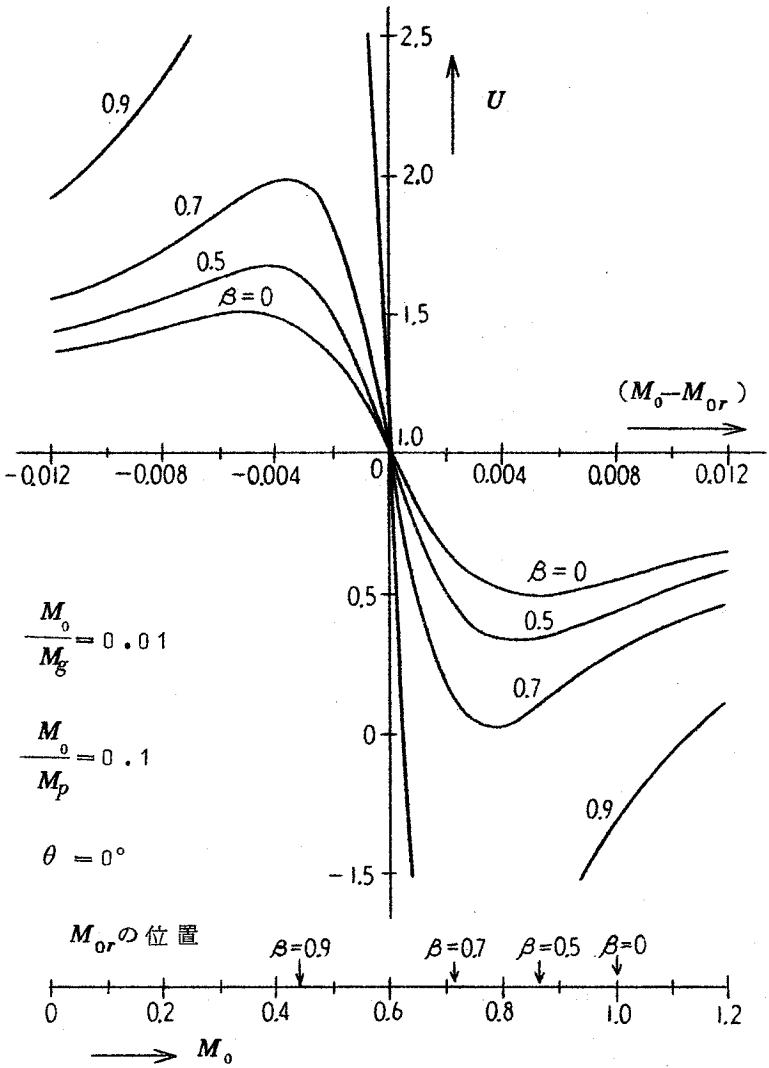

図 8.4(a)　異常分散領域（$\theta = 0°$）

点と反射係数が極大になる点は一致せず，吸収が極大になる周波数よりもやや高い周波数において反射係数が極大になることがわかる。これらの様子は式（8.36a）で与えられる入射H波に対する反射係数R_Hに対しても同様である。図8.9は，横軸を入射角θとした場合の入射E波に対する反射係数R_E

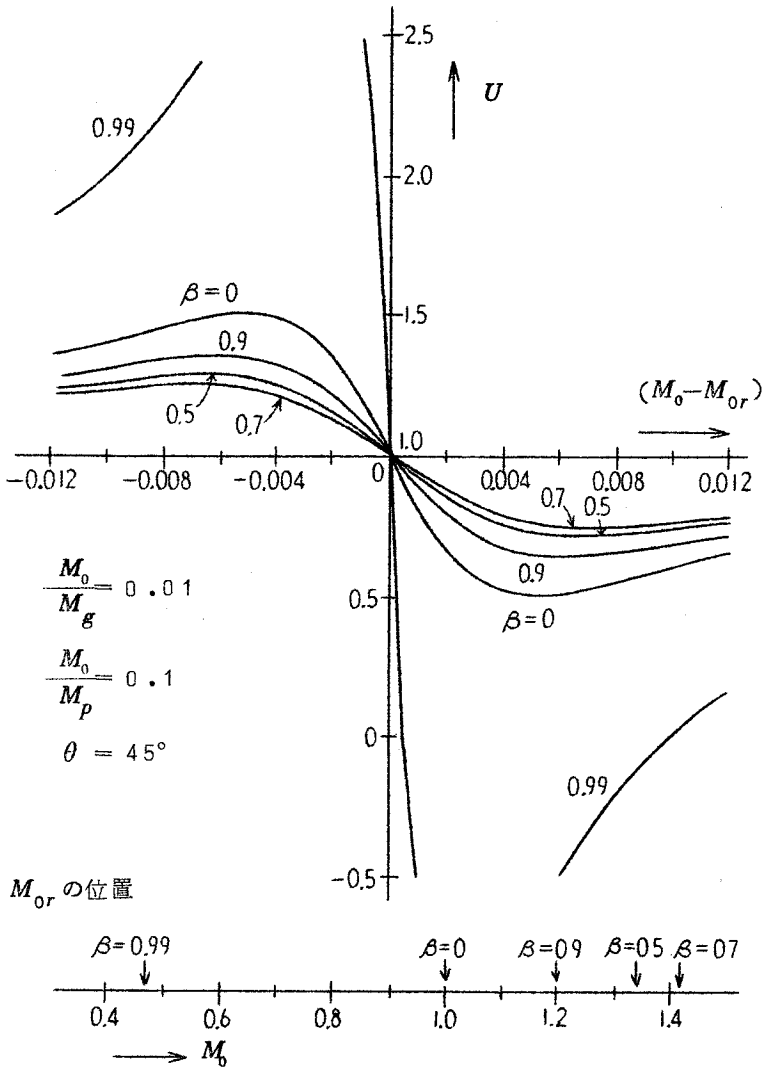

図 8.4(*b*)　異常分散領域（$\theta = 45°$）

の数値計算例である。

さて，ここで吸収がない（$g = 0$）場合の反射係数について若干考察する。この場合には式（8.23)〜(8.25)から明らかなように，位相係数 p および減衰係数 q はそれぞれつぎのように決定される。まず入射角 θ および周波数 M_0

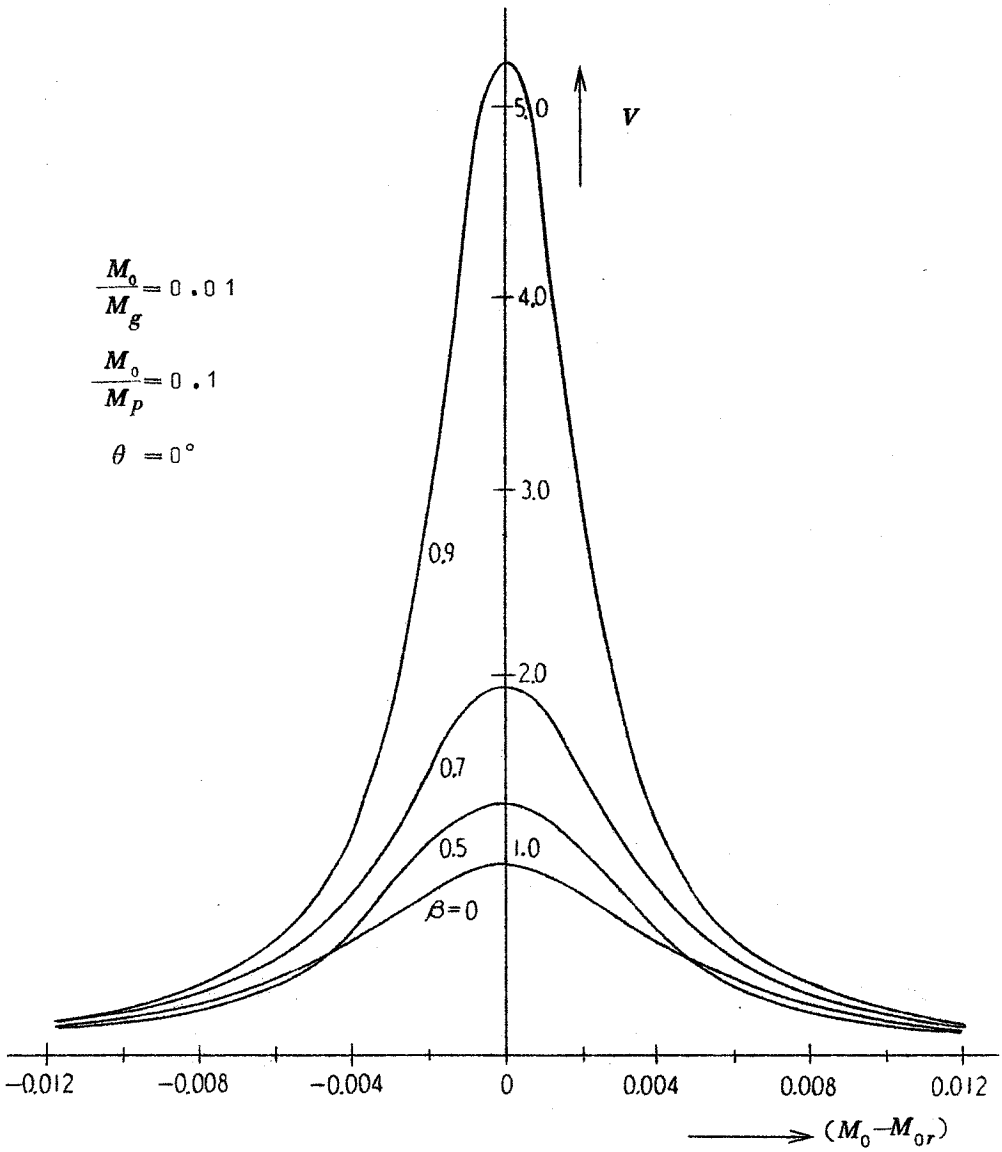

図8.5(a)　吸収曲線($\theta=0°$)

が

$$\cos^2\theta+\frac{1}{a}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2>0 \qquad (8.55)$$

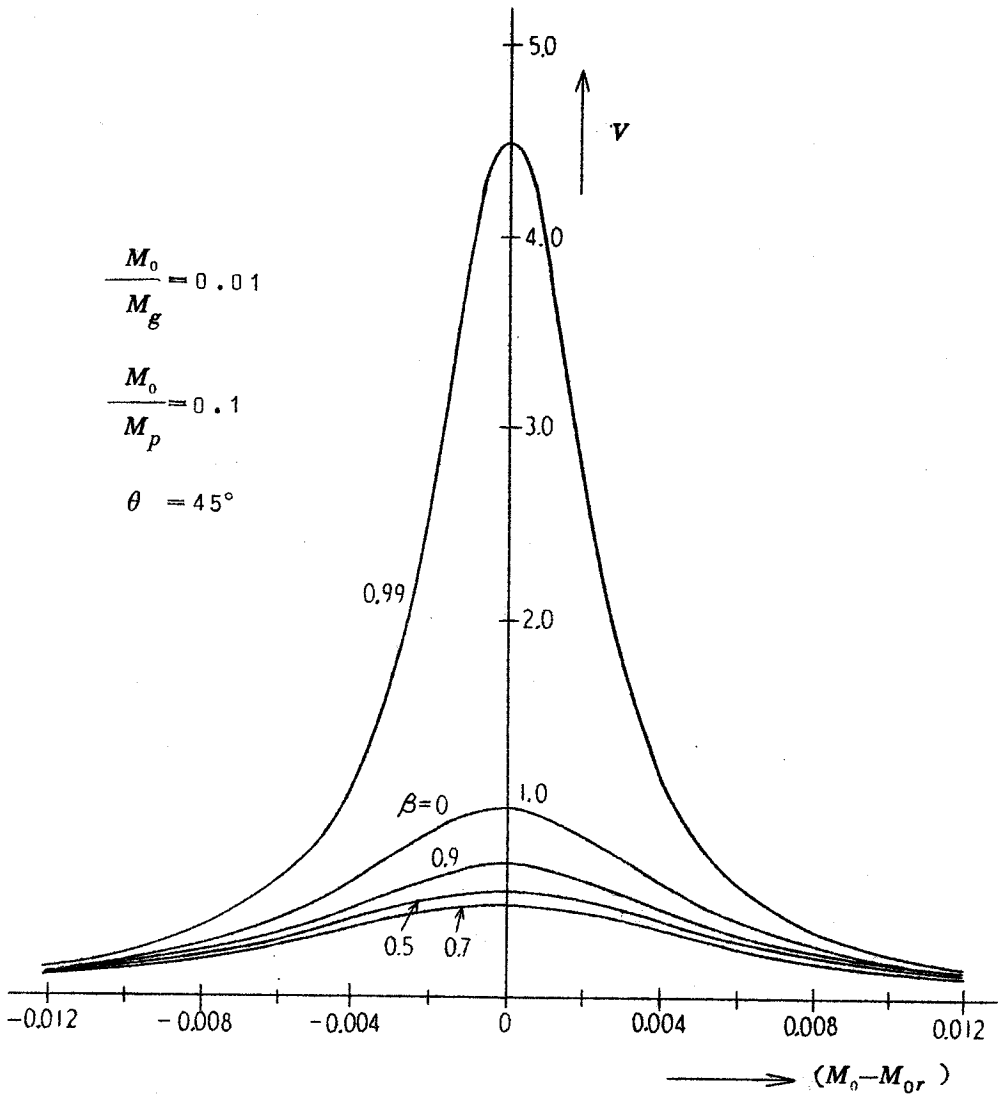

図 8.5(*b*)　吸収曲線（ $\theta=45°$）

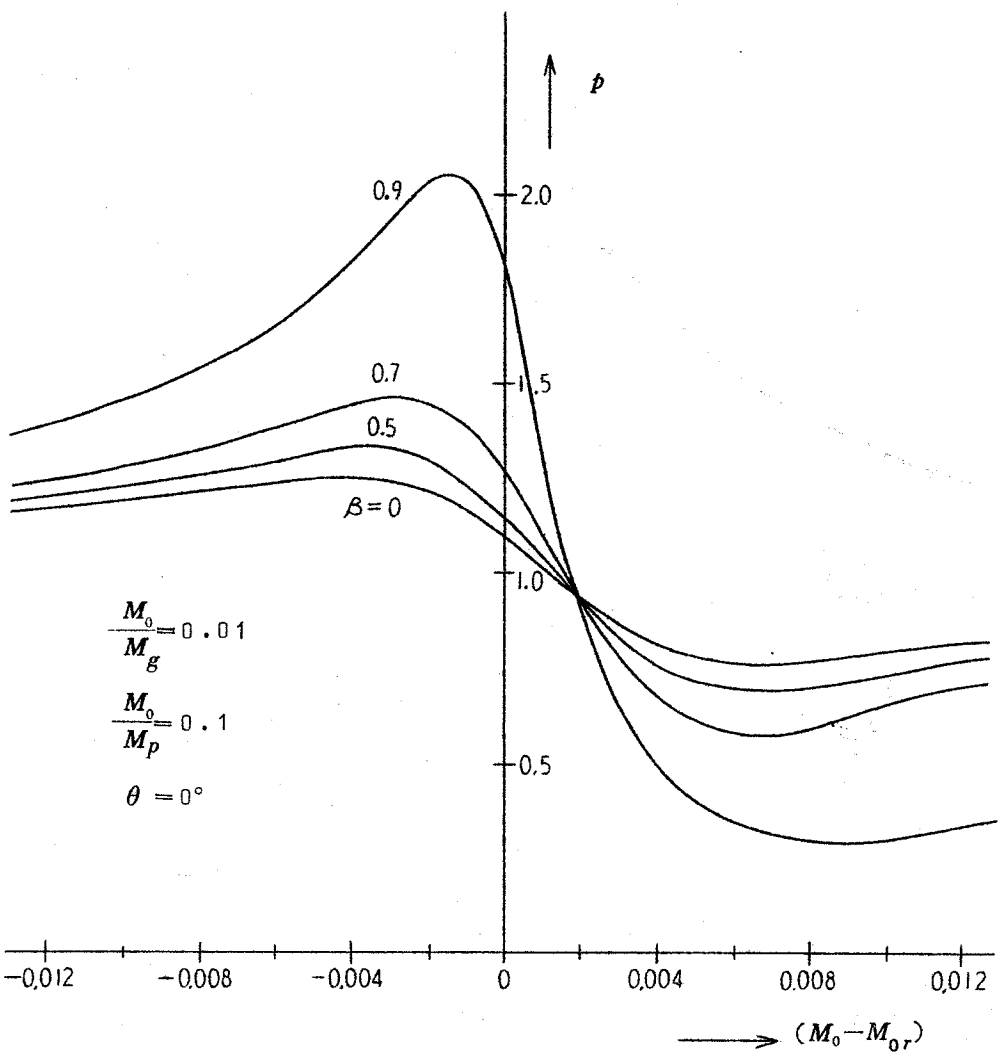

図 8.6(*a*)　位相係数 p ($\theta = 0°$)

