OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	斷層撮影法に關する研究(理論の解析幾何學的研究)
Author(s)	赤星, 一郎
Citation	日本医学放射線学会雑誌. 1955, 15(6), p. 408-430
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/16351
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

斷層撮影法に關する研究（理論の解析幾何學的研究）

國立療養所福岡厚生園
赤星一郎

（昭和30年4月14日受付）

目次

まえがき
Ⅰ．斷層撮影法の條件
Ⅱ．條件の解析幾何學的檢討
Ⅲ．フイルム面と像 1.
Ⅳ．フイルム面と像 2.
Ⅴ．像のぼけ
Ⅵ．集點の固定の狂い
Ⅶ．集點の半影
むすび

まえがき

Tomographie, Planigraphie, Röutgenschuitt, Stratigraphie, Röntgenschnittaufnahme, 深部レ線撮影法，斷面撮影法，斷層撮影法，横斷々層撮影法，實體撮影法などいろいろにいわれ，機構もそれぞれ變つているが，また一方には共通性もある一群の撮影法がある．

普通のレ寫眞では立體的な被寫體が平面のフイルムに投影され，像は重つて撮影されているが，はじめに名をあげたような一群の撮影法では，被寫體中の一部分の像はフイルムに明瞭に撮影されるが，その他の部分の像はそのときのフイルムではぼけて明瞭な像を結ばなくなつている．

すなわち，これら一群の撮影法では撮影された像は各部分の重疊像ではなく，斷面といわれる部分の像だけが撮影されているのである．

また，立體的な感光乳劑を用いると，その感光乳劑に對應する被寫體中の立體的な部分の像だけが明瞭な像として撮影されるだけで他はすべてぼかし去られてしまう．

しかし實際に斷層撮影に用いられているのは平面のフイルムであるから，それに撮影されるのは斷面と呼ばれる被寫體中の1平面である．

嚴密にいえば斷面以外の部分は大なり小なりその像がぼけることになる．しかし，われわれがレ寫眞を判讀するときには，非常に小さなぼけは，ぼけとしては感じないで明瞭に像を結んでいるものとして觀察している．したがつて，ぼけの小さい斷面に近い點の像は明瞭な像として觀察されるので，1枚のフイルムであつてもそこに明瞭な像として感じられるような像が撮影されるのは，斷面だけでなく斷面を中心にした斷面に近い點の集りである1つの層になつてくるわけである．

斷面の像にしても焦點の半影によるぼけが大なり小なり必ず伴つており，われわれはレ線寫眞の判讀の際，眼前にみるぼけが何を意味するか，判斷しなければならないのである．

半影によるぼけが大きいと，斷面の像でもそれによるぼけが大きくなるわけであるから，われわれは眼前にみる像のぼけを，その像が斷面の像であることが他の方から確めることが出來ておれば，その像がぼけていてもそれは被寫體がぼけた像をあたえるべき性質のものでなく，はつきりした境をもつものであると判斷するのである．そうするとその寫眞ではそのくらいのぼけははつきりした境をもつた被寫體構造だと判斷されることになる．斷面像における半影によるぼけと，斷面に近い點の像における半影によるぼけに斷層機構によるぼけの加つたものとの區別，いゝかえれば斷面から離れたゝめに加わるぼけの増し方が，斷面像における半影の大きさによつて認め難くなつたり，易くなつたりすることも考えられてくる．

この寫眞ではどうせぼけているんだからとして少々のぼけた像まで斷面の像だと判斷すれば斷層

の厚さは増した取扱いをうけることになり，寫眞像におけるぼけの絶對値からぼけを云々すれば半影によるぼけが大きくなると層はうすくなることになろう．

いずれにしても，斷層撮影の實際では平面のフイルムを用いて層の撮影が行われているのであるから，層撮影法とよぶべきであろうし，物體の内部の撮影であるからその意味をあらわす名がほしくもあり，すでに廣く用いられている斷層という呼び方もよいものと思う．たゞ斷層という言葉は古くから地質學で用いられているが，その概念とこの場合の概念とは異つてくる．けれど我が國で斷層撮影法という呼び方が最も普及しているので私もそれにしたがつておく．

しかし，こゝに論ずる範圍は單なる層の撮影だけでなく，立體的な感光乳劑による立體的な像の撮影まで含めて論じているのである．一般的な廣い意味には實體撮影法とでも呼んだ方がよいのだけれど，一應斷層撮影法という言葉を用い，意味は一般的に廣く含ませて用いている．

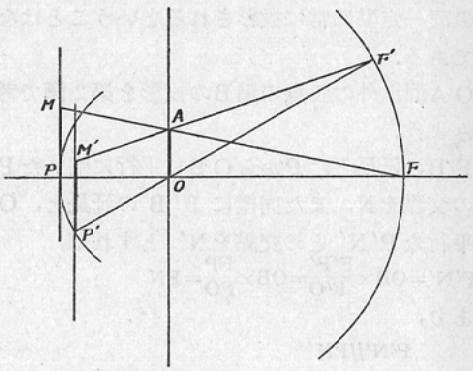
斷層撮影像は重疊像ではないといつたが，嚴密にいえば重疊像である．物質透過力の強いレ線の透過したものでの撮影であるから重疊像であることは必然のことである．たゞ，概觀撮影などに比べると斷層撮影はある層の像を明瞭に撮影し，他の部の像はぼかし去つてしまつてフイルムに像をあらわしてこないから，そういう意味では重疊像でないといつてもよいと思う．しかし，いくらぼかし去られて像はみとめられないといつても，やはりそれはそれで，ぼかしさられながらも斷面の像に重疊しているのであることをよく念頭においていないと斷層撮影像の判讀に誤りを來すことがあるのである．

レ物理學や，寫眞學など，レ寫眞判讀に必要な知識の他に，斷層撮影像の判讀には斷層撮影法の理論に關する幾何學的な知識が必要である．

被寫體の内部構造の空間的な位置關係と斷層撮影機構との組合せからどんな像が得らるべきか，また斷層撮影像にもとづいて被寫體の内部構造をどの程度知り得るか，あるいはその可能性なりと豫想することがどれだけ確かにできるか，などという問題を解くためには，斷層撮影法の理論によくなれており，それを使いこなすことが必要で，日常斷層撮影像の判讀を理論的に處理する癖をつけておくことが重要なことである．

この論文は斷層撮影の條件及び，基礎的一般事項について解析幾何學的に解明したものである．すなわち斷層撮影が行われるための條件について吟味し，斷層撮影の概念を整理し，斷層撮影の基礎的一般的な理論を解析幾何學的に解明し，斷層撮影判讀に必要だと思われる事項について基本になるべき式を求めたものである．

第 1 圖



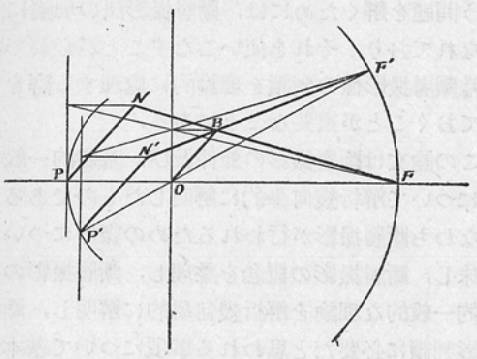
I．斷層撮影法の條件

Tomographie の原理は第1圖のようになる．焦點をF，フイルムの中心をP，定點をOとし，FOPは一直線上にあり，FOとFPの長さは一定である．Oを中心にFOPは振り子運動をするが，そのときフイルム面PMは定面OAに常に平行に保たれるようになつている．

このような機構で焦點Fその他が振り子運動をしながらレ線を放射して撮影すると，被寫體でOA面に相當する部分の像だけがフイルム面PMに明瞭に撮影されて，OA面以外の點の像はこのフイルムではぼけてしまうのである．

OA面の任意の點AがFによつてフイルム面PMに投影される點をMとし，焦點の任意の位置をF′，そのときのフイルムの中心の位置をP′，そのときのフイルム面をP′M′とする．AがF′によつてP′M′に投影される點をM′とすれば，M

第 2 圖



とM′ はフイルム面上での同一定點であることは證明容易である．またOA面以外の點がフイルム面の同一定點に常に投影されるということはないのである．

OA面以外の任意の點Bの投影を第2圖で考えてみよう．

FBの延長と，PからOBに平行に引いたPNとの交點をN，また同樣にF′B の延長と，OBに平行なP′N′ との交點をN′ とすれば，

$$P'N'=OB\times\frac{F'P'}{F'O}=OB\times\frac{FP}{FO}=PN$$

であり，

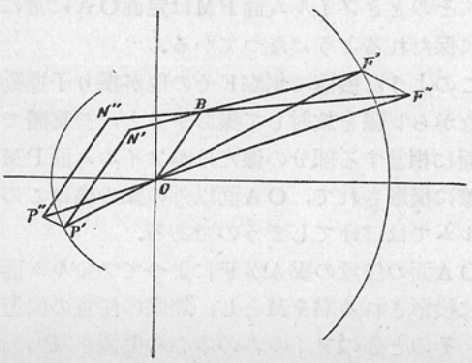
$$P'N'//PN$$

である．

すなわち，NとN′ はフイルムの中心PからOBと平行な方向に

$$OB\times\frac{FP}{FO}$$

第 3 圖



の距離にある點である．これはフイルム面に對する一定點である．

つまりOA面以外の任意の點Bも常にこのようなフイルムに對する定點に投影されるのである．

いまゝでFOの長さ一定のときを考えてきたわけであるが，第2圖のF′ にあるべき焦點が第3圖のF″ のような任意の位置にあるときにはどうなるだろうか．こうなればF″B の延長がいつもN′ を通るというわけにはいかない．

さて，F″O の延長と，P′ から F′F″ に平行に引いたP′P″との交點をP″，またF″B の延長とOBに平行な P″N″ との交點をN″ とすれば，

$$P''N''=OB\times\frac{F''P''}{F''O}=OB\times\frac{F'P'}{F'O}P'N'$$

であり，

$$P''N''//P'N'$$

である．

それで焦點が任意の位置，すなわち第3圖のF のような位置にあつても，そのときフイルムの中心PがP″ の位置に來ておれば，任意の點Bはいつもフイルムに對する一定點，その位置はN，N′N″，と變るとしてもその定點に投影されるのである．これはまたP點に對して一定の位置にある定點ともいえるわけである．

つまり，Pが占めるそのときの位置から，OBの方向に，一定の

$$OB\times\frac{FP}{FO}$$

なる距離にある定點である．

すでに明かにしたように焦點や，フイルムの運動は必ずしも振り子式の運動でなくても斷層撮影はできるのである．それは第3圖で察せられるように，焦點F，フイルムの中心P，點Oなどは，

$$FP:FO$$

の比が變らないような運動で，F,O,P が常に一直線上にあるような運動である．

第1圖から第3圖にかけて考えて來たことは，振り子運動式斷層影影法の原理から出發して，振り子運動の形にはまらない運動をしたときの投影關係から斷層撮影のことをみてきたわけである．この邊に斷層撮影の概念なり，條件なりをまとめるのに必要なものがあるように思うのである．

焦點，被寫體，感光乳劑の適當な相對運動によ

つて，感光乳劑の1點にのみ被寫體中の對應した點の像が結び，被寫體のある1點は感光乳劑中の對應した點にのみ像を結ぶような撮影法を斷層撮影法だとすれば，その適當な相對運動とはどんな形のものであればよいのか．

