The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	断面非対称ロータ系の振動とつり合せに関する研究
Author(s)	松倉, 欣孝
Citation	大阪大学, 1982, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1703
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

乙-2790

断面非対称ロータ系の振動と
つり合せに関する研究

昭和56年10月

松　倉　欣　孝

目　　次

記号対照表 ---------- (4)

第1章　序　論 ---------- 1
1．1　緒　言 ---------- 1
1．2　従来の研究の展望 ---------- 2
1．2．1　断面非対称ロータの不安定振動 ---------- 2
1．2．2　断面非対称ロータの不つり合振動応答 ---------- 2
1．2．3　2倍調波振動 ---------- 3
1．3　本研究の目的と概要 ---------- 4
1．3．1　断面非対称ロータに特有の振動発生状況 ---------- 4
1．3．2　本研究の目的と概要 ---------- 5

第2章　発電機ロータの構造とその基礎運動方程式 ---------- 8
2．1　緒　言 ---------- 8
2．2　発電機ロータの構造 ---------- 8
2．3　断面非対称ロータの基礎運動方程式 ---------- 13

第3章　発電機ロータの断面非対称量の推定 ---------- 19
3．1　緒　言 ---------- 19
3．2　断面非対称量の推定方法 ---------- 19
3．2．1　推定方法の種類 ---------- 19
3．2．2　断面非対称量と固有振動数 ---------- 20
3．2．3　推定の手順 ---------- 24
3．2．4　推定法の問題点 ---------- 24
3．3　単純な形状の軸での断面非対称量の推定 ---------- 26
3．4　発電機ロータの断面非対称量の推定 ---------- 28
3．4．1　フリー・フリー・テスト ---------- 28
3．4．2　断面非対称の不均一分布の影響 ---------- 31

３．４．３　断面非対称率 ---------- 35
３．５　結　　言 ---------- 36

第４章　発電機ロータの不安定振動に対する裕度 ---------- 37
４．１　緒　　言 ---------- 37
４．２　安定限界に対する裕度 ---------- 37
４．２．１　軸受で支持した場合のモード非対称率 ---------- 37
４．２．２　モード減衰比 ---------- 38
４．２．３　実効非対称率 ---------- 40
４．３　結　　言 ---------- 40

第５章　２倍調波振動の振幅 ---------- 41
５．１　緒　　言 ---------- 41
５．２　２倍調波振動振幅の計算 ---------- 42
５．２．１　運動方程式の特解 ---------- 43
５．２．２　モード解析の適用 ---------- 44
５．３　単純な軸系の２倍調波振動 ---------- 46
５．３．１　一様軸の場合 ---------- 47
５．３．２　交さ軸の場合 ---------- 48
５．４　発電機ロータでの計算例 ---------- 49
５．４．１　モード定数例 ---------- 49
５．４．２　２倍調波振動振幅の計算例 ---------- 53
５．５　結　　言 ---------- 54
付録５．１ ---------- 54

第６章　断面非対称ロータのバランスの収束性 ---------- 56
６．１　緒　　言 ---------- 56
６．２　つり合せの数式表示 ---------- 59
６．３　断面非対称ロータの不つり合振動応答 ---------- 60
６．４　残留不つり合とバランスの収束状況 ---------- 63

6.4.1 つり合せの影響係数マトリックス ---------- 63
6.4.2 残留不つり合の計算 ---------- 64
6.4.3 平均危険速度でつり合せを行なう時の収束性 ---------- 65
6.4.4 つり合せ回転数の影響 ---------- 70
6.5 実　験 ---------- 70
6.5.1 実験装置 ---------- 71
6.5.2 理想軸系による実験 ---------- 72
6.5.3 不均一断面非対称・異方軸受を持つ軸系での実験 ---------- 75
6.6 効果的なバランス法 ---------- 77
6.6.1 試しおもりの取つけ位置 ---------- 77
6.6.2 収束係数の導入 ---------- 78
6.7 結　言 ---------- 83
付録6.1 ---------- 84

第7章 結　論 ---------- 86

参 考 文 献 ---------- 87

謝　　辞 ---------- 93

記 号 対 照 表

$\boldsymbol{A}$ ：不つり合と振動応答との関係を表わす影響係数マトリックス

$\boldsymbol{A}_h$ ：計測された影響係数マトリックス

a_1, a_2, a_2'：影響係数マトリックスの要素

$\boldsymbol{C}$ ：軸受の減衰マトリックス

C_t , C_m ：$\boldsymbol{C}$の要素で，ロータ中心軸の並進（上下）運動と回転（傾斜）運動の減衰定数

$\boldsymbol{d}$, d ：たわみ差δを固有モードで展開した時の係数ベクトルとその要素

（EI）：軸の曲げ剛性

（△EI）：２主軸方向の曲げ剛性差

$\boldsymbol{e}$, e ：ロータの不つり合ベクトルとその要素

$\boldsymbol{F}$ ：ロータの節点に働く外力ベクトル

$\boldsymbol{F}_e$ ：２倍調波振動の源となる等価外力

F ：節点に働くせん断力

h ：モードだ円の短径・長径比

I_d ：ロータの長手方向に直角な軸まわりの慣性モーメント

j , J ：固有モードの次数とその最高次数

$\boldsymbol{K}$ ：ロータ系の剛性マトリックス

$\triangle\boldsymbol{K}$ ：２主軸方向の剛性差マトリックス

$\bar{\boldsymbol{K}}$, $\bar{K}^n$ ：全ロータ系および軸要素の曲げ剛性マトリックス

$\boldsymbol{k}$ ：軸受の剛性マトリックス

k_t , k_m ：$\boldsymbol{k}$の要素で，ロータ中心軸の並進（上下）運動と回転（傾斜）運動の減衰定数

L , ℓ ：ロータの全長および軸要素の長さ

$\boldsymbol{M}$, M ：軸系の質量マトリックスとその要素

M_ξ , M_η ：節点に働く曲げモーメント

$\boldsymbol{m}$, m ：等価質量マトリックスとその要素

n , N ：軸要素の番号とその最大数

$\boldsymbol{P}$, P ：２倍調波振動変位を表わす係数ベクトルとその要素

$\boldsymbol{p}$, p ：$\boldsymbol{P}$を固有モードで展開した時の係数ベクトルとその要素

q , Q ：軸を区間わけした時の番号とその最大数

R　：１回目のつり合せ後の残留不つり合を示す収束指標

r　：つり合修正の回数

s^1, s^2, s^3：軸要素の曲げ剛性を表わす係数

T　：２回目以降のつり合せ時の残留不つり合を表わす収束指標

$\bar{T}$　：収束指標Tの平均期待値

t　：時間

$\boldsymbol{U}$, u　：断面非対称量推定のための影響係数マトリックスとその要素

$\boldsymbol{V}$　：不つり合による変位ベクトル

v　：uの内わけ

$\boldsymbol{W}$, w　：全軸系の自重ベクトルとその要素

x, y　：静止座標

z　：軸の長手方向にとった座標

α　：危険速度からのずれを表わす無次元回転数

$\boldsymbol{\beta}$, β　：つり合せの収束ベクトルと収束係数

γ　：２倍調波振動のモード定数で残余項

Δ　：２主軸方向の固有モード差

δ　：軸の静たわみベクトル

$\boldsymbol{\varepsilon}$, ε　：モード不つり合ベクトルとその要素

$\boldsymbol{\zeta}$, ζ　：減衰比マトリックスとその要素

θ　：軸要素の傾き

K　：Kの最大推定値

k　：実効非対称率

Λ　：２倍調波振動振幅の指標

λ　：２倍調波振動のモード定数で，固有モード差係数

$\boldsymbol{\mu}$, μ　：モード非対称ベクトルとその要素

$\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\mu}$　：断面非対称ベクトルとその要素

Ξ　：ロータの振動変位ベクトル（複素表示）

Ξ, H　：不つり合による振動変位の応答

$\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$　：ロータの振動変位ベクトル

ξ, η　：ロータに固定した回転座標

ρ　：２倍調波振動のモード定数で，等価質量差係数

σ　：２倍調波振動のモード定数で，固有振動数差係数

υ　：不つり合の位相角

$\boldsymbol{\Phi}$, ϕ_j　：固有モードマトリックスとその j 次のベクトル

φ , φ'　：ϕの要素で，ロータ中心軸の並進（上下）運動と回転（傾斜）運動に対応するモード

Ψ　：残留不つり合の位相角を表わす指標

ψ　：モード不つり合の位相角

$\boldsymbol{\omega}$, ω　：固有角振動数マトリックスとその要素（添字付）

ω　：ロータの回転数（添字無）

添字　c　：２主軸方向の差を示す

〃　h　：計測の誤差を含む量

〃　j　：固有振動の次数

〃　n　：軸要素または節点の番号

〃　o　：２主軸方向の平均の剛性を持ったロータに関する量

〃　q　：軸の区間番号

〃　r　：つり合せの回数

〃　t　：試しおもりを示す

〃　ξ , η　：ξ，η軸方向の成分

〃　Ξ , H　：Ξ，H軸方向の成分

本論文に現われる記号

$(\dot{\ })$　：時間に関する微分

$(\ )^{-1}$　：逆マトリックス

$(\ )^{T}$　：転置マトリックス

diag.( )：対角マトリックス

$(\ )^{*}$　：共役複素数

exp( )：指数関数

第1章　序　　論

1．1　緒　　言

ここ十数年来，回転機の大形・大容量化の趨勢は目を見張るばかりである。そして，この趨勢は幾多の新しい技術的課題を生み出した。回転機のロータスパンが長くなり，ロータが撓み易く，振動し易くなったこともその一つである。ロータが構造的に振動し易くなったために，ささいな原因で従来の経験では予想もできない大きな振動が発生し，回転機の部品の損傷など，不測の事態に至ることがある。振動に起因するトラブルなどで回転機が停止した場合，単機容量の増大の故に，社会的，経済的に被る損失は著るしく，より一層の振動低減を企り，回転機の運転の信頼性を向上する必要がある。

一方，従来のロータ振動に関する研究は，どちらかと言えば単純な形状の数学的ロータモデルを対象とし，実際のロータの振動低減に対応しきれないきらいがあった。最近，上述の工業的要請に応えるために，タービン発電機ロータのような複雑な形状を前提に，振動解析・振動現象把握・振動抑制法を総合的にとらえた実際的研究が進められるようになった。

一般に，ロータの振動の原因として

(1)　ロータ製作時の質量不つり合い

(2)　油膜軸受の複雑な動特性

(3)　運転時のロータの不均一熱変形

(4)　軸の断面非対称

が挙げられる。ここで断面非対称とは，軸の断面上に定めた2主軸方向の曲げ剛性が互いに異なることを意味する。

回転機の信頼性向上のためには，上記のいずれに起因する振動も等しく解決されねばならない。最近の実際的研究の結果(1)(2)項で着実な進歩が認められ，(3)項は研究が開始された段階と言える。

(4)項は特に重要である。最近の大容量2極タービン発電機では，断面非対称に起因する振動が多発している。このような状況にも拘わらず，(4)項に関する実際的研究は少なく，十分な成果が得られるには至っていない。

この章では，断面非対称ロータの振動に関する従来の研究を展望し，本研究の目的と概要を明らかにする。

1．2　従来の研究の展望

断面非対称ロータの振動は２極タービン発電機ロータで初めて観測され，古くから研究されたテーマである。今日まで，数多くの研究成果が公表されているが，その主題はいずれも，断面非対称ロータに特有の不安定振動，不つり合振動応答の解析，２倍調波振動，の３種に分類できる。以下，順を追って展望する。

1．2．1　断面非対称ロータの不安定振動

１９３３年，Smith〔2〕は曲げ剛性と慣性モーメントの両者の異方性を考慮して，軸の内・外部減衰定数と両軸端の支持軸受の異方性とが不安定振動に及ぼす影響を定量的に検討した。その後Foote，椹木，Kellenberger，Dimentberg，Bronsens，Crandall，山本，相羽，Ariaratnam，Bishop，Tondl，Bones，Black，川井，岩壺，Messal，沖島，井上，太田，小寺など，多くの研究者がこの種の不安定振動を取扱った。これらの研究は，まず質量のない一様に非対称な軸の中央に円板が取つけられたいわゆるJeffcottモデルを対象に検討された。

その後，質量の分布したやや複雑な形状の軸系にまで研究が拡張され，ジャイロモーメント，軸受質量，軸受の非線形性などの安定性に及ぼす影響が，かなり微細にわたって定量的に検討されている。

1．2．2　断面非対称ロータの不つり合振動応答

１９４０年，Taylor〔4〕は非対称Jeffcottモデルを採り上げ，不つり合の位相角で振動応答の位相はもちろん振幅までもが変化することを明らかにし，実験でこれを確認した。Footeら〔6〕，Blackら〔31〕は，断面非対称軸が異方性を持つ軸受で支えられた系について不つり合振動応答を解析し，危険速度近傍の軸心の軌跡を計算した。一般に軸の曲げ振動で軸力が変化し，このためわずかながら曲げ剛性に非線形性が現われる。椹木ら〔7〕はこの非線形ばね特性が断面非対称ロータの不つり合振動を抑制することを明らかにした。山本ら〔15，16〕，相羽〔18〕は，非対称Jeffcottモデルの円板の慣性モーメントも非対称な系を対象にして，Taylorと同様の結果を得た。

Kellenberger〔10，12〕，Dimentberg〔14〕，Bishopら〔22〕，Tondl〔23〕は両端が単純支持などの特定条件で，質量と軸の断面非対称が全軸長にわたって一様に分布した系に問題を拡張し，モード解析法を適用して，各次数の振動に対してそれぞれTaylorの結

果が成立することを示した。岩壺ら〔36〕はジャイロ効果，沖島ら〔51〕は軸受の異方性と軸受の質量の影響を考慮した。

以上は比較的単純な形状の軸系に対する研究であるが，工業的問題を解決するために，Dimentberg〔14〕は発電機軸系を，Tondl〔23〕はタービンと発電機とが直結された軸系を採り上げた。計算を容易にするために系をかなり簡単な形に単純化したが，現実の振動問題が一応定性的に説明できた。

１９７１年以後，神吉ら〔54〕は伝達マトリックス法を用いて任意の複雑な形状の断面非対称軸を解析し，ここに初めて工業上実用化されている断面非対称ロータの不つり合振動応答計算が可能になった。

このような不つり合振動応答の研究は，必然的に断面非対称ロータのバランスの研究へとつながってゆく。Parkinson〔27〕，岩壺ら〔39〕，神吉〔53〕はこの問題をたわみ軸のモードバランス法を用いて研究した。その結果，断面非対称ロータでは，剛性の高い方と低い方の２主軸方向成分に不つり合を分解し，それぞれについてつり合せを行なえばよいことを示した。しかし，このようなバランス法では実行手順が複雑で煩らわしくなることは避けられない。

危険速度を通過する場合には，一般に振動振幅は危険速度で回転数を固定した場合よりも小さくなることが知られている。川井ら〔32〕，岩壺ら〔43，47〕は一様断面非対称軸が危険速度を通過する際の振動現象に問題を拡張した。小寺〔35〕は断面が複雑に変化する軸系を対象に，２つの曲げ主軸方向の固有モード φ_ξ，φ_η が等しいと仮定して，共振域通過の問題を論じた。

１．２．３　２倍調波振動

水平に据付けられた断面非対称ロータでは，重力のために，危険速度の半分の回転数付近で，回転数の２倍の周波数の振動が大きくなる。これが２倍調波振動と呼ばれる現象である。また，危険速度の半分の回転数が２次的危険速度とみなせることから，これを２次的危険速度の共振現象と呼ぶこともある。

この２倍調波振動について，古くはTimoshenko〔1〕，Den Hartog〔3〕，最近では山本ら〔34〕がその物理的意味を説明している。Taylor〔4〕は断面非対称Jeffcott モデルで，Kellenberger〔8，10，12〕，Dimentberg〔14〕，Ariaratnam〔21〕，Bishop ら〔22〕，Tondl〔23〕は一様断面非対称軸モデルでこの振動現象を論じ，内・外部減衰や軸

受の弾性支持条件等を考慮して振動応答を解析した。さらにKellenberger〔25〕は発電中の発電機を想定して，磁気吸引力の場に置かれた一様断面非対称軸について検討した。岩壺はジャイロ効果の影響〔36〕を検討するとともに，オーバハングを持つ断面非対称軸系〔33〕にまで問題を拡張した。さらに山本ら〔64〕は非線形軸受で支えられた偏平軸の分数調波振動を扱っている。

Hull〔13〕は断面非対称Jeffcottモデルに相当する単純な実験装置を製作して，2次的危険速度における共振現象を克明に調べた。これ以外にも岩壺ら〔43〕，沖島ら〔51〕によって，2次的危険速度の共振が測定されている。

以上は比較的単純な軸系の研究であるが，筆者ら〔46〕，井上ら〔58〕，神吉ら〔59〕は発電機軸系を対象に，複雑な形状の断面非対称ロータを採り上げ，2次的危険速度付近にとどまらず，全周波数域にわたる2倍調波振動応答を計算した。

1．3　本研究の目的と概要

1．3．1　断面非対称ロータに特有の振動の発生状況，（大容量2極タービン発電機の場合）

2極タービン発電機は断面非対称ロータの典型例として古くから知られている。大容量機で筆者が経験した断面非対称ロータ特有の振動現象を簡単に説明する。

その第一は，2倍調波振動である。大容量2極タービン発電機の発電機部分は定格回転以下に3個の危険速度を持つことがあり，それぞれの半分の回転数付近で2倍調波振動が顕著に現われ，場合によっては不つり合による振動より大きくなることがある。

第二に，断面非対称がバランス作業に悪影響を及ぼしている形跡がある。現実のロータのバランスに当っては，ロータの初期曲り，ロータの温度分布，軸受油温などの運転条件が一定に保ちにくく，データのばらつきがはなはだしい。そこで何回かのバランスを繰返して不つり合を修正している。一方，理論的検討（第6章）によれば，断面非対称ロータでは，不つり合の位相角によって振動応答振幅が変化する。この事実を知らずにロータに試しおもりを無作為にとりつけると，振動応答は測定のたびに変化する。このようにして得たつり合せの影響係数も推定のたびにばらつき，誤差を含むかのように見える。現実のデータのばらつきは，断面非対称を無視したための見かけ上のばらつきである可能性がある。

前節で明らかにしたように断面非対称ロータ特有の振動現象に，不安定振動がある。2倍調波振動発生の事実から断面非対称の存在は確認されているものの，実際の2極タービン発電機ロータで，この不安定振動を経験したことはない。これは軸が長く大形化して軸受油

膜の減衰が効きにくくなったにも拘わらず，軸受の減衰が不安定振動を抑えるのにまだ十分な余力を保っているためと考えられる。

１．３．２　本研究の目的と概要

前項の２極タービン発電機の振動状況から，次の４つの問題点が浮び上る。

(1)　断面非対称量の低減

断面非対称に起因する諸振動現象をなくすには，断面非対称そのものを減らすことが最も直接的である。２極タービン発電機などのロータの設計に当っては，普通ロータの曲げ剛性が全方向に等しく，断面が対称になるように補償スロットの加工などが指示される。しかし実際には，曲げ剛性の評価誤差や工作誤差などのために，でき上ったロータに若干の断面非対称が残ることはやむを得ない。このような誤差が各製造プロセスで最少となるように作業を改善し，またロータができ上った後に，断面非対称が修正できると好都合である。これにはまず完成したロータのどこにどの程度の断面非対称が残存するかを知る必要がある。１．２節で展望した諸文献には，複雑な形状のロータの断面非対称量をいかに測定するかに触れたものはなく，これを求める方法の確立自体，一つの研究課題である。

(2)　不安定振動に対する裕度

不安定振動が起ってしまってからこれを抑えることは，技術的困難さ，経済的損失の大きさの故に，極力避けるべきである。従って現在製作中のロータが不安定振動に対してどの程度の余裕を持つかを常に監視し，不安定振動に対しある程度の余裕を保つよう努力すべきである。裕度を示すパラメータは，１．２．１項の諸文献に定義されているが，どんなデータをどんな手法で採集してパラメータの値を定めるかについては言及されていない。そこで，不安定振動に対する裕度を実際に調べてみることが第二の研究課題である。

(3)　２倍調波振動の解析

現実に２倍調波振動が発生し，ロータの振動の最終品質を左右する段階にきている。そこで，設計の時点で振動振幅を予測し，またロータ各部の断面非対称がどの程度許容できるかを詳細に解析しておく必要がある。１．２．３項で明らかにしたように，従来の大多数の研究は，一様断面軸，一様非対称分布軸など，単純な形状の軸系を対象としており，２極タービン発電機などのように複雑な形状で非対称が不均一に分布したロータ系の解析には無力である。わずかに，井上ら〔58〕，神吉ら〔59〕は複雑な形状のロータの２倍調波振動振幅の計算を可能にしたが，ロータ上のどの位置の非対称がどの程度の２倍調波振動を誘き起すか

など，断面非対称ロータの設計に直接応用できる形にまでこれをまとめていない。そこで，設計に適用し易い２倍調波振動解析法の確立が第三の研究課題となる。

(4) ロータの効果的バランス法

断面非対称ロータに特有のバランス理論は，既に岩壺ら〔39〕，神吉〔53〕によって明らかにされた。しかし，現実のロータの不つり合振動応答は，運転条件の再現性の悪さ，計測器の誤差などのために大巾にばらつき，断面非対称による振動の特長が，このばらつきに隠されてしまっている。このような状況では，岩壺，神吉のバランス法は必ずしも有効・経済的とは言えない。そこで，上記の状況のロータに通常の対称ロータのバランス法を適用するとどんな現象が起るか，またバランス時間を最短に抑えるにはどのようにバランス法を運用するのがよいかが，第四の研究課題となる。

１．２．２項の従来の研究は，不つり合振動応答を計算する上で有用であるが，第四の研究課題に直接応え得ない。

本研究は，以上の観点のもとに１．２節で明らかにした過去の研究成果を踏え，非対称ロータの振動を抑制し，またそのバランスを効果的にすすめ，その結果として，大形回転機の静しゅくで安定した運転の実現を意図したものである。

以下，各章の概要を述べる。

第２章では，まず大容量２極タービン発電機の発電機ロータ部分（以下発電機ロータと略す）の概略構造と断面非対称の発生理由を述べる。本論文の各章で，振動状況の具体的説明や解析結果の数値計算例に，発電機ロータをとりあげるからである。次に，軸径や断面非対称が軸の長手方向に沿って変化する複雑な軸系について，一般的な運動方程式を導き，以下の各章の検討に備える。

第３章では，軸上で不均一に分布した断面非対称量の測定方法を提案し，既知の非対称を持つ単純な軸系でその有効性を確認する。次に実際の発電機ロータについて断面非対称量を測定する。

第４章では，現実の発電機ロータが，断面非対称に起因する不安定振動に対してどの程度余裕をもって運転されているかを明確にする。この際，ロータを支える油膜軸受の減衰性能と前章で求めた断面非対称量とが，裕度を調べる手がかりになる。

第５章では，２極タービン発電機で比較的顕著に現われる２倍調波振動を解析する。従来は曲げの２主軸方向の固有振動数差のみがこの振動に影響するとして解析が進められていた。この章では，新たに２主軸方向の等価質量差，固有モード差を影響因子として解析する方法

を提案し，従来の解析方法の欠点を単純な軸系で例示する。さらに，２倍調波振動の生じやすさを示す指標を定め，ロータ設計時の目安にする。また実際の発電機ロータでロータ上どの位置の断面非対称が２倍調波振動を誘起させやすいかなどを述べる。

第６章ではつり合せは何回かの修正を一組として最適化するのが現実的で，その評価に収束性の考えを導入すべきことを提案する。さらに断面非対称ロータに通常の対称ロータのモード別つり合せ法を適用したとき，残留不つり合がどのように収束するかを計算と実験で示し，収束係数の導入により，残留不つり合の収束性が改善されることを述べる。

第７章では，以上の研究結果を結論としてまとめる。

第２章　断面非対称ロータの構造例と その基礎運動方程式

２．１　緒　　言

この章では次章以下の準備をする。まず断面非対称ロータの一例として，最近の大容量２極タービン発電機のロータ構造を説明し，次にロータの運動方程式を導く。

２．２　発電機ロータの構造

図２．１に２極タービン発電機の断面を示す。発電機はロータとステータで構成されている。ロータとステータにはそれぞれコイルが巻かれている。ロータコイルに直流電流を流し，一対のＮ，Ｓ磁極を作る。図では略したが，ロータの右端はカップリングで蒸気タービンに結合され3000ないし3600rpmで駆動される。発電機ロータの回転により周囲に回転磁界が形成される。ステータコイルはこの回転磁界をよぎって電圧を発生し，電流はブッシングを介して需要家へ送られる。

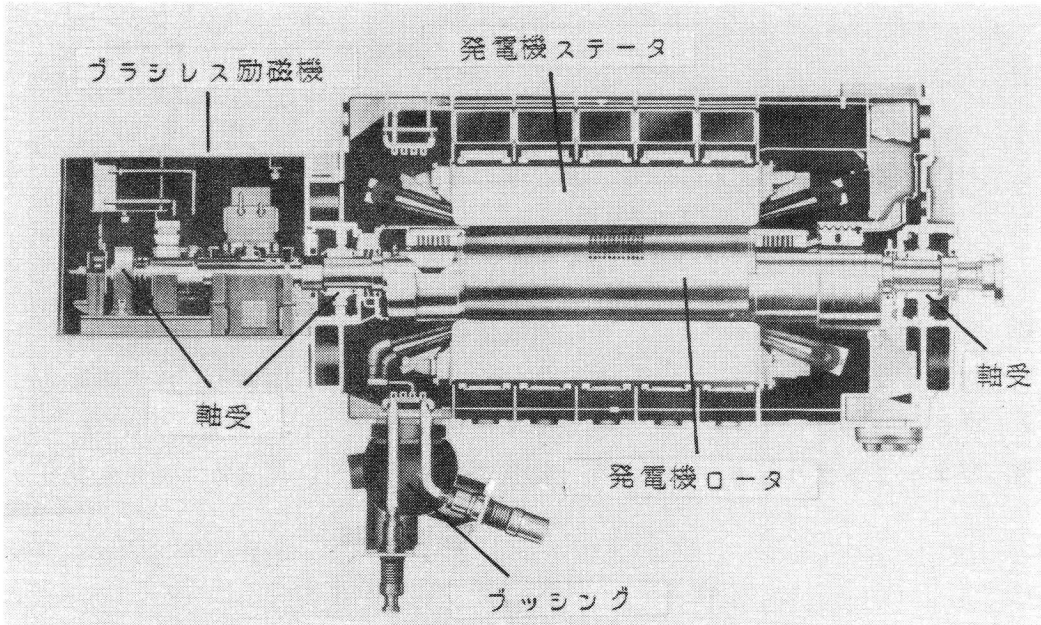
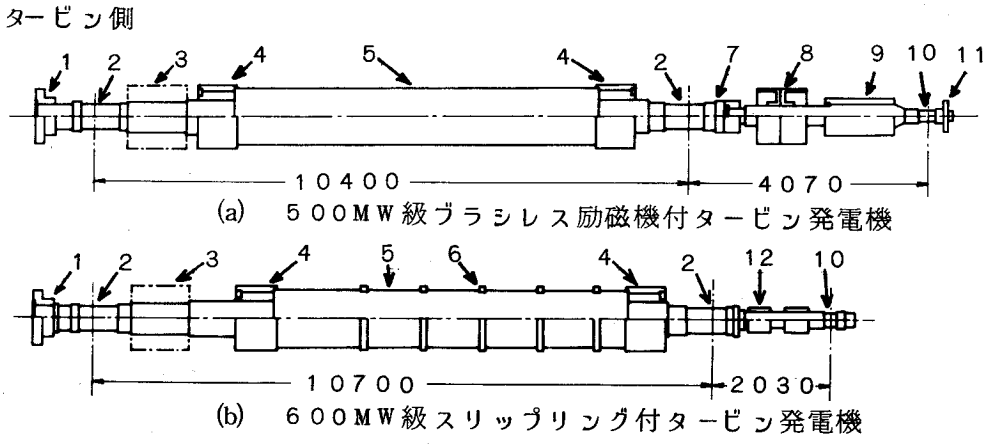


図 2.1　タービン発電機の構造概略

図２．１の左側のブラシレス励磁機は，発電機ロータに励磁電流を供給する部分である。

一般に発電機ロータの励磁方式には２通りある。一つは容量の小さい交流発電機を主発電機と同軸に結合し，発電した交流をロータに搭載した整流器で整流して直流を得る。他方は発電機ロータにスリップリングを直結するもので，これを介して外部から直流を発電機ロータに導く。前者はブラシレス励磁方式，後者はスリップリング方式である。

両方式の代表的ロータの形状を図２．２に示す。図２．３はスリップリング付タービン発



1. タービンカップリング	5. 発電機胴部	9. 交流発電機
2. スリーブ軸受	6. バッフルリング	10. パド軸受
3. ブロワーハブ	7. カップリング	11. ブロワ
4. リテーニングリング	8. 整流器ホイール	12. スリップリング

図 2.2　発電機ロータの外形図

電機ロータの外観である。写真の手前にスリップリングが２個見える。このロータは容量が小さいので，図２．２(b)の軸端のパド軸受(10)は設けられていない。600MW級の発電機ロータの最大軸径は約１メートル，重量は約６０トン，軸受ジャーナルは450㎜である。

一般には，ブラシレス励磁機やスリップリングを含めて発電機ロータと呼ぶことが多い。本論文でもこの呼び方に従うことにする。

図２．２に示すように，大容量発電機は通常２個のスリーブ軸受（150°部分軸受）と１個の４枚パド軸受で支えられる。危険速度では軸受油膜が制振ダンパの役目を果す。

励磁電流を励磁コイルへ導くために，ロータの構造が複雑になる。図２．４は，ブラシレス励磁方式ロータの主要部分の断面図である。リード線は，整流器を収めた整流器ホイール

