競合環境下での施設配置問題に関する数理的研究

2002年

宇野　剛史

競合環境下での施設配置問題に関する数理的研究

2002年

宇野　剛史

目 次

第1章　緒論

施設配置問題では様々な基準にしたがって単一又は複数の施設を最適に配置することが重要である．地域に存在する各種サービスを提供する施設をどのように配置すればより効果的であるかという問題を扱っており，経営科学，都市計画，経済学，計算幾何学，情報処理やそれらに関連した分野で発展してきた．近年，施設配置問題に対する関心が特に高まっており，経済環境，生活環境や住民意識の変化に伴い，各種施設を合理的に配置することが重要な問題と考えられるようになっている．施設配置問題は施設の種類から大きく２つに分けて考えられる．１つは教育，文化，福祉，医療，廃棄物処理等に関連する公共施設であり，地域の住民にとって便利な場所に配置することが目的として考えられる．このような施設の配置問題を「公共施設配置問題」といい，都市化の進行や地域開発に関連して公共サービスに対する住民意識が高まり，合理性を十分に検討して計画決定すべき問題となっている．もう１つは大規模小売店や工場等に関連する商業施設であり，それらの利用者が品物・製品等のサービスを受ける代価として得られる利得を多くすることが目的として考えられる．このような施設の配置問題を「競合施設配置問題」といい，既存施設における統廃合，再配置，あるいは新規立地等に関する問題は企業業績や顧客へのサービス水準の向上等において重要な課題である．施設配置問題に関する数理的研究では，施設配置を決定する主体を「意思決定者」という．一般に，前者では意思決定者が単独であるのに対して，後者では意思決定者が複数かつ互いに競合する状況下における問題として考察されている．本研究では，扱う施設の種類に関連する様々な競合環境下における配置問題を数理的立場から考察を行う．

競合施設配置問題の研究は，Hotelling [26] を先駆者として発展してきた．競合施設配置問題では，各企業が利潤追求を目的として施設配置を試行錯誤した結果，全施設がどのような状態で施設配置が定まるかを考察する問題である．全施設が安定状態にあるときの施設配置を問題における「均衡解」であるといい，均衡解における各企業の施設配置を「最適配置」という．Hotellingが考えたモデルは，線分上に施設を利用する利用者が一様に分布する市場において，利用者が最も近い施設のみ利用するという条件の下に互いに競合する２企業ができるだけ多くの需要量を獲得できるように各々１つずつ施設を配置する問題を考えたものである．Hotellingのモデルにおける各企業の最適配置は，経済学や生物学等

に用いられているゲーム理論において重要な概念の一つである「ナッシュ均衡」の定義を用いることで説明できる．Hotellingのモデルは競合施設配置問題の基本となっており，その後多くの研究者により様々な発展がなされてきた [49, 59, 60]．Wendell と McKelvey [71] は利用者の分布を一様分布から重みを持った点（需要点）の分布に置き換え，ネットワーク上の問題として考察した．このような施設配置問題は，その空間的配置から離散的モデルといわれる．Hakimi [25] は企業の施設配置の決定を一度のみにし，先に施設を配置する企業（先手企業）と後から配置する企業（後手企業）を仮定することにより，２種類の問題に拡張した．1つはある企業が幾つかの施設を既に配置している市場に，新規参入の企業が自分の利益を最大にするように施設を配置する問題であり，「メジアノイド問題」と呼ばれる．もう１つは後から他の企業が参入してくることを想定して，なるべく利益を奪われないように企業が配置する問題であり，「セントロイド問題」と呼ばれる．Hakimi のモデルにおける各企業の最適配置は，ゲームの理論における概念の一つである「シュタッケルベルグ均衡」の定義を用いることで説明できる．Hakimi 以降のネットワーク上における競合施設配置問題の研究については，Miller 等 [45] が詳しい．またこのモデルは，Drezner [11] によって平面上の問題に拡張された．このような施設配置問題は，その空間的配置から連続的モデルといわれる．Drezner のモデルは平面上における競合施設配置問題の基本となっており，その後多くの研究者により様々な発展がなされた [36, 52, 66]．本研究では連続的モデルを中心に施設配置問題を考察している．また，競合施設配置問題において，施設と利用者の間の距離は利用者の利用施設を決定する上での主な評価基準である．コンビニエンスストアやガソリンスタンドのように施設が同種のサービスを提供するとみなせる場合には，距離のみによる比較が妥当であると考えられる．しかし，百貨店のようにサービスが施設の規模に依存すると考えられる場合には，施設の質的評価を評価基準として考慮する必要がある．Karkazis [34] は，施設の質を幾つかのレベルに分類することでその評価を行い，利用者の利用施設を決定する上での評価基準として距離に加えて施設の質的側面を考慮したモデルを提案した．本研究では，連続的モデルにおいて施設の質的側面を考慮したモデルを考察する．

意思決定者が単独である公共施設配置問題は，一般に「最小和問題」あるいは「ミニマックス問題」として定式化される．最小和問題は Weber [70] の研究に始まり，施設と各需要点までの移動費用の総和を最小にするように施設配置を決定する問題である．一方，ミニマックス問題は施設と各需要点までの移動費用の関数の最大値を最小にするように施設配置を決定する問題である．一般に，学校，郵便局や文化施設等のように利用者の便利さが求められる施設については最小和問題としての定式化が採用され [12, 70]，警察署や消防署，救急車デポ（救急車が常時配置されている施設．日本では消防署に該当）等のように

緊急にサービスを提供すべき施設（以下,「緊急施設」と呼ぶ）についてはミニマックス問題としての定式化が用いられている [22, 39, 41, 43, 55]. また，ゴミ焼却所や原子力発電所等のように地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設についての配置モデルも考慮されており，目的関数を変更することで最小和問題 [21] やミニマックス問題 [5, 44] として定式化されている．これらの施設配置問題において一般に意思決定者の目的は単独であるが，施設の種類や配置する状況によっては複数かつ互いに相容れない目的を同時に考慮する必要が生じる．本研究では，最小和問題及びミニマックス問題の双方について，これらの目的に加えて他の目的を同時に考慮することで，多目的性をもつ施設配置のモデルに拡張する．

施設配置問題の関連事項として，各需要点における需要量，施設の建設費用や商品の輸送コスト等が事前に明確でないため，計画時にこれらを不確定要素として扱う必要がある状況が起こり得る．このような不確定要素の中で情報不足や人の主観的判断に伴うあいまいさに起因する場合における解析方法として，Zadeh [74] によるファジィ集合理論を適用することが挙げられる [46]. 本研究では，ファジィ集合理論に関連する以下の二つの方法によってこれらのあいまいさを表現し，施設配置問題をファジィ数理計画問題として定式化する．一つは目的関数や制約条件に含まれるあいまいな数的情報に対する「ファジィ数」の導入である．ファジィ数の概念は Dubois と Prade [13] によって与えられた．任意に与えられたファジィ数の要素間で様々な演算を実行するのは困難であることから，彼らはさらに「L ファジィ数」という概念を定義した．施設配置問題に限らず一般の最適化問題における数理的解析では複数の数間の順序関係が重要であるが，実数直線上のファジィ集合がいくつか与えられたとき，これらを線形順序に並べるための順序付けの尺度についての研究は，Degani と Pacini [10]，Watson [69]，Efstathiou と Rajkovic [19] らの研究によって提案された問題を起源とする．この問題は幾つかの代替案の中から最良と思われるものを選出するために，各々の代替案の効用をファジィ数などのファジィ集合で表しそれらのメンバーシップ関数に基づいて順序付けを行うというものであって，ファジィ集合のランキング問題と呼ばれる [7, 58]. この問題に対してファジィ集合を数直線上の値に変換するための規則，すなわち計量化の指標が多くの研究者によって様々な形で与えられた [2, 3, 16, 32, 33, 65]. また，Dubois と Prade [14] によって定義されたファジィ・マックス作用素の概念を用いることにより，Ramík と Římánek [56] は「ファジィ・マックス順序」と呼ばれる半順序関係をなす順序関係を提案した．さらに，古川 [23] はファジィ・マックス順序にパラメータを導入することで，L ファジィ数間で全順序関係をなす順序関係を提案した．本研究では，上記に述べた L ファジィ数及び順序関係を取り入れた施設配置問題を考察する．もう一つは意思決定者の主観に含まれるあいまいさを表すために，ファジィ集合理論における各要素の特定

の集合に属する帰属度を表す「メンバーシップ関数」を用いることである．意思決定における目標設定は，例えば利益をだいたいある値以上にしたいというように，あいまいな表現によって行われることがある．このようなあいまいさを表すためにメンバーシップ関数を用いた目的関数を「ファジィ目標」と呼び，本研究ではファジィ目標を含む施設配置問題について考察する．ファジィ目標を用いた問題の一つに，Bellman と Zadeh [4] によって提案されたフレキシブル計画法が挙げられ，最適化問題へのその応用は Zimmermann [75, 76] の研究以降，様々な応用がなされている [29, 30].

また，施設配置問題において施設・利用者間の距離は重要な要因であるが，地理的，環境的条件により適切な距離尺度を選ぶ必要がある．従来，平面上の施設配置問題における距離尺度としてはユークリッド距離が主に採用されてきた [20]．ユークリッド距離は平面上の任意の点上で全ての方向に進行可能とした場合に対応する．本研究における競合施設配置問題では特に断りのない限り，距離の定義としてユークリッド距離を採用している．しかし，例えば都心部における施設配置問題において消防車や救急車等の移動を考慮する状況において，ユークリッド距離による尺度では実態に合わない場合が起こり得る．このような状況における距離尺度としては直角距離が主に採用されてきた [20, 72]．直角距離は東西南北の4方向へのみ進行可能とした場合の道のりの長さで定義しており，格子状に整理された道路網に対応する．京都やマンハッタン島のように道路網が碁盤目状となっている都市での配置問題では，直角距離は有用な距離尺度であると考えられる．しかし，山や河川による影響等によって道路が縦横だけでなく斜めに通っている場合や途中で折れている状況において，直角距離では実態に合わない面が生じる．本研究における緊急施設配置問題では，与えられた複数の方向によって定まる「A-距離」を距離尺度として採用した施設配置問題を考察する．A-距離はブロックノルム [54, 63, 68] の一種であり，Widmayer 等 [73] によって提案された．直角距離は A-距離において与えられた方向が縦横である場合に対応し，上記の状況において適切な方向を設定することで適用可能であると考えられる．A-距離を用いた施設配置問題としては，松富と石井 [43] の研究が挙げられる．

本論文の構成は以下のようになっている．

第2章では，本論文の基礎となる従来の施設配置のモデル及び本論文で行う施設配置問題の拡張に関連する事項について述べる．2.1 節では公共施設配置問題について，施設の種類に応じて最小和問題及びミニマックス問題の2種類に分けて定式化を行い，各問題について考慮すべき要因について述べる．2.2 節では競合施設配置問題について，各企業の最適配置を決定するのに必要な概念である均衡解の定義を示し，従来の競合施設配置のモデル及びその特徴について述べる．また，本研究で行う施設配置問題の拡張に関連して，ファジィ理論やファジィ数の定義や関連事項，多目的問題への拡張の必要性や問題の解を与え

るのに必要な定義，及び 2 点間の距離の定義や関連事項について述べる．

第 3 章では，平面上で表される市場に競合する先手・後手企業が施設を 1 つずつ配置する状況において，距離に加えて施設の質的側面を考慮した競合施設配置のモデルを提案する．各企業に対して利得最大化問題を定式化し，各問題について効率的なアルゴリズムを構築する．また，数値例による計算結果を示すことで，このアルゴリズムの計算過程を具体的に示す．

第 4 章では，競合環境下で先手・後手企業が施設を配置する状況において，施設の利用者の選好に対して多様性を導入するモデルを提案する．利用者の選好には不確定性が含まれると考えられ，位置及び選好によって与えられる利用者の数がファジィ数によって表すことでファジィ数理計画問題として定式化する．各企業に対して利得最大化問題を定式化し，各問題について効率的なアルゴリズムを構築する．また，数値例による計算結果を示すことで，このアルゴリズムの計算過程を具体的に示す．

第 5 章では，ゴミ焼却所等のように地域住民にとって必要だが付近に配置されるのは好ましくない施設について扱い，企業と住民が競合する状況下における配置モデルを提案する．企業の施設配置に関する費用や住民が被る施設からの悪影響の評価等には不確定性が含まれると考え，これらをファジィ数によって表すことでファジィ数理計画問題として定式化する．企業・住民のそれぞれに対して費用最小化問題として定式化し，各問題について効率的なアルゴリズムを構築する．

第 6 章では，多目的性をもつ 2 種類の施設配置問題のモデルを提案する．第一に，救急車デポのような緊急施設について，救急車が移動可能な方向に制約がある場合の距離尺度として A-距離を採用し，ある地域内で発生する事故に対する傷病者を病院に運ぶのにかかる時間の短縮，及びその地域内で迅速に対処可能な事故の頻度の向上を目的関数とする多目的問題として定式化し，効率的なアルゴリズムを構築する．また，数値例による計算結果を示すことで，このアルゴリズムの計算過程を具体的に示す．第二に，第 3 章で取り上げた問題について，利用者の立場から見た便利な施設配置を目的関数として導入することで，企業・利用者の双方を考慮する多目的問題として定式化し，各問題について効率的なアルゴリズムを構築する．また，各々のモデルについて数値例による計算結果を示すことで，各アルゴリズムの計算過程を具体的に示す．

第 7 章において本研究の総括を行い，その成果や意義をまとめるとともに，今後の課題について述べる．

第2章　施設配置問題の基礎

施設配置問題は施設の種類から大きく２つに分けて考えることが出来る．１つは市役所，消防署や郵便ポスト等の公共の施設であり，地域の住民にとって便利な場所に配置することが目的として考えられる．もう１つはコンビニエンスストアや百貨店等の私的な施設であり，その利用者がサービスを受ける代価として得られる利得を多くすることが目的として考えられる．意思決定者は前者の問題においては一般に単独であるのに対して，後者では一般に複数かつ互いに競合する環境が取り挙げられている．

2.1 節では意思決定者が単独である公共施設配置問題について述べる．2.2 節では意思決定者が複数の企業である競合施設配置問題について述べる．2.3 節では，施設配置問題の拡張に関連する事柄について述べる．

2.1　公共施設配置問題

非競合環境における施設配置問題は，一般にウェーバー問題とミニマックス問題として定式化される．ウェーバー問題は Weber [70] の研究に始まった最小和問題のことである．一般に，これらの問題では利用者の立場から考えた場合における最適配置を見つける問題として定式化される．本研究では利用者の利便性を考慮して施設を配置する場合における最適性の尺度を**利便度**と呼ぶことにする．本節では，利便度は利用者-施設間の距離によって表されると仮定する．2.1.1 では，ウェーバー問題について述べ，2.1.2 では，ミニマックス問題について述べる．

2.1.1　ウェーバー問題

ウェーバー問題は Weber [70] の研究に始まり，施設配置問題の初期の研究として知られている．この問題では例えば郵便ポストや文化施設等のように，利便性を要求される施設の配置について主に取り扱っている．新しく配置される施設の利用者は有限個の点上にのみ存在するとする．利用者の存在する点を需要点と呼び，需要点ごとに利用者の需要量を総合的に評価する．本論文を通して，各需要点に指標を付けることで需要点を識別する．需

要点の総数を自然数 n で表し，各需要点に指標として n 以下の自然数を重複しないように付けることで，指標の全体集合を $I = \{1, \cdots, n\}$ で表す．需要点の存在領域及び施設の配置可能領域を各々 V, U で表す．需要点 $i \in I$ の位置及び需要量を各々 $v_i \in V$, $w_i \geq 0$ で表す．空間 $U \cup V$ 内の 2 点 p^1, p^2 間の距離を $d(p^1, p^2)$ で表す．ウェーバー問題では，施設の不便さを距離によって評価する．

始めに，新しく配置される施設が一つの場合における施設配置問題を定式化する．新しく配置する施設の指標を j とし，その施設の位置を $u_j \in U$ で表すと，ウェーバー問題は利用者全体から見た利便度を最適にする問題として次のように定式化される．

$$\min_{u_j} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i d(u_j, v_i) \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad u \in U \tag{2.2}$$

すなわち，ウェーバー問題とは施設と全ての需要点との間の重み付き距離の総和を最小化する問題として定式化される．

次に，上の問題を新しく配置される施設が複数の場合に拡張する．ここで，利用者は最も近い施設のみ利用すると仮定する．新しく配置する施設の指標集合を $J = \{1, \cdots, m\}$ とする．ここで，m は施設の総数を意味する自然数である．これらの施設の位置に関する組を $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_m) \in U^m$ で表す．ここで，U^m は U の m 次直積集合を意味する．需要点 v_i とノード集合 $\boldsymbol{u}$ との間の距離を

$$d(v_i, \boldsymbol{u}) \equiv \inf_{j \in J} d(v_i, u_j) \tag{2.3}$$

によって定義する．ウェーバー問題では，複数の施設についての不便さを上記の距離によって評価する．このとき，ウェーバー問題は次のように拡張される．

$$\min_{\boldsymbol{u}} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i d(\boldsymbol{u}, v_i) \tag{2.4}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u} \in U^m \tag{2.5}$$

新たに配置される施設が利用者にとって便利であるように配置したい場合，利用者にとっての利便性を数量的に表す尺度の一つとして重み付き距離の総和が用いられる．このような施設を取り扱う場合，最適配置問題はウェーバー問題として定式化される．ウェーバー問題を取り扱った論文としては，Drezner と Wesolowsky [12] などが挙げられる．

また，地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設を配置する場合には，Fernandez 等 [21] が距離の代わりに距離に対する減少関数を用いることにより，施設と全ての需要点との間の重み付き関数値の総和を最小化する問題として定式化している．

2.1.2 ミニマックス問題

ウェーバー問題が利用者から見た施設の利便性を追求した配置について主に取り扱ったのに対し，ミニマックス問題では警察署，消防署や救急車デポなどのように緊急性を求められるサービスを提供する施設（以下，緊急施設と呼ぶ）の配置について主に取り扱っている．

施設及び利用者に関する記号はウェーバー問題と同様のものを用いる．但し，ミニマックス問題では施設のサービスが利用者全体に行き渡るように配置することが目的として挙げられるので，利用者ごとの需要量は重視されない．このとき，ミニマックス問題は次のように定式化される．

$$\min_{\boldsymbol{u}} \quad \max_{i \in I} d(\boldsymbol{u}, v_i) \tag{2.6}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u} \in U^m \tag{2.7}$$

すなわち，ミニマックス問題とは施設と需要点までの距離の最大値を最小にする問題であり，最も不利と考えられる位置の条件を少しでも良くしようとすることを意味している．ミニマックス問題を取り扱った論文としては，Dutta と Vidyasagar [17], Elzinga と Hearn [20], 松富 [41] などが挙げられる．

また，地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設を配置する場合には，Berman と Drezner [5] や Melachrinoudis と Cullinane [44] がミニマックス問題における目的関数を負にする事で与えられる「マックスミニ問題」として定式化している．

2.2 競合施設配置問題

最適施設配置問題の重要な一分野である競合施設配置問題とは，競合関係にある幾つかの企業が自己の利益を最大化するために施設の立地を競い合うと，施設の全体配置がどのようになるかを考察する問題である．

本節では，従来の競合環境下における施設配置を扱ったモデルについて述べる．2.2.1 では，競合施設配置問題を扱う上で重要な概念である優越及び均衡状態について述べる．2.2.2 では，競合施設配置問題の研究における先駆けとなった Hotelling [26] のモデルについて述べる．2.2.3 では，ネットワーク上で競合する先手企業と後手企業が順番に施設を配置する状況における施設配置を扱った Hakimi [25] のモデルについて述べる．2.2.4 では，平面上における施設配置を扱った Hakimi のモデルを発展させた Drezner [11] のモデルについて述べる．2.2.5 では，Hakimi のモデルに施設の質的レベルを考慮することで拡張した Karkazis [34] のモデルについて述べる．

2.2.1　優越と均衡

従来の競合施設配置問題のモデルを紹介する前に，これらのモデルで用いられている優越と 2 種類の均衡の定義について述べる．これらの概念は経済学の一分野である「ゲームの理論」で用いられている [47, 51].

非協力関係にある 2 人のプレイヤーについて，ここではプレイヤー 1,2 と呼ぶことにする．プレイヤー 1,2 が選択可能な戦略の全体集合を各々 S_1, S_2 で表す．各プレイヤーが各々戦略として $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ を選んだとし，これらの組 $s = (s_1, s_2)$ に対するプレイヤー 1,2 の利得関数を各々

$$f_1(s) = f_1(s_1, s_2),\ f_2(s) = f_2(s_1, s_2) \tag{2.8}$$

で表す．

プレイヤー 1 が選択可能な 2 つの異なる戦略 s_1^1, s_1^2 について，

$$f_1(s_1^1, s_2) \leq f_1(s_1^2, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2 \tag{2.9}$$

が成立するとき，s_1^2 は s_1^1 に対して**優越** (dominance) であるという．

次に，均衡についての定義を述べる．

定義 2.1 （ナッシュ均衡）プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ について，$\max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2^*)$ かつ $\max_{s_2 \in S_2} f_2(s_1^*, s_2)$ が存在し，プレイヤー 1,2 に対して，

$$\begin{aligned} f_1(s^*) &= \max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2^*), & (2.10)\\ f_2(s^*) &= \max_{s_2 \in S_2} f_2(s_1^*, s_2) & (2.11) \end{aligned}$$

が成立するとき，この状態を**ナッシュ均衡**といい，s^* を**ナッシュ均衡解**であるという．

上記の定義より，ナッシュ均衡とは全てのプレイヤーに対して自分以外のプレイヤーが戦略を変えないときに自分だけ戦略を変えても自分の利得が増加しない状態を意味する．

さらに，もう一つの均衡についての定義を述べる．非協力関係にある 2 人のプレイヤーについて，戦略を選択する順番が決まっており各プレイヤーが戦略を選択できる機会が一度のみである状況について考える．ここではプレイヤー 1 が先に戦略を選択するとし，プレイヤー 2 が後で戦略を選択すると仮定する．以下ではプレイヤー 1,2 を各々「先手プレイヤー」「後手プレイヤー」と呼ぶことにする．後手プレイヤーは先手プレイヤーの戦略を知った上で自分の戦略を決定すると仮定する．先手プレイヤーの戦略 s_1 に対する後手プレイヤーの最適戦略の集合は，

$$R_2(s_1) = \left\{ s_2^* \in S_2 \,\middle|\, f_2(s_1, s_2^*) = \max_{s_2 \in S_2} f_2(s_1, s_2) \right\} \tag{2.12}$$

と表すことができる．後手プレイヤーの解が $s_2 \in R_2(s_1)$ である確率を $P(s_2|s_1)$ とすると，先手プレイヤーの期待利得は

$$F_1(s_1) = \sum_{s_2 \in R_2(s_1)} f_1(s_1, s_2) \cdot P(s_2|s_1) \tag{2.13}$$

と表される．このとき，先手・後手プレイヤーに対する均衡は次のように定義される．

定義 2.2 （シュタッケルベルグ均衡）プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ について，$\max_{s_1 \in S_1} F_1(s_1)$ かつ $\max_{s_2 \in S_2} f_2(s_1^*, s_2)$ が存在し，各プレイヤーに対して，

$$f_1(s^*) = F_1(s_1^*) = \max_{s_1 \in S_1} F_1(s_1), \tag{2.14}$$

$$f_2(s^*) = \max_{s_2 \in S_2} f_2(s_1^*, s_2) \tag{2.15}$$

が成立するとき，この状態を**シュタッケルベルグ均衡**といい，s^* を**シュタッケルベルグ均衡解**であるという．

シュタッケルベルグ均衡解とは後手プレイヤーの戦略に対する先手プレイヤーの最適な戦略を表す．すなわち，先手プレイヤーにとってシュタッケルベルグ均衡の方がナッシュ均衡より有利である．

競合施設配置問題において，本研究を通して施設を配置するプレイヤーを**企業**と呼ぶことにする．各企業の戦略はその企業が所有する施設の配置に対応し，問題の状況に応じて施設の位置だけでなくその種類や規模等の選択も含むものとする．また，競合施設配置問題では店舗のような商業施設を取り扱っており，利用者が施設のサービスを受ける需要量を**購買力**と呼ぶことにする．

2.2.2 Hotellingのモデル

競合施設配置問題はHotelling [26] を先駆者として発展してきた．Hotellingが考えたモデルでは，施設の利用者が線分上で一様に分布する市場を扱っている．そして，互いに競合する2企業ができるだけ多くの利用者に自社施設の提供するサービスを利用されることでより多くの需要を獲得可能なように，各々1つずつ施設を配置する状況を扱っている．Hotellingは，次の仮定を基にモデルを考察している．

1. 施設が提供するサービスは全ての施設で同一である．また，利用者は全ての施設の中で最も近い施設のみを利用する．
2. 利用者からの距離が最短である施設が複数存在する場合，その利用者はそれらの施設を等しく利用し，施設はそれらの施設の数で等分配された購買力のみ獲得できる．

各企業は自社の施設を線分上で何度でも動かすことが出来るとする．このとき，各施設がどのような動きをするかについて紹介する [50].

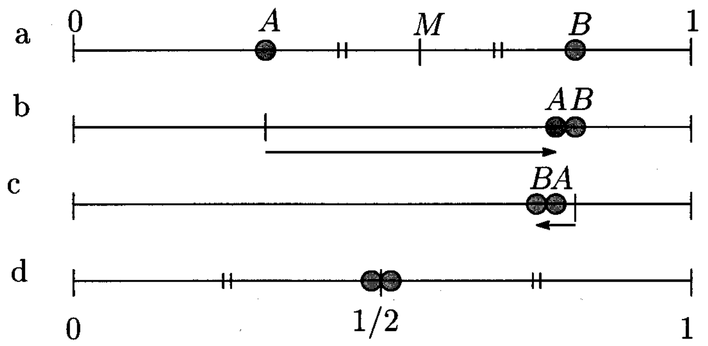

図 2.1: Hotelling の競合配置モデル

Hotelling のモデルで考察される線分上の市場を閉区間 $[0,1]$ により表す．競合する２つの施設を各々A, B と表す．A, B が線分上の任意の位置に配置されたとき，各施設を利用する利用者はその中点 M を境界にして２つの領域に分けられる（図 2.1.a）．

初めに A を所有する企業の立場から考える．図 2.1.a における B の位置を前提とすると，A は B に左から隣接すれば最も多くの購買力を得ることができるので，A が B に左から隣接する（図 2.1.b）．

次に B を所有する企業の立場から考える．図 2.1.a における A の位置を前提とすると，B が A を飛び越えて A に左から隣接すると最も多くの購買力を得ることができるので，B が A に左から隣接する（図 2.1.c）．

さらに同様の理由で A が B を飛び越して左から隣接することになり，互いに飛び越すことを繰り返し，最終的には線分の中点（メジアンと呼ばれる）に集まる状態で安定する（図 2.1.d）．このようにどちらの施設も他のどの位置へ施設を動かしても現在の状態よりも多くの需要を獲得できないので，ナッシュ均衡の意味で安定状態である．競合する施設の数が２つの場合には，均衡解が唯一存在することが知られている [26].

一般に，互いに競合する施設の数を n とすると，$n = 3$ の場合，均衡解は存在せず，$n = 4, 5$ の場合，均衡解が唯一存在し，$n \geq 6$ の場合，均衡解が無数に存在することが知られている [18].

