

Title	相対論的電磁界理論に関する研究
Author(s)	藤岡,弘
Citation	大阪大学, 1970, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1576
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 相対論的電磁界理論に関する研究

昭和44年12月

# 相対論的電磁界理論に関する研究

藤 岡

弘

昭和44年12月

# 内 容 梗 概

本論文は筆者が大阪大学大学院工学研究科(通信工学専攻)に在学中行なった相対論的電磁界理論に関する研究の成果をまとめたものであり、つぎの10章からなっている。

第1章は序論であって、宇宙工学、電波天文学等の進歩に伴って相対論的 電磁界理論が工学における重要な研究課題の一つとして各方面で取り上げられるようになってきた経緯を述べるとともに、本研究がこの分野において占める地位を明らかにしたものである。

、第2章においては、相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため、真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの電磁放射について考察し、相対論的効果の結果従来の静止あるいは 進静止波源からの電磁放射にはみられなかった種々の特異な現象が現われる ことを示している。

第3章は導電性運動媒質中の電磁理論の近似解について論じたものである。 ここで,近似解とは媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解をい う。特に,波源より十分遠方の点における電磁界,すなわち遠距離放射電磁 界については数値計算例をあげて詳しく検討し,遠距離放射電磁界はその実 数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり,その結果静止媒 質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない種々の特異 な現象があらわれることを示している。

第4章においては、導電性運動媒質中の電磁理論の厳密解について論じ、近似解の場合には見られなかった特異な現象があらわれることを示している。特に、導電性媒質が波の位相速度よりも大きい速度で運動する場合には、波が進むにつれて波動の振幅が増大することをTEM波を例にあげて示し、さらにこの現象を導電性運動媒質中の厳密なPoynting定理およびMinkowskiの電磁エネルギー・運動量テンソルを用い説明している。

第5章は導電性運動媒質を含む導波管の理論の近似解について論じたものである。ここでは、光速に比べて十分小さい速度で軸方向に運動する導電性

媒質を含む、任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析している。

第6章は導電性運動媒質を含む導波管の理論の厳密解について論じ、近似解の場合には見られなかった特異な現象があらわれることを示している。特に、媒質の運動速度が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき、第4章の場合と同様に波動増幅現象が起こることを示している。

第7章は、真空中を境界面と入射面の両者に平行に運動している半無限の 圧縮性プラズマ流体と平面電磁波との相互作用について論じたものである。 ただし、入射電磁波としてはE波およびH波の2つを考え、それぞれの場合 について、反射係数、透過係数および透過波の伝搬定数などを求め、媒質が 運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討 している。

第8章は、異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用について論じたものである。ここでは、運動している分散性誘電体媒質と平面光波との相互作用の問題を、媒質の電子の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い、従来の場合とは異った種々の興味ある現象があらわれることを示している。特に、異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用については数値計算例をあげて詳しく検討している。

第9章は運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる放射について論じたものである。ここでは、まずダイポールによって励振される表面波の電磁界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め、プラズマ媒質の運動が分散関係式および表面波電力等に与える影響を数値計算例をあげて詳しく検討している。ついで遠距離放射電磁界を鞍部点法によって求め、媒質の運動が放射電力に与える影響等について考察している。

第10章は結論であって、本研究の成果を総括して述べている。

以上の各章を構成する研究内容はすべて, 電子通信学会雑誌,

IEEE Trans. on MTT, Radio Science, J. Appl. Phys., Can. U. Phys., 電子通信学会アンテナ・伝播研究会, 電気四学会連合大会, 電子通信学会全国大会, 輻射科学研究会等においてすでに発表されたものである.

第	1	章	序	論		1
第	2	章	運動電		双極子からの相対論的電磁放射	
	2 •	1	序	言		. 5
	2 .	2	静止電	気	双極子の放射電磁界	- 5
	2 •	3	運動電	戾	双極子の放射電磁界	. 8
	2	4	放射エ	木	ルギー密度、放射電力および利得関数	10
	2 .	- 5	周波数	の	Doppler 効果	14
	2	6	検	討		15
	2 -	. 7	結	言		19
			付	録		19
第	3	章	導電性	運	動媒質中の電磁理論 (I) 近似解	2-3
	3	• 1	序	言	t.	23
	3	• 2	M a xw	e l	l - Minkowski 方程式と波動方程式。	24
	3	• 3	遠距離	放	射電磁界	30
	3	4 .	電気形	放	射電磁界の性質	33
	3	• 5	電気刃	極	子による放射	36
	3	- 6	結	言		43
第	4	章	導電性	: 運	動媒質中の電磁理論(II)厳密解	45
	4	- 1	序	言		45
	4	• 2	Maxu	e l	l – Minkowski 方程式と波動方程式	4 5
	4	• 3	Poyn	ti	ng 定理	50
	4	• 4	平面波	٤	波動增幅現象	52
	4	• 5	Mink	ow	skiの電磁エネルギー・運動量テンソルと	
			波動堆	幅	現象	5 6

			4 •	5	• 1		I	ネ	ル	+		関	係	<b>元</b>	· ··							· · · · ·	• • • •	• • • •		•••		• • • • •	• • • • • •	•-	5 6
			4 •	5	• 2		増	幅	波	Ø	励	振	•									··· · · ·		· · · · ·	· · · • ·					,	6 1
	4	•	6	紀	i		言	ورد	••••							• • • •		· • • •		'		• • • •				• • • •				(	5 3
第	5		章	導	電																								•		
	5	٠	1	序	:		言			••••	• • • •	••••												• • • •				• • • • •		(	5 5
	5	•	2	運	動	媒	質	を	含	乜	導	波	管	内	の	電	磁	界											• • • • •	,	6 5
	5	•	3	非	斉	次	伝	送	方	程	式							• • • •							· · · · ·		• • • • •	• • • • •		(	5 9
	5	•	4	斉	次	伝	送	方	程	눛								• • • • •												;	7 2
	5	•	5	運	動	媒	質	を	含	ţ	方	形	導	波	管	の	ŧ	_	۴	励	振					• • •				;	7 4
	5	•	6	結			言	٠								· - • •				• • • •	. <b></b> .			· · • · ·						;	76
第	6		章	導	電	性	運	動	媒	質	を	含	ts	導	波	管	の	理	論	C	II )	厳	密	解						7	77
	6	•	1	序	:		言			· · · ·		••••										• •				• • • •				;	77
	6	•	2	導	波	管	中	Ø	電	磁	界				<i>.</i> .	·	· - • ·				· · · ·	• • • • •					••••			;	77
	6	•	3	伝	搬	定	数										· · · •	••••	<b>.</b>								• • • •			. ;	7 9
	6		4	電	磁	ェ	ネ	ル	ギ	_	Ø	流	れ	<b></b>																{	38
	6	•	5	ı	ネ	ル	ギ	_	関	係	式	٤	波	動	増	幅	現	象	<b>.</b>		· · • • • •		- <i>- •</i> •		• • • •	· • • •				. 9	7 1
	6		6	結			言							<b></b>								· · · · ·								9	2
第	7		章	Œ	縮	性	運	動	プ	ラ	ズ	マ	流	体	と	平	面	電	磁	波	٤	Ø ;	相:	互化	乍月	Ħ				ç	₹5
	7		1	序			言									• • • •						· • • • •						• • • • •	· • • • • •	ç	₹5
	7	•	2	静	止	プ	ラ	ズ	マ	流	体	の	基	本	方	程	式			<b>.</b>									<b>.</b> .	ç	₹5
	7		3	入	射	波	か	E	波	の	場	合										••••			- <b></b> -		·•··				79
			7 •	3 .	. 1		反	射:	波	٤	透	過	波			<i></i>									<b></b>					1 (	0 (
			<b>7</b> •																												
	7																														
																													<b></b>		
			7 •																												

	7	•	5		結			言	••••				• • • •							• • • -	•					• • •						11	5
					付			録		••••			•••												••••	• • • •				• • • • •		1 1	5
第	8		章		異	常	分	散	頒	域	に	お	け	る	光	波	٤	運	動	媒	質	٤	Ø	相	互	作	用	<b>.</b>	••••			11	7
	8	•	1		序			言				· • • •					• • • •	• • • •							••••	<b>.</b>					• • • •	1 1	7
	8		2		導	電	性	吸	収	媒	質	と	非	導	電	性	吸	収	媒	質		• • • •						<b></b>	• • • •		· · • • ·	1 1	7
	8		3		分	散	性	誘	電	体	媒	質	٤	光	波	と	の	相	互	作	用			<b></b>								12	0
			8	•	3 .	. 1		静	止	媒	質	の	光	学	的	性	質	·		• • • •					. <b>.</b>	·						12	0
			8		3 .	• 2		運	動	媒	質	٤	光	波	٤	Ø	相	互	作	用					<b>.</b>					••••		1.2	1
			8		3 .	• 3		分	散	曲	線	K	関	す	る	考	察					- <b></b> -				. <b></b>		- <b></b>				12	7
	8	•	4		検	討	お	ょ	び	数	値	計	箅	例					<b>.</b>	•••					<b>.</b> .			<b>.</b> .		:	<b></b> .	13	2
	8	•	5		結		,	言						<b></b> .			· • • •															14	6
第	9		章		運	動	ι	7	V	る	円	柱	状	プ	゙゙ラ	ズ	· マ	中	の	ダ	1	ポ	_	n	か	È	0	が	、东	ţ	• • • • ·	14	7
	9		1		序			言																				<b>.</b> .		••••		14	7
	9		2		プ	' ラ	ズ	~	円	柱	内	外	Ø	電	磁	界				<b></b>			<b>.</b>			٠			•••	• • • • •		14	7
	9		3		表	面	波	Ø	励	振																. <b>.</b>		•••			<i>.</i>	15	3
			9	•	3	• 1		分	散	関	係	式																				15	3
			9		3	• 2	•	表	面	波	電	力				<b>.</b> .	•••	•							• • • •				<b>.</b>			15	8
	9		4		空	間	放	射	波								<b>.</b> .	<i>-</i>	. <b></b>		<b></b>					. <b>.</b>					<b></b> .	16	5
	9		5		結			言					<b></b> .				· • · · ·											• • • •		<b></b>		17	2
第	1	0	章		結			論	i · · ·		• •															<i></i>						17	3
謝			稖	• • •		• • • •				• • • •										<b>.</b>						. <b></b>	<b></b>					17	4
文			献	·				:													<b>.</b>		. <b></b>	• • • •							• • • • •	-17	5
関	連		発	悬	į	論	文	· · · ·	• • • •											,					<b>-</b>	•••	•					1 8	3 5

1873年, Maxwellの"Treatise on Electricity and Magnetism"によって電磁気学が物理学における最も基本的な理論体系の一つと して確立されていらい今日に至る約一世紀の間に電磁界理論は長足の進歩を とげ、現在では通信工学を始めとする電気工学あるいは電子工学等の工学の 諸分野における最も重要な基礎理論の一つとなっている。ところで、従来、 工学の分野において取り扱われる電磁現象は、観測者、波源および媒質の三 者が相対的に静止しているか、あるいは近似的に静止していると見なせる場 合に限られていた。ところが、近年、宇宙工学、電波天文学、天体物理学あ るいはプラズマ工学等の急速な進歩に伴い、従来の静止系の電磁界理論では 処理できない問題が出現しつつある。たとえば、最近行なわれた観測(1),(2) によって、太陽コロナや太陽プラズマは微粒子が相対論的な速度で運動して いるものであることが明らかにされたが、このように宇宙空間を高速度で運 動する物体の性質を調べるためには、運動媒質中の波動伝搬、あるいは運動 物体による電磁波の反射・散乱についての理論が必要となってくる。また、 最近、高速電子流を用いる新しい電子装置、例えばMHD generator 等の 開発も急速に進められている<sup>(3)</sup>さらに、宇宙空間を高速度で移動する飛しょ う体間、あるいはこのような飛しょう体と地上局間の通信は近い将来におけ る重要な工学的問題であると考えられる(4)が、その際まず解決されねばなら ない問題は、アンテナからの電磁放射がアンテナの運動によってどのように 影響されるかという問題である。

以上のような、従来の静止系あるいは準静止系の電磁界理論によっては取り扱うことができない問題を解くためには、光速度に比べて無視できない速度で運動する波源あるいは媒質を含む系の電磁界理論、すなわち相対論的電磁界理論が必要となってくる。相対論的電磁界理論は、また運動系の電磁界理論とも呼ばれ、いうまでもなくEinsteinの特殊相対性理論にその基礎をおく。Maxwellの理論を静止媒質から運動媒質に拡張することは電磁力学の歴史上何回か試みられ、Hertz、Cohn、およびLorentz等を経てEin-

stein の理論の3年後,1908年にMinkowskiによって完成された $^{(5)-(7)}$ しかし,工学の分野で相対論的電磁界理論が取り上げられるようになったのは比較的新しく,特に我が国においては著者らの研究グループが最初である。

本論文は、相対論的電磁界理論における基本的な問題、すなわち運動波源からの電磁放射、運動媒質中の電磁放射ならびに波動伝搬、および運動媒質と平面電磁波との相互作用について論じたものである。

まず、第2章においては相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため、真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの放射について考察する。運動電気双極子からの電磁放射に関する研究は比較的新しく著者ら $^{(8)}$ 、 $Ellis^{(9)}$ 、およびMottら $^{(10)}$ 、 $^{(11)}$ によってそれぞれ独立に行なわれた。まず、著者らは、静止電気双極子からの放射電磁界にLorentz変換を適用することによって運動電気双極子による放射電磁界を求め、放射エネルギー密度、放射電力、利得関数等について詳しく考察した。なお、同様の問題を $Li\acute{e}nard$ -Wiechert のポテンシャルを用いて解析することもできる $^{(12)}$ -方、EllisおよびMottらは、二個の電荷の運動を考えることにより、運動電気双極子の作る電磁界についてより一般的に考察している。なお、最近Holmesと $Ishimaru^{(13)}$ は、著者らの理論を拡張し一般の運動波源からの電磁放射現象について詳しく考察した。

つぎに、第3章および第4章では導電性運動媒質中の電磁理論について述べる。運動媒質中の電磁理論、すなわち波源と観測者とが相対的に静止しており、無限に拡がった媒質がこれら両者に対して一様に運動している場合の電磁理論は、相対論的電磁界理論の中でもきわめて重要な研究課題の一つであると考えられ、これまでに数多くの研究者による種々の興味深い結果が報告されている。 $(10^{-60})$ まず、損失のない運動媒質中の電磁理論に関する近似解は、 $(10^{-60})$ まず、損失のない運動媒質中の電磁理論に関する近似解は、 $(10^{-60})$ なが、著者ら $(15^{-60})$ および $(15^{-60})$ ないままでに比べて十分小さい場合の解をいた。ここで、近似解とは媒質の運動速度が光速度に比べて十分小さい場合の解をいた。 $(16^{-60})$ 000年で運動している誘電体中の単一の波源による放射電磁界を求め、ついで著者らは同様の媒質中に存在する複数個の波源、すなわちアンテナ・アレイによる放射電磁界を求めた。

Tseng と Cheng は著 者らの解析を拡張し、運動媒質中のアンテナ・アレイ の指向性合成について考察した。つぎに、このような損失のない運動媒質中  $ton^{(21)}$ 等によって与えられた。 Lee と Papasは 4元 ポテンシャルに関する微分方程式を変換することによって運動媒質中の任意の波源による放射電磁 界を求め,Taiは同様の問題をdyadic Green 関数を用いて解析した。ま た、Comptonは運動媒質中の波動に関する一次元および二次元の Green 関数を求めた。以上の解析は、すべて運動媒質が損失をもたない場合の解析 であるが、著者らは、導電性運動媒質中の電磁理論に関する近似解(24)~(27) と厳密解<sup>(28),(29)</sup>のそれぞれを、Maxwell-Minkowski 方程式をポテン シャルを導入して解くことによって求め,上述のような無損失媒質の場合に はみられない種々の特異な現象が現われることを示した。なお、最近Dunn ら(30) も導電性運動媒質中の波動の厳密解について論じ、著者らと同様の結 果を得ている。著者らが行なった運動媒質中の電磁理論に関する研究のうち、 第3章では導電性運動媒質中の電磁理論の近似解について述べ、第4章にお いては同じく導電性運動媒質中の電磁理論の厳密解について述べる

第5章および第6章では,導電性運動媒質を含む導波管の理論について述べる。運動媒質を含む導波管の解析は,最初 Collier と Tai (31)によってなされ,彼らは光速度に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管の固有伝送モードを,方形および円形導波管の個々の場合についてベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めた。引きつづいて著者らは,このような運動媒質を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析し,その特別な場合として Collier らの結果が得られることを示した。また,導波管中に含まれる媒質の運動速度に関する制限のない厳密な解析は,媒質に損失のない場合については Du と Compton (36) を始めとする多数の人々 (37)~(42)によってなされたが,導電性運動媒質を含む導波管の厳密解は著者ら (43),(44) によって与えられた。著者らが行なった導電性運動媒質を含む導波管の解析のうち,第5章では近似解について述べ、第6章においては厳密解について述べる。

第7章および第8章では,吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用につ いて述べる。運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題、すなわち運動媒質 による平面電磁波の反射と透過の問題は、この問題が電磁界理論における基 本的な問題の一つであることから各方面で活発に研究され、 $Stolyarov^{(45)}$  $Tai^{(46)}$ および $Yeh^{(47), (48)}$ を始めとする多数の人々 $^{(49)\sim (74)}$  による種々の 興味深い 結果 が得られている。ところで,  $\mathit{Tai}$  あるいは  $\mathit{Yeh}$ らの解析は損失 のない通常の誘電体,もしくは衝突を考慮しないプラズマ等の場合に限られ ており、吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は著者 6<sup>59)-66,(74)</sup> によって初めて考察された。さて、吸収性運動媒質を取り扱う場合には、そ の吸収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷による寄与がない非導電性 吸収媒質か、あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している導電性吸収媒 質かによって取り扱いが異なってくる。そこで,まず第7章においては導電 性吸収媒質の一例として衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を取り扱う つぎに、第8章において非導電性吸収媒質の一例として光領域における分散 性誘電体媒質を取り扱い、特に異常分散領域における平面電磁波との相互作 用について考察する。

最後に、第9章では運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射 $^{(75)\sim(78)}$ について述べる。 先に述べたように、境界のない無限に拡がった運動媒質中に存在する波源による電磁放射、あるいは運動媒質と平面電磁波との相互作用などに関する数多くの研究成果が報告されているが、境界を有する有限な運動媒質中に存在する波源による表面波あるいは空間放射波に関する詳しい報告はまだないように思われる。そこで、第9章ではこのような運動している有限な媒質中に存在する波源による放射の一例として、軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる放射について考察する。なお、最近 $Yeh^{(96)}$ は著者らとは独立に、運動している円柱状プラズマに沿って伝搬する表面波の固有伝送モードを電磁界の変換による方法を用いて求めた。

# 第2章 運動電気双極子からの相対論的電磁放射(8)

# 2 • 1 序 言

近年急速に進歩しつつある宇宙工学あるいは電波天文学に関連して、宇宙空間を高速度で運動するアンテナ等の運動波源からの電磁放射は近い将来における重要な工学的問題であると考えられる。一般に、運動している波源の速度が光速度に比べて十分小さい場合には、従来の静止系の電磁界理論をそのまま適用することができるが、波源の運動速度が光速度に比べて無視できない程に大きくなると従来知られていなかった種々の新しい現象が現われることが予想される。

そこで、本章では相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかにするため、真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子からの電磁放射について考察し、放射電磁界、放射エネルギー密度、放射電力、利得関数等について Lorentz 変換を用いて論じ、相対論的効果の結果従来の静止あるいは準静止波源からの電磁放射にはみられなかった種々の特異な現象が現われることを示す。

なお、ここでは巨視的な電磁界理論の立場から解析し、静止電気双極子の放射電磁界に Lorentz 変換を適用することによって解を求めているが、同じ問題を微視的な電磁界理論の立場から取り扱い、 $Li\acute{e}nard$  -Wiechert の電磁ポテンシャルを用いて解析することもできる...

### 2・2 静止電気双極子の放射電磁界

ここでは、静止電気双極子からの放射電磁界について考察する。いま図.2・1に示すように慣性系K(x,y,z,t)を観測者の静止座標系、K'(x',y',z',t')を双極子の静止座標系にとり、両慣性系は空間軸(x-,y-,z-,軸)をそれぞれ互いに平行に保ったまま K' がKに対してそのx 軸の正の方向に速度vで一様に運動しているものとし、さらに時刻 t=t'=0 の瞬間には K'系の原点O' がK系の原点Oに一致していたものとする。

ここで双極子は K' 系の座標原点に位置し、その双極子モーメントの方向

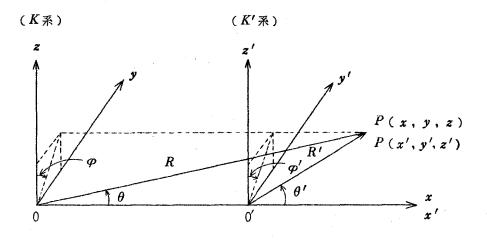


図2・1 座 標 系

は  $\mathbf{z}'$  軸に平行であるとすれば双極子の静止座標系( $\mathbf{K}'$ 系)における放射電磁界は $\mathbf{MKS}$  合理化単位系 $^*$ を用いてつぎのようにかける $^{(79)}$ 

$$E_{\theta o}{}' = h' \sin \theta_{o}{}', E_{R}{}' = E_{\varphi o}{}' = 0$$
 (2.1)

$$cB_{\varphi_{\circ}}' = h' \sin \theta_{\circ}', B_{R}' = B_{\theta_{\circ}}' = 0 \qquad (2 \cdot 2)$$

ただし、

$$h' = -\frac{k'^2 p'}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{e^{i(k'R' - \omega't')}}{R'}$$
 (2.3)

ここで k' , p' および  $\omega'$  はそれぞれ K' 系における伝搬定数,双極子モーメントおよび角周波数を表わし、  $\mathcal{E}_o$ は真空の誘電率, i は虚数単位である。また,  $\theta_o'$  は z' 軸と動径ベクトル P' とのなす角,  $\mathcal{P}_o'$  は方位角である。

さて、特殊相対論に基づく電磁界成分の Lorentz 変換式によって、K 系

<sup>\*</sup> 本論文では全章を通じてMKS合理化単位系を用いる。

における放射電磁界を求めるには上式(2·1),(2·2)をつぎのように直角座標成分で表わし,

$$E_{x}' = h' \sin \theta_{0}' \cos \theta_{0}' \cos \theta_{0}'$$

$$E_{y}' = h' \sin \theta_{0}' \cos \theta_{0}' \sin \theta_{0}'$$

$$E_{z}' = -h' \sin^{2} \theta_{0}'$$

$$cB_{x}' = -h' \sin \theta_{0}' \sin \theta_{0}'$$

$$cB_{y}' = h' \sin \theta_{0}' \cos \theta_{0}'$$

$$cB_{z}' = 0$$

さらに運動の方向、すなわちx軸を極軸にとった場合の天頂角 heta' と方 位角 heta' (図 2 ・ 1 参照)を用いると、

$$E_{x'} = h' \sin \theta' \cos \theta' \cos \varphi'$$

$$E_{y'} = h' \sin^{2}\theta' \sin \varphi' \cos \varphi'$$

$$E_{z'} = -h' (\cos^{2}\theta' + \sin^{2}\theta' \sin^{2}\varphi')$$

$$cB_{x'} = -h' \sin \theta' \sin \varphi'$$

$$cB_{y'} = h' \cos \theta'$$

$$cB_{z'} = 0$$

$$(2.4)$$

となる。ただし( $oldsymbol{ heta_o}'$ , $oldsymbol{arphi}'$ )は( $oldsymbol{ heta}'$ , $oldsymbol{arphi}'$ )とつぎの関係で結ばれている。

$$sin \theta_0' cos \varphi_0' = cos \theta'$$
  
 $sin \theta_0' sin \varphi_0' = sin \theta' sin \varphi'$   
 $cos \theta_0' = sin \theta' cos \varphi'$ 

式(2·4),(2·5)が双極子の静止座標系(K'系)における放射電磁界すなわち静止電気双極子からの放射電磁界の直角座標成分による表示である。

# 2・3 運動電気双極子の放射電磁界

双極子の静止座標系(K'系)における放射電磁界を知って観測者の静止座標系(K系)における放射電磁界を求めるには、つぎのような電磁界成分のLorentz変換式 $^{(80)}$  によればよい。

$$E_{x} = E_{x}'$$

$$E_{y} = \gamma (E_{y}' + c \beta B_{z}')$$

$$E_{z} = \gamma (E_{z}' - c \beta B_{y}')$$

$$B_{x} = B_{x}'$$

$$B_{y} = \gamma (B_{y}' - \beta E_{z}' / c)$$

$$B_{z} = \gamma (B_{z}' + \beta E_{y}' / c)$$

$$(2.6)$$

ただし、

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \ \beta = v/c \tag{2.8}$$

また、cは真空中の光速度を表わす。

このためまず式  $(2\cdot 4)$   $, (2\cdot 5)$  の右辺の各項に含まれている変数  $(R', \theta', \theta', \theta')$  を K 系における変数  $(R, \theta, \varphi)$  で表わす必要があるが、ここで放射電磁波の波面について考えてみると、 慣性系 K および K' の原点が一致した瞬間を時間の原点 t=t'=0 にとったのであるから、この瞬間に双極子から放射された波が真空中を伝搬するとき波面は K と K' のそれぞれの慣性系において、光速度不変の原理により、

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - c^{2} t^{2} = 0 \quad (K \Re)$$
  
 $x'^{2} + y'^{2} + z'^{2} - c^{2} t'^{2} = 0 \quad (K' \Re)$ 

であらわされる.上式の関係および座標のLorentz変換式 $^{(81)}$ ,

$$x = \gamma (x' + c\beta t'), y = y', z = z'$$

$$t = \gamma (t' + \beta x' / c)$$
(2.9)

を用いて、 $(R', \theta', \phi')$ を $(R, \theta, \phi)$ で表わすと、

$$R' = \gamma m^{-1}R$$

$$\cos \theta' = m (\cos \theta - \beta), \sin \theta' = \gamma^{-1} m \sin \theta$$

$$\cos \varphi' = \cos \varphi, \qquad \sin \varphi' = \sin \varphi$$

$$(2.10)$$

となる. ただし,

$$m = 1/(1 - \beta \cos \theta) \tag{2.11}$$

また、 $(R, \theta, \varphi)$ と(x, y, z)との関係は図2・1に示すとおりである。h'については式(2・10)および位相が不変量であること、すなわち、

$$k'R' - \omega' t' = kR - \omega t$$

となることを用いて,

$$h' = \gamma^{-1} m h \tag{2.12}$$

となる(付録参照)。ただし、

$$h = -\frac{k'^2 p'}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{e^{i(kR - \omega t)}}{R}$$
 (2.13)

ここで k および  $\omega$  はそれぞれ K 系における伝搬定数および角 周波数を表わす。以上の諸式  $(2\cdot4)$ ,  $(2\cdot5)$ ,  $(2\cdot10)$ ,  $(2\cdot12)$  および式  $(2\cdot6)$ ,  $(2\cdot7)$ より 観測者の静止 座標系 (K 系)における放射電磁界,すなわち速度 v で一様に運動している電気双極子からの放射電磁界はつぎのように求まる。

$$E_{x} = \alpha^{2}m^{3}h \left(\cos\theta - \beta\right) \sin\theta \cos\varphi$$

$$E_{y} = \alpha^{2}m^{3}h \sin^{2}\theta \sin\varphi \cos\varphi$$

$$E_{z} = -m^{3}h\left\{\left(\cos\theta - \beta\right)^{2} + \alpha^{2}\sin^{2}\theta \sin^{2}\varphi\right\}$$

$$-m^{2}h\beta \left(\cos\theta - \beta\right)$$
(2.14)

$$cB_{x} = -\alpha^{2} m^{3} h \sin \theta \sin \varphi$$

$$cB_{y} = m^{2} h (\cos \theta - \beta)$$

$$+ m^{3} h \beta \{ (\cos \theta - \beta)^{2} + \alpha^{2} \sin^{2} \theta \sin^{2} \varphi \}$$

$$cB_{z} = \alpha^{2} m^{3} h \beta \sin^{2} \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$(2.15)$$

ただし、

$$\alpha = \gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} \tag{2.16}$$

# 2・4 放射エネルギー密度、放射電力および利得関数

一般に K' 系における放射電磁界は平面電磁波とまったく同様の性質を示し、横波  $(\mathbf{B}' \perp \mathbf{E}')$  であると同時に  $|\mathbf{E}'|^2 = c^2 |\mathbf{B}'|^2$  なる性質をもっている。したがっていま K' 系における放射エネルギー密度を W' とし、その角度分布を w'  $(\theta', \varphi')$  で表わせば、式  $(2\cdot 4)$  または  $(2\cdot 5)$  から、

$$W' = \varepsilon_0 |h'|^2 w' (\theta', \varphi')$$
 (2.17)

と書くことができ、

$$w'(\theta', \varphi') = (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi')$$
 (2.18)

となる.

上に述べたような性質が  $K' \to K$  の変換によって変わらないことは、慣性系の変換によって変化しない不変量を電磁界テンソルの成分から求めることによってたしかめられる。 すなわら、電磁界テンソル自身のスカラー積、および電磁界テンソルとその対偶テンソルとのスカラー積をとることによりつぎの 2 つの不変量を導くことができる(82)

$$c^2B^2 - E^2 = invariant (2.19)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = invariant \tag{2.20}$$

放射電磁界の場合には式  $(2\cdot 19)$ ,  $(2\cdot 20)$ の不変量は共に零となり、したがってK系においても K' 系におけるとまったく同様の性質を示すごとがわ

かる。よってK系における放射エネルギー密度をWとし、その角度分布を $w(\theta, \varphi)$ で表わせば、式 $(2\cdot 14)$ または $(2\cdot 15)$ から、

$$W = \varepsilon_0 |h|^2 w (\theta, \varphi)$$
 (2.21)

と書くことができ、

$$w(\theta, \varphi) = \alpha^4 m^4 (1 - \alpha^2 m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \qquad (2.22)$$

となる。ここで xy-,yz-,zx- の各平面上における放射エネルギー密度の角分布をそれぞれ  $w_i(\theta),w_j(\phi),w_j(\theta)$  とすれば式(2·22)より、

$$w_{1}(\theta) = \alpha^{4} m^{4}$$

$$w_{2}(\varphi) = \alpha^{4} (1 - \alpha^{2} \cos^{2} \varphi)$$

$$w_{3}(\theta) = \alpha^{4} m^{6} (\cos \theta - \beta)^{2}$$

$$(2 \cdot 23)$$

となる.

つぎに、上に求めた放射エネルギー密度の角度分布  $w(\theta,\varphi)$  の意味を明らかにするため、時刻 t の瞬間における K 系における放射電磁波の波面の様子を図  $2\cdot 2$  に示す。ここで電気双極子は  $x=vt=c\beta t$  の位置にあり、時刻 0 の瞬間に双極子から放射された波は時刻 0 における双極子の(遅れた)位置  $Q_o(0,0,0)$  を中心とし、半径  $R_o=ct$  なる球  $S_o$  の面上にある。また一般に時刻  $\tau$  の瞬間に放射された波は、時刻  $\tau$  における双極子の(遅れた)位置  $Q(c\beta\tau,0,0)$  を中心とし、半径  $R=c(t-\tau)$  なる球 S の面上にある。したがって  $w(\theta,\varphi)$  は球  $S_o$  の面上の観測者によって時刻 t において観測される放射エネルギー密度の角度分布を表わし、これはまた一般に球 S の面上の観測者によって時刻 t に観測される放射エネルギー密度の角度分布に等しい。静止電気双極子からの放射では放射エネルギー密度と放射電力の角度分布は等しくなるが、運動電気双極子から放射される電力の角度分布は $v(\theta,\varphi)$ とは異なることに注意しなければならない。

すなわちWを一般に等速度運動をする任意のアンテナからの放射エネルギー密度とし、( $\theta$  ,  $\phi$ )の方向の単位立体角内にその運動アンテナから放射さ

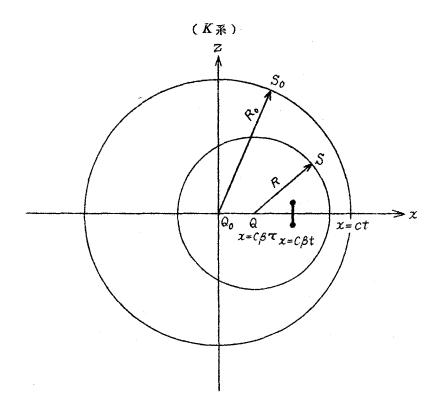


図2・2 時間よの瞬間における波面の状態

れる電力をPとすれば、時間間隔 d  $\tau$  の間に立体角 d Q内に放射されるエネルギーは、時間間隔 d t の間に半径R の球面上の微少面積  $R^2d$  Q を通過するエネルギーに等しく、したがって次式がなりたつ。

$$P d \mathcal{Q} d \tau = (cW) R^2 d \mathcal{Q} d t$$

上式の関係は遅れた時刻でと現在の時刻はの時間微分に関する変換式(83)、

 $d\tau = mdt$ 

を用いてつぎのようにかける。

$$P = m^{-1} R^2 (cW) \tag{2.24}$$

ここで、この運動アンテナの放射エネルギー密度および放射電力の角度分布をそれぞれ $w(\theta, \phi)$ および $p(\theta, \phi)$ で表わせば上式の関係により、

$$p(\theta, \varphi) = m^{-1}w(\theta, \varphi) \tag{2.25}$$

を得る。波源が静止している場合には加=1となり、したがって、

$$p(\theta, \varphi) = w(\theta, \varphi)$$

となるわけである。つぎに、全放射電力 $P_{total}$  はPを全立体 角 に わ たって積分することにより、

$$P_{total} = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} P \sin\theta \, d\theta \, d\phi \tag{2.26}$$

となる。

運動電気双極子については、その放射電力Pは式(2·21)を式(2·24)に代入して、

$$P = \mathcal{E}_0 c R^2 |h|^2 p(\theta, \varphi) \qquad (2.27)$$

となり、 $p(\theta, \varphi)$ は式(2·22)を式(2·25)に代入して、

$$p(\theta,\varphi) = \alpha^4 m^3 (1 - \alpha^2 m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \qquad (2.28)$$

となる。 また全放射電力は上式(2・27),(2・28)を式(2・26)に代入して,

$$P_{total} = \frac{8}{3} \pi \cdot \varepsilon_0 c R^2 |h|^2 \qquad (2.29)$$

となるが、これは静止電気双極子からの全放射電力、すなわち K' 系における全放射電力 $P'_{total}$ に等しい。よって、

$$P_{total} (K \Re) = P'_{total} (K' \Re)$$
 (2.30)

となる。

つぎに運動アンテナの利得関数 $G(\theta, \varphi)$ は静止アンテナの利得関数(84)と同様に、 $(\theta, \varphi)$ の方向の単位立体角内に放射される電力と、全放射電力がこのアンテナと等しい無指向性アンテナの単位立体角当りの放射電力との比によって定義することができ、したがって、

$$G(\theta,\varphi) = \frac{P}{\frac{1}{4\pi}P_{total}}$$
 (2.31)

となる。 あるいは式  $(2\cdot 24)$ ,  $(2\cdot 26)$  を用いてこれを放射エネルギー密度W で表わすと、

$$G(\theta, \varphi) = \frac{m^{-1} \cdot 4 \pi R^{2}(cW)}{\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi} m^{-1}(cW) R^{2} \sin \theta d\theta d\varphi}$$
 (2.32)

となる。この定義にしたがえば、運動電気双極子の利得関数は式(2·27)~ (2·29)を用いて,

$$G(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} p(\theta, \varphi)$$

$$= \frac{3}{2} \alpha^4 m^3 (1 - \alpha^2 m^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \qquad (2.33)$$

となる。ここで β = 0 とおくと上式は静止電気双極子の利得関数に一致する。なお、以上の解析においては双極子モーメントの方向は速度の方向に垂直であると仮定したが、速度の方向と任意の傾きをもつ運動電気双極子からの電磁放射についても、その放射電磁界、放射エネルギー密度等を以上と同様の手順によって求めることができる。

# 2·5 周波数の Doppler 効果

つぎの4成分

$$k_{i,2,3} = k_{x,\gamma,z}, k_4 = i \omega / c$$
 (2.34)

をもつ波動 4 元ベクトルを導入し、4 元ベクトルの変換式を用いると、いわゆる Doppler 効果、すなわち観測者に対して運動している波源から出る波の受信周波数  $f(K^r)$  と、波源の固有周波数  $f'(K^r)$  その関係を容易に考察することができ

$$k_{\underline{a}}' = \gamma \left( k_{\underline{a}} - i \beta k_{\underline{i}} \right) \tag{2.35}$$

を得る $^{(85)}$  さらに放射される波の方向と波源の運動方向とのなす角 heta を用いて、

$$f = f' \alpha m \tag{2.36}$$

とかける。あるいはfと f' との比を正規化周波数  $f_N$  とすれば,

$$f_N(\theta) = f/f' = \alpha m \tag{2.37}$$

となる。ここでmおよび $\alpha$ はそれぞれ式(2・11),(2・16)に示すとおりである。式(2・36)または(2・37)がDoppler効果を表わす式である。

# 2 · 6 検 討

以上の議論から、真空中を高速度で運動する電気双極子からの放射に関してつぎのような相対論的効果が表われることがわかる。

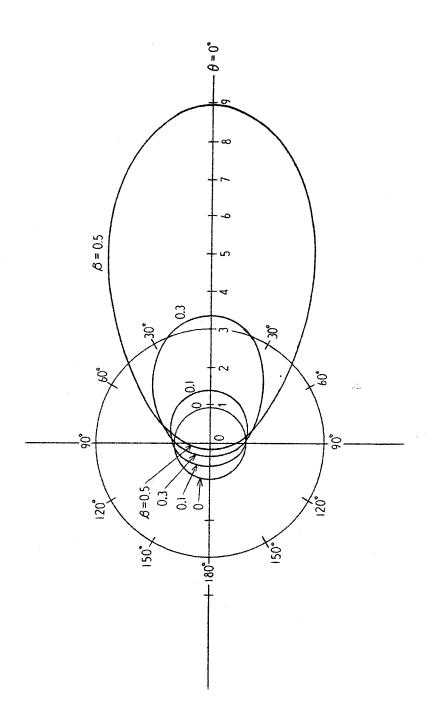
1)放射エネルギー密度の角度分布は、式(2・22)に含まれる  $\alpha m = \sqrt{1-\beta^2}$  /(1- $\beta \cos \theta$ )の高次項による特徴的な性質をもっている。 すなわち、 $\beta (= v/c)$ が 0 から増加するにつれて、その値は速度の方向( $\theta = 0$ )においては増加し、速度と反対の方向( $\theta = \pi$ )においては減少する。 $\beta \varepsilon$ パラメータとする  $w_i$ ( $\theta$ ) および  $w_i$ ( $\theta$ )の変化の様子はそれぞれ 図  $2 \cdot 3$  および図  $2 \cdot 4$  に示すとおりであり、 $\beta \rightarrow 1$ 、すなわち双極子の運動速度が光速度 c に近づく極限においては、式( $2 \cdot 24$ )より、

$$w_{1}(\theta=0)=w_{3}(\theta=0)\rightarrow\infty$$

$$w_{1}(\theta\neq0)=w_{3}(\theta\neq0)\rightarrow0$$

$$for \beta\rightarrow1$$

$$(2.38)$$



 $oxtimes 2 \cdot 3$  なり一平面における放射エネルギー密度  $oldsymbol{u_i}(oldsymbol{ heta})$ 

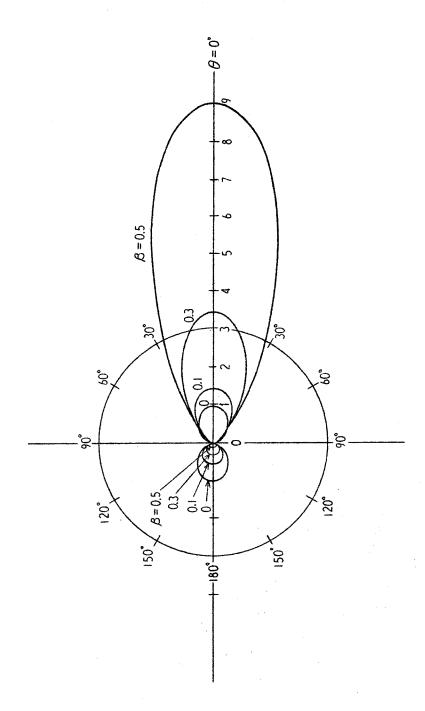
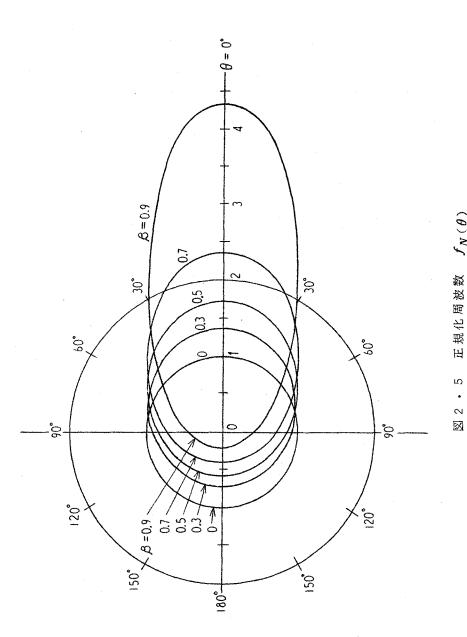


