Title	The Cauchy problem for Schrödinger type equations with variable coefficients
Author(s)	Ichinose, Wataru
Citation	大阪大学, 1987, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1687
rights	
Note	

【11】

氏名・(本籍)	一ノ瀬(いちのせ)　弥(わたる)
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　7871　号
学位授与の日付	昭和62年9月30日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**変数係数のシュレディンガー型方程式に対する初期値問題**
論文審査委員	(主査) 教 授 井川　満 (副査) 教 授 田辺 広城　教 授 池田 信行　講 師 磯崎　洋

論文内容の要旨

線形の偏微分方程式に対する初期値問題を考える場合，その典型的な方程式は次の三つである。

$x \in R^n$として

$$\circ\ \partial_t^2 u(t,x) - \triangle u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{(波動方程式)},$$

$$\circ\ \partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{(熱方程式)},$$

$$\circ\ \frac{1}{i}\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{(Schrödinger方程式)}.$$

上の波動方程式，熱方程式はそれぞれ双曲型方程式，放物型方程式として一般化され，古くからの重要な研究対象であり現在も又そうである。本論文では，Schrödinger方程式を一般化したSchrödinger型方程式

$$(*)\ \frac{1}{i}\partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\partial_{x_j}(g^{jk}(x)\partial_{x_k}u) + \sum_{j=1}^{n} b^j(x)\partial_{x_j}u + c(x)u = f(t,x)$$

を考察する。但し，C^∞関数$g^{jk}(x)$は全て実数値，$g^{jk}(x) = g^{kj}(x)(j,k=1,2,\cdots,n)$，ある$\delta > 0$が存在して$\delta^{-1}|p|^2 \leqq |\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)p_j p_k| \leqq \delta|p|^2 (p \in R^n)$を満たす。本論文では特に，任意の初期値と任意の$f(t,x)$に対して方程式（$*$）の解が常に一意的に定まるための，方程式に対する条件を求めることが目的である。

方程式（$*$）において主部が定数係数，即ち$g^{jk}(x)$が全て定数の場合には，1960年代後半から1970年代前半にかけての擬微分作用素の理論の発展を土台にして，1980年代に入ってから詳しい研究が開始された。本論文では，主部が変数係数の場合にも，定数係数の場合の結果を含む，より一般的な結果が成

立することを報告する。$t=0$ で値 $(x, p)\in R^{2n}$ を取る方程式（＊）に対する古典軌道を $(X(t, x, p), P(t, x, p))(\in R^{2n})$ とおく（ハミルトニアンは $H(x, p)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)p_j p_k$）。このとき次の主定理を得る。

定　理　（＊）に対する初期値問題が未来又は過去方向に L^2 適切であるためには，

$$\sup_{(x, p)\in R^{2n}, \rho\geqq 0} \left|\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\rho} \mathrm{Re}\, b^j(X(\theta, x, p))P_j(\theta, x, p)d\theta\right|<\infty$$

が成立することが必要である。

ユークリッド空間 R^n に方程式 (*) から定まる適当なリーマン計量を導入すれば，上の定理を幾何学的に解釈することができる（論文のTheorem'）。この解釈は一般のリーマン多様体上のSchrödinger型方程式を考える上で基本的である。上記定理の証明は1960年代後半から発展してきた漸近解の構成に関するMaslovの方法を用いることが本質的である。

論文の審査結果の要旨

本論文は，R^n における一般化したシュレーディンガー型作用素，

(1)　$Lu=\frac{1}{i}\partial_t u-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\partial_{x_j}(g^{jk}(x)\partial_{x_k}u)+\sum_{j=1}^{n} b^j(x)\partial_{x_j}u+c(x)u$　の初期値問題

(2)　$Lu=f(t, x)$ in $[0, T]\times R^n$, $u(0, x)=u_0(x)$

を考察している。Lの係数はすべて，十分滑かでそのすべての微係数と共に有界なものとし，g^{jk} は実数値で，ある $\delta>0$ に対し

$$\delta^{-1}|p|^2\leqq\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)p_j p_k\leqq\delta|p|^2,\ \forall(x, p)\in R^n\times R^n$$

を満しているとする。例えば，電磁場内の荷電粒子の運動方程式は（1）で $g^{jk}=\delta^{jk}$ かつ b^i は純虚数値関数となるLを用いて $Lu=0$ と表される。このとき $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(R^n)}$＝一定，すなわち解のエネルギーは保存される。

一ノ瀬君は係数 b^j が必ずしも純虚数値でない場合，初期値問題(2)でエネルギーは保存されるか，あるいは初期値に対する解の連続性が成り立つか（すなわち L^2－適切か）を考察し，次の結果を得た。

定　理　初期問題(2)が未来又は過去方向に L^2－適切であるためには

$$\sup_{(x, p)\in R^{2n}, \rho\geqq 0} \left|\sum_{j=1}^{n} \int_0^{\rho} \mathrm{Re}\, b^j(X(\theta, x, p))P_j(\theta, x, p)d\theta\right|<\infty$$

が成り立つことが必要である。ここで $(X(\theta, x, p), P(\theta, x, p))$ はハミルトニアン $H(x, p)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(x)p_j p_k$ に対する正準方程式の解で $(X, p)|_{\theta=0}=(x, p)$ となるものを表す。

これまで，この問題はg^{jk}が定数の場合のみ考察されてきた。その理由は，条件の必要性を示すためには，ある性質を備えた（2）の漸近解を任意の$T>0$に対して$[0,T]\times R^n$で構成しなければならない。しかしg^{jk}が定数でなければ，本論文の中に示されているように，ほとんどすべての場合ハミルトンーヤコビ方程式$\phi_t+H(x,\nabla\phi)=0$は有限なtで焦点をもち，解はそのtをこえて滑かには拡張出来ない。よって従来の漸近解の構成法を用いるかぎり $g^{jk}=$定数 の制限をはずすことは出来ないからである。

一ノ瀬君はg^{jk}が定数の制限をはずすことに取り組み，Maslov理論を用いることによりこの困難を克服した。シュレーディンガー型方程式のL^2ー適切性の研究における大きな障壁を乗り越えて，問題を新しい段階に進展させたことは特筆に値する。さらに彼の見い出した条件の幾何学的表現や漸近解の構成方法は種々の問題に適用可能であり，今後ますます有効性を発揮するものと思われる。

以上より，本論文は新しい結果と多くの独創性を含んだものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。