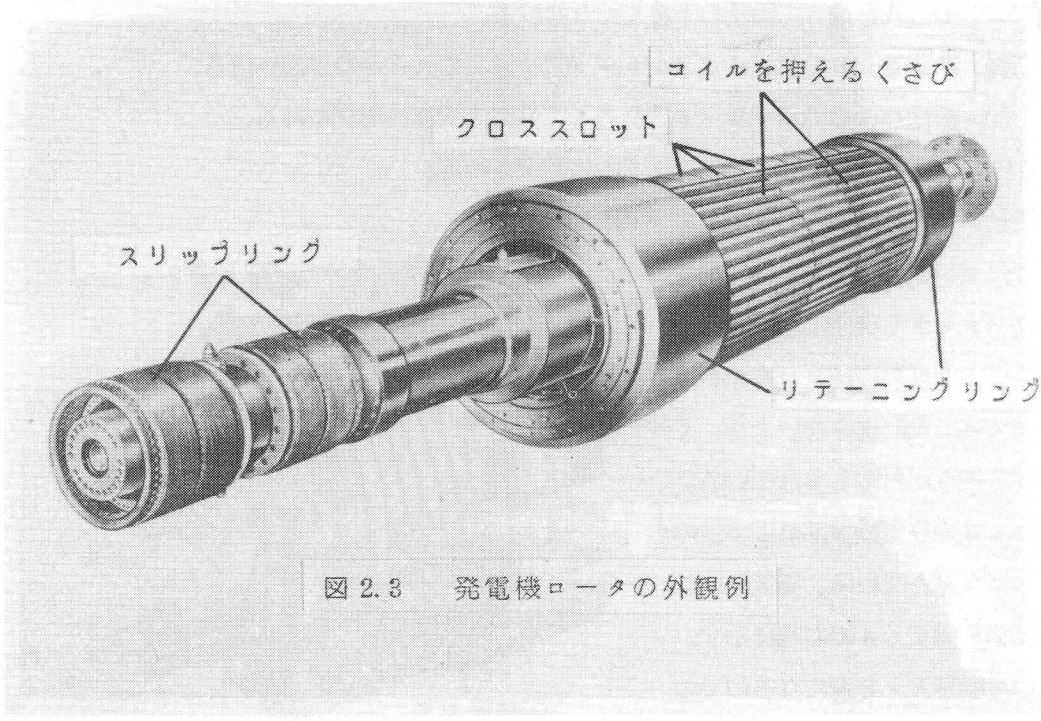


図 2.3　発電機ロータの外観例

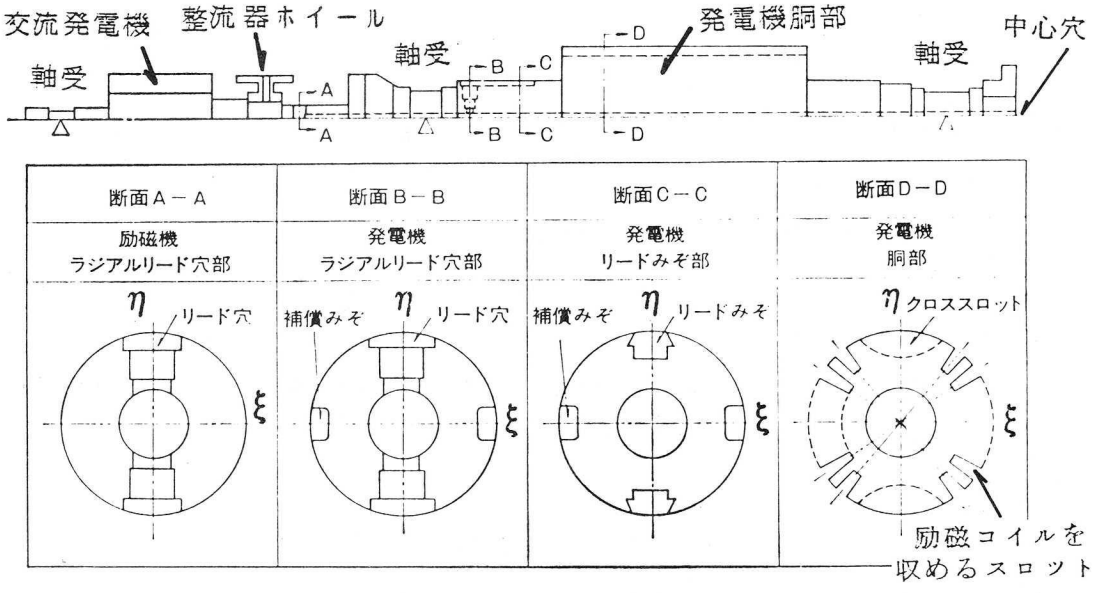


図 2.4　発電機ロータの断面

から発電機胴部の励磁コイルへ結線される。この間でリード線は

(1) まず断面A－Aでラジアルリード穴を通り，ロータの中心穴へ入る，

(2) 中心穴を通って軸受の下をくぐり抜ける，

(3) 断面B－Bで再びラジアルリード穴を通ってロータの表面へ出る，

(4) 断面C－Cに示すリード溝を通って発電機胴部へ導びかれる，

(5) 発電機胴部の近くで励磁コイルに結線される。

励磁コイルは，図２．５に示すようにロータの長手方向に切削されたスロット（溝）に納められる。スロットの外周には，コイルが遠心力で外に飛び出さないよう，くさび（楔）が打ちこまれている。図２．３の発電機胴部には多数のくさびが見えている。発電機胴部の断面を図２．４の右端に示す。図のη軸がN・S極になるのでこれを極方向，ξ軸を極間方向と呼ぶ。

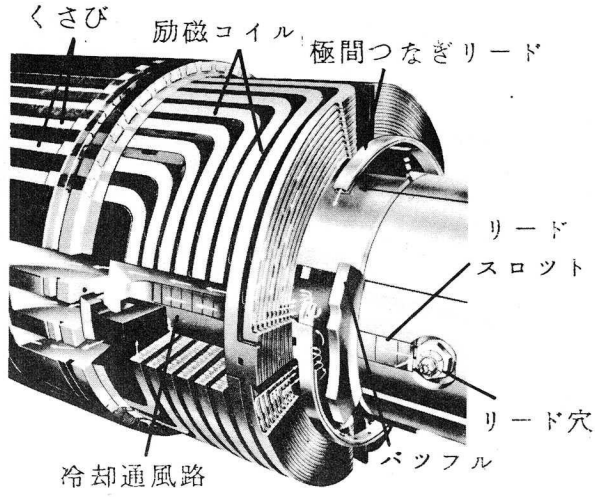


図 2.5　励磁コイルの概略

発電機ロータの曲げ剛性の異方性すなわち非対称は，リード線と励磁コイルを納める構造に起因する。ラジアルリード穴とリード溝は極（η）方向の，発電機胴部のスロットは極間（ξ）方向の曲げ剛性を弱める。そこで次の処置で両方向の剛性が等しくなるように調整する。

(1) ラジアルリード穴とリード溝部では，図２．４に示すように，ξ面上軸長手方向に一対の補償溝を加工する。

(2) 発電機胴部では，極方向の表面に数百㎜の間隔をおいて半月状の切りこみをいれる。これが図２．４の右端の断面に示すクロススロット〔29,52〕で，図２．３にもその一部が見えている。

リード線や励磁コイルは，銅棒のまわりに絶縁物を被覆した複合材料で構成されており，ロータの曲げ剛性に幾分なりとも寄与する。これらの剛性をも評価して，ロータ全体が対称となるように補償みぞとクロススロットが加工される。クロススロットが剛性に及ぼす影響

は，井上〔5〕，Balda〔49〕によって綿密に計算されている。このような事情から，ロータの剛性は設計上は軸対称とみなされている。

しかし，実際のロータの製作に当っては

(1) リード線や絶縁物の剛性

(2) 絶縁物の溝あるいはスロット壁面への密着の程度

(3) スロット外周のくさびがロータの曲げ剛性に及ぼす影響，

などが不均一なので，剛性はロータ上のあらゆる場所で必ずしも均一でなく，またリード穴やスロットなどに関して，

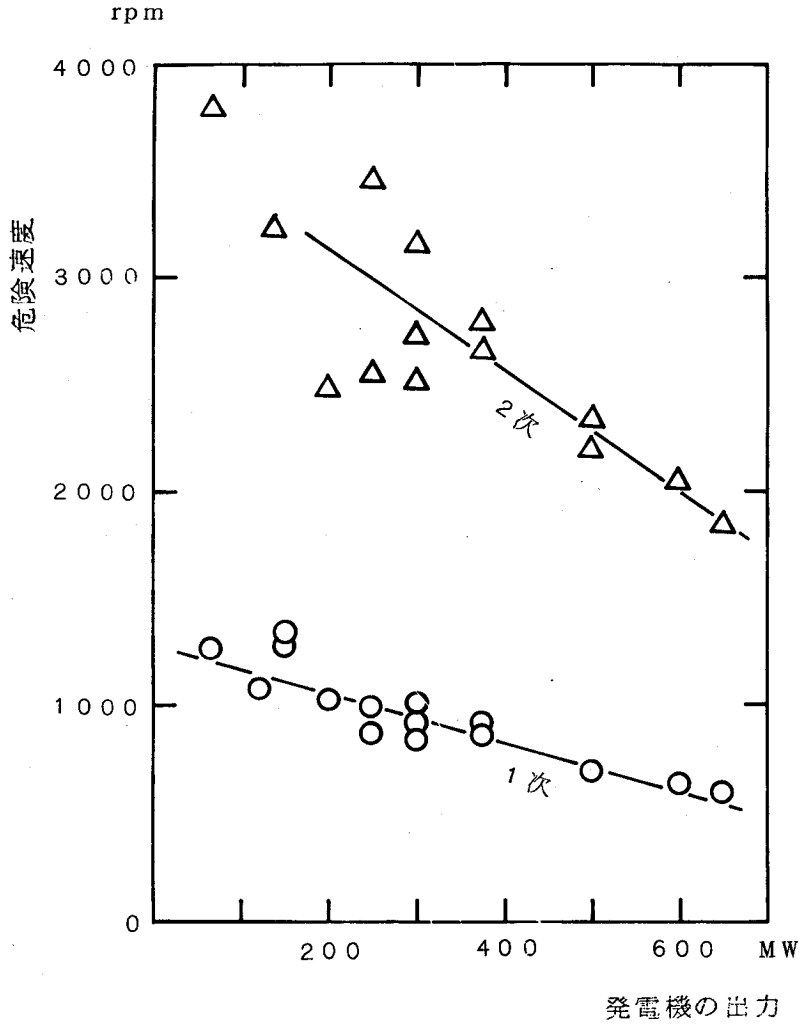


図 2.6 (a) タービン発電機の危険速度

(4) 設計時の剛性評価誤差

(5) 機械加工時の工作誤差

のために，若干の断面非対称が残ることは避けがたい。

第１章で最近の大容量タービン発電機の危険速度が低下し，その共振倍率が増加する傾向にあることを述べた。実例を図２．6(a)，(b)に示す。横軸は発電機の容量である。

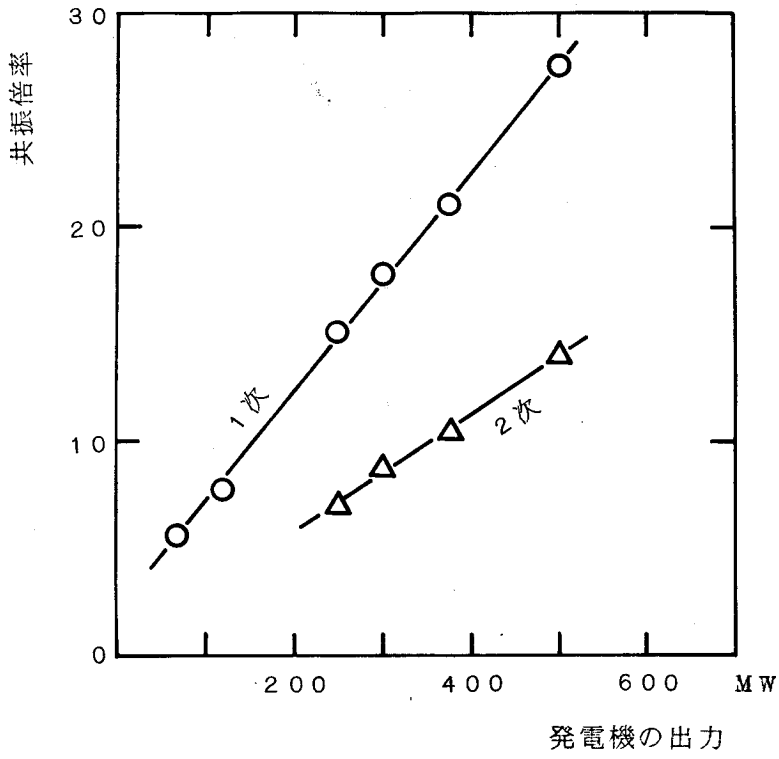


図 2.6　（b）　タービン発電機の共振倍率

(a)に文献に記された数社の発電機ロータの危険速度をまとめ〔17，40，52〕，(b)に共振倍率を示す〔65〕。１次危険速度の共振倍率は２次のそれよりもかなり大きいことがわかる。

２．３　断面非対称ロータの基礎運動方程式

以下の解析では，次の条件を満す軸系を対象とする。軸系は複数個の軸受で支えられ，その軸径や曲げ剛性の異方性すなわち断面非対称は軸の長手方向に沿って複雑に変化する。解析に先だち，次の仮定を設ける。

（仮定１）　慣性モーメントに異方性はない。

（仮定２）　剛性主軸はロータ上で常に一定方向を向く。

（仮定３）　軸受をロータ中心軸の並進（上下）方向と回転（傾斜）方向のばねとダンパでモデル化する。軸受の水平・垂直方向の異方性と両方向の相互干渉を無視する。軸受支持構造物の質量を無視する。

（仮定４）　軸の内部減衰，せん断曲げ剛性，ジャイロモーメントを無視する。

（仮定５）　ロータは水平に据つけられている。固定子からの電磁吸引力等，電磁現象を無視する。

（仮定６）　系の減衰は微小で，減衰マトリックス$\boldsymbol{C}$は系の減衰を無視した時の固有モードで対角化できる。

図２．７に直角座標系の定め方を示す。ロータの長手方向にｚ軸をとる。重力方向にｘ軸を定めた静止座標系Ｏ－ｘｙｚと，軸の剛性主軸に固定した回転座標系Ｏ－$\xi\eta z$とをとる。

次に図２．８の要領で現実のロータを数学モデルに置きかえる。断面が変化するなど特性が変化する個所で軸をＮ－１個の軸要素に分割する。軸受が

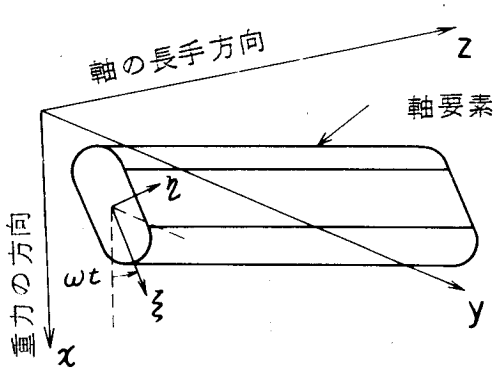


図 2.7　座標軸のとり方

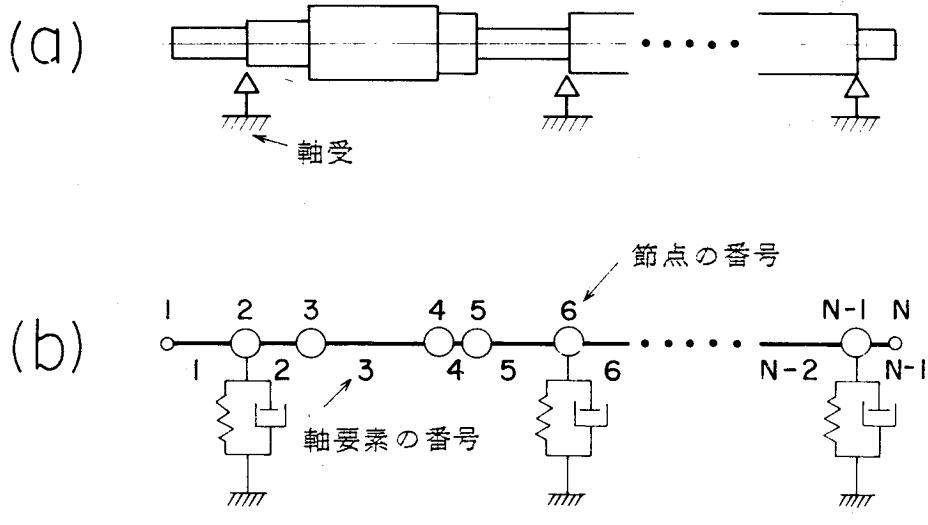


図 2.8　軸要素と節点

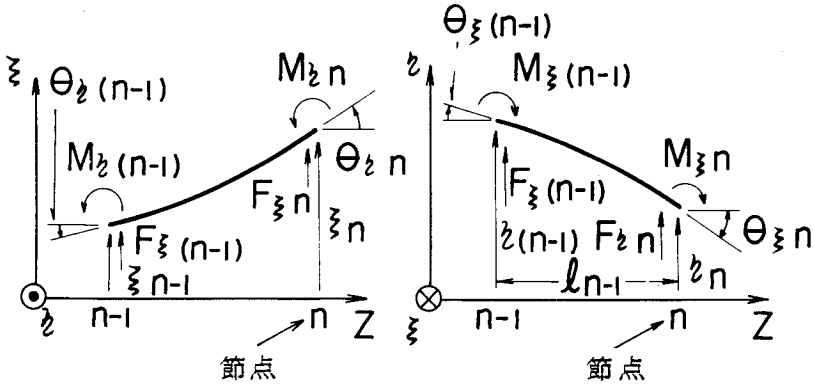


図 2.9　軸要素に働く力とモーメント

存在する個所を分割点，すなわち節点とする。軸要素の質量と慣性モーメントの半分づつをその左右の節点へ振り分ける。図２．９に示すように，節点にはせん断力と曲げモーメントが働く。これに加え節点の変位と傾斜角が決まると節点の状態がすべて明確になる。そこでこの４つの量を状態量と名づけ，回転座標系で表示する。この状態量をまとめ，力ベクトル（$\boldsymbol{F}_\xi$，$\boldsymbol{F}_\eta$）と変位ベクトル（$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$）を次式で定義する。

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_\xi &= \{F_{\xi 1},\ M_{\eta 1},\ F_{\xi 2},\ M_{\eta 2},\ \cdots\cdots\ F_{\xi N},\ M_{\eta N}\}^T \\
\boldsymbol{F}_\eta &= \{F_{\eta 1},\ -M_{\xi 1},\ F_{\eta 2},\ -M_{\xi 2},\ \cdots\cdots\ F_{\eta N},\ -M_{\xi N}\}^T \\
\boldsymbol{\xi} &= \{\xi_1,\ \theta_{\eta 1},\ \xi_2,\ \theta_{\eta 2},\ \cdots\cdots\ \xi_N,\ \theta_{\eta N}\}^T \\
\boldsymbol{\eta} &= \{\eta_1,\ -\theta_{\xi 1},\ \eta_2,\ -\theta_{\xi 2},\ \cdots\cdots\ \eta_N,\ -\theta_{\xi N}\}^T
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

節点に働くせん断力と曲げモーメントとは，軸要素の曲げ変形，軸要素の慣性，軸受部の変位，軸要素の重力に基づいている。それぞれを計算し，d′Alembert の原理より次の運動方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\xi}} - 2\omega\dot{\boldsymbol{\eta}} - \omega^2\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\xi}} - \omega\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{K}_\xi\boldsymbol{\xi} \\
&\qquad = \omega^2\boldsymbol{e}_\xi + \boldsymbol{W}\cos\omega t \\
&\boldsymbol{M}(\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\omega\dot{\boldsymbol{\xi}} - \omega^2\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\eta}} + \omega\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{K}_\eta\boldsymbol{\eta} \\
&\qquad = \omega^2\boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{W}\sin\omega t
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{K}$はそれぞれ２Ｎ元正方実対称の質量マトリックス，減衰マトリックス，剛性マトリックス，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{W}$は２Ｎ元の不つり合ベクトル，自重ベクトルである。すなわち，記号対照表の記号を用いて，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \mathrm{diag.}\ \{M_1,\ I_{d1},\ M_2,\ I_{d2},\ \text{-------}\ M_N,\ I_{dN}\}\\ \boldsymbol{C} &= \mathrm{diag.}\ \{C_{t1},\ C_{m1},\ C_{t2},\ C_{m2},\ \text{-------}\ C_{tN},\ C_{mN}\}\end{aligned}\right\}\text{----------}\ (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\xi &= \{e_1\cos\upsilon_1,\ e_2\cos\upsilon_2\ \text{-------}\ e_{2N}\cos\upsilon_{2N}\}^T\\ \boldsymbol{e}_\eta &= \{e_1\sin\upsilon_1,\ e_2\sin\upsilon_2\ \text{-------}\ e_{2N}\sin\upsilon_{2N}\}^T\\ \boldsymbol{W} &= \{w_1,\ w_2\ \text{----------}\ w_{2N-1},\ w_{2N}\}^T\end{aligned}\right\}\text{----------}\ (2.4)$$

$$\boldsymbol{K}_\xi = \bar{\boldsymbol{K}}_\xi + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{K}_\eta = \bar{\boldsymbol{K}}_\eta + \boldsymbol{k}\ \text{----------}\ (2.5)$$

ここで記号diag. $\{f_1,\ f_2$-------$\}$は，対角要素を左上から順にf_1，f_2-------とする対角マトリックスを表わす。図２．１０に軸要素の一つを切り出して示す。式（２．４）のe

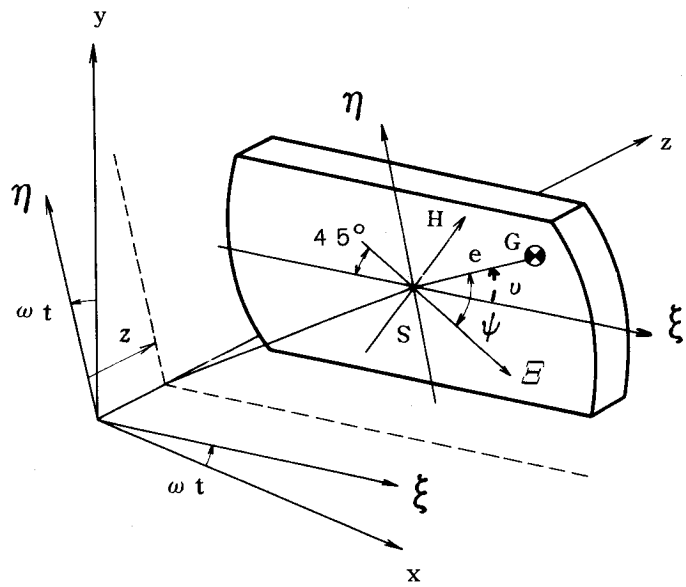


図 2.10　軸要素の断面と回転座標系

は軸要素の重心Gと軸心Sの距離，υはξ軸から測った重心Gの位相角である。$\boldsymbol{k}$は軸受剛性マトリックス，$\bar{\boldsymbol{K}}_\xi$，$\bar{\boldsymbol{K}}_\eta$は軸要素の曲げ剛性である。

$$\boldsymbol{k} = \mathrm{diag.}\ \{k_{t1},\ k_{m1},\ k_{t2},\ k_{m2}\ \text{-------}\ k_{tN},\ k_{mN}\}\ \text{----------}\ (2.6)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{K}}_{\xi,\eta} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}^{1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \overline{\boldsymbol{K}}^{n} & \\ 0 & & & \overline{\boldsymbol{K}}^{N-1} \end{bmatrix}_{\xi,\eta} \\
&\overline{\boldsymbol{K}}^{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{n-1} & \boldsymbol{R}_{n} \\ \boldsymbol{R}_{n}^{T} & \boldsymbol{S}_{n} \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{S}_{n} = \begin{bmatrix} (EI)_{n} s_{n}^{1} + (EI)_{n+1} s_{n+1}^{1} & -(EI)_{n} s_{n}^{2} + (EI)_{n+1} s_{n+1}^{2} \\ -(EI)_{n} s_{n}^{2} + (EI)_{n+1} s_{n+1}^{2} & 2(EI)_{n} s_{n}^{3} + 2(EI)_{n+1} s_{n+1}^{3} \end{bmatrix} \\
&\boldsymbol{R}_{n} = \begin{bmatrix} -(EI)_{n} s_{n}^{1} & (EI)_{n} s_{n}^{2} \\ -(EI)_{n} s_{n}^{2} & (EI)_{n} s_{n}^{3} \end{bmatrix} \\
&s_{n}^{1} = 12/\ell_{n}^{3}, \quad s_{n}^{2} = 6/\ell_{n}^{2}, \quad s_{n}^{3} = 2/\ell_{n} \\
&s_{0}^{1} = s_{N}^{1} = 0, \quad s_{0}^{2} = s_{N}^{2} = 0, \quad s_{0}^{3} = s_{N}^{3} = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (2.7)
$$

式（２．７）の添字ξ，ηは$\overline{\boldsymbol{K}}_{\xi}$，$\overline{\boldsymbol{K}}_{\eta}$を同一形式にまとめたものである。$\xi$，$\eta$方向で曲げ剛性が異なるので，２つの異った剛性マトリックス$\overline{\boldsymbol{K}}_{\xi}$，$\overline{\boldsymbol{K}}_{\eta}$が定義される。 断面非対称が存在する軸要素では$(EI)_{\xi} \neq (EI)_{\eta}$，存在しない軸要素では$(EI)_{\xi} = (EI)_{\eta}$である。断面ごとに定まる軸断面非対称率$\hat{\mu}_{n}$を次式で定義する。

$$
\hat{\mu}_{n} = \frac{\{(EI)_{\xi} - (EI)_{\eta}\}_{n}}{\{(EI)_{\xi} + (EI)_{\eta}\}_{n}} \quad \text{----------} \quad (2.8)
$$

ここで新しい複素変数Ξを，

$$
\Xi = \boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}, \quad \Xi^{*} = \boldsymbol{\xi} - i\boldsymbol{\eta} \quad \text{----------} \quad (2.9)
$$

で定義する。$*$は共役複素数をあらわす。これを式（２．２）へ代入して次の運動方程式を

得る。

$$\boldsymbol{M}(\ddot{\Xi}+2\mathrm{i}\omega\dot{\Xi}-\omega^2\Xi)+\boldsymbol{C}(\dot{\Xi}+\mathrm{i}\omega\Xi)+\boldsymbol{K}\Xi$$
$$+\triangle\boldsymbol{K}\Xi^{*}=\omega^2\boldsymbol{e}+\boldsymbol{W}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{----------}(2.10)$$

ここで，$\boldsymbol{K}$は平均剛性マトリックス，$\triangle\boldsymbol{K}$は剛性差マトリックス，$\boldsymbol{e}$は不つり合ベクトルである。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{K}_{\xi}+\boldsymbol{K}_{\eta})/2,\quad \triangle\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{K}_{\xi}-\boldsymbol{K}_{\eta})/2\\ \boldsymbol{e}=\{\mathrm{e}_1\exp(\mathrm{i}\upsilon_1),\ \mathrm{e}_2\exp(\mathrm{i}\upsilon_2)\text{--------}\ \mathrm{e}_{2N}\exp(\mathrm{i}\upsilon_{2N})\}\end{array}\right\}\text{----------}(2.11)$$

式（２．２）あるいは式（２．１０）が，断面非対称による振動を記述する運動方程式である。

第3章　発電機ロータの断面非対称量の推定

3．1　緒　　言

断面非対称による振動をおさえるには，ロータの断面非対称そのものを減らすのが最も直接的である。これにはまず現実に製作したロータのどこにどの程度の断面非対称が存在するかを調べる必要がある。従来この種の問題は全く研究されていず，Morton〔24〕が数本の2極タービン発電機ロータの曲げ2主軸方向の固有振動数を測定し，ロータが全体としてどの程度非対称になっているかを示したに過ぎない。断面非対称は軸の長手方向に沿って複雑に変化している。従って断面非対称を修正しようとした時，残存する曲げ剛性の異方性の位置と量とを具体的に知らねば目的は達せられない。

この章では，断面非対称分布の測定法を提案し，実際の発電機ロータにこの方法を適用した結果を示す〔66,68〕。

3．2　断面非対称量の推定方法

3．2．1　推定方法の種類

ロータの断面非対称分布は，断面非対称に起因する振動現象から推定できる。代表的現象として次の3種が挙げられる。

(1)　重力によって2倍調波振動が発生し，その振幅は断面非対称量に比例する。

(2)　ロータに不つり合がある場合，振動振幅は危険速度に近づくと急激に大きくなり，危険速度を越すと再び小さくなる。これと同時に振動の不つり合に対する位相は危険速度の前後で180°変化する。通常の断面が対称なロータでは，振動振幅と位相とをベクトル線図に描くと，危険速度近傍で円になる。これがモード円である。一方断面非対称ロータではベクトル軌跡がだ円を描き，その短径と長径の比が断面非対称量と一定の関数関係にある（6．3節参照）。

(3)　2つの剛性主軸（ξ，η）方向の固有振動数はお互いに異なり，その差は断面非対称量と一定の関数関係にある。この差は，ロータを長いロープでつるして励振し測定できる。これがフリー・フリー・テストである。

(1)(2)は，ロータを油膜軸受で支えて運転した時の振動現象で，いずれも軸受特性の影響を直接受ける。このため大形回転機に使用される油膜軸受の動特性について数多くの研究が行なわれている。しかし，4．2．2項でも触れるように，この成果は必ずしも十分とは言え

ず，実際のロータ系の危険速度近傍の振動現象が定量的に十分な精度で予知できるには至っていない。すなわち(1)(2)の現象を利用する場合には，軸受動特性の不確かさが誤差を生ぜしめ，断面非対称が正しく推定できない。そこで筆者は(3)の方法をとることにした。

3．2．2　断面非対称量と固有振動数

まず，フリー・フリー・テストについて述べる。ロータを十分に長いロープでつるし，2つの剛性主軸（ξ，η軸）を順次水平方向に向けて励振し，水平方向の j 次の固有振動数 $\omega_{\xi j}$，$\omega_{\eta j}$を測定する。ロープが十分に長いとロープ・ロータ系の振り子としての固有振動数が，ロータの弾性体としての最低次固有振動数より1～2けた低くなり，ロータは近似的に自由空間に，すなわちフリー・フリーの状態に置かれたことになる。このようにして求めた固有振動数では，ロータ支持のあいまいさの影響が無視できる。

次に，フリー・フリー・テスト時の固有振動数とロータの断面非対称量との関係を調べる。図2．8で軸受をとり去った軸系を考える。図3．1に示すように，軸をN－1個の軸要素

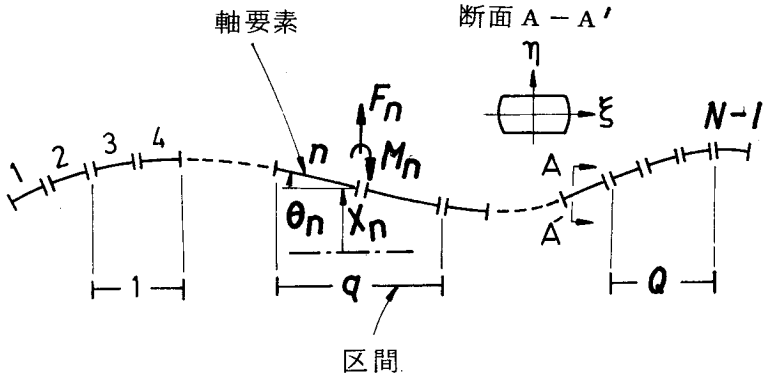


図 3.1　軸要素と区間

に分割する。まず2．3節の一般的な（仮定1）（仮定2）（仮定4）に加え，本章では次の仮定を追加する。

（仮定7）　断面非対称は，少なくとも一つの軸要素内で一定である。

（仮定8）　各次数の2つの主軸方向の固有モード（$\phi_{\xi j}$，$\phi_{\eta j}$）は互いに等しい。

両端が自由で回転していないこの軸系のξ，η方向の自由振動は，式（2．2）で$\omega=0$，$\boldsymbol{W}=0$と置いて，

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}}+\boldsymbol{K}_{\xi}\boldsymbol{\xi}=0,\quad \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\boldsymbol{K}_{\eta}\boldsymbol{\eta}=0 \qquad \text{(3．1)}$$

で記述できる。軸受は存在しないので減衰はなく，当然$\boldsymbol{C}=0$である。この軸にモード解析法を適用する。ξ，η方向のj次の固有角振動数$\omega_{\xi j}$，$\omega_{\eta j}$とこれに対応した固有モードベクトル$\phi_{\xi j}$，$\phi_{\eta j}$，等価質量$m_{\xi j}$，$m_{\eta j}$が定義できる。一般に，ξ，η方向の固有モード，等価質量はそれぞれ異っているが，ここでは（仮定８）より，

$$\phi_{\xi j}=\phi_{\eta j}\equiv\phi_{oj}\ ,\ m_{\xi j}=m_{\eta j}\equiv m_{oj} \qquad (3.2)$$

と置ける。固有角振動数，固有モードなどの基本的性質から次式を得る。

$$\omega^2_{\xi j}=\frac{\phi^T_{oj}\boldsymbol{K}_\xi\phi_{oj}}{m_{oj}}\ ,\quad \omega^2_{\eta j}=\frac{\phi^T_{oj}\boldsymbol{K}_\eta\phi_{oj}}{m_{oj}} \qquad (3.3)$$

$\omega_{\xi j}$，$\omega_{\eta j}$の２乗の差$\triangle\omega^2_j$を２乗差と呼ぶと，

$$\triangle\omega^2_j=\omega^2_{\xi j}-\omega^2_{\eta j}$$

$$=\frac{\phi^T_{oj}(\boldsymbol{K}_\xi-\boldsymbol{K}_\eta)\phi_{oj}}{m_{oj}} \qquad (3.4)$$

