インパルス応答行列の実現問題に関する研究

井上雄二郎

内容梗概

本論文は筆者が大阪大学大学院博士課程（制御工学専攻）に在学中行なった線形システム理論に関する研究のうち，インパルス応答行列の実現問題に関する研究をまとめたもので，本文は次の緒論，第1章，第2章および結論よりなっている。

緒論および各章の最初の節では，本研究分野における従来の研究，本研究の意義と本研究において得られた新しい諸結果を概説している。

各章の最後の節では，その章で得られた主な結果と今後の問題点がまとめられている。

第1章はインパルス応答行列の実現可能性および不可能性を考察している。

1・2節ではインパルス応答行列が実現可能であるための見通しのよい必要十分条件，および，これを用いて，インパルス応答行列が実現可能かどうかを判定する手順が示されている。

1・3節では，実現不可能なインパルス応答行列の近似的実現が考察されている。

1・4節では，近い"距離"にある二つの実現可能なインパルス応答行列の関係について考察されている。

第2章は実現可能なインパルス応答行列を取り扱い，それが可制御な実現，有界な実現あるいは安定な実現をもつための条件，および，それらの構成法を考察している。

2・2節には，インパルス応答行列が可制御な最小実現をもつための必要十分条件が示されている。

2・3節では，インパルス応答行列が有界な実現をもつための十分条件および必要条件が示されている。

2・4節には，インパルス応答行列が有界で一様制限的安定な最小実現をもつための必要十分条件，および，有界で指数関数的安定な実現をもつための十分条件と必要条件が示されている。

結論には，本研究で得られた結果，および，今後に残された問題がまと

められている。

目 次

緒　論

線形システムを表わすのにいろいろな表現形式がある。入出力状態微分方程式とインパルス応答行列はそのなかでももっとも基本的なものの二つである。入出力状態微分方程式で表わされるシステムのインパルス応答行列は理論的には容易に求まるが，逆に，インパルス応答行列から入出力状態微分方程式で表わされるシステムを構成することが問題になる。この問題はインパルス応答行列の実現問題といわれ，多くの研究者によって論じられている。[1~9]

Kalman[1]は「連続な二変数実関数を要素とするインパルス応答行列 $W(t,\tau)$ が変係数をもつ入出力状態微分方程式で表わされるシステムで実現（あるいは，構成）可能であるための必要十分条件は $W(t,\tau)$ が $W(t,\tau)=P(t)Q(\tau)$ の形に分解されることである」ことを示し，Kalman[1][4]，Weiss[4]，Youla[2]や，Desoer と Varaiya[5]らは $W(t,\tau)$ の分解形が与えられたものとして実現問題を解決した。しかし，一般に行列 $W(t,\tau)$ が与えられたとき，上の形に分解できるかできないかの判定は困難であり，$W(t,\tau)$ が実現可能であるためのより見通しのよい必要十分条件を求めることが問題になる。Silverman と Meadows[6,7]は定係数をもつ入出力状態微分方程式で表わされるシステムの場合についてこの問題の完全な解答を与えた。この考えを拡張して Silverman と Meadows[6,7]や Bruni ら[6]は $W(t,\tau)$ が無限回微分可能であるという仮定のもとに，$W(t,\tau)$ が一様可制御で一様可観測[6]な（無限回微分可能な変係数をもつ）入出力状態微分方程式で表わされるシステムで実現されるための必要十分条件を与えた。しかし，一般の変係数をもつ入出力状態微分方程式で表わされるシステムの場合は，上の考え方をさらに拡張して適用することは困難で，未解決問題として残されている。

第1章には，この問題，および，これに関連する問題に関する研究が，発表論文［1］，［2］を中心にまとめられている。

Kalman[1]および Youla[2]によって，定常な実現可能な $W(t,\tau)$ の定係数行列をもつ最小実現は完全可制御で完全可観測であることが示されてい

る。さらに，$\int_{-\infty}^{t} \| W(t,\tau) \| d\tau$ が有界ならば，その最小実現は指数関数的安定であることが Silverman と Anderson[20] によって示されている。しかし，非定常な $W(t,\tau)$ については一般にそのようなことがいえない。$W(t,\tau)$ がどのような条件をみたせば，完全可制御な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するかが問題になる。さらに，$W(t,\tau)$ を実現するシステムを実際にアナログ計算機で構成するとき，その係数行列が有界であること，さらには，そのシステムが安定であることが要求される。したがって，$W(t,\tau)$ がどのような条件をみたせば，有界な係数行列をもつ $W(t,\tau)$ の実現が存在するか，あるいは，有界な係数行列をもつ安定な $W(t,\tau)$ の実現が存在するかが問題になる。Silverman は，$W(t,\tau)$ が無限回微分可能であるという仮定のもとに，有界な（無限回微分可能な）変係数行列をもつ一様可制御で一様可観測[6]な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための（かなり複雑な）十分条件，および，有界な変係数行列をもつ指数関数的安定な一様可制御で一様可観測な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための（かなり複雑な）十分条件を与えている[9]。しかし，一般の $W(t,\tau)$ に対してはこれらの問題がまだ解決されていない。

第2章では，これらの問題に関する研究が，発表論文［3］を中心にまとめられている。

関連発表論文

［1］ 保田，井上，布上：“インパルス応答の実現条件について”，信学会回路とシステム理論研資（昭45－05）.

［2］ 保田，井上：“インパルス応答行列の実現について”，信学論（C），54－C，1，p.74（昭46－01）.

［3］ 井上：“インパルス応答行列の可制御な実現，有界な実現および安定な実現”，信学論（C）載録決定済.

第1章 インパルス応答行列の実現について

1・1 序言

線形システムを表わすのにいろいろな表現形式がある。入出力状態微分方程式とインパルス応答行列はそのなかでも最も基本的なものの二つである。前者によるシステム表現はつぎの式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1\cdot 1)$$

ここで，$x(t)$ は n 次元状態実列ベクトル，$y(t)$ は r 次元出力実列ベクトル，$u(t)$ は p 次元入力実列ベクトル，$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ はそれぞれ t の連続な実関数を要素とする $n\times n$，$n\times p$，$r\times n$ の行列である。以後，式（1・1）で表わされるシステムを（A，B，C）と書く。後者によるシステム表現は，二変数 t と τ の連続な実関数を要素とする $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ を用いて，初期時刻 t_0 以後の入力と出力の関係を示すつぎの式で与えられる。

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1\cdot 2)$$

$\Phi(t,\tau)$ をシステム（1・1）の状態遷移行列とすると，初期条件 $x(t_0) = 0_n$，（0_n は n 次元零列ベクトル）に対するシステム（1・1）の時刻 t での状態 $x(t)$ と出力 $y(t)$ は，それぞれ，つぎの式で与えられる[(1),(2)]。

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1\cdot 3)$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1\cdot 4)$$

$r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ において，すべての t と τ に対して，

$$W(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) \qquad (1\cdot 5)$$

がなりたつシステム（A，B，C）が存在するとき，$W(t,\tau)$は実現可能であるといわれ，$W(t,\tau)$をそのシステム（A，B，C）のインパルス応答行列とよび，システム（A，B，C）は$W(t,\tau)$を実現する，あるいは，システム（A，B，C）は$W(t,\tau)$の実現であるといわれる。

$W(t,\tau)$から式（1・5）を満たすようにシステム（1・1）を構成する問題は$W(t,\tau)$の実現問題*といわれ，つぎの補題1・1と1・2がKalmanによって与えられている。

［補題1・1[(1),(2),(4)]］ $r\times p$の行列$W(t,\tau)$が実現可能であるための必要十分条件はすべてのtとτに対して，

$$W(t,\tau)=P(t)Q(\tau) \qquad (1\cdot 6)$$

が成立することである。ここで，$P(t)$および$Q(t)$はそれぞれtの連続な実関数を要素とする$r\times n$，$n\times p$の行列である。

$W(t,\tau)$の分解（1・6）において，もし$P(t)$のn個の列ベクトル関数および$Q(t)$のn個の行ベクトル関数が$-\infty<t<\infty$の上でそれぞれ一次独立であるとき，分解（1・6）は既約であるといわれる。このnを$W(t,\tau)$の位数ということにする。

［補題1・2[(2),(4)]］ 任意の実現可能な$r\times p$の行列$W(t,\tau)$は既約な分解をもつ。$W(t,\tau)$の位数nは，$W(t,\tau)$を実現するシステムの状態空間の次元の最小値である。

Kalman[(1),(4)]，Weiss[(4)]やYoula[(2)]らは上の補題1・1に基づいて，$P(t)$と$Q(\tau)$からシステム（1・1）の構成法を示しているが，$r\times p$の行列$W(t,\tau)$が与えられたとき，補題1・1の式（1・6）のような分解ができるかできないかの判定は困難であり，$W(t,\tau)$が実現可能であるためのより見通しのよい必要十分条件を求めることが問題になる。SilvermanとMeadows[(6,7)]は定係数をもつシステム（1・1）の場合についてこの問題に完全な解決を与えた。この考えを拡張してSilvermanとMeadows[(6,7)]やBruniら[(8)]は，$W(t,\tau)$が無限回微分可能であるという仮定のもとに，

* 本研究では，文献(1)，(2)および(4)と同様に$t\geqq\tau$なる条件を考慮に入れない。

$W(t,\tau)$が一様可制御で一様可観測[6]なシステム（1・1）で実現されるための必要十分条件を与えた。しかし，一般の変係数をもつシステム（1・1）の場合については，上の考え方をさらに拡張して適用することは困難で，未解決問題として残されている。

本章では，$W(t,\tau)$が実現可能であるためのより見通しのよい必要十分条件を求め，これを用いて，$W(t,\tau)$が分解可能（すなわち，実現可能）であるかないかを判定する手順を与える。この手順は，$W(t,\tau)$が分解可能であるとき，$W(t,\tau)$の具体的な分解形を与える。さらに計算機による$W(t,\tau)$の実現に関連する問題として，実現不可能なインパルス応答行列の近似的実現，および，近い"距離"にある二つの実現可能なインパルス応答行列の関係についても考察する。

1・2．インパルス応答行列の実現

本節では，$r\times p$の行列$W(t,\tau)$が実現可能であるためのいくつかの必要十分条件を求め，これらを用いて，$W(t,\tau)$が実現可能であるかないかを判定する手順を示す。以後，簡単のためつぎの記号を導入する。

$r\times p$の行列$W(t,\tau)$に対して，

$$W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W(t_1,\tau_1) & \cdots & W(t_1,\tau_n) \\ \vdots & & \vdots \\ W(t_n,\tau_1) & \cdots & W(t_n,\tau_n) \end{bmatrix} \qquad (1\cdot 7)$$

とおく[12]。$r_i\times p_i$の行列F_i，$(i=1,\cdots,n)$に対して，

$$F_1\boxplus F_2\boxplus\cdots\boxplus F_n = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r_2 \\ \vdots \\ \updownarrow r_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \overleftrightarrow{p_1} & \overleftrightarrow{p_2} & \cdots & \overleftrightarrow{p_n} \end{array} \end{array} \qquad (1\cdot 8)$$

とおく。また，行列Fに対して，$\mathrm{Im}\,F$はFの像を，$\mathrm{Ker}\,F$はFの核を，$\mathrm{rank}\,F$はFの階数を，F^*はFの転置をF^+はFの一般化逆行列[10]を表わ

すものとする。さらに，⊕は線形空間の直和を，線形部分空間の上添記号⊥はその直交補空間を表わす記号とする。

［補題1・3］ $r \times p$ の行列 $W(t,\tau)$ が実現可能であるための必要十分条件は，$W(t,\tau)$ のすべての (i,j) 要素 $W_{ij}(t,\tau)$ が実現可能であることである。

（証明） 必要は補題1・1より明白だから十分を示す。$W_{ij}(t,\tau)$ が実現可能であるので，

$$W_{ij}(t,\tau)=P^{ij}(t)\,Q^{ij}(\tau), \qquad i=1,\cdots,r\,;\, j=1,\cdots,p \quad (1\cdot 9)$$

と分解できる。ここで，$P^{ij}(t)$，$Q^{ij}(t)$ はそれぞれ t の連続な実関数を要素とする $1\times n_{ij}$，$n_{ij}\times 1$ の行列である。いま，

$$P^{i}(t)=\left[P^{i1}(t)\cdots P^{ip}(t)\right], \quad i=1,\cdots,r \qquad (1\cdot 10)$$

$$Q^{i}(t)=Q^{i1}(t)\oplus\cdots\oplus Q^{ip}(t), \quad i=1,\cdots,r \qquad (1\cdot 11)$$

とおくと，つぎの式が成立することが容易にわかる。

$$W(t,\tau)=\left[P^{1}(t)\oplus\cdots\oplus P^{r}(t)\right]\begin{bmatrix} Q^{1}(\tau) \\ \vdots \\ Q^{r}(\tau)\end{bmatrix} \qquad (1\cdot 12)$$

したがって，$W(t,\tau)$ は実現可能である。（証明終）

つぎの補題は以下の議論においてしばしば用いられる。

［補題1・4］ 実現可能な位数 $\bar{n}$ の $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ において，任意の時刻列 $t_1,\cdots,t_n,\tau_1,\cdots,\tau_n$ に対して，行列 $W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n\end{pmatrix}$ の階数は $\bar{n}$ より大きくない。

