

Title	異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究
Author(s)	福岡, 秀和
Citation	大阪大学, 1959, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1643
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究

福岡 秀 和

異方性をもつ金属材料の塑性変形の研究

目次

緒論			1
第1章	異方性をもつ金属材料の降伏条件について	の従来	
	までの研究のあらまし		3
第2章	基礎理論		13
第1節	述語に關する2・3の注意		13
第2節	降伏条件		16
第3節	応力とひずみ増分の關係		20
第4節	第2章の結語		22
第3章	基礎定理		23
第1節	最大塑性仕事の原理		23
第2節	解の唯一性		27
第3節	第3章の結語		31
第4章	塑性平面ひずみ理論		32
第1節	基礎方程式		32
第2節	特性曲線		35
第3節	すべり線の性質		41
第4節	第4章の結語		47
第5章	平面応力状態における例		48
第1節	引張りによる異方性組	の異方性の	
	ひずみと主軸の關係		48

	第 2 節	ねじりによる異方性を受けた材料の引張りによるくびれの問題	51
	第 3 節	第 5 章の結語	56
第 6 章	組 合	せ応力による実験	57
	第 1 節	材料および試験片	58
	第 2 節	組合せ応力試験機およびひずみ計	60
	第 3 節	実験計画および予備実験	65
	第 4 節	引張りねじり組合せ応力試験の理論	70
	第 5 節	ねじりによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験	73
	第 6 節	引張りによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験	84
	第 7 節	第 6 章の結語	88
	結 論		89
	参 考 文 献		92

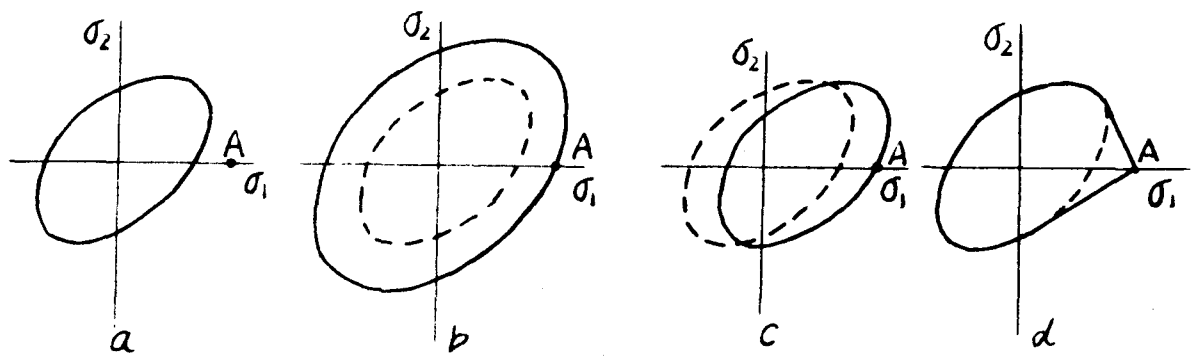
緒 論

工学的な金属成型過程すなわち圧延，引抜き，押し出し，絞りなどにおいては，材料内にかなりいちぢるしい異方性を生ずる。したがって，これらの作業中に現われるいろいろな現象を正しく理解し，有効な作業を行うためには，材料の異方性をひろくとり入れた塑性変形理論を必要とする。等方性金属材料に対する塑性変形理論においては，塑性ひずみ増分は塑性ポテンシヤルから導かれるが，この塑性ポテンシヤルを，その材料の降伏を規定する関数に等しいと仮定することにより，基礎定理が公式化される（Hill, 1950, p. 50）。そこで冷間加工を受けた結果異方性になった材料に対しては，塑性ポテンシヤルが降伏を規定する関数に等しいと仮定することが成り立ち，これを基礎とする立場にたてば，冷間加工を受けた結果異方性となった材料の塑性変形理論は，その材料に対してどのような降伏条件を仮定するかによりさまることになる。降伏条件は，それ自身矛盾を含まないことおよび実験結果とよく合致するものがあるが，さらに，数学的に使用しやすいため，選択の位による異方性および結晶粒界における残留応力による異方性の両方を考えに入れられたかなり一般化された降伏条件を提案し，この降伏条件にもとづいた理論は，最大塑性仕事の原理および解の唯一性の定理を満足す

ることを証明した。そこで、これを平面ひずり
 み理論に適用して、ここで考えるような異方
 性をもつ材料に対して、等方性理論の場合の
 ように、応力に対する特性曲線と速度に対す
 る特性曲線とが同じであるかどうかを調べ、
 また、最大せん断応力の方向とすべり線の方
 向との関係を明らかにした。等方性材料の方
 向性は、主ひずみ増分の方向は主応力の方向
 と一致したのであるが、引張りによる異方性
 をもつ材料について、この理論を用いて調べ
 たら、ささらに、ねじりによる異方性を持つ薄
 肉円管試験片の軸を引張ったときにも、この
 理論を用いて解析した。新しく設計した組合
 せひずみ計を用いて、あらかじめねじり肉
 厚の軟鋼の薄肉円管試験片に、引張りねじり
 組合せ荷重を生ぜしめることにより、平面
 応力状態を生ぜしめる材料の異方性を調べ
 ることを行って、それぞれせん断ひずみと
 塑性伸縮性伸縮率とを比較して、理論の妥
 当性を検討した。

第1章

異方性を持つ金属材料の降伏条件について従来までの研究のあらましまし、どのような金属材料でも、完全に焼きなまされたまの状態で、全く等方性である。ある金属材料に異方性が認められることは、すなわち、その材料は、焼きなましされた状態から、なんらかの冷間加工を受けたものである。この意味するところでは、塑性異方性の研究も、最初等方性であった場合に成り立した諸関係が、塑性ひずみの増加とともに、どのようになつてゆくかを追及する線に沿って行われた。異方性材料に対しては、塑性ポテンシャルが降伏を規定する関数に等しいと仮定すると、塑性ひずみ増分は降伏関数から導かれることにも、材料が等方性であったときに成り立した降伏条件が、どのようになつてゆくかを調べればよいことになる。それは主として、主応力空間に表わした降伏軌跡が主応力面との交わりにおいて描く降伏曲線の形の变化を、幾何学的に考察することにより行われた。材料が硬化した場合には降伏曲線の形は、塑性ひずみの増加に關係なく、はじめの形を保つ。次に、材料が硬化する場合として、たとへば、焼きなまされた状態において Mises の降伏条件に従う材料を考えよう。この降伏条件は、主応力 σ_1, σ_2 を座標軸とする座標面に、第1図、a に示すような四角で表わされる。この材料が塑性ひず

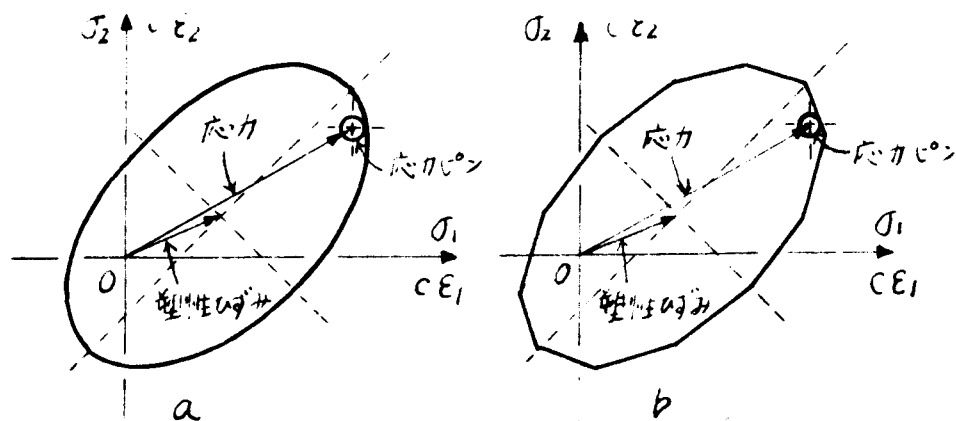


第 1 図

みを受けた結果、硬化して、A 点で示される応力状態まで荷重を受けたのち、除荷されたものとする。このような材料を、任意の様式の荷重でもって、再負荷する場合の新しい降伏条件は、焼きなまし材の降伏曲線（第 1 図、a）から、次のような簡単な幾何学的な操作によって得られると考えられた。それは、isotropic expansion (Drucker, 1949)（第 1 図、b）、translation (Drucker, 1952)（第 1 図、c）および yield corner の生成 (Sanders, 1955)（第 1 図、d）である。しかし、これらの考えは、いづれも、単に幾何学的なモデルとしての降伏条件の変化の方法を考えたにすぎないものである。

塑性ひずみの増加とともに進展した異方性を持つ材料に対する降伏条件として、Prager は、簡単な機構でもって、塑性ポテンシヤルとしての機能をもあわせ持つところの、巧妙なモデルを考えた (Prager, 1956)。これは、降伏曲線を剛体のわくで形作ったもので、焼きなましされた状態で、このわくの原点は、主応力 σ_1 , σ_2 を座標軸とする座標面の原点に一致している。この座標面において、応力

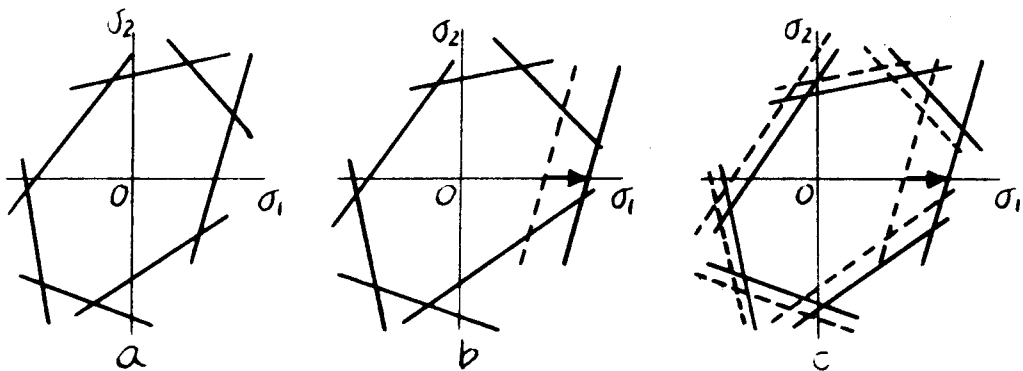
の次元をひずみの次元にたおしたとき、このわくの原点の移動は、生じた塑性ひずみを表わす。無負荷の状態では、応力ベクトルの先端に位置する応力ピンは、応力ゼロの点すなわち座標の原点にある。荷重をかけると、応力ピンは原点からしだいに遠ざかり、その材料が弾性限に達したとき、ピンはわくに接する。ここからさらに、ピンが原点に対して外側に移動するようになると、荷重が増加すると、ピンは、降伏曲線を表わすわくを引きづつて移動させる。このとき、ピンとわくとの間には、まさつが全くないと仮定する。したがって、ピンの動きのうちの、わくに対する垂直成分のみが、わくの動きに伝わる。このようにして新しくさまつたわく的位置が、ピンの動きに相当するような負荷を受けた材料の、新しい降伏曲線となる(第2図, a)。さて、わく



第2図

の動きは、そのままわくの原点の動きを表わすから、塑性ひずみ増分は、降伏曲線上、現在の応力点の位置から降伏曲線に垂直な方向に生ずることになり、したがって、このモデル

ルは、塑性ひずみ増分が塑性ポテンシャルから導かれるという数学的な要求をも満足することになる。このモデルのように、降伏曲線の形がなめらかな曲線であれば、はじめと最終の応力点が同じで、途中の径路がことなるような2種の負荷に対して、その結果生ずる塑性ひずみがことなることになるのであるが、途中の径路がことなっても、はじめと最終の応力点さえ同じであれば、同じ塑性ひずみを与えるようなモデルとして、Pragerは、降伏曲線の形を、いくつかの直線部分で近似したモデル（第3図、b）を考えた。このように降伏曲線を1つのわくで表わすかわりに、いくつかの長い直線棒を、応力面上に、その内



第3図

部にできる形が降伏曲線を表わすように配列させ（第3図、a）、塑性変形による降伏曲線の形の変化としては、各直線部分の独立な移動（第3図、b）、あるいはなんらかの従属関係のある移動（第3図、c）を考えたもの（Sanders, 1955; Hodge, 1957）もある。

これらのように、降伏曲線の幾何学的なモデルとしての形の変化により、材料が異方性

に在りたときの降伏条件を考へる方法とは別に、Hill は、応力の符号の逆転に対して降伏応力が変らなうような材料について、異方性の各主軸方向にそれぞれことなつた異方性のパラメータを持つような降伏条件

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 \\ + 2L\tau_{YZ}^2 + 2M\tau_{ZX}^2 + 2N\tau_{XY}^2 = 1$$

を考へた (Hill, 1948)。Hill も、これと同様に、降伏を規定する関数として、

$$f \equiv \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ + 3\alpha_{44}\tau_{12}^2 + 3\alpha_{55}\tau_{23}^2 + 3\alpha_{66}\tau_{31}^2$$

を考へた (Hill, 1956)。

吉村氏は、物体内に生ずる応力およびひずみがテンソル量であることを注目して、理論をたてた (吉村, 1957)。テンソル量 T の反変成分、共変成分および混合成分を、 (x^1, x^2, x^3) 座標系について、それぞれ T^{ab} , T_{ab} および T^a_b とし、 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ 座標系について、それぞれ \bar{T}^{ij} , \bar{T}_{ij} および \bar{T}^i_j とするとき、これらの量は、座標の変換に際して

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} T^{ab},$$

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} T_{ab}$$

および

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} T^a_b$$

なる変換を受けろ。ただし、 $i, j; a, b$ はそれぞれ 1, 2, 3 なる値をとり、くりかえされた指標は総和をとることを意味する。同種類の 2

つのテンソルの間の和, $A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$, 差, $A_{ij} - B_{ij} = D_{ij}$ として同じ種類のテンソルが得られ, 任意の種類の2つのテンソルの積, $A^i B_{jk} = E^i_{jke}$ としてさらに高階のテンソルが得られる. テンソル成分に行われるもう1つの演算は, 縮約である. これは, 任意の混合テンソルにほどこされるもので, ある反変指標とある共変指標とを指定して, それらに関して総和をとることによって, このようにして得られたテンソルの階数は, もとのテンソルの階数より, 2つずつ小さくなる. たとえば, 4階の混合テンソル A^{ab}_{cd} を考えると, その変換の法則は,

$$\bar{A}^{ij}_{kl} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^l} A^{ab}_{cd}$$

である. いま, $k = i$ とおいて, それらの指標についての総和をとると,

$$\begin{aligned} \bar{A}^{ij}_{il} &= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^a} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^l} A^{ab}_{cd} \\ &= \delta_a^c \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^l} A^{ab}_{cd} \end{aligned}$$

となるが, δ_a^c は Kronecker の記号で, $a = c$ のとき1, $a \neq c$ のときゼロであるから, 結局

$$\bar{A}^{ij}_{il} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^b} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^l} A^{ab}_{ad}$$

となる. このようにして得られた A^{ab}_{ad} は, その変換則から, 2階の混合テンソルであることがわかる. さらに, $j = l$ とおいて, それらの指標についての総和をとると, ゼロ階のテンソルすなわちスカラー量が得られる. この演算を, 2階のテンソルであるところの

応力とひずみから，スカラー関数であるところの降伏を規定する関数をつくるのに利用する。等方性材料に対し成立する Mises の降伏関数は，直交デカルト座標系に関しては，

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$$

と書ける。ここで， σ_{ij} は偏差応力テンソルの成分である。直交デカルト座標系では反変指標と共変指標との区別はないが，これを一般の座標系について書くと

$$f = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'^{ij}$$

となる。いま，基本計量テンソルを g_{ij} とすると，これを用いて

$$\sigma'_{ij} = g_{ik} g_{jl} \sigma'^{kl}$$

のように，指標を下げることができる。この右辺は

$$g_{ik} g_{jl} \sigma'^{kl} = \left\{ \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) + \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \right\} \sigma'^{kl}$$

と書くことができる。この右辺の第2項は

$$\begin{aligned} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \sigma'^{kl} &= g_{ik} g_{jl} \sigma'^{kl} - g_{il} g_{jk} \sigma'^{kl} \\ &= \sigma'_{ij} - \sigma'_{ji} \end{aligned}$$

となるが， σ'_{ij} は対称テンソルであるから，ゼロとなる。したがって，降伏を規定する関数 f は

$$f = \frac{1}{2} g_{ijkl} \sigma'^{kl} \sigma'^{ij} \quad (a)$$

と書ける。ここで

$$g_{ijkl} = \frac{1}{2} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk}) \quad (b)$$

であって， $\sigma'^{kl} \sigma'^{ij} = \sigma'^{ij} \sigma'^{kl}$ および σ'_{ij} 自身の対称性から， g_{ijkl} は4つの指標に関して対称である。すなわち， g_{ijkl} は2階の単位テンソル（あるいは球テンソルとも呼ばれる） $\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ （ \mathbf{e}^i は基本ベクトルである）からつくられる

4階の対称テンソルである。さて、等方性材料に対する降伏関数は(a)式により与えられることがわかったが、吉村氏は、(a)式における g_{ijkl} が2階の球テンソルからつくられるということが、材料の等方性を意味するものであると解釈して、ひずみ履歴による異方性を降伏関数のなかに導入するためには、その材料がそれまでに受けた塑性ひずみ ε_{ij} に異方性を表わすパラメータ A をかけ(基本計量テンソルに如えた量 $(g_{ij} + A\varepsilon_{ij})$)でもって、(b)式と同じ方法で、4階のテンソル c_{ijkl} をつくって、この c_{ijkl} を等方性の場合の g_{ijkl} のかわりに用いられればよいとした。したがって、異方性をもつ材料に対する降伏条件は

$$f = \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma'^{kl} \sigma'^{ij} \quad (c)$$

となる。ただし

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2} \{ (g_{ik} + A\varepsilon_{ik})(g_{jl} + A\varepsilon_{jl}) + (g_{il} + A\varepsilon_{il})(g_{jk} + A\varepsilon_{jk}) \} \quad (d)$$

である。さらに、Bauschinger効果による異方性を表わすために、Bauschinger効果を表わすパラメータ B を用いると

$$f = \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma'^{kl} \sigma'^{ij} - B \varepsilon_{ij} \sigma'^{ij} \quad (e)$$

となる。この理論によると、あらかじめ $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ の状態まで引張ったのち、 σ, τ の引張りねじり組合せ応力を作用させた場合の降伏は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \{ \sigma^2 (1 + A\varepsilon_0 + \frac{3}{4} A^2 \varepsilon_0^2) + 3\tau^2 (1 + \frac{1}{2} A\varepsilon_0 - \frac{1}{2} A^2 \varepsilon_0^2) \} - B\varepsilon_0 \sigma \\ = \frac{1}{3} \sigma_0^2 (1 + A\varepsilon_0 + \frac{3}{4} A^2 \varepsilon_0^2) - B\varepsilon_0 \sigma_0 \end{aligned}$$

で規定され、あらかじめ (τ_0, γ_0) の状態までねじったのち、 σ, τ の引張りねじり組合せ応力を作用させた場合の降伏は

$$\frac{1}{3} \left\{ \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{6} A^2 \gamma_0^2 \right) + 3 \tau^2 \left(1 + \frac{1}{4} A^2 \gamma_0^2 \right) + \sigma \tau A \gamma_0 \right\} - B \gamma_0 \tau$$

$$= \tau^2 \left(1 + \frac{1}{4} A^2 \gamma_0^2 \right) - B \gamma_0 \tau.$$

によって規定される。

さて、以上概観したいろいろの考え方に対する批判を行う前に、ここで冷間加工によって巨視的に表われるところの金属材料の異方性というものは、材料内のどのような微視的な原因によって表われるものがあるかをみておこう。焼きなました状態で等方性である材料内の結晶粒の方位は、全く at random である。試験片全体としての、するわけ巨視的なひずみの増加とともに、個々の結晶は最もはげしい引張りひずみの方向に伸ばされて、材料の組織は繊維状を呈してきて、巨視的にみて方向性がなかった材料も、異方性を示すようになる。このような異方性は、材料の結晶学的な構造がある一つの特別な方向性を持つことによるもので、選抜方位 (preferred orientation) による異方性と呼ばれる (Hill, 1950, p. 8)。異方性の原因となるものは、もう一つ考えられる。塑性ひずみを生じた試験片から荷重をとりさると、結晶粒界に、微視的な残留応力が残るが、これは主として、方位のこゝな結晶粒内に、荷重をとりおろすべく直前に存在していたことなつた微視的な応力状態によるものであり、この残留応力は、それを生ぜしめた負荷とことなつた種類の負荷をかけた場合の降伏応力に影響をおよぼす。たとえば、引張りで塑性ひずみを生ぜしめた試験片を除荷したのち、圧縮の荷重をかける

と、その降伏は、あらかじめ引張りをかけなかつた材料にくらべて、低い応力でおこる。これは普通、Bauschinger効果として知られてゐる現象である。このような現象は、純金属の単結晶には認められないものであるから (Hill, 1950, p. 8), これを、結晶粒界における残留応力による異方性と呼ぶことにする。

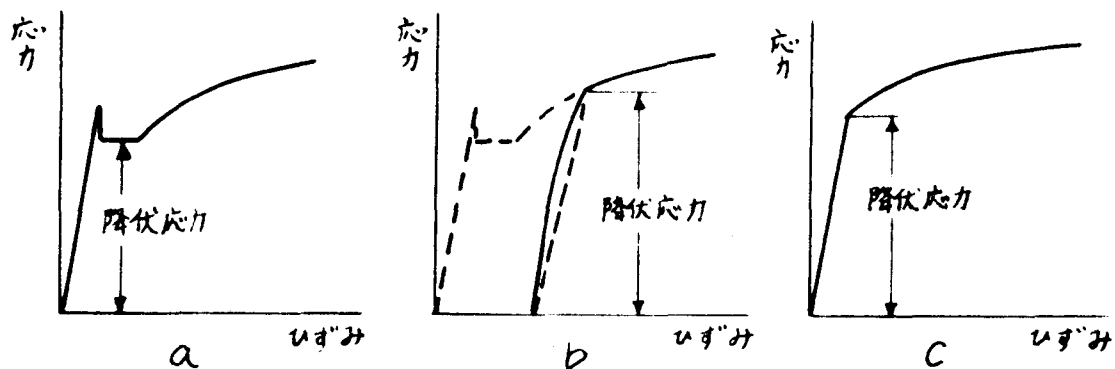
冷間加工による異方性が以上のような2つの要因よりなることがわかると、先に述べたような単純な幾何学的なモデルによる降伏曲線の変形の考えをもつてしては、このように複雑な現象を、近似的にも表わしうるとは期待できないであらう。また、選択方位による異方性と、結晶粒界における残留応力による異方性とを、それぞれ、ただ1つの定数で代表させるやり方も、同じ非難をまぬかれなないと思う。数学的塑性論としては、Hillによるもののように、異方性の各主軸ごとに、その方位の異方性の状態に特有なパラメータを用いる方法が、正当であるように思う。そこで、筆者は、Hillの考え方をさらに拡張すべく、選択方位による異方性のみならず、結晶粒界における残留応力による異方性をも考えに入れて、理論を一般化した。

第2章 基礎理論

第1節 述語に関する2・3の注意

弾性学あるいは古典的な塑性学と、最近のいわゆる数理塑性論との間には、使用する述語の内容に若干のくい違ひがあると思われるので、ここでそれらについて述べるとともに、筆者が、それらの述語をどのような意味で用いたかを明らかにしておく。

まず、降伏応力あるいは降伏点であるが、これは古い用法では、焼きなましした軟鋼に荷重をかけたとき、一定の応力のもとにおいて、ひずみが急速に増加してゆく領域いわゆるおどり場の応力のみを意味した(第4図, a)。しかし、数理塑性論においては、塑性変形のはじまる応力をすべて降伏応力と呼ぶ



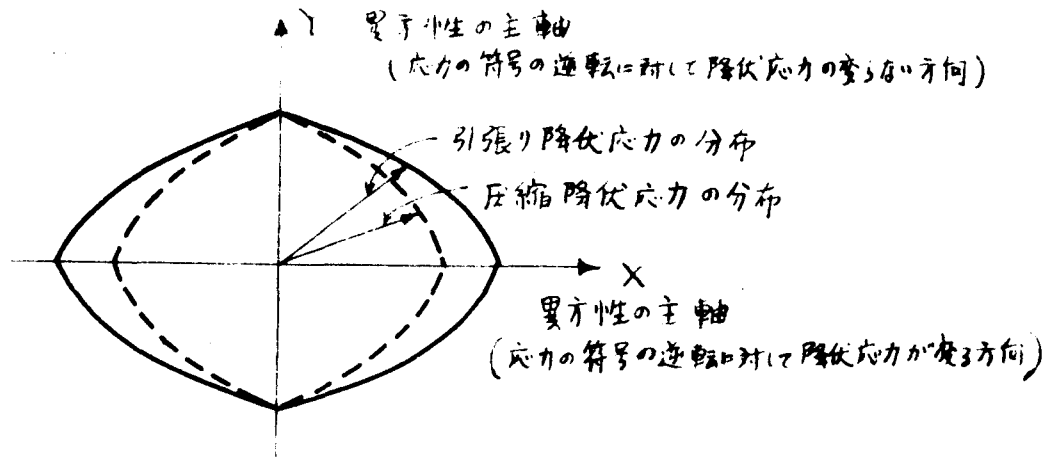
第4図

らわしがある。筆者ももちろんこのような意味で用いた。したがって、冷間加工を受けておどり場が現われなくなった軟鋼にも(第4図, b)あるいは焼きなましされた状態においてもおどり場をもたないアルミニウムのような材料にも(第4図, c)降伏応力がある。実