2.2.3 Hakimi のモデル

Hotelling の考案したモデルは，その後多くの研究者による研究によって発展がなされてきた．Wendell と McKelvey [71] 等は利用者の分布を一様分布とおくことは現実的でないと考え，有限個の需要点上の分布に置き換え，これらの点を結んだネットワーク上で Hotelling のモデルを考察した．さらに，Hakimi [25] はネットワーク上の競合施設配置問題において，各企業の施設配置の決定を一度のみにし，先に施設を配置する企業と後から配置する企業を仮定した．

Hakimi のモデルにおいて，先手プレイヤーを「先手企業」と呼び，先手企業の配置する施設を A で表す．また，後手プレイヤーを「後手企業」と呼び，後手企業の配置する施設を B で表す．Hakimi は次のようにネットワーク上の競合施設配置問題へと拡張した．

- 後手企業が先手企業の施設の位置を知った後に，獲得可能な購買力が最大になるように施設の配置を決定する問題（メジアノイド問題）
- 先手企業が後から後手企業の施設が配置されることを考慮して，後に奪われる購買力が最小になるように施設の配置を決定する問題（セントロイド問題）

Hakimi は上記の 2 つの問題について以下のように考察した．

需要点に関するデータは V をネットワーク上の全ノード集合として 2.1.1 と同様に扱う．ネットワーク上の各ノードには 2.1.1 における需要点と同様に指標が付随しているとし，ノードの指標集合を I で表す．需要点の位置を要素とするノード集合 $V = \{v_i\}_{i \in I}$ と 2 つの需要点を繋ぐ枝集合 E からなるネットワーク $G(V, E)$ を考える．各需要点 $i \in I$ には購買力を表す w_i が付随し，各枝には距離を表す重みが付随する．

各企業はネットワーク G 内の V 内の全ノード上にのみ施設を配置可能であると仮定する．自然数 a, b について，先手企業と後手企業が施設を各々 a, b 個配置する状況について考える．1 以上 a 以下の自然数 j について，企業 A について j 番目の施設の位置を $u_A^j \in V$ で表す．また，1 以上 b 以下の自然数 k について，企業 B について k 番目の施設の位置を $u_B^k \in V$ で表す．さらに，先手企業及び後手企業の所有する全施設の位置を表すベクトルを各々 $\boldsymbol{u_A} = \{u_A^1, \cdots, u_A^a\} \in V^a$，$\boldsymbol{u_B} = \{u_B^1, \cdots, u_B^b\} \in V^b$ とする．

ネットワーク上におけるノード間の距離は，枝に付随する距離の和が最小となるように通った経路での距離の和で定義される．需要点 $v_i \in V$ と点 $z \in V$ との間の距離を $d(v_i, z)$ で表す．Hakimi のモデルでは，次の仮定が課されている．

1. 施設が提供するサービスは全ての施設で同一である．また，利用者は全ての施設の中で最も近い施設のみを利用する．

2. ある利用者から見て先手企業と後手企業の施設までの距離が等しい場合，その利用者は常に先手企業の施設のみを利用する．

ノード集合に関する部分集合 $Z \subseteq V$ について，需要点 v_i と Z との間の距離を

$$d(v_i, Z) \equiv \inf\{d(v_i, z) | z \in Z\} \tag{2.16}$$

で定義すると，後手企業の施設を利用する需要点の集合は

$$I(\boldsymbol{u_B}|\boldsymbol{u_A}) = \{i \in I|\ d(v_i, \boldsymbol{u_B}) < d(v_i, \boldsymbol{u_A})\} \tag{2.17}$$

で表される．

後手企業の施設配置問題を考察する場合，先手企業の施設は全て配置済みなので $\boldsymbol{u_A}$ はある固定された集合として与えられる．このとき，$\boldsymbol{u_A}$ に対するメジアノイド問題は次のように定式化される．

$$P_B^H:\ \max_{\boldsymbol{u_B}} \quad \sum_{i \in I(\boldsymbol{u_B}|\boldsymbol{u_A})} w_i \tag{2.18}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u_B} \in V^b \tag{2.19}$$

ここで，V^b は V の b 次直積集合である．

ある需要点の部分集合 $I' \subseteq I$ について，I' の補集合を $I \backslash I'$ で表す．このとき，セントロイド問題は以下のように定式化できる．

$$P_A^H:\ \max_{\boldsymbol{u_A}} \quad \sum_{i \in I \backslash I(\boldsymbol{u_B^*}|\boldsymbol{u_A})} w_i \tag{2.20}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u_A} \in V^a \tag{2.21}$$

ここで，$\boldsymbol{u_B^*}$ は問題 (P_B^H) の解である．すなわち，

$$\boldsymbol{u_B^*} \in \arg\max_{\boldsymbol{u_B} \in V^b} \left\{ \sum_{i \in I(\boldsymbol{u_B}|\boldsymbol{u_A})} w_i \right\} \tag{2.22}$$

をみたす．問題 (P_A^H) の解を $\boldsymbol{u_A^*}$ とおくと，$(\boldsymbol{u_A^*}, \boldsymbol{u_B^*})$ はシュタッケルベルグ均衡解となっている．

Hakimi のモデルにおいて，$a = 1$ のときメジアノイド問題は NP 困難であることが知られている [25]．一方セントロイド問題では，$a = 1$ のとき $b \geq 2$ であれば必ずシュタッケルベルグ均衡解はノード上にあり，$b = 1$ であればシュタッケルベルグ均衡解が点上に現れない可能性があるが，多項式時間で求められることが知られている [25]．また，$b = 1, a \geq 2$ のときセントロイド問題は NP 困難であることが知られている [25]．

2.2.4 Drezner のモデル

Drezner [11] のモデルでは，需要点が平面 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上に分布し施設がその平面内の任意の点上に配置可能な状況を取り上げている．需要点に関するデータは $V = \mathbf{R}^2$ として 2.1.1 と同様に扱う．需要点の指標集合を $I = \{1, \cdots, n\}$ により表す．需要点 i の位置及び購買力を各々 $v_i \in \mathbf{R}^2$, $w_i \geq 0$ で表す．このモデルでは先手企業と後手企業が各々 1 つずつ施設を $\mathbf{R}^2$ 内に施設を配置する状況について考察している．先手企業と後手企業の施設を各々 A, B で表す．施設 $F \in \{A, B\}$ の位置を $u_F = (x_F, y_F) \in \mathbf{R}^2$ で表す．後手企業の施設を利用する需要点の集合は

$$I(u_B|u_A) = \{i \in I |\ d(v_i, u_B) < d(v_i, u_A)\} \tag{2.23}$$

で表される．よって，固定された u_A に対するメジアノイド問題は次のように定式化される．

$$P_B^D: \max_{u_B} \sum_{i \in I(u_B|u_A)} w_i \tag{2.24}$$

$$\text{s.t.} \quad u_B \in \mathbf{R}^2 \tag{2.25}$$

また，セントロイド問題は以下のように定式化できる．

$$P_A^D: \max_{u_A} \sum_{i \in I \setminus I(u_B^*|u_A)} w_i \tag{2.26}$$

$$\text{s.t.} \quad u_A \in \mathbf{R}^2 \tag{2.27}$$

ここで，u_B^* は問題 (P_B^D) の解である．すなわち，

$$u_B^* \in \arg \max_{u_B \in \mathbf{R}^2} \left\{ \sum_{i \in I(u_B|u_A)} w_i \right\} \tag{2.28}$$

をみたす．問題 (P_A^D) の解を u_A^* とおくと，(u_A^*, u_B^*) はシュタッケルベルグ均衡解となっている．

問題 (P_B^D) について，次の定理が Drezner [11] によって与えられている．

定理 2.3 施設 A の配置 u_A が与えられているとする．このとき，後手企業にとっての最適配置の一つは u_A 上に乗らないように u_A に接することである．

定理 2.3 より，メジアノイド問題 (P_B^D) は容易に解くことが出来る．また，Drezner [11] は定理 2.3 を利用することにより，以下のアルゴリズムを示した．ここで，2 つの需要点を通る直線によって定義される各半平面に対して指標を付けていき．これらの指標集合を H とおく．各半平面 $h \in H$ に対して，その内に存在する需要点の購買力の和を W_h とおく．

アルゴリズム 2.1

Step 1. 2つの異なる需要点を通る全ての直線を求め，それらの直線によって定義される各半平面 $h \in H$ に対して W_h を求める．

Step 2. W_h の値が大きい順に半平面を並べ替える．$W^{\max} = \max_{h \in H} W_h$，$W^{\min} = \min_{h \in H} W_h$ とおく．

Step 3. もし $W^{\min} < W_h < W^{\max}$ をみたす半平面 h が存在しないならば，Step 5 に行く．

Step 4. $W^{\min} < W_h < W^{\max}$ をみたす全ての半平面について，Step 2 で並び替えた順序に対して購買力の和が中間となる半平面の購買力を W^0 とおく．もし $W_h \geq W^0$ をみたす全ての半平面の共通部分が空でないならば，先手の獲得購買力は W^0 より少ないことが分かる．$W^{\max}$ に W^0 を代入し，Step 3 に戻る．もしこの共通部分が空ならば，先手の獲得購買力は W^0 以上であることが分かる．$W^{\min}$ に W^0 を代入し，Step 3 に戻る．

Step 5. 最後の $W^{\max}$ について，$W_h \geq W^{\max}$ をみたす全ての半平面の共通部分が求める先手企業の最適配置領域である．また，先手の獲得購買力は $W^{\min}$ である．

上記のアルゴリズムにおいて，Step 4 における判定は線形計画法を用いることができる．線形計画問題の計算量は Khachian [37] によって多項式オーダーでしか増加しないことが示されており，Karmarkar [35] によって提案された内点法によって大規模な実際問題を高速に解くことが出来る [38]．Step 4 の判定において線形計画法を用いる際，制約条件の数は直線の数が高々 $n(n-1)/2$ 本であることから，双対問題を解くことにより，Step 4 における計算の手間は $O(n^4)$ となる．また，Step 3 により，Step 4 は高々 $O(\log n)$ 回実行するので，セントロイド問題 (P_A^D) に対する上記のアルゴリズムの計算の手間は $O(n^4 \log n)$ と表されることがわかる．

Drezner のモデルの拡張としては，ユークリッド距離の代わりに直角距離を用いたモデル [52]，3 手までの交互施設配置問題を考察したモデル [66]，限界距離やファジィ概念を用いたモデル [36] などが挙げられる．

先手企業と後手企業の施設が接する解が現実的でない場合はしばしば起こりうる．Drezner [11] は先手企業と後手企業の位置について最低限距離をおくことを問題 (P_A^D), (P_A^D) の制約条件として加えた問題を提案している．本論文では，第 3 章において Drezner のモデルに対して距離に加えて 2.2.5 で述べる施設の質的レベルを考慮することで拡張したモデルを提案し，ある場合において先手企業と後手企業の施設が接しない解をもつことを示している．

2.2.5 Karkazisのモデル

Hotelling, HakimiやDreznerのモデルでは，利用者の施設を選択する上での評価基準が距離のみに依存するとすると仮定していた．Karkazis [34] は利用者の施設を選択する上での評価基準として距離に加えて施設の質的レベルを考慮することでHakimiのモデルを拡張し，定式化されたメジアノイド問題における解法を示している．

Karkazisのモデルで用いる記号は，2.2.3で述べたHakimiのモデルと同様のものを用いる．先手企業と後手企業の施設が配置されるノードの指標集合を各々$\mathcal{A},\mathcal{B}$で表す．

BransとVincke [8] は施設に対して利用者のもつ幾つかの**選好** (preference) を各々評価する関数を用いて，利用者が施設の優劣を比較する際の評価基準を表すことを提案した．この関数を**選好関数** (preference function) と呼ぶ．彼等は多数の利用者について施設の距離や施設の質的評価の差に対する利用者の平均的な反応を見た結果，ガウス型関数

$$f(x) = 1 - e^{-x^2/(2\zeta^2)} \tag{2.29}$$

を用いた評価基準が最適であると考えた．ここで，ζは利用者から見た選好の性質を表す定数である．

２つの施設がノード$j_1, j_2(\in I)$上に配置されているとする．Karkazisは，各需要点上の利用者全体がこれらの施設を比較する際次の２つの基準を用いた競合施設配置問題のモデルを提案した．

(i) **レベル基準**：ノード$j(\in I)$上に配置されている施設の質的レベルを$l(j) \in [0, 1, \cdots, Q]$で表す．ここで，$Q$は施設の建設可能な最大レベルを意味する自然数である．本研究では，施設の質的レベルを単に**レベル**と呼ぶことにする．このとき，２つの施設のレベルに関する比較に用いる選好関数を次式で表す．

$$p_l(j_1, j_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(2\zeta_l^2)} & x = l(j_1) - l(j_2) > 0 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.30}$$

ここで，ζ_lはレベルに関する選好関数の性質を表す定数である．

(ii) **距離基準**：需要点$i(\in I)$上の利用者が２つの施設までの距離の比較に用いる選好関数を次式で表す．

$$p_d^i(j_1, j_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(2\zeta_d^2)}, & x = d(v_i, v_{j_2}) - d(v_i, v_{j_1}) > 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.31}$$

ここで，ζ_dは距離に関する選好関数の性質を表す定数である．

施設配置問題では，2.2.1 において戦略を施設配置と置き換えることにより優越の概念を用いることが出来る．Brans and Mareschal[9] は，優越をより一般化した概念を次のように定義した．

定義 2.4 ((λ,μ)-優越)　λ,μ は $0<\lambda<\mu<1$ をみたす定数とし，$K=\{\hat{l},\hat{d}\}$ とする．K 内のどちらか一方の選好 $\kappa(\in K)$ について

$$p_{\kappa}(j_1,j_2)>\mu \tag{2.32}$$

をみたすとする．このとき，もう一方の選好 $\kappa'\neq\kappa$ について，

$$p_{\kappa'}(j_2,j_1)\leq\lambda \tag{2.33}$$

が成り立つならば，j_1 上の施設は j_2 上の施設に対して「(λ,μ)-優越」((λ,μ)-dominance) であるという．

式(2.32) における μ を「優越レベル」，式(2.33) における λ を「耐性レベル」という．Karkazis のモデルでは，(λ,μ)-優越を需要点 i 上の顧客に関する優越行列によって次のように表している．

$$D^i=\left(D^i_{j_1j_2}\right),\quad j_1,j_2\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B} \tag{2.34}$$

ここで，

$$D^i_{j_1j_2}=\begin{cases}1, & p_{\hat{l}}(j_1,j_2)>\mu \text{ かつ } p^i_{\hat{d}}(j_2,j_1)\leq\lambda \\ & \text{または } p^i_{\hat{d}}(j_1,j_2)>\mu \text{ かつ } p_{\hat{l}}(j_2,j_1)\leq\lambda \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合}\end{cases} \tag{2.35}$$

である．

定義 2.4 を基に，Brans と Mareschal [9] は次の概念に定義した．

定義 2.5 ((λ,μ)-効率)　ノード j_1 上の施設が S 内における他の全ての施設に対して (λ,μ)-優越されない時，j_1 上の施設は「(λ,μ)-効率」((λ,μ)-efficiency) であるという．

選好関数を定義 2.4, 2.5 に当てはめることにより，利用者の立場から施設に関する距離とレベルの 2 種類の判断基準について比較することが出来る．Karkazis のモデルでは，需要点 i 上の利用者に対して全ての (λ,μ)-効率な施設の存在するノードの集合を

$$E^i=\left\{j_1\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\,\middle|\,D^i_{j_1j_2}=0,\ \ \forall j_2\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}\right\} \tag{2.36}$$

で表している．また，需要点 i 上の利用者に対して (λ,μ)-効率な施設の総数を $|E^i|$ で表す．需要点 i 上の購買力は E^i の各要素となる全てのノード上の施設によって等分割されて獲得されると仮定する．このとき，これらの施設の獲得購買力は全て $w_i/|E^i|$ で表される．

Karkazisはネットワーク上の競合施設配置問題について，後手企業の目的関数を両施設の配置後のある一定期間までに獲得可能な利得として表した．単位あたりの獲得購買力に対して，この期間までに獲得可能な利得をα_Bで表す．このとき，後手企業の総獲得利得は獲得購買力とα_Bとの積で表される．ノードj上にレベル$l(j)$の施設を配置した時にこの期間までにかかる建設費・維持費等を全て含めた費用を$f_j^{l(j)}$で表す．後手企業には上記の費用の総和が正数M以下に抑える必要があると仮定する．このとき，Karkazisのモデルにおけるメジアノイド問題P_B^Kは，後手企業の利得最大化問題として次のように定式化できる．

$$P_B^K: \max_y \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\alpha_B\frac{w_i}{|E^i|}x_{ij} - \sum_{j\in N} f_j^{l(j)} y_j \tag{2.37}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in I} f_j^{l(j)} y_j \le M, \quad \forall x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \tag{2.38}$$

$$\sum_{j\in I} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I, \tag{2.39}$$

$$x_{ij} \le y_i, \quad \forall i,j \in I \tag{2.40}$$

ここで，$x_{ij}=1$のとき需要点i上の利用者が点jの施設を利用し，$x_{ij}=0$のときは利用しないことを意味し，$y_i=1$のとき点jに企業Bの施設が存在し，$y_i=0$のときは存在しないことを意味する．よって，問題P_B^Kは$y=(y_j)_{j\in I}$を決定変数とする0-1整数計画問題である．

問題P_B^Kはラグランジュ乗数を用いたLP緩和問題に変換され，さらに変換するとナップサック問題になる．ナップサック問題はNP困難であり厳密解を求めるのに計算時間がかかるので，Karkazis [34]は近似的な解を導出するためのアルゴリズムを用いた．また武田 [62]は，この問題の厳密解を効率的に求めるためのアルゴリズムを考案した．

2.3 施設配置問題の拡張

本節では施設配置問題の拡張に関する事柄について述べる．2.3.1では，あいまい性を考慮した施設配置問題を考察するときに用いるファジィ理論について説明する．2.3.2では，施設配置問題を多目的問題として拡張することの意義，及び多目的問題に用いられる概念について述べる．2.3.3節では，進路方向に制約がある場合の施設配置問題を考察するときに用いられる距離尺度のA-距離について述べる．

2.3.1　ファジィ理論

人間の主観的思考や主観的判断には「あいまいさ」が含まれると考えられる．Zadeh [74] はこのあいまいさを定量的に解析するために，「ファジィ集合」の概念を提案した．Dubois と Prade [13] はこのファジィ集合の概念を基に「ファジィ数」の定義を与えた．以下では，ファジィ数の定義及びそれに関連する事柄について述べる [24].

数学分野における測度論等では，ある集合 S を特徴付ける関数として次の特性関数が用いられる．

$$c_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S \end{cases} \tag{2.41}$$

ところが，集合 S の境界があいまいな場合，式 (2.41) の特性関数では表現することが出来ない．Zadeh [74] は特性関数を次のように拡張することでファジィ集合を定義した．

定義 2.6 全体集合 X に対して，集合 $\tilde{S}$ が特性関数 $\mu_{\tilde{S}} : X \to [0,1]$ によって表されるとき，$\tilde{S}$ をファジィ集合と呼ぶ．また，$\mu_{\tilde{S}}$ を $\tilde{S}$ の**メンバーシップ関数**と呼び，X 内の点 x におけるメンバーシップ関数の値を x の**帰属度**と呼ぶ．

メンバーシップ関数は数理計画問題における目的関数としても用いられる．例えば，目標 G の達成水準を「だいたい g^U 以上にしたい」という場合，達成水準 $g(x)$ が g^U 以上ならばメンバーシップ関数の値は 1 をとり，それより小さいが g^L 以上ならば 1 以下だが 0 より大きい値をとり，g^L より小さいならば 0 をとるようなメンバーシップ関数によって特徴付けるといったものである．このような目的関数を**ファジィ目標** (fuzzy goal) といい，Bellman と Zadeh [4] によって提案されたフレキシブル計画法 [75, 76] 等により用いられている．

また，次の定義はファジィ集合に関してよく用いられる概念である．

定義 2.7 $\tilde{S}$ を全体集合 $\mathbf{R}^n$ 上のファジィ集合とする．このとき，次の集合

$$\tilde{S}_\alpha = \begin{cases} \{x \in \mathbf{R}^n |\ \mu_{\tilde{S}}(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathrm{cl} \bigcup_{\bar{\alpha} \in (0,1]} \tilde{S}_{\bar{\alpha}}\ , & \alpha = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

を $\tilde{S}$ の **α-カット**と呼ぶ．ここで，cl は閉包を表す．

次の集合

$$\mathrm{supp}(\tilde{S}) = \mathrm{cl}\{x \in \mathbf{R}^n |\ \mu_{\tilde{S}}(x) > 0\} \tag{2.43}$$

を $\tilde{S}$ のサポートといい，$\tilde{S}$ の 0-カットに等しいことは明らかである．本研究では，サポートが有界なファジィ集合についてのみ扱う．以上の定義を基に，ファジィ数を次のように定義する．

定義 2.8 $\tilde{S}$ を全体集合 $\mathbf{R}$ 上のファジィ集合とする．次の4つがみたされるとき，$\tilde{S}$ を**サポートが有界なファジィ数**という．

- $\mu_{\tilde{S}}(m) = 1$ を満たす実数 $m(\in \mathbf{R})$ が唯一存在する．
- $\mathrm{supp}(\tilde{S})$ は $\mathbf{R}$ における有界集合である．
- $\mu_{\tilde{S}}$ は $\mathbf{R}$ 上で準凹である．
- $\mu_{\tilde{S}}$ は $\mathbf{R}$ 上で上半連続である．

定義2.4で与えた実数 m をファジィ数 $\tilde{S}$ のセンターと呼ぶ．サポートが有界なファジィ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}_b$ で表す．本研究ではファジィ数間の種々の演算を取り扱うが，$\mathcal{F}_b$ の要素間でこれらの演算を実行するのは困難である．本研究では，以下で定義する Dubois と Prade [13] によって導入された L ファジィ数の概念を用いてあいまいな数を表すことにする．

はじめに L ファジィ数を定義する上で重要な役割を果たす型関数の定義について述べる．

定義 2.9 関数 $L : \mathbf{R} \to [0, 1]$ が以下の5つの条件をみたすとする．

- $L(x) = L(-x), \forall x \in \mathbf{R}.$
- $L(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0.$
- $L(x)$ は $[0, \infty)$ 上で単調非増加．
- L は $\mathbf{R}$ 上で上半連続．
- $t_0 = \sup\{x > 0 | L(x) > 0\}$ とおいたとき，$0 < t_0 < +\infty$ が成り立つ．

このとき，関数 L を**サポートが有界な型関数**であるという．

定義2.9で与えられた t_0 を L の**零点**という．型関数の代表的なものとしては以下のような例 (i),(ii) が挙げられる．

(i) 三角型関数

$$L(x) = \begin{cases} \max\{1 - (x/t_0), 0\}, & x \geq 0, \\ \max\{1 + (x/t_0), 0\}, & x < 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

(ii) サポートが有界なベル型関数

$$L(x) = \frac{\max\{\exp(-x^2) - \epsilon, 0\}}{1 - \epsilon} \tag{2.45}$$

ここで，ϵ は $0 < \epsilon < 1$ をみたす数で適当に小さくとるものとする．

Dubois と Prade [13] によって導入された L ファジィ数は次のように定義される．

定義 2.10 型関数 $L:\mathbf{R}\to[0,1]$ について，m を任意の実数，β を任意の正数とする．ファジィ数 $\tilde{S}$ について，そのメンバーシップ関数が

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=L\left(\frac{x-m}{\beta}\right),\quad x\in\mathbf{R} \tag{2.46}$$

で表されるとする．このとき，$\tilde{S}$ を L ファジィ数と呼び，$\tilde{S}$ は型関数 L によって生成されるという．

式 (2.46) における β をスプレッドと呼ぶ．L ファジィ数の全体からなる集合を $\mathcal{F}_L$ で表す．メンバーシップ関数式 (2.46) をもつ L ファジィ数 $\tilde{S}$ を，以後簡単のために

$$\tilde{S}=(m,\beta)_L \tag{2.47}$$

というパラメータ表現を用いて表すことにする．

次に，ファジィ数間の順序関係に関する定義について述べる．本研究では，Ramík と Římánek [56] によって提案された「ファジィ・マックス順序」について述べる．

定義 2.8 より，サポートが有界なファジィ数の α-カットは任意の α に対して単一の有限閉区間であることが分かる．サポートが有界なファジィ数 $\tilde{S}$ の α-カットの左端点及び右端点の値を各々 $\min\tilde{S}_\alpha$, $\max\tilde{S}_\alpha$ と表す．次の定義は Ramík と Římánek [56] によって与えられたものである．

定義 2.11 ファジィ数 $\tilde{S}^1,\tilde{S}^2\in\mathcal{F}_b$ に対して順序関係 $\preceq$ を次式で定義する．

$$\tilde{S}^1\preceq\tilde{S}^2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\max\tilde{S}^1_\alpha\leq\max\tilde{S}^2_\alpha\right)\,\&\,\left(\min\tilde{S}^1_\alpha\leq\min\tilde{S}^2_\alpha\right),\quad \alpha\in[0,1] \tag{2.48}$$

この $\preceq$ を**ファジィ・マックス順序**という．

定義 2.11 より，$\mathcal{F}_b$ 上でファジィ・マックス順序は半順序関係をなすことが分かる．一般に，与えられたファジィ数の集合の中からファジィ・マックス順序に関して最大あるいは最小のものを求める場合，互いに順序のつかないファジィ数のグループが存在する．このグループに属する全てのファジィ数を解として求める場合，問題の規模が大きければグループ内に非常に多くの解が存在することになる．上記のような解を出来るだけ多く，場合によってはそれらの全てを検出するために，本研究では古川 [23] によって提案されたパラメトリックな順序関係を用いる．

型関数 L のサポートの右端点を t_0^L で表す．古川 [23] によって提案された L ファジィ数間のパラメトリックな順序関係は次のように定義される．

定義 2.12 λ を $0 \leq \lambda \leq 1$ で任意に固定する．このとき 2 つの L ファジィ数 $\tilde{S}^1 = (p, \beta^1)_L$, $\tilde{S}^2 = (q, \beta^2)_L$ の間に，λ をパラメータとする順序関係 $\leq_\lambda$ を次式で定義する．

$$\tilde{S}^1 \leq_\lambda \tilde{S}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} \quad \lambda t_0^L \beta^1 + p < \lambda t_0^L \beta^2 + q, \ \beta^2 > \beta^1 \\ \qquad \text{または} \\ \text{(b)} \quad \lambda t_0^L \beta^1 + p \leq \lambda t_0^L \beta^2 + q, \ \beta^2 \leq \beta^1 \end{cases} \tag{2.49}$$

上記の定義より，順序関係 $\leq_\lambda$ について次の定理が導かれる．

定理 2.13 L をサポートが有界な任意の型関数とする．このとき，定義 2.12 で与えられた $\leq_\lambda$ は任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $\mathcal{F}_L$ 上で全順序関係をなす．

本研究において $\mathcal{F}_L$ 内の要素を比較する場合において順序関係 $\leq_\lambda$ を適応するものとする．すなわち，最小化あるいは最大化問題における min あるいは max は，ある値に固定されたパラメータ λ に対する $\leq_\lambda$ を適応した場合の比較による最大あるいは最小を意味する．

次に値域が $\mathcal{F}_L$ の部分集合をなす関数について，順序関係 $\leq_\lambda$ を用いることで実数値関数と同様の定義を与える．

関数 $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathcal{F}_L$ について，任意の 2 要素 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$, $x_1 \leq x_2$ に対して $\tilde{f}(x_1) \leq_\lambda \tilde{f}(x_2)$ が成り立つとき，$\tilde{f}$ は **λ-非減少**であるといい，任意の λ に対して λ-非減少であるとき，単に**非減少**であるという．また，$\tilde{f}(x_2) \leq_\lambda \tilde{f}(x_1)$ が成り立つとき，$\tilde{f}$ は **λ-非増加**であるといい，任意の λ に対して λ-非増加であるとき，単に**非増加**であるという．

任意の $t \in [0, 1]$ について，$\tilde{f}(tx_1 + (1-t)x_2) \leq_\lambda t\tilde{f}(x_1) + (1-t)\tilde{f}(x_2)$ が成り立つとき，$\tilde{f}$ は **λ-凸**であるといい，任意の λ に対して λ-凸であるとき，単に**凸**であるという．また，$t\tilde{f}(x_1) + (1-t)\tilde{f}(x_2) \leq_\lambda \tilde{f}(tx_1 + (1-t)x_2)$ が成り立つとき，$\tilde{f}$ は **λ-凹**であるといい，任意の λ に対して λ-凹であるとき，単に**凹**であるという．

ある自然数 $m \leq n$ について，各 $y_1 \in \mathbf{R}^m$, $y_2 \in \mathbf{R}^{n-m}$ に対して，$\tilde{f}(y_1, \cdot)$ 及び $\tilde{f}(\cdot, y_2)$ が共に凸であるとき，$\tilde{f}$ は **λ-複凸**であるといい，任意の λ に対して λ-複凸であるとき，単に**複凸** (bi-convex) であるという．また，$\tilde{f}(y_1, \cdot)$ 及び $\tilde{f}(\cdot, y_2)$ が共に凹であるとき，$\tilde{f}$ は **λ-複凹**であるといい，任意の λ に対して λ-複凹であるとき，単に**複凹** (bi-concave) であるという．

2.3.2 多目的問題

競合施設配置問題では施設を配置する企業の目的のみを考慮して最適配置を求めている．ここでは，企業の目的に加えて新たに利用者の立場も考慮した多目的問題について考察する．

「企業の利得に関する競合施設配置問題の均衡解は，施設を利用する顧客の立場から見て最適であろうか？」この課題に関して 2.2.2 で述べた Hotelling のモデルで考察された結

果を紹介する [50].