（証明） 補題1・2より，$W(t,\tau)$ はつぎのように分解される。

$$W(t,\tau)=P(t)\,Q(\tau) \qquad (1\cdot 13)$$

ここで，$P(t)$，$Q(t)$ はそれぞれ t の連続な実関数を要素とする $r\times\bar{n}$，$\bar{n}\times p$ の行列である。ゆえに，

$$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{bmatrix} \left[Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) \right] \tag{1・14}$$

が成立し，行列 $W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$ が $nr \times \bar{n}$ の行列と $\bar{n} \times np$ の行列の積に分解される。したがって，行列 $W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$ の階数は $\bar{n}$ より大きくない。（証明終）

［定理 1・1］ $r \times p$ の行列 $W(t, \tau)$ が実現可能でしかもその位数が $\bar{n}$ であるための必要十分条件は，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \tag{1・15}$$

となる時刻列 $t_1, \cdots, t_n$, $\tau_1, \cdots, \tau_n$ が存在して，式（1・15）を満たす任意の*時刻列 $t_1, \cdots, t_n$, $\tau_1, \cdots, \tau_n$ と任意の t と τ に対して，つぎの式が成立することである。

$$W(t, \tau) = \left[W(t, \tau_1) \cdots W(t, \tau_n) \right] W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^{+} \begin{bmatrix} W(t_1, \tau) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau) \end{bmatrix} \tag{1・16}$$

さらに，$W(t, \tau)$ が実現可能であるとき，上の整数 n は $\bar{n}$ に等しくとれる。

（証明） 十分： 式（1・16）が成立すれば，$W(t, \tau)$ が実現可能であることは補題 1・1 より明白である。$\bar{n}$ が $W(t, \tau)$ の位数であることを示す。いま，$W(t, \tau)$ の位数を n_0 とする。式（1・15）と補題 1・4 より，$\bar{n} \leq n_0$ となる。また，一般に行列 F に対して，

$$\operatorname{Im} F^{+} = (\operatorname{Ker} F)^{\perp} = \operatorname{Im} F^{*} \tag{1・17}$$

$$\operatorname{rank} F = \operatorname{rank} F^{*} \tag{1・18}$$

が成立する[10]。ゆえに，

---

* “任意の” を “ある” におきかえても定理はなりたつ。

$$\mathrm{rank}\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^{+} = \mathrm{rank}\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (1\cdot 19)$$

となり　行列$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^{+}$が$np \times \bar{n}$の行列と$\bar{n} \times nr$の行列の積に分解されることが容易にわかる。このことと式(1・16)およびn_0の定義より，$n_0 \leqq \bar{n}$となる。したがって，$\bar{n}$は$W(t,\tau)$の位数である。

必要：　$W(t,\tau)$の既約な分解を

$$W(t,\tau) = P(t)Q(\tau) \qquad (1\cdot 20)$$

とする。ここで，$P(t)$，$Q(t)$はそれぞれtの連続な実関数を要素とする$r \times \bar{n}$，$\bar{n} \times p$の行列である。そのとき時刻列$t_1, \cdots, t_{\bar{n}}, \tau_1, \cdots, \tau_{\bar{n}}$が存在して，つぎの二つの行列

$$U = \begin{bmatrix} P(t_1) \\ P(t_2) \\ \vdots \\ P(t_{\bar{n}}) \end{bmatrix}, \qquad V = \left[Q(\tau_1)\, Q(\tau_2) \cdots Q(\tau_{\bar{n}}) \right] \qquad (1\cdot 21)$$

の階数がともに$\bar{n}$になることが後に示される。行列U，Vがそれぞれ$\bar{n}r \times \bar{n}$，$\bar{n} \times \bar{n}p$の行列であることに注意すれば，上のことより，行列UVの階数も$\bar{n}$となる。また，式(1・20)と(1・21)より，

$$UV = W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_{\bar{n}} \\ \tau_1, \cdots, \tau_{\bar{n}} \end{pmatrix} \qquad (1\cdot 22)$$

となる。ゆえに，行列$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_{\bar{n}} \\ \tau_1, \cdots, \tau_{\bar{n}} \end{pmatrix}$の階数も$\bar{n}$となる。したがって，式(1・15)を満たす時刻列$t_1, \cdots, t_{\bar{n}}, \tau_1, \cdots, \tau_{\bar{n}}$の存在が示された。

式(1・15)を満たす任意の時刻列$t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$に対して，

$$M = \begin{bmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{bmatrix}, \qquad N = \left[Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) \right] \qquad (1\cdot 23)$$

とおくと，M，Nはそれぞれ$nr \times \bar{n}$，$\bar{n} \times np$の行列で，式(1・20)を用いると，

$$MN = W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} \qquad (1\cdot24)$$

がなりたつ。式(1・15)を用いると，上のことより，行列M，Nはそれぞれ $nr\times\bar{n}$，$\bar{n}\times np$ の階数 $\bar{n}$ の行列となる。ゆえに，

$$M^+M = NN^+ = I_{\bar{n}}, \quad (I_{\bar{n}} \text{ は } \bar{n} \text{ 次元単位行列}) \qquad (1\cdot25)$$

が成立する[10]。また，

$$\begin{bmatrix} W(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W(t_n,\tau) \end{bmatrix} = MQ(\tau), \quad [W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_n)] = P(t)N \qquad (1\cdot26)$$

がなりたつから，式(1・25)を用いると，

$$P(t) = [W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_n)]N^+, \quad Q(\tau) = M^+\begin{bmatrix} W(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W(t_n,\tau) \end{bmatrix} \qquad (1\cdot27)$$

となる。行列M，Nがそれぞれ $nr\times\bar{n}$，$\bar{n}\times np$ の階数 $\bar{n}$ の行列であるから，$MN = (N^+M^+)^+$ がなりたつ[10]。したがって，

$$(MN)^+ = N^+M^+ \qquad (1\cdot28)$$

となる。式(1・24)，(1・27)および(1・28)より式(1・16)を得る。

行列UとVの階数がともに $\bar{n}$ になる時刻列 $t_1,\cdots,t_{\bar{n}}$，$\tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}$ が存在することを証明する。行列 $P(t)$ の第 i 番目の列ベクトルを $p_i(t)$ とする。$p_1(t),\cdots,p_{\bar{n}}(t)$ が $-\infty<t<\infty$ の上で一次独立であるので，すべての時刻 t において $p_1(t)=0_r$ となることはない。したがって，ある t_1 が存在して，$p_1(t_1)\neq 0_r$ がなりたつ。$1\leq k\leq \bar{n}-1$ なる自然数 k に対して，

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} p_1(t_1) & \cdots & p_k(t_1) \\ \vdots & & \\ p_1(t_k) & \cdots & p_k(t_k) \end{bmatrix} = k \qquad (1\cdot29)$$

なる $t_1, \cdots, t_k$ が存在するとき，

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} p_1(t_1) \cdots p_{k+1}(t_1) \\ \vdots \\ p_1(t_{k+1}) \cdots p_{k+1}(t_{k+1}) \end{bmatrix} = k+1 \qquad (1.30)$$

となる t_{k+1} が存在することが示されると，行列Uの階数が n となる時刻列 $t_1, \cdots, t_n$ が存在することが証明されたことになる。このことはつぎのようにして示される。非同次方程式

$$\begin{bmatrix} p_1(t_1) \cdots p_k(t_1) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ p_1(t_k) \cdots p_k(t_k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{k+1}(t_1) \\ \vdots \\ p_{k+1}(t_k) \end{bmatrix} \qquad (1.31)$$

を満たす解が存在しないとき t_{k+1} を任意に定める。解が存在するとき，解は唯一であり[13]，$p_1(t), \cdots, p_{k+1}(t)$ が $-\infty < t < \infty$ の上で一次独立であることよりその解 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_k^0$ に対して，

$$\alpha_1^0 p_1(t_{k+1}) + \cdots + \alpha_k^0 p_k(t_{k+1}) \neq p_{k+1}(t_{k+1}) \qquad (1.32)$$

となるように t_{k+1} を定める。このような t_{k+1} が求めるものであることは容易にわかる。行列Vについてもまったく同様である。（証明終）

［系 1］ 実連続関数 $W(t, \tau)$ が実現可能でしかもその位数が n であるための必要十分条件は，行列 $W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$ が正則となる時刻列 $t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$ が存在して，行列 $W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$ が正則となる任意の*時刻列 $t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$ と任意の t と τ に対して，つぎの式が成立することである。

$$W(t,\tau) = [W(t,\tau_1) \cdots W(t,\tau_n)]\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W(t_n,\tau) \end{bmatrix} \qquad (1.33)$$

（証明） 行列 $W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$ が $n \times n$ の行列であるので，それが正則

* “任意の”を“ある”におきかえても系はなりたつ。

であることと，その階数が$\bar{n}$であることは同じである。（証明終）

［系 2］　$r\times p$ の行列$W(t,\tau)$が実現可能であるための必要十分条件は，ある時刻列 $t_1^{(ij)},\cdots,t_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)},\tau_1^{(ij)},\cdots,\tau_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)}$，$(i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,p)$が存在して，任意の$t$と$\tau$に対して，つぎの式が成立することである。

$$W(t,\tau)=[P^1(t)\boxplus\cdots\boxplus P^r(t)]\begin{bmatrix}Q^1(\tau)\\ \vdots\\ Q^r(\tau)\end{bmatrix} \qquad (1\cdot34)$$

ここで，$P^i(t)$，$Q^i(\tau)$はそれぞれ式(1・10)，(1・11)で表わされる行列で，$P^{ij}(t)$，$Q^{ij}(\tau)$はそれぞれつぎの式で与えられる行列である。

$$P^{ij}(t)=[W_{ij}(t,\tau_1^{(ij)})\cdots W_{ij}(t,\tau_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)})],\quad \begin{matrix}i=1,\cdots,r\\ j=1,\cdots,p\end{matrix} \qquad (1\cdot35)$$

$$Q^{ij}(\tau)=W_{ij}\begin{pmatrix}t_1^{(ij)},\cdots,t_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)}\\ \tau_1^{(ij)},\cdots,\tau_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)}\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W_{ij}(t_1^{(ij)},\tau)\\ \vdots\\ W_{ij}(t_{\bar{n}_{ij}}^{(ij)},\tau)\end{bmatrix} \qquad (1\cdot36)$$

（証明）　系1と補題1・3より明白。（証明終）

［定理1・2］　$r\times p$ の行列$W(t,\tau)$が実現可能でしかもその位数が$\bar{n}$であるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n\\ \tau_1,\cdots,\tau_n\end{pmatrix}=\bar{n} \qquad (1\cdot37)$$

となる時刻列$t_1,\cdots,t_n,\ \tau_1,\cdots,\tau_n$が存在して，式(1・37)を満たす任意の* 時刻列$t_1,\cdots,t_n,\tau_1,\cdots,\tau_n$と任意の$t$と$\tau$に対して，つぎの式が成立することである。

$$\mathrm{rank}\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n,t\\ \tau_1,\cdots,\tau_n,\tau\end{pmatrix}=\bar{n} \qquad (1\cdot38)$$

さらに，$W(t,\tau)$が実現可能であるとき，上の整数nは$\bar{n}$に等しくとれる。

* "任意の"を"ある"におきかえても定理はなりたつ。

（証明） 必要： 定理1・1より，式（1・37）と$W(t,\tau)$の位数が$\bar{n}$であることより式（1・38）を導けばよい。式（1・37）より任意のtとτに対して，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n, t \\ \tau_1, \cdots, \tau_n, \tau \end{pmatrix} \geqq \operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (1\cdot 39)$$

となる。また，$W(t,\tau)$の位数が$\bar{n}$であるから，補題1・4より，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n, t \\ \tau_1, \cdots, \tau_n, \tau \end{pmatrix} \leqq \bar{n} \qquad (1\cdot 40)$$

が成立する。式（1・39）と（1・40）より式（1・38）を得る。

十分： 定理1・1より，式（1・37）と（1・38）がなりたつとき，式（1・16）がなりたつことを証明すればよい。すなわち，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (1\cdot 41)$$

となる時刻列$t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$に対して，

$$W(t_{n+1}, \tau_{n+1}) \neq [W(t_{n+1}, \tau_1) \cdots W(t_{n+1}, \tau_n)]\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^{+} \cdot \begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix} \qquad (1\cdot 42)$$

となるt_{n+1}，τ_{n+1}が存在するとき，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n, t_{n+1} \\ \tau_1, \cdots, \tau_n, \tau_{n+1} \end{pmatrix} \geqq \bar{n}+1 \qquad (1\cdot 43)$$

が成立することを示せばよい。これはつぎのようにして示される。簡単のため，

$$W_n = W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}, \quad W_{n+1} = W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n, t_{n+1} \\ \tau_1, \cdots, \tau_n, \tau_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (1\cdot 44)$$

とおく。np次元ユークリッド空間R^{np}をその部分空間$\operatorname{Ker} W_n$と直交補空間$(\operatorname{Ker} W_n)^{\perp}$に直和分解する。すなわち，

$$R^{np} = (\mathrm{Ker}\, W_n) \oplus (\mathrm{Ker}\, W_n)^{\perp} \qquad (1\cdot45)$$