図2・4 xz - 平面における放射エネルギー密度  $w_{\mathfrak{g}}(\theta)$ 



-18-

となる。上に述べたような傾向は時刻 t の瞬間における放射電磁波の波面の 様子を示した図 2 ・ 2 からも直感的にうかがうことができる。

 $w_2(\varphi)$ , すなわち速度と垂直な面における角度分布も式  $(2 \cdot 23)$  から同様に計算することができる。

- 2) 放射電力の角度分布および利得関数については式(2・25) および(2・33) からわかるように放射エネルギー密度の角度分布  $w(\theta,\varphi)$  とは係数  $m^{-1}$  が異なるだけであり、したがって $p(\theta,\varphi)$  および $G(\theta,\varphi)$  は $w(\theta,\varphi)$  と同様の傾向を示し、式(2・38)の関係も同様に成立する。
- 3)受信周波数については、正規化周波数  $f_N(\theta)$  は  $w_i(\theta)$  と同様の傾向を示し、 $\beta$ をパラメータとする  $f_N(\theta)$  の変化の様子は図  $2 \cdot 5$  に示すとおりである。正規化周波数についても放射エネルギー密度と同様  $\beta \to 1$  の極限においては、式  $(2 \cdot 37)$  から、

$$f_N(\theta = 0) \rightarrow \infty, f_N(\theta \neq 0) \rightarrow 0, for \beta \rightarrow 1$$
 (2.39)

一般の波源は電気双極子を合成したものと考えることができ、したがって上に述べたような相対論的効果 1),2),3)は電気双極子からの放射に限らず一般に等速度運動をする任意の波源からの放射に関してあらわれる傾向であると結論できる。

## 2 • 7 結 言

となる。

相対論的な速度で運動する波源からの電磁放射の一例として、真空中を光速度に近い速度で一様に運動する電気双極子からの放射をとりあげ、放射電磁界、放射エネルギー密度、放射電力、利得関数および受信周波数の Doppler 効果の影響等を Lorentz変換による方法を用いて論じ、電気双極子の運動速度の増加に伴って起こる現象を明らかにした。

## 付 録

電磁界成分の Lorentz 変換式 (2·6), (2·7)は, ある慣性系における電磁

界を知れば、この系に対して相対的に等速度運動をしている任意の慣性系における電磁界を求めることができることを示している。したがって観測者の静止座標系(K不)における放射電磁界を求める場合には、双極子の静止座標系(K'系)における双極子モーメントp'を知れば十分であり、K系における双極子モーメントpを知る必要はないわけであるが、K系においてpがどのように表わされるかを知ることは興味ある問題であると思われるので参考のためこれを求めてみる。

振動電気双極子モーメントの振幅は電荷 q と長さ l との積で表わされ、したがって K' 系および K 系における双極子モーメントはそれぞれつぎのようにかける。

$$p' = q' l' (K' \mathcal{R}) \tag{A2.1}$$

$$p = q l \qquad (K \stackrel{?}{R}) \tag{A2.2}$$

ここで電荷量は Lorentz 変換によって変わらない不変量であるから

$$q' = q$$

となり、したがって双極子モーメントの変換は長さの変換に等しくなる。いま K' 系において、双極子モーメントの方向と速度の方向のなす角を  $\psi'$  と すれば、 I と I' との関係は図 A 2 ・ 1 に示すようになる。ただし、 $\psi$  は双極子モーメントの方向と速度の方向とのなす K 系における角である。

図A2・1の関係より、速度方向の長さのLorentz 収縮を考慮して、

$$\alpha l' \cos \psi' = l \cos \psi, \ l' \sin \psi' = l \sin \psi$$
 (A2.3)

を得る。ただしαは式(2·16)に示すとおりである。したがって,

$$l = l' \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \psi' + \sin^2 \psi'}, \quad \alpha \tan \psi = \tan \psi'$$
 (A2.4)

となり、これら2式より、

$$I = I' \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}} \tag{A2.5}$$

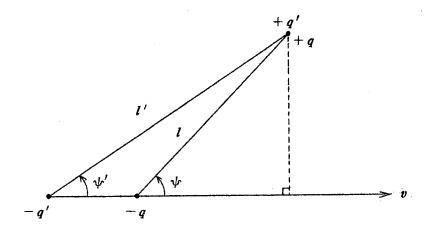


図 $A2 \cdot 1$   $l \times l'$  との関係

を得る。よってpと p'との一般的な変換式として次式を得る。

$$p = p' \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \psi}}$$
 (A2.6)

ここで $\psi=0$ ,  $\pi/2$ のとき上式はつぎのようにかける。

$$p_{_{\rm H}} = \acute{\alpha} p_{_{\rm H}}{'} (\psi = 0), \quad p_{_{\perp}} = p_{_{\perp}}{'} (\psi = \pi/2)$$
 (A2.7)

本論文においては双極子モーメントの方向は速度 v の方向に垂直であると仮定したのであるから、

$$p = p' \tag{A2.8}$$

となる。

# 第3章 導電性運動媒質中の電磁理論(I)近似解(24)~(27)

# 3・1 序 营

運動媒質中の電磁理論,すなわち波源と観測者とが相対的に静止しており,無限に拡がった媒質がこれら両者に対して一様に運動している場合の電磁理論は,相対論的電磁界理論の中でもきわめて重要な研究課題の一つであり,これまでに数多くの研究者による種々の興味深い結果が報告されている。 特に,著者らは導電性運動媒質中の電磁理論に関して,媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解,すなわち近似解(24)~(27)と媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密解(28),(29) のそれぞれを求め,媒質が無損失の場合には見られない種々の特異な現象が現われることを示した。本章においては近似解を取り扱い,厳密解に関しては次章で考察する。

媒質が無損失の場合には、放射電磁界を dyadic Green 関数を用いて直接求めることもできる $^{(14),(15)}$  が、導電性媒質の場合には電磁界を直接求める方法は解析が若干複雑となり適当でないため、本章ではベクトル・ポテンシャル等の電磁界補助量を導入し、これらの補助量を用いて電磁界を表わすことを考える。

このためまず電磁界補助量の満足すべき波動方程式をMaxwell-Min-kowski方程式から導き、この波動方程式が媒質に損失のない場合とは異なり、一次の微分項を持つ楕円形斉次2階偏微分方程式となることを示す。つぎに未知関数に適当な変換をほどこすことによって一次の微分項を消し去り、通常の形の波動方程式となし、この波動方程式の解を用いて損失のある運動媒質中における任意の波源によって生ずる電磁界を決定することができることを示す。

つぎに、波源より十分遠方の点における電磁界、すなわち遠距離放射電磁界について考察し、遠距離放射電磁界は実数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり、その結果静止媒質中もしくは運動はしていても 損失のない媒質中では見られない種々の特異な現象があらわれることを示す。

# 3·2 Maxwell-Minkowski方程式と波動方程式

無限に拡がった損失のある線形、等方かつ一様なる媒質(誘電率  $\epsilon$ 、透磁率  $\mu$ 、導電率  $\sigma$ )を考える。ただし、 $\epsilon$ 、 $\mu$ および  $\sigma$  はそれぞれ時間によらない定数であると仮定する。この媒質が観測者および波源に対して一様に運動しているとき、観測者の静止座標系における電磁界はつきのMaxwell方程式によって決定される。

$$P \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_{m}$$

$$P \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{f} + \mathbf{J}$$

$$P \cdot \mathbf{B} = \rho_{m}$$

$$P \cdot \mathbf{D} = \rho_{f} + \rho$$
(3.1)

ただし,

E,D=観測者の静止座標系における電界ベクトル

H, B =観測者の静止座標系における磁界ベクトル

 $\mathbf{J}_f$ ,  $\mathbf{\rho}_f$  =自由電流密度および自由電荷密度

J, ρ = 印加電流密度および印加電荷密度

**」**<sub>m</sub>, ρ<sub>m</sub> = 印加磁流密度および印加磁荷密度

ここで、媒質の速度 V が光速に比べて十分小さいものとすれば構成関係式はつぎのように与えられる<sup>(31)</sup>

$$D = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{H}$$

$$B = \mu \mathbf{H} - \mathbf{\Lambda} \times \mathbf{E}$$

$$J_f = \sigma (\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \times \mathbf{H})$$

$$\rho_f = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_f$$
(3.2)

ただし,

$$A = (\varepsilon_{\mu} - \varepsilon_{0} \mu_{0}) \vee$$

ここで、  $\epsilon_0$ および  $\mu_0$  はそれぞれ真空の誘電率および透磁率を表わす。

電磁界の時間変化を $e^{+j\omega t}$  と仮定し、式(2・1) および(3・2) から電東密度と磁東密度  $\mathbf{D}$  ,  $\mathbf{B}$  および自由電流密度と自由電荷密度  $\mathbf{J}_f$  、 $\rho_f$  を消去してつぎのMaxwell-Minkowski方程式を得る。

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{J}_{m}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu \sigma \mathbf{V}) \times \mathbf{H} = j\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{J}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{H} = \frac{q_{m}}{\mu}$$

$$(\mathbf{V} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu \sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$(3.3)$$

ただし,

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \tag{3.4}$$

また,

$$q = \rho + \Lambda \cdot \mathbf{J}$$

$$q_m = \rho_m + \Lambda \cdot \mathbf{J}_m$$

$$(3.5)$$

Maxwell-Minkowski方程式  $(3\cdot3)$ を解くために、まず電磁界  ${\bf E}$ ,  ${\bf H}$ を、 ${\bf J}$ および $\rho$ がその発生源である電気形電磁界  ${\bf E}^{(1)}$ 、 ${\bf H}^{(1)}$ と、 ${\bf J}_m$  および $\rho_m$ が発生源である磁気形電磁界  ${\bf E}^{(2)}$ 、 ${\bf H}^{(2)}$  とに分けて考察する。すなわち、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}$$
(3.6)

上式を式 (3·3)に代入して電気形および磁気形電磁界に関するつぎの Maxwell-Minkowski方程式を得る。

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{E}^{(1)} = -j\omega \mu \mathbf{H}^{(1)}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu\sigma \mathbf{V}) \times \mathbf{H}^{(1)} = j\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{J}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{H}^{(1)} = 0$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu\sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \times \mathbf{E}^{(2)} = -j\omega \mu \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{J}_{m}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu\sigma \mathbf{V}) \times \mathbf{H}^{(2)} = j\omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}^{(2)}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{H}^{(2)} = \frac{q_{m}}{\mu}$$

$$(\mathbf{P} - j\omega \mathbf{\Lambda} - \mu\sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{E}^{(2)} = 0$$

$$(3.8)$$

ここで電磁界および波源に関してつぎの変換を行なう。

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_{0}^{(1)} exp(j\omega\Lambda \cdot \mathbf{R})$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}_{0}^{(1)} exp(j\omega\Lambda \cdot \mathbf{R})$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{0} exp(j\omega\Lambda \cdot \mathbf{R})$$

$$\rho = \rho_{0} exp(j\omega\Lambda \cdot \mathbf{R})$$

$$(3.9)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_{0}^{(2)} exp\{(j\omega\Lambda + \mu\sigma\mathbf{V}) \cdot \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}_{0}^{(2)} exp\{(j\omega\Lambda + \mu\sigma\mathbf{V}) \cdot \mathbf{R}\}$$

$$\mathbf{J}_{m} = \mathbf{J}_{om} exp\{(j\omega\Lambda + \mu\sigma\mathbf{V}) \cdot \mathbf{R}\}$$

$$\rho_{m} = \rho_{om} exp\{(j\omega\Lambda + \mu\sigma\mathbf{V}) \cdot \mathbf{R}\}$$
(3.10)

ただし、 R は座標原点から観測点に向かう位置ベクトルである。上式を式(3·7),(3·8)に代入して次式を得る。

$$\mathbf{P} \times \mathbf{E}_{0}^{(1)} = -j \omega \mu \mathbf{H}_{0}^{(1)}$$

$$(\mathbf{P} - \mu \sigma \mathbf{V}) \times \mathbf{H}_{0}^{(1)} = j \omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{0}^{(1)} + \mathbf{J}_{0}$$
(3.11)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{H}_{0}^{(1)} = 0$$

$$(\mathbf{P} - \mu \sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{E}_{0}^{(1)} = \frac{q_{0}}{\varepsilon}$$

$$(\mathbf{P} + \mu \sigma \mathbf{V}) \times E_{0}^{(2)} = -j \omega \mu \mathbf{H}_{0}^{(2)} - \mathbf{J}_{0m}$$

$$\mathbf{P} \times \mathbf{H}_{0}^{(2)} = j \omega \hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{0}^{(2)}$$

$$(\mathbf{P} + \mu \sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{H}_{0}^{(2)} = \frac{q_{0m}}{\mu}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_{0}^{(2)} = 0$$
(3.12)

ただし,

$$q_{0} = \rho_{0} + \Lambda \cdot \mathbf{J}_{0}$$

$$q_{0m} = \rho_{0m} + \Lambda \cdot \mathbf{J}_{0m}$$
(3.13)

さて、式 (3・11) の第 3 式および式 (3・12) の第 4 式から、電磁界補助量 として、電気形ベクトル・ポテンシャル A<sub>o</sub>(1) および磁気形ベクトル・ポテン シャル A<sub>o</sub>(2) をそれぞれつぎのように導入することができる。

したがって電気形および磁気形スカラ・ポテンシャルをそれぞれ $\phi_0^{(1)}$ および $\phi_0^{(2)}$ とすれば、 $\mathbf{E}_0^{(1)}$ , $\mathbf{H}_0^{(2)}$ は

$$\mathbf{E}_{0}^{(1)} = -j \omega \mu \mathbf{A}_{0}^{(1)} - \mathbf{V} \phi_{0}^{(1)} 
\mathbf{H}_{0}^{(2)} = -j \omega \hat{\varepsilon} \mathbf{A}_{0}^{(2)} - \mathbf{V} \phi_{0}^{(2)}$$
(3.15)

とかける。式 (3・14),(3・15)を式 (3・11),(3・12) に代入し、ゲージ関係式

$$(\mathbf{P} - \mu \sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{A}_{0}^{(1)} + \mathbf{j} \omega \hat{\varepsilon} \phi_{0}^{(1)} = 0$$

$$(\mathbf{P} + \mu \sigma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{A}_{0}^{(2)} + \mathbf{j} \omega \mu \phi_{0}^{(2)} = 0$$
(3.16)

を用いてベクトル・ポテンシャルおよびスカラ・ポテンシャルに関するつぎ の波動方程式を得る。

$$\mathbf{P}^{2}\phi_{0}^{(1)} - \mu \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) \phi_{0}^{(1)} + \hat{k}^{2}\phi_{0}^{(1)} = -\frac{q_{0}}{\varepsilon}$$

$$\mathbf{P}^{2}\phi_{0}^{(2)} + \mu \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}) \phi_{0}^{(2)} + \hat{k}^{2}\phi_{0}^{(2)} = -\frac{q_{0m}}{\mu}$$
(3.18)

ただし、

$$\hat{k}^2 = \omega^2 \hat{\varepsilon} \, \mu = \omega^2 \, \varepsilon \, \mu \, \left( 1 - j \, \frac{\sigma}{\omega \, \varepsilon} \right) \tag{3.19}$$

またゲージ関係式  $(3\cdot 16)$  を用いて、 $\mathbf{E}_0^{(1)}$  および  $\mathbf{H}_0^{(2)}$  はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\mathbf{E}_{0}^{(1)} = \frac{1}{j \omega \hat{\varepsilon}} \left[ \hat{k}^{2} \mathbf{A}_{0}^{(1)} + \mathbf{P} \left( \mathbf{P} - \mu \sigma \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{A}_{0}^{(1)} \right]$$

$$\mathbf{H}_{0}^{(2)} = \frac{1}{j \omega \mu} \left[ \hat{k}^{2} \mathbf{A}_{0}^{(2)} + \mathbf{P} \left( \mathbf{P} + \mu \sigma \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{A}_{0}^{(2)} \right]$$
(3.20)

したがって、与えられた電磁流源  $J_0$ 、 $J_{om}$ によって生ずる電磁界を求めるには、波動方程式  $(3\cdot 17)$  を解いてベクトル・ポテンシャル $A_0^{(1)}$ 、 $A_0^{(2)}$ を求め、式  $(3\cdot 14)$  および  $(3\cdot 20)$  の演算を行なえばよいことになる。

波動方程式  $(3\cdot 17)$  を解くために、一次の微分項をとりのぞき方程式の形を簡単にすることを考える。このためには式  $(3\cdot 17)$  が定数係数の 楕円形線形 2 階偏微分方程式であることに着目して、 $\mathbf{A}_o^{(1)}$ 、 $\mathbf{A}_o^{(2)}$  のかわりに新しい未知関数  $\mathbf{T}_o^{(1)}$ 、 $\mathbf{T}_o^{(2)}$  をそれぞれ

$$A_0^{(1)} = \mathbf{T}_0^{(1)} \exp\left(+\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)$$

$$A_0^{(2)} = \mathbf{T}_0^{(2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)$$
(3.21)

なる関係によって導入すればよい、上式  $(3\cdot21)$  を式  $(3\cdot17)$  に代入して、 $\mathbf{T}_{o}^{(1)}$ 、 $\mathbf{T}_{o}^{(2)}$  に関するつぎの波動方程式を得る。

$$\begin{array}{l}
\mathbf{P}^{2}\mathbf{T}_{0}^{(1)} + \widehat{K}^{2}\mathbf{T}_{0}^{(1)} = -\mathbf{F}_{0}^{(1)} \\
\mathbf{P}^{2}\mathbf{T}_{0}^{(2)} + \widehat{K}^{2}\mathbf{T}_{0}^{(2)} = -\mathbf{F}_{0}^{(2)}
\end{array}$$
(3.22)

ただし,

$$\mathbf{F}_{0}^{(1)} = \mathbf{J}_{0} exp \left( -\frac{1}{2} \mu \sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \right)$$

$$\mathbf{F}_{0}^{(2)} = \mathbf{J}_{om} exp \left( +\frac{1}{2} \mu \sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \right)$$

$$\hat{K}^{2} = \hat{k}^{2} - \left| \frac{\mu \sigma \mathbf{V}}{2} \right|^{2}$$

$$(3.24)$$

波動方程式(3·22)は直ちに解くことができ、境界面のない無限に広い領域においてはその解はつぎの形の全空間にわたる体積分によって与えられる。

$$\mathbf{T}_{0}^{(1)} = \iiint_{V} \mathbf{F}_{0}^{(1)} (\mathbf{R}') G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

$$\mathbf{T}_{0}^{(2)} = \iiint_{V} \mathbf{F}_{0}^{(2)} (\mathbf{R}') G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

$$(3.25)$$

ただし、

$$G(\mathbf{R},\mathbf{R}') = \frac{e - j\hat{K}|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}{4\pi |\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}$$

また、 $\mathbf{R}'$ は波源の存在する場所を表わす。式(3·25)の積分は変数 $\mathbf{R}'$ につ

いて全空間にわたって行なわれなければならないが、波源 Jo, Jom が零の所の寄与はないから、実際には電流源もしくは磁流源の分布している領域にわたってのみ積分すれば十分である。

以上によって、境界面のない無限に拡がっている損失のある運動媒質中に任意の電流源もしくは磁流源が分布しているとき、これらの波源によって生ずる電磁界は波動方程式  $(3\cdot22)$  の解  $(3\cdot25)$  を用いて、式  $(3\cdot14)$ ,  $(3\cdot20)$  ~  $(3\cdot21)$  および  $(3\cdot9)$  ~  $(3\cdot10)$ から決定することができる.

## 3 • 3 遠距離放射電磁界

電流源および磁流源が空間の一部分に限定されて分布しているとき, これらの波源より十分遠方の点における電磁界, すなわち遠距離放射電磁界は, 前節の結果を用いてつぎのように求められる。

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{j \omega \hat{\varepsilon}} \iiint_{V} \{ \mathbf{N}^{+} \times (\mathbf{N}^{-} \times \mathbf{J}) \} \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\iiint_{V} (\mathbf{N}^{-} \times \mathbf{J}) \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

$$(3.26)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \iiint\limits_{V} (\mathbf{N}^{+} \times \mathbf{J}_{m}) \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{1}{j \omega \mu} \iiint\limits_{V} (\mathbf{N}^{-} \times (\mathbf{N}^{+} \times \mathbf{J}_{m})) \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV'$$

ただし,

$$\mathbf{N}^{\pm} = j\hat{K}\mathbf{R}_{0} \pm \frac{1}{2} \mu \sigma \mathbf{V} \qquad (3.28)$$

$$\Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{e^{-j\hat{K}R}}{4\pi R} \exp\left\{j\hat{K}\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}_{0}\right\}$$

$$+ (j\omega \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mu\sigma\mathbf{V}) \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}'))$$
 (3.29)

ここで $\mathbf{R}_{\alpha}$ (= $\mathbf{R}/R$ )はR方向の単位ベクトルを表わす。

式(3.28)に与えられるベクトル  $N^{\pm}$  はその実数部と虚数部の空間的方向が異なる複素ベクトル\* であり、 したがって電磁界 E 、 H も一般には実数部と虚数部の方向が異なる複素空間ベクトルとなる。ここで実際に観測される物理的に意味のある量、すなわち実物理量を複素空間ベクトルE 、 H と区別して E 、 H のように表わせば、これは複素空間ベクトルに時間関数  $e^{+j\omega t}$  を掛けたものの実数部で与えられつぎのように書ける。

$$\overset{\circ}{\mathbf{E}}(\mathbf{R}, t) = Re\{\mathbf{E}(\mathbf{R})e^{+j\omega t}\} 
= \mathbf{E}_{r}\cos\omega t - \mathbf{E}_{i}\sin\omega t 
\overset{\circ}{\mathbf{H}}(\mathbf{R}, t) = Re\{\mathbf{H}(\mathbf{R})e^{+j\omega t}\} 
= \mathbf{H}_{r}\cos\omega t - \mathbf{H}_{i}\sin\omega t$$
(3.30)

ただし、Re は複素量の実数部をとる操作を表わす。また添字rおよびiは複素量の実数部および虚数部を表わす。

式  $(3\cdot 26)$  ~  $(3\cdot 27)$  から  $\mathbf{E}_r$  および  $\mathbf{H}_r$  は 一般には  $\mathbf{E}_i$  および  $\mathbf{H}_i$  にそれぞれ 平行ではなく、 したがって電磁界は 楕円偏波 であることがわかる。

つぎに、式  $(3\cdot26)$  ~  $(3\cdot27)$  から、複素ベクトル $\mathbf{N}^\pm$  が積分変数  $\mathbf{R}'$  に無関係であることに注意してつぎの関係式を得る。

$$\mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} \mathbf{N}^{+} \times \mathbf{H}^{(1)}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \frac{1}{j\omega\mu} \mathbf{N}^{-} \times \mathbf{E}^{(2)}$$
(3.31)

上式(3・31)の第1式および第2式の両辺に、左から複素ベクトル  $N^-$  および  $N^+$  をそれぞれベクトル的に掛け次式を得る。

<sup>\*</sup> 複素ベクトルの演算則は実数ベクトルの演算則と同じである。

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{1}{j\omega\mu} \, \mathbf{N}^{-} \times \mathbf{E}^{(1)}$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = -\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} \, \mathbf{N}^{+} \times \mathbf{H}^{(2)}$$
(3.32)

上式の結果より、複素空間ベクトルE、 Hの複素スカラ積は常に零、すなわち

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{3.33}$$

となることがわかるが、これは実物理場で、Hが直交することを一般には意味しないことに注意しなければならない。 Eと Hとのスカラ積は式 (3・30)を用いて

$$\mathring{\mathbf{E}} \cdot \mathring{\mathbf{H}} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{H}_i \tag{3.34}$$

となる。上式から、放射電磁界 E、 H は静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中における場合とは異なり一般には直交しないことがわかる(次節参照)

つぎに、Poyntingベクトルの1周期間の平均値、すなわち電磁エネルギーの単位面積についての時間的平均の流れを<S>で表わせば、

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Re (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$
 (3.35)

となるが、放射電磁界の< > は式( $3 \cdot 31$ ) $\sim$ ( $3 \cdot 32$ )の関係を用いてつぎのように表わされる。

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \frac{1}{j \omega \hat{\epsilon}} \left\{ (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) \mathbf{N}^+ - (\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{N}^+) \mathbf{H} \right\} \right)$$
(3.36)

または、こで表わせば

$$\langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{1}{2} Re \left[ \frac{1}{j \omega \mu} \right]$$

$$\cdot \left\{ \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \left( \mathbf{N}^- \right)^* - \left\{ \mathbf{E} \cdot \left( \mathbf{N}^- \right)^* \right\} \mathbf{E}^* \right\}$$

$$(3.37)$$

ここで、記号\*は複素共役ベクトルを表わす。上式から放射電磁界の<\$>は、一般には、半径方向成分だけでなく周方向成分をももつことがわかる (次節参照)。

遠距離放射電磁界  $\stackrel{\circ}{\mathbf{E}}$ ,  $\stackrel{\circ}{\mathbf{H}}$  が直交しないことおよび放射  $\stackrel{\circ}{\mathbf{Poynting}}$  ベクトル  $\stackrel{\circ}{\mathbf{N}}$  > が周方向成分をもつことなどの特異な性質は,先に述べたように複素ベクトル  $\stackrel{\bullet}{\mathbf{N}}$  、したがって複素空間ベクトル  $\stackrel{\bullet}{\mathbf{E}}$  ,  $\stackrel{\bullet}{\mathbf{H}}$  の実数部と虚数部の空間的方向が異なることに起因するものであり,これは損失のある媒質が運動することによって起こり,静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では起こり得ない性質のものである。

なお、式(3·26)~(3·27)の結果は、第5章において運動媒質を含む導 波管内の電磁界を求める際に導出した一次元の伝送方程式の解の三次元的拡 張であると解釈することができる。

#### 3・4 電気形放射電磁界の性質

ここでは、 3を変数 日に無関係な単位実ベクトルとして

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}) = \mathbf{J}(\mathbf{R}) \mathbf{a} \tag{3.38}$$

で表わされる電流源からの放射電磁界について考察する。このとき放射電磁界に、**H**は式(3・26)からつぎのようにかける。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega \hat{\varepsilon}} \mathbf{N}^{+} \times (\mathbf{N}^{-} \times \mathbf{a}) D(\mathbf{R})$$

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{N}^{-} \times \mathbf{a}) D(\mathbf{R})$$
(3.39)

ただし,

$$\iiint\limits_{V} J(\mathbf{R}') \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{R}') dV' = D(\mathbf{R}) = D_r + jD_i$$
 (3.40)

なお上式 (3·39) においては電気形電磁界であることを示す上部の添字 (1) は繁雑さを避けるため省略してある。

式(3.39)を式(3.34)に代入して次式を得る。

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{\hat{H}} = (\alpha' \mathbf{N}_{i} - \beta' \mathbf{N}_{r}^{+}) \cdot \mathbf{a} (\mathbf{N}_{r}^{-} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{N}_{i} |D(\mathbf{R})|^{2}$$

$$= \left( (\alpha' \beta - \beta' \alpha) \mathbf{R}_{0} - \frac{1}{2} \beta' \mu \sigma \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{a}$$

$$\cdot \left( \frac{1}{2} \beta \mu \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{R}_{0} \right) \cdot \mathbf{a} |D(\mathbf{R})|^{2} \tag{3.41}$$

ただし,

$$N^{\pm} = N_{r}^{\pm} + jN_{i}$$

$$N_{r}^{\pm} = \alpha R_{0}^{\pm} \pm \frac{\mu \sigma V}{2}, \quad N_{i} = \beta R_{0}$$

$$j\hat{K} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \omega \left(\frac{\varepsilon \mu}{2} \left(\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^{2} tan^{2} \delta\right\}^{2} + tan^{2} \delta\right\}} - \left\{1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^{2} tan^{2} \delta\right\}\right)^{\sqrt{2}}$$

$$\beta = \omega \left(\frac{\varepsilon \mu}{2} \left(\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^{2} tan^{2} \delta\right\}^{2} + tan^{2} \delta\right\}} + \left\{1 - \left(\frac{v}{2c}\right)^{2} tan^{2} \delta\right\}\right)^{\sqrt{2}}$$

$$tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \hat{\mathbb{B}} \perp \dot{\mathbb{E}} g + \sigma \, \hat{\mathbb{E}} g$$

さらに,

$$\frac{1}{j\,\omega\,\hat{\varepsilon}}=\alpha'-j\,\beta'$$

$$\alpha' = \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\tan \delta}{1 + \tan^2 \delta}$$

$$\beta' = \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{1}{1 + \tan^2 \delta}$$
(3.43)

上式 (3·41) から実物理量 E と H とのスカラ積は一般には零でなく,したがって電界 E と磁界 H とは一般には互いに直交していないことがわかる。しかし,特別な場合として電流ベクトルの方向が媒質の運動の方向に平行な場合,すなわち J // V のときには

$$\mathring{\mathbf{E}} \cdot \mathring{\mathbf{H}} = 0$$

となり、したがってこの場合には電界  $\mathbf{E}$  と磁界  $\mathbf{H}$  とは互いに直交する。 つぎに、Poyntingベクトルに関しても同様に式  $(3\cdot 39)$  の第 2 式を先に得た放射電磁界の $<\mathbf{S}>$ を表わす式  $(3\cdot 36)$  に代入して次式を得る。

$$<\mathbf{S}> = \frac{1}{2} \left( \alpha' \mathbf{N}_{r}^{+} + \beta' \mathbf{N}_{i} \right) |\mathbf{H}|^{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \left( (\alpha' D_{r} - \beta' D_{i}) \mathbf{H}_{r} + (\alpha' D_{i} + \beta' D_{r}) \mathbf{H}_{i} \right)$$

$$\cdot (\mathbf{N}_{r}^{-} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{N}_{r}^{+}$$

$$= \frac{1}{2} \left( (\alpha \alpha' + \beta \beta') \mathbf{R}_{o} + \frac{1}{2} \alpha' \mu \sigma \mathbf{v} \right) |\mathbf{H}|^{2}$$

$$- \left( \left\{ (\alpha \alpha' + \beta \beta') \mathbf{R}_{o} - \frac{1}{2} \alpha' \mu \sigma \mathbf{v} \right\} \times \mathbf{a} \right)$$

$$\cdot \left( \frac{1}{2} \alpha \mu \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{R}_{o} \right) \cdot \mathbf{a} |D(\mathbf{R})|^{2}$$

$$(3.44)$$

上式の結果からわかるようにPoynting ベクトル< S> は半径方向成分だけではなく周方向成分をももつ。なお、J//V なる特別な場合には式  $(3\cdot 44)$ 

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} (\alpha' \mathbf{N}_{r}^{+} + \beta' \mathbf{N}_{i}) |\mathbf{H}|^{2}$$

$$= \frac{1}{2} ((\alpha \alpha' + \beta \beta') \mathbf{R}_{0} + \frac{1}{2} \alpha' \mu \sigma \mathbf{V}) |\mathbf{H}|^{2}$$
(3.45)

となる。上式からこの場合には<S>は媒質の運動の方向に曲げられることがわかる。

## 3・5 電気双極子による放射

本節では導電性運動媒質中におかれた微小電気双極子による放射電磁界を, 媒質の運動方向が双極子モーメント Pの方向に (1)垂直な場合 (2) 平行な場 合のそれぞれについて考察する。

双極子は座標原点に位置し、双極子モーメントの方向は z 軸に平行であるとすれば、電流密度 J はつぎのように書ける。

$$J(R) = j \omega p \delta(R) I_{z}$$
 (3.46)

ここで、 $\delta(\mathbf{R})$  はDirac のデルタ関数である。また、 $\mathbf{p}=p \mathbf{1}_z$  ,ただし  $\mathbf{1}_z$  は z 方向の単位ベクトルを表わす。

#### (1) P V の場合

まず媒質の運動方向が電流ベクトルに垂直な場合、すなわち $\mathbf{p}_{\perp}\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}$   $\mathbf{i}_{x}$  ( $\mathbf{i}_{x}$  は x 方向の単位ベクトル) なる場合について考察する。このとき、複素放射電磁界  $\mathbf{E}$  および  $\mathbf{H}$  はそれぞれ式 ( $3\cdot 26$ ) あるいは ( $3\cdot 39$ ) を用いてつぎのように求められる。

#### 電界:

$$E_{Rr} = \omega p \left( (\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \sin \theta \cos \theta \cos \phi + (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \left\{ \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \sin \theta \cos \theta \cos \phi - \left( \frac{\mu \sigma v}{2} \right)^2 \cos \theta \right\}$$

$$E_{Ri} = -\omega p \left[ (\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \left\{ \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \right\} \right]$$

$$-\left( \frac{\mu \sigma v}{2} \right)^2 \cos \theta - (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta$$

$$\sin \theta \cos \theta \cos \varphi$$

$$(3.47)$$

$$\begin{split} E_{\theta r} &= -\omega \, \mathfrak{p} \{ \, (\alpha' \, \Gamma_r + \beta' \, \Gamma_i \, ) \, (2 \, \alpha \, \beta \, \sin \theta - \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \beta \, \cos \theta \, \cos \varphi \, ) \\ &+ (\alpha' \, \Gamma_i - \beta' \, \Gamma_r \, ) \big\{ (\alpha^2 - \beta^2) \, \sin \theta - \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \alpha \, \cos^2 \theta \, \cos \varphi \, \\ &- \Big( \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \Big)^2 \, \sin \theta \, \big\} \, \big] \end{split}$$

$$\begin{split} E_{\theta i} &= \omega \, p \{ \, (\, \alpha' \, \Gamma_r + \beta' \, \Gamma_i \,) \{ \, (\, \alpha^2 - \beta^2 \,) \, s \, in \, \theta \, - \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \, \alpha \, \cos^2 \theta \, \cos \varphi \, \\ &- \left( \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \right)^2 \, \, s \, in \, \theta \, \} - (\, \alpha' \, \Gamma_i \, - \beta' \, \Gamma_r \,) \, (\, 2 \, \alpha \beta \, s \, in \, \theta \, \\ &- \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \, \beta \, \cos^2 \theta \, \cos \varphi ) \, \, \} \end{split}$$

(3.48)

$$E_{\varphi r} = -\omega p \{ (\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos \theta \sin \varphi$$

$$+ (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos \theta \sin \varphi \}$$

$$E_{\varphi i} = \omega p \{ (\alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \cos \theta \sin \varphi \}$$

$$- (\alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \cos \theta \sin \varphi \}$$

$$(3.49)$$

磁界:

$$H_{Rr} = \omega p \Gamma_{i} \frac{\mu \sigma v}{2} \sin \theta \sin \phi$$

$$H_{Ri} = -\omega p \Gamma_{r} \frac{\mu \sigma v}{2} \sin \theta \sin \phi$$

$$H_{\theta r} = \omega p \Gamma_{i} \frac{\mu \sigma v}{2} \cos \theta \sin \phi$$

$$H_{\theta i} = -\omega p \Gamma_{r} \frac{\mu \sigma v}{2} \cos \theta \sin \phi$$

$$H_{\varphi r} = -\omega p \left( \Gamma_{i} (\alpha \sin \theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \cos \phi) + \Gamma_{r} \beta \sin \theta \right)$$

$$H_{\varphi i} = -\omega p \left( \Gamma_{i} \beta \sin \theta - \Gamma_{r} (\alpha \sin \theta - \frac{\mu \sigma v}{2} \cos \phi) \right)$$

$$(3.52)$$

ただし,

$$\Gamma_{r} = \cos\left(\left(\omega\Lambda \sin\theta \cos\varphi - \beta\right)R\right) \times \frac{1}{4\pi R} \exp\left(-\left(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \cos\varphi\right)R\right)$$

$$\Gamma_{i} = \sin\left(\left(\omega\Lambda \sin\theta \cos\varphi - \beta\right)R\right) \times \frac{1}{4\pi R} \exp\left(-\left(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \cos\varphi\right)R\right)$$

$$\left(-\left(\alpha - \frac{\mu\sigma v}{2} \sin\theta \cos\varphi\right)R\right)$$

 $\Lambda = (\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0) v \tag{3.54}$ 

なお、本節においても前節と同様に、電気形電磁界を表わす上部の添字(1)

は省略してある.