を得る。図３．２(a)と式（２．７）とから，$\boldsymbol{K}_\xi-\boldsymbol{K}_\eta$は図３．２(b)の形のマトリックスで表わされ，断面非対称が存在する軸要素以外の小マトリックスの成分はすべて零になる。従って，式（３．４）右辺の展開式は，

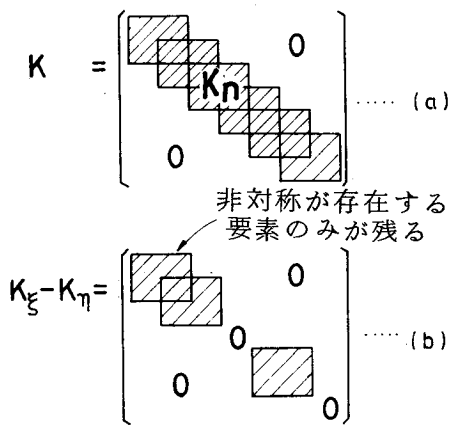


図 3.2　剛性マトリックス

$$\triangle\omega_j^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \{ (EI)_{\xi n} - (EI)_{\eta n} \} v_{nj}$$

$$v_{nj} = \frac{1}{moj} \begin{bmatrix} \varphi_{o(n-1)j} \\ \varphi'_{o(n-1)j} \\ \varphi_{onj} \\ \varphi'_{onj} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s_n^1 & s_n^2 & -s_n^1 & s_n^2 \\ s_n^2 & 2s_n^3 & -s_n^2 & s_n^3 \\ -s_n^1 & -s_n^2 & s_n^1 & -s_n^2 \\ s_n^2 & s_n^3 & -s_n^2 & 2s_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{o(n-1)j} \\ \varphi'_{o(n-1)j} \\ \varphi_{onj} \\ \varphi'_{onj} \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

となる。ここでφ_{onj}，φ'_{onj}はj次固有モードのn番目節点における変位と傾斜角，v_{nj}は断面非対称と無関係な軸要素の定数である。

さて，固有振動数などを計算する時は，ロータをできるだけ数多くの軸要素に分割すれば計算精度が高くなる。断面非対称を推定する時は，後で述べる理由で，ロータをあまり細かく分割できない。そこで断面非対称が存在すると考えられる1個以上の同一断面軸要素を図3．1のようにひとまとめにして区間と呼ぶことにする。（仮定7）と同様に一つの区間内で断面非対称は一様と考える。

全ロータ系にQ個の区間を定めると，区間に関し式（3．5）は次のように変形できる。

$$\left.\begin{aligned} \triangle\omega_j^2 &= \sum_{q=1}^{Q} \{ (EI)_{\xi q} - (EI)_{\eta q} \} u_{qj} \\ u_{qj} &= \sum_{s=1}^{S} v_{sj}^q \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

ここでsは区間q内の軸要素の通し番号で，v_{sj}^qは区間qのs番目軸要素のv_{sj}を表わす。u_{qj}はロータの断面非対称と無関係な定数になる。ξ，η方向の曲げ剛性の差を剛性差と呼び，$(\triangle EI)_q$で表わせば，ロータの断面非対称量は剛性差で定量的に規定できる。J次までの2乗差に関し，式（3．6）を書きかえて次式を得る。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1Q} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2Q} \\ \vdots & & & \vdots \\ u_{J1} & u_{J2} & \cdots & u_{JQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\triangle EI)_1 \\ (\triangle EI)_2 \\ \vdots \\ (\triangle EI)_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \triangle\omega_1^2 \\ \triangle\omega_2^2 \\ \vdots \\ \triangle\omega_J^2 \end{bmatrix} \qquad (3.6)'$$

区間を設定する場合，断面非対称が存在すると予想される部分に不連続に区間を定めてよい。断面非対称の存在しない部分は式（３．６）に陽に現われず零となって消滅するからである。図３．３の分割法Ａがこの例である。a1，a4 が a2，a3 と離れて区間分けされている。

ここで以下の便宜上，剛性差，２乗差をそれぞれ無次元化して，区間ｑの断面非対称率 $\hat{\mu}_q$，ｊ 次のモード非対称率 μ_j を定義する。すなわち，

$$\hat{\mu}_q = \frac{(EI)_{\xi q} - (EI)_{\eta q}}{(EI)_{\xi q} + (EI)_{\eta q}} \qquad \text{(3.7)}$$

$$\mu_j = \frac{\omega^2_{\xi j} - \omega^2_{\eta j}}{\omega^2_{\xi j} + \omega^2_{\eta j}} \qquad \text{(3.8)}$$

長手方向に断面非対称が一様に分布するロータでは一般に $\hat{\mu} = \mu$ である。$\hat{\mu}_q$，μ_j を使うと式（３．６）は，

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \\ \text{ただし}\quad &\hat{\boldsymbol{\mu}} = \{\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2\ \cdots\cdots\ \hat{\mu}_Q\}^T \\ &\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1,\ \mu_2\ \cdots\cdots\ \mu_J\}^T \end{aligned}\right\} \qquad \text{(3.9)}$$

となる。$\boldsymbol{U}$ は u をその要素とする無次元化された影響係数マトリックスである。

次に影響係数マトリックスの求め方を述べる。まず断面非対称が存在すると予想する区間のみに単位の断面非対称率を与え，フリー・フリーの条件でＪ次迄の ξ，η 方向固有振動数を計算し，式（３．８）でモード非対称率を計算する。これが影響係数マトリックスの第１列の要素である。次に区間２についても同様の計算を行ない第２列目の要素とする。この作業を断面非対称が存在すると予想するＱ個の全区間について繰返すと，影響係数マトリックスが定まる。

さて次に実際に製作されたロータの２主軸方向の固有振動数を測定し，これからモード非対称率を計算する。これを式（３．９）に代入して連立方程式を解くと，各区間の断面非対称率，すなわちロータの断面非対称の分布が明らかとなる。

式（３．９）が解けるためには，

$$Q \leq J \qquad \text{(3.10)}$$

でなければならない。すなわち断面非対称存在区間の数以上の次数迄固有振動数を測定する

必要がある。Q＝Jの時，$\boldsymbol{U}$は正方マトリックスになるので連立方程式は一義的に解ける。Q＜Jの時，最小自乗法を導入して断面非対称の推定精度を高めることができる。

3．2．3　推定の手順

ロータに実在する断面非対称率の推定手順をまとめて記す。

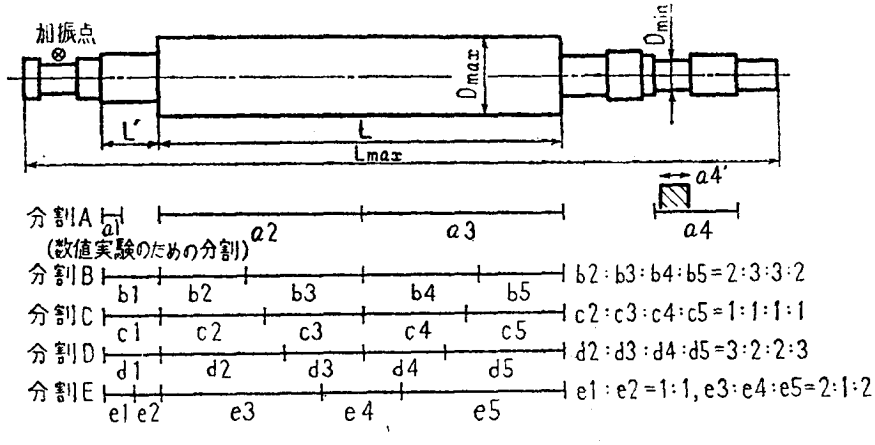
(1)　フリー・フリー・テストで2主軸方向の固有振動数をJ次まで測定し，式（3．8）でモード非対称率を求める。

(2)　ロータ上，断面非対称が存在すると予想される部分をQ個の区間に分割する。各区間に順次単位量の断面非対称率を仮定し，固有振動数の2乗差，次いでモード非対称率を計算して影響係数マトリックスを導びく。

(3)　実験で得たモード非対称率と，計算で得た影響係数マトリックスから，式（3．9）を解いて断面非対称率を計算する。

3．2．4　推定法の問題点

前項までは，断面非対称が区間内で一様に分布すると仮定した。しかし実在するロータの断面非対称率は，ロータの長手方向に不均一に分布すると予想される。従って断面非対称は区間内ででも不均一で，断面非対称推定値に誤差を生ぜしめる恐れがある。断面非対称の存在部分を多数の区間に分割すれば複雑に変化する断面非対称も推定できるが，測定可能な固有振動数の次数に限りがあり，それほど数多くには分割できない。このような断面非対称の不均一性が推定値に及ぼす影響を，図3．3の段付ロータの数値計算による実験で検討する。



$D_{min}/D_{max} \fallingdotseq 0.6,\quad L_{max}/L \fallingdotseq 1.8,\quad L/D_{max} \fallingdotseq 8$

図 3.3　ロータの形状と区間分割

これは実際の発電機ロータの本体部で，右側がタービン側に当る。

断面非対称が存在する区間を分割法A（a1～a4）の4個所と仮定する。そこで式（3・9）を解くために4次迄のモード非対称率を知る必要がある。

式（3．9）の影響係数マトリックス$\boldsymbol{U}$を求めるに当り，ロータを34個の軸要素に分割した。固有振動数は改良伝達マトリックス法〔60，61〕に基づいた軸振動計算プログラム〔56〕で計算した。

ロータに種々の断面非対称が存在する時のモード非対称率は，本節に限り，フリー・フリー・テストで求めず計算で代用した。

以下，次の3つの例について検討する。

例1：区間a2，a3にのみ一様な単位量の断面非対称が存在する場合

例2：区間a1～a4でそれぞれ異なるが，区間内では一様な断面非対称が存在する場合

例3：a4のうちa4′にのみ単位量の断面非対称が存在する場合，（図3．3，分割Aの右端a4′を参照）。

モード非対称率は軸振動計算プログラムで得た固有振動数から計算し，これを式（3．9）に代入して断面非対称率を求めた。結果を表3．1に示す。表中の誤差とは，推定値の最大値に対する偏差の割合である。

表 3.1　断面非対称率推定の数値実験例

分割区間名	例1			例2			例3		
	仮定値	推定値	誤差*	仮定値	推定値	誤差*	仮定値	推定値	誤差*
a1	0	0.0076	0.008	0.4	0.3686	-0.020	0	-0.0256	-0.098
a2	1	1.0022	0.002	1.6	1.5957	-0.003	0	0.0351	0.135
a3	1	1.0068	0.007	1.0	1.0031	0.002	0	0.0818	0.315
a4	0	-0.0162	-0.016	0.8	0.8095	0.006	**	0.260	-

*　誤差*＝（推定値－仮定値）／（推定値のうちの最大値）

**　区間a4'のみ1.0

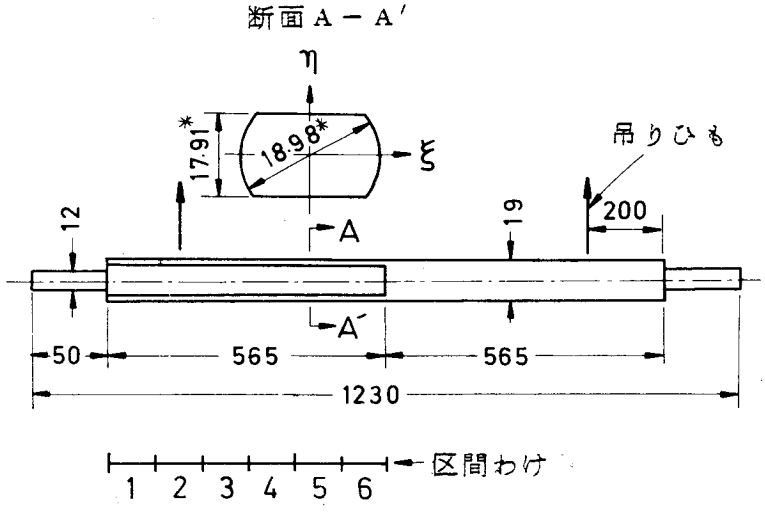
断面非対称が区間内で一様な例1，2では，当然ながら仮定値と推定結果とが良く一致する。両者の微少な差は，影響係数を求める時と，式（3．9）の連立一次方程式を解く時の数値計算誤差と考えられる。

例3では，区間a4′の単位断面非対称率がa4全体に平均化され，推定結果が小さくなっ

た。a1～a3 の断面非対称率は本来零であるべきところ，最大推定誤差は31.5％で，例1，例2に比べ格段に大きい。数値計算誤差は例1，2から見て2％未満であり，この大きい誤差は区間内で一様でない断面非対称を一様と仮定したために生じたと考えられる。従って，断面非対称が不均一に分布すると考えられる実際のロータにこの方法を適用する時は，特別の工夫が必要で，この点については後述する。

3．3　単純な形状の軸での断面非対称量の推定

前章の断面非対称推定法を既知の断面非対称を持った軸に適用し，その有効性を調べる。製作したモデル軸の形状を図3．4に示す。軸中央から左側の長さ 565 ㎜の部分に，



＊　12個所の測定値の平均値

図 3.4　　モデル軸の形状

断面A－A′に示すような断面非対称を持たせた。この軸の断面非対称率は，簡単な材料力学的検討から$\hat{\mu}=0.0300$とわかる。

この軸を長さ3メートルの麻ひもでつるし，軸の外周を水平方向に電磁石と非接触に対向させた。電磁石のコイルには可変周波数の交流を流し，軸を水平方向から励振した。軸には重さ1.5グラムの圧電形加速度計を感度方向を水平に向けてはりつけ，その出力が最大になる周波数の周期を有効けた数5けたまで読みとって，軸の固有振動数を求めた。ξ，η軸を

表 3.2　モデル軸の固有振動数のモード非対称率（推定）

次数 j	測定値 固有振動数 (Hz) ξ方向	測定値 固有振動数 (Hz) η方向	測定値 モード非対称率 μ_j
1	63.390	62.412	0.01555
2	173.55	170.95	0.01509
3	337.64	332.52	0.01529
4	553.30	545.10	0.01493
5	818.12	806.04	0.01487
6	1128.9	1112.72	0.01444

それぞれ水平方向に向け，固有振動数を６次まで測定した結果を表３．２に示す。これは各々３回の測定の平均値である。固有振動数測定結果からモード非対称率を計算し，表３．２に併記した。

次に断面非対称が存在する部分を図３．４に示すように６等分し，式（３．９）の影響係数マトリックス（６行６列）を計算した。このマトリックスを表３．３に示す。

表 3.3　モデル軸の無次元影響係数マトリックス

x 0.1

j \ r	1	2	3	4	5	6
1	0.0269	0.2316	0.6200	1.1769	1.4967	1.7516
2	0.1509	0.9647	1.6218	1.5918	0.7475	0.1310
3	0.4488	1.7640	1.3368	0.2408	0.3190	1.1312
4	0.8550	1.7308	0.2895	0.6741	1.1776	0.3276
5	1.3378	1.1053	0.4683	1.2100	0.1707	0.9030
6	1.5012	0.5102	1.0701	0.3196	0.8888	0.5065

単位の断面非対称率を１％とした時の影響係数マトリックス

測定から得たモード非対称率を式（３．９）に代入し，連立方程式を解いて断面非対称率を求めた。これを表３．４に掲げる。正しいμは$\hat{\mu}_1 \sim \hat{\mu}_6$とも0.0300で，この推定法による誤差は－１３～１０％であった。

表 3.4　モデル軸の断面非対称率（推定）

区間 q	実験による推定値 $\hat{\mu}_q$	誤差
1	0.0305	0.017
2	0.0282	-0.059
3	0.0304	0.014
4	0.0261	-0.130
5	0.0330	0.101
6	0.0282	-0.059

誤差＝$(\hat{\mu}_q - \hat{\mu}_o)/\hat{\mu}_o$　但し $\hat{\mu}_o = 0.0300$

以上により，３．２節の断面非対称率の推定法は，若干の誤差を伴うものの，有効であることが確認された。

３．４　発電機ロータの断面非対称量の推定

実際の発電機ロータに３．２節の推定法を適用し，その断面非対称率を調べる。

３．４．１　フリー・フリー・テスト

図３．３の形状の２極タービン発電機ロータを長さ１２メートルのワイヤロープでつるした。図３．３の加振点（軸受ジャーナル部）に油圧加振器をとりつけ，水平方向に励振して２主軸方向の固有振動数を測定した。測定状況を図３．５に示す。手前の四角の箱が油圧加振器である。図では見えないが，ロータ上に圧電形加速度計をとりつけた。データの処理にはトラッキングフィルタ形式の機械インピーダンス測定装置を使用した。測定器系統図と測定結果の一例を図３．６，３．７に示す。

図３．７で下向きのピークが共振，上向きのピークが反共振にあたる。 図では30.01，58.77 Hz 等が固有振動数である。この測定に要した励振力は約２０ kg であった。

固有振動数を正確に測定するために，加振周波数をゆっくりとスイープし，機械インピーダンスが最少になる周波数の周期を有効けた数４けたまで読みとり，この作業を５回繰り返して平均をとった。

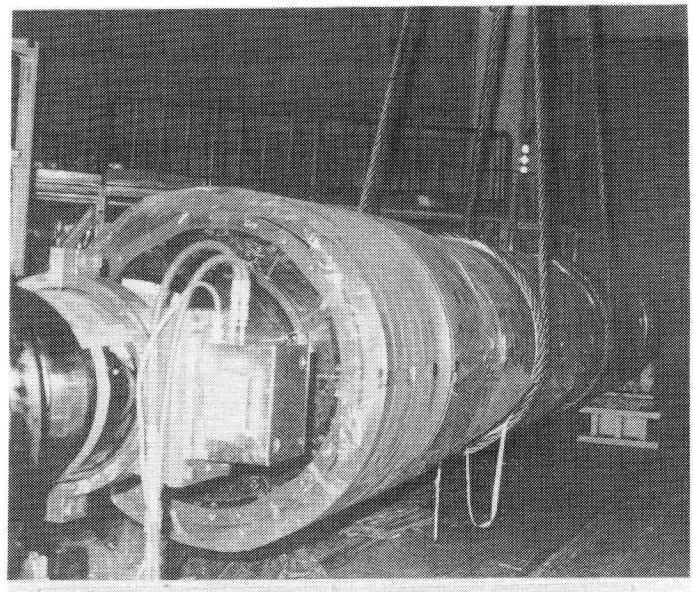


図 3.5　フリー・フリー・テストの状況

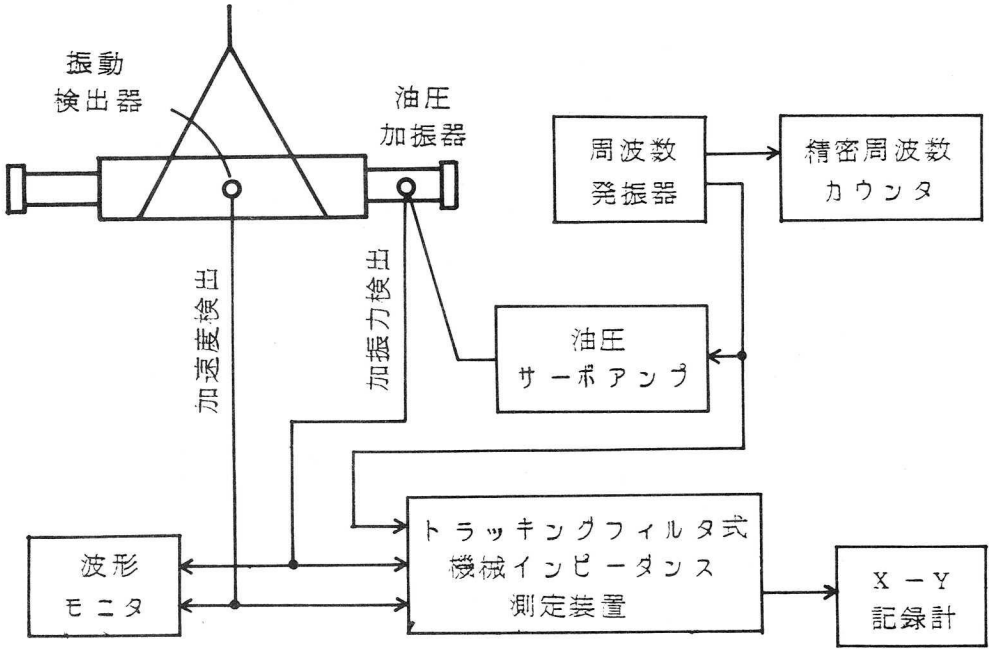


図 3.6　フリー・フリー・テストの計測器系統図

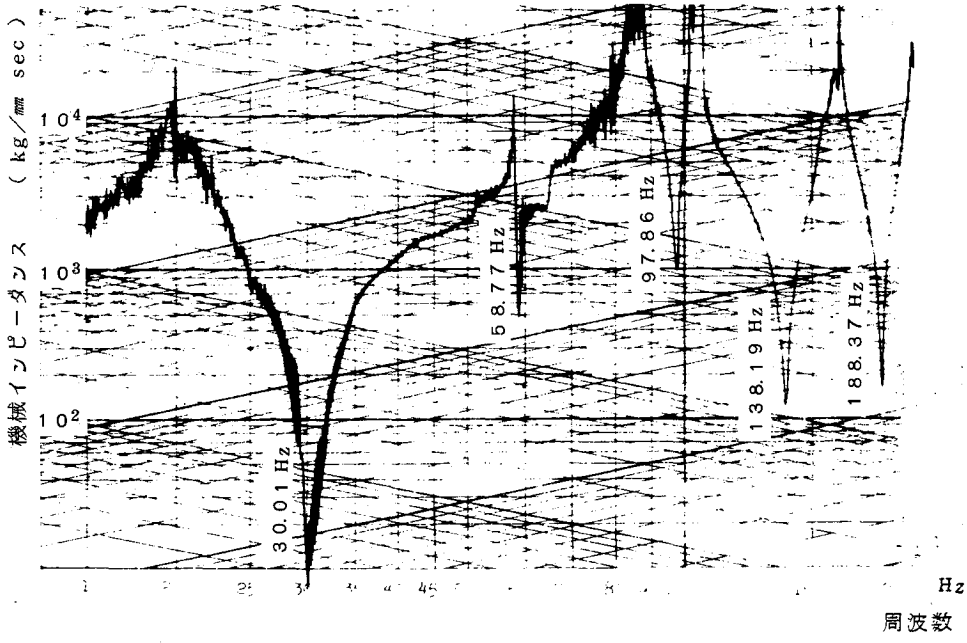


図 3.7　機械インピーダンス測定例

ロープとロータで構成される振り子の固有振動数は約0.14Hzで，ロータの弾性振動の最低次固有振動数の30Hzに比べ十分に低く，フリー・フリーの条件が満たされていると判断した。

2本のロータ1，2の5次までの固有振動数測定結果から，フリー・フリー状態のモード

表 3.5　フリー・フリー・テスト時のモード非対称率（測定）

次数 j	ロータ1	ロータ2	参考値〔20〕	
			ロータ3	ロータ4
1	0.0034	0.0052	0.012	0.032
2	0.0080	0.013	0.024	0.026
3	0.028	0.015	0.034	0.044
4	-0.0016	-0.0032	-	-
5	0.028	0.015	-	-

非対称率 μj を求め，その結果を表３．５に示す。各次数のμがそれぞれ異なることから，断面非対称がロータ上で不均一に分布しているとわかる。図３．８はフリー・フリー・テスト時の固有モード測定例である。

表３．５のロータ３，４のモード非対称率はMortonのフリー・フリー・テストの公表例〔24〕から求めたもので，これと比べるとロータ１，２のモード非対称率の方が小さい。

ロータ１，２を含めた数本のロータのフリー・フリー・テストの結果を統計処理して表３．６に示す。モード非対称率はおおむね次数とともに増加するが，２～４次に比べ１次のそれは極端に小さく，６次では大きい傾向がある。

表 3.6　フリー・フリー・テスト時のモード非対称率（統計データ）

次数 j	平均値	標準偏差
1	0.0035	0.0015
2	0.012	0.0065
3	0.016	0.0077
4	0.011	0.0078
5	0.029	0.0090
6	0.040	0.017
全平均	0.016	0.013

３．４．２　断面非対称の不均一分布の影響

２．２節で述べたように，発電機ロータの断面非対称は構造上図３．３のＬおよびＬ′の部分に残在すると考えられる。表３．５に示すように５次までのモード非対称率を得ているので，ＬとＬ′の部分を５区間に分割する。分割方法は種々考えられるが，ここでは図３．３の分割法Ｂ～Ｅの４通りとした。例えば，分割法Ｂでは発電機胴部を４つに分割し，その中央の２つ（ｂ３，ｂ４）の長さを端の２つ（ｂ２　ｂ４）の長さの1.5倍にとった。ｂ１はリード溝が加工されている部分である。

実際の発電機ロータでは，各区間内でも断面非対称がある程度不均一になっていると考

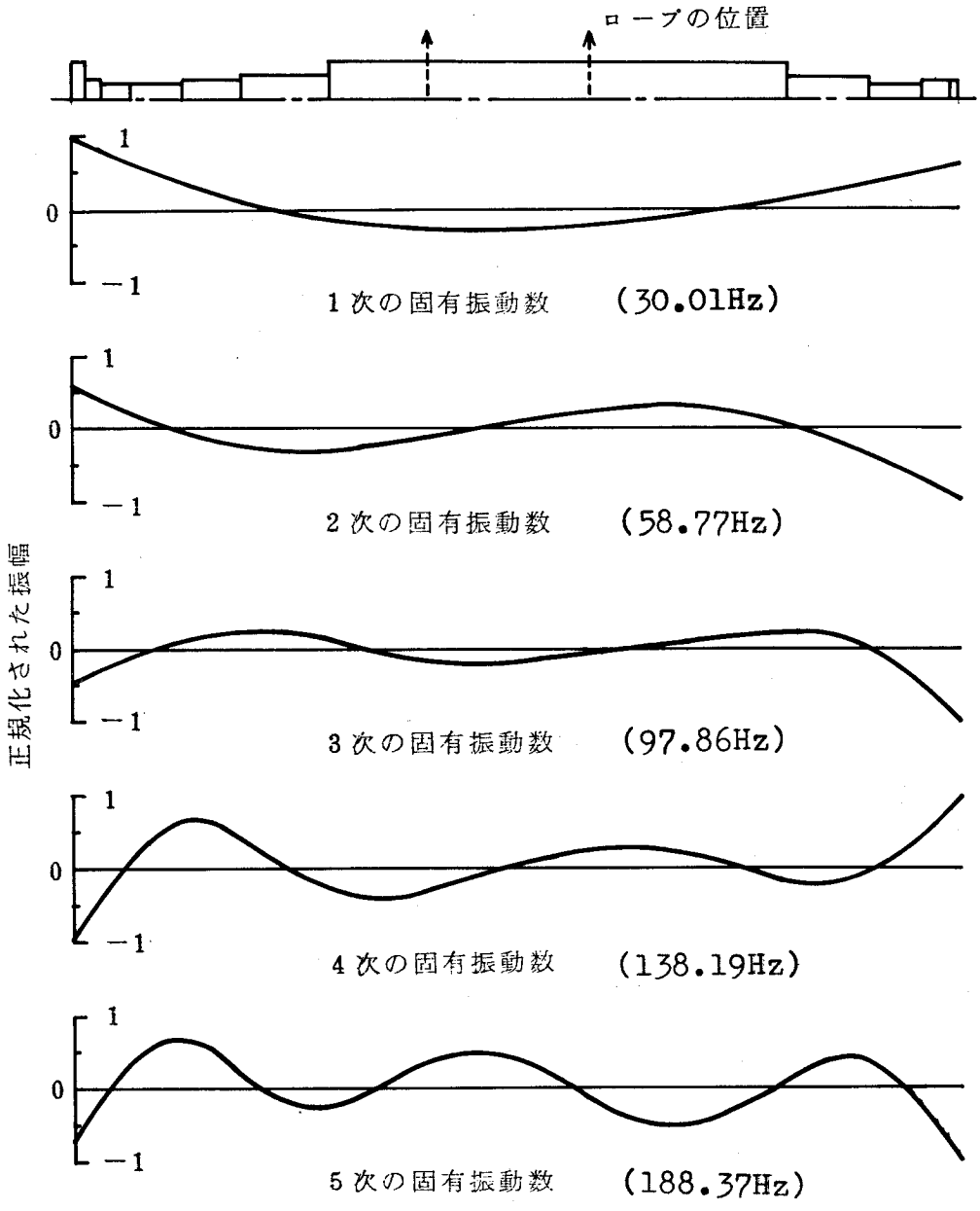


図 3.8　フリー・フリー・テスト時の固有モード（測定例）

えられる。そこで，３．２．４項の例３に示したように，断面非対称率の推定結果に悪い影響が現われないかが案じられる。以下，４通りの区間分けのうち不均一断面非対称の影響ができるだけ小さいものを探す。

区間内で不均一な断面非対称を図３．９の分布で代表させる。区間長 ℓ_q の中央に長さ ℓ'_q（$\ell'_q \leq \ell_q$）の単位断面非対称を仮定する。これはかなり極端な不均一分布例と言える。

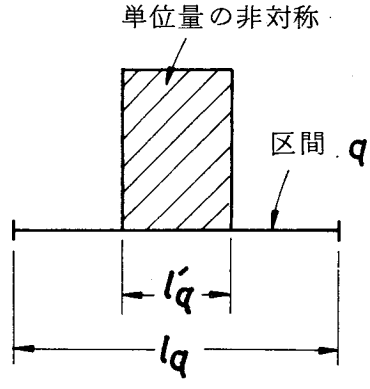


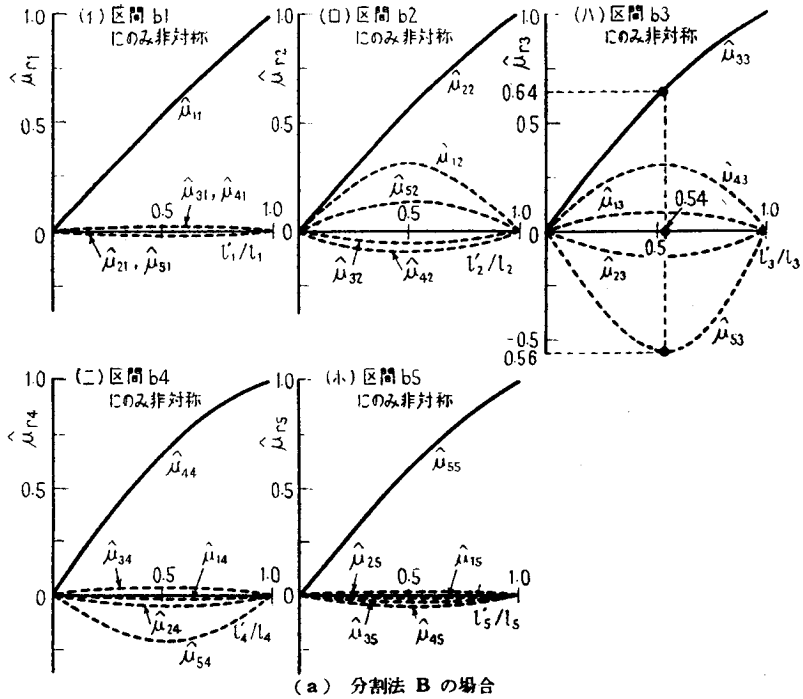
図 3.9　不均一な非対称分布

まず図３．３の分割法Ｂで，区間 b３にのみこのような断面非対称を仮定する。３．２節の推定法が適切であれば，b３以外のb1，b2，b4，b5の断面非対称率は零と求まるはずである。しかし，３．２。４項の結果から判断して，推定結果は零にならないと予想される。零でない程度は，不均一な断面非対称分布の長さ ℓ'_3 の影響を受けると考えられる。そこで，３．２．４項の数値実験と同様の方法で，b３区間の ℓ'_3/ℓ_3 をさまざまに変化させ，各区間ｑの断面非対称率 $\hat{\mu}_{q3}$ を計算した。結果を図３．10（ａ－ハ）に示す。