となる。式(1·17)と(1·18)より，直交補空間$(\mathrm{Ker}\, W_n)^{\perp}$の次元と行列$W_n$の階数が等しい。ゆえに，式(1·41)より，$(\mathrm{Ker}\, W_n)^{\perp}$に属する$\bar{n}$個の一次独立なベクトル$x_1, \cdots, x_{\bar{n}}$が存在する。このベクトル$x_1, \cdots, x_{\bar{n}}$に対して，

$$z_i = W_{n+1}\begin{bmatrix} x_i \\ 0_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_n x_i \\ [W(t_{n+1}, \tau_1) \cdots W(t_{n+1}, \tau_n)]\, x_i \end{bmatrix}$$

$$i = 1, \cdots, \bar{n} \qquad (1\cdot46)$$

とおくと，ベクトル$z_1, \cdots, z_{\bar{n}}$は一次独立であることは容易にわかる。式(1·42)より，$x_{\bar{n}+1} \in R^p$なるベクトル$x_{\bar{n}+1}$が存在して，

$$\left[W(t_{n+1}, \tau_{n+1}) - [W(t_{n+1}, \tau_1) \cdots W(t_{n+1}, \tau_n)]\, W_n^{+} \begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix} \right] x_{\bar{n}+1}$$

$$\neq 0_r \qquad (1\cdot47)$$

となる。このベクトル$x_{\bar{n}+1}$に対して，

$$z_{\bar{n}+1} = W_{n+1}\begin{bmatrix} 0_{np} \\ x_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix} x_{\bar{n}+1} \\ W(t_{n+1}, \tau_{n+1})\, x_{\bar{n}+1} \end{bmatrix} \qquad (1\cdot48)$$

とおくと，すぐ後に示されるように，ベクトル$z_1, \cdots, z_{\bar{n}}, z_{\bar{n}+1}$が一次独立となる。ゆえに，式(1·43)を得る。

さて，$z_1, \cdots, z_{\bar{n}+1}$が一次独立になることを示そう。実数$\beta_1, \cdots, \beta_{\bar{n}+1}$に対して，

$$\beta_1 z_1 + \cdots + \beta_{\bar{n}+1} z_{\bar{n}+1} = 0_{(n+1)r} \qquad (1\cdot49)$$

とする。 $\beta_{\bar{n}+1}=0$ ならば，$z_1, \cdots, z_{\bar{n}}$ が一次独立であることより，
$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{\bar{n}}=0$ となり，$z_1, \cdots, z_{\bar{n}+1}$ は一次独立である。
$\beta_{\bar{n}+1}\neq 0$ ならば，$\beta_i'=\beta_i/\beta_{\bar{n}+1}$，$(i=1, \cdots, \bar{n})$ とおくと，式 (1・46) と (1・48) より，

$$W_n\left(\sum_{i=1}^{\bar{n}}\beta_i' x_i\right)+\begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix} x_{\bar{n}+1}=0_{nr} \qquad (1.50)$$

$$[W(t_{n+1}, \tau_1)\cdots W(t_{n+1}, \tau_n)]\left(\sum_{i=1}^{\bar{n}}\beta_i' x_i\right)+W(t_{n+1}, \tau_{n+1})x_{\bar{n}+1}=0_r \qquad (1\cdot 51)$$

となる。ベクトル x_i $(i=1, \cdots, \bar{n})$ が $(\mathrm{Ker}\, W_n)^{\perp}$ に属するので，式 (1・17) を用いると，x_i が空間 $Im\, W_n^+$ に属する。したがって，

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}}\beta_i' x_i = W_n^+ x \qquad (1\cdot 52)$$

となるベクトル $x\in R^{nr}$ が存在する。式 (1・50) と (1・52) より，

$$-W_n^+\begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix} x_{\bar{n}+1}=W_n^+ W_n\left(\sum_{i=1}^{\bar{n}}\beta_i' x_i\right)$$

$$=W_n^+ W_n W_n^+ x = W_n^+ x = \sum_{i=1}^{\bar{n}}\beta_i' x_i \qquad (1\cdot 53)$$

が成立する。式 (1・53) を式 (1・51) に代入すると，

$$\left[W(t_{n+1}, \tau_{n+1})-[W(t_{n+1}, \tau_1)\cdots W(t_{n+1}, \tau_n)]\, W_n^+\begin{bmatrix} W(t_1, \tau_{n+1}) \\ \vdots \\ W(t_n, \tau_{n+1}) \end{bmatrix}\right]$$

$$\cdot x_{\bar{n}+1}=0_r \qquad (1\cdot 54)$$

となる。これは式 (1・47) に反する。ゆえに，$\beta_{\bar{n}+1}=0$。（証明終）

［系］ 実連続関数$W(t,\tau)$が実現可能でしかもその位数が$\bar{n}$であるための必要十分条件は，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}}\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}\end{pmatrix}$が正則となる時刻列$t_1,\cdots,t_{\bar{n}},\tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}$が存在して，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}}\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}\end{pmatrix}$が正則となるどのような*時刻列$t_1,\cdots,t_{\bar{n}},\tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}$とどのような$t$と$\tau$に対して，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}},t\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}},\tau\end{pmatrix}$は正則でない。

（証明） 行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}}\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}\end{pmatrix}$が$\bar{n}\times\bar{n}$の行列であるので，それが正則であることと，その階数が$\bar{n}$であることは同じである。さらに，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}}\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}\end{pmatrix}$が正則であるとき，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_{\bar{n}},t\\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}},\tau\end{pmatrix}$が正則でないことと，その階数が$\bar{n}$であることは同じである。（証明終）

さて，以上の議論に基づいて，$r\times p$の行列$W(t,\tau)$が実現可能であるかないかの判定法を示す。補題1・3より，$W(t,\tau)$を実連続関数，（1×1の行列）として一般性を失わない。

［1×1の行列$W(t,\tau)$の分解判定手順］

（1） つぎのようなt_1とτ_1を求める。

$$W\begin{pmatrix}t_1\\ \tau_1\end{pmatrix}=W(t_1,\tau_1)\neq0 \tag{1·55}$$

（2） ある自然数kについて，行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k\\ \tau_1,\cdots,\tau_k\end{pmatrix}$が正則になる時刻列$t_1,\cdots,t_k,\tau_1,\cdots,\tau_k$が求まっているものとする。もし

$$W(t,\tau)-[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_k)]W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k\\ \tau_1,\cdots,\tau_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W(t_1,\tau)\\ \vdots\\ W(t_k,\tau)\end{bmatrix}\neq0 \tag{1·56}$$

となるtとτが存在すれば，このようなtとτを，それぞれ，t_{k+1}とτ_{k+1}とおき，（行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k,t_{k+1}\\ \tau_1,\cdots,\tau_k,\tau_{k+1}\end{pmatrix}$が正則になることは式（1·41）と（1·42）より式（1·43）が成立することから明白である），行列$W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k,t_{k+1}\\ \tau_1,\cdots,\tau_k,\tau_{k+1}\end{pmatrix}$に対して（2）の計算をくりかえす。式（1·56）が成立するようなtとτがないとき，すなわち，すべてのtとτに対して，

* “どのような”を“ある”におきかえても系はなりたつ。

$$W(t,\tau)=[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_k)]\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k\\ \tau_1,\cdots,\tau_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W(t_1,\tau)\\ \vdots\\ W(t_k,\tau)\end{bmatrix}\tag{1・57}$$

がなりたつとき、この自然数kを$\bar{n}$とおいて計算をやめる。（手順終）

上の手順において，

$$E_0(t,\tau)=W(t,\tau)\tag{1・58}$$

$$E_k(t,\tau)=W(t,\tau)-[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_k)]\cdot W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_k\\ \tau_1,\cdots,\tau_k\end{pmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W(t_1,\tau)\\ \vdots\\ W(t_k,\tau)\end{bmatrix}\tag{1・59}$$

とおくと，$E_k(t,\tau)$は手順のくりかえし計算における第k番目の誤差関数を示し，つぎの式が成立することが容易にわかる。

$$E_k(t,\tau)=E_{k-1}(t,\tau)-\frac{E_{k-1}(t,\tau_k)\,E_{k-1}(t_k,\tau)}{E_{k-1}(t_k,\tau_k)}\tag{1・60}$$

式（1・56）は$E_k(t,\tau)\neq 0$となるtとτが存在することを意味し，式（1・57）はすべてのtとτに対して$E_k(t,\tau)=0$であることを意味する。もし$W(t,\tau)$が実現可能ならば，すべてのtとτに対して$E_k(t,\tau)=0$となるk，すなわち，$\bar{n}$が存在することが補題1・4より保証され，手順のくりかえし計算は有限回でとまる。そのとき，$W(t,\tau)$は定理1・1の系1の式（1・33）の形で求まる。もし$W(t,\tau)$が実現不可能ならば，任意の自然数kに対して，$E_k(t_i,\tau)=0$, $E_k(t,\tau_i)=0$,（$i=1,\cdots,k$）は成立するが，$E_k(t,\tau)$は恒等的に零とはならないで，手順のくりかえし計算はとまらない。この問題についてはつぎの節で検討する。

$W(t,\tau)$が実現可能であるとき，理論的にはあるkで$E_k(t,\tau)$が恒等

的に零となり，くりかえし計算はとまるが，一般に計算機で連続関数が恒等的に零であるかどうかの判定は困難である。したがって，実際には十分小さな正数 ε を与えて，$|E_k(t,\tau)| \leqq \varepsilon$ を満たしたとき計算をやめる。このとき，くりかえし計算で求まったインパルス応答行列がもとのインパルス応答行列とどのような関係にあるかという問題を1・4節で考察する。

［例題］ つぎのような二つの実連続関数 $W_1(t,\tau)$ と $W_2(t,\tau)$ が実現可能か不可能かを判定してみる。

$$W_1(t,\tau)=\begin{cases} e^{t+\tau}, & -\infty<t\leqq 0,\ -\infty<\tau<\infty \\ (t-1)e^{t+\tau}, & 0\leqq t<\infty,\ -\infty<\tau<\infty \end{cases}$$

$$W_2(t,\tau)=e^{t\tau}, \quad -\infty<t,\tau<\infty$$

$W_1(t,\tau)$ は連続微分可能でないので，Silverman と Meadows[6,7] や Bruni ら[8] によって与えられた方法は適用できない。任意の t と τ に対して，

$$W_1(t,\tau)=\frac{W_1(t,0)\,W_1(0,\tau)}{W_1(0,0)}$$

がなりたつので，上の分解判定手順のくりかえし計算は一回でとまり，$W_1(t,\tau)$ は実現可能となる。$W_2(t,\tau)$ に関して，行列 $W_2\begin{pmatrix}0,1,\cdots,k-1\\0,1,\cdots,k-1\end{pmatrix}$ の行列式が Vandermonde の行列式[12] となり，$\prod_{i>j\geqq 0}^{k-1}(e^i-e^j)$ に等しいから，任意の自然数 k に対して行列 $W_2\begin{pmatrix}0,1,\cdots,k-1\\0,1,\cdots,k-1\end{pmatrix}$ は正則となる。したがって，上の分解判定手順のくりかえし計算はとまらず，$W_2(t,\tau)$ は実現不可能となる。

1・3 実現不可能なインパルス応答行列と実現可能なインパルス応答行列

前節の定理1・2の証明のなかで，式(1・41)と(1・42)より式(1・43)が得られることを示した。このことと補題1・4よりつぎの定理が導かれる。

［定理1・3］ $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ が実現不可能であるための必要十分条件は，ある時刻列 $t_1,\cdots,t_n,\cdots,\tau_1,\cdots,\tau_n,\cdots$ が存在して，任意の自然数 n に対して行列 $W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix}$ の階数が n より大きいことである。

［系］ 実連続関数 $W(t,\tau)$ が実現不可能であるための必要十分条件は，ある時刻列 $t_1,\cdots,t_n,\cdots,\tau_1,\cdots,\tau_n,\cdots$ が存在して，任意の自然数 n に対して行列 $W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix}$ が正則になることである。

補題1・3より，実現不可能なインパルス応答行列 $W(t,\tau)$ を考察するとき，$W(t,\tau)$ を実連続関数としても一般性を失わないから，以下本節ではこの場合を考察する。

実現不可能な実連続関数 $W(t,\tau)$ を任意に与えられた精度で近似的に実現するシステム（すなわち，$W(t,\tau)$ を任意に与えられた精度で近似する実現可能なインパルス応答行列）が存在することは，つぎの1°と2°から容易にわかる。

1°. 任意の正数 ε に対し，区間 $[-T,T]$ に属する t と τ に対して，

$$\left|W(t,\tau)-\sum_{i=1}^{n}P_i(t)\,Q_i(\tau)\right|<\varepsilon \tag{1.61}$$

となる連続関数 $P_i(t)$ と $Q_i(\tau)$，$(i=1,\cdots,n)$ が存在する[(19),(20)]。

2°. $W(t,\tau)$ を平面 R^2 の上で二乗可積分な関数の集合 L_2 に属する連続関数とすると，

(a) 区間 $[-T,T]$ に属するすべての t と τ に対して $W(t,\tau)>0$ のとき*，任意の正数 ε に対して，

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left|W(t,\tau)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)}{W(t_j,\tau_i)}\alpha_j(t)\beta_i(\tau)\right|^2 dt\,d\tau<\varepsilon \tag{1.62}$$