際には、応力ひずみ曲線は、第4図に示すよ
 うに鋭くおれまがら無いで、徐徐にわん曲す
 ることが多い。それゆえに、降伏点をどのよ
 うに定義するかによつて、得られる結果が変
 化することがしばしばある。筆者が用いた降伏点
 の決定法は第6章、第3節において述べるが、
 塑性変形に関する実験研究の文献を検討す
 る場合には、まずその研究者が用いた降伏点
 のきめ方をたしかめておくことが肝要である。
 次に、Bauschinger効果であるが、これは、焼
 きなまし材に引張りで塑性変形を与えてから
 荷重を除き、次に圧縮の荷重を加えると、そ
 の降伏は、焼きなまし材をそのまま圧縮した
 ときの降伏応力より低いところでおこる現象
 をいうのである。したがつて、Bauschinger効果
 の有無は、厳密には、その材料の現在の状態
 における圧縮降伏応力と、焼きなましされた
 状態における圧縮降伏応力とを比較して判断
 されるべきである。しかるに、数理塑性論に
 おいては、現在の状態すなわち一般には任意
 の冷間加工を受けた状態における圧縮降伏応
 力と引張り降伏応力との比較に、あるいは、
 さらに一般化して、応力の符号を逆にしたと
 ききの降伏点の比較に、この述語を用いてゐる
 (たとえば Hill, 1950, p. 18; 吉村, 1957, p. 151)。
 これは、応力成分のある関数であるところの
 降伏関数の性質の一つである応力の符号を逆
 にしたときの対称性の有無が、その関数を大
 いに特長づけるものであり、またしばしば議
 論の対象となるものであることから、Bauschinger

効果という簡単な述語を、この性質にあてたものと思われる。しかし、このような用法によると、たとえば、あらかじめ引張りで冷間加工を受けた材料の圧縮降伏応力が引張り降伏応力より小さければ、ただそのことだけで、Bauschinger効果があるといえるわけであるが、実際には、その材料の焼きなまし状態における圧縮降伏応力の値がわからなければ、判断をくだすことはできない。そこで筆者は、数理塑性論において普通行われていた用法には従わずに、Bauschinger効果にっいては、厳密な内容を与えることにし、単に応力の符号を逆にした場合の降伏点の比較とは区別して考えることにする。

最後に、異方性の主軸にっいて述べる。この研究にっいては、材料が3つの互に直交する異方性の主軸を持つものとしての議論をすすめていくが、実際には、異方性の主軸は、その材料のあらゆる方向の性質を調べ、それらの性質の分布の対称性を見いだしてからきめられるべきものである。たとえば、ある材料にっいて、引張りの降伏応力と圧縮の降伏応力とを調べた結果、第5図に示されるような分布が得られたものとすると、この材料の異方性の主軸はX軸およびY軸であるといえる。しかし、これは、ただ降伏応力のみにっいての対称性から判断したものであって、もちろん、その材料の用途によつては、それだけで充分である場合もあるかも知れないが、それ以外に性質たとえばヤング率やポアソン比



第 5 図

などについても調べなければ、完全とはいえない。また、引張り降伏応力と圧縮降伏応力とでその分布の対称性がこゝとある場合があるかも知れない。このような場合については、引張り降伏応力についての異方性の主軸、あるいは、圧縮降伏応力についての異方性の主軸と呼ばれるわけはならない。この問題については、広範囲な実験と、*metal physics* からの見方をも考へに入れた研究が必要であると筆者は考へる。

第 2 節 降伏条件

ここでは、異方性が、各点において、3つの互に直交する対称面を持つていふという、基本的な場合を考へることとする。これら3つの対称面は、3つの互に直交する線で交わるが、それらの線が、前節で述べた異方性の主軸である。さきにも述べたように、異方性の主軸は、実際には、その材料のあらゆる方向の性質を調べて、その対称性を見いだしてからきめられるべきものである。しかし、焼きなまし材に、1回だけ比例負荷をかけた場

合には、その材料に生じた異方性の主軸は、除荷直前の主応力の方向と一致すると仮定しても大きい誤りはないものと思われる。さて、ある異方性状態にある材料の任意の一要素に注目し、異方性の主軸 X, Y, Z を基準直角座標系にえらぶ。この場合にも、静水圧を加えても、降伏には影響しないという仮定を用いることにする。降伏条件として、次の式を提案する。

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 \\ + 2F_b(\sigma_Y - \sigma_Z) + 2G_b(\sigma_Z - \sigma_X) + 2H_b(\sigma_X - \sigma_Y) \\ + 2L\tau_{YZ}^2 + 2M\tau_{ZX}^2 + 2N\tau_{XY}^2 = 1 \quad (1)$$

ここで、 F, G, H, L, M, N および F_b, G_b, H_b はその時々の異方性の状態に特有な量すなわち異方性パラメータである。

S_x, S_y, S_z を異方性の主軸 X, Y, Z 方向の引張り降伏応力、 $-S'_x, -S'_y, -S'_z$ を同じく圧縮降伏応力とすると

$$\left. \begin{aligned} G + H &= \frac{1}{S_x S'_x}, & 2F &= \frac{1}{S_y S'_y} + \frac{1}{S_z S'_z} - \frac{1}{S_x S'_x} \\ H + F &= \frac{1}{S_y S'_y}, & 2G &= \frac{1}{S_z S'_z} + \frac{1}{S_x S'_x} - \frac{1}{S_y S'_y} \\ F + G &= \frac{1}{S_z S'_z}, & 2H &= \frac{1}{S_x S'_x} + \frac{1}{S_y S'_y} - \frac{1}{S_z S'_z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} G_b - H_b &= \frac{S_x - S'_x}{2 S_x S'_x} \\ H_b - F_b &= \frac{S_y - S'_y}{2 S_y S'_y} \\ F_b - G_b &= \frac{S_z - S'_z}{2 S_z S'_z} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なる関係がある。たとえば、(1)式において、 $\sigma_x = s_x$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ として得られる式と、 $\sigma_x = -s'_x$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ として得られる式とから、(2)および(3)式の第1式が得られる。また、(3)式から、これらの降伏応力の間には

$$\frac{s_x - s'_x}{s_x s'_x} + \frac{s_y - s'_y}{s_y s'_y} + \frac{s_z - s'_z}{s_z s'_z} = 0 \quad (4)$$

なる関係がある。異方性の主軸に関する降伏せん断応力をそれぞれ t_{yz} , t_{zx} , t_{xy} とすると

$$2L = \frac{1}{t_{yz}^2}, \quad 2M = \frac{1}{t_{zx}^2}, \quad 2N = \frac{1}{t_{xy}^2} \quad (5)$$

となる。各主軸方向について、垂直応力の符号を逆にしても降伏応力の値が変わらないときには、 $s_x = s'_x$, $s_y = s'_y$, $s_z = s'_z$ であるから、(3)式より

$$G_b - H_b = 0, \quad H_b - F_b = 0, \quad F_b - G_b = 0$$

となり、さらに完全な等方性の場合には

$s_x = s_y = s_z = \sqrt{3} t_{yz} = \sqrt{3} t_{zx} = \sqrt{3} t_{xy}$ であるから、(2)および(5)式から

$$3F = 3G = 3H = L = M = N$$

となり、単純せん断に対する降伏応力を k とおくと(1)式は

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) = 6k^2$$

となって、Misesの降伏条件に帰着する。

(2)式の右の列の3つの式から、 F , G , H のうちの一つしか負になり得ないことは明らかであるが、それは、各主軸方向の降伏応力の値の間に非常に大きな差がある場合である。ここでは、そのような場合は考えないことに

する。したがって、 F, G, H はいずれも正であるとする。(5)式から、 L, M, N は本質的に正の量である。

任意の要素の異方性の状態を完全に記述するためには、9つの降伏応力のうち、 $S_x, S_y, S_z, S'_x, S'_y, S'_z$ のうちの任意の5つと、 t_{yz}, t_{zx}, t_{xy} の3つ、合計8つの独立な値を知ることが必要である。これらの量は、材料のひずみ履歴に依存するものと考えられ、したがって、塑性ひずみの増加とともに変ってゆくはずである。しかし、ここでは、塑性ひずみの増加にもなる異方性パラメータの変化については論じないことにし、与えられた材料については、異方性パラメータは定数であると仮定する。ここで、 Z 軸を軸として、 X および Y 軸を時計の針の方向に θ だけ回転させてできる新しい座標系 x, y, z についての応力成分でもって、降伏条件を表わしておく。兩座標系についての応力成分の変換式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_z &= \sigma_z \\ \tau_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz} \cos \theta - \tau_{zx} \sin \theta \\ \tau_{zx} &= \tau_{yz} \sin \theta + \tau_{zx} \cos \theta \end{aligned} \right\} (6)$$

を用いると、新しい座標系 x, y, z についての降伏条件は

$$\begin{aligned} 2f(\sigma_{ij}) &\equiv \frac{1}{4}(F+G)(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \left\{ \frac{1}{2}N + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} (\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + (F+G)\sigma_z^2 \\ &\quad + \left\{ (F+G+4H) - (F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(F+G)(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_z + (F-G)\cos 2\theta(\sigma_x - \sigma_y)\sigma_z \\
& -(F-G)\sin 2\theta(\sigma_x + \sigma_y)\tau_{xy} \\
& +(F+G+4H-2N)\sin 2\theta\cos 2\theta(\sigma_x - \sigma_y)\tau_{xy} \\
& + 2(F-G)\sin 2\theta\sigma_z\tau_{xy} + 2(L\cos^2\theta + M\sin^2\theta)\tau_{yz}^2 \\
& + 2(L\sin^2\theta + M\cos^2\theta)\tau_{zx}^2 - 2(L-M)\sin 2\theta\tau_{yz}\tau_{zx} \\
& +(F_b - G_b)(\sigma_x + \sigma_y) - (F_b + G_b - 2H_b)\cos 2\theta(\sigma_x - \sigma_y) \\
& - 2(F_b - G_b)\sigma_z - 2(F_b + G_b - 2H_b)\sin 2\theta\tau_{xy} \\
& = 1 \tag{7}
\end{aligned}$$

となる。ここで、 τ_{yz} と τ_{zy} 、 τ_{zx} と τ_{xz} 、 τ_{xy} と τ_{yx} はつり合いの条件から等しいので区別して書いておくが、テンソル解析に当たっては、区別して数えらねばならぬ。

第3節 応力とひずみ増分の関係

ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) は、変位増分 du_i から

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i} \right\} \tag{8}$$

で定義される。これは、弾性部分 $d\varepsilon_{ij}^e$ と塑性部分 $d\varepsilon_{ij}^p$ とからなるが、冷間加工による異方性を生じても、弾性定数はあまり変化しないという実験事実がある (Naghdi, Essenburg and Koff, 1958) から、ここでは、弾性ひずみに対しては、等方性のときと同じ応力ひずみ関係

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left\{ d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sum_k d\sigma_{kk}}{m+1} \right\} \tag{9}$$

を用いる。ここで、 G は剛性率、 m はポアソン数、 δ_{ij} は Kronecker の記号である。塑性部分 $d\varepsilon_{ij}^p$ は、塑性ポテンシャル g から

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{10}$$

として導かれる。ただし、 $d\lambda$ は正の比例係数である。ここでも、(1)式における $f(\sigma_{ij})$ を塑性ポテンシャルとみなすことにする。

(1)式の f を g に等しいとして(10)式に代入すると、異方性の主軸についての、応力と塑性ひずみ増分の間の関係は

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - G\sigma_z - (Gb-Hb)] \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda [(H+F)\sigma_y - F\sigma_z - H\sigma_x - (Hb-Fb)] \\ d\varepsilon_z^p &= d\lambda [(F+G)\sigma_z - G\sigma_x - F\sigma_y - (Fb-Gb)] \\ d\gamma_{yz}^p &= d\lambda L \tau_{yz} \\ d\gamma_{zx}^p &= d\lambda M \tau_{zx} \\ d\gamma_{xy}^p &= d\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (11)$$

で与えられる。すべての応力系に対して

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0, \quad (12)$$

すなわち、塑性変形に際して、体積変化はゼロであることがわかる。

座標系 x, y, z についての応力と塑性ひずみ増分の間の関係は、(7)式の f を g として(10)式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_y \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_z \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(Fb-Gb) - \frac{1}{2}(Fb+Gb-2Hb)\cos 2\theta \right] \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta + \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_y \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) + \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_z \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(Fb-Gb) + \frac{1}{2}(Fb+Gb-2Hb)\cos 2\theta \right] \end{aligned} \right\}$$

$$d\varepsilon_z^p = d\lambda \left[(F+G) \sigma_z - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F+G) + \frac{1}{2}(F-G) \cos 2\theta \right\} \sigma_y + (F-G) \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ \left. - (F_b - G_b) \right] \quad (13)$$

$$d\gamma_{xy}^p = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N) \cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \right. \\ \left. - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N) \cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_y \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(F-G) \sin 2\theta \sigma_z - \frac{1}{2}(F_b + G_b - 2H_b) \sin 2\theta \right]$$

$$d\gamma_{yz}^p = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(L+M) + \frac{1}{2}(L-M) \cos 2\theta \right\} \tau_{yz} - \frac{1}{2}(L-M) \sin 2\theta \tau_{zx} \right]$$

$$d\gamma_{zx}^p = d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(M+L) + \frac{1}{2}(M-L) \cos 2\theta \right\} \tau_{zx} - \frac{1}{2}(L-M) \sin 2\theta \tau_{yz} \right]$$

となり，やはり，いかなる応力系に対しても

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0$$

が成立する。

第4節 第2章の結語

この章では，選択方位による異方性を持つ材料に対する Hill の降伏条件をさらに一般化して，結晶粒界における残留応力による異方性をも考へに入れた降伏条件を提案した。また，ここにおいても，等方性理論におけると同様のように，塑性ポテンシャルは，降伏を規定する関数と同じであると仮定して，このよ様な2種の異方性を持つ材料に対する，応力と塑性ひずみ増分の関係を導いた。

第3章

基礎定理

第1節 最大塑性仕事の原理

与えられた表面の塑性変位増分 du_i に対し、真の応力 σ_{ij} のなす仕事は、つり合いの条件および降伏条件をみたし、かならずしも応力ひずみ関係は満足しないところの他のいかなる応力 σ'_{ij} のなす仕事よりも大きい、というのが最大塑性仕事の原理である。筆者の提案した降伏条件にもとづく理論について、この原理を証明する。ここでは、塑性変形のみについて考えるのであるから、いちいち塑性部分を表わす添字を肩につけないことにする。

物体の表面 S の外向きの法線方向余弦を l_i とする。そうすると σ_{ij} による塑性仕事 W_p は、次のようになる。

$$W_p = \int_S \sum_{i,j} \sigma_{ij} du_i l_j dS$$

Green の定理により

$$= \int_V \sum_{i,j} \frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial x_j} dV$$

と、体積積分に書直され

$$= \int_V \sum_{i,j} du_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} dV$$

となるが、 σ_{ij} はつり合いの条件を満足するから、第1項は消える

$$= \int_V \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} dV$$

となる。いま、 X, Y, Z 座標系についての、 du_i の成分を du, dv, dw とすると、応力成分の対称性 $\tau_{YZ} = \tau_{ZY}, \tau_{ZX} = \tau_{XZ}, \tau_{XY} = \tau_{YX}$ から、塑性仕事

事は

$$W_p = \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial(du)}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial(dv)}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial(dw)}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau_{xy} \left\{ \frac{\partial(dv)}{\partial x} + \frac{\partial(du)}{\partial y} \right\} + \tau_{yz} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right\} \right. \\ \left. + \tau_{zx} \left\{ \frac{\partial(du)}{\partial z} + \frac{\partial(dw)}{\partial x} \right\} \right] dV$$

となるから, (8) および (11) 式を用いると

$$= \int_V d\lambda \left\{ F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \right. \\ \left. + Fb(\sigma_y - \sigma_z) + Gb(\sigma_z - \sigma_x) + Hb(\sigma_x - \sigma_y) \right. \\ \left. + 2(L\tau_{yz}^2 + M\tau_{zx}^2 + N\tau_{xy}^2) \right\} dV$$

となる。つぎに, つり合いの条件および降伏条件はみたすが, かならずしも応力ひずみ関係 (11) 式を満足するとはかぎらない応力 σ'_{ij} が, 同じ塑性変位増分 du_i によりなす塑性仕事 W'_p を求める。

$$W'_p = \int_S \sum_{ij} \sigma'_{ij} du_i l_j dS$$

Green の定理により

$$= \int_V \sum_{ij} \frac{\partial(\sigma'_{ij} du_i)}{\partial x_j} dV$$

となるが, σ'_{ij} はつり合いの式はみたすから, そのことと, 応力成分の対称性とから

$$= \int_V \sum_{ij} \sigma'_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} dV \\ = \int_V \left[\sigma'_x \frac{\partial(du)}{\partial x} + \sigma'_y \frac{\partial(dv)}{\partial y} + \sigma'_z \frac{\partial(dw)}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau'_{xy} \left\{ \frac{\partial(dv)}{\partial x} + \frac{\partial(du)}{\partial y} \right\} + \tau'_{yz} \left\{ \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right\} \right. \\ \left. + \tau'_{zx} \left\{ \frac{\partial(du)}{\partial z} + \frac{\partial(dw)}{\partial x} \right\} \right] dV$$

となる。ここで、(8)および(11)式を用いるのであるが、 σ_{ij} は応力ひずみ関係は満足するかどうかあからなから、次のようになる。

$$\begin{aligned} W_p &= \int_V d\lambda \left\{ \sigma_x' [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - G\sigma_z - (G_b - H_b)] \right. \\ &\quad + \sigma_y' [(H+F)\sigma_y - F\sigma_z - H\sigma_x - (H_b - F_b)] \\ &\quad + \sigma_z' [(F+G)\sigma_z - G\sigma_x - F\sigma_y - (F_b - G_b)] \\ &\quad \left. + 2(L\tau_{yz}\tau'_{yz} + M\tau_{zx}\tau'_{zx} + N\tau_{xy}\tau'_{xy}) \right\} dV \\ &= \int_V d\lambda \left\{ F(\sigma_y - \sigma_z)(\sigma_y' - \sigma_z') + G(\sigma_z - \sigma_x)(\sigma_z' - \sigma_x') \right. \\ &\quad + H(\sigma_x - \sigma_y)(\sigma_x' - \sigma_y') + F_b(\sigma_y' - \sigma_z') \\ &\quad + G_b(\sigma_z' - \sigma_x') + H_b(\sigma_x' - \sigma_y') \\ &\quad \left. + 2(L\tau_{yz}\tau'_{yz} + M\tau_{zx}\tau'_{zx} + N\tau_{xy}\tau'_{xy}) \right\} dV \end{aligned}$$

$d\lambda$ は本質的に正の量であるから、もし

$$\begin{aligned} &F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &+ F_b(\sigma_y - \sigma_z) + G_b(\sigma_z - \sigma_x) + H_b(\sigma_x - \sigma_y) \\ &+ 2(L\tau_{yz}^2 + M\tau_{zx}^2 + N\tau_{xy}^2) \\ &\geq F(\sigma_y' - \sigma_z')(\sigma_y' - \sigma_z') + G(\sigma_z' - \sigma_x')(\sigma_z' - \sigma_x') \\ &\quad + H(\sigma_x' - \sigma_y')(\sigma_x' - \sigma_y') + F_b(\sigma_y' - \sigma_z') \\ &\quad + G_b(\sigma_z' - \sigma_x') + H_b(\sigma_x' - \sigma_y') \\ &\quad + 2(L\tau_{yz}\tau'_{yz} + M\tau_{zx}\tau'_{zx} + N\tau_{xy}\tau'_{xy}) \end{aligned} \quad (14)$$

であれば、定理が証明されたことになる。不等式(14)を証明しよう。 σ_{ij} , σ'_{ij} はいずれも降伏条件(1)をみたすから、

$$\begin{aligned} &F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ &+ 2F_b(\sigma_y - \sigma_z) + 2G_b(\sigma_z - \sigma_x) + 2H_b(\sigma_x - \sigma_y) \\ &+ 2(L\tau_{yz}^2 + M\tau_{zx}^2 + N\tau_{xy}^2) \\ &= F(\sigma_y' - \sigma_z')^2 + G(\sigma_z' - \sigma_x')^2 + H(\sigma_x' - \sigma_y')^2 \\ &\quad + 2F_b(\sigma_y' - \sigma_z') + 2G_b(\sigma_z' - \sigma_x') + 2H_b(\sigma_x' - \sigma_y') \\ &\quad + 2(L\tau_{yz}'^2 + M\tau_{zx}'^2 + N\tau_{xy}'^2) \end{aligned}$$

なる関係がある。この関係を用いると、証明すべき不等式(14)の左右の辺を2倍して、そ

これらの差を次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 & 2 \left\{ F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 \right. \\
 & \quad + F_b(\sigma_Y - \sigma_Z) + G_b(\sigma_Z - \sigma_X) + H_b(\sigma_X - \sigma_Y) \\
 & \quad \left. + 2(LT_{YZ}^2 + MT_{ZX}^2 + NT_{XY}^2) \right\} \\
 & \quad - 2 \left\{ F(\sigma_Y - \sigma_Z)(\sigma_Y' - \sigma_Z') + G(\sigma_Z - \sigma_X)(\sigma_Z' - \sigma_X') \right. \\
 & \quad \quad + H(\sigma_X - \sigma_Y)(\sigma_X' - \sigma_Y') + F_b(\sigma_Y' - \sigma_Z') \\
 & \quad \quad + G_b(\sigma_Z' - \sigma_X') + H_b(\sigma_X' - \sigma_Y') \\
 & \quad \left. + 2(LT_{YZ}T_{YZ}' + MT_{ZX}T_{ZX}' + NT_{XY}T_{XY}') \right\} \\
 & = F(\sigma_Y - \sigma_Z)^2 + G(\sigma_Z - \sigma_X)^2 + H(\sigma_X - \sigma_Y)^2 \\
 & \quad + F(\sigma_Y' - \sigma_Z')^2 + G(\sigma_Z' - \sigma_X')^2 + H(\sigma_X' - \sigma_Y')^2 \\
 & \quad + 2F_b(\sigma_Y' - \sigma_Z') + 2G_b(\sigma_Z' - \sigma_X') + 2H_b(\sigma_X' - \sigma_Y') \\
 & \quad + 2(LT_{YZ}'^2 + MT_{ZX}'^2 + NT_{XY}'^2) \\
 & \quad + 2(LT_{YZ}^2 + MT_{ZX}^2 + NT_{XY}^2) \\
 & \quad - 2F(\sigma_Y - \sigma_Z)(\sigma_Y' - \sigma_Z') - 2G(\sigma_Z - \sigma_X)(\sigma_Z' - \sigma_X') \\
 & \quad - 2H(\sigma_X - \sigma_Y)(\sigma_X' - \sigma_Y') - 2F_b(\sigma_Y' - \sigma_Z') \\
 & \quad - 2G_b(\sigma_Z' - \sigma_X') - 2H_b(\sigma_X' - \sigma_Y') \\
 & \quad - 4(LT_{YZ}T_{YZ}' + MT_{ZX}T_{ZX}' + NT_{XY}T_{XY}') \\
 & = F \left\{ (\sigma_Y - \sigma_Z) - (\sigma_Y' - \sigma_Z') \right\}^2 + G \left\{ (\sigma_Z - \sigma_X) - (\sigma_Z' - \sigma_X') \right\}^2 \\
 & \quad + H \left\{ (\sigma_X - \sigma_Y) - (\sigma_X' - \sigma_Y') \right\}^2 + 2L(T_{YZ} - T_{YZ}')^2 \\
 & \quad + 2M(T_{ZX} - T_{ZX}')^2 + 2N(T_{XY} - T_{XY}')^2 \\
 & \geq 0
 \end{aligned}$$

なせならば、 F, G, H, L, M, N は第2章、第2節において述べたごとく、正の量だからである。これで、第2章において提案した降伏条件にもとづく理論が最大塑性仕事の原理を満足することが証明された。そこで、実際に、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ が与えられた場合に、応力ひずみ関係(11)を満足するかどうかわからない応力 σ'_{ij} を用いて、塑性仕事 $\sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}$ を停留させて、はたして、真の応力 σ_{ij} が得られる

かどうかをたしかめてみる。これは、関数 $\sum_{ij} \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij}$ を、 $f(\sigma'_{ij}) = \frac{1}{2}$ なる拘束条件のもとで、停留させる問題にほかならない。Lagrange の乗数法を用いて、未定定数を $d\lambda$ とおくとこの問題は

$$\frac{\partial (\sum_{ij} \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} - d\lambda \cdot f)}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

となる。これを計算すると

$$\sum_{ij} d\varepsilon_{ij} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \sigma'_{ij}} + \sum_{ij} \sigma'_{ij} \frac{\partial (d\varepsilon_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}} - f \cdot \frac{\partial (d\lambda)}{\partial \sigma'_{ij}} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

となるが、いまのところはまだ $d\varepsilon_{ij}$ と σ'_{ij} とは互に独立な変数であるから、第2項は消える。また、 $d\lambda$ が定数であることから、第3項も消えて、結局

$$d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = 0$$

すなわち

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f(\sigma'_{ij})}{\partial \sigma'_{ij}}$$

となる。この演算を行くと、 $d\varepsilon_{ij}$ と σ'_{ij} の関係は (11) 式と全く同じ形で与えられる。 σ'_{ij} は、つり合いの条件と降伏条件とはすでに満足していったのであるから、ここでさらに、応力ひずみ関係をも満足することが明らかになったことによつて、結局、真の応力であることがたしかめられた。

第2節 解の唯一性

いま、考える瞬間において、与えられた表面力 P により、物体内には、応力状態 σ_{ij} が生じているものとする。そこで、表面力に dp

なる変化を与えた場合、応力は唯一的に、 $d\sigma_{ij}$ だけ変化するのであり、かつ、そして同じ変化 dP に対して、2つのことなる応力変化 $d\sigma_{ij}'$ および $d\sigma_{ij}''$ が属することはあり得ないというのが解の唯一性である。降伏条件のなかに応力成分の1次の項がは入っても、この定理の証明には、本質的な変化はない。Melan (Melan, 1938) に従って、この定理を証明する。

弾塑性両変形を考へる場合には、この表面力の变化 dP が、あらたに塑性変形を生ぜしめるか否かによつて、問題をわけて考へねばならぬ。物体内に、あらたに、塑性変形を生ぜしめるか否かは、降伏条件(1)を

$$F(\sigma_{ij}) \equiv f(\sigma_{ij}) - \frac{1}{2} = 0$$

と書きなおし、塑性ひずみ増分が(10)式で与えられることと、 $g = f$ であることとを思いだすと、次のように書ける。すなわち、表面力の变化 dP は

$$F < 0$$

あるいは

$$F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

に対しては、弾性変形を、

$$F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} > 0$$

に対しては、塑性変形を与へ、

さて、2つのことなる解に対応する応力増分 $d\sigma_{ij}'$, $d\sigma_{ij}''$ およびひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}'$, $d\varepsilon_{ij}''$ を積もつて、次のように、物体全体に、の積

