



Title	異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究
Author(s)	福岡, 秀和
Citation	大阪大学, 1959, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1643
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究

福岡秀和

異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究

目 次

緒論	1
第1章 異方性を持つ金属材料の降伏条件についての従来までの研究のあらまし	3
第2章 基礎理論	13
第1節 述語に関する2・3の注意	13
第2節 降伏条件	16
第3節 応力とひずみ増分の関係	20
第4節 第2章の結語	22
第3章 基礎定理	23
第1節 最大塑性仕事の原理	23
第2節 解の唯一性	27
第3節 第3章の結語	31
第4章 塑性平面ひずみ理論	32
第1節 基礎方程式	32
第2節 特性曲線	35
第3節 すべり線の性質	41
第4節 第4章の結語	47
第5章 平面応力状態における例題	48
第1節 引張りによる異方性塑性ひずみ増分の方向と主応力の方向との関係	48

第 2 節	ねじりによる異方性 を受けた材料の引張 りによるくびれの問 題	51
第 3 節	第 5 章 の 結 語	56
第 6 章	組合せ応力による実験	57
第 1 節	材料および試験片	58
第 2 節	組合せ応力試験機あ よびひずみ計	60
第 3 節	実験計画および予備 実験	65
第 4 節	引張りねじり組合せ 応力試験の理論	70
第 5 節	ねじりによる異方性 を持つ材料の組合せ 応力試験	73
第 6 節	引張りによる異方性 を持つ材料の組合せ 応力試験	84
第 7 節	第 6 章 の 結 語	88
結論		89
参考文献		92

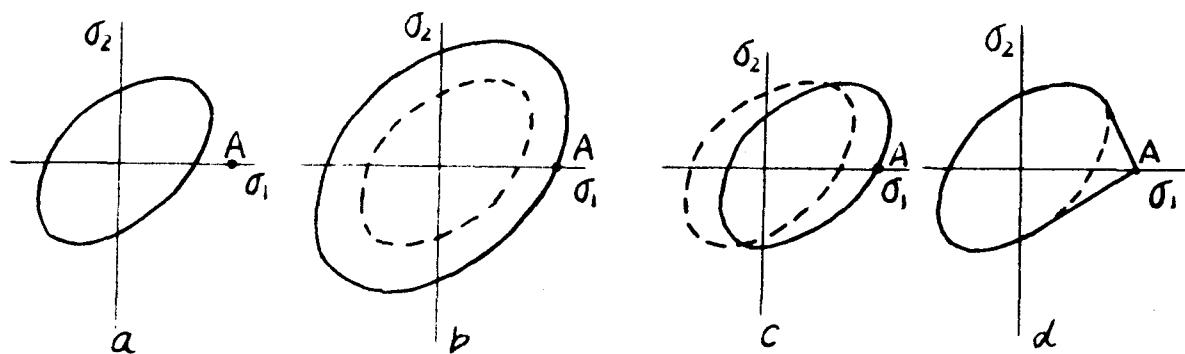
緒論

工学的な金属成型過程すなむち圧延、引抜き、押出し、絞りなどにおいては、材料内にかなりひらがるしい異方性を生ずる。したがつて、これらの作業中に現われれるひろい現象を正しく理解し、有効な作業を行うためには、材料の異方性をひろくとり入れた塑性変形理論を必要とする。等方性金属材料に対する塑性変形理論においては、塑性ひずみ増分は塑性ポテンシャルから導かれるが、この塑性ポテンシャルを、その材料の降伏を規定する関数に等しいと仮定することにより、基礎定理が公式化される (Hill, 1950, p. 50)。そこで冷間加工を受けた結果異方性になつた材料に対しても、塑性ポテンシャルが降伏を規定する関数に等しいと仮定することがならぬことなつてゐる。したがつて、このようないを考へた結果異方性となつた材料の塑性変形理論は、その材料に対するどのような降伏条件を仮定するかによりきまることになる。降伏条件は、それ自身矛盾を含まないことはもちろんであるが、さうに、数学的に使用しやすいものじあることが望ましい。筆者は、ここにおける選択方位による異方性および結晶粒界における残留応力による異方性の両方を考えに入れたり一般化された降伏条件を提案し、この降伏条件にまとづいた理論は、最大塑性仕事の原理および解の唯一性の定理を満足す

ることを証明した。そこで、これを平面ひすみ理論に適用して、ここで考えるような異方性をもつ材料に対して、等方性理論の場合のように、応力に対する特性曲線と速度に対する特性曲線とが同じであるかどうかを調べ、また、最大せん断応力の方向とすべり線の方向との関係を明らかにした。等方性材料の場合には、主ひすみ増分の方向は主応力の方向と一致したのであるが、引張りによる異方性をもつ材料について、この関係がどのようになるかを、この理論を用いて調べた。さらには、ねじりによる異方性を持つ薄肉円管試験片を引張ったときに生じたくびれが試験片の軸方向となす角度を、この理論を用いて解析した。新しく設計した組合せ応力試験機および組合せひすみ計を用いて、あらかじめねじり薄肉円管試験片に、引張りねじり組合せ荷重をかけることにより、平面応力状態を生ぜしめる実験を行つて、それぞれの異方性を持つ材料の降伏条件および塑性せん断ひすみと塑性伸びひすみとの比を、この理論から得られる結果と比較して、理論の妥当性を検討した。

第1章

異方性を持つ金属材料の降伏条件についての従来までの研究のあらましどのように金属材料でも、完全に焼きなましされたままの状態では、全く等方性である。ある金属材料に異方性が認められるといふことは、すなわち、その材料は、焼きなましされた状態から、なんらかの冷間加工を受けていたものであるといふことを意味する。そこで、塑性異方性の研究も、最初等方性であつた場合に成立した諸関係が、塑性ひずみの増加とともに、どのように変つてゆくかを追求する線に沿つて行われた。異方性材料に対する規定する関数に等しいと仮定すると、塑性ひずみ増分は降伏関数から導かれることになるから、結局、塑性ひずみの増加とともに、材料が等方性であったときには成立した降伏条件が、どのように変つてゆくかを調べればよいことになる。それは主として、主応力空間に表められた降伏軌跡が主応力面との交わりにおいて描く降伏曲線の形の変化を、幾何学的に考察することにより行われた。材料が硬化しない場合には、降伏曲線の形は、塑性ひずみの増加に関係なく、はじめの形を保つ。次に、材料が硬化する場合として、たとえば、焼きなましされた状態において Mises の降伏条件に従う材料を考えよう。この降伏条件は、主応力 σ_1, σ_2 を座標軸とする座標面上に、第1図、 α に示すようなだ円で表められる。この材料が塑性ひずみ

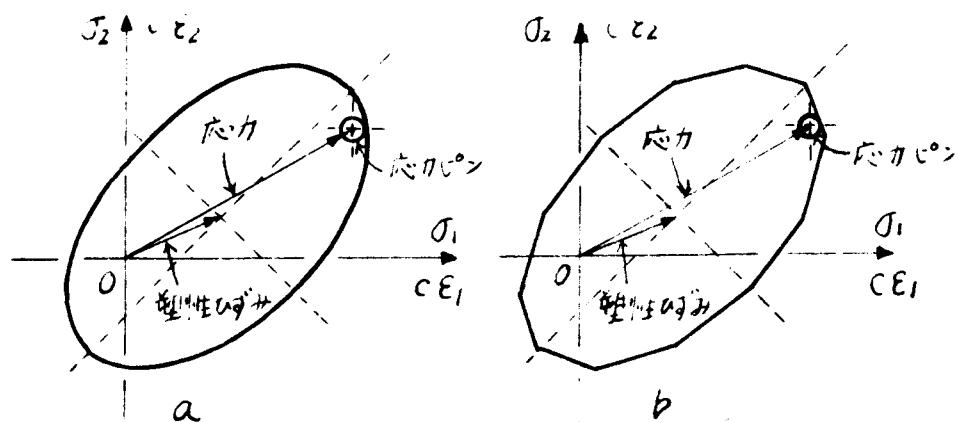


第 1 図

みを受けた結果、硬化して、A 点で示される応力状態まで荷重を受けたのち、除荷されたものとする。このような材料を、任意の様式の荷重でもって、再負荷する場合の新しい降伏条件は、焼きなまし材の降伏曲線（第 1 図, a）から、次のような簡単な幾何学的な操作によって得られると考えられた。それらは、isotropic expansion (Drucker, 1949)（第 1 図, b），translation (Drucker, 1952)（第 1 図, c）および yield corner の生成 (Sanders, 1955)（第 1 図, d）である。しかし、これらの考えは、いすれも、単に幾何学的なモデルとしての降伏条件の変化の方法を考えたにすぎないものである。

塑性ひずみの増加とともに進展した異方性を持つ材料に対する降伏条件として、Prager は、簡単な機構でもって、塑性ホテニシャルとしての機能をもあわせ持つところの、巧妙なモデルを考えた (Prager, 1956)。これは、降伏曲線を剛体のわくで形作ったもので、焼きなましされた状態で、このわくの原点は、主応力 σ_1, σ_2 を座標軸とする座標面の原点に一致している。この座標面において、応力

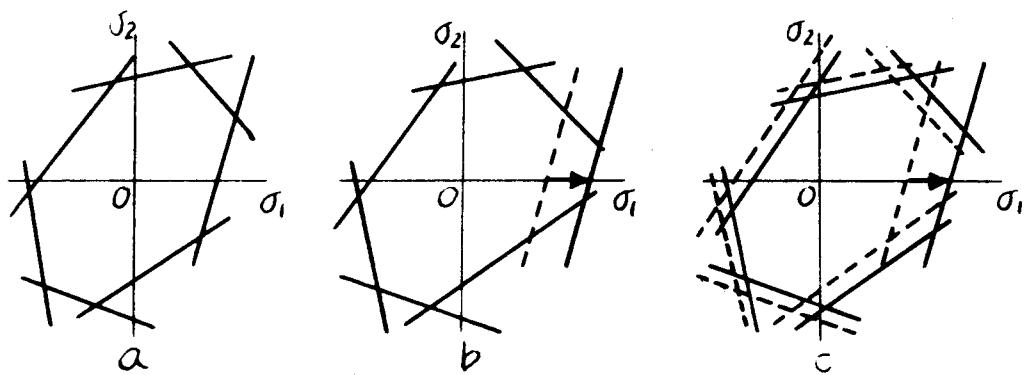
の次元をひずみの次元になおしたとき、このわくの原点の移動は、生じた塑性ひずみを表わす。無負荷の状態では、応力ベクトルの先端に位置する応力ピコンは、応力ゼロの点すなわち座標の原点にある。荷重をかけたと、応力ピコンは原点から直線に遠ざかり、その材料が弾性限に達いたとき、ピコンはわくに接する。ここからさらに、ピコンが原点に対して外側に移動するよう荷重が増加すると、ピコンは、降伏曲線を表わすわくを引きしづつて移動される。このとき、ピコンとわくとの間には、まさつが全くないと仮定する。したがって、ピコンの動きのみのうちの、わくに対する垂直成分のみが、わくの動きに伝わる。このようにして新しくきまつたわくの位置が、ピコンの動きに相当するよう負荷を受けた材料の、新しい降伏曲線となる（第2図，a）。さて、わく



第2図

の動きは、そのままわくの原点の動きを表わすから、塑性ひずみ増分は、降伏曲線上、現在の応力点の位置から降伏曲線に垂直な方向に生ずることになり、したがって、このモデル

ルは、塑性ひずみ増分が塑性ポテンシャルから導かれることの数学的な要求をも満足することになる。このモデルのように、降伏曲線の形がなめらかな曲線であれば、はじめと最終の応力点が同じで、途中の経路がことなるような2種の負荷に対して、その結果生ずる塑性ひずみがことなることになるのであるが、途中の経路がことなつても、はじめと最終の応力変化を同じであれば、同じ塑性ひずみを与えるようなモデルとして、Pragerは、降伏曲線の形を、いくつかの直線部分で近似したモデル（第2図，b）を考えた。このように降伏曲線を1つのめくで表わすかわりに、いくつかの長い直線棒を、応力面上に、その内



第3図

部にできる形が降伏曲線を表わすように配列させ（第3図，a），塑性変形による降伏曲線の形の変化としては、各直線部分の独立な移動（第3図，b），あるいはなんらかの従属関係のある移動（第3図，c）を考えたもの（Sanders, 1955; Hodge, 1957）もある。

これらのように、降伏曲線の幾何学的なモデルとしての形の変化により、材料が異方性

になつたときの降伏条件を考える方法とは別に、Hillは、応力の符号の逆転に対するして降伏応力が変わらぬような材料について、異方性の各主軸方向にそれぞれことなつた異方性のパラメータを持つような降伏条件

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 2L\tau_{YZ}^2 + 2M\tau_{ZX}^2 + 2N\tau_{XY}^2 = 1$$

をえた (Hill, 1948). Huも、これと同様に、降伏を規定する閾数として、

$$f = \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 3\alpha_{44}\tau_{12}^2 + 3\alpha_{55}\tau_{23}^2 + 3\alpha_{66}\tau_{31}^2$$

を考えた (Hu, 1956).

吉村氏は、物体内に生ずる応力およびひずみがテンソル量であることに注目して、理論を立てた (吉村, 1957). テンソル量 T の反変成分、共変成分および混合成分を、 (x^1, x^2, x^3) 座標系について、それぞれ T^{ab} , T_{ab} および T^a_b とし、 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ 座標系について、それぞれ \bar{T}^{ij} , \bar{T}_{ij} および \bar{T}^i_j とするとき、これらの量は、座標の変換に際して

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} T^{ab},$$

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} T_{ab}$$

および

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} T^a_b$$

なる変換を受ける。ただし、 $i, j; a, b$ はそれぞれ 1, 2, 3 なる値をとり、下りかえされた指標は総和をとることを意味する。同種類の 2

つのテンソルの間の和, $A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$, 差, $A^{ij} - B^{ij} = D^{ij}$ として同じ種類のテンソルが得られ, 任意の種類の 2 つのテンソルの積, $A^i B_{jk} = E^i_{jk}$ としてさらには高階のテンソルが得られる。テンソル成分に行われるものも 1 つの演算は, 縮約である。これは, 任意の混合テンソルにほどこされるもので, ある反変指標とある共変指標とを指定して, それらに関する総和をとることで, このようにして得られたテンソルの階数は, もとのテンソルの階数より, 2 つすぐなくなる。たとえば, 4 階の混合テンソル $A^{ab}{}_{cd}$ を考えると, その変換の法則は,

$$\bar{A}^{ij}{}_{kl} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^l} A^{ab}{}_{cd}$$

である。いま, $k = i$ とおいて, それらの指標についての総和をとると,

$$\begin{aligned} \bar{A}^{ij}{}_{ii} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^i} A^{ab}{}_{cd} \\ &= \delta_a^c \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^i} A^{ab}{}_{cd} \end{aligned}$$

となるが, δ_a^c は Kronecker の記号で, $a = c$ のとき 1, $a \neq c$ のときはゼロであるから, 結局

$$\bar{A}^{ij}{}_{ii} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^i} A^{ab}{}_{ad}$$

となる。このようにして得られた $A^{ab}{}_{ad}$ は, その変換則から, 2 階の混合テンソルであることがわかる。さらに, $j = \ell$ とおいて, それらの指標についての総和をとると, ゼロ階のテンソルすなわちスカラーラー量が得られる。この演算を, 2 階のテンソルであるところの

応力とひずみから、スカラーライ関数であるところの降伏を規定する関数をつくるのに利用する。等方性材料に対して成立する Mises の降伏関数は、直交テカルト座標系に関しては、

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'$$

と書ける。ここで、 σ_{ij}' は偏差応力テンソルの成分である。直交テカルト座標系では反変指標と共に変指標との区別はないが、これを一般的な座標系について書くと

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma^{ij}'$$

となる。いま、基本計量テンソルを g_{ij} とすると、これを用いて

$$\sigma_{ij}' = g_{ik} g_{jl} \sigma^{'kl}$$

のように、指標を下げることができる。この右辺は

$$g_{ik} g_{jl} \sigma^{'kl} = \left\{ \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) + \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \right\} \sigma^{'kl}$$

と書くことができる。この右辺の第 2 項は

$$(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \sigma^{'kl} = g_{ik} g_{jl} \sigma^{'kl} - g_{il} g_{jk} \sigma^{'kl} \\ = \sigma_{ij}' - \sigma_{ji}'$$

となるが、 σ_{ij}' は対称テンソルであるから、ゼロとなる。したがって、降伏を規定する関数 f は

$$f = \frac{1}{2} g_{ik} g_{jl} \sigma^{'kl} \sigma^{ij} \quad (a)$$

と書ける。ここで

$$g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) \quad (b)$$

であって、 $\sigma^{'kl} \sigma^{ij} = \sigma^{ij} \sigma^{'kl}$ もよび σ_{ij}' 自身の対称性から、 $g_{ik} g_{jl}$ は 4 つの指標に関して対称である。すなわち、 $g_{ik} g_{jl}$ は 2 階の単位テンソル（あるいは球テンソルとも呼ばれる） $\mathbf{I} = g_{ij} e^i e^j$ (e^i は基本ベクトルである) からつくれる

4階の対称テンソルである。さて、等方性材料に対する降伏関数は (a) 式により与えられることがわかつたが、吉村氏は、(a) 式における g_{ijkl} が 2 階の球テンソルからつくられるということが、材料の等方性を意味するものであると解釈して、ひずみ履歴による異方性を降伏関数のなかに導入するためには、その材料がそれまでに受けた塑性ひずみ ϵ_{ij} に異方性を表わすパラメータ A をかけ (基本計量テンソルに加えた量 $(g_{ij} + A \epsilon_{ij})$) でもって、(b) 式と同じ方法で、4 階のテンソル c_{ijkl} をつくりて、この c_{ijkl} を等方性の場合の g_{ijkl} のかわりに用ひればよいとした。したがって、異方性をもつ材料に対する降伏条件は

$$f = \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma'^{kl} \sigma'^{ij} \quad (c)$$

となる。ただし

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2} \{(g_{ik} + A \epsilon_{ik})(g_{jl} + A \epsilon_{jl}) + (g_{ie} + A \epsilon_{ie})(g_{jk} + A \epsilon_{jk})\} \quad (d)$$

である。さらに、Bauschinger 効果による異方性を表わすために、Bauschinger 効果を表わすパラメータ B を用ひると

$$f = \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma'^{kl} \sigma'^{ij} - B \epsilon_{ij} \sigma'^{ij} \quad (e)$$

となる。この理論によると、あらかじめ (σ_0, ϵ_0) の状態まで引張ったのち、 σ, τ の引張りねじり組合せ応力を作用させた場合の降伏は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \{ \sigma^2 (1 + A \epsilon_0 + \frac{3}{4} A^2 \epsilon_0^2) + 3 \tau^2 (1 + \frac{1}{2} A \epsilon_0 - \frac{1}{2} A^2 \epsilon_0^2) \} - B \epsilon_0 \sigma \\ & = \frac{1}{3} \sigma_0^2 (1 + A \epsilon_0 + \frac{3}{4} A^2 \epsilon_0^2) - B \epsilon_0 \sigma_0 \end{aligned}$$

で規定され、あらかじめ (τ_0, σ_0) の状態までねじったのち、 σ, τ の引張りねじり組合せ応力を作用させた場合の降伏は

$$\frac{1}{3} \left\{ \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{6} A^2 \delta_0^2 \right) + 3 \tau^2 \left(1 + \frac{1}{4} A^2 \delta_0^2 \right) + \sigma \left(A \delta_0 \right) \right\} \cdot B \delta_0 \tau \\ = \tau_0^2 \left(1 + \frac{1}{4} A^2 \delta_0^2 \right) \cdot B \delta_0 \tau_0$$

によって規定される。

さて、以上概観したのと同様の考え方に対する批判を行う前に、ここで引張り加工によって巨視的に表わされるところの金属材料の異方性というものは、材料内のどのような微視的な原因によつて表われるものであるかをみておこう。焼きなましした状態で等方性である材料内の結晶粒の方位は、全く at random である。試験片全体としての、すなわち巨視的なひずみの増加とともに、個別の結晶は最もひじい引張りひずみの方向に伸ばされて、材料の組織は纖維状を呈してきて、巨視的にみて方向性がなかつた材料も、異方性を示すようになる。このような異方性は、材料の結晶学的な構造がある一つの特別な方向性を持つことによるもので、選択方位 (preferred orientation) による異方性と呼ばれる (Hill, 1950, p. 8)。異方性の原因となるものは、もう一つ考えられる。塑性ひずみを生じた試験片から荷重をとりさると、結晶粒界に、微視的な残留応力が残るが、これは主として、方位のことなる結晶粒内に、荷重をとりのぞく直前に存在していたことなつた微視的な応力状態によるものであり、この残留応力は、それを生ぜしめた負荷とことなつた種類の負荷をかけた場合の降伏応力に影響をおよぼす。たとえば、引張りで塑性ひずみを生ぜしめた試験片を除荷したのち、圧縮の荷重をかける

と、その降伏は、あらかじめ引張りをかけなかつた材料にくらべて、低い応力である。これは普通、Bauschinger効果として知られてゐる現象である。このような現象は、純金属の单結晶には認められないものであるから(Hill, 1950, p. 8),これを、結晶粒界における残留応力による異方性と呼ぶことにする。

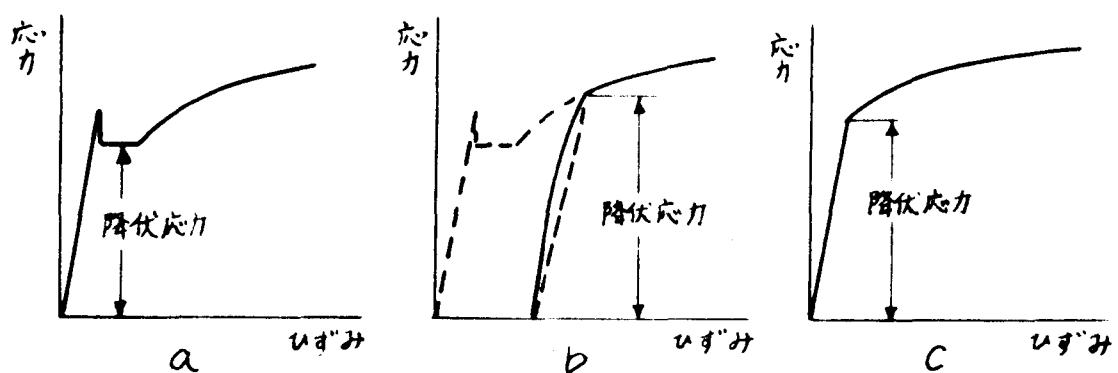
冷間加工による異方性が以上のような2つの要因よりなることがわかると、先に述べたような単純な幾何学的なモデルによる降伏曲線の変形の考え方をもつてしては、このように複雑な現象を、近似的にも表わしうることは期待できないであろう。また、遷移方位による異方性と、結晶粒界における残留応力による異方性とを、それでれ、ただ1つの定数で代表させるやり方も、同じ非難をまぬかれないと思う。数理塑性論としては、Hillによるもののように、異方性の各主軸ごとに、その方向の異方性の状態に特有なパラメータを用いる方法が、正当であるよう思う。そこで、筆者は、Hillの考え方をさらに拡張すべく、遷移方位による異方性のみならず、結晶粒界における残留応力による異方性を考慮に入れて、理論を一般化した。

第2章 基礎理論

第1節　述語に関する2・3の注意

弾性学あるいは古典的な塑性学と、最近のいわゆる数理塑性論との間には、使用する述語の内容に若干の違いがあると思われるのでは、ここでそれらについて述べるとともに、筆者が、それらの述語をどのような意味で用いるかを明らかにしておく。

まず、降伏応力あるいは降伏点であるが、これは古い用法では、焼きなましした軟鋼に荷重をかけたとき、一定の応力のもとにあつて、ひずみが急速に増加してゆく領域のわくあるあたり場の応力のみを意味した（第4図,a）。しかし、数理塑性論においては、塑性変形のはじまる応力をすべて降伏応力と呼ぶな



第4図

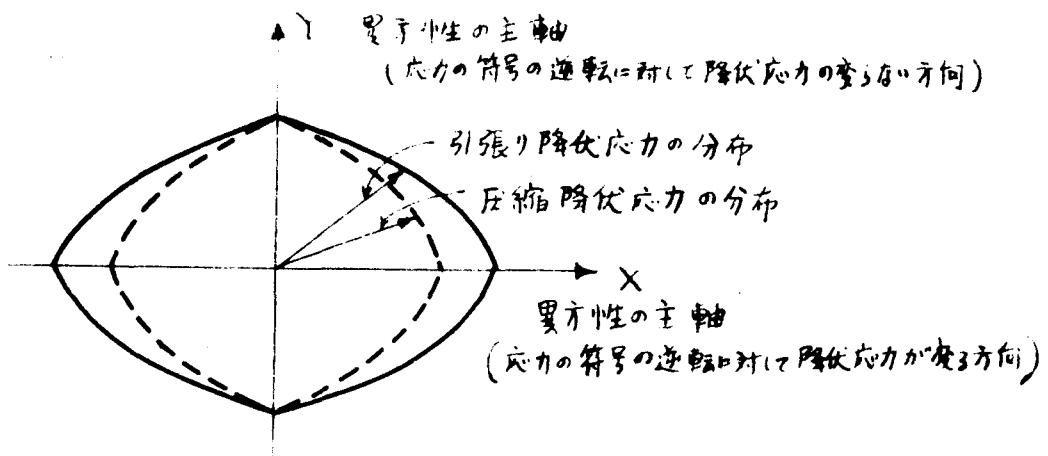
うわしがある。筆者ももちろんこのような意味で用了いた。したがって、冷間加工を受けてあたり場が現われなくなつた軟鋼にも（第4図,b）あるいは焼きなましされた状態にあってもあたり場をもたないアルミニウムのような材料にも（第4図,c）降伏応力がある。実