---

* 区間 $[-T,T]$ は有界であるので，$W(t,\tau)>0$ としても一般性を失わない。

となる時刻列 $t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$ が存在する。ここで，$\alpha_j(t)$ と $\beta_i(t)$，$(i, j=1, \cdots, n)$ は Urysohn の関数[20]*である。（文献(18)の p.123 にある方法と類似の方法で証明できる）

（b） 任意の正数 ε に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W(t,\tau)-\sum_{i=1}^{m}c_i\gamma_i(t)\delta_i(\tau)\right|^2 dt\,d\tau<\varepsilon \qquad (1\cdot63)$$

となるフーリエ係数 c_i

$$c_i=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(t,\tau)\gamma_i(t)\delta_i(\tau)\,dt\,d\tau \qquad (1\cdot64)$$

が存在する。ここで，$\gamma_i(t)\delta_i(\tau)$，$(i=1,2,\cdots)$ は空間 L_2 で完備な正規直交系である[11]。

前節における $W(t,\tau)$ の分解判定手順で，実現可能な $W(t,\tau)$ に対してはくりかえし計算が有限回で終わり，$W(t,\tau)$ は有限個の関数系 $W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(i,j=1,\cdots,n)$ の一次結合で表わされるが，実現不可能な $W(t,\tau)$ に対してはくりかえし計算が無限に続く。このような実現不可能な $W(t,\tau)$ が関数系 $W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(i,j=1,2,\cdots)$ の有限個の一次結合で近似できるかという問題について，フーリエ級数論の立場（2°（b）の立場）から若干考察してみる。

平面 R^2 の上で二乗可積分な関数の集合 L_2 に属する連続関数 $W(t,\tau)$ に対して，

$$S=\left\{t\in R^1 \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty}W^2(t,\tau)\,d\tau<\infty\right\} \qquad (1\cdot65)$$

$$\tilde{S}=\left\{\tau\in R^1 \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty}W^2(t,\tau)\,dt<\infty\right\} \qquad (1\cdot66)$$

とおくと，Fubini の定理より R^1-S の測度および $R^1-\tilde{S}$ の測度は零である。$t_j\in S$，$\tau_i\in\tilde{S}$ なる t_j と τ_i に対して関数 $W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$ は空間 L_2 に属する。このような関数の有限個の一次結合の全体を D とする。すなわち，

$$D=\bigcup_{n}\left\{f \,\middle|\, f=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}W(t,\tau_i)W(t_j,\tau),\ t_j\in S,\ \tau_i\in\tilde{S},\ \alpha_{ij}\in R^1\right\} \qquad (1\cdot67)$$

---

* ある閉区間の上で 1，その閉区間を含むある開区間の外で 0，その他の所で 0 と 1 の間の値をとる連続関数である。

空間L_2は可分であるので，集合Dの閉包$\overline{D}$で完備な一次独立な関数系$W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(t_j\in S,\ \tau_i\in\widehat{S})$はたかだか可算個である。この関数系からシュミットの直交化の方法(11)を用いて，$\overline{D}$で完備な正規直交系$\widetilde{W}_i(t,\tau)$，$(i=1,2,\cdots)$が求まる。この$\widetilde{W}_i(t,\tau)$は関数系$W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(t_j\in S,\ \tau_i\in\widehat{S})$の一次結合で表わされているから，実現可能である。以上の準備のもとに，つぎの3°と4°が導かれる。

3°．$W(t,\tau)$が実現可能でその位数が$\overline{n}$のとき，$W(t,\tau)$は空間Dに属し空間Dの次元は$\overline{n}^2$となる。このとき，$\overline{D}$の次元も$\overline{n}^2$となり(11)，

$$W(t,\tau)=\sum_{i=1}^{\overline{n}^2}\lambda_i\widetilde{W}_i(t,\tau)\quad ;\ \text{フーリェ級数表示}\qquad (1\cdot 68)$$

がなりたつ。ここで，λ_iは正規直交系$\widetilde{W}(t,\tau)$による関数$W(t,\tau)$のフーリエ係数である。(証明は容易であるので省略する)

$W(t,\tau)$が有限個の基底の一次結合として表示されるとき，その係数は唯一に定まる。また，定理1・1の系1において，関数系$W(t,\tau_i)$，$(i=1,\cdots,\overline{n})$および関数系$W(t_j,\tau)$，$(j=1,\cdots,\overline{n})$がそれぞれ一次独立であることより，関数系$W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(i,j=1,\cdots\overline{n})$も一次独立となる。さらに，$R^1-S$の測度と$R^1-\widehat{S}$の測度がそれぞれ零であるので，時刻列$t_1,\cdots,t_{\overline{n}},\tau_1,\cdots,\tau_{\overline{n}}$は$t_j\in S,\tau_i\in\widehat{S}$，$(i,j=1,\cdots,\overline{n})$となるように取ることができ，この関数系$W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$，$(i,j=1,\cdots,\overline{n})$がDに属するようにできる。したがって，この関数系を用いて（シュミットの直交化の方法により）正規直交系$\widetilde{W}_i(t,\tau)$，$(i=1,\cdots,\overline{n}^2)$を表わせば，上の式$(1\cdot 68)$と定理1の系1の式$(1\cdot 33)$は本質的に同一である。

4°．$W(t,\tau)$が実現不可能のとき，$W(t,\tau)$は空間Dに属さず，無限次元表示（すなわち，無限個の基底の一次結合表示）となる。$W(t,\tau)$がある時刻列$t_1,\cdots,t_n,\cdots,\tau_1,\cdots,\tau_n,\cdots$によってきまる可算個の関数系$W(t,\tau_i)W(t_j,\tau)$の一次結合である（すなわち，$W(t,\tau)$が空間$\overline{D}$に属するための必要十分条件はつぎのパーセバルの等式が成立することである。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W^2(t,\tau)\,dt\,d\tau \qquad (1\cdot 69)$$

ここで，λ_i は正規直交系 $\tilde{W}_i(t,\tau)$ による関数 $W(t,\tau)$ のフーリエ係数である。このとき，

$$W(t,\tau) = \underset{n\to\infty}{l.i.m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{W}_i(t,\tau) \;;\; \text{フーリエ級数表示} \qquad (1\cdot 70)$$

がなりたつ。ここで，$l.i.m$ は平均二乗収束を表わす。(証明は容易，文献(11)を参照)

1・4 近い“距離”にある二つの実現可能なインパルス応答行列

本節では，$r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ とそれから ε の“距離”にある $r\times p$ の行列 $W_\varepsilon(t,\tau)$ によってそれぞれ表わされるシステムの関係について考察する。ここで，$W(t,\tau)$ と $W_\varepsilon(t,\tau)$ とが ε の“距離”にあるとは，任意の t と τ に対してつぎの式が成立することである。

$$\| W(t,\tau) - W_\varepsilon(t,\tau) \| \leqq \varepsilon \qquad (1\cdot 71)$$

ただし，記号 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを示す。

以下の議論を簡単にするため，つぎの記号 $O(\varepsilon)$ を用いる。行列 $F(t)$ および行列 $F_\varepsilon(t)$ において，ある正数 ε_0 と正数 λ が存在して，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$ なる任意の ε および任意の t に対して，

$$\| F(t) - F_\varepsilon(t) \| \leqq \lambda\varepsilon \qquad (1\cdot 72)$$

が成立するとき，$\| F(t) - F_\varepsilon(t) \| = O(\varepsilon)$ とかく。

まず，インパルス応答行列 $W(t,\tau)$ と $W_\varepsilon(t,\tau)$ でそれぞれ表わされるシステム (1・2) の出力を $y(t)$ と $y_\varepsilon(t)$ とすると，$\int_{-\infty}^{\infty} \| u(\tau) \| d\tau$ が有限なる入力 $u(t)$ に対して，

$$\| y(t) - y_\varepsilon(t) \| = O(\varepsilon) \qquad (1\cdot 73)$$

がなりたつことが容易にわかる。さらに，$W(t,\tau)$ と $W_\varepsilon(t,\tau)$ をそれぞ

れ実現する二つのシステム（1・1）において，状態空間の次元の最小値（補題1・2を参照）に関してつぎの定理1・4，係数行列および状態の軌道に関して定理1・5がなりたつ。

［定理1・4］ 実現可能な位数$\bar{n}$の$r\times p$の行列$W(t,\tau)$に対して，ある正数ε_0が存在して，

$$\| W(t,\tau) - W'(t,\tau) \| \leq \varepsilon_0 \qquad (1\cdot 74)$$

を満たす任意の実現可能な$r\times p$の行列$W'(t,\tau)$の位数は$\bar{n}$より小さくない。

（証明） 定理1・1より

$$\mathrm{rank}\, W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (1\cdot 75)$$

となる時刻列$t_1,\cdots,t_n,\tau_1,\cdots,\tau_n$が存在する。式(1・75)より，ある$\varepsilon_0$が存在して，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$なる任意の$\varepsilon$と式(1・71)を満たす任意の$r\times p$の行列$W_\varepsilon(t,\tau)$に対して，

$$\mathrm{rank}\, W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix} \geq \bar{n} \qquad (1\cdot 76)$$

が成立することを示せば，補題1・4より定理を得る。

式(1・76)を証明する。簡単のため，行列$W(t,\tau)$と行列$W_\varepsilon(t,\tau)$に対して，

$$W = W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix}, \quad W_\varepsilon = W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix} \qquad (1\cdot 77)$$

とおく。式(1・75)より，$Wx_1,\cdots,Wx_{\bar{n}}$が一次独立となるnp次元列ベクトル$x_1,\cdots,x_{\bar{n}}$が存在する。このことより，ある正数ε_0が存在して，$0<\varepsilon<\varepsilon_0$なる任意の$\varepsilon$に対して，ベクトル$W_\varepsilon x_1,\cdots,W_\varepsilon x_{\bar{n}}$も一次独立となることがつぎに示されるので，式(1・76)が成立する。もし，$W_\varepsilon x_1,\cdots,W_\varepsilon x_{\bar{n}}$が一次独立でないならば，

$$\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0 \qquad (1\cdot 78)$$

$$[W_{\varepsilon_m} x_1 \cdots W_{\varepsilon_m} x_{\bar{n}}]\, c_m = 0_{nr}, \quad m=1,2,\cdots \qquad (1\cdot 79)$$

$$\| c_m \| = 1, \quad m = 1, 2, \cdots \qquad (1 \cdot 80)$$

を満たす数列 $\{\varepsilon_m\}$ と $\bar{n}$ 次元列ベクトル列 $\{c_m\}$ が存在する。式 (1・80) より，$\| c_0 \| = 1$ となるある $\bar{n}$ 次元列ベクトル c_0 が存在して，ベクトル列 $\{c_m\}$ のある部分ベクトル列 $\{c_{m_i}\}$ が c_0 に収束する。このことと，式 (1・71)，(1・78) および (1・79) より，

$$[W x_1 \cdots W x_{\bar{n}}] c_0 = O_{nr} \qquad (1 \cdot 81)$$

が成立し，ベクトル $Wx_1, \cdots, Wx_{\bar{n}}$ は一次従属になる。これはベクトル $Wx_1, \cdots, Wx_{\bar{n}}$ が一次独立であることに反する。（証明終）

［定理1・5］ 式 (1・71) を満たす二つの実現可能な位数 $\bar{n}$ の $r \times p$ の行列 $W(t, \tau)$ と $W_\varepsilon(t, \tau)$ に対して，それらをそれぞれ実現するつぎの性質を満たすシステム (A, B, C) と $(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon)$ が存在する。

(i) (A, B, C) と $(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon)$ の状態空間の次元がともに $\bar{n}$ である。

(ii)
$$\left.\begin{aligned} &A(t) = A_\varepsilon(t), \quad \| B(t) - B_\varepsilon(t) \| = O(\varepsilon) \\ &\| C(t) - C_\varepsilon(t) \| = O(\varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (1 \cdot 82)$$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \| u(\tau) \| d\tau$ が有限になる入力 $u(t)$ に対して，式 (1・3) で定まる状態 $x(t)$ と $x_\varepsilon(t)$ についてつぎの式が成立する。

$$\| x(t) - x_\varepsilon(t) \| = O(\varepsilon) \qquad (1 \cdot 83)$$

（証明） 定理1・1より，式 (1・75) および (1・76) が成立する時刻列 $t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$ が存在する。$W_\varepsilon(t, \tau)$ の位数が $\bar{n}$ であるので，補題1・4を用いると，

$$\operatorname{rank} W_\varepsilon \begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} \leq \bar{n} \qquad (1 \cdot 84)$$

となる。式 (1・76) と (1・84) より，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ なる任意の正数 ε に対して，

$$\operatorname{rank} W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \tag{1·85}$$