の条件を満すときには，

$$p = \left[\cos^2\theta + \frac{1}{a}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2 (1-\beta \sin\theta)^2 \right]^{1/2} \qquad (8.56a)$$

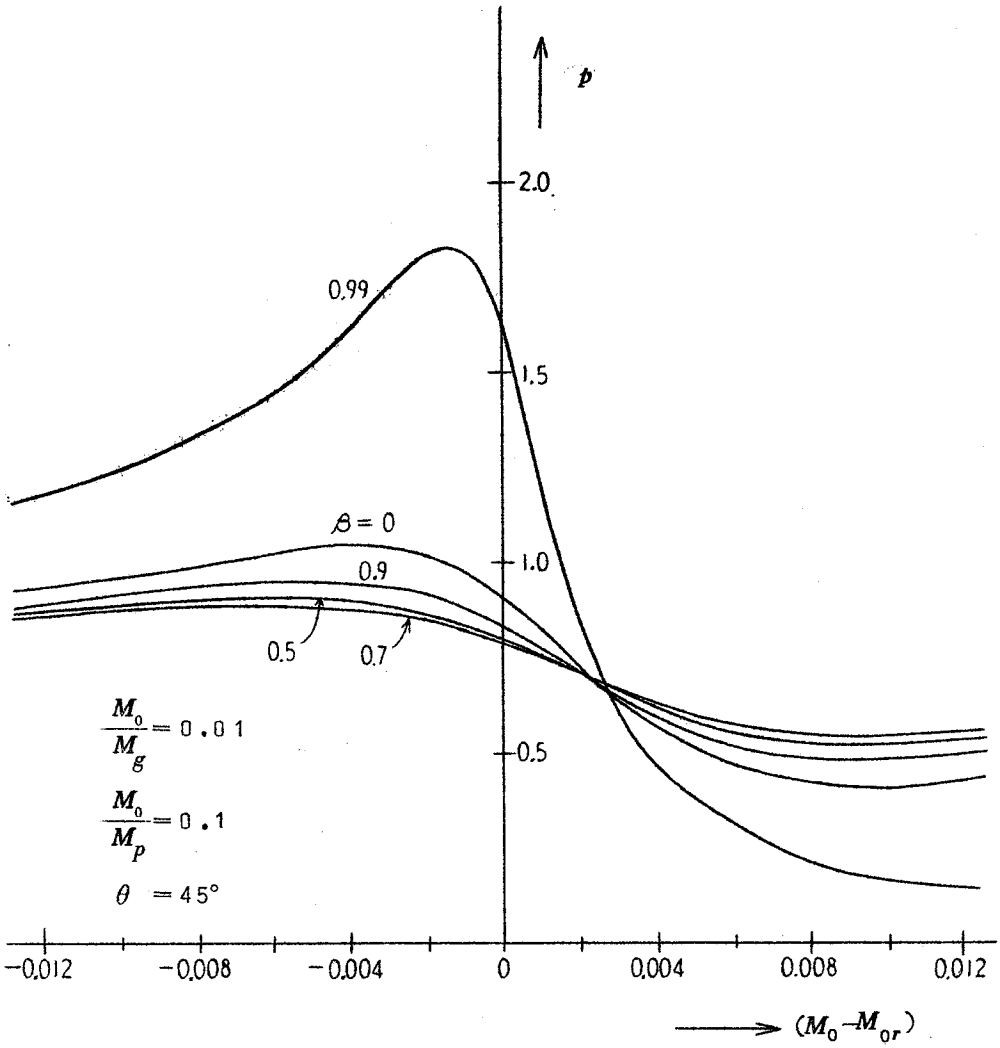

図 8.6(*b*)　位相係数 p ($\theta = 45°$)

$$q = 0 \tag{8.56b}$$

となり，

$$\cos^2\theta + \frac{1}{a}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2 (1-\beta \sin\theta)^2 < 0 \tag{8.57}$$

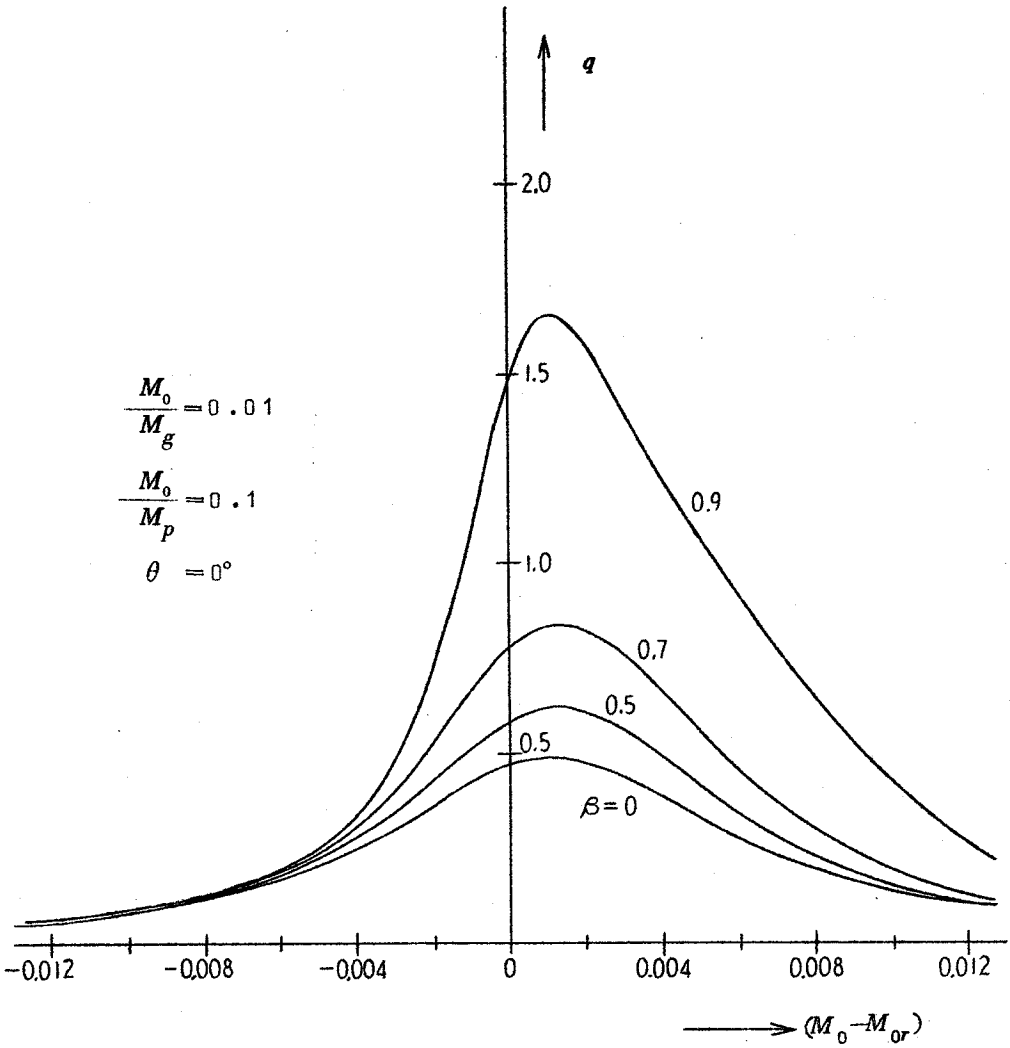

図 8.7(a)　減衰係数 q ($\theta=0°$)

の条件を満足するときには

$$p=0 \tag{8.58a}$$

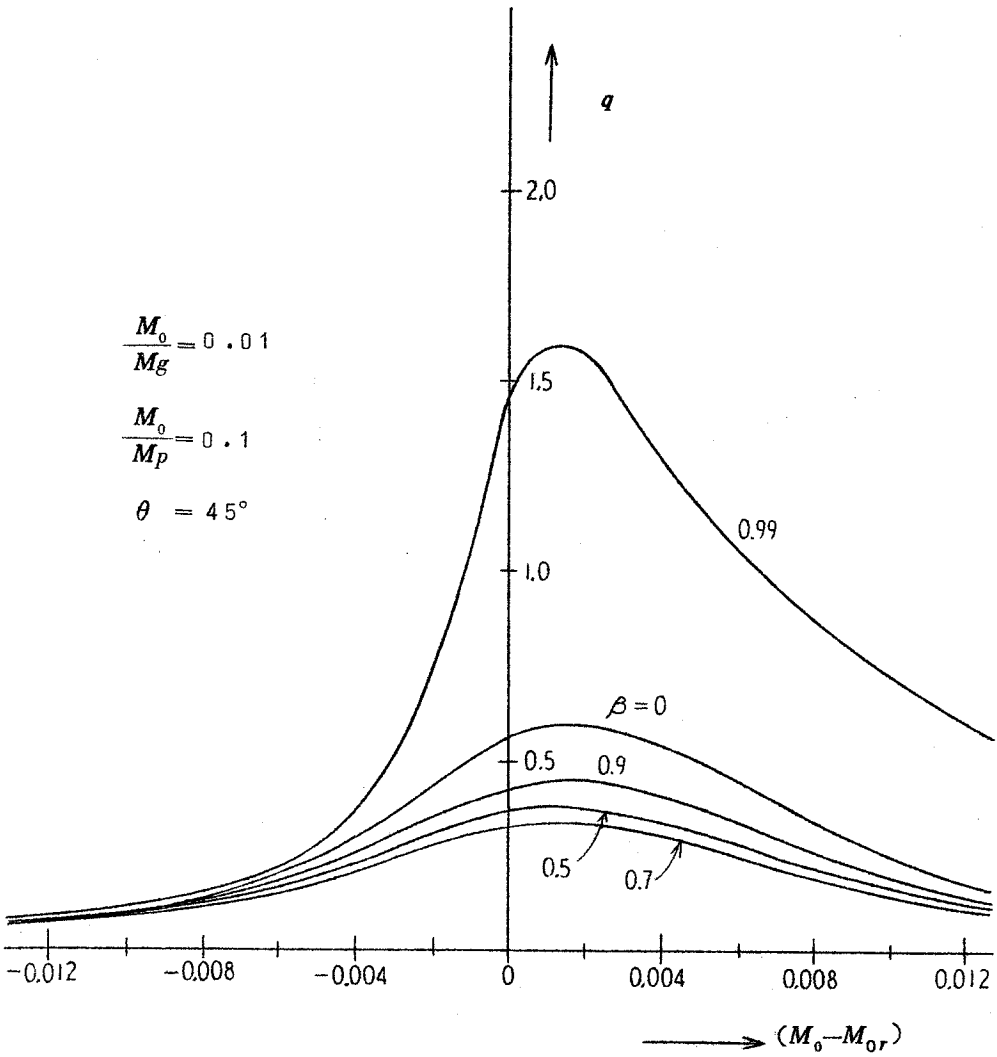

図 8.7(b)　減衰係数 q ($\theta=45°$)

$$q=\left[-\left\{\cos^2\theta+\frac{1}{a}\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2\gamma^2(1-\beta\sin\theta)^2\right\}\right]^{1/2} \qquad (8.58b)$$

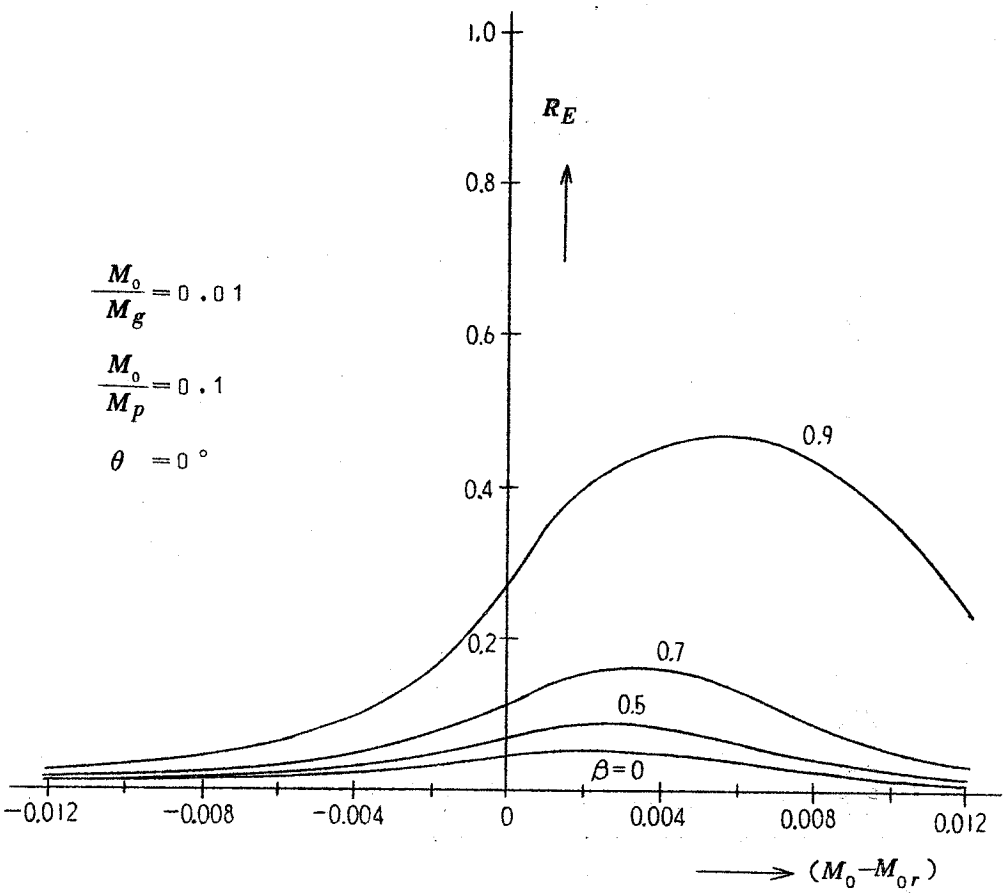

図 8.8(a)　反射係数 R_E ($\theta=0°$)

となる．したがって，条件式(8.57)を満足するような入射角 θ および周波数 M_0 に対して全反射の現象が生ずることがわかる．なお，この場合の反射係数および透過係数は式(8.35)および式(8.36)のそれぞれに，式(8.56)あるいは式(8.58)を代入することによって直ちに求められる．図 8.10(a)〜(b)は，吸収のない場合の入射 E 波に対する反射係数 R_E の数値計算例である．なお，入射 H 波に対する反射係数 R_H も同様の傾向を示す