実放射電磁界  $\hat{\mathbf{E}}$  および  $\hat{\mathbf{H}}$  は、上に求められた電磁界成分  $E_{Rr}$  ,  $E_{Ri}$  , .....  $H_{Rr}$  ,  $H_{Ri}$  , ..... 等を式  $(3\cdot 30)$  に用いてそれぞれつぎのように表わされる。

$$\begin{split} \mathring{E}_R &= E_{Rr} \cos \omega t - E_{Ri} \sin \omega t \\ \mathring{E}_\theta &= E_{\theta r} \cos \omega t - E_{\theta i} \sin \omega t \\ \mathring{E}_\varphi &= E_{\varphi r} \cos \omega t - E_{\varphi i} \sin \omega t \\ \mathring{H}_R &= H_{Rr} \cos \omega t - H_{Ri} \sin \omega t \\ \mathring{H}_\theta &= H_{\theta r} \cos \omega t - H_{\theta i} \sin \omega t \\ \mathring{H}_\varphi &= H_{\varphi r} \cos \omega t - H_{\varphi i} \sin \omega t \end{split}$$

つぎに、Poyntingベクトル<S>は式(3.44)を用いてつぎのように求められる。

ただし

$$|\mathbf{H}|^{2} = \omega^{2} p^{2} [(\alpha^{2} + \beta^{2}) \sin^{2} \theta - (\mu \sigma v) \alpha \sin \theta \cos \varphi + (\frac{\mu \sigma v}{2})^{2}]|\Gamma|^{2}$$

$$(3.58)$$

## (2) p//Vの場合

媒質の運動方向が電流ベクトルに平行な場合、すなわち $P/\!\!/V$ 、 $V=vi_z$ なる場合の電磁界は(1)の場合と同様にしてつぎのように求められる。

電界:

$$E_{Rr} = -\omega p \left( \left( \alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i \right) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \sin^2 \theta + \left( \alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r \right) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \sin^2 \theta \right)$$

$$E_{Ri} = \omega p \left( \left( \alpha' \Gamma_r + \beta' \Gamma_i \right) \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha \sin^2 \theta - \left( \alpha' \Gamma_i - \beta' \Gamma_r \right) \frac{\mu \sigma v}{2} \beta \sin^2 \theta \right)$$

$$(3.59)$$

$$\begin{split} E_{\theta \, r} &= -\omega \, p \, [ \, \left( \, \alpha' \, \Gamma_{r} + \beta' \, \Gamma_{i} \, \right) ( \, 2 \, \alpha \beta \, sin \, \theta \, + \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \beta \, cos \, \theta \, sin \, \theta \, ) \\ &+ ( \, \alpha' \, \Gamma_{i} - \beta' \, \Gamma_{r} ) \, \Big\{ ( \, \alpha^{2} - \beta^{2} ) \, sin \, \theta \, + \frac{\mu \, \sigma \, v}{2} \, \alpha \, cos \, \theta \, sin \, \theta \, \Big\} \end{split}$$

$$\begin{split} E_{\theta\,i} &= \omega\, p \, \{ \, (\,\alpha'\,\Gamma_r + \beta'\,\Gamma_i\,) \, \{ \, (\alpha^{\,2} - \beta^{\,2}) \, \sin\,\theta \, \\ \\ &+ \frac{\mu\,\sigma\,v}{2} \, \alpha \, \cos\,\theta \, \sin\,\theta \, \} \, - (\,\alpha'\,\Gamma_i - \beta'\,\Gamma_r\,) \\ \\ &- (\,2\,\alpha\,\beta \, \sin\,\theta + \frac{\mu\,\sigma\,v}{2} \, \beta \, \cos\,\theta \, \sin\,\theta \,) \, ] \end{split}$$

(3.60)

$$E_{\varphi r} = E_{\varphi i} = 0 \tag{3.61}$$

磁界:

$$H_{Rr} = H_{Ri} = 0 ag{3.62}$$

$$H_{Ar} = H_{Ai} = 0 \tag{3.63}$$

$$H_{\varphi r} = -\omega p (\alpha \Gamma_i + \beta \Gamma_r) \sin \theta$$

$$H_{\varphi i} = \omega p (\alpha \Gamma_r - \beta \Gamma_i) \sin \theta$$
(3.64)

ただし,

$$\Gamma_{r} = \cos\theta \left\{ \left( \omega \Lambda \cos\theta - \beta \right) R \right\} \times \frac{1}{4\pi R} \exp$$

$$\left\{ -\left( \alpha - \frac{\mu \sigma v}{2} \cos\theta \right) R \right\}$$

$$\Gamma_{i} = \sin\theta \left\{ \left( \omega \Lambda \cos\theta - \beta \right) R \right\} \times \frac{1}{4\pi R} \exp$$

$$\left\{ -\left( \alpha - \frac{\mu \sigma v}{2} \cos\theta \right) R \right\}$$

また、Poynting ベクトル< S>は式(3·45)を用いてつぎのように求められる。

$$\langle S_R \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left( \alpha \alpha' + \beta \beta' \right) + \frac{\mu \sigma v}{2} \alpha' \cos \theta \right\} |\mathbf{H}|^2$$

$$\langle S_{\theta} \rangle = -\frac{\mu \sigma v}{4} \alpha' \sin \theta \cdot |\mathbf{H}|^2$$

$$\langle S_{\varphi} \rangle = 0$$

$$(3.66)$$

ただし,

$$\mathbf{H}^2 = \omega^2 p^2 (\alpha^2 + \beta^2) \sin^2 \theta \cdot |\Gamma|^2 \tag{3.67}$$

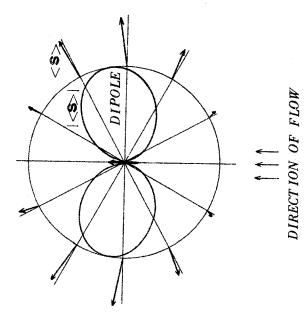


図3・2 p//vの場合の放射 パターン

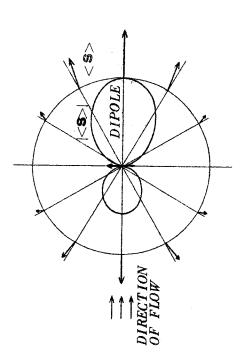


図3・1 ₽ I V の場合の放射 パターン

図3・1 および3・2 はそれぞれ(1) および(2) の場合のPoynting ベクトル<S>の様子を示す図である。図から、Poynting ベクトル<S>は半径方向成分のみならず周方向成分をももち、また媒質の運動方向に曲げられることがわかる。

#### 3 · 6 結 言

光速に比べて十分小さい速度で等速度運動をしている損失のある線形,等方かつ一様なる媒質中における任意の電磁流源によって生ずる電磁界をベクトル・ポテンシャル等の電磁界補助量を用いて解析した。つぎに、遠距離放射電磁界について考察し、遠距離放射電磁界は実数部と虚数部の空間的方向の異なる複素空間ベクトルとなり、その結果つぎのような静止媒質中もしくは運動はしていても損失のない媒質中では見られない興味ある現象があらわれることを示した。

- 1) 放射電磁界は楕円偏波である。
- 2) 放射電界および磁界は互いに直交しない。
- 3) 放射Poynting ベクトルは半径方向成分の他に周方向成分をもつ。

# 第4章 導電性運動媒質中の電磁理論(Ⅱ)厳密解(28),(29)

## 4・1 序 言

前章においては、導電性運動媒質中の電磁理論に関して、媒質の運動速度が光速に比べて十分小さい場合の解、すなわち近似解を求め種々の考察をした。本章においては、媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密な解析を行い、近似解の場合にはみられない特異な現象が現われることを明らかにする。

このため、まず前章と同様に電磁界補助量として適当に定義されたベクトル・ポテンシャルを導入し、このベクトル・ポテンシャルの満足すべき波動方程式を厳密な Maxwell-Minkow ski 方程式から導き、この波動方程式を解ぐことはよって導電性運動媒質中の任意の印加波源によって生ずる電磁界を決定できることを示す。つぎに Poynting 定理およびエネルギー関係式を導き、厳密解を取り扱う場合には近似理論の場合とは異なった新たな解釈が必要であることを示す。さらに、このような媒質中を伝搬する平面波の性質について論じ、導電性媒質が電磁波の位相速度よりも大きな速度運動する場合には、波が進むにつれて波動の振幅が増大する、いわゆる波動増幅の現象が起こることを示し、この現象を導電性運動媒質中の厳密な Poynting 定理を用いて説明する。最後に、Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルから導かれるエネルギー関係式を用いて、導電性運動媒質中の波動増幅現象をさらに詳しく検討する。

なお、本章においては印加波源として電流源のみを考えているが、印加磁 流源が存在する場合も前章と同様にして解くことができる。

## 4 · 2 Maxwell-Minkowski 方程式と波動方程式

誘電率  $\varepsilon$  , 透磁率  $\mu$  , 導電率  $\sigma$  をもつ無限に広がった線形, 等方かつ一様な媒質を考える。ただし,  $\varepsilon$  ,  $\mu$  , および  $\sigma$  はそれぞれ時間によらない定数であると仮定する。この媒質が,波源および観測者に対して一様に運動しているとき,波源および観測者の静止座標系における電磁界はつぎのMaxwell

方程 式によって決定される。

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.1a}$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_s \tag{4.1b}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.1c}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{D} = \boldsymbol{\rho}_f + \boldsymbol{\rho}_s \tag{4.1d}$$

ただし、

E, D =観測者の静止座標系における電界ベクトル

H, B = 観測者の静止座標系における磁界ベクトル

J<sub>f</sub>, ρ<sub>f</sub> =自由電流密度および自由電荷密度

J., P. =印加電流密度および印加電荷密度

ここで、簡単のため媒質の運動速度 V を Z 軸に平行、すなわち V=v  $I_Z$  ( $I_Z=Z$  軸方向の単位ベクトル)とすれば構成関係式はつぎのように与えられる(5),(20)

$$\mathbf{B} = \mu \alpha \cdot \mathbf{H} - \mathbf{Q} \times \mathbf{E} \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon} \alpha \cdot \mathbf{E}} + \boldsymbol{\varrho} \times \mathbf{H} \tag{4.2b}$$

$$\mathbf{J}_{f} - \rho_{f} \mathbf{v} = \gamma \, \sigma \left\{ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \right\} \quad (4 \cdot 2c)$$

ただし,

$$Q = \frac{(n^{2} - 1) \mathbf{v}}{(1 - n^{2} \beta^{2}) c^{2}} = \frac{(n^{2} - 1) \beta}{(1 - n^{2} \beta^{2}) c} \quad \mathbf{i}_{z} = Q \mathbf{i}_{z}$$

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1 - \beta^{2}}{1 - n^{2} \beta^{2}}$$

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{2}}}$$
(4.3)

$$n = \sqrt{\frac{\mu \, \mathcal{E}}{\mu_{\rm o} \, \mathcal{E}_{\rm o}}}$$
,  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\rm o} \, \mathcal{E}_{\rm o}}}$  =真空中の光速度

さて、媒質の静止座標系における自由電荷密度  ${
ho_f}'$ は  ${f J}_f, {
ho_f}$  とつぎの関係  ${f x}^{(5)}$ 

$$\rho_f' = \gamma \left( \rho_f - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_f}{c^2} \right) \tag{4.4}$$

によって結ばれているが、定常状態においては媒質の静止座標系における自由電荷密度は零、すなわち $\rho_f'=0$ と仮定できる $^{(86)}$ ので式 $(4\cdot 2c)$ から観測者の静止座標系における自由電流密度および自由電荷密度はそれぞれつぎのようにかける。

$$\mathbf{J}_{f} = \gamma \, \sigma \left\{ \, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\, \mu \, \alpha \cdot \mathbf{H} - \mathbf{g} \times \mathbf{E} \,) \, \right\} \tag{4.5a}$$

$$\rho_f = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_f}{\mathbf{c}^2} \tag{4.5b}$$

電磁界の時間変化を $e^{j\omega t}$ と仮定し、式(4・5)および式(4・2a)、(4・2b)を用いてMaxwell方程式(4・1)からB、D、 $J_f$ 、 $\rho_f$  を消去してつぎのMaxwell-Minkowski方程式をうる。

$$(\mathbf{V} - j \omega \mathbf{Q}) \times \mathbf{E} = -j \omega \mu \alpha \cdot \mathbf{H}$$
 (4.6a)

$$(\mathbf{P} - j\omega\mathbf{Q} - \mu\sigma\alpha\gamma\mathbf{V}) \times \mathbf{H} = j\omega\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\alpha \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_{s} \qquad (4 \cdot 6b)$$

$$(\mathbf{V} - j\omega\mathbf{Q} - \mu\sigma\alpha\gamma\mathbf{V}) \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{J}_s + \rho_s}{\varepsilon}$$
 (4.6c)

$$(\mathbf{V} - \mathbf{j} \boldsymbol{\omega} \mathbf{Q}) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{4.6d}$$

ただし、

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left( 1 - j \frac{\sigma \gamma}{\omega \varepsilon} \right) \tag{4.7}$$

ここで、 電磁界および波源に関してつぎのような変換を行なう.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{0} \exp(j\omega \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_{0} \exp(j\omega \mathbf{\Omega} z) \qquad (4.8a)$$

$$H = H_0 exp(j\omega Q \cdot P) = H_0 exp(j\omega Qz)$$
 (4.8b)

$$\mathbf{J}_{s} = \mathbf{J}_{os} \exp(j\omega \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{J}_{os} \exp(j\omega \mathbf{Q} z) \qquad (4.8c)$$

$$\rho_{s} = \rho_{os} \exp(j\omega Q \cdot r) = \rho_{os} \exp(j\omega Q z) \qquad (4.8d)$$

ただし、  $oldsymbol{F}$  は座標原点から観測点に向かう位置ベクトルである。式  $(4\cdot 8)$ を Maxwell-Minkowski 方程式  $(4\cdot 6)$  に代入して次式をうる。

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{0} = -j \omega \mu \alpha \cdot \mathbf{H}_{0} \tag{4.9a}$$

$$(\mathbf{p} - \mu \,\sigma \,a \,\gamma \,\mathbf{v}) \times \mathbf{H}_{o} = \mathbf{j} \,\omega \,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{o} + \mathbf{J}_{os} \tag{4.9b}$$

$$(\mathbf{P} - \mu \sigma \alpha \gamma \mathbf{V}) \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{o} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{J}_{os} + \rho_{os}}{\varepsilon}$$
 (4.9c)

$$\mathbf{P} \cdot \alpha \cdot \mathbf{H}_{o} = 0 \tag{4.9d}$$

さて、式 $(4\cdot 9d)$ から電磁界補助量としてベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$  をつぎのように導入することができる.

$$\mathbb{H}_{0} = \overline{\alpha}^{-1} \cdot (\mathbf{V} \times (\overline{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{0})) \tag{4.10}$$

したがってスカラ・ポテンシャルを ф。とすれば、 🖺 は式 (4・9a) から

$$\mathbf{E}_{o} = -j \,\omega \,\mu \,\bar{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{o} - \mathbf{V} \,\phi_{o} \tag{4.11}$$

とかける。式  $(4\cdot10)$ ,  $(4\cdot11)$  を式  $(4\cdot96)$ ,  $(4\cdot9c)$ に代入し、ゲージ関係式

$$(\mathbf{V} - \mu \sigma a \gamma \mathbf{V}) \cdot \mathbf{A}_0 + \mathbf{j} \omega \hat{\varepsilon} a^2 \phi_0 = 0 \qquad (4.12)$$

を用いて、ベクトル・ポテンシャルに関するつぎの波動方程式をうる。

$$[\mathbf{V} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{V} - \mu \sigma a \gamma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + a^2 \hat{k}^2] \mathbb{A}_0 = -a^2 \mathbb{J}_{0s}$$
 (4.13)

ただし、

$$\hat{k}^2 = \omega^2 \hat{\varepsilon} \; \mu = \omega^2 \varepsilon \; \mu \left( 1 - j \; \frac{\sigma \, \gamma}{\omega \, \varepsilon} \right) \tag{4.14}$$

またゲージ関係式  $(4\cdot 12)$  を用いて、式  $(4\cdot 11)$  の  $\mathbb{E}_{o}$  はつぎのように表わされる.

$$\mathbf{E}_{0} = \frac{\bar{\alpha}^{-1}}{j\omega\hat{\varepsilon}} \cdot \left\{ \hat{k}^{2}\mathbf{A}_{0} + \frac{\bar{\alpha}}{a^{2}} \cdot \left[ \mathbf{P} \left( \mathbf{P} - \mu\sigma \, a\, \gamma\, \mathbf{V} \right) \cdot \mathbf{A}_{0} \right] \right\} \quad (4 \cdot 15)$$

したがって、与えられた印加波源 』。。によって生ずる電磁界を求めるには、波動方程式 (4・13) を解いてベクトル・ポテンシャル A。を求め、式 (4・10) および (4・15) の演算を行なえばよいことになる。

波動方程式(4・13)を解くためぬ。のかわりに新しい未知関数下。を

$$\mathbf{A}_{0} = \mathbf{T}_{0} \exp\left(\frac{1}{2} \mu \sigma \sigma \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}\right) = \mathbf{T}_{0} \exp\left(\frac{1}{2} \mu \sigma \sigma \gamma \mathbf{v} z\right) \quad (4.16)$$

なる関係によって導入する。式(4·16)を波動方程式(4·13)に代入して『。 に関する波動方程式

$$(\mathbf{P} \cdot \tilde{\alpha} \cdot \mathbf{P} + \hat{K}_0^2) \mathbf{T}_0 = -\mathbf{F}_0 \tag{4.17}$$

をうる、ただし、

$$\hat{K}_{0}^{2} = a^{2} \left( \hat{k}^{2} - \frac{1}{4} \mu^{2} \sigma^{2} \gamma^{2} v^{2} \right)$$
 (4.18a)

$$\mathbf{F}_{0} = \alpha^{2} \mathbf{J}_{0s} \exp \left(-\frac{1}{2} \mu \sigma \alpha \gamma v z\right) \tag{4.18b}$$

T<sub>o</sub>に関する波動方程式(4·17)は Fourier 変換を用いて容易に解くことができる。したがって、導電性運動媒質中に存在する任意の印加波源によって生する電磁界 E, 同は波動方程式(4·17)の解を用いて、式(4·16)、(4·10)

(4·15), および式 (4·8)の操作を順次行なうことによって決定することができる。

## 4·3 Poynting 定理

式  $(4 \cdot 1a)$  と H の スカラ 積か ら式  $(4 \cdot 1b)$  と E の スカラ 積を差し引き, 構成関係式  $(4 \cdot 2a)$ ,  $(4 \cdot 2b)$  を用いて次式をうる。

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J}_{s} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{J}_{f} \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} (w_{m} + w_{e})$$
 (4.19)

ただし,

$$S = E \times H \tag{4.20}a$$

$$\mathbf{w}_{m} = \frac{1}{2} \left[ \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$
 (4.20*b*)

$$\boldsymbol{w}_{e} = \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$
 (4.20*c*)

上式において、 $\mathbf{S}$ は放射電力密度を表わし、 $-\mathbf{J}_{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{E}$ は印加波源によって供給される電力の密度を表わす。 $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{E}$ はその符号が正のときには媒質中で消費される電力の密度を表わし、負のとき(次節で述べるように、媒質が波の位相速度よりも大きな速度で運動するとき $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{E}$ はその符号が負となる)には、媒質から供給される電力の密度を表わすものと解釈できる。また、 $\mathbf{w}_{\mathbf{m}}$ および  $\mathbf{w}_{\mathbf{e}}$  はそれぞれ磁気的および電気的エネルギー密度を表わすものと解釈できる。

電磁界が正弦的に時間変化をしている場合には、式  $(4\cdot19)$  の Poynting 定理はつぎのようになる。

$$\mathbf{7 \cdot S} = -\frac{1}{2} \mathbf{J}_{s}^{*} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{J}_{f}^{*} \cdot \mathbf{E}$$

$$-2 \mathbf{j} \omega \left( < \mathbf{w}_{m} > - < \mathbf{w}_{e} > \right)$$

$$(4 \cdot 21)$$

ここで,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*}$$

$$\langle w_{m} \rangle = \frac{1}{4} \left[ \mu \mathbf{H} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{H}^{*} - \mathbf{Q} \cdot Re \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} Re \left( \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{*} \right)$$

$$\langle w_{e} \rangle = \frac{1}{4} \left[ \varepsilon \mathbf{E} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}^{*} - \mathbf{Q} \cdot Re \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*} \right) \right]$$

$$(4.22b)$$

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon \mathbf{E} \cdot \alpha \cdot \mathbf{E} - \mathbf{Q} \cdot Re \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}' \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{4} Re \left( \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* \right) \tag{4.22c}$$

ただし、Re は実数部をとる操作を表わし、記号\*は複素共役を表わす。

式  $(4\cdot 21)$  の実数部をとり、面 Aによって囲まれた体積Vによって積分することにより、導電性運動媒質中におけるアンテナ放射に関するエネルギー関係式として次式をうる。

$$< P_R > = < P_s > - < P_f >$$
 (4.23)

ただし,

$$\langle P_R \rangle = Re \iint_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} dA$$
 (4.24a)

$$\langle P_s \rangle = -\frac{1}{2} Re \iiint_V \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{E} dV$$
 (4.24b)

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iiint_V \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} dV$$
 (4.24c)

ここで,  $oldsymbol{n}$ は面Aの外向き法線ベクトルを表わす。式(4・24)の<  $P_R$  > は

面Aを横切って外方へ放射される電力の時間平均値を表わし、 $< P_s >$  は体積V内に存在する波源によって供給される電力の時間平均値を表わす。つぎに、 $< P_f >$  はその符号が正の場合には、体積Vの媒質内で消費される電力の時間平均値を表わし、負の場合には媒質から供給される電力の時間平均値を表わすことになる。

## 4・4 平面波と波動増幅現象

ここでは、導電性運動媒質中を伝搬する平面波について考察する。平面波の位相項を  $exp(j(\omega t - K \cdot r))$ と仮定すれば、式  $(4 \cdot 17)$ ,  $(4 \cdot 16)$ , お よび式  $(4 \cdot 10)$ ,  $(4 \cdot 15)$ ,  $(4 \cdot 8)$  を順次用いることによって

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega \Omega z + \frac{1}{2} j \mu \sigma a \gamma v z \qquad (4 \cdot 25a)$$

$$\mathbf{k}_{0} \cdot \bar{\alpha} \cdot \mathbf{k}_{0} - \hat{K}_{0}^{2} = 0 \tag{4.25b}$$

となる。ただし、式 (4·25b) は波動方程式 (4·17) の右辺の印加波源による項を O とおくことによって得られたものである。

ここで、簡単のため媒質の運動方向(z軸方向)に平行な方向に伝搬するTEM 波を考え、その伝搬定数をKとすれば、電界および磁界は前節の結果を用いてつぎのように求まる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_x C e^{\mathbf{j}(\omega t - Kz)} \tag{4.26a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{y} \frac{K + \omega \mathcal{Q}}{\omega \mu a} C e^{j(\omega t - Kz)}$$
 (4.26b)

ただし、C は場所および時間に無関係な定数であり、また $\mathbf{I}_x$ ,  $\mathbf{I}_y$  はそれぞれ x および y 軸方向の単位ベクトルを表わす。さて、伝搬定数 K は式  $(4\cdot 25)$  から求められ、位相係数 p および 減衰(増幅)係数 q を

$$K = k \left( p - j q \right) \tag{4.27a}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \, \mathcal{E}} \tag{4.27b}$$

で定義すれば, p, q はそれぞれつぎのように求められる.

$$p = p^{\pm} = a \left[ \pm g - \frac{(n^2 - 1)\beta}{(1 - \beta^2)n} \right]$$
 (4.28)

$$q = q^{\pm} = a \left( \pm h - \frac{1}{2} n \beta \gamma \tan \delta \right)$$
 (4.29)

ただし、

$$g = \left[ \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(1 - \frac{1}{4} n^2 \beta^2 \gamma^2 t a n^2 \delta)^2 + \gamma^2 t a n^2 \delta} \right. \right.$$

$$+ (1 - \frac{1}{4} n^2 \beta^2 \gamma^2 t a n^2 \delta) \right\}^{1/2}$$

$$(4 \cdot 50 a)$$

$$h = \left[ \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(1 - \frac{1}{4} n^2 \beta^2 \gamma^2 t a n^2 \delta)^2 + \gamma^2 t a n^2 \delta} \right. \right.$$

$$- (1 - \frac{1}{4} n^2 \beta^2 \gamma^2 t a n^2 \delta) \right\}^{1/2}$$

$$(4 \cdot 30 b)$$

$$tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \tag{4.31}$$

したがって、伝撥定数 $K^-=k(p^--jq^-)$ および $K^+=k(p^+-jq^+)$ をもつ 2 種類の平面波が存在することがわかる。さて、式 $(4\cdot 28)$  から直ちに分かるように、位相係数pは  $n\beta<1$  のとき

$$p^- < 0$$
,  $p^+ > 0$ ,  $(n\beta < 1)$  (4.32a)

となり、また $n\beta>1$ のときは

$$p^- > 0$$
,  $p^+ > 0$ ,  $(n \beta > 1)$  (4.32b)

となる。 ずた, 減衰(増幅)係数 q は式(4・29)から

$$q^{-} < 0$$
,  $q^{+} > 0$ ,  $(n\beta < 1)$  (4.33a)

$$q^- > 0$$
,  $q^+ > 0$ ,  $(n\beta > 1)$ 

となる。上式  $(4\cdot 32b)$ ,  $(4\cdot 33b)$  から明らかなように、 $n\beta>1$  のときには 2 つの位相係数、減衰係数はそれぞれともに正の値をとる。

さて、ここで電磁エネルギーの流れを式( $4\cdot22a$ )の実数部で定義すれば、式( $4\cdot26$ )を用いて次式をうる。

$$(\langle \mathbf{S} \rangle)^{\pm} = \mathbf{I}_z \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} g | \mathbf{E} |^2\right)$$
 (4.34)

したがって, ${\left( {\left| {\mathbf{S}} \right\rangle } \right]^\pm }$  の符号はつぎのようになる。

$$(< \$ >)^{-} < 0, (< \$ >)^{+} > 0$$
 (4.35)

式  $(4\cdot32a)$ ,  $(4\cdot33a)$  および  $(4\cdot35)$  から,媒質が低速度で運動している場合,すなわち  $n\beta$  < 1 のときは,伝搬定数 K および  $K^+$ をもつ波はともに減衰波であり,そのエネルギー流はそれぞれ z の負および正の方向に伝搬することがわかる。つぎに,式  $(4\cdot32b)$ ,  $(4\cdot33b)$  および  $(4\cdot35)$  から媒質が高速度で運動している場合,すなわち  $n\beta$  > 1 のときには,伝搬定数  $K^+$ をもつ波はエネルギー流の方向が z の正方向(媒質の運動方向)である減衰 彼であるが,伝搬定数  $K^-$ をもつ波はエネルギー流の方向が z の負の方向(媒質の運動方向と逆の方向)である増大波であることがわかる。このような増大波の場合の g は 増幅係数と呼ぶことができる。つぎに,このような波動増幅の現象を先に導いたエネルギー関係式  $(4\cdot23)$  を用いて説明する。

印加波源が存在しない場合にはエネルギー関係式(4·23)はつぎのようになる。

$$-Re \iint_{A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \ dA = \frac{1}{2} Re \iiint_{V} \mathbf{J}_{f}^{*} \cdot \mathbf{E} \ dV$$
 (4.36)

さて、 $Re\left( oldsymbol{J}_f^* \cdot oldsymbol{E} \right)$  は式 $\left( 4 \cdot 5 a \right)$  および $\left( 4 \cdot 26 \right)$  を用いてつぎのように表わされる。

$$Re\left(\mathbf{J}_{f}^{*}\cdot\mathbf{E}\right)^{\pm}=-\gamma\sigma a\left(-1\pm n\beta g\right)|\mathbf{E}|^{2}$$
(4.37)

上式から  $Re\left\{oldsymbol{J_f}^*\cdotoldsymbol{E}
ight\}$  の符号はつぎのようになる。

$$Re(J_f^* \cdot E)^- > 0$$
,  $Re(J_f^* \cdot E)^+ > 0$ ,  $(n\beta < 1)$  (4.38a)  
 $Re(J_f^* \cdot E)^- < 0$ ,  $Re(J_f^* \cdot E)^+ > 0$ ,  $(n\beta > 1)$  (4.38b)

式  $(4\cdot38b)$  から、 $n\beta>1$  のときには伝搬定数  $K^-$  をもつ波の  $Re\{J_f^*$ ・  $E\}$  は負となり、したがってエネルギー関係式  $(4\cdot36)$  の右辺が負となることがわかる。式  $(4\cdot36)$  の右辺は、媒質が静止している場合もしくは低速度  $(n\beta<1)$ で運動している場合には常に正の値をとり、したがって左辺は体積 V の表面 A を通って V 内に流れ込む電力を表わし、右辺は V 内で消費される電力を表わす。しかし、上の場合のように、媒質が  $n\beta>1$  なる速度で波の電磁エネルギー流の進む方向と逆の方向に運動する場合には式  $(4\cdot36)$  の右辺は負となり、したがってこの場合には左辺は体積 V の表面 A を通って V から流れ出与る電力を表わし、右辺は V 内に媒質 から供給される電力を表わすことになる。

以上,Poynting 定理から導かれるエネルギー関係式を用いて波動増幅の現象を説明したが,次節においてはMinkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いて上記の波動増幅の現象についてさらに詳しく検討する.

表	4	•	1	<i>t</i>	,	q	,	<	S	>,	F	l e	(	đ	f*	•	E	)	Ø	符	号
---	---	---	---	----------	---	---	---	---	---	----	---	-----	---	---	----	---	---	---	---	---	---

		n $\beta$ <	〔1					$n\beta >$	> 1			
	I			II			Ш			IV		
Þ	<b>p</b> - < 0		1	» <sup>+</sup> >	0	Þ	> 1	)	p	+>	0	
q	$q^{-} < 0$		q	+ >	0	q	> (	0	q	+>	0	
< <b>S</b> >	(< <b>s</b> >)	< 0	( < \$	<b>3</b> >)	+>0	(<\$	3>)	_< 0	[<	3>	) <sup>+</sup> >0	
$Re(J_f^* \cdot E)$	Re ( <b>J</b> <sub>f</sub> * .	<b>E</b> ) <sup>-</sup>	Re(	$\mathbf{J}_f^*$	• <b>E</b> ) <sup>+</sup> > 0	Re (	ا $_f^*$ .	<b>E</b> ) <sup>-</sup>	R e (	<b>J</b> f*	• <b>E</b> ) <sup>†</sup> > 0	
***************************************	減衰	波	減	衰	波	増	大	波	減	衰	波	

表  $4 \cdot 1$ は、p,q、< S>、および  $Re\{J_f^*\cdot E\}$ の符号をまとめたものである。表  $4 \cdot 1$ における領域 IIが波 動増幅の起こる場合である。

4・5 Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルと波動増幅現象 前節ではPoynting定理を用いて波動増幅現象を説明したが、ここでは Minkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いてさらに検討する。 4・5・1 エネルギー関係式

M inkowski によれば電磁界のエネルギー・運動量テンソルを $S_{ik}$  とするとき、運動量およびエネルギーの保存則はつぎのようにかける。

$$f_i = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{4.39}$$

ここで、 $f_i$  はその値が正のときには電磁系(電磁場)から力学系(媒質)に作用する四元力の密度を表わし、また負の場合には逆に力学系から電磁系に作用する力を表わす。四元力の密度  $f_i$  を電磁界量で表わせばつぎのようになる。

$$f_i = (\mathbf{f}, \frac{j}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f))$$
 (4.40)

ただし,

$$\mathbf{f} = \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f \times \mathbf{B} \tag{4.41a}$$

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_c + \rho_f \mathbf{V} \tag{4.41b}$$

上式における  $\mathbf{J}_c$  は伝導電流を表わし、 $P_f$   $\mathbf{V}$  は携帯電流を表わす。 式  $(4\cdot39)$  において i=4 とおくと、エネルギー保存則

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -\frac{c}{j} f_{\mathbf{A}} \tag{4.42}$$

をうる。ただし,

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \tag{4.43}a$$

$$S = E \times H \tag{4.43b}$$

$$f_{\mathbf{A}} = \frac{j}{c} \left( \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{f} \right) \tag{4.43c}$$

式(4・43c)で表わされる  $f_{_4}$  はさらにつぎのようにかける。

$$f_4 = \frac{j}{c} \left( A + Q \right) \tag{4.44}$$

ただし,

$$A = \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \tag{4.45a}$$

$$Q = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}_c = \mathbf{E}_{eff} \cdot \mathbf{J}_c \qquad (4.45b)$$

ここで、Aは単位時間に単位体積あたりになされる力学的仕事を表わし、またQは単位時間に単位体積あたりに放出される力学的エネルギー以外のエネルギー量、すなわち発生する熱量を示すものと解釈できる。 $^{(6)}$ 

さて、電磁界が正弦的に時間変化しているときには式(4・42)のエネルギー保存則はつぎのようにかける。

$$-\mathbf{V} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{W} \rangle = \langle A \rangle + \langle Q \rangle \tag{4.46}$$

ただし、

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \tag{4.47a}$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \mathbf{J}_f^* \cdot \mathbf{E} \right) \tag{4.47b}$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \mathbf{v} \cdot (\rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B}) \right)$$
 (4.47c)

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} Re \left( \mathbf{J}_c^* \cdot \mathbf{E}_{eff} \right)$$
 (4.47d)

上式( $4\cdot 46$ )は当然のことながら  $4\cdot 3$ で求めた式( $4\cdot 21$ )と一致する。ここで、<  $\mathbf{S}$  > は電磁エネルギー流の時間平均値を表わし、<  $\mathbf{W}$  > は電磁場が媒質に対してなす全仕事量の時間平均値を表わすものと解釈できる。< A > は電磁場が媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わし、また< Q > は発生する熱量の時間平均値を表わすものと解釈できる。

以上の諸量のうち、< W>および< A>はあとで示すように媒質の運動速度によって正にも負にもねりうるが、< Q>は媒質の運動速度の如何にかかわらず決っして負にはならない。< Q>が決っして負にはならないことは式 $(4\cdot 47d)$ をつぎのように書き改めることによって直ちにわかる。

$$" = \frac{1}{\gamma} < Q'> = \frac{1}{2\gamma} \sigma |\mathbf{E}'|^2"$$
 (4.48a)

または,

$$"=\frac{1}{2} \gamma \sigma Re \left( |\mathbf{E}_{eff}|^2 - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{c} \right) \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^*}{c} \right) \right) "$$
 (4.48b)

ここで、プライム記号は媒質の静止座標系における量を表わす。なお、式(4·48a) は熱力学における熱量の変換式に一致する。

さて、つぎに<A>について考察する。<A>は式(4・47<math>c)からつぎのように表わされる。

$$\langle A \rangle = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{1}{2} Re \left( \rho_f \mathbf{E} + \mathbf{J}_f^* \times \mathbf{B} \right) \right)$$
 (4.49a)

$$= v < f_{_{\mathsf{H}}} > \tag{4.49b}$$

ここで、 $<f_{_{||}}>$ は Lorentz 力 fの媒質の運動方向に平行な成分の時間平均値を表わす。上式から  $v<f_{_{||}}>>0$  、 すなわち Lorentz 力が媒質を加速させる方向に働くときには<A>>0となり、このとき<A>は電磁場が

媒質に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすことがわかる。また, $v < f_{||} > < 0$ , すなわち Lorentz 力が媒質を減速させる方向に働くときには< A > < 0 となり,このとき- < A >なる量は媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値を表わすものと解釈できる。エネルギー関係式 $(4\cdot 46)$  から< A > < 0 で| < A > | > < Q > なる場合には $- P \cdot < S > = < V > < 0$  となり,したがって波動増幅の現象がおこることになる。このときエネルギー関係式はつぎのようにかける。

$$\{ -\langle \overline{W} \rangle \} = \{ -\langle A \rangle \} -\langle Q \rangle \tag{4.50}$$

上式の右辺は、媒質が電磁場に対してなす力学的仕事の時間平均値から媒質中に発生する熱量の時間平均値を差し引いた量を表わし、したがって左辺は 媒質が電磁場に対してなす total の仕事量の時間平均値を表わすことになる。

さて、 $4\cdot 4$  で述べたような媒質の運動方向に平行な方向に伝搬するTEM 波の場合には、< W>、< A>および< Q>はそれぞれつぎのように表わされる。

$$\langle \overline{W} \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma (1 - n \beta p) |E|^2 \qquad (4.51a)$$

$$< A > = \frac{1}{2} \gamma \sigma (n \beta p (1 - n \beta p) - (n \beta q)^{2}) |E|^{2}$$
 (4.51b)

$$< Q > = \frac{1}{2} \gamma \sigma ((1 - n\beta p)^{2} + (n\beta q)^{2}) |E|^{2}$$
 (4.51c)

ここで,式(4·27a)で与えられるKを

$$K = K_r - jK_L \tag{4.52}$$

とおき,

$$v_p = \frac{\omega}{K_\perp}$$
 ,  $v_i = \frac{\omega}{K_\perp}$  (4.53*a*, *b*)

で定義される量を導入する。ただし、 $v_p$  は導電性運動媒質中を伝搬する波の位相速度を表わす。このとき式  $(4\cdot 51a-c)$ はそれぞれつぎのようにかける。

$$\langle \overline{w} \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right) |\mathbf{E}|^2 \tag{4.54a}$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left[ \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right) \left( \frac{v}{v_p} \right) - \left( \frac{v}{v_i} \right)^2 \right] | \mathbf{E} |^2 \quad (4.54b)$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left[ \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right)^2 + \left( \frac{v}{v_i} \right)^2 \right] | \mathbf{E} |^2$$
 (4.54c)

式  $(4\cdot 54a)$  から,< W> は  $(v/v_p)>1$  の場合にのみ負になることがわかる。ここで,表  $4\cdot 1$  の領域  $I\sim \mathbb{N}$  における< W>,< A> および< Q> の符号を表  $4\cdot 2$  に示す。

表 4 · 2  $< \mathcal{V} >$ , < A >, < Q > の符号

	nβ	< 1	$n\beta > 1$					
	Ι	П	Ш	IV				
< W >	Æ	Æ	負	Œ.				
< A >	負	正または負	負	正または負				
< Q >	正	正	正	Œ				
	$\frac{v}{v_p} < 0$	$0<\frac{v}{v_p}<1$	$1 < \frac{v}{v_p}$	$0<\frac{v}{v_p}<1$				

表 4 ・ 2 から波動増幅現象は、媒質の運動速度が媒質中を伝搬する波の位相速度より大きくなるときに起こり、またこのような現象は n B < 1 なる場合

には決っして起こらないことがわかる。

以上,導電性運動媒質中を伝搬する TEM 波のエネルギー関係式について 考察したが,次節では上記のような増幅波の励振について簡単に考察する。

#### 4・5・2 増幅波の励振

前節においては導電性運動媒質中を伝搬する TEM 彼について考察したが、このような場合には彼の位相速度  $v_p$  が運動している媒質自身の構成定数  $(\mathcal{E},\mu,\sigma)$  および媒質の運動速度 v の関数となり、その結果波動増幅の現象が起こる為には  $n\beta>1$  なる条件が必要となる。しかし、運動媒質中を伝搬する彼の位相速度を外部波源によって強制的に定めるとき、  $v_p$  はもはや運動している媒質自身の構成定数には無関係となり、  $(v/v_p)>1$  の条件は実現しやすくなる。

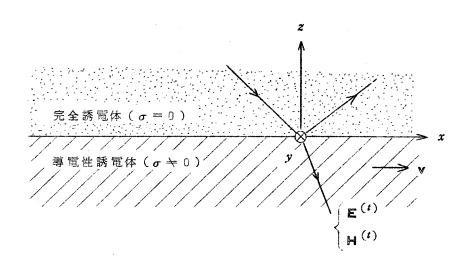


図4・1 平面波による増幅波の励振

図 4・1 は平面波によって導電性運動媒質中に増幅波を励振する場合の構成図である。図 4・1 において、z>0 の空間は完全誘電体( $\sigma=0$ )、z<0 の空間は導電性誘電体( $\sigma =0$ )によってそれぞれ満されており、導

電性誘電体は完全誘電体に対して一定速度vでx軸方向に運動しているものとする。いま,入射波として電界が入射面に垂直な平面波,すなわちE波を仮定すれば,透過波の< V >,< A >および< Q >はそれぞれつぎのように表わされる $^{(87)}$ 

$$\langle \overline{W} \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right) | \mathbf{E}^{(t)} |^2 \qquad (4.55a)$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right) \left( \frac{v}{v_p} \right) | \mathbf{E}^{(t)} |^2$$
 (4.55b)

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right)^2 |\mathbf{E}^{(t)}|^2 \qquad (4.55c)$$

ただし、 $\mathbf{E}^{(t)}$ は透過波の電界を表わし、また  $v_p$  は透過波の位相速度の x 方向成分、すなわち媒質の運動方向に平行な成分を表わす。ここで、透過波の伝搬定数の x 方向成分は境界条件により入射波の伝搬定数の x 方向成分(実数量)に等しくなり、したがって  $v_p$  は完全誘電体の構成定数によって定められ、導電性誘電体の構成定数には無関係となる。式  $(4\cdot55a-c)$  の形は、式  $(4\cdot54a-c)$  において  $(v/v_i)=0$  とおいたものと一致する。式  $(4\cdot55a)$  から、 $(v/v_p)>1$  のとき導電性運動媒質中に増幅波が励振されることがわかる。なお、図  $4\cdot1$  の場合の詳しい解析は著者らの文献 (87) を参照されたい。