分

$$J \equiv \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')(d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV$$

を考へる。どちらの応力増分をツリ合ひの条件をみたすこと、およびひずみ増分は(8)式で与えられることから、Greenの定理を用いると

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')(d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV \\ &= \int_S \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')(du_i' - du_i'') l_j dS \end{aligned}$$

となる。ただし、 l_i は表面における外向きの法線の方向余弦である。しかるに、境界上では、どちらの解の応力増分も、与えられた境界条件 dp に等しくならねばならぬから、右辺の積分はゼロとなり

$$J \equiv \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')(d\varepsilon_{ij}' - d\varepsilon_{ij}'') dV = 0 \quad (16)$$

となる。したがって、被積分項の各項はゼロとなり $d\sigma_{ij}' = d\sigma_{ij}''$ となり、解は唯一的にきまる。次に、 $d\sigma_{ij}' \neq d\sigma_{ij}''$ に対して、 J がゼロにたらぬことを証明する。これは、以下のようになり、3)の場合にわけて考へる。

i) $F < 0$

あるのは

$$F = 0, \quad \text{かつ} \quad d\sigma_{ij}' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) < 0, \\ d\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) < 0$$

のとき。

この場合には、 $d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}''^P = 0$ である。このときの J を J' と書くと

$$J' = \int_V \frac{1}{2G} \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left\{ d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'' - \delta_{ij} \frac{\sum_k (d\sigma_{kk}' - d\sigma_{kk}'')}{m+1} \right\} dV$$

となるが、 i, j, k はおのおの x, y, z なる値をとるから、

$$J' = \int_V \frac{1}{2G} \left[(d\sigma_x' - d\sigma_x'')^2 + (d\sigma_y' - d\sigma_y'')^2 + (d\sigma_z' - d\sigma_z'')^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{m+1} \left\{ (d\sigma_x' - d\sigma_x'')^2 + (d\sigma_y' - d\sigma_y'')^2 + (d\sigma_z' - d\sigma_z'')^2 \right\} \right. \\ \left. + 2 \left\{ (dT_{xy}' - dT_{xy}'')^2 + (dT_{yz}' - dT_{yz}'')^2 + (dT_{zx}' - dT_{zx}'')^2 \right\} \right] dV$$

となるが、被積分項の第1項と第2項とは、Schwarzの不等式により正であり、したがって

$$J' > 0$$

となる

$$\text{ii) } F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij}' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) > 0$$

および

$$F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) < 0$$

のとき、

この場合には、 $d\varepsilon_{ij}^P \neq 0$, $d\varepsilon_{ij}^P = 0$ である。このときの J を J'' と書くと

$$J'' = \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left[\frac{1}{2G} \left\{ d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'' - S_{ij} \frac{\sum_k (d\sigma_{kk}' - d\sigma_{kk}'')}{m+1} + d\varepsilon_{ij}^P \right\} \right] dV \\ = J' + \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') d\varepsilon_{ij}^P dV$$

となる。右辺の第2項は

$$\int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') d\varepsilon_{ij}^P dV = \int_V \sum_{ij} d\sigma_{ij}' \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\sigma_{ij}'' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right\} dV$$

となるが、この右辺の被積分項は仮定により正であり、したがって

$$J'' > 0$$

となる。最後は

$$\text{iii) } F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij}' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) > 0$$

および

$$F = 0, \text{ かつ } d\sigma_{ij}'' (\partial F / \partial \sigma_{ij}) > 0$$

のとき、

この場合には， $d\varepsilon_{ij}^P \neq 0$ ， $d\varepsilon_{ij}^{\prime P} \neq 0$ である。このときの J を J'' と書く。

$$J'' = \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left[\frac{1}{2G} \left\{ d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'' - \delta_{ij} \frac{\sum_k (d\sigma_{kk}' - d\sigma_{kk}'')}{m+1} + d\varepsilon_{ij}^{\prime P} - d\varepsilon_{ij}^{\prime\prime P} \right\} \right] dV$$

$$= J' + \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}^{\prime P} - d\varepsilon_{ij}^{\prime\prime P}) dV$$

となる。右辺の第2項は

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') (d\varepsilon_{ij}^{\prime P} - d\varepsilon_{ij}^{\prime\prime P}) dV \\ &= \int_V \sum_{ij} (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'') \left(d\lambda' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\lambda'' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right) dV \end{aligned}$$

となるが，ここで $d\lambda'$ ， $d\lambda''$ が

$$d\lambda' = h \cdot d\sigma_{ij}' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad d\lambda'' = h \cdot d\sigma_{ij}'' \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

なる形で与えられるとすると

$$J'' = J' + \int_V \sum_{ij} h (d\sigma_{ij}' - d\sigma_{ij}'')^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right)^2 dV$$

となるから

$$J'' > 0$$

となる。

第3節 第3章の結語

この章では，筆者の提案した降伏条件より導かれる理論は，最大塑性仕事の原理および解の唯一性の定理を満足することを証明して，この理論が，数理塑性論として，矛盾のないものであることを明らかにした。

第4章

塑性平面ひずみ理論

この章では、数理塑性論のうちで、最も数学的に興味のある問題の一つであるところの平面ひずみ理論に、第2章で提案した降伏条件にもとづく理論を適用して、この理論が、金属材料の実際の性質をひろくとり入れたにもかかわらず、かなり取扱いは便利なものであることを示す。ここでは、ひずみの弾性部分を無視した剛塑性材料を考えることにする。したがって、塑性部分を表わす添字はつけないことにする。

第1節 基礎方程式

異方性の主軸の一つであるZ軸が流れの面に垂直であるような平面ひずみ状態を考える。Z方向には、応力の符号を逆にしても、降伏応力の値は変わらないと仮定する。このような仮定を用いても、実用的な価値は減じないと思う。この場合には(3)式より

$$F_b - G_b = 0$$

あるいは $F_b = G_b$

となる。平面ひずみ状態を考えるから

$$d\epsilon_z = d\gamma_{zx} = d\gamma_{zy} = 0$$

であるから(11)式より

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

および

$$\sigma_z = \frac{G\sigma_x + F\sigma_y}{F+G}$$

(17)

となる。したがって、降伏条件(1)は次のようになる。

$$\frac{FG+GH+HF}{2N(F+G)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 - \frac{Gb-Hb}{N} (\sigma_x - \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = T^2 \quad (18)$$

ただし, T は, XY 軸に関するせん断降伏応力で, (5) 式の t_{xy} にあたる. ここで

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv \frac{N(F+G)}{2(FG+GH+HF)} \\ b &\equiv \frac{(G+F)(Gb-Hb)}{FG+GH+HF} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

とかくと, 降伏条件は

$$(\sigma_x - \sigma_y - b)^2 + 4a\tau_{xy}^2 = 4aT^2 + b^2 \quad (20)$$

となる. 材料が等方性の場合には, (19) 式において

$$3F = 3G = 3H = N, \quad Gb - Hb = 0$$

とかくと

$$a = 1, \quad b = 0$$

となるから, これら a, b を (20) 式に代入すると

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4T^2$$

となる. たしかに Mises の条件に帰着する.

平面ひずみの場合の応力塑性ひずみ増分の関係は, (11) 式に (17) の関係を代入すると, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\lambda \left\{ \frac{(FG+GH+HF)(\sigma_x - \sigma_y)}{F+G} - (Gb-Hb) \right\} \\ d\varepsilon_y &= d\lambda \left\{ \frac{(FG+GH+HF)(\sigma_y - \sigma_x)}{F+G} - (Hb-Gb) \right\} \\ d\gamma_{xy} &= d\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

また, 異方性の主軸に関する速度成分 u_x および v_y とおくと

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad d\varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad d\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

であるから、応力ひずみ関係 (21) より、次式が得られる。

$$\frac{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\tau_{xy}} \quad (22)$$

いま、異方向の主軸である X 軸に対する、主応力方向の傾きを ϕ 、主ひずみ増分方向の傾きを ψ とすると、

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

および

$$\tan 2\psi = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}$$

であるから、両者の関係は

$$\cot 2\psi = \frac{1}{a} \cot 2\phi - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\tau_{xy}} \quad (23)$$

となる。したがって、一般に、主応力の方向と主ひずみ増分の方向とは一致しない。(23) 式を少し変形した式

$$\tan 2\psi = \frac{N\tau_{xy}}{\frac{FG+GH+HF}{F+G}(\sigma_x - \sigma_y) - (Gb - Hb)}$$

より、 $\phi = 0$ となるわけに $\tau_{xy} = 0$ のときには、 $\psi = 0$ となることから、主応力の方向が、異方向の主軸である X 軸と一致するときには、主応力の方向と主ひずみ増分の方向とが一致することがわかる。

さて、平面ひずみの問題に対しては、5つの未知数、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u_x$ および v_y に対してつり合いの条件

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (24)$$

塑性変形における体積一定の条件

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

降伏条件 (20), および

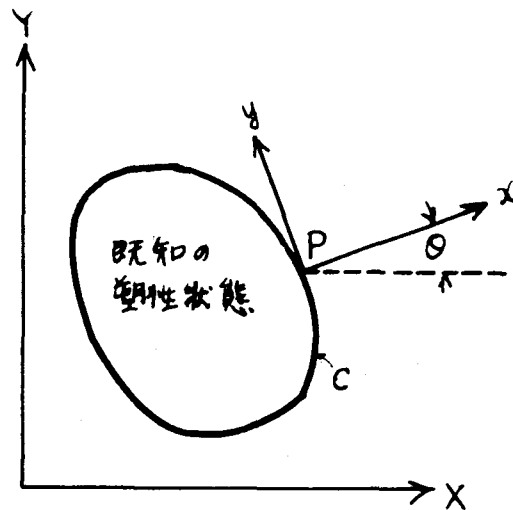
応力ひずみ関係 (22)

なる合計5つの関係式がある。これら5つの関係式の中には、3つのパラメータが含まれている。それらは、異方性の主軸にわたってせん断降伏応力 τ と異方性パラメータ a, b である。これらは、3つの測定を行うことによつて、実験的にきめることができる。

第2節 特性曲線

前節の終りにおいて述べたごとく、一般的に異方性を持つ材料の塑性平面ひずみの問題は、まず、その材料について、3つの測定ができるような予備実験を行つて、3つのパラメータを決定しておくことから、与えられた境界条件のもとに、5つの未知数についての、5つの関係式を解いてゆけばよい。さて、このようにして、閉曲線 C にかこまれる全塑性域内の解すなわち応力と速度とが得られ、そして、いまは、さらに C の外での境界条件が与えられなければ、もはや、 C 内の解を C の外の領域に延長し得なくなつてしまつたとする。このとき曲線 C は特性曲線 (characteristics)

とよばれる (Hill, 1950, p. 132). いま, C 上の点 P における外向きの法線に沿って x 軸を, 接線に沿って y 軸をとる (第 6 図). まず,



第 6 図

P 点の近傍における応力状態に注目する. そのため, x, y 座標系についての諸関係の形を求めておく. まず, っり合いの条件 (24) の形はかあらず

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

である. 降伏条件は, 応力成分の変換の式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta - 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} (27)$$

を (20) 式に代入すると

$$\begin{aligned} & \{1 - (1-a) \sin^2 2\theta\} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \{1 - (1-a) \cos^2 2\theta\} \tau_{xy}^2 \\ & - 4(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) \tau_{xy} \\ & - 2b \{ \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) - 2 \sin 2\theta \tau_{xy} \} = 4aT^2 \end{aligned} \quad (28)$$

となる. ここで, P 点の近傍における応力の変化に注目する (第 7 図). C の内側におけ

る値に (1), 外側における値に (2) なる添字をつけ, 曲線 C に沿って, 点 P から微小距離 dy はなれた点 Q における値に (') をつけることにする. カのつり合いから

$$(\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2 \quad (a)$$

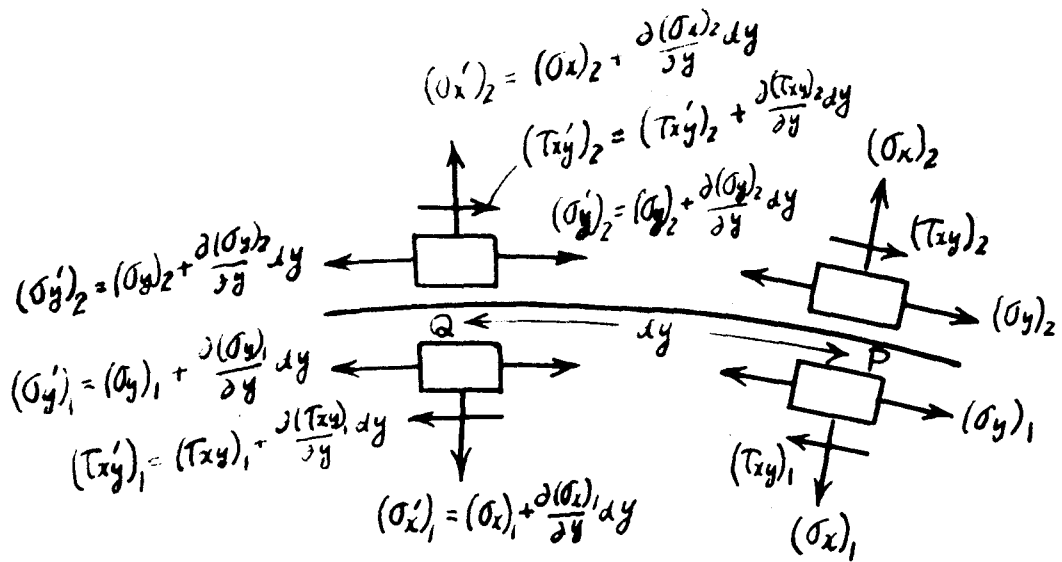
および $(\sigma'_x)_1 = (\sigma'_x)_2 \quad (b)$

である. また, モーメントのつり合いから

$$(\tau_{xy})_1 = (\tau_{xy})_2 \quad (c)$$

および $(\tau'_{xy})_1 = (\tau'_{xy})_2 \quad (d)$

である. すなわち, σ_x と τ_{xy} は C をこえて連続である. したがって, これらの値を降伏条件 (28) に代入すると, 降伏条件を満足する σ_y



第7図

の値は, 2次方程式の根として, 2つ見いだされる. もちろん, そのうちの1つは, Cのちょうど内側における値と一致する. 一般には, $(\sigma_y)_2$ と $(\sigma_y)_1$ は等しくなくてもよいのであるが, ここでは σ_y は C をこえて連続, すなわち

$$(\sigma_y)_1 = (\sigma_y)_2 \quad (e)$$

および $(\sigma'_y)_1 = (\sigma'_y)_2 \quad (f)$

であるを仮定する。さて、Q点における応力は

$$(\sigma'_x)_1 = (\sigma_x)_1 + \frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial y} dy, \quad (\sigma'_x)_2 = (\sigma_x)_2 + \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial y} dy$$

$$(\tau'_{xy})_1 = (\tau_{xy})_1 + \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} dy, \quad (\tau'_{xy})_2 = (\tau_{xy})_2 + \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y} dy$$

$$(\sigma'_y)_1 = (\sigma_y)_1 + \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} dy, \quad (\sigma'_y)_2 = (\sigma_y)_2 + \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} dy$$

で与えられる。これらの式に、それぞれ、(a) と (b), (c) と (d) および (e) と (f) を用いると

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial y}, \quad (g)$$

$$\frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} = \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y}, \quad (h)$$

および $\frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} \quad (i)$

が得られる。したがって、 $\partial\sigma_x/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial y$ および $\partial\sigma_y/\partial y$ は C をこえて連続であることがわかる。また、つり合いの式 (26) を P 点に適用すると、それぞれ

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial y} = 0 \quad (j)$$

および $\frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_y)_2}{\partial y} = 0 \quad (k)$

とある。(j) に (h) を用い、(k) に (i) を用いると、

$$\frac{\partial(\sigma_x)_1}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma_x)_2}{\partial x} \quad (l)$$

$$\text{および} \quad \frac{\partial(\tau_{xy})_1}{\partial x} = \frac{\partial(\tau_{xy})_2}{\partial x} \quad (m)$$

が得られる。したがって、 $\partial\sigma_x/\partial x$ および $\partial\tau_{xy}/\partial x$ も C をこえて連続である。最後に残った $\partial\sigma_y/\partial x$ については、降伏条件 (28) を x について微分して得られる式を用いて調べる。(28) 式を x について微分すると

$$\begin{aligned} & \left[\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\}(\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta \tau_{xy} - b \cos 2\theta \right] \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} \right) \\ & + \left[4\{1-(1-a)\cos^2 2\theta\} \tau_{xy} - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta (\sigma_x - \sigma_y) + 2b \sin 2\theta \right] \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

となる。この式に含まれる量は、 $\partial\sigma_y/\partial x$ をのぞけば、すべて、 C の両側で既知である。したがって、もし $\{(\partial\sigma_x/\partial x) - (\partial\sigma_y/\partial x)\}$ の係数がゼロに存在しなければ、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の唯一解が存在し、その値は C をこえて連続になる。しかし、 C が特性曲線であるためには、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の値が唯一的に求めることができなくならねばならぬ。それは $\{(\partial\sigma_x/\partial x) - (\partial\sigma_y/\partial x)\}$ の係数がゼロ、すなわち

$$\begin{aligned} & \{1-(1-a)\sin^2 2\theta\}(\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta \tau_{xy} \\ & - b \cos 2\theta = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

の場合である。このとき、 P 点において、 $\partial\sigma_y/\partial x$ の値を求めることができず、また

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (n)$$

となる。同様にして、降伏条件 (28) を、 y について微分すると、(30) 式が成立するとき

は、P 点において

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (0)$$

となる。(n) および (0) をつり合いの式 (26) に代入すると、特性曲線上では

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

であることがわかる。

次に、速度について調べる。まず、両座標系についての $\partial u_x / \partial x$, $\partial u_y / \partial y$ などに対する変換の式

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \sin^2 \theta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

と、応力成分に対する変換の式 (27) を (22) 式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}} = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta + 2T_{xy} \{1 - (1-a) \sin^2 2\theta\} + b \sin 2\theta}{(\sigma_x - \sigma_y) \{1 - (1-a) \sin^2 2\theta\} - 2(1-a) T_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta - b \cos 2\theta} \quad (32)$$

ここでは、速度の両成分は連続であると仮定する。そうすると、応力について考えたときと同じように、 $\partial u_x / \partial y$ と $\partial v_y / \partial x$ は C をこえて連続になり、したがって、塑性変形における体積不変の条件 $(\partial u_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = 0$ から $\partial u_x / \partial x$ も C をこえて連続となる。したがって、(32) 式によつて、もし

$$\{1 - (1-a) \sin^2 2\theta\} (\sigma_x - \sigma_y) - 2(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta \tau_{xy} - b \cos 2\theta = 0 \quad (33)$$

でなければ、 $\partial v_y / \partial x$ が唯一的にきまってしまう。すなわち、(33)式が速度についての特性曲線を与える。(33)式が成り立つときには、(32)式により $(\partial u_x / \partial x) - (\partial v_y / \partial y) = 0$ となるが、他方、塑性変形における体積一定の条件から、 $(\partial u_x / \partial x) + (\partial v_y / \partial y) = 0$ であるから、結局、特性曲線上では、

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (34)$$

となる。さて、(30)式と(33)式は全く同一の式であるから、応力についての特性曲線と、速度についての特性曲線とは、一致することになる。また、(34)式から、特性曲線の方向は、伸びがゼロの方向、すなわち、すべり線の方向であることがわかる。

次に、最大せん断応力の方向が、 x 軸となす角を ω とすると、その方向は

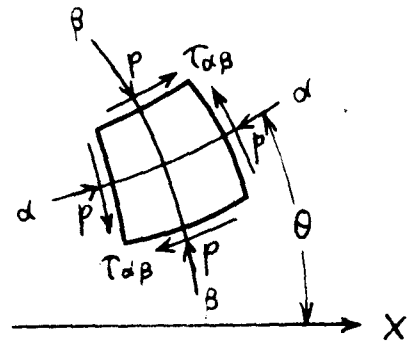
$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\omega - 2\tau_{xy} \sin 2\omega = 0 \quad (35)$$

で与えられるから、ここに考えような一般的な異方性を持つ材料に対しては、最大せん断応力の方向と、すべり線の方向とは、一般には一致しないことがわかる。

第3節 すべり線の性質

すべり線に沿ったの諸関係を、選抜方位による異方性のみを持つ材料に対して行った Hill の方法 (Hill, 1950, p.336) に従って求める。異方性の状態が、その大きさに関しても、方向に関して、均一に分布している、すな

わち、場所は無関係に一定であると仮定する。
 すべり線を曲線座標とし、2つのすべり線族を、
 パラメータ α, β によって区別し、それらを、
 α 曲線、 β 曲線とよぶことにする。そして、 α
 曲線と β 曲線を右手系の直交曲線座標軸にえらん
 ぶ場合、代数的に最大の主応力方向が、第1および
 第3象限にあるようにする(第8図)。これを、
 異方性の主軸である X 軸に対する α 曲線の反
 時計まわりの角度とする。 α, β 曲線座標系に
 関する応力成分を $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ とする。 $p = -\frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$
 は流れの面内における平均圧縮応力である。
 座標の変換による応力成分の変換の式(27)か
 ら



第8図

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta - 2\tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta$$

$$2\tau_{xy} = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2\tau_{\alpha\beta} \cos 2\theta$$

なる関係があるから、これを、降伏条件(20)
 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 f(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}) &= \left\{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta - 2\tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta - b \right\}^2 \\
 &\quad + a \left\{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2\tau_{\alpha\beta} \cos 2\theta \right\}^2 \\
 &= 4aT^2 + b^2 \quad (36)
 \end{aligned}$$

となる。塑性ポテンシャルは、降伏関数と同じ
 形であると仮定しこいるから、すべり線に
 沿って伸びがゼロであること、すなわち

$$d\varepsilon_\alpha = \frac{\partial f}{\partial \sigma_\alpha} = 0, \quad d\varepsilon_\beta = \frac{\partial f}{\partial \sigma_\beta} = 0$$

$$\cos 2\theta \{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta - 2\tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta - b \} \\ + a \sin 2\theta \{ (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta + 2\tau_{\alpha\beta} \cos 2\theta \} = 0 \quad (37)$$

とある。(36)式と(37)式とを、 $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$ および $\tau_{\alpha\beta}$ についてとくと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha - \sigma_\beta &= (1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta \left\{ \frac{4T^2 + \frac{b^2}{a}}{1 - (1-a) \sin^2 2\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} + b \cos 2\theta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\left(4T^2 + \frac{b^2}{a} \right) \{ 1 - (1-a) \sin^2 2\theta \} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b \sin 2\theta}{2} \end{aligned} \right\} (38)$$

が得られる。この式から

$$\frac{d(\alpha\beta)}{d\theta} = -(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$$

なる関係があることがわかる。ここで、流れの面内の平均圧縮応力 $P = -\frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= -P - \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \\ \sigma_\beta &= -P + \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= Th \end{aligned} \right\} (39)$$

と書ける。ただし

$$h(\theta) = \frac{1}{2T} \left[\left(4T^2 + \frac{b^2}{a} \right) \{ 1 - (1-a) \sin^2 2\theta \} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b \sin 2\theta}{2T} \quad (40)$$

である。

流れの面内の平均圧縮応力 P および異方性の主軸である X 軸に対する α 曲線の方位 θ とを用いて、すべり線に沿って成立する関係(31)を書き表わすことを考える。考えている点 P における X 軸の θ の値を θ_0 とすると、 x, y 座標と任意の α, β 座標の間の応力成分の変

換の式は, (27) 式を少し変形した式から

$$J_x = -P + \frac{1}{2} (\sigma_a - \sigma_b) \cos 2(\theta - \theta_0) - T \sigma_b \sin 2(\theta - \theta_0)$$

$$J_y = -P - \frac{1}{2} (\sigma_a - \sigma_b) \cos 2(\theta - \theta_0) + T \sigma_b \sin 2(\theta - \theta_0)$$

と書けるから, これを (31) 式に代入すると, P 点における関係は

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ P + \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \cos 2(\theta - \theta_0) + T h \sin 2(\theta - \theta_0) \right\} \right]_{\theta = \theta_0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ P - \frac{1}{2} T \frac{dh}{d\theta} \cos 2(\theta - \theta_0) - T h \sin 2(\theta - \theta_0) \right\} \right]_{\theta = \theta_0} = 0$$

となる. (3) が, (4),

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_P + \left(\frac{1}{2} T \frac{d^2 h}{d\theta^2} + 2Th \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_P = 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_P - \left(\frac{1}{2} T \frac{d^2 h}{d\theta^2} + 2Th \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_P = 0$$

となる. しかるに, P 点はすべり線上の一般の点を表わしているから, この第1式を α 曲線に沿って, 第2式を β 曲線に沿って積分すると,

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ 曲線に沿って } \quad \frac{P}{2T} + y = \text{一定} \\ \beta \text{ 曲線に沿って } \quad \frac{P}{2T} - y = \text{一定} \end{array} \right\} \quad (41)$$

となる. ここで

$$g(\theta) = \int_0^\theta \left(\frac{1}{4} \frac{d^2 h}{d\theta^2} + h \right) d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{dh}{d\theta} \right]_0^\theta + \int_0^\theta h d\theta$$

である. h は (40) 式に与えられるから, これを θ で微分した形を求めると

$$\left[\frac{dh}{d\theta} \right]_0^\theta = -\frac{1}{T} \left[(1-a) \sin 2\theta \cos 2\theta \left\{ \frac{4T^2 + \frac{b^2}{a}}{1 - (1-a) \sin^2 2\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} + b (\cos 2\theta - 1) \right]$$

となる. また

$$\int_0^{\theta} h d\theta = \left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\theta} \{1 - (1-a)\sin^2 2\theta\}^{\frac{1}{2}} d\theta - \frac{b}{2T} \int_0^{\theta} \sin 2\theta d\theta$$

であるから、 $k^2 \equiv 1-a$ とおくと

$$\int_0^{\theta} h d\theta = \left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} E(k, \theta) + \frac{b}{4T} (\cos 2\theta - 1)$$