際には、応力ひずみ曲線は、第4図に示すように鋭くあれまがらないじ、徐々にわん曲することが多い。それゆえに、降伏点をどのように定義するかによつて、得られる結果が変ることがしばしばある。筆者が用いた降伏点の決定法は第6章、第3節において述べるが、塑性変形に関する実験研究の文献を検討する場合には、まずその研究者が用いた降伏点のきめ方をたしかめておくことが肝要である。

次に、Bauschinger効果であるが、これは、焼きなまし材に引張りで塑性変形を与えてから荷重を除き、次に圧縮の荷重を加えると、その降伏は、焼きなまし材をそのまま圧縮したときの降伏応力より低いところでおこる現象をいうのである。したがつて、Bauschinger効果の有無は、厳密には、その材料の現在の状態における圧縮降伏応力と、焼きなましされた状態における圧縮降伏応力とを比較して判断されるべきである。しかるに、数理塑性論においては、現在の状態すなむち一般に任意の冷間加工を受けた状態における圧縮降伏応力と引張り降伏応力との比較に、あるいは、さらに一般化して、応力の符号を逆にしたときの降伏点の比較に、この述語を用ひている（たとえば Hill, 1950, p. 18; 吉村, 1957, p. 151）。これは、応力成分のある関数であるところの降伏関数の性質の1つである応力の符号を逆にしたときの対称性の有無が、その関数を大いに特長づけるものであり、またしばしば議論の対象となるものであることから、Bauschinger

効果という簡単な述語を、この性質にあてたものと思われる。しかし、このような用法によると、たとえば、あらかじめ引張りで冷間加工を受けた材料の圧縮降伏応力が引張り降伏応力より小さければ、ただそのことだけで、Bauschinger効果があるといえるわけであるが、実際には、その材料の焼きなまし状態における圧縮降伏応力の値がわからなければ、判断をくだすことはできない。そこで筆者は、数理塑性論において普通に行われている用法には従わず、Bauschinger効果については、厳密な内容を与えることにし、單に応力の符号を逆にした場合の降伏点の比較とは区別して考えることにする。

最後に、異方性の主軸について述べる。この研究においては、材料が3つの互に直交する異方性の主軸を持つものとして議論をすすめていたが、実際には、異方性の主軸は、それらの材料のあらゆる方向の性質を調べ、それらの性質の分布の対称性を見つけてからきめられるべきものである。たとえば、ある材料について、引張りの降伏応力と圧縮の降伏応力をとを調べた結果、第5図に示されるような異方性の主軸はX軸およびY軸であるといえる。しかし、これは、ただ降伏応力のみにつれての対称性から判断したものであって、もちろん、この材料の用途によつては、それだけでは充分である場合もあるかも知れなゝが、それ以外の性質たとえばヤンク率やポアソン比



第5図

などにつけても調べなければ、完全とはいえない。また、引張り降伏応力と圧縮降伏応力とでその分布の対称性がことなる場合があるかも知れない。このような場合につけては、引張り降伏応力についての異方性の主軸、あるいは、圧縮降伏応力についての異方性の主軸と呼ばるべきはならない。この問題については、広範囲な実験と、metal physicsからの見方をも考究に入れた研究が必要であると筆者は考える。

第2節 降伏条件

ここでは、異方性が、各点において、3つの互に直交する3対称面を持つていう、基本的な場合を考えることにする。これら3つの対称面は、3つの互に直交する線で交わるが、それらの線が、前節で述べた異方性の主軸である。さきにも述べたように、異方性の主軸は、実際には、その材料のあらゆる方向の性質を調べて、その対称性を見いただしからきめられるべきものである。しかし、焼きなまし材に、1回だけ比例負荷をかけた場

合には、その材料に生じた異方性の主軸は、除荷直前の主応力の方向と一致すると仮定しても大きな誤りはあるものと思われる。さて、ある異方性状態にある材料の任意の一要素に注目し、異方性の主軸 X, Y, Z を基準直角座標系にえらぶ。この場合にも、静水圧を加えても、降伏には影響しないとする仮定を用いることにする。降伏条件として、次の式を提案する。

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 2F_b(\sigma_Y - \sigma_Z) + 2G_b(\sigma_Z - \sigma_X) + 2H_b(\sigma_X - \sigma_Y) + 2L\tau_{YZ}^2 + 2M\tau_{ZX}^2 + 2N\tau_{XY}^2 = 1 \quad (1)$$

ここで、 F, G, H, L, M, N および F_b, G_b, H_b はその時時の異方性の状態に特有な量すなむち異方性パラメータである。

S_X, S_Y, S_Z を異方性の主軸 X, Y, Z 方向の引張り降伏応力、 $-S'_X, -S'_Y, -S'_Z$ を同じく圧縮降伏応力とすると

$$\left. \begin{aligned} G + H &= \frac{1}{S_X S'_X}, & 2F &= \frac{1}{S_Y S'_Y} + \frac{1}{S_Z S'_Z} - \frac{1}{S_X S'_X} \\ H + F &= \frac{1}{S_Y S'_Y}, & 2G &= \frac{1}{S_Z S'_Z} + \frac{1}{S_X S'_X} - \frac{1}{S_Y S'_Y} \\ F + G &= \frac{1}{S_Z S'_Z}, & 2H &= \frac{1}{S_X S'_X} + \frac{1}{S_Y S'_Y} - \frac{1}{S_Z S'_Z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} G_b - H_b &= \frac{S_X - S'_X}{2 S_X S'_X} \\ H_b - F_b &= \frac{S_Y - S'_Y}{2 S_Y S'_Y} \\ F_b - G_b &= \frac{S_Z - S'_Z}{2 S_Z S'_Z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なる関係がある。たとえば、(1)式において、 $\sigma_x = s_x$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ とかつて得られる式と、 $\sigma_x = -s'_x$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ とかつて得られる式とから、(2)および(3)式の第1式が得られる。また、(3)式から、これらの降伏応力の間には

$$\frac{s_x - s'_x}{s_x s'_x} + \frac{s_y - s'_y}{s_y s'_y} + \frac{s_z - s'_z}{s_z s'_z} = 0 \quad (4)$$

なる関係がある。異方性の主軸に関する降伏せん断応力をそれぞれ t_{yz} , t_{zx} , t_{xy} とするとき

$$2L = \frac{1}{t_{yz}^2}, \quad 2M = \frac{1}{t_{zx}^2}, \quad 2N = \frac{1}{t_{xy}^2} \quad (5)$$

となる。各主軸方向について、垂直応力の符号を逆にしても降伏応力の値が変わらないときは、 $s_x = s'_x$, $s_y = s'_y$, $s_z = s'_z$ であるから、(3)式より

$$G_b - H_b = 0, \quad H_b - F_b = 0, \quad F_b - G_b = 0$$

となり、さらに寛完全な等方性の場合には

$$s_x = s_y = s_z = \sqrt{3} t_{yz} = \sqrt{3} t_{zx} = \sqrt{3} t_{xy} \text{ であるから}, \quad (2)$$

および(5)式から

$$3F = 3G = 3H = L = M = N$$

となり、単純せん断に対する降伏応力を k とおくと(1)式は

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 6k^2$$

となって、Mises の降伏条件に帰着する。

(2)式の右の列の3つの式から、 F, G, H のうちの1つしか負になリ得ないことは明らかであるが、それは、各主軸方向の降伏応力の値の間に非常に大きな差がある場合である。ここでは、そのような場合は考えないことに

する。したがって、 F, G, H はいずれも正であるとする。(5) 式から、 L, M, N は本質的に正の量である。

任意の要素の異方性の状態を完全に記述するためには、9つの降伏応力のうち、 $s_x, s_y, s_z, s'_x, s'_y, s'_z$ のうちの任意の5つと、 t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} の3つ、合計8つの独立な値を知ることが必要である。これららの量は、材料のひづみ履歴に依存するものと考えられ、したがって、塑性ひづみの増加とともに変ってゆくはずである。しかし、ここでは、塑性ひづみの増加にともなう異方性パラメータの変化については論じないことにし、与えられた材料については、異方性パラメータは定数であると仮定する。ここで、Z軸を軸として、XおよびY軸を時計の針の方向に θ だけ回転させてできる新しい座標系 x, y, z についての応力成分でもって、降伏条件を表わしておく。両座標系についての応力成分の変換式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 T_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 T_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_z &= \sigma_z \\ T_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + T_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ T_{yz} &= T_{yz} \cos \theta - T_{zx} \sin \theta \\ T_{zx} &= T_{yz} \sin \theta + T_{zx} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を用ひると、新しい座標系 x, y, z についての降伏条件は

$$\begin{aligned} 2f(\sigma_{ij}) &\equiv \frac{1}{4}(F+G)(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \left\{ \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (F+G) \sigma_z^2 \\ &\quad + \left\{ (F+G+4H) - (F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} T_{xy}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (F + G)(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_z + (F - G) \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y)\sigma_z \\
& - (F - G) \sin 2\theta (\sigma_x + \sigma_y) T_{xy} \\
& + (F + G + 4H - 2N) \sin 2\theta \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) T_{xy} \\
& + 2(F - G) \sin 2\theta \sigma_z T_{xy} + 2(L \cos^2 \theta + M \sin^2 \theta) T_{yz}^2 \\
& + 2(L \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta) T_{zx}^2 - 2(L - M) \sin 2\theta T_{yz} T_{zx} \\
& + (F_b - G_b)(\sigma_x + \sigma_y) - (F_b + G_b - 2H_b) \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) \\
& - 2(F_b - G_b)\sigma_z - 2(F_b + G_b - 2H_b) \sin 2\theta T_{xy} \\
& = 1
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。ここで、 $T_{yz} \times T_{zy}$, $T_{zx} \times T_{xz}$, $T_{xy} \times T_{yx}$ はつり合の条件から等しいので区別して書いた方が、テンソル解析に当っては、区別して数えらねばならぬ。

第3節 応力とひずみ増分の関係

ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) は、変位増分 du_i から

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i} \right\} \tag{8}$$

で定義される。これは、弾性部分 $d\varepsilon_{ij}^e$ と塑性部分 $d\varepsilon_{ij}^p$ とからなるが、冷間加工による異方性を生じても、弾性定数はあまり変化しないという実験事実がある (Naghdi, Essenburg and Koff, 1958) から、ここでは、弾性ひずみに対しては、等方性のときと同じ応力ひずみ関係

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left\{ d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sum_k d\sigma_{kk}}{m+1} \right\} \tag{9}$$

を用いる。ここで、 G は剛性率、 m はボアソン数、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。塑性部分 $d\varepsilon_{ij}^p$ は、塑性ポテンシャル g から

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{10}$$

として導かれる。ただし、 $d\lambda$ は正の比例係数である。ここで、(1)式における $f(\sigma_{ij})$ を塑性ホテンシヤルとみなすことにする。

(1)式の f を g に等しいとして (10) 式に代入すると、異方性の主軸についての、応力と塑性ひずみ増分との間の関係は

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^P &= d\lambda [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - G\sigma_z - (G_b-H_b)] \\ d\epsilon_y^P &= d\lambda [(H+F)\sigma_y - F\sigma_z - H\sigma_x - (H_b-F_b)] \\ d\epsilon_z^P &= d\lambda [(F+G)\sigma_z - G\sigma_x - F\sigma_y - (F_b-G_b)] \\ d\gamma_{yz}^P &= d\lambda L T_{yz} \\ d\gamma_{zx}^P &= d\lambda M T_{zx} \\ d\gamma_{xy}^P &= d\lambda N T_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と与えられる。すべての応力系に対して

$$d\epsilon_x^P + d\epsilon_y^P + d\epsilon_z^P = 0, \quad (12)$$

すなわち、塑性変形に際して、体積変化はゼロであることがわかる。

座標系 x, y, z についての応力と塑性ひずみ増分との間の関係は、(7)式の f を g として (10) 式を代入することにより

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \sigma_y \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_z \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta T_{xy} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_y^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_y \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) + \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_z \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta T_{xy} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(F_b-G_b) + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right] \end{aligned}$$

$$d\epsilon_z^P = d\lambda \left[(F+G_r) \sigma_z - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) + \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_y + (F-G) \sin 2\theta \tau_{xy} - (F_b - G_b) \right] \quad (13)$$

$$d\gamma_{xy}^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_y + \frac{1}{2}(F-G) \sin 2\theta \sigma_z - \frac{1}{2}(F_b + G_b - 2H_b) \sin 2\theta \right]$$

$$d\gamma_{yz}^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(L+M) + \frac{1}{2}(L-M) \cos 2\theta \right\} \tau_{yz} - \frac{1}{2}(L-M) \sin 2\theta \tau_{zx} \right]$$

$$d\gamma_{zx}^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(M+L) + \frac{1}{2}(M-L) \cos 2\theta \right\} \tau_{zx} - \frac{1}{2}(L-M) \sin 2\theta \tau_{yz} \right]$$

となり、やはり、かかる応力系に対しても

$$d\epsilon_x^P + d\epsilon_y^P + d\epsilon_z^P = 0$$

が成立する。

第4節 第2章の結語

この章では、選択方位による異方性を持つ材料に対する Hill の降伏条件をさらに一般化して、結晶粒界における残留応力による異方性を考えに入れた降伏条件を提案した。また、ここにおいても、等方性理論におけると同じように、塑性ホテンシャルは、降伏を規定する関数と同じであると仮定して、このような 2 種の異方性を持つ材料に対する、応力と塑性ひずみ増分の関係を導いた。

第3章 基礎定理

第1節 最大塑性仕事の原理

与えられた表面の塑性変位増分 $d\mathbf{u}_i$ に対し、真の応力 σ_{ij} のなす仕事を、つり合ひの条件および降伏条件をみたし、からずしも応力ひすみ関係は満足しないところの他のいかなる応力 σ'_{ij} のなす仕事よりも大きい、といふのが最大塑性仕事の原理である。筆者の提案した降伏条件にもとづく理論について、この原理を証明する。ここでは、塑性変形のみについて考えるのであるから、いちいち塑性部分を表わす添字を肩につけないこととする。

物体の表面 S の外向きの法線の方向余弦を ℓ_i とする。そうすると σ_{ij} による塑性仕事 W_p は、次のようになる。

$$W_p = \int_S \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\mathbf{u}_i \ell_j dS$$

Green の定理により

$$= \int_V \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_{ij} d\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} dV$$

と、体積積分に書き直され

$$= \int_V \sum_{i,j} d\mathbf{u}_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial(d\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} dV$$

となるが、 σ_{ij} はつり合ひの条件を満足するから、第一項は消えて

$$= \int_V \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial(d\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} dV$$

となる。いま、X, Y, Z 座標系についての、 $d\mathbf{u}_i$ の成分を du, dv, dw とすると、応力成分の対称性 $\tau_{YZ} = \tau_{ZY}$, $\tau_{ZX} = \tau_{XZ}$, $\tau_{XY} = \tau_{YX}$ から、塑性仕

事は

$$W_p = \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial(du)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial(dw)}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau_{xy} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial x} + \frac{\partial(dv)}{\partial y} \right\} + \tau_{yz} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right\} \right. \\ \left. + \tau_{zx} \left\{ \frac{\partial(dv)}{\partial z} + \frac{\partial(dw)}{\partial x} \right\} \right] dV$$

となるから、(8) より (11) 式を用いると

$$= \int_V d\lambda \{ F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ + F_b(\sigma_y - \sigma_z) + G_b(\sigma_z - \sigma_x) + H_b(\sigma_x - \sigma_y) \\ + 2(L\tau_{yz}^2 + M\tau_{zx}^2 + N\tau_{xy}^2) \} dV$$

となる。つきに、つり合の条件および降伏条件はみたすが、からうずしも応力ひすみ関係 (11) 式を満足するとはかぎらない応力 σ'_{ij} が、同じ塑性変位増分 du_i によりなす塑性仕事 W'_p を求める。

$$W'_p = \int_S \sum_{ij} \sigma'_{ij} du_i l_j dS$$

Green の定理により

$$= \int_V \sum_{ij} \frac{\partial(\sigma'_{ij} du_i)}{\partial x_j} dV$$

となるが、 σ'_{ij} はつり合の式はみたすから、そのことと、応力成分の対称性から

$$= \int_V \sum_{ij} \sigma'_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} dV$$

$$= \int_V \left[\sigma'_x \frac{\partial(du)}{\partial x} + \sigma'_y \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \sigma'_z \frac{\partial(dw)}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau'_{xy} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial x} + \frac{\partial(dv)}{\partial y} \right\} + \tau'_{yz} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right\} \right. \\ \left. + \tau'_{zx} \left\{ \frac{\partial(dv)}{\partial z} + \frac{\partial(dw)}{\partial x} \right\} \right] dV$$

となる。ここで、(8) より (11) 式を用ひる
のであるが、 σ_{ij}' は応力ひずみ関係は満足するかどうかわからなくなつから、次のようになる。

$$\begin{aligned} W'_P &= \int_V d\lambda \left\{ \sigma'_x [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - G\sigma_z - (G_b - H_b)] \right. \\ &\quad + \sigma'_y [(H+F)\sigma_y - F\sigma_z - H\sigma_x - (H_b - F_b)] \\ &\quad + \sigma'_z [(F+G)\sigma_z - G\sigma_x - F\sigma_y - (F_b - G_b)] \\ &\quad \left. + 2(LT_{yz}\sigma'_z + MT_{zx}\sigma'_x + NT_{xy}\sigma'_y) \right\} dV \\ &= \int_V d\lambda \left\{ F(\sigma_y - \sigma_z)(\sigma'_y - \sigma'_z) + G(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma'_z - \sigma'_x) \right. \\ &\quad + H(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma'_x - \sigma'_y) + F_b(\sigma'_y - \sigma'_z) \\ &\quad + G_b(\sigma'_z - \sigma'_x) + H_b(\sigma'_x - \sigma'_y) \\ &\quad \left. + 2(LT_{yz}\sigma'_z + MT_{zx}\sigma'_x + NT_{xy}\sigma'_y) \right\} dV \end{aligned}$$

$d\lambda$ は本質的に正の量であるから、もし

$$\begin{aligned} &F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &+ F_b(\sigma_y - \sigma_z) + G_b(\sigma_z - \sigma_x) + H_b(\sigma_x - \sigma_y) \\ &+ 2(LT_{yz}^2 + MT_{zx}^2 + NT_{xy}^2) \\ &\geq F(\sigma_y - \sigma_z)(\sigma'_y - \sigma'_z) + G(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma'_z - \sigma'_x) \\ &+ H(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma'_x - \sigma'_y) + F_b(\sigma'_y - \sigma'_z) \\ &+ G_b(\sigma'_z - \sigma'_x) + H_b(\sigma'_x - \sigma'_y) \\ &+ 2(LT_{yz}\sigma'_z + MT_{zx}\sigma'_x + NT_{xy}\sigma'_y) \end{aligned} \quad (14)$$

であれば、定理が証明されたことになる。不等式 (14) を証明しよう。 σ_{ij} , σ'_{ij} はひずみも降伏条件 (1) をみたすから、

$$\begin{aligned} &F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &+ 2F_b(\sigma_y - \sigma_z) + 2G_b(\sigma_z - \sigma_x) + 2H_b(\sigma_x - \sigma_y) \\ &+ 2(LT_{yz}^2 + MT_{zx}^2 + NT_{xy}^2) \\ &= F(\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + G(\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + H(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 \\ &+ 2F_b(\sigma'_y - \sigma'_z) + 2G_b(\sigma'_z - \sigma'_x) + 2H_b(\sigma'_x - \sigma'_y) \\ &+ 2(LT_{yz}^2 + MT_{zx}^2 + NT_{xy}^2) \end{aligned}$$

なる関係がある。この関係を用ひると、証明すべき不等式 (14) の左右の辺を 2 倍して、そ

これらの差をとった形は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 & 2 \{ F(\sigma_Y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_Y)^2 \\
 & + F_b(\sigma_Y - \sigma_z) + G_b(\sigma_z - \sigma_x) + H_b(\sigma_x - \sigma_Y) \\
 & + 2(L T_{YZ}^2 + M T_{zx}^2 + N T_{xy}^2) \} \\
 & - 2 \{ F(\sigma_Y - \sigma_z)(\sigma_Y' - \sigma_z') + G(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_z' - \sigma_x') \\
 & + H(\sigma_x - \sigma_Y)(\sigma_x' - \sigma_Y') + F_b(\sigma_Y' - \sigma_z') \\
 & + G_b(\sigma_z' - \sigma_x') + H_b(\sigma_x' - \sigma_Y') \\
 & + 2(L T_{YZ} T_{YZ}' + M T_{zx} T_{zx}' + N T_{xy} T_{xy}') \} \\
 = & F(\sigma_Y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_Y)^2 \\
 & + F(\sigma_Y' - \sigma_z')^2 + G(\sigma_z' - \sigma_x')^2 + H(\sigma_x' - \sigma_Y')^2 \\
 & + 2F_b(\sigma_Y' - \sigma_z') + 2G_b(\sigma_z' - \sigma_x') + 2H_b(\sigma_x' - \sigma_Y') \\
 & + 2(L T_{YZ}^2 + M T_{zx}^2 + N T_{xy}^2) \\
 & + 2(L T_{YZ}^2 + M T_{zx}^2 + N T_{xy}^2) \\
 & - 2F(\sigma_Y - \sigma_z)(\sigma_Y' - \sigma_z') - 2G(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_z' - \sigma_x') \\
 & - 2H(\sigma_x - \sigma_Y)(\sigma_x' - \sigma_Y') - 2F_b(\sigma_Y' - \sigma_z') \\
 & - 2G_b(\sigma_z' - \sigma_x') - 2H_b(\sigma_x' - \sigma_Y') \\
 & - 4(L T_{YZ} T_{YZ}' + M T_{zx} T_{zx}' + N T_{xy} T_{xy}') \\
 = & F \{ (\sigma_Y - \sigma_z) - (\sigma_Y' - \sigma_z') \}^2 + G \{ (\sigma_z - \sigma_x) - (\sigma_z' - \sigma_x') \}^2 \\
 & + H \{ (\sigma_x - \sigma_Y) - (\sigma_x' - \sigma_Y') \}^2 + 2L (T_{YZ} - T_{YZ}')^2 \\
 & + 2M (T_{zx} - T_{zx}')^2 + 2N (T_{xy} - T_{xy}')^2 \\
 \geq & 0
 \end{aligned}$$

なぜならば、 F, G, H, L, M, N は第2章、第2節にありて述べて置く、正の量だからである。これで、第2章において提案した降伏条件はもとづく理論が最大塑性仕事の原理を満足することが証明された。そこで、実際に、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ が与えられた場合に、応力ひずみ関係(11)を満足するかどうかわからぬ応力 σ_{ij}' を用いて、塑性仕事 $\sum_j \sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij}$ を停留させて、はたして、真の応力 σ_{ij} が得られる

かどうかをたしかめてみる。これは、関数 $\sum_{ij} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}$ を、 $f(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{2}$ なる拘束条件のもとで、停留させる問題にはかならない。Lagrange の乘数法を用いて、未定定数を $d\lambda$ とおくとこの問題は

$$\frac{\partial (\sum_{ij} \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} - d\lambda \cdot f)}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

となる。これを計算すると

$$\sum_{ij} d\epsilon_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma'_{ij}} + \sum_{ij} \sigma'_{ij} \frac{\partial (d\epsilon_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}} - f \cdot \frac{\partial (d\lambda)}{\partial \sigma'_{ij}} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

となるが、いまのところはまだ $d\epsilon_{ij}$ と σ'_{ij} とは互に独立な変数であるから、第2項は消える。また、 $d\lambda$ が定数であることから、第3項も消えて、結局

$$d\epsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

すなわち

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f(\sigma'_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}}$$

となる。この演算を行うと、 $d\epsilon_{ij}$ と σ'_{ij} の関係は (11) 式と全く同じ形で与えられる。 σ'_{ij} は、つり合の条件と降伏条件とはすでに満足していたのであるから、ここでさらに、応力ひずみ関係をも満足することが明らかになつたことによつて、結局、真の応力であることがたしかめられた。

第2節 解の唯一性

いま、考え3瞬間にあって、与えられた表面力 P により、物体内に、応力状態 σ_{ij} が生じているものとする。そこで、表面力 $= dp$

なる変化を与えた場合、応力は唯一的に、 $d\sigma_{ij}$ だけ変化するのである。このとき、そして同じ変化 dP に対して、2つのことなる応力変化 $d\sigma'_{ij}$ および $d\sigma''_{ij}$ が属することはあり得ないというのが解の唯一性である。降伏条件のなかに応力成分の1次の項が入っても、この定理の証明には、本質的な変化はない。Melan (Melan, 1938) に従つて、この定理を証明する。

弾塑性両変形を考える場合には、この表面力の変化 dP が、あらたに塑性変形を生ぜしめるか否かによって、問題をわけて考えねばならぬ。物体内外に、あらたに、塑性変形を生ぜしめるか否かは、降伏条件(1)を

$$F(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) - \frac{1}{2} = 0$$

と書きなおす、塑性ひずみ増分が(10)式で与えられることと、 $g = f$ であることを思い出すと、次のように書ける。すなわち、表面力の変化 dP は

$$F < 0$$

あるいは

$$F = 0, \text{かつ } d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad \left. \right\} \quad (15)$$

に対しては、弾性変形を、

$$F = 0, \text{かつ } d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} > 0 \quad \left. \right\}$$

に対しては、塑性変形を与える、

さて、2つのことなる解に対応する応力増分 $d\sigma'_{ij}$, $d\sigma''_{ij}$ およびひずみ増分 $d\varepsilon'_{ij}$, $d\varepsilon''_{ij}$ をもつて、次のような、物体全体に、の積

分

$$J = \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV$$

を考える。どちらの応力増分もつり合ひの条件をみたすこと、およびひずみ増分は(8)式で与えられることが、Greenの定理を用いること

$$\begin{aligned} J &= \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV \\ &= \int_S \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (du_i' - du_i'') \ell_j dS \end{aligned}$$