がなりたつ。式(1·75)，(1·85)および$W(t,\tau)$と$W_\varepsilon(t,\tau)$のそれぞれの位数が$\bar{n}$であることより，定理1·1を用いると，

$$W(t,\tau) = [W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_n)]\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^+ \begin{bmatrix} W(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W(t_n,\tau) \end{bmatrix} \tag{1·86}$$

$$W_\varepsilon(t,\tau) = [W_\varepsilon(t,\tau_1)\cdots W_\varepsilon(t,\tau_n)]\, W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^+ \begin{bmatrix} W_\varepsilon(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W_\varepsilon(t_n,\tau) \end{bmatrix} \tag{1·87}$$

がなりたつ。式(1·75)より，行列$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$の$\bar{n}$個の独立な列ベクトルが存在する。これらのベクトルからなる$nr \times \bar{n}$の行列をHとすると，

$$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = HG \tag{1·88}$$

と分解される$\bar{n} \times np$の行列Gが存在する。行列HとGがともに階数$\bar{n}$の$nr \times \bar{n}$，$\bar{n} \times np$の行列であるので，式(1·88)より，

$$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^+ = G^+ H^+ \tag{1·89}$$

がなりたつ。行列$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$の$np$個の列から$\bar{n}$個の一次独立な列ベクトルを取り出して行列$H$を作ったが，これらの列と同じ列にある行列$W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}$の$\bar{n}$個の列ベクトルからなる行列を$H_\varepsilon$とする。式(1·75)より(1·76)を導いたと同様な方法で，$0 < \varepsilon < \varepsilon_1$なる任意の$\varepsilon$に対して，

$$\operatorname{rank} H_\varepsilon \geqq \bar{n} \tag{1·90}$$

が成立する。行列H_εは$nr \times \bar{n}$の行列であるから，式(1·90)より，$0 < \varepsilon < \varepsilon_1$なる任意の$\varepsilon$に対して，

$$\mathrm{rank}\, H_\varepsilon = \bar{n} \tag{1·91}$$

となる。ゆえに，

$$W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = H_\varepsilon G_\varepsilon \tag{1·92}$$

となる $\bar{n} \times np$ の行列 G_ε が存在する。行列 H_ε と G_ε かともに階数 $\bar{n}$ の $nr \times \bar{n}$，$\bar{n} \times np$ の行列であるので，式(1·92)より

$$W_\varepsilon\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix}^+ = G_\varepsilon^+ H_\varepsilon^+ \tag{1·93}$$

がなりたつ。いま，

$$\left.\begin{aligned}
&A(t) = A_\varepsilon(t) = O_{\bar{n},\bar{n}}。\ (O_{\bar{n},\bar{n}}\text{ は }\bar{n}\text{ 次元零行列}) \\
&B(t) = H^+ \begin{bmatrix} W(t_1, t) \\ \vdots \\ W(t_n, t) \end{bmatrix}, \quad B_\varepsilon(t) = H_\varepsilon^+ \begin{bmatrix} W_\varepsilon(t_1, t) \\ \vdots \\ W_\varepsilon(t_n, t) \end{bmatrix} \\
&C(t) = [W(t, \tau_1) \cdots W(t, \tau_n)]\, G^+ \\
&C_\varepsilon(t) = [W_\varepsilon(t, \tau_1) \cdots W_\varepsilon(t, \tau_n)]\, G_\varepsilon^+
\end{aligned}\right\} \tag{1·94}$$

とおくと，式(1·86)，(1·87)，(1·89)および(1·93)より，システム(A, B, C)と$(A_\varepsilon, B_\varepsilon, C_\varepsilon)$はそれぞれ$W(t, \tau)$と$W_\varepsilon(t, \tau)$を実現する。また，それらが式(1·82)と(1·83)を満たすことも容易に証明される。（証明終）

1·5 結言

インパルス応答行列$W(t, \tau)$の実現可能性判定，および，その実現を求める問題の一つの解答を与えた。さらに，実現不可能なインパルス応答行列の近似的実現，および，近い“距離”にある二つの実現可能なインパル

ス応答行列の関係について考察した。本研究では，実現条件の式(1・6)において因果律の条件 $t \geq \tau$ を考慮に入れていない。この条件を考慮に入れた実現問題に関してまだ研究の余地がある。

第2章 インパルス応答行列の可制御な実現，有界な実現および安定な実現

2・1. 序言

システム理論の基本問題の一つとして，インパルス応答行列$W(t,\tau)$から，式（1・5）を満たすシステム（A，B，C）を構成する問題，すなわち，インパルス応答行列$W(t,\tau)$の実現問題がある[1~9]。$W(t,\tau)$の実現（すなわち，$W(t,\tau)$を実現するシステム）のなかで，その状態空間の次元が最小な実現を$W(t,\tau)$の最小実現といわれる。

Kalman[1]およびYoula[2]によって，定常な実現可能な$W(t,\tau)$の定係数行列（行列$A(t)$，$B(t)$および$C(t)$が時間に関して一定）をもつ最小実現は完全可制御で完全可観測であることが示されている。さらに，$\int_{-\infty}^{t}\|W(t,\tau)\|\,d\tau$が有界（この条件はシステムが外部安定であることと等価である）ならば，指数関数的安定[22]（exponentially stable）であることがSilvermanとAndersonによって示されている[23]。しかし，非定常な$W(t,\tau)$については一般にそのようなことがいえない。$W(t,\tau)$がどのような条件を満たせば，完全可制御な$W(t,\tau)$の最小実現が存在するかが問題になる。非定常な実現可能な$W(t,\tau)$に対して，係数行列$A(t)$が任意である最小実現はつねに構成できるから[24]，$W(t,\tau)$の安定[23]（または，指数関数的安定あるいは一様制限的安定*（uniformly restrictively stable））な最小実現はつねに存在する。しかし，その実現の係数行列$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$が有界でしかも安定な性質をもつ$W(t,\tau)$の実現が存在するためには，$W(t,\tau)$にどのような条件をつけ加えればよいか，すなわち，その条件を求めることが問題になる。さらに，$W(t,\tau)$の実現を実際にアナログ計算機で構成するとき，その係数行列が有界であること，さらには，その実現が安定であることも要求される。

---

* 文献(25)に制限的安定（restrictive stability）の定義がある。一様制限的安定は制限的安定が初期時刻t_0に関して一様になりたつことを意味する。正確な定義は2・4節で述べる。

Silverman は，$W(t,\tau)$ が無限回微分可能であるという仮定のもとに，有界な（無限回微分可能な）係数行列をもつ一様可制御で一様可観測な[6] $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための（かなり複雑な）十分条件，および，有界な係数行列をもつ指数関数的安定な一様可制御な一様可観測な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための（かなり複雑な）十分条件を与えている。[9]

本章では，非定常な実現可能なインパルス応答行列 $W(t,\tau)$ に対して，完全可制御な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための必要十分条件を求める。また，有界な係数行列をもつ $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための十分条件，および，必要条件を与える。さらに，有界な係数行列をもつ一様制限的安定な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための必要十分条件，および，有界な係数行列をもつ指数関数的安定な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための必要条件と十分条件を与える。

2・2．可制御な実現

本節では，実現可能な $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ に対して，完全可制御な $W(t,\tau)$ の最小実現が存在するための必要十分条件を求める。

システム（A，B，C）において，初期状態 $x(t_0)=x_0$ に対する時刻 t での状態 $x(t)$ は，$x(t)=x(t;x_0,t_0)$ とかくと，

$$x(t;x_0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (2\cdot1)$$

で与えられる[1],[2]。

システム（A，B，C）が完全可制御[26]であるとは，任意の初期時刻 t_0 と任意の初期状態 x_0 に対して，t_0 より大きい有限の時刻 t_1 と閉区間 $[t_0,\ t_1]$ で定義された区分的に連続な入力 $u(t)$ が存在して，$x(t_1;x_0,t_0)=0_n$ となることである。これは，任意の t_0 に対して，$\Phi(t_0,t)B(t)$ の n 個の行ベクトル関数が $t_0\leqq t<\infty$ の上で一次独立であることと等価であることが知られている[27]。

［定理 2・1］ 実現可能な位数 $\bar{n}$ の $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ に対して，

$W(t,\tau)$の完全可制御な最小実現が存在するための必要十分条件は，ある時刻列 $t_1,\cdots,t_n$，および，任意の τ_0 に対して τ_0 より大きい時刻列 $\tau_1,\cdots,\tau_n$（すなわち，$\tau_0 \leqq \tau_i$；$i=1,\cdots,n$）が存在して，

$$\mathrm{rank}\, W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_n \\ \tau_1,\cdots,\tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (2\cdot2)$$

が成立することである。

さらに，$W(t,\tau)$の完全可制御な最小実現が存在するとき，上の整数 n は $\bar{n}$ に等しくとれる。

（証明） 必要： $W(t,\tau)$の完全可制御な最小実現を（A，B，C）とすると，補題1・2より，（A，B，C）の次数（すなわち，状態空間の次元）は $\bar{n}$ となり，式（1・5）より，

$$W(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau), \qquad -\infty < t;\ \tau < \infty \qquad (2\cdot3)$$

となる。一般に状態遷移行列 $\Phi(t,\tau)$ に対して，

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t,\tau_0)\Phi(\tau_0,\tau) \qquad (2\cdot4)$$

であるから，

$$P(t) = C(t)\Phi(t,0), \qquad Q(\tau) = \Phi(0,\tau)B(\tau) \qquad (2\cdot5)$$

とおくと，式（2・3）より

$$W(t,\tau) = P(t)Q(\tau), \qquad -\infty < t,\ \tau < \infty \qquad (2\cdot6)$$

となる。$P(t)$ と $Q(\tau)$ はそれぞれ $r\times\bar{n}$ と $\bar{n}\times p$ の行列であるので，補題1・2より，$W(t,\tau)$の分解（2・6）は既約な分解となる。したがって，$P(t)$ の $\bar{n}$ 個の列ベクトル関数 $p_1(t),\cdots,p_{\bar{n}}(t)$ が $-\infty<t<\infty$ の上で一次独立となる。式（1・21）で与えられる行列 U の階数が $\bar{n}$ であることの証明法と同様にして，上のことより，時刻列 $t_1,\cdots,t_{\bar{n}}$ が存在して，つぎの行列 U の階数が $\bar{n}$ となる。

$$U=\begin{bmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_{\bar{n}}) \end{bmatrix} \tag{2·7}$$

$Q(\tau)$について，式(2・4)を用いると，式(2・5)より

$$Q(\tau)=\Phi(0,\tau_0)\Phi(\tau_0,\tau)B(\tau) \tag{2·8}$$

となる。(A, B, C)が完全可制御であるので，任意のτ_0に対して，$\Phi(\tau_0,\tau)B(\tau)$のn個の行ベクトル関数が$\tau_0 \leqq \tau < \infty$の上で一次独立となる。ゆえに，式(2・8)および行列$\Phi(0,\tau_0)$が正則であることより，任意のτ_0に対して，$Q(\tau)$の$\bar{n}$個の行ベクトル関数も$\tau_0 \leqq \tau < \infty$の上で一次独立となる。したがって，行列$U$の階数が$\bar{n}$となる時刻列$t_1,\cdots,t_{\bar{n}}$の存在の証明法と同様に，任意の$\tau_0$に対して，$\tau_0$より大きい時刻列$\tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}}$が存在して，

$$V=[Q(\tau_1)\cdots Q(\tau_{\bar{n}})] \tag{2·9}$$

となる$\bar{n}\times\bar{n}p$の行列Vの階数が$\bar{n}$となる。行列UとVがそれぞれ$\bar{n}r\times\bar{n}$と$\bar{n}\times\bar{n}p$の階数がともに$\bar{n}$の行列であり，しかも

$$W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_{\bar{n}} \\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}} \end{pmatrix}=UV \tag{2·10}$$

がなりたつので，

$$\operatorname{rank} W\begin{pmatrix} t_1,\cdots,t_{\bar{n}} \\ \tau_1,\cdots,\tau_{\bar{n}} \end{pmatrix}=\bar{n} \tag{2·11}$$

となる。

十分： 補題1・2より，$W(t,\tau)$の既約な分解を，

$$W(t,\tau)=P(t)Q(\tau) \tag{2·12}$$

とする。ここで，$P(t)$と$Q(t)$はそれぞれ$r\times\bar{n}$と$\bar{n}\times p$の行列である。いま，$A(t)=0_{\bar{n},\bar{n}}$，$B(t)=Q(t)$および$C(t)=P(t)$とおくと，補題1・2および式(2・12)より，システム(A, B, C)は$W(t,\tau)$の最小実現である。$\Phi(\tau_0,\tau)B(\tau)=Q(\tau)$であるから，任意

のτ_0に対して，$Q(\tau)$の$\bar{n}$個の行ベクトル関数が$\tau_0 \leqq \tau < \infty$の上で一次独立であることを証明すれば，システム（$A$，$B$，$C$）は完全可制御な$W(t,\tau)$の最小実現となる。仮定より，ある時刻列$t_1, \cdots, t_n$，および，任意の$\tau_0$に対して，$\tau_0$より大きい時刻列$\tau_1, \cdots, \tau_n$が存在して，

$$\mathrm{rank}\, W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \bar{n} \qquad (2 \cdot 13)$$

となる。また，式（2・12）より，

$$W\begin{pmatrix} t_1, \cdots, t_n \\ \tau_1, \cdots, \tau_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{bmatrix} \left[Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) \right] \qquad (2 \cdot 14)$$