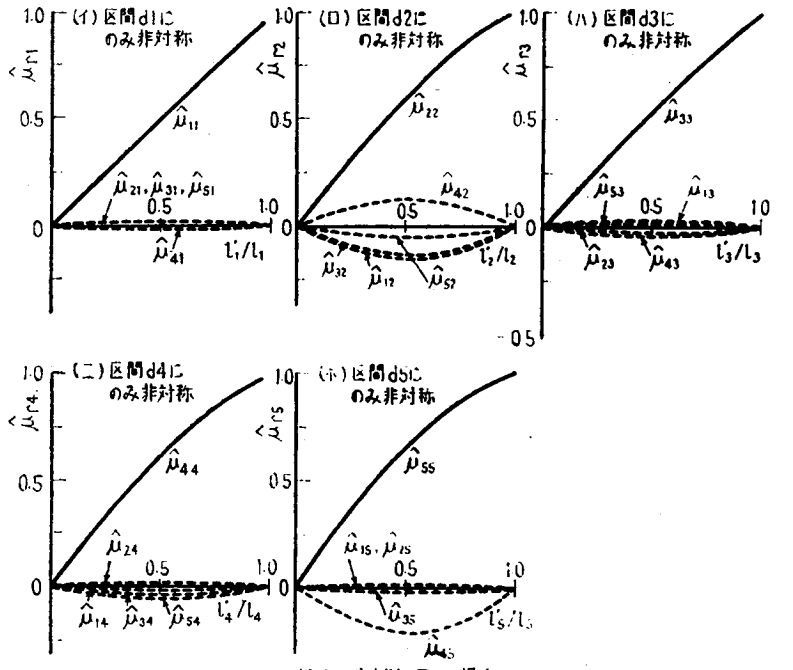
$\hat{\mu}_{33}$ は区間 b３に不均一断面非対称が存在する時の区間 b３の断面非対称率推定結果である。$\ell'_3/\ell_3 < 1$ の時，不均一断面非対称は ℓ_3 の全域へ平均されるので $\hat{\mu}_{33} < 1$ になっている。$\ell'_3/\ell_3 = 1$ の時は $\hat{\mu}_{33} = 1$ となる。$\hat{\mu}_{13}$，$\hat{\mu}_{23}$ 等は区間ｂ１，ｂ２等の断面非対称率推定結果である。零となるべきところ，零でない推定結果が得られた。これは誤差で，いずれも $\ell'_3/\ell_3 = 0.54$ で最大である。例えば $(\hat{\mu}_{53})\max = -0.56$ となり，本来の断面非対称存在区間の推定値 $\hat{\mu}_{33} = 0.64$ に対し，推定誤差は８７％にも達する。$\ell'_3/\ell_3 = 0$ または１の時，すなわち断面非対称が存在しないかまたは区間内で均一な場合のみ，正確な断面非対称率が求まる。

区間 b３以外にも不均一断面非対称を想定し，同様の方法で推定誤差を調べた。一例を図３．10（ａ－イ）（ａ－ロ）等に示す。誤差は（ａ－ハ）の例ほど大きくないがいずれも零ではない。

この分割法Ｂでは，区間 b３の不均一断面非対称が推定誤差を最も発生させやすく，誤差は区間 b５へ最も現れやすい。



(a) 分割法 B の場合



(b) 分割法 D の場合

図 3.10　不均一非対称の影響

同様の方法で分割法C～Eについても推定誤差を調べた。一例として，分割法Dの結果を図3・10(b)に示す。(a)と比較して推定誤差は小さい。すなわち分割法によって推定誤差が大きくも小さくもなることがわかる。式（３．５）で明らかなように，断面非対称率推定のための影響係数マトリックスは固有モードと深い関係にあり，分割の区切り目が固有モードの節，腹のいずれに当るかにより推定誤差は変化すると考えられる。

推定誤差はB～Dのうち分割法Dで最も小さかったので，実際の発電機ロータの断面非対称率はこの分割法で推定することにした。

３．４．３　断面非対称率

表３．５のロータ１の断面非対称率を求める。まず計算で５行５列の影響係数マトリックスを導びき，次に表３．５のモード非対称率から断面非対称率を求めた。結果を表３．７に示す。符号は断面ξ，ηのどの方向に剛性が高いかを意味する。

表3.7　ロータ１の断面非対称率の推定結果

区間* q	断面非対称率推定値	推定範囲**
d1	0.025	±0.015
d2	-0.065	±0.003
d3	-0.065	±0.022
d4	-0.070	±0.034
d5	0.030	±0.015

* 図3.3の分割法Dによる

** 図3.10（b）と式（3.11）から判定した

表３．７は区間内で断面非対称が均一な場合の推定値である。不均一な時は推定誤差が現われる。最悪の場合の推定値の範囲$\bar{\mu}_q$は次式で与えられる。

$$\bar{\mu}_q = \sum_{S=1}^{5} \left| \hat{\mu}_s \left(\hat{\mu}_{qs} \right)_{max} / \left(\hat{\mu}_{ss} \right)_{\ell'/\ell=\nu} \right| \quad (3.11)$$

ここで$(\hat{\mu}_{qs})_{max}$は図３．１０(b)の最大値，$\hat{\mu}_s$は表３．７の推定値，νは$\hat{\mu}_{qs}$が最大，すなわち$(\hat{\mu}_{qs})_{max}$になる時のℓ'/ℓの値である。式（３．１１）を計算して表３．７に併記する。実際の発電機ロータでは，断面非対称が区間内でゆるやかに変化すると考えられる。これに対し図３．９はかなり極端な不均一分布モデルと言える。従って表３．７の推定誤差範囲はかなり大きめの値で，真の断面非対称率は推定値にかなり近いと考えられる。

表３．７が工業上実用される２極タービン発電機ロータの断面非対称率推定結果の一例で

ある。

3.5 結　　言

断面非対称に起因するロータ振動低減の第一歩として，ロータ上の断面非対称分布推定法を提案し，工業上実用される発電機ロータにこの方法を適用して，断面非対称量を実際に推定した。その結果，次の結論を得た。

(1) ロータ上各断面の断面非対称量は，フリー・フリー・テストで2主軸方向の固有振動数を測定して推定できる。

(2) 断面非対称分布の不均一性が著るしい場合，断面非対称推定結果に誤差を生ずる。従って，断面非対称存在部分の区間分けには特別な配慮が必要である。

(3) 工業上実用されるロータの断面非対称率が実際に推定できた。

この方法で発電機ロータの断面非対称量を知り，必要とあればこれを修正することも可能になった。また多数のロータについて断面非対称発生の傾向を調べ，ロータ製作のどの工程が断面非対称を生みやすいかが推定できるようになった。その工程の作業を徹底的に改善して，断面非対称の少ないロータが製作できる。

第4章　発電機ロータの不安定振動に対する裕度

4．1　緒　　言

ロータの断面非対称が著るしいと危険速度付近で振動が不安定になることが知られている。すなわち軸受で支えられた軸系の実効非対称率（式（4．1）参照）が1よりも大きくなると系は不安定になる。一方，今日まで現実の発電機ロータで断面非対称に原因すると思われる不安定振動を経験したことはない。この結果から見て現実の発電機ロータの実効非対称率は1より小さくなっていると推測される。この章では，前章で断面非対称率を調べた発電機ロータが，安定限界に対してどの程度の余裕をもって運転されているかを調べ，機械の安全運転の信頼性を確認するとともに，今後のタービン発電機の大形化をはかる上での一資料とする〔66,67〕。

4．2　安定限界に対する裕度

ロータ系が複雑で多自由度振動系の場合，安定限界はモード解析法を用いて検討される。すなわち軸受で支えられた軸系のモード非対称率 μ_j とモード減衰比で定まるモード実効非対称率 k_j が，

$$k_j = \mu_j / 2\zeta_j \geq 1 \qquad (4.1)$$

になると系は不安定になる（例えば〔23〕）。断面非対称の存在個所とロータ系に減衰をもたらす軸受の位置とが，固有モードの節・腹のいずれに当るかによって，次数ごとの μ_j，ζ_j が著るしく変ることもあり，ロータは常に不安定でなく，特定の危険速度でのみ不安定になると考えられる。そこで各次数の危険速度ごとに安定性を判別する必要がある。

以下前章の検討をもとに，ロータ1の実効非対称率を求め，安定性に対する余裕を調べる。

4．2．1　軸受で支持した場合のモード非対称率

表3．5は発電機ロータ単体をフリー・フリーの状態にした時のモード非対称率である。この発電機ロータを運転する際は，図2．2に示すように励磁機あるいはスリップリングのロータと直結して3個の油膜軸受でこれを支える。この状態の固有モードはフリー・フリー状態のそれとは異っている。ロータを軸受で支えた時の固有モードの計算例を図5．4に示すが，図3．8のフリー・フリー・テスト時の測定モードと比べ，その差がよく理解できる。

従って実機運転中のモード非対称率は表３．５のそれでなく，断面ごとの断面非対称量，すなわち表３．７から改めて求めなおさねばならない。

まず軸受で支持した発電機ロータのL，L′部分（図３．３参照）の剛性を表３．７に従って変化させ，両主軸方向の危険速度を計算した。この２種類の危険速度を式（３．８）に代入して，ロータを軸受で支えた時のモード非対称率を導いた。このロータ系では，定格回転数以下に危険速度が３個あるので，３次までのモード非対称率を求めた。平均の危険速度（$\sqrt{(\omega_{\xi j}^2+\omega_{\eta j}^2)/2}$）とモード非対称率とを表４．１に示す。表３．５のフリー・フリー状態とは異った値になっている。

表 4.1　ロータ１のモード定数

次数 j	平均危険速度 N_j	モード非対称率 μ_j	モード減衰比 ζ_j	実効非対称率 κ_j
1	706 rpm	0.011	0.016	0.34
2	2020	0.0017	0.019	0.045
3	2350	0.0058	0.032	0.091

４．２．２　モード減衰比

タービン発電機では通常スリーブ軸受（150°部分軸受）とパド軸受が用いられる。軸受の動特性はロータの振動に大きな影響を及ぼす。すなわち水平・垂直方向の油膜ばね定数 K_{yy}，K_{xx}，と減衰定数 C_{yy}, C_{xx} に加え，両方向の連成効果 K_{xy}, K_{yx}, C_{xy}, C_{yx} が重要である。Hagg ら〔11〕は部分軸受の動特性を実験的に求めた。その後，Orcutt〔26〕，Szeri〔28〕，菅波ら〔57〕は解析を主体に部分軸受の動特性を研究した。またLund〔２０〕，Orcutt〔30〕，飯田〔45〕はパド軸受の動特性を明らかにした。

これらの動特性を軸振動計算プログラム〔56〕にインプットすれば，ロータ系のモード減衰比が計算できるはずである。しかし著者の経験では，減衰の影響が最も顕著に現われる危険速度近傍で，不つり合に対する影響係数すなわち既知の不つり合に対する振動応答を調べてみると，振幅，位相ともに計算と実測とが一致するには至っていない。この意味で，現状では理論的に推定した軸受動特性が，系の振動挙動を説明すべく，十分に掌握しつくされて

いないと考えられる。

そこで本章では実機運転中の振動データからモード減衰比を推定することにした。図４．１に発電機ロータが危険速度を通過する時の振動ベクトル軌跡の測定例を示す。これがモー

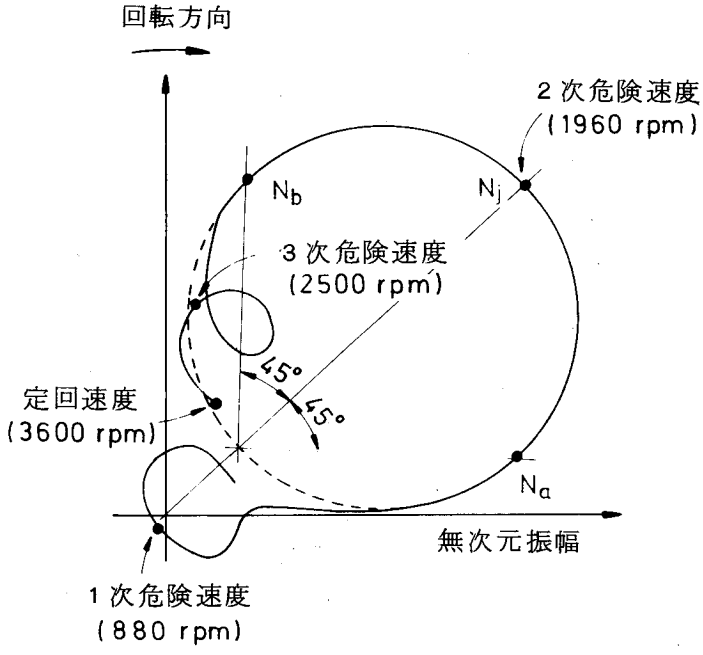


図 4.1　モード円の実例

ド円である。回転数を Na から危険速度 Nj に近ずけてゆくと振幅は増大し，位相は回転方向に対し遅れてゆく。危険速度で振幅は最大で，これを越えると再び小さくなり，結局振動ベクトルは円を描く。モード円上で，振動位相が危険速度 Nj での位相と±４５°ずれる回転数 N_a，N_b を読みとる。モード減衰比 ζjは，

$$\zeta j = |N_a - N_b| / 2Nj \qquad (4.2)$$

で求められる。種々の発電機ロータを運転した際のモード円を約３００例集め，式(４．２)でモード減衰比を求めた。一例として図４．２に，特定ロータの，同一危険速度，同一振動測定個所におけるモード減衰比のヒストグラムを示す。軸受油温，ロータ温度等の運転条件が必ずしも一定でなかったにもかかわらず，変動係数は 0.17 で測定値のばらつきは比較的少ない。他の測定結果も同程度のばらつきであった。従ってモード円を利用するこの方法でモード減衰比が正しく掌握できると考えられる。

ロータ１の運転時減衰比をモード円から測定し，その平均値を表４．１に示す。

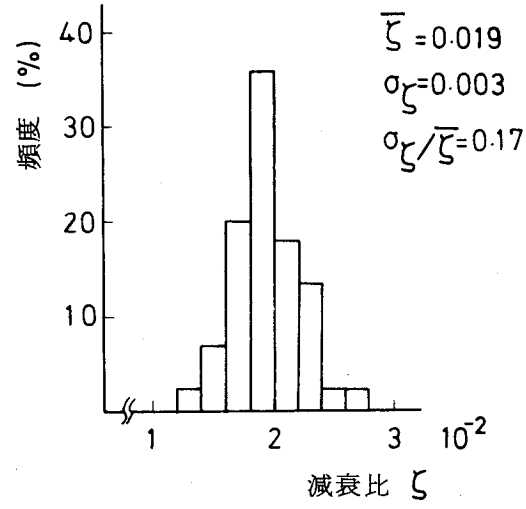


図 4.2　モード減衰比測定値のばらつき

4．2．3　実効非対称率

ロータ1の実効非対称率を式（4．1）で計算し，表4．1に併記する。最大値は 0.34 で，式（4．1）の安定限界（k＝1）に対し，十分に余裕のあることがわかる。

4．3　結　　言

断面非対称ロータ特有の不安定振動の発生限界に対し，実際の発電機ロータがどの程度の余裕をもって運転されているかを調べた。

その結果，

(1)　測定した発電機ロータでは最大の実効非対称率 k が 0.34 で，安定限界（k＝1）に対し，十分に余裕があり安全である，

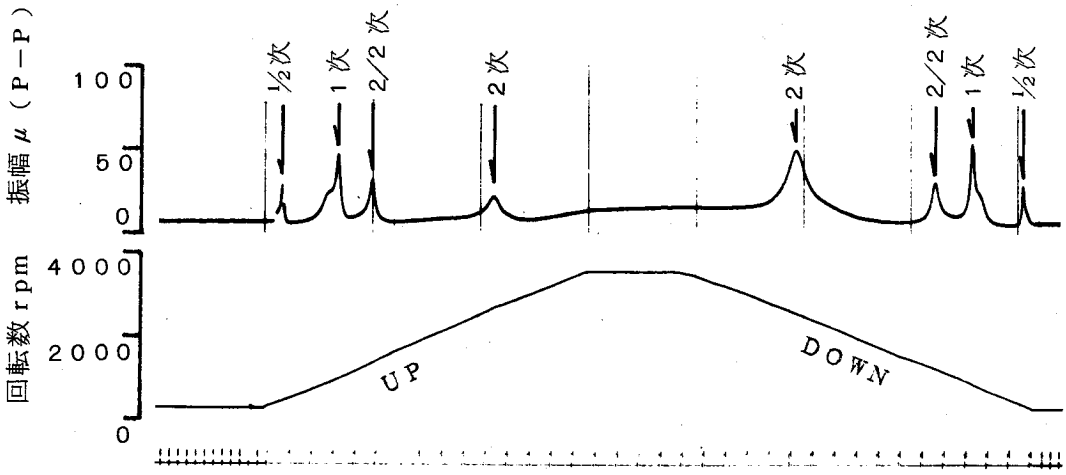
ことが確認できた。

3章で例示した断面非対称率（$\hat{\mu}$），この章の減衰比（ζ）および実効非対称率（k）は測定した発電機ロータに個有の値であるが，設計法，工作法が表3．6程度のばらつきで，安定しているので，他の2極タービン発電機ロータのそれもこの程度と推定される。

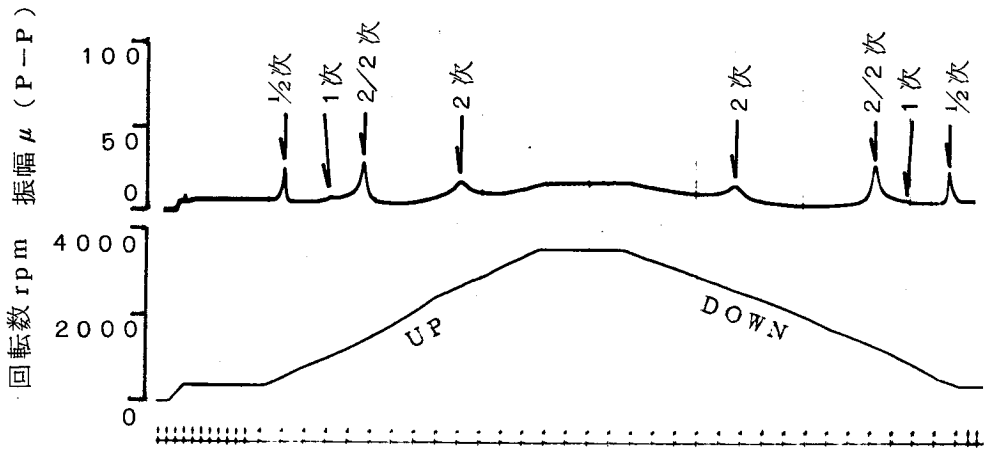
第5章　2倍調波振動の振幅

5．1　緒　　言

実際のタービン発電機の運転時に，2次的危険速度の共振現象が時として観察される。一例を図5．1(a)(b)に示す。図の下段は回転数の変化である。約500rpmの回転数から200rpm/min の割合で回転数を上昇させ，定格回転数（3600rpm）に至る。約4分後に回転数を下降させて再び500rpm に戻る。図の上段はこの間の軸振動の変化である。このロータの1，2次の危険速度は1010，2680rpmである。つり合せ修正前には危険速度とそ



（a）つり合せ前



（b）つり合せ後

図 5.1　2次的危険速度の共振例

の半分の回転数で，すなわち２次的危険速度５０５，１３４０rpmに著るしい振動ピークが現われている。２次的危険速度では，ロータは回転数の２倍に等しい周波数で振動し，これがいわゆる２倍調波振動である。図５．２(b)のつり合せ修正後，危険速度の振動ピークはほとんど目につかなくなるのに対し，２倍調波振動は前のままで変化しない。この例では２倍調波振動の振幅自体小さく問題はないが，バランス技術の発達した今日，発電機ロータの振動に対する品質が２倍調波振動に支配されることも起ってくる。回転機械の運転時信頼性向上のためにも，この２倍調波振動の性質を適確に掌握し，またその振幅計算法を確立しておく必要がある。

従来，２倍調波振動の振幅はTaylor〔4〕，Kellenberger〔8，10，12〕，Dimentberg〔14〕，Ariaratnam〔21〕，Bishopら〔22〕，Tondl〔23〕によって研究されてきた。Taylorは非対称Jeffcottモデルを研究対象としたが，他の人々は一様断面非対称軸で，２つの剛性主軸方向の固有モード（φ_ξ，φ_η）が互いに等しい軸系を対象とした。固有モードが等しいためには，２主軸方向の曲げ剛性比$(EI)_\xi/(EI)_\eta$が全軸長にわたって一定であり，また軸端の境界条件が自由，単純，ローラ支持のいずれかでなければならない（例えば〔22〕）。そこで厳密に理論の適用できる軸系はかなり限られてくる。このような欠点があるとは言え，これらの研究で２倍調波振動の定性的性質はかなり明らかになった。

一方，工業上実用される軸系では軸径が複雑に変化し，断面非対称は全軸長にわたって不均一に分布する。また両主軸方向の固有モードが等しいとの保証もない。このような事情のもとに，井上ら〔58〕，神吉〔59〕はそれぞれ伝達マトリックス法を用いて，複雑な形状の軸系の２倍調波振動振幅を計算した。一方的に電算機を利用したこの解析で振幅は計算できるが，例えば２主軸方向の固有モードの差が２倍調波振動にどのように影響するか，などの現象理解が不十分になる恐れがある。

以上の状況のもとに，複雑な軸形状を前提に２倍調波振動解析式を導びき，次にモード解析法を適用してこの振動の性質を調べた。これらの結果と数値計算例とをあわせ，以下に述べる〔46，70〕。

５．２　２倍調波振動振幅の計算

２倍調波振動は重力によってひき起される。そこで式（２．１０）の運動方程式で，右辺の重力項$\boldsymbol{W}e^{i\omega t}$のみを考慮する。

5．2．1　運動方程式の特解

式（2．10）の特解は次の形に置くことができる。

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \boldsymbol{P}e^{i\omega t}+\boldsymbol{Q}e^{-i\omega t} \\ \text{または}\ \Xi^{*} &= \boldsymbol{P}^{*}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{Q}^{*}e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} \quad \text{----------（5．1）}$$

$\boldsymbol{P}$は軸回転数の2倍の周波数のふれまわり振動振幅を，$\boldsymbol{Q}$は軸の静的な曲りを表わしている。式（5．1）を（2．10）に代入し，$e^{i\omega t}$と$e^{-i\omega t}$の項をまとめて次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{K}+2i\omega\boldsymbol{C}-4\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{P}+\triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^{*}=0 \\ \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^{*}=\boldsymbol{W} \end{aligned}\right\} \quad \text{----------（5．2）}$$

本論文の関心は2倍調波振動にある。そこで式（5．2）の$\boldsymbol{Q}^{*}$を消去して，$\boldsymbol{P}$のみが含まれる式に変形し，次式を得る。

$$\{\boldsymbol{K}-\triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K}+2i\omega\boldsymbol{C}-4\omega^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{P}=-\triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{W} \quad \text{----------（5．3）}$$

これは2N元の連立1次方程式で，これをωの関数として電算機で解けば2倍調波振動の挙動が具体的に計算できる。

以下，式（5．3）の物理的意味を考察する。新しい平均剛性マトリックスを

$$\boldsymbol{K}_o=\boldsymbol{K}-\triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K} \quad \text{----------（5．4）}$$

で定義すると，式（5．3）は付録5．1の過程を経て次の形にまとめられる。

$$\left.\begin{aligned} \{\boldsymbol{K}_o+2i\omega\boldsymbol{C}-4\omega^2\boldsymbol{M}\}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F}_e \\ \boldsymbol{F}_e=\boldsymbol{K}_o(\boldsymbol{K}_\xi^{-1}-\boldsymbol{K}_\eta^{-1})\boldsymbol{W}/2 \end{aligned}\right\} \quad \text{----------（5．5）}$$

ξ，η軸がそれぞれ鉛直方向を向いた時の自重による静たわみδ_ξ，δ_ηが，

$$\delta_\xi=\boldsymbol{K}_\xi^{-1}\boldsymbol{W},\quad \delta_\eta=\boldsymbol{K}_\eta^{-1}\boldsymbol{W} \quad \text{----------（5．6）}$$

であることを考えると，式（5．2）の等価外力$\boldsymbol{F}_e$に静たわみの差δ_cの関数になる。すなわち，

$$\boldsymbol{F}_e=\boldsymbol{K}_o\delta_c/2\ ,\quad \boldsymbol{\delta}_c=\boldsymbol{\delta}_\xi-\boldsymbol{\delta}_\eta \quad \text{----------（5．7）}$$

ここで，剛性$\boldsymbol{K}_o$の断面対称軸系を仮想すると，式（5．5）はこの軸にたわみ差δ_cの半分を生ぜしめるような力$\boldsymbol{F}_e$がかかった時の応答計算式になっている。すなわち断面非対称軸系の2倍調波振動の問題が，等価な断面対称軸系の強制振動の問題に置きかわっている。以上により，2倍調波振動振幅は軸の自重による静たわみ差δ_cに比例することがわかる。

5．2．2　モード解析の適用

式（5．5）にモード解析法を適用して，2倍調波振動の一般的性質を調べる。ξ，η方向および質量$\boldsymbol{M}$，剛性 $\boldsymbol{K}_o$で構成される仮想軸系に関して，3組の固有角振動数マトリックス$\boldsymbol{\omega}^2$，等価質量マトリックス$\boldsymbol{m}$，固有モードマトリックス$\boldsymbol{\Phi}$と1組の減衰比マトリックス$\boldsymbol{\zeta}$が定義できる。すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{\Phi}_\xi^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}_\xi=\boldsymbol{m}_\xi\ , & \boldsymbol{\Phi}_\xi^T\boldsymbol{K}_\xi\boldsymbol{\Phi}_\xi=\boldsymbol{m}_\xi\boldsymbol{\omega}_\xi^2\\ \boldsymbol{\Phi}_\eta^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}_\eta=\boldsymbol{m}_\eta\ , & \boldsymbol{\Phi}_\eta^T\boldsymbol{K}_\eta\boldsymbol{\Phi}_\eta=\boldsymbol{m}_\eta\boldsymbol{\omega}_\eta^2\\ \boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}_o=\boldsymbol{m}_o\ , & \boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{K}_o\boldsymbol{\Phi}_o=\boldsymbol{m}_o\boldsymbol{\omega}_o^2\\ \boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}_o=2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{m}_o\omega_o & \end{array}\right\}\quad\text{----------}(5.8)$$

$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\zeta}$はいずれも対角マトリックスである。$\boldsymbol{\Phi}$はj次固有振動に対する$(2N)^2$個の要素φ_{nj}で構成される。

式（5．5），（5．7）の$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\delta}_c$を$\boldsymbol{\Phi}_o$で展開する。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Phi}_o\boldsymbol{p}\ ,\quad \boldsymbol{\delta}_c=\boldsymbol{\Phi}_o\boldsymbol{d}_c\\ \text{ただし}\quad \boldsymbol{p}=\{\,p_1\quad p_2\ \text{------}\ p_{2N}\,\}^T\\ \qquad\quad \boldsymbol{d}_c=\{\,d_{c1}\,,\,d_{c2}\ \text{-------}\ d_{c2N}\,\}^T\end{array}\right\}\quad\text{----------}(5.9)$$

式（5．5）に式（5．9）を代入し，式（5．8）の性質を用いて整理すると，$\boldsymbol{p}$のj次成分について次式を得る。

$$p_j=\frac{d_{cj}}{2}\ \frac{1}{1+2i\zeta_j\,(2\omega/\omega_{oj})-(2\omega/\omega_{oj})^2}\quad\text{----------}(5.10)$$

2倍調波振動振幅はd_{cj}によって決まる。これは静たわみ差 δ_cを固有モード $\boldsymbol{\Phi}_o$で展開した時のj次の係数である。以下 $\boldsymbol{d}_c$ の性質を調べる。

まず，$\boldsymbol{\delta}_\xi$，$\boldsymbol{\delta}_\eta$ をそれぞれ$\boldsymbol{\Phi}_\xi$，$\boldsymbol{\Phi}_\eta$で展開する。すなわち，

$$\boldsymbol{\delta}_\xi=\boldsymbol{\Phi}_\xi\boldsymbol{d}_\xi\ ,\quad \boldsymbol{\delta}_\eta=\boldsymbol{\Phi}_\eta\boldsymbol{d}_\eta\quad\text{----------}(5.11)$$

次に式（5．7）（5．9）より，

$$\boldsymbol{\Phi}_o\boldsymbol{d}_c=\boldsymbol{\Phi}_\xi\boldsymbol{d}_\xi-\boldsymbol{\Phi}_\eta\boldsymbol{d}_\eta\quad\text{----------}(5.12)$$

を得る。一方，式（5．6）（5．11）と（5．8）とから$\boldsymbol{d}_\xi$，$\boldsymbol{d}_\eta$が陽に求まり，これを式（5．12）に代入して次式を得る。

$$\boldsymbol{d}_c=\boldsymbol{\Phi}_o^{-1}\,\{\boldsymbol{\Phi}_\xi\,(\boldsymbol{m}_\xi\boldsymbol{\omega}_\xi^2)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\xi^T-\boldsymbol{\Phi}_\eta\,(\boldsymbol{m}_\eta\boldsymbol{\omega}_\eta^2)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_\eta^T\}\boldsymbol{W}\quad\text{----------}(5.13)$$

断面非対称がそう著るしくない時，Φ_ξ，Φ_η は Φ_o とわずかに異なるに過ぎないと考えられる。ここで Φ_o は $\boldsymbol{K}_\xi$，$\boldsymbol{K}_\eta$ の平均の剛性 $\boldsymbol{K}_o$ を持つ仮想の軸系の固有モードである。そこで次の近似式を仮定する。

（仮定9）
$$\left.\begin{aligned}\Phi_\xi &\doteqdot \Phi_o + \Delta \\ \Phi_\eta &\doteqdot \Phi_o - \Delta\end{aligned}\right\} \qquad \text{(5.14)}$$

Δは固有モード差マトリックスで，その要素は Φ_ξ，Φ_η，Φ_o の要素に比べ微少である。式（５．１４）を（５．１３）に代入し，Δの２次以上の微少量を無視して次式を得る。

$$\boldsymbol{d}_c = \{(\boldsymbol{m}_\xi \boldsymbol{\omega}_\xi^2)^{-1} - (\boldsymbol{m}_\eta \boldsymbol{\omega}_\eta^2)^{-1}\}\,\Phi_o^T \boldsymbol{W} + 2(\boldsymbol{m}_o \boldsymbol{\omega}_o^2)^{-1}\Delta^T \boldsymbol{W}$$
$$+ 2\Phi_o^{-1}\Delta(\boldsymbol{m}_o \boldsymbol{\omega}_o^2)^{-1}\Phi_o^T \boldsymbol{W} \qquad \text{(5.15)}$$

この式の右辺第１，２項はいずれも対角化されており，容易に d_{cj} の成分に分解できる。断面非対称が少ない場合，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{\omega}$の成分において，$m_{\xi j} - m_{\eta j}$ と $\omega_{\xi j} - \omega_{\eta j}$ は微少量になる。そこでこれらの２次以上の微少量を省略して $\boldsymbol{d}_c$ の j 次成分を計算する。ここで，

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_j &= \frac{1}{L}\left(\frac{\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2}{2\omega_o^2}\right)_j \left(\frac{1}{m_o \omega_o^2}\right)_j \sum_{n=1}^{2N} \varphi_{onj}\, w_n \\
\rho_j &= \frac{1}{L}\left(\frac{m_\xi - m_\eta}{2m_o}\right)_j \left(\frac{1}{m_o \omega_o^2}\right)_j \sum_{n=1}^{2N} \varphi_{onj}\, w_n \\
\lambda_j &= \frac{1}{L}\left(\frac{1}{m_o \omega_o^2}\right)_j \sum_{n=1}^{2N} (\varphi_{\xi n} - \varphi_{\eta n})_j\, w_n \\
\gamma_j &= \frac{1}{L}\left\{\Phi_o^{-1}\Delta(\boldsymbol{m}_o \omega_o^2)^{-1}\Phi_o^T \boldsymbol{W}\right\}_j
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(5.16)}$$