となる。ただし、 ℓ_j は表面における外向きの法線の方向余弦である。しかるに、境界上では、どちらの解の応力増分も、与えられた境界条件 dP に等しくならねばならぬから、右辺の積分はゼロとなり

$$J = \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV = 0 \quad (16)$$

となる。したがって、被積分項の各項はゼロとなり $d\sigma_{ij}' = d\sigma_{ij}''$ となって、解は唯一的にきまる。次に、 $d\sigma_{ij}' \neq d\sigma_{ij}''$ に対して、 J がゼロにならぬことを証明する。これは、以下のようない、いの場合にわけて考える。

i) $F < 0$

ある時は

$$\begin{aligned} F &= 0, \quad \text{かつ} \quad d\sigma_{ij}' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) < 0, \\ d\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) &< 0 \end{aligned}$$

のとき。

この場合には、 $d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}''^P = 0$ である。このときの J を J' と書く

$$J' = \int_V \frac{1}{2G} \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left\{ d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'' - \delta_{ij} \frac{\sum_k (d\sigma_{kk}' - d\sigma_{kk}'')}{m+1} \right\} dV$$

となるが、 i, j, k はおのおの x, y, z なる値をとるから、

$$\begin{aligned}
 J' = & \int \frac{1}{2G} \left[(\partial\sigma_x' - \partial\sigma_x'')^2 + (\partial\sigma_y' - \partial\sigma_y'')^2 + (\partial\sigma_z' - \partial\sigma_z'')^2 \right. \\
 & - \frac{1}{m+1} \left\{ (\partial\sigma_x' - \partial\sigma_x'')^2 + (\partial\sigma_y' - \partial\sigma_y'')^2 + (\partial\sigma_z' - \partial\sigma_z'')^2 \right\} \\
 & \left. + 2 \left\{ (\partial T_{xy}' - \partial T_{xy}'')^2 + (\partial T_{yz}' - \partial T_{yz}'')^2 + (\partial T_{zx}' - \partial T_{zx}'')^2 \right\} \right] dV
 \end{aligned}$$

となるが、被積分項の第1項と第2項とは、Schwarz の不等式により正であり、したがって

$$J' > 0$$

となる

ii) $F = 0$, かつ $\partial\sigma_{ij}' (\partial F / \partial\sigma_{ij}) > 0$
および

$$F = 0, \text{ かつ } \partial\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial\sigma_{ij}) < 0$$

のとき。

この場合は、 $d\varepsilon_{ij}'^P \neq 0$, $d\varepsilon_{ij}''^P = 0$ である。このときの J 及 J'' を書くと

$$\begin{aligned}
 J'' = & \int_V \sum_{ij} (\partial\sigma_{ij}' - \partial\sigma_{ij}'') \left[\frac{1}{2G} \left\{ \partial\sigma_{ij}' - \partial\sigma_{ij}'' - S_{ij} \frac{\sum_k (\partial\sigma_{kk}' - \partial\sigma_{kk}'')}{m+1} + d\varepsilon_{ij}'^P \right\} \right] dV \\
 = & J' + \int_V \sum_{ij} (\partial\sigma_{ij}' - \partial\sigma_{ij}'') d\varepsilon_{ij}'^P dV
 \end{aligned}$$

となる。右辺の第2項は

$$\int_V \sum_{ij} (\partial\sigma_{ij}' - \partial\sigma_{ij}'') d\varepsilon_{ij}'^P dV = \int_V \sum_{ij} d\lambda' \left\{ \partial\sigma_{ij}' \frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} - \partial\sigma_{ij}'' \frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \right\} dV$$

となるが、この右辺の被積分項は仮定により正であり、したがって

$$J'' > 0$$

となる。最後に

iii) $F = 0$, かつ $\partial\sigma_{ij}' (\partial F / \partial\sigma_{ij}) > 0$
および

$$F = J, \text{ かつ } \partial\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial\sigma_{ij}) >$$

のとき。

この場合には、 $d\varepsilon_{ij}'^P \neq 0$, $d\varepsilon_{ij}''^P \neq 0$ である。このときの J を J'' と書く

$$J'' = \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left[\frac{1}{2G} \left\{ d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'' - \delta_{ij} \frac{\sum_k (d\sigma_{kk}' - d\sigma_{kk}'')}{m+1} + d\varepsilon_{ij}'^P - d\varepsilon_{ij}''^P \right\} \right] dV$$

$$= J' + \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}'^P - d\varepsilon_{ij}''^P) dV$$

となる。右辺の第2項は

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}'^P - d\varepsilon_{ij}''^P) dV \\ &= \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left(d\lambda' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\lambda'' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) dV \end{aligned}$$

となるが、ここで $d\lambda'$, $d\lambda''$ が

$$d\lambda' = h \cdot d\sigma_{ij}' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\lambda'' = h \cdot d\sigma_{ij}'' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

なる形で与えられるとする

$$J'' = J' + \int_V \sum_{ij} h (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^2 dV$$

となるから

$$J'' > 0$$

となる。

第3節 第3章の結語

この章では、筆者の提案した降伏条件より導かれる理論は、最大塑性仕事の原理および解の唯一性の定理を満足することを証明して、この理論が、数理塑性論として、矛盾のないものであることを明らかにした。

第4章 塑性平面ひずみ理論

この章では、数理塑性論のうちで、最も数学的に興味のある問題の一つであるところの平面ひずみ理論に、第2章で提案した降伏条件にもとづく理論を適用して、この理論が、金属材料の実際の性質をひろくとり入れたにもかかわらず、かなり取扱いに便利なものであることを示す。ここでは、ひずみの弾性部分を無視した剛塑性材料を考えることにする。したがって、塑性部分を表わす添字はつけていないことにする。

第1節 基礎方程式

異方性の主軸の一つであるZ軸が流れの面に垂直であるような平面ひずみ状態を考える。Z軸向には、応力の符号を逆にしても、降伏応力の値は変わらないと仮定する。このような仮定を用いても、実用的な価値は減じないと思う。この場合には(3)式より

$$F_b - G_b = 0$$

$$\text{あるのは } F_b = G_b$$

となる。平面ひずみ状態を考えるから

$$d\epsilon_z = d\delta_{zx} = d\delta_{zy} = 0$$

であるから(11)式より

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

および

$$\sigma_z = \frac{G\sigma_x + F\sigma_y}{F+G}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (17)$$

となる。したがって、降伏条件(1)は次のようになる。

$$\frac{FG + GH + HF}{2N(F+G)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 - \frac{Gb - Hb}{N} (\sigma_x - \sigma_y) + T_{xy}^2 = T^2 \quad (18)$$

たゞ、 T は、XY 軸に関するせん断降伏応力で、(5) 式の T_{xy} はあたる。さて

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{N(F+G)}{2(FG + GH + HF)} \\ b &\equiv \frac{(G+F)(Gb - Hb)}{FG + GH + HF} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

とおへと、降伏条件は

$$(\sigma_x - \sigma_y - b)^2 + 4aT_{xy}^2 = 4aT^2 + b^2 \quad (20)$$

となる。材料が等方性の場合には、(19) 式において

$$3F = 3G = 3H = N, \quad Gb - Hb = 0$$

とおへと

$$a = 1, \quad b = 0$$

となるから、これらを (20) 式に代入すると

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4T_{xy}^2 = 4T^2$$

となつて、たしかに Mises の条件に帰着する。

平面ひずみの場合の応力塑性ひずみ増分の関係は、(11) 式に (17) の関係を代入すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\lambda \left\{ \frac{(FG + GH + HF)(\sigma_x - \sigma_y)}{F+G} - (Gb - Hb) \right\} \\ d\varepsilon_y &= d\lambda \left\{ \frac{(FG + GH + HF)(\sigma_y - \sigma_x)}{F+G} - (Hb - Gb) \right\} \\ d\gamma_{xy} &= d\lambda N T_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

また、異方性の主軸に関する速度成分 u_x および v_y とすると

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad d\varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad d\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

であるから、応力ひすみ関係(21)より、次式が得られる。

$$\frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\tau_{xy}} \quad (22)$$

いま、異方性の主軸であるX軸に対する、主応力方向の傾きを ϕ 、主ひすみ増分方向の傾きを ψ とすると、

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

および

$$\tan 2\psi = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}$$

であるから、両者の関係は

$$\cot 2\psi = \frac{1}{a} \cot 2\phi - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\tau_{xy}} \quad (23)$$

となる。したがって、一般に、主応力の方向と主ひすみ増分の方向とは一致しない。(23)式を少し変形した式

$$\tan 2\psi = \frac{N\tau_{xy}}{\frac{FG + GH + HF}{F+G}(\sigma_x - \sigma_y) - (G_b - H_b)}$$

より、 $\phi = 0$ すなわち $\tau_{xy} = 0$ のときは、 $\psi = 0$ となることから、主応力の方向が、異方性の主軸であるX軸と一致するときには、主応力の方向と主ひすみ増分の方向が一致することがわかる。

さて、平面ひずみの問題に対しても、5つの未知数、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u_x$ および v_y に対して
つり合の条件

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

塑性変形における体積一定の条件

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

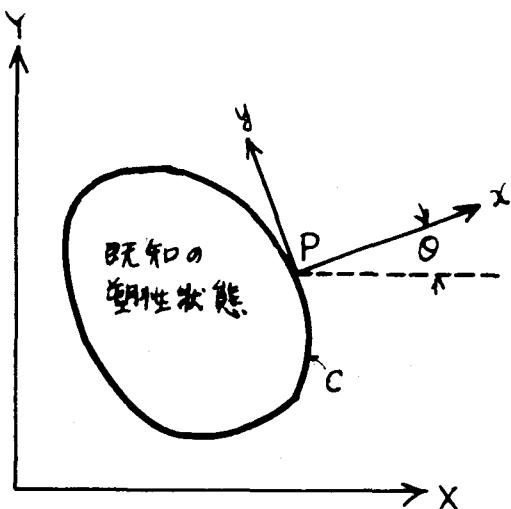
降伏条件 (20), および
応力ひずみ関係 (22)

なる合計5つの関係式がある。これら5つの
関係式の中には、3つのパラメータが含まれ
ている。これらは、異方性の主軸についての
せん断降伏応力 T と異方性パラメータ a, b で
ある。これらは、3つの測定を行うことによ
りて、実験的にきめることができます。

第2節 特性曲線

前節の終りにおいて述べたごとく、一般的
な異方性を持つ材料の塑性平面ひずみの問題
は、まず、その材料について、3つの測定が
できるような予備実験を行って、3つのパラ
メータを決定してから、与えられた境界
条件のもとに、5つの未知数についての、
5つの関係式を解いてゆけばよい。さて、こ
のようにして、閉曲線 C にかこまれる全塑性
域内の解すなわち応力と速度とが得られ、そ
して、いまは、さらに C の外での境界条件が
与えられなければ、もはや、 C 内の解を C の
外の領域に延長し得なくなってしまったとす
る。このとき曲線 C は特性曲線 (characteristics)

とよばれる (Hill, 1950, p. 132). いま, C 上の点 P における外向きの法線に沿って x 軸を, 接線に沿って y 軸をとる (第 6 図). ます,



第 6 図

P 点の近傍における応力状態に注目する. そのためには, x, y 座標系についての諸関係の形を求めておく. ます, つり合の条件 (24) の形はかわらす

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

である. 降伏条件は, 応力成分の変換の式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

を (20) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\{1-(1-a)\cos^2 2\theta\}\tau_{xy}^2 \\ &- 4(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \\ &- 2b\{\cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) - 2\sin 2\theta \tau_{xy}\} = 4aT^2 \end{aligned} \quad (28)$$

となる. ここで, P 点の近傍における応力の変化に注目する (第 7 図). C の内側における

る値に(1), 外側における値に(2)など添字をつけ, 曲線Cに沿って, 点Pから微小距離 dy はなれた点Qにおける値に(1')をつけることにある. 力のつもり合図から

$$(\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2 \quad (a)$$

$$\text{および} \quad (\sigma'_x)_1 = (\sigma'_x)_2 \quad (b)$$

である. また, モーメントのつもり合図から

$$(T_{xy})_1 = (T_{xy})_2 \quad (c)$$

$$\text{および} \quad (T'_{xy})_1 = (T'_{xy})_2 \quad (d)$$

である. すなわち, σ_x & T_{xy} はCをこえて連続である. したがって, これらの値を降伏条件(28)に代入すると, 降伏条件を満足する σ_y

$$(\sigma'_y)_2 = (\sigma_y)_2 + \frac{\partial (\sigma_y)_2}{\partial y} dy$$

$$(T'_{xy})_2 = (T_{xy})_2 + \frac{\partial (T_{xy})_2}{\partial y} dy$$

$$(\sigma'_y)_2 = (\sigma_y)_2 + \frac{\partial (\sigma_y)_2}{\partial y} dy$$

$$(T'_{xy})_2 = (T_{xy})_2 + \frac{\partial (T_{xy})_2}{\partial y} dy$$

$$(\sigma'_y)_1 = (\sigma_y)_1 + \frac{\partial (\sigma_y)_1}{\partial y} dy$$

$$(T'_{xy})_1 = (T_{xy})_1 + \frac{\partial (T_{xy})_1}{\partial y} dy$$

$$(\sigma'_x)_1 = (\sigma_x)_1 + \frac{\partial (\sigma_x)_1}{\partial y} dy$$

第7図

の値は, 2次方程式の根として, 2つ見いたされる. もちろん, そのうちの1つは, Cのちょうど内側における値と一致する. 一般には, $(\sigma_y)_2$ & $(\sigma_y)_1$ は等しくなくてよいのであるが, ここで σ_y はCをこえて連続, すなわち

$$(\sigma_y)_1 = (\sigma_y)_2 \quad (e)$$

$$\text{および} \quad (\sigma'_y)_1 = (\sigma'_y)_2 \quad (f)$$

であると仮定する。さて、Q 点における応力は

$$(\sigma'_x)_1 = (\sigma_x)_1 + \frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial y} dy, \quad (\sigma'_x)_2 = (\sigma_x)_2 + \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial y} dy$$

$$(\tau'_{xy})_1 = (\tau_{xy})_1 + \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} dy, \quad (\tau'_{xy})_2 = (\tau_{xy})_2 + \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y} dy$$

$$(\sigma'_y)_1 = (\sigma_y)_1 + \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} dy, \quad (\sigma'_y)_2 = (\sigma_y)_2 + \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} dy$$

である。これらの方程式は、それそれ、(a) と (b), (c) と (d) および (e) と (f) を用ひて

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial y}, \quad (g)$$

$$\frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} = \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y}, \quad (h)$$

$$\text{および} \quad \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} \quad (i)$$

が得られる。したがって、 $\partial\sigma_x/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial y$ および $\partial\sigma_y/\partial y$ は C をこえて連続であることがわかる。また、つり合の式 (26) を P 点に適用すると、それそれ

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y} = 0 \quad (j)$$

および

$$\frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} = 0 \quad (k)$$

となる。 (j) は (h) を用ひ、 (k) は (i) を用ひると、

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial x} \quad (l)$$

および $\frac{\partial(T_{xy})_1}{\partial x} = \frac{\partial(T_{xy})_2}{\partial x} \quad (m)$

が得られる。したがって、 $\partial\sigma_x/\partial x$ および
 $\partial T_{xy}/\partial x$ も C をこえて連続である。最後に残
った $\partial\sigma_y/\partial x$ については、降伏条件 (28) を x に
つけて微分して得られる式を用いて調べる。
(28) 式を x について微分すると

$$\left[\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\} (\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta T_{xy} - b \cos 2\theta \right] \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} \right) \\ + \left[4\{1-(1-a)\cos^2 2\theta\} T_{xy} - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) + 2b \sin 2\theta \right] \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

となる。この式に含まれる量は、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の
“ければ”、すべて、C の両側で既知である。し
たがって、もし $\{(\partial\sigma_x/\partial x) - (\partial\sigma_y/\partial x)\}$ の係数がゼ
ロにならなければ、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の唯一解が存在し、
その値は C をこえて連続になる。しかし、C
が特性曲線であるためには、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の値が唯
一的に求めることができなくならねばならぬ。
それは $\{(\partial\sigma_x/\partial x) - (\partial\sigma_y/\partial x)\}$ の係数がゼロ、す
なわち

$$\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\} (\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta T_{xy} \\ - b \cos 2\theta = 0 \quad (30)$$

の場合である。このとき、P 点において、
 $\partial\sigma_y/\partial x$ の値を求めることができます、また

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (n)$$

となる。同様にして、降伏条件 (28) を、y に
つけて微分すると、(30) 式が成立するときには

は、P 点におりて

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (0)$$

となる。(n) やび (o) をつり合の式(26)に代入すると、特性曲線上では

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

であることがわかる。

次に、速度について調べる。まず、両座標系につれての $\partial u_x / \partial x$, $\partial u_x / \partial x$ に対する変換の式

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \sin^2 \theta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

と、応力成分に対する変換の式(27)を(22)式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta + 2T_{xy}\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\} + b \sin 2\theta}{(\sigma_x - \sigma_y)\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\} - 2(1-a)T_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta - b \cos 2\theta} \quad (32)$$

ここでは、速度の両成分は連続であると仮定する。こうすると、応力について考えたときと同じように、 $\partial u_x / \partial y$ と $\partial v_y / \partial y$ は C をこえて連続になり、したがって、塑性変形における体積不变の条件 $(\partial u_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = 0$ から $\partial u_x / \partial x$ を C をこえて連続となる。したがって、(32) 式によつて、もし

$$\{1 - (1-\alpha) \sin^2 2\theta\} (\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-\alpha) \sin 2\theta \cos 2\theta \tau_{xy} - b \cos 2\theta = 0 \quad (33)$$

でなければ、 $\partial v_y / \partial x$ が唯一的にきまってしまう。すなわち、(33)式が速度に、ひいての特性曲線を与える。(33)式が成立するときには、(32)式により $(\partial u_x / \partial x) - (\partial v_y / \partial y) = 0$ となるが、他方、塑性変形における体積一定の条件から、 $(\partial u_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = 0$ であるから、結局、特性曲線上では、

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

となる。さて、(30)式と(33)式は全く同一の式であるから、応力に、ひいての特性曲線と、速度に、ひいての特性曲線とは、一致することがわかる。また、(34)式から、特性曲線の方向は、伸びが正の方向、すなわち、すべり線の方向であることがわかる。

次に、最大せん断応力の方向が、X軸となす角を ω とすると、その方向は

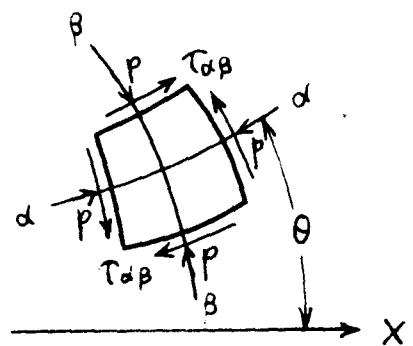
$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\omega - 2 \tau_{xy} \sin 2\omega = 0 \quad (35)$$

で与えられるから、ここに与えられる一般の異方性を持つ材料に対しては、最大せん断応力の方向と、すべり線の方向とは、一般には一致しないことがわかる。

第3節 すべり線の性質

すべり線に沿っての諸関係を、選択方位による異方性のみを持つ材料に対して Hill の方法 (Hill, 1950, p. 336) に従って求めよ。異方性の状態が、その大きさに関しても、方向に関して、均一に分布している、すな

わち、場所に無関係に一定であると仮定する。すべり線を曲線座標とし、2つのすべり線族を、パラメータ α, β によつて区別し、それらを、 α 曲線、 β 曲線とよぶことにある。そして、 α 曲線と β 曲線を右手系の直交曲線座標軸にえらんだ場合、代数的に最大の主応力方向が、第1象限および第3象限にあるようにする（第8図）。 θ を、



第8図

異形性の主軸である X 軸に対する α 曲線の反時計まわりの角度とする。 α, β 曲線座標系に沿する応力成分を $\sigma_x, \sigma_\beta, T_{\alpha\beta}$ とする。 $P = -\frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ は流れの面内における平均圧縮応力である。座標の変換による応力成分の変換の式(27)から

$$\sigma_x - \sigma_\beta = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta - 2 T_{\alpha\beta} \sin 2\theta$$

$$2 T_{x\beta} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2 T_{\alpha\beta} \cos 2\theta$$

ある関係があるから、これと、降伏条件(20)式に入ると

$$\begin{aligned} f(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, T_{\alpha\beta}) &= \left\{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta - 2 T_{\alpha\beta} \sin 2\theta - b \right\}^2 \\ &\quad + a \left\{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2 T_{\alpha\beta} \cos 2\theta \right\}^2 \\ &= 4 a T^2 + b^2 \end{aligned} \quad (36)$$

となる。塑性ホテンシャルは、降伏関数と同じ形であると仮定していふから、すべり線に沿つて伸びがゼロであること、すなむち

$$d\epsilon_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \sigma_\alpha} = 0, \quad d\epsilon_\beta = \frac{\partial f}{\partial \sigma_\beta} = 0$$

$$\cos 2\theta \{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta + 2\tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta - b \} \\ + a \sin 2\theta \{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2\tau_{\alpha\beta} \cos 2\theta \} = 0 \quad (37)$$

となる。 (36) 式と (37) 式とを、 $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$ および $\tau_{\alpha\beta}$ について

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha - \sigma_\beta &= (1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta \left\{ \frac{4T^2 + \frac{b^2}{a}}{1 - (1-a) \sin^2 2\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} + b \cos 2\theta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\left(4T^2 + \frac{b^2}{a} \right) \left\{ 1 - (1-a) \sin^2 2\theta \right\} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b \sin 2\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

を得られる。この式から

$$\frac{d(\sigma_\beta)}{d\theta} = -(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$$

なる関係があることがわかる。ここで、流れの面内の平均圧縮応力 $P = -\frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ を用ひると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= -P - \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \\ \sigma_\beta &= -P + \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= Th \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

と書ける。たゞし

$$h(\theta) = \frac{1}{2T} \left[\left(4T^2 + \frac{b^2}{a} \right) \left\{ 1 - (1-a) \sin^2 2\theta \right\} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b \sin 2\theta}{2T} \quad (40)$$

である。

流れの面内の平均圧縮応力 P および異方性の主軸である X 軸に対する曲線の方位 θ を用いて、すべり線に沿って成立する関係 (31) を書き表わすことを考える。考えていう点 P における X 軸の θ の値を θ_0 とすると、 x , y 座標と任意の α , β 座標の間の応力成分の変

換の式は、(27) 式を少し変形した式から

$$\sigma_x = -P + \frac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_b) \cos 2(\theta - \theta_0) - T \sigma_b \sin 2(\theta - \theta_0)$$

$$\sigma_y = -P - \frac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_b) \cos 2(\theta - \theta_0) + T \sigma_b \sin 2(\theta - \theta_0)$$

と書いてあるから、これら(31)式に代入すると、
P 点は σ に対する関係は

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ P + \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \cos 2(\theta - \theta_0) + Th \sin 2(\theta - \theta_0) \right\} \right]_{\theta=\theta_0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ P - \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \cos 2(\theta - \theta_0) - Th \sin 2(\theta - \theta_0) \right\} \right]_{\theta=\theta_0} = 0$$

となる。したがって、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_P + \left(\frac{1}{2} T \frac{d^2 h}{d\theta^2} + 2 Th \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_P = 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_P - \left(\frac{1}{2} T \frac{d^2 h}{d\theta^2} + 2 Th \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_P = 0$$

となる。しかも P 点はすべり線上の一般の点を表わしているから、この第1式を α 曲線に沿って、第2式を β 曲線に沿って積分すれば、

$$\begin{aligned} \text{曲線} \alpha \text{に沿って} & \quad \frac{P}{2T} + y = \text{一定} \\ \text{曲線} \beta \text{に沿って} & \quad \frac{P}{2T} - g = \text{一定} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (41)$$

となる。ここで

$$g(\theta) = \int_0^\theta \left(\frac{1}{4} \frac{d^2 h}{d\theta^2} + h \right) d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{dh}{d\theta} \right]_0^\theta + \int_0^\theta h d\theta$$

である。 h は (40) 式で与えられたから、これを θ で微分した形を求めると

$$\left[\frac{dh}{d\theta} \right]_0^\theta = -\frac{1}{T} \left[(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta \left\{ \frac{4T^2 + b^2}{1 - (1-a)\sin^2 2\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} + b(\cos 2\theta - 1) \right]$$

となる。また

$$\int_0^\theta h d\theta = \left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\theta \left\{1 - (1-a)\sin^2 2\theta\right\}^{\frac{1}{2}} d\theta - \frac{b}{2T} \int_0^\theta \sin 2\theta d\theta$$

であるから、 $k^2 \equiv 1-a$ とおくと

$$\int_0^\theta h d\theta = \left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} E(k, \theta) + \frac{b}{4T} (\cos 2\theta - 1)$$

となり、結局

$$g(\theta) = - \left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta}{2 \left\{1 - (1-a)\sin^2 2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}} - E(k, \theta) \right] \quad (42)$$

となる。ここで、 $E(k, \theta)$ は、第 2 種のだ円積分である。等方性のとき、すなわち、 $a=1$, $b=0$ のときは、(42) 式から

$$g(\theta) = \theta$$

となり、すべり線上における関係 (41) は

$$\alpha \text{曲線に沿って } p + 2\theta T = \text{一定}$$

$$\beta \text{曲線に沿って } p - 2\theta T = \text{一定}$$

となり、たしかに、Hencky の関係に帰着する。

次に、すべり線上の速度の関係については、 u, v を α および β 曲線に沿う速度成分とするとき、 x, y 座標と任意の α 、 β 座標の間の速度成分の変換の式

$$u_x = u \cos(\theta - \theta_0) - v \sin(\theta - \theta_0)$$

$$v_y = u \sin(\theta - \theta_0) + v \cos(\theta - \theta_0)$$

を (34) 式に代入するところにより

$$\begin{aligned} \alpha \text{曲線に沿って } du - v d\theta &= 0 \\ \beta \text{曲線に沿って } dv + u d\theta &= 0 \end{aligned} \quad \} \quad (43)$$