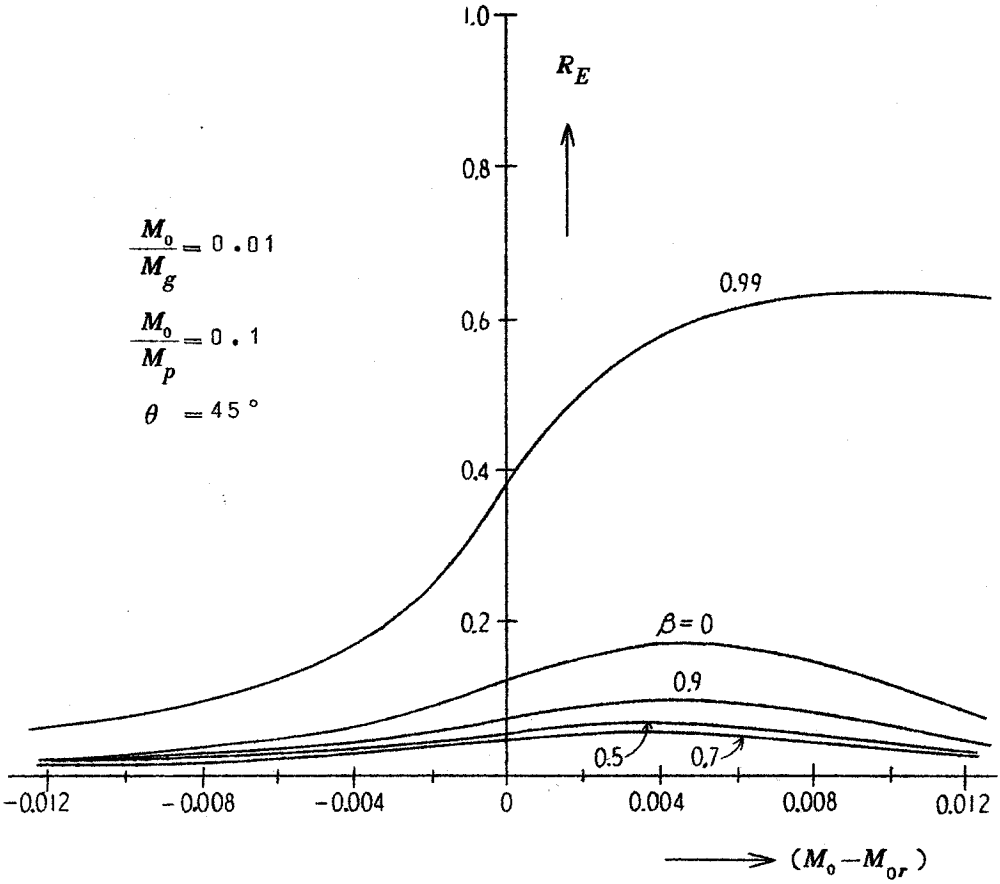

図 8.8(*b*)　反射係数 R_E ($\theta = 45°$)

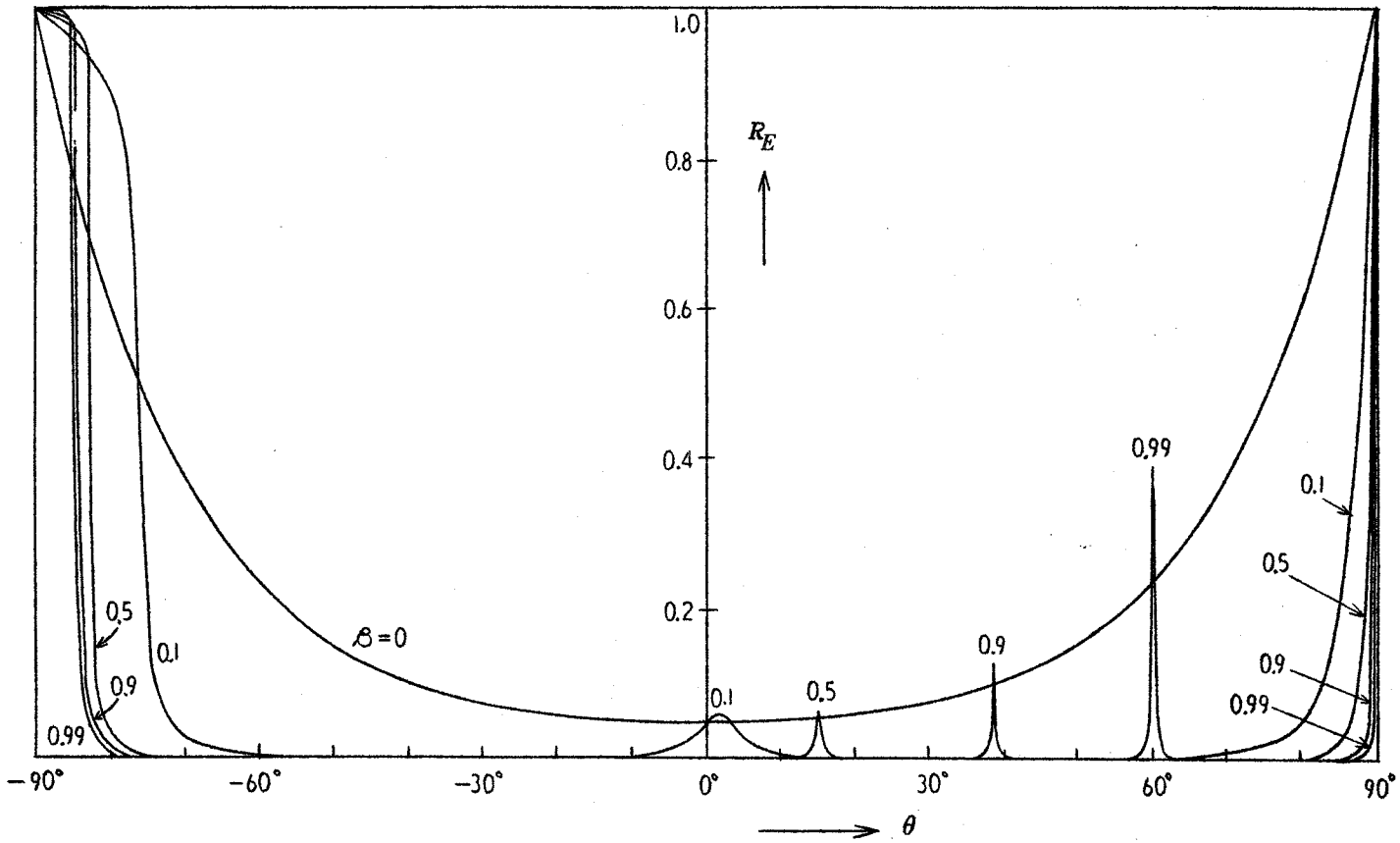
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
R_E
0.99
0.1
0.5
0.9
0.99
0.5
0.1
$\beta=0$
0.9
0.1
0.5
0.9
0.99
−90°
−60°
−30°
0°
30°
60°
90°
θ

図 8.9　反 射 係 数 R_E

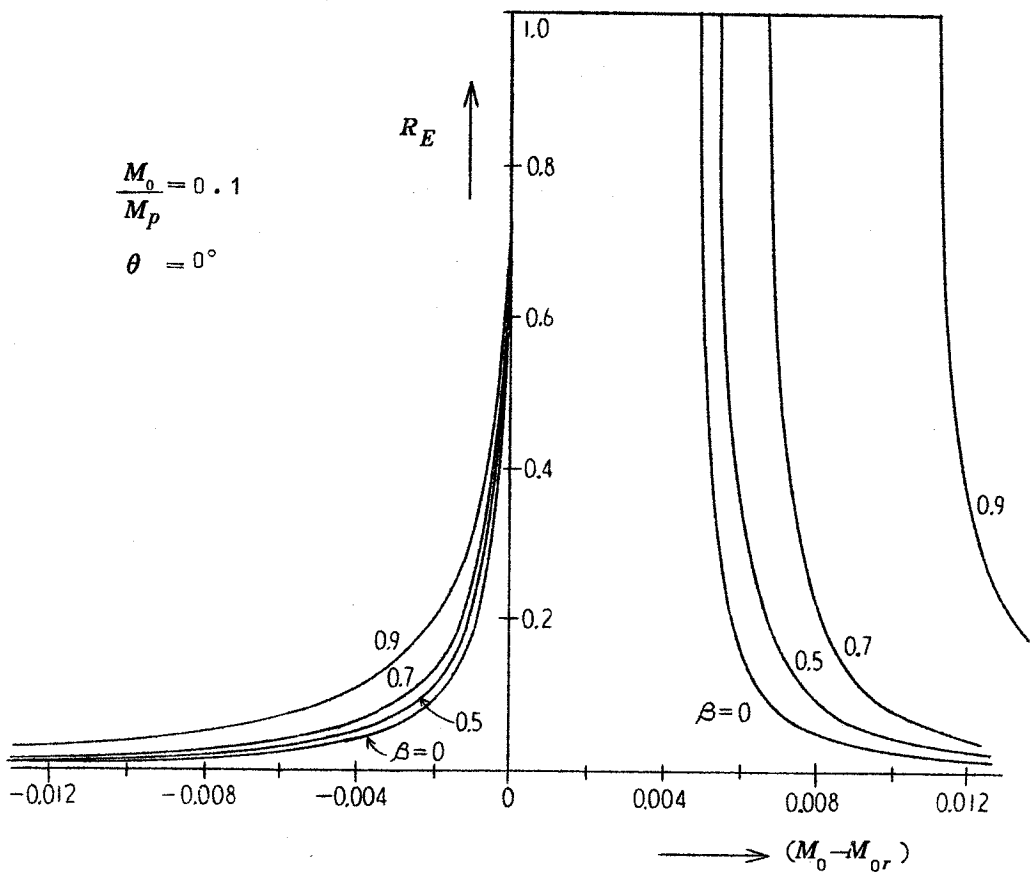

図 8.10(a)　吸収のない場合の反射係数

R_E ($\theta = 0°$)

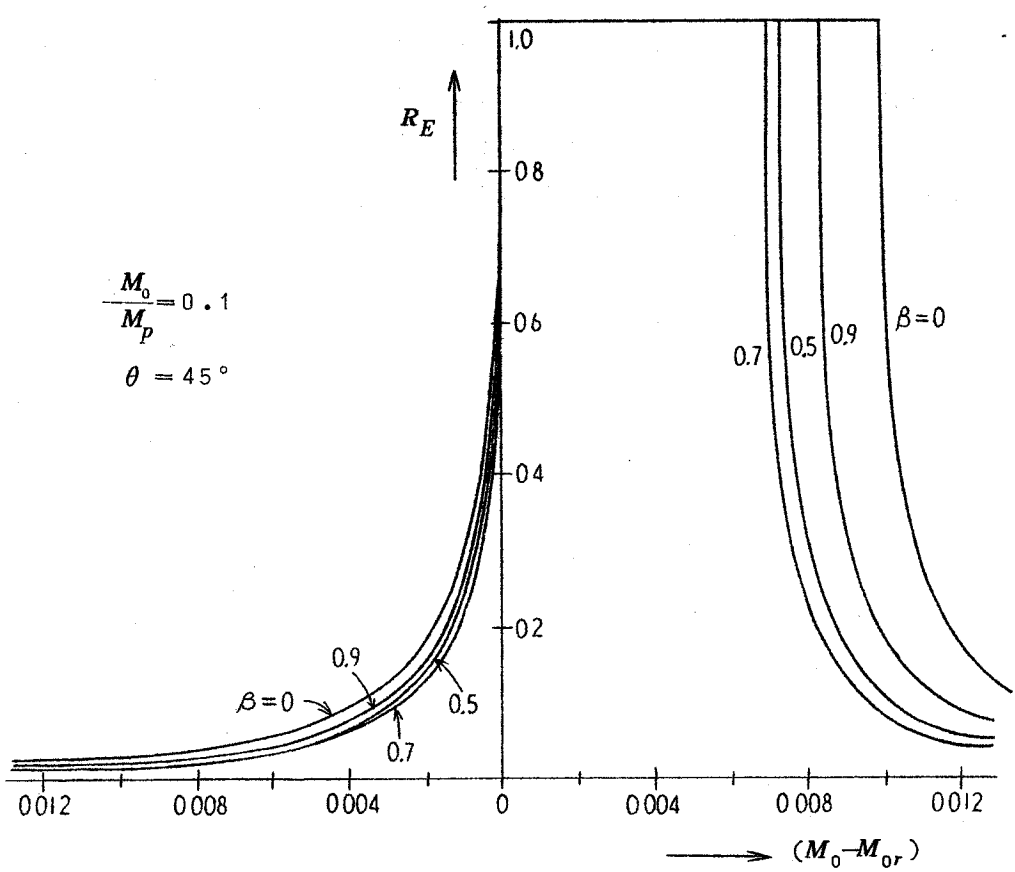

図 8.10(*b*)　吸収のない場合の反射係数

R_E (θ = 45°)

8.5 結　　言

運動している媒質と平面光波との相互作用の問題を，媒質中の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い，従来の場合とは異った種々の興味ある現象が現われることを示した．特に，異常分散領域における光波と媒質の相互作用については，数値計算例を挙げて詳しく検討し，媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにした．

第9章　運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射[75]〜[78]

9．1　序　　言

最近，運動系の電磁界理論に関する研究が活発になされ，運動媒質と平面電磁波との相互作用[45]〜[74]，あるいは境界のない無限に広がった運動媒質中に存在する波源による電磁放射[14]〜[30]などに関する多数の研究が報告されている。しかし，境界を有する有限な運動媒質中に存在する波源による表面波あるいは放射波に関する詳しい報告はまだないようである。

そこで，本章ではこのような運動している有限媒質中の波源による放射の一例として，軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる放射の問題を取扱う。まず，ダイポールによって励振される表面波の電磁界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め，分散関係式および表面波電力について検討し，プラズマ媒質の運動が表面波の伝搬に与える影響は，従来の他の場合に比べ，きわめて大きいことを明らかにする。つぎに，遠距離放射電磁界を鞍部点法によって求め，媒質の運動が放射電力に与える影響等について数値計算例を挙げて詳しく検討する。

9．2　プラズマ円柱内外の電磁界

図9.1に示すように z 方向に無限に長い半径 b なる円柱状プラズマ[95]を考えこのプラズマは z の正の方向に $\mathbf{v}=v\mathbf{i}_z$（$\mathbf{i}_z=z$ 軸方向の単位ベクトル）なる速度で，波源に対して一様に運動しているものとする。ただし，プラズマ媒質は等方性であり，その誘電率は媒質の静止座標系において

$$\varepsilon_0\varepsilon=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2}\right) \tag{9.1}$$

で与えられるものとする。ここで，ω' は媒質の静止座標系における波源の周波数であり，ω_p はプラズマ周波数を表わす。さて，ダイポールは座標原点

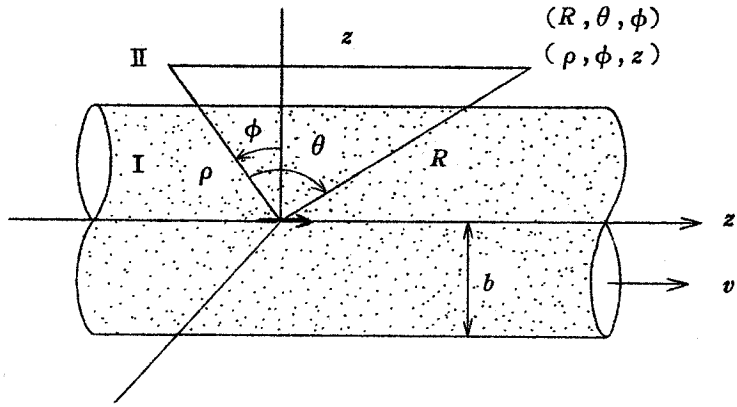

図９．１　座　標　表

に位置し，双極子モーメントの方向は z 軸に平行であるとすれば，電流密度 $\mathbf{J}$ は次式で与えられる．

$$\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_e \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho} \tag{9.2}$$

ここで電磁界の時間変化を $e^{j\omega t}$ と仮定すれば，領域Ｉ（$0<\rho<b$），すなわち運動しているプラズマ媒質中の電磁界は，次式により決定される．[20]

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{E}_e = -j\omega\mu_0\overline{\alpha}\cdot\mathbf{H}_e \tag{9.3a}$$

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{H}_e = j\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\overline{\alpha}\cdot\mathbf{E}_e + \mathbf{J} \tag{9.3b}$$

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\cdot\overline{\alpha}\cdot\mathbf{E}_e = \frac{\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{J} + q}{\varepsilon_0\varepsilon} \tag{9.3c}$$

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\cdot\overline{\alpha}\cdot\mathbf{H}_e = 0 \tag{9.3d}$$