第1圖に示した振り子運動式のものもその1つであり，その他に直線運動式やら，横斷々層撮影のような廻轉式のものも實用になつており，それらもそれぞれその1つである．しかし，第3圖によつて論じたように，F,O,P が一直線上にあり，FP：FOの比が常に一定の値であるという條件が守られる運動であれば，任意の點Bがどのように投影され，あるいはどんな像を結ぶかということは，振り子運動式，直線運動式，横斷々層式の場合と同樣に本質的には變らないのである．實用の斷層撮影裝置に採用されている方式は，斷層撮影そのものに必要な，そして充分な條件の他に，さらに實用上のいろいろな制約，あるいは利便のためにつけ加えられた條件をとり入れているのである．

第1圖による説明で，フイルム面PMが定面OAに常に平行であるという表現を用いたが，もつと普遍化した云い方をすれば，感光乳劑と被寫體とがお互に向きを變えない，つまり相對的には自轉的な運動をしないということである．感光乳劑と被寫體との位置關係は遠くなつたり，近くなつたり，また一方が他方を中心とする公轉的な運動は斷層撮影である以上必要である．お互に向きを變えるような自轉運動をしないということである．

感光乳劑が平面であるフイルムであれば平行だというような表現が簡單で意を盡してよいのだけれど，すでに實驗的には立體的な擴がりをもつ感光乳劑の塊に，立體的な像を撮影することが行われてもおり，そのような場合まで含んでの表現には面でない場合を考えて，平行というより，感光乳劑と，被寫體とがお互に自轉運動をしないという方が一般的になると思うのである．

また，フイルムの中心Pとか，定點Oとかいつて來たが，一般的にはつぎのように了解すべきものである．

Pはフイルムの中心でなくても，端の方でもよいし，またフイルムから離れた點でも一向に構わないのである．要はPがフイルムに對して定位置を保つていればよいのである．Pとフイルムが相對的な運動さえしなければ，それら自體はどんな運動をしてもよいのである．いゝかえればフイルムに固定した座標系でPは運動をしないということである．フイルムでなく立體的な感光乳劑の塊を考える場合でも同樣である．

Oと被寫體との關係も，全くPと感光乳劑との關係と同樣に考えらるべきである．斷層撮影において被寫體中のある任意の點が像を結ぶところは感光乳劑中の一定點であり，その2點が焦點からの一直線上にあることはいうまでもない．またそれらの點への焦點からの距離の此が一定であることもみてきたのである．それでそれぞれ，それらの點の集り，あるいは軌跡と考えられる被寫體の構造と，感光乳劑に撮影されるその像とが相似形であり，その大きさの比は焦點よりの距離の比に等しいこともまた説明の要もない容易に了解できることである．

以上斷層撮影について考えてきたが，斷層撮影の條件たるべきものをまとめてみると，

(1) 焦點F，被寫體に對するある定點O，感光乳劑に對するある定點Pの3點が常に一直線上にあること．

(2) FPとFOとの比が一定であること．

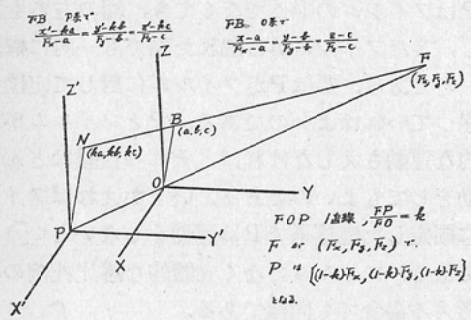
(3) 被寫體と感光乳劑とが相對的に自轉運動をしないこと．

(4) そして焦點からレ線を放射して撮影する間に，焦點，被寫體，感光乳劑の充分な相對運動が行われること．

との4つの條件になる．

條件（2）にいうFP：FOの比の値をどれだけにするか，（4）の相對運動の形と範圍をどの程度にするか，などによつて，また感光乳劑の形や大きさによつて，いろいろな目的に應じた斷層撮影の方式がわかれており，その特徴もでてくるわけである．

第 4 圖



II. 條件の解析幾何學的檢討

被寫體に對するある定點Oを原點とする直交3軸座標系の3軸をX,Y,Z 軸とする．この座標系をO系と呼ぶことにする．焦點の座標を Fx, Fy, Fz とすれば，焦點は，

$$F\,(Fx, Fy, Fz)$$

であらわされる．

また感光乳劑に對するある定點Pが斷層撮影の條件にいう，F, O, P が一直線上にあり，

$$EP:FO=k:1$$

たゞし，kは常數，

という條件にしたがうものとすれば，Pは

$$P\,[(1-k)\,Fx, (1-k)\,Fy, (1-k)\,Fz)$$

であらわされる．第4圖參照．

このP點を原點とする直交3軸座標系の3軸をX′, Y′, Z′ 軸とし，これらがO系のX,Y,Z 軸とそれぞれ平行になるようにする．この座標系をP系と呼ぶことにする．

被寫體及び感光乳劑はそれぞれO系及びP系の中では運動をしないものである．

さて，O系で任意の點B (a, b, c) を焦點の位置Fと結ぶ直線は，

$$\frac{x-a}{Fx-a}=\frac{y-b}{Fy-b}=\frac{z-c}{Fz-C} \qquad (1)$$

であり，これに

$$X=x'+(1-k)\,Fx$$
$$y=y'+(1-k)\,Fy$$
$$z=z'+(1-k)\,Fz$$

を代入して，P系に座標轉換すると，

$$\frac{x'-ka}{Fx-a}=\frac{y'-kb}{Fy-b}=\frac{z'-kc}{Fz-C} \qquad (2)$$

となる．

（2）式は

$$x'=ka,\ y'=kb,\ z'=kc$$

によって，Fx, Fy, Fz の値如何にかゝわらず滿足させられることは明かであつて，つまりFの位置如何にかゝわらず（2）式であらわされる直線はP系における點，

$$(ka, kb, kc)$$

を通ることを示しているのである．この點をNとする．いゝかえれば焦點が運動して位置を變えても，任意の點B(a, b, c)はP系の點，N (ka, kb, kc) に必ず投影されるということである．

前章で考をすゝめて來た，斷層撮影の條件があれば，O系でのB (a,b,c,) 點が焦點によつて常にP系でのN (ka, kb, kc) 點に投影される，すなわちそのN點に感光乳劑をおけばB點の像が撮影されることを解析幾何學的に說明したわけである．

さてこの點がP點などとどんな關係にあるかつぎに檢討する．

$$\overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

であり，また同樣に

$$\overline{PN}=\sqrt{(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2}$$
$$=k\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=k\overline{OB}$$
$$=\frac{\overline{FP}}{\overline{FO}}\times\overline{OB}$$

となるから第1圖から第3圖までによつてみてきたP點から

$$OB\times\frac{FP}{FO}$$

の距離にあるということに一致するわけである．

またOBの方向餘弦は，

$$l_B=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$m_B=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$n_B=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であり，PNの方向餘弦は，

$$l_N=\frac{ka}{\sqrt{(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$m_N=\frac{kb}{\sqrt{(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$n_N=\frac{kc}{\sqrt{(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2}}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であつて，

$$l_B=l_N,\ m_B=m_N,\ n_B=n_N$$

となり，しかもO系，P系はそれぞれ3軸が平行であるから，

$$PN//OB$$

であることが分るのである．

つまり，N點はP點からOBの方向に，

$$OB\times\frac{FP}{FO}$$

の距離にある點ということが解析幾何學的にも證明できたわけである．

B (a, b, c) 點が常に投影される點はP系のN (ka, kb, kc) 以外にはないのであろうか．

いま1つそのような點があると假定してその點を

$$N'[(ka+\Delta a),\ (kb+\Delta b),\ (kc+\Delta c)]$$

とすると，假定によつて（2）式は，Fx, Fy, Fz の値如何にかゝわらず，

$$x'=ka+\Delta a,$$
$$y'=kb+\Delta b,$$
$$z'=kc+\Delta c,$$

によつて成立しなければならない．つまり，

$$\frac{\Delta a}{Fx-a}=\frac{\Delta b}{Fy-b}=\frac{\Delta c}{Fz-c}$$

が Fx,Fy,Fz の値如何にかゝわらず成立しなければならないことになり，それは

$$\Delta a=\Delta b=\Delta c=o$$

以外にはないのである．

結局，N以外にB點が常に投影される點はないということを示しているわけである．

逆に常にN點に投影されるような點はB點以外にはないものであろうか．

B (a,b,c) 點以外にもう1つ，

$$B'[(a+\Delta a),\ (b+\Delta b),\ (c+\Delta c)]$$

も常に，

N (ka, kb, kc) 點に投影されるものと假定すれば，

FB′ 直線の式，すなわちO系では

$$\frac{x-(a+\Delta a)}{Fx-(a+\Delta a)}=\frac{y-(b+\Delta b)}{Fy-(b+\Delta b)}=\frac{z-(c+\Delta c)}{Fz-(c+\Delta c)}$$

P系では

$$\frac{x'-k(a+\Delta a)}{Fx-(a+\Delta a)}=\frac{y'-k(b+\Delta b)}{Fy-(b+\Delta b)}=\frac{z'-(c+\Delta c)}{Fz-(c+\Delta c)}$$

としてあらわされる後者の方が，Fx,Fy,Fz の値如何にかゝわらず，

$$x'=ka,\ y'=kb,\ z'=kc$$

で滿足させられなければならない．つまり，

$$\frac{\Delta a}{Fx-(a+\Delta a)}=\frac{\Delta b}{Fy-(b+\Delta b)}=\frac{\Delta c}{Fz-(c+\Delta c)}$$

が Fx, Fy, Fz の値如何にかゝわらず成立しなければならないことになるが，それは

$$\Delta a=\Delta b=\Delta c=o$$

以外には成立しないのである．

結局，N點に常に投影されるような點はB (a, b, c) 點のみで，その他にはないのである．

以上をまとめてみると，被寫體中のある點，一般的に云えばO系の1點は，感光乳劑中のある1點，一般的にいえばP系のある1點にのみ像を結び，感光乳劑中のある點には被寫體中のある1點の像のみ結ぶということが，斷層撮影の條件から解析幾何學的にみちびかれたのである．

感光乳劑をP系に固定しておけば，その感光乳劑のある點には，その點の座標の $1/k$ の値をそれぞれのO系における座標とするような位置にある被寫體の1點の像が撮影されるのである．逆に云えばO系に固定された被寫體の1點の座標のk倍の値をそれぞれのP系の座標としてもつP系の1點に感光乳劑をおけば，そこにはじめの點の像が撮影されるのである．

したがつて，被寫體中の撮影しようと思う部分の各點がそれぞれ像を結ぶ點の軌跡は，撮影しようと思う部分と相似形になるわけであり，それと同じ形の感光乳劑をその位置におけば撮影しようと思つた部分の像を得ることができるわけである．

また逆にP系に感光乳劑が固定されて占めている位置から，それに撮影されるべきO系の位置はきまつてくるので，その位置に撮影しようと思う被寫體の部分を固定すれば目的を達するわけである．

III. フイルム面と像．その 1

實際の斷層撮影では平面狀のフイルムを使用し

ているので，そのフイルム面が

$$\alpha x'+\beta y'+\gamma z'+\sigma=0 \qquad (3)$$

面に固定されていると，これにB (a, b, c) 點が投影される點はFB直線とこの面の交點，すなわち（2）式とこの（3）式との共通根であらわされる．

その根は，

$$x'=ka-(k\alpha a+k\beta b+k\gamma c+\sigma)\cdot\frac{Fx-a}{\alpha(Fx-a)+\beta(Fy-b)+\gamma(Fz-c)}$$

$$y'=kb-(k\alpha a+k\beta b+k\gamma c+\sigma)\cdot\frac{Fy-b}{\alpha(Fx-a)+\beta(Fy-b)+\gamma(Fz-c)}$$

$$z'=kc-(k\alpha a+k\beta b+k\gamma c+\sigma)\cdot\frac{Fz-c}{\alpha(Fx-a)+\beta(Fy-b)+\gamma(Fz-c)}$$