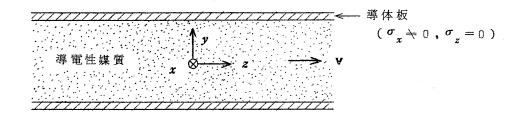


図4・2 ac MHD generator の原理的構成図

つぎに、波動増幅現象を $ac\ MHD\ generator^{(88),(89)}$ として用いる場合の原理的構成図を図  $4\cdot 2$ に示す。ただし、図  $4\cdot 2$ において導体板は十分薄く、またその導電率のz方向成分は0であると仮定する。この導体板に

$$\mathbf{E}_{0} = \mathbf{I}_{x} C_{0} e^{j(\omega t - Kz)} \tag{4.56}$$

なる形の外部電圧をかけるとき、導電性運動媒質中にはTE波が励振されその伝搬定数は外部導体板上を伝搬する波の伝搬定数Kに等しくなり、したがって実数量となる。このとき< W>、< A>および< Q>は式 $(4\cdot55a\sim c)$ と同じ形になる。いま、 $ac\ MHD\ generator$ の効率 $_{\eta}$ を

$$\eta = \frac{(-\langle W \rangle)}{(-\langle A \rangle)}, \quad (v_p < v)$$

$$(4.57)$$

によって定義するときηはつぎのように求められる.

$$\eta = \left(\frac{v_p}{v}\right) \quad , \quad (v_p < v) \tag{4.58}$$

したがって、 $\eta$ はvが $v_p$  に等しくなる極限において最大値 1 をとり、vの増加と共に小さくなる。なお、効率を与える式  $(4\cdot 58)$ は、媒質の運動速度が光速度に比べて極めて小さいとして近似的に求められた式 $^{(88),(89)}$  と一致する。

なお、最近 Dunn ら<sup>(30)</sup>も、導電性運動媒質中の波動について論じ著者と同様の結論を得ている。

#### 4 · 6 結 言

導電性運動媒質中の電磁界について、媒質の運動速度が光速に比べて十分小さいという近似を行なわないで厳密に解析し、近似理論の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示した。特に、媒質が電磁波の位相速度よりも大きな速度で運動する場合には波動増幅の現象が起こることをTEM波を例にあげて示し、つぎにこの現象を導電性運動媒質中の厳密なPoyn-

ting 定理およびMinkowski の電磁エネルギー・運動量テンソルを用いて詳しく検討した。なお、最後にこのように増幅波の励振についても簡単に考察した。

## 第5章 導電性運動媒質を含む導波管 の理論(I)近似解<sup>(32)~(35)</sup>

#### 5.1 序 言

運動媒質を含む導波管の解析は、最初 Collier と Tai (31) によってなされ、彼等は光速度に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管の固有伝送モードを、方形および円形導波管の固々の場合についてベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めた。引きつづいて著者 6(32-(35)) は、このような運動媒質を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて解析し、その特別な場合として Collier らの結果が得られることを示した。また、導波管中に含まれる媒質の運動速度に関する制限のない厳密な解析は、媒質に損失のない場合については Du と Compton (36) を始めとする多数の人 (37) (42) によってなされたが、導電性運動媒質を含む導波管の厳密解は著者 (43), (44) によって初めて与えられた。

本章においては,著者らが行なった導電性運動媒質を含む導波管の解析の うち近似解を取り扱い,厳密解に関しては次章で考察する。

## 5・2 運動媒質を含む導波管内の電磁界

図 5・1 に示されるような、軸方向に一様に運動する媒質を含む導波管内の電磁界は、媒質の速度vが光速に比べて十分小さいものと仮定すれば、つきのMaxwell l -Minkowski 方程式によって決定される $^{(7)}$ .

$$(\mathbf{V} - j_{\omega} \mathbf{\Lambda} \mathbf{I}_{z}) \times \mathbf{E} = -j_{\omega\mu} \mathbf{H} - \mathbf{J}^{*}$$

$$(\mathbf{V} - j_{\omega} \mathbf{\Lambda} \mathbf{I}_{z} - \mu_{\sigma} v \mathbf{I}_{z}) \times \mathbf{H} = j_{\omega} \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{J}$$
(5.1)

ただし、 👢 は軸 (2) 方向の単位ベクトルを表し、また

$$A = (\varepsilon \mu - \varepsilon_0 \mu_0) v$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)$$
(5.2)

なお、上式においては時間変化 e + jo! を仮定している。

電磁界方程式(5.1)を解くために、まず

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{0}e^{+j\omega\Lambda z}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{0}e^{+j\omega\Lambda z}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{0}e^{+j\omega\Lambda z}$$

$$\mathbf{J}^{*} = \mathbf{J}_{0}^{*}e^{+j\omega\Lambda z}$$
(5.3)

とおく。式(5.3)を式(5.1)に代入して次式を得る。

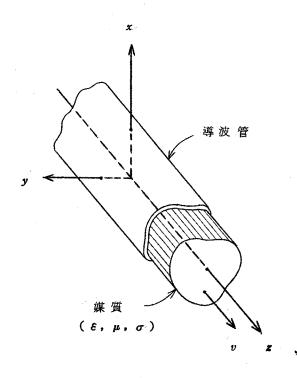


図5・1 座 標 系

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{P} \times \mathbf{E}_{0} = -j\omega\mu \, \mathbf{H}_{0} - \mathbf{J}_{0}^{*} \\
(\mathbf{P} - \mu\sigma v \, \mathbf{I}_{z}) \times \mathbf{H}_{0} = j\omega\hat{\varepsilon} \, \mathbf{E}_{0} + \mathbf{J}_{0}
\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

さて、媒質が導波管内を軸方向に一様な速度で運動している場合には、電磁界ベクトル E および H の満たすべき境界条件は媒質が静止している場合と同様に、導波管壁において

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{5.5}$$

と なる $^{(90)}$ ・ただし、管壁は完全導体であるとし、また $\mathbf{n}$ は管壁の外向き法線ベクトルを表わす。したがって、 $\mathbf{E}_0$ および $\mathbf{H}_0$ についてもその境界条件は、

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = 0$$
 ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0 = 0$  (5.6)

となる。

ここで、導波管内の電磁界 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{H}_0$  をベクトルモード関数を用いて展開すればつぎのように書ける。

$$\mathbf{E}_{0t} = \sum_{i} \left[ V_{i}^{e}(z) \mathbf{M}_{i}^{e} + V_{i}^{m}(z) \mathbf{M}_{i}^{m} \right] 
\mathbf{H}_{0t} = \sum_{i} \left[ -I_{i}^{e}(z) \mathbf{N}_{i}^{e} + I_{i}^{m}(z) \mathbf{N}_{i}^{m} \right] 
\mathbf{E}_{0z} = \sum_{i} \left[ (k_{i}^{e})^{2} V_{zi}(z) \mathbf{M}_{zi} \right] 
\mathbf{H}_{0z} = \sum_{i} \left[ (k_{i}^{m})^{2} I_{zi}(z) \mathbf{N}_{zi} \right]$$
(5.7)

ただし、添字"t" および"z" はそれぞれ断面成分および軸方向成分を表わす。また、 $V_i^e$  、 $V_i^m$  、 $V_{zi}$  および  $I_i^e$  、 $I_i^m$  、 $I_{zi}$  は、それぞれモード電圧および電流を表わす。さらに、ベクトルモード関数 $\mathbf{M_i}^e$  、 $\mathbf{N_i}^e$  、 $\mathbf{M}_{zi}^e$  よび  $\mathbf{M_i}^m$  、 $\mathbf{N_i}^m$  、 $\mathbf{N}_{zi}^m$  はそれぞれ管壁上で境界条件

$$\Phi_{i}^{e} = 0$$

$$\partial \Phi_{i}^{m} / \partial n = 0$$
(5.8)

を満足し, 方程式

を満たすスカラ固有関数 $\Phi_i^{\ e}$  および $\Phi_i^{\ m}$  を用いてつぎのように定義される。

$$\mathbf{M}_{i}^{e} = \mathbf{P}_{t} \Phi_{i}^{e}, \qquad \mathbf{M}_{i}^{m} = \mathbf{P}_{t} \Phi_{i}^{m} \times \mathbf{I}_{z}$$

$$\mathbf{N}_{i}^{e} = \mathbf{P}_{t} \Phi_{i}^{e} \times \mathbf{I}_{z}, \qquad \mathbf{N}_{i}^{m} = \mathbf{P}_{t} \Phi_{i}^{m}$$

$$\mathbf{M}_{zi} = \Phi_{i}^{e} \mathbf{I}_{z}, \qquad \mathbf{N}_{zi} = \Phi_{i}^{m} \mathbf{I}_{z}$$

$$(5.10)$$

ことで上部の添字"e" および"m" はそれぞれ電気形(TM波) および磁気形(TE波)の電磁界を表わす。また下部の添字"i" はモードの次数を表わし、以下では必要に応じて"mn"と書く。

なお,式(5.10)で与えられるベクトルモード関数に関してつぎのような 直交性が成立する。

$$\iint_{S} \mathbf{M}_{i}^{e} \cdot \mathbf{M}_{j}^{e} dS = \iint_{S} \mathbf{N}_{i}^{e} \cdot \mathbf{N}_{j}^{e} dS 
= (k_{i}^{e})^{2} \iint_{S} \Phi_{i}^{e} \Phi_{j}^{e} dS = \delta_{ij}$$

$$\iint_{S} \mathbf{M}_{i}^{m} \cdot \mathbf{M}_{j}^{m} dS = \iint_{S} \mathbf{N}_{i}^{m} \cdot \mathbf{N}_{j}^{m} dS 
= (k_{i}^{m})^{2} \iint_{S} \Phi_{i}^{m} \Phi_{j}^{m} dS = \delta_{ij}$$

$$\iint_{S} \mathbf{M}_{i}^{e} \cdot \mathbf{M}_{j}^{m} dS = \iint_{S} \mathbf{N}_{i}^{e} \cdot \mathbf{N}_{j}^{m} dS = 0, \text{ for all } i, j$$
(5.11)

ただし, Sは管軸に垂直な導波管断面を表わし, また

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

## 5.3 非斉次伝送方程式

電磁界方程式(5.4) およびモード表示式(5.7) から,境界条件(5.6) および 直交関係式(5.11) を考慮してつぎの関係式を得る。

$$\frac{dV_{i}^{e}}{dz} - \frac{\alpha_{i}^{e}}{j\omega\hat{\varepsilon}} I_{i}^{e} = \frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} g_{i}^{e}(z)$$

$$\frac{dI_{i}^{e}}{dz} - \mu\sigma v I_{i}^{e} + j\omega\hat{\varepsilon} V_{i}^{e} = -h_{i}^{e}(z)$$
(5.12)

$$\frac{dV_{i}^{m}}{dz} + j\omega\mu I_{i}^{m} = -h_{i}^{m}(z)$$

$$\frac{dI_{i}^{m}}{dz} - \mu\sigma v I_{i}^{m} - \frac{\alpha_{i}^{m}}{j\omega\mu} V_{i}^{m} = -\frac{1}{j\omega\mu} g_{i}^{m}(z)$$
(5.13)

$$I_{i}^{e} = -j_{\omega} \hat{\varepsilon} V_{zi} - \iint J_{0z} \Phi_{i}^{e} dS$$

$$V_{i}^{m} = -j_{\omega\mu} I_{zi} - \iint J_{0z}^{*} \Phi_{i}^{m} dS$$
(5.14)

ただし。

$$\alpha_{i}^{e} = \hat{k}^{2} - (k_{i}^{e})^{2}$$

$$\alpha_{i}^{m} = \hat{k}^{2} - (k_{i}^{m})^{2}$$

$$\hat{k}^{2} = \omega^{2} \hat{\epsilon} \mu \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)$$

$$g_{i}^{e}(z) = j \omega \hat{\epsilon} \iint J_{0_{i}}^{e} \cdot N_{i}^{e} dS - (k_{i}^{e})^{2} \iint J_{0_{z}} \Phi_{i}^{e} dS$$

$$g_{i}^{m}(z) = j \omega \mu \iint J_{0_{t}} \cdot M_{i}^{m} dS + (k_{i}^{m})^{2} \iint J_{0_{z}}^{e} \Phi_{i}^{m} dS$$

$$h_{i}^{e}(z) = \iint J_{0_{t}} \cdot M_{i}^{e} dS$$

$$h_{i}^{m}(z) = \iint J_{0_{t}}^{e} \cdot N_{i}^{m} dS$$

非**斉次** 伝送方程式 (5.12) および (5.13) はスカラ・グリーン関数を用いる方法によって解くことができる。まず、式 (5.12) から  $V_i^e$  、 $I_i^e$  はそれぞれつぎのように求められる。

$$V_{i}^{e}(z) = \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^{e} - \gamma_{-i}^{e}} \int_{-\infty}^{z} ((\gamma_{+i}^{e})g_{i}^{e}(z')) dz'$$

$$+ (\alpha_{i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{-i}^{e}} \int_{z}^{\infty} ((\gamma_{-i}^{e})g_{i}^{e}(z')) dz'$$

$$+ \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^{e} - \gamma_{-i}^{e}} \int_{z}^{\infty} ((\gamma_{-i}^{e})g_{i}^{e}(z')) dz'$$

$$+ (\alpha_{i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{+i}^{e}} (z - z') dz'$$

$$- I_{i}^{e}(z) = - \frac{1}{\gamma_{+i}^{e} - \gamma_{-i}^{e}} \int_{-\infty}^{z} (g_{i}^{e}(z')) dz'$$

$$+ (\gamma_{-i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{-i}^{e}} (z - z') dz'$$

$$+ (\gamma_{+i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{-i}^{e}} (z - z') dz'$$

$$+ (\gamma_{+i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{-i}^{e}} (z - z') dz'$$

$$(5.17)$$

ただし、

$$\gamma_{\pm i}^{e} = \frac{\mu \sigma v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu \sigma v}{2}\right)^{2} + \left(\left(k_{i}^{e}\right)^{2} - \hat{k}^{2}\right)}$$
 (5.18)

つきに,式(5.13)から $V_i^m$ , $I_i^m$ はそれぞれつぎのように求められる。

$$V_{i}^{m}(z) = -\frac{1}{\gamma_{+i}^{m} - \gamma_{-i}^{m}} \int_{\infty}^{z} (g_{i}^{m}(z') + (\gamma_{+i}^{m}) h_{i}^{m}(z')) e^{\gamma_{-i}^{m}(z-z')} dz'$$

$$-\frac{1}{\gamma_{+i}^{m}-\gamma_{-i}^{m}}\int_{z}^{\infty} \left(g_{i}^{m}(z')\right) + (\gamma_{-i}^{m})h_{i}^{m}(z') e^{\gamma_{+i}^{m}(z-z')}dz'$$
(5.19)

$$I_{i}^{m}(z) = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\gamma_{+i}^{m} - \gamma_{-i}^{m}} \int_{-\infty}^{z} ((\gamma_{-i}^{m}) g_{i}^{m}(z') + (\alpha_{i}^{m}) h_{i}^{m}(z')) e^{\gamma_{-i}^{m}(z-z')} dz'$$

$$+ \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{\gamma_{+i}^{m} - \gamma_{-i}^{m}} \int_{z}^{\infty} ((\gamma_{+i}^{m}) g_{i}^{m}(z') + (\alpha_{i}^{m}) h_{i}^{m}(z')) e^{\gamma_{+i}^{m}(z-z')} dz'$$

$$(5.20)$$

ただし,

$$\gamma_{\pm i}^{m} = \frac{\mu \sigma v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu \sigma v}{2}\right)^{2} + \left(\left(k_{i}^{m}\right)^{2} - \hat{k}^{2}\right)}$$
(5.21)

ここで,波源が有限の領域,  $z_1 < z < z_2$ にある場合には,たとえば $V_i^e$  はつぎのように書ける・

$$V_{i}^{e}(z) = \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^{e} - \gamma_{-i}^{e}} \int_{z_{1}}^{z_{2}} ((\gamma_{+i}^{e}) g_{i}^{e}(z')) dz' + (\alpha_{i}^{e}) h_{i}^{e}(z') e^{\gamma_{-i}^{e}(z-z')} dz', (z>z_{2})$$

$$= \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \frac{1}{\gamma_{+i}^{e} - \gamma_{-i}} \int_{z_{1}}^{z_{2}} ((\gamma_{-i}^{e}) g_{i}^{e}(z') + (\alpha_{i}^{e}) h_{i}^{e}(z')) e^{\gamma_{+i}^{e}(z-z')} dz', (z

$$= (5.23)$$$$

 $I_i^{\ e}$ , $V_i^{\ m}$  等についても同様である.

なお, $V_{zi}$ , $I_{zi}$  は上に得られたモード電流 $I_i^e$  およびモード電圧 $V_i^m$  を用いて式(5.14)から求められる。

以上によってモード電圧, 気流はすべて求まり, したがって軸方向に運動する媒質を含む導波管内に分布する任意の電流源もしくは磁流源によって励振される電磁界は,式(5.3) および(5.7) を用いてつぎのように書ける.

$$\mathbf{E}_{t} = \sum_{i} (V_{i}^{e}(z) \mathbf{M}_{i}^{e} + V_{i}^{m}(z) \mathbf{M}_{i}^{m}) e^{+j\omega \Lambda z}$$

$$\mathbf{H}_{t} = \sum_{i} (-I_{i}^{e}(z) \mathbf{N}_{i}^{e} + I_{i}^{m}(z) \mathbf{N}_{i}^{m}) e^{+j\omega \Lambda z}$$

$$\mathbf{E}_{z} = \sum_{i} ((k_{i}^{e})^{2} V_{zi}(z) \mathbf{M}_{zi}) e^{+j\omega \Lambda z}$$

$$\mathbf{H}_{z} = \sum_{i} ((k_{i}^{m})^{2} I_{zi}(z) \mathbf{N}_{zi}) e^{+j\omega \Lambda z}$$

$$(5.24)$$

# 5 . 4 斉次伝送方程式

ここでは前節の特別な場合として、非斉次伝送方程式(5.12)および(5.13)の波源による項をそれぞれ零とおいて得られる斉次伝送方程式

$$\frac{dV_{i}^{e}}{dz} - \frac{\alpha_{i}^{e}}{j\omega\hat{\varepsilon}} I_{i}^{e} = 0$$

$$\frac{dI_{i}^{e}}{dz} - \mu\sigma v I_{i}^{e} + j\omega\hat{\varepsilon} V_{i}^{e} = 0$$
(5.25)

$$\frac{dV_{i}^{m}}{dz} + j\omega\mu I_{i}^{m} = 0$$

$$\frac{dI_{i}^{m}}{dz} - \mu\sigma v I_{i}^{m} - \frac{\alpha_{i}^{m}}{i\omega\mu} V_{i}^{m} = 0$$
(5.26)

を解き,運動媒質を含む導波管の,波源の存在しない場合のモード表示式を 導く。 式 (5.25) から  $I_i^e$  または  $V_i^e$  を消去することによって,TM 波のモード電圧,電流の満足すべき微分方程式として次式を得る。

$$\frac{d^{2} V_{i}^{e}}{dz^{2}} - \mu \sigma v \frac{dV_{i}^{e}}{dz} + \alpha_{i}^{e} V_{i}^{e} = 0$$

$$\frac{d^{2} I_{i}^{e}}{dz^{2}} - \mu \sigma v \frac{dI_{i}^{e}}{dz} + \alpha_{i}^{e} I_{i}^{e} = 0$$
(5.27)

TE波のモード電圧,電流に関しても上と全く同様の式を得る. これらの斉次微分方程式の解, および式 (5.14) において波源による項を零とおいて得られる関係式

$$V_{zi} = -\frac{1}{j\omega\hat{\varepsilon}} I_i^{\epsilon}$$

$$I_{zi} = -\frac{1}{j\omega\mu} V_i^{m}$$
(5.28)

を用いて,波源のない場合の電磁界はつぎのように書ける.

$$\mathbf{E}_{t} = \sum_{i} \left( Z_{i}^{e} A_{i}^{e} \mathbf{M}_{i}^{e} e^{\Gamma_{i}^{e} z} + B_{i}^{m} \mathbf{M}_{i}^{m} e^{\Gamma_{i}^{m} z} \right)$$

$$\mathbf{H}_{t} = \sum_{i} \left( -A_{i}^{e} \mathbf{N}_{i}^{e} e^{\Gamma_{i}^{e} z} + Y_{i}^{m} B_{i}^{m} \mathbf{N}_{i}^{m} e^{\Gamma_{i}^{m} z} \right)$$

$$\mathbf{E}_{z} = -\frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \sum_{i} \left( A_{i}^{e} (k_{i}^{e})^{2} \mathbf{M}_{zi} e^{\Gamma_{i}^{e} z} \right)$$

$$\mathbf{H}_{z} = -\frac{1}{j\omega\mu} \sum_{i} \left( B_{i}^{m} (k_{i}^{m})^{2} \mathbf{N}_{zi} e^{\Gamma_{i}^{m} z} \right)$$

$$(5.29)$$

ただし、

$$\Gamma_{i}^{e} = \gamma_{\pm i}^{e} + j\omega \Lambda$$

$$\Gamma_{i}^{m} = \gamma_{\pm i}^{m} + j\omega \Lambda$$
(5.30)

$$Z_{i}^{e} = \frac{1}{Y_{i}^{e}} = \frac{1}{j\omega\hat{\epsilon}} \gamma_{+i}^{e}$$

$$Y_{i}^{m} = \frac{1}{Z_{i}^{m}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \gamma_{\pm i}^{m}$$
(5.31)

また, $A_i^e$  および $B_i^m$  は定数である・

なお, Collier と Tai (31) は同様の問題を方形および円形導波管の場合について,ベクトル・ポテンシャルを用いる方法によって求めているが,上式(5.29)は彼らによって得られた結果を含む,より一般的な表現式である.

### 5.5 運動媒質を含む方形導波管のモード励振

ここでは 5、3 の結果を用いて,運動媒質を含む方形導波管のモード励振の問題について考察する。

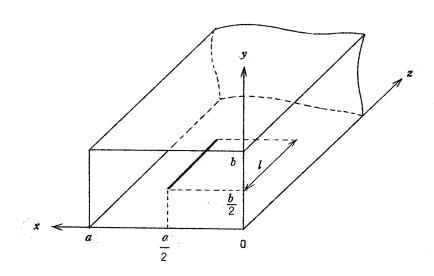


図5.2 方形導波管のモード励振

いま, 座標系および導波管各部の寸法を図5。 2 に示すようにとり, 2 方向に一様な線電流源

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} \cdot \delta \left( x - \frac{a}{2} \right) \cdot \delta \left( y - \frac{b}{2} \right) \mathbf{I}_{z}, \quad (0 \le z \le l)$$
 (5.32)

によって、 $TM_{1}$ モードを励振するものとすれば、励振される $TM_{mn}$  波のモードド電圧 $V_{mn}^{e}(z;z>l)$  は式(5.22)を用いてつぎのように求められる。ただし、上式(5.32)において $\delta$  はDiracのデルタ関数を表わす。

$$V_{mn}^{e}(z) = \frac{I}{\omega \hat{\epsilon} \sqrt{ab}} \cdot \frac{k_{mn}}{K_{mn}} \cdot \frac{\gamma_{+mn}}{\Gamma_{mn}}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot (1 - e^{-\Gamma_{mn}l}) e^{\gamma_{-mn}z}$$

$$(z > l) \qquad (5.33)$$

ただし、

$$\Gamma_{mn} = \gamma_{-mn} + j\omega \Lambda$$

$$K_{mn} = \sqrt{(\hat{k}^2 - (k_{mn}^2)) - (\frac{\mu\sigma v}{2})^2}$$
(5.34)

なお、上式(5.33)を導くにあたって、方形導被管のスカラ固有関数が、

$$\phi_{mn}^{e} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{k_{mn}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{5.35}$$

ただし。

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$
 (5.36)

となることを用いた。

ここで, $TM_{11}$ モードに対する不要モードの発生率  $\eta_{mn}$  を,z=l における  $TM_{mn}$  波のモード電圧 $V_{mn}^{\phantom{mn}e}$  (l) と, $TM_{11}$ 波のモード電圧 $V_{11}^{\phantom{1}e}(l)$  との比の絶対値で定義すれば  $\eta_{mn}$  はつぎのようにかける。

$$\eta_{mn} = \left| \frac{V_{mn}^{e}(l)}{V_{11}^{e}(l)} \right| = \frac{k_{mn}}{k_{11}} \cdot \left| \frac{K_{11}}{K_{mn}} \right| \cdot \left| \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{mn}} \right|$$

$$\begin{array}{c|c}
\bullet & \frac{\gamma_{+mn}}{\gamma_{+11}} & \bullet & \sin \left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin \left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
\bullet & \frac{1 - e^{\Gamma_{mn} l}}{1 - e^{\Gamma_{41} l}} & (5.37)
\end{array}$$

上式からわかるように、モードの次数m,nの両者もしくはいずれか一方が偶数の場合には ηmn = 0 となり、したがってこのような次数の不要モードは発生しないことは、媒質が静止している場合と同様である。m,n がともに奇数の場合には、上式 (5.37)を数値計算することによって、不要モードの発生率は、媒質の運動の方向が電磁波のエネルギーの伝搬方向と一致している場合には、媒質が静止している場合に比べて低くなり、また逆の場合には高くなることがわかる。

#### 5.6 結 言

光速に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む導波管のモード励振の問題を伝送方程式を用いて取り扱い。この種の問題の代表的な例として方形導波管のモード励振について考察した。

# 第6章 導電性運動媒質を含む導波管 の理論(II)厳密解<sup>(43)</sup>・<sup>(44)</sup>

#### 6.1 序 言

前章においては、光速に比べて十分小さい速度で運動する導電性誘電体を含む任意の断面をもつ真直で一様な導波管のモード励振の問題を、MaxwellーMinkowski 方程式から導かれる伝送方程式を用いて解析した・本章においては、媒質の運動速度に関するこのような制限を取り除いた厳密解を、変換を用いる方法によって求め近似解の場合にはみられなかった特異な現象が現われることを示す・特に、媒質の運動速度が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき、無限に拡がっている導電性運動媒質中を伝搬する平面波の場合と同様に波動増幅の現象が起こることを示し、この現象を第4章において導かれたエネルギー関係式を用いて考察する・

### 6.2 導波管中の電磁界

誘電率  $\varepsilon$  ,透磁率  $\mu$  , 導電率  $\sigma$  をもつ線形,等方かつ一様なる媒質を考え、この媒質が図  $\delta$  . 1 に示すように任意の断面をもつ真直で一様な導波管中を軸方向に一様にv なる速度で運動しているものとする. ただし, $\varepsilon$  ,  $\mu$  および  $\sigma$  はそれぞれ周波数  $\omega$  によらない定数であると仮定し,また管内に印加波源はないものとする・さらに,媒質 および観測者の静止座標系における電磁界の時間変化をそれぞれ  $e^{j\omega't'}$  および  $e^{j\omega t}$  と仮定する. なお,以下においてプライムのついた電磁界量は媒質の静止座標系における量を表わし,観測者の静止座標系における電磁界量にはプライムをつけないものとする.

さて、媒質の静止座標系における電磁界はつぎのように表わされる。ただし、本章においてはTEモードのみを取扱うが、TMモードの場合もまったく同様に取扱うことができる。

$$\mathbf{H}_{\parallel}' = \mathbf{I}_{z}' H \exp(-jk_{z}'z')$$

$$\mathbf{H}_{\perp}' = Y_{m}' (\mathbf{I}_{z}' \times \mathbf{E}_{\perp}')$$

$$\mathbf{E}_{\perp}' = j(\omega'\mu/k_{m}^{2})\mathbf{I}_{z}' \times \mathbf{V}_{t} H \exp(-jk_{z}'z')$$
(6.1)

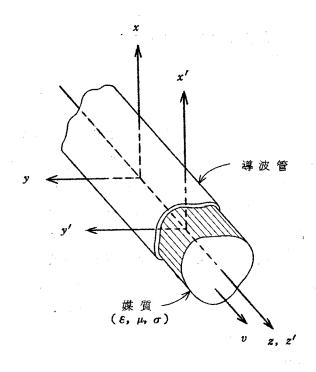


図6.1 座 標 系

上式において, $Y_m'$ は次式によって定義される。

$$Y_{m}' = \frac{k_{z}'}{\omega' u} \tag{6.2}$$

また, Hはつきの方程式

$$\mathbf{V}_{t}^{2} H + k_{m}^{2} H = 0 \tag{6.3}$$

の解であり、管壁上での境界条件を満足しているものとする。ただし、♥,はナプラ演算子の断面成分を表わし、

$$k_z^{\prime 2} = \omega^{\prime 2} \mu \hat{\varepsilon} - k_m^2$$
,  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega^{\prime} \varepsilon} \right)$  (6.4)

なお、電磁界表示式(6.1)において、下記の添字川および上は、それぞれ管

軸に平行な成分および垂直な成分を表わす。

つぎに、観測者の静止座標系における電磁界は、Maxwell 方程式の共変性(90) を知いてつぎのように表わされる。

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{I}_{z} H exp(-jk_{z}z)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = Y_{m}(\mathbf{I}_{z} \times \mathbf{E}_{\perp})$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = j(\gamma^{2}/k_{m}^{2})\mu\omega(1-\beta^{2})\mathbf{I}_{z} \times \mathbf{P}_{t} H exp(-jk_{z}z)$$
(6.5)

ただし、 $Y_m$  はつぎのように定義される・

$$Y_{m} = \frac{\gamma^{2}}{\mu\omega} \left( k_{z} - \beta \omega / c + \beta c \mu \varepsilon (\omega - \beta k_{z} c) \right)$$
 (6.6)

なお、観測者の静止座標系における分散関係式は、媒質の静止座標系における分散関係式(6.4)に変換式

$$\omega' = \gamma \left( \omega - \beta k_z c \right), \quad k_z' = \gamma \left( k_z - \beta \omega / c \right)$$
 (6.7)

ただし, c は真空中の光速度を表わし,

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{6.8}$$

を用いてつぎのように求められる。

$$k_{z}^{2} (1 - \beta^{2} c^{2} \mu \varepsilon) + k_{z} (-2 \beta (\omega/c) (1 - c^{2} \mu \varepsilon)$$

$$- j \mu \sigma \beta c / \gamma) + (\omega/c)^{2} (\beta^{2} - c^{2} \mu \varepsilon)$$

$$+ (1 - \beta^{2}) k_{m}^{2} + j \mu \sigma \omega / \gamma = 0$$

$$(6.9)$$

#### 6.3 伝搬定数

伝搬定数  $k_z$  を位相係数  $p_m$  および減衰(増幅)係数  $q_m$  を用いて次式によっ

て定義する。

$$k_z = k_m (p_m - j q_m)$$
 (6.10)

ただし、 $p_m$  および  $q_m$  の下部の添字m はモードの次数を表わす。このとき  $p_m$  および  $q_m$  はそれぞれつぎのように求まる。まず、 $1-n^2\beta^2 \gtrless 0$  の場合には、

$$p_{m} = p_{m}^{\pm} = \frac{1}{n(1-n^{2}\beta^{2})} \left[\beta(1-n^{2})\frac{\lambda_{m}}{\lambda} \pm g\right] (n^{2}\beta^{2} \ge 1)$$
(6.11)

$$q_{m} = q_{m}^{\pm} = \frac{1}{n(1 - n^{2}\beta^{2})} \left( -(n^{2}\beta/2\gamma) t a n^{2} \delta_{0} \pm h \right)$$

$$(n^{2}\beta^{2} = 1) \qquad (6.12)$$

となる。ただし、

$$g = \sqrt{\frac{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2}}$$

$$h = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}{2}}$$
(6.13)

ととで,

$$P = n^{2} (1 - \beta^{2})^{2} (\lambda_{m}/\lambda)^{2} - (1 - n^{2}\beta^{2}) (1 - \beta^{2}) n^{2}$$

$$- (n^{2}\beta/2\gamma)^{2} t a n^{2} \delta_{0}$$

$$Q = - (1 - \beta^{2}) (n^{2}/\gamma) (\lambda_{m}/\lambda) t a n \delta_{0}$$

$$(6.14)$$

なお,上式においてつぎの諸記号を導入した。

$$n = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \sqrt{\mu \varepsilon}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{c}{n}$$
(6.15)

$$\lambda_{m} = \frac{2\pi}{k_{m}}$$

$$t \operatorname{an} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} = \frac{\lambda}{\lambda_{m}} \tan \delta_{0}$$
(6.15)

ただし、 $tan \delta_0$ は $\lambda_m/\lambda=1$  のときの $tan \delta$  の値を表わす・また、以下においてn>1 と仮定する・式 (6.11) および (6.12) から、導電性運動媒質を含む導波管中には伝搬定数 $k_z^+=k_m$   $(p_m^+-jq_m^+)$  および $k_z^-=k_m$   $(p_m^--jq_m^-)$  をもつ 2 種類の波が存在しうることがわかる・つぎに、 $1-n^2\beta^2=0$  のときの $p_m$  および  $q_m$  は分散関係式 (6.9) からそれぞれつぎのように求まる・

$$p_{m} = \frac{\beta}{n} \cdot \frac{(\lambda_{m}/\lambda) \left(2 \left(1 - \beta^{2}\right) \left\{\left(1 + \beta^{2}\right) - \left(\lambda/\lambda_{m}\right)^{2}\right\}}{4 \left(1 - \beta^{2}\right) + \left(\lambda/\lambda_{m}\right)^{2} t \, a \, n^{2} \delta_{0}} \cdot \frac{+ \left(\lambda/\lambda_{m}\right)^{2} t \, a \, n^{2} \delta_{0}}{(n^{2}\beta^{2} - 1)} \left(n^{2}\beta^{2} - 1\right)$$

$$(6.16)$$

$$q_{m} = \frac{\beta}{n} \cdot \frac{((1-\beta^{2}) + (\lambda/\lambda_{m})^{2}) \sqrt{1-\beta^{2}} t an \delta_{0}}{4(1-\beta^{2}) + (\lambda/\lambda_{m})^{2} t an^{2} \delta_{0}}$$

$$(n^{2}\beta^{2} = 1) \qquad (6.17)$$

上式から  $n^2\beta^2=1$  のときには、一般には 2 つあるべき伝搬定数が 1 つに 縮退することがわかる・

さて、つぎに位相係数 $p_m$ の符号について調べる。ただし、以下においては $\beta \ge 0$ 、すなわち媒質はzの正の方向に運動しているものと仮定する。まず、 $n\beta \ge 1$  の場合 $p_m^+$ の符号は表  $6\cdot 1$  のようになる。ただし、表  $6\cdot 1$  における $\beta^0$  および  $\lambda_m/\lambda^0$  はそれぞれつぎのように定義される・

$$\beta^{0} = \frac{n \tan \delta_{0}}{\sqrt{4 (n^{2}-1)^{2} + n^{2} (2-n^{2}) \tan^{2} \delta_{0}}}$$
 (6.18)

$$\frac{\lambda_{m}}{\lambda^{0}} = \frac{n}{n^{2}-1} \sqrt{\frac{4 \beta^{2} (1-n^{2})^{2}-n^{2} \{1+\beta^{2} (n^{2}-2)\} t a n^{2} \delta_{0}}{4 (n^{2}-\beta^{2}) \beta^{2} \gamma^{2}}}$$
(6.19)

表6.1  $p_m^+$  の符号  $(n_{\beta} \ge 1)$ 

$n \leq \sqrt{2}$ , $\pm h \leq n > \sqrt{2} h > t$ an $\delta_0 < \frac{2(n^2-1)}{n\sqrt{n^2-2}}$				
$eta < eta^0$	$p_m^+ > 0$			
	$\frac{\lambda_m}{\lambda} < \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m^+ < 0$		
$\beta>\!\!\beta^0$	$\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m^+ = 0$		
	$\frac{\lambda_m}{\lambda} > \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m^+ > 0$		
$n > \sqrt{2} \ \text{find } \delta_0 \ge \frac{2 (n^2 - 1)}{n \sqrt{n^2 - 2}}$				
$p_m^+ > 0$				

表 6.2  $p_m$  の符号( $n\beta$  \leq 1)

$0 < n\beta < 1$	$p_m < 0$
$n\beta > 1$	$p_m^- > 0$

つぎに、 $p_m$  の符号は表 6・2 のようになる・以上は neta  $\gtrless$  1 のときの  $p_m$  であるが、 neta = 1 のときには表 6・3 のようになる・ただし、表 6・3 における  $\lambda_m/\lambda^0$  は次式によって定義される・

$$\frac{\lambda_m}{\lambda^0} = \sqrt{\frac{2(1-1/n^2) - t \, an^2 \delta_0}{2(1-1/n^4)}} \quad (n\beta = 1)$$
 (6.20)

表 6.3  $p_m$  の符号 ( $n\beta = 1$ )

$t \ an \ \delta_0 < \sqrt{2 \ (1 - 1/n^2)}$			
$\frac{\lambda_m}{\lambda} < \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m < 0$		
$\frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m = 0$		
$\frac{\lambda_m}{\lambda} > \frac{\lambda_m}{\lambda^0}$	$p_m > 0$		
$tan \delta_0 \ge \sqrt{2(1-1/n^2)}$			
$p_m > 0$			

表 6.4  $q_m^{\pm}$ の符号( $n\beta$   $\geq$  1)

	$tan \delta_0 \geq 0$	$t  an  \delta_0 = 0$	
nβ < 1	$q_m^+ > 0$	$\frac{\lambda_m}{\lambda} < \sqrt{\frac{1 - n^2 \beta^2}{1 - \beta^2}}$	$q_m^+ > 0$ $q_m^- < 0$
	$q_m < 0$	$\frac{\lambda_m}{\lambda} \ge \sqrt{\frac{1 - n^2 \beta^2}{1 - \beta^2}}$	$q_{m}^{+} = 0$ $q_{m}^{-} = 0$
$n\beta > 1$	$q_m^+ > 0$	$q_m^+ = 0$	
	$q_m > 0$	$q_m = 0$	

表 6.5  $q_m$  の符号( $n\beta=1$ )

$tan \delta_0 \succeq 0$	$q_m > 0$
$tan \delta_0 = 0$	$q_m = 0$

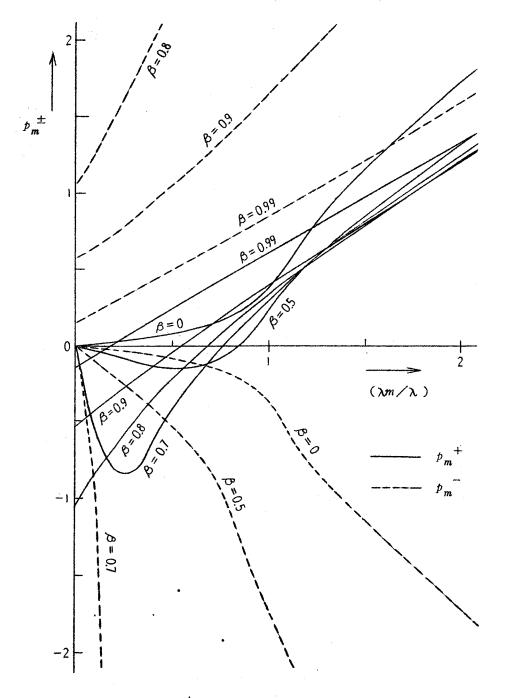


図 6.2 位相係数 $p_m^{\pm}$  ( $n\beta \ge 1$ ,  $tan \delta_0 = 0.3$ ,  $n = \sqrt{2}$ )