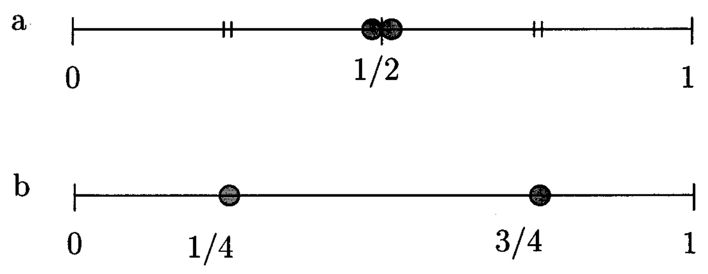

図 2.2: Hotellingのモデルにおける均衡解 (a) と最適解 (b)

Hotellingのモデルにおける均衡解において，2つの施設の配置は図 2.2.aのように線分のメジアンに集まった状態になる．一方，顧客の立場から見た施設配置の目的は，2.1.1 で述べたウェーバー問題のように利用者の利便性を追求することが考えられる．利用者の利便度を最も近い施設までの距離で表し，利用者全体の利便度を最近隣施設までの距離の平均によって評価する．このとき，この施設配置のモデルを利便度最大化問題として定式化を行ったとき，2つの施設の最適配置は図 2.2.b のように求められる．

図 2.2.a,b において，各企業の獲得購買力は同じである．このことは，図 2.2.b のように施設の立地規制をしていくと，顧客の利便度が最大になるばかりでなく，企業活動の点からも規制が無い時と同じ購買力を得ることが出来ることを示している．以上より，企業の施設配置を顧客の要求に従って規制することが，企業にとって必ずしも獲得購買力を減少させる要因でないことを示している．

本研究では，企業・利用者の各々の立場から目的関数を与えることにより，多目的問題として考察する．以下では多目的問題における解の概念の一つである非劣解について述べる [48].

意思決定者の実行可能集合を X で表し，意思決定者が X の中から x を選んだときの n 個の目的関数を $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ とおく．X 内の 2 つの異なる要素 x^1,x^2 について，$f_1(x^1)\le f_1(x^2),\cdots,f_n(x^1)\le f_n(x^2)$ が成り立つとき，x^1 は x^2 に**弱優越される** (weakly dominated) という．また，少なくとも一つの目的関数について $f_i(x^1)<f_i(x^2)$, $1\le i\le n$ であるとき，x^1 は x^2 に**優越される** (strictly dominated) という．また，X 内の要素 x について $X\backslash\{x\}$ 内に優越される要素が存在しない場合，x は**非劣解** (non-dominated solution) であるという．多目的問題における解の定義の一つとして，幾つかのあるいは全ての非劣解を求めることが挙げられる．

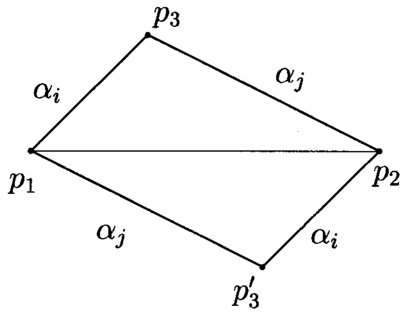

図 2.3: A-距離

2.3.3 A-距離

施設配置問題において，2 点間の距離をどのように測るかは重要な問題である．平面上の場合，一般にユークリッド距離，あるいは直角距離が使われてきた．しかし，いずれの場合においても実際の施設配置問題で必ずしも適用できない状況が存在する．このような状況において，方向制約のある A-距離 [42]，l_p-距離 [12] や非対称距離 [41] 等による距離尺度が採用された施設配置問題が考察されている [31]．ここでは，Widmayer 等 [73] によって研究された A-距離に注目する．A-距離とは与えられた複数の方向によって定まる距離であり，VLSI の配線などに有用な距離尺度として知られている．以下では，A-距離の性質について述べる．

自然数 a について，平面 $\mathbf{R}^2$ 内の任意の点において移動可能な方向が a 個あるとし，これら方向の集合を次のように表す．

$$A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_a\} \tag{2.50}$$

ここで，α_k, $k = 1, \cdots, a$ は直交座標系において x 軸となす角度によって表される方向を意味し，$0 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_a < \pi$ をみたすとする．$\mathbf{R}^2$ 内の直線，半直線，線分の方向が A に属するとき，これらは **A-方向** (A-oriented) であるという．

定義 2.14 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の任意の 2 点 p_1, p_2 間の **A-距離** (A-metric) を次式で定義する．

$$d_A(p_1, p_2) \equiv \begin{cases} d_2(p_1, p_2), & p_1, p_2 \text{ が一つの } A\text{-方向直線上にある場合,} \\ \min\limits_{p_3 \in R}\{d_A(p_1, p_3) + d_A(p_3, p_2)\}, & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{2.51}$$

ここで，$d_2(p_1, p_2)$ は p_1, p_2 間のユークリッド距離を表す．

図 2.3 で示されるように，$d_A(p_1, p_2)$ は p_1, p_2 以外の高々 1 つの点を用いて，その点を頂点とする平行四辺形の隣り合う二辺の距離の和によって表すことが出来る，すなわち，以

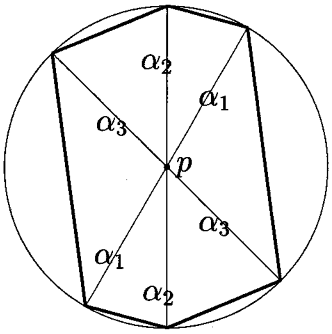

図 2.4: A-円（$A = \{\pi/6, \pi/2, 3\pi/4\}$）

下の式で表される点 p_3 が存在する．

$$d_A(p_1, p_2) = d_2(p_1, p_3) + d_2(p_3, p_2) \tag{2.52}$$

施設配置問題でよく用いられている直角距離は $A = \{0, \pi/2\}$ の場合であるので，A-距離は直角距離の概念の一般化と考えられる．また，ユークリッド距離は方向の数 a が非加算無限大の場合で，A-距離の極限として考えられる．

次に，A-円と呼ばれる A-距離における円について述べる．

定義 2.15 ある点 p と距離 d に対して，$d(p', p) = d$ をみたす全ての点 p' の軌跡を中心 p，半径 d の **A-円** (A-circle) という．

図 2.4 のように，中心 p，半径 d の A-円は，点 p を通る A 方向直線と中心 p，半径 d のユークリッド直線の意味での円との交点を頂点とする $2a$ 角形の境界で表される．

2 点 p_1, p_2 に対して，$d(p_1, p'') = d(p_2, p'')$ をみたす全ての点 p'' の軌跡を p_1, p_2 に関する**二等分線** (bisector) という．

次に，地理的情報処理の分野で発展した計算機科学の代表的な問題である「ボロノイ図」について述べる．

ある地域に複数の施設が存在する場合を考える．その地域内の利用者は分布が既知である需要点上にのみ存在しており，利用者は再近接の施設を利用すると仮定する．このとき，与えられた施設の分布に対して利用者がどこの施設を利用するかを知ることは重要な情報であり，このことは地域を各需要点に対して重なりのない領域に分割することで知ることが出来る．このように分割された領域の集合からなる全体の幾何図形を**ボロノイ図** (Voronoi diagram) といい，以下のように定義する．

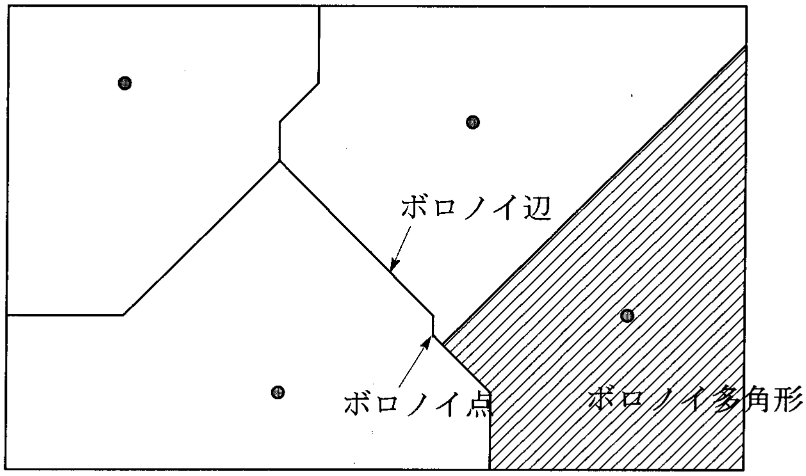

図 2.5: A-距離の場合のボロノイ図（$A = \{0, \pi/2\}$）

定義 2.16 平面上の v 個の点に関する集合を $\boldsymbol{P} = \{p_1, \cdots, p_v\}$ とする．このとき，点 p_i に対する**ボロノイ多角形**は

$$V_A(p_i) = \bigcap_{j \neq i} \{x \in \mathbf{R}^2 | d(x, p_i) \leq d(x, p_j)\} \tag{2.53}$$

によって定義される．$\boldsymbol{P}$ に属する各点を母点といい，ボロノイ多角形の集まり $\{V_A(p_1), \cdots, V_A(p_v)\}$ よりなる全体の幾何図形を母点 $p_1, \cdots, p_v$ よりなるボロノイ図といい，$VD_A(\boldsymbol{H})$ で表す．また，ボロノイ多角形の頂点及び辺を各々**ボロノイ点**，**ボロノイ辺**という．ボロノイ辺は，その両側にある 2 つの母点に対する二等分線の一部である．

ボロノイ図 $VD_A(\boldsymbol{P})$ を構成するのにかかる計算時間は高々$O(v \log v)$ であることが知られている [73]．図 2.5 に $A = \{0, \pi/2\}$ の場合における A-距離，すなわち直角距離に対するボロノイ図を示す．

ボロノイ図は，緊急施設配置問題の解法において，幾何学的な方法により重要な情報を提供する．緊急を要するサービスの提供は出来るだけ早く行われることが求められる．このことから，ボロノイ図により各母点毎の支配領域を求めることは，各需要点にサービスを提供できる再近隣の施設を決定することを意味している．すなわち，各ボロノイ領域内の需要点は，その領域の母点にあたる施設によりサービスを受けると考えることが出来る．従って，サービスを提供できる複数の施設が存在する場合に，施設配置を評価するための各需要点と施設との間の距離を決定することが出来るようになる．

第3章　施設の質的側面を考慮した競合施設配置問題

3.1　緒言

前章の2.2.2から2.2.4で述べた施設配置モデルでは，利用者が複数の施設から利用する施設を選択する基準として，施設までの距離のみを用いていた．この前提は，例えばコンビニエンスストアやガソリンスタンドのように，施設の提供するサービスがほぼ一様であるとみなせる場合には妥当であると考えられる．しかし，例えばスーパーマーケットや百貨店のように，商品の品揃え等による施設のサービスに格差がある場合にはこの前提が使えるとは限らない．

本章では，2.2.4で説明したDreznerのモデルに施設の質的側面を考慮することで拡張した競合施設配置のモデルを提案する．利用者は施設の質的評価を幾つかのクラスに分類することで行うと仮定し，2.2.5で説明したKarkazisのモデルと同様に質的レベルにより表す．Karkazisのモデルでは利用者が施設を比較する際，施設・利用者間の距離及び施設の質的レベルを (λ, μ)-優越の概念を用いることで評価した．本章では，利用者の施設に対する評価をその位置及びレベルに対する関数として表す．施設評価には様々な関数が考えられるが，本章ではその一つとしてレベルに対する施設の質的評価値と距離との積を用いて評価する．この評価は双方の施設のレベルが等しい場合にはDreznerのモデルと同様であり，このモデルにおける性質を部分的に用いることが出来る．また，レベルが異なる場合には各施設を利用する需要点の存在領域は円の内側あるいは外側で表され，現実の施設配置問題において妥当であると考えられる．3.2節では，競合環境における施設配置のモデルの構築を行い，先手企業・後手企業の各々に対する利得最大化問題として定式化を行う．3.3節では，メジアノイド問題及びセントロイド問題に対する解法手順を述べる．3.4節では，数値例に対するこの解法による計算結果を載せる．最後に，3.5節では本章の研究の成果についてまとめる．

3.2　問題の定式化

本節では，距離と施設の質的レベルを考慮することで Drezner のモデルを拡張したモデルを提案し，先手・後手企業における利得最大化問題として定式化する．

前章の 2.2.4 と同様に，需要点の指標集合を $I = \{1, \cdots, n\}$ とおく．需要点 $i \in I$ の位置及び購買力を各々 $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2$, $w_i \geq 0$ で表す．先手企業と後手企業の施設を各々 A, B で表す．施設 $F \in \{A, B\}$ の位置を $u_F \in \mathbf{R}^2$ で表す．2.2.5 と同様に，F のレベルを $l_F \in \{1, \ldots, Q\}$ で表す．ここで，Q は施設の最大レベルを意味する自然数である．レベル $l \in \{1, \cdots, Q\}$ の施設について，この施設の質的評価値を $k(l)$ で表す．ここで，次の関係式をみたすとする．

$$\infty > k(1) > \cdots > k(Q) \geq 1 \tag{3.1}$$

また，各企業の施設配置における実行可能領域を $T \equiv \mathbf{R}^2 \times \{1, \cdots, Q\}$ で表す．

Drezner のモデルでは，利用者は施設までの距離のみを選考基準として利用する施設を選択すると仮定していた．このとき，各施設の利用者存在領域は両施設までの距離に関する二等分線で分割される．距離・レベルを考慮した施設配置モデルでは施設に対する領域の分割には様々な方法が考えられるが，本研究のモデルでは施設 A 及び B を利用する需要点の指標集合を各々次のように表す．

$$N_A = \{i \in I |\ k(l_A)d(u_A, v_i) \leq k(l_B)d(u_B, v_i)\}, \tag{3.2}$$

$$N_B = \{i \in I |\ k(l_A)d(u_A, v_i) > k(l_B)d(u_B, v_i)\} \tag{3.3}$$

このとき，Drezner のモデルと同様に $N_A \cap N_B = \emptyset$, $N_A \cup N_B = I$ となっている．

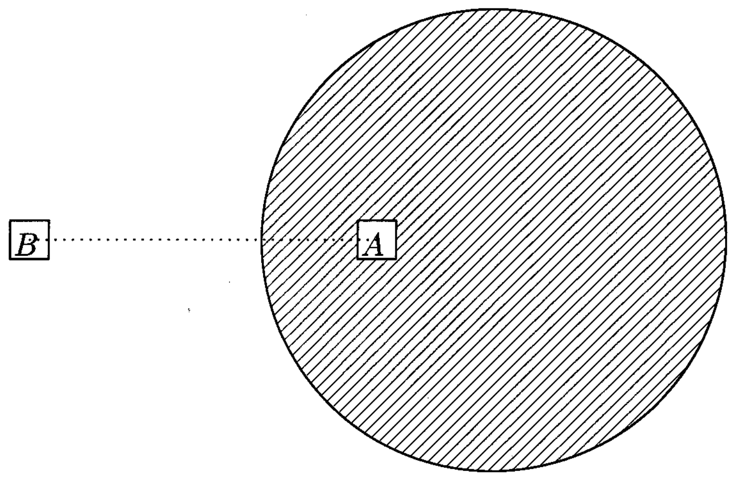

図 3.1: A を利用する需要点の存在領域（$l_A < l_B$）

$l_A < l_B$ の場合における A を利用する需要点の存在領域は図 3.1 の斜線部分（境界を含む）のように表され，B を利用する需要点の存在領域はそれ以外の領域として表される．施設のレベルが異なる場合において，レベルの低い施設の利用者存在領域が円形であるという仮定は，現実問題においても適応可能であると考えられる．

本研究では 2.2.5 と同様に，各企業の目的関数を両施設の配置後のある一定期間までに獲得可能な利得として表す．単位あたりの獲得購買力に対して，この期間までに F が獲得可能な利得を α_F で表す．このとき，F から得られる総利得は獲得購買力と α_F との積で表される．平面 $\mathbf{R}^2$ 内にレベル l_F の施設 F を配置したときにこの期間までにかかる建設費・維持費等を全て含めた費用を $C_F(l_F)$ で表す．ここで，この関数は次の関係式をみたすとする．

$$0 \leq C_F(1) < \cdots < C_F(Q) < \infty \tag{3.4}$$

F を配置した企業が得られる利得を

$$r_F(u_A, l_A, u_B, l_B) = \alpha_F \cdot \sum_{i \in N_F} w_i - C_F(l_F) \tag{3.5}$$

により評価する．なお，各企業の施設配置が与えられている場合には，$r_F(u_A, l_A, u_B, l_B)$ を単に r_F で表す．

後手企業が施設配置するとき，A は既に配置されているので (u_A, l_A) は固定されている．このとき，メジアノイド問題は次のように定式化できる．

$$P_B^Q: \max_{u_B, l_B} \quad r_B(u_A, l_A, u_B, l_B) \tag{3.6}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{3.7}$$

一方，先手企業は B が問題 (P_B^Q) の最適解となるように配置されるという条件の下に A を配置する．このとき，セントロイド問題は次のように定式化できる．

$$P_A^Q: \max_{u_A, l_A} \quad r_A(u_A, l_A, u_B^*, l_B^*) \tag{3.8}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_A, l_A) \in T \tag{3.9}$$

ここで，(u_B^*, l_B^*) は問題 (P_B^Q) の解である．すなわち，

$$(u_B^*, l_B^*) \in \arg \max_{(u_B, l_B) \in T} r_B(u_A, l_A, u_B, l_B) \tag{3.10}$$

をみたす．問題 (P_A^Q) の解を (u_A^*, l_A^*) とおくと，$(u_A^*, l_A^*, u_B^*, l_B^*)$ はシュタッケルベルグ均衡解となっている．次節では，各企業に対する最適配置を求める為の解法を提案する．

3.3 解法手順

本節では，前節のメジアノイド問題 (P_B^Q) 及びセントロイド問題 (P_A^Q) に対する解法について述べる．

3.3.1 解法の概要

提案する解法では，与えられた A,B のレベルにおける全ての組み合わせに対して，各企業が最適な位置に配置したときに得られる利得を比較する．すなわち，あるレベルの組 (l_A,l_B) が与えられているとき，この組に対する A,B の最適な位置が得られ，これが問題 (P_A^Q) と (P_B^Q) の解の候補となる．以下では求められた各施設の位置を候補解ということにする．A,B のある固定されたレベルを各々 $a_1,a_2 \in \{1,\cdots,Q\}$ で表す．A,B のレベルの組 (a_1,a_2) が与えられているときの A の最適な位置を $u_A^{(a_1,a_2)}$ で表す．ある組について，A,B に対する問題 (P_A^Q) 及び (P_B^Q) の候補解を各々 $(\bar{u}_A,\bar{l}_A)$, $(\bar{u}_B,\bar{l}_B)$ で表す．さらに，A,B に対する問題 (P_A^Q) 及び (P_B^Q) の最適解を各々 (u_A^*,l_A^*), (u_B^*,l_B^*) で表す．

アルゴリズム 3.1

Step 1. $(a_1,a_2)=(1,1)$ とおく．

Step 2. (a_1,a_2) に対する $u_A^{(a_1,a_2)}$ を求める．

Step 3. もし $a_2<Q$ ならば，$a_2 \leftarrow a_2+1$ とし，Step 2 に戻る．もし $a_2 \geq Q$ かつ $a_1<Q$ ならば，$a_1 \leftarrow a_1+1$ 及び $a_2=1$ として Step 2 に戻る．もし $a_2 \geq Q$ かつ $a_1 \geq Q$ ならば，Step 4 に行く．

Step 4. $a_1=0$, $r_A^*=r_B^*=0$, 及び $\bar{r}_A=\bar{r}_B=0$ とおく．

Step 5. もし $a_1 \geq Q$ ならば，(u_A^*,l_A^*) 及び (u_B^*,l_B^*) が問題 (P_A^Q) 及び (P_B^Q) における最適解となり，このアルゴリズムを終了する．もし $a_1<Q$ ならば，$a_1 \leftarrow a_1+1$, $a_2=1$, 及び $b=1$ とおく．

Step 6. $(\bar{u}_A,\bar{l}_A)=(u_A^{(a_1,a_2)},a_1)$ とおく．A の配置が $(\bar{u}_A,\bar{l}_A)$ で $l_B=b$ に固定された場合において，問題 (P_B^Q) での最適な位置 u_B を求める．

Step 7. もし $r_B>\bar{r}_B$ ならば，$(\bar{u}_B,\bar{l}_B)=(u_B,b)$, $\bar{u}_A=u_A$, $\bar{r}_A=r_A$, 及び $\bar{r}_B=r_B$ とおく．もし $b<Q$ ならば，$b \leftarrow b+1$ とおき，Step 6 に戻る．

Step 8. もし $r_A^* > \bar{r}_A$ ならば，$r_A^* = \bar{r}_A$, $r_B^* = \bar{r}_B$, $(u_A^*, l_A^*) = (\bar{u}_A, \bar{l}_A)$, 及び $(u_B^*, l_B^*) = (\bar{u}_B, \bar{l}_B)$ とおく．もし $a_2 < Q$ ならば，$a_2 \leftarrow a_2 + 1$ 及び $b = 1$ とし，Step 6 に戻る．$a_2 \geq Q$ ならば，Step 5 に戻る．

上記のアルゴリズムの Step 3 及び 6 において，あるレベルの組における A, B の最適な位置を見つける必要がある．今，レベルの組について次の 3 つの場合 (a)-(c) に分けて考える．

(a) $l_A = l_B$ の場合，A, B の最適な位置を見つける問題は 2.2.4 で説明した Drezner のモデルの問題 (P_A^D) 及び (P_B^D) に等価である．A, B の最適な位置を求める為のアルゴリズムは Drezner [11] によって提案されたアルゴリズム 2.1 を用いることができる．

(b) $l_A < l_B$ の場合，次の命題は B の最適な位置を求めるのに役に立つ．

命題 3.1 u_A が与えられていて，$l_A < l_B$ とする．そのとき，B の最適な位置の一つは u_A である．

証明

もし $u_B = u_A$ ならば，u_A 上の点を除く任意の需要点 i に対して，次の関係式が成り立つ．

$$k(l_A)d(u_A, v_i) > k(l_B)d(u_B, v_i) \tag{3.11}$$

$\mathbf{R}^2$ 上のどの位置に B が配置されても，u_A 上の利用者から購買力を獲得することは明らかにできない．従って，B の最適な位置の一つは u_A 上である． □

命題 3.1 から，A, B の最適な位置を求めるための次の定理が得られる．

定理 3.2 $l_A < l_B$ とする．このとき，A の最適な位置は最大購買力をもつ需要点上において与えられ，B の最適配置は A と同じ位置である．

(c) 最後に $l_A > l_B$ の場合について，A, B に対する最適な配置を求める為のアルゴリズムを構築する必要がある．3.3.2 では，B に対する厳密に最適な位置を求める為のアルゴリズムを構築し，3.3.3 では，A に対する近似的に最適な位置を求める為のアルゴリズムを構築する．よって，本節で提案するアルゴリズムにおいて導出される問題 (P_A^Q) の最適解における目的関数値は先手企業にとって下限値となる．但し，後手企業については両企業の目的関数値の和が一定でないことから，常に上限値となるとは限らない．

3.3.2 メジアノイド問題における解法

ここでは u_A が固定されていて各施設のレベルが $l_A > l_B$ と与えられている場合において，B の最適な位置を求めるための解法手順を提案する．

需要点のある部分集合 $I_\omega(\subseteq I)$ が与えられているとする．B が I_ω 内の需要点から全ての需要点を獲得できたかどうかを評価するパラメータを $\sigma_\omega \geq 0$ とおく．部分集合 I_ω に対して，次の問題を考察する．

$$P_B^{I_\omega}: \min \quad \sigma_\omega \tag{3.12}$$

$$\text{s.t.} \quad u_\omega \in \bigcap_{i\in I_\omega} \left\{ u \in \mathbf{R}^2 \middle| k(l_B)d(u,v_i) \leq \sigma_\omega \cdot k(l_A)d(u_A,v_i) \right\}, \tag{3.13}$$

$$\sigma_\omega \in [0,\infty) \tag{3.14}$$

問題 $(P_B^{I_\omega})$ の最適解を $(u_\omega^*,\sigma_\omega^*)$ とおく．式 (3.2) から，もし $\sigma_\omega^* < 1$ ならば，B は点 u_ω^* 上に施設を配置することで，I_ω 内の全ての需要点から購買力を獲得できる．また，もし $\sigma_\omega^* \geq 1$ ならば，B は $\mathbf{R}^2$ 上のどの点に配置しても I_ω 内の需要点の一部からしか購買力を獲得できない．このことは問題 $(P_B^{I_\omega})$ の最適解について $\sigma_\omega^* < 1$ をみたす u_ω^* が B の候補解となることを意味する．

次に，問題 $(P_B^{I_\omega})$ の解の導出方法を考察する．式 (3.13) から，問題 $(P_B^{I_\omega})$ の実行可能領域は凸集合である．また，式 (3.12) から問題 $(P_B^{I_\omega})$ の目的関数は線形関数である．従って，問題 $(P_B^{I_\omega})$ の最適解は実行可能領域の境界上に存在する，すなわち，

$$k(l_B)d(u_\omega,v_i) = \sigma_\omega \cdot k(l_A)d(u_A,v_i) \tag{3.15}$$

をみたす I_ω 内の需要点が幾つか存在する．式 (3.15) をみたす需要点の数に関して次の 3 つの場合 (i)-(iii) に分けて考察する．

(i) [**一つの需要点のみ**] これは明らかに I_ω が 1 点からなる集合の場合以外にはありえない．I_ω 内の唯一の要素を $\bar{i}$ とする．このとき，問題 $(P_B^{I_\omega})$ の解は $(u_\omega^*,\sigma_\omega^*) = (v_{\bar{i}},0)$ で表される．

(ii) [**二つの需要点**] 以下の式をみたす I_ω 内の需要点を i_1,i_2 とおく．

$$k(l_B)d(u_\omega^*,v_{i_1}) = \sigma_\omega^* \cdot k(l_A)d(u_A,v_{i_1}),\ k(l_B)d(u_\omega^*,v_{i_2}) = \sigma_\omega^* \cdot k(l_A)d(u_A,v_{i_2}) \tag{3.16}$$

上式より，点 u_ω^* は点 v_{i_1} 及び v_{i_2} までの距離に関して $d(u_A,v_{i_1})$ 対 $d(u_A,v_{i_2})$ の比をみたす直線上にある．σ_ω^* の性質から，点 u_ω^* は線分 $\overline{v_{i_1}v_{i_2}}$ 上に存在し，次の式によって表される．

$$u_\omega^* = \frac{d(u_A^*,v_{i_1})v_{i_1} + d(u_A^*,v_{i_2})v_{i_2}}{d(u_A^*,v_{i_1}) + d(u_A^*,v_{i_2})} \tag{3.17}$$

よって，σ_ω^* は次式で与えられる．

$$\sigma_\omega^* = \frac{k(l_B)d(u_\omega^*,v_{i_1})}{k(l_A)d(u_A,v_{i_1})} = \frac{k(l_B)d(u_\omega^*,v_{i_2})}{k(l_A)d(u_A,v_{i_2})} \tag{3.18}$$

(iii) [**三つ以上の需要点**] 式 (3.13),(3.14) より問題 $(P_B^{I_\omega})$ の実行可能領域は三次元で与えられるので，もし式 (3.15) が成り立つ需要点がちょうど 3 つ存在するならば，問題 $(P_B^{I_\omega})$ は唯一解をもつ．式 (3.15) をみたす需要点のうち 3 つを i_1, i_2, i_3 とおく．このとき，解 $(u_\omega^*, \sigma_\omega^*)$ は次式を解くことで求められる．

$$\sigma_\omega^* = \frac{k(l_B)d(u_\omega^*, v_{i_1})}{k(l_A)d(u_A, v_{i_1})} = \frac{k(l_B)d(u_\omega^*, v_{i_2})}{k(l_A)d(u_A, v_{i_2})} = \frac{k(l_B)d(u_\omega^*, v_{i_3})}{k(l_A)d(u_A, v_{i_3})} \tag{3.19}$$

以上より，問題 $(P_B^{I_\omega})$ の最適解は，I_ω 内の高々 3 つの異なる需要点を要素とする全ての組合せの中から，式 (3.15) をみたすものを探すことにより求めることが出来る．この組合せの総数は高々$|I_\omega|^3$ 個である．

問題 (P_B^Q) を解くには，需要点の全ての部分集合について問題 $(P_B^{I_\omega})$ を解く必要がある．上記の議論から，任意の部分集合 $I_\omega \subseteq I$ における問題 $(P_B^{I_\omega})$ の最適解は，式 (3.15) をみたす需要点の組合せを探すことにより求めることが出来る．よって，需要点の全体集合 I から高々 3 つの異なる需要点を要素とする全ての組合せについて調べることで，全ての部分集合に対する問題の解を調べることができる．以下では，ある需要点の組合せに対して各需要点が式 (3.15) をみたすと仮定した場合において，場合 (i)-(iii) において求められる $(u_\omega^*, \sigma_\omega^*)$ を需要点集合 I_ω とは無関係に用いる．

上記の議論に基づいて，問題 (P_B^Q) を解くためのアルゴリズムを説明する．重複を取り得る 3 つの需要点 $a, b, c \in I$ に対する組 (a, b, c) について調べる．これらの需要点が式 (3.15) をみたすと仮定した場合において，場合 (i)-(iii) において求められる $(u_\omega^*, \sigma_\omega^*)$ を $(u(a,b,c), \sigma(a,b,c))$ と表す．この候補解は，需要点の組について $a = b = c$ の場合には (i)，ちょうど 2 つの異なる需要点がある場合には (ii)，全て異なる場合には (iii) を参考にして解けばよい．B が $u(a,b,c)$ に配置された場合における B の獲得購買力の総和を $\bar{w}(a,b,c)$ で表す．