となり、結局

$$g(\theta) = -\left(1 + \frac{b^2}{4aT^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-a)\sin 2\theta \cos 2\theta}{2\{1-(1-a)\sin^2 2\theta\}^{\frac{1}{2}}} - E(k, \theta) \right] \quad (42)$$

となる。ここで、 $E(k, \theta)$ は、第2種の不完全積分である。等方性するとき、すなわち、 $a=1$ 、 $b=0$ のときには、(42)式から

$$g(\theta) = 0$$

となり、すべり線上における関係(41)は

$$\alpha \text{ 曲線に沿って } p + 2\theta T = \text{一定}$$

$$\beta \text{ 曲線に沿って } p - 2\theta T = \text{一定}$$

となり、たしかに、Hencky の関係に帰着する。

次に、すべり線上の速度の関係については、 u, v を α および β 曲線に沿う速度成分とすると、 x, y 座標と任意の α, β 座標の間の速度成分の変換の式

$$u_x = u \cos(\theta - \theta_0) - v \sin(\theta - \theta_0)$$

$$v_y = u \sin(\theta - \theta_0) + v \cos(\theta - \theta_0)$$

を(34)式に代入することにより

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ 曲線に沿って } du - v d\theta = 0 \\ \beta \text{ 曲線に沿って } dv + u d\theta = 0 \end{array} \right\} \quad (43)$$

となつて、等方性理論のときの Geiringer の関係式と全く同じものを得る。

最後に、2つの α 曲線 AP と BQ 、および2つの β 曲線 AB と PQ とによつてかこまれる曲線4辺形 $ABQP$ (第9図) を考える。

A点における P, g の値を P_A, g_A と書く表わし
 方を用いる。(41)式を用いて, $P_Q - P_A$ を2通
 りの径路で考えると, まず

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} (P_Q - P_A) &= \frac{1}{2T} (P_Q - P_B) + \frac{1}{2T} (P_B - P_A) \\ &= (g_B - g_Q) - (g_B - g_A) \\ &= 2g_B - g_Q - g_A \end{aligned}$$

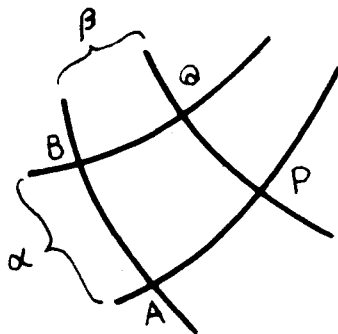
となるが, 他方

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} (P_Q - P_A) &= \frac{1}{2T} (P_Q - P_P) + \frac{1}{2T} (P_P - P_A) \\ &= (g_Q - g_P) + (g_A - g_P) \\ &= g_Q + g_A - 2g_P \end{aligned}$$

であるから, 結局

$$g_Q - g_P = g_B - g_A \quad (44)$$

が得られる。これは, 1つの族内の与えられ
 た2つのすべり線が, 他の
 族の任意の1曲線によつて
 切られる点間における g の
 差が, 一定であることを表
 わしているもので, 等斉性
 理論における Hencky の第1
 定理に相当するものである。
 等斉性の場合には, $g(\theta)$



第9図

$= \theta$ であるから, 2つのすべり線に沿って一
 定であるのは, 角度 θ のものだけであつた。し
 かし, ここで考えるような異斉性を持つ材料
 の場合には, すべり線に沿って一定であるの
 は(42)式で与えられる複雑な量である。した
 がつて, この場合には, 等斉性理論の場合の
 ような簡単なすべり線場の幾何学 (Hill, 1950,

p. 136) は成立しない。

第4節 第4章の結語

この章では、第2章で提案した降伏条件にもとづく理論を、平面ひずみの理論に適用した。その結果、次のようなことがわかった。

i) 応力の主方向は、一般には、塑性ひずみ増分の主方向とは一致しない。

ii) 等方性理論におけると同様、応力についての特性曲線と、速度についての特性曲線とは一致する。

iii) 等方性理論におけると同様、特性曲線はすべり線である。

iv) 最大せん断応力の方向は、一般には、すべり線の方向とは一致しない。

v) 等方性理論において成立したような、簡単なすべり線場の幾何学は成立しない。

第 5 章

平面応力状態における例題

第 1 節 引張りによる異方性を受けた材料の主塑性ひずみ増分の方向と主応力の方向との関係

等方性材料に対する理論によれば、ある負荷のもとにおいて塑性変形が進行する場合、主塑性ひずみ増分の方向は、主応力の方向と一致する (Hill, 1950, p. 39)。異方性を持つ材料に対して第 2 章において提案した降伏条件にもとづく理論では、この関係がどのようなになるかを、引張りで塑性変形を与えた板から、いろいろ方向に切りとった試験片の引張り降伏応力を求めた斎藤氏の実験結果 (斎藤, 1955) を借用して調べる。これによると、焼きなましした状態で等方性のある黄銅の平板を、あらかじめ引張りによって 12% の残留ひずみが残るよう塑性変形を与えた後、その引張りの方向に対して中の角度をなす方向に切りだした試験片の引張り降伏応力は、次のとおりである。

$\phi, ^\circ$	引張り降伏応力, kg/mm^2
0	30.0
22.5	27.8
45	28.3
67	25.0
90	23.0

焼きなまし材に、引張りによる異方性を与えた平板の異方性の主軸は、その引張りの方向、板厚の方向およびそれらに垂直な方向である

と考えられる。それらの方向を、それぞれ X , Y および Z 方向とする。 X - Y 面内の引張りに対する応力塑性ひずみの関係は、(11)式において $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ とおくことにより、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^p &= d\lambda [(G+H)\sigma_x - H\sigma_y - (Gb - Hb)] \\ d\epsilon_y^p &= d\lambda [(H+F)\sigma_y - H\sigma_x - (Hb - Fb)] \\ d\epsilon_z^p &= d\lambda [-G\sigma_x - F\sigma_y - (Fb - Gb)] \\ d\gamma_{xy}^p &= d\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

この材料は、焼きなましした状態から、 X 方向に1回単純に引張ったのみであるから、 Y 方向と Z 方向の引張り降伏応力と圧縮降伏応力はそれぞれ等しいと仮定する。(2)式において $S_y = S_z$, $S'_y = S'_z$ であると仮定する。したがって(2)式より

$$G = H \quad (46)$$

となる。また、 Z 方向すなわち板厚の方向に対しては、応力の符号を逆にしても、降伏応力の大きさは変わらないものと仮定すると、(3)式より

$$Fb = Gb \quad (47)$$

となる。塑性ひずみ増分の主方向が X 方向と存在角を ψ とすると、(45), (46) および (47) の各式より

$$\tan 2\psi = \frac{2 d\gamma_{xy}^p}{d\epsilon_x^p - d\epsilon_y^p} = \frac{2N \tau_{xy}}{3H\sigma_x - (F+2H)\sigma_y - 2(Gb - Hb)}$$

となる。いま、 X 方向に対して ϕ のかたむきを持つ単純引張り応力 σ が加えられると、(6)式において、 $\theta = \phi$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ とおくことにより

$\sigma_x = \sigma \cos^2 \phi$, $\sigma_y = \sigma \sin^2 \phi$, $\tau_{xy} = \sigma \sin \phi \cos \phi$
 となる。したがって、 ψ を与える式は

$$\tan 2\psi = \frac{2N\sigma \sin \phi \cos \phi}{\{3H \cos^2 \phi - (F+2H) \sin^2 \phi\}\sigma - 2(G_b - H_b)} \quad (48)$$

となる。この式の中に含まれる異方性パラメータは降伏条件から決定される。x方向に対して ϕ のかたむきをなす方向の単純引張りによる降伏は(7)式において $\theta = \phi$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ とおき、(46)および(47)の関係を用いると

$$\left\{ \frac{1}{4}(F+H+2N) + \frac{1}{4}(F+4H-2N) \cos^2 2\phi - \frac{1}{2}(F-H) \cos 2\phi \right\} \sigma^2 - 2(G_b - H_b) \cos 2\phi \sigma = 1 \quad (49)$$

により規定される。いま、 $a = F+H+2N$,
 $b = F+4H-2N$, $c = F-H$, $d = G_b - H_b$ とおいて、
 (49)式は

$$\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b \cos^2 2\phi - \frac{1}{2}c \cos 2\phi \right) \sigma^2 - 2d \cos 2\phi \sigma = 1$$

と書いて、 $\phi = 0^\circ, 45^\circ, 67^\circ$ および 90° に対して、それぞれ $\sigma = 30.0 \text{ kg/mm}^2, 28.3 \text{ kg/mm}^2, 25.0 \text{ kg/mm}^2$ および 23.0 kg/mm^2 なる値を代入すると、これらの係数は

$$a = 4.9944 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$b = 0.38890 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$c = -1.5664 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$d = 15.269 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

と得られる。これらの値から(48)式に含まれる係数は

$$3H = \frac{1}{8}(3a+3b-6c) = 3.1935 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

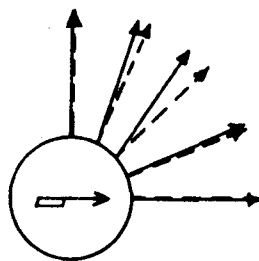
$$F+2H = \frac{1}{8}(3a+3b+2c) = 1.6272 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$


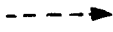
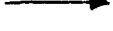
$$2N = \frac{1}{4}(3a-b-2c) = 4.4318 \times 10^{-3} \text{ mm}^4/\text{kg}^2$$

$$2(G_b - H_b) = 2d = 30.537 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kg}$$

となる。これらの値を(48)式に代入すると、引張りによる異方性を持つ黄銅に対する主塑性ひずみ増分の方向 ψ と主応力の方向 ϕ との関係は次のようになる。第10図はこれを図示

ϕ	ψ
0°	0
$22^\circ 30'$	$24^\circ 13'$
45°	$57^\circ 09'$
67°	$72^\circ 43'$
90°	90°



 あらかじめ与えた引張りの方向
 単純引張りの方向
 主塑性ひずみ増分の方向

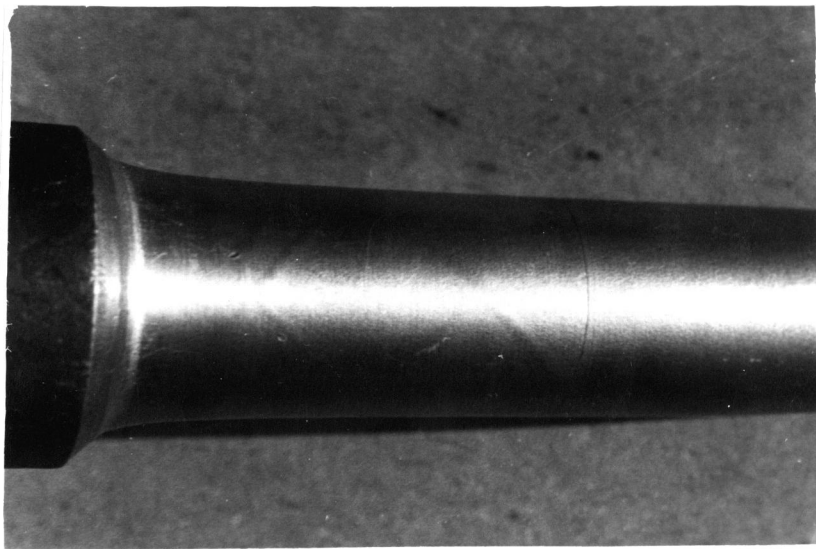
第10図

したものである。

第2節 ねじりによる異方性を受けた材料の引張りによるくびれの問題

金属の薄板材を引張ると、その引張りの軸とある角度をなすくびれが生ずることがしばしば観察される。くびれは、試験片の幾何学的もしくは材料の組織上のわずかな不均一のある場所からはじまるのであるが、特性曲線は、それに沿って、わずかな乱れが伝わって行く曲線という性質を持つから、理論的には、くびれは特性曲線と一致する (Hill, 1950, p. 323 および appendix III)。第6章の実験におい

て用いた薄肉円管試験片のうち、ねじりによる異方性を持つ1本の試験片の引張り試験を行っていたとき、第11図の写真に示すようなくびれを観察した。のちに調べたところによ

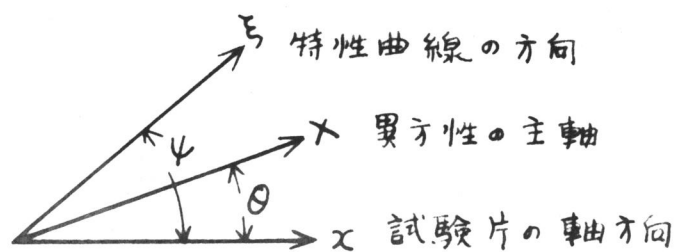


第11図

ると、たまたまこの試験片の内面には、中ぐりを行ったときのむしれがわずかにあったことがわかった。その乱れから、このようなくびれが発生したものと思う。このくびれが、試験片の軸方向となす角度を、第2章の理論を用いて解析する。

まず、平面応力状態における特性曲線を求める。特性曲線は第4章、第2節において用いた方法によっても求められるが、ここでは別の方法で求める (Hill, 1950, appendix III)。

試験片の軸方向 x 方向が、異方性の主軸 X 軸となす角 α および特性曲線の方向 ξ 方向となす角を



第12図

それそれの α および ψ とする (第12図). ξ 方向の塑性伸びひずみ増分は, α 方向増分の変換の式を用いると

$$d\varepsilon_{\xi}^P = d\varepsilon_x^P \cos^2 \psi + 2d\varepsilon_{xy}^P \sin \psi \cos \psi + d\varepsilon_y^P \sin^2 \psi \quad (50)$$

となる. 引張りねじり組合せ応力試験による平面応力状態に対する塑性ひずみ増分は, (13)式において $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \\ d\varepsilon_y^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ d\varepsilon_z^P &= d\lambda \left[-\left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x + (F-G)\sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ &\quad \left. - (F_b-G_b) \right] \\ d\varepsilon_{xy}^P &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \right] \end{aligned} \right\} (51)$$

となる. さて, (50) および (51) の5つの式から

$$\left| \begin{array}{cccc|c} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & 0 & 2 \sin \psi \cos \psi & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ & & & & \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ & & & & \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ & & & & \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ & & & & \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x + (F-G)\sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ & & & & \left. + (F_b-G_b) \right] \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} \right. \\ & & & & \left. - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \right. \\ & & & & \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \right] \end{array} \right| = 0 \quad (52)$$

でなければならず、 $d\varepsilon_x^p$, $d\varepsilon_y^p$, $d\varepsilon_z^p$, $d\gamma_{xy}^p$ および $d\lambda$ が
唯一的に決定される。したがって (52) 式が特
性曲線の傾斜 ψ を与える。これを計算すると

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_x - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \tan^2 \psi \\ & + 2 \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \right] \tan \psi \\ & + \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] = 0 \quad (52') \end{aligned}$$

となる。(52') 式に $d\lambda \cdot \cos^2 \psi$ をかけて、(51) 式
を用いると、(50) 式の右辺はゼロになること
がわかる。したがって、 $d\varepsilon_z^p = 0$ 、すなわちこ
の場合にも特性曲線は伸びゼロの方向である
ことがわかる。試験片の軸方向に引張る場合
には、(52') 式で $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \tan^2 \psi + 2 \left[-\left\{ \frac{1}{4}(F-G) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \cdot \sigma - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \right] \tan \psi \\ & + \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

となる。ねじりによって塑性変形を受けた円
管試験片の異方性の主軸は試験片の軸方向と
 45° のかたむきをなすとすると、上式で $\theta = 45^\circ$
とおくと

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{4}(F+G-2N)\sigma + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] \tan^2 \psi + 2 \left[-\frac{1}{4}(F-G) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \right] \tan \psi + \left[\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] = 0 \quad (53) \end{aligned}$$

となる。この材料に対する異方性パラメータ
の値は

$$F+G+4H = 1 / 241.03 \quad \text{mm}^4 / \text{kg}^2$$

$$\frac{1}{4}(F+G+2N) = 1 / 891.62 \quad \text{mm}^4 / \text{kg}^2$$

$$F_b - G_b - 2H_b = 1 / 204.26 \quad \text{mm}^2 / \text{kg}$$

である (第6章, 第5節を参照) から, これらの値と, 引張り降伏応力の値 $\sigma = 29.86 \text{ kg/mm}^2$ とを (53) 式に代入して $\tan \psi$ についてとくと,

$$\tan \psi = 1.2756 \quad \text{あるいは} \quad -1.5679$$

すなわち

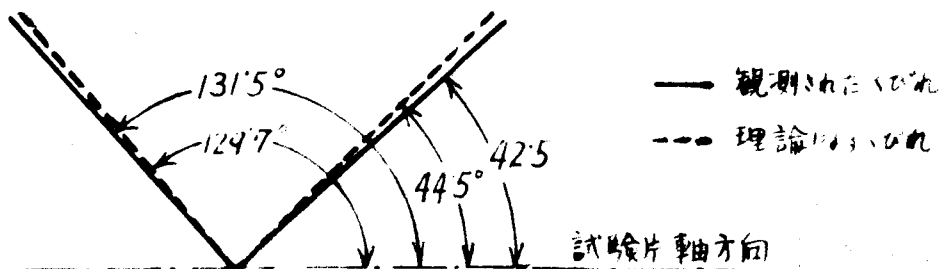
$$\psi = 51.90^\circ \quad \text{あるいは} \quad 122.53^\circ$$

なる値が得られる。これは, 降伏がはじまったときにおける ψ の値である。第11図の写真は試験片が単純引張りにより破断したのちにとつたものである。生じたくびれのかたむき ψ は, 試験片が伸びにつれて変ってくる。破断まじりの平均伸びは30%であるから, 破断時における ψ の値を ψ' とすると

$$\cot \psi' = 1.30 \cot \psi$$

となる。これを計算すると

$$\psi' = 44.45^\circ \quad \text{あるいは} \quad 129.67^\circ$$



第13図

となる。試験片に生じたくびれの角を実測した結果によると, これらの角度は

$$42.5^\circ \quad \text{および} \quad 131.5^\circ$$

であった (第13図)。

第3節 第5章の結語

引張りによる異方性を持つ黄銅を、はじめに与えた引張りの方向とことなる方向に引張った場合の降伏応力についての実験結果を用いて、その場合の、主応力の方向と、主塑性ひずみ増分の方向とにどれほどの違いがあるかを、第2章に提案した降伏条件にもとづく理論を用いて調べた。その結果、はじめに与えた引張りの方向、およびそれと 90° をなす方向に引張った場合には、両者は一致するが、一般にはこの両方向は一致せず、はじめの引張りの方向と 45° をなす方向に引張った場合には、両者の間に、約 12° もの差があることがわかった。

ねじれによる異方性を持つ試験片のうち、たまに、加工の不良による組織上の欠陥を持つていた試験片を引張った際、くびれが発生した。そこで、ねじれによる異方性を持つ円管試験片を引張った場合に生ずるくびれが試験片の軸方向となす角度を、この理論から求め、実際に生じたものと比較した結果、両者はかなりよく合った。

第6章

組合せ応力による実験

最後に、この章において、第2章に提案した降伏条件にもとづく理論が実験結果とよく合うかどうかを調べる。

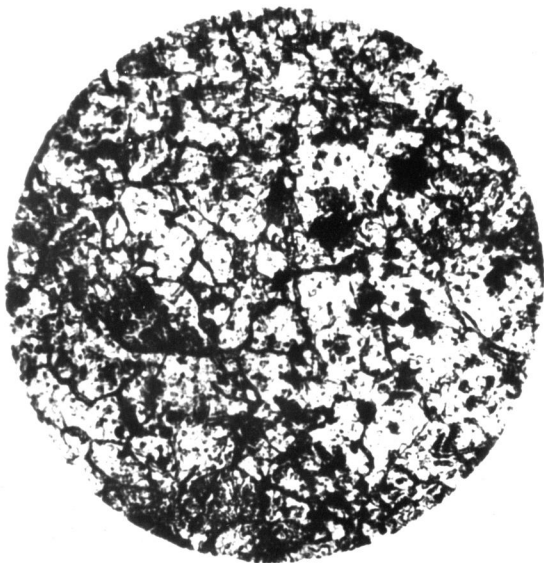
このような基礎理論を検討するのために、最も広く行われていたものは、薄肉円管試験片に組合せ荷重をかけて、一様な平面応力状態を生ぜしめる実験である。等方性理論を検討するために、引張内圧の組合せ負荷 (Lode, 1925; Osgood, 1947; Davis and Parker, 1948; Fraenkel, 1948; Marin and Kotalik, 1950)、および引張りねじりの組合せ負荷 (Taylor and Quinney, 1931; Morrison and Shephard, 1950; Phillips, 1952; Davis, 1955; Feigen, 1955; Phillips and Kaechele, 1956) による実験が数多く行われてきた。これらは、主として軟鋼およびアルミニウム材料についての実験で、それらの材料が、Misesの降伏条件あるいはTrescaの降伏条件のうちのいずれにもよく合うかということ、あるいは全ひずみ理論と増分ひずみ理論のどちらがよく実験結果と合うかということも調べたものである。異方性を持つ材料に対する実験も、引張りねじりの組合せ応力によって、最近から行われた (吉村, 1957; Naghdi, Essenburg and Koff, 1958)。

ここでは、軟鋼の薄肉円管試験片を用いて、あらかじめねじりあるいは引張りにより塑性ひずみを与えることによって試験片に異方性を生ぜしめておいてから、引張りねじりの組

合せ荷重でもって負荷する実験を行った。

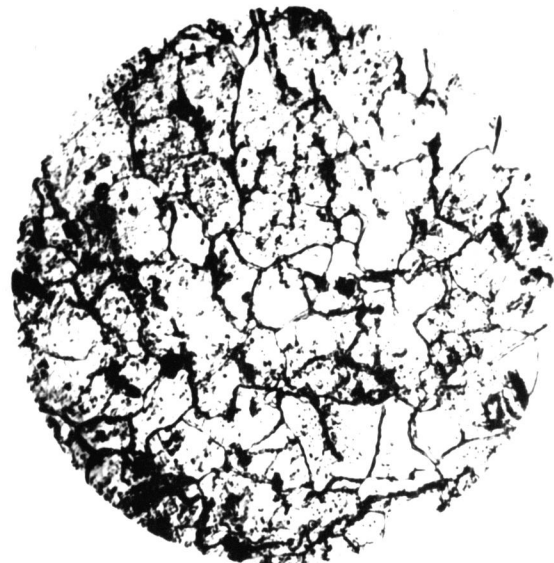
第1節 材料および試験片

円管試験片の素材は、外径 28 mm、内径 15 mm の熱間押し出し鋼管である。これは JIS に STP 35 として規定してある炭素量 0.08 ~ 0.18 の普通軟鋼である。この管材を 240 mm ずつに切断したのち、925°C の温度で、半時間の間、焼きなましを行った。その結果得られた組織の顕微鏡写真を第14図に示す。この写真から、



x100

(軸に垂直な断面)



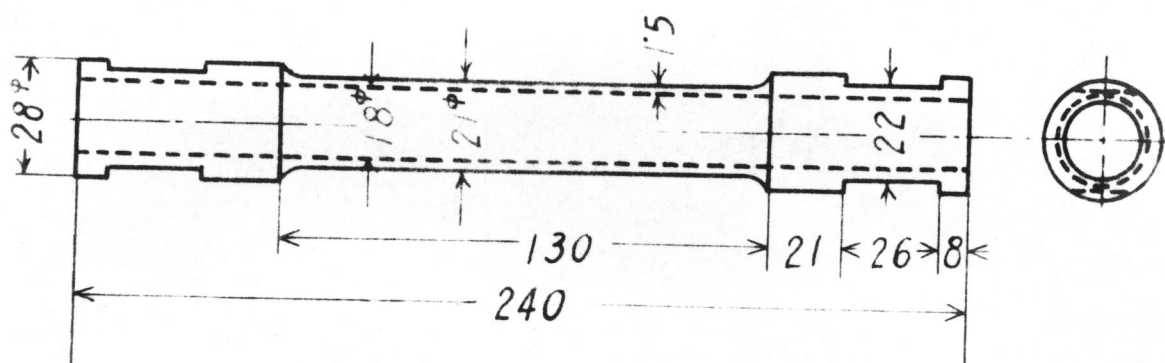
x100

(軸を含む平面で切った断面)

第14図

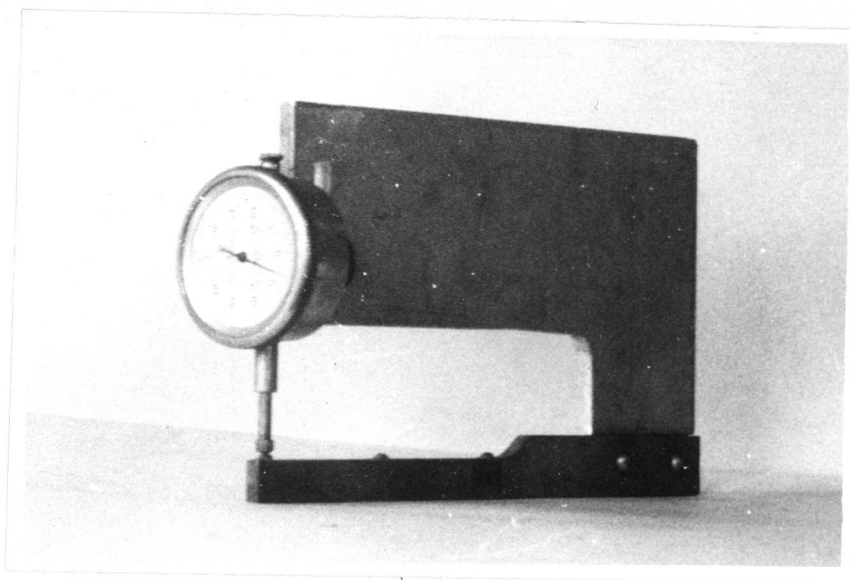
焼きなましされた材料は等方性であると判断してもよいと思う。これに、機械加工を行った。第15図に示す試験片をつくった。機械加工は、まずドリルを通したのち、中ぐりパイロットで内面を仕上げ、内面に、精密に仕上げた心棒をさし込んでセンターをあさえ、外面を仕上げた。このような加工法により、ごきうるかぎり偏肉が生じないように注意した。平