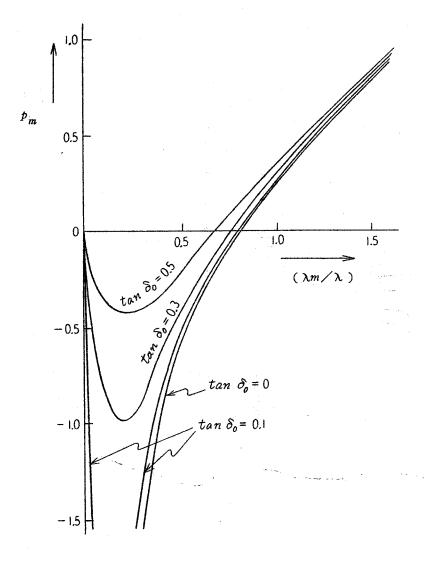


図 6.3 位相係数  $p_m$  ( $n\beta=1$ ,  $n=\sqrt{2}$ )

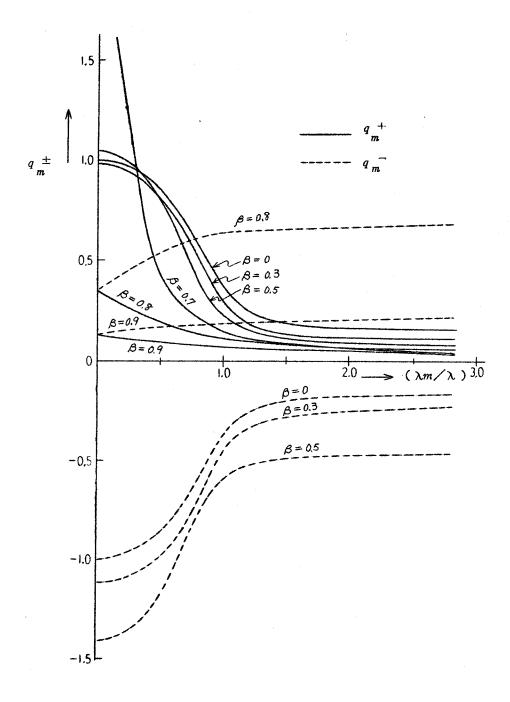


図 6.4 減 衰定数 $q_m^{\pm}$  ( $n\beta \ge 1$ ,  $tan \delta_0 = 0.3$ ,  $n = \sqrt{2}$ )

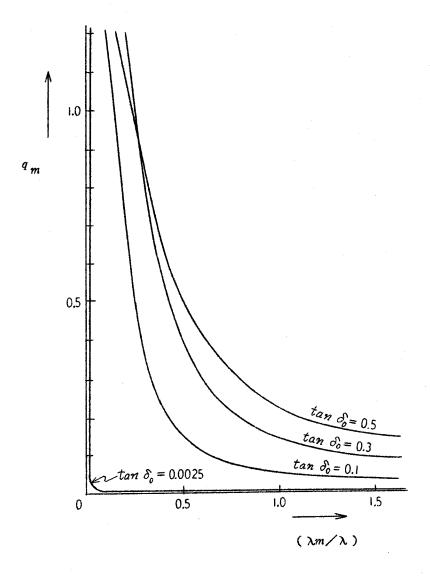


図 6.5 減衰係数 $q_m$  ( $n\beta = 1$ ,  $n = \sqrt{2}$ )

図 6.2 および図 6.3 は  $p_m$  の数値計算例である。

つぎに、滅衰(増幅)係数について調べる、まず、 $n\beta$   $\leq$  1 のときの $q_m$  の符号は表 6  $\cdot$  4 のようになる。また、 $n\beta$  = 1 のときには表 6  $\cdot$  5 のようになる。ここで表 6  $\cdot$  4 に明らかなように $n\beta$  > 1 のときには減衰(増幅)係数  $q_m^+$  かよび  $q_m^-$  がともに正の値をとることに注意したい。図 6  $\cdot$  4 および 図 6  $\cdot$  5 は  $q_m$  の数値計算例である。

### 6.4 電磁エネルギーの流れ

軸方向の電磁エネルギーの流れをPとすると、Pは複素PoyntingベクトルSのz方向成分 $S_z$ をz軸に垂直な断面Aで積分したものの実数部であるから次式をうる・

$$P = Re \iint_{A} S_{z} dA \qquad (6.21)$$

$$S_z = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{I}_z$$
 (6.22)

式(6.22)を式(6.5)を用いて書き換えるとつぎのようになる。

$$S_z = \frac{1}{2} Y_m \left( \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}^* \right) \tag{6.23}$$

ここで、 $^*$  は複素共役ベクトルを表わし、またRe は実数部をとる操作を表わす。

上式(6.23)から電磁エネルギーの流れの方向はRe( $Y_m$ )の符号によって決まることがわかる。式(6.6)からRe( $Y_m$ )はつぎのように求まる。まず、 $n\beta$   $\ge$  1 のとき、

$$Re (Y_m) = Re (Y_m^{\pm}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{n(1-\beta^2)} \frac{\lambda}{\lambda_m} (\pm g)$$

$$(n \beta = 1) \qquad (6.24)$$

つぎに、 $n\beta = 1$ のとき

$$Re (Y_m) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad (n\beta = 1)$$
 (6.25)

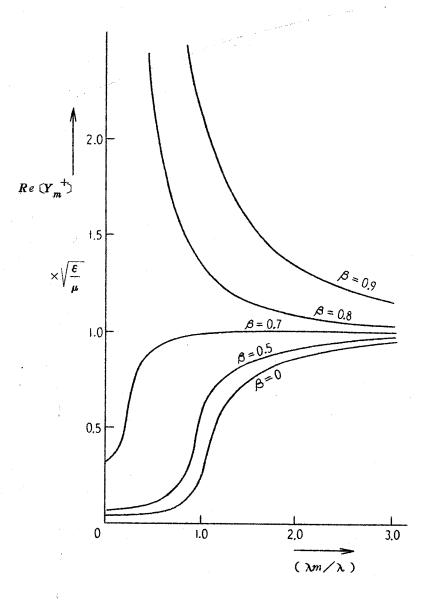
上式から,

$$Re\left(Y_{m}^{+}\right) > 0 \qquad (n\beta \geq 1) \tag{6.26}$$

$$Re\ (Y_m^-) < 0 \qquad (n\beta \ge 1)$$
 (6.27)

$$Re(Y_m) > 0 \qquad (n\beta = 1)$$
 (6.28)

となることがわかる・したがって、伝搬定数 $k_z^-$ をもつ波の電磁エネルギーの流れの方向はzの負の方向であり、 $k_z^+$ をもつ波のエネルギーの流れの方向はzの正の方向であることがわかる・また、 $n\beta=1$ のときには電磁エネルギーは常にzの正の方向に流れることがわかる・表  $6\cdot 4$  および式( $6\cdot 26$ )。( $6\cdot 27$ )から、媒質が低速度で運動している場合、すなわち $n\beta < 1$  のときには伝搬定数 $k_z^+$  および $k_z^-$  をもつ波は減衰波であることがわかる・しかし、媒質が高速度で運動している場合、すなわち $n\beta > 1$  のときには伝搬定数 $k_z^+$  をもつ波は減衰波であるが、 $k_z^-$  をもつ波は,波が進むにつれて振幅が増大する、いわゆる増大波となる・次節においてこのような波動増幅の現象を第4章で導かれたエネルギー関係式を用いて検討する・また $n\beta=1$  のときには表 $6\cdot 5$  および式( $6\cdot 28$ )から明らかなように、波は減衰波である・図  $6\cdot 6$  は280 から明らかなように、彼は減衰波である・図 280 は は280 な の 280 な な な な な な な な な な な な な な な な と に な る な な な な な ら に な る と に な る な な な な ら に る 281 の 282 の 283 の 283 の 284 で 383 の 383 の 384 で 383 の 384 で 383 の 384 で 383 か 384 で 385 で 385 で 385 の 385 で 385



 $\boxtimes 6.6 \quad Re(Y_m^+) (n\beta \ge 1, tan \delta_0 = 0.3, n = \sqrt{2})$ 

## 6.5 エネルギー関係式と波動増幅現象

ことでは,第4章において導かれたエネルギー関係式(4.46)を用いて導 波管中を伝搬する波の増幅現象について考察する。

式 (4.5a) で与えられる自由電流密度 4は

$$\mathbf{J}_{f} = \gamma_{\sigma} a \left( 1 - n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} Y_{m} \right) \mathbf{E}_{\perp} \tag{6.29}$$

となり。したがって式(4.47 $b\sim d$ )で定義される< W>。< A> および< Q> なる量はそれぞれつぎのように求められる。

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \gamma_{\sigma} a \left[ 1 - n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Re} (Y_{m}) \right] \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^{2}$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \gamma_{\sigma} a^{2} \left[ (1 - n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Re} (Y_{m})) \left[ n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Re} (Y_{m}) \right] \right]$$

$$- (n^{2} - 1) \gamma^{2} \beta^{2} \left[ (n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Im} (Y_{m}))^{2} \right] \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^{2}$$

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma_{\sigma} a^{2} \left[ (1 - n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Re} (Y_{m}))^{2} + (n\beta \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{Im} (Y_{m}))^{2} \right] \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^{2}$$

$$(6.32a)$$

または,

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \gamma \sigma \left( 1 - \frac{v}{v_p} \right) \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^2 \tag{6.30b}$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2} \gamma_{\sigma} \left[ \left( 1 - \frac{v}{v_{p}} \right) \left( \frac{v}{v_{p}} \right) - \left( \frac{v}{v_{i}} \right)^{2} \right] \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^{2}$$
 (6.31b)

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \gamma_{\sigma} \left[ \left( 1 - \frac{v}{v_{p}} \right)^{2} + \left( \frac{v}{v_{i}} \right)^{2} \right] \left| \mathbf{E}_{\perp} \right|^{2}$$
 (6.32b)

ただし、 $I_m$  は複素量の虚数部をとる操作を表わし、また

$$v_p = \frac{\omega}{k_m p_m} , \qquad v_i = \frac{\omega}{k_m q_m}$$
 (6.33*a*, *b*)

	$n\beta < 1$		$noldsymbol{eta}>1$	
	k	k _+	k _	k z +-
$p_{m}$	負	正または負	正	正または負
q <sub>m</sub>	負	Œ	Ē	正
$\langle s_z \rangle$	負	正	負	Œ
< w >	Œ	正	負	Œ
< A >	負	正または負	負	正または負
< Q >	ΙĒ	正	Æ	Œ
	$\frac{v}{v_p} < 0$	$\frac{v}{v_p} < 1$	$\frac{v}{v_p} > 1$	$\frac{v}{v_p}$ < 1

表 6 . 6 から、伝搬定数  $k_z$  をもつ波は、 $n\beta > 1$  のとき ( $v/v_p$ )> 1 なる関係を満足し、したがってこのとき波動増幅現象が起こることがわかる。

#### 6.6 結 言

導電性運動媒質を含む導波管について、媒質の運動速度が光速度に比べて

十分小さいという近似を行なわない厳密解について論じ、近似解の場合には みられなかった特異な現象が現われることを示した。特に、媒質の運動速度 が導波管中を伝搬する波の位相速度よりも大きくなるとき波動増幅の現象が 起こることを示し、この現象を第4章で導かれたエネルギー関係式を用いて 考察した。

# 第7章 圧縮性運動プラズマ流体と平面電 磁波との相互作用<sup>(59)~(66)</sup>

## 7.1 序 言

運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題,すなわち運動媒質による平面電磁波の反射と透過の問題は,この問題が電磁界理論における基本的な問題の一つであることから,各方面で活発に研究され,Stolyarov (45),Tai (46) およびYeh (47)・(48) を始めとする多数の人 \*(49)~(73) による種々の興味深い結果が得られている。ところで,Tai あるいはYehらの解析は損失のない通常の誘電体,もしくは衝突を考慮しないプラズマの場合に限られており,吸収性運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は著者ら(59)~(66)・(74) によって初めて考察された。第8章において詳しく述べるように,吸収性運動媒質を取り扱う場合には,その吸収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷による寄与がない非導電性吸収媒質か,あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している導電性吸収媒質かによって取り扱いが異なってくる。本章においては導電性吸収媒質の一例として衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を取り扱い,次章において非導電性吸収媒質の一例として光領域における分散性誘電体媒質を取り扱う・

本章においては、衝突度数が十分多い圧縮性プラズマ流体を考え、真空中を一様に運動しているこのような半無限プラズマ流体の境界面における平面電磁波と電磁流体波との相互作用について考察する。ただし、入射波が E 波の場合および入射波が H 波の場合の二つの場合を取り扱い、それぞれの場合について反射係数、透過係数および透過波の伝搬定数などを求め、媒質が運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討する。

#### 7 • 2 静止プラズマ流体の基本方程式

運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用の問題を論じる前に,まず静止プラズマ流体の基本方程式について考察する。

圧縮性静止プラズマ流体を電気伝導性をもつ1つの連続媒質と考え、電磁流体的に取り扱うとき、その基本方程式はつぎのように書ける。<sup>(91)</sup>

$$\mathbf{P'} \times \mathbf{E'} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H'}}{\partial t'} \tag{7.1a}$$

$$\mathbf{P}' \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'}$$
 (7.1b)

$$\mathbf{J}' = \sigma \left( \mathbf{E}' + \mu_0 \mathbf{V}' \times \mathbf{H}' \right) \tag{7.1c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \mathbf{p}' \cdot (\rho' \mathbf{v}') = 0 \tag{7.1d}$$

$$\rho' \frac{D\mathbf{v}'}{Dt'} = -\mathbf{P}' P' + \mu_0 (\mathbf{J}' \times \mathbf{H}')$$
 (7.1e)

$$\rho' c_p \frac{DT'}{Dt'} = \frac{DP'}{Dt'} + \frac{\mathbf{J}^{\prime 2}}{\sigma}$$
 (7.1f)

$$P' = \rho' R_0 T' \tag{7.1g}$$

ただし.

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + (\mathbf{v'} \cdot \mathbf{F'})$$

ここで、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ は真空の誘電率および透磁率を表わし、 $\sigma$ は導電率を表わす。また、 $\mathbf{V}'$  、 $\rho'$  、T' 、および P' はそれぞれ流速、流体密度、温度、および 圧力を表わし、 $R_0$ および  $c_p$  はそれぞれ気体定数および定圧比熱を表わす。なお、上式においてプライムは媒質の静止座標系に属する量を表わす。ただし、式 (7.1e) および (7.1f) において、粘性および熱伝導を無視した。

いま,一定の外部静磁界 $H_0$ の中で平衡している密度 $\rho_0$ ,圧力 $P_0$ のプラズマ流体に波動的な変動が起こり,磁界,密度,圧力がそれぞれ $H_0+H'$ , $\rho_0+\rho'$ , $P_0+P'$  になったとする・ここでH' , $\rho'$  ,P' はそれぞれ微少変動の部分である・また,電界,電流,流速は平衡の状態では0 であるとし,波動のあるときは変動の部分E' ,J' ,V' だけで,それは微少量であるとする・

との場合に、微少量の二次以上の項を省略すると、基本方程式(7.1)から つぎの線形方程式群が導かれる。

$$\mathbf{P'} \times \mathbf{E'} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H'}}{\partial t'} \tag{7.2a}$$

$$\mathbf{P'} \times \mathbf{H'} = \mathbf{J'} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E'}}{\partial t'}$$
 (7.2b)

$$\mathbf{J'} = \sigma \left( \mathbf{E'} + \mu_0 \mathbf{v'} \times \mathbf{H}_0 \right) \tag{7.2c}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \rho_0(\mathbf{p'} \cdot \mathbf{v'}) = 0 \tag{7.2d}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{V'}}{\partial t'} = -\mathbf{V'} P' + \mu_0 \left( \mathbf{J'} \times \mathbf{H}_0 \right) \tag{7.2e}$$

$$P' = a_0^2 \rho' \tag{7.2}$$

ここで  $a_0 = \sqrt{\gamma_0 P_0} / \rho_0$ は音速を表わし、 $\gamma_0$ は断熱指数を表わす。また流体圧力と密度の間には断熱過程が成立するものとする。上に得られた線形方程式群 (7.2) から、圧縮性静止プラズマ流体中を伝搬する電磁流体波として、電磁  $Alfv\acute{e}n$  波と電磁音波の 2 種類の波が存在することを示すことができる。このような静止プラズマ流体の水平な境界面に平面電磁波が入射するとき、入射波がE 波(電界が入射面に垂直)のときには電磁 $Alfv\acute{e}n$  波が励振される。

さてここで外部静磁界の方向を図 7.1に示すように x' 軸に平行であるとし、位相項を  $e^{\int (\omega' t' - k_x'(t)x' - k_z'(t)z')}$  と 仮定すれば、線形方程式群(7.2) から、 x' z' 平面内を伝搬する E 波(ここでは電界が入射面、 x' z' 平面に垂直、すなわち y' 軸に平行)、 および H 波(同様に磁界が y' 軸に平行)に対する分散関係式として、それぞれ式 (7.3) および (7.4) をうる・

E 波

$$(k_z'^{(t)})^4 + (k_z'^{(t)})^2 \left[ (k_x'^{(t)})^2 - k_0'^2 (1 - j \frac{1}{m'}) \right]$$

$$-\left(1-j\frac{1}{m'}\frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right)\left\{\frac{\omega'^{2}}{a_{0}^{2}}-\left(k_{x}^{\prime}(t)\right)^{2}\right\}$$

$$-\left[\left(k_{x}^{\prime}(t)\right)^{2}-k_{0}^{\prime 2}\left(1-j\frac{1}{m'}\right)\right]\left[1-j\frac{1}{m'}\frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right]$$

$$\cdot\left[\frac{\omega'^{2}}{a_{0}^{2}}-\left(k_{x}^{\prime}(t)\right)^{2}\right]+k_{0}^{\prime 2}\frac{1}{m'^{2}}\frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}$$

$$\cdot\left[\frac{\omega'^{2}}{a_{0}^{2}}-\left(k_{x}^{\prime}(t)\right)^{2}\right]=0 \tag{7.3}$$

H波

$$\left(k_{z}^{\prime(t)}\right)^{2} \left[1 + \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}} + jm'\right] + \left(k_{x}^{\prime(t)}\right)^{2}$$

$$\left[1 + \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}} + j\left(m' - \frac{1}{m'} - \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right)\right]$$

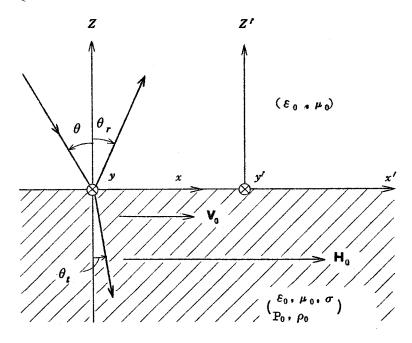


図7.1 座 標 系

$$-k_0^{\prime 2}\left(1-j\frac{1}{m^{\prime}}\right)\left[1+\frac{V_a^2}{c^2}+jm^{\prime}\right]=0 \tag{7.4}$$

ただし, 繁雑さを避けるため, 伝搬定数には E 波および H 波を表わす添字は付けないものとする。なお,式 (7.3), (7.4)において以下の記号を 導入した。

$$k_0' = \frac{\omega'}{c}$$
 ,  $m' = \frac{\varepsilon_0 \; \omega'}{\sigma}$  ,  $c = \frac{1}{V\varepsilon_0\mu_0}$   $V_a = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} \; H_0 = A \, lfv \, \acute{e}n \; \dot{x} \, \dot{x}$ 

上式 (7.3) からわかるように、入射波がE波の場合には、透過波の伝搬定数 $k_z^{'(t)}$  は一般には 4 つの解をもつ・しかし、本章 の場合 のように、半無限媒質中をz' の負の方向に伝搬する波に対しては、そのうち 2 根を解として選ぶことができ、したがって入射 E 波に対しては 2 種類の透過波が励振される・同様にH波の場合には  $k_z^{'(t)}$  の 2 つの解のうち 1 つが z' の負の方向に伝搬する波の伝搬定数として選ばれ、この場合には 1 種類の透過波が励振される・

### 7.3 入射波が E波の場合

図7・1 に示すように、z>0 の空間は真空であり、z<0 の空間は前節で述べたような圧縮性プラズマ流体によって満たされているものとし、プラズマ流体は観測者に対して一定速度 $V_0$ でx 軸方向に運動しているものとするいま、真空側から一様な平面波が入射するものとするとし、本節では入射波がE波の場合、すなわち電界が入射面(xz 平面)に垂直な場合を取り扱う・このとき、観測者の静止座標系K(x,y,z,t)においては、入射波はつぎのように表わされる・

$$E_{y}^{(i)} = E_{i} e^{j(\omega t - k_{x}x - k_{z}z)}$$

$$H_{y}^{(i)} = 0$$
(7.5)

ただし,

$$k_x = k_0 \sin \theta$$
,  $k_z = -k_0 \cos \theta$ ,  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 

ここで、 $E_i$  は場所および時間に無関係な定数であり、 $\omega$  は入射波の角周波数、 $\theta$  は入射角を表わす。なお、電磁界の他の成分は上式 (7.5) とMaxwell 方程式とから求められる。

#### 7.3.1 反射波と透過波

入射波 (7.5) は,プラズマ流体の静止座標系K' (x',y',z',t') においては,つぎの形に書ける・

$$E_{y}^{'(i)} = E_{i}^{'} e^{j(\omega't'-k_{x}^{'}x'-k_{z}^{'}z')}$$

$$H_{y}^{'(i)} = 0$$
(7.6)

入射波(7.6)に対して、K' 系における反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる。

反射波

$$E_{y}^{'(r)} = E_{r}^{'} e^{j(\omega' t' - k_{x}^{'} x' + k_{z}^{'} z')}$$

$$H_{y}^{'(r)} = 0$$
(7.7)

透過波

$$E_{y_{1}}^{\prime(t)} = E_{t_{1}}^{\prime} e^{j(\omega' t' - k_{x}^{\prime} x' - k_{z_{1}}^{\prime(t)} z')}$$

$$H_{y_{1}}^{\prime(t)} = 0$$
(7.8a)

$$E_{y_{2}}^{\prime(t)} = E_{t2}^{\prime} e^{j(\omega' t' - k_{x}' x' - k_{z_{2}}^{\prime(t)} z')}$$

$$H_{y_{0}}^{\prime(t)} = 0$$
(7.8b)

ここで $k_{z_1}^{\prime(t)}$  および $k_{z_2}^{\prime(t)}$  はそれぞれ分散関係式(7.3) から決定される伝搬定数である。以下において、伝搬定数 $k_{z_1}^{\prime(t)}$ をもつ波に属する量には添字 1

をつけ $k_{z_0}^{\prime(t)}$ をもつ波に属する量には添字2をつけるものとする。

さて、反射波および透過波の振幅  $E_r$  および  $E_{t1}$  、  $E_{t2}$  は境界条件を用いて決定されるわけであるが、 2 種類の透過波が存在する場合には、電界および磁界の接線成分連続の条件の他にも 5 1 つの境界条件が必要である。 ここでは、も 5 1 つの境界条件として通常よく行なわれているように、剛体境界面の条件( $v_z$  =  $v_{z1}$  +  $v_{z2}$  = 0 )を用いる。このとき、 $E_r$  、  $E_{t1}$  、  $E_{t2}$  はそれぞれつぎのように決定される。

$$E_{r}' = -E_{i}'$$

$$\frac{k_{0}'^{2} - k_{x}'^{2} + k_{z_{1}}'^{(t)} \quad k_{z_{2}}'^{(t)} - k_{z}' \quad (k_{z_{1}}'^{(t)} + k_{z_{2}}'^{(t)}) - j \frac{k_{0}'^{2}}{m'}}{k_{0}'^{2} - k_{x}'^{2} + k_{z_{1}}'^{(t)} \quad k_{z_{2}}'^{(t)} + k_{z}' \quad (k_{z_{1}}'^{(t)} + k_{z_{2}}'^{(t)}) - j \frac{k_{0}'^{2}}{m'}}$$
(7.9)

$$E_{t1}' = E_{t}' \frac{2k_{z}'}{k_{z}'(t) - k_{z_{2}}'(t)}$$

$$k_{0}'' - k_{x}'' - (k_{z_{2}}'(t))^{2} - j \frac{k_{0}''}{m'}$$

$$k_{0}'' - k_{x}'' + k_{z_{1}}'(t) k_{z_{2}}'(t) + k_{z}'(k_{z_{1}}'(t) + k_{z_{2}}'(t)) - j \frac{k_{0}}{m'}$$
(7.10a)

$$E_{t2}' = E_{i}' \frac{-2 k_{z}'}{k_{z_{1}}'(t) - k_{z_{2}}'(t)}$$

$$\frac{k_0'^2 - k_x'^2 - (k_{z_1}'^{(t)})^2 - j\frac{k_0'^2}{m'}}{k_0'^2 - k_x'^2 + k_{z_1}'^{(t)}k_{z_2}'^{(t)} + k_z'(k_{z_1}'^{(t)} + k_{z_2}'^{(t)}) - j\frac{k_0'^2}{m'}}$$
(7.10b)

つぎに、K系における反射波および透過波はそれぞれつぎのように表わされる。 反射波

$$E_{y}^{(r)} = E_{r} e^{j(\omega^{(r)}t - k_{x}^{(r)}x + k_{z}^{(r)}z)}$$

$$H_{y}^{(r)} = 0$$
(7.11)

透過波

$$E_{y_1}^{(t)} = E_{t_1} e^{j(\omega^{(t)} t - k_x^{(t)} x - k_{z_1}^{(t)} z)}$$

$$H_{y_1}^{(t)} = 0$$
(7.12a)

$$E_{y_{2}}^{(t)} = E_{t_{2}} e^{j(\omega^{(t)} - k_{x}^{(t)} x - k_{z_{2}}^{(t)} z)}$$

$$H_{y_{2}}^{(t)} = 0$$
(7.12b)

式(7.7), (7.8) および式(7.11), (7.12) における電磁界諸量は、それぞれ Lorent z 変換によって関係づけられており、それらの関係式<sup>(47)</sup>を用いて K 系における反射波と透過波の角周波数、伝搬定数、および振幅を求めることができる。

まず、角周波数および伝搬定数は、つぎのように求まる。

$$\omega^{(r)} = \omega^{(t)} = \omega \tag{7.13a}$$

$$k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x = k_0 \sin \theta$$
 (7.13b)

$$k_z^{(r)} = k_z = -k_0 \cos \theta \tag{7.13c}$$

$$k_{z_1}^{(t)} = -k_0 (p_1 - jq_1), \qquad (q_1 > 0)$$
 (7.13d)

$$k_{z_2}^{(t)} = -k_0 (p_2 - jq_2), \qquad (q_2 > 0)$$
 (7.13e)

ここで、 $k_{z_1}^{\phantom{z_1}(t)}$ および $k_{z_2}^{\phantom{z_2}(t)}$ は、つきの四次方程式

の根のうち、 $q_1>0$  および  $q_2>0$  の条件を満足するものを取るものとする。ただし、

$$A = -\frac{c^2}{a_0^2} \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 - \cos^2 \theta + \gamma^2 (\sin \theta - \beta)^2$$

$$B = \frac{\gamma}{m(1-\beta \sin \theta)} \left[ (1-\beta \sin \theta)^{2} (1+\frac{V_{a}^{2}}{a_{0}^{2}}) - \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}} (\sin \theta - \beta)^{2} \right]$$

$$C = \left[ \frac{c^{2}}{a_{0}^{2}} \gamma^{2} (1-\beta \sin \theta) - \gamma^{2} (\sin \theta - \beta)^{2} \right] \cos^{2}\theta$$

$$D = \frac{-\gamma}{m(1-\beta \sin \theta)} \left[ \frac{c^{2}}{a_{0}^{2}} (1-\beta \sin \theta)^{2} - (\sin \theta - \beta)^{2} \right] \left[ \gamma^{2} (1-\beta \sin \theta)^{2} + \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}} \cos^{2}\theta \right]$$

$$\beta = \frac{V_{0}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{V_{1-\beta^{2}}}, \quad m = \frac{\varepsilon_{0}\omega}{\sigma}$$

ここで,  $p_1$ ,  $q_1$ および  $p_2$ ,  $q_2$ は厳密には付録の式 (A7.5)および (A7.6)で与えられるが,

$$\frac{V_a^2}{c^2} \ll 1, \qquad \frac{a_0^2}{c^2} \ll 1$$

$$\frac{V_a^2}{c^2} \ll m, \qquad \frac{a_0^2}{c^2} \ll m$$

$$(7.16)$$

の条件がなりたつ場合には、近似的につぎのように表わされる。

$$p_{1} = \frac{c}{a_{0}} \gamma (1 - \beta \sin \theta)$$

$$q_{1} = \frac{1}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{V_{a}}{c}\right) \left(\frac{V_{a}}{a_{0}}\right)$$

$$p_{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos^{2}\theta + \frac{1}{m^{2}} \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}} *$$
(7.17a)

$$+ \sqrt{\left(\cos^{2}\theta + \frac{1}{m^{2}} \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right)^{2} + \frac{\gamma^{2}(1 - \beta \sin \theta)^{2}}{m^{2}}}$$

$$q_{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\left(\cos^{2}\theta + \frac{1}{m^{2}} \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right)^{2}} + \frac{\gamma^{2}(1 - \beta \sin \theta)^{2}}{m^{2}}$$

$$+ \sqrt{\left(\cos^{2}\theta + \frac{1}{m^{2}} \frac{V_{a}^{2}}{c^{2}}\right)^{2} + \frac{\gamma^{2}(1 - \beta \sin \theta)^{2}}{m^{2}}}$$

式 (7.17a) から,式 (7.16) の近似がなりたつ場合には,E波によって運動プラズマ流体中に励振される 2 種類の透過波のうち,一方は音波であることがわかる。その減衰定数  $k_0q_1$  は流体の運動速度および入射角に無関係であり,位相定数  $k_0p_1$ に比べて非常に小さい。また,式 (7.17b) から,もう一方の透過波の位相定数  $k_0p_2$  および減衰定数  $k_0q_2$  はともに音速  $a_0$  に無関係な量であり,電磁波と Alfve n 波とが結合した波を表わしていることがわかる。図 7.2 は  $\beta$  をパラメータとする  $p_1$  の数値計算例であり,図 7.3 は  $p_2$  および $q_2$  の数値計算例である。なお,このときの  $q_1$ は 0.5 である。

つぎに、反射波および诱過波の振幅はそれぞれつぎのように求められる。

$$E_{\dot{r}} = E_{i} \frac{K_{I} - jL_{I}}{K_{II} - jL_{II}}$$
 (7.18)

$$E_{t_1} = E_i \frac{2 \cos \theta \left[ \left\{ \cos^2 \theta - \left( p_2^2 - q_2^2 \right) \right\} \right]}{\left( \left( p_1 - p_2 \right) - j \left( q_1 - q_2 \right) \right)} *$$

$$+ j \left\{ 2 p_2 q_1 - \frac{\gamma (1 - \beta \sin \theta)}{m} \right\}$$

$$+ \frac{\gamma \left( K_{\Pi} - j L_{\Pi} \right)}{(7.19a)}$$

$$E_{t_2} = E_i \frac{-2 \cos \theta \left[ \left\{ \cos^2 \theta - \left( p_1^2 - q_1^2 \right) \right\} \right]}{\left( \left( p_1 - p_2 \right) - i \left( q_1 - q_2 \right) \right)} *$$

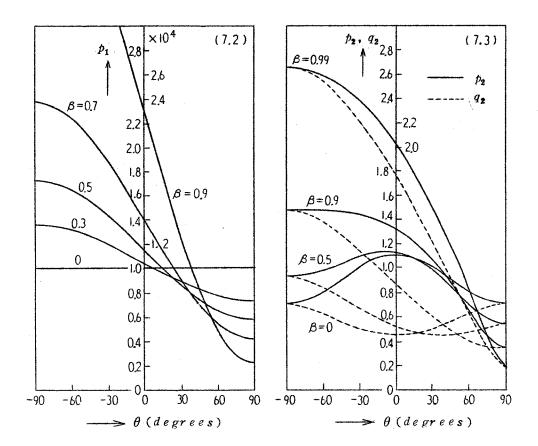


図7.2 
$$\beta$$
をパラメータとした場合の $p_1$ の変化 
$$(m=1, V_a/c=10^{-2}, a_0/c=10^{-4})$$
 図7.3  $\beta$ をパラメータとした場合の $p_2$ ,  $q_2$ の変化 
$$(m=1, V_a/c=10^{-2}, a_0/c=10^{-4})$$

$$+ j \left\{ 2 p_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{I}} - \frac{\gamma \left( 1 - \beta \sin \theta \right)}{m} \right\}$$

$$+ \left[ \left( K_{\mathrm{II}} - j L_{\mathrm{II}} \right) \right]$$

$$(7.19b)$$

ただし,

$$K_{\rm I} = c \circ s^2 \theta + (p_1 p_2 - q_1 q_2) - (p_1 + p_2) c \circ s \theta$$
  
 $K_{\rm II} = c \circ s^2 \theta + (p_1 p_2 - q_1 q_2) + (p_1 + p_2) c \circ s \theta$ 

$$L_{I} = p_{1}q_{2} + p_{2}q_{1} + \frac{\gamma(1-\beta\sin\theta)}{m} - (q_{1} + q_{2})\cos\theta$$

$$L_{II} = p_{1}q_{2} + p_{2}q_{1} + \frac{\gamma(1-\beta\sin\theta)}{m} + (q_{1} + q_{2})\cos\theta$$
(7.20)

#### 7.3.2 反射係数および透過係数

入射E波に対する反射係数 $R_E$  および透過係数 $T_E$  はそれぞれつぎのように定義される。

$$R_{E} = -\frac{(\mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{n})} = -\frac{Re(E_{y}^{(r)} H_{x}^{(r)*})}{Re(E_{y}^{(i)} H_{x}^{(i)*})}$$

$$T_{E} = \frac{(\mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{n})}{(\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{n})}$$

$$= \frac{Re(E_{y_{1}}^{(t)} H_{x_{1}}^{(t)*})}{Re(E_{y}^{(i)} H_{x}^{(i)*})} + \frac{Re(E_{y_{2}}^{(t)} H_{x_{2}}^{(t)*})}{Re(E_{y}^{(i)} H_{x_{1}}^{(i)*})}$$

$$+ \frac{Re(E_{y_{1}}^{(t)} H_{x_{2}}^{(t)} + E_{y_{2}}^{(t)} H_{x_{1}}^{(t)*})}{Re(E_{y}^{(i)} H_{x_{1}}^{(t)*})}$$

$$(7.22)$$

ただし、 $\mathbf{S}^{(i)}$ 、 $\mathbf{S}^{(r)}$  および  $\mathbf{S}^{(t)}$  はそれぞれ境界面上における入射波、反射波、および透過波の Poynting ベクトルの時間平均値を表わし、 $\mathbf{n}$  は境界面での外向きの単位法線ベクトルを表わす。なお、Re は複素量の実数部を取る操作を表わし、記号 \* は複素共役ベクトルを表わす。ここで 7・3・1 に得られた結果を式  $(7\cdot21)$  および  $(7\cdot22)$  に用いることによって、反射係数および透過係数はそれぞれ次式のように求められる。

$$R_E = \frac{K_I^2 + L_I^2}{K_{II}^2 + L_{II}^2} \tag{7.23}$$

$$T_{E} = \frac{4 c o s \theta}{K_{\Pi}^{2} + L_{\Pi}^{2}} \left[ (p_{1} + p_{2}) c o s^{2} \theta + (q_{1} + q_{2}) \right]$$

$$\cdot \frac{\gamma (1-\beta \sin \theta)}{m} + p_1(p_2^2 + q_2^2) + p_2(p_1^2 + q_1^2)$$
 (7.24)

ただし $K_{\rm I}$  ,  $K_{\rm II}$  ,  $L_{\rm II}$  ,  $L_{\rm II}$  は式 (7.20) に与えられており,また  $p_1$  ,  $q_1$  および  $p_2$  ,  $q_2$ はそれぞれ付録の式 (A7.5) および (A7.6) , あるいは式 (7.17) に与えられている.