アルゴリズム 3.2

Step 0. $NR = \emptyset$ とおく．

Step 1. もし $NR = I^3$ ならば，$\bar{w}(a,b,c)$ を最大にする $(u(a,b,c), \sigma(a,b,c))$ が与えられた (l_A, l_B) に対する問題 (P_B^Q) の解となり，このアルゴリズムを終了する．もし $NR \neq I^3$ であれば，Step 2 へ進む．

Step 2. NR に属する組 $(a,b,c), a,b,c \in I$ について，$(u(a,b,c), \sigma(a,b,c))$ を求める．

Step 3. もし $\sigma(a,b,c) \geq 1$ ならば，Step 1 に戻る．$\sigma(a,b,c) < 1$ ならば，Step 4 に進む．

Step 4. I 内の全需要点について，B が $u(a,b,c)$ に配置されたときに購買力を獲得できるかを調べ，$\bar{w}(a,b,c)$ を計算する．$NR \leftarrow NR \cup \{(a,b,c)\}$ として，Step 1 に戻る．

アルゴリズム 3.2 の計算時間の評価について，次の定理が成り立つことが分かる．

定理 3.3 アルゴリズム 3.2 における計算時間は高々$O(|I|^3 \cdot T)$ である．ここで，T は Step 2 の各反復で必要な計算時間を表す．

証明

アルゴリズム 3.2 において，Step 2 における計算の反復回数は I^3 内の要素数によって与えられる．よって，計算時間は $O(|I|^3 \cdot T)$ で表される．　□

3.3.3　セントロイド問題における解法

問題 (P_A^Q) を厳密に解くのは一般の場合には難しい．ここでは，全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内で一直線に並んでいる場合において厳密解を見つけるアルゴリズムを考案し，その応用として一般の場合における近似解を求めるためのアルゴリズムを示す．

全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内で一直線に並んでいる場合，次の命題が成り立つ．

命題 3.4 もし全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内で一直線に並んでいるならば，A, B の最適な位置は直線上にある．

証明

今，どちらかの施設が需要点の存在する線上に無いと仮定する．そのとき，もしその施設が現在の位置からその線上に垂直に射影した点上へ移動したならば，施設から全ての需要点までの距離は以前より短くなるのは明らかである．従って，A, B の最適な位置は線上にある．　□

次に，B の利用者の存在領域について考察する．式 (3.3) から，この領域は次式をみたす点 $u(\in \mathbf{R}^2)$ の集合として表される．

$$||u - c(u_A, u_B)|| < r(u_A, u_B) \tag{3.20}$$

ここで，$||\cdot||$ はユークリッドノルムであり，

$$c(u_A, u_B) = \frac{k^2(l_B)u_B - k^2(l_A)u_A}{k^2(l_B) - k^2(l_A)}, \tag{3.21}$$

$$r(u_A, u_B) = \frac{k(l_A)k(l_B)}{k^2(l_B) - k^2(l_A)} d(u_A, u_B) \tag{3.22}$$

である．すなわち，この領域は円形の開集合であり，$c(u_A, u_B)$ 及び $r(u_A, u_B)$ は各々その中心及び半径を表す．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.5 全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内の一直線上に並んでいるとする．ある 2 つの需要点 $i, j \in I$ に対し，A, B が直線上で $c(u_A, u_B) = (v_i + v_j)/2$ かつ $r(u_A, u_B) = d(v_i, v_j)/2$ をみたすように配置されているとする．そのとき，B は $\mathbf{R}^2$ 内のどの場所に移動しても v_i と v_j 間の線分上にある需要点から全ての購買力を獲得することはできない．

証明

もし u_A がその線分上にあれば，$l_A > l_B$ より B が線分上の全ての購買力を獲得できないのは明らかである．そこで，u_A が線分の外に配置されている場合を考察する．命題 3.4 から，B は需要点の存在する直線上に配置される．一般性を失うことなく，$d(u_A, v_j) \leq d(u_A, v_i)$ を仮定することができる．このとき，v_i 上の利用者が B を利用しないことに注意する．

初めに，後手企業が B を u_B から u'_B へ $d(u_A, u_B) \geq d(u_A, u'_B)$ となるように動かしたときを考える．このとき，$r(u_A, u_B) \leq r(u_A, u'_B)$ となる．このことは上記の移動によって B が v_i に付随する購買力を獲得できないことを意味する．

次に，後手企業が B を u_B から u''_B へ $d(u_A, u_B) \leq d(u_A, u''_B)$ となるように動かしたときを考える．このとき，次式が成り立つ．

$$r(u_A, u''_B) = r(u_A, u_B) + \frac{k(l_A)k(l_B)}{k^2(l_B) - k^2(l_A)} d(u_B, u''_B), \tag{3.23}$$

$$d(v_i, c(u_A, u''_B)) = d(v_i, c(u_A, u_B)) + \frac{k^2(l_B)}{k^2(l_B) - k^2(l_A)} d(u_B, u''_B) \tag{3.24}$$

これらの関係式と $k(l_A) < k(l_B)$ から，上記の移動によって B が v_i に付随する購買力を獲得できないことを意味する．従って，B が $\mathbf{R}^2$ 上のどの点に配置されても線分上の需要点から全ての購買力を獲得することはできない． □

上記の定理から，B の最適な位置は $c(u_A, u^*_B)$ が 2 つの需要点間の中点と一定するような u^*_B の一つとして与えられる．次の系は A の最適な位置を見つけるのに役に立つ．

系 3.6 全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内の一直線上に並んでいるとする．ある 2 つの需要点 $i, j \in I$ に対し，$\bar{c}(i, j) = (v_i + v_j)/2$ とおく．A は直線上で

$$d(u_A, \bar{c}(i, j)) \leq \frac{k(l_B)}{k(l_A)} d(v_i, \bar{c}(i, j)) \tag{3.25}$$

をみたすように配置されたとする．そのとき，後手企業は B をどこに配置しても v_i と v_j との間の線分上の需要点から全ての購買力を獲得することはできない．

証明

定理 3.5 から，B が線分上の需要点から全ての購買力を獲得できるかどうかは，B が $c(u_A, u_B) = \bar{c}(i,j)$ をみたす点に配置したときのみを調べればよい．このとき，$r(u_A, u_B) \leq d(v_i, \bar{c}(i,j))$ となる．よって，B が全ての購買力を獲得できないことが分かる．　□

上記の系から，全ての需要点が $\mathbf{R}^2$ 内の一直線上に並んでいるとき，A の最適な位置の集合は直線内の線分として与えられる事がわかる．この直線をベクトル表示で表す為に，原点及び方向ベクトルを各々$\bar{v}, \bar{d}$ で表す．パラメータ $t \in \mathbf{R}$ に対して，直線内の線分は $\bar{v} + t \cdot \bar{d}$, $t^{\min} \leq t \leq t^{\max}$ で表される．ここで，$t^{\min}, t^{\max}$ は $t^{\min} \leq t^{\max}$ をみたし，パラメータ t の最小値・最大値を表す．

次のアルゴリズムでは，$l_A > l_B$ をみたすレベルの組 (l_A, l_B) に対する問題 (P_A^Q) の候補解を求めている．このアルゴリズムにおいて，２つの需要点の組に対する全体集合を $J = \{(i_1, i_2) \in I^2\}$ で表し，全需要点の両端に位置する２つの需要点からなる組を $\bar{j} \in J$ と表す．各組 $j \in J$ に対し，これらの組内の需要点を両端点とする線分内に存在する全需要点の購買力の総和を W_j で表す．また，A の最適な位置の集合を表すパラメータ t の最小値及び最大値を各々$t_j^{\min}, t_j^{\max}$ で表す．

アルゴリズム 3.3

Step 1. $EX = \emptyset$, $NEX = J$ とおく．各２つ需要点の組 $j \in J$ に対し，W_j, $t_j^{\min}$, 及び $t_j^{\max}$ を求める．$t^{\min} \leftarrow t_{\bar{j}}^{\min}$, $t^{\max} \leftarrow t_{\bar{j}}^{\min}$ とおく．

Step 2. 集合 NEX の要素の中で，W_j が最大となる組 $j \in NEX$ を探し出す．

Step 3. もし $t^{\max} < t_j^{\min}$ あるいは $t_j^{\max} < t^{\min}$ ならば，A の最適な位置の集合は線分 $\bar{v}+t\cdot\bar{d}$, $t^{\min} \leq t \leq t^{\max}$ として表され，A, B の獲得購買力は各々$\sum_{i\in I} w_i - W_j$, W_j で与えられ，このアルゴリズムを終了する．$t^{\max} \geq t_j^{\min}$ かつ $t_j^{\max} \geq t^{\min}$ ならば，Step 4 に進む．

Step 4. $t^{\min} \leftarrow \min\{t^{\min}, t_j^{\min}\}$, $t^{\max} \leftarrow \min\{t^{\max}, t_j^{\max}\}$, $EX \leftarrow EX \cup \{j\}$, 及び $NEX \leftarrow NEX/\{j\}$ とおく．Step 2 に戻る．

上記のアルゴリズムでは，Step 1 内で全ての２つ需要点の組に関するデータを計算している．よって，A の最適な位置の集合を求める計算の複雑さは $O(|I|^2)$ で与えられる．

上記のアルゴリズムでは，全ての需要点が一直線上に並んでいる場合について厳密解を求めることができる．しかしながら，一般において需要点は必ずしも一直線上に並んでいない．そこで，問題 (P_A^Q) を近似的に解く方法として，先に需要点の分布を一直線上に需要点が並ぶ分布に近似した後，アルゴリズム 3.3 を用いることにする．需要点の分布を近似する方法としては，各需要点の位置に対して最小二乗法等を用いることにより近似される分布の直線を求め，この直線上に各需要点が垂直射影された分布を求めることが挙げられる．

3.4 数値例

本節では前節で提案した解法手順を数値例で示す．この数値例では需要点の指標を $I = \{1,2,3,4,5\}$ によって与えており，需要点の位置及び購買力は表 3.1 で与えられているとする．

表 3.1: 需要点の位置及び購買力

需要点 i	位置 $v_i = (x_i, y_i)$	購買力 w_i
1	(0.0, 20.0)	200
2	(0.0, 0.0)	400
3	(10.0, 0.0)	100
4	(20.0, 10.0)	200
5	(30.0, 10.0)	300

また，需要点の分布を図 3.2 に示す．ここで，各需要点に添えられている括弧内の数字は購買力を表す．

各企業の利得に関する獲得購買力に対する比例係数は $\alpha_A = \alpha_B = 1$ で与えられるとする．各施設のレベルの最大値は $Q = 3$ であるとし，各レベルに対する施設の勧誘力と建設費を表す関数は表 3.2 で与えられているとする．

第一に，アルゴリズム 3.1 内の Step 3 において A の最適な位置を求める．$(l_A, l_B) = (1,2),(1,3),(2,3)$ の場合，A の最適な位置は点 v_2 上であり，A の獲得購買力の総和は 400 であると予想される．$(l_A, l_B) = (1,1),(2,2),(3,3)$ の場合，アルゴリズム 2.1 を用いて A の最適な位置を求めた結果，図 3.3 によって A の最適な位置の集合が与えられる．そして，A の獲得購買力の総和は 400 が予想され，これは先の場合と同じである．このことは，この

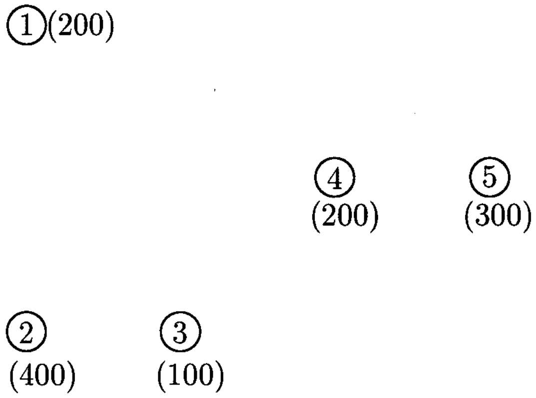

図 3.2: 需要点の分布

表 3.2: 勧誘力関数 $k(l_F)$ と建設費用関数 $C_F(l_F)$ に関する数値データ

施設のレベル $l_F, F \in \{A, B\}$	勧誘力関数 $k(l_F)$	A の建設費 $C_A(l_A)$	B の建設費 $C_B(l_B)$
1	4.0	100	150
2	2.0	200	350
3	1.0	300	600

場合における A の配置が先の場合と比較して建設費の面で劣ることを意味している．よって，図 3.3 で表される領域では，点 v_2 上のみが最適な位置の候補となり得ることが分かる．

$(l_A, l_B) = (2,1), (3,1), (3,2)$ の場合，利用者の分布に関して最小二乗法を用いることにより，一直線上に並んだ需要点の分布として図 3.4 のように近似する．この数値例では，需要点 1 と 3 が同じ点に射影されており，近似後の分布ではこの点を一つの需要点とみなす．このとき，アルゴリズム 3.3 を用いて A の最適な位置の集合を見つけた結果を図 3.4 に示す．ここで，線分 LS1 は $(l_A, l_B) = (3,1)$ の場合における A の最適な位置の領域を表し，線分 LS2 は $(l_A, l_B) = (2,1), (3,2)$ の場合における A の最適な位置の領域を表す．そして，A の獲得購買力は $(l_A, l_B) = (2,1), (3,2)$ の場合には 700，$(l_A, l_B) = (3,1)$ の場合には 800 であると予想される．

第二に，アルゴリズム 3.1 内の Step 6 において，先に求めた全ての場合における A の最適な位置に対して B の最適な位置を求める．もし A の配置が $(u_a, l_a) = (u_a^{(1,2)}, 1), (u_a^{(1,3)}, 1), (u_a^{(2,3)}, 2)$ ならば，A の位置は v_i であると予想される．これらの場合に

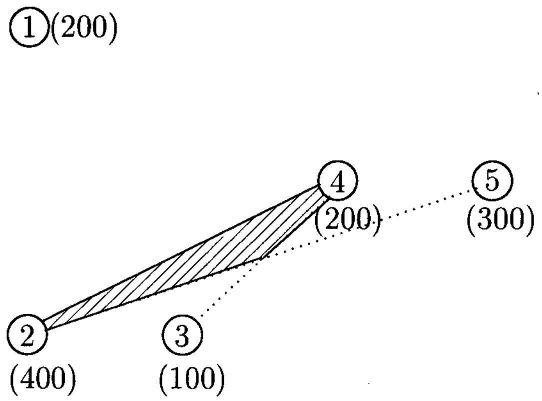

図 3.3: $l_A = l_B$ の場合における A の最適な位置の集合

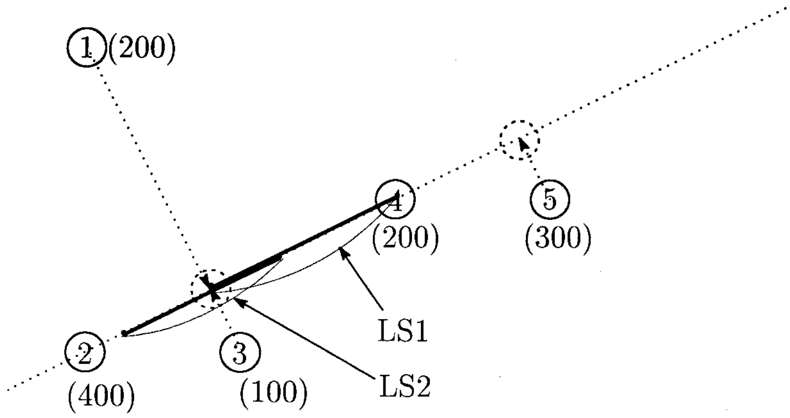

図 3.4: $l_A > l_B$ である場合における A の最適な位置

おける B の最適な位置は，$l_B > l_A$ の場合には A と同じ v_2 上であり，$l_B = l_A$ の場合には，定理 2.3 より A の位置に接することである．どちらの場合においても，B の獲得購買力は 800 である．このことは，これらの場合において B は A のレベルより高くしても建設費によって利得が減ってしまうことを意味している．

もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(2,3)}, 2)$ で B のレベルが $l_B = 1$ であるならば，3.3.2 で説明したアルゴリズム 3.2 を用いて B の最適な位置を求める．その結果，B の最適な位置の一つとして $(24.1, 10.0)$ が求められる．この位置に B が配置されたときの B を利用する利用者の存在領域は，図 3.5 中の斜線領域（境界を含まない）で表される．よって，B の獲得購買力は 500 である．

もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A, l_A) = (u_A^{(2,1)}, 2)$ で B のレベルが $l_B = 3$ であるならば，B の最適な位置は A と同じ位置であり，B の獲得購買力は 1200 である．もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(2,1)}, 2), (u_A^{(3,1)}, 3), (u_A^{(3,2)}, 3)$ で B のレベルが $l_B = l_A$ であるならば，A の位置

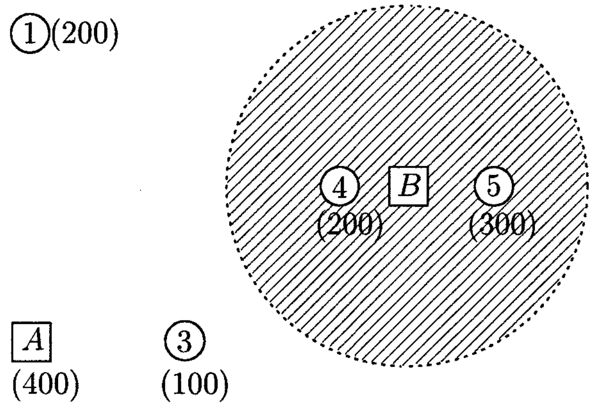

図 3.5: $(u_A, l_A) = (u_A^{(2,3)}, 2)$, $l_B = 2$ の場合における B の最適な位置

の集合は図 3.4 で表され，図 3.3 で表される集合の部分集合である．よって，B の最適な位置は定理 2.3 より A の位置に接することであり，B の獲得購買力は 800 である．もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(2,1)}, 2)$ であり B のレベルが $l_B = 1$ であるならば，また A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(3,2)}, 3)$ であり B のレベルが $l_B = 2$ であるならば，B の最適な位置 B の最適な位置は v_4, v_5 間の線分上の点である．この位置に B が配置されたときの B を利用する利用者の存在領域は図 3.5 で表される場合と同様であり，B の獲得購買力は 500 である．

もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(3,2)}, 3)$ であり B のレベルが $l_B = 1$ であるならば，B の最適な位置は次の 2 つの場合 (a),(b) に分けられる．(a) もし A の位置が v_2 に近い方ならば，B の最適な位置は v_4, v_5 間の線分上の点である．この位置に B が配置されたときの B を利用する利用者の存在領域は図 3.5 で表される場合と同様であり，B の獲得購買力は 500 である．(b) もし A の位置が v_4 に近い方ならば，B の最適な位置の一つは v_2 上であり，B の獲得購買力は 400 である．(a)(b) 双方の場合における B の獲得購買力を比較することにより，(b) の v_4 の近くに A を配置する方が先手企業にとって良い位置であることが分かる．

もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(3,1)}, 3)$ であり B のレベルが $l_B = 1$ であるならば，B の最適な位置は v_2 上であり，B の獲得購買力は 400 である．もし A の配置が $(u_A, l_A) = (u_A^{(3,1)}, 3)$ であり B のレベルが $l_B = 2$ であるならば，B の最適な位置は次の 2 つの場合 (a),(b) に分けられる．(a) もし A の位置が v_4 に近い方ならば，B の最適な位置は v_2, v_3 間の線分上の点である．(b) もし A の位置が v_2 に近い方ならば，B の最適な位置は v_4, v_5 間の線分上の点である．(a)(b) どちらの場合においても，B の獲得購買力は 500 である．

第三に，上記の結果から問題 (P_A^Q), (P_B^Q) における各企業の最適配置を見つける．もし $l_A = 1$ ならば，A の最適な位置は v_2 上であり，B の最適配置は $l_B = 1$ の場合である．各企業の利得は $r_A = 400 - 100 = 300$, $r_B = 800 - 150 = 650$ で与えられる．もし $l_A = 2$ な

らば，A の最適な位置は v_2 上であり，B の最適配置は $l_B = 2$ の場合である．各企業の利得は $r_A = 400 - 200 = 200$, $r_B = 800 - 350 = 450$ で与えられる．もし $l_A = 3$ ならば，A の最適な位置は $u_A = u_A^{(3,1)}$ あるいは $u_A = u_A^{(3,2)}$ で表され，B の最適配置は建設費の面から $l_B = 1$ で与えられる．各企業の利得は $r_A = 800 - 300 = 500$, $r_B = 400 - 150 = 250$ で与えられる．以上より，先手企業にとって A の最適配置は $l_A = 3$ の場合であり，このとき最大利得を得ることができる．従って，各企業の最適レベルは $(l_A^*, l_B^*) = (3, 1)$ であり，各企業の最適配置を図 3.6 に示す．

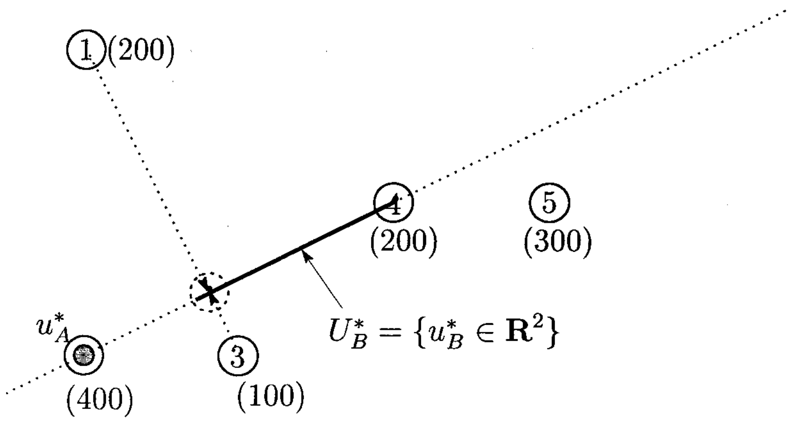

図 3.6: 問題 (P_A^Q), (P_B^Q) の均衡解 $((l_A^*, l_B^*) = (3, 1))$

アルゴリズム 3.1 を用いて得られた各企業の最適解は先手企業にとって目的関数値が下限値となっており，またこの数値例では後手企業の最適解が最小レベルとなっていることから，後手企業にとって上限値となっていることが分かる．さらに，先手企業の立場では B に需要点 2 の購買力を確実に与えないためには A を需要点 2 上に配置する他に無く．そのとき後手企業は B を図 3.5 のように配置することで，最小レベルであっても需要点 4,5 から購買力を獲得可能である．このことは図 3.6 で示される各企業の最適解がシュタッケルベルグ均衡解の定義をみたすことを意味する．これは数値例で挙げた需要点の分布が最小二乗法による近似後の一直線上に需要点が並ぶ分布に近いからであると考えられる．

以上の結果より，もし先手企業が最大レベルの施設を配置するならば，後手企業は先手企業の施設との質的レベルの競合をさけて建設費を減らすように施設を配置してくる傾向が見られると考えられる．表 3.2 から，この傾向は後手企業の施設の建設費が先手企業よりも高い場合に見られる事が分かる．

3.5　結言

本章では，スーパーマーケットや百貨店のように，商品の品揃え等によるサービスの質に格差が生じる競合施設における配置問題を考察した．サービス面による施設の質的評価は，企業側が判断可能な「施設配置に必要な費用」及び利用者が判断可能な「質的評価値」を基にして行われると考えられる．このうち，利用者の選択基準に直接関連するのは質的評価値であることから，利用者から見た質的評価がより重要であると考えられる．しかし，利用者から質的評価に関するデータをアンケート等の調査によって集める場合，一般に例えば「良い・中くらい・悪い」のように数段階での評価として得られる．このことは施設の質的評価を「レベル」によって表すことの妥当性を示している．

さらに，2.2.4 で説明した Drezner のモデルに施設の質的側面を考慮することで拡張した競合施設配置のモデルを提案した．利用者の施設選択基準として，施設の質的評価値と施設までの距離との積を用いる．この評価は双方の施設のレベルが等しい場合には Drezner のモデルと同様である．また，レベルが異なる場合においてレベルの低い施設を利用する需要点の存在領域は図 3.1 のように施設の位置を含む円の内部として表される．現実の施設配置問題における利用者の行動と比較する必要はあるが，これらの場合における需要点の存在領域は一般に妥当であると考えられる．この選択基準を用いて，さらに施設配置に必要な費用を考慮することにより，先手・後手企業が各々利得最大化を目的とするメジアノイド問題及びセントロイド問題としてこのモデルを定式化した．これらの問題を効率的に解くために，メジアノイド問題では厳密解法，セントロイド問題では先手企業の目的関数の下限値が得られる近似解法を提案した．これらの解法を数値例に適用することで具体的に解法手順を示した．数値例における計算結果において後手企業の建設費用が先手企業よりも割高である場合，後手企業が施設の位置及びレベルに関する競争を行わずに獲得購買力を先手企業と分け合う状況が観測された．このことは競合環境下における共存の可能性を示しているという点で意義があると考える．

最後に，本章における今後の課題を以下に挙げる．

- セントロイド問題において効率的に均衡解を求めるための厳密解法の考案．あるいは，求められた近似解が均衡解であるかを判別し，均衡解でなければ解の精度を評価する方法の考案

- 各企業が複数の施設を配置する場合における解法手順の考案

第4章　利用者の施設に対する選択基準の多様性を考慮した競合施設配置問題

4.1　緒言

前章までの競合施設配置のモデルでは，全ての利用者が距離や施設の質的評価による一様な選好基準によって利用する施設を選択すると仮定していた．しかし，取り扱う施設の種類によっては，年齢・性別や施設のサービスに対する知識等によって，ある施設を一方の利用者が魅力的だと感じても，他方の利用者がそれ程魅力を感じないという状況が起こり得る．例えばパソコン等を販売する店舗の場合，初心者の場合にはアフターサービス等の充実が店舗選択で重要な要素であると考えられるが，熟練者の場合には必ずしもそうとは限らない．また，このような施設の提供するサービスは一般に生活にとって必須ではないと考えられ，不便であれば利用者が施設を敢えて利用しないことも考慮する必要がある．

本章では利用者の施設に対する選択基準の多様性を仮定した競合施設配置のモデルを提案する．このモデルでは距離と共に新しい選択基準として，利用者の年齢や施設のサービスに対する習熟年数等のように，数直線上の値に変換できるものを用いる．以下では，この選択基準に関する利用者のデータを「選好」と呼ぶことにする．また，位置及び選好が共通する利用者全体を一つのグループとして考察する．選好を施設配置問題において導入する場合，次の二点を考慮する必要がある．

- 同じグループに属する利用者であっても，望む施設が各々異なる．
- 各利用者について，望む施設が時に異なる．

これらは選好のもつ性質を表しており，利用者の施設選択に関する主観的判断が含まれるためであると考えられる．このことは本章のモデルにあいまいさを考慮する必要があることを意味する．あいまいさを表現するために，各グループに属する利用者の数を L ファジィ数によって表す．4.2 節では，線分上における Drezner のモデルについて，利用者の選好の

多様性を考慮することで先手企業・後手企業の施設に対する最適な位置と種類を求める利得最大化問題として定式化する．4.3 節では，メジアノイド問題及びセントロイド問題に対する解法手順を述べる．4.4 節では，数値例に対するこの解法による計算結果を載せる．最後に，4.5 節では本章の研究成果についてまとめる．

4.2　問題の定式化

本節では，利用者の位置及び選好を考慮した競合施設配置問題を定式化する．本章で提案するモデルでは，正数 γ_1 及び自然数 n_1 に対して，需要点は線分 $[0,\gamma_1]$ 上に n_1 個存在すると仮定する．需要点の位置に関する集合を $X=\{x_1,\cdots,x_{n_1}\}$ で表す．ここで，需要点の位置は $0\le x_1<\cdots<x_{n_1}\le\gamma_1$ をみたすように並んでいるとする．また，各需要点上に存在する利用者について，正数 γ_2 及び自然数 n_2 に対して，利用者の選好は n_2 個存在し，閉区間 $[0,\gamma_2]$ 内の n_2 個の要素として表されると仮定する．利用者の選好に関する集合を $Y=\{y_1,\cdots,y_{n_2}\}$ で表す．ここで，これらの選好は $0\le y_1<\cdots<y_{n_2}\le\gamma_2$ をみたすように並んでいるとする．同じ位置・選好をもつ利用者を一つのグループとして表すことにより，それらの集合を $G=X\times Y$ で表す．利用者の数を表すのに用いる型関数を L とし，L の零点を t_0 とおく．グループ (x,y) 内の利用者の数を L ファジィ数として次のように表す．

$$\tilde{W}(x,y) = (W(x,y),\beta(y))_L, \tag{4.1}$$

$$\mu(z) \equiv L\left(\frac{z-W(x,y)}{\beta(y)}\right) \tag{4.2}$$

ここで，任意の $(x,y)\in G$ について，$W(x,y)>0$ 及び $\beta(y)>0$ をみたす．

第 3 章と同様に，先手・後手企業の施設を各々A,B で表す．先手・後手企業が配置可能な施設の数を各々自然数 a,b で表す．各企業は施設を線分 $[0,\gamma_1]$ 上に配置可能であるとし，先手・後手企業の施設の位置をまとめた組を各々$\boldsymbol{x_A}=(x_A^1,\cdots,x_A^a)$, $\boldsymbol{x_B}=(x_B^1,\cdots,x_B^b)$ で表す．また，各企業は配置する施設の種類を変更できるとし，利用者の選好に対応して配置可能な施設の種類を閉区間 $[0,\gamma_2]$ 内の要素として表す．このとき，$y^C,y^F\in[0,\gamma_2]$ について，選好 y^C の利用者の種類 y^F の施設に対する不満足の度合いはユークリッドノルム $||y^1-y^2||$ によって表されるとする．先手・後手企業の施設の種類をまとめた組を各々$\boldsymbol{y_A}=(y_A^1,\cdots,y_A^a)$, $\boldsymbol{y_B}=(y_B^1,\cdots,y_B^b)$ で表す．先手・後手企業の施設配置は各々$\boldsymbol{z_A}=(\boldsymbol{x_A},\boldsymbol{y_A})$, $\boldsymbol{z_B}=(\boldsymbol{x_B},\boldsymbol{y_B})$ で表され，以下で定式化される問題の決定変数となる．先手・後手企業の施設配置に関する実行可能領域を各々$Z_A=[0,\gamma_1]^a\times[0,\gamma_2]^a$, $Z_B=[0,\gamma_1]^b\times[0,\gamma_2]^b$ で表す．