がなりたつから，式（2・13）より

$$\mathrm{rank} \left[Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) \right] = \bar{n} \qquad (2 \cdot 15)$$

となる。いま，$\bar{n}$次元行ベクトルaが存在して，

$$a Q(\tau) = 0_{1,p} \quad , \quad \tau_0 \leqq \tau < \infty \qquad (2 \cdot 16)$$

が成立しているとする。そのとき，

$$a \left[Q(\tau_1) \cdots Q(\tau_n) \right] = 0_{1,np} \qquad (2 \cdot 17)$$

となり，式（2・15）より，

$$a = 0_{1,\bar{n}} \qquad (2 \cdot 18)$$

となる。よって，$Q(\tau)$の$\bar{n}$個の行ベクトル関数が$\tau_0 \leqq \tau < \infty$の上で一次独立となる。（証明終）

（注１）定理２・１の証明よりわかるように，完全可制御な最小実現をもつ$W(t,\tau)$の任意の最小実現は完全可制御である。

（注２）実現可能な$W(t,\tau)$の完全可観測な最小実現の存在，および，完全可制御で完全可観測な最小実現の存在に関しても上の定理とほぼ同様なことがいえる。

［例題2・1］ つぎの二つの$W_1(t,\tau)$と$W_2(t,\tau)$に定理2・1を応用してみる。

$$W_1(t,\tau)=e^{t+\tau}$$

$$W_2(t,\tau)=\begin{cases}|1-t||1-\tau| & ,\ |t|\leqq 1\ ,\ |\tau|\leqq 1\\ 0 & ,\ \text{その他}\end{cases}$$

$W_1(t,\tau)$と$W_2(t,\tau)$の位数はともに1である。任意のtとτについて，$W_1(t,\tau)\neq 0$なので，$\mathrm{rank}\,W_1(t,\tau)=1$となり，$W_1(t,\tau)$の完全可制御な最小実現が存在する。$W_2(t,\tau)$に関して，1より大きい$\tau$に対して，$W_2(t,\tau)=0$となり，$\mathrm{rank}\,W_2(t,\tau)\neq 1$となるので，$W_2(t,\tau)$の完全可制御な最小実現は存在しない。

2・3 有界な実現

インパルス応答行列$W(t,\tau)$の実現（A，B，C）が有界であるとは，すべてのtに対して，

$$\|A(t)\|\leqq\lambda\ ,\quad \|B(t)\|\leqq\lambda\ ,\quad \|C(t)\|\leqq\lambda \qquad (2\cdot19)$$

となる正定数λが存在することである[9]。

定理1・1より，位数$\bar{n}$の実現可能な$r\times p$の行列$W(t,\tau)$に対して，

$$\mathrm{rank}\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n\\ \tau_1,\cdots,\tau_n\end{pmatrix}=\bar{n} \qquad (2\cdot20)$$

となる時刻列$t_1,\cdots,t_n,\tau_1,\cdots,\tau_n$が存在する。ゆえに，

$$\mathrm{rank}\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n\\ \tau_1,\cdots,\tau_n\end{pmatrix}^{+}=\mathrm{rank}\,W\begin{pmatrix}t_1,\cdots,t_n\\ \tau_1,\cdots,\tau_n\end{pmatrix}=\bar{n} \qquad (2\cdot21)$$

がなりたつので[10]，ともに階数が$\bar{n}$となる$np\times\bar{n}$の行列Kと$\bar{n}\times nr$の行列Lが存在して，

$$KL = W\begin{pmatrix} t_1, \cdots t_m \\ \tau_1, \cdots, \tau_m \end{pmatrix}^{+} \qquad (2\cdot22)$$

がなりたつ。したがって，式(2・22)と定理1・1の式(1・16)を用いると，容易につぎの補題を得る。

［補題2・1］ 位数$\bar{n}$の実現可能な$r \times p$の行列$W(t,\tau)$に対して，つぎの式で与えられるシステム(A_0，B_0，C_0)は$W(t,\tau)$の最小実現である。

$$\left.\begin{aligned} A_0(t) &= 0_{\bar{n},\bar{n}} , \qquad B_0(t) = L\begin{bmatrix} W(t_1,t) \\ \vdots \\ W(t_m,t) \end{bmatrix} \\ C_0(t) &= [W(t,\tau_1) \cdots W(t,\tau_m)]K \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot23)$$

ここで，時刻列$t_1, \cdots, t_m$，$\tau_1, \cdots, \tau_n$は式(2・20)をみたす任意の時刻列，行列KとLはともに階数$\bar{n}$の式(2・22)をみたす任意の$np \times \bar{n}$と$\bar{n} \times nr$の行列である。(証明は容易であるので，略す)

Kalman[1]やYoula[2]によってつぎの補題が与えられている。

［補題2・2[2]］ ($\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$)が$W(t,\tau)$の最小実現ならば，$W(t,\tau)$の他の任意の最小実現(A，B，C)は，

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= -T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t) + T^{-1}(t)\bar{A}(t)T(t) \\ B(t) &= T^{-1}(t)\bar{B}(t) \\ C(t) &= \bar{C}(t)T(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot24)$$

で与えられる。ここで，$T(t)$は連続微分可能でかつ連続微分可能な逆行列をもつ任意の$\bar{n} \times \bar{n}$の行列で，$\bar{n}$は$W(t,\tau)$の位数である。(証明は文献(2)を参照)

補題2・1と2・2を用いて，つぎの補題を得る。

［補題2・3］ 位数$\bar{n}$の実現可能な$W(t,\tau)$に対して，$W(t,\tau)$の有

界な最小実現が存在するための必要十分条件は，連続微分可能でかつ連続微分可能な逆行列をもつ $\bar{n}\times\bar{n}$ の行列 $T(t)$ が存在して，

$$\left\| [W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_m)]KT(t) \right\| \leqq \lambda, \quad -\infty<t<\infty \quad (2\cdot 25)$$

$$\left\| T^{-1}(t)L\begin{bmatrix} W(t_1,t) \\ \vdots \\ W(t_n,t)\end{bmatrix} \right\| \leqq \lambda \quad -\infty<t<\infty \quad (2\cdot 26)$$

$$\left\| T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t) \right\| \leqq \lambda \quad -\infty<t<\infty \quad (2\cdot 27)$$

がなりたつことである。ここで，λ はある正定数である。また，$t_1,\cdots,t_n$，$\tau_1,\cdots,\tau_m$ は式（2・20）をみたす任意の時刻列，行列 K と L はともに階数が $\bar{n}$ の式（2・22）をみたす任意の $np\times\bar{n}$ と $\bar{n}\times nr$ の行列である。

（証明）　(A_0, B_0, C_0) を補題 2・1 の式（2・23）で与えられる $W(t,\tau)$ の最小実現とする。$W(t,\tau)$ の他の任意の最小実現を（A，B，C）とすると，補題2・2より，連続微分可能で連続微分可能な逆行列をもつ $\bar{n}\times\bar{n}$ の行列 $T(t)$ が存在して，

$$A(t) = -T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t) \quad (2\cdot 28)$$

$$B(t) = T^{-1}(t)B_0(t) \quad (2\cdot 29)$$

$$C(t) = C_0(t)T(t) \quad (2\cdot 30)$$

がなりたつ。したがって，式（2・19）と（2・23）を用いると，補題が導かれる。（証明終）

実現可能な $W(t,\tau)$ に対して，$W(t,\tau)$ の有界な最小実現が存在するかどうかを判定するのに，式（2・25），（2・26）および（2・27）を満たす $\bar{n}\times\bar{n}$ の正則な変換行列（座標変換）$T(t)$ が存在するかどうかを判定しなければならない。これは一般に非常に困難な問題で，$W(t,\tau)$ にある種の条件があれば，実際に式（2・25），（2.26）および（2・27）をみたす正則

な変換行列 $T(t)$ が存在することをつぎに示す。つぎの定理の条件 $(2\cdot31)$ は Silverman によって与えられた有界な最小実現の存在の十分条件[9]よりもかなり一般的*で簡単でもある。

［定理 2・2］ 実現可能な $r\times p$ の行列 $W(t,\tau)$ に対して，$W(t,\tau)$ の有界な最小実現が存在するための十分条件は，有界でかつ連続な導関数をもつ実関数 $f(t)$ が存在して，任意の t と τ に対して，

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \lambda e^{f(t)-f(\tau)} \tag{2・31}$$

がなりたつことである。ここで，λ はある正定数である。

（証明） 式 $(2\cdot31)$ を満たす関数 $f(t)$ に対して，

$$T(t)=e^{-f(t)}I_{\bar{n},\bar{n}}\,,\quad (I_{\bar{n},\bar{n}}\text{ は }\bar{n}\times\bar{n}\text{ の単位行列}) \tag{2・32}$$

とおく。ここで，$\bar{n}$ は $W(t,\tau)$ の位数である．すると，$T(t)$ は連続微分可能でかつ連続微分可能な逆行列をもつ $\bar{n}\times\bar{n}$ の行列である。式 $(2\cdot31)$ と $(2\cdot32)$ を用いると，式 $(2\cdot25)$ の左辺は

$$\begin{aligned}
&\|[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_n)]KT(t)\|\\
&\leqq e^{-f(t)}\|K\|\|[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_n)]\|\\
&\leqq e^{-f(t)}\|K\|\sum_{i=1}^{n}\|W(t,\tau_i)\|\\
&\leqq e^{-f(t)}\|K\|\sum_{i=1}^{n}\lambda e^{f(t)}\cdot e^{-f(\tau_i)}\\
&=\lambda\|K\|\sum_{i=1}^{n}e^{-f(\tau_i)}
\end{aligned} \tag{2・33}$$

となり、有界である。同様に，式 $(2\cdot26)$ の左辺は

* 定理の条件 $(2\cdot31)$ が Silverman の十分条件よりもかならずしも弱いとはいえない。ただ，Silverman の十分条件に適用される $W(t,\tau)$ は無限回微分可能であるのに対し，定理の条件 $(2\cdot31)$ に適用される $W(t,\tau)$ は連続であればよいという意味でかなり一般的である。

$$\left\| T^{-1}(t)\, L \begin{bmatrix} W(t_1, t) \\ \vdots \\ W(t_n, t) \end{bmatrix} \right\| \leqq \lambda \, \| L \| \sum_{i=1}^{n} e^{f(t_i)} \tag{2・34}$$

となり，有界である。式(2・27)の左辺は，式(2・32)を用いると，

$$\left\| T^{-1}(t) \frac{d}{dt} T(t) \right\| = \left| \frac{d}{dt} f(t) \right| \tag{2・35}$$

となり，仮定より $f(t)$ の導関数 $\frac{d}{dt}f(t)$ が有界であるから，式(2・27)の左辺も有界となる。（証明終）

［系］　実現可能な $W(t,\tau)$ に対して，つぎの条件 (i)，(ii)，(iii) のいずれか一つが成立すれば，$W(t,\tau)$ の有界な最小実現が存在する。

(i)　$\| W(t,\tau) \| \leqq \lambda_1 e^{\lambda_2 (t-\tau)}$，　$-\infty < t, \tau < \infty$　(2・36)

(ii)　$\| W(t,\tau) \| \leqq \lambda_1 e^{-\lambda_2 (t-\tau)}$，　$-\infty < t, \tau < \infty$　(2・37)

(iii)　$\| W(t,\tau) \| \leqq \lambda_1$，　$-\infty < t, \tau < \infty$　(2・38)

ここで，λ_1 と λ_2 はある正定数である。

条件(38)がかなり弱い* ことを知る基準として，つぎの定理を示しておく。

［定理2・3］　実現可能な $r \times p$ の行列 $W(t,\tau)$ に対して，$W(t,\tau)$ の有界な実現が存在すれば，

$$\| W(t,\tau) \| \leqq \lambda_1 e^{\lambda_2 |t-\tau|}, \quad -\infty < t, \tau < \infty \tag{2・39}$$

が成立する。ここで，λ_1 と λ_2 はある正定数である。

（証明）　$W(t,\tau)$ の有界な実現を (A, B, C) とすると，

$$W(t,\tau) = C(t)\, \Phi(t,\tau)\, B(\tau), \quad -\infty < t, \tau < \infty \tag{2・40}$$

がなりたつ。$\| A(t) \| \leqq \lambda$ のとき，

* 式(2.39)が成立すれば，$t \geqq \tau$ で式(2.36)が，$t \leqq \tau$ で式(2.37)が成立する。

$$\| \Phi(t,\tau) \| \leqq e^{\lambda|t-\tau|} \quad , \quad -\infty < t, \tau < \infty \qquad (2\cdot41)$$

が成立することが後に示されるので，$\|B(t)\| \leqq \lambda$，$\|C(t)\| \leqq \lambda$ および式(2・40)と(2・41)より，

$$\| W(t,\tau) \| \leqq \lambda^2 e^{|t-\tau|} \quad , \quad -\infty < t, \tau < \infty \qquad (2\cdot42)$$

となる。したがって，式(2・39)を得る。

式(2・41)の証明。同次ベクトル微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)\, x(t) \qquad (2\cdot43)$$