式 (7.23) および (7.24) からつぎの関係式を得る。

$$R_E + T_E = 1 \tag{7.25}$$

上式から,入射波が E 波の場合には,反射電力と透過電力との和は入射角と 媒質の運動速度のいかんにかかわらず常に入射電力に等しくなることがわかる。

図7.4 および図 7.5 は  $\beta$  をパラメータとした場合の反射係数  $R_E$  の数値計算例であり、図 7.6 はm をパラメータとした場合の数値計算例である・

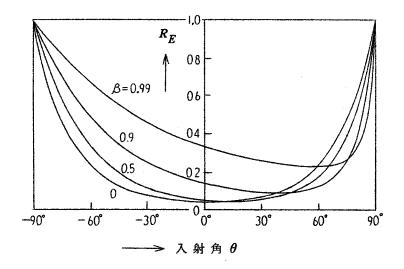


図7.4 反射係数 
$$R_E$$
 ( $m=1$ ,  $V_a/c=10^{-2}$ ,  $a_0/c=10^{-4}$ )

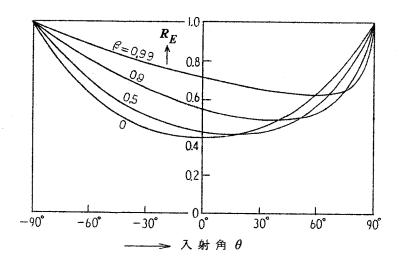
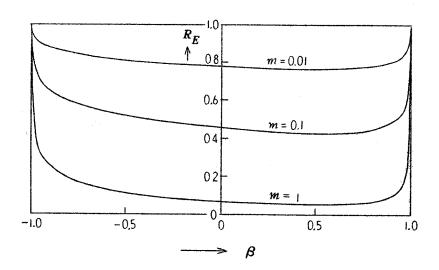


図7.5 反射係数  $R_E$   $(m=0.1, V_a/c=10^{-2}, a_0/c=10^{-4})$ 



# 7.4 入射波が H波の場合

本節においては、入射波がH波の場合、すなわち磁界が入射面に垂直な場合を取り扱う。このとき、入射波はK系においてつきのように表わされる。

$$H_{y}^{(i)} = H_{i} e^{j(\omega t - k_{x}x - k_{z}z)}$$

$$E_{y}^{(i)} = 0$$

$$(7.26)$$

7.4.1 反射波と透過波

7.3.1と同様の手順で、入射波 (7.26)を K' 系に変換し、K' 系において問題を解く。ただし、分散関係式としては式 (7.4)を用いる。なお、H波の場合には媒質中に 1種類の波しか励振されないので、境界条件としては電界および磁界の接線成分連続の条件を用いれば十分である。K系での反射波および透過波を、

反射波

$$H_{\mathbf{y}}^{(\mathbf{r})} = H_{\mathbf{r}} e^{j(\omega(\mathbf{r})t - k_{\mathbf{x}}^{(\mathbf{r})}x + k_{\mathbf{z}}^{(\mathbf{r})}z)}$$

$$E_{\mathbf{y}}^{(\mathbf{r})} = 0$$

$$(7.27)$$

秀過波

$$H_{\gamma}^{(t)} = H_{t} e^{j \left(\omega^{(t)} t - k_{x}^{(t)} x - k_{z}^{(t)} z\right)}$$

$$E_{\gamma}^{(t)} = 0$$

$$(7.28)$$

とすれば, 前節と同様の関係式

$$\omega^{(r)} = \omega^{(t)} = \omega \tag{7.29a}$$

$$k_x^{(r)} = k_x^{(t)} = k_x = k_0 \sin \theta \tag{7.29b}$$

$$k_z^{(r)} = k_z = -k_0 \cos \theta \tag{7.29c}$$

$$k_{\star}^{(t)} = -k_0(p-jq)$$
 (7.29d)

をうる。 ただし,

$$\dot{p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{P + \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-P + \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$P = c o s^2 \theta + \frac{V_a^2}{c^2} \frac{\gamma^2 (s i n \theta - \beta)^2}{(1 + \frac{V_a^2}{c^2})^2 + \gamma^2 m^2 (1 - \beta s i n \theta)^2}$$

$$Q = \frac{\gamma (1 - \beta s i n \theta)}{m} \left[ 1 - \frac{V_a^2}{c^2} \right]$$

$$\cdot \frac{(s i n \theta - \beta)^2 (1 + \frac{V_a^2}{c^2})}{(1 - \beta s i n \theta)^2}$$

つぎに、振幅  $H_r$  および  $H_L$  はそれぞれつぎのようになる。

$$H_{r} = H_{i} \frac{\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta - p)}{\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta + p)} *$$

$$* \frac{-j (\cos \theta - q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))}{-j (\cos \theta + q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))}$$

$$H_{t} = H_{i} \frac{\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (r - js)}{(\sin \theta - \beta) (\gamma m (1 - \beta \sin \theta) + j)}$$

$$(7.30)$$

$$\frac{2 \gamma m \cos \theta}{\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta + p)} *$$

$$* \frac{-j (\cos \theta + q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))}{(7.31)}$$

ただし,

$$\mathbf{r} = (1 - \beta \sin \theta)^2 \sin \theta + \frac{\sin \theta}{\gamma^2 m^2} - \frac{\beta pq}{2 \gamma m}$$

$$-\beta \left( p^{2}-q^{2} \right) \left( 1-\beta \sin \theta \right)$$

$$s = \beta \left[ \frac{p^{2}-q^{2}}{\gamma m} - 2 pq \left( 1-\beta \sin \theta \right) \right]$$

### 7.4.2 反射係数および透過係数

入射H波に対する反射係数 $R_H$  および透過係数 $T_H$ は、式 (7.21) (7.22) と同様に次式で定義される。

$$R_{H} = -\frac{Re(E_{x}^{(r)} H_{y}^{(r)})}{Re(E_{x}^{(i)} H_{y}^{(i)})}$$
(7.32)

$$T_{H} = \frac{Re(E_{x}^{(t)} H_{y}^{(t) *})}{Re(E_{x}^{(i)} H_{y}^{(i) *})}$$
(7.33)

7.4.1で得られた結果を用いて、 $R_H$  および $T_H$  はそれぞれつきのように求められる。

$$R_{H} = \frac{(\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta - \beta))^{2}}{(\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta + \beta))^{2}} *$$

$$* \frac{+ (\cos \theta - q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))^{2}}{+ (\cos \theta + q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))^{2}}$$

$$(7.34)$$

$$T_{H} = \frac{4 \gamma m (1 - \beta \sin \theta)^{2} \cos \theta}{\sin \theta - \beta}$$

$$\cdot \frac{(p \gamma m (1 - \beta \sin \theta) + q)}{(\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta + p))^{2}} *$$

$$* \frac{\sin \theta - \beta p \gamma m (p^{2} + q^{2})}{+ (\cos \theta + q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))^{2}}$$

$$(7.35)$$

さて、プラズマ流体が静止している場合、すなわち $\beta=0$ のときには、 $\nabla$ 射係数および透過係数はつぎのようになる。

$$R_{H} = \frac{m^{2} (\cos \theta - p)^{2} + (\cos \theta - qm)^{2}}{m^{2} (\cos \theta + p)^{2} + (\cos \theta + qm)^{2}}$$
(7.36)

$$T_{H} = \frac{4m(pm+q)\cos\theta}{m^{2}(\cos\theta+p)^{2}+(\cos\theta+qm)^{2}}$$
 (7.37)

上式から、この場合には $R_H$ と $T_H$ との和は入射角 $\theta$ のいかんにかかわらず常に1となり、反射電力と透過電力の和は入射電力に等しくなることがわかる・しかし、プラズマ流体が運動している場合、すなわち $\beta \succeq 0$ のときには、運動している導電性誘電体の場合 $^{(62)}$ 。 $^{(63)}$ と向様に、 $R_H$ と $T_H$ との和は一般には1にはならず、次式で与えられる・

$$R_{H} + T_{H} = 1 + \frac{4 \gamma m \beta (1 - \beta \sin \theta) \cos \theta}{\sin \theta - \beta}$$

$$\cdot \frac{p \gamma m (1 - \beta \sin \theta)}{(\gamma m (1 - \beta \sin \theta) (\cos \theta + \beta))^{2}} *$$

$$* \frac{(\cos^{2}\theta - (p^{2} + q^{2})) + q \cos^{2}\theta}{+ (\cos \theta + q \gamma m (1 - \beta \sin \theta))^{2}}$$

$$(7.38)$$

式 (7.38) の数 値計算例として示した図 7.9 からもわかるように, 0 < eta <1 のとき, $R_H + T_H$ は,

$$R_{H} + T_{H} \begin{cases} = 1 & (\theta = -\pi/2) \\ > 1 & (-\pi/2 < \theta < \sin^{-1}\beta) \\ = 1 & (\theta = \sin^{-1}\beta) \\ < 1 & (\sin^{-1}\beta < \theta < \pi/2) \\ = 1 & (\theta = \pi/2) \end{cases}$$
 (7.39)

となる・上の関係式から,入射角 $\theta$ が $-\pi/2$ < $\theta$ < $\sin^{-1}\beta$ の場合には反射電力と透過電力の和は入射電力より大きくなり, $\sin^{-1}\beta$ < $\theta$ < $\pi/2$ の場合には入射電力より小さくなることがわかる・ただし,式(7.34) およびその数値計算例として示した図(7.7) からわかるように,反射係数(7.34) およびそのんにかかわらず決して1を越えることはない・これらのことから,運動プラズマ流体に(7.34) が入射する場合には,透過波とブラズマ流体との間にエネルギーの授受があることが結論される・

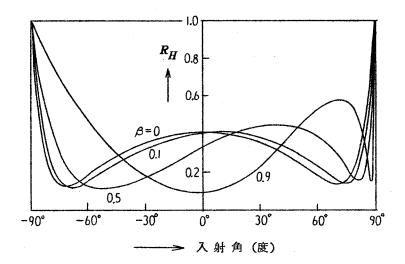


図7.7 反射係数 $R_H$  (m=0.1,  $V_a/c=10^{-2}$ )

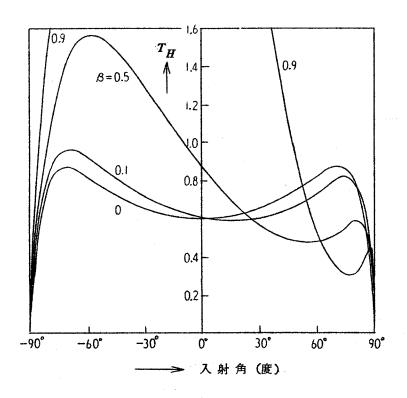


図 7.8 透過係数  $T_H$  (m=0.1,  $V_a/c=10^{-2}$ )

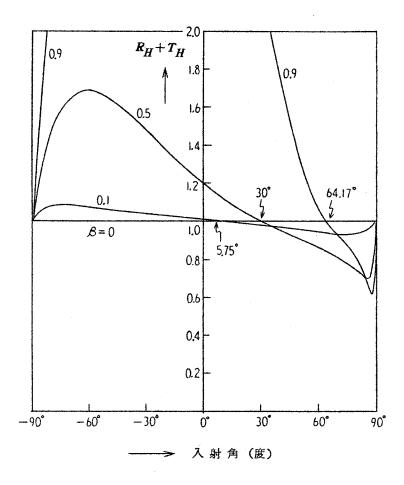


図 7・9 反射係数と透過係数の和  $T_H + R_H$  (m=0.1  $V_a/c=10^{-2}$ )

なお、エネルギー関係式 (7.38) の右辺第 2 項が、運動境界面上の表面電荷密度と透過波の電界の速度に平行な成分との相互作用によるものであることは、運動境界面上の境界条件を用いて直接導くことができるが、これに関しては著者らの文献 (65) を参照されたい。反射係数 $R_H$  と透過係数 $T_H$ 、およびそれらの和  $R_H+T_H$  の数値計算例を図 7.7 ~ 図 7.9 に示す。

# 7.5 結 言

圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用について考察した・入射平面電磁波としては、E波およびH波の2つを考え、それぞれの場合について反射係数、透過係数、および透過波の伝搬定数などを求め、媒質が運動することによって現われる影響を種々の数値計算例をあげて詳しく検討した・その結果、入射波がE波の場合には反射係数と透過係数の和は常に1となるが、入射波がH波の場合には両係数の和は一般には1とはならないことがわかった・

#### 付 録

 $p_1$ ,  $q_1$  かよび  $p_2$ ,  $q_2$ の厳密な解は、式 (7.14) からつぎのような手順で求めめられる、まず、

$$F = A^{2} - B^{2} - 4 C$$

$$G = 4 D - 2 A B$$
(A7.1)

とおく・ここでA, B, C, Dは式 (7.15) に与えられている・このF, Gを用いてつぎのようにe, fを決める・

$$G \ge 0$$
 のとき,

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{F + \sqrt{F^2 + G^2}}$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + G^2}}$$
(A7.2a)

G < 0 のとき,

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{F + \sqrt{F^2 + G^2}}$$

$$f = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-F + \sqrt{F^2 + G^2}}$$
(A7.2b)

さらに、g、h、およびt, uを,

$$g = -A + e$$

$$h = B + f$$
(A7.3)

$$t = -A - e$$

$$u = B - f$$

$$(A7.4)$$

とすれば, $p_1$ , $q_1$ ,および $p_2$ , $q_2$ はg,h,およびt,uを用いてつぎのように求められる。

 $h \ge 0$  のとき,

$$p_{1} = \frac{1}{2} \sqrt{g + \sqrt{g^{2} + h^{2}}}$$

$$q_{1} = \frac{1}{2} \sqrt{-g + \sqrt{g^{2} + h^{2}}}$$
(A7.5a)

h < 0 のとき.

$$p_{1} = -\frac{1}{2} \sqrt{g + \sqrt{g^{2} + h^{2}}}$$

$$q_{1} = \frac{1}{2} \sqrt{-g + \sqrt{g^{2} + h^{2}}}$$
(A7.5b)

および

 $u \ge 0$  のとき.

$$p_{2} = \frac{1}{2} \sqrt{t + \sqrt{t^{2} + u^{2}}}$$

$$q_{2} = \frac{1}{2} \sqrt{-t + \sqrt{t^{2} + u^{2}}}$$
(A7.6a)

u < 0 のとき,

$$p_{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{t + \sqrt{t^{2} + u^{2}}}$$

$$q_{2} = \frac{1}{2} \sqrt{-t + \sqrt{t^{2} + u^{2}}}$$

上式 (A7.5) および (A7.6) から、式 (7.6) の近似がなりたつ場合には、 $h \ge 0$  、 $u \ge 0$  となり、 $p_p$   $q_1$  および  $p_p$   $q_2$  はそれぞれ式 (7.17a) 、 (7.17b) のようになる。

# 第8章 異常分散領域における光波と運動 媒質との相互作用<sup>(74)</sup>

#### 8.1 序 言

近年,科学技術の進歩に伴って高性能の電磁波の検出器が開発され、観測される波長領域が急速に拡大されつつあり、赤外線天文学ないしはX線天文学は電波天文学のなかでも重要な位置を占めつつある。特に、1966年に初めて赤外線星が発見されてから、赤外線による宇宙観測は非常に豊富な成果を生みつつある。(92)一方、このような電波天文学あるいは宇宙工学の急速な進歩に伴い、相対論的電磁界理論は工学の分野における重要な研究課題となり、すでに数多くの研究成果が報告されている。例えば、7・1において述べたように運動媒質と平面電磁波との相互作用の問題は、数多くの人々によって研究され幾多の興味深い結果が報告されている。しかし、従来の研究は、運動媒質と比較的低周波の電磁波との相互作用の問題に限られており、赤外線あるいは紫外線等の光波との相互作用の問題を取り扱う場合にはそのまま適用できない。

そこで、本章では、真空中を境界面と入射面の両者に平行に運動している 半無限の分散性誘電体媒質と平面光波との相互作用の問題を、媒質中の電子 の紫外共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い、従来の 場合とは異なった種々の興味ある現象が現われることを示す。特に、異常分 散領域における光波と媒質の相互作用については、数値計算例をあげて詳し く検討し、媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにする

#### 8・2 導電性吸収媒質と非導電性吸収媒質

静止媒質中の電磁界を記述する巨視的な Maxwell 方程式は,微視的な Maxwell 方程式を平均化することによって直接得られつぎのようにかける。

$$\mathbf{p} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.1a}$$

$$\frac{1}{\mu_0} p \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{8.1b}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{8.1c}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \ \boldsymbol{V} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\rho} \tag{8.1d}$$

ただし、 Eおよび Bは 電界 の強さおよび 磁束 密度 を表わし、  $C_0$ および  $\mu_0$ はそれぞれ真空中の 誘電率および 透磁率 を表わす。 ここで、 媒質 中において 原子核 に束縛された電子 すなわち 束縛電子の電荷密度 および 電流 密度を それぞれ  $\rho_{bound}$  および  $J_{bound}$  で表わし、 原子核 に束縛されない 電子、 すなわち 自由電子の電荷密度 および 電流 密度を それぞれ  $\rho_{free}$  および  $J_{free}$  で表わせば、式 (8.1)に含まれる  $\rho$  および  $J_{tot}$  はそれぞれつきのよに表わされる。

$$\rho = \rho_{bound} + \rho_{free} \tag{8.2a}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{bound} + \mathbf{J}_{free} \tag{8.2b}$$

以上,媒質中の荷電粒子として電子のみを考慮したが、イオンが存在するときには、その振動ももちろん媒質の光学的性質に寄与するが、この種の粒子の共鳴振動数は小さいので、特に赤外の領域において重要である。したがって、赤外領域における光学的性質が問題となるような場合には、電子の振動のかわりにイオンの振動を考慮すればよい。さて、Pooundおよび Joundは、媒質の電気分極ベクトルPおよび磁気分極ベクトルMを導入することによってつきのように表わされる。

$$\rho_{bound} = - \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \tag{8.3a}$$

$$\mathbf{J}_{bound} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{P} \times \mathbf{M} \tag{8.3b}$$

ここで、媒質に吸収がある場合、その吸収を束縛電荷による吸収と自由電荷による吸収とに分けて考え、自由電荷に基づく吸収が存在する場合にはその媒質を"導電性吸収媒質"と呼び、たとえ媒質が吸収性であっても、その吸

収が束縛電荷のみによるものであり自由電荷の寄与がない場合にはこの媒質を"非導電性吸収媒質"と呼ぶことにする。もちろん、媒質中には , 一般には束縛電荷および自由電荷が同時に存在し、したがって両者を完全に分離して考えることはできないが、自由電荷による寄与が束縛電荷による奇与に比べて無視出来るほどに小さくなる周波数領域が存在するとき、その周波数領域において、この媒質は非導電性吸収媒質と呼ぶことができる。

つぎに、電東密度Dおよび磁界の強さHを

$$D = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$
 (8.4*a*, *b*)

によって導入すればMaxwell の方程式(8.1)は

$$\mathbf{p} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8.5a}$$

$$P \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_{free} \tag{8.5b}$$

$$\mathbf{7.B} = 0 \tag{8.5c}$$

$$V \cdot \mathbf{D} = \rho_{free} \tag{8.5d}$$

となる。なお、媒質の誘電率 $\epsilon$ および透磁率 $\mu$ を導入することによって式(8.4a)および(8.4b)はそれぞれつぎのように表わされる。

$$D = \varepsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{8.6a,b}$$

上式 (8.5a) および (8.5b) から, 媒質が静止している場合には自由電荷の存在の有無にかかわらず,電磁界 E および H の 接線成分は 境界面においてそれぞれ 連続になる. (9.3) さて, $M_{inkowski}$  によれば,式 (8.5a) ~ (8.5d) の形のMaxwell 方程式がLorentz 変換のもとに共変的であり,したがって 運動媒質中においても式 (8.5a) ~ (8.5d) の形のMaxwell 方程式がそのままなりたつ(9.0) このことから,真空中を境界面に 平行に運動している媒質

に対して、たとえ、媒質が吸収性であってもそれが束縛電荷のみの寄与によるものであれば、境界面上において電磁界の接線成分が連続となり、したがって境界面上における反射係数と透過係数の和が常に1となることを証明することができる(次節以降参照)。また自由電荷が媒質の吸収に寄与しているときには、境界面上において磁界の接線成分が一般には不連続となり、したがって反射係数と透過係数の和が1とはならないことは、著者らによって報告されている(65)

このように、運動している吸収性媒質を取り扱うときには、その吸収が束縛 電荷のみによるものであり、自由電荷による寄与がない(非導電性吸収媒質) か、あるいは自由電荷が媒質の吸収性に寄与している(導電性吸収媒質)か を明確に区別する必要がある。

#### 8.3 分散性誘電体媒質と光波との相互作用

8.3.1 静止媒質の光学的性質

運動媒質と平面光波との相互作用の問題を論じる前に、まず静止媒質の光学的性質について考察する。無限に拡がった非導電性の分散性誘電体媒質を考える。したがって、媒質中には自由電荷は存在しないものとする。さらに、媒質は等方性であると仮定する。このとき、角周波数 w'の電界 E'の中での電子の定常的な調和振動に対して、電気分極ペクトルP'は次式で与えられる(94)

$$P' = \frac{N(e^2/m)}{\frac{2}{\omega_0^2 - {\omega'}^2 + jg\omega'}} E'$$
 (8.7)

ただし、プライム 記号は媒質の静止座標系K'(x',y',z',t')における電磁界量であることを表わす。なお、

m=電子の質量

e 一電子の電荷量

N=単位体積中の束縛電子の数

ω。=電子の共鳴角周波数(固有振動数)

g = 媒質の 吸収係数

電子の固有振動数  $\omega_0$ は通常遠紫外部にあるが、比較的低周波の領域(マイク)口波領域~赤外領域)における光学的性質が問題となる場合には、電子のかわりにイオンの振動を考え、式 (8.7)における  $N(e^2/m)$ を (N/f)  $((fe)^2/M)$ とすればよい $^{(94)}$  ただし f はイオンの原子 価数であり、M はイオンの換算質量を表わす。さて、この媒質の誘電率を E とすれば(本章 においては、透磁率は真空の透磁率に等しいと仮定する。したがって、常に  $\mu = \mu_0$ とおく)、式 (8.4a)、(8.6a) および (8.7)から次式を得る。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - {\omega'}^2 + j g \omega'} \right)$$
 (8.8)

ただし.

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \tag{8.9}$$

ここで、この媒質中を伝搬する平面光波の伝搬定数をk'とすれば、

$$k'^{2} = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^{2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{0}}\right) = k_{0}^{2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{0}}\right) \tag{8.10}$$

であるから

$$k'^{2} = k_{0}^{2} \left( 1 + \frac{\omega_{p}^{2}}{\omega_{0}^{2} - {\omega'}^{2} + jg\omega'} \right)$$
 (8.11)

となる。ただし、式(8.10)における c は真空中の光速度を表わす。なお屈 折率を $\pi'_{\alpha}$  とすれば次式がなりたつ。

$$n_a^{\prime 2} = \left(\frac{k^{\prime}}{k_0}\right)^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - {\omega^{\prime}}^2 + jg\omega^{\prime}}$$
 (8.12)

ただし、添字aは吸収(absorption) 性媒質の屈折率であることを表わす。8.3.2 運動媒質と光波との相互作用

つぎに、真空中を一様に運動しているこのような媒質と光波との相互作用の問題を取り扱う。図8.1に示すようにz>0の空間は真空( $\epsilon_0$ , $\mu_0$ )で

あり、 $^{2}$  < 0 の空間は分散性誘電体媒質( $\epsilon$  ,  $\mu_{0}$ )によって満されていをものとし、媒質は観測者に対して一定速度 v で z 軸方向に運動しているものとする。いま真空側から一様な平面光波が入射するものとし、波は  $\epsilon$   $\epsilon$   $\epsilon$  電界

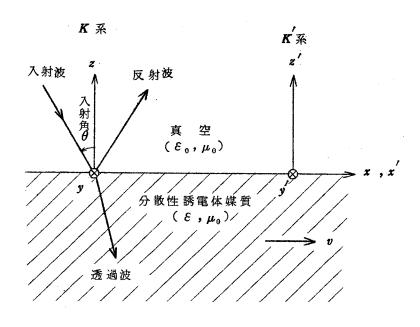


図8.1 座 標 系

が入射面に垂直な場合)もしくはH被(磁界が入射面に垂直な場合)であるとする。このとき、観測者の静止座標系K(x,y,z,t)においては、入射波はつぎのように表わされる。

ただし,

$$k_x = k_0 \sin \theta$$
,  $k_z = k_0 \cos \theta$  (8.15)

ここで、式 (8.13a) ,(8.14a)は E波を表わし、式 (8.13b) ,(8.14b)はH波を表わす。これらの式において、 $E_i$   $,H_i$ はともに場所および時間に 無関係な定数であり、 $\omega$ は入射波の角周波数、 $\theta$ は入射角を表わす。つぎに K系における反射波および透過波はそれぞれつぎのようにかける。

#### 反射波

透 過波

さて、K 系における入射波( $\hat{8}$ -13),( $\hat{8}$ -14)を $\hat{E}$   $\hat{E}$   $\hat{E}$  を抑を用いて $\hat{K}$  系に移し、 $\hat{K}$  系において通常の方法によって解を求め、得られた解を $\hat{K}$  系に移することによって $\hat{K}$  系における反射波( $\hat{8}$ -16),( $\hat{8}$ -17)および透過波( $\hat{8}$ -18),( $\hat{8}$ -19)における未知係数( $\hat{E}_r$ , $\hat{E}_t$ ) あるいは( $\hat{H}_r$ , $\hat{H}_t$ )を $\hat{E}_t$  あるいは $\hat{H}_t$  の関数として決定することができる。また、透過波の伝搬定数  $\hat{E}_t$  以,関係式

$$\left(k_{z}^{(t)}\right)^{2} = \left(k_{z}^{\prime(t)}\right)^{2} = k^{\prime 2} - k_{x}^{\prime 2}$$
 (8.20)

に,式(8.11)および変換式

$$k_x' = \gamma \left( k_x - \beta k_0 \right) = \gamma k_0 \left( \sin \theta - \beta \right) \tag{8.21a}$$

$$\omega' = \gamma(\omega - v k_{\pi}) = \gamma \omega (1 - \beta s i n \theta)$$
 (8.21b)

ただし.

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{8.22}$$

を代入することによって求められる。いま, $k_z^{(t)}$ を位相係数 $m{p}$ と減衰係数 $m{q}$ を用いて

$$k_z^{(t)} = +k_0(p-jq)$$
 (8.23)

のごとく表わすとき、力およびqはそれぞれつぎのように決定される。

$$p = (\{P + (P^2 + Q^2)^{1/2}\}/2)^{1/2}$$
 (8.24a)

$$q = (\{-P + (P^2 + Q^2)^{1/2}\}/2)^{1/2}$$
(8.24b)

ただし。

$$P = c o s^{2} \theta + \frac{a}{a^{2} + b^{2}} \left( \frac{M_{0}}{M_{p}} \right)^{2} \gamma^{2} (1 - \beta s i n \theta)^{2}$$
 (8.25a)

$$Q = \frac{b}{a^2 + b^2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2 (1 - \beta s \, i \, n\theta)^2$$
 (8.25b)

ここで.

$$a = 1 - M_0^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2$$
 (8.26a)

$$b = \left(\frac{M_0}{M_g}\right) M_0 \gamma (1 - \beta s i n \theta)$$
 (8.26b)

$$M_0 = \frac{\omega}{\omega_0}$$
 ,  $M_p = \frac{\omega}{\omega_p}$  ,  $M_g = \frac{\omega}{g}$  (8.27 a, b, c)

なお、式 (8.27a)~(8.27c)から、 $(M_o/M_p)$  および  $(M_o/M_g)$ はそれぞれ

$$\frac{M_0}{M_p} = \frac{\omega_p}{\omega_0} \quad , \quad \frac{M_0}{M_g} = \frac{g}{\omega_0}$$
 (8.28 a, b)

となり、したがって周波数 $\omega$ に無関係な定数であることがわかる。つぎに、運動媒質中の屈折率  $n_a$ を静止媒質中の屈折率にならって。

$$n_{a} = \frac{k_{a}}{k_{0}} = \frac{\left(\left(k_{z}^{(t)}\right)^{2} + k_{x}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{k_{0}}$$
 (8.29)

で定義するとき、 ndはつぎのように求められる。

$$n_a = n - j \kappa \tag{8.30}$$

ここで.

$$n = (\{U + (U^2 + V^2)^{1/2}\}/2)^{1/2}$$
(8.31a)

$$\kappa = (\{-U + (U^2 + V^2)^{1/2}\}/2)^{1/2}$$
(8.31b)

ただし、U、Vは次式で定義される。

$$n_a^2 = U - jV \tag{8.32}$$

ここで、

$$U = 1 + \frac{a}{a^2 + b^2} \left(\frac{M_0}{M_D}\right)^2 \quad \gamma^2 (1 - \beta s \, i \, n\theta)^2$$
 (8.33a)

$$V = \frac{b}{a^2 + b^2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \qquad (8.33b)$$

つぎに、反射係数および透過係数を求める。反射係数Rおよび透過係数Tをそれぞれ、境界面上における反射波と入射波、および透過波と入射波とのPoyntingベクトルの時間平均値の境界面に垂直な成分の比で定義すればRおよびTはそれぞれつぎのようにかける。

$$R = -\left[\frac{\mathbf{S}^{(r)} \cdot \mathbf{i}_z}{\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{i}_z}\right] = -\left[\frac{Re(\mathbf{E}^{(r)} \times \mathbf{H}^{(r)*}) \cdot \mathbf{i}_z}{Re(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{i}_z}\right]$$
(8.34*a*)

$$T = \left(\frac{\mathbf{S}^{(t)} \cdot \mathbf{I}_{z}}{\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{I}_{z}}\right) = \left(\frac{Re(\mathbf{E}^{(t)} \times \mathbf{H}^{(t)*}) \cdot \mathbf{I}_{z}}{Re(\mathbf{E}^{(i)} \times \mathbf{H}^{(i)*}) \cdot \mathbf{I}_{z}}\right)$$
(8.34h)

ただし、 $\mathbf{S}^{(i)}$ , $\mathbf{S}^{(r)}$ および  $\mathbf{S}^{(t)}$ はそれぞれ入射波、反射波および透過波の境界面上における Poyntingベクトルの時間平均値を表わし、 $\mathbf{I}_z$ は z 方向の単位ベクトルを表わす。なお  $R_e$  は複素量の実部をとる操作を表わし、記号\*は複素共役ベクトルを表わす。反射係数および透過係数を上式のように定義すれば、入射E波およびH彼に対する反射係数と透過係数はそれぞれつぎのように求められる。

$$R_{E} = \frac{(\cos \theta - p)^{2} + q^{2}}{(\cos \theta + p)^{2} + q^{2}}$$
 (8.35*a*)

$$T_{E} = \frac{4 p c o s \theta}{\left(c o s \theta + p\right)^{2} + q^{2}}$$
 (8.35b)

および.

$$R_{H} = \frac{(\varepsilon_{r} \cos \theta - p)^{2} + (\varepsilon_{i} \cos \theta - q)^{2}}{(\varepsilon_{r} \cos \theta + p)^{2} + (\varepsilon_{i} \cos \theta + q)^{2}}$$
(8.36a)

$$T_{H} = \frac{4 \left( p \varepsilon_{r} + q \varepsilon_{i} \right) \cos \theta}{\left( \varepsilon_{r} \cos \theta + p \right)^{2} + \left( \varepsilon_{i} \cos \theta + q \right)^{2}}$$
(8.63.b)

ただし,

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_r - j\mathcal{E}_i \tag{8.37}$$

ここで.

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{a}{a^2 + b^2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \tag{8.38a}$$

$$\varepsilon_{i} = \frac{b}{a^{2} + b^{2}} \left( \frac{M_{0}}{M_{p}} \right) \tag{8.38b}$$

上式(8.35)および(8.36)から、次式を得る。

$$R_E + T_E = 1$$
 ,  $R_H + T_H = 1$  (8.39 a, b)

したがって、運動している媒質が吸収性であっても非導電性の場合には、反射係数と透過係数の和は常に1に等しいことがわかる。

8.3.3 分散曲線に関する考察

式 (8.33a) および (8.33b) の示す曲線,すなわち  $(M_0,U)$  曲線および  $(M_0,V)$  曲線を(標準形の)分散曲線と呼び,特に, $(M_0,V)$  曲線を吸収曲線と呼ぶ。ここでは,媒質の運動が分散曲線に与える影響について考察する。式 (8.33a)から明らかなように, $(M_0,U)$ 曲線は

$$M_0 = \alpha \left( 1 \mp \left( \frac{M_0}{M_g} \right)^{1/2} \right) \tag{8.40}$$

だだし。

$$\alpha = \frac{1}{\gamma(1 - \beta s i n\theta)} \tag{8.41}$$

において極値をもつ。 極(最)大値および極(最)小値をそれぞれ  $U_{max}$ および  $U_{min}$ と すれば、

$$U_{max} = 1 + \frac{\alpha^{-2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \left(2 - \left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right)}$$

$$(8.42 a)$$

$$U_{min} = 1 - \frac{\alpha^{-2} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right) \left(2 + \left(\frac{M_0}{M_g}\right)\right)}$$
(8.42b)

となる。( $M_0$ ,U)曲線においてUの値が周波数 $M_0$ と共に増加する領域を正常分散領域,減少する領域を異常分散領域と呼ぶが,式(8.40)から異常分散領域の辐 $\Delta M_0$ は

$$\Delta M_0 = \alpha \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \right\}^{1/2} - \left\{ 1 - \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \right\}^{1/2} \right]$$
(8.43)

となり、したがって 媒質 が静止してい る場合に比べて  $\alpha$  倍に なること がわかる。 また、  $(M_0,V)$ 曲 線は式 (8.33b)から直ちに分るように

$$M_{0} = \alpha \left[ \frac{\left\{ 2 - \left( \frac{M_{0}}{M_{g}} \right)^{2} \right\} + \sqrt{\left\{ 2 - \left( \frac{M_{0}}{M_{g}} \right)^{2} \right\}^{2} + 12}}{6} \right]^{1/2}$$
(8.44)

において極(最)大値 $V_{max}$ をとる。

ここで、 $(M_o/M_g)$ は小さな値とし、 $(M_o/M_g)^2$ は  $(M_o/M_g)$  に比べて無視でき、また必要な場合には  $(M_o/M_g)$ を 1 に比べて無視できるものとすると、式(8.40)、(8.42)、(8.43)から明らかなように  $(M_o,U)$  曲線は

$$M_0 = \alpha \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{M_0}{M_g} \right) \right] \tag{8.45}$$

において、極値

$$U_{max} = 1 + \frac{\alpha^{-2}}{2} \frac{\left(\frac{M_o}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_o}{M_g}\right)}$$
 (8.46a)

$$U_{min} = 1 - \frac{\alpha^{-2}}{2} \frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)}$$
 (8.46b)

をもつ。したがって、異常分散領域の幅 AM。は

$$\Delta M_0 = \alpha \left(\frac{M_0}{M_g}\right) \tag{8.47}$$

となる。また、このような近似を行えば

$$M_0 = M_{or} = \alpha \tag{8.48}$$

において, U=1 となり, このとき  $(M_0,V)$  曲線は極(最)大値

$$V_{max} = \alpha^{-2} \frac{\left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2}{\left(\frac{M_0}{M_g}\right)} \tag{8.49}$$

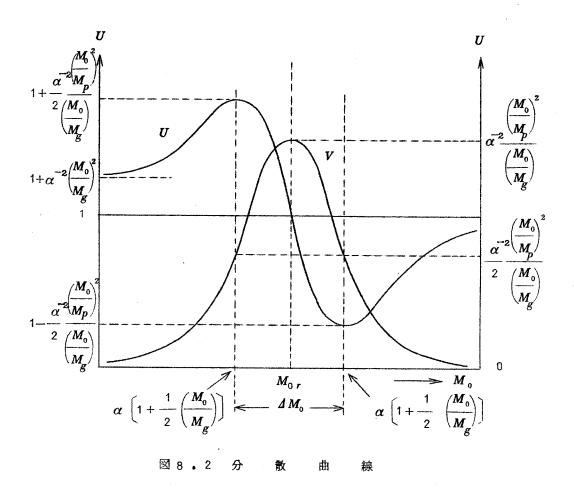
となる。なお,( $M_{
m o}$ ,V)曲線は,( $M_{
m o}$ ,U)曲線が極値をとる $M_{
m o}$ において

$$V = \frac{1}{2} V_{max} \tag{8.50}$$

となり、したがって  $(M_0,V)$ 曲線の半値福は異常分散領域の幅  $\Delta M_0$ に等しくなる。図8・2は、これらの様子を示したものである。

以上のことから、 $(M_o/M_g)$ が十分小さい場合には、媒質が運動することによって、固有振動数は媒質が静止しているときの固有振動数  $\omega$ に比べて $\alpha$  倍になり、また、 $(M_o,U)$ 曲線における異常分散領域の幅  $\Delta M_o$ 、したがって $(M_o,V)$ 曲線における半値幅も媒質が静止しているときのそれに比べて $\alpha$  倍になることがわかる。また、式(8.46a)、(8.46b)および(8.49)から

$$\Delta U = U_{max} - U_{min} = V_{max} \tag{8.51}$$



なる関係があり、  $\Delta M_{
m o}$ が、 媒質 が静止しているときの lpha 倍になるとき、 異常分散領域の長さ  $\Delta U$ は( $1/lpha^2$ )倍になることがわかる。

つぎに、異常分散領域の幅  $\Delta M_0$ の速度依存性について考察する。式 (8.47) からわかるように  $\Delta M_0$ の速度依存性は係数  $\alpha$ の速度依存性に等しい。  $\alpha$  は式 (8.41) に与えられているが、この式より  $sin\theta \leq 0$  のとき  $\alpha$  は速度  $\beta$  の増加と共に 1 から 0 まで 単調に減小し、また、 $sin\theta > 0$  のときには、 $\beta = sin\theta$  において極大値  $\alpha_{max} = sec\theta$  をもつことがわかる。したがって、 $\Delta M_0$ は  $sin\theta \leq 0$  のときは、 $\beta$ の増加と共に  $(M_0/M_g)$  から 0 に単調に減少し、 $sin\theta > 0$  のときには  $\beta = sin\theta$  において極大値

$$\left(\Delta M_{0}\right)_{max} = \left(\frac{M_{0}}{M_{g}}\right) s e c\theta \tag{8.52}$$

図8・3は、この様子を表わしたものである。

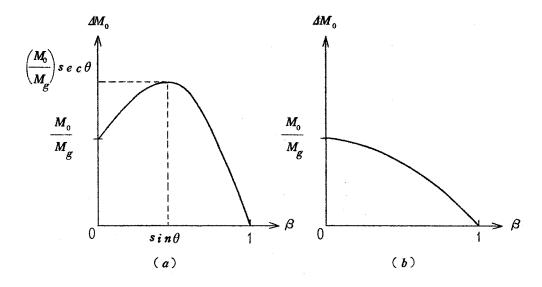


図8.3  $\Delta M_0$ の速度依存性  $(a) \sin \theta > 0$ ,  $(b) \sin \theta \leq 0$ 

さて、無限に拡がった運動媒質中を平面光波が、媒質の運動速度に平行な、 方向に伝搬する場合の分散曲線の性質は上に得られた式 (8.40)~(8.52)に おいて  $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ とおくことによって求められるが、媒質の吸収が十分小さい 場合には式 (8.45)~(8.52)からつぎのことがわかる。まず、媒質の運動方 向と逆の方向に伝搬する場合  $(\theta=-\pi/2)$ には、

$$\Delta M_{o} = \alpha \left(\frac{M_{o}}{M_{g}}\right) = M_{or} \left(\frac{M_{o}}{M_{g}}\right) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \left(\frac{M_{o}}{M_{g}}\right) \tag{8.53}$$

となり、したがって $\beta$ が0から1まで増加するとき、共鳴点 $M_{or}$ は1から0まで、また異常分散領域の幅 $\Delta M_{o}$ は( $M_{o}/M_{g}$ )から0までそれぞれ単調に減少する。すなわち、媒質の運動によって共鳴点は振動数の低い方へずれ、また

異常分散領域の幅はせまくなる。つぎに、媒質の運動方向に伝搬する場合 $(\theta=\pi/2)$ には。

$$\Delta M_0 = \alpha \left(\frac{M_0}{M_g}\right) = M_{or} \left(\frac{M_0}{M_g}\right) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \left(\frac{M_0}{M_g}\right)$$
 (8.54)

となり、したがって $\beta$ が0から1に増加するとき、 $M_{or}$ は1から $\infty$ に、また $\Delta M_{o}$ は $(M_{o}/M_{g})$ から $\infty$ に、それぞれ単調増加する。すなわち、媒質の運動によって、共鳴点は振動数の高い方へずれ、また異常分散領域の幅はひろがることがわかる。

#### 8.4 検討および数値計算例

図 8.4および図 8.5は,異常分 散領域を表わす( $M_0$ ,U)曲線およ び 吸 収曲線  $(M_o, V)$  曲線の数値計算例である。両図において、 $(M_o/M_g) = 0.01$ ,  $(M_{\sigma}/M_{p})=0.1$  であり、入射角は $(a)\theta=0^{\circ}$ 、 $(b)\theta=45^{\circ}$  である。これらの パラメータの値は以下の図8.6~8.8 においても同様である。ただし,図8.4  $(a)\sim(b)$  において横軸は $M_{0}$ のかわりに $(M_{0}-M_{or})$ をとってあり、したがっ て横軸が0の点は $M_0=M_{or}$ なる点(共鳴点)を表わす。なお、媒質の運動 速度の変化に伴う共鳴点 $M_{or}$ の移動は図の下部に別に示してある。図 $8.5\sim$ 8.8および図8.10 においても横軸は  $(M_0-M_{or})$  であるが、共鳴点 $M_{or}$  の移 動を示す図 8.4(a)~(b)と 同様であるので省略してある。さて,図 8.4(a) および8.5(a)は、 $\theta=0$ のときは、式 (8.47)で与えられる異常分散領域 の輻,したがって吸収曲線の半値幅 AMoが,媒質の運動速度の増加と共にせ まくなり、同時に式(8.51)で表わされる  $\Delta U = U_{max} - U_{min} = V_{max}$  なる値が 増加する様子を示している。また、図8.4(b) および8.5(b) は、 $\theta$  = 45° のときには、 $\Delta M_0$ が $\beta=sin(45^\circ)=1/\sqrt{2}$ において極大となり、同時に $\Delta U$ ーV maxの値はこのとき極小となる様子を示している。 図 8.6~8.7は, それぞ れ式 (8.24a)および (8.24b)で表わされる位相係数 p および 減 衰係数 q の数 値計算例である。図8.8は、式(8.35a)で与えられる入射 E波に対する反射 係数 $R_R$  の数値計算例である。図8.7および図8.8から、吸収が極大になる

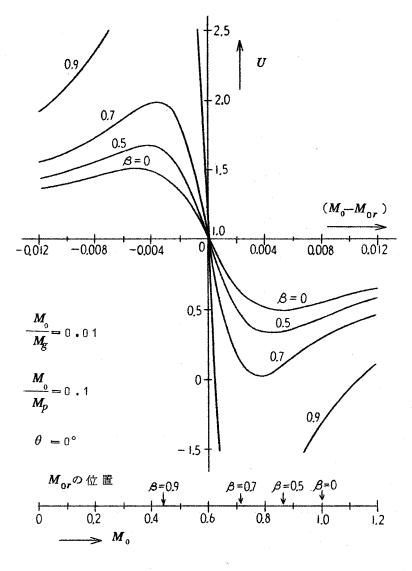


図 8.4(a) 異常分散領域 ( $\theta = 0^\circ$ )