なる断面非対称のモード定数を定義すると，

$$\Lambda_j = d_{cj}/2 = -\sigma_j - \rho_j + \lambda_j + \gamma_j \qquad \text{(5.17)}$$

となる。σ_j，ρ_j はξ，η軸方向の固有振動数差と等価質量差を表わす係数で，式（５．１５）右辺第１項にあたる。λ_j は固有モード差を表わし，第２項にあたる。第３項は対角化できない残余項で，その j 次成分をＬで除して γ_j とした。

式（５．１７）を（５．１０）（５．９）へ順次代入すると２倍調波振動振幅 P_n は次式で与えられる。

$$P_n = \sum_j \frac{L\,\varphi_{onj}\,\Lambda_j}{1+2i\zeta_j\,(2\omega/\omega_{oj})-(2\omega/\omega_{oj})^2} \qquad \text{----------} (5.18)$$

上式より，次のことがわかる。

減衰の小さい系では，ロータの回転数が危険速度の半分（$\omega=\omega_{oj}/2$）になった時，j次の2倍調波振動が最大になる。これはξ，η軸方向の固有振動数差，等価質量差，固有モード差に比例し，固有振動数と等価質量に逆比例する。2次的危険速度での共振振幅は，その次数のモード減衰比に左右される。

Taylorは単純な非対称Jeffcottモデルを対象としたので固有モードには特に意を用いず，またKellenbergerやBishopなど従来の研究者は$\varphi_\xi \equiv \varphi_\eta$を満す軸系をとりあげたので，彼等の解には固有振動数差の項のみが含まれ，等価質量差，固有モード差に対応する項は現われない。式（5．18）の固有振動数差に原因する2倍調波振動は，表現は異なるものの，従来の研究の解と一致する。

5．3　単純な軸系の2倍調波振動

前章で，2倍調波振動は固有振動数差係数σ_j，等価質量差係数ρ_j，固有モード差係数λ_jなどの支配を受けることを示した。以下単純な軸系と，複雑な形状の発電機ロータの例について，いずれの係数の影響が大きいかを調べる。

まずσ_jとλ_jの影響がそれぞれ別個に現われる単純な軸系をとり上げる。本節では簡単のためロータ中心軸の回転（傾斜）運動（θ_ξ，θ_η）を省略して，並進（上下）運動（ξ，η）のみを考える。図5．2に両端を単純支持した2つの軸系を示す。

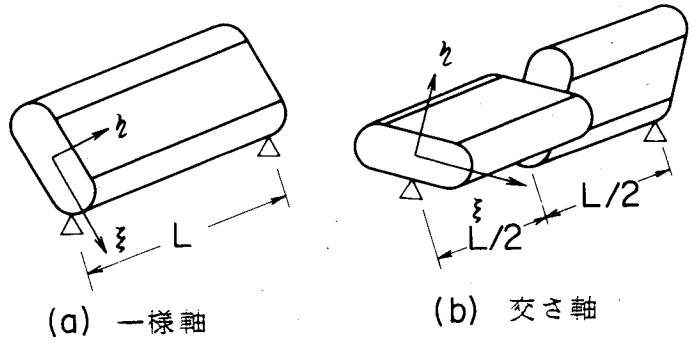


図 5.2　単純な断面非対称軸の例

(a)の一様軸ではξ，η方向の曲げ剛性が$(EI)_\xi=(EI)_1>(EI)_\eta=(EI)_2$と全軸上で一様に異っている。これはKellenbergerなど従来の研究者がとり上げた一様断面非対称軸系である。(b)の交さ（叉）軸では軸の中央から左側で$(EI)_\xi=(EI)_1>(EI)_\eta=(EI)_2$であるが，右側で$(EI)_\xi=(EI)_2<(EI)_\eta=(EI)_1$である。これは従来のどの研究者も検討しなかった軸系である。軸の単位長さ当りの重量w（＝W/L）は，両軸系とも全軸上いたるところで等しい

この２つの軸系の平均の曲げ剛性は全軸長にわたって等しく，平均の固有モードは，

$$\varphi_{oj}(z)=\sin(j\pi z/L) \qquad (5.19)$$

で与えられる。

５．３．１　一様軸の場合

簡単な力学的考察から$\Phi_\xi=\Phi_\eta\equiv\Phi_o$とわかる。従って$\Delta=0$で式（５．１６）より$\lambda_j\equiv0$，$\gamma_j\equiv0$を得る。$\xi$，$\eta$方向の等価質量が$m_\xi=\int_0^L w\varphi_\xi^2(z)dz$，$m_\eta=\int_0^L w\varphi_\eta^2(z)dz$で計算されることを思い起すと，$\varphi_\xi=\varphi_\eta$であるから$\boldsymbol{m}_\xi=\boldsymbol{m}_\eta$，従って$\rho_j\equiv0$とわかる。さらに一様軸では，

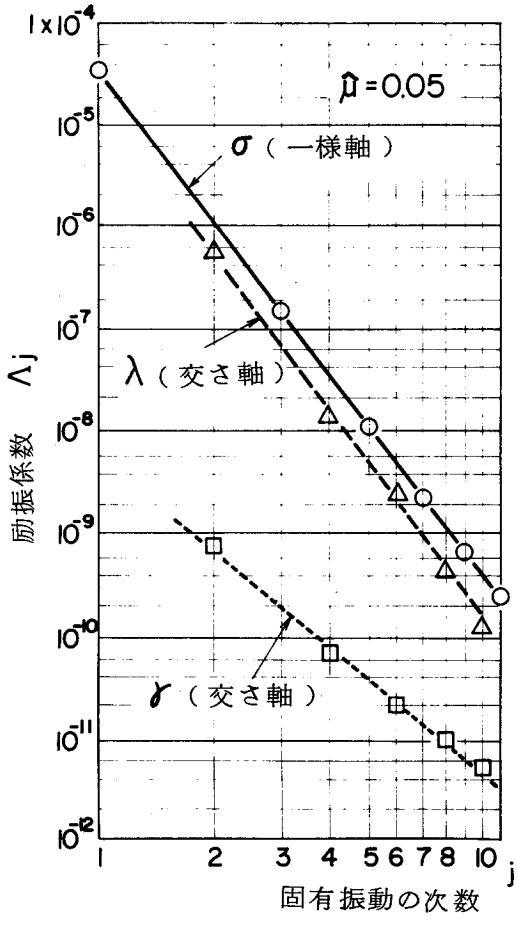
$$\frac{\omega_\xi^2-\omega_\eta^2}{2\omega_o^2}=\frac{(EI)_\xi-(EI)_\eta}{(EI)_\xi+(EI)_\eta}=\hat{\mu}$$

になることが知られている（例えば〔22〕）。以上の性質を式（５．１６）に代入すると

$$\sigma_j=2\{1+(-1)^{j+1}\}\frac{L^2W}{(EI)_o}\frac{\hat{\mu}}{\pi^5 j^5} \qquad (5.20)$$

となり，結局図５．２(a)の一様軸では，２倍調波振動は固有振動数差係数σ_jのみに依存することがわかる。この性質はKellenbergerらの従来の研究成果からも予測できる。

一例として，平均断面２次モーメントが４９０.９㎜^{4}（直径１０ϕ㎜に相当），L＝１０００㎜の鋼製一様軸のσ_jを計算し，図５．３に示す。ここでは$\hat{\mu}=0.05$とした。縦軸はσ_jの大きさ，横軸は固有振動の次数である。σ_jは奇数次のみ存在し，次数jの５乗に逆比例する様子がよくわかる。



最大振幅：$L\Lambda_j/2\zeta_j$

図 5.3　単純な軸系の断面非対称モード定数

5．3．2　交さ（叉）軸の場合

簡単な力学的考察から，$\omega_\xi \equiv \omega_\eta$ で $\sigma_j \equiv 0$ とわかる。また，

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\xi(z) &= (-1)^{j+1}\varphi_{\eta j}(L-z)\\ \varphi_\eta(z) &= (-1)^{j+1}\varphi_{\xi j}(L-z)\end{aligned}\right\} \quad \text{----------} (5.21)$$

の性質がある。これと軸の単位長さ当りの重量が一定なことを考えあわせると，$m_\xi \equiv m_\eta$，従って $\rho_j \equiv 0$ とわかる。一方，式（5．14）（5．19）（5．21）から $\triangle_j(z) = (-1)^j \triangle_j(L-z)$ が得られる。そこで式（5．16）の λ_j で，

$$\sum_{n}(\varphi_{\xi n}-\varphi_{\eta n})_j w_n = 2\int_0^L w\triangle_j(z)dz$$
$$= w\{1+(-1)^j\}\int_0^L \triangle j(z)dz$$

となり，奇数次の λ_j は消滅する。同様に奇数次の γ_j も消滅することが証明できるが，以下に例示するように γ_j はいつも小さく２倍調波振動にほとんど影響せず，また証明は複雑でじょ（冗）長に過ぎるので，ここではこれを省略する。

交さ軸の λ_j，γ_j を解析的に求めるのは骨がおれる。そこで前項の具体例について電算機で計算した。結果を図５．３に示す。この計算では軸を２０個の軸要素に分割した。交さ軸の λ_j は一様軸の σ_j よりわずかに小さく，σ_j と同様に固有振動の次数 j の５乗に逆比例している。すなわち２倍調波振動は低次で問題となり，高次では急速に小さくなる。γ_j は j の３乗に逆比例するが，σ_j，λ_j に比べけたが違って小さく無視できる。

以上をまとめると，図５．２の交さ軸では偶数次の２倍調波振動のみが現われ，その大きさは主に固有モード差係数 λ_j に支配されることがわかる。以上は，固有モード差を考慮しないKellenbergerらの従来の研究では説明できない現象である。

５．４　発電機ロータでの計算例

５．４．１　モード定数例

工業上実用される軸系の一例として，発電機と励磁機が直結されたロータをとり上げる。軸系の構成を図５．４(a)に示す。この例では蒸気タービンの発電機側軸受１個を考慮している。この４軸受軸系の全長は１０メートル余，総重量は４０トン弱，定格回転数は 3600 rpm である。定格回転数の２倍までの周波数範囲の危険速度と，その固有モードの計算結果を図５．４(b)に示す。Ⅰ，Ⅲ，Ⅳは発電機ロータスパン内の１，２，３次モードに，Ⅱは励磁機ロータスパン内の１次モードに相当する。Ⅴ，Ⅵは軸端が部分的に振れるモードである。

２．１節で述べたように，発電機ロータは構造上図５．４(a)のＡ～Ｅの部分に断面非対称が残留しやすく，またその量もＡ～Ｅの部分で一様とは限らない。また図５．４(b)のように固有モードがさまざまな形になる場合，Ａ～Ｅ間のどの個所の断面非対称も全く同等にすべてのモードの２倍調波振動を励起するとも考えにくい。そこでＡ～Ｅの断面非対称をそれぞれ $\hat{\mu}=0.05$ にとって，断面非対称のモード定数を計算した。第３章に示したように，現実のロータではこの程度の断面非対称は考えられない値ではない。軸の分割数は４５である。

モード定数計算結果の一例を表５．１に示す。次に固有振動数の次数とσ_j，ρ_j，λ_j，γ_jとの関係を図５．５に示す。図の左から，Ⅰ，Ⅱ……と各次数をとった。下端のA，B等は$\hat{\mu}$＝ 0.0５の断面非対称率の存在個所を示す。●▲などぬりつぶした記号は負，○△などぬりつぶしていない記号は正の値を示す。

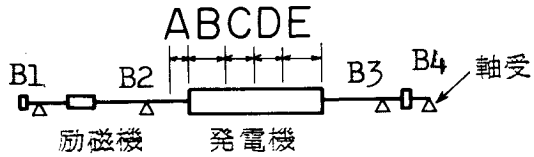
表５．１，図５．５より次の傾向が読みとれる。

(1) σ_j，ρ_jよりもλ_jに支配される２倍調波振動が大きく，この例では固有モード差係数λ_jが最も重要である。

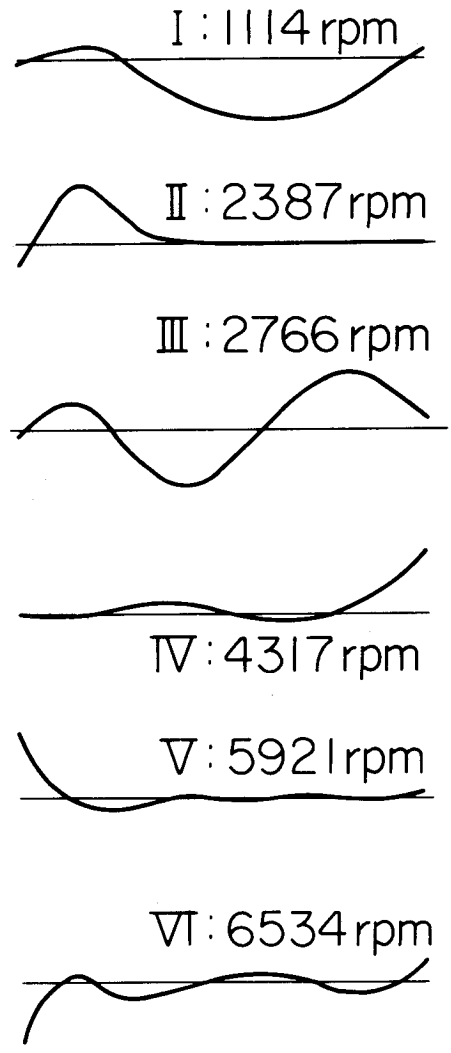
(2) γ_jは，他の断面非対称モード定数に比べけたが違って小さく，無視できる。

(3) 断面非対称がどこにあるかによって，２倍調波振動の現われ方が変化する。例えばE部分の断面非対称はⅠモードの２倍調波振動をひき起しやすいが，Ⅱモードにはあまり効かない。E部分はⅠの固有モードでよく振れる個所に含まれるが，Ⅱの固有モードではよく振れる部分から遠く離れている。この例では明りょうでないが，軸が固有モードの形に変形した時，大きな曲げモーメントの生ずる個所の断面非対称がそのモードの２倍調波振動を励起させやすい。

(4) 図５．３ほど顕著でないが，高い次数の２倍調波振動は小さい傾向があ



(a) ロータの構成



(b) 固有モード

図 5.4 発電機ロータの固有モード（計算例）

表 5.1　タービン発電機軸系のモード定数例

		次数 j	1	2	3
共通モード定数		危険速度 rpm	1114	2387	2766
		等価質量 ton	22.2	1.95	17.1
断面非対称の位置	A	σ	-1.17×10^{-7}	1.07×10^{-8}	3.07×10^{-9}
		ρ	5.34×10^{-8}	-2.66×10^{-8}	5.58×10^{-9}
		λ	3.58×10^{-8}	-7.13×10^{-8}	4.35×10^{-9}
		γ	8.09×10^{-10}	3.23×10^{-9}	1.33×10^{-9}
	C	σ	-1.01×10^{-8}	-1.52×10^{-10}	3.03×10^{-11}
		ρ	-1.21×10^{-7}	1.66×10^{-9}	1.92×10^{-10}
		λ	-2.86×10^{-8}	-2.76×10^{-8}	1.46×10^{-8}
		γ	-9.22×10^{-11}	5.28×10^{-10}	3.64×10^{-10}

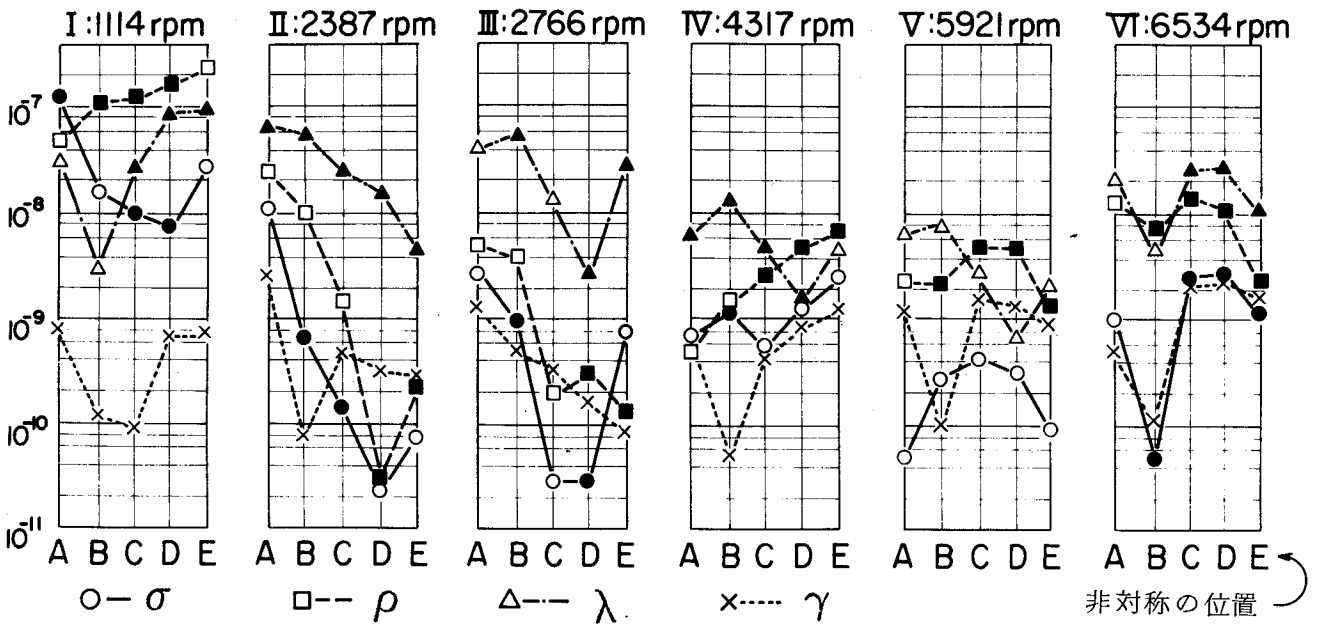


図 5.5　発電機ロータの断面非対称モード定数

る。注意すべきは低次モードの振動である。

5．4．2　2倍調波振動振幅の計算例

断面非対称のモード定数を用いて2倍調波振動振幅が計算できる。j次の2次的危険速度の共振振幅は，式（5．18）で$\omega=\omega_{oj}/2$と置き，

$$P_{nj}=L\varphi_{onj}\Lambda/2\zeta \qquad (5.22)$$

で与えられる。

一例として，図5．4(a)の発電機ロータで断面Cの断面非対称率が$\hat{\mu}=0.065$の場合について，共振時最大振幅を計算する。図5．4(a)の軸受を左からB1，B2，……と名づけ，それぞれの減衰力（$c\omega$）を

B1：0.745×10^{5} kg/cm

B2：0.208×10^{6} kg/cm

B3：0.208×10^{6} kg/cm

B4：0.560×10^{5} kg/cm

とする。モード減衰比ζ_jは，nを軸受の番号として，

$$\zeta_j=\sum_{n=1}^{4}(c\omega)_n\varphi_{onj}^2/2m_{oj}\omega_{oj}^2$$

で与えられるので，表5．1の諸データと図5．4の固有モードの値を用い，表5．2の第1列のζ_jが得られる。次にC部の$\hat{\mu}$が0.065の場合について表5．1からσ，ρ，λ，

表5.2　2次的危険速度の共振振幅

次数 j	モード減衰比 ζ	C部に $\hat{\mu}=0.065$ の断面非対称量	
		Λ	B2軸受の最大振幅
1	0.048	1.33×10^{-7}	4.0 μ
2	0.035	-3.72×10^{-8}	-1.2
3	0.066	-1.91×10^{-8}	1.2

γを読みとり，A_jを計算して表５．２の２列目に示す。主危険速度の半分の回転数で２次的共振が起る。その時の振幅をＢ２軸受（発電機の励磁機側軸受）で観測すれば，式（５．２２）より最大振幅は表５．２の第３列になる。ただしＢ２軸受の１，２，３次の固有モードをそれぞれ

$$\varphi_{o,B2,1} = 0.22$$
$$\varphi_{o,B2,2} = -0.18$$
$$\varphi_{o,B2,3} = 0.63$$

とした。１次モードの２倍調波振動が4.0 μと，２，３次の振幅の４倍弱で最も大きい。

５．５　結　　言

軸径が複雑に変化し，断面非対称が軸長に沿って不均一に分布する軸系について，重力の影響で生ずる２倍調波振動を解析した。さらに両端が単純支持された簡単な軸系と，発電機ロータとについて二三の数値計算を行なった。その結果次の事実が明らかになった。

(1)　２倍調波振動は，主に２主軸方向の固有振動数差係数 σ_j，等価質量差係数 ρ_j，固有モード差係数 λ_j の和に支配される。

(2)　固有モード差係数と等価質量差係数が固有振動数差係数よりも大きくなることがあり，固有振動数差しか考慮しない従来の研究では，常に有意の解が得られるとは限らない。

(3)　高次危険速度に対応する２倍調波振動は，次数が高くなるとともに小さくなる。注意すべきは低次モードの振動である。

(4)　断面非対称がどこに存在するかによって２倍調波振動の現われ方が変化する。断面非対称の存在個所が固有モードの腹，節のいずれに位置するかと深い関係にある。

付　録　５．１

式（５．４）を変形する。

$$\boldsymbol{K}_o = \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K}$$
$$= \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K} + \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1}\triangle\boldsymbol{K}$$
$$= (\boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K} + \triangle\boldsymbol{K})$$
$$= (\boldsymbol{K} + \triangle\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K})$$

式（２．１１）より，$\boldsymbol{K}_\xi = \boldsymbol{K} + \triangle\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{K}_\eta = \boldsymbol{K} - \triangle\boldsymbol{K}$であるから

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K}_0 &= 2\boldsymbol{K}_\eta(\boldsymbol{K}_\xi+\boldsymbol{K}_\eta)^{-1}\boldsymbol{K}_\xi \\ &= 2\boldsymbol{K}_\xi(\boldsymbol{K}_\xi+\boldsymbol{K}_\eta)^{-1}\boldsymbol{K}_\eta \end{aligned}\right\} \quad \text{----------} \ (\mathrm{A}.5.1)$$

を得る。式（２．１１）を使うと，式（５．３）の右辺で

$$\begin{aligned} \triangle\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{-1} &= (\boldsymbol{K}_\xi-\boldsymbol{K}_\eta)(\boldsymbol{K}_\xi+\boldsymbol{K}_\eta)^{-1} \\ &= \boldsymbol{K}_\xi(\boldsymbol{K}_\xi+\boldsymbol{K}_\eta)^{-1}\boldsymbol{K}_\eta\boldsymbol{K}_\eta^{-1}-\boldsymbol{K}_\eta(\boldsymbol{K}_\xi+\boldsymbol{K}_\eta)^{-1}\boldsymbol{K}_\xi\boldsymbol{K}_\xi^{-1} \quad \text{----} \ (\mathrm{A}.5.2) \end{aligned}$$

となり，ここへ式（Ａ．５．１）を代入すれば式（５．５）が導びかれる。

第6章　断面非対称ロータのバランスの収束性

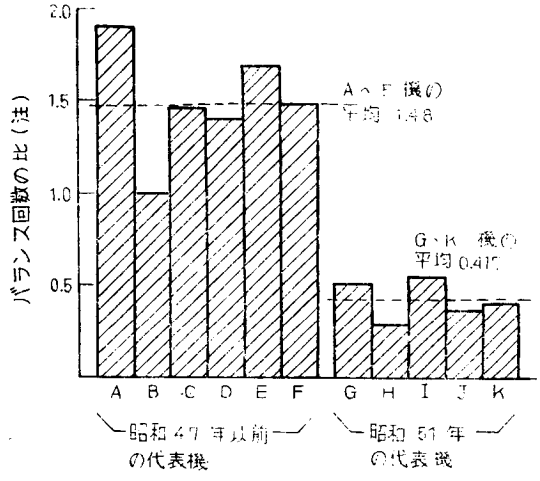
6．1　緒　　言

危険速度を越して運転されるいわゆるフレキシブルロータのモードバランス理論は，1950年代中頃Federn〔9〕らによって研究され始め，1970年代初頭，Kellenberger〔40〕，Bishopら〔41〕，三輪ら〔37〕の手で一応完成されたと言える。岩壺ら〔42〕，藤沢ら〔62〕は計測誤差がつり合せに及ぼす影響を検討した。一方Goodmann〔19〕は最少2乗バランス法を提唱し，Lund〔38〕，白木ら〔44, 50〕，藤沢ら〔55〕，Bigret〔63〕はこれを計算機バランス法へと発展させ実行に移しつつある。白木ら〔48〕はつり合せにモード円を利用する方法を提案し，危険速度での振動振幅と位相が再現性良く測定できるようになって，理論・計測・データ処理と3拍子そろった発展の故に，フレキシブルロータのつり合せは著るしく改善された。

一方，断面曲げ剛性に異方性の著るしいいわゆる断面非対称ロータでは，不つり合の位相と振動応答ベクトルとの関係が複雑なため，断面対称ロータのモードバランス法がそのまま流用できない。Parkinson〔27〕，岩壺〔39〕，神吉〔53〕はこの点を考慮して，断面非対称ロータに特有のバランス法を提案した。これらの方法の有効なことは言うまでもないが，つり合せの手続が煩雑になる欠点は避けられない。

さて現場のつり合せは大きく2つに分類できる。一つは不つり合と振動現象の関係が一義的に定まる場合で，ただ1回のバランス修正でつり合せが完了する。例えば大量生産される剛体ロータのつり合試験機上のつり合せがこれに当る。他方はフィールドバランスでよく見うけられるように，振動現象の再現性がよくない場合である。フレキシブルロータのモードバランスの大多数はこれに属している。すなわちロータの初期曲り，ロータの温度，潤滑油温度，機械の負荷状況など，運転条件が厳密に一定に保ちにくいため，振動測定データがそのまま信用できず，従って何回かのつり合せ作業で不つり合が徐々に修正されるのが現状である。図6．1は昭和47年前の代表的発電機ロータ6機と昭和51年の代表的発電機ロータ5機のつり合せ運転回数の比較である。ここ数年間でバランス技術が向上し，つり合せ運転回数が約⅓に減少しているが，やはり数回以上のつり合せが繰返されている。このようなつり合せの状況では，つり合せを繰返すごとに確実に振動を小さくするいわゆるバランスの収束性を考えることが重要である。従来のバランス理論は1回でつり合せを終了することを目的とし，何回かのつり合せ作業全体で収束性を高めようとの配慮に欠けている。

断面非対称ロータに特有な振動現象が明りょうに観測できる場合，岩壺，神吉のバランス法の有効なことは言うまでもない。しかし実際に使用されるロータの断面非対称量は3，4章で述べたとおりそれほど大きくなく，不つり合振動応答を見るかぎり，断面非対称ロータの振動の特徴が測定データのノイズに埋れることも少なくない。



(注) A～Kの全11機の平均回数を1.0とした

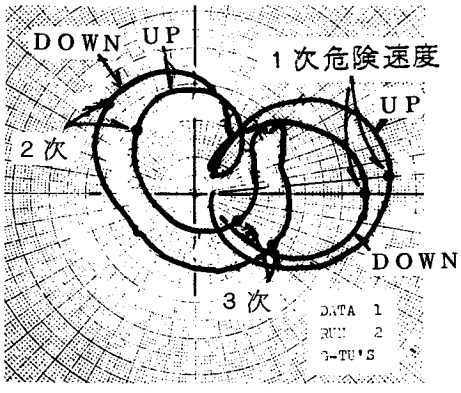
図 6.1　バランス回数の比較

例えば，図6．2はある発電機ロータの危険速度近傍のモード円である。(a)(b)は発電機ロータのタービン側軸受，(c)(d)は励磁機側軸受で測定したデータである。この例では1次危険速度（880rpm）のモード円がだ円に見える。特に(b)でだ円の特徴がはっきりとしている。だ円の短径と長径の比は後に述べるようにロータの断面非対称量と一定の関数関係にあり，不つり合等に関係なく一定である。しかし現実の図6．2の例では，運転の再現性が悪く，だ円の形がさまざまに変化して見える。このだ円の短径・長径比を調べると0.87～0.94の間でばらつき，平均は0.87である。後述の式（6・14）で実効非対称率に換算すると，k＝0.16～0.06で平均値は0.13となり，この発電機ロータは表4．1のロータに比べ対称にできている。ここではデータのばらつくことが重要で運転条件と計測系のノイズがデータ採集に悪い影響を及ぼしている状況が理解できる。

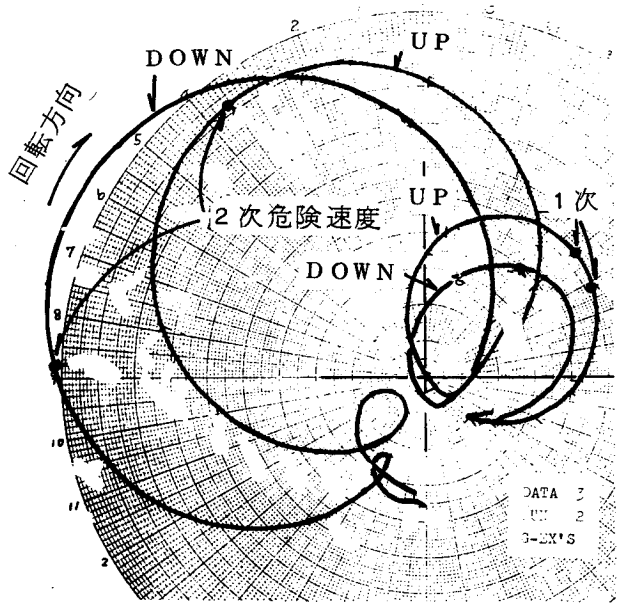
このような事情を考えると，元来考慮すべきファクタの多いフレキシブルロータのつり合せに，複雑な断面非対称ロータ特有のバランス法を導入することは煩雑で，必ずしも得策ではない。つり合せは本来技能者の作業である。すべてのロータのバランス品質を均一に保つには多数の作業者を同一レベルに教育しなければならない。これには作業自体を単純で理解しやすいように標準化する必要がある。煩雑な手続きは間違いを招き，品質の均一性を損う恐れがある。

そこで，比較的断面非対称の少ないロータには通常の断面対称ロータのバランス法を適用することとし，さらに断面非対称の影響があらわれないようにできると好都合である。

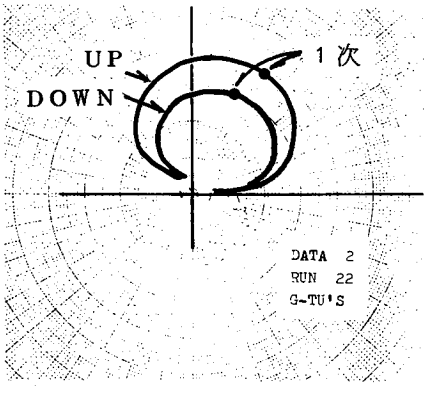
以上の観点から，断面非対称ロータに通常の断面対称ロータのバランス法を適用した場合，