となって、等方性理論のときの Geiringer の関係式と全く同じものを得る。

最後に、2 つの α 曲線 AP と BQ 、および 2 つの β 曲線 AB と PQ によってかこまれる曲線 4 辺形 $ABQP$ (第 9 図) を考える。

A 点における P, g の値を p_A, g_A と書く表わし方を用いる。 (41) 式を用いて、 $p_Q - p_A$ を 2 通りの経路で考えると、ます

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T} (p_Q - p_A) &= \frac{1}{2T} (p_Q - p_B) + \frac{1}{2T} (p_B - p_A) \\ &= (g_B - g_Q) - (g_B - g_A) \\ &= 2g_B - g_Q - g_A\end{aligned}$$

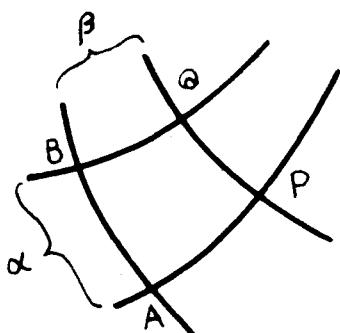
となるが、他方

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T} (p_Q - p_A) &= \frac{1}{2T} (p_Q - p_P) + \frac{1}{2T} (p_P - p_A) \\ &= (g_Q - g_P) + (g_A - g_P) \\ &= g_Q + g_A - 2g_P\end{aligned}$$

であるから、結局

$$g_Q - g_P = g_B - g_A \quad (44)$$

が得られる。これは、1つの族内の与えられた 2 つのすべり線が、他の族の任意の 1 曲線によつて切られる点間にあつる g の差が、一定であることを表わしているもので、等方性理論における Hencky の第 1 定理に相当するものである。



第 9 図

等方性の場合には、 $g(\theta) = \theta$ であるから、2, のすべり線に沿つて一定であるのは、角度 θ そのものの θ である。しかし、ここで考えるような異方性を持つ材料の場合には、すべり線に沿つて一定であるのは (42) 式で与えられる複雑な量である。したがつて、この場合には、等方性理論の場合のような簡単なすべり線場の幾何学 (Hill, 1950,

p. 136) は成立しない。

第4節 第4章の結語

この章では、第2章で提案した降伏条件にとく理論を、平面ひずみの理論に適用した。その結果、次のようなことがわかつた。

- i) 応力の主方向は、一般には、塑性ひずみ増分の主方向とは一致しない。
- ii) 等方性理論におけると同様、応力についての特性曲線と、速度についての特性曲線とは一致する。
- iii) 等方性理論におけると同様、特性曲線はすべり線である。
- iv) 最大せん断応力の方向は、一般には、すべり線の方向とは一致しない。
- v) 等方性理論において成立したような、簡単なすべり線場の幾何学は成立しない。

第5章

平面応力状態における例題

第1節 引張りによる異方性を受けた 材料の主塑性ひずみ増分の方 向と主応力の方向との関係

等方性材料に対する理論によれば、ある負荷のもとにおいて塑性変形が進行する場合、主塑性ひずみ増分の方向は、主応力の方向と一致する (Hill, 1950, p. 39)。異方性を持つ材料に対して第2章において提案した降伏条件にもとづく理論では、この関係がどのようになるかを、引張りで塑性変形を与えた板から、 $\phi = 30^\circ$ 方向に切りとった試験片の引張り降伏応力を求めた斎藤氏の実験結果 (斎藤, 1955) を借用して調べる。これによると、焼きなましした状態で等方性である黄銅の平板を、あらかじめ引張りによって 12% の残留ひずみが残るよう塑性変形を与えた後、その引張りの方向に対して中の角度をなす方向に切りだした試験片の引張り降伏応力は、次のとおりである。

$\phi, {}^\circ$	引張り降伏応力, kg/mm^2
0	300
22.5	278
45	283
67	250
90	230

焼きなまし材に、引張りで異方性を与えた平板の異方性の主軸は、その引張りの方向、板厚の方向およびそれらに直角の方向である

と考えられる。それらの方向を、それぞれ X, Y および Z 方向とする。XY 面内の引張りに対する応力塑性ひずみの関係は、(11) 式において $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ とおくことにより、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^P &= d\lambda [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - (G_b-H_b)] \\ d\epsilon_y^P &= d\lambda [(H+F)\sigma_y - H\sigma_x - (H_b-F_b)] \\ d\epsilon_z^P &= d\lambda [-G\sigma_x - F\sigma_y - (F_b-G_b)] \\ d\gamma_{xy}^P &= d\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

この材料は、焼きなましした状態から、X 方向に 1 回単純に引張ったのみであるから、Y 方向と Z 方向の引張り降伏応力と圧縮降伏応力はそれぞれ等しいすなわち (2) 式において $S_y = S_z$, $S'_y = S'_z$ であると仮定する。したがって (2) 式より

$$G_t = H \quad (46)$$

となる。また、Z 方向すなわち板厚の方向に対しては、応力の符号を逆にしても、降伏応力の大きさは変わるものと仮定すると、(3) 式より

$$F_b = G_b \quad (47)$$

となる。塑性ひずみ増分の主方向が X 方向となす角を ψ とすると、(45), (46) および (47) の各式より

$$\tan 2\psi = \frac{2 d\gamma_{xy}^P}{d\epsilon_x^P - d\epsilon_y^P} = \frac{2 N \tau_{xy}}{3H\sigma_x - (F+2H)\sigma_y - 2(G_b-H_b)}$$

となる。いま、X 方向にに対して ϕ のかたむきを持つ単純引張り応力 σ が加えられると、(6) 式において、 $\theta = \phi$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ とおくことにより

$$\sigma_x = \sigma \cos^2 \phi, \quad \sigma_y = \sigma \sin^2 \phi, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \phi \cos \phi$$

となる。したがって、 ψ を与える式は

$$\tan 2\psi = \frac{2N \sigma \sin \phi \cos \phi}{\{3H \cos^2 \phi - (F+2H) \sin^2 \phi\} \sigma - 2(G_b - H_b)} \quad (48)$$

となる。この式の中に含まれる異方性パラメータは降伏条件から決定される。X 方向に対して中のかたむきをなす方向の単純引張りによる降伏は(7)式において $\theta = \phi$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ とおき, (46) より ψ (47) の関係を用ひると

$$\left\{ \frac{1}{4}(F+H+2N) + \frac{1}{4}(F+4H-2N) \cos^2 2\phi - \frac{1}{2}(F-H) \cos 2\phi \right\} \sigma^2 - 2(G_b - H_b) \cos 2\phi \sigma = 1 \quad (49)$$

により規定される。いま, $a = F+H+2N$, $b = F+4H-2N$, $c = F-H$, $d = G_b - H_b$ とおいて, (49) 式を

$$\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \cos^2 2\phi - \frac{1}{2}c \cos 2\phi \right) \sigma^2 - 2d \cos 2\phi \sigma = 1$$

と書いて, $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 67^\circ$ より 90° に対して, それで $\sigma = 30.0 \text{ kg/mm}^2, 28.3 \text{ kg/mm}^2, 25.0 \text{ kg/mm}^2$ より 23.0 kg/mm^2 は 3 値を代入すると, これら

の係数は

$$a = 4.9944 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$b = 0.38890 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$c = -1.5664 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$d = 15.269 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

を得られる。これらの値から (48) 式に含まれる係数は

$$3H = \frac{1}{8}(3a + 3b - 6c) = 3.1935 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

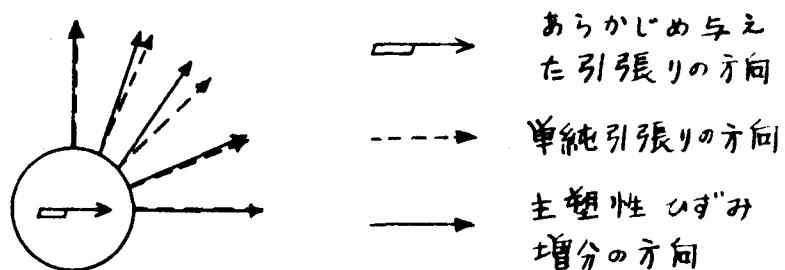
$$F + 2H = \frac{1}{8}(3a + 3b + 2c) = 1.6272 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$2N = \frac{1}{4}(3a - b - 2c) = 4.4318 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$2(G_b - H_b) = 2d = 30.537 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

となる。これら の 値を (48) 式に代入すると、引張りによる異方性を持つ黄銅に対する主塑性ひずみ増分の方向と主応力の方向との関係は次のようになる。第 10 図はこれを図示

ϕ	ψ
0°	0
22°30'	24°13'
45°	57°09'
67°	72°43'
90°	90°



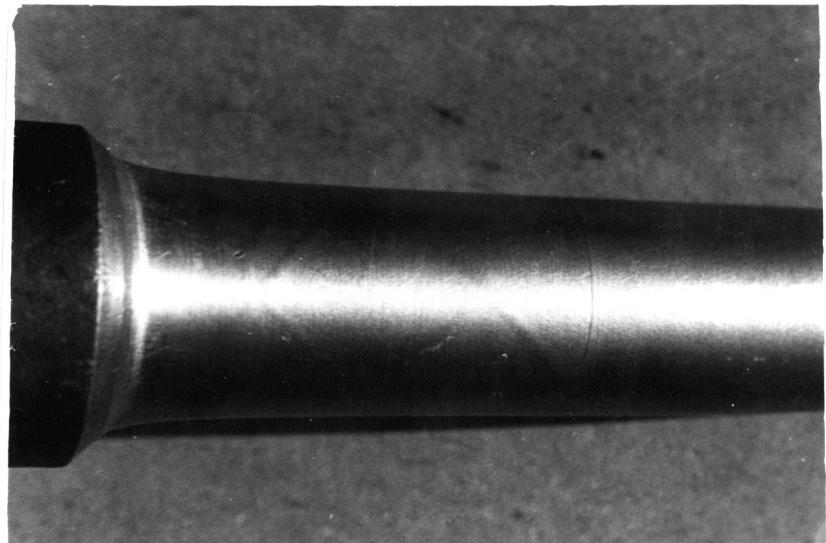
第 10 図

したものである。

第 2 節 ねじりによる異方性を受けた材料の引張りによるくびれの問題

金属の薄板材を引張ると、その引張りの軸とある角度をなすくびれが生ずることがしばしば観察される。くびれは、試験片の幾何学的もししくは材料の組織上のわずかな不均一のある場所からはじまるのであるが、特性曲線は、それに沿って、わずかな乱れが伝はんして行く曲線という性質を持つから、理論的には、くびれは特性曲線と一致する (Hill, 1950, p. 323 および appendix III)。第 6 章の実験におい

て用いた薄肉円管試験片のうち、ねじりによる異方性を持つ1本の試験片の引張り試験を行つてみるととき、第11図の写真に示すようなくびれを観察した。のちに調べたところによ

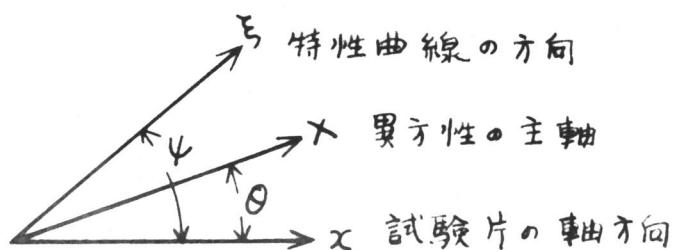


第11図

ると、たまたまこの試験片の内面には、中ぐりを行つたときのむしれがあわずかにあつたことがわかつた。その乱れから、このようなくびれが発生したものと思う。このくびれが、試験片の軸方向となす角度を、第2章の理論を用いて解析する。

まず、平面応力状態における特性曲線を求める。特性曲線は第4章、第2節において用いた方法によつても求められるが、ここでは別の方法で求めよ (Hill, 1950, appendix III).

試験片の軸方向
X 方向が、異方性の主軸 X 軸となす角および特性曲線の方向を
方向となす角を



第12図

それぞれ θ や ψ とすよ (第 12 図). ちえ
向の塑性伸びひずみ増分は、ひずみ増分の変
換の式を用ひよ

$$d\epsilon_s^P = d\epsilon_x^P \cos^2 \psi + 2 d\epsilon_{xy}^P \sin \psi \cos \psi + d\epsilon_y^P \sin^2 \psi \quad (50)$$

となる。引張りねじり組合せ応力試験によると
平面応力状態に対する塑性ひずみ増分は、(13)
式における $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_y^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_z^P &= d\lambda \left[- \left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x + (F-G) \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ &\quad \left. - (F_b-G_b) \right] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_{xy}^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \sin 2\theta \right] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (51)$$

となる。さて、(50) や (51) の 5 の式か
ら

$$\begin{vmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & 0 & 2 \sin \psi \cos \psi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & - \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &&&& - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \\ &&&& \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & - \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &&&& - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \\ &&&& \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \right] \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x + (G-F) \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ &&&& \left. + (F_b-G_b) \right] \\ 0 & 0 & 0 & 1 & - \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ &&&& - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \\ &&&& \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \sin 2\theta \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (52)$$

でなければなりません。したがって(52)式が特性曲線の傾斜 ψ を与えます。これを計算すると

$$\begin{aligned} & [\left\{\frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta\right\}\sigma_x - \left\{\frac{1}{2}(F-G)\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta\right\}\sin 2\theta T_{xy} + \left\{\frac{1}{2}(F_b-G_b)\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta\right\}] \tan^2 \psi \\ & + 2 \left[\left\{\frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta\right\} T_{xy} - \left\{\frac{1}{4}(F-G)\right. \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta\right\} \sin 2\theta \sigma_x - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \tan \psi \\ & + \left[\left\{\frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta\right\}\sigma_x \right. \\ & \quad \left. - \left\{\frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta\right\} \sin 2\theta T_{xy} \right. \\ & \quad \left. + \left\{\frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta\right\} \right] = 0 \quad (52') \end{aligned}$$

となる。 $(52')$ 式に $d\lambda \cdot \cos^2 \psi$ をかけて、 (51) 式を用いると、 (50) 式の右辺はゼロになりますことがわかる。したがって、 $d\varepsilon_3^P = 0$ 、すなわちこの場合にはも特性曲線は伸びゼロの方向であることがわかる。試験片の軸方向に引張る場合は、 $(52')$ 式で $\sigma_x = \sigma$ 、 $T_{xy} = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta\right]\sigma + \left\{\frac{1}{2}(F_b-G_b)\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta\right\} \tan^2 \psi + 2 \left[-\left\{\frac{1}{4}(F-G)\right. \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta\right\} \sin 2\theta \cdot \sigma - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \tan \psi \\ & + \left[\left\{\frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta\right\}\sigma \right. \\ & \quad \left. + \left\{\frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta\right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

となる。ねじりによつて塑性変形を受けた円管試験片の異方性の主軸は試験片の軸方向と 45° のかたまきをなすとすると、上式で $\theta = 45^\circ$ とおくと

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(F+G-2N)\sigma + \frac{1}{2}(F_b-G_b)\right] \tan^2 \psi + 2 \left[-\frac{1}{4}(F-G) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \right] \tan \psi + \left[\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] = 0 \quad (53) \end{aligned}$$

となる。この材料に対する異方性パラメータの値は

$$\begin{aligned} F + G + 4H &= 1 / 241.03 \quad \text{mm}^4/\text{kg}^2 \\ \frac{1}{4}(F + G + 2N) &= 1 / 891.62 \quad \text{mm}^4/\text{kg}^2 \\ F_b - G_b - 2H_b &= 1 / 204.26 \quad \text{mm}^2/\text{kg} \end{aligned}$$

である（第6章、第5節を参照）から、これらの値と、引張り降伏応力の値 $\sigma = 29.86 \text{ kg/mm}^2$ を(53)式に代入して $\tan \psi$ はつけてとくと、

$$\tan \psi = 1.2756 \quad \text{あるいは} \quad -1.5679$$

すなわち

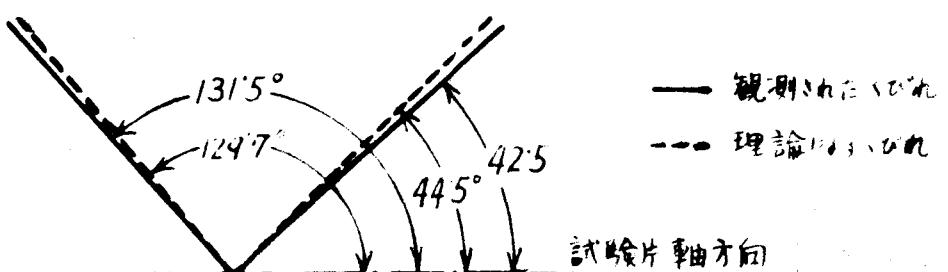
$$\psi = 51.90^\circ \quad \text{あるいは} \quad 122.53^\circ$$

ある値が得られる。これは、降伏がはじまつたときにおける ψ の値である。第11図の写真は試験片が単純引張りにより破断したのちにとつたものである。生じたくびれのかたむき ψ は、試験片が伸びるにつれて変つてくる。破断までの平均伸びは 30% であるから、破断時にあける ψ の値を ψ' とする

$$\cot \psi' = 1.30 \cot \psi$$

となる。これを計算すると

$$\psi' = 44.45^\circ \quad \text{あるいは} \quad 129.67^\circ$$



第13図

となる。試験片に生じたくびれの角を実測した結果によると、これらの角度は

$$42.5^\circ \quad \text{および} \quad 131.5^\circ$$

である（第13図）。

第3節 第5章の結語

引張りによる異方性を持つ黄銅を、はじめに与えた引張りの方向とことなる方向に引張った場合の降伏応力についての実験結果を用いて、その場合の、主応力の方向と、主塑性ひずみ増分の方向とにビ례はどのくら遺があるかを、第2章に提案した降伏条件にもとづく理論を用いて調べた。その結果、はじめに与えた引張りの方向、およびそれと 90° をなす方向に引張った場合には、両者は一致するが、一般にはこの両方向は一致せず、はじめの引張りの方向と 45° をなす方向に引張った場合には、両者の間に、約 12° もの差があることがわかった。

ねじれによる異方性を持つ試験片のうち、たまたま、加工の不良による組織上の欠かんを持っていた試験片を引張った際、くびれが発生した。そこで、ねじれによる異方性を持つ円管試験片を引張った場合に生ずるくびれが試験片の軸方向となす角度を、この理論から求め、実際に生じたものと比較した結果、両者はかなりよく合った。

第6章 組合せ応力による実験

最後に、この章において、第2章に提案した降伏条件にもとづく理論が実験結果とよく合うかどうかを調べる。

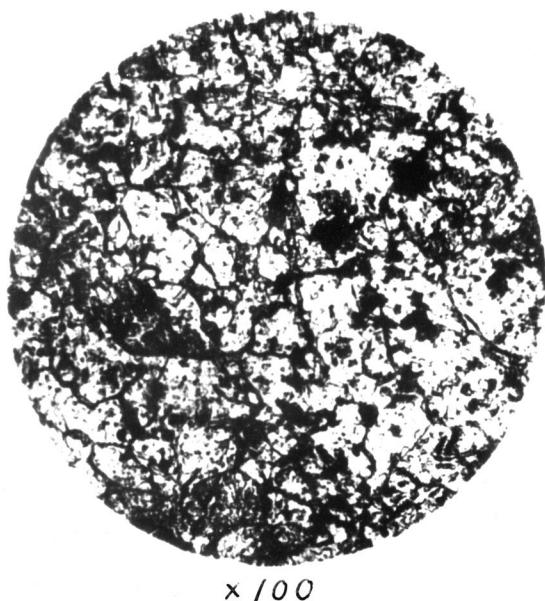
このような基礎理論を検討するためには、最も広く行われているものは、薄肉円管試験片に組合せ荷重をかけて、一様な平面応力状態を生ぜしめる実験である。等方性理論を検討するためには、引張内圧の組合せ負荷 (Lode, 1925; Osgood, 1947; Davis and Parker, 1948; Fraenkel, 1948; Marin and Katalik, 1950), および引張りねじりの組合せ負荷 (Taylor and Quinney, 1931; Morrison and Shepherd, 1950; Phillips, 1952; Davis, 1955; Feigen, 1955; Phillips and Kaechle, 1956) による実験が数多く行われてきた。これらは、主として軟鋼およびアルミニウム材料についての実験で、それらの材料が、Mises の降伏条件あるいは Tresca の降伏条件のうちのいずれによく合うかといふこと、あるいは全ひずみ理論と増分ひずみ理論のどちらがよく実験結果と合うかといふことを調べたものである。異方性を持つ材料に対する実験も、引張りねじりの組合せ応力によって、最近から行われた (吉村, 1957; Naghdi, Essenburg and Koff, 1958)。

ここでは、軟鋼の薄肉円管試験片を用いて、あらかじめねじりあるのは引張りにより塑性ひずみを与えることによって試験片に異方性を生ぜしめておいてから、引張りねじりの組

合せ荷重でもって負荷する実験を行つた。

第1節 材料および試験片

円管試験片の素材は、外径 28 mm, 内径 15 mm の熱間押出し鋼管である。これは JIS に STP 35 として規定してある炭素量 0.08 ~ 0.18 の普通軟鋼である。この管材を 240 mm ずつに切断したのち、925°C の温度で、半時間の間、焼きなましを行つた。その結果得られた組織の顕微鏡写真を第14図に示す。この写真から、



(軸に垂直な断面)

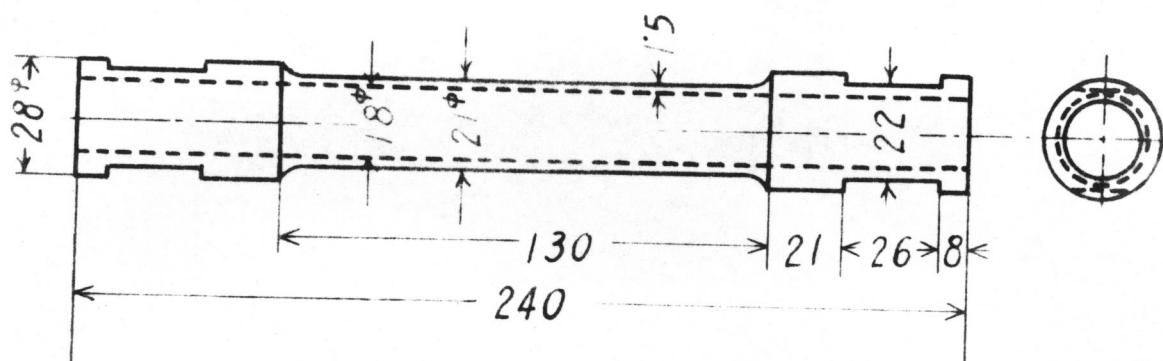


(軸を含む平面で切った断面)

第14図

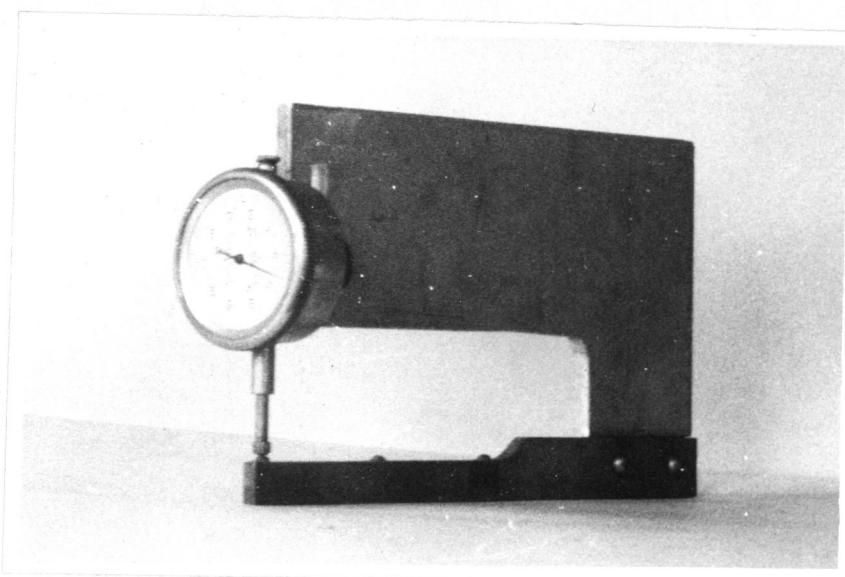
焼きなまされた材料は等方性であると判断してもよいと思う。これに、機械加工を行つて、第15図に示す試験片をついた。機械加工は、まずドリルを通してのち、中ぐりバイトで内面を仕上げ、内面に、精密に仕上げた心棒をさし込んでセンタードあさぎ、外面を仕上げた。このように加工法により、さきうるかぎり偏肉が生じないよう注意した。平

均直徑 19.5 mm に対して肉厚は 1.5 mm であるから、平均半径と肉厚の比は 6.5 となり、充分薄肉であるとみなすことができる。すなわち、試験片内に生ずる応力およびひずみの状態、および材料自身の機械的性質は、厚さにわたつて一様であるとみなすことができる。試験片の寸法の測定は、外径は、マイクロメータ