ただし，添字 e はプラズマ媒質中の電磁界を表わし，また，q は波源電流密度 $\mathbf{J}$ に伴う電荷密度を表わす．なお，下記の諸記号を導入した．

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{(n^2-1)v}{(1-n^2\beta^2)\ c^2} = \frac{(n^2-1)\beta}{(1-n^2\beta^2)\ c}\mathbf{i}_z = \Omega\mathbf{i}_z$$

$$\overline{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a = \frac{1-\beta^2}{1-n^2\beta^2}, \beta = \frac{v}{c}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{9.4}$$

さて，式（9.3d）から電磁界補助量としてベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_e$ をつぎのように導入することができる。

$$\mathbf{H}_e = \overline{\alpha}^{-1}\cdot[(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\times(\overline{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_e)] \tag{9.5}$$

したがってスカラ・ポテンシャルを ϕ_e とすれば，$\mathbf{E}_e$ は式（9.3a）から

$$\mathbf{E}_e = -j\omega\mu_0\overline{\alpha}^{-1}\cdot\mathbf{A}_e - (\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\phi_e \tag{9.6}$$

とかける。式（9.5），（9.6）を式（9.3b），（9.3c）に代入し，ゲージ関係式

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{A}_e + j\omega\varepsilon_0\varepsilon a^2\phi_e = 0 \tag{9.7}$$

を用いて，ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_e$ に関する波動方程式

$$(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\cdot\overline{\alpha}\cdot(\nabla - j\omega\boldsymbol{\Omega})\mathbf{A}_e + a^2k^2\mathbf{A}_e = -a^2\mathbf{J} \tag{9.8}$$

る得る。ただし

$$k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon = k_0^2\varepsilon \tag{9.9}$$

式（9.2）で与えられる波源に対しては，すべての電磁界成分は円周方向 ϕ に無関係になり，波動方程式（9.8）はベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_e$ の z 方向成分 A_{ze} を用いてつぎのようにかける。

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{2j\omega\Omega}{a}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\omega^2\Omega^2}{a}\right.$$

$$\left.+k^2a\right]A_{ze}=-aJ_e\frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho} \qquad (9.10)$$

また，電磁界成分は式(9.5),(9.6),(9.7)を用いてつぎのようにかける。

$$E_{\rho e}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}-j\omega\Omega\frac{\partial}{\partial\rho}\right)A_{ze} \qquad (9.11a)$$

$$E_{ze}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2j\omega\Omega\frac{\partial}{\partial z}-\omega^2\Omega^2+k^2a^2\right)A_{ze} \qquad (9.11b)$$

$$H_{\phi e}=-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\rho}A_{ze} \qquad (9.11c)$$

つぎに，領域Ⅱ（$b<\rho<\infty$），すなわち真空中の電磁界は領域Ⅰの場合と同様にして，波動方程式

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right]A_{zo}=0 \qquad (9.12)$$

を満足するベクトル・ポテンシャルA_{zo}を用いて，つぎのように表わされる。

$$E_{\rho o}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial z}A_{zo} \qquad (9.13a)$$

$$E_{zo}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)A_{zo} \qquad (9.13b)$$

$$H_{\phi o}=-\frac{\partial}{\partial\rho}A_{zo} \qquad (9.13c)$$

ただし，添字0は自由空間中の電磁界量を表わす。

つぎに波動方程式(9.10)および(9.12)を解くことを考える。まず，領域Iにおける波動方程式(9.10)を*Fourier* 変換することによって次式を得る。

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{a}h^2-\frac{2\omega\Omega h}{a}-\frac{\omega^2\Omega^2}{a}+k^2a\right]\bar{A}_{ze}$$

$$=-aJ_e\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \qquad (9.14)$$

ただし，

$$A_{ze}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}_{ze}\,e^{-jhz}\,dh \qquad (5.15a)$$

$$\bar{A}_{ze}=\int_{-\infty}^{\infty}A_{ze}\,e^{jhz}\,dz \qquad (9.15b)$$

式(9.14)は，誘電率が式(9.1)で与えられる等方性運動プラズマ中において常に成り立つ関係式

$$(h+\omega\Omega)^2-a^2k^2=a(h^2-k_e^2) \qquad (9.16)$$

を用いて簡単化することができる。ただし，k^2は式(9.9)に与えられる量であり，k_e^2 は次式で定義される。

$$k_e^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)=k_0^2\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad (9.17)$$

式(9.16)を代入することによって，式(9.14)はつぎのようにかける。

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\xi_e^2\right]\bar{A}_{ze}=-\frac{aJ_e\delta(\rho)}{2\pi} \qquad (9.18)$$

ただし，

$$\xi_e^2 = k_e^2 - h^2 \tag{9.19}$$

つぎに，波動方程式（9.12）を*Fourier*変換して次式を得る．

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\xi_0^2\right]\bar{A}_{zo}=0 \tag{9.20}$$

ただし，

$$\xi_0^2 = k_0^2 - h^2$$

また，

$$A_{zo}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}_{zo}e^{-jhz}dh \tag{9.22a}$$

$$\bar{A}_{zo}=\int_{-\infty}^{\infty}A_{zo}e^{jhz}dz \tag{9.22b}$$

さて，式（9.18）および（9.20）から円柱表面における境界条件を考慮して，領域Ⅰ，および領域Ⅱにおけるベクトル・ポテンシャルはそれぞれつぎのように求められる．

$$A_{ze} = j\frac{aJ_e}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_0^{(2)}(\xi_e\rho)+\frac{P(h)}{\Delta(h)}J_0(\xi_e\rho)\right]$$

$$\times e^{-jhz}dh,\ (o<\rho<b) \tag{9.23}$$

$$A_{zo}=-j\frac{J_e}{16\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2j\xi_e}{\pi b\xi_0\Delta(h)}H_0^{(2)}(\xi_0\rho)\right]$$

$$\times e^{-jhz}dh,\ (b<\rho<\infty) \tag{9.24}$$

ここで，

$$P(h)=\xi_e H_0^{(2)}(\xi_e b)H_1^{(2)}(\xi_0 b)-\varepsilon\xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)H_1^{(2)}(\xi_e b) \tag{9.25a}$$

$$\Delta(h)=\varepsilon\xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b)J_1(\xi_e b)-\xi_e H_1^{(2)}(\xi_0 b)J_0(\xi_e b) \qquad (9.25b)$$

$$\xi_e=\begin{cases}\sqrt{k_e^2-h^2}\ , & (k_e>h) \qquad (9.26a)\\ -j\sqrt{h^2-k_e^2}\ , & (k_e<h) \qquad (9.26b)\end{cases}$$

$$\xi_0=\begin{cases}\sqrt{k_0^2-h^2}\ , & (k_0>h) \qquad (9.27a)\\ -j\sqrt{h^2-k_0^2}\ , & (k_0<h) \qquad (9.27b)\end{cases}$$

$$\varepsilon=1-\frac{\omega_p^2}{\omega'^2}=1-\frac{(1-\beta^2)\omega_p^2}{(\omega-\beta ch)^2} \qquad (9.28)$$

ただし，$H_n^{(2)}$およびJ_nはそれぞれn次の第2種*Hankel*関数および*Bessel*関数を表わす。

9．3　表面波の励振

9．3．1　分散関係式

ベクトル・ポテンシャルA_{ze},A_{zo}の表面波による寄与は，被積分関数の極における留数を計算することによって求められるが，$\xi_e=-j\sqrt{h^2-k_e^2}$，$(k_e<h)$；$\xi_0=-j\sqrt{h^2-k_0^2}$，$(k_0<h)$のときの$\Delta(h)$の零点h_sが表面波の伝搬定数を与える。したがって表面波の分散関係式は式(9.25*b*)，(9.26*b*)，(9.27*b*)および(9.28)からつぎのように表わされる。

$$(1-\beta k_s)^2 p_e I_0(MNp_e)K_1(MNp_0)+\{(1-\beta k_s)^2-(1-\beta^2)N^{-2}\}p_0$$
$$\times I_1(MNp_e)K_0(MNp_0)=0 \qquad (9.29)$$

ただし，

$$p_e=\sqrt{k_s^2-(1-N^{-2})}\ ,\quad p_0=\sqrt{k_s^2-1}$$

$$k_s=\frac{h_s}{k_0}=\text{正規化表面波伝搬定数}$$

$$M=\frac{\omega_p}{c}b=\text{正規化半径}$$

$$N=\frac{\omega}{\omega_p}=\text{正規化周波数} \tag{9.30}$$

ここで，I_n および K_n はそれぞれ n 次の第1種および第2種の変形 *Bessel* 関数を表わす。さて，本章ではプラズマ媒質が z の正の方向に運動（$\beta>0$）していると仮定しているがこのとき z の負の方向に伝搬する表面波（$k_s<-1$）は，媒質が z の負の方向に運動（$\beta<0$）していると仮定したときに z の正の方向に伝搬する表面波（$k_s>1$）と等価である。したがって，z の負の方向に伝搬する表面波（$k_s<-1$）を求めるには分散関係式（9.29）における β を $-\beta$ に置き換え，$k_s>1$ なる解を求め一符号を付ければよい。

ここで，分散関係式（9.29）について考察する。分散関係式（9.29）はその左辺第2項が正の場合には明らかに解をもたない。すなわち，

$$(1-\beta k_s)^2-(1-\beta^2)N^{-2}>0 \tag{9.31}$$

したがって，

$$N\left|k_s-\frac{1}{\beta}\right|>\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{9.32}$$

なる領域には解は存在しない。また式（9.30）の第2式から明らかなように

$$|k_s|<1 \tag{9.33}$$

なる領域には解は存在しない。さらに，式（9.29）は $k_s=\frac{1}{\beta}$ において $N=\infty$ なる解を有する。以上のことから，図9.2が得られる。図9.2において，縦軸は正規化周波数 N であり，横軸は正規化表面波伝搬定数 k_s である，また斜線部は式（9.32）および（9.33）の領域，すなわち分散関係式が解を持たない領域を表わす。図において点線および実線で表わされる曲線は，$\beta=0$ および $\beta\neq 0$ のそれぞれの場合の分散曲線の概形を示したものである。図9.2およ

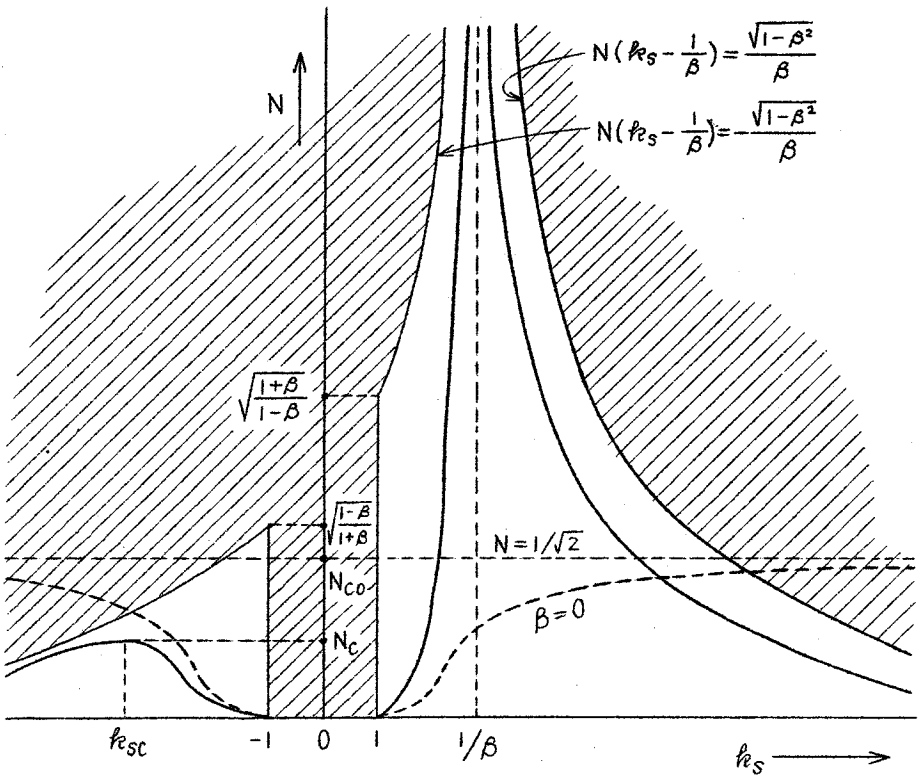

図 9.2　分　散　曲　線

び，数値計算例である図 9.3からつぎのことがわかる。

1）$\beta=0$，すなわち媒質が静止している場合には遮断周波数 $N_{co}=1/\sqrt{2}$ をもつ。

2）媒質の運動方向に伝搬する表面波（$k_s>1$）に対しては遮断周波数は存在しない。また，分散曲線は $k_s=1/\beta$ において不連続となり，$1<k_s<1/\beta$ なる領域は前進波を表わし，$1/\beta<k_s$ なる領域は後進波を表わす。

3）媒質の運動方向と逆の方向に伝搬する表面波（$k_s<-1$）は媒質が静止している場合の遮断周波数 N_{co} より低い遮断周波数 N_c をもつ。また，分散曲線は媒質の運動方向に伝搬する表面波の場合と違って，$k_s<-1$ の全領域にわたって連続となり，波は $k_{sc}<k_s<-1$ なる領域では前進波となり，

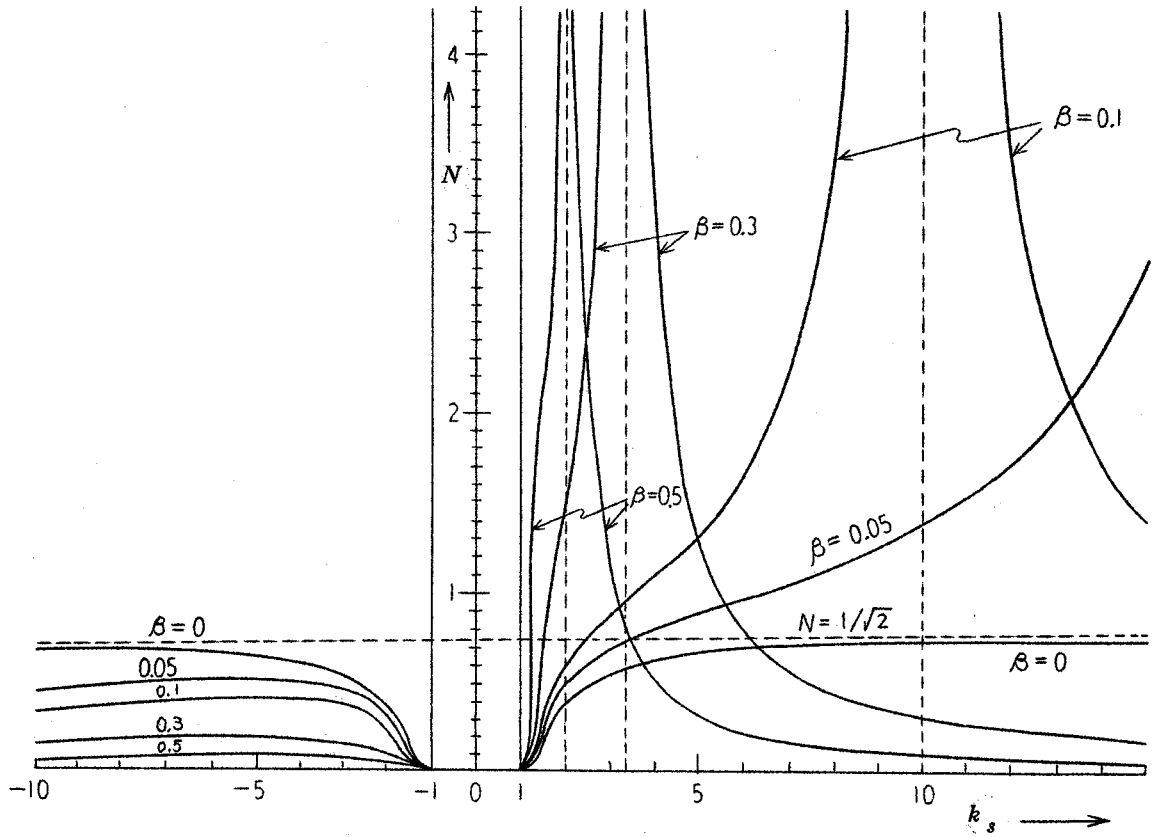

図 9.3(a) 分散曲線 ($M=0.1$)