である．その値を座標とするのか交點であり，それをNとする．

焦點は動くのであり，したがつてその座標のFx, Fy, Fz は變數であつて，それを含むこれらの座標も一般的には變數である．

この座標中變數を含む項の値を0にするような，a, b, c の値を座標とする點の像はその投影される點の座標が變數の項が0で，したがつて常數になるわけであり，フイルム面上の1つの定點になるわけである．つまりその點はフイルム上の一定點にのみ投影されるので像がぼけないことになる．

さてNの座標をみると，變數の項にはみな，

$$(k\alpha a+k\beta b+k\gamma c+\sigma)$$

が乘じてある形になつているので，これがOになるようなa, b, c であればNの座標は

$$x'=ka$$
$$y'=kb$$
$$z'=kc$$

となつてNは一定點になる．

すなわち，

$$k\alpha a+k\beta b+k\gamma c+\sigma=0$$

ならしめるようなa, b, c を座標とする點の像はぼけないのである．さてそのようなa,b,c の値を座標とする點はまた

$$k\alpha x+k\beta y+k\gamma z+\sigma=0 \qquad (4)$$

なる平面上にある點である．何となればそんな，a,b,c は（4）式を滿足させる x, y, z の値であるから．

逆に（4）式の根である x, y. z の値をそれぞれa, b, c の値とすれば，それは（3）式であらわされるフイルム面上の一定點にのみ投影される1點B (a, b, c) の座標になるわけであり，像はぼけないのである．つまり，（4）式であらわす面が，（3）式であらわす面にフイルムを固定した場合の斷面になるわけである．

いまこの式よりフイルム面と斷面と，そのフイルム面でのB (a, b, c) 點の投影される點の座標を2・3のフイルム面の例について表示すると第1表のようになる．

IV. フイルム面と像．その 2

實用の斷層撮影裝置は，振り子運動式，直線運動式，横斷々層式の3方式にまとめることができる．管球を動かしたり，患者を動かしたりすることは裝置製作上あるいは實際診療上からいうと大きな影響をあたえる因子ではあるが，斷層撮影の理論上では，管球，被寫體，感光乳劑の相對運動のみが問題となるのにすぎない．もつとも患者の身體の動搖や，管球を動かす裝置のガタなどがあれば，斷層撮影そのものにも影響があることは勿論である．

いずれにしろ實用的なものはすべて3方式のどれかになるわけであるから，この3つの方式について，具體的に座標軸の定め方，フイルム面その他の式などの表わし方を5乃至7圖のようにしたら實際應用上便利であろうと考えたわけである．

つぎにそれら各方式について2・3檢討を加えることにする．

（1） 振り子運動式

振り子運動の中心をO點に，焦點の振り子運動の面をXY面に，フイルム面の中心をP點に，フイルム面は常にY′Z′ 面にあるようにする．そして焦點はX軸を中心に振り子運動をすることにする．

FOをR, OPをr，とし，X軸とFOとのなす角をθとする．このθは變數である．第5圖參照．

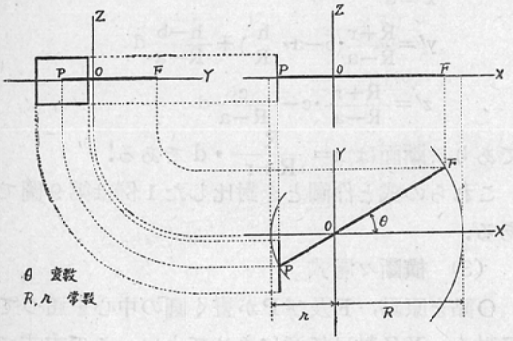
すると，

第1表　O 系でのB(a,b,c)點の各フイルム面における投影點

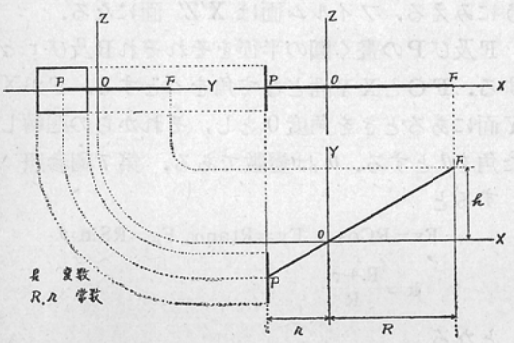
フイルム面	斷面	フイルム面上B點の投影點の座標		
P系	O系	x′ 座標	y′ 座標	z′ 座標
$x'=o$	$x=o$	o	$kb-ka\frac{Fy-b}{Fx-a}$	$kc-ka\frac{Fz-c}{Fx-a}$
$y'=o$	$y=o$	$ka-kb\frac{Fx-a}{Fy-b}$	o	$kc-kb\frac{Fz-c}{Fy-b}$
$z'=o$	$z=o$	$ka-kc\frac{Fx-a}{Fz-c}$	$kb-kc\frac{Fy-b}{Fz-c}$	o
$x'=d$	$x=\frac{d}{k}$	d	$kb-(ka-d)\frac{Fy-b}{Fx-a}$	$kc-(ka-b)\frac{Fz-c}{Fx-a}$
$y'=d$	$y=\frac{d}{k}$	$ka-(kb-d)\frac{Fx-a}{Fy-b}$	d	$kc-(kb-d)\frac{Fz-c}{Fy-b}$
$z'=d$	$x=\frac{d}{k}$	$ka-(kc-d)\frac{Fx-a}{Fz-C}$	$kb-(kc-d)\frac{Fy-b}{Fz-c}$	d
$y'=x'$	$y=x$	$ka-\frac{k(a-b)(Fx-a)}{(Fx-a)-(Fy-b)}$	$kb-\frac{k(a-b)(Fy-b)}{(Fx-a)-(Fy-b)}$	$kc-\frac{k(a-b)(Fz-c)}{(Fx-a)-(Fy-b)}$

ただし，焦點は o 系でF(Fx, Fy, Fz)であり，FP: FO=k: 1 である．

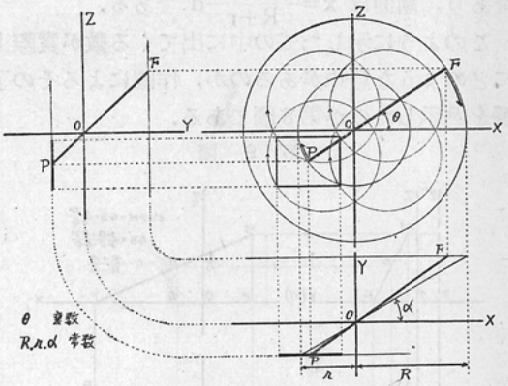
第 5 圖



第 6 圖



第 7 圖



$$Fx=R\cos\theta,\ Fy=R\sin\theta,\ Fz=o$$

$$k=\frac{R+r}{R}$$

となる．

$x'=0$ なるフイルム面のとき，

Nは

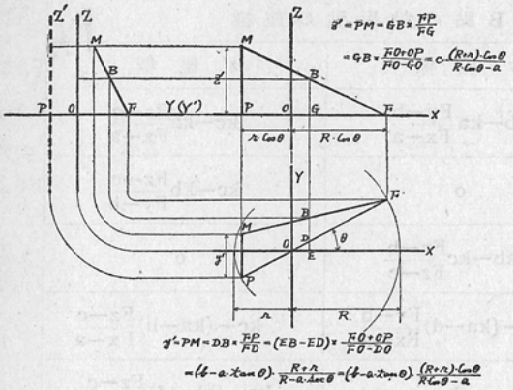
$$x'=o$$

$$y'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}(b-a\tan\theta)$$

$$z'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}\cdot c$$

である．斷面は $x=0$ なることもちろんである．

第 8 圖



$x'=d$ なるフイルム面のとき，

Nは

$x'=d.$

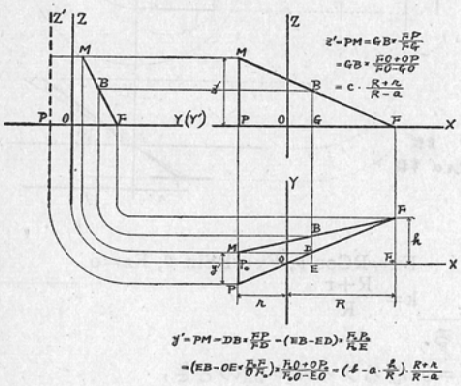
$$y'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}(b-a\tan\theta)+\frac{R.r-\theta-b}{R\cos\theta-a}d$$

$$z'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}\cdot c-\frac{c.}{R\cos\theta-a}\cdot d$$

であり，斷面は $x=\frac{R}{R+r}d$ である．

このように示した式の中に出てくる數が實際上にどのような意味があるのか，作圖によるその了解を例示したのが第8圖である．

第 9 圖



(2) 直線運動式

普通F'OPが1本の軸になつており，O點で支えられているようになつている．そのO點を原點に，Fの運動面をXY面に，Y軸はFの運動する直線と平行に，フイルム面の中心をPに，フイルム面は普通Y'Z'面になる．そして焦點はX軸を中心にその兩側にわたつて運動する．

焦點が運動する直線とY軸との距離をR，同樣にP點の運動する直線とY軸との距離をrとする．そして焦點のy座標をhとする．このhは變數である．第6圖參照．

すると

$$Fx=R,Fy=h,Fz=o$$

$$k=\frac{R+r}{R}$$

となる．

$x'=0$ なるフイルム面のとき，

Nは

$x'=o$

$$y'=\frac{R+r}{R-a}\left(b-a\cdot\frac{h}{R}\right)$$

$$z'=\frac{R+r}{R-a}\cdot c$$

であり，斷面はもちろん $x=0$ となる．

$x'=d$ なるフイルム面のとき，

Nは

$x'=d$

$$y'=\frac{R+r}{R-a}\left(b-a\cdot\frac{h}{R}\right)+\frac{h-b}{R-a}d$$

$$z'=\frac{R+r}{R-a}\cdot c-\frac{c}{R-a}d$$

であり，斷面は $x=\frac{R}{R+r}\cdot d$ である．

これらの式と作圖とを對比した1例は第9圖である．

(3) 橫斷々層式

O點を原點，F及びPが畫く圓の中心を通つてY軸を，XZ軸は任意にきめてよい．この方式ではFやPが一周以上に廻轉するのが普通になつているのでXZ軸のきめ方は特に指定の要もないようにみえる．フイルム面はX'Z'面になる．

F及びPの畫く圓の半徑をそれぞれR及びrとする．FOとXY面となす角をαとする．FがXY面にあるときを角度0とし，それからの廻轉した角をθとする．θは變數である．第7圖參照

すると

$$Fx=R\cos\theta,\ Fy=R\tan\alpha,\ Fg=R\sin\theta$$

$$k=\frac{R+r}{R}$$

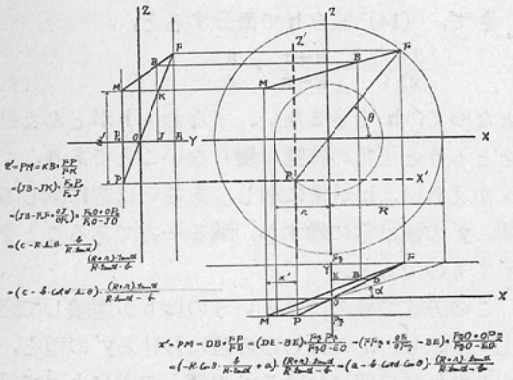
となる．

$y'=0$ なるフイルム面のとき，

Nは

$$x'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(a-b\cot\alpha\cos\theta)$$

第 10 圖



あり，斷面は $y'=0$ である．

$$y'=o$$

$$z'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(c-b\cot\alpha\sin\theta)$$