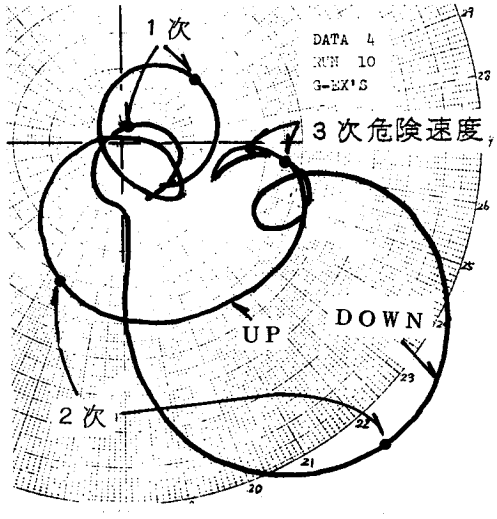
(a)　発電機のタービン側軸受



(c)　発電機の励磁機側軸受



(b)　発電機のタービン側軸受
（１次危険速度のみ）



(d)　発電機の励磁機側軸受

注１：このロータの 1, 2, 3,次の危険速度は８８０，１９７０，２４００ rpm であつた。

注２：UP，DOWNは回転上昇，下降を意味する。運転条件が変化するため、上昇，下降で異つた軌跡を描くことがある。

注３：（ａ）（ｃ）は同一運転時のデータ、他は異つた運転時のデータ。

注４：この例では、１次危険速度のモード円がだ円に見える。

図 6.2　発電機ロータのモードだ円（実測例）

(1) どんな現象が起るか

(2) 断面非対称の影響をなるべく少なくするには断面対称ロータのバランス法をどのように運用すればよいか，

について検討する〔67，69〕。

6．2 つり合せの数式表示

不つり合ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}$と，振動ベクトル$\boldsymbol{V}$の間に，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (6.1)$$

の関係がある。ここで$\boldsymbol{A}$はつり合せの影響マトリックスである。つり合せの要点は$\boldsymbol{A}$を正しく知ることである。通常はロータに試しおもりをつけた時の振動測定データからこれを逆算する。このようにして求めた影響係数マトリックス$\boldsymbol{A}_h$には当然誤差が含まれる。振動測定値$\boldsymbol{V}$と$\boldsymbol{A}_h$とから不つり合を推定すると，推定不つり合ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_h$は，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h=\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{V} \qquad (6.2)$$

これをもとにバランスを修正すると，残留不つり合ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_R$は初期不つり合ベクトルを$\boldsymbol{\varepsilon}_o$，正しい影響係数マトリックスを$\boldsymbol{A}$として，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R=\boldsymbol{\varepsilon}_o-\boldsymbol{\varepsilon}_h=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varepsilon}_o \qquad (6.3)$$

で表わすことができる。ここで$\boldsymbol{I}$は単位マトリックスである。図6．3(a)はつり合せのベクトル図で，推定不つり合$\boldsymbol{\varepsilon}_h$と$\boldsymbol{\varepsilon}_o$，$\boldsymbol{\varepsilon}_R$の関係を示す。r回のつり合せ後の残留不つり合ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}_r$は，式(6．3)の過程をr回繰返すことになるので，

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{A})^r\boldsymbol{\varepsilon}_o \qquad (6.4)$$

で与えられる。このような一連のつり合せ作業は図6．4の流れ図にまとめられる。図の後向きループで$\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{V}$の演算を行ない，信号を加算点につなぐまでがつり合せに相当する。

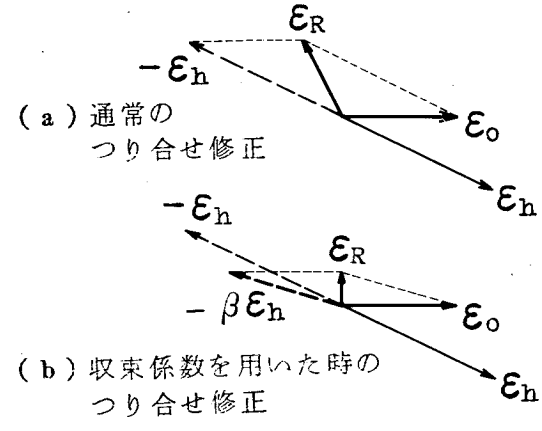


図 6.3 つり合せ修正のベクトル図

式(6．3)(6．4)で明らかなように，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{A}$がバランスの良さを決める指標で，この性質を調べるとバランスの収束状況がわかる。この論文ではロータの断面非対称が影響

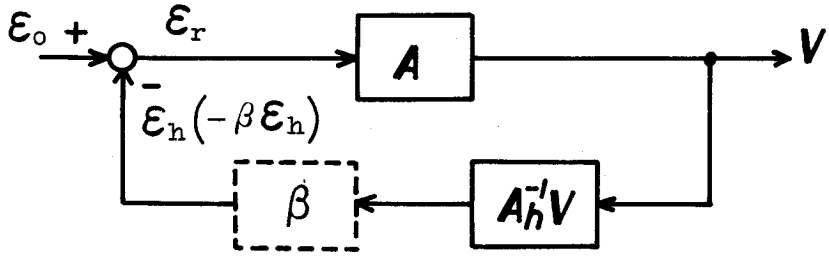


図 6.4　つり合せ作業の流れ

係数マトリックスに及ぼす影響を調べる。すなわち断面非対称ロータに試しおもりをとりつけて測定した振動データを，断面対称ロータのデータと考えて処理して影響係数マトリックスを求めると，正しい影響係数マトリックス$\boldsymbol{A}$が得られず，断面非対称を無視した影響係数マトリックス $\boldsymbol{A}_h$ が得られるにとどまる。この $\boldsymbol{A}_h$ を使ってつり合せを行った時の現象を，次節以下で検討する。

他の要因がつり合せを乱す場合も，その時の $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{A}$ を本論文と同じ方法で調べてゆけばバランスの収束性が検討できる。

6．3　断面非対称ロータの不つり合振動応答

つり合せの収束を論ずる準備として，不つり合による振動応答を計算する。この計算にはモード解析法を適用する。$(EI)_\xi \neq (EI)_\eta$ であるから j 次の固有角振動数ベクトル$\boldsymbol{\omega}_\xi^2$，$\boldsymbol{\omega}_\eta^2$ と，これに対応する固有モードマトリックス$\boldsymbol{\Phi}_\xi$，$\boldsymbol{\Phi}_\eta$，等価質量マトリックス$\boldsymbol{m}_\xi$，$\boldsymbol{m}_\eta$ が定義できる。検討の便宜上，$(EI)_\xi \geq (EI)_\eta$　従って$\omega_{\xi j} \geq \omega_{\eta j}$ となるように座標系を定める。ここでは簡単のために3章と同様に（仮定8）を採用して

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_\xi = \boldsymbol{\Phi}_\eta \equiv \boldsymbol{\Phi}_o \\ \text{従って}\ &\boldsymbol{m}_\xi = \boldsymbol{m}_\eta \equiv \boldsymbol{m}_o \end{aligned}\right\} \qquad \text{(6.5)}$$

とする。

式（2．2）の右辺で$\omega^2\boldsymbol{e}_\xi$，$\omega^2\boldsymbol{e}_\eta$ の項のみを考慮して，その解を

$$\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\Phi}_o\ ,\quad \boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\Phi}_o \qquad \text{(6.6)}$$

と置く。ここで$\bar{\boldsymbol{\xi}}$，$\bar{\boldsymbol{\eta}}$は t，z に独立な定数要素で構成されるベクトルである。式（6.6）を式（2．2）に代入して次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}_o^T(\boldsymbol{K}_\xi - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi}_o\bar{\boldsymbol{\xi}} - \omega\boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}_o\bar{\boldsymbol{\eta}} = \omega^2\boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{e}_\xi \\ &\omega\boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}_o\bar{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\Phi}_o^T(\boldsymbol{K}_\eta - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi}_o\bar{\boldsymbol{\eta}} = \omega^2\boldsymbol{\Phi}_o^T\boldsymbol{e}_\eta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(6.7)}$$

式（５・８）の固有角振動数，固有モードなどの性質を用いると，式（６．７）は容易に対角化でき，$\bar{\boldsymbol{\xi}}$，$\bar{\boldsymbol{\eta}}$の j 次成分 $\bar{\xi}_j$，$\bar{\eta}_j$ は次式であらわせる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}_j &= \frac{(\omega_{\eta j}^2-\omega^2)\,\varepsilon_{\xi j}+2\zeta_j\omega_{oj}\omega\,\varepsilon_{\eta j}}{(\omega_{\xi j}^2-\omega^2)(\omega_{\eta j}^2-\omega^2)+4\zeta_j^2\omega_{oj}^2\omega^2}\,\omega^2\\ \bar{\eta}_j &= \frac{(\omega_{\xi j}^2-\omega^2)\,\varepsilon_{\eta j}-2\zeta_j\omega_{oj}\omega\,\varepsilon_{\xi j}}{(\omega_{\xi j}^2-\omega^2)(\omega_{\eta j}^2-\omega^2)+4\zeta_j^2\omega_{oj}^2\omega^2}\,\omega^2\end{aligned}\right\}\quad\text{----------}(6.8)$$

ここで$\varepsilon_{\xi j}$，$\varepsilon_{\eta j}$ は$\Phi_o^T\boldsymbol{e}_\xi$，$\Phi_o^T\boldsymbol{e}_\eta$ の j 次成分で，それぞれξ，η方向の j 次モード不つり合を表わす。以下の検討の便宜上，式（６．８）を無次元化する。ここで使用している記号の意味を巻頭の記号対照表に示す。

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}_j &= \frac{(\Omega_{\eta j}^2-\Omega^2)\,\varepsilon_{\xi j}+2\zeta_j\Omega_{oj}\Omega\,\varepsilon_{\eta j}}{(\Omega_{\xi j}^2-\Omega^2)(\Omega_{\eta j}^2-\Omega^2)+4\zeta_j^2\Omega_{oj}^2\Omega^2}\,\Omega^2\\ \bar{\eta}_j &= \frac{(\Omega_{\eta j}^2-\Omega^2)\,\varepsilon_{\eta j}-2\zeta_j\Omega_{oj}\Omega\,\varepsilon_{\xi j}}{(\Omega_{\xi j}^2-\Omega^2)(\Omega_{\eta j}^2-\Omega^2)+4\zeta_j^2\Omega_{oj}^2\Omega^2}\,\Omega^2\end{aligned}\right\}\quad\text{----------}(6.9)$$

これが断面非対称ロータの不つり合振動応答を表わす式である。

つり合せ時に，各次数のモード不つり合を他の次数のそれと関係なく独立に，すなわちモードごとにつり合せを行なう場合，$\bar{\xi}_j$，$\bar{\eta}_j$ をそれぞれの次数について単独に問題にすればよい。そこで以下では簡単のために添字 j を省略する。

モード別つり合せを行なう時，主危険速度まわりすなわち$\lambda=1$近傍のみが重要である。そこで

$$\Omega=1+\delta,\qquad \delta\ll 1\qquad\text{----------}(6.10)$$

と置き，これを式（６．９）に代入して，$1+\delta\doteqdot 1$，$1-\Omega^2\doteqdot -2\delta$で近似する。さらに後の検討の便宜上，図２．１０に示すようにO－$\xi\eta z$座標系を反回転方向に４５°まわしてO－ΞHz 座標系を定義し，$\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$のΞ，H軸成分をベクトル形式であらわす。

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}\\ &\boldsymbol{V}=\{\Xi,\ \mathrm{H}\}^T\\ &\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_\Xi,\ \varepsilon_\mathrm{H}\}^T=\{\varepsilon\cos\psi,\ \varepsilon\sin\psi\}^T\\ &\boldsymbol{A}=\frac{1}{2\zeta}\,\frac{1}{1-k^2+\alpha^2}\begin{bmatrix}-\alpha & 1-k\\ -(1+k) & -\alpha\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\quad\text{----------}(6.11)$$

$$k=\mu/2\zeta,\quad \alpha=\delta/\zeta \qquad \text{(6.12)}$$

kはロータ系の断面非対称量を規定する実効非対称率（$k\geq 0$），αは平均危険速度からの回転数のずれ，ψはΞ軸から測定した不つり合の位相角である。

振動ベクトル$\boldsymbol{V}$は，断面非対称が少ない場合（$0\leq k<1$）回転数の変化とともに危険速度近傍でだ円軌跡，すなわちモードだ円を描く。式（6．11）でαを消去して

$$(1+k)\left\{\left(2\zeta\frac{\Xi}{\varepsilon}\right)-\frac{\sin\psi}{2(1+k)}\right\}^2+(1-k)\left\{\left(2\zeta\frac{H}{\varepsilon}\right)-\frac{\cos\psi}{2(1-k)}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin^2\psi}{1+k}+\frac{\cos^2\psi}{1-k}\right\} \qquad \text{(6.13)}$$

を得る。この式は$2\zeta\Xi/\varepsilon$，$2\zeta H/\varepsilon$について（$\sin\psi/2(1+k)$，$\cos\psi/2(1-k)$）を中心とするだ円になっている。このだ円は不つり合の位相角でさまざまにその形を変える。しかし，その短径と長径の比hは，

$$h=\sqrt{(1-k)/(1+k)} \qquad \text{(6.14)}$$

で不つり合の大きさと位相角に関係なく，ロータ系の実効非対称率kのみに支配される。hを測定して系の実効非対称率kが推定できる。

モードだ円の計算例を図6．5に示す。これは$k=0.5$の場合の例である。Ξ軸上の不つり合（$\psi_0=0°$）が最も振動をひき起しやすく，H軸上の不つり合（$\psi_0=90°$）が最も振動をひき起しにくい。この例ではだ円の長径が常にH軸方向を向いており，実際のデータで長径の方向を調べてロータの剛性の高い方向が推定できる。

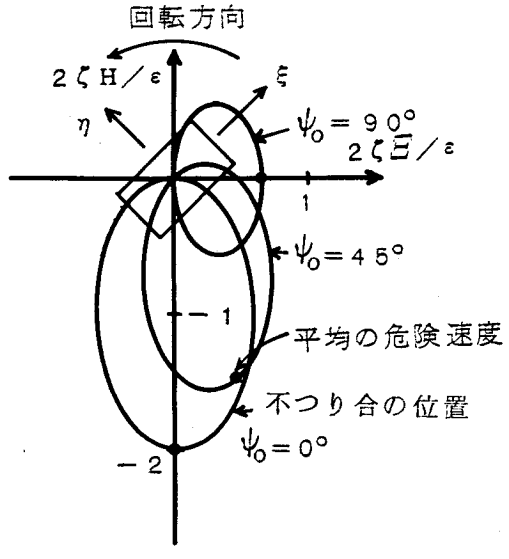


図 6.5　モードだ円の計算例（$\kappa=0.5$）

6．4　残留不つり合とバランスの収束状況

6．4．1　つり合せの影響係数マトリックス

不つり合εによる断面非対称ロータの振動$\boldsymbol{V}$は，式（6．11）に示すように一般に，

$$\begin{bmatrix} \Xi \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & -\mathrm{a}_2' \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\Xi} \\ \varepsilon_{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \quad \text{：非対称ロータ} \qquad \text{----------（6．15）}$$

の形で与えられる。a_1，a_2 などは定数で，これを実際に測定できると完全なつり合せが行なえるが，その手続きが煩雑である（付録6．1参照）。ロータの断面が対称の時，$\mathrm{a}_2 = \mathrm{a}_2'$ となり次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} \Xi \\ \mathrm{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & -\mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\Xi} \\ \varepsilon_{\mathrm{H}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_{\Xi} & -\varepsilon_{\mathrm{H}} \\ \varepsilon_{\mathrm{H}} & \varepsilon_{\Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \end{bmatrix} \quad \text{：対称ロータ} \qquad \text{----------（6．16）}$$

通常の断面が対称なロータのつり合せでは，ロータに既知の試しおもりε_{t}（($\varepsilon_{\mathrm{t}\Xi}$，$\varepsilon_{\mathrm{tH}}$）または（$\varepsilon_{\mathrm{t}}$，$\psi_{\mathrm{t}}$））をとりつけ，その時の振動変位振幅$\boldsymbol{V}\mathrm{t}$（$\Xi_{\mathrm{t}}$，$\mathrm{H}_{\mathrm{t}}$）からつり合せの影響係数マトリックスを求めている。この作業は次の計算に相当する。

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\mathrm{t}\Xi}, & -\varepsilon_{\mathrm{tH}} \\ \varepsilon_{\mathrm{tH}}, & \varepsilon_{\mathrm{t}\Xi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Xi_{\mathrm{t}} \\ \mathrm{H}_{\mathrm{t}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{t}}} \begin{bmatrix} \cos\psi_{\mathrm{t}} & \sin\psi_{\mathrm{t}} \\ -\sin\psi_{\mathrm{t}} & \cos\psi_{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi_{\mathrm{t}} \\ \mathrm{H}_{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \qquad \text{----------（6．17）}$$

一方，断面非対称ロータに試しおもり ε_{t} をとりつけた時の振動変位振幅 $\boldsymbol{V}$ は式（6．11）より次式で表わされる。

$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{A}\varepsilon_{\mathrm{t}} \qquad (6.18)$$

断面非対称ロータに通常の断面対称ロータのバランス法を適用することは，式（6．15）の$\mathrm{a}_2 \fallingdotseq \mathrm{a}_2'$ の性質を無視して式（6．17）のプロセスで影響係数マトリックスを求めることに相当する。式（6．17）に式（6．18）を代入してa_1，a_2を求め，これを改めて式（6．16）に代入する。a_1，a_2 で構成された影響係数マトリックス，すなわち測定された影響係数マトリックス $\boldsymbol{A}_{\mathrm{h}}$は次式で表わされる。

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{h}} = -\frac{1}{2\zeta}\,\frac{1}{1-\mathrm{k}^2+\alpha^2} \begin{bmatrix} (\alpha+\mathrm{k}\sin 2\psi_{\mathrm{t}}) & -(1+\mathrm{k})\cos 2\psi_{\mathrm{t}} \\ (1+\mathrm{k}\cos 2\psi_{\mathrm{t}}) & (\alpha+\mathrm{k}\sin 2\psi_{\mathrm{t}}) \end{bmatrix} \qquad (6.19)$$

本来の影響係数マトリックスが$\boldsymbol{A}$であるのに，これを$\boldsymbol{A}_h$と誤認してつり合せを進めることになり，これがバランス誤差の原因になる。式（６．１９）で，$\boldsymbol{A}_h$は試しおもりを取付けた位置ψ_tによって変化することがわかる。

６．４．２　残留不つり合の計算

残留不つり合は式（６．３）（６．４）に（６．１１）（６．１９）の$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}_h$を代入して計算できる。初期不つり合$\boldsymbol{\varepsilon}_o$（$\varepsilon_o$，$\psi_o$）が存在するロータに断面対称ロータのバランス法を１回適用した時の残留不つり合$\boldsymbol{\varepsilon}_1$（$\varepsilon_1$，$\psi_1$）は，

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1\Xi}/\varepsilon_o \\ \varepsilon_{1H}/\varepsilon_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \cos\psi_1/\varepsilon_o \\ \varepsilon_1 \sin\psi_1/\varepsilon_o \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} + \alpha \boldsymbol{B}_\alpha \qquad \text{----------} (6.20)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{2k\sin(\psi_o - \psi_t)}{(1+k^2+2k\cos 2\psi_t)+(\alpha^2+2\alpha k\sin 2\psi_t)} \begin{bmatrix} (1+k)\sin\psi_t \\ (1+k)\cos\psi_t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_\alpha = \frac{2k\sin(\psi_o - \psi_t)}{(1+k^2+2k\cos 2\psi_t)+(\alpha^2+2\alpha k\sin 2\psi_t)} \begin{bmatrix} -\cos\psi_t \\ \sin\psi_t \end{bmatrix} \qquad (6.20)'$$

で与えられる。ここで，

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{2k}{\sqrt{(1+k^2+2k\cos 2\psi_t)+(\alpha^2+2\alpha k\sin 2\psi_t)}} \\ T &= R\sin(\psi_o - \psi_t) \\ \Psi &= \tan^{-1}\left\{\frac{(1+k)\cos\psi_t + \alpha\sin\psi_t}{(1-k)\sin\psi_t - \alpha\cos\psi_t}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad \text{----------} (6.21)$$

と置き，式（６．２０）を書きかえる。

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_1/\varepsilon_o| &= R\cdot|\sin(\psi_o - \psi_t)| \\ \psi_1 &= \Psi \end{aligned}\right\} \qquad \text{----------} (6.22)$$

r 回のつり合せ後の不つり合についても同様の操作で

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_r/\varepsilon_o| &= T^{r-1}\cdot R\cdot|\sin(\psi_o - \psi_t)| \\ \psi_r &= \Psi \end{aligned}\right\} \qquad \text{----------} (6.23)$$

を得る。

6．4．3　平均危険速度でつり合せを行なう時の収束性

つり合せはいつも同じ回転数で行なわねばならない。ここでは平均危険速度（$\alpha=0$）でつり合せを行なうとし，残留不つり合がつり合せの回数を経るに従ってどのように変化するかを，1回目と2回目以後のつり合せにわけて調べる。バランスの収束性は式（6．12）～（6．23）で$\alpha=0$と置いて計算できる。

6．4．3．1　1回目のつり合せ後の残留不つり合

式（6．21）（6．22）で明らかなように残留不つり合の大きさ ε_1 は実効非対称率k，影響係数を求めるための試しおもりの取つけ位相角 ψ_t，初期不つり合の位相角 ψ_0 の影響を受ける。

初期不つり合がたまたま試しおもりを取つけた位置に存在すると（$\psi_0=\psi_t$）ただ1回でつり合せは完了する。それ以外はロータが対称（$k=0$）でない限り残留不つり合が残る。ψ_0 と ψ_t とが90°ずれている時が最悪である。残留不つり合の大きさは式（6．21）のRで決まり，Rはバランスの収束性を示す指標の一つである。Rを ψ_t の関数として図6．6，図6．7に示す。図6．6の横軸は実効非対称率kで，ψ_t をパラメータにとってRの

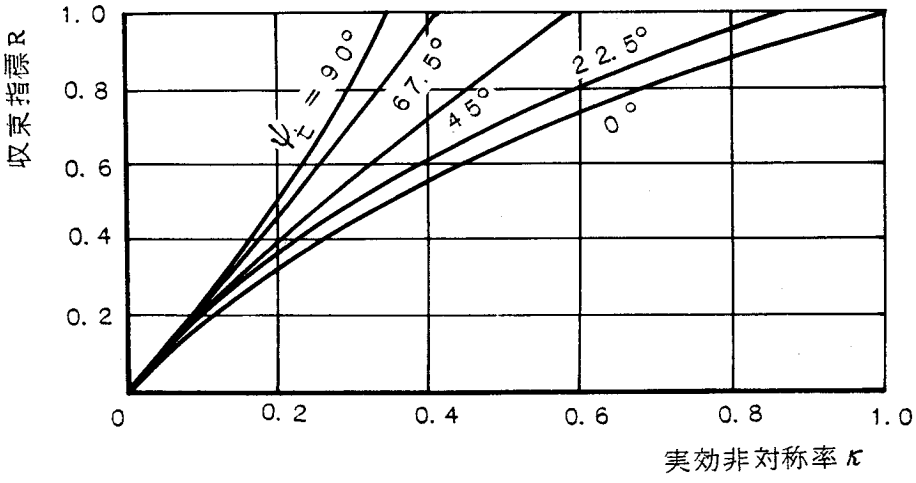


図 6.6　1回目のつり合せ時の収束指標R

値を示す。ψ_t が90°に近ずくと，小さいkでRが1よりも大きくなる。図6．7はk，ψ_t に関するRの等高線図である。$\psi_t=0°$ 付近でRは小さい。すなわち試しおもりを $\psi_t=0°$（Ξ軸上）につけて得た影響係数を用いてバランス修正をすると，残留不つり合

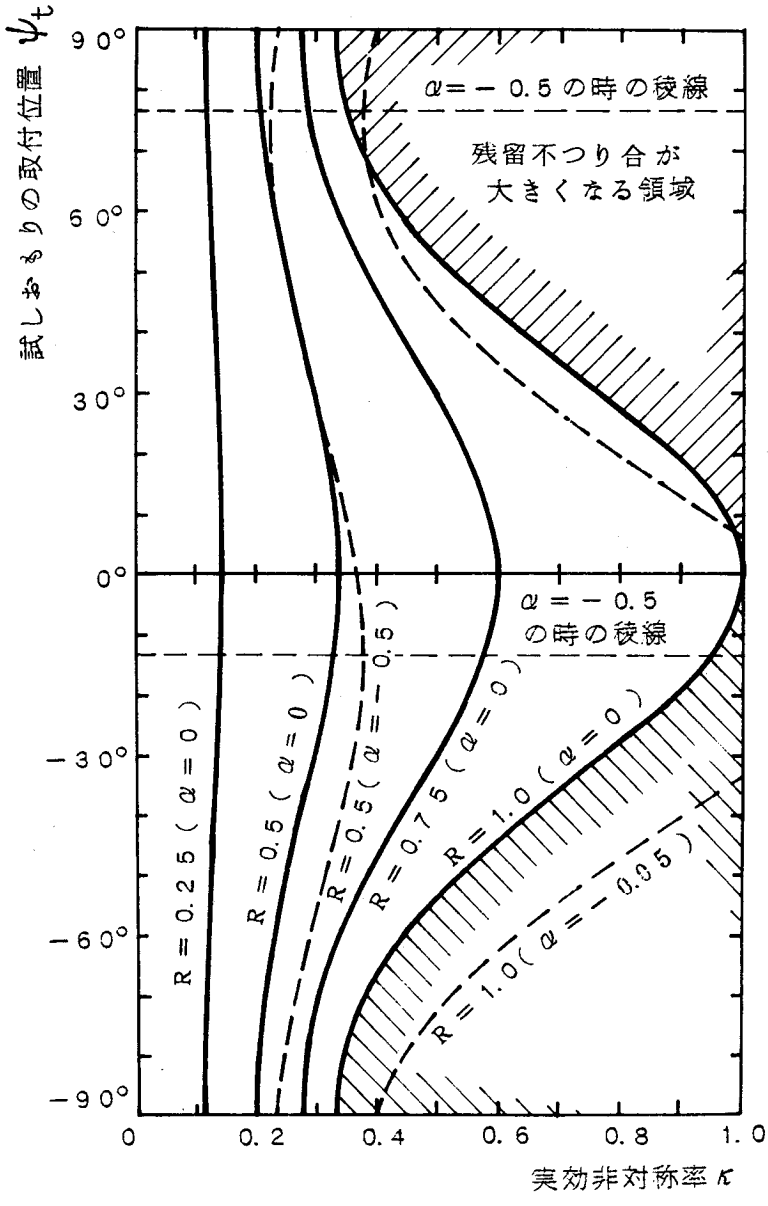


図 6.7　1回目のつり合せ時の収束指標R
（等高線表示，$\alpha=0$ および -0.05 ）

が早く小さくなる。図中斜線部はR＞1で，初期不つり合と試しおもりの位相差によっては，残留不つり合が初期不つり合よりも大きくなる領域である。

次に式（６．２２）（６．２１）で残留不つり合の位相角 ψ_1 を計算し，その結果を図６．８に示す。ψ_1 は初期不つり合の位相角 ψ_0 に影響されず，試しおもりの位相角 ψ_t のみ

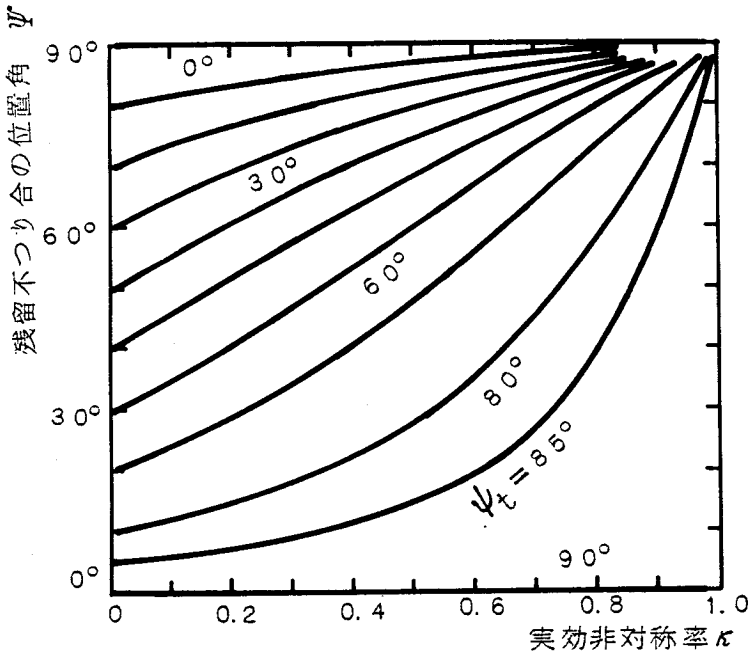


図 6.8　残留不つり合の位相角

で決まる。kが大きくなると ψ_1 は 90° に近ずく。多数のロータを製作した場合，初期不つり合は工作等に特殊性がない限りすべての位相角に均等に分布するが，つり合せ後の残留不つり合は 90°（H軸）近傍へ集って分布すると思われる。

6．4．3．2　2回目以後のつり合せ後の残留不つり合

式（6．23）に示すように，残留不つり合の位相角 ψ_r はつり合せの前後で変化せず，常に図6．8の値に等しい。他方残留不つり合の大きさはつり合せごとにT倍変化する。Tが小さい程バランスの収束は早く，2回目以後はTが収束の指標になる。式（6．21）に従ってTを計算し図6．9(a)に等高線で示す。$|\psi_t| = 45°$ 以上にT＝0となる ψ_t が存在し，この位置に試しおもりをつけて影響係数を求め，これを用いてつり合せを行なうと残留不つり合は1回で零になる。T＜0の場合，残留不つり合は符号を交互させながら順次変化する。図の右上，右下の斜線領域では｜T｜＞1で残留不つり合がどんどん大きくなり，バランスは発散する。

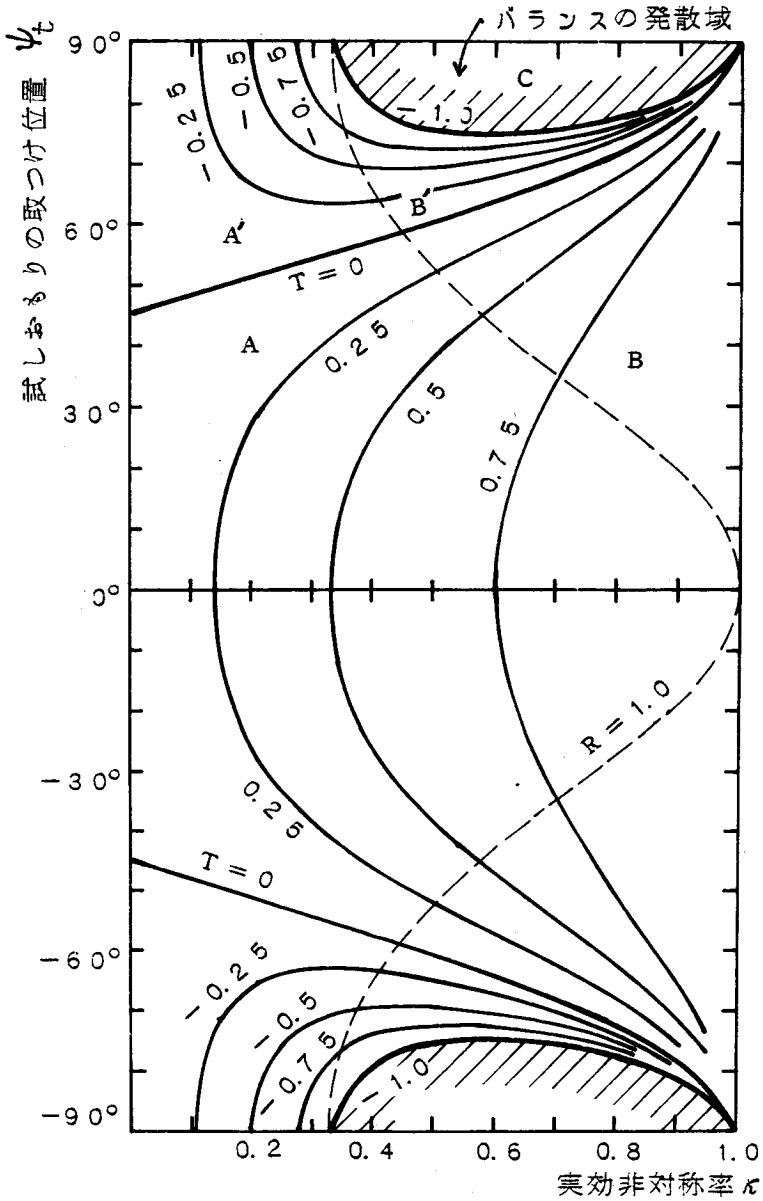


図 6.9　2回目以後のつり合せ時の収束指標T
（a）　$\alpha = 0$ の場合

6．4．3．3　収束状況

以上の説明をもとに，同じ影響係数を何回も用いて繰返しつり合せを行った時の残留不つり合について述べる。図6．9(a)の点線はR＝1の線で，この左側（領域A：R＜1，|T|＜1）では残留不つり合は1回目から順調に収束する。一方斜線部以外のこれより右側（領