を考える。$x(\tau) = x_0$ とおいて，式(2・43)の両辺を積分すると，

$$x(t) - x_0 = \int_\tau^t A(\xi)\, x(\xi)\, d\xi \qquad (2\cdot44)$$

となる。したがって，$t \geqq \tau$ のとき

$$\| x(t) \| \leqq \| x_0 \| + \int_\tau^t \| A(\xi) \| \| x(\xi) \| d\xi \qquad (2\cdot45)$$

がなりたつ。上式に Bellman-Gronwall の補題[30]を用いると，

$$\| x(t) \| \leqq \| x_0 \| e^{\int_\tau^t \| A(\xi) \| d\xi} \quad , \quad t \geqq \tau \qquad (2\cdot46)$$

となる。また，$x(t) = \Phi(t,\tau) x_0$ であるから，式(2・46)より，

$$\| \Phi(t,\tau) \| \leqq e^{\int_t^\tau \| A(\xi) \| d\xi} \quad , \quad t \geqq \tau \qquad (2\cdot47)$$

が成立する。いま，式(2・43)の随伴ベクトル微分方程式

$$\frac{d}{dt} z(t) = -A^*(t)\, z(t) \qquad (2\cdot48)$$

を考える。式(2・48)の状態遷移行列を $\Psi(t,\tau)$ とすると，

$$\Psi(t,\tau) = \left[\Phi(t,\tau)^*\right]^{-1} = \Phi^*(\tau,t) \qquad (2\cdot49)$$

が成立する[31]。$\tau \geqq t$ のとき，$\Psi(\tau,t)$ に式(2・47)を用いれば，

$$\| \Psi(\tau, t) \| \leqq e^{\int_t^\tau \| -A^*(\xi) \| d\xi} \quad , \tau \geqq t \qquad (2 \cdot 50)$$

を得る。一般に，行列Fに対して，

$$\| F \| = \| F^* \| = \| -F^* \| \qquad (2 \cdot 51)$$

がなりたつから，[32] 式（2・49）と（2・50）より，$\tau \geqq t$ のとき，

$$\| \Phi(t, \tau) \| = \| \Phi^*(t, \tau) \| = \| \Psi(\tau, t) \|$$
$$\leqq e^{\int_t^\tau \| -A^*(\xi) \| d\xi} = e^{\int_t^\tau \| A(\xi) \| d\xi} \quad , \tau \geqq t \quad (2 \cdot 52)$$

が成立する。$\| A(t) \| \leqq \lambda$ であるから，式（2・47）と（2・52）より，式（2・41）を得る。（証明終）

［例題2・2］ 定理2・2と2・3の応用として，つぎの二つの $W_3(t, \tau)$ と $W_4(t, \tau)$ に対して，それぞれの有界な実現が存在するかどうかを判定してみる。

$$W_3(t, \tau) = \begin{cases} e^{-t+\tau} \sin t & , -\infty < t \leqq 0 , -\infty < \tau < \infty \\ e^{-t+\tau} & , 0 \leqq t < \infty , -\infty < \tau < \infty \end{cases}$$

$$W_4(t, \tau) = e^{-t^2+\tau^2} \quad , -\infty < t, \tau < \infty$$

$W_3(t, \tau)$ と $W_4(t, \tau)$ はともに実現可能であるが，定常実現可能[2]ではない。さらに，$W_3(t, \tau)$ は連続微分可能でないので，Silverman によって与えられた方法[9]は適用できない。任意の t と τ に対して，

$$\| W_3(t, \tau) \| \leqq e^{-t+\tau}$$

がなりたつので，定理2・2より，$W_3(t, \tau)$ の有界な最小実現が存在する。任意の t と τ に対して，

$$\| W_4(t, \tau) \| = e^{-t^2+\tau^2}$$

がなりたち，定理2・3の条件（2・39）を満たさないから，$W_4(t,\tau)$の有界な実現は存在しない。

2・4．安定な実現

システム（A，B，C）が一様制限的安定（または，両側で一様安定（uniformly stable at both sides））であるとは，入力 $u(t)\equiv 0_p$ のとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，任意の t_0 に対して，

$$\|x_0\|\leqq\delta \text{ ならば } \|x(t;x_0,t_0)\|\leqq\varepsilon,\ -\infty<t<\infty \qquad (2\cdot53)$$

がなりたつことである。ここで，$x(t;x_0,t_0)$ は，初期状態 $x(t_0)=x_0$ および入力 $u(t)\equiv 0_p$ に対する式（2・1）で与えられる時刻 t での状態である。

〔補題2・4〕 （A，B，C）が一様制限的安定であるための必要十分条件は，

$$\|\Phi(t,\tau)\|\leqq\lambda\ ,\qquad -\infty<t,\tau<\infty \qquad (2\cdot54)$$

が成立する正定数λが存在することである。

（証明） 式（2・1）において，$u(t)\equiv 0_p$ とすると，

$$x(t;x_0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0 \qquad (2\cdot55)$$

を得る。

十分：いま，式（2・54）が成立する正定数λが存在するとする。任意の$\varepsilon>0$ に対して，$\delta=\varepsilon/\lambda$ とすると，$\|x_0\|\leqq\delta$ ならば，式（2・54）と（2・55）より，

$$\|x(t;x_0,t_0)\|\leqq\|\Phi(t,t_0)\|\|x_0\|\leqq\lambda\cdot\varepsilon/\lambda$$

$$=\varepsilon\ ,\qquad -\infty<t<\infty \qquad (2\cdot56)$$

がなりたつ。

必要： ある$\varepsilon > 0$に対して，ある$\delta > 0$が存在して，式(2・53)が成立しているとする。システム（A，B，C）の次数をnとし，x_0の第i番目の要素をx_0^iとして，

$$\left.\begin{array}{l} x_0^i = \delta \\ \\ x_0^j = 0 \quad , \; j = 1, \cdots, n \,;\, j \neq i \end{array}\right\} \qquad (2\cdot 57)$$

とおくと，式(2・53)と(2・55)より，

$$\varepsilon \geqq \| x(t; x_0, t_0) \| = \| \Phi^i(t, t_0) \| \delta \qquad (2\cdot 58)$$

がなりたつ。ここで，$\Phi^i(t, t_0)$は行列$\Phi(t, t_0)$の第i番目の列ベクトルである。したがって，

$$\| \Phi^i(t, t_0) \| \leqq \varepsilon / \delta \quad , \qquad -\infty < t, t_0 < \infty \qquad (2\cdot 59)$$

が成立する。式(2・59)がすべてのi，($i = 1, \cdots, n$)について成立するから，

$$\| \Phi(t, t_0) \| \leqq \sum_{i=1}^{n} \| \Phi^i(t, t_0) \| \leqq \frac{n\varepsilon}{\delta} \; , -\infty < t, t_0 < \infty \quad (2\cdot 60)$$

を得る。(証明終)

補題2・1と上の補題から，つぎの定理が導かれる。

［定理2・4］ 実現可能な$r \times p$の行列$W(t, \tau)$に対して，$W(t, \tau)$の有界な一様制限的安定な最小実現が存在するための必要十分条件は，

$$\| W(t, \tau) \| \leqq \lambda \qquad , -\infty < t, \tau < \infty \qquad (2\cdot 61)$$

が成立する正定数λが存在することである。

（証明） 必要： $W(t, \tau)$の有界な一様制限的安定な最小*実現を（A，B，C）とすると，

$$W(t, \tau) = C(t) \Phi(t, \tau) B(\tau) \qquad (2\cdot 62)$$

---

* 必要の証明において，最小の仮定はいらない。

がなりたつ。$C(t)$ と $B(t)$ が有界で，補題2・4より $\Phi(t,\tau)$ も有界なので，式(2・62)を用いると，$W(t,\tau)$ も有界となる。

十分：　システム (A_0, B_0, C_0) を補題2・1の式(2・23)で与えられる $W(t,\tau)$ の最小実現とする。仮定より，$W(t,\tau)$ が有界なので，式(2・23)より，$B_0(t)$ と $C_0(t)$ も有界になる。$A_0(t) = 0_{n,n}$ であるので，$A_0(t)$ に対する状態遷移行列を $\Phi_0(t,\tau)$ とすると，

$$\Phi_0(t,\tau) = I_{n,n} \tag{2・63}$$

となり，補題2・4の条件(2・54)を満たすから，(A_0, B_0, C_0) は一様制限的安定である。（証明終）

実現可能な $W(t,\tau)$ に対して，定理2・4の証明より，もし条件(2・61)を満たすならば，補題2・1の式(2・23)で与えられるシステム (A_0, B_0, C_0) は $W(t,\tau)$ の一つの有界な一様制限的安定な最小実現となる。つぎの定理は，このシステム (A_0, B_0, C_0) から，ある種の正則な変換行列（座標変換）によって，$W(t,\tau)$ の他の任意の有界な一様制限的安定な最小実現が求まることを示す。

［定理2・5］　実現可能な $r \times p$ の行列 $W(t,\tau)$ に対して，もし

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \lambda \quad , -\infty < t, \tau < \infty \tag{2・64}$$

を満たす正定数 λ が存在すれば，$W(t,\tau)$ の任意の有界な一様制限的安定な最小実現 (A, B, C) はつぎの式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= -T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t) \\ B(t) &= T^{-1}(t)B_0(t) \\ C(t) &= C_0(t)T(t) \end{aligned}\right\} \tag{2・65}$$

ここで，$B_0(t)$ と $C_0(t)$ は補題2・1の式(2・23)で与えられる $n \times p$ と $r \times n$ の行列，$T(t)$ は連続微分可能でかつ連続微分可能な逆行列をもち，しかも

$$\|T(t)\| \leqq \lambda, \quad \|T^{-1}(t)\| \leqq \lambda, \quad \left\|\frac{d}{dt}T(t)\right\| \leqq \lambda \tag{2・66}$$

を満たす任意の$\bar{n}\times\bar{n}$の行列である。ただし，λは正定数で$\bar{n}$は$W(t,\tau)$の位数である。

(証明) 補題2・1と2・2より，式(2・65)で与えられるシステム(A, B, C)は$W(t,\tau)$の最小実現となる。式(2・64)より，$B_0(t)$と$C_0(t)$が有界となるので，式(2・65)と(2・66)を用いると，$A(t)$と$B(t)$および$C(t)$も有界となる。また，式(2・65)より，

$$\Phi(t,\tau) = T^{-1}(t)T(\tau) \tag{2・67}$$

がなりたつので，式(2・66)を用いると

$$\|\Phi(t,\tau)\| \leqq \lambda^2, \qquad -\infty < t, \tau < \infty \tag{2・68}$$

となる。したがって，補題2・4を用いると，(A, B, C)は$W(t,\tau)$の有界な一様制限的安定な最小実現となる。

逆に，$W(t,\tau)$の任意の有界な一様制限的安定な最小実現を(A, B, C)とする。補題2・1と2・2より，連続微分可能でかつ連続微分可能な逆行列をもつ$\bar{n}\times\bar{n}$の行列$T(t)$が存在して，

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= -T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t) \\ B(t) &= T^{-1}(t)B_0(t) \\ C(t) &= C_0(t)T(t) \end{aligned}\right\} \tag{2・69}$$

がなりたつ。したがって，

$$\Phi(t,\tau) = T^{-1}(t)T(\tau) \tag{2・70}$$

となる。式(2・70)より，

$$T^{-1}(t) = \Phi(t,0)T^{-1}(0) \tag{2・71}$$

$$T(t)=T(0)\Phi(0,t) \tag{2.72}$$

がなりたつ。補題2・4より，$\Phi(t,0)$と$\Phi(0,t)$が有界であるので，式(2・71)と(2・72)より，$T(t)$と$T^{-1}(t)$も有界となる。また，式(2・69)より

$$\frac{d}{dt}T(t)=-T(t)A(t) \tag{2.73}$$

となるので，$T(t)$と$A(t)$が有界であることより，$\frac{d}{dt}T(t)$も有界となる。（証明終）

システム（A，B，C）が指数関数的安定[22]であるとは，$u(t)\equiv 0_p$のとき，任意の$\varepsilon>0$に対して，ある$\lambda_1>0$と$\lambda_2>0$が存在して，任意のt_0に対して，

$$\|x_0\|\leqq\varepsilon \text{ ならば } \|x(t;x_0,t_0)\|\leqq\lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad t\geqq t_0 \tag{2.74}$$

がなりたつことである。これは

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqq\lambda_1 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, \quad t\geqq t_0 \tag{2.75}$$

となる正定数λ_1とλ_2が存在することと等価であることが知られている[34]。

実現可能な$W(t,\tau)$に対して，$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な実現の存在に関して，つぎの定理が導かれる。この定理の条件(2・77)は Silverman によって与えられた$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小実現の存在の十分条件[9]よりもかなり一般的*で簡単でもある。

［定理2・6］ 実現可能な$r\times p$の行列$W(t,\tau)$に対して，

1° $W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な実現が存在すれば，つぎの式がなりたつ正定数λ_1と$\lambda_3\geqq\lambda_2$なる正定数λ_2とλ_3が存在する。

---

* 定理の条件(2・77)がかならずしも Silverman の十分条件よりも弱いとはいえない。ただ，Silverman の十分条件に適用される$W(t,\tau)$は無限回微分可能でなければならないが，定理の条件(2・77)に適用される$W(t,\tau)$は連続であればよいという意味でかなり一般的である。