第 15 図

で 2 断面を、直交 2 方向に、すなわち 4 個所を、厚みは、第 16 図に示す厚さゲージで 2 断面を、 120° 間隔に、すなわち 6 の回転を測るこ

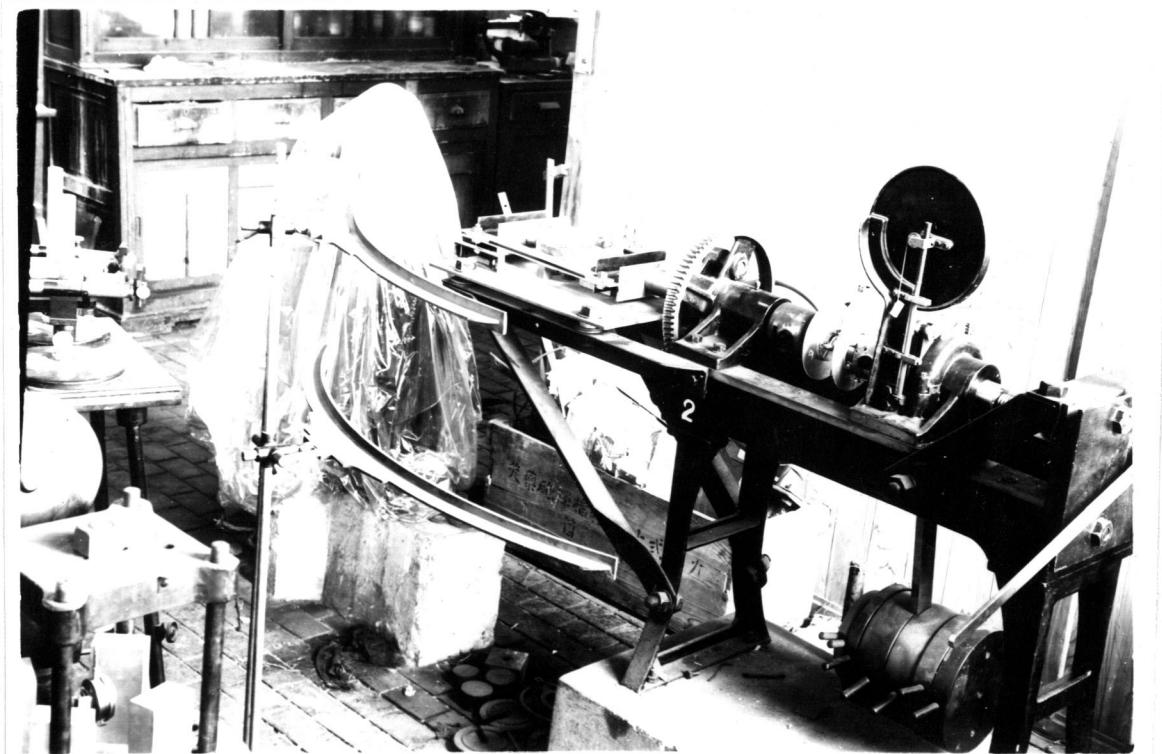


第 16 図

とによつて行つた。その結果、軸方向に沿つては、厚さおよび直径の変化はほんのなく、偏肉量の程度は、偏肉量に対する直径の比が0.5%以下であつて、充分満足しうるものである。また、表面および内面の仕上げの程度も、静的試験には充分満足しうるものであつた。

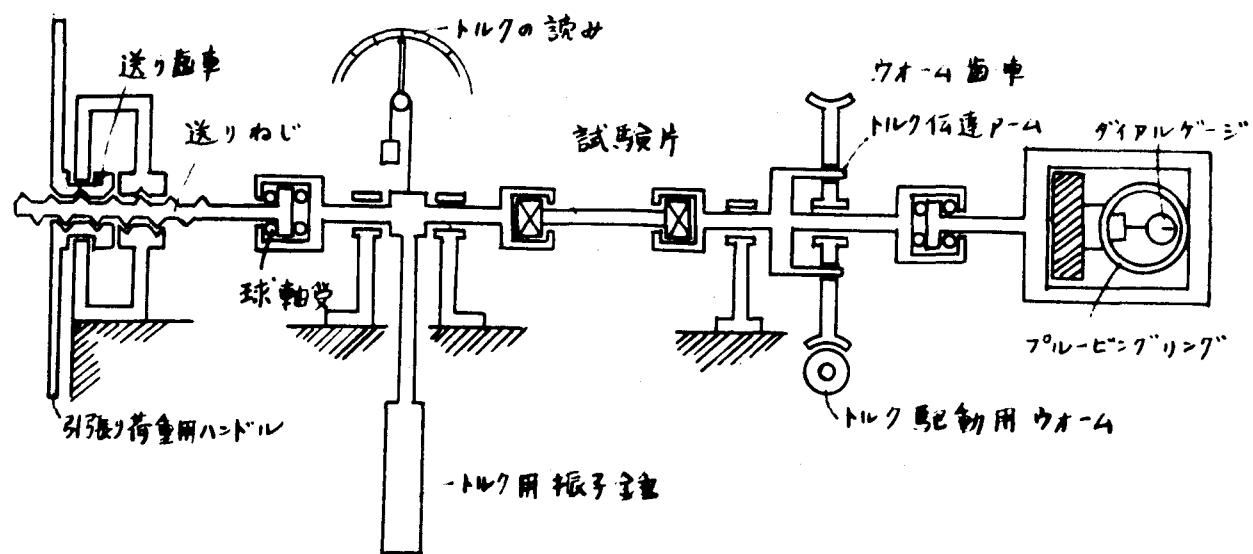
第2節 組合せ応力試験機およびひずみ計

引張りねじり組合せ応力試験機は、通常の振子式ねじり試験機を改造したものであつて、第17図の写真に示すものである。トルクは、トルクハンドルにより、トルク駆動用ウイームをまわして、その回転をウォーム歯車に伝えよ。これが、トルク伝達アームを回転させて、試験片をねじる。このトルクは、トルク用振子錘を振り上げることによりバランスさ



第17図

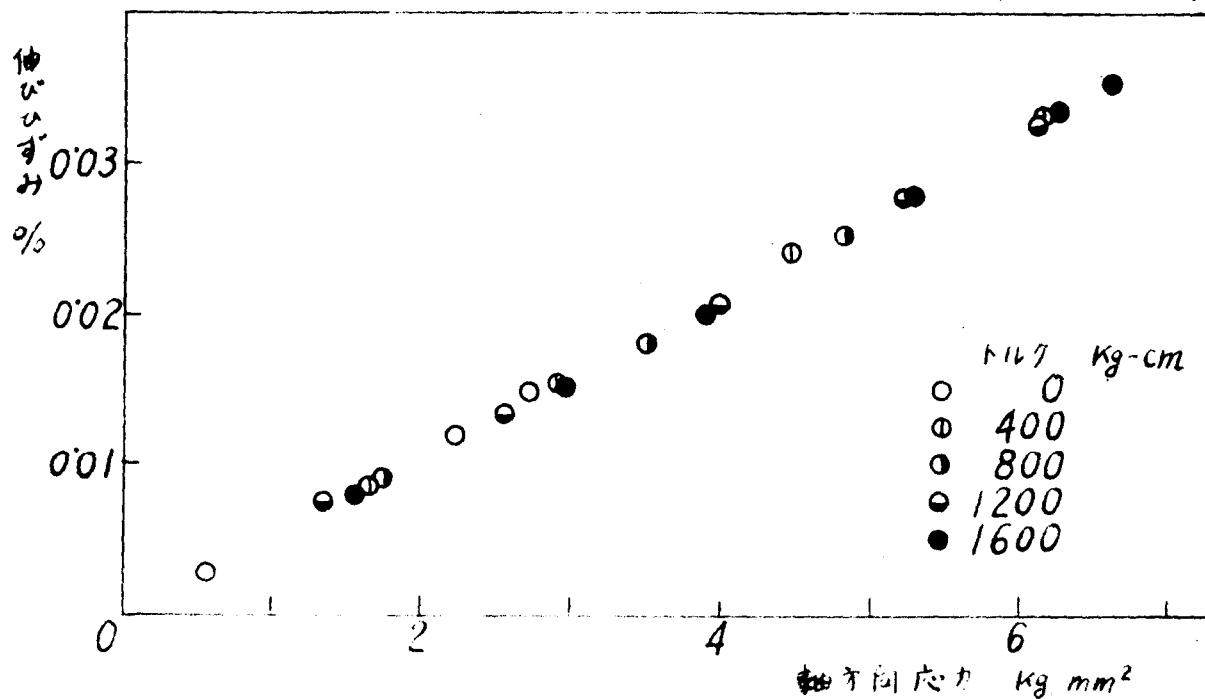
れ、その角変位量が、トルクの読みとして表わされる。引張りは、引張り荷重用ハンドルで送り歯車をまわして、送りねじを移動させるにより試験片にかけられる。その力はフルーピングリングに伝えられ、そのダイアルゲージの読みから、引張り荷重の値がわかる。



第 18 図

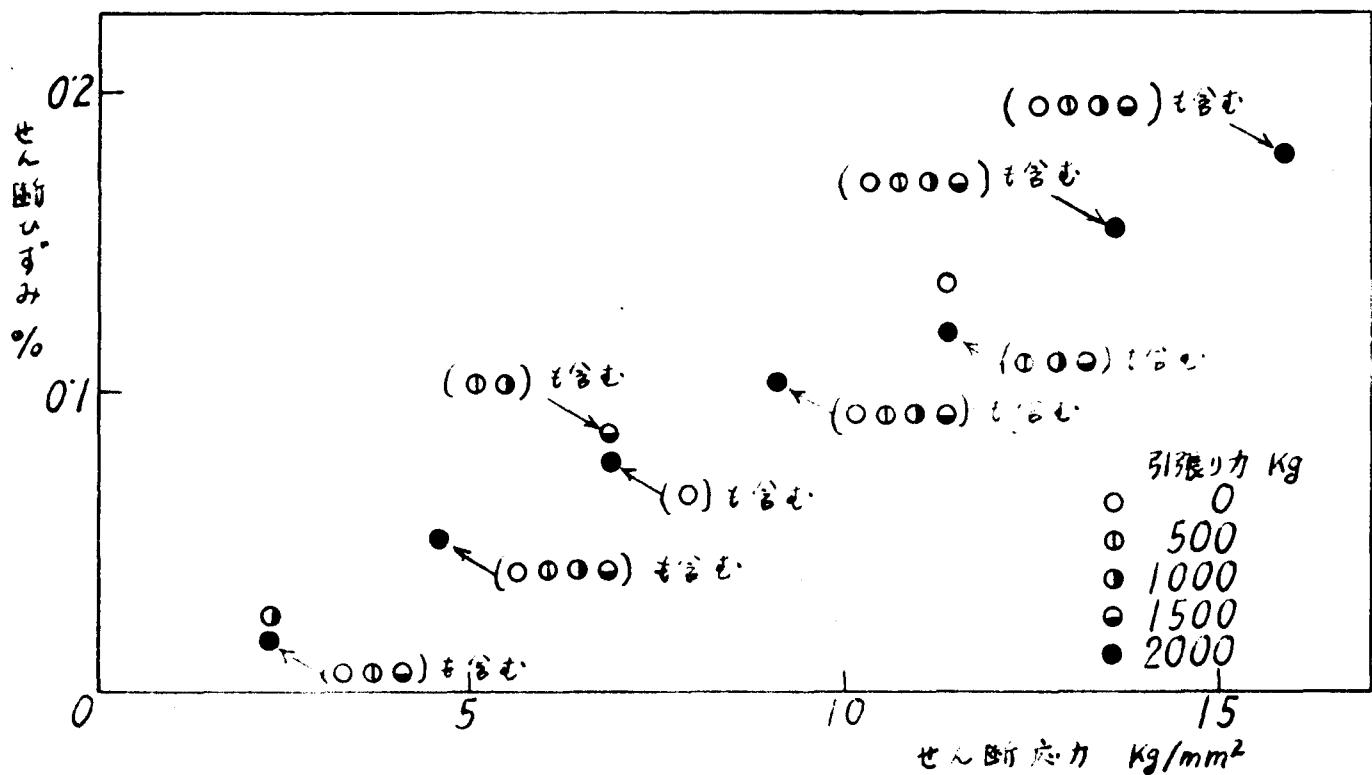
第 18 図に、これらの機構の概念図を示す。この試験機では、試験片にトルクをかけたまま引張る場合には、トルク伝達アームとウォーム歯車の間のまさつがダイアルゲージの読みに影響を与えることが予想される。また、引張り荷重をかけたまま試験片をねじる場合には、第 18 図の左側の球軸受のまさつがトルクの読みに影響を与えることが予想される。これららのまさつの影響がどの程度のものであるかを、あらかじめ調べた。トルクをかけたまま引張る場合には、外径 21 mm の中実試験片で、それぞれ 0 kg-cm, 400 kg-cm, 800 kg-cm,

1200 kg-cm および 1600 kg-cm の各一定トルクのもとにおける引張り試験を行い、その場合に生じたひずみを抵抗線ひずみ計で測定した。その結果を第19図に示す。この結果、この実験



第19図

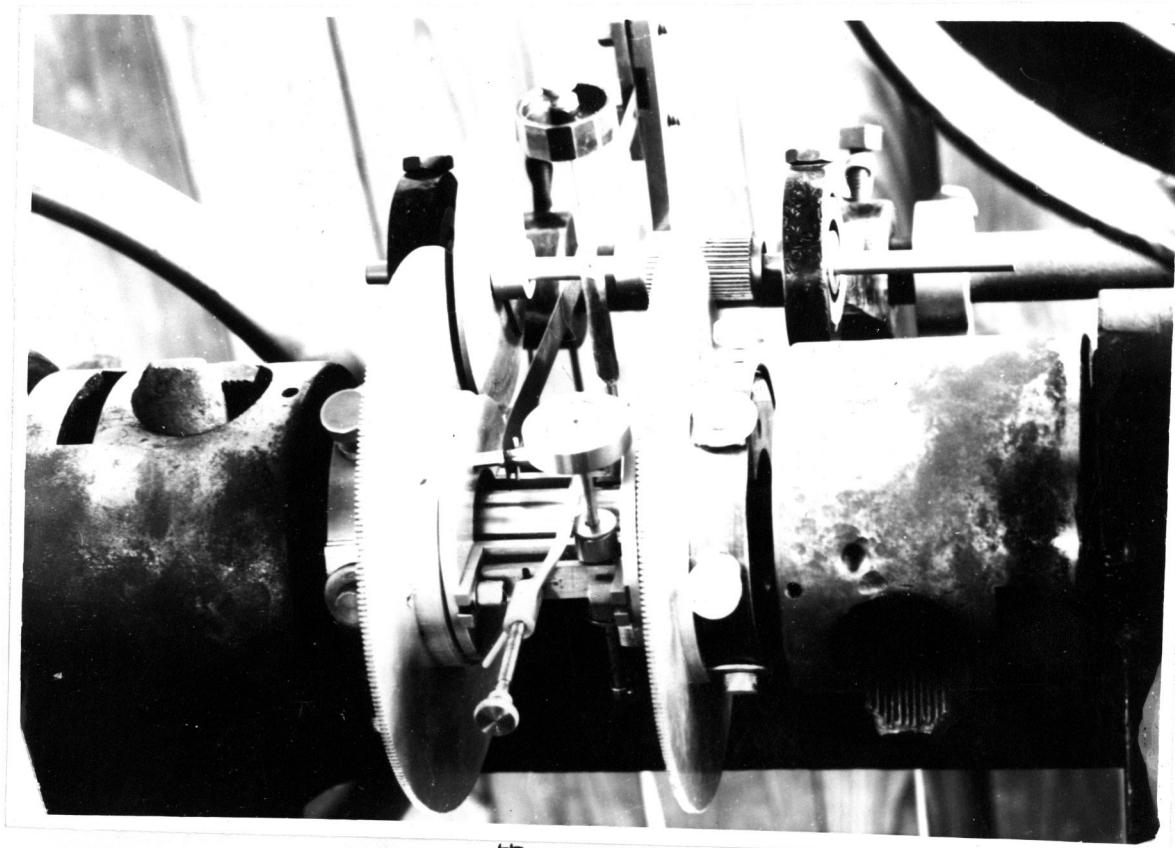
で使用する大きさの範囲内のトルクのもとでは、このままでの影響は引張り荷重の読みに全く誤差をおよぼさないといふことがわかつた。次に、引張り荷重のもとでねじる場合のトルクの読みの誤差を調べるために、あらかじめ引張りで塑性変形を与えて硬化させることによつて降伏点を上げた円管試験片を用いて、それぞれ、0 kg, 500 kg, 1000 kg, 1500 kg および 2000 kg の一定引張り力のもとにかけたねじり試験を行つ、のちに説明する組合せひずみ計を用ひてねじれ角を測定した。その結果を第20図に示す。図から、引張り荷重の



第 20 図

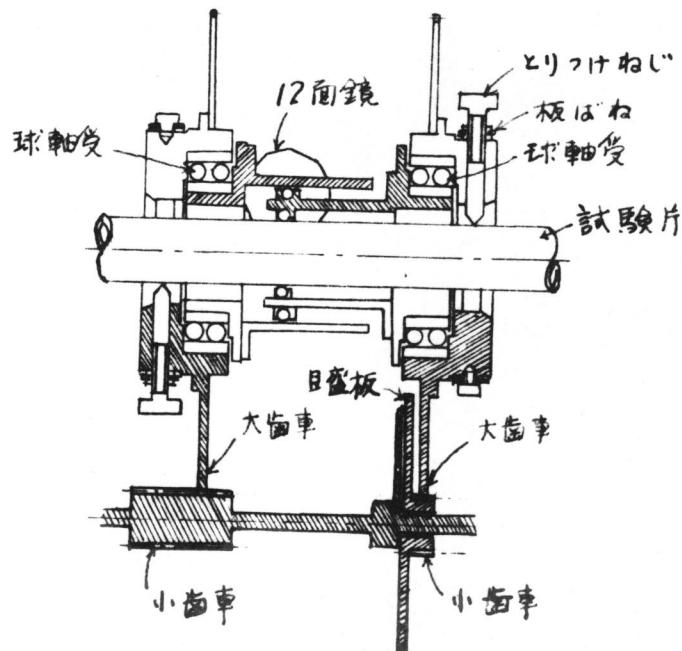
もとでねじる場合のトルクの読みの誤差を無視してもよいことがわかつた。なお、この試験機の容量は、引張り荷重が 5000 kg, トルクが 2000 kg·cm である。

新しく設計した組合せひずみ計は引張りねじり組合せ荷重を受ける凸管試験片の伸びと相対的な回転角とを同時に読みとるもので、原理としては、12面鏡式ひずみ計ヒトーシヨンメータとを 2 つの球軸覚を介しておののが独立に作用するようにしたものが、これを試験片にとりつけたところを、第 21 図の写真に示す。12面鏡式ひずみ計は、試験片の長さの変化とともに、12面鏡が回転するのを利用して、光のてこを用いてその変化を拡大して読むものである。トーションメータは、試験片



第 21 図

のゲージ長さ間の相対的な回転角を、歯車の機構で拡大して読むものである。また、試験片が軸方向に伸びた場合、その直徑は減少す



第 22 図

るが、そのために、ひずみ計のとりつけがゆるむことのないように、とりつけねじを板ばねでおさえて、とりつけねじが直徑の減少に追従するようにした。このひずみ計の機構を示したのが第22図で、図の上半の斜線の部分は伸びの測定を行う機構を示し、下半の斜線の部分は相対的なねじれ角をはかる機構を示す。

第3節 実験計画および予備実験

薄肉円管試験片に、トルク T と軸荷重 P を同時にかけるとき、試験片に生ずる応力およびひずみの状態は次のようになる。試験片の無負荷の状態および考える瞬間ににおける平均半径、肉厚およびゲージ長さをそれぞれ r_0, t_0, l_0 および r, t, l とし、組合せ荷重 P , T により円管が軸方向に $l + dl$ に伸され、ゲージ長さ間で相対的に角 χ だけねじられたとする。また、座標系は円管の軸方向, 円周方向および半径方向にそれぞれ x, y および z 軸をとる。応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{2\pi r t} = \frac{P(1+\epsilon)}{2\pi r_0 t_0} \\ \tau_{xy} &= \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T(1+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}{2\pi r_0^2 t_0} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となり、応力の主方向が、円管の軸方向と直す角 ϕ は

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (55)$$

で与えられる。ここで、 $\epsilon = (l - l_0) / l_0$ は工学

ひずみである。ひずみの成分は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1+e) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\gamma_x}{2l} = \frac{\gamma_0 x}{2l_0(1+e)^{\frac{3}{2}}} \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_y = -\frac{1}{2} \varepsilon_x \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

で与えられる。

この実験の目的は異方性の理論を検討する
ことにあるのであるから、まず、方向あわび
大きさのわかった異方性を与えた試験片
を用意せねばならぬ。このために、焼きな
ましされて完全に等方性であるとみなされる
試験片に、ねじりあるいは引張りで一定量の
せん断塑性ひずみあるいは伸び塑性ひずみを
与えた。与えるべきせん断塑性ひずみの量と
しては $\gamma_{xy}^p \sim 0.052$ や 0.104 の 2 種類をえ
らび、伸び塑性ひずみの量は $\varepsilon_z^p \sim 0.03$ とした。
このような既知の異方性を持つ試験片に種々
の組合せ応力をかけて、そのときの降伏応力
および塑性ひずみを測定し、第 2 章の理論か
ら予知される値と比較した。このとき、与え
る負荷は比例負荷すなわち応力比と主応力方
向が一定に保たれるよう負荷を用いた。こ
こで用いた負荷の様式は (55) 式に与えられた
主応力の方向 ϕ が $0^\circ, 12.6^\circ, 25.4^\circ, 36^\circ, 45^\circ$
およびあらかじめねじりに異方性を与えた試
験片については組合せ荷重のうちのトルクを
はじめに与えたトルクと逆方向にかけた -12.6° ,
 $-25.4^\circ, -36^\circ, -45^\circ$ の各種類である。

主応力 σ_1, σ_2 は

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x + (\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x - (\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \right\}\end{aligned}\quad (57)$$

で与えられるが、この式と(55)式から、主応力比 σ_2/σ_1 と主応力方向角との間に

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\cos 2\phi - 1}{\cos 2\phi + 1} \quad (58)$$

なる関係があることがわかる。すなわち、引張りねじり組合せ荷重により生ずる応力状態に対する主応力比 σ_2/σ_1 と主応力方向角とは互に独立ではなく、(58)式の関係でなければれてくる。したがって、どううか1つのパラメータでもって応力状態は完全に指定される。

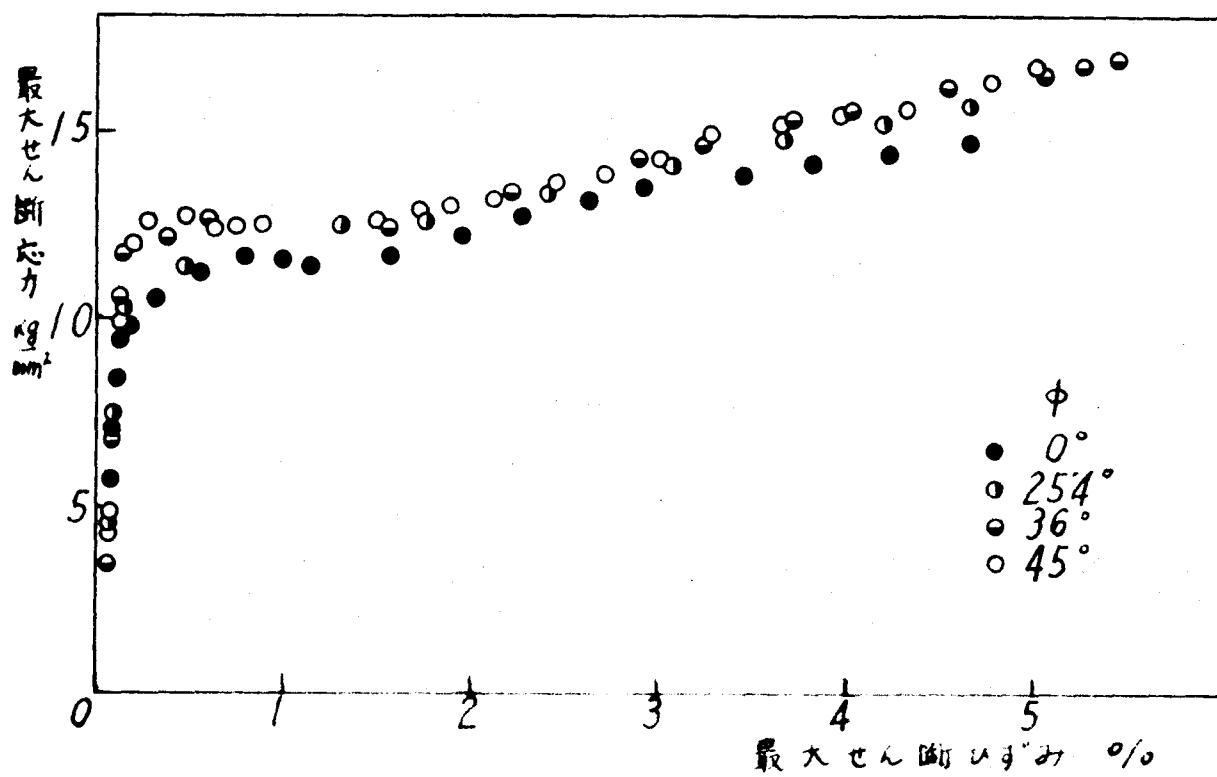
このように種々ことなる応力状態により行われた試験結果をなめら応力ひずみ関係をどのように看法で統一してまとめるかが問題になる。そこで、予備実験として、焼きなまし材に $0^\circ, 25.4^\circ, 36^\circ$ および 45° の 4 種類の応力状態で比例負荷を行った試験結果を、最大せん断応力・最大せん断ひずみの関係および相当応力・相当ひずみの関係でまとめた。ただし、引張りねじり組合せ応力の場合には、最大せん断応力 τ_m および最大せん断ひずみ δ_m は

$$\begin{aligned}\tau_m &= \left(\frac{1}{4} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta_m &= \left(\frac{9}{4} \varepsilon_x^2 + \delta_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (59)$$