均直径 19.5mm に対して肉厚は 1.5mm であるから、平均半径と肉厚の比は 6.5 となり、充分薄肉であることとみなすことができる。すなわち、試験片内に生ずる応力およびひずみの状態、および材料自身の機械的性質は、厚さにわたって一様であることとみなすことができる。試験片の寸法の測定は、外径は、マイクロメータ



第15図

で2断面を、直交2方向に、すなわち4箇所を、厚みは、第16図に示す厚さゲージの2断面を、 120° 間隔に、すなわち6箇所を測るこ

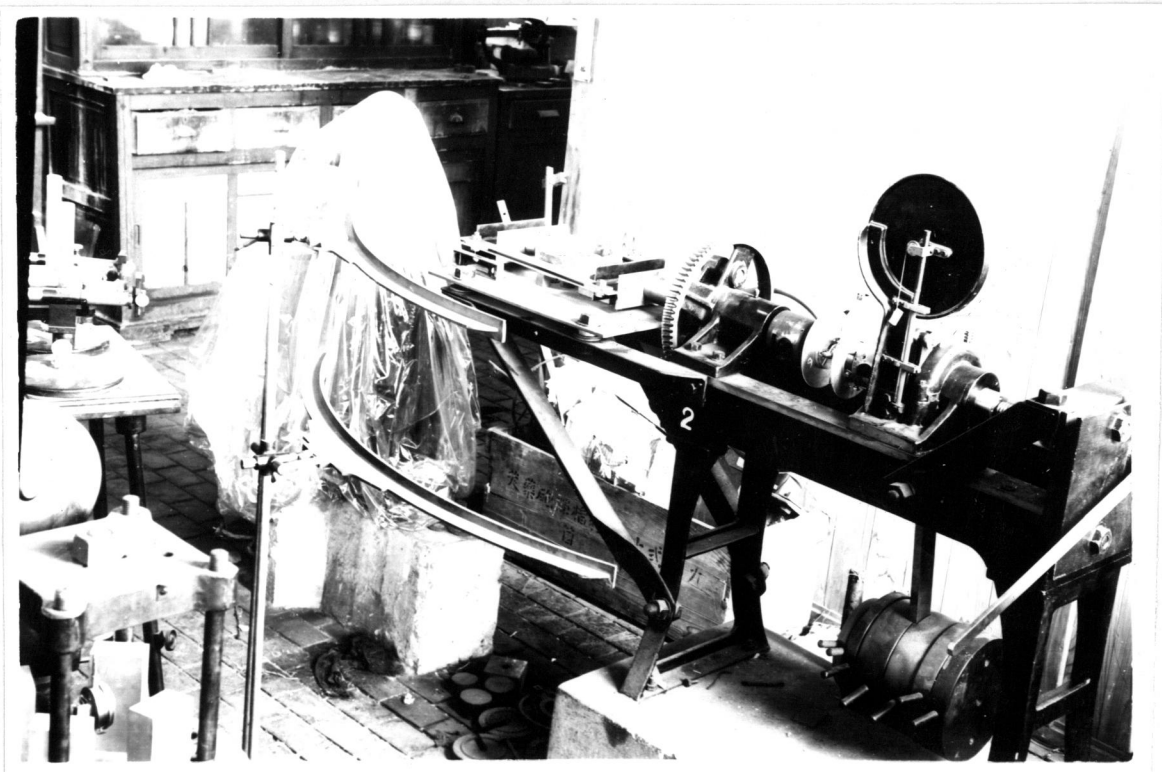


第16図

とによって行った。その結果、軸方向に沿っては、厚さおよび直径の変化はほとんどなく、偏肉量の程度は、偏肉量計直径の比が0.5%以下であつて、充分満足しうるものである。また、表面および内面の仕上げの程度も、静的試験には充分満足しうるものであつた。

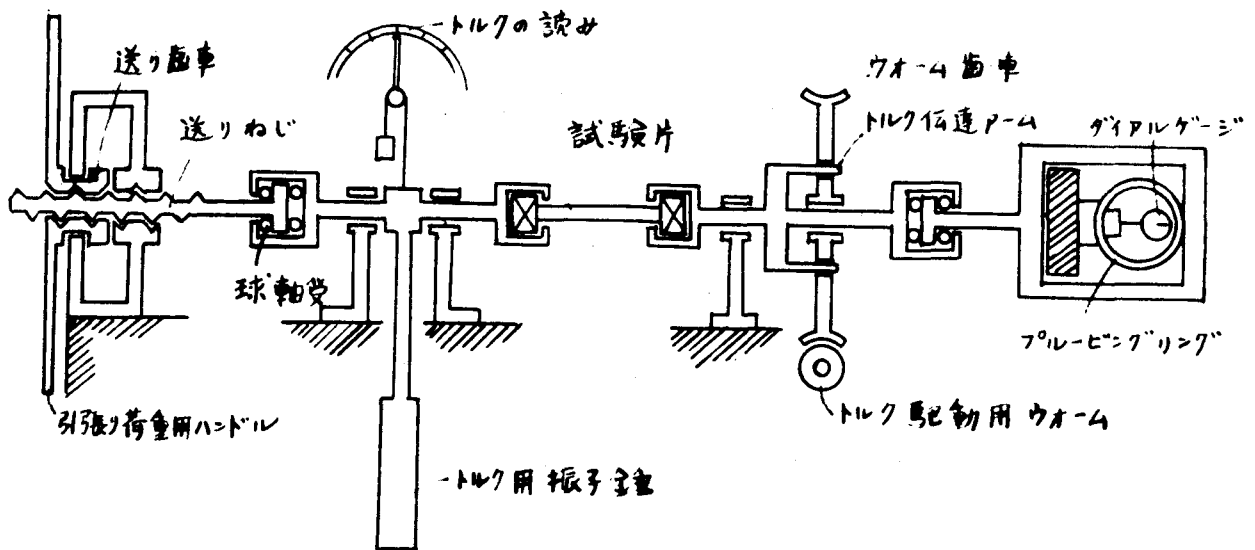
第2節 組合せ応力試験機およびひす か計

引張りねじり組合せ応力試験機は、通常の振り子式ねじり試験機と改造したものであつて、第17図の写眞に示すものである。トルクは、トルクハンドルにより、トルク駆動用ウイローをまわして、その回転をウイロー歯車に伝える。これが、トルク伝達プーモを回転させて、試験片をねじる。このトルクは、トルク用振り子錘を振り上げることによりバランスさ



第17図

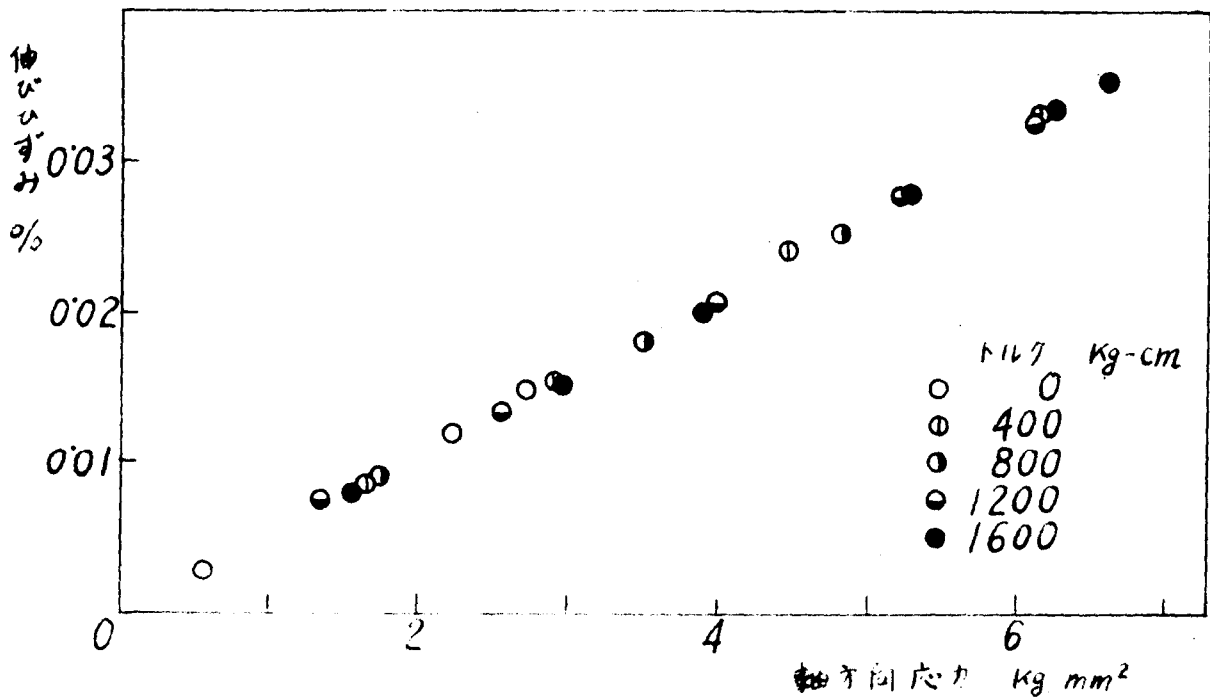
れ、その角変位量が、トルクの読みとして表われる。引張りには、引張り荷重用ハンドルで送り歯車をまわして、送りねじを移動させることにより試験片にかけられる。その力はポルーベングリングに伝えられ、そのダイヤルゲージの読みから、引張り荷重の値がわかる。



第18図

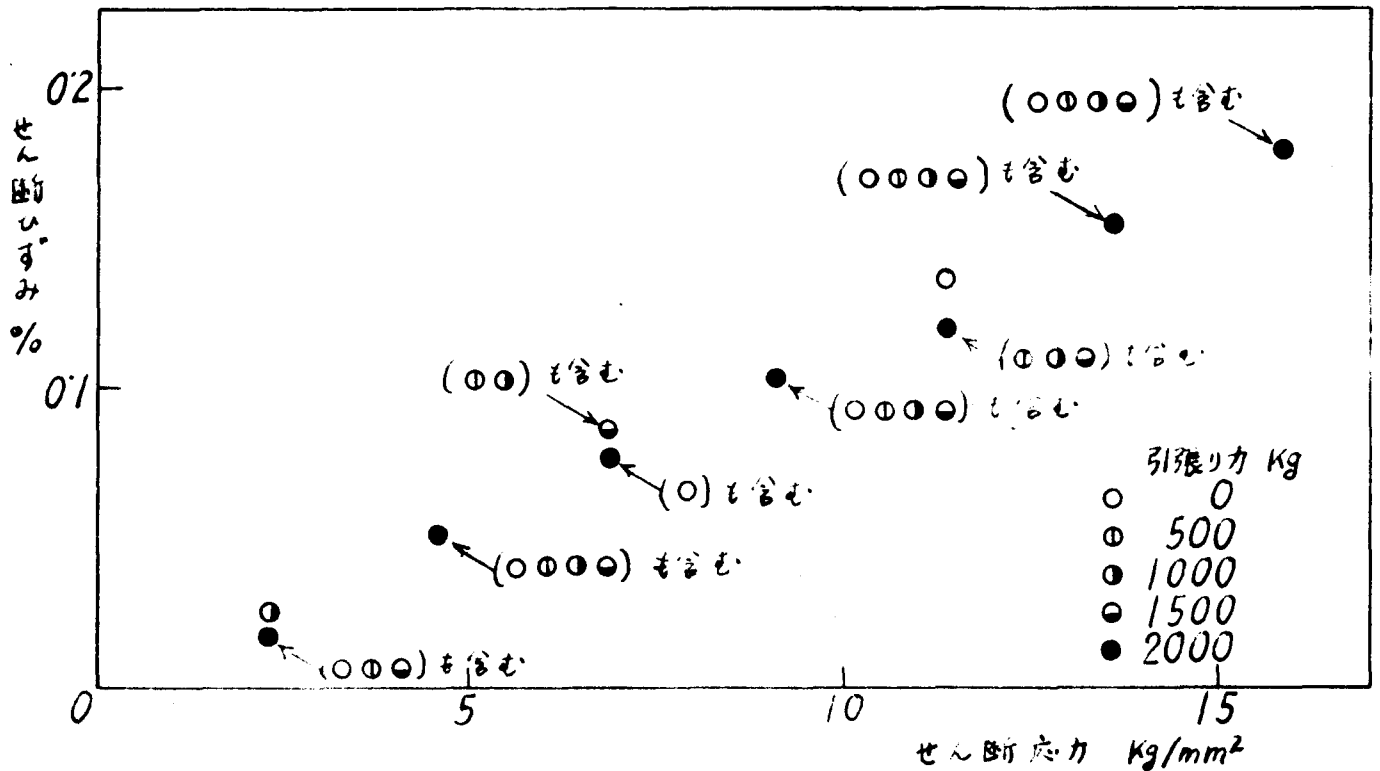
第18図に、これらの機構の概念図を示す。この試験機では、試験片にトルクをかけたまま引張る場合には、トルク伝達アームとウオーム歯車の間がダイヤルゲージの読みに影響を与えることが予想される。また、引張り荷重をかけたまま試験片をねじる場合には、第18図の左側の球軸受のまさつがトルクの読みに影響を与えることが予想される。これらのまさつの影響がどの程度のものであるかを、あらかじめ調べた。トルクをかけたまま引張る場合については、外径21mmの中実試験片で、それぞれ0 kg-cm, 400 kg-cm, 800 kg-cm,

1200 Kg-cm および 1600 Kg-cm の各一定トルクのもとにはおける引張り試験を行い、その場合に生じたひずみを抵抗線ひずみ計で測定した。その結果を第19図に示す。この結果、この実験



第19図

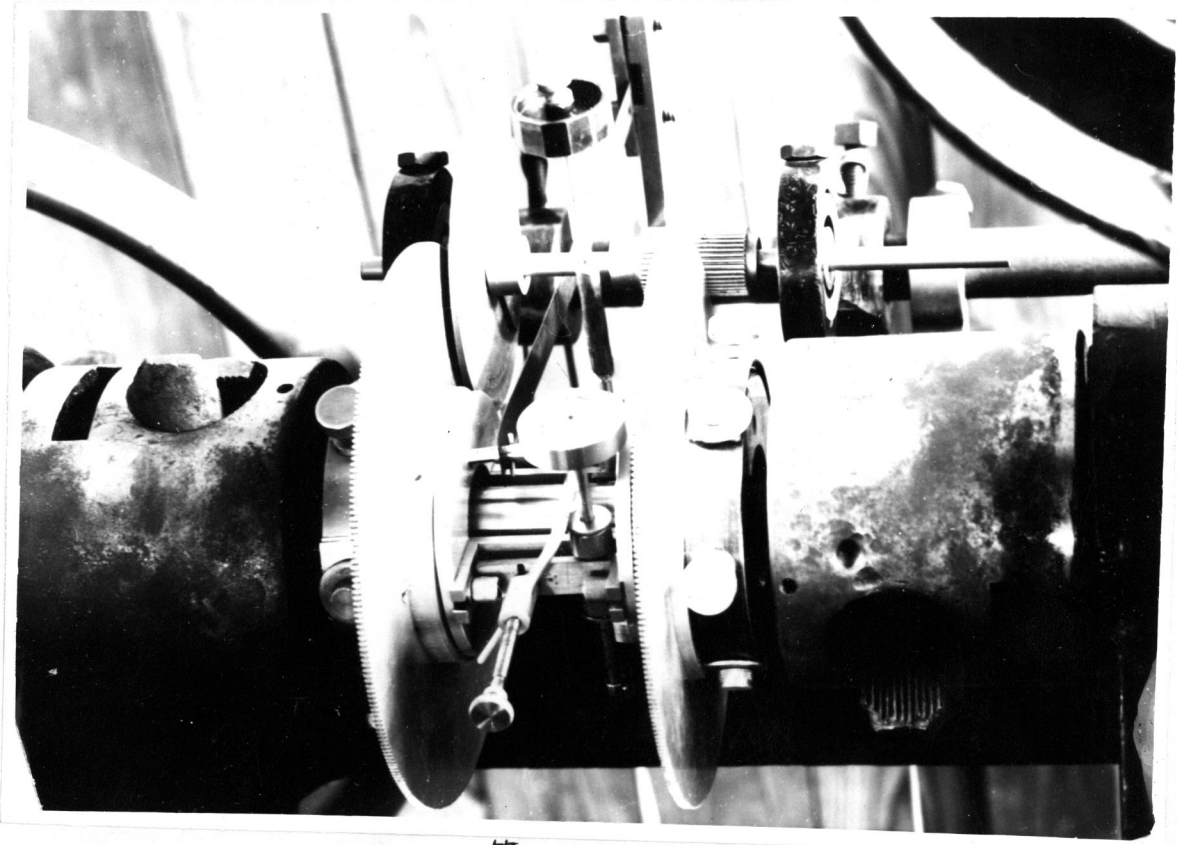
で使用ある大きさの範囲内のトルクのもとでは、このまさつの影響は引張り荷重の読みに関し全く誤差をおよぼさないとみることがわかった。次に、引張り荷重のもとでねじる場合のトルクの読みの誤差を調べるため、あらかじめ引張りで塑性変形を与えて硬化させることにより、降伏点と上げられた円管試験片を用いて、それぞれ、0 kg, 500 kg, 1000 kg, 1500 kg および 2000 kg の一定引張り力のもとにおけるねじり試験を行い、のちに説明する組合せひずみ計を用いてねじれ角を測定した。その結果を第20図に示す。図から、引張り荷重の



第20図

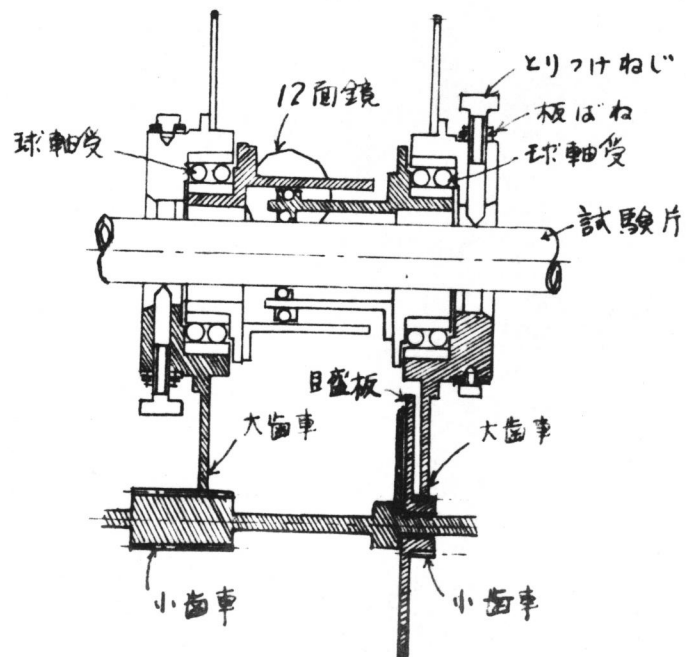
もとでねじる場合のトルクの読み誤差を無視してもよいことがわかった。なお、この試験機の容量は、引張り荷重が5000 kg、トルクが2000 kg-cmである。

新しく設計した組合せひずみ計は引張りねじり組合せ荷重を受ける円管試験片の伸びと相対的な回転角とを同時に読みとるもので、原理としては、12面鏡式ひずみ計とトーションメータとを2つの球軸受を介しておのおのが独立に作用するようにしたもので、これを試験片にとりつけたところを、第21図の写真に示す。12面鏡式ひずみ計は、試験片の長さの変化とともに、12面鏡が回転するのを利用して、光のてこを用いてその変化を拡大して読むものである。トーションメータは、試験片



第21図

のゲージ長さ間の相対的な回転角を，歯車の機構で拡大して読むものである．また，試験片が軸方向に伸びた場合，その直径は減少す



第22図

るが、そのために、ひずみ計のとりつけがゆるむことのないように、とりつけねじを板ばねでおさえ、とりつけねじが直径の減小に追従するようにした。このひずみ計の機構を示したのが第22図で、図の上半の斜線の部分は伸びの測定を行う機構を示し、下半の斜線の部分は相対的なねじれ角をはかる機構を示す。

第3節 実験計画および予備実験

薄肉円管試験片に、トルク T と軸荷重 P とを同時にかけるとき、試験片に生ずる応力およびひずみの状態は次のようになる。試験片の無負荷の状態および考える瞬間における平均半径、肉厚およびゲージ長さをそれぞれ r_0, t_0, l_0 および r, t, l とし、組合せ荷重 P, T により円管が軸方向に $l + dl$ に伸され、ゲージ長さ間で相対的に角 α だけねじられたとする。また、座標系は円管の軸方向、円周方向および半径方向にそれぞれ x, y および z 軸をとる。応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{2\pi r t} = \frac{P(1+e)}{2\pi r_0 t_0} \\ \tau_{xy} &= \frac{T}{2\pi r^2 t} = \frac{T(1+e)^{\frac{3}{2}}}{2\pi r_0^2 t_0} \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

となり、応力の主方向が、円管の軸方向となす角 ϕ は

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} \quad (55)$$

で与えられる。ここで、 $e = (l - l_0) / l_0$ は工学

ひずみである。ひずみの成分は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1+e) \\ \gamma_{xy} &= \frac{r\chi}{2l} = \frac{r_0\chi}{2l_0(1+e)^{\frac{3}{2}}} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_y &= -\frac{1}{2}\varepsilon_x \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} (56)$$

で与えられる。

この実験の目的は異方性の理論を検討することにあるのであるから、まず、方向および大きさのわかった異方性を与えられた試験片を用意せねばならない。このために、焼きなましされて完全に等方性であるとみなされる試験片に、ねじりあるいは引張りで一定量のせん断塑性ひずみあるいは伸び塑性ひずみを与えた。与えるべきせん断塑性ひずみの量としては $\gamma_{xy}^p \sim 0.052$ および 0.104 の2種類をえらび、伸び塑性ひずみの量は $\varepsilon_1^p \sim 0.03$ とした。このような既知の異方性を持つ試験片に種種の組合せ応力をかけて、そのときの降伏応力および塑性ひずみを測定し、第2章の理論から予知される値と比較した。このとき、与える負荷は比例負荷すなわち応力比と主応力方向が一定に保たれるような負荷を用いた。ここで用いた負荷の様式は(55)式で与えられる主応力の方向 ϕ が $0^\circ, 12.6^\circ, 25.4^\circ, 36^\circ, 45^\circ$ およびあらかじめねじりに異方性を与えた試験片については組合せ荷重のうちのトルクをはじめに与えたトルクと逆方向にかいた $-12.6^\circ, -25.4^\circ, -36^\circ, -45^\circ$ の各種類である。

主応力 σ_1, σ_2 は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x + (\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x - (\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

で与えられるが，この式と(55)式とから，主応力比 σ_2/σ_1 と主応力方向 ϕ との間には

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\cos 2\phi - 1}{\cos 2\phi + 1} \quad (58)$$

なる関係があることがわかる。すなわち，引張りねじり組合せ荷重により生ずる応力状態に対しては，主応力比 σ_2/σ_1 と主応力方向 ϕ とは互に独立にはなく，(58)式の関係でむすばれている。したがって，どちらか一つのパラメータでもって応力状態は完全に指定される。

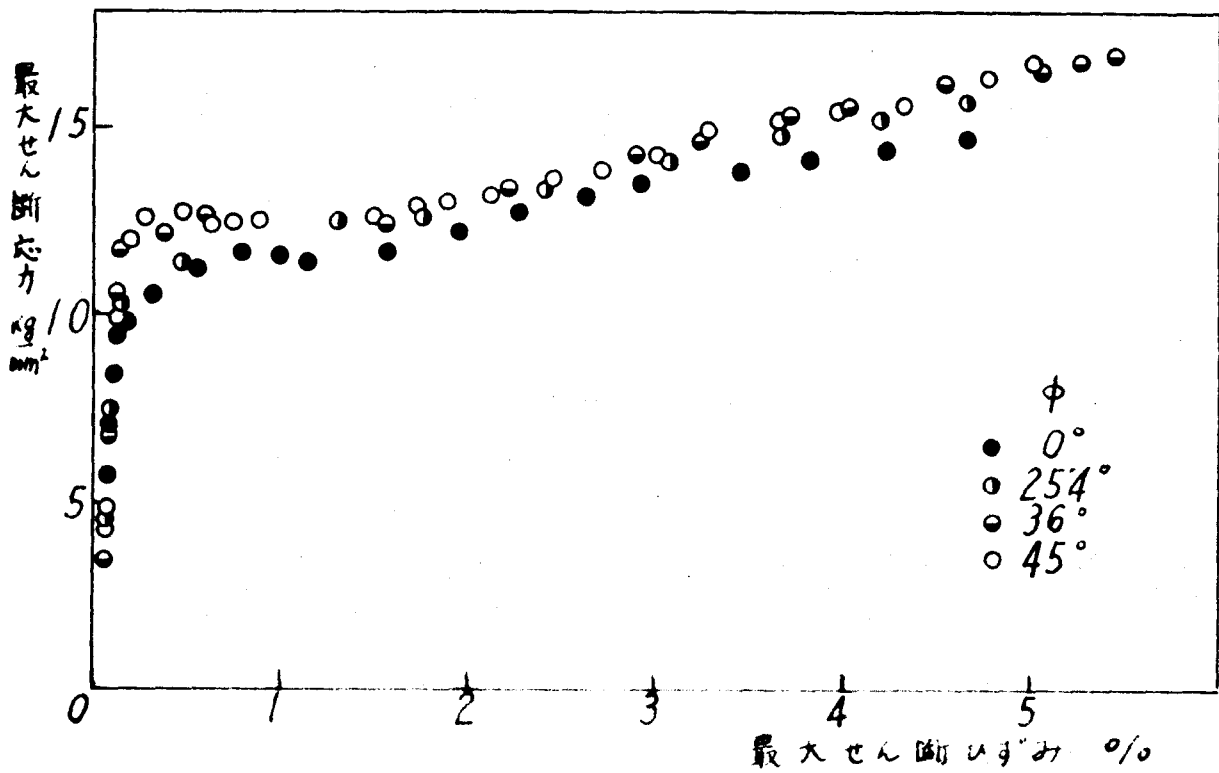
このように種種ことなる応力状態により行われた試験結果もすなわち応力ひずみ関係をどのような方法で統一しまとめるかが問題に存する。そこで，予備実験として，焼きなまし材に $0^\circ, 25.4^\circ, 36^\circ$ および 45° なる4種類の応力状態で比例負荷を行つた試験結果を，最大せん断応力・最大せん断ひずみ関係および相当応力・相当ひずみ関係でまとめた。ただし，引張りねじり組合せ応力の場合には，最大せん断応力 τ_m および最大せん断ひずみ γ_m は

$$\left. \begin{aligned} \tau_m &= \left(\frac{1}{4} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \gamma_m &= \left(\frac{9}{4} \varepsilon_x^2 + \delta_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