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_2(t-\tau)} & , \quad t \geqq \tau \\ \lambda_1 e^{-\lambda_3(t-\tau)} & , \quad t \leqq \tau \end{cases} \qquad (2\cdot76)$$

2° もし

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \lambda_4 e^{-\lambda_5(t-\tau)} , \quad -\infty < t, \tau < \infty \qquad (2\cdot77)$$

がなりたつならば，$W(t,\tau)$ の有界な指数関数的安定な最小実現が存在する。ここで，λ_4 と λ_5 はある正定数である。

（証明） 1°の証明。$W(t,\tau)$ の有界な実現が存在するので，定理2・3より，ある正定数 λ_6 と λ_7 が存在して，

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \lambda_6 e^{-\lambda_7(t-\tau)} , \quad t \leqq \tau \qquad (2\cdot78)$$

が成立する。$W(t,\tau)$ の有界な指数関数的安定な実現が存在するから，式（1・5），（2・19）および（2・75）より，ある正定数 λ_8 と λ_9 が存在して，

$$\|W(t,\tau)\| \leqq \lambda_8 e^{-\lambda_9(t-\tau)} , \quad t \geqq \tau \qquad (2\cdot79)$$

が成立する。いま，λ_6 と λ_8 の大きい方を λ_1，$\lambda_3 = \lambda_7$ とおく。もし $\lambda_7 \geqq \lambda_9$ ならば，$\lambda_2 = \lambda_9$ とおくと，式（2・78）と（2・79）より，式（2，76）が成立することは明らかである。もし，$\lambda_7 < \lambda_9$ ならば，

$$e^{-\lambda_9(t-\tau)} \leqq e^{-\lambda_7(t-\tau)} , \quad t \geqq \tau \qquad (2\cdot80)$$

がなりたつので，$\lambda_2 = \lambda_7$ とおくと，式（2・78），（2・79）および（2・80）より，式（2・76）を得る。

2°の証明。 定理1・1と式（2・22）より，ある時刻列 $t_1, \cdots, t_n, \tau_1, \cdots, \tau_n$ が存在して，

$$W(t,\tau) = [W(t,\tau_1) \cdots W(t,\tau_n)]\, K L \begin{bmatrix} W(t_1,\tau) \\ \vdots \\ W(t_n,\tau) \end{bmatrix} \qquad (2\cdot81)$$

がなりたつ。ここで，KとLは式(2・22)を満たす $np \times \bar{n}$ と $\bar{n} \times nr$ の行列で，$\bar{n}$ はW(t, τ)の位数である。いま，

$$\left.\begin{aligned} A_1(t) &= -\lambda_s I_{\bar{n},\bar{n}} \\ B_1(t) &= e^{-\lambda_s t} L \begin{bmatrix} W(t_1,t) \\ \vdots \\ W(t_n,t) \end{bmatrix} \\ C_1(t) &= e^{\lambda_s t}[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_m)]K \end{aligned}\right\} \tag{2・82}$$

とおく。$A_1(t)$ に対する状態遷移行列を $\Phi_1(t,\tau)$ とすると，

$$\Phi_1(t,\tau) = e^{-\lambda_s(t-\tau)} I_{\bar{n},\bar{n}} \tag{2・83}$$

となる。式(2・81)，(2・82)および(2・83)より

$$W(t,\tau) = C_1(t)\Phi_1(t,\tau)B_1(\tau) \quad , -\infty < t,\tau < \infty \tag{2・84}$$

がなりたち，システム (A_1, B_1, C_1) の次数が $\bar{n}$ に等しいから，システム (A_1, B_1, C_1) は $W(t,\tau)$ の最小実現である。また，式(2・83)より条件(2・75)を満たすから，(A_1, B_1, C_1) は指数関数的安定である。さらに，式(2・77)と(2・82)より，

$$\|A_1(t)\| = \lambda_s \tag{2・85}$$

$$\begin{aligned} \|C_1(t)\| &\leq e^{\lambda_s t}\|[W(t,\tau_1)\cdots W(t,\tau_m)]\|\|K\| \\ &\leq e^{\lambda_s t}\|K\|\sum_{i=1}^{m}\|W(t,\tau_i)\| \\ &\leq e^{\lambda_s t}\|K\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_4 e^{-\lambda_s t}\cdot e^{\lambda_s \tau_i} \\ &= \lambda_4\|K\|\sum_{i=1}^{m}e^{\lambda_s \tau_i} \end{aligned} \tag{2・86}$$

$$\|B_1(t)\| \leqq \lambda_4 \|L\| \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_5 t_i} \qquad (2\cdot 87)$$

がなりたつから，$W(t,\tau)$の最小実現(A_1, B_1, C_1)は有界である。(証明終)

[例題2・3] 例題2・2の$W_3(t,\tau)$が条件(2・77)を満たすから，$W_3(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小実現が存在する。

2・5 結言

実現可能なインパルス応答行列$W(t,\tau)$に対して，$W(t,\tau)$の完全可制御な最小実現が存在するための必要十分条件を示した。また，$W(t,\tau)$の有界な最小実現が存在するための十分条件および必要条件を与えた。

$W(t,\tau)$の有界な最小実現が存在するための簡単な必要十分条件を求める問題は，補題2・3の式(2・25)，(2・26)および(2・27)を満たす正則な行列$T(t)$が存在するための$W(t,\tau)$の簡単な条件を求める問題となり，非常に困難な問題である。また，$W(t,\tau)$の有界な最小でない実現が存在したとき，$W(t,\tau)$の有界な最小実現が存在するかどうか明白でない。

$W(t,\tau)$の有界な一様制限的安定な最小実現が存在するための必要十分条件を明白にした。さらに，$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小実現が存在するための必要条件と十分条件を与えた。$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小でない実現が存在したとき，$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小実現が存在するかどうかまだ明白でない。

結　　　論

インパルス応答行列$W(t,\tau)$が与えられたとき，$W(t,\tau)$から，$W(t,\tau)$を実現するシステムを構成する方法を考察した。

本研究によって得られた結果，および，今後に残された問題を簡単にまとめるとつぎのようになる。

第1章では，インパルス応答行列$W(t,\tau)$が実現可能であるための見通しのよい必要十分条件，およびこれを用いて，$W(t,\tau)$の実現可能性判定の手順を示した。さらに，実現不可能な近似的実現，および近い"距離"にある二つの実現可能なインパルス応答行列の関係についても考察した。本研究では，実現条件において因果律の条件$t\geq\tau$を考慮に入れていない。この条件を考慮に入れた$W(t,\tau)$の実現可能性判定の手順を求めることがまだ残されている。

第2章では，実現可能なインパルス応答行列$W(t,\tau)$に対して，$W(t,\tau)$の完全可制御な最小実現が存在するための必要十分条件を示した。また，$W(t,\tau)$の有界な最小実現が存在するための十分条件と必要条件を与えた。さらに，$W(t,\tau)$の有界な一様制限的安定な最小実現が存在するための必要十分条件，および，$W(t,\tau)$の有界な指数関数的安定な最小実現が存在するための必要条件と十分条件を与えた。$W(t,\tau)$の最小でない有界な実現が存在したとき，$W(t,\tau)$の最小の有界な実現が存在するかどうかまだ明白でない。さらに，$W(t,\tau)$の最小でない有界な指数関数的安定な実現が存在したとき，$W(t,\tau)$の最小の有界な指数関数的安定な実現が存在するかどうかも明白でない。

本研究では，インパルス応答行列$W(t,\tau)$が前もって与えられていることを仮定しているが，このようなことは非常にまれで，入力$u(t)$が与えられたとき，それに対応する出力$y(t)$が与えられるのが普通である。このことから，入力と出力の見地でインパルス応答行列の実現問題に取りくむ必要がある。これについて，システムが定常であるとき，筆者によって研究が進められ，ある程度の結果[35],[36]を得ている。

本研究により，時間変化する工学システム（たとえば，電気回路や化学

プラント）の動的な現象をシュミレーション（simulation）するとき，シュミレーション出来るシステムのインパルス応答のクラスの範囲が明白になる。

謝　　　辞

本研究の全過程を通じて，直接理解ある御指導をたまわり，常に励まされ御助言いただいた藤沢俊男教授，保田　豊助教授に心から感謝の意を表わす。

大学院修士，博士両課程において，御指導御教示をたまわった制御工学教室桜井良文教授，坂和愛幸教授，辻三郎教授ならびに情報工学教室嵩忠雄教授に厚く御礼申し上げる。

文献(7)と(8)を御教示して下さつた九州大学工学部大野研究室の方々に厚く感謝する。

熱心に御討論いただいた前田浩一助手，大学院学生熊谷貞俊氏，ならびに関西情報センター布上康夫氏に心から感謝する。

文献

(1) R. E. Kalman: "Mathematical description of linear dynamical systems", J. SIAM on Control, Ser. A, 1, 2, p. 152 (1963).

(2) D. C. Youla: "The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weighting patterns", J. SIAM on Applied Mathematics, 14, 3, p. 527 (May 1966).

(3) E. G. Gilbert: "Controllability and observability in multivariable control systems", J. SIAM on Control, Ser. A, 2, 1, p. 128 (1963).

(4) L. Weiss and R. E. Kalman: "Contribution to linear system theory", Internat. Journal of Engrg. Sci., 3, p. 141 (1965).

(5) C. A. Desoer and P. Varaiya: "The minimal realization of a nonanticipative impulse response matrix", J. SIAM on Applied Mathematics, 15, 3, p. 754 (May 1967).

(6) L. M. Silverman: "Representation and realization of time-variable linear systems", Technical Repory 94, Department of Electrical Engineering, Columbia University (June 1966).

(7) L. M. Silverman and H. E. Meadows: "Equivalence and synthesis of time-variable linear systems", Proc. 4th Allerton Conf. on Circuit and system Theory, Univ. of Illinois, p. 776 (Oct. 1966)

(8) C. Bruni, A. Ishidori and A.Ruberti: "A method of factorization of the impulse response matrix", IEEE Trans., AC-13, 6, p. 739 (1968).

(9) L. M. Silverman: "Stable realization of impulse response matrices", IEEE Int. Convention, p. 32 (March 1967).

(10) C. A. Desoer and B. H. Whalen: "A note on pseudoinverses", J. SIAM on Applied Mathematics, 11, 2, p. 442 (June 1963).

(11) L. A. Liusternik and V. J. Sobolev: "Elements of functional analysis", p.76, p. 55, Frederick Unger Publishing Company (1961).

(12) 岩波："数学辞典（第2版）", p. 590, p. 192, 岩波書店（昭43）。

(13) 二階堂副包："経済のための線形数学", p. 57（昭36）。

(14) 弥永昌吉，杉浦光夫："応用数学者のための代数学"，岩波書店（昭 35）

(15) 一松 信："2変数関数を積の形で近似することについて"，情報処理，9，1，p.14（昭 43）。

(16) 保田，前田："線形連続制御系に関する一考察"，信学会回路とシステム理論研資（昭 45－05）。

(17) 保田，井上，布上："インパルス応答行列の実現条件について"，信学会回路とシステム理論研資（昭 45－05）。

(18) 吉田耕作；"積分方程式論"，岩波書店（昭 43）。

(19) 河田敬義，三村征雄："現代数学概説 II"，岩波書店，p.80（昭 40）。

(20) ポントリャーギン："連続群論（上）"，岩波書店，p.90（昭 44）。

(21) P. d'Alssandro, A. Isidori and A. Ruberti: "On the properties of the realization of linear dynamical systems", University' di Roma, Istituto di Automatica, (1969), also IFAC, Kyōto Symposium, 3-1, p. 40 (Aug. 1970).

(22) L. A. Zadeh and C. A. Desoer: "Linear System Teeory", McGraw-Hill, New York, p. 378 (1958).

(23) L. M. Silverman and B. D. O. Anderson: "Controllability, observability and Stability of linear systems", J. SIAM on Control, 6, 1, p. 121 (1968).

(24) R. E. Kalman: "On the Stability of Time-Varing Linear Systems", IRE Trans. on Circuit Theory, CT-9, p. 420 (1962).

(25) L. Cesari: "Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations", Academic Press, New York, p. 45 (1963).

(26) R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra: "Controllability of linear dynamic systems", Contrib. Differential Equations, 1, 2, p. 189 (1962).

(27) E. Kreindler and P. F. Sarachik: "On the concepts of controllability and observability of linear systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-9, p. 129 (1964).

(28) 保田，井上："インパルス応答行列の実現について"，信学論(C)，54-C，1，p.24（昭46-01）。
(29) 井上："インパルス応答行列の可制御な実現，有界な実現および安定な実現"，信学論(C)，載録決定済。
(30) 文献(22)，p.374。
(31) 文献(22)，p.344。
(32) コロモゴロフ，フォーミーン："関数解析の基礎"，岩波書店，p.129（昭39）。
(33) 文献(22)，p.370。
(34) 文献(22)，p.391。
(35) 井上："インパルス応答行列の定常実現"，信学会回路とシステム研資（昭46-07）。
(36) 井上："インパルス応答行列の定常実現と同定"，信学論(C)，投稿中。