位置 x_j，種類 y_j として配置された施設 j について，グループ $(x,y)\in G$ 内の利用者から

見たこの施設の勧誘力を次の関数によって表す.

$$\phi_{(x,y)}(x_j, y_j) = \exp\left\{-\frac{||x - x_j||^2}{\sigma_1^2} - \frac{||y - y_j||^2}{\sigma_2^2}\right\} \tag{4.3}$$

ここで，σ_1 及び σ_2 は利用者の位置・選好に対する相違度の重みを表す正の定数であり，全ての利用者に共通するとする．施設 j を利用するグループの集合を以下のように表す.

$$G_j = \{(x, y) \in G \mid ||x - x_j|| \leq \alpha_1\sigma_1,\ ||y - y_j|| \leq \alpha_2\sigma_2\} \tag{4.4}$$

ここで，α_1, α_2 は正の定数であり，$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1/2$ をみたすとする．各企業の施設配置 $(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B})$ が与えられたとき，自然数 k について G_j 内のグループ内で利用する施設の総数が k である利用者のグループの集合を $G_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \subseteq G_j$ で表す．上記の集合に対して，次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} G_j \quad &= \quad \bigcup_{k=1}^{a+b} G_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}),\ G_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \cap G_j^{k'}(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) = \emptyset, \\ & \quad\ \ \forall k, k';\ 1 \leq k, k' \leq a + b,\ k \neq k' \end{aligned} \tag{4.5}$$

グループ $(x, y) \in G_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B})$ の利用者全体から施設 j が獲得可能な購買力を次式で表す.

$$\tilde{D}_j^k(x, y|\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \quad = \quad c_k\phi_{(x,y)}(x_j, y_j) \cdot \tilde{W}(x, y) \tag{4.6}$$

$$= \quad \Big(c_k\phi_{(x,y)}(x_j, y_j) \cdot W(x, y),\ c_k\phi_{(x,y)}(x_j, y_j) \cdot \beta(y)\Big)_L \tag{4.7}$$

ここで，c_k, $1 \leq k \leq a + b$ は獲得購買力に関する重みを表す定数であり，次の関係式をみたすとする.

$$1 = c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{a+b} \geq 0 \tag{4.8}$$

このとき，集合 G_j^k 内のグループの利用者全体からこの施設が獲得可能な購買力を次式で表す.

$$\tilde{D}_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) = \sum_{(x,y) \in G_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B})} \tilde{D}_j^k(x, y|\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \tag{4.9}$$

後手企業が施設を配置するとき，先手企業の施設は全て配置済みであるので，$\boldsymbol{z_A}$ は固定されている．このとき，メジアノイド問題は次のように定式化できる.

$$P_B^L : \max \quad \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{a+b} \tilde{D}_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \tag{4.10}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{z_B} \in Z_B \tag{4.11}$$

一方，先手企業は後手企業が問題 (P_B^L) の最適解となるように施設を配置するという条件の下に施設配置を決定する．このとき，セントロイド問題は次のように定式化できる．

$$P_A^L : \max \quad \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{a+b} \tilde{D}_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B^*}) \tag{4.12}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{z}_A \in Z_A \tag{4.13}$$

ここで，$\boldsymbol{z_B^*}$ は問題 (P_B^L) の解である．すなわち，

$$\boldsymbol{z_B^*} \in \arg \max_{\boldsymbol{z_B} \in Z_B} \left\{ \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{a+b} \tilde{D}_j^k(\boldsymbol{z_A}, \boldsymbol{z_B}) \right\} \tag{4.14}$$

をみたす．問題 (P_A^L) の解を $\boldsymbol{z_A^*}$ とおくと，$(\boldsymbol{z_A^*}, \boldsymbol{z_B^*})$ はシュタッケルベルグ均衡解となっている．次節では，各企業に対する最適配置を求める為の解法を提案する．

4.3　解法手順

問題 (P_A^L), (P_B^L) について，各企業が配置する施設の数が複数の場合に解くのは一般に困難である．本節では，各問題について未配置の企業が所有する施設が単数の場合における解法を提案する．4.3.1 ではメジアノイド問題について $b=1$ の場合における解法を述べる．4.3.2 ではセントロイド問題について $a=b=1$ の場合における解法を述べる．

4.3.1　メジアノイド問題における解法

初めに，施設配置と式 (4.4) によって与えられる利用者グループの集合とを関連付ける．

点 $(0,0)$ から見て最も近い利用者グループを $(\bar{x}, \bar{y}) = (\min\{x \in X\}, \min\{y \in Y\})$ とおく．このグループの購買力を獲得可能な施設配置のうち，点 $(0,0)$ に最も近い配置を $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$ とおく．式 (4.4) から，この点は次のように表される．

$$\bar{x}_o = \min\{x_j \in [0, \gamma_1] \mid |\bar{x} - x_j| \le \alpha_1 \sigma_1\}, \tag{4.15}$$

$$\bar{y}_o = \min\{y_j \in [0, \gamma_2] \mid |\bar{y} - y_j| \le \alpha_2 \sigma_2\} \tag{4.16}$$

式 (4.4) によって表される利用者グループの集合を以下のアルゴリズムによって指標を付ける．このアルゴリズム内において，施設配置を $(x_F, y_F) \in [0, \gamma_1] \times [0, \gamma_2]$ で表す．指標となる 2 つの自然数 m, n について，利用者グループの集合の一つを $C_{mn} \subseteq S$ と表す．

アルゴリズム 4.1

Step 0. $m = n = 1$ 及び $(x_F, y_F) = (\bar{x}_o, \bar{y}_o)$ とおく.

Step 1. 施設配置 (x_F, y_F) において購買力を獲得可能な利用者グループの集団を求め，C_{mn} で表す.

Step 2. y_F を固定した上で，施設の利用者グループの集団が C_{mn} から変化するまで x_F の値を増加させる．もし増加させた x_F の値が γ_1 以下ならば，$m \leftarrow m+1$ として Step 1 に戻る．もし $x_F > \gamma_1$ ならば，$m = 1$ として Step 3 に行く.

Step 3. $x_F = \bar{x}_o$ とおいて固定した上で，施設の利用者グループの集団が C_{mn} から変化するまで y_F の値を増加させる．もし増加させた y_F の値が γ_2 以下ならば，$n \leftarrow n+1$ とし，Step 1 に戻る．もし $y_F > \gamma_2$ ならば，全ての集合に指標が付けられたのでこのアルゴリズムは終了する.

上記のアルゴリズムにおける指標 m, n の最大値を各々 M, N とおく．獲得可能な購買力をもつ利用者グループの集合が C_{mn} となる施設の配置領域を $R_{mn} \subseteq [0, \gamma_1] \times [0, \gamma_2]$ で表す.

以下では後手企業の施設の位置及び種類を各々 x_B, y_B とおくことで，$\boldsymbol{z_B}$ の代わりに $z_B = (x_B, y_B)$ を問題 (P_B^L) の決定変数として用いる．また，この施設が獲得可能な購買力をもつ利用者グループの集団のうち，k 個の施設を利用するグループの集団を $G_B^k(\boldsymbol{z_A}, z_B)$ とおく．施設配置を比較するために，目的関数 (4.10) の代わりに以下の２つの関数を用いる.

$$F_B(z_B|\boldsymbol{z_A}) = \sum_{k=1}^{a+1} c_k \sum_{(x,y)\in G_B^k(\boldsymbol{z_A}, z_B)} \Big(W(x,y) + \lambda t_0^L \beta(y)\Big)\, \phi_{(x,y)}(x_B, y_B), \tag{4.17}$$

$$E_B(z_B|\boldsymbol{z_A}) = \sum_{k=1}^{a+1} c_k \sum_{(x,y)\in G_B^k(\boldsymbol{z_A}, z_B)} \beta(y)\phi_{(x,y)}(x_B, y_B) \tag{4.18}$$

定義 2.12 より，固定された $\boldsymbol{z_A}$ に対する問題 (P_B^L) は次のように変形される.

$$P_B^C : \min \quad E_B(z_B^C|\boldsymbol{z_A}) \tag{4.19}$$

$$\text{s.t.} \quad z_B^C \in \arg\max_{z_B \in Z_B} \{F_B(z_B|\boldsymbol{z_A})\} \tag{4.20}$$

次の定理は問題 (P_B^C) を解くのに役に立つ.

定理 4.1 任意の $1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N$ について，$F_B(z_B|\boldsymbol{z_A})$ は R_{mn} 上で凹関数である.

<u>証明</u>

$\bar{\phi} = -\phi_{(x,y)}(x_B, y_B)$ とおくと，この定理は $\bar{\phi}$ が凸関数であることを示すことによって証明される．式 (4.4) から，任意の利用者グループ $(x, y) \in S_B$ について次の 2 つの関係式が得られる．

$$|x - x_B| \le \alpha_1\sigma_1,\ |y - y_B| \le \alpha_2\sigma_2 \tag{4.21}$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 < 1/2$ より，以下の関係式が得られる．

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x_B^2} = \frac{2}{\sigma_1^2}\left(1 - \frac{2(x - x_B)^2}{\sigma_1^2}\right)\bar{\phi} > 0, \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial y_B^2} = \frac{2}{\sigma_2^2}\left(1 - \frac{2(y - y_B)^2}{\sigma_2^2}\right)\bar{\phi} > 0, \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x_B^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial y_B^2} - \left(\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial x_B \partial y_B}\right)^2 \\ &= \left\{\frac{2}{\sigma_1^2}\left(1 - \frac{2(x - x_B)^2}{\sigma_1^2}\right)\cdot\frac{2}{\sigma_2^2}\left(1 - \frac{2(y - y_B)^2}{\sigma_2^2}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{2(x - x_B)}{\sigma_1}\cdot\frac{2(y - y_B)}{\sigma_2}\right)^2\right\}\bar{\phi} \\ &= \frac{4}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{1 - \frac{2(x - x_B)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(y - y_B)^2}{\sigma_2^2}\right\}\bar{\phi} > 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

よって，任意の利用者グループに対して $\bar{\phi}$ は R_{mn} 上で凸関数である．　□

各 m, n において，実行可能領域を R_{mn} に限定した場合における問題 (P_B^C) の最適解を $(\hat{x}_B, \hat{y}_B) \in R_{mn}$ で表し，その配置における式 (4.17) 及び (4.18) の値を各々 $\hat{F}_B$, $\hat{E}_B$ で表す．$(\hat{x}_B, \hat{y}_B)$ 及び $\hat{F}_B$, $\hat{E}_B$ を求めるためのアルゴリズムを以下に述べる．

アルゴリズム 4.2

Step 1. もし任意の $(x_B, y_B) \in R_{mn}$ について $\partial F_B/\partial x_B > 0$ ならば，$\hat{x}_B = \max\{x_B | x_B \in R_{mn}\}$ とおき，Step 4 に行く．

Step 2. もし任意の $(x_B, y_B) \in R_{mn}$ について $\partial F_B/\partial x_B < 0$ ならば，$\hat{x}_B = \min\{x_B | x_B \in R_{mn}\}$ とおき，Step 4 に行く．

Step 3. $\partial F_B/\partial x_B = 0$ をみたす $\hat{x}_B \in R_{mn}$ を求める．

Step 4. もし任意の $(x_B, y_B) \in R_{mn}$ について $\partial F_B/\partial y_B > 0$ ならば，$\hat{y}_B = \max\{y_B | y_B \in R_{mn}\}$ とおき，Step 7 に行く．

Step 5. もし任意の $(x_B, y_B) \in R_{mn}$ について $\partial F_B/\partial y_B < 0$ ならば，$\hat{y}_B = \min\{y_B | y_B \in R_{mn}\}$ とおく，Step 7 に行く．

Step 6. $\partial F_B/\partial y_B = 0$ をみたす $\hat{y}_B \in R_{mn}$ を求める．

Step 7. 得られた $(\hat{x}_B, \hat{y}_B)$ に対して，$\hat{F}_B$, $\hat{E}_B$ を求める．

問題 (P_B^C) の最適解を (x_B^*, y_B^*) で表し，その配置における式 (4.17) 及び (4.18) の値を各々 F_B^*, E_B^* で表す．(x_B^*, y_B^*) 及び F_B^*, E_B^* を求めるためのアルゴリズムを以下に述べる．

アルゴリズム 4.3

Step 0. $m = n = 1$, $(x_B^*, y_B^*) = (0, 0)$, 及び $F_B^* = E_B^* = 0$ とおく．

Step 1. アルゴリズム 4.2 を用いて，m, n に対する $(\hat{x}_B, \hat{y}_B)$, $\hat{F}_B$，及び $\hat{E}_B$ を求める．

Step 2. もし $\hat{F}_B > F_B^*$ かつ $\hat{E}_B > E_B^*$，あるいは，もし $\hat{F}_B \geq F_B^*$ かつ $\hat{E}_B \leq E_B^*$ ならば，$(x_B^*, y_B^*) \leftarrow (\hat{x}_B, \hat{y}_B)$, $F_B^* \leftarrow \hat{F}_B$, $E_B^* \leftarrow \hat{E}_B$ とおく．もし $n < N$ ならば，$n \leftarrow n + 1$ として Step 1 に戻る．

Step 3. もし $m \geq M$ ならば，アルゴリズムは終了し，求める最適解は $z_B^* = (x_B^*, y_B^*)$ である．もし $m < M$ ならば，$m \leftarrow m + 1$, $n = 1$ として Step 1 に戻る．

4.3.2 セントロイド問題における解法

後手企業と同様に，先手企業の施設の位置及び種類を各々 x_A, y_A とおくことで，$\boldsymbol{z_A}$ の代わりに $z_A = (x_A, y_A)$ を問題 (P_A^L) の決定変数として用いる．また，この施設が獲得可能な購買力をもつ利用者グループの集団のうち，k 個の施設を利用するグループの集団を $G_A^k(z_A, z_B)$ とおく．施設配置を比較するために，目的関数 (4.12) の代わりに以下の２つの関数を用いる．

$$F_A(z_A | z_B^*) = \sum_{k=1}^{2} c_k \sum_{(x,y) \in G_A^k(z_A, z_B^*)} \Big(W(x, y) + \lambda t_0^L \beta(y) \Big) \phi_{(x,y)}(x_A, y_A), \tag{4.25}$$

$$E_A(z_A | z_B^*) = \sum_{k=1}^{2} c_k \sum_{(x,y) \in G_B^k(z_A, z_B^*)} \beta(y) \phi_{(x,y)}(x_A, y_A) \tag{4.26}$$

ここで，z_B^* は z_A に対する問題 (P_B^L) の解を表す．定義 2.12 より，問題 (P_A^L) は次のように変形される．

$$P_A^C : \min \quad E_A(z_A^C | z_B^{C*}) \tag{4.27}$$

$$\text{s.t.} \quad z_A^C \in \arg\max_{z_A \in Z_A} \{F_A(z_A | z_B^*)\} \tag{4.28}$$

ここで，z_B^{C*} は z_A^C に対する問題 (P_B^L) の解である．

次の定理は問題 (P_A^C) を解くのに役に立つ．

定理 4.2 指標 m, n がある値に固定されているとし，$z_A \in R_{mn}$ とする．このとき，$F_A(z_A | z_B^*)$ は凹関数である．

証明

任意の $z_A \in R_{mn}$ に対して，固定された z_A に対する問題 (P_B^C) の最適解は同じである．このことは，$z_A \in R_{mn}$ であれば z_B^* が固定されることを意味しており，式 (4.25) について関数 F_B と同様に偏微分可能であることを表している．従って，定理 4.1 から，任意の $z_A \in R_{mn}$ に対して $\partial^2 F_A / \partial x_A^2 < 0,\ H < 0$ である事が分かる．　□

定理 4.2 より，問題 (P_A^C) は全ての m, n の組合せに対して，先手企業が R_{mn} に配置したときの後手企業の最適配置を求め，その最適配置に対する先手企業の R_{mn} 内での最適配置を捜し，これらの配置における目的関数値を比較すればよい事が分かる．しかし，アルゴリズム 4.2 全体における計算時間を T とおくと，上記の手法における計算時間の程度は $O(MN \cdot T)$ となり，M, N の値が大きい場合には多くの計算時間がかかる．以下に計算時間を減らすための工夫を提案する．

問題 (P_B^C) において，先手企業の施設が存在しない場合を考察する．この問題はアルゴリズム 4.3 を用いて解くことができ，最適解を z_0, その配置における式 (4.17) 及び (4.18) の値を各々 F_B^0, E_B^0 で表す．また，z_0 に配置したときに獲得可能な購買力をもつ利用者グループの集団を C^0 とおく．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.3 先手企業の施設が R_{mn} 内に配置されており，獲得可能な購買力をもつ利用者グループの集団について $C_{mn} \cap C^0 = \emptyset$ をみたすとする．このとき，問題 (P_B^C) の最適解は z_0 である．

証明

後手企業の配置が z_0 であるとき，式 (4.17) 及び (4.18) の値は F_B^0, E_B^0 となる．式 (4.8) より，後手企業の任意の配置において競合施設が存在する場合における

式 (4.17) の値は存在しない場合の値以下となり，F_B^0 以下となる．また，F_B^0 に等しい場合には競合施設の存在・非存在にかかわらず式 (4.17) の値が一致することを意味しており，式 (4.17) の値も一致すること示すことから式 (4.17) の値が E_B^0 以上であることは明らかである． □

定理 4.3 は，先手企業の施設が存在しない場合における問題 (P_B^C) を解くことで，問題 (P_A^C) を解くのに必要な計算時間をある程度減らせることを示している．

各 m, n において，実行可能領域を R_{mn} に限定した場合における問題 (P_A^C) の最適解を求めるためのアルゴリズムを以下に述べる．この最適解を $(\hat{x}_A, \hat{y}_A) \in R_{mn}$ で表し，その配置における式 (4.25) 及び (4.26) の値を各々 $\hat{F}_A$, $\hat{E}_A$ で表す．

アルゴリズム 4.4

Step 1. もし $C_{mn} \cup C^0 = \emptyset$ ならば，$z_B^* = z_0$ とおく．もし $C_{mn} \cup C^0 \neq \emptyset$ ならば，アルゴリズム 4.3 を用いて先手企業の施設が R_{mn} に存在する場合における後手企業の最適配置 z_B^* を求める．

Step 2. もし任意の $(x_A, y_A) \in R_{mn}$ について $\partial F_A/\partial x_A > 0$ ならば，$\hat{x}_A = \max\{x_A | x_A \in R_{mn}\}$ とおき，Step 5 に行く．

Step 3. もし任意の $(x_A, y_A) \in R_{mn}$ について $\partial F_A/\partial x_A < 0$ ならば，$\hat{x}_A = \min\{x_A | x_A \in R_{mn}\}$ とおき，Step 5 に行く．

Step 4. $\partial F_A/\partial x_A = 0$ をみたす $\hat{x}_A \in R_{mn}$ を求める．

Step 5. もし任意の $(x_A, y_A) \in R_{mn}$ について $\partial F_A/\partial y_A > 0$ ならば，$\hat{y}_A = \max\{y_A | y_A \in R_{mn}\}$ とおき，Step 8 に行く．

Step 6. もし任意の $(x_A, y_A) \in R_{mn}$ について $\partial F_A/\partial y_A < 0$ ならば，$\hat{y}_A = \min\{y_A | y_A \in R_{mn}\}$ とおく，Step 8 に行く．

Step 7. $\partial F_A/\partial y_A = 0$ をみたす $\hat{y}_A \in R_{mn}$ を求める．

Step 8. 得られた $(\hat{x}_A, \hat{y}_A)$ 及び z_B^* に対して，$\hat{F}_A$, $\hat{E}_A$ を求める．

問題 (P_A^C) を解くためのアルゴリズムを以下に述べる．問題 (P_A^C) の最適解を (x_A^*, y_A^*) で表し，その配置における式 (4.25) 及び (4.26) の値を各々 F_A^*, E_A^* で表す．また，先手企業の施設配置 (x_A^*, y_A^*) における後手企業の最適配置を z_B^{**} で表す．

アルゴリズム 4.5

Step 0. $m = n = 1$, $(x_A^*, y_A^*) = (0, 0)$, 及び $F_A^* = E_A^* = 0$ とおく．アルゴリズム 4.3 を用いて，z_0 及び C^0 を求める．

Step 1. アルゴリズム 4.4 を用いて，R_{mn} 内の最適解 $(\hat{x}_A, \hat{y}_A)$，$\hat{F}_A$, $\hat{E}_A$, 及び z_B^* を求める．

Step 2. もし $\hat{F}_A > F_A^*$ かつ $\hat{E}_A > E_A^*$，あるいは，もし $\hat{F}_A \geq F_A^*$ かつ $\hat{E}_A \leq E_A^*$ ならば，$(x_A^*, y_A^*) \leftarrow (\hat{x}_A, \hat{y}_A)$, $F_A^* \leftarrow \hat{F}_A$, $E_A^* \leftarrow \hat{E}_A$, 及び $z_B^{**} \leftarrow z_B^*$ とおく．もし $n < N$ ならば，$n \leftarrow n + 1$ として Step 1 に戻る．

Step 3. もし $m \geq M$ ならば，アルゴリズムは終了し，求める最適解は $z_A^* = (x_A^*, y_A^*)$ である．また，そのときの後手企業の配置は z_B^{**} である．もし $m < M$ ならば，$m \leftarrow m+1$, $n = 1$ として Step 1 に戻る．

4.4 数値例

本節では，前節で提案した解法手順を数値例で示す．この数値例では，各企業が施設を一つずつ配置する状況について考察している，すなわち，$a = b = 1$ である．施設配置領域について，$\gamma_1 = 100, \gamma_2 = 80$ と与える．式4.4に関連する定数について，$\sigma_1 = 60, \sigma_2 = 50$, 及び $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.49$ と与える．利用者の位置及び選好について，$X = \{0, 12, 26, 35, 49, 63, 88, 100\}$, $Y = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65\}$ と与え，各利用者グループについて $W(x, y)$, $\beta(y)$ を表 4.1 により与える．型関数 L の零点を $t_0 = 1$ とする．ここで，利用者の人数は常に正であるため，$\tilde{W}(x, y)$ のサポートは全て正の領域内にある．獲得購買力に関する係数について，$c_1 = 1$, $c_2 = 1/2$ とする．

上記の数値例において，順序関係 $\leq_\lambda$ に関するパラメータの値が $\lambda = 0, 0.1, \cdots, 1.0$ の場合における数値結果を表 4.2 に示す．ここで，D_A^* は問題 (P_A^L) の最適解を求めたときの目的関数値を表し，D_B^{**} は先手企業の施設配置が (x_A^*, y_A^*) である場合における問題 (P_B^L) の最適解を求めたときの目的関数値を表す．

順序関係 $\leq_\lambda$ に関する定義 2.11 より，パラメータ λ の増加は比較する際におけるスプレッドの重要性を高めると考えられるので，λ の増加に伴って問題 $(P_A^L), (P_B^L)$ の目的関数値におけるセンターの値が減少し，スプレッドの値が増加することが予想される．競合環境下にないファジィ数理計画問題において，L ファジィ数を値に目的関数をもつ問題については上記の傾向が見られる [24].

表 4.1: 利用者グループに関するデータ $W(x,y)$, $\beta(y)$

	位置 x			センター $W(x,y)$					
選好 y	0	12	26	35	49	63	88	100	スプレッド $\beta(y)$
5	80	60	80	100	20	100	100	40	20
15	20	20	60	100	80	60	100	60	18
25	40	40	20	60	80	60	20	60	15
35	80	100	60	80	60	20	40	40	12
45	40	40	80	100	80	60	80	80	10
55	100	60	60	20	80	40	60	20	8
65	80	100	20	40	60	40	100	20	6

表 4.2: 計算結果

λ	(x_A^*, y_A^*)	$D_A^*(\times 10^2)$	(x_B^{**}, y_B^{**})	$D_B^{**}(\times 10^2)$
0.0	(41.4,29.5)	$(10.1,\cdot)_L$	(29.4,49.5)	$(9.87,\cdot)_L$
0.1	(41.4,29.5)	$(10.1,2.45)_L$	(29.4,49.5)	$(9.87,1.49)_L$
0.2	(5.60,29.5)	$(10.3,2.49)_L$	(78.4,29.5)	$(10.1,2.44)_L$
0.3	(5.60,29.5)	$(10.3,2.49)_L$	(78.4,29.5)	$(10.1,2.44)_L$
0.4	(5.60,29.5)	$(10.3,2.49)_L$	(78.4,29.5)	$(10.1,2.44)_L$
0.5	(5.60,29.5)	$(10.3,2.49)_L$	(78.4,29.5)	$(10.1,2.44)_L$
0.6	(5.60,29.5)	$(10.3,2.49)_L$	(78.4,29.5)	$(10.1,2.44)_L$
0.7	(29.4,29.5)	$(12.1,2.82)_L$	(70.6,29.5)	$(8.77,2.13)_L$
0.8	(29.4,29.5)	$(12.1,2.82)_L$	(70.6,29.5)	$(8.77,2.13)_L$
0.9	(29.4,29.5)	$(12.1,2.82)_L$	(70.6,29.5)	$(8.77,2.13)_L$
1.0	(29.4,29.5)	$(12.1,2.82)_L$	(70.6,29.5)	$(8.77,2.13)_L$

しかし，表 4.2 において λ の値が 0.1 から 0.2 に増加した場合，先手企業の獲得購買力 D_A^* 及び後手企業の獲得購買力 D_B^* について，センター・スプレッドが共に上昇した．また，λ の値が 0.6 から 0.7 に増加した場合，D_A^* についてセンター・スプレッド共に上昇し，D_B^* についてセンター・スプレッド共に減少した．

上記の予想と異なる計算結果が得られた原因について，競合環境下での問題特有の性質として以下の事柄が考えられる．

- パラメータ λ の増加による購買力評価の変化の結果，評価の高い利用者グループが密集してしまい，片方の競合施設に購買力獲得の独占を許してしまった．
- パラメータ λ の増加による購買力評価の変化の結果，評価の高い利用者グループが拡散した．本モデルでは式 (4.4) より全ての利用者が必ずしも両施設を利用するとは限らないことから，双方の競合施設が利用者グループをお互いの利益を損なわないように分け合えた．

4.5 結言

本章では，同じ需要点上に存在してもある利用者が好む施設が別の利用者にとってそれ程好ましくない状況が起こり得る競合施設の配置問題を考察した．このこと利用者の施設に対する選択基準の多様性を意味しており，これを仮定した競合施設配置のモデルを提案した．また，このような施設では利用者の好みが要因として挙げられることから，提供するサービスが一般に生活にとって必須ではないと考えられ，式 4.4 によって不便であれば利用者が施設を敢えて利用しないことを反映している．

本章で提案する選択基準の多様性は主観的判断に依存することから，施設の選好にあいまいさが含まれると仮定した．上記の例として，ファッションにおける流行が年々変化することで衣料店の来客層及びその数が変化することが挙げられる．位置及び選好で決定される利用者グループの数を L ファジィ数によって表すことで，利用者の選好のあいまいさを表した．流行の変遷を考慮する必要がある施設の配置問題において，本研究の提案するモデルは適応できると考える．各企業が獲得購買力の最大化を目的として設定することで，メジアノイド問題及びセントロイド問題として定式化を行った．また，各問題に対して未配置の企業の施設が単数の場合における解法手順を提案し，数値例による計算結果を示した．

最後に，本章における今後の課題を以下に挙げる．

- 競合環境下でのファジィ数理計画問題における λ の値の変化による影響の解析
- 各企業が複数の施設を配置する場合における解法手順の考案

第5章　企業と地域住民が競合する状況下における施設配置問題

5.1　緒言

前章までの競合施設配置問題では，複数の企業間において生じる競合について扱った．これは店舗のような商業施設について考察してきたからであって，別種の施設を配置する場合には異なる種類の競合が及ぼす影響を考慮する必要がある．