また $y'=d$ なるフイルム面でNは

$$x'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(a-b\cot\alpha\cos\theta)+\frac{R\cos\theta-a}{R\tan\alpha-b}d$$

$$y'=d$$

$$z'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(c-b\cot\alpha\sin\theta)-\frac{R\sin\theta-c}{R\tan\alpha-b}\cdot d$$

であり，斷面は $y=\frac{R}{R+r}\cdot d$ である．

これらの式と作圖との比較の1例は第10圖のとおりである．

V. 像のぼけ

斷層撮影法は斷層機構による目的部分以外の像のぼけ方と，目的部分の像のぼけ方乃至はぼけない點との差を利用する撮影法であるが，像のぼけの研究は結局，投影點の座標すなわちNの性質を檢討すればよいのである．

焦點の座標が變數であり，Nの中にその變數が含まれてくるので，焦點の座標の變化に應じてNの座標も變化をし，像はぼけることになる．この兩者の關係を吟味すれば像のぼけの性質を知ることができるわけである．

すでにⅣ章に示したように焦點の座標をある1つの變數，例えば角とか，長さの量の函數としてあらわしているので，像のぼけもそれらの1變數の函數として研究することが出來るわけである．

以上3方式について具體的に檢討を加えることにする．

(1) 振り子運動式

$$y'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}(b-a\tan\theta) \qquad (5)$$

$$z'=\frac{(R+r)\cos\theta}{R\cos\theta-a}c \qquad (6)$$

によつて示される曲線になるが，（5），（6）兩式より，

$$y'=\frac{b}{c}z'-\frac{a}{c}\tan\theta z' \qquad (7)$$

がみちびかれる．

この（7）式をみると，

$$y_1'=\frac{b}{c}z' \qquad (8)$$

なる直線と，

$$y_2'=-\frac{a}{c}\tan\theta z' \qquad (9)$$

なる曲線との合成曲線であることがわかる．

この後者の（9）式と（6）式より θ を消却すると，

$$-\frac{y_2'^2}{\frac{a^2.(R+r)^2}{R^2-a^2}}+\frac{\left[z'-\frac{R.c.(R+r)}{R^2-a^2}\right]^2}{\frac{a^2.c^2.(R+r)^2}{(R^2-a^2)^2}}=1 \qquad (10)$$

となり，これは双曲線の式である．つまり，この方式ではある點の投影は（5），（6）兩式，すなわち（7）式であらわされる，直線（8）式のものと，双曲線（9）あるいは（10）式のものとの合成曲線の上におちることになる．

さて，（5），（6）式を θ で微分すると，

$$\frac{dy'}{d\theta}=-\frac{R+r}{(R\cos\theta-a)^2}a(R-a\cos\theta-b\sin\theta)$$

$$\frac{dz'}{d\theta}=\frac{R+r}{(R\cos\theta-a)^2}ac\sin\theta \qquad (11)$$

となる．

Rは1,000 ㎜級，a,b は 100～ 200㎜であり，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ であるから，$\frac{dy'}{d\theta}$ は a と正負反對の符號であり，

$\frac{dz'}{d\theta}$ は $ac\sin\theta$ と同符號である．つまり，θ が正から負になれば符號が變るのである．したがつ

てθの變化に應じてy′は連續的に增するか，減るかするが，z′は$\theta=0$のところで增減の向きが變ることになる．しかしz′の方は增減の絶對量は僅少である．

いまθの變域を$-\phi\leqq\theta\leqq\phi$とすれば，$\theta$が$\phi$及び$-\phi$のときのy′の値の差の絶對値が像のぼけのY′軸方向の長さになるわけであり，そのy′の2つの値の差をDとすれば，

$$D=\frac{R+r}{R\cos\phi-a}(-2a)\sin\phi$$

であり，これをR, r, a, ϕでそれぞれ微分すると，

$$\frac{dD}{dR}=a\frac{2(r.\cos\phi+a)}{(R\cos\phi-a)^2}\sin\phi$$

$$\frac{dD}{dr}=-a\frac{2}{R\cos\phi-a}\sin\phi$$

$$\frac{dD}{da}=-\frac{2R\cos\phi}{(R\cos\phi-a)^2}\sin\phi$$

$$\frac{dD}{d\phi}=-a\frac{2(R+r)}{(R\cos\phi-a)^2}(R-a\cos\phi)$$

となる．

R, r, ϕはみな正であり，R,csϕ−a, r,Csϕ+aも正である．そしてDはaと符號が反對になる．

Rが大となり，r,ϕが小となれば，a<oでは，Dが減少するが，Dは正なので，|D|は小となる．逆にo<aではDは增加するが，負なので，|D|は小となる．

a<oでaがませばDは減り，正であるから|D|は小となり，o<aでaがませば，Dは減るが負なので|D|は大となる．いゝかえれば|a|がませば，つまりB點が斷面から離れると|D|すなわちぼけが大となることを示している．

この振り子運動式のぼけ方については宮地の研究がすでに發表されている．宮地の場合には作圖によつて式を求めている．詳細は原著を參照されたい．

Z′軸方向の像のうごきは，

$$D'=\frac{-ac(R+r)}{(R\cos\phi-a)(R-a)}(1-\cos\phi)$$

で示されるもので僅かなものである．

(2) 直線運動方式

$$y'=\frac{R+r}{R-a}\left(b-\frac{a}{R}h\right)\qquad(14)$$

$$z'=\frac{R+r}{R-a}c\qquad(15)$$

であらわされるが，これはz′の方に變數を含んでいないので，(15)式であらわされる直線に他ならない．

さて，(14)式をhで微分すると，

$$\frac{dy'}{dh}=-\frac{R+r}{R-a}\cdot\frac{a}{R}$$

となつて，hを含まない．すなわちhがどんな値をとろうと正負の符號は變らないことであり，いゝかえれば，hが常に增し，あるいは常に減じる間，y′の値は常に增すか，減る一方であることを示すものである．

この方式で像のぼけというのはhが連續して變化する限り，hのはじめの値におけるy′の値と，hのおわりの値におけるy′の値との差によつて示されるわけである．

いま，hがLから−Lまで變化するとして，L及び−Lのときのy′の値の差をDとすれば，ぼけの長さは|D|によつてあらわされることになる．すなわち，

$$D=2\cdot\frac{R+r}{R-a}\cdot\frac{a}{R}\cdot L\qquad(16)$$

である．こゝにLは正とする．

これをR,r,a, 及びLでそれぞれ微分すると，

$$\frac{dD}{dR}=-a\frac{2L}{R^2(R-a)^2}[R\{R+r)+r(R-a)]$$

$$\frac{dD}{dr}=a\frac{2L}{R(R-a)}$$

$$\frac{dD}{da}=\frac{2(R+r)L}{(R-a)^2}$$

$$\frac{dD}{dL}=a\frac{2(R+r)}{R(R-a)}$$

となる．

R, r, Lはみな正であり，R−aも正である．何となれば斷層撮影においてはaはRより小であるから，

すると，Dはaと正負等號であり，

$\frac{dD}{dR}$はaと反對の正負であり，

$\frac{dD}{dr}$と$\frac{dD}{dL}$はaと等號であり，

$\frac{dD}{da}$は常に正である．

このことからつぎのことがいえる．

Rがませば，a<o のときDは増すが D<0 であるから |D| は減る．a=o ではD=0 で |D| も0である．a<o のときDは減るが a<Dであるから |D| も減る．つまり a=o ではぼけがなく，a≒o のときは，Rがませばぼけは小となる．

r, やLが大となれば a<o では，Dが大となり，o<Dで，|D| も大となる．a=o ではD=0，|D| =o である．o<a ではDは小となり，D<a であるから |D| は大となる．つまり，a=o ではぼけがないが，a≒o では r, やLが大となればぼけは大となる．

a が大となればDは常に大となるが，a とDとは等號であるから，a が大となるとDが大となるということは |a| が大となると |D| が大となり，ぼけが大となるということである．

まとめてみると，Rが大となり，r, Lが小となるとぼけは小となり，Rが小となり，r, Lが大となるとぼけが大となる．また |a| が大となるとぼけが大となり，|a| が小となるとぼけが小となる．このあとの方はいゝかえると，斷面に近い點の像はぼけが小さいということである．

(15) 式であらわされるz′座標は變數を含まないのでぼけには關係なく，たゞ R, r, a 及びCの値によつて像が投影される位置が變ることを示している．

(3) 横斷々層式

$$z'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(c-bCot\alpha Sin\theta) \qquad (17)$$

$$x'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}(a-bCot\alpha Cos\theta) \qquad (18)$$

で示されるが，この2式から，

$$\left[z'-\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}\cdot c\right]^2+\left[x'-\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}\cdot a\right]^2=\left[\frac{R+r}{R\tan\alpha-b}b\right]^2 \qquad (19)$$

がみちびかれる．これは圓の式で，その中心は

$$z'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}\cdot c$$

$$x'=\frac{(R+r)\tan\alpha}{R\tan\alpha-b}\cdot b$$

で，半徑は $\left|\frac{R+r}{R\tan\alpha-b}\cdot b\right|$ となる．

(19) 式の圓の中心とNとを結ぶ直線の角係數は，

$$\tan\theta$$

となる．

このことは焦點がその軌道である圓周を廻轉してゆくのと同じ角速度で，投影點も (19) 式の圓周上を廻轉することを示しているわけである．

したがつて焦點が廻轉する角度が大きいほど，像のぼけも完圓に近ずいて大きくなるわけである．θ の變域を ϕ とすればぼけは，$\left|\frac{R+r}{R\tan\alpha-b}\cdot b\right|$ を半徑とする圓弧で，$\frac{\phi}{2\pi}$ 圓周のものになるわけである．

この方式におけるぼけの長さは

$$\frac{R+r}{R\tan\alpha-b}\cdot b\cdot\phi=D \qquad (20)$$

としたときの |D| になるわけである．

これが ϕ がませばまし，へれば小となることは當然であろう．

(20) 式を，R,r,α,b でそれぞれ微分すれば，

$$\frac{dD}{dR}=-b\frac{r\tan\alpha+b}{(R\tan\alpha-b)^2}\cdot\phi$$

$$\frac{dD}{dr}=b\frac{1}{R\tan\alpha-b}\cdot\phi$$

$$\frac{dD}{d\alpha}=-b\frac{R(R+r)Sec^2\alpha}{(R\tan\alpha-b)^2}\cdot\phi$$

$$\frac{dD}{db}=\frac{R(R+r)\tan\alpha}{(R\tan\alpha-b)^2}\cdot\phi$$

となる．R,r,α, ϕ はみな正である．また斷層撮影では Rtanα は bよりも大である．それで，D はb と等號であり，$\frac{dD}{dR}$, $\frac{dD}{d\alpha}$ はb と符號が反對で，$\frac{dD}{dr}$ は等號である．また $\frac{dD}{db}$ は常に正である．

結局，詳論は省略するが，R, α が大となり，r, が小となるときは，b<o でDは大となるが，D<0 であるから |D| は小となりぼけは小となる．Rα が小となり，r が大となればぼけは逆に大となる．b はo であればD=0，|D|=o で，R, r, α, の如何にかゝわらずぼけはなく，b≒o のときは |b| が大となればぼけは大となる．つまり斷面から離れた點ほど像がぼけることになる．

VI. 集點の固定の狙い

F (Fx, Fy, Fz) に固すべき焦點を狙つて

Ff〔Fx+Δx), (Fy+Δy), (Fz+Δz)〕

に固定すれば，B (a, b, c) 點は FfB 直線にそつて投影されるが，Ff B 直線は，O系で，

$$\frac{x-a}{Fx+\Delta x-a}=\frac{y-b}{Fy+\Delta y-b}=\frac{z-c}{Fz+\Delta z-c} \tag{21}$$