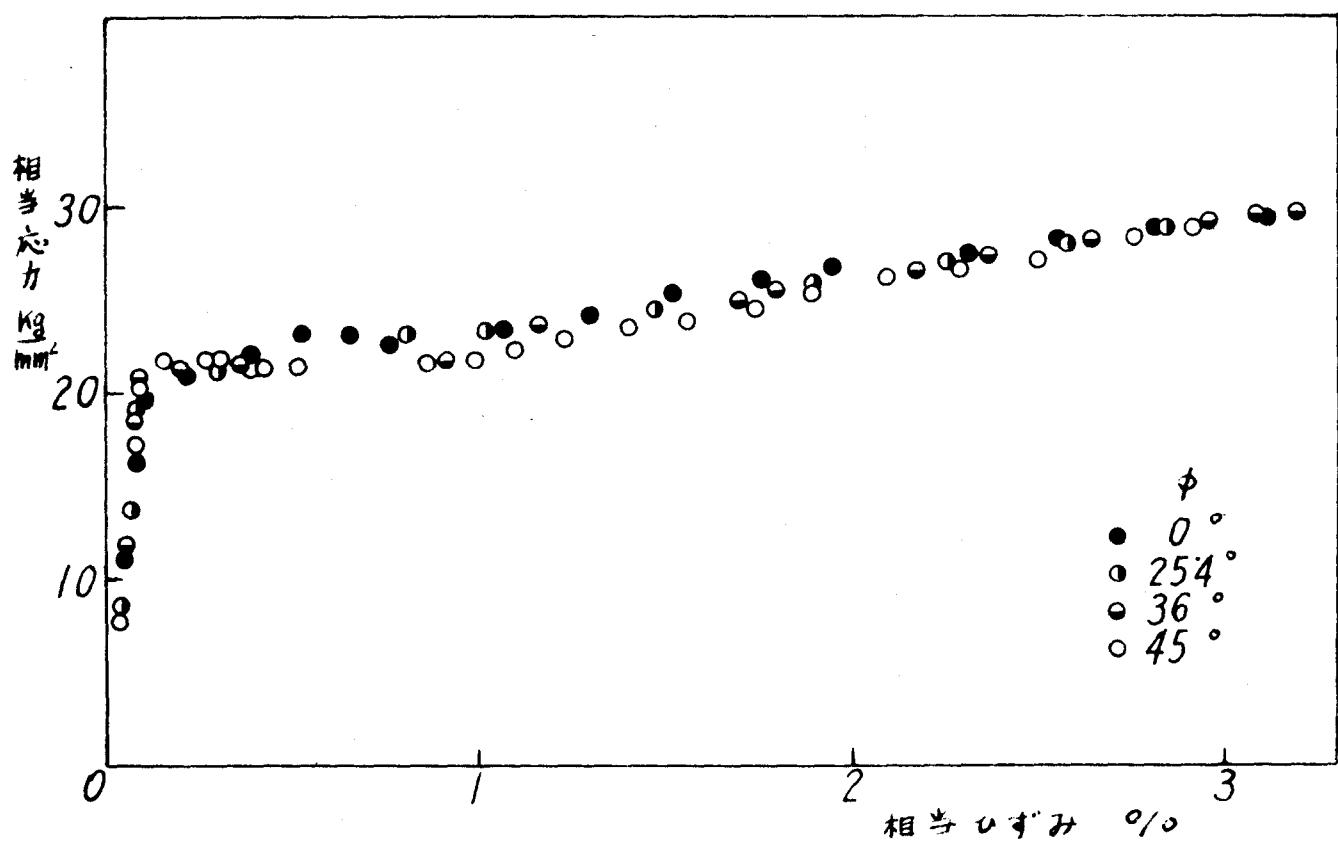
で、相当応力 $\bar{\sigma}$ および相当ひずみ $\bar{\varepsilon}$ は

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\varepsilon} &= \left(\varepsilon_x^2 + \frac{1}{3} \delta_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (60)$$

で与えられる。この予備実験の結果を第23図



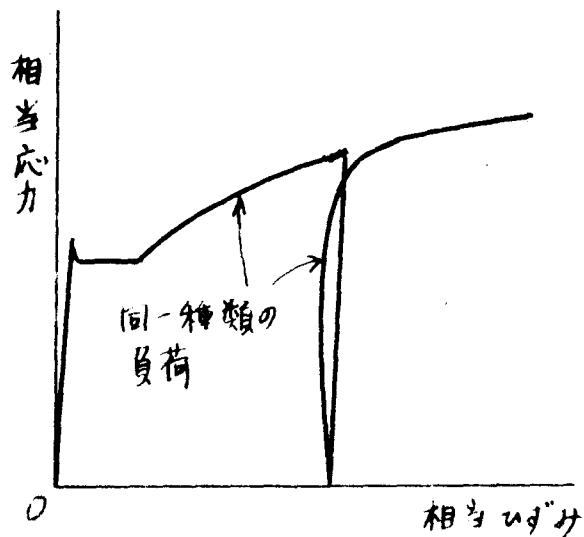
第 23 図



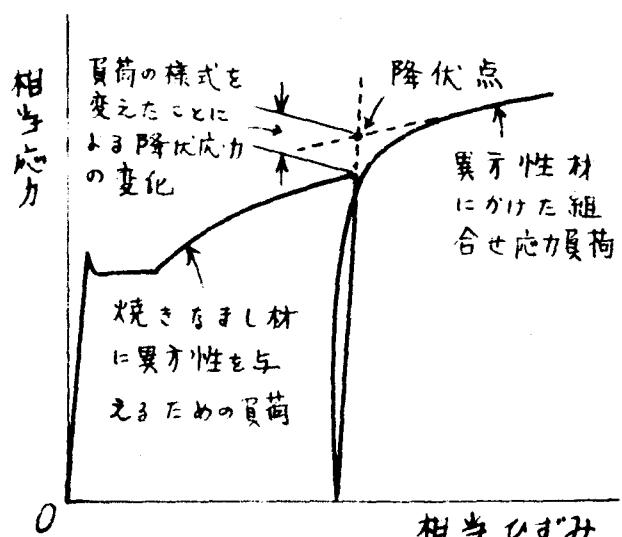
第 24 図

および第24図に示す。これららの図を比較すると、この実験に用いた材料に対しては、相当応力・相当ひずみの関係でデータを整理すればよいことがわかつた。

異方性を持つ材料に組合せ応力を負荷した場合の降伏点の決め方としては、筆者は次のような方法をとつた。はじめにねじりあきの引張りで塑性変形を生じた試験片から荷重をとりのぞき、ふたたび同じねじりあきの引張りの荷重で負荷すれば、その場合の応力・ひずみ曲線ははじめの負荷の際の除荷直前の応力のところに急にあれまがり、その後はじめの応力ひずみ曲線の延長をたどる(第25図)。そこでここで、相当応力・相当ひずみ



第25図



第26図

で表わした場合の応力ひずみ曲線がはじめの応力・ひずみ曲線の除荷直前にかけた硬化の状態と同じ程度に硬化したと思われる部分から接線を引いて、その接線が弾性域における応力・ひずみ関係を表わす直線の延長と交わる處

を降伏点とした(第26図)。したがつて、負荷の様式を変えたことによる降伏応力の変化はこのようにしてきめた降伏点の応力値とはじめの負荷の際の最終の点の応力値との差になる。

第4節 引張りねじり組合せ応力試験の理論

薄肉円管試験片に引張りねじり組合せ荷重をかけると、試験片には平面応力状態が生ずる。この場合の降伏条件および応力・塑性ひずみ増分の関係は、第2章の(7)式および(13)式で $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ とおくと得られる。すなわち、降伏条件は

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv \left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x^2 + \left\{ (F+G+4H) \right. \\ \left. - (F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy}^2 - \left\{ (F-G) \right. \\ \left. - (F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \tau_{xy} \\ + \left\{ (F_b-G_b) - (F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \\ - 2(F_b+G_b-2H_b) \sin 2\theta \tau_{xy} = 1 \quad (61)$$

となり、応力・塑性ひずみ増分の関係は

$$d\varepsilon_x^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \right] \quad (62)$$

$$d\varepsilon_y^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \cos 2\theta \right\} \right]$$

$$d\varepsilon_z^P = -d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x - (F-G) \sin 2\theta (\tau_{xy} + (F_b-G_b)) \right]$$

$$d\tau_{xy}^P = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \sin 2\theta \right]$$

となる。ここで、座標系は円管の軸方向、内周方向および半径方向にそれぞれ x, y および z 軸をとり、 x 軸が異方性の主軸である X 軸となるす角を θ としている。

さて異方性の主軸をどのようにきめると問題になるわけであるが、ここでは焼きなまし材に異方性を与えるための加工として応力比および主応力方向が一定に保たれると負荷を用いたのであるから、その主応力の方向を異方性の主軸と考えることにする。

したがって、あらかじめねじりでもつて異方性を与えた材料の引張りねじり組合せ応力のもとにおける降伏は、(61)式において、 $\theta = 45^\circ$ をおこなう式すなわち

$$\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x^2 + (F+G+4H)\tau_{xy}^2 - (F-G)\sigma_x\tau_{xy} + (F_b-G_b)\sigma_x - 2(F_b+G_b-2H_b)\tau_{xy} = 1 \quad (63)$$

によつて規定され、応力・塑性ひずみ増分関係は、(62)式より

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^P &= d\lambda \left[\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x - \frac{1}{2}(F-G)\tau_{xy} + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] \\ d\epsilon_y^P &= d\lambda \left[\frac{1}{4}(F+G-2N)\sigma_x - \frac{1}{2}(F-G)\tau_{xy} + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] \\ d\epsilon_z^P &= -d\lambda \left[\frac{1}{2}(F+G)\sigma_x - (F-G)\tau_{xy} + (F_b-G_b) \right] \\ d\gamma_{xy}^P &= d\lambda \left[\frac{1}{2}(F+G+4H)\tau_{xy} - \frac{1}{4}(F-G)\sigma_x - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

となる。このような材料の異方性パラメータをもとめるために単純な様式の試験を行つた結果、次のような降伏応力が得られたとする。

引張りに対する降伏は垂直応力で $s_0 \text{ kg/mm}^2$

圧縮に対する降伏は垂直応力で $-s_0 \text{ kg/mm}^2$

ねじりに対する降伏はせん断応力で $t_0 \text{ kg/mm}^2$

逆ねじりに対する降伏はせん断応力で $-t'_0 \text{ kg/mm}^2$

ただしここで、この材料は単純なねじりのみ

による加工を受けていただけであるから、軸方向についての性質は、異方性を与える前と同じく、応力の符号の逆転に対して対称であると仮定した。もうすると、これらの降伏応力を(63)式に代入することにより、異方性のパラメータは

$$\left. \begin{array}{l} F + G + 4H = \frac{1}{t_0 t'_0} \\ F + G + 2N = \frac{1}{4 S_0^2} \\ F - G = 0 \\ F_b + G_b - 2H_b = \frac{t_0 - t'_0}{2 t_0 t'_0} \\ F_b - G_b = 0 \end{array} \right\} \quad (65)$$

となる。これらの値を(63)式に用いると、ねじりによる異方性を持つ材料の降伏条件が与えられる。また、(65)式の値を用いることによって、塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比が、(64)式から

$$\frac{d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} = \frac{\frac{1}{2}(F+G+4H)G_y - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)}{\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x} \quad (66)$$

で与えられる。

同様にして、あらかじめ引張りでもつて異方性を与えた材料については、(63)および(64)式において、 $\theta = 0^\circ$ とおけばよい。降伏条件は

$$(G+H)\sigma_x^2 + 2N\tau_{xy}^2 - 2(G_b-H_b)\sigma_x = 1 \quad (67)$$

となり、応力・塑性ひずみ増分関係は、次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} d\epsilon_x^P = d\lambda [(G + H) \sigma_x - (G_b - H_b)] \\ d\epsilon_y^P = d\lambda [-H \sigma_x - (H_b - F_b)] \\ d\epsilon_z^P = d\lambda [-G \sigma_x - (F_b - G_b)] \\ d\gamma_{xy}^P = d\lambda N T_{xy} \end{array} \right\} \quad (68)$$

この材料の降伏応力が次のような値であったとする。

引張りに対する降伏は垂直応力で $s_o \text{ kg/mm}^2$

圧縮に対する降伏は垂直応力で $-s'_o \text{ kg/mm}^2$

ねじりに対する降伏はせん断応力で $t_o \text{ kg/mm}^2$

そうすると、異方性パラメータはこの場合

$$\left. \begin{array}{l} G + H = \frac{1}{s_o s'_o} \\ N = \frac{1}{2 t_o^2} \\ G_b - H_b = \frac{s_o - s'_o}{2 s_o s'_o} \end{array} \right\} \quad (69)$$

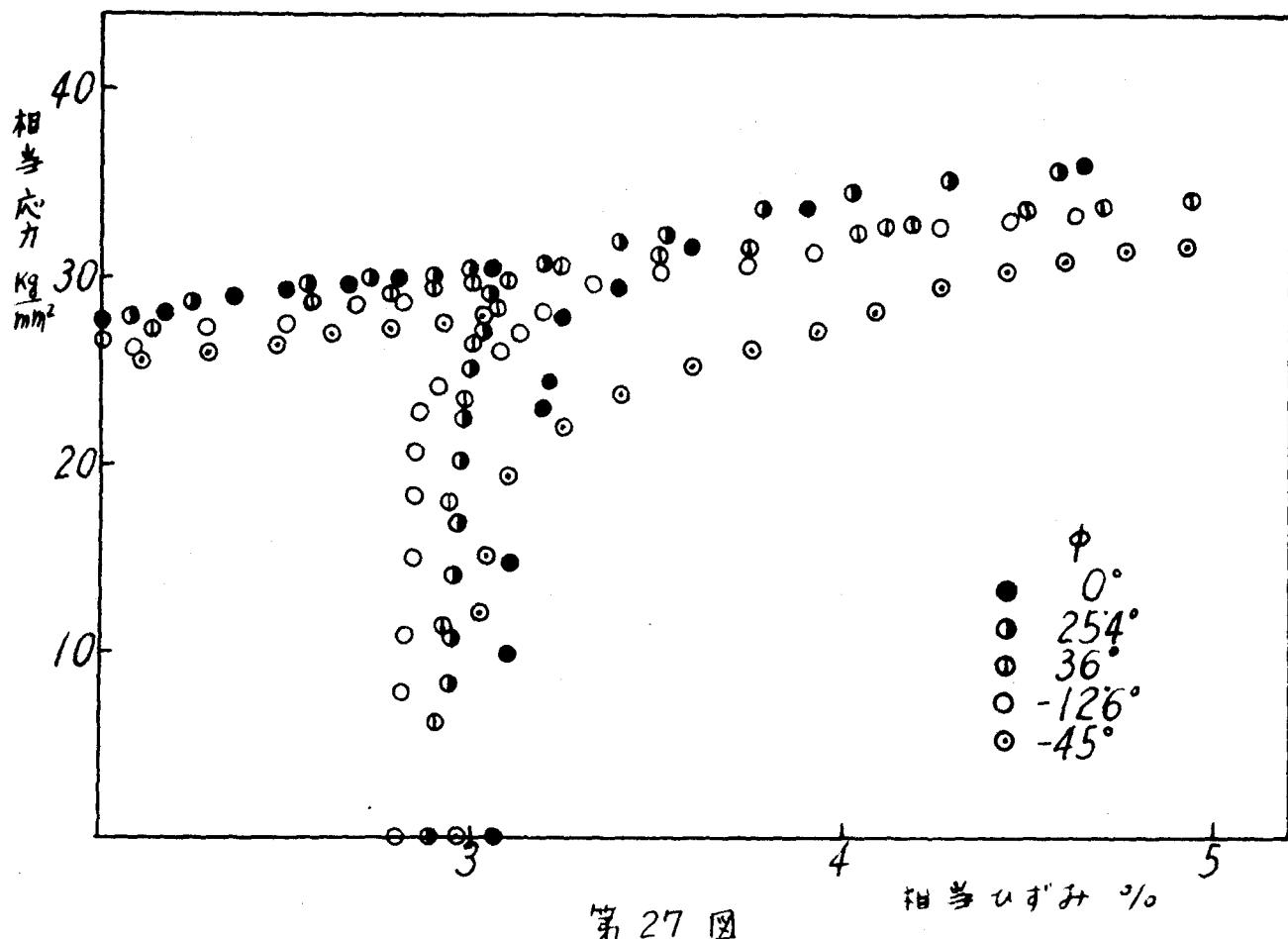
となる。また、塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比は

$$\frac{d\gamma_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} = \frac{N T_{xy}}{(G + H) \sigma_x - ((\tau_b - H_b))} \quad (70)$$

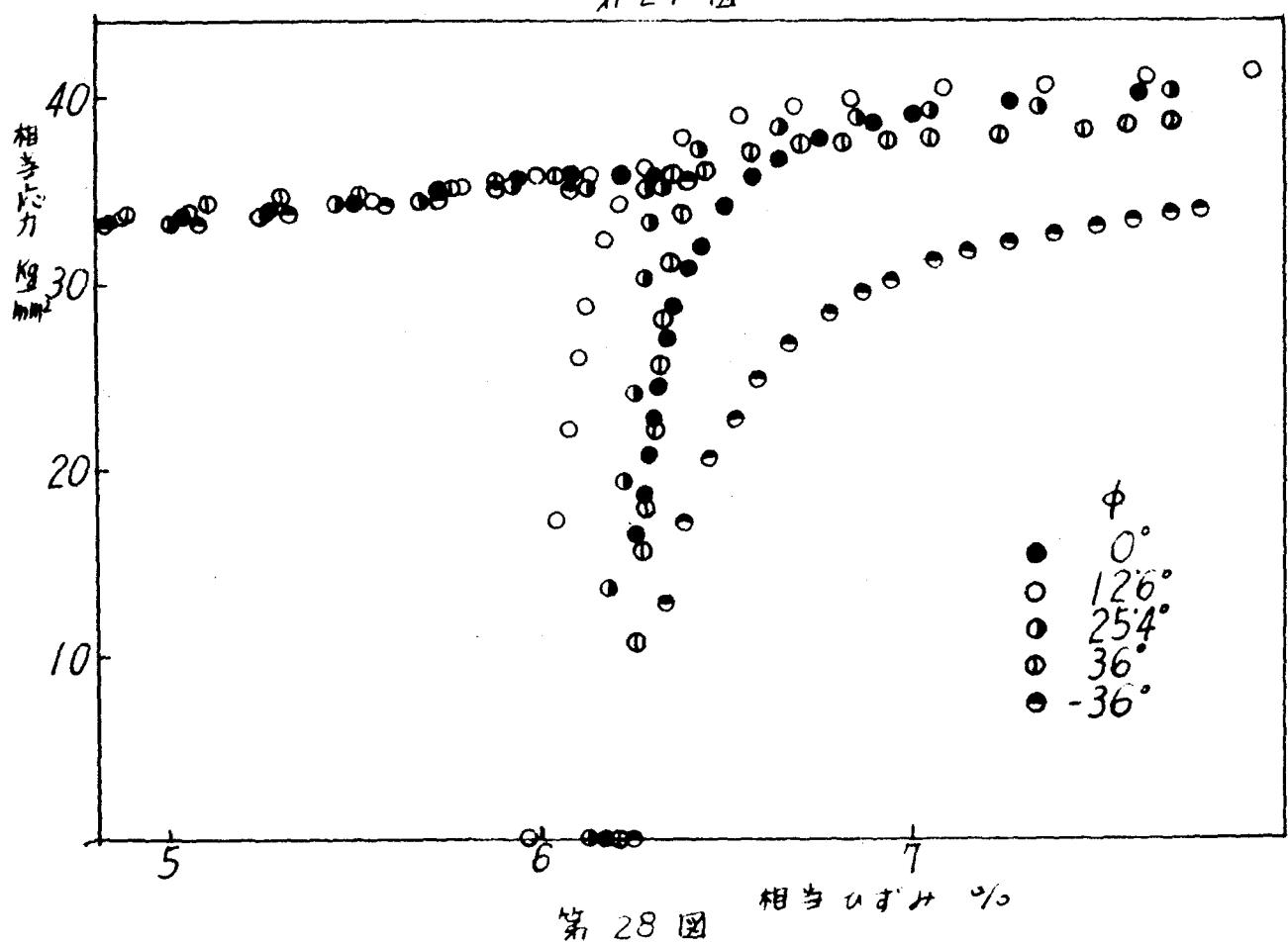
となる。

第5節 ねじりによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験

ねじりによる異方性を持つ材料について行った組合せ応力試験の結果を相当応力・相当ひずみの関係まとめたものと第27図および第28図に示す。第27図は $\gamma_{xy}^P \sim 0.052$ なる塑性せん断ひずみを生ずるねじりによる異方性を持つ材料についてのものであり、第28図は $\gamma_{xy}^P \sim 0.104$ なる塑性せん断ひずみを生ずるねじり



第27図



第28図

による異方性を持つ材料についてのものである。図には焼きなまし材にねじりで異方性を与える加工の応力ひずみ線図をもあわせて書き入れてある。異方性を持った材料に組合せ応力をかけたときに生じたひずみには、あらかじめ行つたねじりの加工で残留した塑性ひずみを加えてある。ほば等しい塑性ひずみを与えても、その最終応力は試験片により少しうつことなる。そこで $\gamma_{xy}^P \sim 0.052$ なる塑性せん断ひずみが残るようになじり加工を行つた試験片に加えられた最終応力を $\tau_{xy} = 16.75 \text{ kg/mm}^2$ すなわち相当応力にして 29.02 kg/mm^2 に統一して、各試験片につづく最終応力の値および組合せ負荷による降伏応力の値をすべてこの割合で修正した。その結果、組合せ負荷による降伏応力として次のような値が得られた。ただし、中は試験片に加えた組合せ応力状態の主応力の方向が試験片の軸方向と直角を度じ表わしたものであり、降伏応力は相当応力で表わしたものでその単位は kg/mm^2 である。

中	降伏応力
0	29.86
25.4	29.75
36	29.40
-12.6	29.02
-45	24.95

また、 $\gamma_{xy}^P \sim 0.104$ なる塑性せん断ひずみを与えたねじり加工に対するは、その最終応力を $\tau_{xy} = 21.16 \text{ kg/mm}^2$ すなわち相当応力にして 36.65 kg/mm^2 に統一して、応力値を修正した。

その結果、組合せ負荷による降伏応力として次のような値が得られた。

中	降伏応力
0	38.30
12.6	39.22
25.4	38.70
36	37.16
-36	32.58

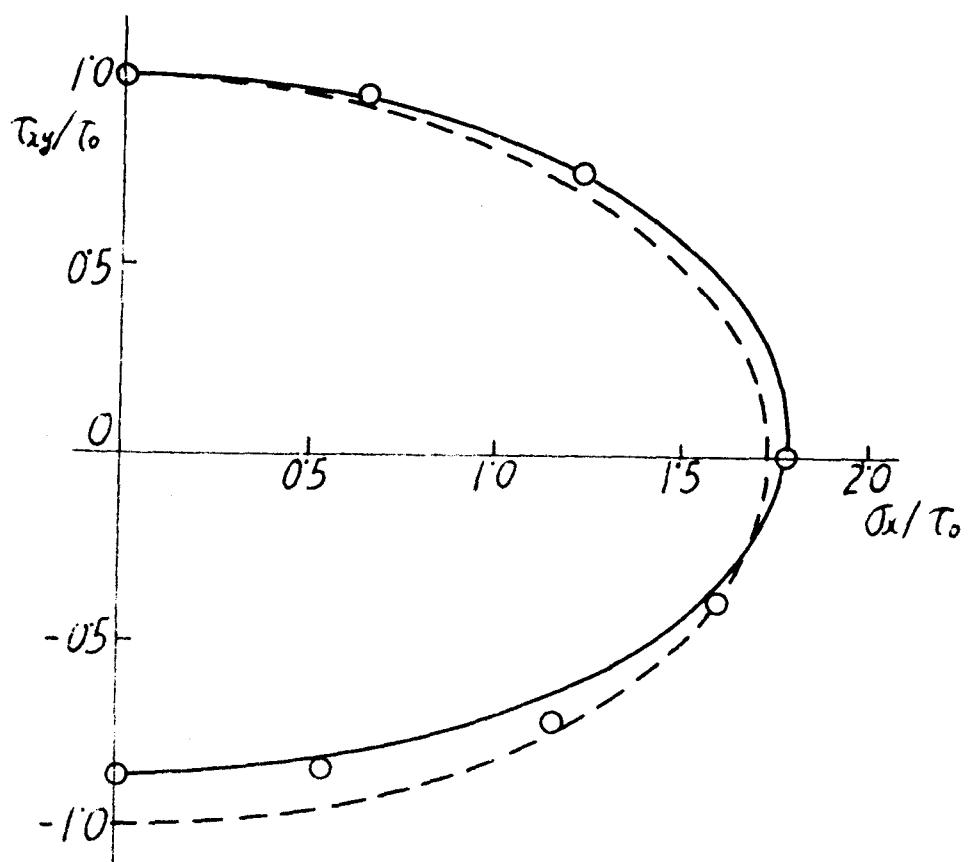
次に、(63) 式で与えられる降伏条件は、 $\sigma_{xy}^P \sim 0.052$ を与えるねじり加工を受けた材料および $\tau_{xy}^P \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けた材料に対するもの、それと

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\sigma_x)^2}{(29.94)^2} + \frac{(\tau_{xy} - 1.18)^2}{(15.75)^2} &= 1 \\ \text{および} \quad \frac{(\sigma_x)^2}{(38.38)^2} + \frac{(\tau_{xy} - 1.31)^2}{(19.85)^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