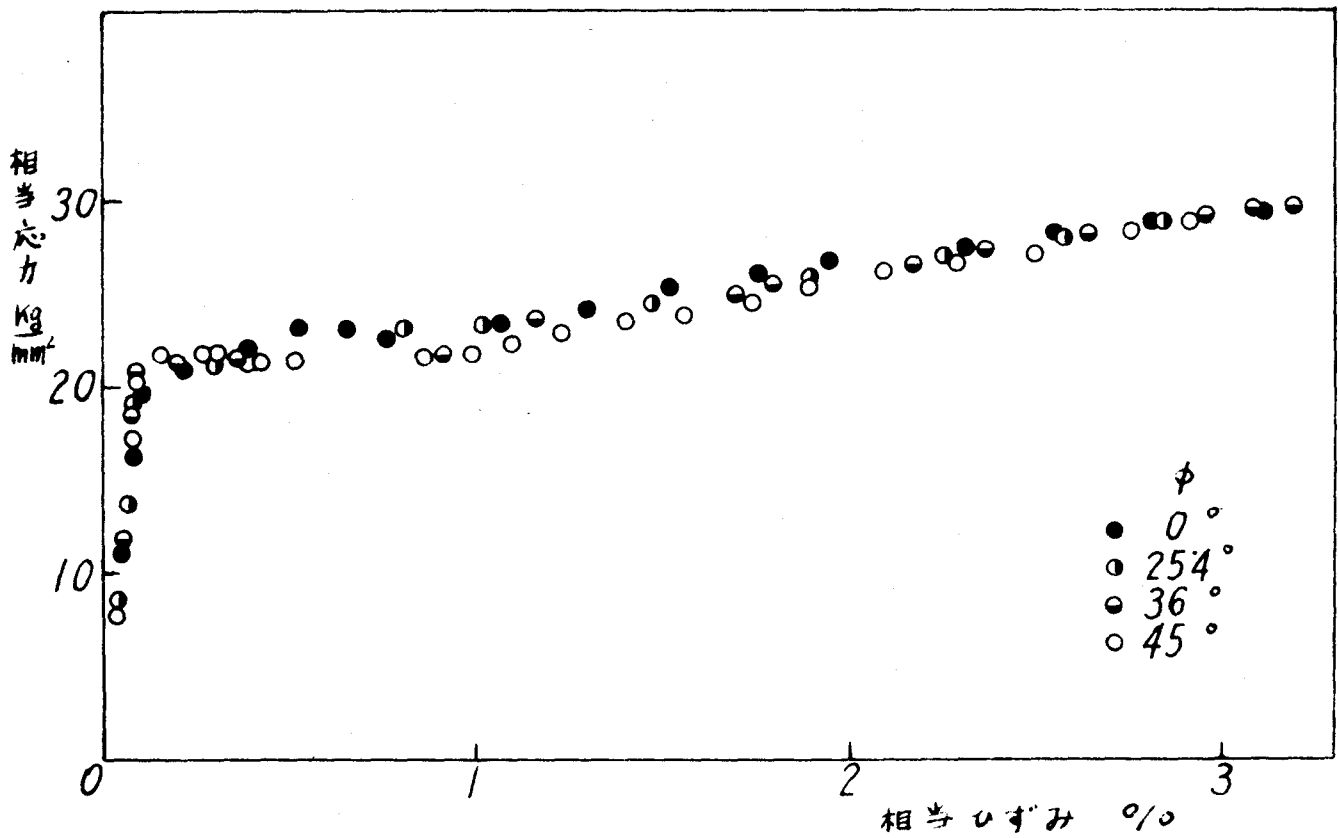
で，相当応力 $\bar{\sigma}$ および相当ひずみ $\bar{\varepsilon}$ は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\varepsilon} &= \left(\varepsilon_x^2 + 3\delta_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

で与えられる。この予備実験の結果を第23回



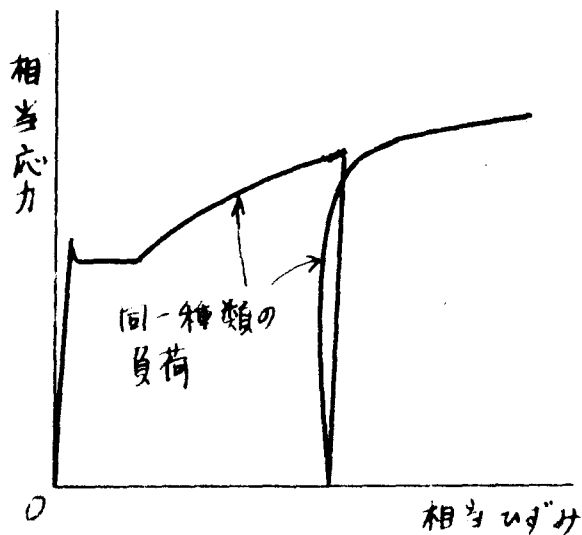
第 23 図



第 24 図

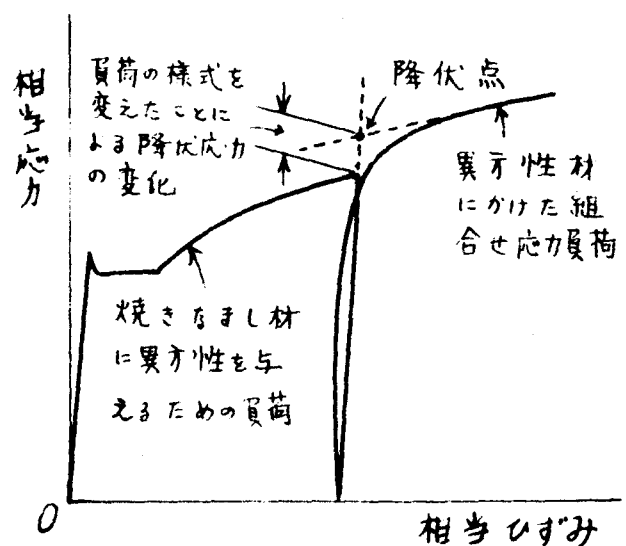
および第24図に示す。これらの図を比較すると、この実験に用いた材料に対しては、相当応力・相当ひずみの関係でデータを整理すればよいことがわかった。

異方性を持つ材料に組合せ応力で負荷した場合の降伏点の決め方としては、筆者は次のような方法をとった。はじめにねじりあるいは引張りで塑性変形を与えた試験片から荷重をとりのぞき、ふたたび同じねじりあるいは引張りの荷重で負荷すれば、その場合の応力・ひずみ曲線ははじめの負荷の際の除荷直前の応力のところを急におれまがり、その後ははじめの応力・ひずみ曲線の延長をたどる(第25図)。そこでここでは、相当応力・相当ひずみ



第25図

で表わした場合の応力・ひずみ曲線がはじめの応力・ひずみ曲線の除荷直前における硬化の状態と同じ程度に硬化したと思われ部分から接線を引いて、その接線が弾性域における応力・ひずみ関係を表わす直線の延長と交わる点



第26図

を降伏点とした (第26図)。したがって、負荷の様式を変えたことによる降伏応力の変化はこのようにしてきめた降伏点の応力値とはじめの負荷の際の最終の点の応力値との差になる。

第4節 引張りねじり組合せ応力試験の理論

薄肉円管試験片に引張りねじり組合せ荷重をかけると、試験片には平面応力状態が生ずる。この場合の降伏条件および応力・塑性ひずみ増分の関係は、第2章の(7)式および(13)式で $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{zz} = \tau_{zy} = 0$ とおくと得られる。すなわち、降伏条件は

$$2f(\sigma_{ij}) = \left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x^2 + \left\{ (F+G+4H) - (F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy}^2 - \left\{ (F-G) - (F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x \tau_{xy} + \left\{ (F_b-G_b) - (F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \sigma_x - 2(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \tau_{xy} = 1 \quad (61)$$

となり、応力・塑性ひずみ増分の関係は

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G+2N) + \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{4}(F+G-2N) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \sigma_x - \left\{ \frac{1}{2}(F-G) + \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \tau_{xy} + \left\{ \frac{1}{2}(F_b-G_b) + \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\cos 2\theta \right\} \right] \\ d\varepsilon_z^p &= -d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G) - \frac{1}{2}(F-G)\cos 2\theta \right\} \sigma_x - (F-G)\sin 2\theta \tau_{xy} + (F_b-G_b) \right] \\ d\gamma_{xy}^p &= d\lambda \left[\left\{ \frac{1}{2}(F+G+4H) - \frac{1}{2}(F+G+4H-2N)\cos^2 2\theta \right\} \tau_{xy} - \left\{ \frac{1}{4}(F-G) - \frac{1}{4}(F+G+4H-2N)\cos 2\theta \right\} \sin 2\theta \sigma_x - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sin 2\theta \right] \end{aligned} \quad (62)$$

となる。ここで、座標系は円管の軸方向、円周方向および半径方向にそれぞれ x, y および z 軸をとり、 x 軸が異方性の主軸である X 軸となす角を θ としている。

さて異方性の主軸をどのように定めるかが問題になるわけであるが、ここでは焼きなまし材に異方性を与えるための加工として応力比および主応力方向が一定に保たれる負荷を用いたのであるから、その主応力の方向を異方性の主軸と考えることにする。

したがって、あらかじめのねじりでもって異方性を与えられた材料の引張りねじり組合せ応力のもとにおける降伏は、(61)式において、 $\theta = 45^\circ$ とおいた式となる。

$$\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x^2 + (F+G+4H)\tau_{xy}^2 - (F-G)\sigma_x\tau_{xy} + (F_b-G_b)\sigma_x - 2(F_b+G_b-2H_b)\tau_{xy} = 1 \quad (63)$$

によって規定され、応力・塑性ひずみ増分関係は、(62)式より

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x^p &= d\lambda \left[\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x - \frac{1}{2}(F-G)\tau_{xy} + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] \\ d\epsilon_y^p &= d\lambda \left[\frac{1}{4}(F+G-2N)\sigma_x - \frac{1}{2}(F-G)\tau_{xy} + \frac{1}{2}(F_b-G_b) \right] \\ d\epsilon_z^p &= -d\lambda \left[\frac{1}{2}(F+G)\sigma_x - (F-G)\tau_{xy} + (F_b-G_b) \right] \\ d\gamma_{xy}^p &= d\lambda \left[\frac{1}{2}(F+G+4H)\tau_{xy} - \frac{1}{4}(F-G)\sigma_x - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b) \right] \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

となる。このような材料の異方性パラメータをもとめるために単純な様式の試験を行った結果、次のような降伏応力が得られたとする。

引張りに対する降伏は垂直応力で $S_0 \text{ kg/mm}^2$

圧縮に対する降伏は垂直応力で $-S_0 \text{ kg/mm}^2$

ねじりに対する降伏はせん断応力で $t_0 \text{ kg/mm}^2$

逆ねじりに対する降伏はせん断応力で $-t_0 \text{ kg/mm}^2$

ただしここで、この材料は単純なねじりのみ

による加工を受けただけであるから、軸方向についての性質は、異方性を与える前と同じく、応力の符号の逆転に対して対称であると仮定した。そうすると、これらの降伏応力を(63)式に代入することにより、異方性のパラメータは

$$\left. \begin{aligned} F+G+4H &= \frac{1}{t_0 t'_0} \\ F+G+2N &= \frac{1}{4S_0^2} \\ F-G &= 0 \\ F_b+G_b-2H_b &= \frac{t_0-t'_0}{2t_0 t'_0} \\ F_b-G_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

となる。これらの値を(63)式に用いると、相じりによる異方性を持つ材料の降伏条件が与えられる。また、(65)式の値を用いることによつて、塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比が、(64)式から

$$\frac{d\gamma_{xy}^P}{d\varepsilon_x^P} = \frac{\frac{1}{2}(F+G+4H)\tau_{xy} - \frac{1}{2}(F_b+G_b-2H_b)\sigma_x}{\frac{1}{4}(F+G+2N)\sigma_x} \quad (66)$$

で与えられる。

同様にして、あらかじめ引張りでもって異方性を与えられた材料に対しては、(63)および(64)式において、 $\theta = 0^\circ$ とおけばよい。降伏条件は

$$(G+H)\sigma_x^2 + 2N\tau_{xy}^2 - 2(G_b-H_b)\sigma_x = 1 \quad (67)$$

となり、応力・塑性ひずみ増分関係は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^P &= d\lambda [(G+H)\sigma_x - (G_b - H_b)] \\ d\varepsilon_y^P &= d\lambda [-H\sigma_x - (H_b - F_b)] \\ d\varepsilon_z^P &= d\lambda [-G\sigma_x - (F_b - G_b)] \\ d\gamma_{xy}^P &= d\lambda N \tau_{xy} \end{aligned} \right\} (68)$$

この材料の降伏応力が次のような値であったとする。

引張りに対する降伏は垂直応力で $S_0 \text{ kg/mm}^2$

圧縮に対する降伏は垂直応力で $-S'_0 \text{ kg/mm}^2$

ねじりに対する降伏はせん断応力で $t_0 \text{ kg/mm}^2$

そうすると、異方性パラメータはこの場合

$$\left. \begin{aligned} G+H &= \frac{1}{S_0 S'_0} \\ N &= \frac{1}{2 t_0^2} \\ G_b - H_b &= \frac{S_0 - S'_0}{2 S_0 S'_0} \end{aligned} \right\} (69)$$

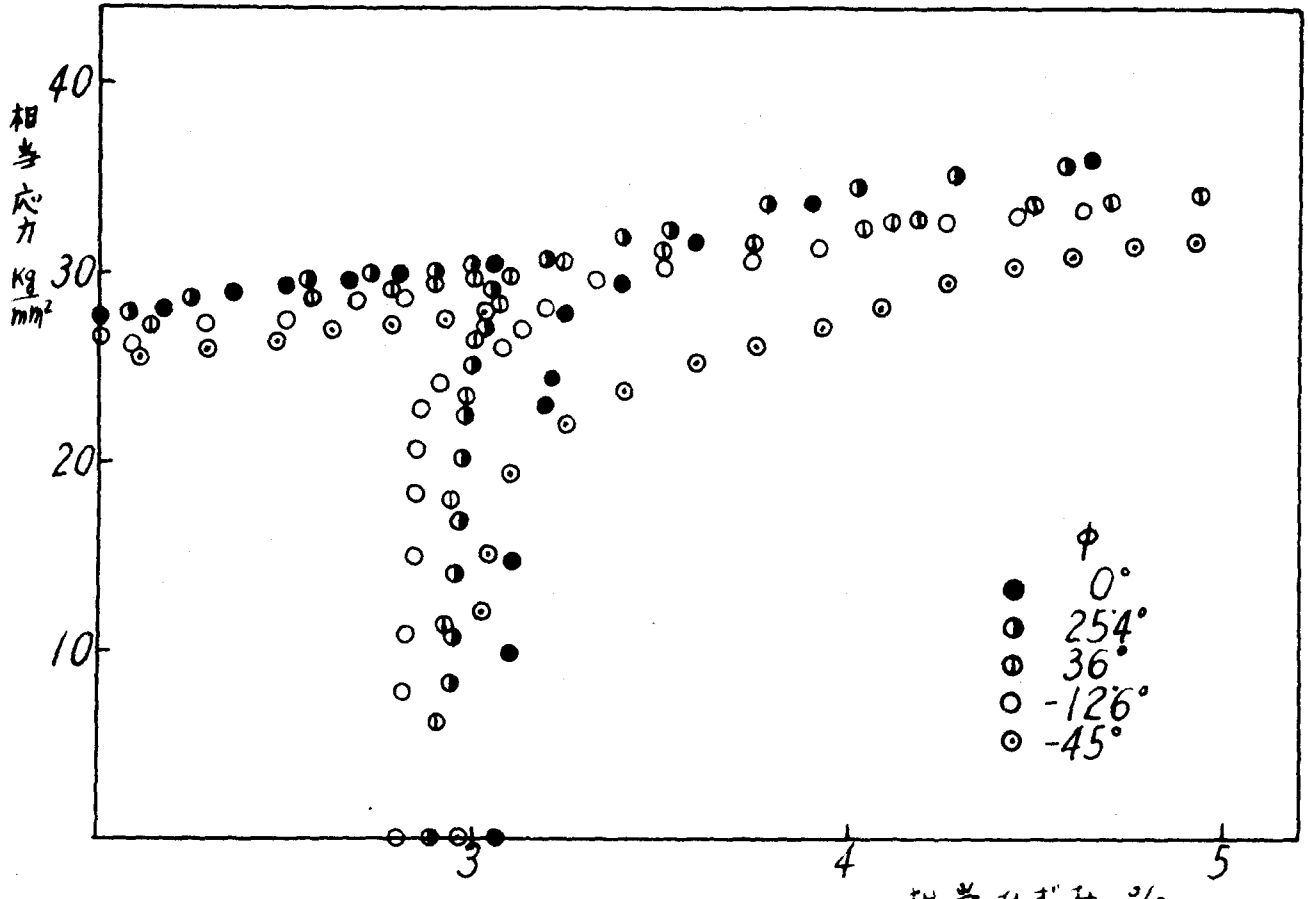
となる。また、塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比は

$$\frac{d\gamma_{xy}^P}{d\varepsilon_x^P} = \frac{N \tau_{xy}}{(G+H)\sigma_x - (G_b - H_b)} \quad (70)$$

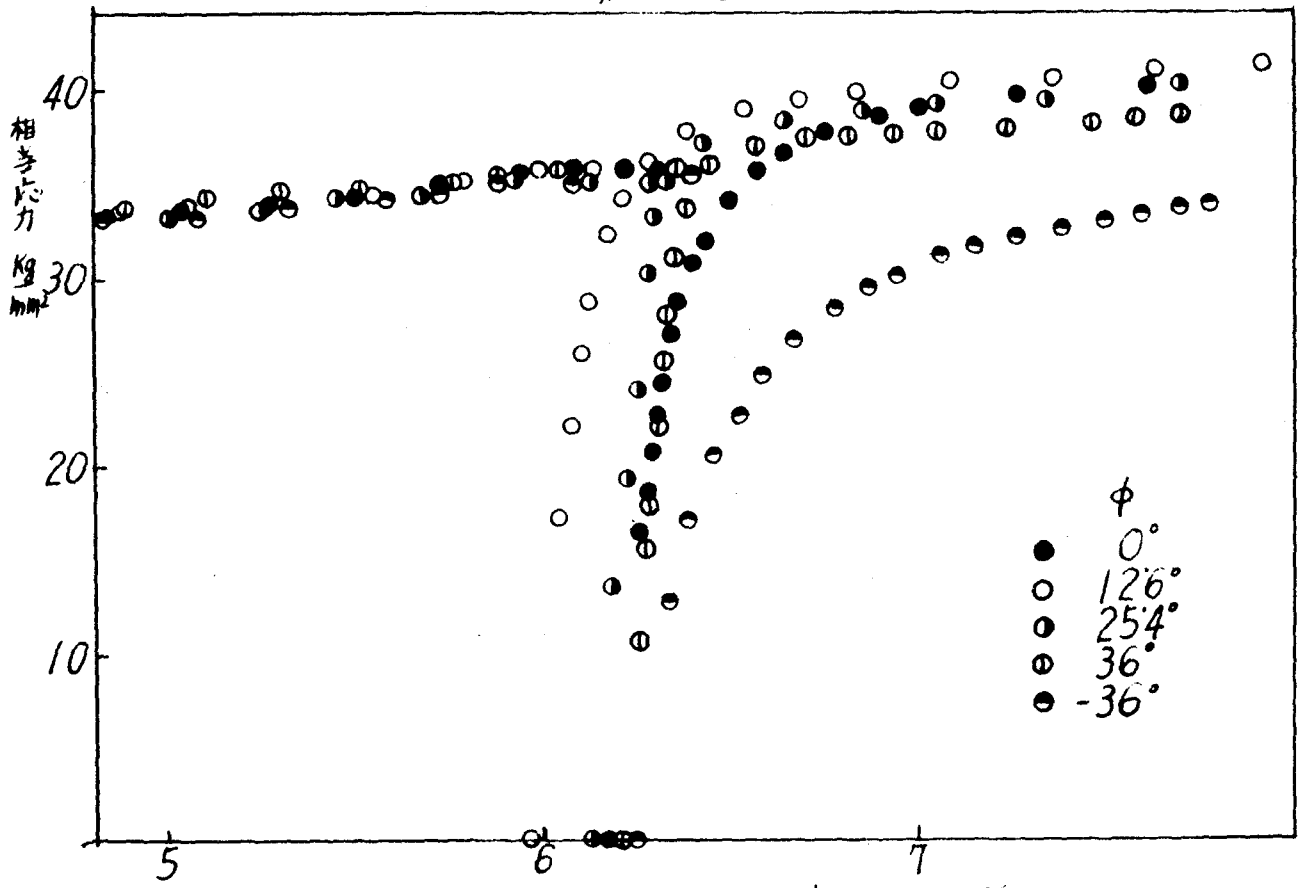
となる。

第5節 ねじりによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験

ねじりによる異方性を持つ材料について行った組合せ応力試験の結果を相当応力・相当ひずみの関係（よとめたもの）と第27図および第28図に示す。第27図は $\gamma_{xy}^P \sim 0.052$ なる塑性せん断ひずみを生ずるねじりによる異方性を持つ材料についてのものがあり、第28図は $\gamma_{xy}^P \sim 0.104$ なる塑性せん断ひずみを生ずるねじり



第27図



第28図

による異方性を持つ材料についてのそのものである。図には焼きなまし材にねじりで異方性を与える加工の応力・ひずみ線図をもあわせて書き入れてある。異方性を持つ材料に組合せ応力をかけたときに生じたひずみには、あらかじめ行ったねじりの加工で残留した塑性ひずみを加えてある。ほぼ等しい塑性ひずみを与えても、その最終応力は試験片により少しずつことなる。そこで $\delta_{xy}^p \sim 0.052$ なる塑性せん断ひずみが残るようにねじり加工を行った試験片に加えられた最終応力を $\tau_{xy} = 16.75 \text{ kg/mm}^2$ であるのを相当応力にして 29.02 kg/mm^2 に統一して、各試験片にこの最終応力の値および組合せ負荷による降伏応力の値とす。この割合で修正した。その結果、組合せ負荷による降伏応力として次のような値が得られた。ただし、 ϕ は試験片に加えた組合せ応力状態の主応力の方向が試験片の軸方向とある角度を度で表わしたものであり、降伏応力は相当応力で表わしたものでその単位は kg/mm^2 である。

ϕ	降伏応力
0	29.86
25.4	29.75
36	29.40
-12.6	29.02
-45	24.95

また、 $\delta_{xy}^p \sim 0.104$ なる塑性せん断ひずみを与えねじり加工に対しは、その最終応力を $\tau_{xy} = 21.16 \text{ kg/mm}^2$ であるのを相当応力にして 36.65 kg/mm^2 に統一して、応力値を修正した。

その結果、組合せ負荷による降伏応力として次のような値が得られた。

φ	降伏応力
0	38.30
12.6	39.22
25.4	38.70
36	37.16
-36	32.58

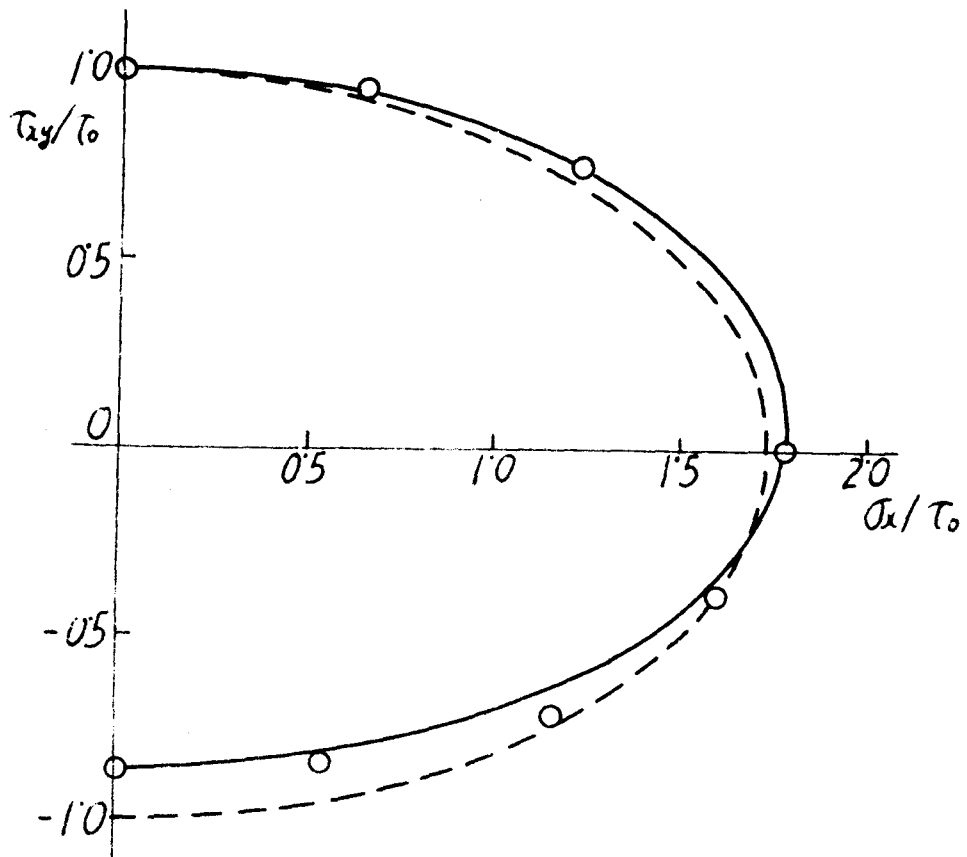
次に、(63)式で与えられる降伏条件は、 $\sigma_{xy}^p \sim 0.052$ を与えるねじり加工を受けた材料および $\sigma_{xy}^p \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けた材料に対して、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\sigma_x)^2}{(29.94)^2} + \frac{(\tau_{xy} - 1.18)^2}{(15.75)^2} &= 1 \\ \text{および} \\ \frac{(\sigma_x)^2}{(38.38)^2} + \frac{(\tau_{xy} - 1.31)^2}{(19.85)^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