であり，P系では

$$\frac{x'-[ka+(1-k)\cdot\Delta x]}{Fx+\Delta x-a}=\frac{y'-[kb+(1-k)\cdot\Delta y]}{Fy+\Delta y-b}$$
$$=\frac{z'-[kc+(1-k)\Delta z]}{Fz+\Delta z-c} \tag{22}$$

となる．

フイルム面 $x'=0$ に投影されるB點の像は，

$$y'=kb+(1-k)\cdot\Delta y-\{ka+(1-k)\cdot\Delta x\}\cdot\frac{Fy+\Delta y-b}{Fx+\Delta x-a}$$

$$z'=kc+(1-k)\Delta z-\{ka+(1-k)\cdot\Delta x\}\cdot\frac{Fz+\Delta z-c}{Fx+\Delta x-a}$$

である．

B點が斷面といわれる x=o 面にあつて a=o のときでも，

$$y'=kb+(1-k)\cdot\left[\Delta y-\frac{Fy+\Delta y-b}{Fx+\Delta x}\cdot\Delta x\right] \tag{23}$$

$$z'=kc+(1-k)\cdot\left[\Delta z-\frac{Fz+z\Delta-c}{Fx+\Delta x}\cdot\Delta x\right] \tag{24}$$

であつて，なお Fx, Fy, Fz など變數が殘つているので像はぼけることになる．

フイルム面が $y'=o$ のようなときでも同樣な形の式で示すことができる．

實際斷層撮影裝置を製作し，また調整するときに焦點の固定を誤ることがあるわけであるが，そのずれの表わし方を第11乃至13圖のようにすれば實用上便利であろうかと考えた．以下この表わし方にしたがつて，そのずれと像のぼけとの關係をみることにする．

(1) 振り子運動式

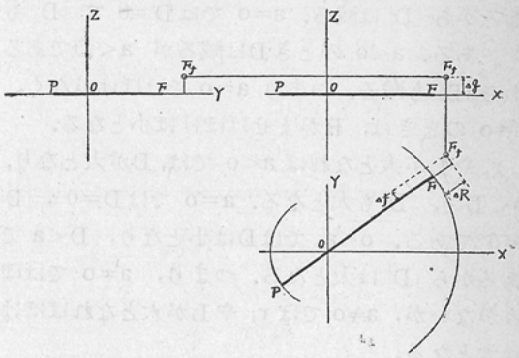
OFの方向に ΔR，OFの直線よりOからFに向つて左の方向，XY面と平行に Δf，XY面よりZ軸の方向に Δg ずれているとする．第11圖參照．

Ff の座標は，

$$[(R\cos\theta+\Delta R\cos\theta-\Delta f\sin\theta),\ (R\sin\theta+\Delta R\sin\theta+\Delta f\cos\theta),\ \Delta g]$$

となる．つまり

第 11 圖



$$\Delta x=\Delta R\cos\theta-\Delta f\sin\theta$$
$$\Delta y=\Delta R\sin\theta+\Delta f\cos\theta$$
$$\Delta z=\Delta g$$

になる．

すると斷面上のB (o,b,c) 點の像は，

$$y'=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot\frac{\Delta R-\Delta f\tan\theta}{(R+\Delta R)-\Delta f\tan\theta}\cdot b-\frac{r\Delta g\cdot\sec}{(R+\Delta R)-\Delta f\tan\theta} \tag{25}$$

$$z'=\frac{R+r}{R}c-\frac{r}{R}\cdot\frac{\Delta R-\Delta f\tan\theta}{(R+\Delta R)-\Delta f\tan\theta}\cdot c-\frac{r\Delta g}{(R+\Delta R)-\Delta f\tan\theta} \tag{26}$$

となる．

明かなように，變數 θ が含まれている．しかしよくみると，θ を含む項乃至數にはすべて Δf が乘じられた形になつているから，もし $\Delta f=o$ であれば，

$$y'=\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}\cdot b$$

$$z'=\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}\cdot c-\frac{r}{R+\Delta R}\cdot\Delta g$$

となつて，變數は含まれないので像はぼけないわけである．

たゞ，像の擴大率として $k=\frac{R+r}{R}$ が豫想されていたのに，ΔR のずれのために擴大率が

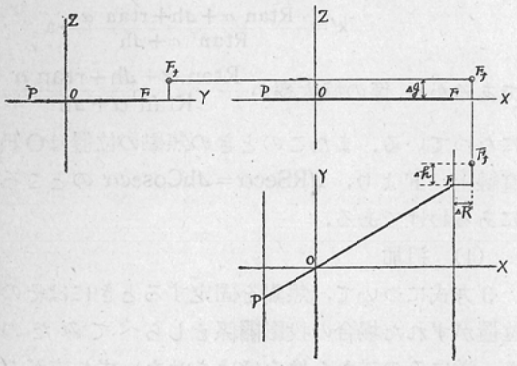
$$\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}$$

になり，また投影される位置は焦點が Δg ずれるために全體としてZ軸の方向に

$$-\frac{r}{R+\Delta R}\cdot\Delta g$$

だけずれた位置に像ができることになる．

第 12 圖



このことから装置の製作，調整に當つては焦點の固定で Δf を0 にするようには特に注意をしないと像がぼけることになり，また像のぼけをある大きさ以下に止めるには Δf がどれだけ小さくなければならないかということも，R, r, 及び θ の變域から (25), (26) 式を用いて計算によつて求めることができるわけである．

云いかえれば焦點がOFを含むXY面に垂直な平面，あるいはOFとZ軸を含む平面といつてもよいがその面内にあれば像はぼけないのである．

(2)　直線運動式

焦點の直線運動の軌道からX軸の方向に ΔR だけずれ，Y軸方向に Δh, Z軸方向に Δg ずれているとする．第12圖參照．

Ff は，

$$[(R+\Delta R),\ (h+\Delta h),\ \Delta g]$$

$$\Delta x=\Delta R,\ \Delta y=\Delta h,\ \Delta z=\Delta h$$

となる．

斷面上の點B (o,b,c) の像は，

$$y'=\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}\cdot b-\frac{r}{R+\Delta R}\cdot\Delta h+\frac{r}{R}\cdot\frac{\Delta R}{R+\Delta R}\cdot h \qquad (27)$$

$$z'=\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}\cdot c-\frac{r}{R+\Delta R}\cdot\Delta g \qquad (28)$$

となつて變數 h を含んでいる．

さて h を含む項には ΔR が乘じられているので，もし $\Delta R=0$ であれば，

$$y'=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot\Delta h$$

$$z'=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot\Delta g$$

となつて像はぼけないのである．

しかも擴大率も變らないが，Δh 及び Δg の焦點のずれのために，Y軸の方向に

$-\frac{r}{R}\Delta h$ だけ，Z軸の方向に $-\frac{r}{R}\Delta g$ だけ像がずれてくるわけである．

結局この方式では焦點が x=R面内にあつて，Y軸と平行にFと等速度で運動すれは像はぼけず，擴大率も變らないのである．

なお (27) 式は

$$y'=\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}\cdot b-\frac{r}{R+\Delta R}\left(\Delta h-\Delta R\cdot\frac{h}{R}\right) \qquad (29)$$

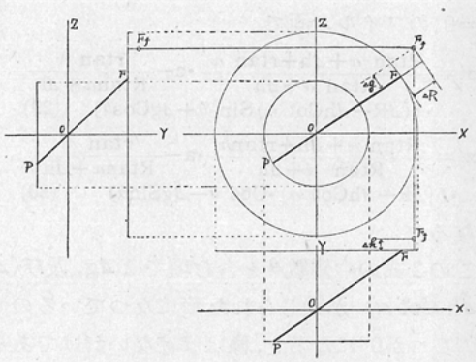
とかきかえられるが，もし，

$\Delta h-\Delta R,\frac{h}{R}=0$ になるような Δh, ΔR であれば，たとい h を含んでいても (29) 式，すなわち (27) 式も變數でなくなり，像はぼけないことになる．しかし，

$\Delta h-\Delta R,\frac{h}{R}=0$ ということは h が變數である以上，Δh, ΔR が常數ではあり得ないことであり，もし Δh, ΔR が變數であつてそのような關係が成立つためには，

$$\frac{\Delta h}{\Delta R}=\frac{h}{R}$$

第 13 圖



であるべきであるし，このことは焦點がOFを含み，XY面に垂直な平面内にあるということである．

焦點の固定位置の表わし方を振り子運動式で用いた量であらわしても吟味が出來るが，同樣なことなので省略しておく．

この方式に屬すべき斷層撮影の裝置では，管球の固定をFOPに相當する軸，例えば鐵筒などに

滑らせる外筒に固定するものもあり，したがつて首振り運動をやるのであるが，それならむしろ振り子運動式のときに用いた量でずれを表わした方が便利である．

近時簡易斷層撮影裝置などといつて市販になつているもので，ブツキー台や，倒立式の透視台の横にあるレールの上を管球裝置を走らせて首振りをしない式のものではこの節で説明したような量でずれを表わすのが便利であると思われる．

(3) 横斷々層式

焦點からOFとY軸を含む平面に立てた垂線の足からY軸までの距離がRよ⊿R大であり，Oから F に向つて左の方向に ⊿g， Y軸の方向に ⊿h だけずれたとする．第13圖參照．

Ff は，

$$[(R\cos\theta+\Delta R\cos\theta-\Delta g\sin\theta),\ (R\tan\alpha+\Delta h),\ (R\sin\theta+\Delta R\sin\theta+\Delta g\cos\theta)]$$

となり，

$$\Delta x=\Delta R\cos\theta-\Delta g\sin\theta$$
$$\Delta y=\Delta h$$
$$\Delta z=\Delta R\sin\theta+\Delta g\cos\theta$$

である．

すると，斷面 y=0 上の點B (a,o,c) の像は，y′=0 のフイルム面で

$$z'=\frac{R\tan\alpha+\Delta h+r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot c-\frac{r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot[(\Delta R-\Delta h\cot\alpha)\sin\theta+\Delta g\cos\theta] \quad (29)$$

$$x'=\frac{R\tan\alpha+\Delta h+r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot a-\frac{r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot[(\Delta R-\Delta h\cot\alpha)\cdot\cos\theta-\Delta g\sin\theta] \quad (30)$$

となる．

この2式の中變數θを含む項では⊿g，及び(⊿R−⊿h Cot α) が乘じられた形になつているので，この2つが0 になると，像はぼけないわけである．すなわち，

⊿g=o で，$\frac{\Delta h}{\Delta R}=\tan\alpha$，または⊿R=⊿h=o であれば像はぼけないことになる．

⊿g=o，⊿R=⊿h=o というのは焦點がFにあるということである．

⊿g=o，$\frac{\Delta h}{\Delta R}=\tan\alpha$ というのは，焦點がOF直線上にあるということである．そしてこの場合像はぼけないが，

$$z'=\frac{R\tan\alpha+\Delta h+r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot c$$
$$x'=\frac{R\tan\alpha+\Delta h+r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}\cdot a$$

であるから，像の擴大率が$\frac{R\tan\alpha+\Delta h+r\tan\alpha}{R\tan\alpha+\Delta h}$になつている．またこのときの焦點の位置はOF直線上，Fより，⊿RSecα=⊿hCosecα のところにあるわけである．

(4) 追加

3方式について，焦點を固定するときにはその位置がずれた場合の投影關係をしらべてみたのち，逆にその式から像をぼけさせないずれ方があるとすればどんな場合であるかをみて來たのである．

像がぼけないというのはそれはそれで斷層撮影の條件に適つていなければならないわけであるが，その場合の焦點の位置に對應しての，斷層撮影の條件としてあげた關係を滿足させる點はどういう點であろうか．