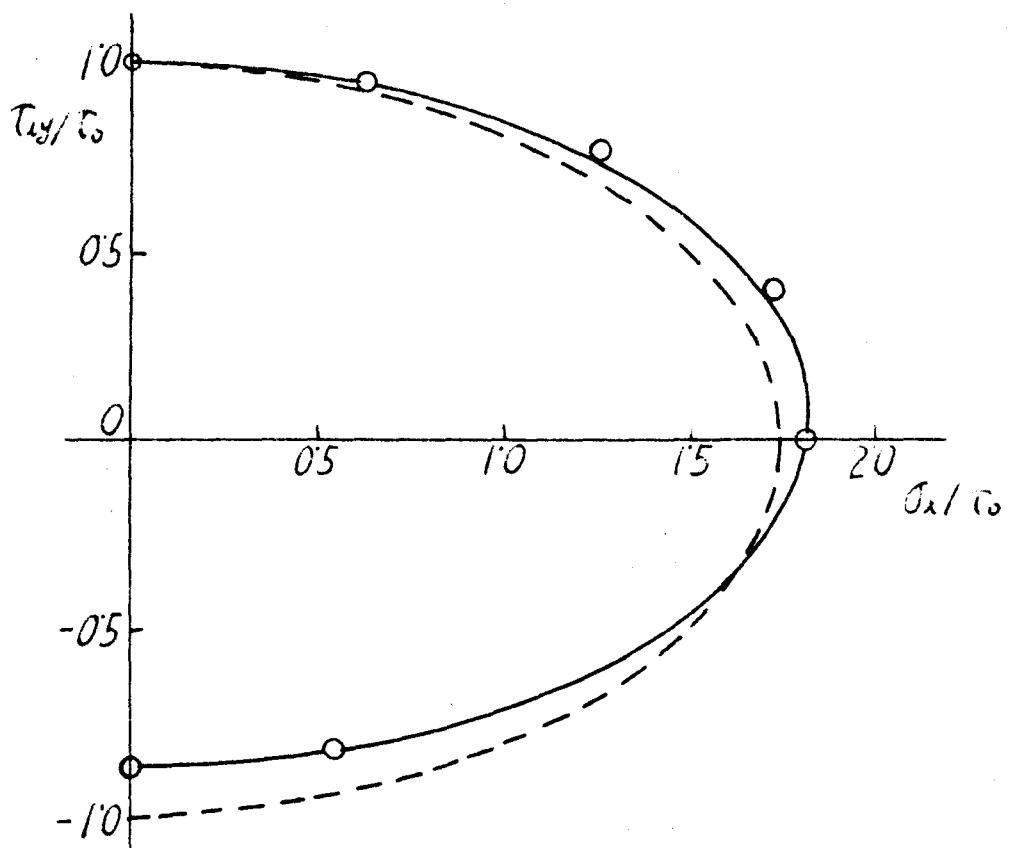
となる。ただし、応力の単位は kg/mm^2 である。応力を無次元化するためには、応力値を、異方性を考慮したために行なったねじり加工の最終のせん断応力 τ_0 でわっておく。そこで、 $\sigma_x/\tau_0 = s$, $\tau_{xy}/\tau_0 = t$ とおくと (71) 式はそれと

$$\left. \begin{aligned} \frac{(s)^2}{(1.79)^2} + \frac{(t - 0.07)^2}{(0.43)^2} &= 1 \\ \text{および} \quad \frac{(s)^2}{(1.81)^2} + \frac{(t - 0.06)^2}{(0.94)^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

となる。これらを図に表わしたもののがそれとされ第29図および第30図である。図中、○印は実験値、点線は Mises の降伏条件



第 24 図



第 30 図

$$\frac{1}{3} S^2 + t^2 = 1$$

であり、実線は(72)式である。

また、(66)式で与えられる塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比は、 $\delta_{xy}^P \sim 0.052$ を与えるねじり加工を受けて材料および $\delta_{xy}^P \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けた材料に対して、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} &= \frac{3.649 \tau_{xy} - 4.365}{J_x} \\ \text{および} \\ \frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} &= \frac{3.734 \tau_{xy} - 4.848}{J_x} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

となる。第31図、a～eおよび第32図、a～dに、それぞれ $\delta_{xy}^P \sim 0.052$ および $\delta_{xy}^P \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けて材料に種々の組合せ応力をかけた場合についての塑性せん断ひずみ δ_{xy}^P と塑性伸びひずみ ϵ_x^P との関係を示す。材料が等方性の場合には、(66)式にあり

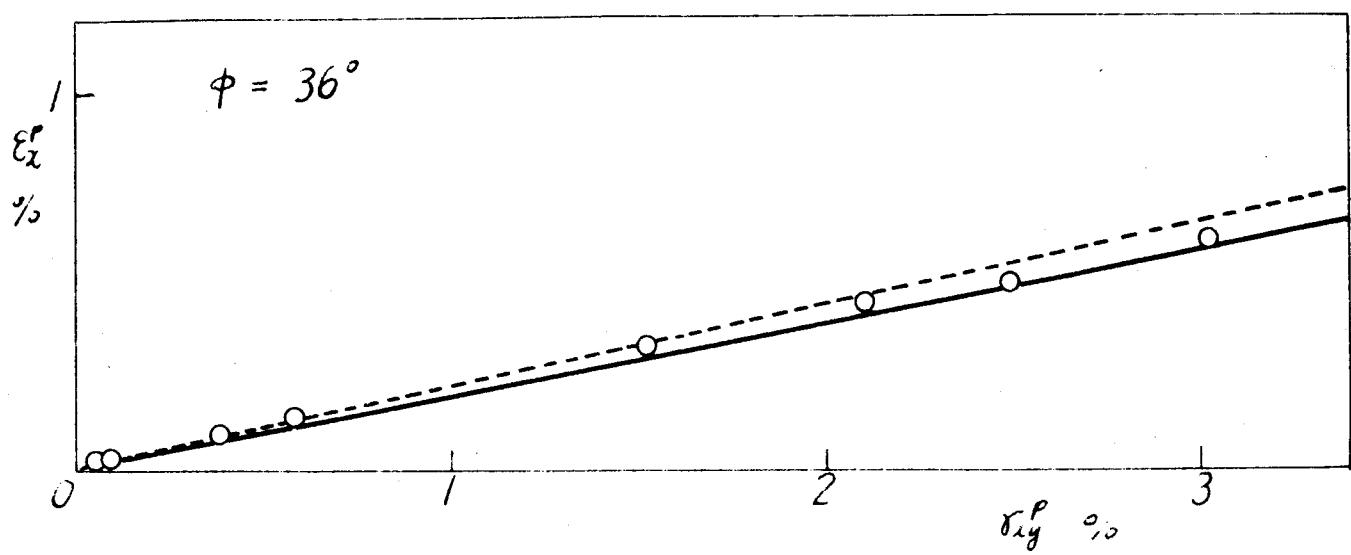
$$F = G = H = \frac{1}{3} N,$$

$$F_b = G_b = J, \quad H_b = F_b = 0$$

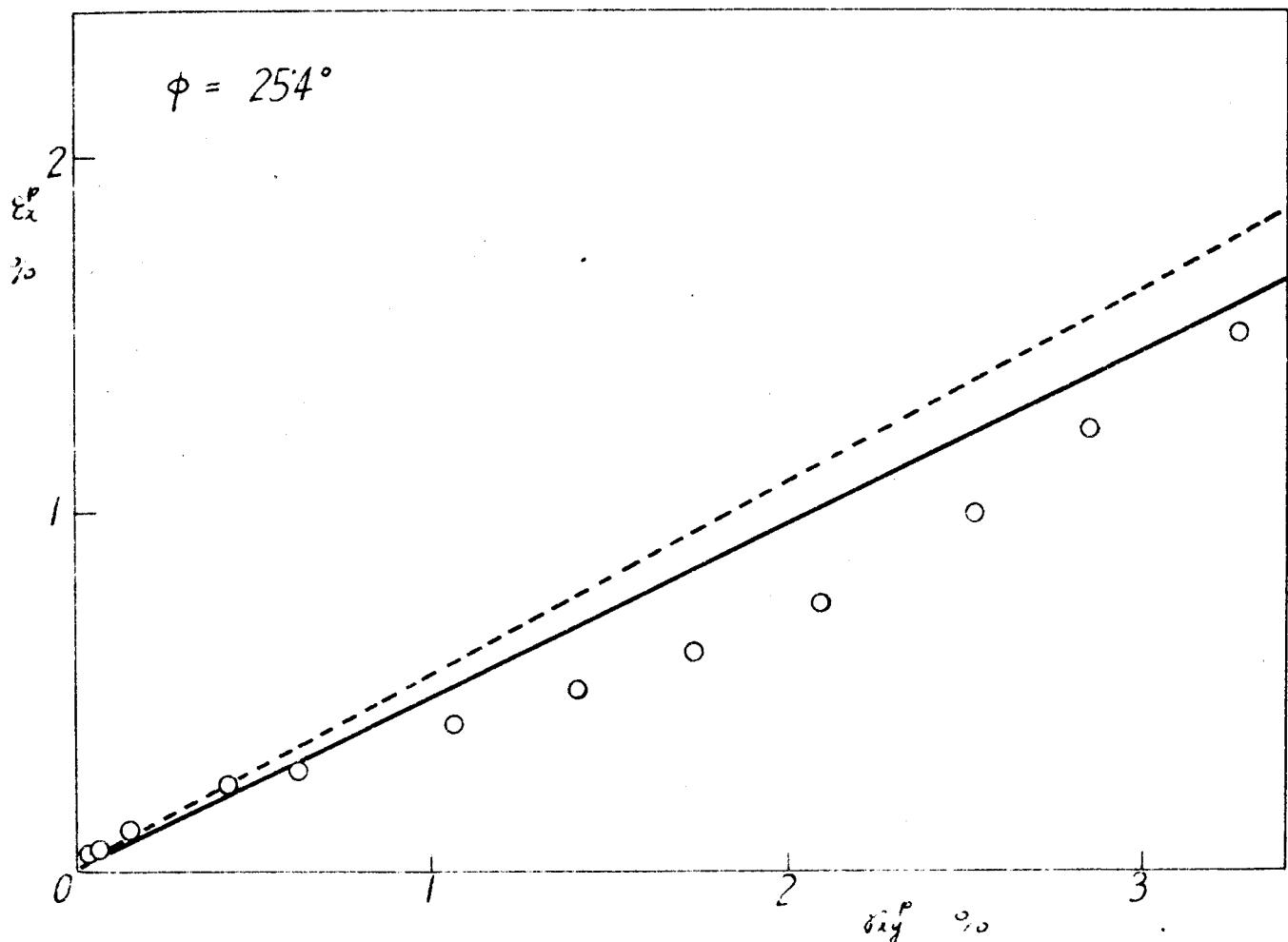
とかくと

$$\frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} = \frac{3 \tau_{xy}}{J_x} \quad (74)$$

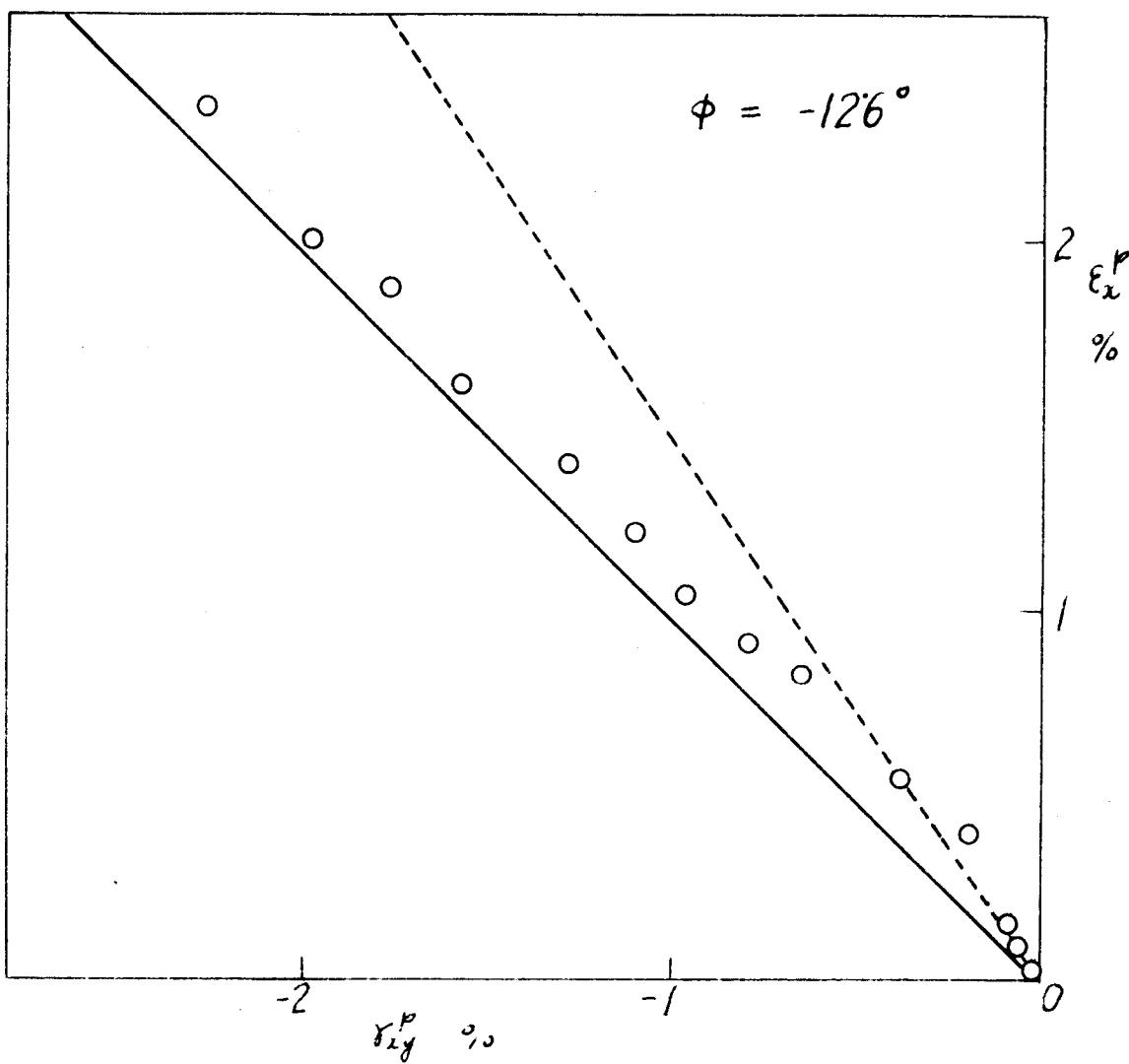
となるから、比例負荷をかける場合すなうに τ_{xy}/J_x の値が一定に保たれる場合には、 δ_{xy}^P と ϵ_x^P の関係は直線関係に与えられることがわかる。しかし、この異方性を持つ材料に対する理論によると(73)式からわかるように δ_{xy}^P と ϵ_x^P の関係は直線関係にはならぬ。しかし実際には $d\delta_{xy}^P/d\epsilon_x^P$ の値を(73)式により計算して



