【19】

氏名・（本籍）	岡　村　治　子
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	第　6352　号
学位授与の日付	昭和59年3月16日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**グラフにおける多種流Ⅱ**
論文審査委員	（主査） 教　授　永尾　汎 （副査） 教　授　尾関　英樹　助教授　山本　芳彦

論文内容の要旨

$G=(V, E)$ を点の集合 V と辺の集合 E とからなる有限無向多重グラフとする。異なる2点 x と y に対して $\lambda(x, y)$ を x と y の間の互いに辺を共有しないパスの最大個数とし，$\lambda(x, x)=\infty$ とする。最初に次の問題を考える。

Gの点の対 $(s_1, t_1), \cdots, (s_k, t_k)$ に対して次の(1)が成り立つための条件は何か。

(1)　互いに辺を共有しないパス $P_1, \cdots, P_k$ があって，P_i は s_i と t_i を結ぶ（$1 \leq i \leq k$）。

次の結果が得られた。

定理1　$k=3$ とする。各 $i=1, 2, 3$ に対して $\lambda(s_i, t_i) \geq 3$ であれば，(1)が成り立つ。

整数 $k \leq 1$ に対して $g(k)$ を次の整数とする：$\min\{n \mid G$ が n −辺連結ならば，(1)が成り立つ$\}$。Thom-assen が次の予想を与えた。

予想　各奇整数 $k \geq 1$ に対して $g(k)=k$，各偶整数 $k \geq 2$ に対して　$g(k)=k+1$。

$g(k)$ に関して次の事が既知である。

$g(k) \leq 2k-1$，$g(1)=1$，$g(2)=3$，$g(4) \leq 6$　$g(5) \leq 7$。

定理1の系として

系　$g(3)=3$。

次に多種流問題を考える。

各辺 e が容量 $w(e) > 0$ をもつとし，各パスが正の値をもつとする。値 α をもつパス P を αP であらわす。パスの集合 $\alpha_1 P_1, \cdots, \alpha_n P_n$ が実現可能であるときは，各 $e \in E$ に対して，

$$\sum_{i \in \{i \mid P_i \text{はeを通る}\}} \alpha_i \leq w(e)\text{。}$$

2点xとyに対してxとyの間のパスの集合$\alpha_1 P_1, \cdots, \alpha_n P_n$で$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = q$をみたすものをxとyの間の値qの流れと呼ぶ。流れの集合$F_1, \cdots, F_k$が実現可能であるとは，$F_1 \cdots, F_k$のパスの集合が実現可能であるとする。

点の対$(s_1, t_1), \cdots, (s_k, t_k)$と$q_i \geq 0\ (1 \leq i \leq k)$に対して次の(2)が成り立つ条件は何か。

(2) 実現可能な流れ$F_1 \cdots, F_k$があって，F_iはs_iとt_iを端点とし値q_iをもつ$(1 \leq i \leq k)$。

これを多種流問題と呼ぶ。定理1は$k=3, w=1, q_1=q_2=q_3=1$のとき(2)が成り立つための十分条件を与えている。

$x \subseteq V$に対して$\partial(x)$と$D(x)$を次のようにおく

$\partial(x) = \{ e \in E \mid e$はxの点と$V-x$の点を結ぶ$\}$,

$D(x) = \{ i \mid 1 \leq i \leq k,\ x \cap \{s_i, t_i\} \neq \phi \neq (V-x) \cap \{s_i, t_i\}\}$。もし(2)が成り立てば次の(3)が成り立つ。

(3) 各$x \subseteq V$に対して，$\sum_{e \in \partial(x)} w(e) \geq \sum_{i \in D(x)} q_i$。

次の結果がえられた。

定理2　wが整数値，$k=3$，$q_1=q_2=q_3=1$のとき，(3)が成り立てば(2)が成り立つ。

$k=1, 2$のとき(2)と(3)は同値であるが，$k=3$，$q_i > 0\ (i=1, 2, 3)$のとき定理2は(2)と(3)が同値である唯一つの場合を与えている。

論文の審査結果の要旨

点の集合Vと辺の集合Eからなる有限グラフ$G=(V, E)$において，2点x，yを結ぶ辺を共有しないパスの最大個数を$\lambda(x, y)$で表す。まず次の問題を考える。

Gの点の対$(s_1, t_1), \cdots, (s_k, t_k)$に対して次の(1)が成り立つための条件は何か？

(1) s_iと$t_i\ (1 \leq i \leq k)$を結ぶパス$P_i\ (1 \leq i \leq k)$で，辺を共有しないものが存在する。

本論文ではこの問題に関して，$k=3$のとき，$\lambda(s_i, t_i) \geq 3\ (i=1, 2, 3)$ならば(1)が成り立つことを示している。

またGがn辺連結ならば(1)がつねに成り立つようなnの最小値を$g(k)$で表わし，これに関してTomassenは次の予想をたてた。

予想　kが奇数ならば$g(k)=k$，kが偶数ならば$g(k)=k+1$

この予想に関して，上の結果を応用して$g(3)=3$が示される。

次に，各辺eの容量$w(e)$と，各パスPに値$\alpha(P)$が与えられているとき，s_iとt_iを結ぶ値q_iの流れF_i $(1 \leq i \leq k)$で実現可能なものがいつあるかという，いわゆる多種流問題を考え，$k=3$，$q_1=q_2=q_3=1$のときは自明な必要条件が実は十分条件を与えることが示されている。

このように本論文は，グラフ理論における基本的で困難な問題に対して，本質的な前進をもたらす内容を含み，今後この方面の研究にしばしば引用されるものと思われる。

以上のように，本論文は理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。