本章では，ゴミ焼却所や原子力発電所等のように地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設を配置するモデルを考察する．施設を配置する企業にとって住民に近い方が物品の輸送等施設の運用に便利であると仮定し，どこに施設を配置するか決定可能であるとする．一方，住民にとって施設がなるべく遠い方が施設から受ける悪影響を減らせられると仮定し，施設に対して住民運動等による圧力をかけるか否か決定可能であるとする．このとき，次の２つの競合が発生すると考えられる．

- 施設を配置する企業及び地域住民間での競合
- 異なる地域にすむ住民間での競合

前者の競合について，企業の施設配置が先に決定され，それに対応して住民が圧力をかけるか否かを決定する状況を考察する．また，後者の競合について，全住民が需要点上にのみ存在すると仮定し，需要点間で競合が発生する状況を考察する．企業・各需要点に対する各々の目的関数を施設配置後に必要な費用として定義し，費用最小化問題として定式化する．また，施設配置の影響を費用として評価を行う場合，一般に主観的判断よりなされることからあいまいさが含まれると考えられる．本章では，企業の施設配置に関する費用を表す関数をLファジィ数として表すことにする．

5.2節では，企業及び住民の各々の目的関数を施設配置によって被る費用として表し，各々に関する施設配置問題として定式化する．5.3節では，各問題に対する解法手順を述べる．最後に，5.4節では本章の研究成果についてまとめる．

5.2 問題の定式化

本節では，企業・住民間の競合を考察した施設配置モデルに対し，各々の立場から目的を評価した費用最小化問題として定式化する．

企業及び各需要点上の住民は以下の順序に従って各々戦略を決定すると仮定する．

1. 企業は先に配置する施設の位置及び規模を決定する．
2. 先に決定された施設配置に対して，需要点毎に施設に圧力をかけるか否か決定する．

上記より，企業及び住民は各々先手プレイヤー及び後手プレイヤーとして表される．

全ての住民はある有界閉凸集合 $S \subset \mathbf{R}^2$ 内の自然数 m 個の需要点上にのみ存在するとし，企業は S 内の任意の点に配置可能であると仮定する．各需要点には他と区別するための指標が付けられており，これらの指標に関する集合を $I = \{1, \cdots, n\}$ で表す．需要点 $i \in I$ について，その位置を $v_i \in S$ で表す．住民は施設に対して圧力をかけることが決定することができ，その決定は需要点毎に行われると仮定する．需要点 i の圧力に関する変数を $z_i \in \{0, 1\}$ で表す．ここで，$z_i = 1$ のときは圧力をかけ，0 のときは圧力をかけないことを意味する．この変数を全需要点でまとめることにより $z = (z_1, \cdots, z_n)$ で表す．z は住民側のとる戦略を意味しており，この実行可能集合を $Z = \{0, 1\}^n$ で表す．また，需要点 j 以外の変数をまとめることにより $z_{-j} = (z_1, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_n)$ とする．

企業は S 内に m 個の施設を配置するとし，各施設に指標を付けてそれらの指標集合を $J = \{1, \cdots, m\}$ で表す．各施設には建設可能な領域が S 内の閉凸領域として与えられているとし，施設 $j \in J$ に対するこの領域を $S_j \subset S$ で表す．また，各施設には運営に最低限必要な規模が与えられているとし，施設 j に対するこの規模を $\bar{y}_j > 0$ で表す．企業には配置する必要がある施設全体の規模に関する制約条件が与えられており，m 個の施設についてそれらの規模の和がある一定の値 M_y となることを仮定する．施設 j の位置及び規模を各々 $x_j \in S_j$, $y_j \in [\bar{y}_j, \infty)$ で表す．また，$x = (x_1, \cdots, x_m)$, $y = (y_1, \cdots, y_m)$ とする．x, y は企業側のとる戦略を意味しており，これらの実行可能領域は各々次のように表される．

$$X = \Pi_{j=1}^{m} S_j, \tag{5.1}$$

$$Y = \left\{ y \middle| \ y_j \geq \bar{y}_j, \forall j \in J, \ \sum_{j=1}^{m} y_j = M_y \right\} \tag{5.2}$$

需要点 i と施設 j との間の距離を $d_{ij} = ||v_i - x_j||$ で表す．

施設・住民に対してある一定期間までに必要な施設配置に関する費用を表すために，以下の 4 つの関数を定義する．

(i) 需要点 j の付近に配置したときの施設 i の建設費を表す関数を $\tilde{f}_{ij}: S_j \times [\bar{y}_j, \infty) \times \{0,1\} \to \mathcal{F}_L$ で表す．ここで，$\tilde{f}_{ij}(\cdot,\cdot,z_i)$ は各 z_i に対して複凸であり，$\tilde{f}_{ij}(x_j,\cdot,z_i)$ は各 x_j, z_i に対して非減少であり，全ての需要点について $\tilde{f}_{ij}(x_j,y_j,0) \leq_\lambda \tilde{f}_{ij}(x_j,y_j,1)$ が各 x_j, y_j に対してみたされるとする．

(ii) 一定期間までに必要な需要点 i から施設 j までの輸送費を関数 $g_{ij}: [\bar{y}_j, \infty) \to \mathbf{R}_+$ 及び $\tilde{h}_{ij}: S_j \to \mathcal{F}_L$ の値の積で表す．ここで，g_{ij} は輸送量を表す関数であり，凸かつ非減少であるとする．また，$\tilde{h}_{ij}$ は単位輸送量あたりの輸送費を表す関数であり，凸かつ d_{ij} の増加に対して非減少であるとする．

(iii) 施設から受ける悪影響を住民の圧力によってその被害を抑えることが出来るか否かで２種類に分類する．前者は施設の存在自身による悪影響であり，後者は施設の活動によって受ける悪影響であるとする．一定期間まで施設 j から受ける悪影響による需要点 i の被害を次式のように表す．

$$t_{ij}(x_j,y_j,z_i) \equiv u_j(x_j,y_j) + w_j(y_j)p_i(z_i) \tag{5.3}$$

ここで，式 (5.3) の第１項について，$u_j: S_j \times [\bar{y}_j, \infty) \to \mathbf{R}$ は施設自身から受ける悪影響を表す関数であり，$u_j(\cdot, y_j)$ は各 y_j に対して d_{ij} の増加に対して非減少であり，$u_j(x_j,\cdot)$ は各 x_j に対して非減少であるとする．また，式 (5.3) の第２項について，$w_j: [\bar{y}_j,\infty) \to \mathbf{R}_+$ は施設の活動量を表す関数であり，非減少アフィン関数であるとし，$p_i: \{0,1\} \to \mathbf{R}_+$ は施設の単位活動量に対する住民の被害を表す関数であり，全ての需要点について $p_i(1) < p_i(0)$ をみたすとする．

(iv) 需要点 i の周りに存在する施設に対して，v_i 上の住民が一定期間まで圧力をかけたときの費用を関数 $c_i: \{0,1\} \to \mathbf{R}$ により表す．ここで，任意の需要点について $c_i(1) > c_i(0)$ をみたすとする．

企業及び需要点 i に対して一定期間までに必要な費用を表す目的関数を各々次のように表す．

$$\tilde{F}(x,y,z) \equiv \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \tilde{f}_{ij}(x_j,y_j,z_i) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} g_{ij}(y_j)\tilde{h}_{ij}(x_j), \tag{5.4}$$

$$R_i(x,y,z) \equiv \sum_{j\in J} t_{ij}(x_j,y_j,z_i) + c_i(z_i) \tag{5.5}$$

なお，式 (5.5) について z_i の動向を特に注目する場合，$R_i(x,y,z) = R_i(x,y,z_i,z_{-i})$ として表す．

企業側から見た場合，住民が後に圧力をかけてくることを見越した上で式 (5.4) の値を最小にするシュタッケルベルグ均衡解を求めるものとする．住民側から見た場合，配置され

た施設に対して各需要点が式 (5.5) の値を最小にする場合を考察したときの各需要点間におけるナッシュ均衡解を求めるものとする．このとき，企業・住民間の競合施設配置問題は次のように定式化できる．

$$
\begin{aligned}
&P_{FR}: \\
&\min_{x,y} \quad \tilde{F}(x,y,z^*) && (5.6)\\
&\text{s.t.} \quad R_i(x,y,z^*) \geq R_i(x,y,z_i,z^*_{-i}),\ \forall i \in I, && (5.7)\\
&\qquad (x,y) \in X \times Y && (5.8)
\end{aligned}
$$

ここで，$z^* = (z_1^*, \cdots, z_m^*)$ はナッシュ均衡解であり，$z^*_{-i} = (z_1^*, \cdots, z_{i-1}^*, z_{i+1}^*, \cdots, z_m^*)$ である．

5.3　解法手順

式 (5.4) は L ファジィ数を値とする関数であり，以下のように表す．

$$\tilde{F}(x,y,z) = (F_c(x,y,z), F_s(x,y,z))_L \tag{5.9}$$

ここで，関数 $F_c : X \times Y \times Z \to \mathbf{R}$ 及び関数 $F_s : X \times Y \times Z \to \mathbf{R}_+$ である．さらに，定義 2.12 を用いるために以下の関数を定義する．

$$\bar{F}(x,y,z) \equiv \lambda t_0^L F_s(x,y,z) + F_c(x,y,z) \tag{5.10}$$

これらの関数について次の仮定を行う．

- F_c 及び F_s は 2 回連続微分可能である．
- F_c 及び F_s はリプシッツ条件をみたす．
- 各 $z(\in Z)$ について，$\bar{F}(\cdot,\cdot,z)$ 及び $F_s(\cdot,\cdot,z)$ は各々複凸及び複凹である．

上記の条件をみたすとき，定義 2.12 より F_c 及び F_s は共に凸となる．Dubois と Prade [15] は，L ファジィ数を値とする関数の微分とそのセンター及びスプレッドに対して実数値をとる関数の微分との関係を，型関数 L が単調性をもつ連続関数，かつセンター及びスプレッドの関数が微分可能である場合について示した [67]．本章のモデルにおいて F_c 及び F_s は必ずしも単調性をもたないので，L ファジィ数を値とする関数の微分にセンター及びスプ

レッドに対する実関数の微分を使えるかどうか分からない．すなわち，以下の関係式は必ずしも成り立つとは限らない．

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_c}{\partial x}, \frac{\partial F_s}{\partial x}\right)_L, \ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_c}{\partial y}, \frac{\partial F_s}{\partial y}\right)_L \tag{5.11}$$

定義 2.12 より，問題 (P_{FR}) は次のように置き換えられる．

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{FR}: \\ &\max_{x,y} \quad F_s(x,y,z^*) && (5.12)\\ &\text{s.t.} \quad \bar{F}(x,y,z^*) = \min_{(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y} \bar{F}(\bar{x},\bar{y},z^*), && (5.13)\\ &\qquad R_i(x,y,z^*) \geq R_i(x,y,z_i,z^*_{-i}), \quad \forall i \in I && (5.14) \end{aligned}$$

問題 $(\bar{P}_{FR})$ では実関数のみ使われているので微分の定義を使うことが出来る．しかし，式 (5.11) が成り立つとは限らないことから，微分を用いて問題 (P_{FR}) 及び問題 $(\bar{P}_{FR})$ を解いた場合，解の挙動が一致するとは限らない．しかしながら，定義 2.12 より最適解においては問題 (P_{FR}) 及び問題 $(\bar{P}_{FR})$ は一致するので，問題 $(\bar{P}_{FR})$ について微分を用いて解くことには意味があると考えられる．以下では，問題 $(\bar{P}_{FR})$ を問題 (P_{FR}) の代わりに解く．

住民の戦略が $\hat{z} = (\hat{z}_1, \cdots, \hat{z}_m)$ に固定されているとする．$\hat{z}_{-i} = (\hat{z}_1, \cdots, \hat{z}_{i-1}, \hat{z}_{i+1}, \cdots, \hat{z}_m)$ とし，需要点 i について $\bar{z}_i \in \{0,1\}\backslash\{\hat{z}_i\}$ とする．このとき，次の問題について考察する．

$$\begin{aligned} \bar{P}_{F1}: \quad &\min_{(x,y)} \quad \bar{F}(x,y,\hat{z}) && (5.15)\\ &\text{s.t.} \quad R_i(x,y,\hat{z}) - R_i(x,y,\bar{z}_i,\hat{z}_{-i}) \geq 0, \quad \forall i \in I, && (5.16)\\ &\qquad (x,y) \in X \times L && (5.17) \end{aligned}$$

$\tilde{F}$ の凸性及び定義 2.12 より，$\bar{F}(\cdot,\cdot,\hat{z})$ は複凸である．式 (5.3) から，式 (5.16) は次式に変形される．

$$(p_i(\hat{z}_i) - p_i(\bar{z}_i)) \sum_{i\in I} w_j(y_j) + c_i(\hat{z}_i) - c_i(\bar{z}_i) \geq 0 \tag{5.18}$$

w_j は任意の $j \in J$ についてアフィン関数であるので，式 (5.18) の左辺はアフィン関数である．よって，問題 $(\bar{P}_{F1})$ の実行可能集合は凸性をもつ．従って，最急降下法 [28] やニュートン法 [28, 57, 38] などの勾配法を用いて問題 $(\bar{P}_{F1})$ の最適解を求める場合，大域的収束性が保証される．

さらに，問題 $(\bar{P}_{F1})$ を解いた後，次の問題を考察する．

$$\begin{aligned} \bar{P}_{F2}: \quad &\min_{(x,y)} \quad -F_s(x,y,\hat{z}) && (5.19)\\ &\text{s.t.} \quad \bar{F}(x,y,\hat{z}) = \min_{(\bar{x},\bar{y})\in X\times L} \bar{F}(\bar{x},\bar{y},\hat{z}), && (5.20)\\ &\qquad R_i(x,y,\hat{z}) - R_i(x,y,\bar{z}_i,\hat{z}_{-i}) \geq 0, \quad \forall i \in I && (5.21) \end{aligned}$$

問題 $(\bar{P}_{F1})$ より，式 (5.20) によって与えられる集合は凸性をもつ．問題 $(\bar{P}_{F2})$ の目的関数は関数 F_s の凹性から凸であることが分かる．従って，問題 $(\bar{P}_{F1})$ の場合と同様に問題 $(\bar{P}_{F2})$ に勾配法を用いた場合における大域的収束性が保証される．

問題 $(\bar{P}_{F2})$ の最適解は住民側の最適戦略が $\hat{z}$ である場合におけるものである．問題 $(\bar{P}_{FR})$ を解くには，住民側の最適戦略を $\hat{z}$ から Z 内の全ての組に置き換えて問題 $(\bar{P}_{F1})$ 及び $(\bar{P}_{F2})$ を解く事で各々の場合における最適解を求め，全ての場合において目的関数値が最小となるものを捜す必要がある．

5.4　結言

本章では，地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設の配置問題を考えた．企業・住民間における競合を表すために，企業・住民を各々先手・後手プレイヤーとおきセントロイド問題として定式化した．また，需要点上の住民間における競合を表すためにナッシュ均衡の概念を用いることで問題に導入した．好ましくない施設の配置問題の従来の研究では，公共施設配置問題として最小和問題 [21] やミニマックス問題 [5, 44] として定式化することにより考察を行ってきた．これらの問題では施設を配置する意思決定者及び全住民が協力関係にある状況を基にしており，各々の意思疎通に齟齬が生じる場合等にはこれらの問題では表せない状況が生じる．住民・各需要点間が非協力関係にある場合において，本研究のモデルが適応可能であると考えられる．

本章では，企業・各需要点が施設配置によって受ける様々な影響について，L ファジィ数を値にとる費用関数として評価した．企業・住民が受ける影響に対する評価は各々の主観的判断によってなされると考えられることから，評価に含まれるあいまいさを反映していると考えられる．これらの費用関数を用いて定式化された問題を効率的に解くために，L ファジィ数を値にとる目的関数を実関数に変形することで従来のアルゴリズムを利用可能とした．

今後の課題としては，企業・各需要点間において一部あるいは全体的に協力関係が存在する場合におけるモデルの適応である．各プレイヤーが協力的な場合における競合施設配置のモデルでは，非協力の場合よりも住民全体から見ればより良い目的関数値が得られることが予想される．ゲームの理論における重要な概念の一つである協力ゲーム [47, 51] に関する理論を本章のモデルに導入することで，本モデルの拡張が可能であると考えられる．

第6章　多目的性をもつ施設配置問題

6.1　緒言

前章までのモデルでは，施設配置に直接的あるいは間接的に関わる意思決定者が複数かつ競合する場合について考察した．施設配置に対するこれらの意思決定者の目的は単数であることを仮定してきた．しかし，例えばスポーツや文化活動等に用いられる多目的施設のように，用途によっては目的が異なることが起こり得る．また，施設の用途が一つとみなせる場合でも，企業・利用者のように誰の立場で目的を設定するかが問題となる．これらの状況において複数の目的を同時に考慮する必要がある場合，一般に全ての目的について同時に最適性を達成できない．複数の目的に対して各々が利得関数となるプレイヤーをそれぞれ仮定すると，これらのプレイヤーは競合しているとみなすことが出来る．

本章では公共施設及び競合施設を配置する場合において，各々意思決定者及び企業にとって競合する複数の目的を同時に考慮する状況におけるモデルを考察する．公共施設としては 2.1.1 節で挙げた利便度重視の施設と 2.1.2 節で挙げた利用者全体に満遍なくサービスを受けられる事を重視する施設が存在する．後者において多目的性をもつ問題の研究としては，Badri 等 [1] による消防署の配置モデルが挙げられる．また，例えば病院や薬屋は競合施設であるが同時に公共性をもつと考えられ，利得に加えて公共施設としての目的を設定することが考えられる．本章ではこのような施設について，前者の公共施設における目的である利便度を目的の一つとして考慮する．6.2 節では救急車デポのような緊急施設配置問題について，多目的問題に拡張する．6.3 節では第 3 章で述べた後手企業に対するメジアノイド問題を多目的問題として拡張する．

6.2　多目的性をもつ緊急施設配置問題

本節では，幾つかの病院が存在する市街地内に救急車デポのような緊急施設を配置する問題について述べる．市街地での事故に対処する救急車の移動を表すために，直角距離の一般化である A-距離を用いている．緊急施設の配置を決定するにあたって，本節では次の二つの目的を考慮している．第一に，領域内で事故が頻繁に起こる特定の地域に注目し，そ

の地域内で発生した事故に対処する救急車の道程が最大距離となる地域について距離を最小化することである．第二に，救急車が素早く対処可能な事故の発生確率の最大化を目的とするものである．これらの目的をファジィ目標として表すことで多目的問題として定式化を行う．6.2.1 では，緊急施設の配置のモデルを多目的問題として定式化し，6.2.2 では，問題に対する非劣解集合を見つけるための解法を提案する．また，6.2.3 では，このモデルに当てはまる数値例に対する数値結果を示す．

6.2.1　問題の定式化

本節では緊急施設配置問題における市街地が平面上のある閉凸 n 角形領域として表されるとし，$X \subset \mathbf{R}^2$ とおく．事故は X 内の点上で確率的に発生し，事故で生じるけが人を治療するために m 個の病院が X 内に存在する状況を仮定する．全ての病院は十分な治療能力をもっているとし，m 個の病院の位置を各々 $H_1, \cdots, H_m \in X$ で表し，$\boldsymbol{H} = \{H_1, \cdots, H_m\}$ とする．緊急施設の位置を $P^* \in X$ で表し，発生した事故に緊急施設が対処する地域を $X^* \subseteq X$ で表す．これらは以降で定式化する問題の決定変数である．

始めに，X のある部分集合領域上で発生する事故に対する緊急施設から事故現場を経由した病院までの道程に注目した基準を説明する．本節では，事故現場を経由した緊急施設から病院までの距離を表すのに A-距離を用いる．緊急施設内に存在する救急車が移動可能な方向が固定で a 個与えられているとし，これらの方向の集合を $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_a\}$ で表す．R 内の各点から見て一番近い病院を表す関数を $S : R \to \{H_1, \cdots, H_m\}$ で表す．このとき，事故が点 $Q \in X$ で発生した場合，Q を経由した緊急施設から Q に一番近い病院までの A-距離は

$$\theta(P^*, Q) = d_A(P^*, Q) + d_A(Q, S(Q)) \tag{6.1}$$

として表される．式 (6.1) で表される距離に対して，第 2 章の 2.1.2 で述べたミニマックス問題を考察したときの目的に対する満足度を以下に表す．

2 つの正数 d_e, d_ℓ について，意思決定者は事故現場に対して距離が d_e 以下であるように緊急施設を配置したいが，距離が d_e より大きい場合でも $d_e + d_\ell$ より小さい場合にはある程度満足すると仮定する．このとき，事故発生現場として点 Q 上のみを考慮した場合における満足度を，以下の A-距離に関するメンバーシップ関数を用いて表す．

$$\mu_G(\theta(P^*, Q)) = \begin{cases} 1, & \theta(P^*, Q) < d_e \text{ の場合}, \\ 1 - \dfrac{\theta(P^*, Q) - d_e}{d_\ell}, & d_e \leq \theta(P^*, Q) < d_e + d_\ell \text{ の場合}, \\ 0, & \theta(P^*, Q) \geq d_e + d_\ell \text{ の場合} \end{cases} \tag{6.2}$$

上式のメンバーシップ関数は距離に対して減少関数であるので，ある領域内における満足度をミニマックス問題として考察する場合には，満足度が最小となる点についてその満足度の最大化を目的とするマックスミニ問題に置き換える必要がある．よって，領域 $X^* \subseteq X$ 内を考慮した場合における満足度は，以下のファジィ目標として表される．

$$\mu_1(P^*, X^*) = \min_{Q \in X^*} \mu_G(\theta(P^*, Q)) \tag{6.3}$$

上記のファジィ目標の最大化を施設配置における目的の一つとして設定する．

次に，救急車が素早く対処可能な事故の発生確率に注目した基準を説明する．$\boldsymbol{H}$ に対する A-距離の意味でのボロノイ図 $VD_A(\boldsymbol{H})$ を構成し，X に対してボロノイ多角形 $V_A(H_i)$ 上で発生する事故の確率を $P_i \in [0, 1]$ で表す．ここで，各確率は $\sum_{i=1}^m P_i = 1$ をみたす．本節では，病院の近傍領域で発生する事故の発生確率が与えられており，各 P_i が既知であると仮定する．また，領域 X^* に含まれるボロノイ多角形の母点に関する指標の集合を次のように表す．

$$I(X^*) = \{i = 1, \cdots, m | \ V_A(H_i) \subseteq X^*\} \tag{6.4}$$

このとき，この基準に対する満足度をファジィ目標として表すために，以下の確率に関するメンバーシップ関数を用いる．

$$\mu_2(X^*) = \sum_{i \in I(X^*)} P_i \tag{6.5}$$

上記のファジィ目標の最大化を施設配置におけるもう一つの目的として設定する．

従って，本節で考察する緊急施設配置のモデルは次のファジィ二目的問題 (P_{MA}) として定式化される．

$$P_{MA}: \ \max_{P^*, X^*} \quad \mu_1(P^*, X^*), \tag{6.6}$$

$$\max_{X^*} \quad \mu_2(X^*) \tag{6.7}$$

$$\text{s.t.} \quad P^* \in X, \ \ X^* \subseteq X \tag{6.8}$$

以下では，問題 (P_{MA}) に対して非劣解（第 2 章の 2.3.2 を参照）の集合を求める方法を考察する．問題 (P_{MA}) の解について，次の定理が得られる．

定理 6.1 幾つかの $\boldsymbol{H}$ に対するボロノイ多角形の和集合を $\bar{V}$ とし，$\bar{V}$ とボロノイ多角形を含まない領域との和集合を $\bar{X}$ とする．領域 $\bar{V}$, $\bar{X}$ に対する目的関数 (6.6) の解を各々 $P^*(\bar{V})$, $P^*(\bar{X})$ とする．このとき，$(P^*(\bar{X}), \bar{X})$ は $(P^*(\bar{V}), \bar{V})$ によって弱優越される．

証明

式 (6.5) 及び (6.4) から，$\mu_2(\bar{X}) = \mu_2(\bar{V})$ が成り立つ．また，式 (6.2) 及び (6.3) から，$\mu_1(P^*(\bar{X}),\bar{X}) \le \mu_1(P^*(\bar{V}),\bar{V})$ が成り立つ．従って，$(P^*(\bar{X}),\bar{X})$ は $(P^*(\bar{V}),\bar{V})$ によって弱優越される．　□

上記の定理より，発生した事故に緊急施設が対処する地域を考慮するのはボロノイ多角形の和集合となる領域のみでよいことが分かる．

6.2.2　解法手順

次の定理は松富と石井 [42] によって与えられたものである．

定理 6.2 問題 (P_{MA}) の解 (X^*, P^*) について，$X^* = X$ とする，すなわち $\mu_2(X^*) = 1$ である．このとき，事故現場 $Q \in X$ について $\theta(P^*, Q)$ を最大にする点の候補は次のいずれかにより与えられる．

1. 多角形領域 X の頂点
2. ボロノイ多角形の辺と X との交点

定理 6.2 から，幾つかのボロノイ多角形による任意の和集合内で考察する問題 (P_{MA}) に対する非劣解に対して，事故現場 $Q \in X^*$ について $\theta(P^*, Q)$ を最大にする点の候補は次のいずれかにより与えられる．

(a) 各 $V(H_i)$ におけるボロノイ点
(b) 多角形領域 X の頂点
(c) ボロノイ多角形の辺と X の境界との交点

このことは，問題 (P_{MA}) において考察する必要のある事故発生点を有限個に減らす事が出来ることを意味する．上記の場合 (a)(b)(c) に当てはまる点を $Q_1, \cdots, Q_N$ で表す．ここで，N はこれらの点の中で相異なるものの総数である．

X^* がある幾つかのボロノイ多角形の和集合して与えられており，上記に述べた点の中で X^* に属するものの指標集合を

$$J(X^*) = \{j = 1, \cdots, N \mid Q_j \in X^*\} \tag{6.9}$$

で表す．このとき，この X^* に対する (P_{MA}) は次のメッセンジャーボーイ問題 $(P_E^{X^*})$ として表される．

$$P_E^{X^*} : \min_{P^*} \max_{Q_i \in X^*} \{d_A(P^*, Q_j) + k_j \mid j \in J(X^*)\} \tag{6.10}$$

ここで，$P^* = (x^*, y^*)$，及び各 $j \in J(X^*)$ に対して $k_j = d_A(Q_j, S(Q_j))$ である．

指標 $j \in \{1, \cdots, N\}$ について，中心 Q_j，半径 k_j である A-円を C_j で表す．このとき，問題 $(P_E^{X^*})$ は $\{C_j | \ j \in J(X^*)\}$ 内の全ての A-円を被覆する最小の半径をもつ A-円（最小被覆円）を求める問題として表すことが出来る．A-円が中心の位置と半径による３つの独立変数で表されることから，最小被覆円は $\{C_j | \ j \in J(X^*)\}$ 内の高々３つの A-円により決定される事が分かる．このことは，問題 (P_{MA}) に対する全ての非劣解を求めるためには，$C_1, \cdots, C_N$ から３つの異なる A-円を選ぶ全ての組合せに対して最小被覆円を求める必要があることを意味している．

指標 $i, j \in \{1, \cdots, N\}$，$i \neq j$ について，２点 Q_i, Q_j に対して病院までの距離に対応した二等分線を次のように表す．

$$C_A(C_i, C_j) = \left\{ p \in \mathbf{R}^2 | \ d_A(Q_i, p) + k_s = d_A(Q_j, p) + k_t \right\} \tag{6.11}$$

このとき，３つの異なる A-円に対して最小被覆円を求めるアルゴリズムを以下に述べる．

アルゴリズム 6.1

Step 1. ３つの異なる A-円の組について，$k_s \geq k_t \geq k_u$ をみたすように (C_s, C_t, C_u), $s, t, u = 1, \cdots, n$ を並び替えておく．もし C_s が C_t, C_u を被覆するならば，そのとき C_s は求める最小被覆円であり，このアルゴリズムは終了する．

Step 2. 二等分線 $C_A(C_s, C_t)$ と２点 Q_s, Q_t を結ぶ線分との交点を P^1 とする．P^1 を中心とし C_s, C_t に対する最小被覆円を C^1 とする．もし C^1 が C_u を被覆するならば，C^1 は求める最小被覆円であり，このアルゴリズムは終了する．

Step 3. ３つの二等分線 $C_A(C_s, C_t)$, $C_A(C_t, C_u)$, $C_A(C_t, C_u)$ の交点を P^2 とおく．このとき，求める最小被覆円は中心が P^2 で，C_s, C_t, C_u を被覆するのに必要な最小の半径をもつものとして求められる．

上記のアルゴリズムより，問題 (P_{MA}) に対する非劣解を求めるアルゴリズムを述べる．３つの異なる A-円の組について，未だ調べていない組及び調べ終わった組の集合を各々YC, AC とおく．A-円の組 (C_s, C_t, C_u) に対する最小被覆円を C^{stu} で表し，その円の中心及び半径を各々P^{stu}, r_{stu} で表す．このとき，P^{stu} は問題 (P_{MA}) に対する施設配置の候補となる．最小被覆円 C^{stu} によって与えられる問題 (P_{MA}) の非劣解の候補を (P^{stu}, X^{stu}) とする．