点と反射係数が極大になる点は一致せず、吸収が極大になる周波数よりもやや高い周波数において反射係数が極大になることがわかる。これらの様子は式(8.36a)で与えられる入射H波に対する反射係数 $R_H$  に対しても同様である。図8.9は、横軸を入射角 $\theta$ とした場合の入射E波に対する反射係数 $R_E$ 

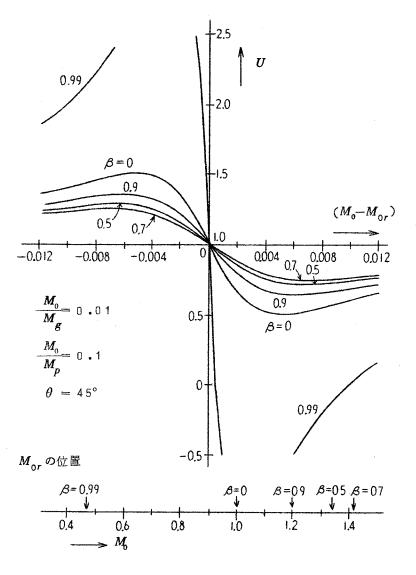


図 8.4(b) 異常分散領域( $\theta$  = 45°)

#### の数値計算例である。

さて、ここで吸収がない(g=0 )場合の反射係数について若干考察する。 この場合には式(8.25) $\sim$ (8.25)から明らかなように、位相係数p および減衰係数q はそれぞれつぎのように決定される。まず入射角 $\theta$  および周波数M

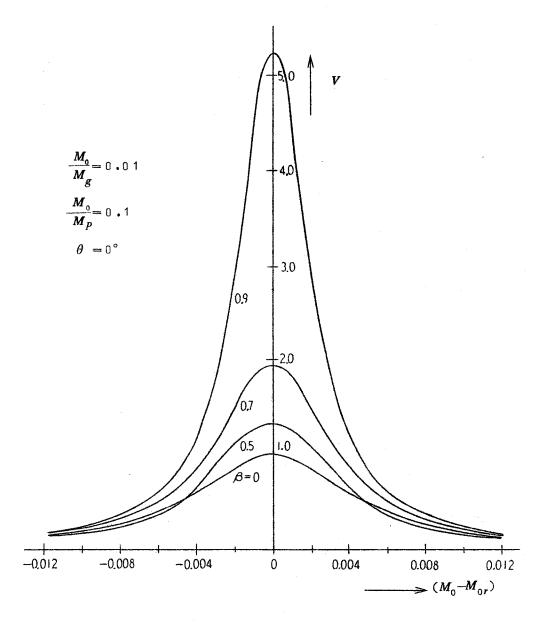


図8.5(a) 吸収曲線(  $\theta = 0$ °)

が

$$c o s^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_o}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta s i n \theta)^2 > 0$$
 (8.55)

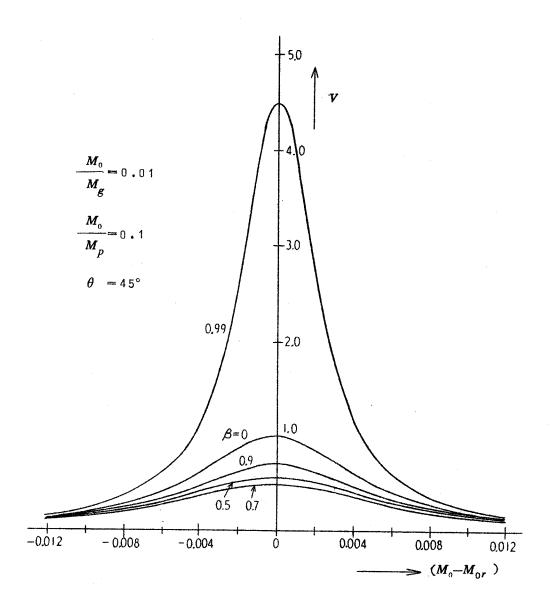


図 8.5(b) 吸収曲線( $\theta = 4.5^{\circ}$ )

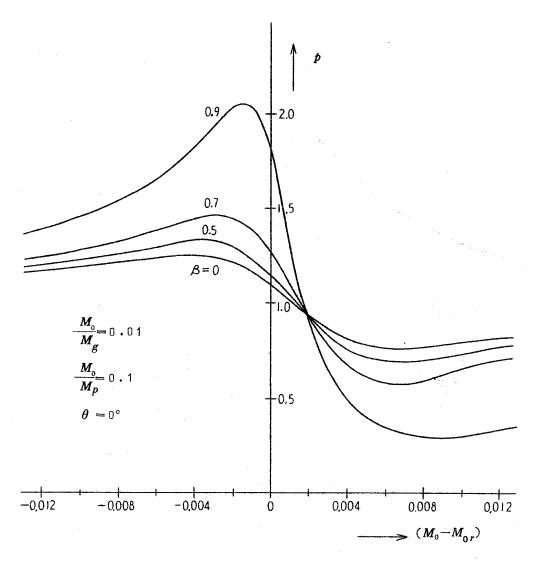


図 8.6(a) 位相係数p( $\theta = 0$ °)

の条件を満すときには,

$$p = \left[c o s^{2} \theta + \frac{1}{a} \left(\frac{M_{o}}{M_{p}}\right)^{2} \gamma^{2} (1 - \beta s i n \theta)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$
(8.56a)

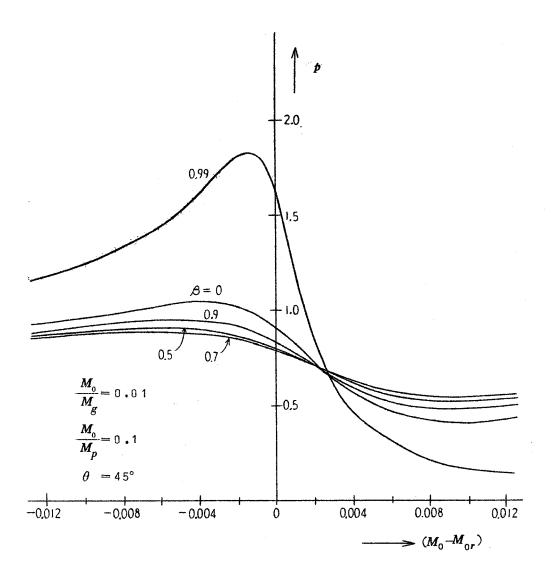


図 8.6(b) 位相係数 p ( $\theta = 45^{\circ}$ )

$$q = 0 (8.56b)$$

となり、

$$c o s^2 \theta + \frac{1}{a} \left(\frac{M_0}{M_p}\right)^2 \gamma^2 (1 - \beta s i n \theta)^2 < 0$$
 (8.57)

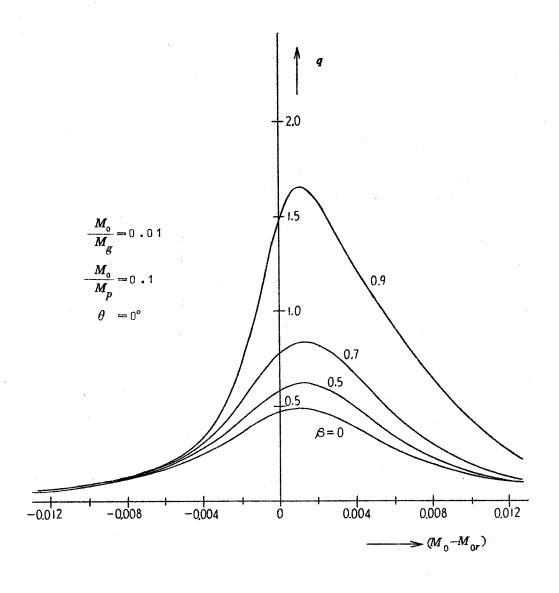


図 8.7(a) 減衰係数 q ( $\theta = 0$ °)

# の条件を満足するときには

 $p = 0 \tag{8.58a}$ 

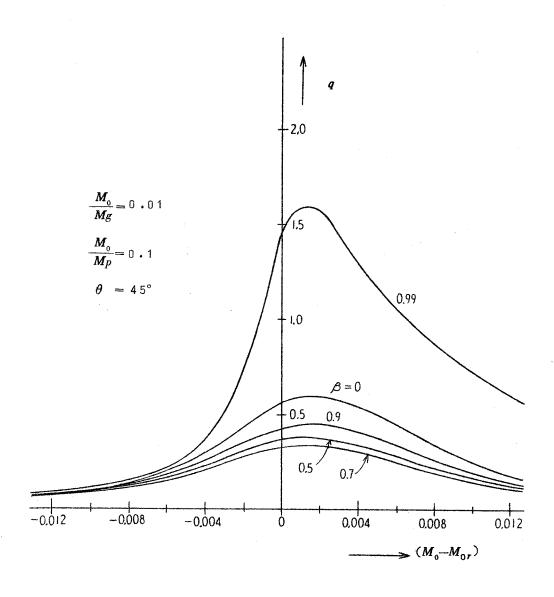


図 8.7(b) 減衰係数q ( $\theta = 45^{\circ}$ )

$$q = \left[ -\left\{ \cos^2 \theta + \frac{1}{a} \left( \frac{M_0}{M_p} \right)^2 \gamma^2 (1 - \beta \sin \theta)^2 \right\} \right]^{1/2}$$
 (8.58b)

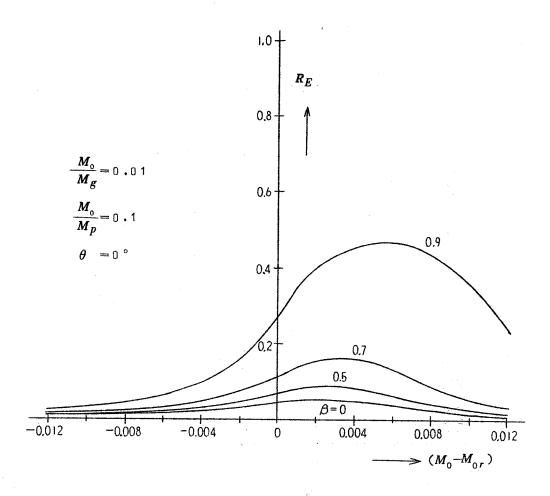


図 8.8(a) 反射係数  $R_E$  ( $\theta = 0$ °)

となる。したがって,条件式 (8.57) を満足するような入射角  $\theta$  および 周波数  $M_0$ に対して全反射の 現象が生ずることがわかる。なお,この 場合の 反射係数 および透過係数 は式 (8.35) および 式 (8.36) のそれぞれに,式 (8.56) あるいは式 (8.58) を代入することによって直ちに求められる。図 8.10 (a)  $\sim (b)$  は,吸収のない 場合の入射 E 波に対する反射係数  $R_E$  の数 値計算例である。なお,入射 H 波に対する 反射係数  $R_H$  も 同様の傾向を示す

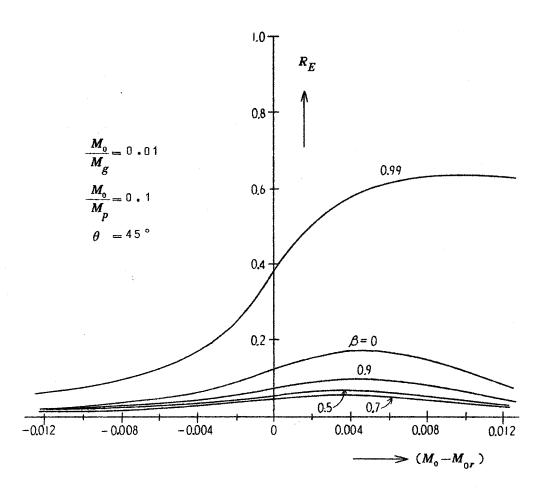


図 8.8(b) 反射係数  $R_E$  ( $\theta = 4.5^\circ$ )

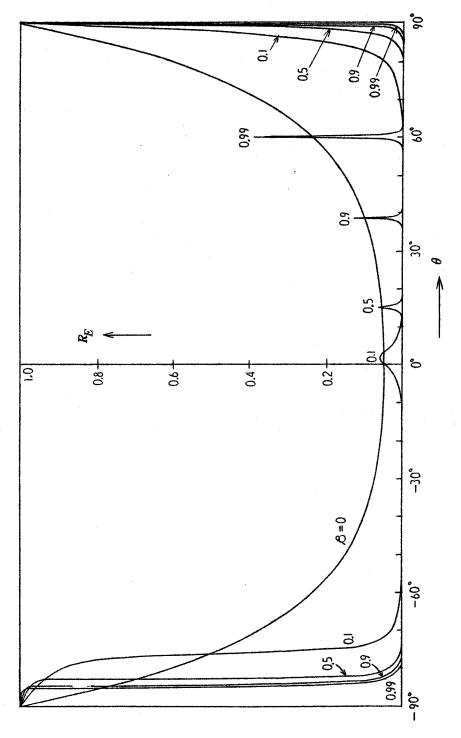


図8.9 反射係数 RE

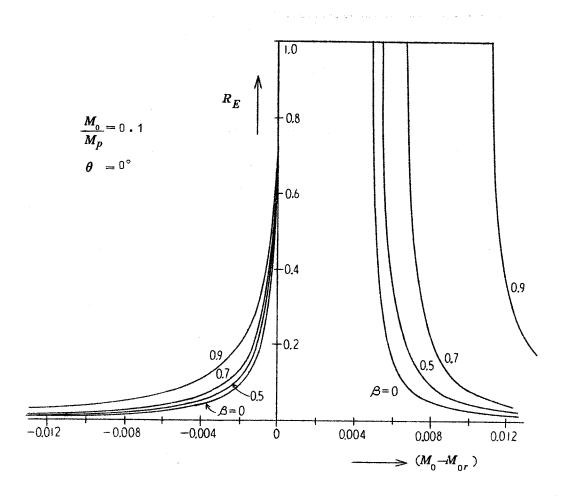


図 8.10(a) 吸収のない場合の反射係数  $R_E$  ( heta=0  $^{\circ}$ )

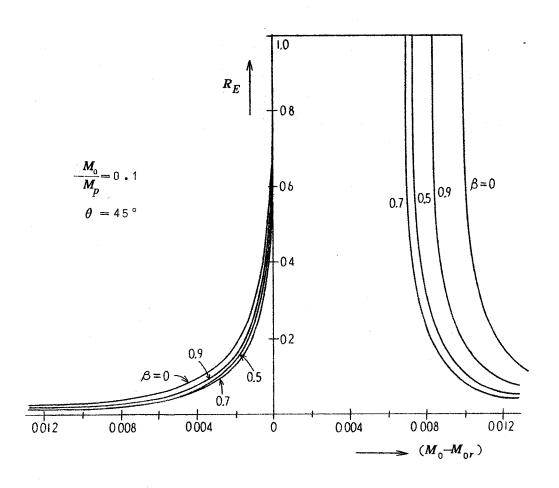


図 8  $\cdot$  10(b) 吸収のない場合の反射係数  $R_E$  ( $\theta=45^\circ$ )

### 8 • 5 結 言

運動している媒質と平面光波との相互作用の問題を、媒質中の電子の紫外 共鳴振動あるいはイオンの赤外共鳴振動を考慮して取り扱い、従来の場合と は異った種々の興味ある現象が現われることを示した。特に、異常分散領域 における光波と媒質の相互作用については、数値計算例を挙げて詳しく検討 し、媒質の運動が分散曲線に与える影響等を明らかにした。

# 第9章 運動している円柱状プラズマ中の ダイポールからの放射<sup>(75)-(78)</sup>

#### 9.1 序 言

最近,運動系の電磁界理論に関する研究が活発になされ,運動媒質と平面電磁波との相互作用 $^{(45)$   $\leftarrow$   $^{(74)}$  ,あるいは境界のない無限に広がった運動媒質中に存在する波源による電磁放射 $^{(14)}$   $\leftarrow$   $^{(30)}$  などに関する多数の研究が報告されている。しかし,境界を有する有限な運動媒質中に存在する波源による表面波あるいは放射波に関する詳しい報告はまだないようである。

そこで、本章ではこのような運動している有限媒質中の波源による放射の一例として、軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる放射の問題を取扱う。まず、ダイポールによって励振される表面波の電磁界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め、分散関係式および表面波電力について検討し、プラズマ媒質の運動が表面波の伝搬に与える影響は、従来の他の場合に比べ、きわめて大きいことを明らかにする。つぎに、遠距離放射電磁界を鞍部点法によって求め、媒質の運動が放射電力に与える影響等について数値計算例を挙げて詳しく検討する。

#### 9.2 プラズマ円柱内外の電磁界

図 9.1に示すように z 方向に無限に長い半径 b なる円柱状プラズマ(95) を考えこのプラズマは z の正の方向に V=v  $|_z$  ( $|_z=z$  軸 方向の単位ベクトル)なる速度で、波源に対して 一様に運動しているものとする。ただし、プラズマ媒質は等方性であり、その誘電率は媒質の静止座標系において

$$\varepsilon_{0}\varepsilon = \varepsilon_{0} \left(1 - \frac{\omega_{p}^{2}}{\omega^{\prime}^{2}}\right) \tag{9.1}$$

で与えられるものとする。ここで、 $\omega$ は媒質の静止座標系における波源の周波数であり、 $\omega_p$ はプラズマ周波数を表わす。さて、ダイポールは座標原点

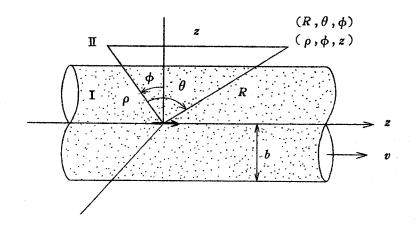


図9.1 座 標 表

に位置し、双極子モーメントの方向はz軸に平行であるとすれば、電流密度 **J**は次式で与えられる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_z J_e \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho} \tag{9.2}$$

ここで電磁界の時間変化を  $e^{j\omega^t}$ と仮定すれば、領域  $\mathbf{I}$  (0<
ho< b) 、すなわち運動しているプラズマ媒質中の電磁界は、次式により決定される。 (20)

$$(\nabla - j_{\omega} \mathbf{Q}) \times \mathbf{E}_{e} = -j_{\omega} \mu_{0} \overline{\alpha} \cdot \mathbf{H}_{e} \tag{9.3a}$$

$$(\vec{r} - j\omega \mathbf{Q}) \times \mathbf{H}_{e} = j\omega \varepsilon_{0} \varepsilon \, \overline{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{e} + \mathbf{J}$$
 (9.3b)

$$(\nabla - j_{\omega} \mathbf{Q}) \cdot \overline{\alpha} \cdot \mathbf{E}_{e} = \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{J} + q}{\varepsilon_{o} \varepsilon}$$
 (9.3c)

$$(\mathbf{r} - \mathbf{j}_{\omega} \mathbf{Q}) \cdot \overline{\alpha} \cdot \mathbf{H}_{e} = 0 \tag{9.3d}$$

ただし、添字eはプラズマ媒質中の電磁界を表わし、また、 q は波源電流密度 J に伴う電荷密度を表わす。なお、下記の諸記号を導入した。

$$Q = \frac{(n^2 - 1)v}{(1 - n^2 \beta^2) c^2} = \frac{(n^2 - 1)\beta}{(1 - n^2 \beta^2) c} |_z = Q|_z$$

$$\overline{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a = \frac{1 - \beta^2}{1 - n^2 \beta^2}, \beta = \frac{v}{c}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$
 ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  (9.4)

さて、式(9.3d)から電磁界補助量としてベクトル・ポテシャル  $A_e$  をつぎのように導入することができる。

$$\mathbf{H}_{e} = \overline{\alpha}^{-1} \cdot ((\mathbf{r} - j_{\omega} \mathbf{a}) \times (\overline{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{e})) \tag{9.5}$$

したがってスカラ・ポテンシャルをφ。とすれば、E。は式(9.3a)から

$$\mathbf{E}_{e} = -j\omega\mu_{0}\bar{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{e} - (\nabla -j\omega\mathbf{Q})\phi_{e} \tag{9.6}$$

とかける。式(9.5),(9.6)を式(9.3b),(9.3c)に代入し、ゲージ関係式

$$(\mathbf{V} - j_{\omega}\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{A}_{e} + j_{\omega} \varepsilon_{o} \varepsilon a^{2} \phi_{e} = 0$$
 (9.7)

を用いて、ベクトル・ポテンシャル 🗛 に関する波動方程式

$$(\nabla - j_{\omega} \mathbf{Q}) \cdot \overline{\alpha} \cdot (\nabla - j_{\omega} \mathbf{Q}) \mathbf{A}_{e} + a^{2} k^{2} \mathbf{A}_{e} = -a^{2} \mathbf{J}$$
 (9.8)

る得る。ただし

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \mathcal{E}_0 \mathcal{E} = k_0^2 \mathcal{E} \tag{9.9}$$

式 (9.2)で与えられる波源に対しては、すべての電磁界成分は円周方向 $\phi$ に無関係になり、波動方程式 (9.8)はベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}_e$ の $\mathbf{z}$  方向成分  $\mathbf{A}_{ze}$  を用いてつぎのようにかける。

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2 j \omega \Omega}{a} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\omega^2 \Omega^2}{a} \right)$$

$$+k^{2}a A_{ze} = -aJ_{e} \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}$$
 (9.10)

また、電磁界成分は式(9.5),(9.6),(9.7)を用いてつぎのようにかける。

$$E_{\rho e} = \frac{1}{j_{\omega} \varepsilon_{0} \varepsilon a^{2}} \left( \frac{\partial^{2}}{\partial \rho \partial z} - j_{\omega} Q \frac{\partial}{\partial \rho} \right) A_{ze}$$
 (9.11a)

$$E_{ze} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon a^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2j\omega \Omega \frac{\partial}{\partial z} - \omega^2 \Omega^2 + k^2 a^2 \right) A_{ze} \quad (9.11b)$$

$$H_{\phi e} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \rho} A_{ze} \qquad (9.11c)$$

つぎに、領域 I (  $b<
ho<\infty$  )。すなわち真空中の電磁界は領域 I の場合と同様にして、波動方程式

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right] A_{zo} = 0$$
 (9.12)

を満足するベクトル・ポテンシャル $A_{z_0}$ を用いて,つぎのように表わされる。

$$E_{\rho o} = \frac{1}{j\omega E_{o}} \frac{\partial^{2}}{\partial \rho \partial z} A_{zo}$$
 (9.13a)

$$E_{zo} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) A_{zo}$$
 (9.13b)

$$H_{\phi \rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} A_{z_0} \tag{9.13c}$$

ただし、添字0は自由空間中の電磁界量を表わす。

つぎに被動方程式(9.10) および(9.12) を解くことを考える。まず、領域 I における波動方程式(9.10) を Fourier 変換することによって次式を得る。

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) - \frac{1}{a} h^2 - \frac{2\omega Qh}{a} - \frac{\omega^2 Q^2}{a} + k^2 a\right) \overline{A}_{ze}$$

$$= -a J_e \frac{\delta(\rho)}{2\pi \rho} \qquad (9.14)$$

ただし.

$$A_{ze} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A}_{ze} e^{jhz} dh \qquad (5.15a)$$

$$\overline{A}_{ze} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{ze} e^{jhz} dz \tag{9.15b}$$

式 (9.14) は、 誘電率が式 (9.1) で与えられる等方 性運動 プラズマ中において常に成り立つ 関係式

$$(h + \omega Q)^2 - a^2 k^2 = a(h^2 - k_a^2)$$
 (9.16)

を用いて簡単化することができる。ただし、 $k^2$ は式(9.9)に与えられる量であり、 $k_e^2$  は次式で定義される。

$$k_{e}^{2} = \omega^{2} \mu_{0} \varepsilon_{0} \left(1 - \frac{\omega_{p}^{2}}{\omega}\right) = k_{0}^{2} \left(1 - \frac{\omega_{p}^{2}}{\omega^{2}}\right) \tag{9.17}$$

式(9.16)を代入することによって,式(9.14)はつぎのようにかける。

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \xi_e^2\right] \overline{A}_{ze} = -\frac{a J_e \delta(\rho)}{2 \pi}$$
(9.18)

ただし,

$$\xi_{p}^{2} = k_{p}^{2} - h^{2} \tag{9.19}$$

つぎに、波動方程式(9.12)を Four i er変換して次式を得る。

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \xi_0^2\right) \overline{A}_{zo} = 0$$
 (9.20)

ただし,

$$\xi_0^2 = k_0^2 - h^2$$

また,

$$A_{zo} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A}_{zo} e^{-jhz} dh$$
 (9.22a)

$$\overline{A}_{zo} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{zo} e^{jhz} dz \qquad (9.22b)$$

さて、式(9.18)および(9.20)から円柱表面における境界条件を考慮して、領域 I、および領域 Iにおけるベクトル・ポテンシャルはそれぞれつぎのように求められる。

$$A_{ze} = j \frac{aJ_e}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ H_0^{(2)} (\xi_e \rho) + \frac{P(h)}{\Delta(h)} J_0(\xi_e \rho) \right] \times e^{-jhz} dh, (o < \rho < b)$$
(9.23)

$$A_{zo} = -j \frac{J_e}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2j\xi_e}{\pi_b \xi_0 \Delta(h)} H_0^{(2)} (\xi_0 \rho) \right]$$

$$\times e^{-jhz} dh, (b < \rho < \infty)$$
 (9.24)

ここで,

$$P(h) = \xi_{e} H_{0}^{(2)} (\xi_{e} b) H_{1}^{(2)} (\xi_{0} b) - \xi_{0} H_{0}^{(2)} (\xi_{0} b) H_{1}^{(2)} (\xi_{e} b)$$

$$(9.25a)$$

$$\Delta(h) = \varepsilon \xi_0 H_0^{(2)}(\xi_0 b) J_1(\xi_0 b) - \xi_0 H_1^{(2)}(\xi_0 b) J_0(\xi_0 b) \qquad (9.25b)$$

$$\xi_{e} = \begin{cases} \sqrt{k_{e}^{2} - h^{2}}, & (k_{e} > h) \\ -j\sqrt{h^{2} - k_{e}^{2}}, & (k_{e} < h) \end{cases}$$
 (9.26a)

$$\xi_{0} = \begin{cases} \sqrt{k_{0}^{2} - h^{2}}, & (k_{0} > h) \\ -j\sqrt{h^{2} - k_{0}^{2}}, & (k_{0} < h) \end{cases}$$
 (9.27a)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{(1 - \beta^2)\omega_p^2}{(\omega - \beta ch)^2}$$
 (9.28)

ただし、 $H_n^{(2)}$ および $J_n$  はそれぞれ n 次の第 2 種Hankel 関数および Bessel 関数を表わす。

#### 9・3 表面波の励振

9.3.1 分散関係式

ベクトル・ポテンシャル $A_{ze}$ , $A_{zo}$ の表面波による寄与は,被積分関数の極における留数を計算することによって求められるが, $\xi_e=-j\sqrt{h^2-k_e^2}$ ,  $(k_e < h)$ ; $\xi_o=-j\sqrt{h^2-k_o^2}$ , $(k_o < h)$  のときの $\Delta(h)$  の零点 $h_s$  が表面波の伝搬定数を与える。したがって表面波の分散関係式は式 (9.25b),(9.26b),(9.27b)および (9.28) からつぎのように表わされる。

$$(1-\beta k_s)^2 p_e I_0 (MNp_e) K_1 (MNp_0) + \{ (1-\beta k_s)^2 - (1-\beta^2) N^{-2} \} p_0$$

$$\times I_1 (MNp_e) K_0 (MNp_0) = 0$$
(9.29)

ただし.

$$p_e = \sqrt{k_s^2 - (1 - N^{-2})}$$
 .  $p_o = \sqrt{k_s^2 - 1}$ 

$$k_s = \frac{h_s}{k_o}$$
 = 正規化表面波伝搬定数

$$M = \frac{\omega_p}{c} b$$
 =正規化半径 
$$N = \frac{\omega}{\omega_p} =$$
 =正規化周波数 (9.30)

ここで、 $I_n$  および $K_n$  はそれぞれれ次の第1種および第2種の変形 Bessel 関数を表わす。さて、本章ではプラズマ媒質が zの正の方向に運動( $\beta>0$ )していると仮定しているがこのときzの負の方向に伝搬する表面被  $(k_s<-1)$ は、媒質がzの負の方向に運動( $\beta<0$ )していると仮定したときにzの正の方向に伝搬する表面被  $(k_s>1)$ と等価である。したがって、zの負の方向に伝搬する表面被  $(k_s<-1)$ を求めるには分散関係式 (9.29) における $\beta$ を $-\beta$ に置き換え、 $k_s>1$ なる解を求め一符号を付ければよい。

ここで、分散関係式(9.29)について考察する。分散関係式(9.29)はその左辺第 2 項が正の場合には明らかに解をもたない。すなわち、

$$(1-\beta k_s)^2 - (1-\beta^2)N^{-2} > 0$$
 (9.31)

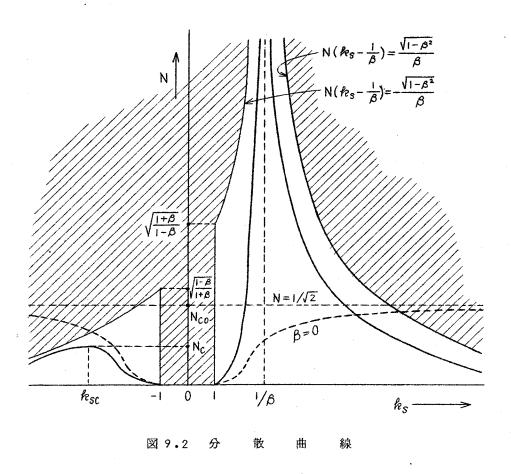
したがって.

$$N \left| k_s - \frac{1}{\beta} \right| > \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \tag{9.32}$$

なる領域には解は存在しない。また式(9.30)の第2式から明らかなように

$$\left|k_{s}\right| < 1 \tag{9.33}$$

なる領域には解は存在しない。さらに、式 (9.29) は  $k_s=\frac{1}{\beta}$  において  $N=\infty$ なる解を有する。以上のことから、図 9.2 が得られる。図 9.2 において、 縦軸は正規化周波数 N であり、横軸は正規化表面波 伝搬定数  $k_s$  である。また斜線 部は式 (9.32) および (9.33) の 領域、すなわち 分散 関係式が解を持たない 領域 を表わす。 図において点線および実線で表わされる曲線は、 $\beta=0$  および  $\beta \neq 0$  の それぞれの場合の分散曲線の概形を示したものである。図 9.2 およ



び,数値計算例である図9.3からつぎのことがわかる。

- 1)  $\beta=0$  , すなわち 媒質が静止している 場合に は 遮断周 波数  $N_{co}=1/\sqrt{2}$  をもつ。
- 2) 媒質の運動方向に伝搬する表面波  $(k_s>1)$ に対しては遮断周波数は存在しない。また。分散曲線は $k_s=1/\beta$  において不連続となり。  $1< k_s<1/\beta$  なる領域は前進波を表わし、  $1/\beta< k_s$ なる領域は後進波を表わす。
- 3)媒質の運動方向と逆の方向に伝搬する表面波  $(k_s < -1)$  は媒質が静止している場合の遮断周波数  $N_{co}$  より低い 遮断周波数  $N_c$  をもつ。また,分散曲線は媒質の運動方向に伝搬する表面波の場合と違って, $k_s < -1$  の全領域にわたって連続となり,波は  $k_{sc} < k_s < -1$  なる領域では前進波となり,

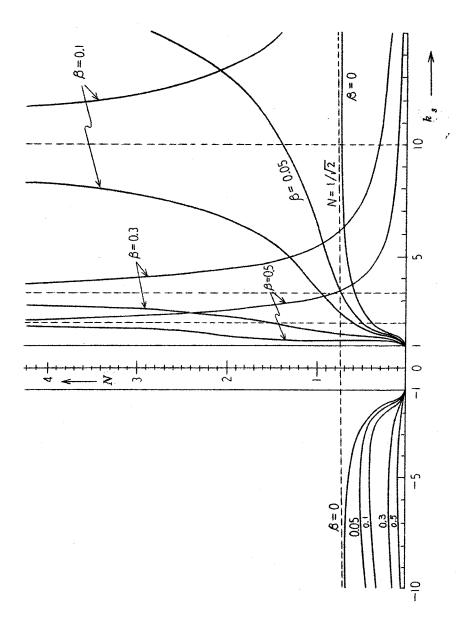
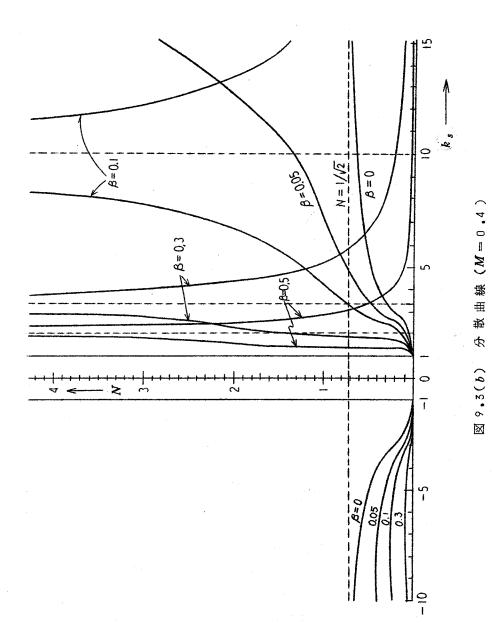


図9.2(a) 分散曲線(M=0.1)



**—1** 5 7**—** 

 $k_s < k_{sc}$ なる領域では後進波となる。ただし、 $k_{sc}$ は  $N=N_c$ における  $k_s$ の 値を表わす。なお、最近  $Yeh^{(96)}$ は著者らとは独立に、運動している円柱状プラズマに沿って伝搬する表面波の固有モードを電磁界の変換による方法を用いて求めているが、彼の解析は不完全であり  $k_s > \frac{1}{\beta}$ なる後進波の領域が考慮されていない。

図 9.3(a) および (b)は、それぞれ正規化半径M=1.0および 0.4の場合の分散曲線の数値計算例である。

9.3.2 表面波電力

ベクトル・ポテシャルの表面波による寄与は極における留数を計算することによって求められ、z>0の領域において、つぎのようになる。

$$A_{ze}^{+}(\rho,z) = \frac{aJ_{e}}{8} \frac{P(h_{s})}{\Delta'(h_{s})} I_{0}(k_{0}p_{e}\rho)e^{-jh_{s}z}$$
 (9.34)

$$A_{zo}^{+}(\rho,z) = \frac{J_{e}p_{e}}{2\pi^{2}b\varepsilon p_{0}\Delta'(h_{s})}K_{0}(k_{0}p_{0}\rho)e^{-jh_{s}z} \qquad (9.35)$$

ただし、 $\Delta'(h_e)$ は  $\Delta(h)$  の  $h=h_e$ での 微分を表わす。

さて、zの正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力を $P_s^+$  とすれば $P_s^+$  は次式で与えられる。

$$P_{s}^{+} = P_{se}^{+} + P_{so}^{+} \tag{9.36}$$

ただし。

$$P_{se}^{+} = \frac{1}{2} R_{e} \left( \int_{o}^{b} E_{\rho e}^{+} H_{\phi e}^{+*} 2\pi \rho d\rho \right)$$
 (9.37)

$$P_{so}^{+} = \frac{1}{2} R_{e} \left( \int_{b}^{\infty} E_{\rho o}^{+} H_{\phi o}^{+*} 2\pi \rho d\rho \right)$$
 (9.38)

ここで、 $R_e$  は実数部をとる操作を表わし、記号 \* は複素共役を表わす。上式 (9.37) に含まれる  $E_{\rho e}^+$  、 $H_{\phi e}^+$  は式 (9.11a) 、(9.11b) に式 (9.34) を用いてつぎのように求められる。

$$E_{\rho e}^{+} = -\frac{J_{e}(h_{s} + \omega \Omega) k_{o} p_{e}}{8 \omega \varepsilon_{o} \varepsilon a} \frac{P(h_{s})}{\Delta'(h_{s})} I_{1}(k_{o} p_{e} \rho) e^{-jh_{s} z} (9.39 a)$$

$$H_{\phi e}^{+} = -\frac{J_{e} k_{o} p_{e}}{8} \frac{P(h_{s})}{\Delta'(h_{s})} I_{1}(k_{o} p_{e} \rho) e^{-jh_{s} z} (9.39 b)$$

同様に $E_{
ho o}^+, H_{oldsymbol{d} o}^+$ , は式 (9.13a),(9.13b)および (9.35)を用いてつぎのように求められる。

$$E_{\rho o}^{+} = \frac{J_e}{2\pi^2 b \omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{h_s k_0 p_e}{\Delta'(h_s)} K_l(k_0 p_0 \rho) e^{-jh_s z}$$
(9.40a)

$$H_{\phi^0}^+ = \frac{J_e}{2\pi^2 b \, \varepsilon} \, \frac{k_o \, b_e}{\Delta'(h_c)} \, K_1(k_o b_o \, \rho) \, e^{-jh_s z} \qquad (9.40b)$$

したがって $P_{se}^+$  ,  $P_{so}^+$ はそれぞれつぎのように表わされる。

$$P_{se}^{+} = \frac{1}{2} \left( \frac{J_{e}^{2}}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}} \left( \frac{\omega_{p}}{c} \right)^{2} \right) \frac{N^{4}M^{2}p_{e}^{2}(\beta k_{s} + a - 1)}{\varepsilon \, a \, \beta}$$

$$\times \frac{L^{2}}{D^{2}} \left( I_{1}^{2} (MNp_{e}) - I_{0} (MNp_{e}) \, I_{2} (MNp_{e}) \right) \qquad (9.41)$$

$$P_{so}^{+} = \frac{1}{2} \left[ \frac{J_e^2}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^2 \right] \frac{N^2 k_s p_e^2}{\varepsilon^2 D^2}$$

$$\times \left( K_o \left( MN p_o \right) K_2 \left( MN p_o \right) - K_1^2 \left( MN p_o \right) \right)$$
(9.42)

ただし.

$$L = \frac{p_e}{\varepsilon} K_o (MN p_e) K_1 (MN p_o) - p_o K_o (MN p_o) K_1 (MN p_e)$$
(9.43a)

$$D = \left(\frac{2 p_e \beta (1-\beta^2)}{\varepsilon^2 N^2 (1-\beta k_s)^3} - \frac{k_s}{\varepsilon_{p_e} p_e^2 N^2}\right) I_e(MNp_e) K_i(MNp_e)$$

$$+ \frac{(1-\beta^{2})k_{s}M}{\varepsilon N(1-\beta k_{s})^{2}} I_{1}(MNp_{e})K_{1}(MNp_{0})$$

$$+ \frac{MNk_{s}(\varepsilon p_{0}^{2}-p_{e}^{2})}{\varepsilon p_{e}p_{0}} I_{0}(MNp_{e})K_{0}(MNp_{0})$$

$$+ \frac{k_{s}}{p_{0}^{2}p_{0}N^{2}} I_{1}(MNp_{e})K_{0}(MNp_{0})$$
(9.43b)

つぎに、 $^{2}$  の負の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力は、 $^{2}$  の正の方向に伝搬する表面波によって運ばれる電力を表わす式における $^{2}$  を $^{2}$  に置き換えたものに等しい。したがって次式が成りたつ。

$$P_{s}^{-}(\beta) = P_{s}^{+}(-\beta) = P_{se}^{+}(-\beta) + P_{se}^{+}(-\beta)$$
 (9.44)

よって表面波によって運ばれる全電力P。はつぎのようになる

$$P_{s} = P_{s}^{+} + P_{s}^{-} = P_{s}^{+}(\beta) + P_{s}^{+}(-\beta)$$
 (9.45)