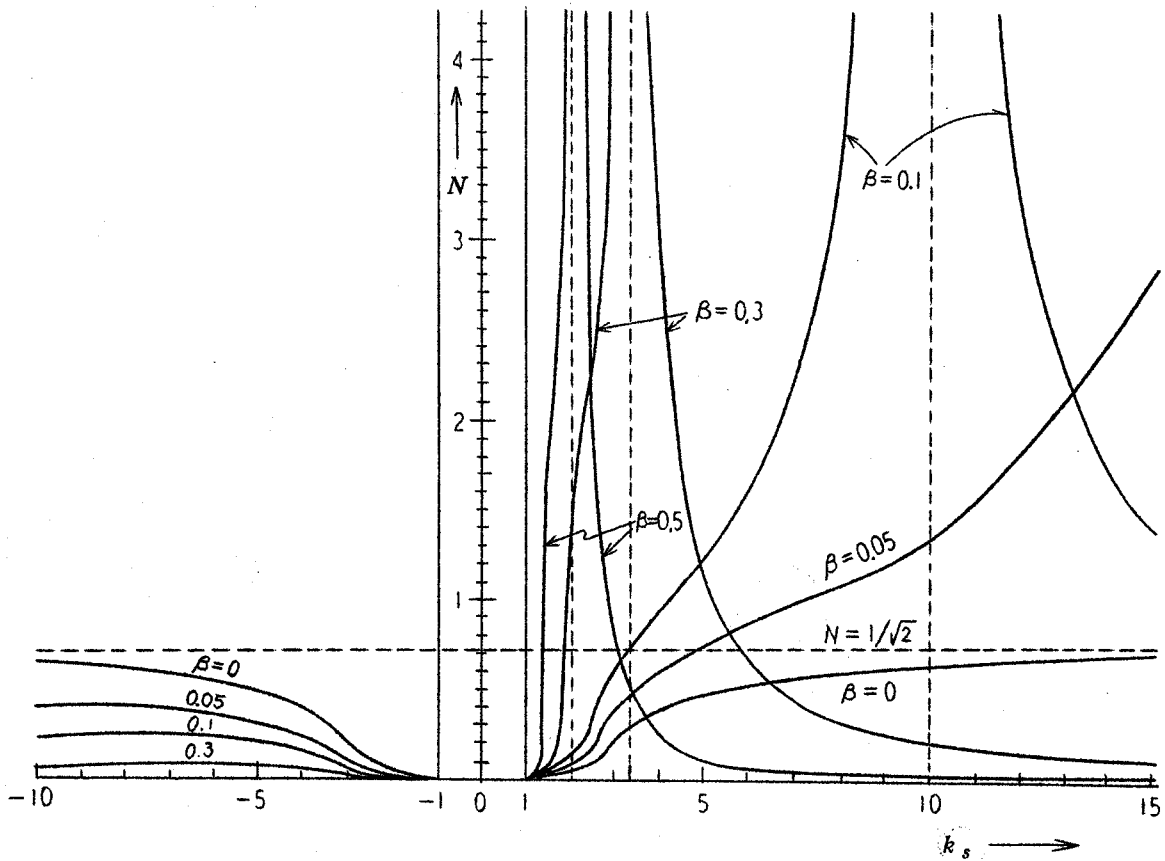

図 9.3(*b*)　分散曲線（$M=0.4$）

$k_s < k_{sc}$なる領域では後進波となる。ただし，k_{sc}は$N=N_c$におけるk_sの値を表わす。なお，最近Yeh[96]は著者らとは独立に，運動している円柱状プラズマに沿って伝搬する表面波の固有モードを電磁界の変換による方法を用いて求めているが，彼の解析は不完全であり$k_s > \frac{1}{\beta}$なる後進波の領域が考慮されていない。

図9.3(a)および(b)は，それぞれ正規化半径$M=1.0$および0.4の場合の分散曲線の数値計算例である。

9.3.2 表面波電力

ベクトル・ポテシャルの表面波による寄与は極における留数を計算することによって求められ，$z>0$の領域において，つぎのようになる。

$$A_{ze}^{+}(\rho,z)=\frac{aJ_e}{8}\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}\quad I_0(k_0 p_e \rho)e^{-jh_s z} \tag{9.34}$$

$$A_{zo}^{+}(\rho,z)=\frac{J_e p_e}{2\pi^2 b\varepsilon p_0 \Delta'(h_s)}\quad K_0(k_0 p_0 \rho)e^{-jh_s z} \tag{9.35}$$

ただし，$\Delta'(h_s)$は$\Delta(h)$の$h=h_s$での微分を表わす。

さて，zの正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力をP_s^+とすればP_s^+は次式で与えられる。

$$P_s^+=P_{se}^+ + P_{so}^+ \tag{9.36}$$

ただし，

$$P_{se}^+=\frac{1}{2}R_e\left[\int_0^b E_{\rho e}^+ H_{\phi e}^{+*}\ 2\pi\rho d\rho\right] \tag{9.37}$$

$$P_{so}^+=\frac{1}{2}R_e\left[\int_b^\infty E_{\rho o}^+ H_{\phi o}^{+*}\ 2\pi\rho d\rho\right] \tag{9.38}$$

ここで，R_eは実数部をとる操作を表わし，記号*は複素共役を表わす。上式(9.37)に含まれる$E_{\rho e}^+$，$H_{\phi e}^+$は式(9.11a)，(9.11b)に式(9.34)を用いてつぎのように求められる。

$$E_{\rho e}^{+} = -\frac{J_e(h_s+\omega\Omega)k_0 p_e}{8\omega\varepsilon_0\varepsilon a}\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}I_1(k_0 p_e\rho)e^{-jh_s z} \quad (9.39a)$$

$$H_{\phi e}^{+} = -\frac{J_e k_0 p_e}{8}\frac{P(h_s)}{\Delta'(h_s)}I_1(k_0 p_e\rho)e^{-jh_s z} \quad (9.39b)$$

同様に$E_{\rho o}^{+}, H_{\phi o}^{+}$，は式(9.13a),(9.13b)および(9.35)を用いてつぎのように求められる。

$$E_{\rho o}^{+} = \frac{J_e}{2\pi^2 b\omega\varepsilon_0\varepsilon}\frac{h_s k_0 p_e}{\Delta'(h_s)}K_1(k_0 p_0\rho)e^{-jh_s z} \quad (9.40a)$$

$$H_{\phi o}^{+} = \frac{J_e}{2\pi^2 b\varepsilon}\frac{k_0 p_e}{\Delta'(h_s)}K_1(k_0 p_0\rho)e^{-jh_s z} \quad (9.40b)$$

したがってP_{se}^{+}，P_{so}^{+}はそれぞれつぎのように表わされる。

$$P_{se}^{+} = \frac{1}{2}\left[\frac{J_e^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\right]\frac{N^4M^2p_e^2(\beta k_s+a-1)}{\varepsilon a\beta}$$

$$\times\frac{L^2}{D^2}\left[I_1^2(MNp_e)-I_0(MNp_e)I_2(MNp_e)\right] \quad (9.41)$$

$$P_{so}^{+} = \frac{1}{2}\left[\frac{J_e^2}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\right]\frac{N^2k_s p_e^2}{\varepsilon^2 D^2}$$

$$\times\left[K_0(MNp_0)K_2(MNp_0)-K_1^2(MNp_0)\right] \quad (9.42)$$

ただし，

$$L = \frac{p_e}{\varepsilon}K_0(MNp_e)K_1(MNp_0)-p_0K_0(MNp_0)K_1(MNp_e) \quad (9.43a)$$

$$D = \left[\frac{2p_e\beta(1-\beta^2)}{\varepsilon^2N^2(1-\beta k_s)^3}-\frac{k_s}{\varepsilon p_e p_0^2N^2}\right]I_0(MNp_e)K_1(MNp_0)$$

$$+\frac{(1-\beta^2)k_s M}{\varepsilon N(1-\beta k_s)^2} I_1(MNp_e)K_1(MNp_0)$$

$$+\frac{MNk_s(\varepsilon p_0^2-p_e'^2)}{\varepsilon p_e p_0} I_0(MNp_e)K_0(MNp_0)$$

$$+\frac{k_s}{p_e^2 p_0 N^2} I_1(MNp_e)K_0(MNp_0) \qquad (9.43b)$$

つぎに，z の負の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力は，z の正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力を表わす式における β を $-\beta$ に置き換えたものに等しい。したがって次式が成りたつ。

$$P_s^-(\beta)=P_s^+(-\beta)=P_{se}^+(-\beta)+P_{so}^+(-\beta) \qquad (9.44)$$

よって表面波によって運ばれる全電力 P_s はつぎのようになる

$$P_s=P_s^++P_s^-=P_s^+(\beta)+P_s^+(-\beta) \qquad (9.45)$$

図 9.4～9.5 は表面波電力の数値計算例である。ただし，縦軸は正規化表面波電力

$$\tilde{P}_s^{\pm}=\left[\frac{J_e^2}{32\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\right]^{-1} P_s^{\pm} \qquad (9.46)$$

である。$\tilde{P}_s^+$ の数値計算例である図 9.4における 2 種類の曲線のうち山型の曲線は前進波の正規化表面波電力を表わし，他方の曲線は後進波の正規化表面波電力を表わす。なお，前進波の領域と後進波の領域との境目の正規化表面波伝搬定数である $k_s=1/\beta$（このとき $N=\infty$，図 9.3 参照）においては $\tilde{P}_s^+\simeq 0$ となる。図 9.5は $\tilde{P}_s^-$ の数値計算例であるが，図から前進波から後進波の変り目の正規化表面波伝搬定数を与える $k_s=k_{sc}$（このとき $N=N_c$，図 9.3 参照）において正規化表面波電力 $\tilde{R}_s^-$ が非常に大きくなることがわかる。また，図 9.4および図 9.5のそれぞれにおける（a）と（b）とを比較することに

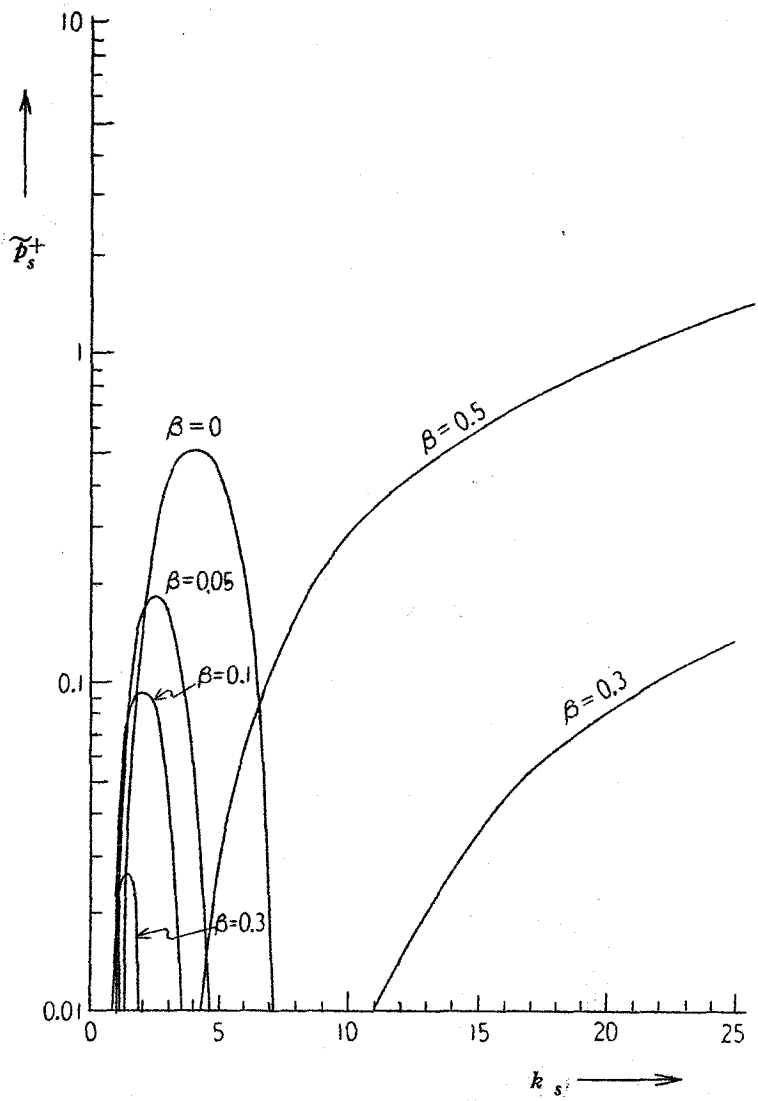

図 9.4(a)　正規化表面波電力$\widetilde{P}_s^+$ (M=1.0)