アルゴリズム 6.2

Step 0: 全ての A-円 $C_1, \cdots, C_N$ を求める．YC を 3 つの異なる A-円の組の全体集合とおき，$AC = \emptyset$, $NDS = \emptyset$ とおく．

Step 1: YC に含まれる組 (C_s, C_t, C_u), $s, t, u = 1, \cdots, n$ について，アルゴリズム 6.1 により最小被覆円を求める．$IV = \{1, \cdots, m\}$, $j = 1$ とおく．

Step 2: もし C_j が C_{stu} によって被覆されるならば，Step 5 に行く．もし C_{stu} が C_j を被覆しないならば，$i = 1$ とおく．

Step 3: もし $i \in IV$ かつ $V_A(H_i)$ の境界が Q_j を通るならば，$IV \leftarrow IV \backslash \{j\}$ とする．

Step 4: $i \leftarrow i + 1$ とする．もし $i \leq m$ ならば，Step 3 に戻る．

Step 5: $j \leftarrow j + 1$ とする．もし $j \leq N$ ならば，Step 2 に戻る．

Step 6: C^{stu} によって与えられる問題 (P_{MA}) の解の候補は，P^{stu} 及び

$$X^{stu} = \sum_{i \in IV} V_A(H_i) \tag{6.12}$$

として表される．もし (P^{stu}, X^{stu}) が現時点で NDS 内に属する他のどの解にも優越されないならば，$NDS \leftarrow NDS \cup \{(P^{stu}, X^{stu})\}$ とする．また，(P^{stu}, X^{stu}) によって優越される解が NDS 内に存在するならば，その解を NDS から除いておく．$YC \leftarrow YC \backslash \{(C_s, C_t, C_u)\}$, $AC \leftarrow AC \cup \{(C_s, C_t, C_u)\}$ とする．もし $YC = \emptyset$ ならばこのアルゴリズムを終了し，この時点における NDS が求められる非劣解集合である．もし $YC \neq \emptyset$ ならば，Step 1 に戻る．

上記のアルゴリズムの計算時間について，次の定理が成り立つ．

定理 6.3 アルゴリズム 6.2 の計算時間は高々$O(m^5 n^4 \cdot T_2 \cdot T_3)$ である．ここで，T_2 は Step 2 において各 C_j に対する判定にかかる計算時間であり，T_3 は Step 3 において各 $V_A(H_i)$ に対する判定にかかる計算時間である．

証明

Widmayer 等 [73] によって，m 個の点の集合に対する A-距離に関するボロノイ図は $O(m \log m)$ 程度の計算時間で構成することが出来る．ボロノイ点及びボロノイ辺と X の境界との交点の数は各々$O(mn)$ 及び $O(m)$ 程度である．よって，N は $O(mn)$ 程度であり，3 つの異なる A-円の全組合せ数は $O((mn)^3)$ 程度で

ある．最悪の場合，全ての A-円に関する組に対して，Step 2 において N 個の A-円について，また Step 3 において m 個のボロノイ多角形について各 Step の計算を反復する必要がある．従って，アルゴリズム 6.2 全体に対する計算時間は $O((mn)^3 \cdot N \cdot T_2 \cdot m \cdot T_3)$ として与えられる． □

6.2.3 数値例

本節の緊急施設配置のモデルを具体的に示すために，以下の数値例に対する計算結果を示す．

この数値例では，図 6.1 に見られるような四角形領域 $V_1V_2V_3V_4$ 内に 3 つの病院 H_1, H_2, H_3 が存在する状況を考察している．式 (6.2) において，定数 d_e 及び d_ℓ の値は図 6.2 における線分の長さで与えられるとする．各ボロノイ多角形上で発生する事故の確率について，$P_1 = 0.4$, $P_2 = 0.25$, and $P_3 = 0.35$ で与えられ，方向集合 A は図 6.3 で与えられるとする．図 6.1 におけるボロノイ図より，$N = 16$ である．

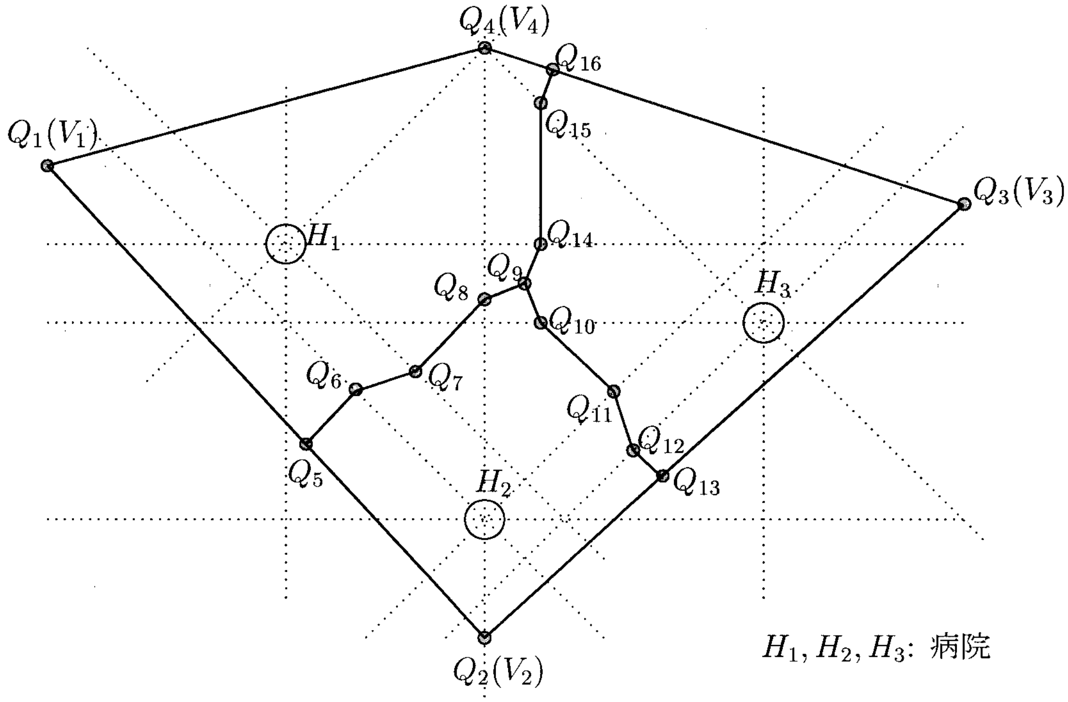

図 6.1: 多角形領域 X の例

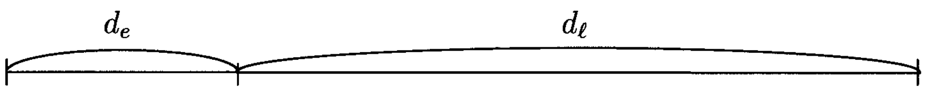

図 6.2: ファジィ目標に関する距離 d_e 及び d_ℓ

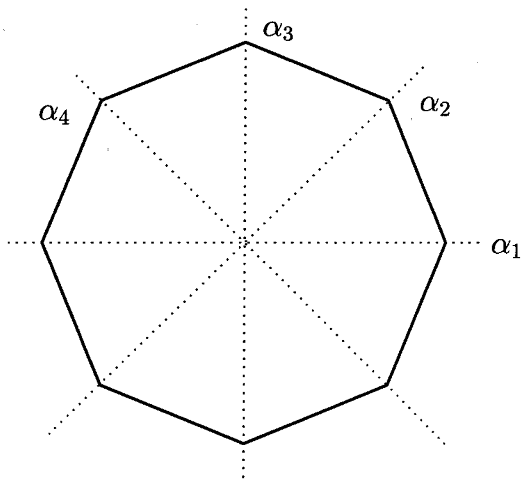

図 6.3: $A = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4\}$ における A 円

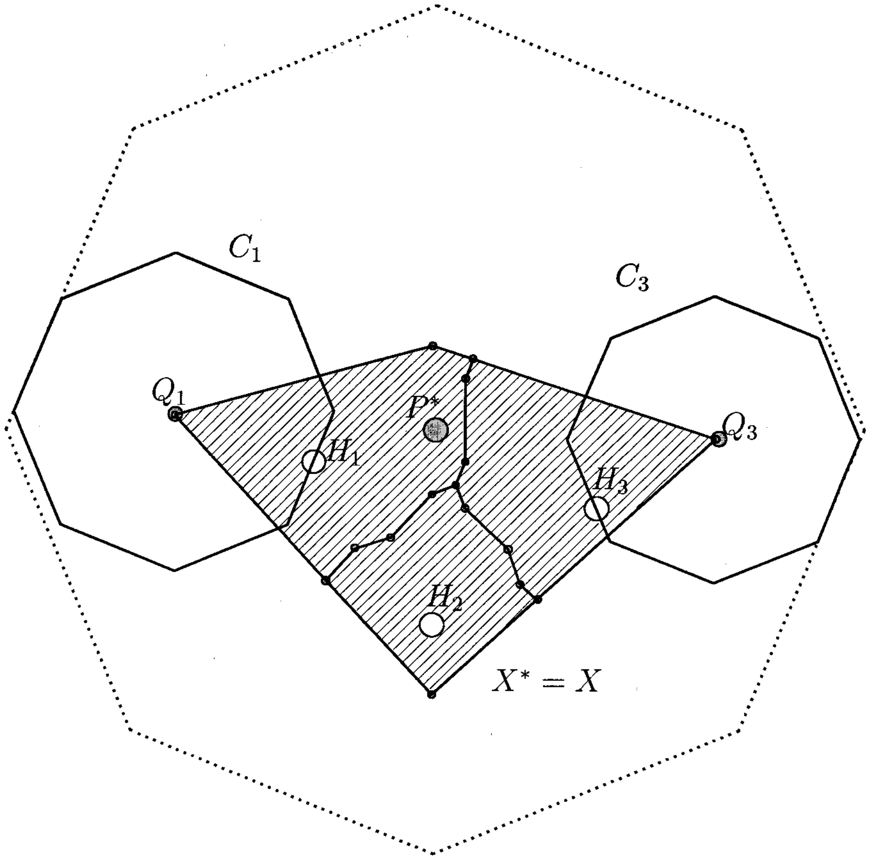

図 6.4: 場合 (i) における非劣解

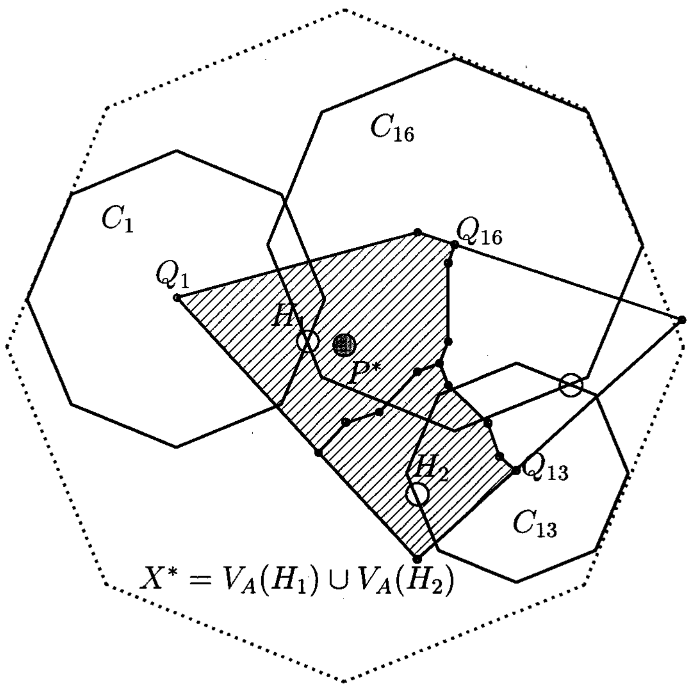

図 6.5: 場合 (ii) における非劣解

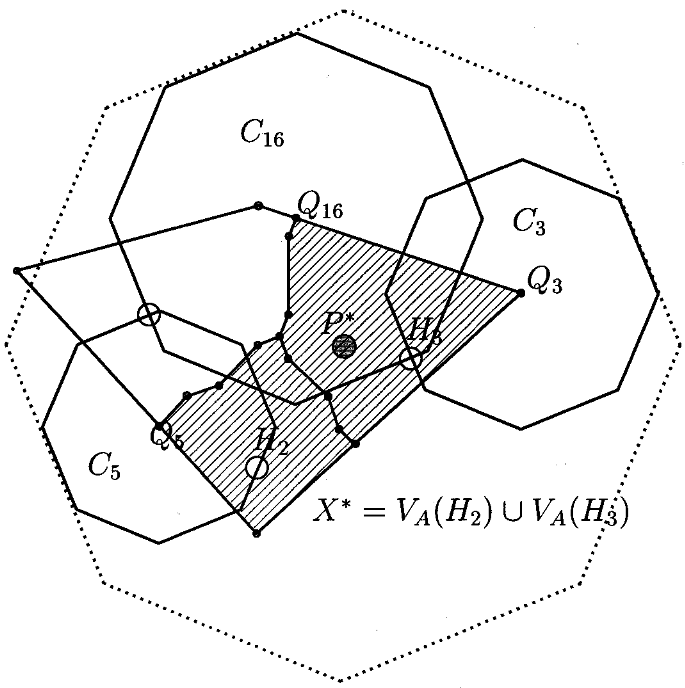

図 6.6: 場合 (iii) における非劣解

ここでは，アルゴリズム 6.2 によって求められる非劣解の中で，$\mu_2(X^*) \geq 0.5$ をみたす解のみを以下に示す．

(i) Step 1 において $C_s = C_1, C_t = C_3$, 及び任意の C_u の場合，図 6.4 で表される非劣解を得た．この解における目的関数値は，$\mu_1(P^*, X^*) = 0.29$ 及び $\mu_2(X^*) = 1$ である．

(ii) Step 1 において $C_s = C_{16}, C_t = C_1$, 及び $C_u = C_{13}$ の場合，図 6.5 で表される非劣解を得た．この解における目的関数値は，$\mu_1(P^*, X^*) = 0.44$ 及び $\mu_2(X^*) = 0.65$ である．

(iii) Step 1 において $C_s = C_{16}, C_t = C_3$, 及び $C_u = C_5$ の場合，図 6.6 で表される非劣解を得た．この解における目的関数値は，$\mu_1(P^*, X^*) = 0.45$ 及び $\mu_2(X^*) = 0.6$ である．

また，$\mu_2(X^*) < 0.5$ となる非劣解も解と認める場合，X^* がボロノイ多角形 $V_A(H_1)$, $V_A(H_2)$, $V_A(H_3)$ である場合における非劣解が得られ，これらの解における目的関数値のうち，$\mu_1(P^*, X^*)$ の値は 0.45 より大きい．

6.3 多目的性をもつ競合施設配置問題

第 3 章における競合施設配置問題で後手企業の施設配置にかかる費用が先手企業と同程度以下である場合，各企業の最適配置は隣接あるいは同一点上となることが定理 2.3 及び定理 3.1 によって推測される．このことは利得最大化のみを目的とする競合施設配置問題の均衡解が利用者にとって利便度が低い事を意味し，病院や薬屋など公共性をもつ競合施設の配置における行政機関等による規制・調整の意義を示唆する．しかし，企業に対して利便度最大化を要求することは利得追求の面から考えると好ましいことではなく，利便度の向上をどの程度要求できるか決定することは重要な問題であると考える．

本節では，第 3 章で定式化を行ったメジアノイド問題 (P_B) について，後手企業の利得最大化に加えて利用者から見た施設の利便度を目的として考察することで多目的問題として拡張する．多目的問題における解の概念として前節で用いた非劣解集合が挙げられるが，企業にとって最優先される目的は利得であることから，第 3 章で求めた最適解における利得を保持した上で利便度を最大にする解を求める．6.3.1 では，先手企業の施設が既に配置されている状況の下での多目的施設配置問題の定式化を行う．6.3.2 では，この問題に対する解法手順を示す．6.3.3 では，数値例に対してこの解法を用いた計算結果を示す．

6.3.1 問題の定式化

本節で用いる記号は第 3 章で用いるものと共通する．本章を通して先手企業の施設 A は既に配置されていると仮定し，その固定された施設配置を (u_A, l_A) で与える．施設 A の配置

(u_A, l_A) に対し，後手企業が施設 B の配置を (u_B, l_B) とした場合に得られる利得を $r_B(u_B, l_B)$ で表す．このとき 3.2 節で述べたように，(u_A, l_A) に対する施設 B のメジアノイド問題 (P_B) は次のように定式化出来る．

$$P_B: \ \max \quad r_B(u_B, l_B) \tag{6.13}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{6.14}$$

本節では利用者全体に対する利便度を考慮することで，問題 (P_B) を企業及び利用者に対する多目的問題として拡張する．

第 2 章の 2.1.1 におけるウェーバー問題で用いた利便度の評価は距離を基にして行ったが，本節では距離と施設の質的評価値との積を用いて評価を行う．このとき，需要点 $i \in I$ 上の利用者全体に対する施設 $F \in \{A, B\}$ の不便度を $w_i \cdot k_F(l_F)d(v_i, u_F)$ として表す．第 3 章で A,B の利用者が存在する需要点の指標集合は各々

$$N_A = \{i \in I \mid k(l_A)d(v_i, u_A) \le k(l_B)d(v_i, u_B)\}, \tag{6.15}$$

$$N_B = \{i \in I \mid k(l_A)d(v_i, u_A) > k(l_B)d(v_i, u_B)\} \tag{6.16}$$

として表されている．複数の施設に対するウェーバー問題では，利用者は距離の短い施設のみ利用すると式 (2.3) によって仮定していたので，本節における問題はウェーバー問題の拡張といえる．よって，利便度最大化問題は次のように定式化できる．

$$P'_C: \ \min \quad \sum_{i \in N_A} w_i \cdot k_A(l_A)d(v_i, u_A) + \sum_{i \in N_B} w_i \cdot k_B(l_B)d(v_i, u_B) \tag{6.17}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{6.18}$$

また，A の配置は既に (u_A, l_A) として与えられており，需要点 i 上の利用者全体に対する B の配置後における利便度の向上の度合いを次のように表す．

$$f_i(u_B, l_B) \equiv \begin{cases} w_i \cdot \{k_F(l_A)d(v_i, u_A) - k_F(l_B)d(v_i, u_B)\}, & \forall i \in N_B, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{6.19}$$

式 (6.15) 及び (6.16) より，問題 (P'_C) は次のように置き換えられる．

$$P''_C: \ \min \quad \sum_{i \in I} \{w_i \cdot k_A(l_A)d(v_i, u_A) - f_i(u_B, l_B)\} \tag{6.20}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{6.21}$$

問題 (P''_C) の目的関数における第一項は，(u_A, l_A) が固定であることから定数である．よって，利用者全体から見た利便度最適化問題は次のように変形できる．

$$P_C: \ \max \quad \sum_{i \in I} f_i(u_B, l_B) \tag{6.22}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{6.23}$$

以上より，問題 (P_C) と問題 (P_B) を組み合わせることで企業と利用者の立場から考慮した多目的問題は次のように定式化される．

$$P_M: \max \quad r_B(u_B, l_B), \tag{6.24}$$

$$\max \quad \sum_{i \in I} f_i(u_B, l_B) \tag{6.25}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T \tag{6.26}$$

第2章の2.3.2の例では，企業の施設配置を顧客の要求に従って規制することが，企業にとって必ずしも獲得購買力を減少させる要因でないことを示している．本研究では，企業は利便度を考慮しない場合における利得が保証されると考え，後手企業が最大利得を獲得可能であるという条件を基にして利便度を最適にする解を求めることにする．

6.3.2 解法手順

問題 (P_B) において最大利得を獲得可能な施設配置の領域を次のように表す．

$$T_B \equiv \arg \max_{(u_B, l_B) \in T} r(u_B, l_B) \tag{6.27}$$

このとき，多目的問題 (P_M) において後手企業が最大利得を獲得可能であるという条件の下に利便度を最適にする解は，次の単一目的問題 (P_S) を解くことで求められる．

$$P_S: \max \quad \sum_{i \in I} f_i(u_B, l_B) \tag{6.28}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T_B \tag{6.29}$$

一般に問題 (P_S) の実行可能領域 T_B は連結でないので，従来提案されてきたアルゴリズムを利用することは難しい．本研究では，T_B を分割することで従来のアルゴリズムを利用できる部分問題に分ける解法を提案する．

B の利用者が存在する需要点の分布は施設配置によって変化するが，T_B 内の施設配置を全て考慮したときに得られる B を利用する需要点の集合 N_B の全パターンをグループにして G_B で表す．G_B 内の要素 $\bar{N}_B (\in G_B)$ について，この集合内の需要点によって利用される B の施設配置の内 T_B に属するものの集合を次のように表す．

$$T_B(\bar{N}_B) = \bigcap_{i \in \bar{N}_B} \{(u_B, l_B) \in T_B \mid k(l_B) d(u_B, v_i) < k(l_A) d(u_A, v_i)\} \tag{6.30}$$

提案する解法では，T_B を G_B 内の要素に対応して分割することにする．$\bar{N}_B$ が固定されている場合，式 (6.19) 中の A に関する項は全て固定される．よって，問題 (P_S) では式 (6.19)

において B に関する項のみ考慮すればよい．以上より，問題 (P_S) において $T_B(\bar{N}_B)$ のみを実行可能領域とする問題 $(P_{\bar{N}_B})$ は次のように定式化される．

$$P_{\bar{N}_B}: \min \quad \sum_{i \in \bar{N}_B} w_i \cdot k(l_B) d(u_B, v_i) \tag{6.31}$$

$$\text{s.t.} \quad (u_B, l_B) \in T_B(\bar{N}_B) \tag{6.32}$$

問題 $(P_{\bar{N}_B})$ は第 2 章の 2.1.1 で述べたウェーバー問題の応用となっている．G_B 内の全ての要素について問題 $(P_{\bar{N}_B})$ を解き，その中で目的関数 (6.31) を最小にする施設配置が問題 (P_S) の最適解となる．

次に，問題 $(P_{\bar{N}_B})$ を効率的に解くためのアルゴリズムについて述べる．式 (6.28) から，問題 $(P_{\bar{N}_B})$ の目的関数は u_B に関して凸性をもつ．施設配置に関する費用関数 C_B の単調増加性及び式 (3.5) 中の第二項より，問題 $(P_{\bar{N}_B})$ における最適なレベルは唯一に与えられる．式 (6.30) から，最適なレベルに対して $T_B(\bar{N}_B)$ は u_B に関して凸性をもつ．従って，問題 $(P_{\bar{N}_B})$ は凸計画問題である．S_B 内の要素に対応して分割された全ての実行可能領域中の一点を求める解法は，3.3 節で既に示されている．これらの点を初期実行可能点とすることで，問題 $(P_{\bar{N}_B})$ を解くために準ニュートン法を用いることが出来る [28, 38]．準ニュートン法は凸計画問題において大域的収束性をもち，かつ超一次収束することが知られており，大規模問題においても効率的に厳密解が導出されることが期待できる．

6.3.3　数値例

本研究で用いる数値例について，後手企業の利得に関する比例係数 α_F が 0 以上の全ての場合について最適解を求める．需要点は 6 つあるとし，各需要点の位置及び購買力は図 6.7 及び表 6.1 によって与えられるものとする．

先手企業は施設 A を既に配置しており $(u_A, l_A) = (v_4, 2)$ で与えられるとし，後手企業が配置できるレベルの最大値は $Q = 3$ である．勧誘力関数及び施設配置に関する費用関数は表 6.2 により与えられる．

最初に，3.3 節で述べた解法を用いて問題 (P_B) を解く．

(i) $0 \leq \alpha_B \leq 3/2$ の場合，B の最適なレベルは $l_B = 3$ であり，命題 3.1 から最適な位置の一つは v_4 上である．このとき，B は需要点 4 を除く全ての需要点から購買力を獲得でき，後手企業の利得は $r_B = 1100 - \alpha_B \cdot 400$ で与えられる．

(ii) $3/2 \leq \alpha_B \leq 2$ の場合，B の最適なレベルは $l_B = 2$ であり，定理 2.3 から最適な位置の一つは u_A に対して左側から接することである．このとき，B は需要点 1,2,3 から購買力

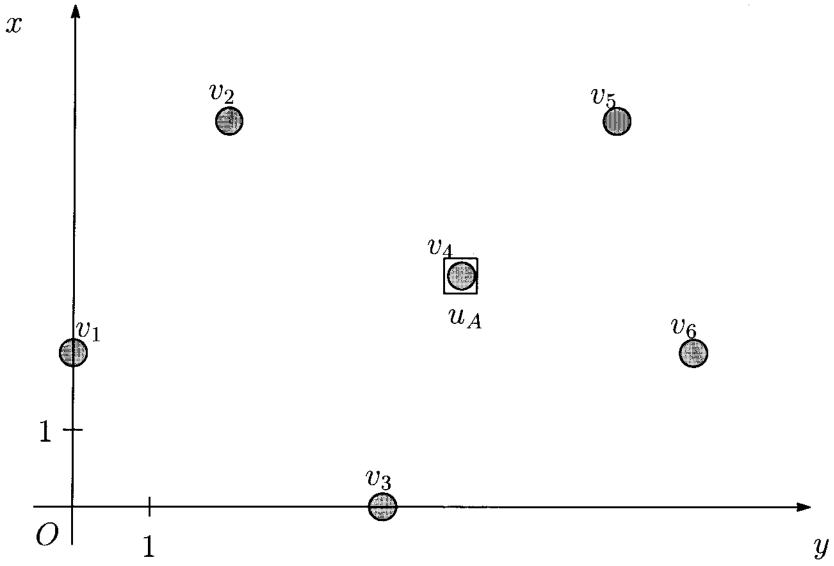

図 6.7: 需要点の分布及び施設 A の位置

表 6.1: 需要点の位置及び購買力

需要点 i	位置 $v_i = (x_i, y_i)$	購買力 w_i
1	(0.00, 2.00)	300
2	(2.00, 5.00)	300
3	(4.00, 0.00)	200
4	(5.00, 3.00)	400
5	(8.00, 5.00)	100
6	(9.00, 2.00)	200

表 6.2: 勧誘力関数 $k_F(l_F)$ と施設配置に関する費用関数 $C_B(l_B)$

各施設のレベル $l_F, F \in \{A, B\}$	勧誘力関数 $k_F(l_F)$	建設費用関数 $C_B(l_B)$
1	4.00	100
2	2.00	200
3	1.00	400

を獲得でき，後手企業の利得は $r_B = 800 - \alpha_B \cdot 200$ で与えられる．

(iii) $\alpha_B \geq 2$ の場合，B の最適なレベルは $l_B = 1$ であり，3.3.2 中のアルゴリズム 3.2 から最適な位置の一つは v_1, v_2 を結ぶ線分上の点 $u_B = (1.17, 3.76)$ で与えられ，図 6.8 のように表される．このとき，B は需要点 1,2 から購買力を獲得でき，後手企業の利得は $r_B = 600 - \alpha_B \cdot 100$ で与えられる．

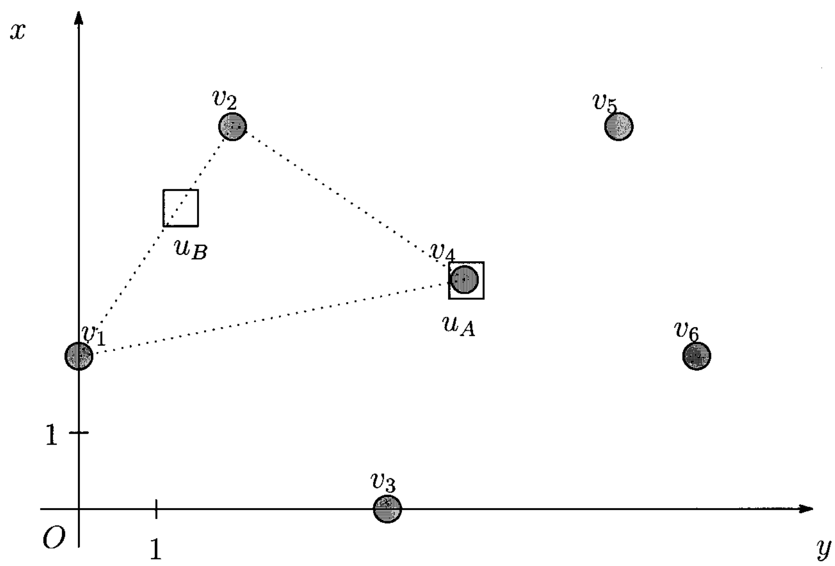

図 6.8: (iii) $\alpha_B \geq 2$ の場合における最適配置

次に，6.3.2 で述べた解法を用いて問題 (P_S) の解を求める．

(i) $0 \leq \alpha_B \leq 3/2$ の場合，問題 (P_S) における最適な位置は $u_B = (3.01, 2.65)$ であり，問題 (P_B) からの配置の移動は図 6.9 のように表される．このとき，利便度に関する目的関数の値は 4.86×10^3 で与えられる．