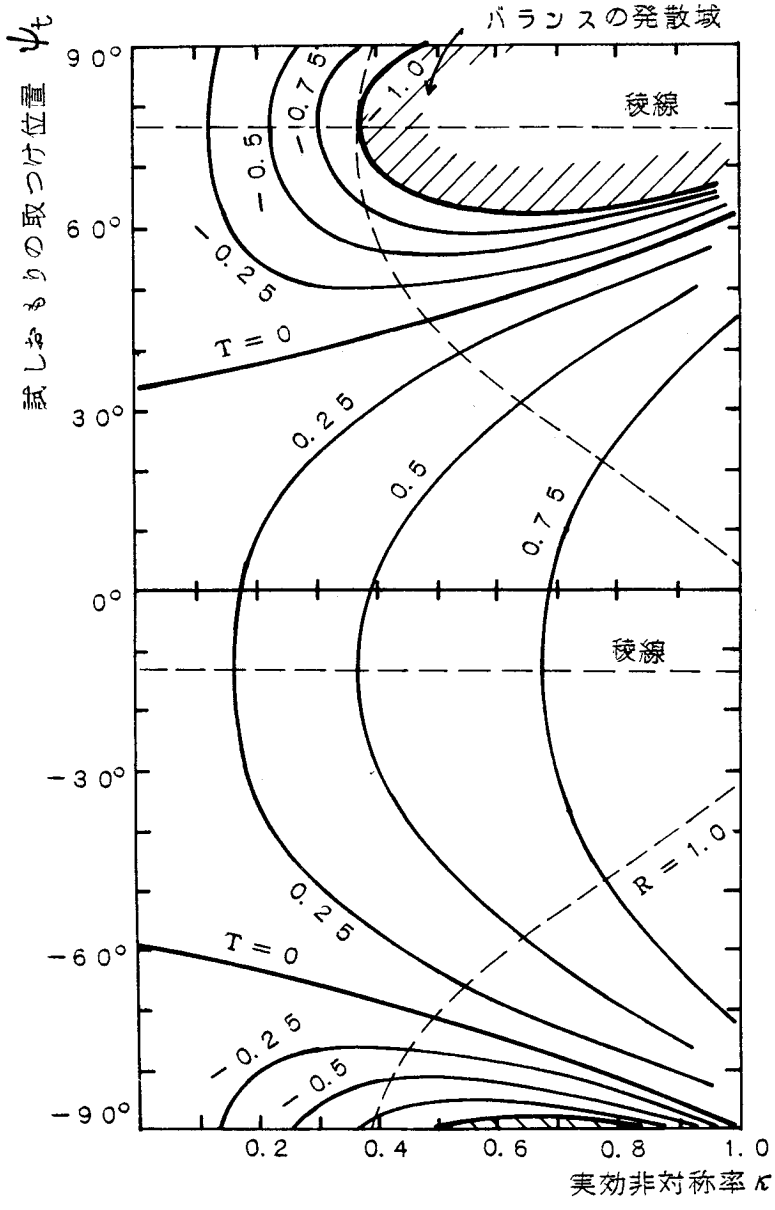


図 6.9　2回目以後のつり合せ時の収束指標T
（b）　$\alpha=-0.05$ の場合

域B：R＞1，|T|＜1）では1回目に残留不つり合が一たん大きくなるものの，その後は収束する。斜線の内側（領域C）ではつり合せを繰返すごとに残留不つり合は発散してゆく。

バランスの収束状況について例をあげて説明する。図6．10はk＝0.5のロータ系で，$\psi_0=0°$（Ξ軸上）に初期不つり合が存在する時の残留不つり合である。これは式（6．22）

（６．２３）で計算したものである。$\psi_t=22.5°$，４５°の場合，すなわち２２.５°または４５°の位置に試しおもりを取つけて影響係数を求め，これを用いてつり合せを繰返すと，１，２，３回と回数を経るに従って順調に残留不つり合が小さくなる。$\psi_t=67.5°$の時，１回目の残留不つり合は大きいが，２回目以降収束する。$\psi_t=90°$の時，残留不つり合はΞ軸上にあるが，その大きさはどんどん大きくなる。最初の２例は図６．９(a)の領域A，後の２例はそれぞれB，Cに対応する。$\psi_t=0°$の場合，式（６．２２）で$\sin(\psi_o-\psi_t)=0$となるため，ただ１回でつり合せが終了する。

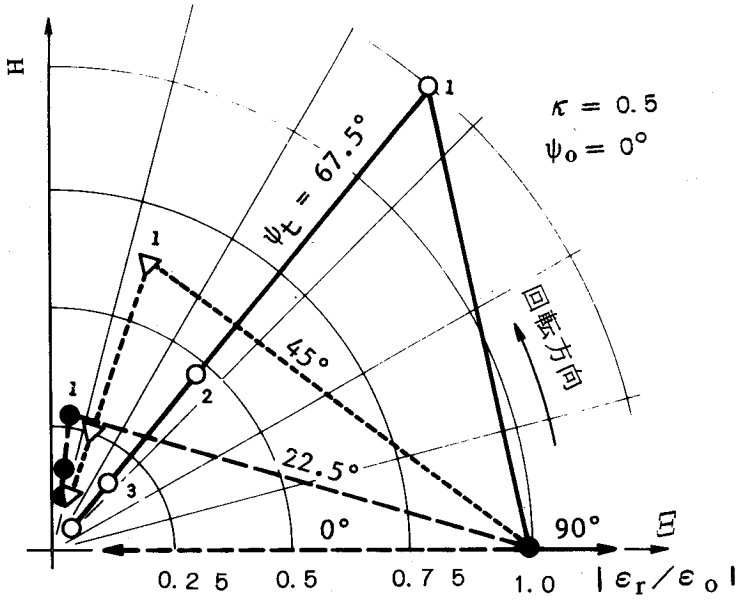


図 6.10　バランスの収束状況計算例

６．４．４　つり合せ回転数の影響

断面非対称ロータの平均危険速度（$\alpha=0$に相当）を精度よく求めるのはかなりむつかしい。そこで現実には平均危険速度近傍の特定回転数でつり合せを行なわざるを得ない。回転数がずれた場合のR，Tを式（６．２１）で計算した。$\alpha=-0.05$の場合のRを図６．７に鎖線で，Tを図６．９(b)に示す。この程度の回転数のずれでは，R，Tの等高線図のパターンが若干変化するものの，大勢に影響はない。従って前項で述べたバランスの収束性の基本的性質はこの場合も失なわれないと考えられる。

６．５　実　　験

断面非対称ロータに，通常の断面対称ロータのバランス法を適用した場合，図６．１０の

残留不つり合収束現象が現実に観察できるか否かを，モデルロータで実験した。

6．5．1　実験装置

ロータ系の外観と正面図を図6．11(a)，(b)に示す。軸受スパン1176㎜，軸径16φ㎜の軸でその断面を厚さ14.5㎜に平らに削った。軸の中央に約1.2㎏の負荷円板F（140φ㎜）と軸を4等分する3個所に約0.23㎏の測定用円筒E_1～E_3を設けた。軸の両側に玉軸受D（6906）を取つけた。水平・垂直方向のバネ定数を等しくする目的で，玉軸受の外輪ハウジングを4本のつる巻きばねで支えた。この構成で軸中央へ静荷重を与えたところ，軸中央と軸受ハウジングの変位の比は3:2であった。

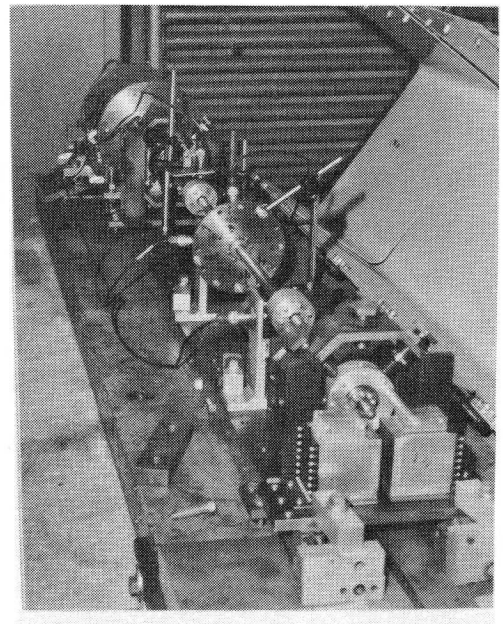
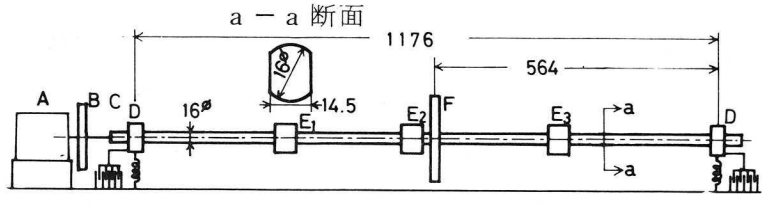


図 6.11　（a）　実験装置の外観

両端の玉軸受ハウジングに，シリコン油を満したくし形平行板（6枚構成）ダンパを取つけ，減衰は油量と粘度を調節して変化させた。

軸端を軟銅線（1.8φ㎜×約150㎜）で0.3KWの直流モータAに直結した。回転数は主に電機子電流で制御し，危険速度近傍での回転数変化率を約100rpm／minとした。この軸系の1，2次平均危険速度は約725，2300



A：直流モータ　C：フレキシブル継手　E：測定用円筒
B：慣性円板　D：玉軸受　F：負荷円板

図 6.11　（b）　実験装置の正面図

rpm であるが，ここでは１次の危険速度についてのみバランスの収束状況を調べた。つり合せには常に軸中央の円板を使い，この１面で十分であった。

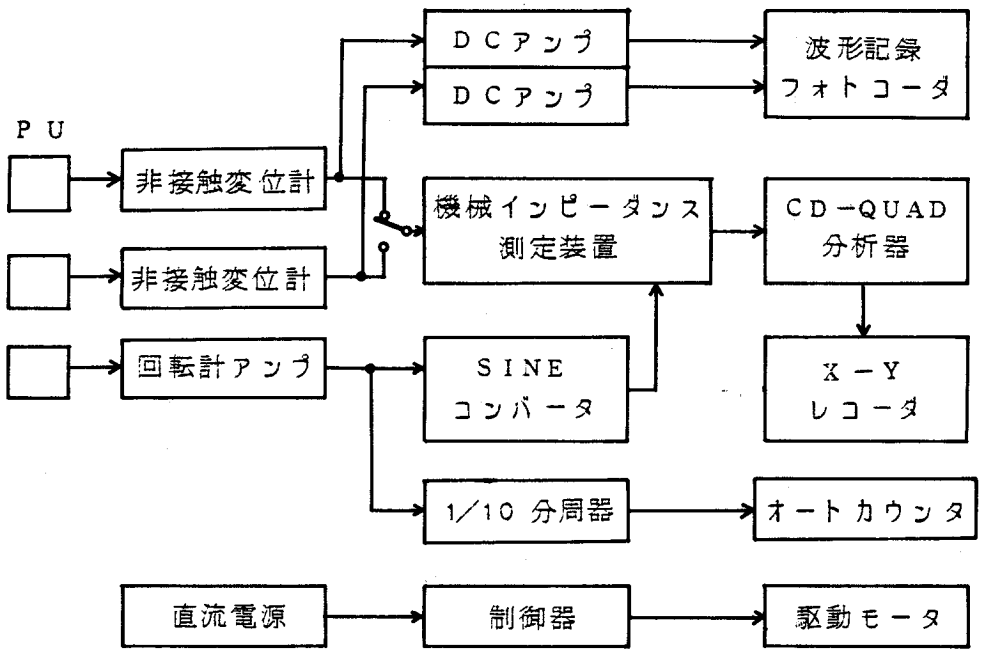


図 6.12　測定器系統図

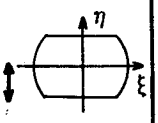
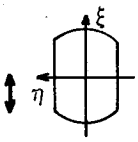
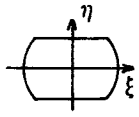
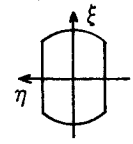
測定器系統を図６．１２に示す。振動検出には渦電流式非接触変位計を使用し，主に軸中央で垂直方向から軸振動を測定した。振動の振幅と位相のデータは，トラッキングフィルタ方式の機械インピーダンス分析装置と位相分析器とを組み合わせて処理した。回転数は $1/10$ 分周器とオートカウンタとを組み合せ，有効けた数４けたまで読みとった。

６．５．２　理想軸系による実験

まず断面の非対称が全軸長にわたり一様で，支持軸受が異方性を持たない場合（以下理想軸系と呼ぶ）について実験した。軸系の断面非対称性をチェックするために，打撃法で固有振動数と減衰比を測定した。測定結果を表６．１の左欄に記す。

軸の高剛性方向（ξ 軸）と低剛性方向（η 軸）のそれぞれの平均固有振動数は １2.3７，１1.8６Hzで，従ってモード非対称率は $\mu = 0.042$ である。一方減衰比の平均は $\zeta = 0.043$

表 6.1　軸系の固有振動数と減衰比（測定値）

振動方向 ＼ 測定項目		理想軸系		不均一非対称・異方軸受軸系	
		固有振動数（Hz）	減衰比	固有振動数（Hz）	減衰比
垂直方向	$f_{V\xi}$ 	11.85 ±0.01	0.042 ±0.001	12.25 ±0.02	0.017 ±0.001
	$f_{V\eta}$ 	12.39 ±0.04	0.044 ±0.001	12.55 ±0.02	0.020 ±0.001
水平方向	$f_{H\xi}$ 	12.35 ±0.01	0.043 ±0.001	12.61 ±0.04	0.038 ±0.002
	$f_{H\eta}$ 	11.87 ±0.03	0.044 ±0.001	12.33 ±0.03	0.035 ±0.001

であった。軸受の異方性はほとんど存在しない。この軸系の実効非対称率は $k = \mu / 2\zeta = 0.49$ である。

図６．１３に１次危険速度近傍で垂直方向から測定した振動ベクトルの軌跡，すなわちモード円の実測例を示す。いずれもだ円となり，理論的に導びいた図６．５と傾向がよく一致し，断面非対称ロータの特徴があらわれている。図６．１３のようなモードだ円を約十数例測定し，短径・長径比と式（６．１４）とから k を求めた。その平均は $k = 0.50$ で打撃法で求めた結果とよく一致した。

つり合せを繰返した時の振動変化状況を図６．１４(a)に●，▼ 印で示す。これは $\psi_t = 0°$ および $45°$ に試しおもりを取つけて求めた影響係数で，Ξ 軸上の初期不つり合（$\psi_0 = 90°$）を修正した例である。振動はつり合せを繰返すごとに順次収束している。

この軸系の実効非対称率は 0.50 であるから，図６．１４(a)の２例はいずれも図６．９(a)の領域Aに属する。図６．７および図６．９(b)によれば，$\psi_t = 45°$ の場合１回目のつり合せを支配する収束指標Rは１に，２回目以後の収束指標Tは零に近い。このような条件下では，１回目のつり合せで振動は小さくならないものの，２回目以後で急速に小さくなると予

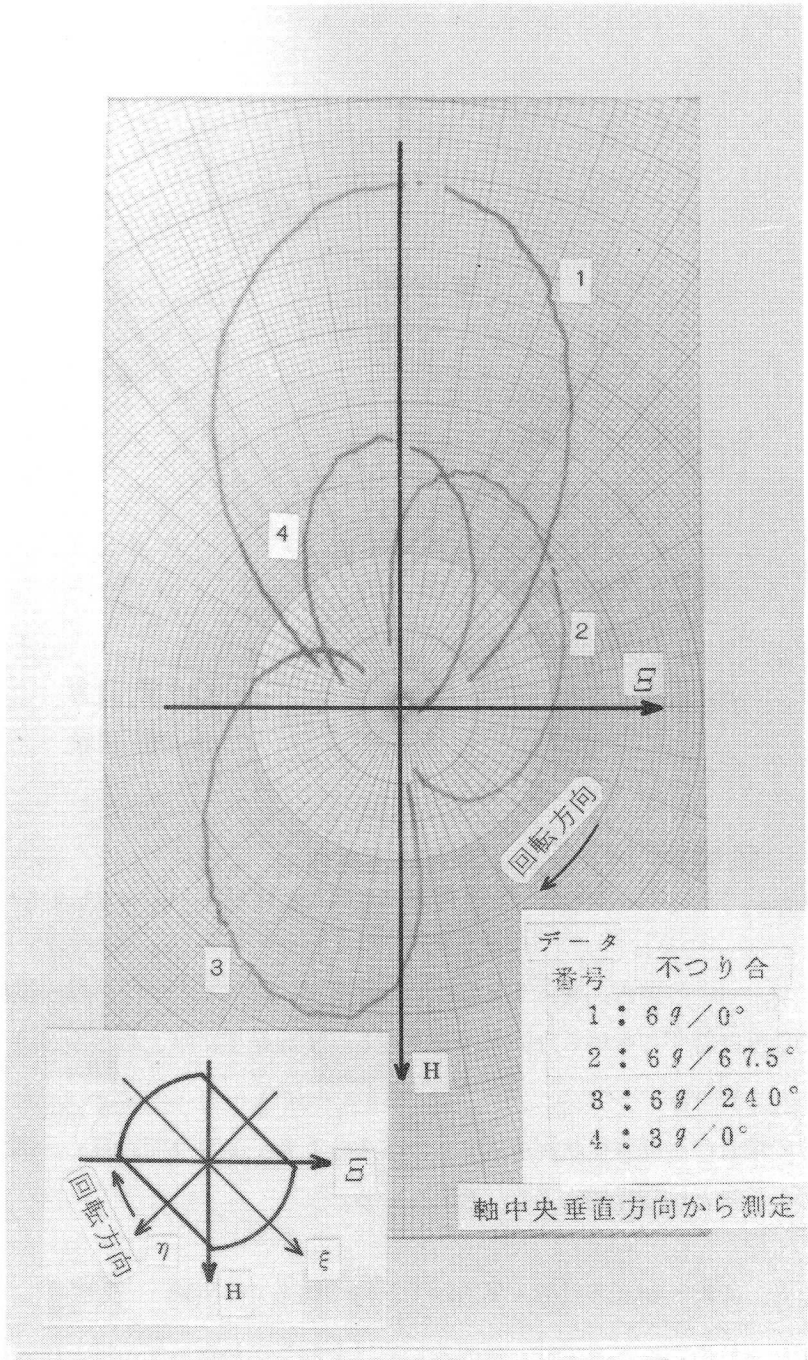


図 6.13　モードだ円の実測例（理想軸系 $\kappa = 0.5$）

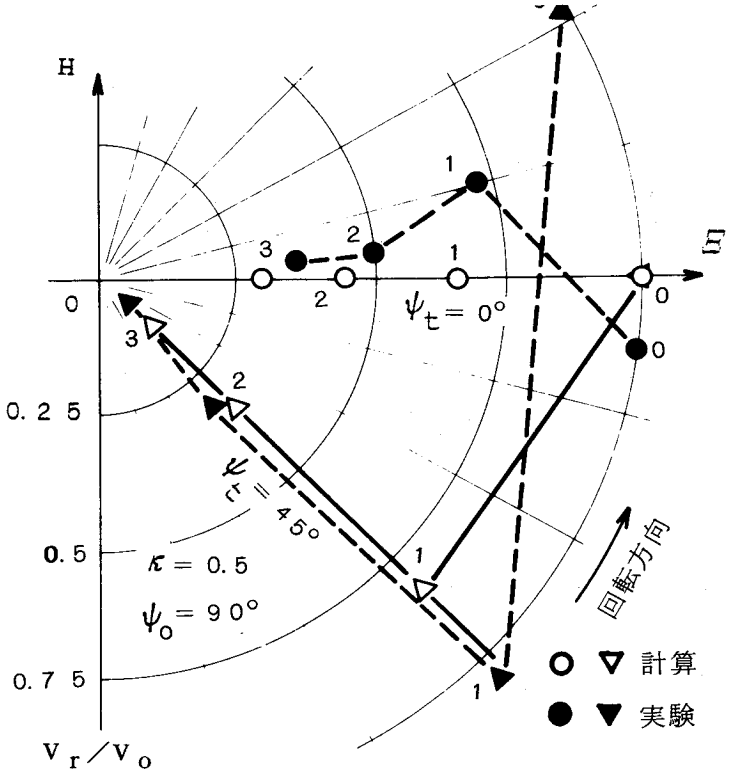


図 6.14　バランスの収束状況実験例
（a）理想軸系での収束状況：$\psi_t = 0°, 45°$

想される。$\psi_t = 0°$の場合，R，Tともに0.6程度で，従ってバランスは一様に収束するものの，その速度は必ずしも早くないと予想される。実験結果にはこの傾向がはっきりと現われている。

k＝0.5の場合の振動変化状況を式（６．１１）（６．２０）で計算し，図６．１４(a)に示す。実験と計算とは定性的によく一致している。

６．５．３　不均一断面非対称・異方軸受を持つ軸系での実験

工業上実用されるロータ系では，断面非対称は全軸長にわたって一様とは限らず，また異方性を持つ軸受が使用されることも多い。一例として，図６．１１(b)の軸で駆動側半分の長さ部分のみを１4.5 ㎜の厚さに平らに削り，さらに水平・垂直方向で軸受減衰に異方性を持たせた。この軸系でバランスの収束性を調べる。

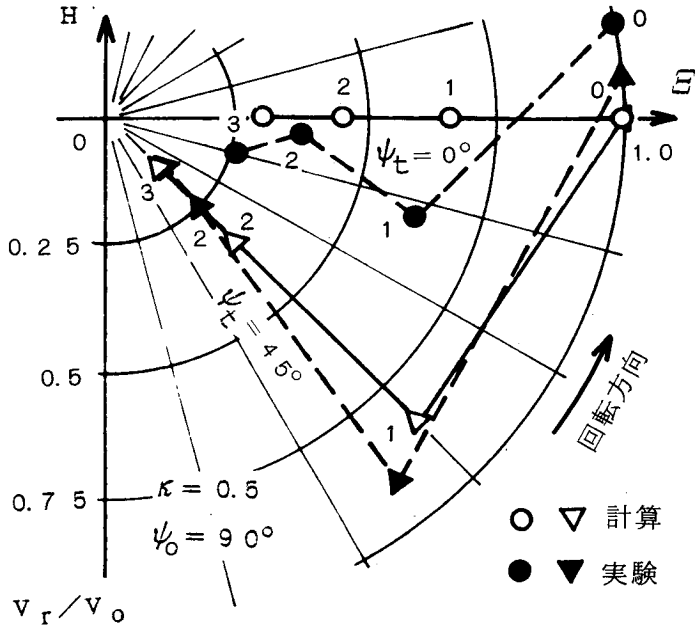


図 6.14　バランスの収束状況実験例
（b）不均一非対称，異方軸受軸系：$\psi_t = 0°, 45°$

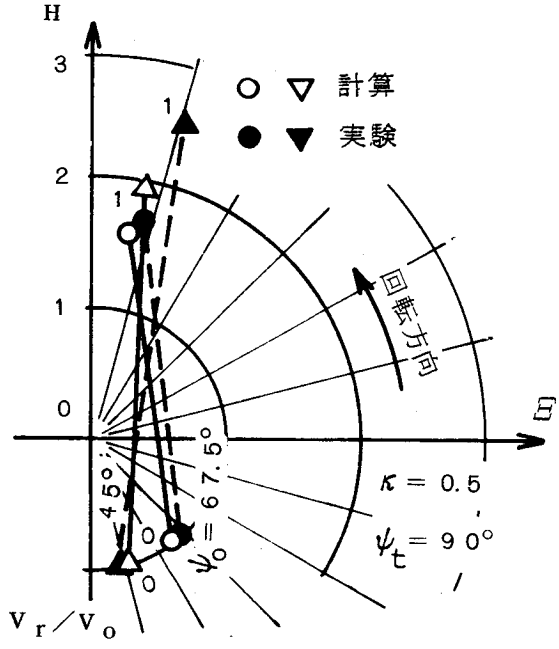


図 6.14　バランスの収束状況実験例（発散）
（c）不均一非対称，異方軸受軸系：$\psi_t = 90°$

打撃法で固有振動数と減衰比を求め，表６．１の右欄に示す。軸の高剛性方向と低剛性方向の固有振動数から$\mu=0.024$とわかる。また水平・垂直方向の減衰比はそれぞれ$\zeta=0.037$，0.019であった。従って両方向の実効非対称率はそれぞれ$k=0.33$，0.63となる。一方モードだ円から求めたkは0.４３で打撃法で得た２つの結果のほぼ中間の値であった。

理想軸系の場合と同様に，$\psi_t=0°$，45°に試しおもりを取つけて求めた影響係数でΞ軸上の初期不つり合を修正した。結果を図６．１４(b)に示す。先の例とほぼ同じ傾向で振動が収束している。図６．１４(c)はH軸上（$\psi_t=90°$）に試しおもりを取つけて求めた影響係数で$\psi_0=67.5°$および45°の初期不つり合を修正した例である。これはバランスが発散する図６．９(a)の領域Cに属する。１回目の修正を行ったに過ぎないが，振動は大きくなり，バランスの発散する傾向がうかがえる。いずれも計算結果と良く似た傾向を示している。

この項で対象とした軸系では，軸受に異方性が存在し，また軸上の断面非対称が一様でない。従って２章の（仮定３）（仮定８）は満されず，厳密には式（６．５）は成立しない。このような条件にもかかわらず，解析結果がよく現象を説明し，また実験と計算の傾向が一致している。これらのことから，軸受の異方性や断面非対称の不均一があっても，それが著るしくなければ，前章までの検討結果がこのような軸系にも適用できると推察される。

断面非対称ロータに通常の断面対称ロータのバランス法を適用すると，バランスが順次収束したり，時には発散することがあるとした６．４節の理論検討が，ここに実験で確認できた。

６．６　効果的なバランス法

６．４，６．５節でバランスの収束・発散現象が現われることを予測・確認したが，この節ではこの現象を心得た上で，バランス法をどのように運用するのがよいかを検討する。

６．６．１　試しおもりの取つけ位置

６．６．１．１　ロータの実効非対称率kが既知の場合

kが既知で，その量も大きく断面非対称による振動挙動が歴然と現われている時は，付録６．１に要約した断面非対称ロータ独自のバランス法が有効である。

この方法が煩雑な場合は，次の点に留意してつり合せ作業をすすめる。バランスの収束状況は，影響係数を求める時の試しおもりの取付位置に左右される。収束を早めるには，式

（６．２３）で明らかなようにR，Tが小さくなる位置に試しおもりを取つけるのがよい。この場合，図６．９(a)でT＝０になるψ_tを読みとり，この位置に試しおもりを取つける。

６．６．１．２　ロータの実効非対称率kが不明の場合

２．１節で述べたように発電機ロータの断面非対称は工作時などに予期しない原因で生ずるため，完成したロータの断面非対称がどの程度か，また剛性の高い方の主軸はどこかが不明のことがある。

この場合，少ない回数でつり合せが完了する見込みの時はRの小さい$\psi_t=0°$，他の理由で比較的多数回のつり合せが余儀なくされる時はTの小さい$|\psi_t|=45\sim60°$に選ぶ。$|\psi_t|=90°$はとにかく避ける。剛性の高い方向が明確な時は容易に９０°を避けうる。これがわかり難いロータでは，いずれの曲げ剛性主軸をΞ軸にとるかが決められないので，$|\psi_t|=45°$に選ぶのが無難である。

現実のロータの実効非対称率が不明と言っても，工場での設計・工作法が安定していると，多数のロータの製作経験から，断面非対称は高々どの程度かが判断できる。そこで，

$$0\leq k\leq k\,max=K \qquad (6.24)$$

の範囲で平均的に残留不つり合を最少にする方法を考える。収束指標Tの平均値$\overline{T}$を次式で定義する。

$$\overline{T}=\frac{1}{K}\int_0^K|T|\,dk \qquad (6.25)$$

k回つり合せを繰返した後の残留不つり合の期待値（平均値；$|\overline{\varepsilon}_{r+k}/\varepsilon_r|$）は式(6.23)より

$$|\overline{\varepsilon}_{r+k}/\varepsilon_r|=\{\overline{T}\}^k \qquad (6.26)$$

で推定できる。そこで$0\leq k\leq K$で$\overline{T}$を最少にするψ_tがわかれば残留不つり合の期待値が最少になる。

式（６．２５）へ式（６．２１）を代入して$\overline{T}$を計算し図６．１５に示す。kが比較的小さい場合ψ_tを$40°\sim55°$に，大きい場合$50°\sim65°$にとるのが望ましい。

６．６．２　収束係数の導入

前章で，図６．９(a)の斜線の部分に試しおもりを取つけるとバランスが発散することを示した。これは，この領域で$|2\boldsymbol{\varepsilon}|<|\boldsymbol{\varepsilon}_h|$，すなわち修正おもりが修正されるべき不つり合

の2倍を越え，余分に修正されすぎることに起因する。従って修正量を少し控え目にすればバランスの収束範囲が広がると考えられる。そこで収束係数$\boldsymbol{\beta}$（$|\boldsymbol{\beta}|<1$）を定義し，修正

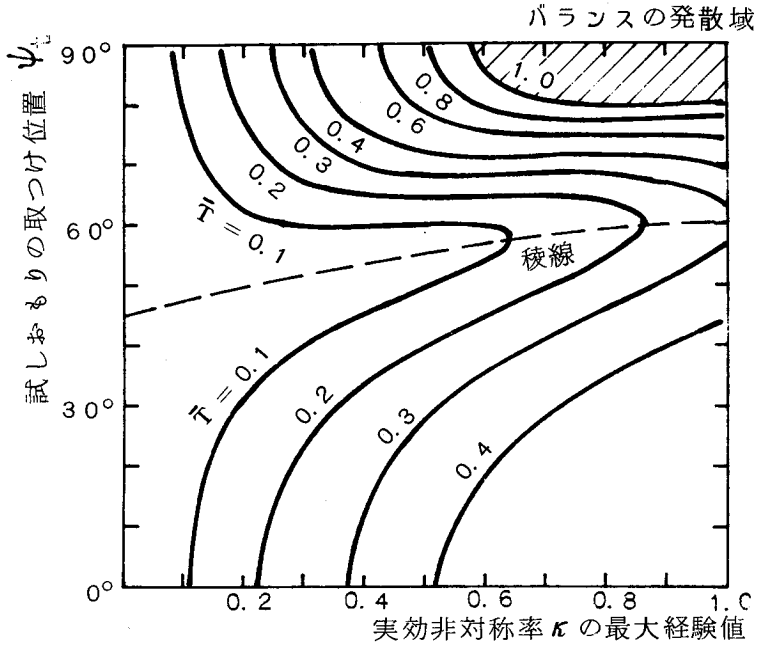


図 6.15　バランスの指標Tの平均値$\bar{T}$

おもり（$-\boldsymbol{\varepsilon}_h$）が求まった時にその$\beta$倍の大きさ（$-\beta\varepsilon_h$）だけ修正し，$\angle\boldsymbol{\beta}$だけ回転させることにする。この間のベクトルの相対関係を図6．3(b)に示す。収束係数は一般にベクトルであるが，以下$\boldsymbol{\beta}$がスカラーの場合とベクトルの場合とに分けてその有効性を検討する。

6．6．2．1　スカラーβを用いる場合

これは修正おもりの大きさをβ倍だけ小さめにとるが，修正角度は補正しない方法である。

r回目のつり合せの残留不つり合に関し，式（6．3）を参考にして次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = \boldsymbol{\varepsilon}_{r-1} - \beta\boldsymbol{\varepsilon}_{h(r-1)}$$
$$= (\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{A}_h^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\varepsilon}_{r-1} \qquad \text{(6．27)}$$