振り子運動式では，⊿f=o であれば ⊿R≒o，⊿g≒o でも像はぼけないが，そのときの Ff は，

$$[(R+\Delta R)\cdot\cos\theta,\ (R+\Delta R)\sin\theta,\ \Delta g]$$

である．またPは

$$(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ o)$$

であるから，Ff P 直線は

$$\frac{x+r\cos\theta}{(R+\Delta R+r)\cos\theta}=\frac{y+r\sin\theta}{(R+\Delta R+r)\sin\theta}=\frac{z}{\Delta g}$$

である．

またこのときの擴大率は$\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}$であるから，線分 FfP を Ff より$\frac{R+\Delta R}{R+\Delta R+r}$に分つ點を考えてみると，

$$\left(o,\ o,\ \Delta g\cdot\frac{r}{R+\Delta R+r}\right)$$

になるがこれが，斷層撮影の條件にいうF，Pに對するOの點の關係を，F，P に對してもつものと考えられる．

いま $R+\Delta R=R'$

$$\frac{R+\Delta R+r}{R+\Delta R}=\frac{R'+r}{R'}=k'$$

とすれば，

Ff は $(R'\cos\theta,\ R'\sin\theta,\ \Delta g)$

Pは $(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta,\ o)$

となる．

原點を $(o,\ o,\ \Delta g\cdot\frac{r}{R'+r})$ にうつすと，

Ff は $(R'\mathrm{Cos}\theta,\ R'\mathrm{Sin}\theta,\ \Delta g\cdot\frac{R'}{R'+r})$

P は $\left(-r\mathrm{Cos}\ \theta,\ -r\mathrm{Sin}\ \theta,\ -\Delta g\frac{r}{R'+r}\right)$

で，

$$-r\mathrm{Cos}\ \theta=(1-k')R'\mathrm{Cos}\ \theta$$

$$-r\mathrm{Sin}\theta=(1-k')R'\mathrm{Sin}\theta$$

$$-\Delta g\frac{r}{R'+r}=(1-k')\Delta g\frac{R'}{R'+r}$$

であることは明かである．

直線運動式では，$\Delta R=0$ であれば，

$\Delta h\neq o$, $\Delta g\neq o$ でも像はぼけないという．

Ff は $(R,\ h+\Delta h,\ \Delta g)$

P は $(-r,\ (1-k)h,\ o)$

であるがもちろん $h=\frac{R}{R+r}$ である

原點を $(o,\ \Delta h\frac{r}{R+r},\ \Delta g\frac{r}{R+r})$ にうつすと，$Ff\left(R,\ h+\Delta h\frac{R}{R+r},\ \Delta g\frac{R}{R+r}\right)$ 及び

$P\left(-r-(h+\Delta h)\cdot\frac{r}{R+r},\ -\Delta g\frac{r}{R+r}\right)$ で

$$-r=(1-k)R$$

$$-(h+\Delta h)\frac{r}{R+r}=(1-k)(h+\Delta h)\frac{R}{R+r}$$

$$-\Delta g.\frac{r}{R+r}=(1-k)\Delta g\frac{R}{R+r}$$

である．

横斷々層式では，$\Delta g=o$, $\frac{\Delta h}{\Delta R}=\tan\alpha$

$$\Delta h=\Delta R\tan\alpha$$

$$R+\Delta R=R',\ \frac{R'+r}{R'}=k'$$

とすれば，

$Ff(R'\mathrm{Cos}\ \theta,\ R'\tan\alpha,\ R'\mathrm{Sin}\theta)$

$P(-r\mathrm{Cos}\ \theta,\ -r\tan\alpha,\ -r\mathrm{Sin}\theta)$

で，もちろん，

$-r\mathrm{Cos}\ \theta=(1-k')R'\mathrm{Cos}\ \theta$,

$-r\tan\alpha=(1-k'),R'\tan\alpha$

$-r\mathrm{Sin}\theta=(1-k')R'\mathrm{Sin}\theta$

である．

少しくどく解明したが，像がぼけない以上は斷層撮影の條件でみたF，O，Pの關係にある點は幾つもというより，無限にあるといつてもよいのである．

VII　焦點の半影

焦點が點でなく，大きさをもつているために半影現象によるぼけが大なり小なり必ず伴うわけで，時には數mmの大きさにも達するから一應檢討しておく必要がある．

實用の焦點は正方形の作用焦點をもつているので，正方形の焦點としてその半影を檢討する．正方形の中心をFにおき，1邊を焦點の運動面と平行において固定したものとして檢討を進める．すなわち第14乃至16圖のようになる．

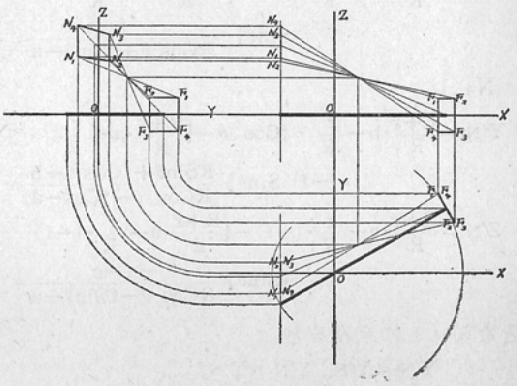
正方形の焦點による半影は4つの頂點による投影點を結び合せた4邊形であるわけだから，正方形の中心をFにおいたときの4頂點，F_1, F_2, F_3 F_4 及びFによるB (a, b, c) 點の投影點をそれぞれ N_1, N_2, N_3, N_4 及びNとする．なお正方形の1邊の長さを2f とする．

さて，Nの式はすでにもとめたものであるが，N_1, N_2, N_3, N_4 はF_1, F_2, F_3, F_4, の位置からもとめねばならない．それらは焦點の固定位置がずれた場合の投影像として前章で吟味して來たことを適用して，その式からもとめることが出來るわけである．すなわちそれぞれの Δx, Δy, Δz をきめて計算すればよいことになる．

(1)　振り子運動式

焦點の中心，頂點の座標は，

第 14 圖



$F\ (R\cos\theta,\ R\sin\theta,\ o)$

$F_1(R\cos\theta-f\sin\theta,\ R\sin\theta+f\cos\theta,\ f)$

$F_2(R\cos\theta+f\sin\theta,\ R\sin\theta-f\cos\theta,\ f)$

$F_3\ (R\cos\theta+f\sin\theta,\ R\sin\theta-f\cos\theta,\ -f)$

$F_4\ (R\cos\theta-f\sin\theta,\ R\sin\theta+f\cos\theta,\ -f)$

で，それぞれの Δx, Δy, Δz は，

	Δx,	Δy,	Δz
F_1 のもの	$-f\sin\theta$,	$f\cos\theta$,	f
F_2 〃	$f\sin\theta$,	$-f\cos\theta$,	f
F_3 〃	$f\sin\theta$,	$-f\cos\theta$,	$-f$
F_4 〃	$-f\sin\theta$,	$f\cos\theta$,	$-f$

となる．第14圖參照．

N_1 の座標は

$$Y'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\cdot\cos\theta-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f.)\sin\theta\right\}\cdot\frac{R\sin\theta+f\cos\theta-b}{R\cos\theta-f\sin\theta-a}$$

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\sin\theta\right\}\cdot\frac{f-c}{R\cos\theta-f\sin\theta-a}$$

N_2 は

$$Y'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cos\theta-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}f\sin\theta\right\}\frac{R\sin\theta-f\cos\theta-b}{R\cos\theta+f\sin\theta-a}$$

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\sin\theta\right\}\cdot\frac{f-c}{R\cos\theta+f\sin\theta-a}$$

N_3 は

$$Y'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}(-f)\cos\theta-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\sin\theta\right\}\cdot\frac{R\sin\theta-f\cos\theta-b}{R\cos\theta+f\sin\theta-a}$$

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\cdot\sin\theta\right\}\cdot\frac{-f-c}{R\cos\theta+f\sin\theta-a}$$

N_4 は

$$Y'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\cos\theta-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\sin\theta\right\}\frac{R\sin\theta+f\cos\theta-b}{R\cos\theta-f\cos-a}$$

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\sin\theta\right\}\frac{-f-c}{R\cos\theta-f\sin\theta-a}$$

となる．これをみると，

$Y'_{N_1}=Y'_{N_4}$, $Y'_{N_2}=Y'_{N_3}$

であるから，N_1N_4, N_2N_3 の2邊はZ′軸に平行な2邊であり，$N_1N_2N_3N_4$ は梯形である．

もしB點が斷面 x=o にあれば，a=o であるから，各投影點の座標はつぎの通りになる．

すなわち，

$$Y'_{N_1}=Y'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}f\cos\theta+\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\sin\theta,\ \frac{R\sin\theta+f\cos\theta-b}{R\cos\theta-f\sin\theta}$$

$$Y'_{N_2}=Y'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cos\theta+\frac{r}{R}\cdot f\sin\theta.\ \frac{R\sin\theta-f\cos\theta-b}{R\cos\theta+f\sin\theta}$$

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f+\frac{r}{R}\cdot(-f)\sin\theta\frac{f-c}{R\cos\theta-f\sin\theta}$$

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f+\frac{r}{R}\cdot f\sin\theta\frac{f-c}{R\cos\theta+f\sin\theta}$$

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)+\frac{r}{R}\cdot f\sin\theta\cdot\frac{-f-c}{R\cos\theta+f\sin\theta}$$

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)+\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\sin\theta\cdot\frac{-f-c}{R\cos\theta-f\sin\theta}$$

である．

これから，

$$Y'_{N_2}-Y'_{N_1}=Y'_{N_2}\sim Y'_{N_4}=Y'_{N_3}-Y'_{N_1}=Y'_{N_3}-Y'_{N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\sec\theta\left(1-\sin\theta\frac{b}{R}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$Z'_{N_2}-Z'_{N_1}=\frac{r}{R}\ 2f\tan\theta\ \frac{f-c}{R}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1+\frac{f}{R}\tan\theta}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\tan\theta\frac{f+c}{R}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$Z'_{N_1}-Z'_{N_4}=-\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1-\frac{f}{R}\cdot\tan\theta}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\left(1-\tan\theta\frac{c}{R}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\left(1+\tan\theta\frac{c}{R}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

がみちびかれるし，したがつて，

$$\overline{N_1\ N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f \cdot\sqrt{\left[\mathrm{Sec}^2\theta\left(1-\mathrm{Sin}\,\theta\frac{b}{R}\right)^2+\tan^2\theta\left(\frac{f-c}{R}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$\overline{N_2\ N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1+\frac{f}{R}\cdot\tan\theta}$$

$$\overline{N_3\ N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f \cdot\sqrt{\left[\mathrm{Sec}^2\theta\left(1-\mathrm{Sin}\,\theta\frac{b}{R}\right)^2+\tan^2\theta\cdot\left(\frac{f+c}{R}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$\overline{N_4\ N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\ \frac{1}{1-\frac{f}{R}\cdot\tan\theta}$$

$$\overline{N_1\ N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f \cdot\sqrt{\left[\mathrm{Sec}^2\theta\left(1-\mathrm{Sin}\,\theta\frac{b}{R}\right)^2+\left(1-\tan\theta\frac{c}{R}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

$$\overline{N_2\ N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f \cdot\sqrt{\left[\mathrm{Sec}^2\theta\left(1-\mathrm{Sin}\,\theta\frac{b}{R}\right)^2+\left(1+\tan^2\theta\frac{c}{R}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan^2\theta}$$

によつて，4邊の長さ，對角線の長さなどがあらわされる．

實際撮影では，R＝1,000 ㎜, r＝ 200㎜, 2f＝5 ㎜ あるいは2f＜5 ㎜ 級であり，$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ であるから，

$$\left|\frac{f}{R}\cdot\tan\theta\right|\leqq\frac{2,5}{1.000}\cdot\tan\frac{\pi}{6}<1.5\times10^{-3}$$