よって正規化半径Mが小さいほど表面波電力が大きくなることがわかる。

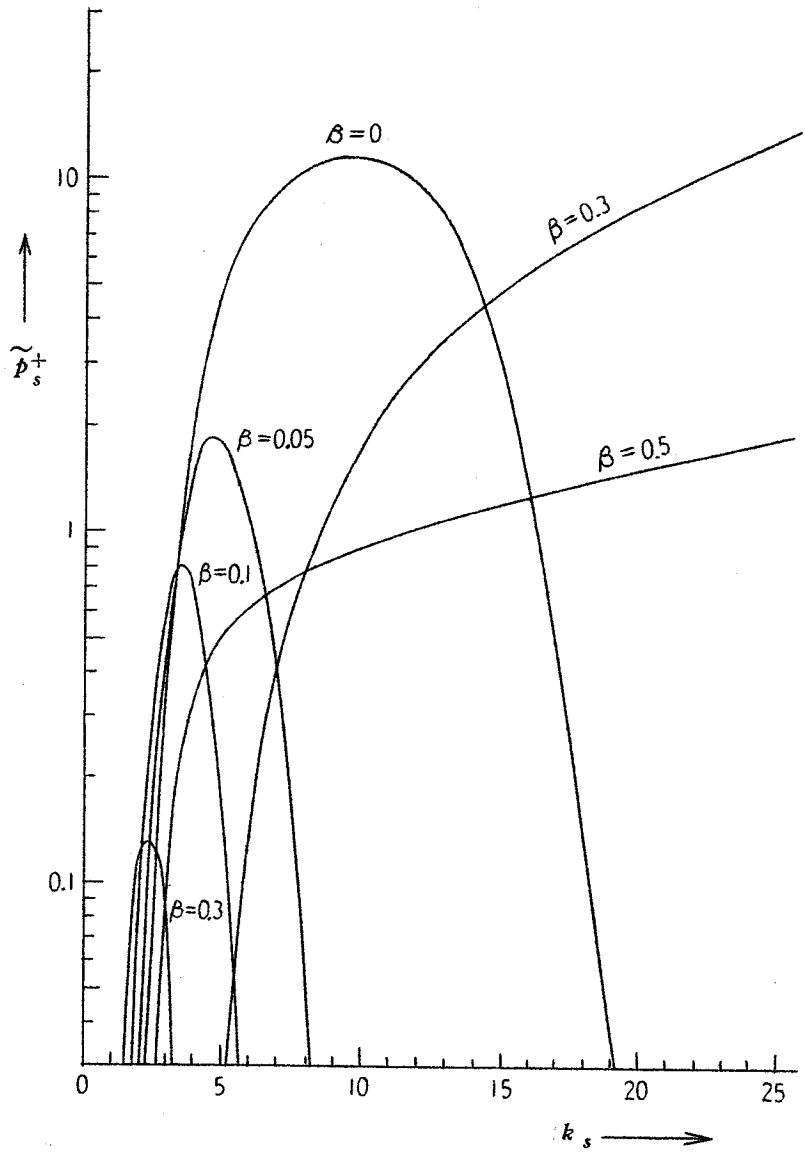

図９.４(*b*)　正規化表面波電力 $\widetilde{P}_s^+$ （M=０.４）

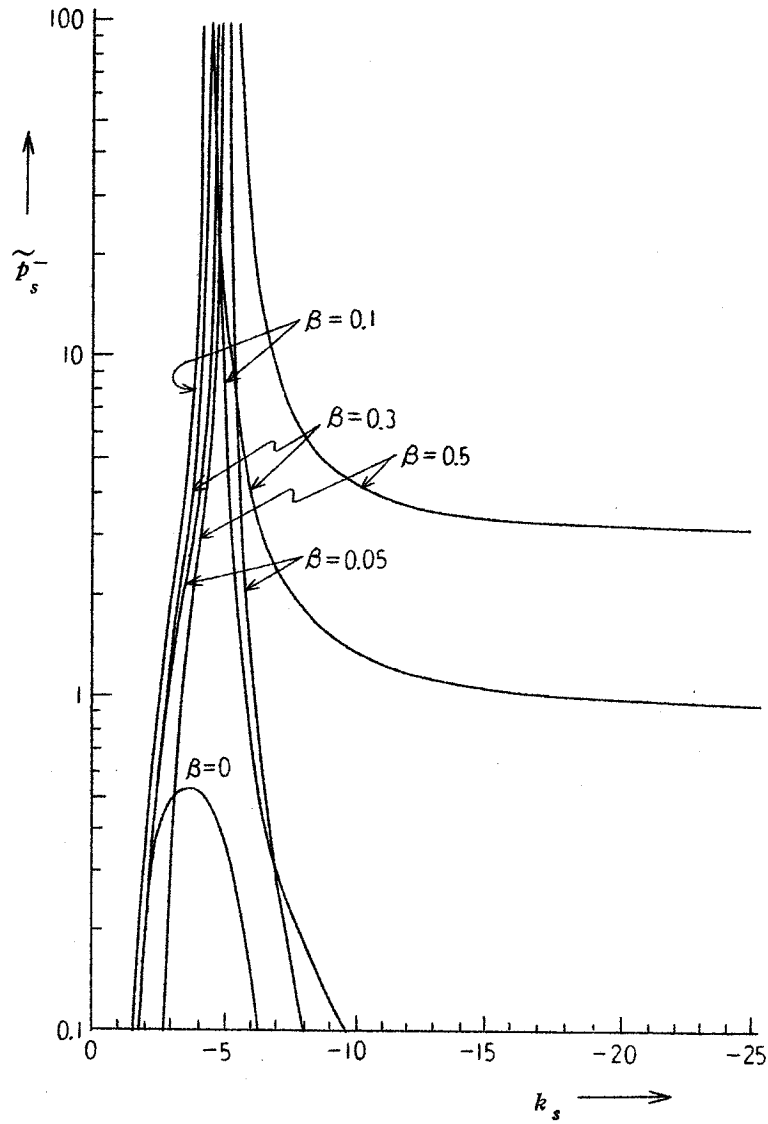

図 9.5(a)　正規化表面波電力 $\tilde{P}_s^-$ ($M = 1.0$)

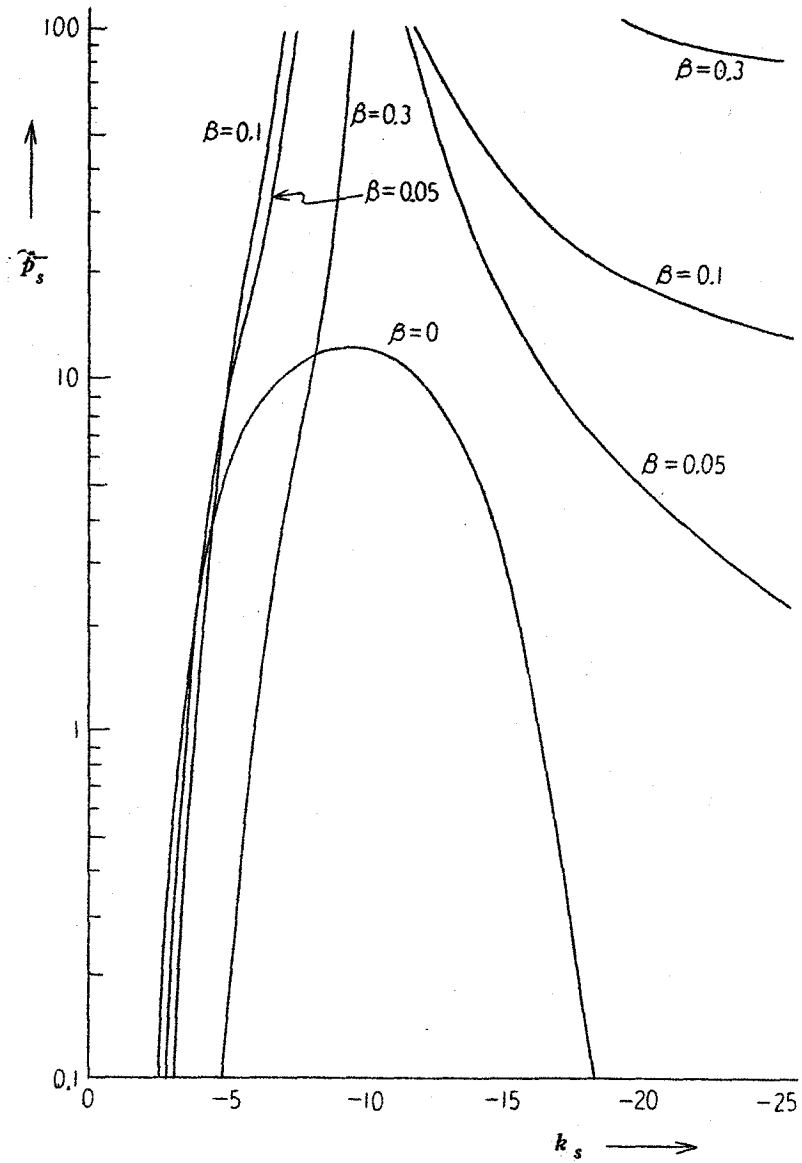

図 9.5(*b*)　正規化表面波電力 $\widetilde{P}_s^-$ （M=0.4）

9.4 空間放射波

ベクトル・ポテンシャルの空間放射波に対する寄与は鞍部点法によって求めることができるが，一般に波源を囲んでいる媒質が運動している場合には極と鞍部点が非常に接近することがあり，したがって鞍部点法の適用が困難となる場合がある（例えば，波源を囲んでいる媒質が誘電体の場合には，媒質の運動速度が大きくなればこのようなことが起って来る）。しかし，動動している媒質が，誘電率が式（9.1）で与えられるような等方性プラズマの場合には式（9.16）の関係式が成立し，したがって表面波伝搬定数は媒質が静止している場合と同様に常に $|k_s|>1$ なる領域に存在する。このことから，媒質が運動することによって極と鞍部点が互いに接近するようなことは決してなく，したがって静止している場合と同様に鞍部点法を適用することができ，式（9.24）によって与えられるベクトル・ポテンシャル A_{zo} の空間放射波に対する寄与はつぎのように求められる。

$$A_{zo}(R,\theta)=\frac{jJ_e\sqrt{k_e^2-k_0^2\sin^2\theta}}{4\pi^2 b\varepsilon\Delta(k_0\sin\theta)}\frac{1}{k_0\cos\theta}\times\frac{e^{-jk_0R}}{R},\ (k_0R\gg1) \tag{9.47}$$

ただし，

$$\varepsilon=1-\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\sin\theta)^2N^2} \tag{9.48}$$

なお，図9.1に示すように R，θ は z，ρ とつぎの関係で結ばれている。

$$z=R\sin\theta,\quad \rho=R\cos\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right) \tag{9.49}$$

さて，遠距離放射電磁界は式（9.13）から求められるが，$H_{\phi o}(R,\theta)$ はつぎのように表わされる。

$$H_{\phi o}(R,\theta)=jk_0A_{zo}(R,\theta)\cos\theta \tag{9.50}$$

したがって，R方向への遠距離放射電力はつぎのように求められる。

$$S_R=\frac{1}{2}Re\left[E_\theta(R,\theta)H_\phi^*(R,\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left|H_\phi(R,\theta)\right|^2$$

$$=\frac{J_e}{16\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\frac{F(\theta)}{4\pi R^2} \tag{9.51}$$

ただし，$F(\theta)$は次式で定義される

$$F(\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^2M^2\varepsilon^2}\dfrac{\lambda^2}{D_1^2+D_2^2}, & (N\neq\sec\theta) \quad (9.52a)\\[2ex] \dfrac{2}{\pi^2M^2\varepsilon^2}\dfrac{1}{D_{10}^2+D_{20}^2}, & (N=\sec\theta) \quad (9.52b)\end{cases}$$

ここでD_1，D_2はそれぞれつぎのように与えられる。

$$D_1=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\varepsilon}J_0(MN\lambda)J_1(MN\cos\theta)-\cos\theta J_1(MN\lambda)J_0(MN\cos\theta), & (N>\sec\theta) \quad (9.53a)\\[2ex] \dfrac{\lambda}{\varepsilon}I_0(MN\lambda)N_1(MN\cos\theta)-\cos\theta I_1(MN\lambda)N_0(MN\cos\theta), & (N<\sec\theta) \quad (9.53b)\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\varepsilon}J_0(MN\lambda)N_1(MN\cos\theta)-\cos\theta J_1(MN\lambda)N_0(MN\cos\theta), & (N>\sec\theta) \quad (9.54a)\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\varepsilon}I_0(MN\lambda)J_1(MN\cos\theta)-\cos\theta I_1(MN\lambda)J_0(MN\cos\theta), \\ \qquad\qquad (N<\sec\theta)\end{cases} \tag{54b}$$

ただし，

$$\lambda=\sqrt{\left|\cos^2\theta-N^{-2}\right|} \tag{9.55}$$

また，D_{10}，D_{20}はそれぞれつぎのように与えられる。

$$D_{10}=\frac{1}{\varepsilon}J_1(MN\cos\theta)-\frac{1}{2}MN\cos\theta J_0(MN\cos\theta) \tag{9.56}$$

$$D_{20}=\frac{1}{\varepsilon}N_1(MN\cos\theta)-\frac{1}{2}MN\cos\theta N_0(MN\cos\theta) \tag{9.57}$$

上式における，$F(\theta)$ は，θ 方向に放射される電力に比例する量であり，放射パターンを表わす。なお放射全電力 P_R は次式で与えられる。

$$\widetilde{P}_R=\left[\frac{J_e^2}{32\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^2\right]^{-1}P_R=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(\theta)d\theta \tag{9.58}$$

ここで $\widetilde{P}_R$ は正規化放射電力を表わす。図9.6(a)および(b)は$M=1$，N $N=0.5$および1.05 の場合の放射パターン$F(\theta)$の数値計算例であり，図9.7(a)および(b)は，$M=10$，$N=0.5$ および1.05 の場合の放射パターン$F(\theta)$ の数値計算例である。

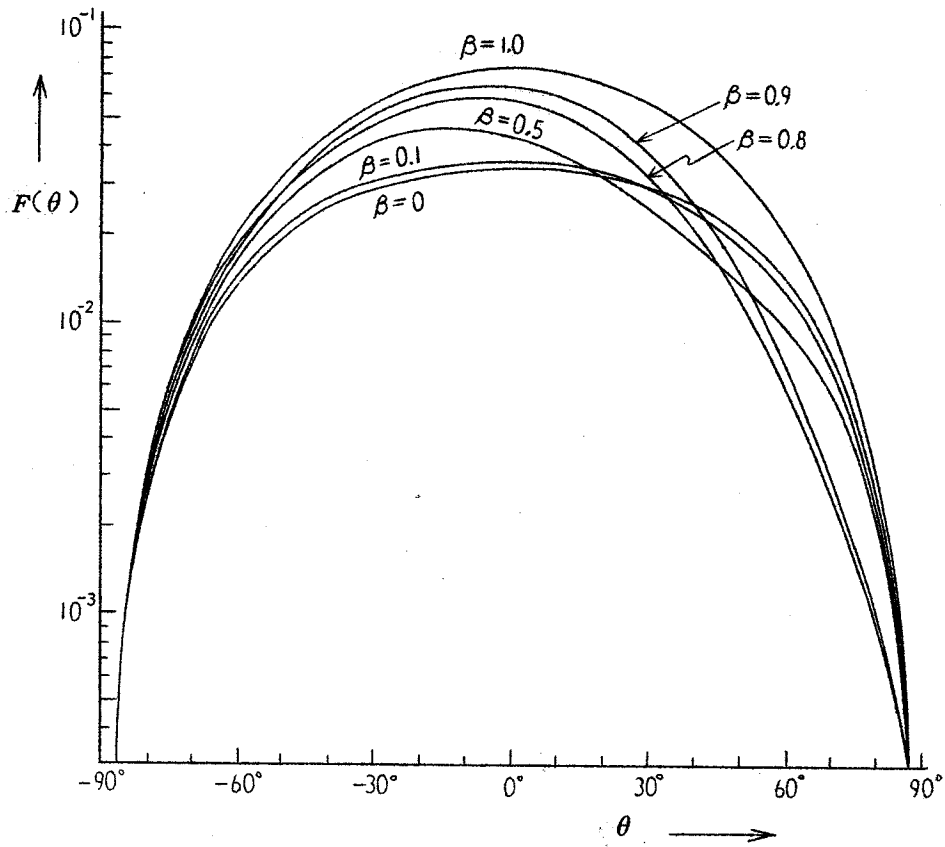

図 9.6(*a*)　放射パターン $F(\theta)$ ($M=1.0, N=0.5$)

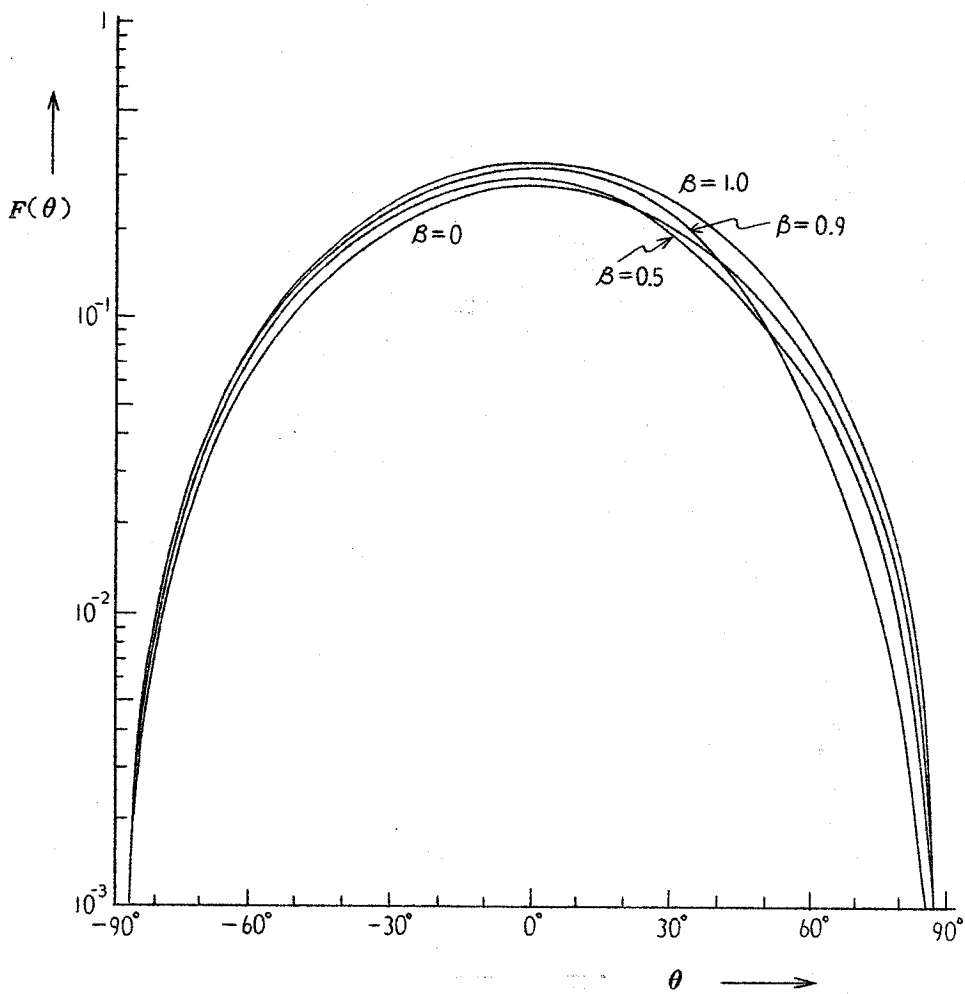

図9.6(*b*)　放射パターン$F(\theta)$(M=1.0,N=1.05)