図 9・4~9・5 は表面波電力の数値計算例である。 ただし、 縦軸は正規化表面波電力

$$\widetilde{P}_{s}^{\pm} = \left(\frac{J_{e}^{2}}{32 \pi} \sqrt{\frac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}} \left(\frac{\omega_{p}}{c}\right)^{2}\right)^{-1} P_{s}^{\pm}$$
(9.46)

である。 $P_s$  の数値計算例である図 9.4における 2 種類の曲線の 5 ち山型の曲線は 前進波の正規化表面波電力を表わし,他方の曲線は後進波の正規化表面波電力を表わす。なお,前進波の領域と後進波の領域との境目の正規化表面波伝搬定数である $k_s=1/\beta$  (このとき  $N=\infty$ ,図 9.3 参照)においては  $P_s^+ \simeq 0$  となる。図 9.5は  $P_s^-$ の数値計算例であるが,図から前進波から後進波の変り目の正規化表面波伝搬定数を与える  $k_s=k_{sc}$  (このとき  $N=N_c$ ,図 9.3 参照)において正規化表面波伝搬定数を与える  $k_s=k_{sc}$  (このとき  $N=N_c$ ,図 9.3 参照)において正規化表面波伝搬定数を与える  $k_s=k_{sc}$  (このとき  $N=N_c$ ,図 9.3 参照)において正規化表面波電力  $R_s^-$  が非常に大きくなることがわかる。また,図 9.4 および図 9.5 のそれぞれにおける (a) と (b) とを比較することに

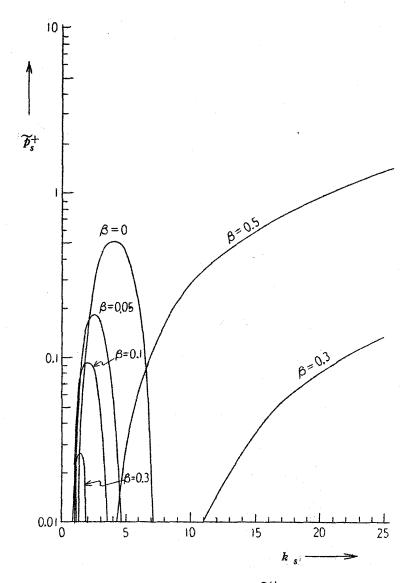


図 9.4(a) 正規化表面波電力 $\widetilde{P}_s^+$  (M=1.0)

よって正規化半径Mが小さいほど表面波電力が大きくなることがわかる。

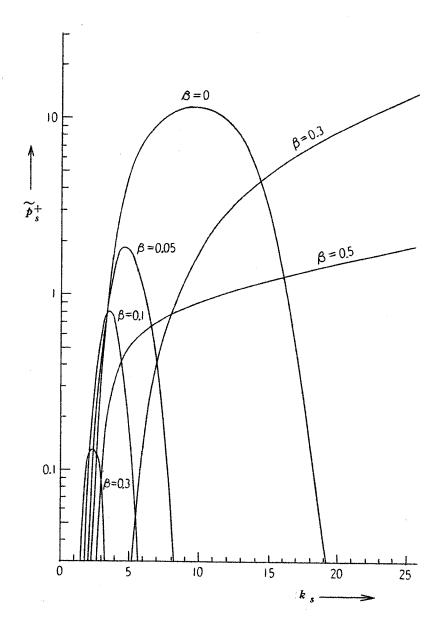


図9.4(b) 正規化表面波電力 $P_s^+$  (M=0.4)

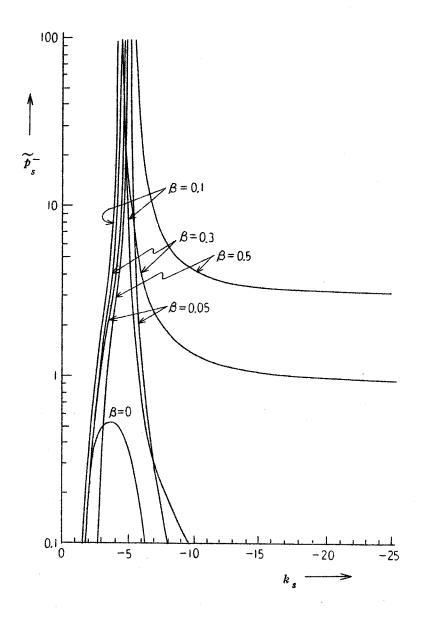


図 9.5(a) 正 規化表面波電力  $P_s$  (M=1.0)

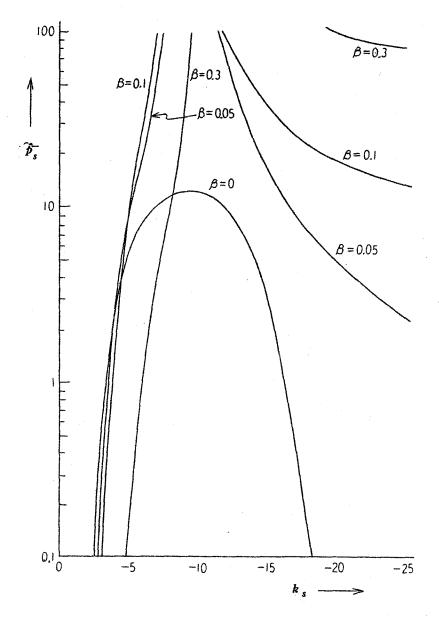


図 9.5(b) 正規化表面波電力  $\widetilde{P}_s^-$  (M=0.4)

#### 9.4 空間放射波

ベクトル・ポテンシャルの空間放射波に対する寄与は鞍部点法によって求めることができるが、一般に波源を囲んでいる媒質が運動している場合には極と鞍部点が非常に接近することがあり、したがって鞍部点法の適用が困難となる場合がある(例えば、波源を囲んでいる媒質が誘電体の場合には、媒質の運動速度が大きくなればこのようなことが起って来る)。しかし、軟動している媒質が、誘電率が式(9・1)で与えられるような等方性プラズマの場合には式(9・16)の関係式が成立し、したがって表面波伝搬定数は媒質が静止している場合と同様に常に $|k_s|>1$ なる領域に存在する。このことから、媒質が運動することによって極と鞍部点が互いに接近するようなことは決してなく、したがって静止している場合と同様に鞍部点法を適用することができ、式(9・24)によって与えられるベクトル・ポテンシャル $A_{zo}$ の空間放射波に対する寄与はつぎのように求められる。

$$A_{zo}(R,\theta) = \frac{jJ_e \sqrt{k_e^2 - k_o^2 \sin^2 \theta}}{4\pi^2 b \varepsilon \Delta(k_o \sin \theta)} \frac{1}{k_o \cos \theta}$$

$$\times \frac{e^{-jk_o R}}{R}, (k_o R \gg 1)$$
(9.47)

ただし.

$$\varepsilon = 1 - \frac{1 - \beta^2}{\left(1 - \beta \sin \theta\right)^2 N^2} \tag{9.48}$$

なお、図9.1に示すようにR、 $\theta$ はz、 $\rho$ とつぎの関係で結ばれている。

$$z = Rsin\theta$$
,  $\rho = Rcos\theta \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$  (9.49)

さて、遠距離放射電磁界は式(9.13)から求められるが、H  $(R, \theta)$  はつぎ  $\phi^o$  のように表わされる。

$$H_{do}(R,\theta) = j k_0 A_{zo}(R,\theta) c os \theta \qquad (9.50)$$

したがって、 R方向への遠距離放射電力はつぎのように求められる。

$$S_{R} = \frac{1}{2} R e \left[ E_{\theta}(R, \theta) H_{\phi}^{*}(R, \theta) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}} \left| H_{\phi}(R, \theta) \right|^{2}$$

$$= \frac{J_{e}}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}} \left( \frac{\omega_{p}}{\varepsilon} \right)^{2} \frac{F(\theta)}{4\pi R^{2}}$$
(9.51)

ただし、 $F(\theta)$  は次式で定義される

$$F(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2 M^2 \varepsilon^2} & \frac{\lambda^2}{D_1^2 + D_2^2}, & (N = sec\theta) \\ \frac{2}{\pi^2 M^2 \varepsilon^2} & \frac{1}{D_{10}^2 + D_{20}^2}, & (N = sec\theta) \end{cases}$$
 (9.52a)

ここで D, D, はそれぞれつぎのように与えられる。

$$D_{i} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon} J_{0}(MN\lambda) J_{1}(MN\cos\theta) - \cos\theta J_{1}(MN\lambda) J_{0}(MN\cos\theta), \\ (N > \sec\theta) & (9.53a) \end{cases}$$

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} I_{0}(MN\lambda) N_{1}(MN\cos\theta) - \cos\theta I_{1}(MN\lambda) N_{0}(MN\cos\theta), \\ (N < \sec\theta) & (9.53b) \end{cases}$$

$$D_{2} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon} J_{0}(MN\lambda) N_{i}(MN\cos\theta) - \cos\theta J(MN\lambda) N_{0}(MN\cos\theta), \\ (N > sec\theta) \end{cases}$$
 (9.54a)

$$D_{2} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon} I_{0}(MN\lambda) J_{1}(MN\cos\theta) - \cos\theta I_{1}(MN\lambda) J_{0}(MN\cos\theta), \\ (N \leqslant ec\theta) \end{cases}$$
 (54b)

ただし.

$$\lambda = \sqrt{\left| \cos^2 \theta - N^{-2} \right|} \tag{9.55}$$

また、 $D_{10}$  , $D_{20}$ はそれぞれつぎのように与えられる。

$$D_{10} = \frac{1}{\varepsilon} J_1(MN \cos \theta) - \frac{1}{2} MN \cos \theta J_0(MN \cos \theta) \qquad (9.56)$$

$$D_{20} = \frac{1}{\varepsilon} N_{\rm I}(MN \cos \theta) - \frac{1}{2} MN \cos \theta N_{\rm 0} (MN \cos \theta) \qquad (9.57)$$

上式における, $F(\theta)$  は, $\theta$  方向に放射される電力に比例する量であり,放射パターンを表わす。 なお放射全電力  $P_R$  は次式で与えられる。

$$\widetilde{P}_{R} = \left(\frac{J_{e}^{2}}{52\pi\sqrt{\frac{\mu_{0}}{\varepsilon_{0}}}} \left(\frac{\omega_{p}}{c}\right)^{2}\right)^{-1} P_{R} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta \qquad (9.58)$$

ここで $P_R$  は正規化放射電力を表わす。  $\boxtimes 9.6(a)$  および (b) はM=1 , N N=0.5 および 1.05 の場合の放射パターン $F(\theta)$  の数値計算例であり,  $\boxtimes 9.7(a)$  および (b) は, M=10 , N=0.5 および 1.05 の場合の放射パターン $F(\theta)$  の数値計算例である。

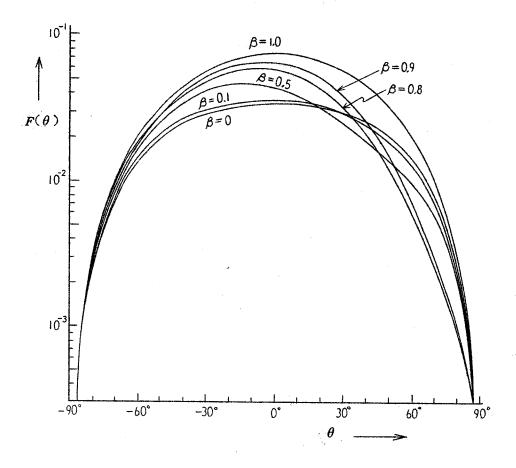


図 9.6(a) 放射パターンF( $\theta$ )(M=1.0.N=0.5)

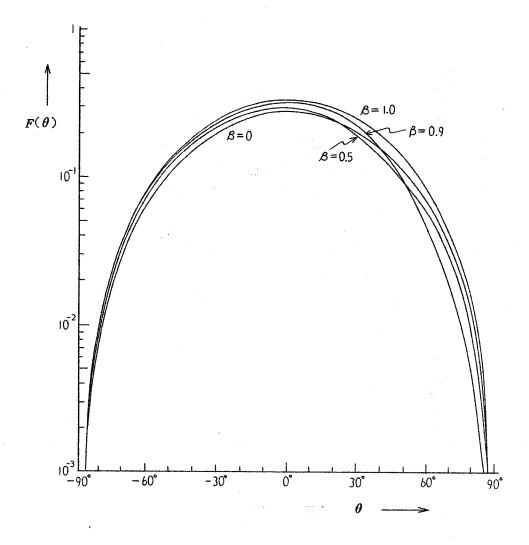


図9.6(b) 放射パターンF( $\theta$ )(M=1.0,N=1.05)

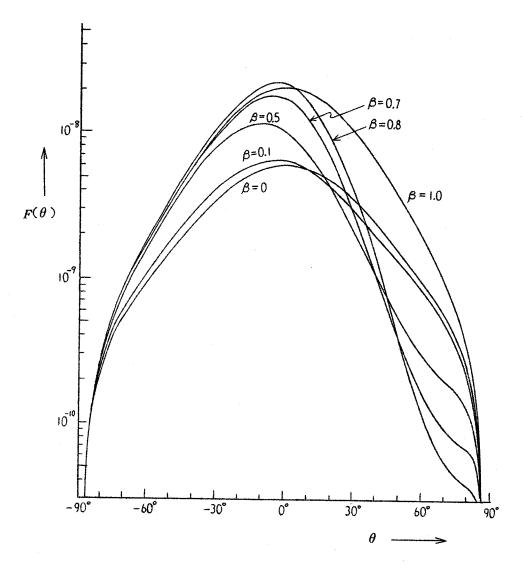


図 9.7(a) 放射パターン  $F(\theta)(M=10.N=0.5)$ 

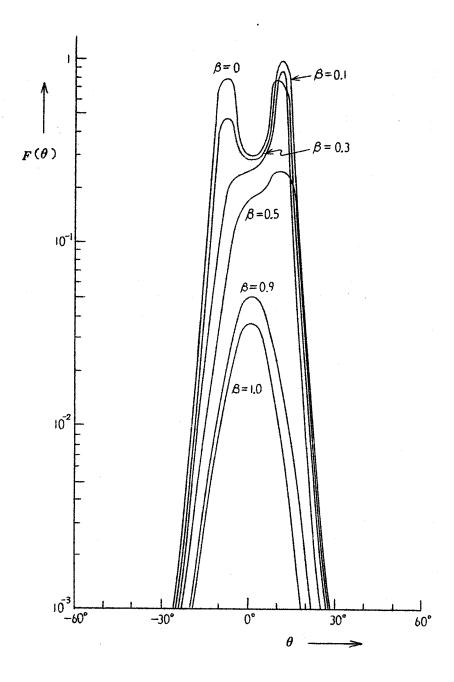


図9.7(b) 放射パターンF( $\theta$ )(M=10,N=1.05)

## 9.5 結 言

軸方向に運動している円柱状プラズマ中に静止しているダイポールによる 放射について考察した。まず、ダイポールによって励振される表面波の電磁 界をベクトル・ポテンシャルの極における留数を計算することによって求め、 プラズマ媒質の運動が分散関係式および表面波電力等に与える影響を数値計 算例をあげて詳しく検討した。ついで、遠距離放射電磁界を鞍部点法によっ て求め、媒質の運動が放射電力に与える影響等について考察した。

## 第10章 結 論

本章では本研究の成果を総括して述べる。著者は、本論文において相対論 的電磁界理論における基本的な問題、すなわち運動波源からの電磁放射、運 動媒質中の電磁放射ならびに波動伝搬、および運動媒質と平面電磁波との相 互作用について考察し、波源あるいは媒質の運動によって従来知られていな かった種々の興味ある現象が現われることを明らかにした。

第2章では、相対論的速度で運動する波源からの電磁放射現象を明らかに するため、真空中を光速度と同程度の速度で一様に運動する電気双極子から の電磁放射について考察した。

第3章および第4章では、導電性運動媒質中の電磁理論の近似解および厳密解についてそれぞれ考察した。

第5章および第6章では、導電性運動媒質を含む導波管の理論の近似解および厳密解についてそれぞれ考察した。

第7章および第8章では、吸収性運動媒質、すなわち圧縮性運動プラスマ 流体および光波領域における分散性誘電体媒質と平面電磁波との相互作用に ついてそれぞれ考察した。

第9章では、運動している有限な媒質中に存在する波源による放射の→例 として、軸方向に運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる電磁放 射現象について考察した。

以上,本研究で得られた成果が電磁界理論の発展に多少なりとも貢献し得るならば,著者の最も幸とするところである。

辞

謝

本研究を行なうに察し、終始御懇切な御指導、御激励をいただいた大阪大学工学部板倉清保教授、ならびに種々有益な御教示、御助言をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭助教授に衷心より感謝の意を表わす。

大学院在学中は,通信工学および電子工学一般に関して御指導,御教示をいただいた大阪大学工学部熊谷三郎名誉教授,青柳健次教授,笠原芳郎教授,菅田栄治教授,滑川敏彦教授,および大阪大学基礎工学部牧本利夫教授,藤沢和男教授,ならびに大阪大学産業科学研究所加藤金正教授,松尾幸人教授に深謝する。

また,種々有益な御教示,御討論をいただいた大阪大学工学部中西義郎助教授に深謝する。

さらに、研究会等において種々有益な御教示、御討論をいただいた電子通信学会アンテナ・伝播研究会委員長喜連川隆博士に深謝する.

本研究遂行にあたって、御協力いただき、また種々有益な御討論をいただいた大阪大学大学院塩沢俊之(現在、大阪大学工学部)、吉田健一(現在、住友電工株式会社)、二瓶文博(現在、電々公社電気通信研究所)、中川 紀美雄、および小川英一の諸氏、ならびに種々有益な御討論をいただいた大阪大学大学院間剛氏をはじめとする板倉研究室の諸兄に厚く御礼申し上げる。

- (1) J. H. Chisholm and J. C. James: "Radar evidence of solar wind and coronal mass motions", Astrophys. J., 140, pp. 377 379 (July 1964).
- (2) W. C. Erickson: "The radio-wave scattering properties of the solar corona", Astrophys. J., 139, pp. 1290-1311 (May 1964).
- (3) Special Issue on MHD Power Generation, Proc. IEEE, 56 (Sept. 1968).
- (4) H. Seifert, Ed.: Space Technology (John Wiley & Sons, New York, 1959).
- (5) A. Sommerfeld: Electrodynamics (Academic Press, New York, 1964), Sec. 34.
- (6) C. Moller: The Theory of Relativity (Oxford University Press, London, 1952), Chap. 7.
- (7) C. T. Tai: "A study of electrodynamics of moving media", Proc. IEEE, 5, pp. 685-689 (June 1964).
- (8) 藤岡 弘,塩沢俊之,熊谷信昭: "運動電気双極子からの相対論的電磁放射",信学誌,49, かか、1147-1152(昭41-06)。
- (9) J. R. Ellis: "The fields of an arbitrarily moving dipole", Proc. Camb. Phil. Soc. 59, pp. 759-774 (1963).
- (10) H. Mott, G. B. Hoadley, and W. R. Davis: "The fields of a moving electric dipole", Proc. IEEE (Correspondence), 53, pp. 407-408 (Apr. 1965).
- (11) H. Mott, G. B. Hoadley, and W. R. Davis: "Radiation from the moving electric dipole", Proc. IEEE (Letters), 55, pp. 92-93 (Jan. 1963).
  - (12) 塩沢俊之, 熊谷信昭: "運動双極子アンテナの放射特性 ——微視的放射理

- 論による考察",信学誌, 50, pp。 38 45 ( 昭 42 01 )。
- (13) J. F. Holmes and A. Ishimaru: "Relativistic communications effects associated with moving space antennas", IEEE Trans., AP-17, pp. 484-488 (July 1969).
- (14) R. T. Compton, Jr., and C. T. Tai: "Radiation from harmonic sources in a uniformly moving media", IEEE Trans., AP-13, pp. 574-577 (July 1965).
- (15) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "運動媒質中におけるアンテナ・アレイの放射特性", 信学誌, 49, pp. 1509~1515 (昭41-08)。
- (16) D. K. Cheng and F. I. Tseng: "Theorems concerning optimization and synthesis of antenna arrays in a moving medium", Proc. IEEE (Letters), 56, pp. 1622-1623 (Sept. 1968).
- (17) F. I. Tseng and D. K. Cheng: "Pattern synthesis of circular arrays in a moving medium", IEEE Trans.

  (Communications), pp. 524-526 (July 1969).
- (18) K. S. H. Lee and C. H. Papas: "Electromagnetic radiation in the presence of moving simple media", J. Math. Phys., 5, pp. 1668 ~ 1672 (Dec. 1964).
- (19) K. S. H. Lee and C. H. Papas: "Antenna radiation in a moving dispersive medium", IEEE Trans., AP-13, pp. 799 ~ 804 (Sept. 1965).
- (20) C. T. Tai: "The dyadic Gree's function for a moving isotropic medium", IEEE Trans. (Communications), AP-13, pp. 322-323 (Mar. 1965).
- (21) R. T. Compton, Jr.: "One and two dimensional Green's functions for electromagnetic waves in moving simple media", J. Math. Phys., 9, pp. 1865 1872 (Nov. 1968).

- (22) B. R. Chawla and H. Unz: "Radiation in a moving anisotropic plasma", Proc. IEEE (Letters), 54, pp. 1103-1105 (Aug. 1966).
- (23) S. W. Lee and Y. T. Lo: "Radiation in a moving anisotropic medium", Radio Sci., 1 (New Series), pp. 313-324 (Mar. 1966).
- (24) 藤岡 弘,熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における電磁放射理論", 信学会アンテナ・伝播研資(1966-10)。
- (25) 藤岡 弘,熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における電磁放射理論", 信学誌,50, pp. 1906~1910 (昭42-10)。
- (26) H. Fujioka and N. Kumagai: "Electromagnetic radiaton in a moving lossy medium", Radio Sci., 2 (New Series), pp. 1449-1458 (Dec. 1967).
- (27) 藤岡 弘,熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における Poynting 定理", 信学誌(投書), 50, pp. 2374 ~ 2375 (昭42 - 12)。
- (28) 藤岡 弘: "導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析", 信学会アンテナ・伝播研資A・P68-54 (1969-01)。
- (29) 藤岡 弘, 熊谷信昭: " 導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析", 信学論(B), 52 5, pp. 429 ~ 433 (昭44 08).
- (30) D. A. Dunn, R. W. Wallace, and S. D. Choi: "Waves in a moving medium with finite conductivity", Proc. IEEE, 57, pp. 45-57 (Jan. 1969).
- (31) J. R. Collier and C. T. Tai: "Guided waves in moving media", IEEE Trans., MTT-13, pp. 441-445 (July 1965).
- (32) 藤岡 弘, 吉田 健一, 熊谷信昭: " 運動媒質を含む 導波管の回路 理論的 取り扱い", 信学会アンテナ・伝播研資(1966-06)。
- (因) H. Fujioka, K. Yoshida, and N. Kumagai: "Transmission—line treatment of waveguides filled with a moving

- medium", IEEE Trans., MTT-15, pp. 265-267 (Apr. 1967).
- (34) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 遏動媒質を含む 導波管の伝搬および 励振特性", 信学誌(投書), 59, pp. 920~921(昭42-05)。
- (35) 藤岡 弘,吉田健一,熊谷信昭: "軸方向に運動する媒質を含む等波管のモード励振",信学誌,50, pp. 1227~1230(昭42-07).
- (36) L. J. Du and R. T. Compton, Jr.: "Cutoff phenomena for guided waves in moving media", IEEE Trans., MTT-14, pp. 358-363 (Aug. 1966).
- (37) T. Shiozawa: "Guided waves in a simple moving medium", Proc. IEEE (Letters), 54, pp. 1984 1985 (Dec. 1966).
- (38) H. Gruenberg and P. Daly: "Waveguides containing moving dispersive media", IEEE Trans., MTT-15, pp. 636-642 (Nov. 1967).
- (39) G. L. Jiang: "Transformation theory of guided waves in moving media", J. Appl. Phys., 38, pp. 3692 3696 (Aug. 1967).
- (40) J. A. Kong and D. K. Cheng: "On guided waves in moving anisotropic media", IEEE Trans., № TT-16, pp. 99-103 (Feb. 1968).
- (41) H. Berger and J. W. E. Griemsmann: "Guided waves in moving dispersive media, Part I: Nonrelativistic velocities", IEEE Trans., MTT-16, pp. 11-16 (Jan. 1968).
- (42) H. Berger and J. W. E. Griemsmann: "Guided waves in moving dispersive media, Part II: Relativistic velocities", IEEE Trans., WITT-16, pp. 16-20 (Jan. 1968).
- (43) 藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭: " 導電性運動媒質を含む導波管の理

- 論(厳密解)", 信学会アンテナ・伝播研資A・P 68-32 (1968-08)。
- (44) 藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭:"導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い",信学論(B),52-B,pp.130~135(昭44-03)。
- (45) S. N. Stolyarov: "Reflection and refraction of electromagnetic waves at a moving boundary", Soviet Phys. Technical Phys., 8, pp. 418-422 (Nov. 1963).
- (46) C. T. Tai: "Reflection and refraction of a plane electromagnetic wave at the boundary of a semi-infinite moving medium", paper presented at URSI sping meeting, Washington, D. C. (1965).
- (47) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric medum", J. Appl. Phys., 36, pp. 3513-3517 (Nov. 1965).
- (48) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium", J. Appl. Phys., 37, pp. 3079-3082 (July 1966).
- (49)塩沢俊之,間 剛,熊谷信昭:"静止媒質と運動媒質の境界面における 平面波の反射および屈折",信学誌,50, pp. 1381 - 1388 (昭42 - 08)。
- (50) 細野敏夫,日向 隆,湯田幸八:"境界面に平行に運動する媒質による電磁波の反射について",信学論(B),51-B,pp. 301-307 (昭43-07)。
- (51) V. P. Pyati: "Reflection and refraction of electromagnetic waves by a moving dielectric medium", J. Appl. Phys., 38, pp. 652-655 (Feb. 1967).
- (52) S. W. Lee and Y. T. Lo: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium", J. Appl. Phys., 38, pp. 870-

- 875 (Feb. 1967).
- (53) C. S. Tsai and B. A. Auld: "Wave interactions with moving boundaries", J.Appl. Phys., 38, pp. 2106-2115 (Apr. 1967).
- (54) T. Shiozawa, K. Hazama, and N. Kumagai: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a dielectric half-space moving perpendicular to the plane of incidence", J. Appl. Phys., 38, pp. 4459-4461 (Oct. 1967).
- (55) 間 剛,塩沢俊之,熊谷信昭:"入射面に垂直に運動している半無限等方性プラズマの反射特性",信学論(B)(研究速報), 51 B, pp. 164-165(昭43-04)。
- (56) C. Yeh: "Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium. II. Parallel polar izations", J. Appl. Phys., 38, pp. 2871 2873 (June 1967).
- (57) P. Daly and H. Gruenberg: "Energy relations for plane waves reflected from moving media", J. Appl. Phys., 38, pp. 4486-4489 (Oct. 1967).
- (58) C. Yeh: "Brewster angle for a dielectric medium moving at relativistic speed", J. Appl. Phys., 38, pp. 5194-5200 (Dec. 1967).
- (59) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用(I)", 信学会アンテナ→伝播研資 A・P67-49(1967-12)。
- (40) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 圧縮性 運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体液との相互作用(II)", 信学会アンテナ・伝播研資, A・P 67 60 (1968 03).
- (61) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 専電性運動媒質の境界面における境

- 界条件とエネルギー関係式", 信学会アンテナ・伝播研資A・P 67-59 (1968-03)。
- (62) H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai: "Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half space", J. Appl. Phys. (Communications), 39, pp. 2161-2162 (Mar. 1968).
- (63) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 逗勁している導電性誘電体と平面電 磁波との相互作用", 信学論(B)(研究速報), 51-B, pp. 407-408(昭43-08)。
- (64) H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai: "Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma fluid", Can. J. Phys., 47, pp. 375 387 (Fed. 15, 1969).
- (65) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "導電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式", 信学論(B)(研究速報), 52-B, pp. 103~104(昭44-02)。
- (66) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用", 信学論(B), 52 B, pp. 359~366 (昭44-07).
- (67) T. Shiozawa and K. Hazama: "General solution to the problem of reflection and transmission by a moving dielectric medium", Radio Sci., 3 (New Series), pp. 569 ~ 576 (June 1968).
- (68) J. A. Kong and D. K. Cheng: "Wave behavior at an interface of a semi-infinite moving anisotropic medium", J. Appl. Phys., 39, pp. 2282-2286 (Apr. 1968).
- (69) 間 剛,塩沢俊之,熊谷信昭: <sup>\*</sup>運動等方性プラズマによる平面電磁波の反射と透過(一般解),信学論(B),51-B,pp. 575~581(昭43-12).

- (70) 深井一郎, 風間輝雄, 鈴木道雄: "境界面に平行に運動するプラズマのブリュースタ角について", 信学論(B) (研究速報), 52 3, pp. 106~108 (昭44-02).
- (71) 細野敏夫,日向 隆,湯田幸八: "入射面に垂直に相対運動している 2 媒質の境界面における反射現象",信学論(B), 52 - 10, pp. 367~ 374 (昭44 - 07)。
- (72) 藤田広一,林松 汎,柳瀬智夫:"移動境界面における平面波の反射と 透過",信学論(B),52 - 障,pp.526~532(昭44-09)。
- (73) 深井一郎,鈴木道雄,風間輝雄: "異方性遅動媒質による平面電磁波の 反射および透過",信学論(B), 52 - 29, pp. 578~585 (昭44-10)。
- (74) 藤岡 弘,小川英一: "異常分散領域における光波と運動している分散 性誘電体媒質との相互作用",信学論(B),掲載予定。
- (75) 藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭: " 運動している円柱状プラズマ中の ダイポールからの放射(I)",昭 43 信学全大,No. S 6 4 (昭 43 10).
- (76) 藤岡 弘, 中川紀美雄: " 遅勁している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(II)", 昭 44 連大, No. 1357 (昭 44 03).
- (77) 藤岡 弘,中川紀美雄: "運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波と放射波について",信学会アンテナ・伝播研資 $A \cdot P$  69 -10 (1969 -06).
- (78) 靡岡 弘, 中川紀美雄: " 運動している円柱 状プラズマ中のダイポール による放射", 信学論(B), 投稿中。
- (79) W. K. H. Panofsky and M. Phillips: Classical Electricity and Magnetism (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960). p. 224.
- (80) Ibid., p. 283.
- (81) Ibid., p. 252.
- (82) J. A. Stratton: Electromagnetic Theory (McGraw-Hill,

- New York, 1941), p. 82.
- (83) W. K. H. Panofsky and Phillips, op. cit., p. 298
- (84) S. Silver: Microwave Antenna Theory and Design (McGraw-Hill, New York, 1949), p. 2.
- (85) L. Landau and E. Lifshitz: The Classical Theory of Fields (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1961), p. 132.
- (86) J. A. Stratton, op. cit., p. 15.
- (87) 旗岡 弘, 小川英一: " 導電性運動媒質中の増幅波の励振", 輻研資 (1969-11)。
- (88) L. J. Kijewski, J. B. Fanucci, and N. Ness: "Impedance characteristics of an ac MHD generator", IEEE

  Trans., ED-11, pp. 14-20 (Jan. 1964).
- (89) R. N. Sudan: "Interaction of a conducting fluid stream with a travelling wave of magnetic field of finite extension", J. Appl. Phys., 34, pp, 641-650 (Mar. 1963).
- (90) R. C. Costen and D. Adamson: "Three-dimensional derivation of the electromagnetic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary", Proc. IEEE, 53, pp. 1181-1196 (Sept. 1965).
- (91) D. L. Turcotte and G. Schubert: "Intraction of low-frequency electromagnetic waves with a plasma", Phys. Fluids, 4, pp. 1156-1161 (Sept. 1961).
- (92) 奥田治之: "赤外線天文学", 自然, 24, pp, 26-33(昭44-05)。
- (93) J. A. Stratton, op. cit., p. 483.
- (94) A. Sommerfeld: Optics (Academic Press, New York, 1954), Secs. 17-19.
- (%) S. R. Seshadri: "Radiation from an electric dipole in a

plasma column", Proc. IEE, 112, pp. 249 ~ 253 (Feb. 1965).

(96) G. Yeh: "Wave propagation on a moving plasma column", J. Appl. Phys. (Communications), 39, pp. 6112-6113 (Dec. 1968). 

# 関連発表論文

and the second of the second o

## I. 電子通信学会雜誌

- (1)藤岡 弘,塩沢俊之,熊谷信昭:"運動電気双極子からの相対論的電磁放射",信学誌,49, pp. 1147~1152(昭41-06)。
- (2) 藤岡 弘,熊谷信昭: "運動媒質中におけるアンテナ・アレイの放射特性",信学誌,49, 1509~1515 (昭41-08)。
- (3) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動媒質を含む導波管の伝搬および 励振特性",信学誌(投書), 50, pp. 920~921(昭42-05)。
- (4) 藤岡 弘, 吉田健一, 熊谷信昭: "軸方向に運動する媒質を含む導波管のモード励振", 信学誌, 50, pp. 1227 ~ 1230 (昭42 07).
- (5) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における電磁放射理論", 信学誌, **50**, *pp*. 1906~1910 (昭42-10)。
- (6) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における Poynting 定理",信学誌(投書),50, pp. 2374~2375 (昭42-12).
- (7) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動している導電性誘電体と平面電磁波との相互作用" 信学論(B)(研究速報), 51 -B, pp. 407~408(昭43-08)。
- (8) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 專電性運動媒質の境界面における電磁波の境界条件とエネルギー関係式", 信学論(B)(研究速報),52-B, pp. 103~104(昭44-02)。
- (9)藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭: "導電性運動媒質を含む導波管の厳密な取扱い",信学論(B),52-B,pp.130~135(昭44-03)。
- (10) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用", 信学論(B), 52-B, pp. 359~366(昭44-07)。
- (11) 藤岡 弘, 熊谷信昭: " 導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析",信 学論(B), 52-B, pp, 429~433 (昭44-08)。
- (12) 藤岡 弘, 小川英一: "異常分散領域における光波と運動媒質との相互作用",信学論(B),掲載予定。

(13) 藤岡 弘, 中川紀美雄: "運動している円柱状プラズマ中のダイポール による放射", 信学論(B), 投稿中。

## I. 外 国 雜 誌

- (1) H. Fujioka, K. Yoshida, and N. Kumagai: "Transmission—line treatment of waveguides filled with a moving medium", IEEE Trans., MTT-15, pp. 265-267 (Apr. 1967).
- (2) H. Fujioka and N. Kumagai: "Electromagnetic radiation in a moving lossy medium", Radio Sci., 2 (New Series), pp. 1449-1458 (Dec. 1967).
- (3) H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai: "Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conduct-ing dielectric half-space", J. Appl. Phys.

  (Communications), 39, pp. 2161-2162 (Mar. 1968).
- (4) H. Fujioka, F. Nihei, and N. Kumagai: "Interaction of plane electromagnetic waves with a moving compressible plasma fluid", Can. J. Phys., 47, pp. 375-387 (Feb. 15, 1969).

## Ⅲ. 電子通信学会全国大会·電気四学会連合大会

- (1) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動媒質を含む導液管の諸特性", 昭 41 信学全大, No. 299 (昭 41 11).
- (2) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における電磁放射理論", 昭41 信学全大, No. 301 (昭41-11)。

- (3) 藤岡 弘, 森 道直, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における双極 子放射", 昭 42 連大。No. 1278 (昭 42 - 04)。
- (4)藤岡 弘,熊谷信昭: "損失のある運動媒質中におけるPoynting定理",昭42信学全大,No. 360(昭42-10)。
- (5) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用", 昭 42 信学全大, No, 363 (昭 42 10)。
- (6) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "導電性運動媒質中の平面波と波動増幅現象", 昭 43 信学全大。No. S 6 - 2 (昭 43 - 10)。
- (7) 藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭: "運動している円柱状プラスマ中のダイポールからの放射(I)",昭43信学全大,No. S6-4(昭43-10)。
- (8) 藤岡 弘: "相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界 面における全反射現象",昭44連大,No. 1351 (昭44 - 03).
- (9) 藤岡 弘, 中川紀美雄: "運動している円柱状プラズマ中のダイポールからの放射(II)", 昭 44 連大, No. 1357 (昭 44 03 )。

# IV. 電子通信学会アンテナ・伝播研究会

- (1) 藤岡 弘,塩沢俊之,熊谷信昭:"運動電気双極子からの相対論的電磁放射",信学会アンテナ研資(1965-12)。
- (2) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "運動媒質中における放射指向性合成の理",信 学会アンテナ研資(1966-03)。
- (3) 藤岡 弘, 吉田健一, 熊谷信昭: "運動媒質を含む導波管の回路理論的取り扱い", 信学会アンテナ・伝播研資(1966-06)。
- (4) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における電磁放射理論", 信学会アンテナ・伝播研資(1966 - 10)。
- (5) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動媒質を含む導波管の伝搬および

- 励振特性",信学会アンテナ・伝播研資(1966-12)。
- (6) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中におけるアンテナ放射"; 信学会アンテナ・伝播研資, A・P 67-10 (1967-06)。
- (7) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用(I)", 信学会アンテナ・伝播研資, A・P67-49 (1967-12)。
- (8) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "圧縮性運動電磁流体の境界面における電磁波と電磁流体波との相互作用(II)", 信学会アンテナ・伝播研資 A・P 67 - 60 (1968 - 03)。
- (9) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "導電性運動媒質の境界面における境界条件とエネルギー関係式", 信学会アンテナ・伝播研資A・P67ー59(1968-03)。
- (10) 藤岡 弘、中川紀美雄、熊谷信昭: "導電性運動媒質を含む導波管の理論(厳密解)",信学会アンテナ・伝播研資A・P68-32(1968-08)。
- (11) 藤岡 弘: "導電性運動媒質中の電磁界の厳密な解析",信学会アンテナ・伝播研資A・P68-54(1969-01)。
- (12) 藤岡 弘,中川紀美雄: "運動している円柱状プラズマ中のダイポールによる表面波と放射波について",信学会アンテナ・伝播研資A・P 69-10 (1969-06)。

## V. 輻射科学研究会資料

- (1) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "運動媒質中における放射指向性合成の理", 輻研資(1966-02)。
- (2) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "運動媒質を含む 導波管の理論", 輻研 資(1966-12)。
- (3) 藤岡 弘, 熊谷信昭: "損失のある運動媒質中における放射電磁界の性

質",輻研資(1966-12)。

- (4) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: "圧縮性運動プラズマ流体と平面電磁波との相互作用", 輻研資(1967-10)。
- (5) 藤岡 弘, 二瓶文博, 熊谷信昭: " 導電性運動媒質の境界面における境界条件とエネルギー関係式", 輻研資(1968-02)。
- (6) 藤岡 弘,中川紀美雄,熊谷信昭: "損失のある運動媒質を含む導波管の理論(厳密解)",輻研資(1968-04)。
- (7) 藤岡 弘,熊谷信昭:"導電性運動媒質中の電磁界と波動増幅現象", 輻研資(1968-07)。
- (8) 藤岡 弘, 中川 紀美雄: " 違勁している円柱状プラズマ中のダイポール による表面波の励振", 輻研資(1968 - 11)。
- (9) 藤岡 弘,小川英一: "相対的に運動している完全誘電体と導電性誘電体との境界面における平面電磁波の反射と透過", 輻研資(1969-04)。
- (10) 藤岡 弘,小川英一: "異常分散領域における光波と媒質との相互作用", 輻研資(1969-06)。
- (11) 藤岡 弘, 小川英一: " 導電性媒質の境界面における平面電磁波の反射 と透過", 幅研資(1969 11)。
- (12) 藤岡 弘,小川英一: " 導電性運動媒質中の増幅波の励振",幅研資 (1969-11)。