であり，$\left(\frac{f}{R}\cdot\tan\theta\right)^2<2.25\times10^{-6}$ で実用的には 0 としてよく，また

$$0,9985<\frac{1}{1+\frac{f}{R}\cdot\tan\theta}<1,0016$$

$$0,9985<\frac{1}{1-\frac{f}{R}\cdot\tan\theta}<1,0016$$

$$1<\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\tan\theta}<1,0000077$$

となるから，これらは實用的には1として取扱つてよい．

いま，R＝1,200 ㎜, r＝ 200㎜, 2f＝5 ㎜とすれば，原點にある點の像では半影は

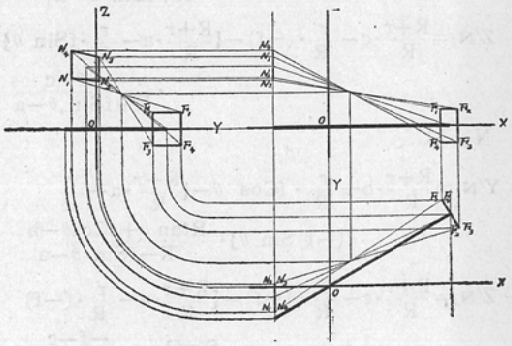
$$\overline{N_1\ N_2}=\overline{N_3\ N_4}\doteqdot\frac{5}{6}\cdot\mathrm{Sec}\,\theta,\ (\mathrm{mm})$$

$$\overline{N_2\ N_3}=\overline{N_4\ N_1}\doteqdot\frac{5}{6}\ (\mathrm{mm})$$

$$\overline{N_1\ N_3}=\overline{N_2\ N_4}\doteqdot\frac{5}{6}\sqrt{\mathrm{Ses}^2\theta+1}.\ (\mathrm{mm})$$

となる．

第 15 圖



(2)　直線運動式

F　(R,　　h,　　o)

F_1(R−fSin θ,　h+fCos θ,　f)

F_2(R+fSin θ,　h−fCos θ,　f)

F_3(R+fSin θ,　h−fCos θ,　−f)

F_4(R−fSin θ,　h+fCos θ,　−f)

で，

	Δx.	Δy.	Δz.
F_1 のもの	−fSin θ,	fCos θ,	f)
F_2 〃	fSin θ,	−fCos θ,	f)
F_3 〃	fSin θ,	−fCos θ,	−f)
F_4 〃	−fSin θ,	fCos θ,	−f)

となる．たゞし，$\tanh^{-1}\frac{h}{R}=\theta$ とする．第15圖參照．

N_1 は

$$Y'N_1=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f.\ \mathrm{Cos}\ \theta-\left\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\mathrm{Sin}\ \theta\right\}\cdot\frac{R\tan\theta+f\mathrm{Cos}\ \theta-b}{R-f.\ \mathrm{Si}\ \theta-a}$$

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Sin}\theta\}\cdot\frac{f-c}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

N_2 は

$$Y'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \theta-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}f\mathrm{Sin}\theta\}\cdot\frac{R\tan\theta-f\cos\theta-b}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Sin}\ \theta\}\cdot\frac{f-c}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

N_3 は

$$Y'_{N_3}=\frac{R+b}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \theta-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Sin}\ \theta\}\frac{R\tan\theta-f\cos\theta-b}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Sin}\ \theta\}\cdot\frac{-f-c}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

N_4 は

$$Y'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Cos}\ \theta-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\mathrm{Sin}\ \theta\}\cdot\frac{R\tan\theta+f\cos\theta-b}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)-\{\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Sin}\theta\}\cdot\frac{-f-c}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta-a}$$

となつて,

$$Y'_{N_1}=Y'_{N_4},\ Y'_{N_2}=Y'_{N_3}$$

であるから, $N_1\ N_2\ N_3\ N_4$ なる4邊形は,

N_1N_4, N_2N_3 がZ'軸に平行な梯形である.

斷面上の點の像では a=o であるから,

$$Y'_{N_1}=Y'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Cos}\ \theta+\frac{r}{R}(-f)\mathrm{Sin}\ \theta\cdot\frac{R\tan\theta+f\cos\theta-b}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

$$Y'_{N_2}=Y'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \theta+\frac{r}{R}\cdot f\cdot\mathrm{Sin}\ \theta\frac{R\tan\theta-f\cos\theta-b}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f+\frac{r}{R}\cdot(-f)\mathrm{Sin}\ \theta\frac{f-c}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f+\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Sin}\ \theta\frac{f-c}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)+\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Sin}\ \theta\frac{f-c}{R+f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)+\frac{r}{R}\cdot(-f)\mathrm{Sin}\ \theta\cdot\frac{-f-c}{R-f\mathrm{Sin}\ \theta}$$

となつて,

$$Y'_{N_2}-Y'_{N_1}=Y'_{N_2}-Y'_{N_4}=Y'_{N_3}-Y'_{N_1}=Y'_{N_3}-Y'_{N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot(\mathrm{Sec}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta\cdot\frac{b}{R})\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}\theta}$$

$$Z'_{N_2}-Z'_{N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\mathrm{Sin}\theta\frac{f-c}{R}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1+\frac{f}{R}\mathrm{Sin}\theta}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\mathrm{Sin}\theta\frac{f+c}{R}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$Z'_{N_1}-Z'_{N_4}=-\frac{r}{R}2f\frac{1}{1-\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Sin}\theta}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot(1-\mathrm{Sin}\theta\frac{c}{R})\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot(1+\mathrm{Sin}\theta\frac{c}{R})\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

である. したがつて,

$$\overline{N_1\ N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\left((\mathrm{Sec}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta\frac{b}{R})^2+\mathrm{Sin}^2\theta(\frac{f-c}{R})^2\right)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Si^2n}\theta}$$

$$\overline{N_2\ N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1+\frac{f}{R}\mathrm{Sin}\theta}$$

$$\overline{N_3\ N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\left((\mathrm{Sec}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta\cdot\frac{b}{R})^2+\mathrm{Sin}^2\theta(\frac{f+c}{R})^2\right)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$\overline{N_4\ N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\frac{1}{1-\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Sin}\theta}$$

$$\overline{N_1\ N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\left((\mathrm{Sec}\ \theta-\mathrm{Sin}\ \theta\cdot\frac{b}{R})^2+(1-\mathrm{Sin}\theta\cdot\frac{c}{R})^2\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

$$\overline{N_2\ N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f$$

$$\cdot\sqrt{\left((\mathrm{Sec}\ \theta-\mathrm{Sin}\ \theta\frac{b}{R})^2+(1+\mathrm{Sin}\theta\cdot\frac{c}{R})^2\right)}$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

によつて，半影の4邊形の各邊や，對角線の長さがあらわされる．

實際には，$R=1,000$ mm，$r=200$mm，$2f=5$ mmくらいであり，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta=\tan^{-1}\frac{h}{R}\leqq\frac{\pi}{6}$であるから，

$$\left|\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Sin}\theta\right|\leqq\frac{2.5}{1.000}\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6}1.25\times10^{-3}$$

であつて，$(\frac{f}{R}\cdot\sin\theta)^2\leqq1,5625\times10^{-6}$で實用的には0としてよく，また，

$$0,99875<\frac{1}{1+\frac{f}{r}\mathrm{Sin}\theta}<1,00125$$

$$0,99875<\frac{1}{1-\frac{f}{r}\mathrm{Sin}\theta}<1,00125$$

$$1<\frac{1}{1-\left(\frac{f}{R}\right)\mathrm{Sin}^2\theta}\quad 1,0000016$$

となるから，これらを實用的には1として取扱つてもよい．

原點の像で，$R=1,200$ mm，$r=150$mm，$2f=5$ mmとすれば，

$$\overline{N_1\ N_2}=\overline{N_3\ N_4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\mathrm{Sec}\,\theta\quad(\mathrm{mm})$$

$$\overline{N_2\ N_3}=\overline{N_4-N_1}\cdot\frac{5}{8}\quad(\mathrm{mm})$$

$$\overline{N_1\ N_3}=\overline{N_2\ N_2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\sqrt{\mathrm{Sec}^2\theta+1}\quad(\mathrm{mm})$$

となる．

(3)　横斷々層式

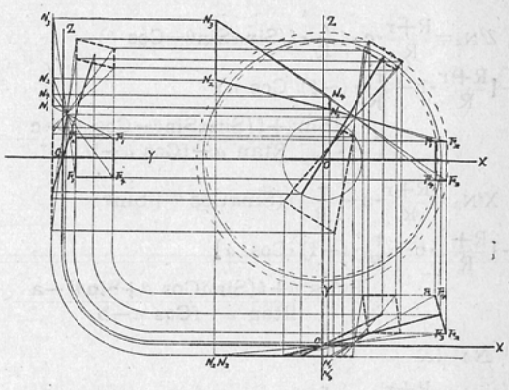
F_1　　(RCos θ,　　Rtan α,　　RSin θ

F_1 [(RCos θ−fSinα Cos θ−fSinθ), (Rtan α +fCos α), (RSinθ−fSinα, Sinθ−fCos θ)]

F_2[(RCos θ+fSinαCos θ−fSinθ), (Rtan α −fCos α), (RSinθ+fSinαSinθ+fCos θ)]

F_3[(RCos θ+fSinαCos θ+fSinθ), (Rtan α −fCos α), (RSinθ+fSinαSinθ−fCos θ)]

第 16 圖



F_4[(RCos θ−fSinαCos θ+fSinθ), (Rtan α +fCos α), (RSinθ−fSinαSinθ−fCos θ)]

で，

	Δx.	Δy.	Δz.
F_1 のもの	−f(SinαCos θ+Sinθ),	fCos α,	−f(SinαSinθ−Cos θ)
F_2 〃	f(SinαCos θ−Sinθ),	−fCos α,	f(SinαSinθ+Cos θ)
F_3 〃	f(SinαCos θ+Sinθ),	−fCos α,	f(SinαSinθ−Cos θ)
F_4 〃	−f(SinαCos θ−Sinθ),	fCos α,	−f(SinαSinθ+ Cos θ)

となる．第16圖參照．

N_1 は

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)\,(\sin\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\}\frac{\mathrm{RSin}\alpha-\mathrm{f(Sin}\theta-\mathrm{Cos}\theta)-\mathrm{c}}{\mathrm{Rtan}\ \alpha+\mathrm{fCos}\ \alpha-\mathrm{b}}$$

$$X'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}(-f)\cdot(\mathrm{Sn}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\mathrm{f.\ Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{\mathrm{RSin}\theta-\mathrm{f(Sin}\alpha\mathrm{Cos}\theta+\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{a}}{\mathrm{Rtan}\ \alpha+\mathrm{fCos}\ \alpha-\mathrm{b}}$$

N_2 は

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot\mathrm{f(Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f).\ \mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{\mathrm{RSin}\theta+\mathrm{f(Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)-\mathrm{c}}{\mathrm{Rtan}\ \alpha-\mathrm{fCos}\ \alpha-\mathrm{b}}$$

$$X'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot\mathrm{f(Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{\mathrm{RCos}\ \theta+\mathrm{f(Sin}\alpha\ \mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)-\mathrm{a}}{\mathrm{Rtan}\ \alpha-\mathrm{fCos}\ \alpha-\mathrm{b}}$$

N_3 は

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\ \mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{R\mathrm{Sin}\theta+f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha-b}$$

$$X'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta+f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha-b}$$

N_4 は

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{R\mathrm{Sin}\theta-f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \alpha-b}$$

$$X'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)$$
$$-\{\frac{R+r}{R}\cdot b-\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Cos}\ \alpha\}$$
$$\cdot\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta-f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \alpha-b}$$

となるが，

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_1}=\frac{2f\mathrm{Cos}\ \theta}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \theta-b}\cdot(r\tan\alpha+b)$$

$$X'_{N_4}-X'_{N_1}=\frac{-2f\mathrm{Sin}\theta}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \alpha-b}(r\tan\ \alpha+b)$$