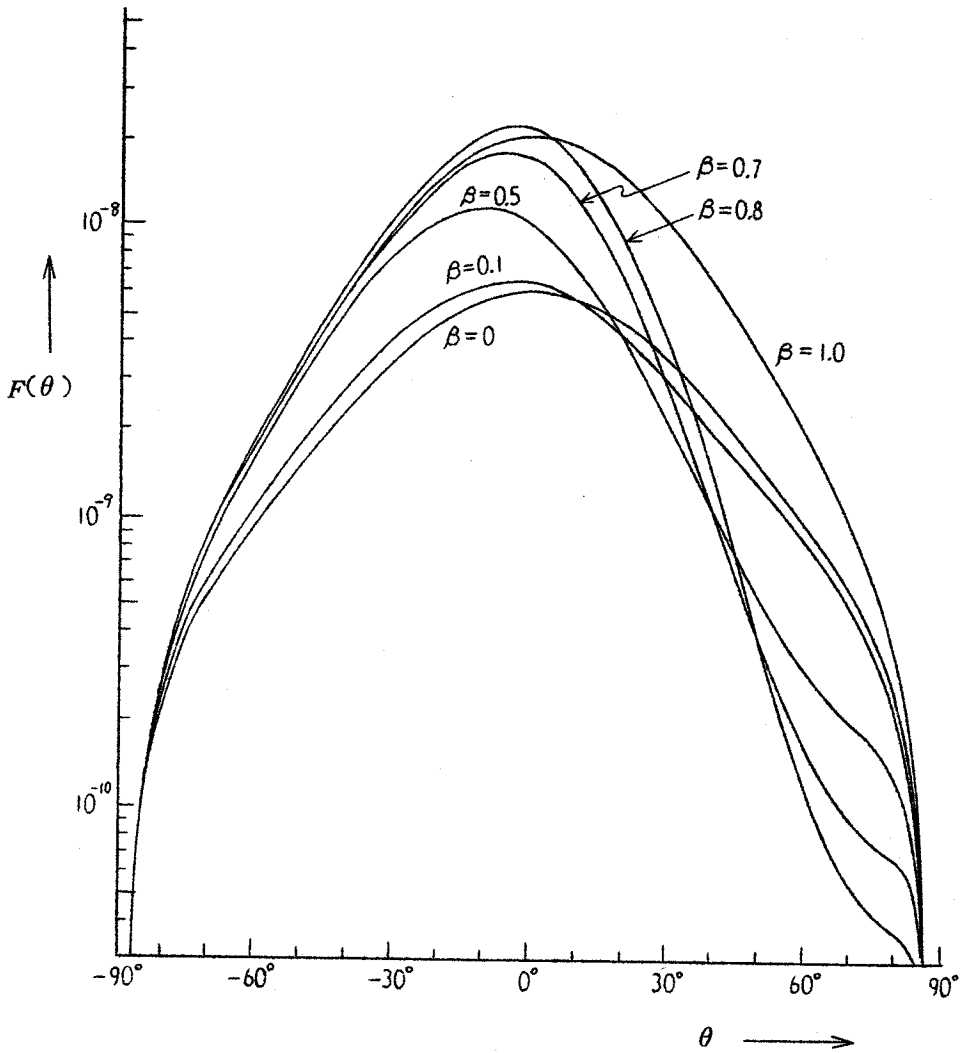

図 9.7(a)　放射パターン $F(\theta)$ ($M=10, N=0.5$)

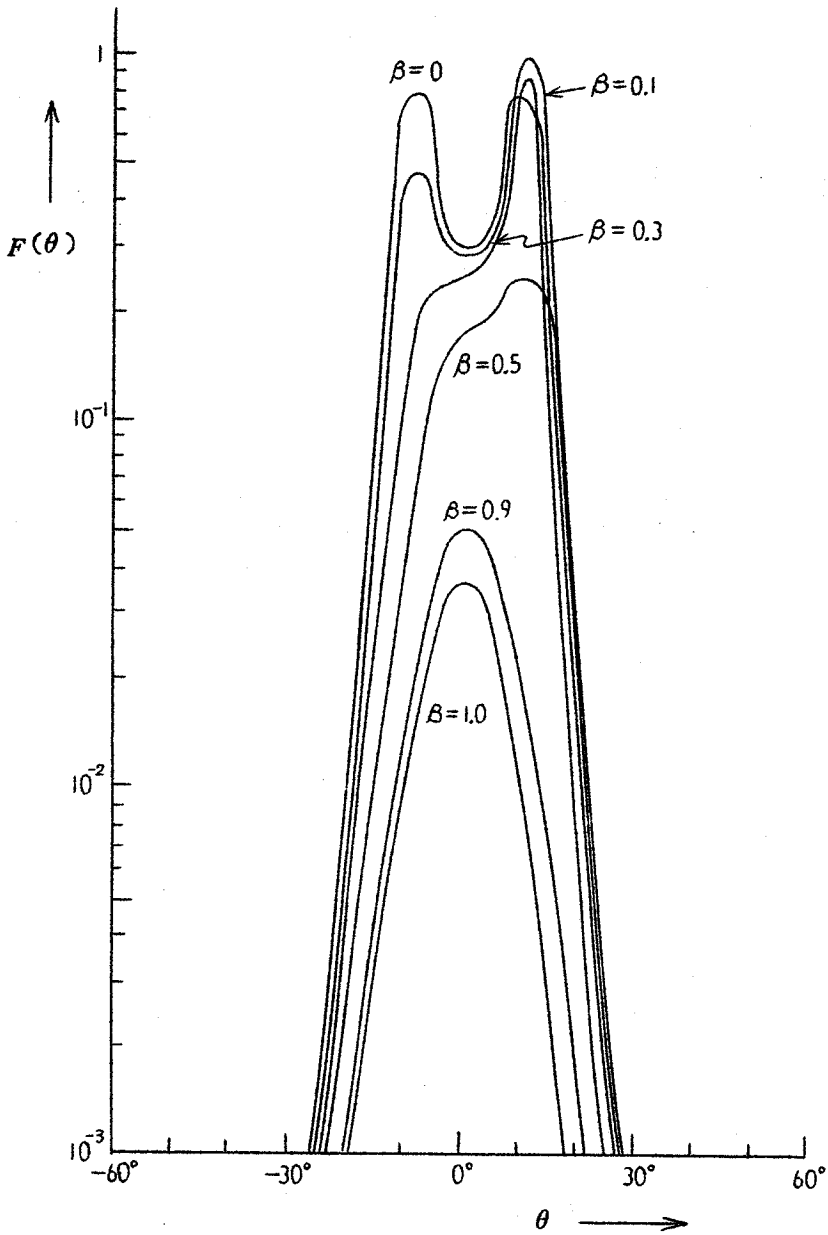

図9.7(*b*)　放射パターン $F(\theta)$ ($M=10, N=1.05$)

9.5 結　　言

軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる放射について考察した。まず，ダイポールによって励振される表面波の電磁界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め，プラズマ媒質の運動が分散関係式および表面波電力等に与える影響を数値計算例をあげて詳しく検討した。ついで，遠距離放射電磁界を鞍部点法によって求め，媒質の運動が放射電力に与える影響等について考察した。

第10章　結　　論

本章では本研究の成果を総括して述べる。著者は，本論文において相対論的電磁界理論における基本的な問題，すなわち運動波源からの電磁放射，運動媒質中の電磁放射ならびに波動伝搬，および運動媒質と平面電磁波との相互作用について考察し，波源あるいは媒質の運動によって従来知られていなかった種々の興味ある現象が現われることを明らかにした。

第2章では，相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため，真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの電磁放射について考察した。

第3章および第4章では，導電性運動媒質中の電磁理論の近似解および厳密解についてそれぞれ考察した。

第5章および第6章では，導電性運動媒質を含む導波管の理論の近似解および厳密解についてそれぞれ考察した。

第7章および第8章では，吸収性運動媒質，すなわち圧縮性運動プラズマ流体および光波領域における分散性誘電体媒質と平面電磁波との相互作用についてそれぞれ考察した。

第9章では，運動している有限な媒質中に存在する波源による放射の一例として，軸方向に運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる電磁放射現象について考察した。

以上，本研究で得られた成果が電磁界理論の発展に多少なりとも貢献し得るならば，著者の最も幸とするところである。

謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始御懇切な御指導，御激励をいただいた大阪大学工学部板倉清保教授，ならびに種々有益な御教示，御助言をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭助教授に衷心より感謝の意を表わす。

大学院在学中は，通信工学および電子工学一般に関して御指導，御教示をいただいた大阪大学工学部熊谷三郎名誉教授，青柳健次教授，笠原芳郎教授，菅田栄治教授，滑川敏彦教授，および大阪大学基礎工学部牧本利夫教授，藤沢和男教授，ならびに大阪大学産業科学研究所加藤金正教授，松尾幸人教授に深謝する。

また，種々有益な御教示，御討論をいただいた大阪大学工学部中西義郎助教授に深謝する。

さらに，研究会等において種々有益な御教示，御討論をいただいた電子通信学会アンテナ・伝播研究会委員長喜連川隆博士に深謝する。

本研究遂行にあたって，御協力いただき，また種々有益な御討論をいただいた大阪大学大学院塩沢俊之（現在，大阪大学工学部），吉田健一（現在，住友電工株式会社），二瓶文博（現在，電々公社電気通信研究所），中川紀美雄，および小川英一の諸氏，ならびに種々有益な御討論をいただいた大阪大学大学院間剛氏をはじめとする板倉研究室の諸兄に厚く御礼申し上げる。

文　　献

(1) *J. H. Chisholm and J. C. James* : "*Radar evidence of solar wind and coronal mass motions*", *Astrophys. J.*, **140**, *pp.* 377 − 379 (*July* 1964).

(2) *W. C. Erickson* : "*The radio−wave scattering properties of the solar corona*", *Astrophys. J.*, **139**, *pp.* 1290 − 1311 (*May* 1964).

(3) *Special Issue on MHD Power Generation*, *Proc. IEEE*, **56** (*Sept.* 1968).

(4) *H. Seifert*, *Ed.* : *Space Technology* (*John Wiley & Sons*, *New York*, 1959).

(5) *A. Sommerfeld* : *Electrodynamics* (*Academic Press*, *New York*, 1964), *Sec.* 34.

(6) *C. Møller* : *The Theory of Relativity* (*Oxford University Press*, *London*, 1952), *Chap.* 7.

(7) *C. T. Tai* : "*A study of electrodynamics of moving media*", *Proc. IEEE*, **5**, *pp.* 685 − 689 (*June* 1964).

(8) 藤岡　弘，塩沢俊之，熊谷信昭："運動電気双極子からの相対論的電磁放射"，信学誌，**49**，*pp.* 1147 − 1152 (昭41 − 06).

(9) *J. R. Ellis* : "*The fields of an arbitrarily moving dipole*", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59**, *pp.* 759 − 774 (1963).

(10) *H. Mott*, *G. B. Hoadley*, *and W. R. Davis* : "*The fields of a moving electric dipole*", *Proc. IEEE* (*Correspondence*), **53**, *pp.* 407 − 408 (*Apr.* 1965).

(11) *H. Mott*, *G. B. Hoadley*, *and W. R. Davis* : "*Radiation from the moving electric dipole*", *Proc. IEEE* (*Letters*), **55**, *pp.* 92 − 93 (*Jan.* 1963).

(12) 塩沢俊之，熊谷信昭："運動双極子アンテナの放射特性──微視的放射理

論による考察", 信学誌, 50, pp. 38 − 45 (昭42 − 01).

(13) J. F. Holmes and A. Ishimaru : " Relativistic communications effects associated with moving space antennas", IEEE Trans., AP − 17, pp. 484 − 488 (July 1969).

(14) R. T. Compton, Jr., and C. T. Tai : " Radiation from harmonic sources in a uniformly moving media", IEEE Trans., AP − 13, pp. 574 − 577 (July 1965).

(15) 藤岡 弘, 熊谷信昭 : " 運動媒質中におけるアンテナ・アレイの放射特性", 信学誌, 49, pp. 1509 ～ 1515 (昭41 − 08).

(16) D. K. Cheng and F. I. Tseng : " Theorems concerning optimization and synthesis of antenna arrays in a moving medium", Proc. IEEE (Letters), 56, pp. 1622 − 1623 (Sept. 1968).

(17) F. I. Tseng and D. K. Cheng : " Pattern synthesis of circular arrays in a moving medium", IEEE Trans. (Communications), pp. 524 − 526 (July 1969).

(18) K. S. H. Lee and C. H. Papas : " Electromagnetic radiation in the presence of moving simple media", J. Math. Phys., 5, pp. 1668 ～ 1672 (Dec. 1964).

(19) K. S. H. Lee and C. H. Papas : " Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP − 13, pp. 799 ～ 804 (Sept. 1965).

(20) C. T. Tai : " The dyadic Gree's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans. (Communications), AP − 13, pp. 322 − 323 (Mar. 1965).

(21) R. T. Compton, Jr. : " One − and two − dimensional Green's functions for electromagnetic waves in moving simple media", J. Math. Phys., 9, pp. 1865 − 1872 (Nov. 1968).

(22) *B. R. Chawla and H. Unz* : "*Radiation in a moving anisotropic plasma*", *Proc. IEEE* (*Letters*), 54, *pp.* 1103 − 1105 (*Aug.* 1966).

(23) *S. W. Lee and Y. T. Lo* : "*Radiation in a moving anisotropic medium*", *Radio Sci.*, 1 (*New Series*), *pp.* 313 − 324 (*Mar.* 1966).

(24) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論"，信学会アンテナ・伝播研資（1966 − 10）.

(25) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論"，信学誌，50，*pp.* 1906 ～ 1910（昭42 − 10）.

(26) *H. Fujioka and N. Kumagai* : "*Electromagnetic radiaton in a moving lossy medium*", *Radio Sci.*, 2 (*New Series*), *pp.* 1449 − 1458 (*Dec.* 1967).

(27) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における *Poynting* 定理"，信学誌（投書），50，*pp.* 2374 ～ 2375（昭42 − 12）.

(28) 藤岡　弘："導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析"，信学会アンテナ・伝播研資 *A・P* 68 − 54（1969 − 01）.

(29) 藤岡　弘，熊谷信昭："導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析"，信学論（*B*），52 − B，*pp.* 429 ～ 433（昭44 − 08）.

(30) *D. A. Dunn, R. W. Wallace, and S. D. Choi* : "*Waves in a moving medium with finite conductivity*", *Proc. IEEE*, 57, *pp.* 45 − 57 (*Jan.* 1969).

(31) *J. R. Collier and C. T. Tai* : "*Guided waves in moving media*", *IEEE Trans.*, MTT − 13, *pp.* 441 − 445 (*July* 1965).

(32) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の回路理論的取り扱い"，信学会アンテナ・伝播研資（1966 − 06）.

(33) *H. Fujioka, K. Yoshida, and N. Kumagai* : "*Transmission-line treatment of waveguides filled with a moving*

medium", *IEEE Trans.*, MTT－15, *pp.* 265－267 (*Apr.* 1967).

(34) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の伝搬および励振特性"，信学誌（投書），50，*pp.* 920～921（昭42－05）.

(35) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭："軸方向に運動する媒質を含む導波管のモード励振"，信学誌，50，*pp.* 1227～1230（昭42－07）.

(36) *L. J. Du and R. T. Compton, Jr.*: "*Cutoff phenomena for guided waves in moving media*", *IEEE Trans.*, MTT－14, *pp.* 358－363 (*Aug.* 1966).

(37) *T. Shiozawa*: "*Guided waves in a simple moving medium*", *Proc. IEEE* (*Letters*), 54, *pp.* 1984－1985 (*Dec.* 1966).