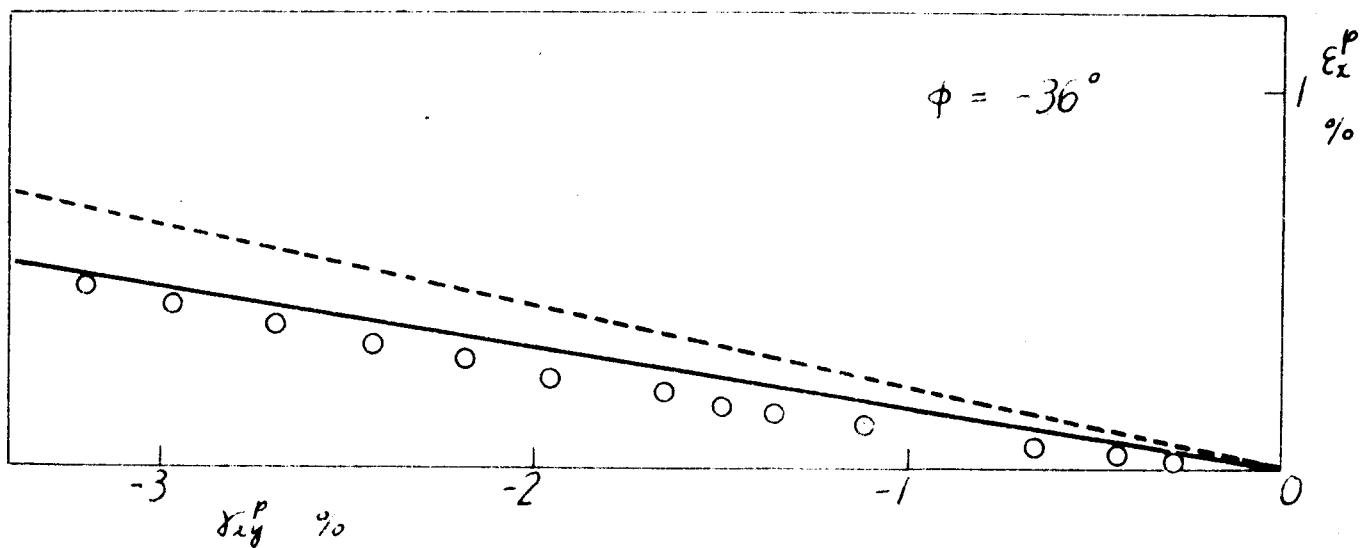
第 31 図 a



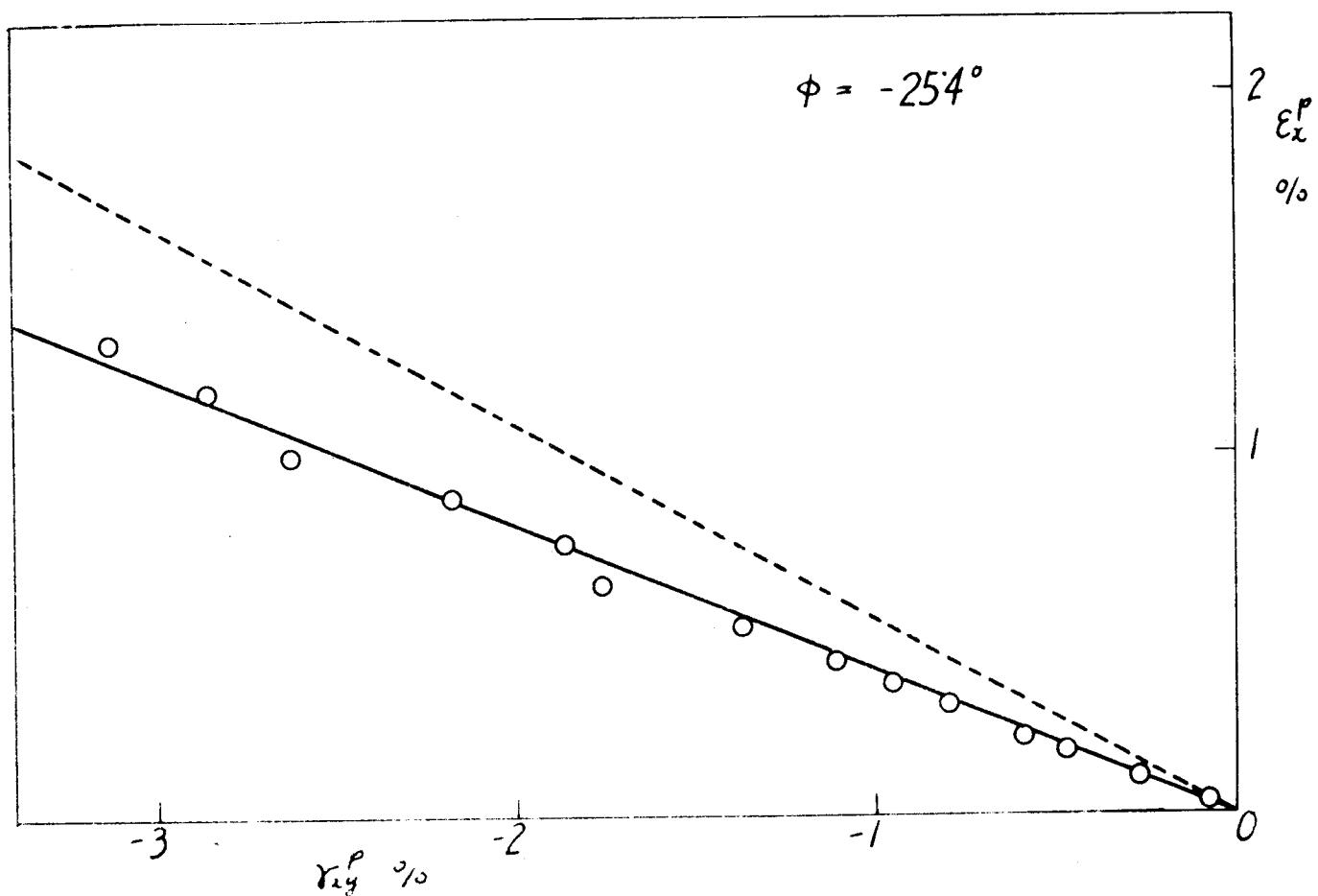
第 31 図 b



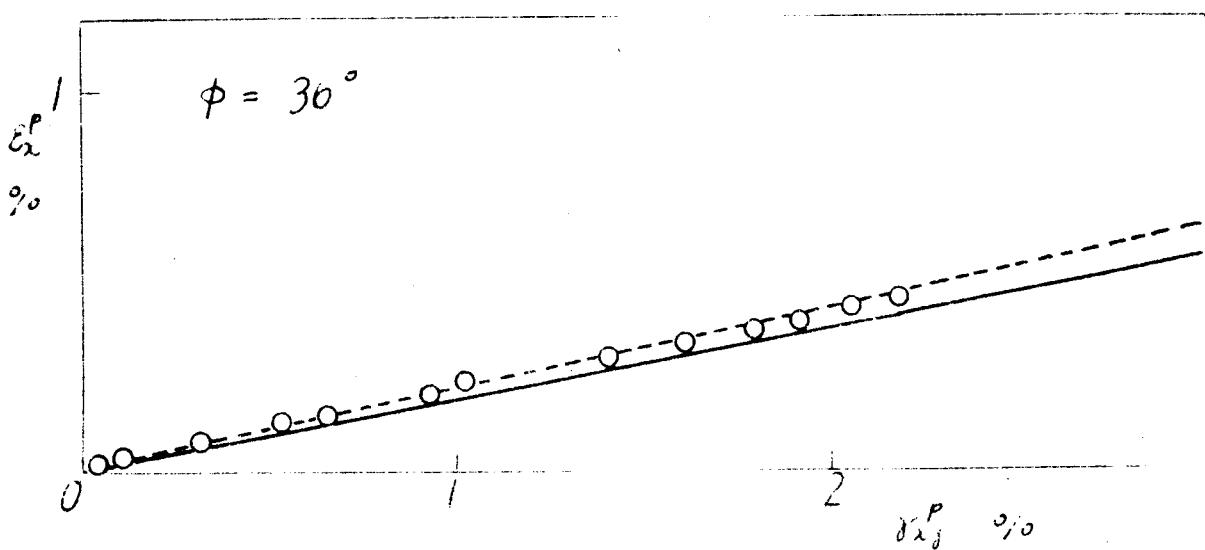
第 31 図 c



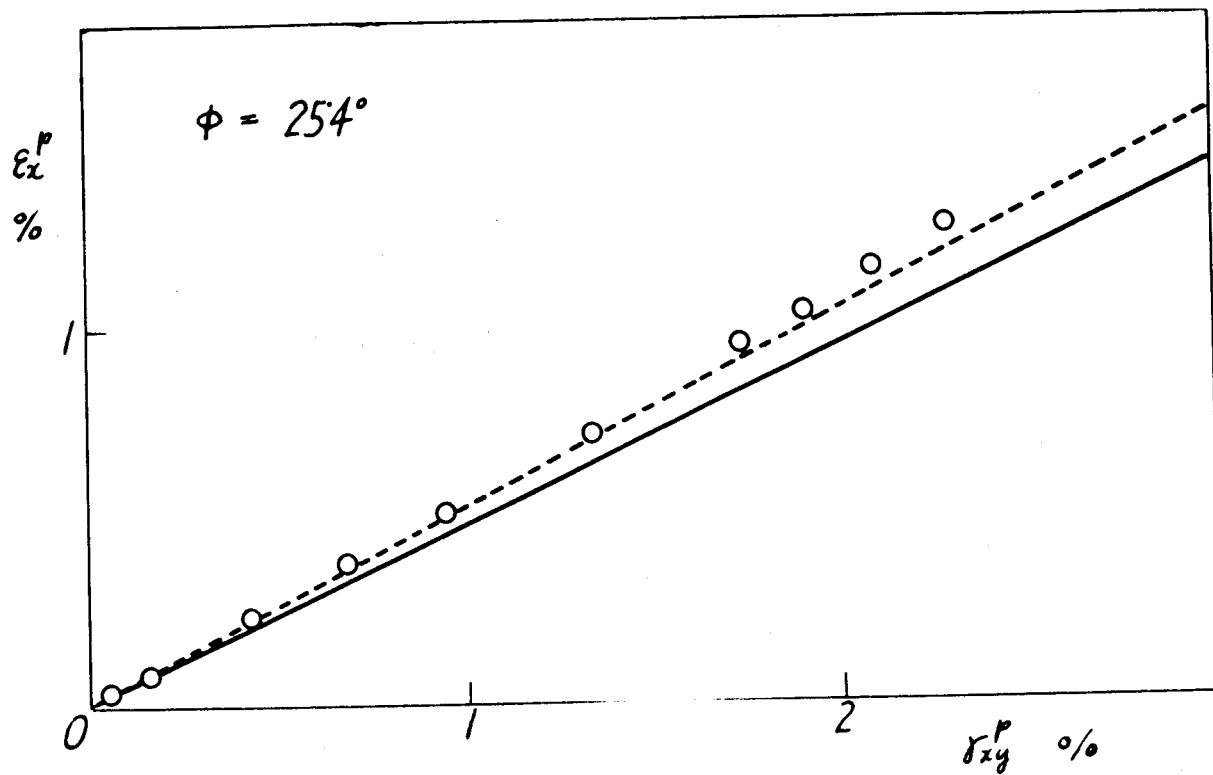
第 31 図 d



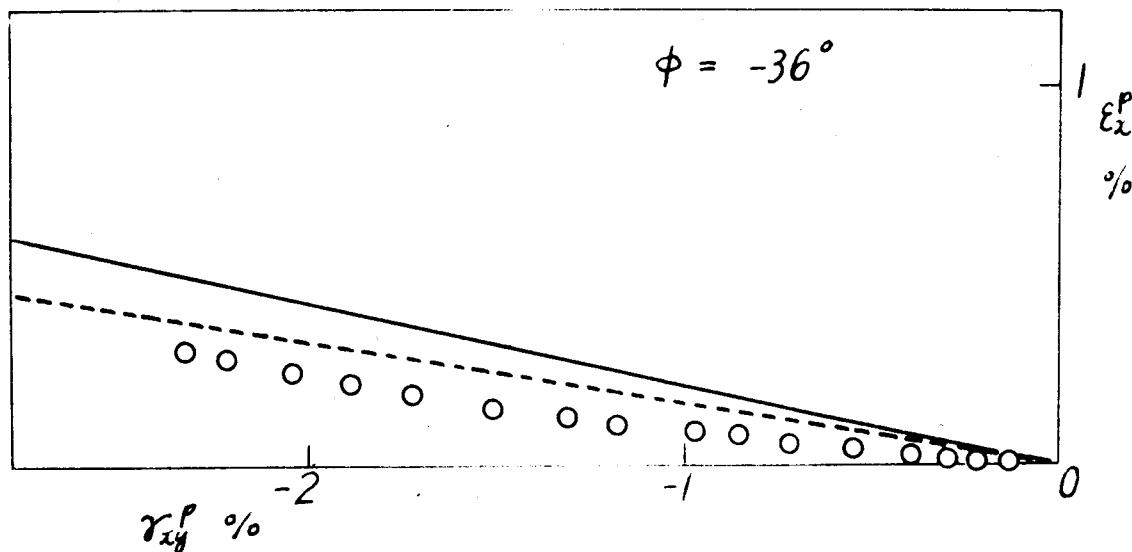
第 31 図 e



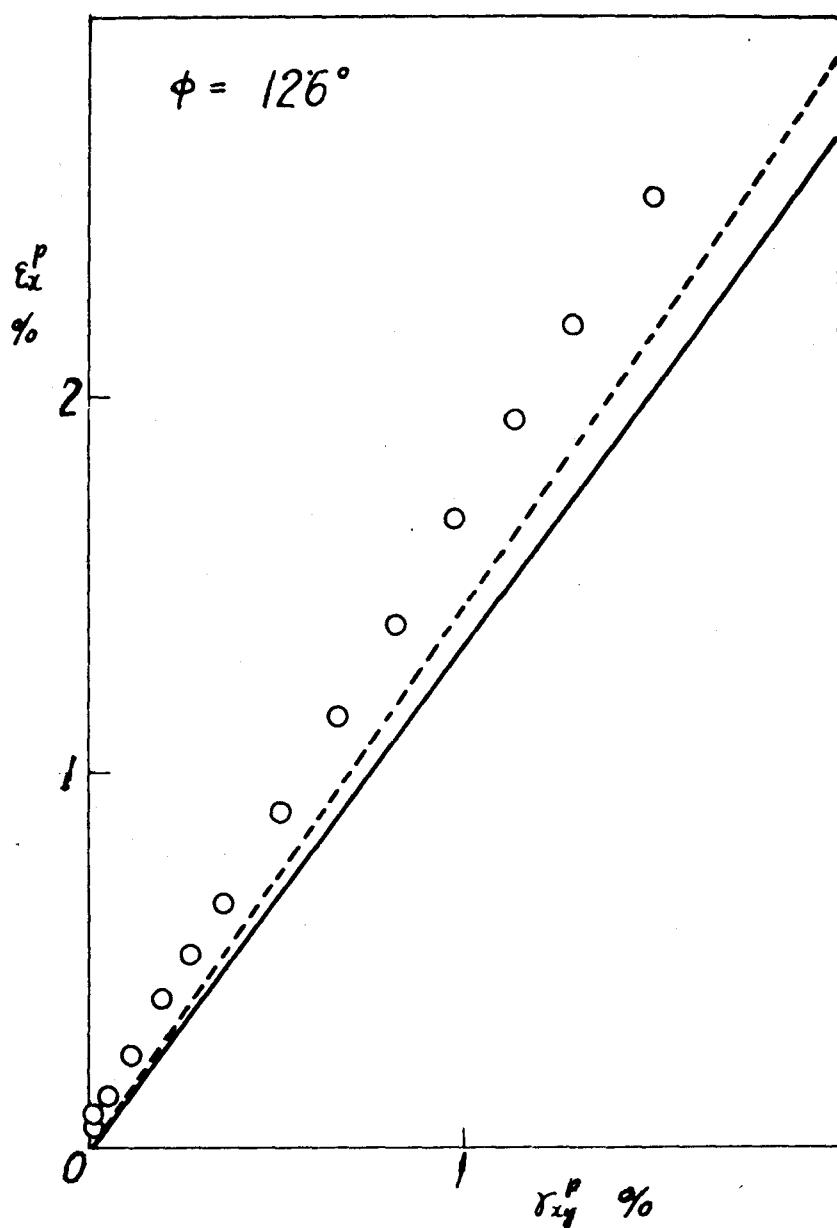
第 32 図 d



第 32 図 b



第 32 図 c



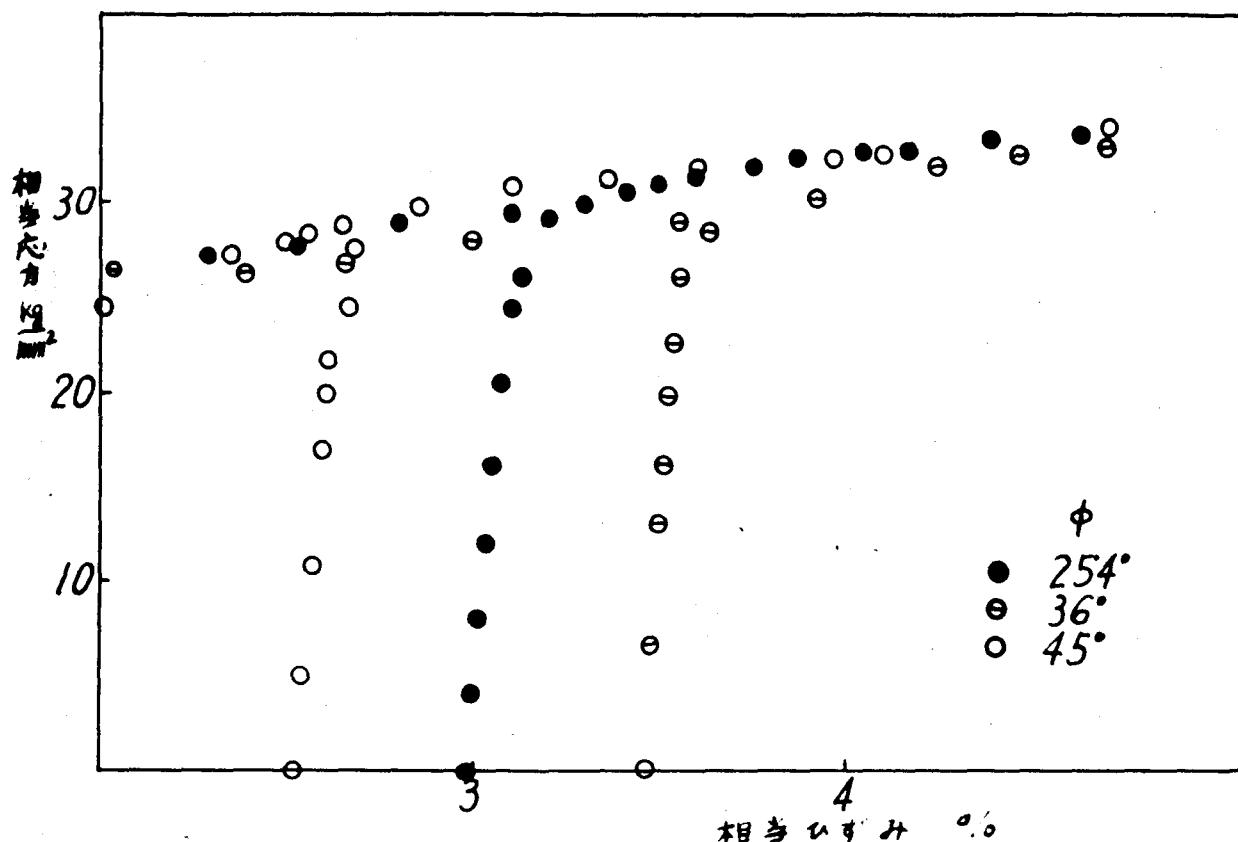
第32図 a

みると、その値は負荷の間中ほとんど一定であつたことと、実験中 σ_{xy}/σ_x の値を厳密に一定に保つことが困難であったこととを考え合わせて、各測定点における(73)式の値の平均値をもってこの理論から与えられる $d\sigma_{xy}^P/d\varepsilon_x^P$ の値であるとした。図中、○印は実験値、点線は材料が等方性の場合の関係(74)式、実線はこの異方性材料に対する理論から求められた(73)式である。

第6節 引張りによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験

$\varepsilon_x^P \sim 0.03$ なる塑性伸びひずみを生ずる引張りによる異方性を持つ材料について行った組合せ応力試験の結果を相当応力・相当ひずみの関係でまとめたものを第33図に示す。図には焼きなまし材に引張りで異方性を与える加工の応力・ひずみ線図をもあわせて書き入れてある。異方性を持つ材料に組合せ応力をかけたときに生じたひずみには、あらかじめ引張りの加工で残留した塑性ひずみを加えてある。このあらかじめ与えた塑性ひずみの量のはらつきが第33図からもわかるごとく少し大きくなつたが、この場合にも最終応力を $\sigma_x = 29.02 \text{ kg/mm}^2$ すなわち相当応力にして 29.02 kg/mm^2 に統一して、応力値を修正した。その結果、次のような値が得られた。

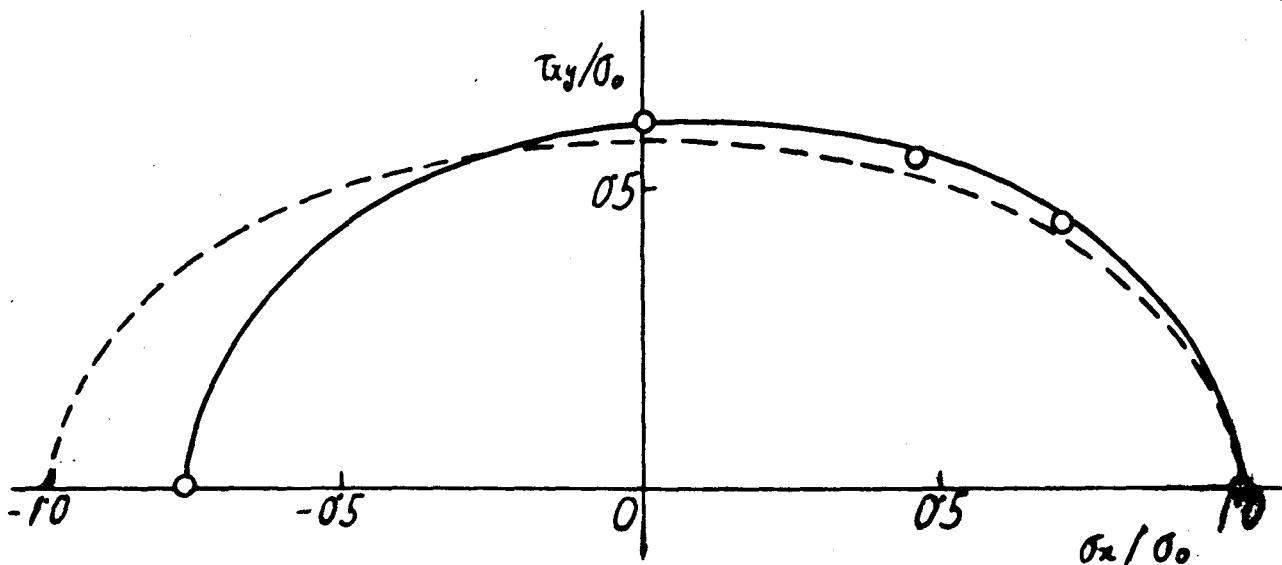
φ	降伏応力
25.4	29.72
36	30.12
45	30.41



第33図

降伏条件を求めるためには、あらかじめ引張りで塑性変形を受けた材料を圧縮して、その圧縮降伏応力を求める試験も必要である。ここで用いた組合せ応力試験機はこれまで圧縮試験を行うことはできなかったので、10トンのアムスラー一万能試験機を用いて、圧縮試験だけを行つた。その結果、あらかじめ $\sigma_x = 29.02 \text{ kg/mm}^2$ まで引張りで塑性変形を与えて除荷したのち圧縮試験を行つた場合の圧縮降伏応力は 25.65 kg/mm^2 にあることがわかつた。したがつて、この材料に対する降伏条件は、(67)式から

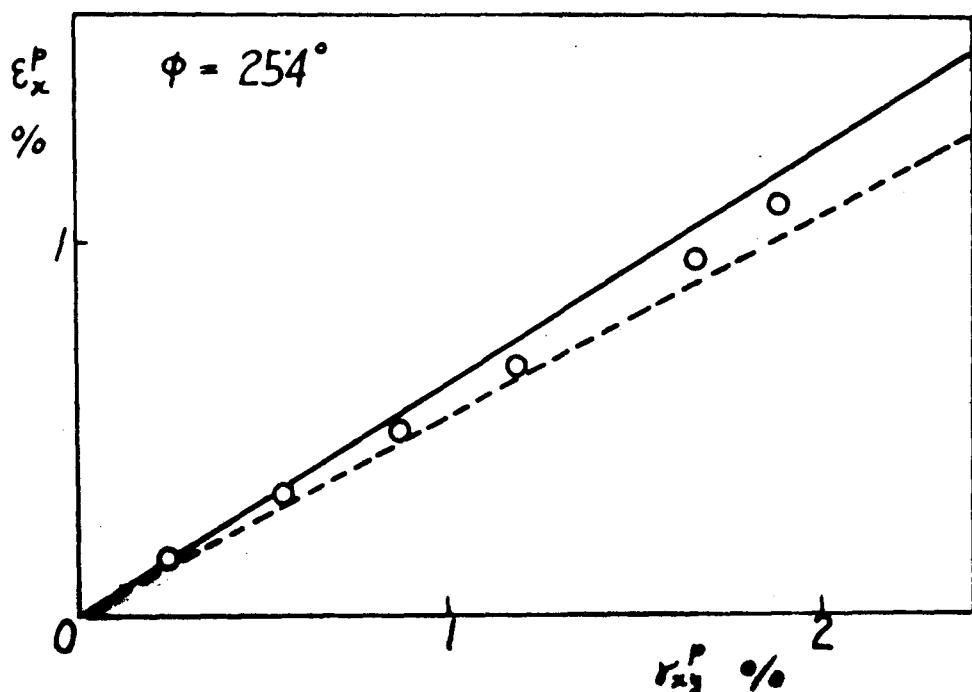
$$\frac{(\sigma_x - 3.34)^2}{(25.69)^2} + \frac{(T_{xy})^2}{(17.71)^2} = 1 \quad (75)$$



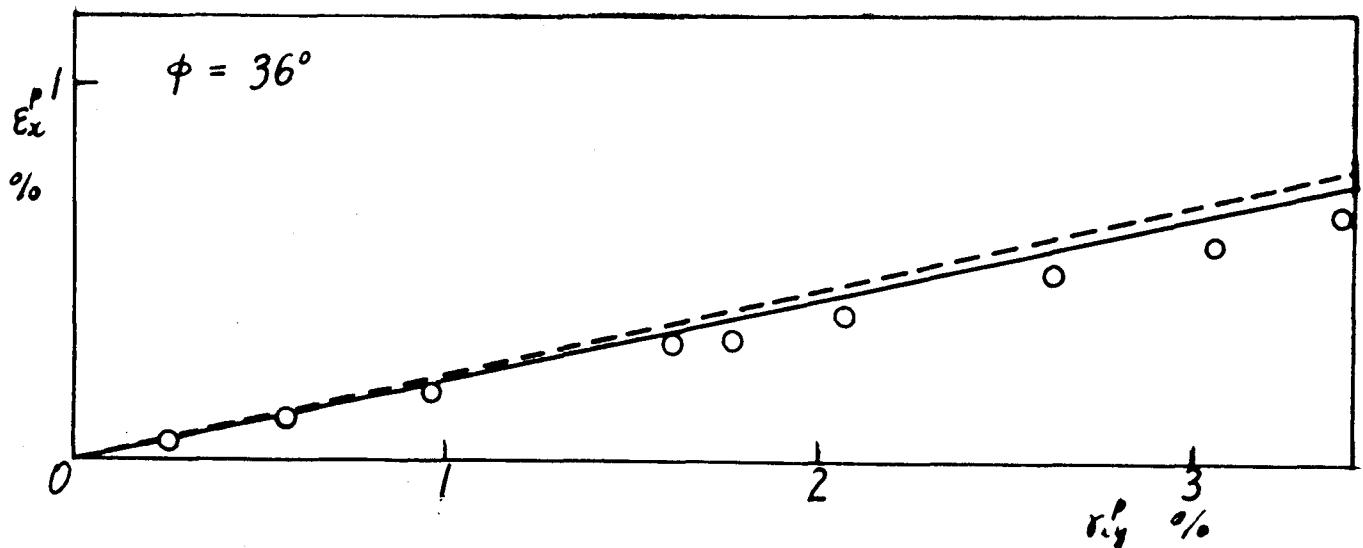
第 34 図

となる。あるいは、あらかじめ与えた引張り加工の最終引張り応力 σ_0 で応力値を乗つて無次元化すると、 $\sigma_x/\sigma_0 = s$, $\tau_{xy}/\sigma_0 = t$ 乃是記号を用いて

$$\frac{(s - 0.115)^2}{(0.885)^2} + \frac{(t)^2}{(0.61)^2} = 1 \quad (76)$$



第 35 図 a



第35図 b

となる。これを図に表わしたのが第34図である。図中、○印は実験値、点線は Mises の降伏条件

$$S^2 + 3t^2 = 1$$

であり、実線は(76)式である。また、(70)式で与えられる塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比はこの場合

$$\frac{2d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} = \frac{2.1034 T_{xy}}{\sigma_x - 3.3350} \quad (77)$$

となる。組合せ応力をかけた場合について、前節において行ったと同様、各測定点における(77)式の値の平均値をとったものを、第35図、a, b に実線で書いた。点線は材料が等方性の場合、すなわち

$$G = H = \frac{1}{3}N, \quad G_b - H_b = 0$$

を(70)式に代入して得られる関係

$$\frac{2d\delta_{xy}^P}{d\epsilon_x^P} = \frac{3T_{xy}}{\sigma_x}$$

である。○印は実験値である。

第7節 第6章の結語

この章では、第2章において提案した降伏条件にもとづく理論が多當か否かを検討するために、新しく設計した引張りねじり組合せ応力試験機および組合せひずみ計を用いて、軟鋼の薄肉円管材を試験片として、実験を行つた。焼きなましした試験片にあらかじめねじりあわは引張りで異方性を与えたのち、組合せ応力を比例負荷でかけ、その降伏点を求めて、その値を降伏条件に代入することによつて異方性パラメータの値を求めた。このようにして求められた異方性パラメータの値を用いて得られる塑性せん断ひずみと塑性伸びひずみの関係を実験値と比較した。その結果、この理論から得られる値は、あらかじめねじりで与えた塑性せん断ひずみの量が大きい場合とのぞいては、実験値とかなりよく一致していた。あらかじめねじりで与えた塑性せん断ひずみの量が大きい場合には、理論値は実験値とあまりよく合わなかつた。これは、理論値を求める場合に、あらかじめねじりで異方性を与えた材料に対しては、そのねじりの加工の際の塑性せん断ひずみの量が大きいときにも、その量が少いときと同じく、異方性の主軸は試験片の軸方向に対して 45° をはずと仮定したのであるが、實際には、ねじりによる塑性せん断ひずみの量が大きくなるに従つて、異方性の主軸が試験片の軸方向となる角が 45° からしだいに大きくなるためであると思ふ。

結論

冷間加工を受けて異方性となつた金属材料の塑性変形についての研究を行うにあたり、まず第1章において、金属材料の塑性変形の理論において、塑性ポテンシャルを降伏閾数に等しいと仮定することは、基礎定理の公式化を可能にするという特別な意義を持つことから、降伏閾数をどのようにきめるかがその理論の key point であることを述べ、従来までの研究の主なもの概観し、冷間加工により生じた異方性は、微視的にみると、選択方位による異方性と結晶粒界における残留応力による異方性との2種類の複雑な原因によるものであることを考りよして、それらの考え方を批判し、筆者の考えを明らかにした。そして共にとり入れたかなり一般化された降伏条件を提案し、この降伏条件から応力・塑性ひずみ増分の関係をみちびいた。第3章において、この降伏条件にもとづく理論は、最大塑性仕事の原理および解の唯一性の定理を満足することを証明して、この理論が矛盾のないものであることを明らかにした。第4章においては、この理論を、塑性加工の問題にしばしば適用したが、その結果、等方性材料に対する理論の場合と同じく、応力についての特性曲線と速度についての特性曲線は一致することおよび特性曲線はすべり線であることがわかつた。し

かし、塑性ひすみ増分の主方向は一般に主応力の方向と一致しないことおよび最大せん断応力の方向は一般にすべり線の方向と一致しないことがわかつた。また、等方性材料に対する理論のときには成立したような簡単なすべり線場の幾何学は成立しないことがわかつた。

第5章においては、平面応力状態の場合の例題として、引張りによる異方性を持つ平板材料を任意の方向に引張る場合の主塑性ひすみ増分の方向と主応力の方向とは一般に一致しないことを量的に示した。また、ねじりによる異方性を持つ円管試験片を引張った際に生じたくびれの問題をこの理論で解析し、実際に観察されたものとかなりよく一致する結果を得た。最後に、第6章において、あらかじめ、それぞれねじりあるのは引張りで異方性を与えた軟鋼の薄肉円管試験片に、引張りねじりの組合せ応力をかけ実験を行って、それらの降伏応力および塑性せん断ひすみと塑性伸びひすみの関係を、この理論から得られる結果と比較してかなり良好な結果を得たのでこの理論が妥当なものであることがわかつた。ただし、ねじりによる異方性を持つ材料のうちで、ねじりの加工の際の塑性せん断ひすみの量の大きい材料に対するは、異方性の主軸が試験片の軸方向となる角が 45° であるという仮定のもとに得た理論値は実験値とかなりことなつていたが、これはねじりの加工がすすんで塑性せん断ひすみの量が大きくなるに従つて、異方性の主軸は材料の要素に対

して相対的に回転し、試験片の主軸となす角が 45° からしたるに大きくなるためであると思われる。

なお、この研究は、恩師、大阪大学教授、太田友弥先生の終始渝らぬ御指導と御鞭撻なくしてはあり得なかつたものである。ここに、改めて、衷心より感謝いたします。

また、組合せ応力試験機および組合せひずみ計の設計にあたつては、神戸大学講師、進藤明夫氏の御指導を受け、実験ならびに実験結果の計算には、大阪大学助手、井上豊氏、卒業生、志水秀夫君、見学克美君の御協力をいたたいた。ここに厚く感謝の意を表めします。

また、鋼管素材の入手に御便宜をはかつてくれたさつた住友金属工業株式会社の永島菊三郎氏に厚くお礼を申し上げます。

なお、この研究の費用の一部は、文部省科学研究費の援助によるものである。

昭和33年12月

参考文献

Davis, E. A.

Combined tension-torsion tests with fixed principal directions.

Journ. App. Mech. 22 (1955), 411

Davis, H. E and Parker, E.R.

Behavior of steel under biaxial stress as determined by tests on tubes.

Journ. App. Mech. 15 (1948), 201

Drucker, D.C.

Relation of experiments to mathematical theories of plasticity

Journ. App. Mech. 16 (1949), 349

Drucker, D.C.

A more fundamental approach to plastic stress-strain relations.

Proc. First U.S. Nat. Congr. App. Mech. (1952)

Feigen, M.

Inelastic behavior under combined tension and torsion.

Proc. Second U.S. Nat. Congr. App. Mech. (1955).

Fraenkel, S. J.

Experimental studies of biaxially stressed mild steel in the plastic range.

Journ. App. Mech. 15 (1948), 193

Hill, R.

A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.

Proc. Roy. Soc. A. 193 (1948), 281

Hill, R.

The mathematical theory of plasticity.

Oxford, Clarendon Press. (1950).

Hodge, Jr. P.G.

A general theory of piecewise linear plasticity based on maximum shear.

Journ. Mech. Phys. Solids 5 (1957), 242.

Hu, L.W.

Studies on plastic flow of anisotropic metals.

Journ. App. Mech. 23 (1956), 444.

Lode, W.

Versuche über den Einfluß der mittleren Hauptspannung auf die Fließgrenze.

Zeits. ang. Math. Mech. 5 (1925), 142.

Marin, J. and Katalik, B. J.

Plastic biaxial stress-strain relations for Alcoa 24 S-T subjected to variable stress ratios.

Journ. App. Mech. 17 (1950), 372.

Melan, E.

Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums.

Ingenieur-Archiv, 9 (1938), 116

Morrison, J.L.M. and Shepherd, W.M.

An experimental investigation of plastic stress-strain relations.

Proc. Inst. Mech. Eng. 163 (1950). 1

Naghdi, P.M., Essenburg, F. and Koff, W.

An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity

Journ. App. Mech. 25 (1958), 201

Osgood, W. R.

Combined stress tests on 24-T aluminum-alloy tubes.

Journ. App. Mech. 14 (1947), 147.

Phillips, A.

Combined tension-torsion tests for aluminum alloy 2S-O
Journ. App. Mech. 19 (1952), 496.

Phillips, A. and Kaechele, L.

Combined stress tests in plasticity

Journ. App. Mech. 23 (1956), 43.

Prager, W.

A new method of analyzing stresses and strains
in work-hardening plastic solids.

Journ. App. Mech. 23 (1956), 493

齋藤浩一

塑性加工の塑性学的研究 (1955)

Sanders, J.L.

Plastic stress-strain relations based on linear
loading functions.

Proc. Second U.S. Nat. Congr. App. Mech. (1955), 455

Taylor, G.I. and Quinney, H.

The plastic distortion of metals.

Phil. Trans. Roy. Soc. A. 230 (1931), 323

吉村慶丸

塑性力学

共立出版社 (1957)