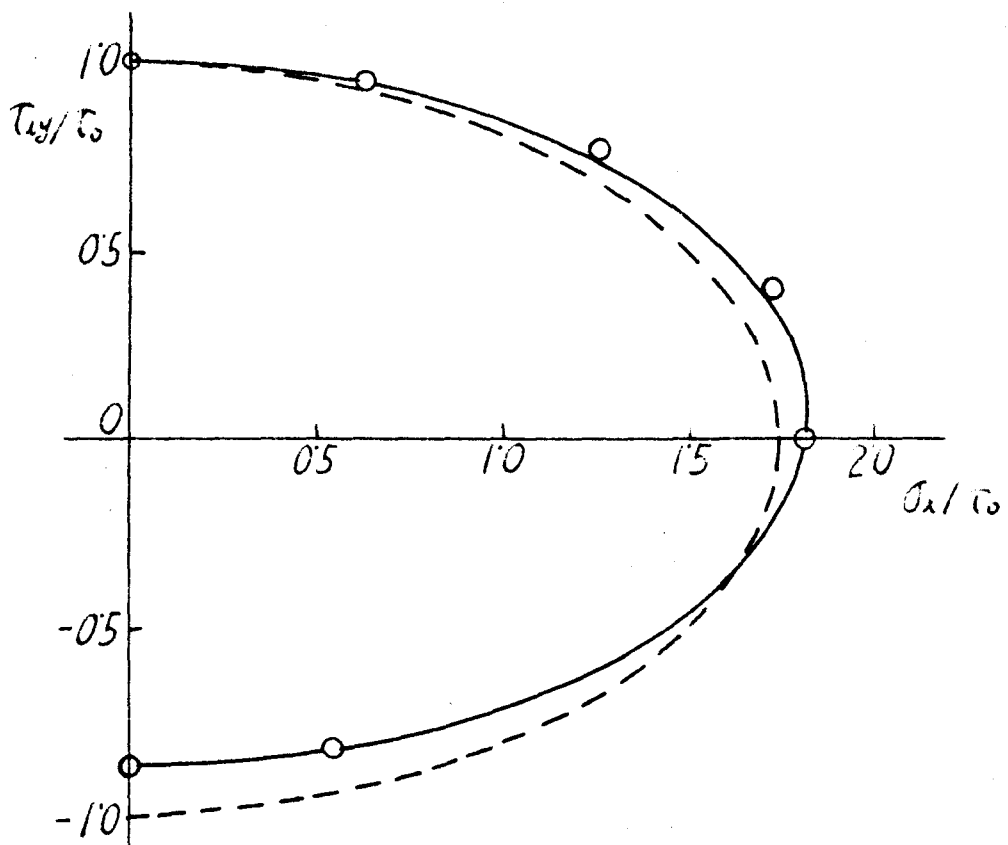
となる。ただし、応力の単位は Kg/mm^2 である。応力を無次元化するために、応力値を、異质性を与えるためには行ったねじり加工の最終のせん断応力 τ_0 でわっておく。そこで、 $\sigma_x/\tau_0 = s$ 、 $\tau_{xy}/\tau_0 = t$ とおくと (71) 式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{(s)^2}{(1.79)^2} + \frac{(t - 0.07)^2}{(0.93)^2} &= 1 \\ \text{および} \\ \frac{(s)^2}{(1.81)^2} + \frac{(t - 0.06)^2}{(0.94)^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

となる。これらを図に表わしたのがそれぞれ第29図および第30図である。图中、○印は実験値、点線は Mises の降伏条件



第 24 图



第 30 图

$$\frac{1}{3} s^2 + t^2 = 1$$

であり、実線は (72) 式である。

また、(66) 式で与えられる塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比は、 $\delta_{xy}^P \sim 0.052$ を与えるねじり加工を受けた材料および $\delta_{xy}^P \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けた材料に対して、それぞれ

$$\frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\varepsilon_x^P} = \frac{3.649 \tau_{xy} - 4.365}{\sigma_x}$$

および

$$\frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\varepsilon_x^P} = \frac{3.734 \tau_{xy} - 4.848}{\sigma_x}$$

(73)

となる。第31図、a~c および第32図、a~dに、それぞれ $\delta_{xy}^P \sim 0.052$ および $\delta_{xy}^P \sim 0.104$ を与えるねじり加工を受けた材料に種種の組合せ応力とかけた場合についての塑性せん断ひずみ δ_{xy}^P と塑性伸びひずみ ε_x^P との関係を示す。材料が等方性の場合には、(66) 式において

$$F = G = H = \frac{1}{3} N,$$

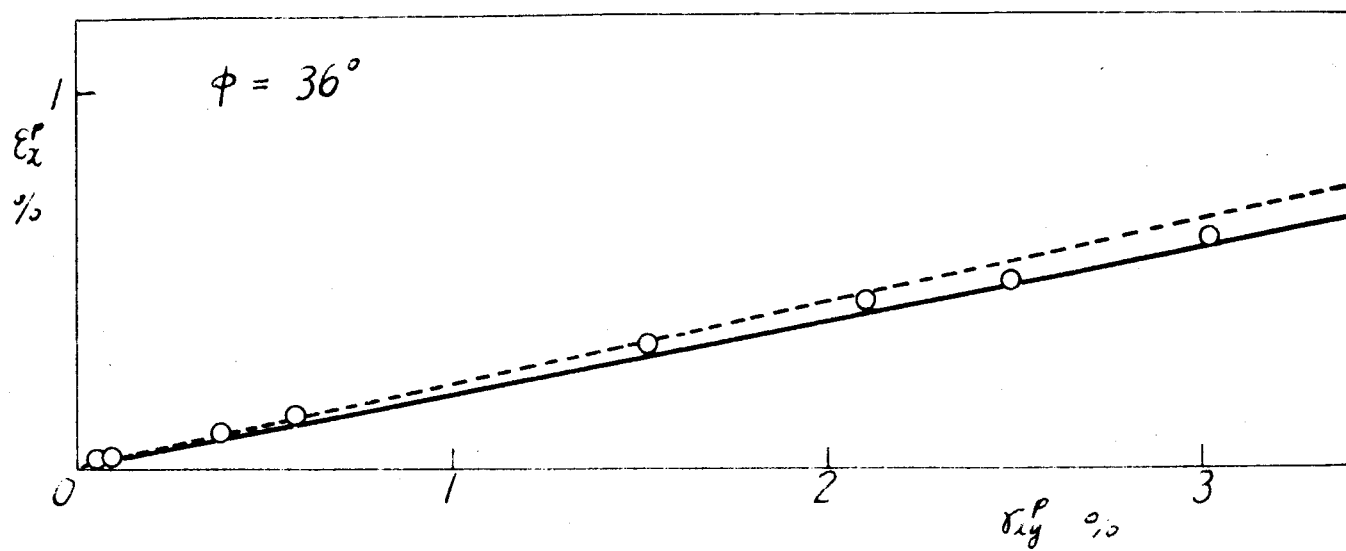
$$F_b = G_b = 0, \quad H_b = F_b = 0$$

とかくと

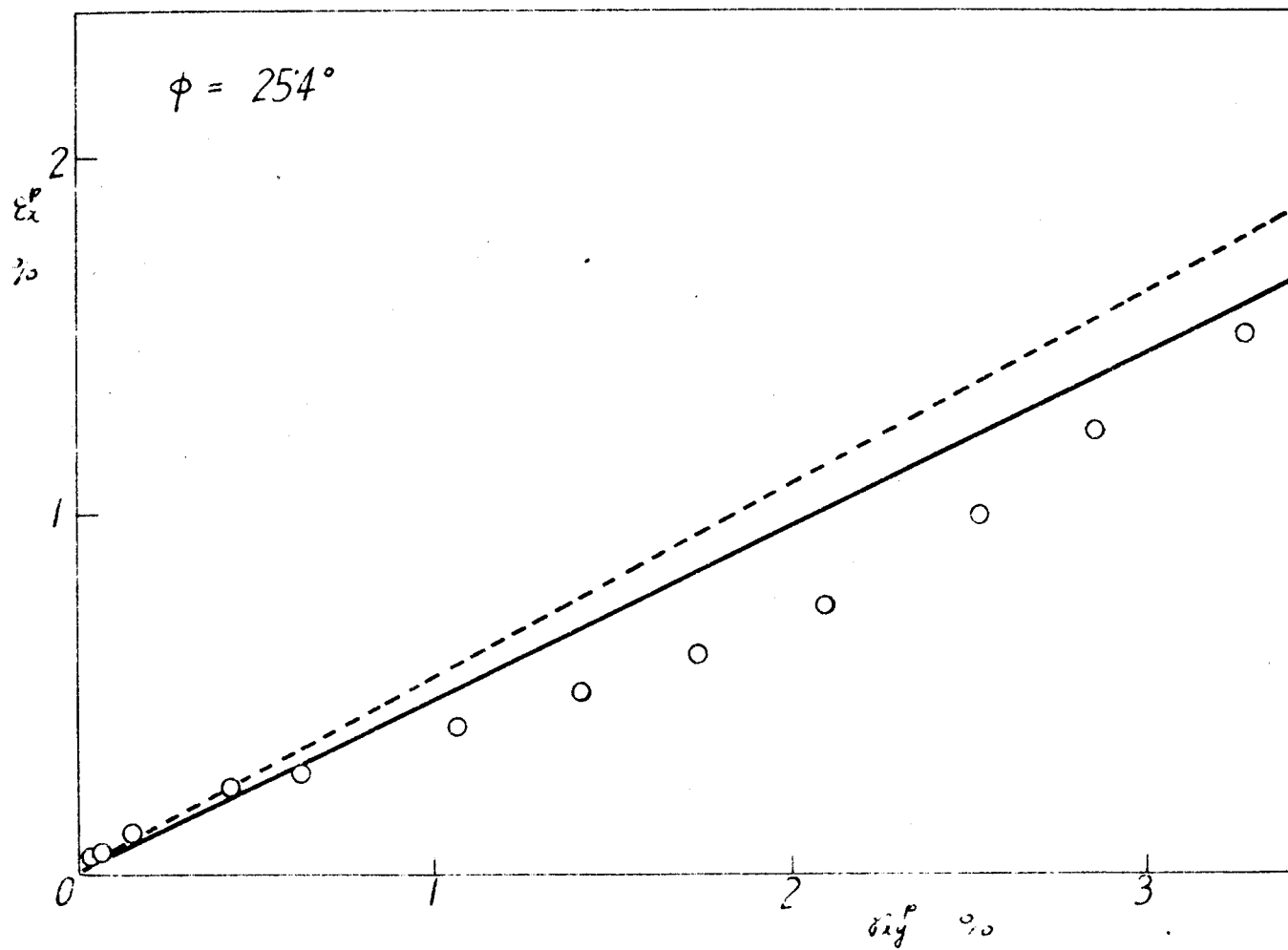
$$\frac{2 d\delta_{xy}^P}{d\varepsilon_x^P} = \frac{3 \tau_{xy}}{\sigma_x}$$

(74)

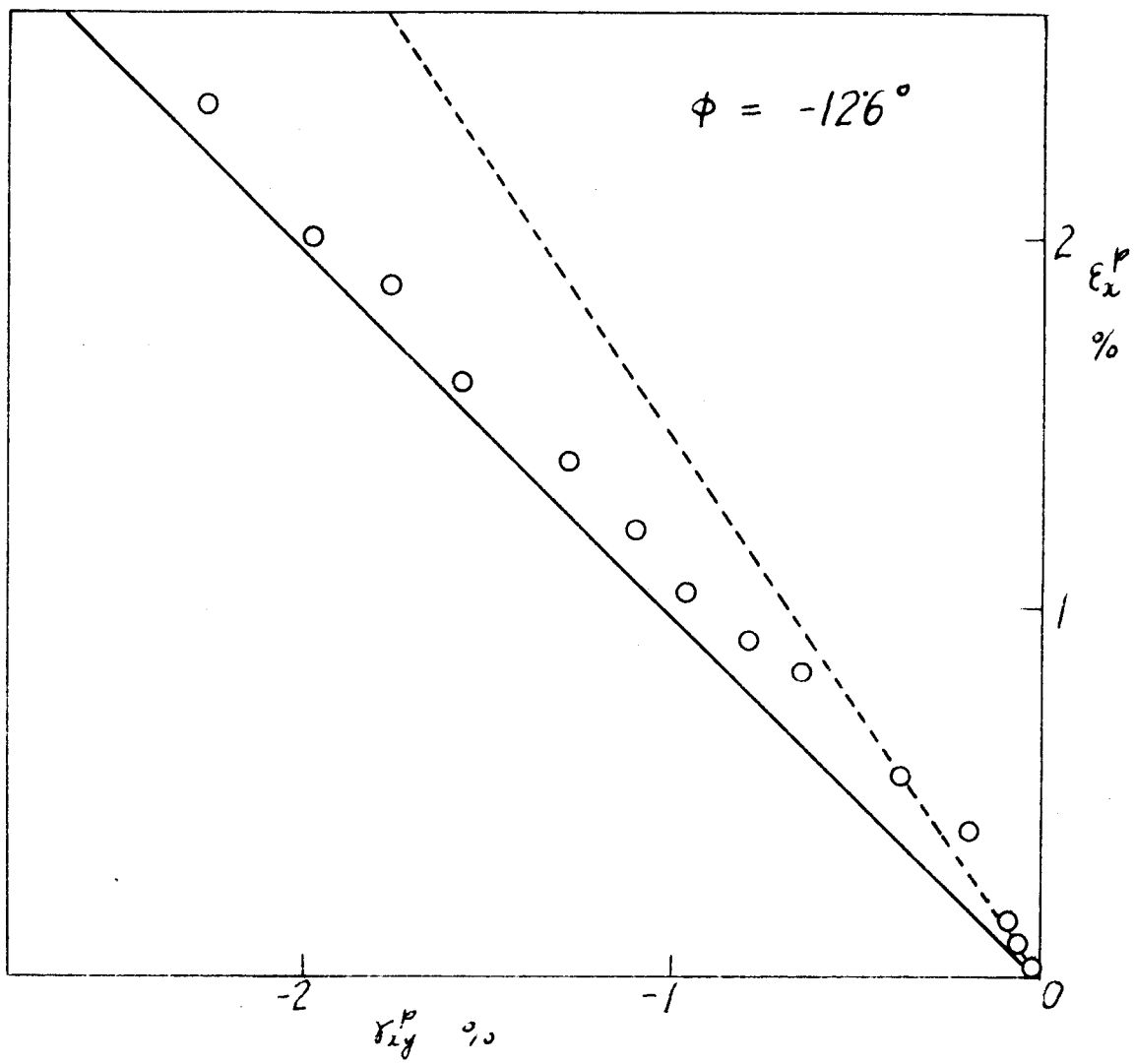
となるから、比例負荷とかけられる場合すなわち τ_{xy}/σ_x の値が一定に保たれる場合には、 δ_{xy}^P と ε_x^P の関係は直線関係で与えられることがわかる。しかし、この異方性を持つ材料に対する理論によると (73) 式からわかるように δ_{xy}^P と ε_x^P の関係は直線関係にはならぬ。しかし実際には $d\delta_{xy}^P/d\varepsilon_x^P$ の値を (73) 式により計算して