(ii) $3/2 \leq \alpha_B \leq 2$ の場合，問題 (P_S) における最適な位置は $u_B = (2.73, 1.47)$ であり，問題 (P_B) からの配置の移動は図 6.10 のように表される．このとき，利便度に関する目的関数の値は 2.62×10^3 で与えられる．

(iii) $\alpha_B \geq 2$ の場合，問題 (P_S) における最適な位置は v_1, v_2 間の線分上の点全てであり，図 6.8 で示される配置は最適配置となっている．このとき，利便度に関する目的関数の値は 8.96×10^2 で与えられる．

数値例の結果より，獲得購買力に対する施設配置に関する費用の重要度が低い程，利用

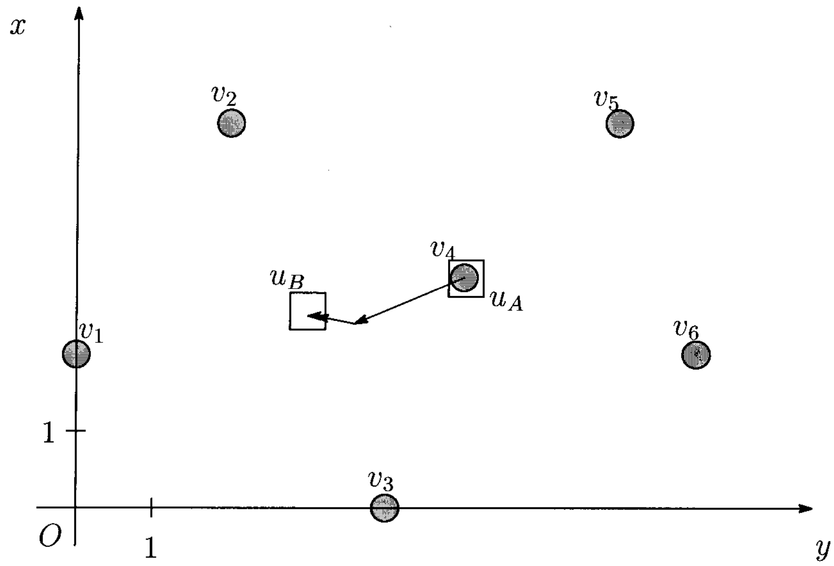

図 6.9: (i) $0 \leq \alpha_B \leq 3/2$ の場合における最適配置

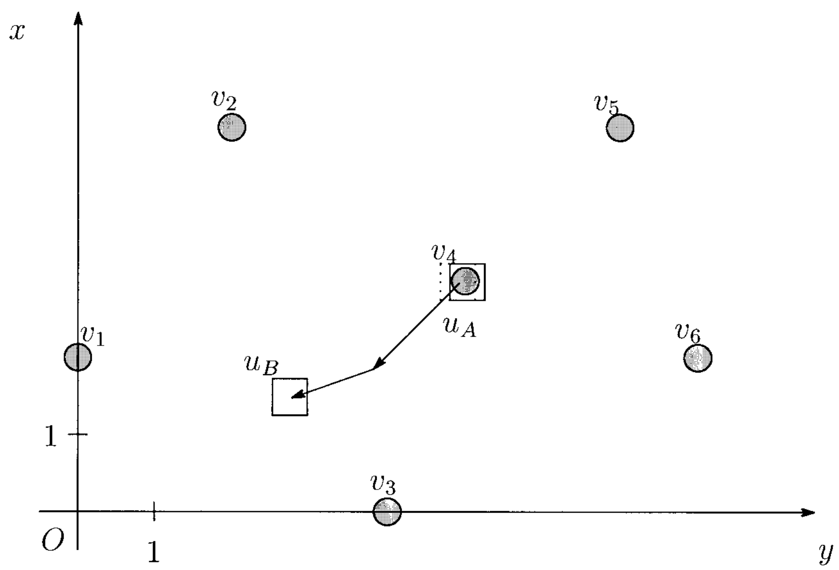

図 6.10: (ii) $3/2 \leq \alpha_B \leq 2$ の場合における最適配置

者にとって便利な施設配置となる事が分かる．しかし，後手企業の施設のレベルが先手企業のレベル以上である場合，利得のみ考慮した配置問題が利用者にとって便利でないことが命題 3.1 や定理 2.3 から分かる．このことは利用者が頻繁に利用する施設を扱う競合施設配置問題において利便度を考慮に入れることの重要性を意味する．

6.4　結言

本章では緊急施設及び競合施設を配置する場合において，意思決定者にとって複数の目的が存在する状況下での施設配置のモデルを考察した．

6.2 節では，松富と石井 [42] による緊急施設の研究について，各病院の支配領域毎に与えられる事故の発生確率が既知である状況を仮定した．救急車が提供するサービスとは，事故発生の連絡を受けて発生地点まで移動した後，その事故による傷病者を適切な処置を行う病院等の医療施設に搬送することである．このサービスは緊急を要する事態に対する処置であることから，一般にその地点から最近隣の医療施設に搬送される．よって，事故発生確率のデータは病院に運び込まれる患者の数により推測できると考えられる．

事故発生確率が既知である場合，全領域を考慮するよりも特に事故発生確率の高い領域を重視して緊急施設を配置する方が，その領域内で発生する事故に対して迅速に救急車を手配できる．このことは，事故に対処するための「迅速性」及び領域を広く考慮することによる「事故対処確率の向上」を同時に考慮する必要があることを示している．本節では，緊急施設配置問題を多目的問題として拡張した．定式化された多目的問題に対して，松富と石井 [42] の提案するアルゴリズムを拡張することで効率的に非劣解を求めるための解法手順を提案した．各非劣解は緊急施設の配置の候補となるだけでなく，複数の緊急施設を配置する場合において救急車デポの担当領域が分割される状況下でも有用であると考える．

6.3 節では，病院や薬屋等のように公共性を有する競合施設を配置するモデルを考察した．一般に，競合施設配置問題では施設の公共性を仮定していないので，施設が密集した配置等のように利用者にとって不便な配置となる状況が起こり得る．このような施設の場合，薬事法における距離制限規定や小売市場の許可制を定める小売商業調整特別措置法等のように行政指導によることが考えられるが，施設配置を含む自由競争がどの程度制限されるべきか考察するのは重要な問題である．そこで，施設の公共性を企業の利得と同時に考慮することで，この制限の目安を求めることが考えられる．

また，6.3 節では第 3 章で述べた施設の質的側面を考慮した競合施設配置問題について，利用者にとっての利便性を目的関数として導入することで企業・利用者の双方を考慮した多目的問題に拡張した．先手企業が既に配置されている状況のもとで，後手企業が施設を

配置することによる利便度の向上を目的関数としてメジアノイド問題に追加することで多目的問題として定式化した．この多目的問題について，利得の減少無しで利便度をどの程度向上可能か求めることは，上記に述べた自由競争の制限の目安として意義があると考える．これを求めるために，準ニュートン法を用いたアルゴリズムを提案することで効率的な解法手順を提案した．複数の企業間の競合環境下における多目的施設配置問題は従来の研究が少なく，今後様々な状況におけるモデルが考えられる [64].

最後に，本章における今後の課題を以下に挙げる．

- 6.2 節のモデルにおいて病院の治療許容能力を超える患者が来院してきたとき考慮すると，最近隣だけでなくその次に近い病院も視野に入れる必要がある．病院の規模を考慮した緊急施設配置のモデルの拡張が考えられる．
- 6.3 節のモデルにおいて先手企業がまだ配置されていない状況を考慮した場合，先手・後手企業の施設配置後における利便度は後手企業のときのみよりもさらに向上すると推測できる．多目的性をもつセントロイド問題における考察は今後の課題である．

第7章　結論

本論文では競合環境下での施設配置問題に関する数理的研究を行った．第3章及び第4章では施設を配置する企業間の競合環境下での施設配置問題を考察した．第5章では企業・住民間の競合環境下での施設配置問題を考察した．第6章では施設を配置する意思決定者の目的が複数存在する状況における施設配置問題を考察した．この結果として，以下のような知見を得た．

第3章では，スーパーマーケットや百貨店のように商品の品揃え等のサービスに格差がある施設において，Drezner [11] による研究を施設・需要点間の距離に加えて施設の質的レベルを考慮することで拡張した競合施設配置問題を考察した．3.2節では，施設の質的レベルに応じた質的評価値及び建設費を考慮することにより，先手・後手企業が各々1つ施設を配置する状況において各企業が利得最大化を目的とするメジアノイド問題及びセントロイド問題として定式化した．3.3節では，各問題に対して効率的な解法の手順を示し，3.4節で数値例に適用した．Dreznerのモデルにおいて提案された各企業の最適配置を求めるためのアルゴリズムでは，先手企業の施設に隣接した配置が後手企業の施設における最適配置として導出される．上記における各企業の最適配置は施設配置のモデルにおいて現実的でない場合がある．本研究のモデルでは先手企業の施設のレベルが後手企業の施設よりも高い状況において，後手企業の施設の最適配置は先手企業の施設から離れた位置となる．この状況は後手企業の施設の建設費が先手企業よりも割高である場合において，後手企業が建設費や維持費の面から先手企業と質的レベルの向上に関する競争を避けることを原因として起こり得る．

第4章では，利用者の施設に対する選択基準の多様性を仮定した競合施設配置問題を考察した．利用者の施設選択は主観的判断によってなされることから，選好によって分けられたグループ内での個体差や流行の変化による利用者個人内での選好の変遷等による選好のあいまいさを考慮する必要がある．また，このような施設では利用者の好みが要因として挙げられることから，提供するサービスが利用者にとって必須でない場合には，配置が不便であればサービスの潜在的利用者が施設を利用しない可能性を考慮する必要がある．4.2節では，位置及び選好で決定される利用者グループの数にファジィ数の概念を用いることで，上記のあいまいさを表現した．また，先手・後手企業が獲得購買力の最大化を目的と

することで，メジアノイド問題及びセントロイド問題として定式化を行った．4.3 節では，各問題に対して未配置の企業の施設が単数の場合における解法手順を提案し，4.4 節で数値例に適用した．流行の変遷を考慮する必要がある施設の配置問題においては，本研究の提案するモデルは適応可能であると考える．

第 5 章では，地域住民にとって必要であるが近くにあっては好ましくない施設の配置について，企業・各需要点間の競合環境下における問題として考察した．5.2 節では，企業の施設配置に関する建設費や輸送費には主観的評価からあいまいさが含まれると考えることで，これらの費用について L ファジィ数を関数値にとる関数を用いて表し，各々の目的関数に用いた．また，企業の施設配置を先に，住民の施設にかける圧力を後に行うと仮定することで，企業はシュタッケルベルグ均衡点を，各需要点間ではナッシュ均衡を求める問題として定式化を行った．5.3 節では，この問題について実関数を目的関数とする問題に変形することで，数理計画問題におけるアルゴリズムの一つである勾配法を用いることで効率的な解法手順を示した．このモデルにおいて，住民は需要点ごとにまとまって圧力をかけるか否かを決定すると仮定した．この仮定は配置される施設がゴミ焼却所や原子力発電所等のように必要だが好ましくないという性質をもつことから，他の需要点との協力関係がない場合において妥当であると考える．また，本研究で与えた企業・住民の費用関数についてその他考慮する必要があると考えられる費用については，自分の戦略が競合相手に影響を及ぼすか否か分類することで適応可能であると考える．

第 6 章では，意思決定者が単独である場合と複数の企業が競合する場合において，意思決定者あるいは企業にとって複数の目的を同時に考慮する必要がある状況における施設配置問題を考察した．

6.2 節では，松富と石井 [42] による緊急施設の研究について，各病院の支配領域毎に与えられる事故の発生確率が既知である状況を仮定した．これらの事故発生確率は病院に運び込まれる患者の数により推測されると考えられるので，比較的容易にデータが得られると考えられる．事故発生確率が既知である場合，全領域を考慮するよりも特に事故発生確率の高い領域を重視して緊急施設を配置する方が，その領域内で発生する事故に対して迅速に救急車を手配できる．このことは緊急施設配置問題において，事故に対処するための「迅速性」及び領域を広く考慮することによる「事故対処確率の向上」という多目的性を示している．これらの目的を同時に考慮することで，緊急施設配置問題を多目的問題として定式化した．さらに，この問題に対して松富と石井 [42] の提案するアルゴリズムを拡張することで，効率的に非劣解を求めるための解法手順を提案した．各非劣解は緊急施設の配置の候補となるだけでなく，複数の緊急施設を配置する場合において救急車デポの担当領域が分割される状況下でも有用であると考える．

6.3 節では，病院や薬屋等のように公共性を有する競合施設について，第 3 章で述べた施設の質的側面を考慮した競合施設配置問題について，利用者の立場から見た目的関数を導入することで企業・利用者の双方を考慮した多目的問題に拡張した．さらに，定式化された多目的問題に対して，企業の利得を保った上で利便度を最大にする解を求めるための効率的な解法手順を提案した．一般に，競合施設配置問題では施設の公共性を仮定していないので，施設が密集した配置等のように利用者にとって不便な配置となる状況が起こり得る．このような施設の場合，薬事法における距離制限規定や小売市場の許可制を定める小売商業調整特別措置法等のように行政指導によることが考えられるが，施設配置を含む自由競争がどの程度制限されるべきか考察するのは重要な問題である．施設の公共性を企業の利得と同時に考慮するによって得られる結果は，この制限の目安を与える上で意義があると考える．また，複数の企業間の競合環境下における多目的問題は従来の研究が少なく，今後様々な施設の種類・状況におけるモデルが考えられる．

以上のように，本研究では競合環境下での施設配置問題に関して様々な種類の施設及び競合環境を考慮することで，施設配置に関する新しいモデルを提案し，定式化した問題に対する効率的解法を提案した．本研究は施設配置のみならず，競合する複数の政党間における政策決定といった多方面への適応の可能性が考えられる．

最後に本研究の今後の課題及び発展性について考える．

- 複数の企業が競合する環境下での施設配置問題について，本研究では先手・後手企業が共に複数の施設を配置するより現実的な場合について扱っていない．本研究の基としたDreznerのモデルがNP-困難であることは既に知られており，この場合における最適配置を見つけるための解法を考案する必要がある．

- L ファジィ数を含む競合環境下での施設配置問題について，4.4 節の数値例による計算結果に見られるように各企業の最適解に競合環境特有の性質が現れている．このことは従来のファジィ数理計画問題の解析手法を適応することの困難さを示しており，今後競合環境下の問題特有の性質について調べる必要がある．

- 住民にとって必要だが好ましくない施設の配置問題について，第 5 章のモデルでは需要点間が非協力的であると仮定した．近年，市町村の合併が注目されているが，需要点間に協力関係がある場合の施設配置問題に対する影響の解析は，このような方面への適応が期待できる．

- 複数の企業が競合する環境下での多目的施設配置問題について，本研究では後手企業の施設の配置のみ考慮している．先手企業の施設の配置を考慮した場合，住民側か

ら見た施設の便利度は従来のウェーバー問題における研究から向上すると予想されるが，競合環境がどのような影響を及ぼすかについては今後解析する必要がある．

本論文で扱った施設以外の種類の施設について配置モデルを考察する場合，本研究におけるモデルとの類似点あるいは相違点を明確にして解析する必要がある．また，意思決定者間や多種の目的間等における様々な競合環境が施設配置に及ぼす影響の解析についても，今後研究を進めていく必要がある．さらに，モデルの設定・解析等によって研究の適用可能性を高めていくことにより，ゴミ焼却所の配置問題等に代表される現代社会における決定問題への解決に役立ていく．

謝辞

本論文は大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻において筆者が在学中に行った施設配置問題に関する研究の成果をまとめたものである．本研究を遂行し，まとめるにあたって終始懇切なご指導，ご助言をいただきました大阪大学大学院工学研究科教授 石井博昭先生に深く感謝の意を表すと共に, 厚く御礼申し上げます.

本学大学院工学研究科教授 魚崎勝司先生，谷田純先生，同助教授 斎藤誠慈先生，森田浩先生，本学産業科学研究所助教授 柏原昭博先生には本論文作成にあたり細部にわたりご指導頂き，また貴重な御助言を頂きましたこと，心より感謝いたします.

本学大学院工学研究科助教授 斎藤誠慈先生，神戸芸術工科大学助教授 大角盛広先生には本研究の遂行において終始適切な御助言御指導を頂きましたことに心より感謝いたします.

筆者の研究活動に対し貴重な御意見，及び激励の御言葉を頂きました本専攻石井研究室内諸氏に厚く御礼申し上げます.

最後に，筆者の研究生活を支えてくれた家族に心より感謝いたします.

参考文献

[1] M.A.Badri, A.K.Mortagy, and C.A.Alsayed: "A multi-objective model for locating fire stations," European Journal of Operational Research, Vol.110, pp.243-260 (1998).

[2] J.F.Baldwin and N.C.F.Guild: "Comparison of fuzzy sets on the same decision space," Fuzzy Sets and Systems, Vol.2, pp.213-233 (1979).

[3] S.M.Bass and H.Kwakernaak: "Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets," Automatica, Vol.13, pp.47-58 (1977).

[4] R.E.Bellman and L.A.Zadeh: "Decision-making in a fuzzy environment," Management Science, Vol.17, pp.B141-B164 (1970).

[5] O.Berman and Z.Drezner: "A note on the location of an obnoxious facility on a network," European Journal of Operational Research, Vol.120, pp.215-217 (2000).

[6] O.Berman and D.Krass: "Flow intercepting spatial interaction model: a new approach to optimal location of competitive facilities," Location Science, Vol.6, pp.41-65 (1998).

[7] G.Bortlan and R.Degani: "A review of some methods for ranking fuzzy subsets," Fuzzy Sets and Systems, Vol.15, pp.1-9 (1985).

[8] J.P.Brans and P.Vincke: "On locating new facility in a competitive environment," European Journal of Operational Research, Vol.12, pp.29-35 (1985).

[9] J.P.Brans and B.Mareschal: "Generalized criteria and (λ, μ)-efficiency," Vrije Universiteit Brussel (1986).

[10] R.Degani and G.Pacini: "Linguistic pattern recognition algorithms for computer analysis of ECG," Proc. BIOSIGMA, Vol.78, pp.18-26 (1978).

[11] Z.Drezner: "Competitive location strategies for two facilities," Regional Science and Urban Economics, Vol.12, pp.485-493 (1982).

[12] Z.Drezner and G.O.Wesolowsky: "Optimum location probabilities in the l_p distance Weber problem," Transportation Science, Vol.15, pp.85-97 (1981).

[13] D.Dubois and H.Prade: "Operations on fuzzy numbers," International Journal Systems Science, Vol.9, pp.613-626 (1978).

[14] D.Dubois and H.Prade: "Systems on linear fuzzy constrains," Fuzzy Sets and Systems, Vol.3, pp.37-48 (1980).

[15] D.Dubois and H.Prade: "Towards fuzzy differential calculus part III: Differentiation," Fuzzy Sets and Systems, Vol.8, pp.225-233 (1982).

[16] D.Dubois and H.Prade: "Ranking of fuzzy numbers in the setting of possibility theory," Information Sciences, Vol.30, pp.183-224 (1983).

[17] S.R.K.Dutta and M.Vidyasagar: "New algorithms for constrained minimax optimization," Mathematical Programming, Vol.13, pp.140-155 (1977).

[18] B.C.Eaton and R.G.Lipsey: "The principle of minimum differentiation reconsidered : some new developments in the theory of spatial competition," Review of Economic Studies, Vol.42, pp.27-48 (1975).

[19] J.Efstathiou and V.Rajkovic: "Multiattribute decision-making using a fuzzy heuristic approach," IEEE Trans. Systems Man Cybernet, Vol.9, pp.326-333 (1979).

[20] J.Elzinga and D.W.Hearn: "Geometrical solutions for some minimax location problems," Transportation Science, Vol.6, pp.379-394 (1972).

[21] J.Fernandez, P.Fernandez, and B.Pelegrin: "A continuous model for siting a non-noxious undesirable facility within a geographical region," European Journal of Operational Research, Vol.121, pp.259-274 (2000).

[22] R.L.Francis: "A geometrical solution procedure for a rectilinear minimax location problem," AIIE Trans., Vol.4, pp.328-332 (1972).

[23] N. Furukawa: "A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem," Optimization, Vol.30, pp.367-377 (1994).

[24] 古川長太:『ファジィ最適化の数理』, 森北出版株式会社 (1999).

[25] S.L.Hakimi: "On locating new facilities in a competitive environment," European Journal of Operational Research, Vol.12, pp.29-35 (1983).

[26] H.Hotelling: "Stability in competition," The Economic Journal, Vol.30, pp.41-57 (1929).

[27] 茨木俊秀，福島雅夫:『FORTRAN77 最適化プログラミング』，岩波コンピュータサイエンス，岩波書店 (1991).

[28] 茨木俊秀，福島雅夫:『最適化の手法』，情報数学講座１４，共立出版 (1993).

[29] M.Inuiguchi and H.Ichihashi: "Relative moderate and their use in possibilistic linear programming," Fuzzy Sets and Systems, Vol.35, pp.303-323 (1990).

[30] M.Inuiguchi, H.Ichihashi, and Y.Kume: "Modality constrained programming problems: a unified approach to fuzzy mathematical programming problems in the setting of possibility theory," Information Sciences, Vol.67, pp.93-126 (1993).

[31] 石井博昭:『配置問題における新しい距離の展開』, BASIC 数学７月号, pp.33-40 (1991).

[32] R.Jain: "Decision-making in the presence of fuzzy variables," IEEE Trans. Systems Man Cybernet., Vol.6, pp.698-703 (1976).

[33] R.Jain: "A procedure for multiple-aspect decision-making using fuzzy sets," International Journal of Systems Science, Vol.8, pp.1-7 (1977).

[34] J.Karkazis: "Facilities location in a competitive environment: a promethee based multiple criteria analysis," European Journal of Operational Research, Vol.42, pp.294-304 (1989).

[35] N.Karmarkar: "A new polynomial-time algorithm for linear programming," Conbinatorica, Vol.4, pp.373-395 (1984).

[36] 粕谷博宣:『多様性を考慮した施設配置問題に関する研究』, 大阪大学修士論文 (1998).

[37] L.G.Khachian: "A polynomial algorithm in linear programming (English translation)," Soviet Mathematics Doklady, Vol.20, pp.191-194 (1979).

[38] 小島政和，土屋隆，水野眞治，矢部博：『内点法』，朝倉書店 (2001).

[39] D.K.Kulshrestha: “A mini-max location problem with demand points arbitrarily distributed in a compact connected space,” Journal of the Operations Research Society, Vol.38, pp.447-452 (1987).

[40] A.Lerner and H.Singer: “Some notes on duopoly and spatial competition,” Journal of Political Economy, Vol.45, pp.423-439 (1941).

[41] 松富達夫，石井博昭：『ファジィ概念を用いた非対称距離施設配置問題』，日本ファジィ学会誌，Vol.8, No.1, pp.57-64 (1996).

[42] T.Matsutomi and H.Ishii: “Minimax location problem with A-distance,” Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.41, pp.181-195 (1998).

[43] 松富達夫:『緊急施設配置問題の数理的研究』, 広島大学学位論文 (1999).

[44] E.Melachrinoudis and T.P.Cullinane: “Locating an undesirable facility with a minimax criterion,” European Journal of Operational Research, Vol.24, pp.239-246 (1986).

[45] T.C.Miller, T.L.Friesz, and R.L.Tobin: “Equilibrium facility location on networks,” Springer (1996).

[46] 日本ファジィ学会編：『講座ファジィ　第6巻, ファジィOR』，日刊工業新聞社 (1993).

[47] 西田俊夫:『ゲームの理論』, 日科技連 (1973).

[48] 西田俊夫，田畑吉雄：『現代OR入門』，現代数学社 (1995).

[49] A.Okabe and A.Suzuki: “Stability of competition for a large number of firms on a bounded two-dimensional space,” Environment and Planning A, Vol.19, pp.1067-1082 (1987).

[50] 岡部篤行, 鈴木敦夫:『最適配置の数理』, 朝倉書店 (1992).

[51] 岡田章:『ゲーム理論』, 有斐閣 (1996).

[52] 岡田博之:『競合環境における施設配置問題』, 岡山大学修士論文 (1993).

[53] S.Osumi: “Modeling and analysis of competitive facility location problem,” 大阪府立大学学位論文 (1997).

[54] B.Pelegrin and F.R.Fernandez: "Determination of efficient points in multiple-objective location problems," Navel Research Logistics Quarterly, Vol.35, pp.697-705 (1988).

[55] D.R.Plane and T.E.Hendric: "Mathematical programming and the location of fire companies for the Denver fire department," Operations Research, Vol.25, pp.563-578 (1977).

[56] J.Ramík and J.Římánek: "Inequality relation between fuzzy number and its use in fuzzy optimization," Fuzzy Sets and Systems, Vol.16, pp.123-138 (1985).

[57] S.Saito and H.Ishii: "On solving equations arising from optimization problems by some generalized Newton method," (preprint).

[58] 坂和正敏:『ファジィ理論の基礎と応用』, 森北出版 (1989).

[59] 塩出省吾:『競合する施設の配置について』, BASIC 数学 7 月号, pp.41-44 (1991).

[60] 塩出省吾:『競合環境下の配置問題』, 第 4 回 RAMP シンポジウム論文集 (1992).

[61] 高橋渉:『非線形関数解析学：不動点定理とその周辺』, 近代科学社 (1988).

[62] 武田淳:『複数の配置基準をもつ施設の競合関係における配置問題』, 大阪大学特別研究論文 (1990).

[63] J.F.Thisse, J.E.Hendric, and R.E.Wendell: "Some properties of location problems with block and round norm," Operations Research, Vol.32, pp.1309-1327 (1984).

[64] 宇野剛史:『多目的性をもつ施設配置問題』, 大阪大学修士論文 (2000).

[65] R.R.Yager: "Ranking fuzzy subsets over the unit interval," Proc. 1978 CDC, pp.1435-1437 (1978).

[66] 八木勇:『競合状態の下での施設配置問題』, 大阪大学修士論文 (1993).

[67] Y.Yoshida: "Dynamical aspects in fuzzy decision making," Physica-Verlag (2001).

[68] J.E.Ward and R.E.Wendell: "Using block norm for location modelling," Operations Research, Vol.33, pp.1074-1090 (1985).

[69] S.R.Watson, J.J.Weiss, and M.L.Donnel: "Fuzzy decision analysis," IEEE Trans. Systems Man Cybernet, Vol.9, pp.1-9 (1979).

[70] A.Weber: "Über den standort der industrien, 1. teil: reine theorie des standortes, Tübingen," Germany. English Translation: "On the location of industries," University of Chicago Press, Chicago, IL, (1929).

[71] R.E.Wendell and R.D.McKelvey: "New perspectives in competitive location theory," European Journal of Operational Research, Vol.6, pp.174-182 (1981).

[72] G.O.Wesolowsky: "Rectangular distance location under the minimax optimality criterion," Transportation Science, Vol.6, pp.103-113 (1972).

[73] P.Widmayer, Y.F.Wu, and C.K.Wong: "On some distance problems in fixed orientations," SIAM J. COMPUT., Vol.16, pp.728-746 (1987).

[74] H.A.Zadeh: "Fuzzy sets," Information and Control, Vol.8, pp.338-353 (1965).

[75] H.J.Zimmermann: "Description and optimization of fuzzy sets," International Journal of General Systems, Vol.2, pp.209-215 (1976).

[76] H.J.Zimmermann: "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions," Fuzzy Sets and Systems, Vol.1, pp.45-55 (1978).

引用著者発表論文

A. 原著研究論文

(1) T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "Competitive facility location problem: an algorithm for the problem concerning the existence of multi-type customers," Central European Journal of Operations Research (Accepted).

(2) T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "A location model in a competitive environment considering quality levels of facilities," Computer and Operations Research (In submission).

(3) T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "Fuzzy multi-objective facility location problem with A-distance," Journal of the Operations Research Society of Japan (In submission).

B. 国際学会等発表関連論文

(1) T. Uno, H. Ishii, and S. Osumi: "Facilities location in a competitive environment," Proceedings of INFORMS-KORMS Seoul 2000 Conference, pp. 110-114 (2000).

(2) T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "A competitive model for locating helpful but obnoxious facilities," 2nd Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, pp. 237-244 (2001).

(3) T. Uno, H. Ishii, S. Saito and S. Osumi: "An introduction to competitive facility location problems with vagueness," Knowledge-Based Intelligent Information Engineering System and Allied Technologies, pp. 1375-1379 (2001).

(4)* T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "A model of competitive facility location problems between a firm and residents," Proceeding of Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2001 (NACA2001) (Accepted).

(5)* T. Uno, H. Ishii, S. Saito, and S. Osumi: "Multi-objective facility location problems in competitive environments," Proceedings of Multi-Objective Programming and Goal Programming (MOPGP'02) (Accepted).

＊：レフェリー付き

C. 総説，解説，その他

(1) 宇野剛史，石井博昭，斎藤誠慈，大角盛広：『競合性を考慮した好ましくない施設の配置問題』，数理解析研究所講究録 1174「最適化の数理科学」，pp.71-82 (2000).