(38) *H. Gruenberg and P. Daly*: "*Waveguides containing moving dispersive media*", *IEEE Trans.*, MTT－15, *pp.* 636－642 (*Nov.* 1967).

(39) *G. L. Jiang*: "*Transformation theory of guided waves in moving media*", *J. Appl. Phys.*, 38, *pp.* 3692－3696 (*Aug.* 1967).

(40) *J. A. Kong and D. K. Cheng*: "*On guided waves in moving anisotropic media*", *IEEE Trans.*, MTT－16, *pp.* 99－103 (*Feb.* 1968).

(41) *H. Berger and J. W. E. Griemsmann*: "*Guided waves in moving dispersive media, Part I: Nonrelativistic velocities*", *IEEE Trans.*, MTT－16, *pp.* 11－16 (*Jan.* 1968).

(42) *H. Berger and J. W. E. Griemsmann*: "*Guided waves in moving dispersive media, Part II: Relativistic velocities*", *IEEE Trans.*, MTT－16, *pp.* 16－20 (*Jan.* 1968).

(43) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭："導電性運動媒質を含む導波管の理

論（厳密解）”，信学会アンテナ・伝播研資*A・P* 68－32（1968－08）．

(44) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭：“導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い”，信学論（*B*），**52－B**，*pp*．130～135（昭44－03）．

(45) *S. N. Stolyarov*：“*Reflection and refraction of electromagnetic waves at a moving boundary*”，*Soviet Phys.－Technical Phys.*，8，*pp*．418－422（*Nov*．1963）．

(46) *C. T. Tai*：“*Reflection and refraction of a plane electromagnetic wave at the boundary of a semi-infinite moving medium*”，*paper presented at* **URSI** *sping meeting*，*Washington*，*D. C.*（1965）．

(47) *C. Yeh*：“*Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medum*”，*J. Appl. Phys.*，**36**，*pp*．3513－3517（*Nov*．1965）．

(48) *C. Yeh*：“*Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium*”，*J. Appl. Phys.*，**37**，*pp*．3079－3082（*July* 1966）．

(49) 塩沢俊之，間　剛，熊谷信昭：“静止媒質と運動媒質の境界面における平面波の反射および屈折”，信学誌，**50**，*pp*．1381－1388（昭42－08）．

(50) 細野敏夫，日向　隆，湯田幸八：“境界面に平行に運動する媒質による電磁波の反射について”，信学論（*B*），**51－B**，*pp*．301－307（昭43－07）．

(51) *V. P. Pyati*：“*Reflection and refraction of electromagnetic waves by a moving dielectric medium*”，*J. Appl. Phys.*，**38**，*pp*．652－655（*Feb*．1967）．

(52) *S. W. Lee and Y. T. Lo*：“*Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium*”，*J. Appl. Phys.*，**38**，*pp*．870－

875 (*Feb*. 1967).

(53) *C. S. Tsai and B. A. Auld* : "*Wave interactions with moving boundaries*", *J.Appl. Phys.*, **38**, *pp*. 2106 − 2115 (*Apr*. 1967).

(54) *T. Shiozawa, K. Hazama, and N. Kumagai* : "*Reflection and transmission of electromagnetic waves by a dielectric half − space moving perpendicular to the plane of incidence*", *J. Appl. Phys.*, **38**, *pp*. 4459 − 4461 (*Oct*. 1967).

(55) 間　剛，塩沢俊之，熊谷信昭："入射面に垂直に運動している半無限等方性プラズマの反射特性"，信学論(*B*)（研究速報），**51 − B**，*pp*. 164 − 165（昭43 − 04）.

(56) *C. Yeh* : "*Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium. II. Parallel polarizations*", *J. Appl. Phys.*, **38**, *pp*. 2871 − 2873 (*June* 1967).

(57) *P. Daly and H. Gruenberg* : "*Energy relations for plane waves reflected from moving media*", *J. Appl. Phys.*, **38**, *pp*. 4486 − 4489 (*Oct*. 1967).

(58) *C. Yeh* : "*Brewster angle for a dielectric medium moving at relativistic speed*", *J. Appl. Phys.*, **38**, *pp*. 5194 − 5200 (*Dec*. 1967).

(59) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用（I）"，信学会アンテナ・伝播研資 *A・P* 67 − 49 (1967 − 12).

(60) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用（II）"，信学会アンテナ・伝播研資，***A・P*** 67 − 60 (1968 − 03).

(61) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："導電性運動媒質の境界面における境

界条件とエネルギー関係式”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 67－59（1968－03）．

(62) *H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai*：“*Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half space*”，*J. Appl. Phys.*（*Communications*），**39**，*pp.* 2161－2162（*Mar.* 1968）．

(63) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“運動している導電性誘電体と平面電磁波との相互作用”，信学論（*B*）（研究速報），**51－B**，*pp.* 407－408（昭43－08）．

(64) *H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai*：“*Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma fluid*”，*Can. J. Phys.*，**47**，*pp.* 375－387（*Fed.* 15，1969）．

(65) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式”，信学論（*B*）（研究速報），**52－B**，*pp.* 103～104（昭44－02）．

(66) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用”，信学論（*B*），**52－B**，*pp.* 359～366（昭44－07）．

(67) *T. Shiozawa and K. Hazama*：“*General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium*”，*Radio Sci.*，**3**（*New Series*），*pp.* 569～576（*June* 1968）．

(68) *J. A. Kong and D. K. Cheng*：“*Wave behavior at an interface of a semi-infinite moving anisotropic medium*”，*J. Appl. Phys.*，**39**，*pp.* 2282－2286（*Apr.* 1968）．

(69) 間　剛，塩沢俊之，熊谷信昭：“運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過（一般解），信学論（*B*），**51－B**，*pp.* 575～581（昭43－12）．

(70) 深井一郎，風間輝雄，鈴木道雄："境界面に平行に運動するプラズマのブリュースタ角について"，信学論(*B*)（研究速報），**52－B**，*pp*. 106～108（昭44－02）.

(71) 細野敏夫，日向　隆，湯田幸八："入射面に垂直に相対運動している2媒質の境界面における反射現象"，信学論(*B*)，**52－B**，*pp*. 367～374（昭44－07）.

(72) 藤田広一，林松　汎，柳瀬智夫："移動境界面における平面波の反射と透過"，信学論(*B*)，**52－B**，*pp*. 526～532（昭44－09）.

(73) 深井一郎，鈴木道雄，風間輝雄："異方性運動媒質による平面電磁波の反射および透過"，信学論(*B*)，**52－B**，*pp*. 578～585（昭44－10）.

(74) 藤岡　弘，小川英一："異常分散領域における光波と運動している分散性誘電体媒質との相互作用"，信学論(*B*)，掲載予定.

(75) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭："運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(I)"，昭43信学全大，*No*. S6－4（昭43－10）.

(76) 藤岡　弘，中川紀美雄："運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(II)"，昭44連大，*No*. 1357（昭44－03）.

(77) 藤岡　弘，中川紀美雄："運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波と放射波について"，信学会アンテナ・伝播研資*A*・*P* 69－10（1969－06）.

(78) 藤岡　弘，中川紀美雄："運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる放射"，信学論(*B*)，投稿中.

(79) *W*. *K*. *H*. *Panofsky and M*. *Phillips* : *Classical Electricity and Magnetism*（*Addison-Wesley*, *Reading*, *Mass*., 1960）, *p*. 224.

(80) *Ibid*., *p*. 283.

(81) *Ibid*., *p*. 252.

(82) *J*. *A*. *Stratton* : *Electromagnetic Theory*（*McGraw－Hill*,

New York, 1941), *p*. 82.

(83) *W. K. H. Panofsky and Phillips*, *op. cit.*, *p*. 298

(84) *S. Silver*: *MicrowaveAntenna Theory and Design* (*McGraw-Hill*, *New York*, 1949), *p*. 2.

(85) *L. Landau and E. Lifshitz*: *The Classical Theory of Fields* (*Addison-Wesley*, *Reading*, *Mass.*, 1961), *p*. 132.

(86) *J. A. Stratton*, *op. cit.*, *p*. 15.

(87) 藤岡　弘，小川英一："導電性運動媒質中の増幅波の励振"，輻研資 (1969-11).

(88) *L. J. Kijewski*, *J. B. Fanucci*, *and N. Ness*: "*Impedance characteristics of an ac MHD generator*", *IEEE Trans.*, ED-11, *pp*. 14-20 (*Jan*. 1964).

(89) *R. N. Sudan*: "*Interaction of a conducting fluid stream with a travelling wave of magnetic field of finite extension*", *J. Appl. Phys.*, 34, *pp*, 641-650 (*Mar*. 1963).

(90) *R. C. Costen and D. Adamson*: "*Three-dimensional derivation of the electromagnetic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary*", *Proc. IEEE*, 53, *pp*. 1181-1196 (*Sept*. 1965).

(91) *D. L. Turcotte and G. Schubert*: "*Intraction of low-frequency electromagnetic waves with a plasma*", *Phys. Fluids*, 4, *pp*. 1156-1161 (*Sept*. 1961).

(92) 奥田治之："赤外線天文学"，自然，24，*pp*，26-33 (昭44-05).

(93) *J. A. Stratton*, *op. cit.*, *p*. 483.

(94) *A. Sommerfeld*: *Optics* (*Academic Press*, *New York*, 1954), *Secs*. 17-19.

(95) *S. R. Seshadri*: "*Radiation from an electric dipole in a*

plasma column", *Proc. IEE*, **112**, *pp.* 249～253 (*Feb.* 1965).

(96) G. Yeh : "*Wave propagation on a moving plasma column*", *J. Appl. Phys.* (*Communications*), **39**, *pp.* 6112－6113 (*Dec.* 1968).

関連発表論文

I. 電子通信学会雑誌

(1) 藤岡　弘，塩沢俊之，熊谷信昭："運動電気双極子からの相対論的電磁放射"，信学誌，**49**，*pp*. 1147～1152（昭41－06）.

(2) 藤岡　弘，熊谷信昭："運動媒質中におけるアンテナ．アレイの放射特性"，信学誌，**49**，*pp*. 1509～1515（昭41－08）.

(3) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の伝搬および励振特性"，信学誌（投書），**50**，*pp*. 920～921（昭42－05）.

(4) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭："軸方向に運動する媒質を含む導波管のモード励振"，信学誌，**50**，*pp*. 1227～1230（昭42－07）.

(5) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論"，信学誌，**50**，*pp*. 1906～1910（昭42－10）.

(6) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における *Poynting* 定理"，信学誌（投書），**50**，*pp*. 2374～2375（昭42－12）.

(7) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動している導電性誘電体と平面電磁波との相互作用"，信学論（*B*）（研究速報），**51－B**，*pp*. 407～408（昭43－08）.

(8) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式"，信学論（*B*）（研究速報），**52－B**，*pp*. 103～104（昭44－02）.

(9) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭："導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い"，信学論（*B*），**52－B**，*pp*. 130～135（昭44－03）.

(10) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用"，信学論（*B*），**52－B**，*pp*. 359～366（昭44－07）.

(11) 藤岡　弘，熊谷信昭："導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析"，信学論（*B*），**52－B**，*pp*，429～433（昭44－08）.

(12) 藤岡　弘，小川英一："異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用"，信学論（*B*），掲載予定.

(13) 藤岡　弘，中川紀美雄："運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる放射"，信学論(*B*)，投稿中.

II. 外　国　雑　誌

(1) *H. Fujioka, K. Yoshida, and N. Kumagai* : "*Transmission-line treatment of waveguides filled with a moving medium*", *IEEE Trans.*, MTT-15, *pp.* 265 − 267 (*Apr.* 1967).

(2) *H. Fujioka and N. Kumagai* : "*Electromagnetic radiation in a moving lossy medium*", *Radio Sci.*, 2 (*New Series*), *pp.* 1449 − 1458 (*Dec.* 1967).

(3) *H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai* : "*Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half-space*", *J. Appl. Phys.* (*Communications*), 39, *pp.* 2161 − 2162 (*Mar.* 1968).

(4) *H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai* : "*Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma fluid*", *Can. J. Phys.*, 47, *pp.* 375 − 387 (*Feb.* 15, 1969).

III. 電子通信学会全国大会・電気四学会連合大会

(1) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の諸特性"，昭41信学全大，*No.* 299 (昭41 − 11).

(2) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論"，昭41信学全大，*No.* 301 (昭41 − 11).

(3) 藤岡　弘，森　道直，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における双極子放射"，昭42連大．*No*．1278（昭42－04）．
(4) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における*Poynting*定理"，昭42信学全大，*No*．360（昭42－10）．
(5) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用"，昭42信学全大，*No*，363（昭42－10）．
(6) 藤岡　弘，熊谷信昭："導電性運動媒質中の平面波と波動増幅現象"，昭43信学全大，*No*．S6－2（昭43－10）．
(7) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭："運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(I)"，昭43信学全大，*No*．S6－4（昭43－10）．
(8) 藤岡　弘："相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における全反射現象"，昭44連大，*No*．1351（昭44－03）．
(9) 藤岡　弘，中川紀美雄："運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(II)"，昭44連大，*No*．1357（昭44－03）．

Ⅳ．電子通信学会アンテナ・伝播研究会

(1) 藤岡　弘，塩沢俊之，熊谷信昭："運動電気双極子からの相対論的電磁放射"，信学会アンテナ研資（1965－12）．
(2) 藤岡　弘，熊谷信昭："運動媒質中における放射指向性合成の理"，信学会アンテナ研資（1966－03）．
(3) 藤岡　弘，吉田健一，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の回路理論的取り扱い"，信学会アンテナ・伝播研資（1966－06）．
(4) 藤岡　弘，熊谷信昭："損失のある運動媒質中における電磁放射理論"，信学会アンテナ・伝播研資（1966－10）．
(5) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭："運動媒質を含む導波管の伝搬および

励振特性”，信学会アンテナ・伝播研資（1966－12）。
(6) 藤岡　弘，熊谷信昭：“損失のある運動媒質中におけるアンテナ放射”，信学会アンテナ・伝播研資，A・P 67－10（1967－06）。
(7) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用（I）”，信学会アンテナ・伝播研資，A・P 67－49（1967－12）。
(8) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用（II）”，信学会アンテナ・伝播研資 A・P 67－60（1968－03）。
(9) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“導電性運動媒質の境界面における境界条件とエネルギー関係式”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 67－59（1968－03）。
(10) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭：“導電性運動媒質を含む導波管の理論（厳密解）”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 68－32（1968－08）。
(11) 藤岡　弘：“導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 68－54（1969－01）。
(12) 藤岡　弘，中川紀美雄：“運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波と放射波について”，信学会アンテナ・伝播研資A・P 69－10（1969－06）。

V. 輻射科学研究会資料

(1) 藤岡　弘，熊谷信昭：“運動媒質中における放射指向性合成の理”，輻研資（1966－02）。
(2) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“運動媒質を含む導波管の理論”，輻研資（1966－12）。
(3) 藤岡　弘，熊谷信昭：“損失のある運動媒質中における放射電磁界の性

質”，輻研資（1966－12）。
(4) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用”，輻研資（1967－10）。
(5) 藤岡　弘，二瓶文博，熊谷信昭：“導電性運動媒質の境界面における境界条件とエネルギー関係式”，輻研資（1968－02）。
(6) 藤岡　弘，中川紀美雄，熊谷信昭：“損失のある運動媒質を含む導波管の理論（厳密解）”，輻研資（1968－04）。
(7) 藤岡　弘，熊谷信昭：“導電性運動媒質中の電磁界と波動増幅現象”，輻研資（1968－07）。
(8) 藤岡　弘，中川紀美雄：“運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波の励振”，輻研資（1968－11）。
(9) 藤岡　弘，小川英一：“相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における平面電磁波の反射と透過”，輻研資（1969－04）。
(10) 藤岡　弘，小川英一：“異常分散領域における光波と媒質との相互作用”，輻研資（1969－06）。
(11) 藤岡　弘，小川英一：“導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射と透過”，輻研資（1969－11）。
(12) 藤岡　弘，小川英一：“導電性運動媒質中の増幅波の励振”，輻研資（1969－11）。