簡単のために平均危険速度でつり合せを行なうことに限ると，$\boldsymbol{\varepsilon}_r$は式（6．11）(6.19)で$\alpha=0$と置き，これを式（6．27）に代入して計算できる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rE}/\varepsilon_{r-1} \\ \varepsilon_{rH}/\varepsilon_{r-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} + (1-\beta)\boldsymbol{E}_\beta \qquad (6.28)$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{2k\sin(\psi_o-\psi_t)}{1+k^2+2k\cos 2\psi_t}\begin{bmatrix}(1-k)\sin\psi_t \\ (1+k)\cos\psi_t\end{bmatrix} \\ \boldsymbol{E}_\beta &= \frac{2k\sin(\psi_o-\psi_t)}{1+k^2+2k\cos 2\psi_t}\times \\ &\begin{bmatrix}(1+k)\cos\psi_o+k\cos(2\psi_t+\psi_o)+k^2\cos(2\psi_t-\psi_o) \\ (1-k)\sin\psi_o+k\sin(2\psi_t+\psi_o)+k^2\sin(2\psi_t-\psi_o)\end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)'$$

ここで$\boldsymbol{E}$は式（６．２０）′の$\boldsymbol{B}$で$\alpha=0$ と置いたものに等しい。すなわち$\boldsymbol{E}$は収束係数を導入しない場合（$\beta=1$）の残留不つり合である。そこで，収束係数を導入すると残留不つり合は（$1-\beta$）$\boldsymbol{E}_\beta$ だけ変化することがわかる。

式（６．２０）の残留不つり合は式（６．２２）（６．２３）のように簡単な形に変形できた。式（６．２８）は複雑なので，これを単純な形にまとめ一般的性質を調べることができない。そこで，二三の数値計算例で収束係数の効果を調べることにする。

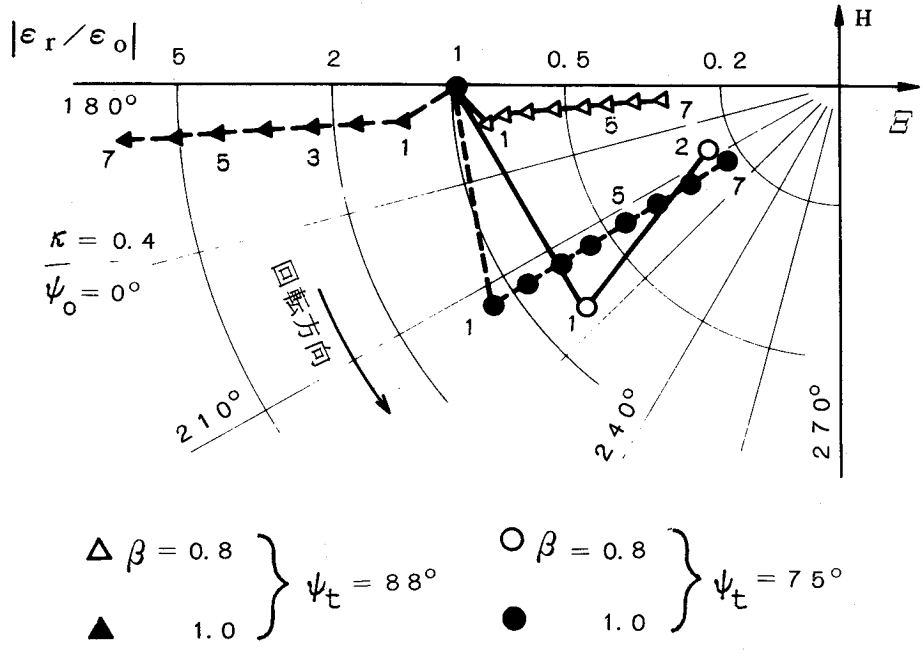


図 6.16　収束係数β（スカラー）を導入した時の収束例

図６．１６は実効非対称率k＝0.6のロータ系で，収束係数を使わない時（β＝1.0）と使った時（β＝0.8）の比較である。残留不つり合の大きさは対数目盛になっている。試しおもりの位相角ψ_t＝８８°の時（△，▲）収束係数を使わないと残留不つり合はつり合せを繰返すごとに大きく発散してゆく。一方β＝0.8にとると収束は遅いが，残留不つり合はつり合せを繰返すごとに減少する。ψ_t＝７５°の時（○，●），収束係数を導入しなくても残留不つり合は収束するものの，β＝0.8にとると収束速度が格段に早くなる。以上で収束係数の有効性が確認された。

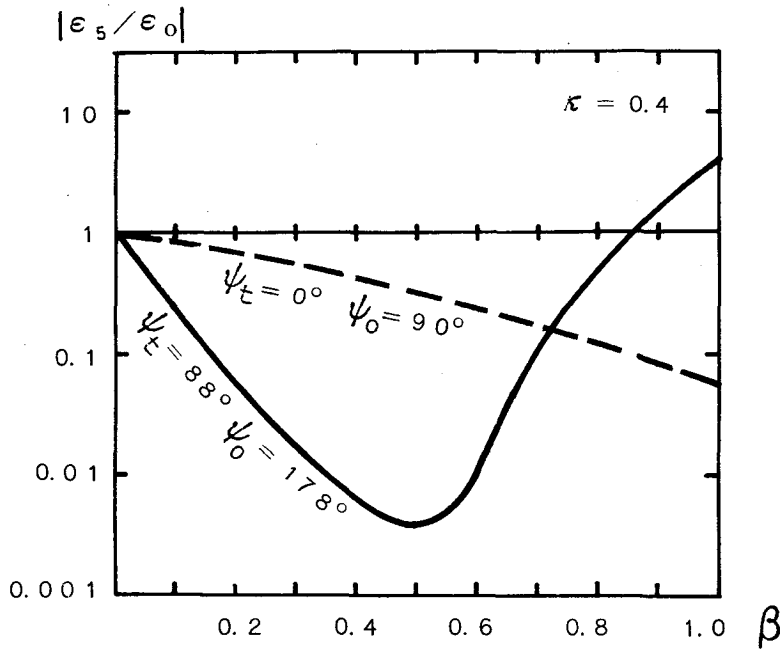


図 6.17　収束係数の効果

図６．１７はβを変化させた場合の収束の良さの検討例である。図６．１６で明らかなように，つり合せの繰返しに対し残留不つり合は一様に変化する。そこで収束のよさを５回目のつり合せ後の残留不つり合（$|\varepsilon_5/\varepsilon_0|$）で代表させ，縦軸にこれを対数目盛で示した。k＝0.4の軸系でψ_t＝８８°，ψ_0＝178°の場合（実線；式（６．２８）′のsin（$\psi_0-\psi_t$）が1.0となり，初期不つり合として最悪の条件である），βを0.８５以下にとらねば残留不つり合は収束せず，β≒0.5で最も収束が早い。ここで収束速度がβの大小に左右されることが重要である。

次に$\psi_t = 0°$の例を図６．１７に鎖線で示す。$\beta = 1.0$すなわち収束係数を使わない時の収束が最もよく，収束係数をもちこむと収束は悪くなり，ψ_tが９０°に近い時と異った傾向を示す。他の計算結果を総合すると，図６．９(a)でT＜０になる領域のψ_t，kの組み合せに対してβは有効で，T＞０に対してβを使うと収束はかえって遅くなる傾向にある。しかしβを導入したために，収束していたものが発散し始めることはない。またβが有効な時の効果は著るしく，βが逆効果の場合でもその程度はあまり激しくない。図６．１７はその典型的な例と言える。

以上のように，収束係数は複雑な性質を持つので，これをいくらに選ぶのがよいかは一概に決められず，状況に応じて変える必要がある。先に剛い剛性主軸がわからないロータ系では$|\psi_t| \doteqdot 45°$に選ぶのがよいと述べた。しかし，図６．９(b)に示すように，つり合せ回転数が平均危険速度からずれると，この領域で収束性が悪くなる可能性がある。経験によると比較的kの小さいロータに対しては$|\psi_t|$を約４５°，$\beta = 0.7 \sim 0.8$にとるのが有効であった。

６．６．２．２　ベクトル$\boldsymbol{\beta}$を用いた場合

これは，修正おもりの大きさをβ倍だけ小さくすると同時に，修正角度をも修正するものである。一例を図６．１８に示す。図中，a，b，cはそれぞれ収束係数を用いない場合（$\beta = 1$），スカラーの収束係数（$\beta = 0.8$），ベクトルの収束係数（$\boldsymbol{\beta} = \{0.8, 1.0\}^T$）を用いた場合にあたる。この場合の$\boldsymbol{\beta}$は，修正すべき不つり合の$\Xi$成分$\varepsilon_\Xi$を８０％だけ，H成分$\varepsilon_H$をすべて修正することを意味する。この例ではベクトル$\boldsymbol{\beta}$を用いると収束が最も早いが，つり合せの手続きが煩雑になり，この方法は実際の作業にあまり適しない。

６．６．２．３　他の技術分野における収束係数の例

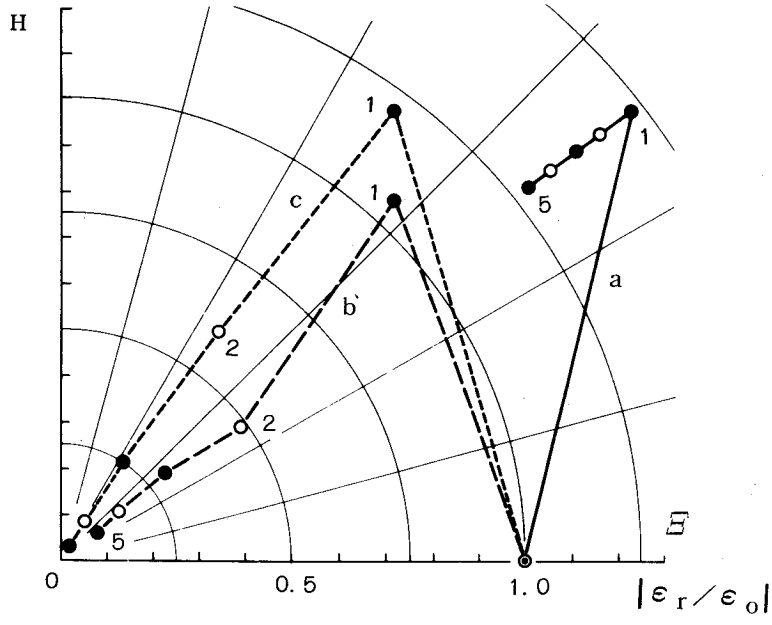
つり合せと同様に，他の技術分野においても収束係数が有効に活用されている。例えばつり合せ作業は図６．４の流れ図で表現でき，自動制御回路との類似性が認められる。制御回路は時として発振するが，この場合ループゲイン，特に後向きループのゲインを下げて系を安定化する。つり合せでの収束係数βの適用は，図６．４の流れ図の鎖線でかこんだブロックに相当し，$\beta < 1$にとることが自動制御回路の安定化の手法に似ている。

次に数値計算においても収束係数が用いられる。すなわちNewton法で関数$f(x) = 0$を解く時，現在の近似解x_nから新しい近似解x_{n+1}を導びくために，$f(x)$の導関数$f'(x)$を用い

て，

$$x_{n+1} = x_n - \beta f(x) / f'(x)$$

が利用される。この漸近解が発散しないように，漸近計算の初期段階ではβを小さく，後期段階では1.0にとる。これはつり合せのβに相当する。



a ：収束係数を用いない場合：$\beta = 1.0$

b ：スカラーの収束係数を用いた場合：$\beta = 0.8$

c ：ベクトルの収束係数を用いた場合：$\beta = \{0.8, 1.0\}^T$

図 6.18　収束係数の効果の比較

6．7　結　　言

曲げ剛性に異方性があるいわゆる断面非対称ロータに，通常の断面対称ロータのバランス法を適用した時，残留不つり合がどのような経過で変化し，またバランスの収束性を高めるにはどんな方法が有効かを検討した。その結果，

(1)　フレキシブルロータのバランスは何回かのつり合せを通じて最少にすべきであり，つり合せに収束の概念を持ちこむべきである。

(2) 一般に，マトリックス（ $I - A_h^{-1}A$ ）の性質を調べるとバランスの収束状況が掌握できる。

(3) 不つり合振動応答の影響係数を求める際，試しおもりの取つけ位置によってバランスの収束速度が変化し，最悪の場合にはつり合せがとれないことがある。

(4) 多数回のつり合せを繰返す時，試しおもりの取つけ位相角 $|\psi_t|$ を45°～60°に選ぶと収束が早い。

(5) 収束係数の導入，すなわち修正おもりの大きさを算出値より少なめにおさえることによって，バランスの収束性が改善される。

ことなどを明らかにした。さらに簡単な断面非対称軸モデルを製作してバランスの収束状況を調べ，(3)項の収束挙動が実際に観測されることを確認した。

バランスの収束を高めるための留意点を表6．2にまとめて示す。

表 6.2 影響係数推定時の試しおもりの取付位置

つり合せの回数 ＼ 曲げ剛性の高い主軸が…	少ない回数でつり合せが完了する見込の場合	多数回のつり合せが必要と見込まれる場合
わかつている場合	こわい剛性主軸より反回転方向に45°へだたつた方向（ $\psi_t = 0°$ ）	左欄の位置から45°～60°へだたつた方向（ $\psi_t = \pm$（45°～60°））
わからない場合	剛性主軸の上（ $\psi_t = \pm 45°$ ）	左欄にとりつけてつり合修正時に $\beta = 0.8$ 程度の収束係数を適用する。

附録6．1 断面非対称ロータ特有のバランス法

断面非対称ロータの振動の特徴に注目したバランス法について述べる。まず Ξ 軸上に単位の試しおもり $\varepsilon_{\Xi t}$（ $\varepsilon_{Ht} = 0$ ）を取つけ，その時の振動振幅 V_Ξ（ Ξ_Ξ ， H_Ξ ）を測定する。式（6．15）から明らかなように，影響係数 a_1 ， a_2 は次式で与えられる。

$$a_1 = \Xi_\Xi / \varepsilon_{\Xi t}, \quad a_2 = H_\Xi / \varepsilon_{\Xi t} \qquad (A.6.1)$$

次にH軸上に単位の試しおもり ε_{Ht}（ $\varepsilon_{\Xi t} = 0$ ）を取つけ，振動振幅 V_H（ Ξ_H ， H_H ）を測定

すると，

$$a_2' = -\Xi_H / \varepsilon_{Ht}, \quad a_1 = H_H / \varepsilon_{Ht} \qquad (A.6.2)$$

が得られる。このように2度の手数をかけると正確な影響係数マトリックス$\boldsymbol{A}$が求まり，従って断面非対称ロータのつり合せは常に1回で終了する。これは岩壺〔39〕，神吉〔53〕が提案したバランス法に他ならない。

第7章　結　　論

現在，大形回転機が直面しているロータの振動問題のうち，ロータの曲げ剛性の異方性，すなわち断面非対称に起因する振動について，工業的応用面に主眼を置いて理論・実験の両面から研究をすすめた。その結果，断面非対称量の推定法，2倍調波振動の解析法，断面非対称ロータのバランス法などが確立できた。この結果を要約すると次の通りである。

(1)　工場で製作されたロータの断面非対称量測定法を提案し，単純なロータでこの方法の有用性を確認した。さらに実際のタービン発電機ロータの断面非対称測定例を示した。この方法で多数のロータの断面非対称量が評価可能となり，今後本方法は直接・間接的に断面非対称量の低減に役立つと期待される。

(2)　回転機械運転時の信頼性確認の観点から，断面非対称ロータに特有の不安定振動に対し，現在のロータがどの程度の余裕をもって運転されているかを調べた。あるロータの最大実効非対称率 $\mathbf{k}$ は0.34で，不安定限界 $\mathbf{k}=1.0$ に対して十分な余裕があった。このロータは平均的断面非対称を持つとわかっているので，現在の大多数のロータの不安定裕度もほぼこの程度と推察される。

(3)　水平に据付けられた断面非対称ロータに現れる2倍調波振動について，振幅計算法を示した。従来の研究では，2主軸方向の固有振動数差に比例する項のみが明らかにされていた。これに対しタービン発電機のように複雑な形状のロータでは，固有振動数差以外に，2主軸方向の等価質量差と固有モード差とが重要なことを明らかにした。実際の発電機ロータについて，断面非対称の存在個所と2倍調波振動振幅の関係を調べ，その一例を示した。この解析と(1)項の計測とを組み合せると，2倍調波振動は効果的に低減できると予想される。

(4)　煩雑な断面非対称ロータ固有のバランス法を避け，断面非対称ロータに通常の断面対称ロータのバランス法を適用した場合，どんな現象が起るかを調べた。その結果，つり合せに収束の概念を導入し，また一連の何回かのつり合せでバランスを最適化すべきことを提案した。さらに，試しおもりの取つけ位置によって残留不つり合が収束したり発散したりすること，収束係数の採用でバランスの収束性が改善されること，を明らかにした。ここに述べた留意点に配慮すれば，断面非対称が発電機ロータのつり合せに及ぼす影響が最少にできると考えられる。

本研究の成果は，最近の大形回転機，特に断面非対称ロータの特長が著るしい大容量2極タービン発電機の振動改善，ひいては運転時の信頼性向上に貢献するものと確信する。

参　考　文　献

(1) Timoshenko,S., Young, D. H., 谷下，渡辺訳，工業振動学（昭 31）152～154，東京図書

(2) Smith,D. M., The Motion of Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings, Proc. Roy. Soc. Ser.A, Vol. 142 (1933)92～118

(3) Den Hartog, J.D., 谷口，藤井訳，機械振動論（昭 35）272～275，376～379，コロナ社

(4) Taylor, H. D., Critical Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts, Jour. Appl. Mech., Vol.7, No.2（1940－7）A71～A79

(5) 井上，横溝を有する軸の曲げ剛性，電気学会雑誌，Vol.61, No. 632（昭 16－3）83～84

(6) Foote, W. R., Poritsky, H., Slader, Jr. J. J., Critical Speeds of a Rotor with Unequal Shafts Flexibilities, Mounted in Bearings of Unequal Flexibility－I, Jour. Appl. Mech., Vol. 10, No. 2（1943－6）A77～A84

(7) 椹木，松田，菅原，振動系の復元力が変位並びに時間のかん数であらわされる場合の強制振動について，機械学会論文集，Vol. 17, No. 64（昭 26）1～5

(8) Kellenberger, W., Forced,Double frequency, Flexural Vibrations in a Rotating, Horizontol, Cylindrical Shaft, Brown Boveri Review, Vol.42, No. 3（1955）79～85

(9) Federn, K., Grundlagen einer Systematishen Schwingungsentstörung Wellenelastisher Rotern, VDI－Berichte, Bd. 24（1957）9～25

(10) Kellenberger, W., Biegeshwingungen einer unrunden, rotierenden Welle in horizontaler Lage, Ing－Arch., Bd. 26（1958）302～318

(11) Hagg, A.C., Sankey,G.O., Elastic and Damping Properties of Oil－Film Jonrnal Bearings for Application to Unbalance Vibration Calculation, Trans. ASME. Jour. Appl. Mech., Vol. 80（1958－3）141～143

(12) Kellenberger, W., Flexible Vibrations in a Non－Circular Shaft

Rotating about the Horizontal Axis, Brown Boveri Review, Vol. 46, No. 3 (1959-3) 182～194

(13) Hull, E. H., Shaft Whirling as Influenced by Stiffness Asymmetry, Trans. ASME., Jour. Enging. Industry. Vol. 83, No. 2 (1961-5) 219～226

(14) Dimentberg, F. M., The Flexible Vibration of Rotating Shaft (1961) 155～213, Butterworths, London

(15) 山本，太田，非対称回転体の振動について，機械学会論文集，Vol.28, No. 188 (昭 37-4) 475～485

(16) 山本，太田，非対称回転体の振動について（主危険速度付近における軸系の共振曲線），機械学会論文集，Vol. 28, No. 194 (昭 37-10) 1272～1282

(17) Lindley, A. L. G., Bishop, R. E. D., Some Recent Reseach on the Balancing of Large Flexible Rotors, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 177, No. 30 (1963) 811～841

(18) Aiba, S., On the Vibration and the Critical Speeds of an asymmetrical rotating Shaft, Report of the Faculty of Engineering Yamanashi Univ., No. 13 (1963-2) 30～43

(19) Goodmann, T. P., A Least-Squares Method for Computing Balancing Corrections, Trans. ASME., Jonr. Enging. Industry, Vol. 86 (1964-8) 273～279

(20) Lund, J. W., Spring and Damping Coefficients for the Tilting-Pad Journal Bearing, ASLE, Trans., Vol. 7 (1964) 342～352

(21) Ariaratnam, S. T., The Vibration of Unsymmetrical Rotating Shafts, Trans. ASME., Jour. Appl. Mech., Vol. 32, No. 1 (1965-3) 157～162

(22) Bishop, R. E. D., Parkinson, A. G., Second Order Vibration of Flexible Shafts, Phil. Trans. A., Vol. 259, No. 1095 (1965) 1～31

(23) Tondl, A., 前沢訳，回転軸の力学，(昭 46-5) 57～104，コロナ社

(24) Morton, P. G., On the Dynamics of Large Turbo-Generator Rotors, Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol. 180, Pt. 1, No. 12, (1965～66) 295～329

(25) Kellenberger, W., Der magnetishe Zug in Turbogenerator−Rotoren als Ursache einer Instabilität des mechanishen Laufes, Archiv für Electrotechnik, Bd. 50, Heft. 4 (1966) 253〜265

(26) Orcutt, F.K., Arwas, E. B., The Steady State and Dynamic Characteristics of a Full Circular Bearing and a Partial Arc Bearing in the Laminar and Turbulent Flow Regims, ASME. Paper, 66−Lubs−4 (1966)

(27) Parkinson, A. G., On the Balancing of Shafts with Axial Asymmetry, Proc. Royal Society, A, Vol. 294 (1966) 66〜79

(28) Szeri, A., Linearized Forced Coefficients of a 110° Partial Journal Bearing, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 181, Pt.3B, (1966) 83〜86

(29) 今井，大石，村上，大容量タービン発電機の機械的問題，三菱電機技報，Vol. 40, No. 11, (昭 41−11) 1700〜1707

(30) Orcutt, F. K., The Steady−State and Dynamic Characteristics of the Tilting Pad Joural Bearing in Laminar and Turbulent Flow Resimes, Trans. ASME., Ser. F, Jour. Lub. Tech., Vol. 89, No. 3 (1967−7) 392〜404

(31) Black, H. F., Mcternam, A. J., Vibration of a Rotating Asymmetric Bearings, Jour. Mech. Enging. Sciense, Vol. 10, No. 3 (1968) 252〜261

(32) 川井，岩壺，神吉，有限駆動力をもつ非対称回転軸の危険速度通過に関する研究，機械学会論文集，Vol. 35, No. 288 (昭 44−12) 2325〜2333

(33) 岩壺，弾性ロータの振動およびつりあわせに関する研究，学位論文 (昭 46−2)

(34) 山本，河野，回転する方位性を持つ回転体の強制振動，機械学会論文集，Vol. 37, No. 294 (昭 46−2) 276〜285

(35) 小寺，積分方程式による弾性ロータの振動解析（第3報，危険速度通過問題），機械学会論文集，Vol. 37, No. 297 (昭 46−5) 941〜948

(36) 岩壺，川井，非対称回転軸の振動，機械学会論文集，Vol. 37, No. 300 (昭 46−8) 1503〜1512

(37) 三輪他，弾性ロータのつりあわせ，機械学会論文集

Vol. 37, No. 297 (昭 46−5) 949〜958,
Vol. 38, No. 305 (昭 47−1) 72〜 82,
Vol. 39, No. 318 (昭 48−2) 631〜642,
Vol. 40, No. 332 (昭 49−4) 934〜944,
Vol. 43, No. 369 (昭 52−5) 678〜1686,
機械学会講演論文集, No. 788−2 (昭 53−5, 九州支部) 17〜24

(38) Lund, J. W., Tonnesen, J., Analysis and Experiments on Multi−Plane Balancing of a Flexible Rotor, Trans. ASME. Jour. Enging. Industry, Vol. 94, No. 1 (1972−2) 233〜242

(39) 岩壺, 中村, 川井, 非対称弾性ロータのつりあわせ, 機械学会講演論文集, No. 720−3 (昭 47−4) 115〜128

(40) Kellenberger, W., Should a Flexible Rotor be Balanced in N or (N+2) Planes ?, Trans. ASME., Jour. Enging. Industry, Vol. 94, No. 2 (1972−5) 548〜560

(41) Bishop, R. E. D., Parkinson, A. G., On the Use of Balancing Machines for Flexible Rotors, Trans. ASME., Jour. Enging. Industry, Vol. 94, No. 2 (1972−5) 561〜576

(42) 岩壺, 室津, 渡辺, ロータのつりあわせに及ぼす測定誤差の影響, 機械学会論文集, Vol. 38, No. 318 (昭 47−10) 2535〜2542

(43) Iwatsubo, T., Kanki, H., Kawai, R., Vibration of Asymmetric Rotor through Critical Speed with Limited Power Supply, Jour. Mech. Enging. Science, Vol. 14, No. 3 (1972) 184−194

(44) 白木, 神吉, 中根, 藤井, 大形タービンロータのフィールドバランス, 三菱重工技報, Vol. 10, No. 6 (昭 48−11) 7〜17

(45) 飯田, チルチングパッド軸受の振動特性の研究, 機械学会論文集, Vol. 40, No. 331, (昭 49−3) 875〜884

(46) 松倉, 井上, 非対称回転軸の振動, 機械学会講演論文集, No. 740−3 (昭 49−4) 171〜174

(47) 岩壺, 神吉, 川井, 有限駆動力を持つ非対称回転軸の危険速度通過に関する研究(第2報, 回転軸の偏心の位相角の影響), 機械学会論文集, Vol.40, No. 335 (昭 49−

7） 1908～1915

(48) 白木，神吉，中根，藤井，大形タービンロータのつりあわせに関する最近の進歩，三菱重工技報，Vol.11，No. 4 （1974-7） 83～89

(49) Balda, M., Dynamic Properties of Turboset Rotors, Simposium on Dynamics of Rotors （IUTAM），（1974-8） Lyngby, Denmark

(50) Shiraki, K., Kanki,H., New Balancing Method on Tandem Connected Multispan Flexible Rotor Systems, Symposium on Dynamics of Rotors （IUTAM），（1974-8） Lyngby, Denmark

(51) 沖島，近藤，非対称弾性支持した非対称回転軸の危険速度領域に関する研究（第2報，強制振動について），機械学会論文集，Vol. 40，No. 338（昭 49-10） 2843～2851

(52) 河村，松倉，大容量ブラシレス励磁機の機械的問題，三菱電機技報，Vol. 49，No. 6 （昭 50-6） 457～462

(53) 神吉，非対称回転軸のつりあわせ法（第1報），機械学会講演論文集，No. 750-10 （昭 50-9） 15～18

(54) 神吉，稲垣，一般的非対称ロータ・軸受系のふつりあい応答（第1報），機械学会講演論文集，No. 750-4 （昭 50-10） 141～144， 仝上（第2報）No. 760-3 （昭 51-4） 41～44， 仝上（第3報），関西支部53期定時総会（昭 53-3） 71～74

(55) 藤沢他，多スパン系の不釣合振動応答，機械学会講演論文集，No. 760-3 （1976-4） 37～40， 多軸受回転軸系のつりあわせ法（第2報），新潟地方講演会（昭 51-6）長岡，65～68， 仝上（第3報），No. 760-14 （昭 51-10） 77～79， 仝上（第4報）関西支部第52期定時総会（昭 52-3） 35～37， モード別影響係数を用いた大形回転機のつりあわせ法，No. 770-3 （昭 52-4） 4～6

(56) 川面，松倉，青木，八木，長大軸系の横振動解析プログラム“MARS”の概要，三菱電機技報，Vol. 50， No. 7 （昭 51-7） 401～406

(57) 菅波，増田，山本，佐野，ジャーナルすべり軸受の性能におよぼす粘度変化の影響，潤滑，Vol. 21， No. 8 （1976-8） 519～526

(58) 井上，松倉，分布非対称軸の重力による振動応答計算，機械学会講演論文集，No. 760-14 （昭 51-10） 74～76

(59) 神吉,多軸受弾性ロータ系の振動とつりあわせに関する研究,大阪大学学位論文(昭51－10)
(60) 川面，松倉，井上，異方性こわさの軸受で支持された回転軸の横振動解析，機械学会論文集，Vol. 42, No. 364 (昭51－12) 3794～3802
(61) Kawamo, K., Matsukura, Y., Inoue, T., Analysis of Lateral Vibration Characteristics for Rotating Shafts with Flexible and Axi-asymmetric Bearings, Bull. JSME., Vol. 20, No. 146 (1977－8) 930～936
(62) 藤沢，塩幡，弾性ロータのつりあわせ法(第1報)，機械学会講演論文集，No. 770－12(1977－10) 72～74, 仝上(第2報)No. 783－2(1978－3) 90～92
(63) Bigret, R., Curami, A., Frigeri, C., Macchi, A., Use of In-Field Computer for Balancing of High Power Turbo-Machinery, ASME.Paper, 77-DET-11 (1977)
(64) 山本，石田，相沢，偏平軸の分数調波振動について，機械学会論文集， Vol. 44, No. 382 (昭 53－6) 1934～1942
(65) 速水，伊藤，松本，植松，松尾，東京電力㈱袖ケ浦発電所4号1000Mwクロスコンパウンドタービン発電機，三菱電機技報，Vol. 52, No. 7(昭 53－7) 550～554
(66) 松倉，井上，木曽，富沢，大石，非対称ロータの断面非対称分布の推定，機械学会論文集，Vol. 44, No. 384(昭 53－8) 2625～2632
(67) 松倉，木曽，井上，断面非対称ロータのバランスの収束性，機械学会論文集，Vol. 44, No。388(昭 53－12) 4096～4104
(68) Matsukura, Y., Inoue, T., Kiso, M., Tomisawa, M., Oishi, N., Estimation of the Distributing Cross Sectional Asymmetry, Bull. JSME., Vol. 22, No. 166 (1979－4) 491～496
(69) Matsukura, Y., Inoue, T., Kiso. M., Tomisawa, M., On the Balancing Convergence of Flexible Rotors, with Special Reference to Asymmetric Rotors, Jour. of Sound and Vibration, Vol. 63, No. 3(1979－4－8) 419～428
(70) 松倉，富沢，井上，断面非対称軸の2倍調波振動，機械学会論文集， Vol. 46, No. 406 (昭 55－6) 591～597

謝　　辞

本研究の遂行と本論文の作成の過程において，懇切丁寧なご指導とご鞭達を賜りました大阪大学中川憲治教授に謹んで深謝の意を表します。

さらに，論文を校閲して戴きました大阪大学赤木新介教授，井川直哉教授，山田朝治教授，浜田実教授にも厚く感謝の意を表します。

本研究の遂行にあたり，変わらぬご支援を戴きました三菱電機喜連川隆常任顧問，志岐守哉常務，神戸製作所甲斐高所長，甘粕忠男部長，赤穂製作所村上卓彌副所長，稲沢製作所三矢周夫部長，福井工業大学平野一郎教授ほか関係者に厚くお礼申し上げます。

とくに平野教授には，三菱電機入社以来，振動工学の手ほどきから始め，研究課題の遂行を通じ懇篤なご指導を受けました。ここに改めて深謝申し上げます。

また本研究の幾多の困難な解析，実験の遂行にあたり，熱心な協力を戴きました三菱電機鎌倉製作所井上登志夫技師，中央研究所木曽又一郎主任，富沢正雄技師に心から感謝の意を表します。さらに常にご協力と励ましを戴きました三菱電機神戸製作所，稲沢製作所，中央研究所，三菱重工高砂研究所の諸氏にも感謝致します。