で，

$$\frac{Z'_{N_4}-Z'_{N_1}}{X'_{N_4}-X'_{N_1}}=-\mathrm{Cot}\ \theta=\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)$$

となる．

同様に

$$\frac{Z'_{N_3}-Z'_{N_2}}{X'_{N_3}-X'_{N_2}}=\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)$$

となるから，$N_4\ N_1$ と $N_2\ N_3$ は平行な2邊で，OFと直角を挟む方向である．もちろん $N_1\ N_2\ N_3\ N_4$ は梯形になる．

斷面の像における半影の大きさをしらべると，b=o であるから，

$$Z'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\theta)$$
$$+\frac{r}{R}\cdot f\mathrm{Cos}\alpha\frac{R\mathrm{Sin}\theta-f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\alpha}$$

$$Z'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)+\frac{r}{R}$$
$$\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Sin}\theta+f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

$$Z'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot f\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)+\frac{r}{R}$$
$$\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Sin}\theta+f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

$$Z'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot c-\frac{r}{R}\cdot(-f)(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)$$
$$+\frac{r}{R}\cdot f\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Si}\ \theta-f(\mathrm{Sin}\theta+\mathrm{Cos}\ \theta)-c}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\alpha}$$

$$X'_{N_1}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)+$$
$$+\frac{r}{R}\cdot f\ \mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta-f\ (\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

$$X'_{N_2}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)+\frac{r}{R}$$
$$\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta+f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Ces}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

$$X'_{N_3}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot f\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta+\mathrm{Sin}\theta)+\frac{r}{R}$$
$$\cdot(-f)\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta+f\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha-f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

$$X'_{N_4}=\frac{R+r}{R}\cdot a-\frac{r}{R}\cdot(-f)\cdot(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)$$
$$+\frac{r}{R}\cdot f\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\frac{R\mathrm{Cos}\ \theta-f(\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-\mathrm{Sin}\theta)-a}{R\tan\ \alpha+f\mathrm{Cos}\ \alpha}$$

となる．したがつて，

$$Z'_{N_2}-Z'_{N_1}=-\frac{r}{R}\cdot2f\mathrm{Cos}\ \alpha\mathrm{Cot}\alpha[\mathrm{Sec}^2\ \alpha.\ \mathrm{Sin}\theta$$
$$+\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Cos}\ \theta-\frac{c}{R}]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\mathrm{Cos}\ \alpha}{R\tan\ \alpha}\right)^2}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot2f\mathrm{Cos}\ \theta\frac{1}{1-\frac{f\mathrm{Cos}\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_3}=\frac{r}{R}\cdot2f\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cot}\alpha[\mathrm{Sec}^2\alpha\mathrm{Sin}\theta$$
$$-\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Cos}\ \theta-\frac{c}{R}]\frac{1}{1-\left(\frac{f\mathrm{Cos}\ \alpha}{R\tan\ \alpha}\right)^2}$$

$$Z'_{N_1}-Z'_{N_4}=-\frac{r}{R}\cdot2f\mathrm{Cos}\ \theta.\frac{1}{1+\frac{f\mathrm{Cos}\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$Z'_{N_3}-Z'_{N_1}=-\frac{r}{R}\cdot2f[\mathrm{Cosec}\ \alpha\mathrm{Sin}\theta-\mathrm{Cos}\ \theta$$
$$-\frac{c}{R}\mathrm{Cos}\ \alpha\mathrm{Cot}\ \alpha]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\mathrm{Cos}\ \alpha}{R\tan\ \alpha}\right)^2}$$

$$Z'_{N_4}-Z'_{N_2}=\frac{r}{R}\cdot2f[\mathrm{Cosec}\ \alpha\mathrm{Sin}\ \theta+\mathrm{Cos}\ \theta-\frac{c}{R}$$
$$\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\mathrm{Cot}\ \alpha]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\mathrm{Cos}\ \alpha}{R\tan\ \alpha}\right)^2}$$

$$X'_{N_2}-X'_{N_1}=-\frac{r}{R}\cdot2f\cdot\mathrm{Cos}\ \alpha\mathrm{Cot}\ \alpha[\mathrm{Sec}^2\alpha\mathrm{Cos}\ \theta-$$
$$-\frac{f}{R}\cdot\mathrm{Sin}\theta-\frac{a}{R}]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\mathrm{Cos}\ \alpha}{R\tan\ \alpha}\right)^2}$$

$$X'N_3-X'N_2=-\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sin\theta\frac{1}{1-\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$X'N_4-X'N_3=\frac{r}{R}\cdot 2f\cos\alpha\cot\alpha\left[\sec^2\alpha\cos\theta+\frac{f}{R}\cdot\sin\theta-\frac{a}{R}\right]\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$X'N_1-X'N_4=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sin\theta\frac{1}{1+\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$X'N_3-X'N_1=-\frac{r}{R}\cdot 2f\left[\operatorname{cosec}\alpha\cos\theta+\sin\theta-\frac{a}{R}\cdot\cos\alpha\cot\alpha\right]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$X'N_4-X'N_2=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\left[\operatorname{cosec}\alpha\cos\theta-\sin\theta-\frac{a}{R}\cdot\cos\alpha\cot\alpha\right]\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

となるから，各邊や對角線などは，

$$\overline{N_1N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cos\alpha\cot\alpha\cdot\sqrt{\left(\sec^2\alpha\cdot\sin\theta+\frac{f}{R}\cos\theta-\frac{c}{R}\right)^2+\left(\sec^2\alpha\cos^2\theta-\frac{f}{R}\sin\theta-\frac{a}{R}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$\overline{N_2N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1-\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$\overline{N_3N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha\sqrt{\left(\sec^2\alpha\sin\theta-\frac{f}{R}\cdot\cos\theta-\frac{c}{R}\right)^2+\left(\sec^2\alpha\cos\theta+\frac{f}{R}\cdot\sin\theta-\frac{a}{R}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$\overline{N_4N_1}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\frac{1}{1+\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}}$$

$$\overline{N_1N_3}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\left(\operatorname{cosec}\alpha\sin\theta-\cos\theta-\frac{c}{R}\cos\alpha\cot\alpha\right)^2+\left(\operatorname{cosec}\alpha\cos\theta+\sin\theta-\frac{a}{R}\cdot\cos\alpha\cot\alpha\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$\overline{N_2N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\left(\operatorname{cosec}\alpha\sin\theta+\cos\theta-\frac{c}{R}\cos\alpha\cot\alpha\right)^2+\left(\operatorname{cosec}\alpha\cos\theta-\sin\theta\frac{a}{R}\cdot\cos\alpha\cot\alpha\right)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

で示される．

また原點にある點の像では a=o，c=o であるから，

$$\overline{N_1N_2}=\frac{r}{R}\cdot 2f\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\left(1+\left(\frac{f}{R}\right)^2\cos^4\alpha\right)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

$$\overline{N_3N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\left(1+\left(\frac{f}{R}\right)^2\cos^4\alpha\right)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

で $\overline{N_1N_2}=\overline{N_3N_4}$ である．

$$\overline{N_1N_3}=\overline{N_2N_4}=\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\operatorname{Cosec}^2\alpha+1}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right)^2}$$

となり，$\overline{N_2N_3}$，$\overline{N_4N_1}$ はB (a, o, c) のときと同じである．

實際の裝置では R=1,500 ㎜，2f=5 ㎜，α は 15°～19° くらいなので，

$$\left|\frac{f\cos\alpha}{R\tan\alpha}\right|<6{,}1\times1.0^{-3},\quad\frac{f}{R}\fallingdotseq1{,}67\times10^{-3}$$

で殆ど無視しても實用的には差支えない小數なので，前の2つの方式のときのように處理すると，原點の像などは，

$$\overline{N_1N_2}=\overline{N_3N_4}\fallingdotseq\frac{r}{R}\cdot 2f\operatorname{cosec}\alpha$$

$$\overline{N_2N_3}=\overline{N_4N_1}\fallingdotseq\frac{r}{R}\cdot 2f$$

$$\overline{N_1N_3}=\overline{N_2N_4}\fallingdotseq\frac{r}{R}\cdot 2f\cdot\sqrt{\operatorname{Cosec}^2\alpha+1}$$

である．

いま，R=1,500 ㎜，r=500㎜，α=18°，2f=5 ㎜とすれば，

$$\overline{N_1N_2}=\overline{N_3N_4}\fallingdotseq6{,}43\,(\text{mm})$$
$$\overline{N_3N_2}=\overline{N_4N_1}\fallingdotseq1{,}67\,(\text{mm})$$

$\overline{N_1 N_3}=\overline{N_2 N}\fallingdotseq 6,64(mm)$

となる.

むすび

特に結論的にのべることもないようである. 斷層撮影という言葉は廣く使われているものゝ, その概念を聞かれて卽座に返答のできない人もあるかと思う. でもそんな人でも斷層撮影という言葉を使い, その技術を診療に應用しているのである.

斷層撮影といわれる各種の撮影法について相違點と, 共通點について考え, いろいろ整理したのちに私は本論文でのべたような概念に達したのである.

普通のレ寫眞ではレ線の吸收, 散亂など, 內部構造の違いによつてレ線が弱められる具合をみて物體內部の構造をみようとするのであるが, 斷層撮影ではすでにレ線の吸收, 散亂によつて部分的には構造を示す各部分の像を, 幾何學的な機構によつて一部をのぞいて他をぼかし去り, 目的部分の構造の像のみを撮影しようとするものである.

したがつて被寫體內部構造の立體的な配列をみるということにもなるし, その場合どのような投影像が得られるかは作圖によつてもとめることができるわけである. しかし作圖によるものは少し複雜なものになると大變な困難を示し, あるいは不可能に近いことにもなるのである.

なるほど作圖は直觀的であつて了解しやすくはあるが, 嚴密さを缺くことになり, 解明しうべき範圍も自らせまくならざるを得ないので, 誤差をなくし, あらゆる範圍について研究を進めるためには解析幾何學的な, 數學的手法にたよるより他ないのである.

純粹な言葉ともいえる數式によつて研究してはじめて, 斷層撮影法の理論に關する研究を容易に進めうるわけである.

斷層撮影像の解明が斷層撮影に關する理論の解析幾何學的理解なくして不可能なことは自明のことであるが, そのための手段としては作圖によるより數式によるべきは上にのべたとおりであるが, 私自身の經驗からいつても非常に簡單に, 勞力も少くてすむのである.

本論文には斷層撮影の概念から, 基礎的な一般的事項についての研究のみをおさめたのであるが, これらを使つての各種實用裝置における解明, 斷層撮影像の判讀における應用, 斷層撮影法の進歩, 乃至裝置の改良に對する意見についてはいずれ稿を改めて論ずることにしたい.

この數年間, 本研究について終始御指導を賜わり, また本論文に御校閲を辱うした恩師入江英雄教授に深甚の謝意を表するものである.

主なる文獻

1) G. Grossmann: Tomographie II (Theorietisches über Tomographie) Fortschr. Röntgenstr. Bd. 51, 191(1935). —2) 宮地韶太郎: 深部レ線レ線寫眞撮影法, —日本醫學放射線學會雜誌第1卷, 第1號, 37頁(昭和15年).

Research on the Tomography. (Study of the Theory in the Way of the Analytical Geometry.)

By

Ichiro Akahoshi

National Sanatorium „Fukuoka-koseien"

The coordinates of the focus are expressed as functions of the variable, the angle between the focus-axis and the base line.

And similarly the straight line connecting the focus and an arbitrary point of the object and the plane of the film are expressed as equations, namely functions of the same variable.

The roots of these equations, as simultaneous equations, are the coordinates of the shadow.

The relationship between the focus, the place of an arbitrary point of the object and the shadow was discussed.