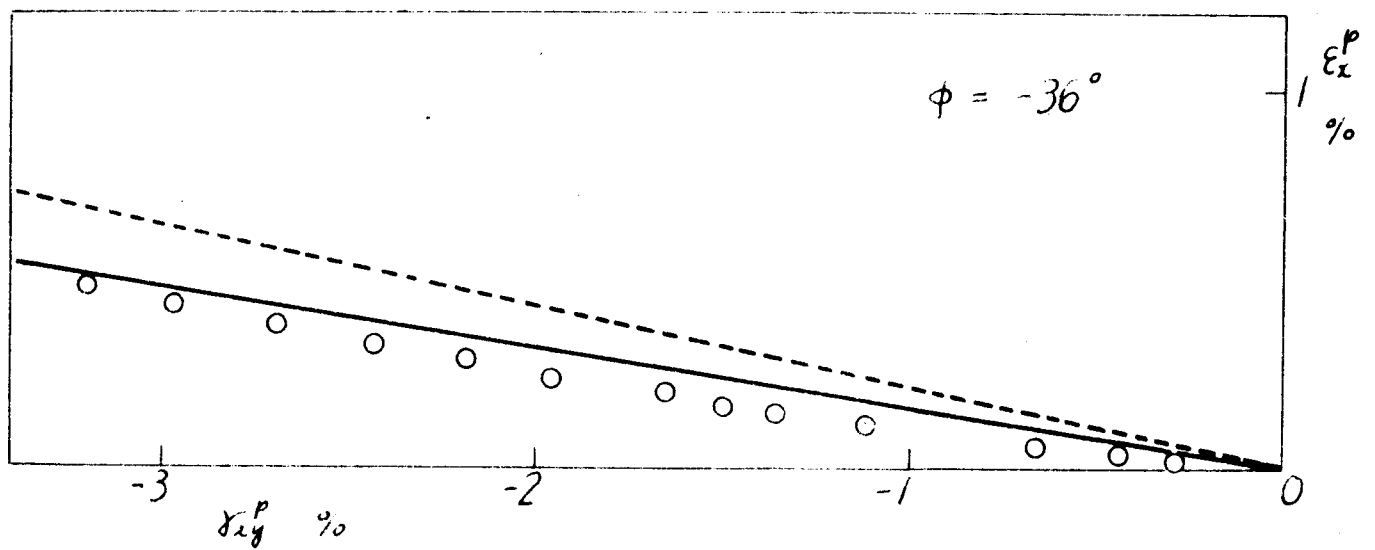
第 31 图 a



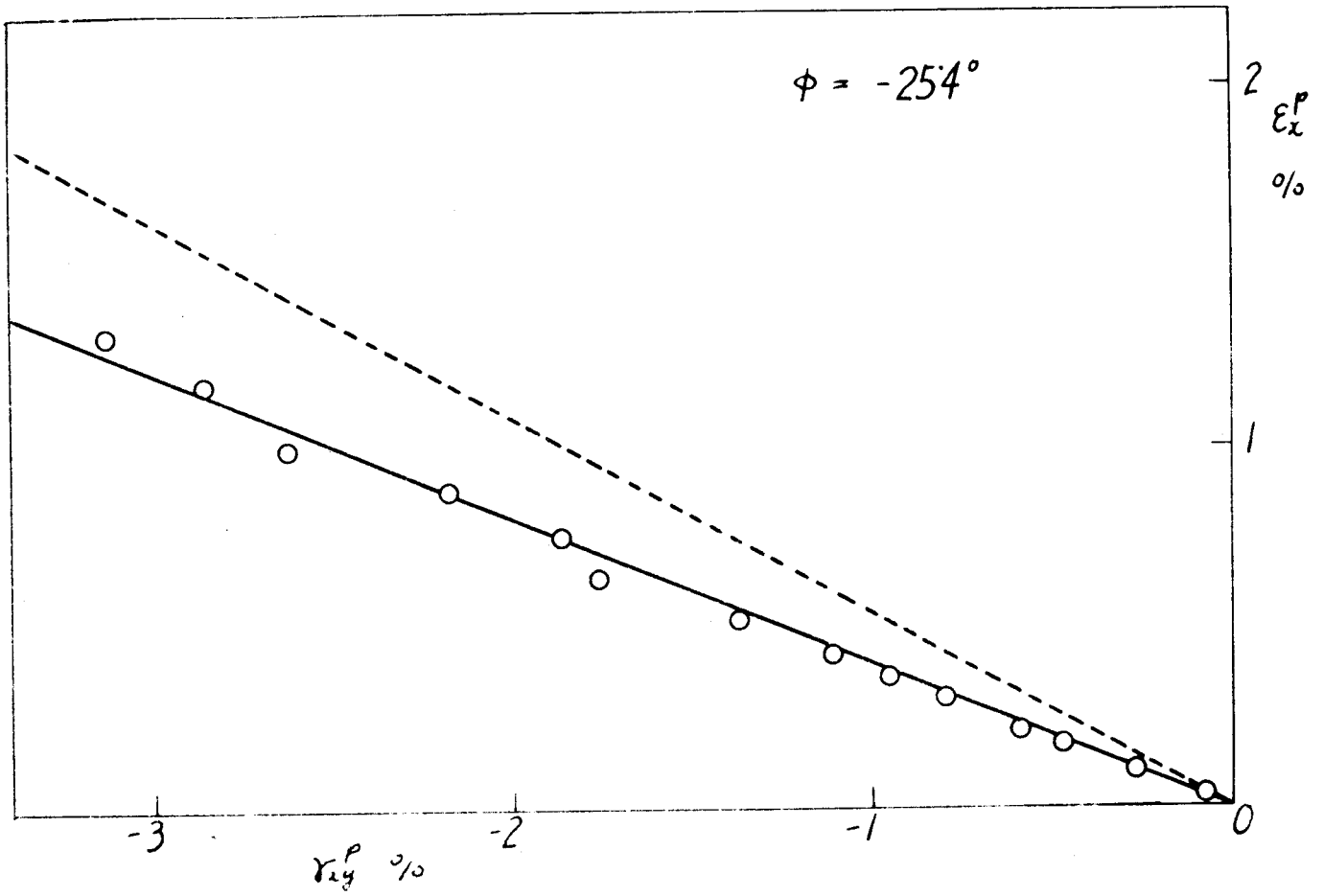
第 31 图 b



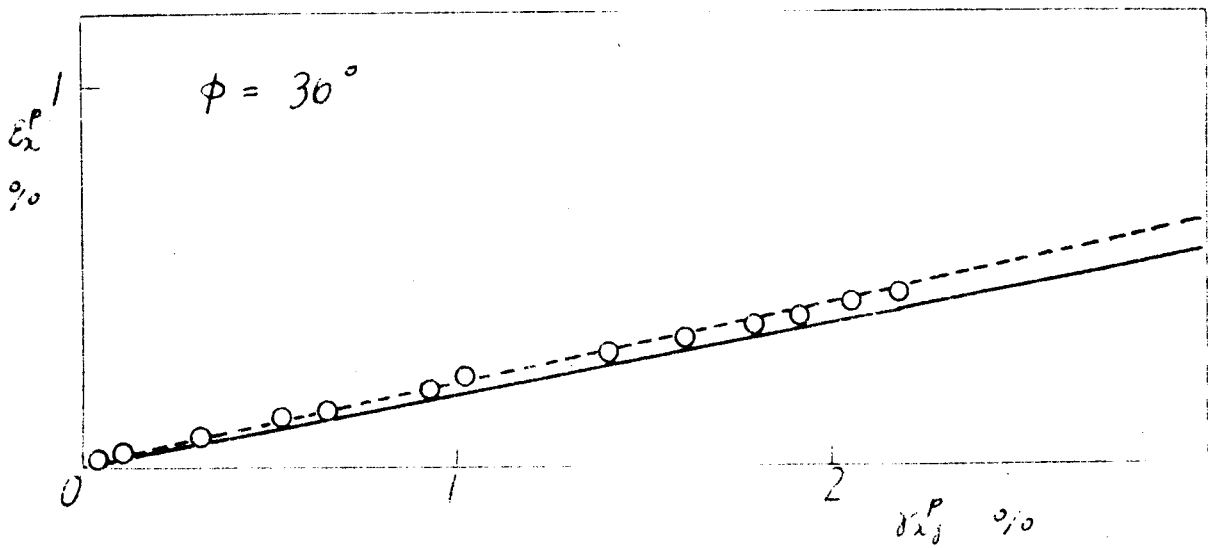
第 31 图 c



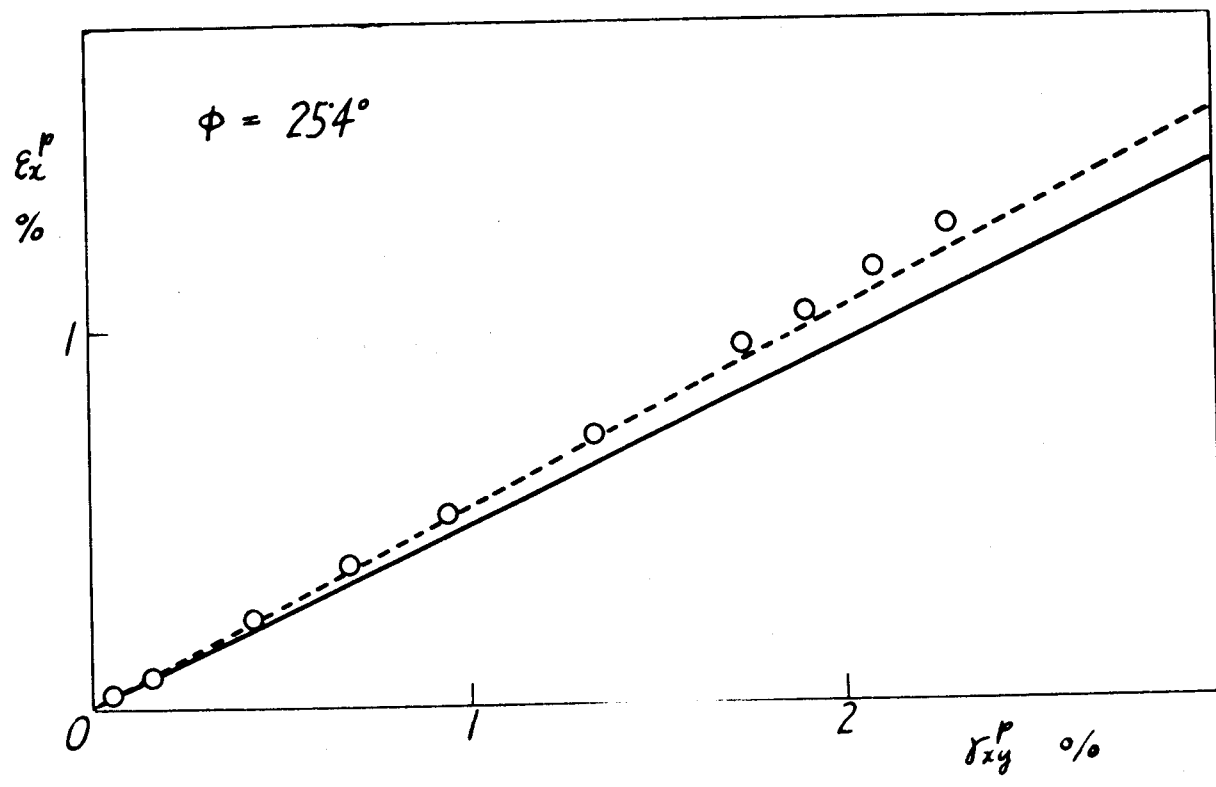
第 31 图 d



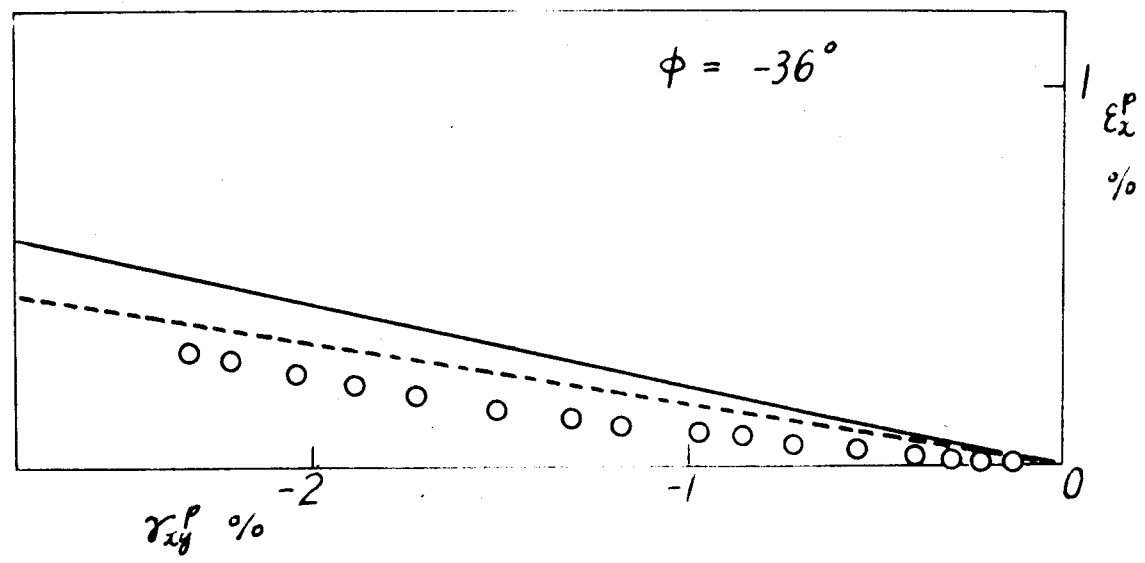
第 31 图 e



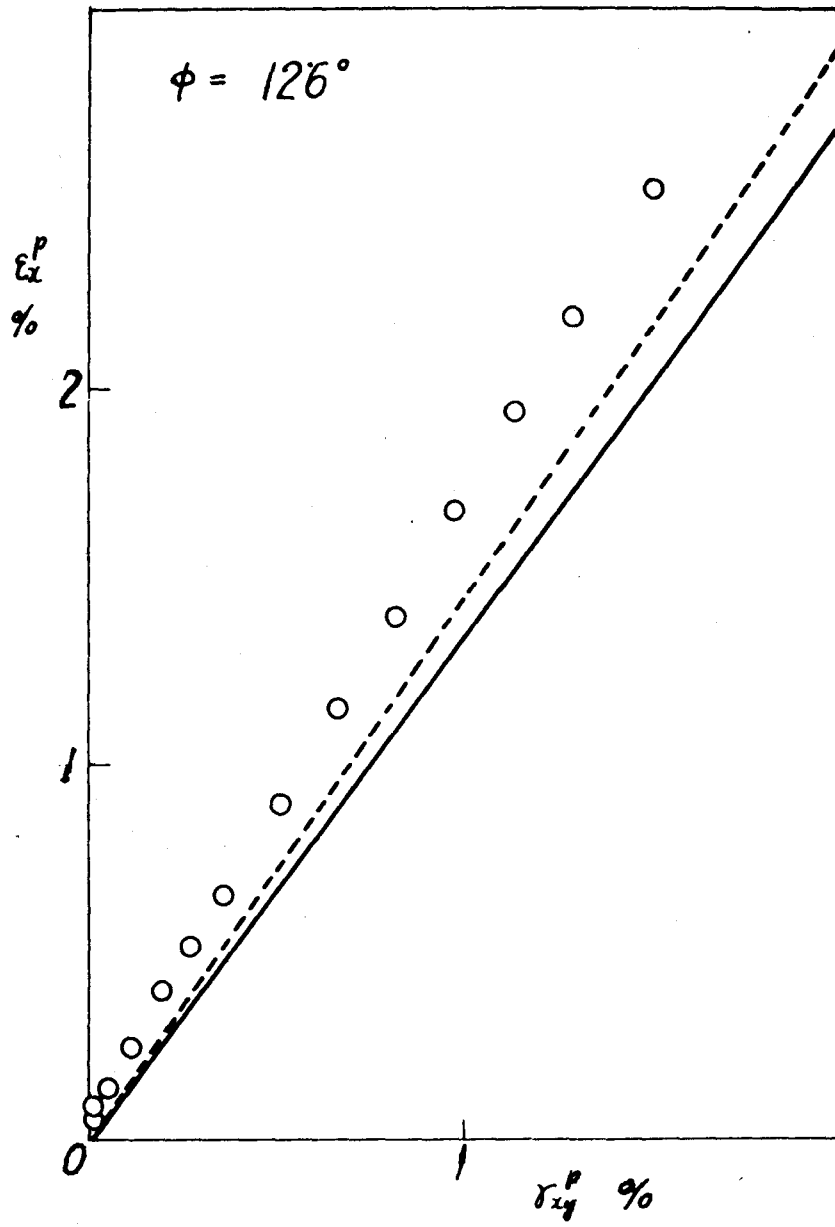
第 32 图 a



第 32 图 b



第 32 图 c



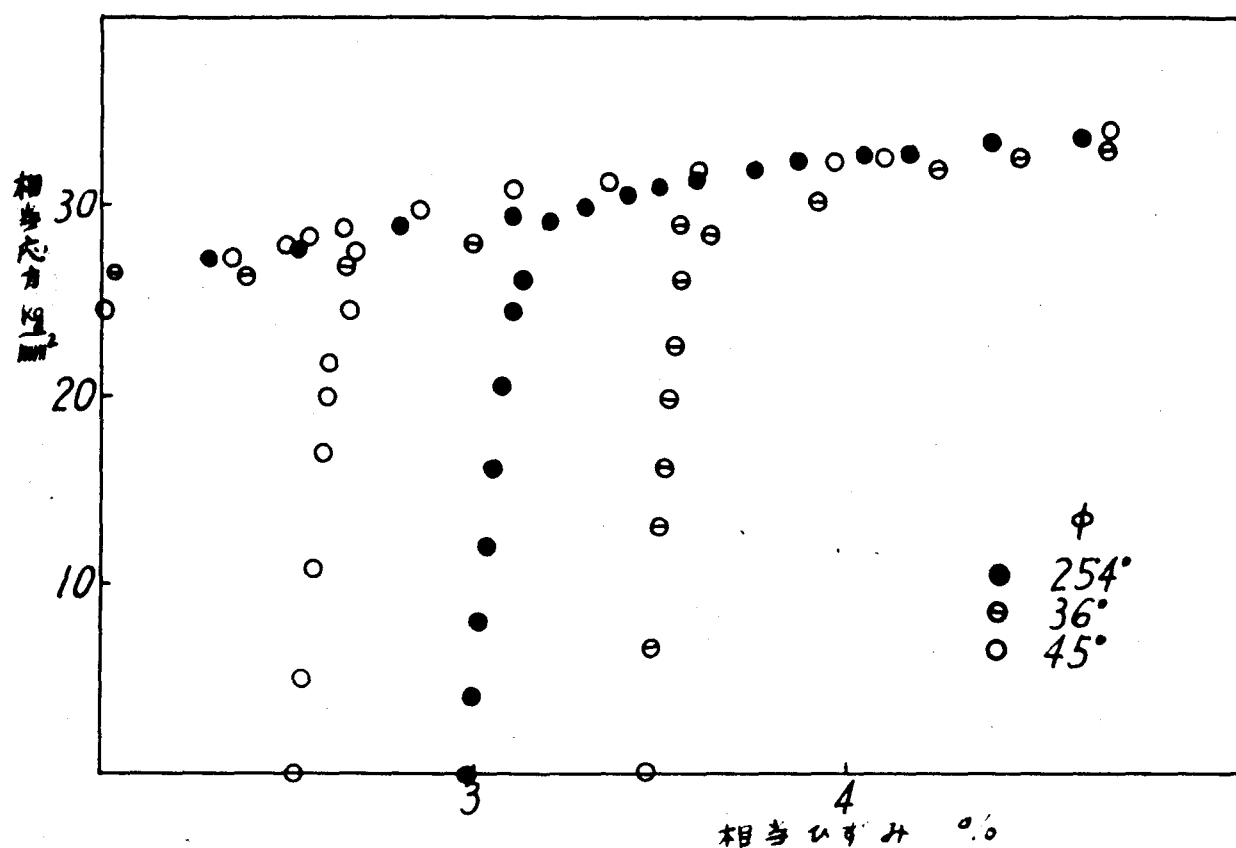
第 32 图 a

みると、その値は負荷の間中ほとんど一定であつたことと、実験中 τ_{xy}/σ_x の値を厳密に一定に保つことが困難であつたことを考え合せて、各測定点における (73) 式の値の平均値をもつてこの理論から与えられる $d\tau_{xy}^p/d\varepsilon_x^p$ の値であるとした。図中、○印は実験値、点線は材料が等方性の場合の関係 (74) 式、実線はこの異方性材料に対する理論から求められる (73) 式である。

第6節 引張りによる異方性を持つ材料の組合せ応力試験

$\varepsilon_x^p \sim 0.03$ なる塑性伸びひずみを生ずる引張りによる異方性を持つ材料について行った組合せ応力試験の結果を相当応力・相当ひずみの関係でまとめたものを第33図に示す。図には焼きなまし材に引張りで異方性を与える加工の応力・ひずみ線図をもあわせて書き入れてある。異方性を持つ材料に組合せ応力をかけたとき、生じたひずみには、あらかじめ行った引張りの加工で残留した塑性ひずみを加えてある。このあらかじめ与えた塑性ひずみの量のばらつきが第33図からもわかるごとく少し大きくなつたが、この場合にも最終応力を $\sigma_x = 29.02 \text{ kg/mm}^2$ なるわち相当応力にして 29.02 kg/mm^2 に統一して、応力値を修正した。その結果、次のような値が得られた。

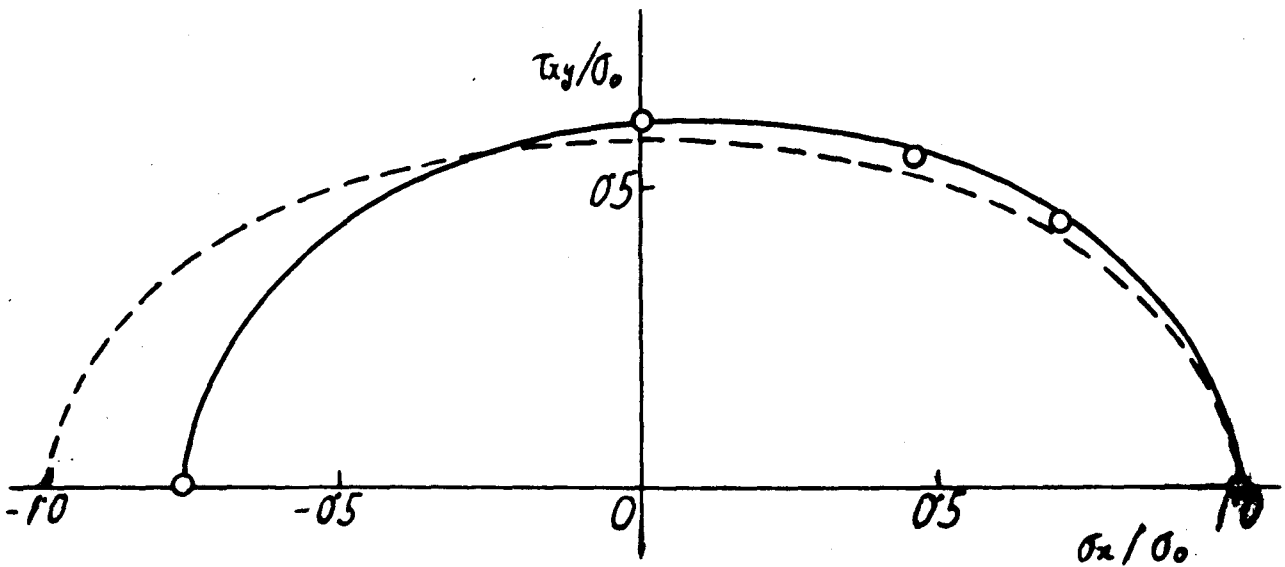
φ	降伏応力
25.4	29.72
36	30.12
45	30.41



第33図

降伏条件を求めるとのには、あらかじめ引張りで塑性変形を受けた材料を圧縮して、その圧縮降伏応力を求める試験も必要である。ここで用いた組合せ応力試験機はこのままでは圧縮試験を行うことはできないので、10トンのアムスラー万能試験機を用いて、圧縮試験だけを別に行った。その結果、あらかじめ $\sigma_x = 29.02 \text{ kg/mm}^2$ まで引張りで塑性変形を与えて除荷したのち圧縮試験を行った場合の圧縮降伏応力は 25.65 kg/mm^2 であることがわかった。したがって、この材料に対する降伏条件は、(67)式から

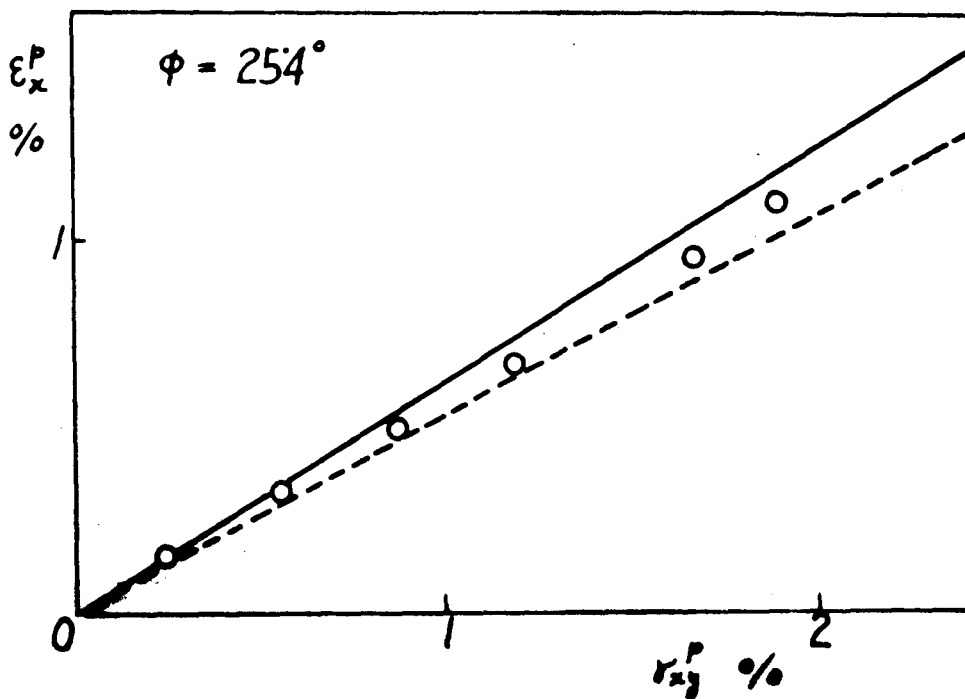
$$\frac{(\sigma_x - 3.34)^2}{(25.69)^2} + \frac{(\tau_{xy})^2}{(17.71)^2} = 1 \quad (75)$$



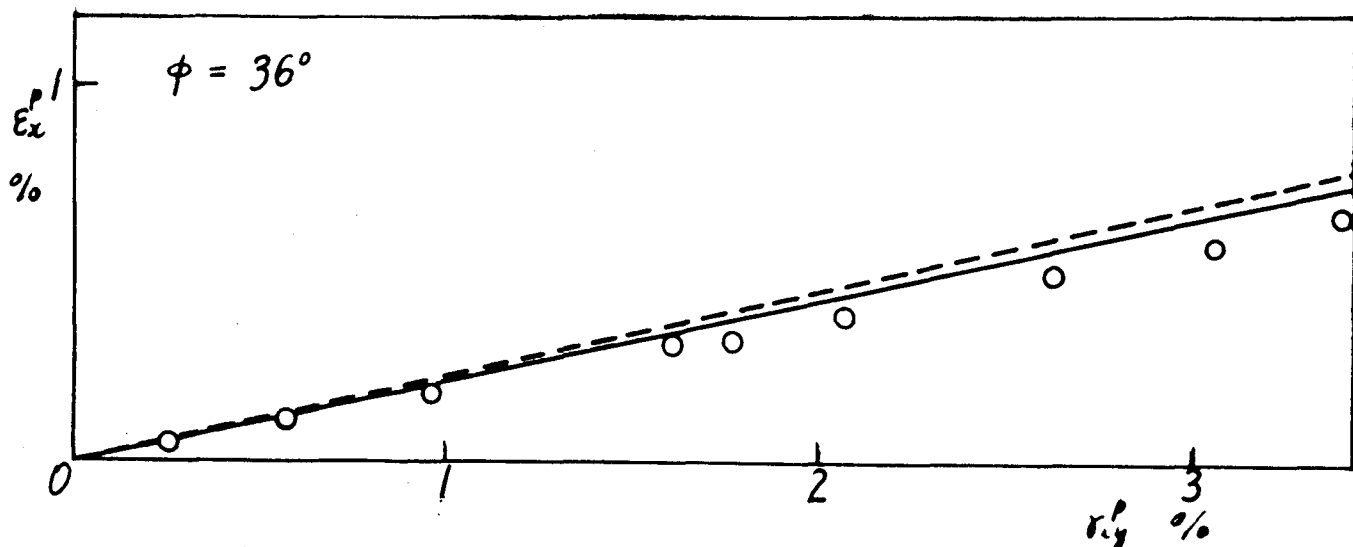
第 34 図

となる。あるいは、あらかじめ与えた引張り加工の最終引張り応力 σ_0 で応力値をわけて無次元化すると、 $\sigma_x/\sigma_0 = s$ 、 $\tau_{xy}/\sigma_0 = t$ なる記号を用いて

$$\frac{(s - 0.115)^2}{(0.885)^2} + \frac{(t)^2}{(0.61)^2} = 1 \quad (76)$$



第 35 図 a



第35図b

となる。これを図に表わしたのが第34図である。図中、○印は実験値、点線は Mises の降伏条件

$$s^2 + 3t^2 = 1$$

であり、実線は(76)式である。また、(70)式で与えられる塑性せん断ひずみ増分と塑性伸びひずみ増分の比はこの場合

$$\frac{2 d\gamma_{xy}^p}{d\varepsilon_x^p} = \frac{2 \cdot 1034 \tau_{xy}}{\sigma_x - 3 \cdot 3350} \quad (77)$$

となる。組合せ応力をかけた場合について、前節において行ったと同様、各測定点における(77)式の値の平均値をとったものを、第35図、a, b に実線で書いた。点線は材料が等方性の場合、すなわち

$$G = H = \frac{1}{3}N, \quad G_b - H_b = 0$$

を(70)式に代入して得られる関係

$$\frac{2 d\gamma_{xy}^p}{d\varepsilon_x^p} = \frac{3 \tau_{xy}}{\sigma_x}$$

である。○印は実験値である。

第7節 第6章の結語

この章では、第2章において提案した降伏条件にもとづく理論が妥当か否かを検討するため、新しく設計した引張りねじり組合せ応力試験機および組合せひずみ計を用いて、軟鋼の薄肉円管材を試験片として、実験を行った。焼きなましした試験片にあらかじめねじりあるいは引張りで異方性を与えたのち、組合せ応力を比例負荷でかけ、その降伏点を求めて、その値を降伏条件に代入することによつて、異方性パラメータの値を求めた。このようにして求められた異方性パラメータの値を用いて得られる塑性せん断ひずみと塑性伸びひずみの関係も実験値と比較した。その結果、この理論から得られる値は、あらかじめねじりで与えた塑性せん断ひずみの量が大きい場合をのぞいては、実験値とかなりよく一致していた。あらかじめねじりで与えた塑性せん断ひずみの量が大きい場合には、理論値は実験値とあまりよく合わなかった。これは、理論値を求める場合に、あらかじめねじりで異方性を与えた材料に対しては、そのねじりの加工の際の塑性せん断ひずみの量が大きいときにも、その量が少いときと同じく、異方性の主軸は試験片の軸方向に対して 45° をなすとして仮定したのであるが、実際には、ねじりによる塑性せん断ひずみの量が大きくなるに従つて、異方性の主軸が試験片の軸方向と異なる角が 45° からしだいに大きくなるためであると思ふ。

結 論

冷間加工を受けて異方性となつた金属材料の塑性変形についての研究を行うにあたり、まず第1章において、金属材料の塑性変形の理論において、塑性ポテンシャルを降伏関数に等しいと仮定することは、基礎定理の公式化を可能にするという特別な意義を持つことから、降伏関数をどのように定めるかがその理論の key point であることを述べ、異方性を持つ金属材料の降伏条件に関する従来までの研究の主なものを概観し、冷間加工により生じた異方性は、微視的にみると、選択方位による異方性と結晶粒界における残留応力による異方性の2種類の複雑な原因によるものであることを考りよして、それらの考え方を批判し、筆者の考えを明らかにした。そして第2章において、これら2種類の異方性を共にとり入れたかなり一般化された降伏条件を提案し、この降伏条件から応力・塑性ひずみ増分の関係を見ちびいた。第3章において、この降伏条件にもとづく理論は、最大塑性仕事率の原理および解の唯一性の定理を満足することとを証明して、この理論が矛盾のないものであることを明らかにした。第4章においては、この理論を、塑性加工の問題にしばしば使用されるところの平面ひずみの理論に適用した。結果、等方性材料に対する理論の場合と同じく、応力についての特性曲線と速度についての特性曲線は一致することおよび特性曲線はすべり線であることがわかった。し

して相対的に回軸し、試験片の主軸となす角が 45° からしたいに大きくなるためであると思われる。

なお、この研究は、恩師、大阪大学教授、太田友弥先生の終始渝らぬ御指導と御鞭達なくしてはあり得なかつたものである。ここに、改めて、衷心より感謝いたします。

また、組合せ応力試験機および組合せひずみ計の設計にあたっては、神戸大学講師、進藤明夫氏の御指導を受け、実験ならびに実験結果の計算には、大阪大学助手、井上豊氏、卒業生、志水秀夫君、見学克美君の御協力をいただいた。ここに厚く感謝の意を表わします。

また、鋼管素材の入手に御便宜をはかってくださった住友金属工業株式会社の永島菊三郎氏に厚くお礼を申し上げます。

なお、この研究の費用の一部は、文部省科学研究費の援助によるものである。

昭和33年12月

参考文献

Davis, E. A.

Combined tension-torsion tests with fixed principal directions.

Journ. App. Mech. 22 (1955), 411

Davis, H. E. and Parker, E. R.

Behavior of steel under biaxial stress as determined by tests on tubes.

Journ. App. Mech. 15 (1948), 201.

Drucker, D. C.

Relation of experiments to mathematical theories of plasticity

Journ. App. Mech. 16 (1949), 349

Drucker, D. C.

A more fundamental approach to plastic stress-strain relations.

Proc. First U. S. Nat. Congr. App. Mech. (1952)

Feigen, M.

Inelastic behavior under combined tension and torsion.

Proc. Second U. S. Nat. Congr. App. Mech. (1955).

Fraenkel, S. J.

Experimental studies of biaxially stressed mild steel in the plastic range.

Journ. App. Mech. 15 (1948), 193

Hill, R.

A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.

Proc. Roy. Soc. A. 193 (1948), 281

Hill, R.

The mathematical theory of plasticity.
Oxford, Clarendon Press. (1950)

Hodge, Jr. P.G.

A general theory of piecewise linear plasticity
based on maximum shear.

Journ. Mech. Phys. Solids 5 (1957), 242.

Hu, L.W.

Studies on plastic flow of anisotropic metals.

Journ. App. Mech. 23 (1956), 444.

Lode, W.

Versuche über den Einfluß der mittleren
Hauptspannung auf die Fließgrenze.

Zeits. ang. Math. Mech. 5 (1925), 142.

Marin, J. and Kotalik, B. J.

Plastic biaxial stress-strain relations for
Alcoa 24 S-T subjected to variable stress ratios.

Journ. App. Mech. 17 (1950), 372.

Melan, E.

Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums.

Ingenieur-Archiv, 9 (1938), 116

Morrison, J.L.M. and Shephard, W.M.

An experimental investigation of plastic
stress-strain relations.

Proc. Inst. Mech. Eng. 163 (1950). 1

Naghdi, P.M., Essenburg, F. and Koff, W.

An experimental study of initial and subsequent
yield surfaces in plasticity

Journ. App. Mech. 25 (1958), 201

Osgood, W. R.

Combined stress tests on 24-T aluminum-alloy tubes.

Journ. App. Mech. 14 (1947), 147.

Phillips, A.

Combined tension-torsion tests for aluminum alloy 2S-0

Journ. App. Mech. 19 (1952), 496.

Phillips, A. and Kaechele, L.

Combined stress tests in plasticity

Journ. App. Mech. 23 (1956), 43.

Prager, W.

A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids.

Journ. App. Mech. 23 (1956), 493

斎藤浩一

塑性加工の塑性学的研究 (1955)

Sanders, J. L.

Plastic stress-strain relations based on linear loading functions.

Proc. Second U. S. Nat. Congr. App. Mech. (1955), 455

Taylor, G. I. and Quinney, H.

The plastic distortion of metals.

Phil. Trans. Roy. Soc. A. 230 (1931), 323

吉村慶丸

塑性力学

共立出版社 (1957)