OUKA
Osaka University Knowledge Archive

Title	球面と平面の接触機構とその工学的応用に関する研究
Author(s)	石垣, 博行
Citation	大阪大学, 1979, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1706
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

球面と平面の接触機構とその工学的応用に関する研究

昭和53年9月

大阪府立大学 工学部

石垣 博行

大阪大学附属図書館
54.10.26

球面と平面の接触機構とその工学的応用に関する研究

昭和53年9月

大阪府立大学 工学部

石垣 博行

目　　次

緒　　論 …… 1

第１編　粗さを有する平面と球の接触機構

第１章　単一突起の変形 …… 9

1.1　緒　　言 …… 9

1.2　理　　論 …… 10

1.2.1　弾性接触突起の変形 …… 10

1.2.2　塑性接触突起の変形 …… 12

1.3　実験および考察 …… 14

1.3.1　実　験　装　置 …… 14

1.3.2　実験結果および考察 …… 16

1.3.3　近接量の近似式表示 …… 20

1.4　結　　言 …… 21

第２章　均一形状突起を有する平面と球の接触 …… 23

2.1　緒　　言 …… 23

2.2　理　　論 …… 23

2.2.1　突起が弾性変形する場合 …… 23

2.2.2　突起が塑性変形する場合 …… 26

2.3　数値計算手順 …… 28

2.4　数値計算結果 …… 29

2.4.1　突起が弾性変形する場合 …… 29

2.4.2　突起が塑性変形する場合 …… 33

2.5　実験方法および実験結果 …… 34

2.5.1 突起が弾性変形する場合 …… 34
2.5.2 突起が塑性変形する場合 …… 35
2.6 結　　言 …… 38

第3章 最初の接触位置 …… 39
3.1 緒　　言 …… 39
3.2 理　　論 …… 39
3.2.1 方向性のある表面粗さの場合 …… 40
3.2.1.1 突起間隔分布を指数分布と仮定する場合 …… 41
3.2.1.2 突起間隔を均一間隔と仮定する場合 …… 43
3.2.2 方向性のない表面粗さの場合 …… 43
3.3 数値計算結果 …… 45
3.3.1 方向性のある表面粗さの場合 …… 45
3.3.2 方向性のない表面粗さの場合 …… 48
3.4 実　　験 …… 50
3.4.1 実験方法 …… 50
3.4.2 実験結果 …… 52
3.5 考　　察 …… 55
3.5.1 表面粗さの方向性の影響 …… 55
3.5.2 表面うねりの影響 …… 57
3.5.3 突起の変形の影響 …… 59
3.6 結　　言 …… 63

第4章 方向性のない表面粗さを有する平面と球の接触 …… 66
4.1 緒　　言 …… 66
4.2 理　　論 …… 66

4.2.1 突起が塑性変形する場合 …… 67
4.2.2 突起が弾性変形する場合 …… 70
4.3 数値計算結果 …… 72
4.3.1 数値計算法についての検討 …… 72
4.3.2 突起が塑性変形する場合 …… 75
4.3.2.1 母材の弾性変形 …… 75
4.3.2.2 食込み位置 …… 76
4.3.3 突起が弾性変形する場合 …… 76
4.3.3.1 真実接触面積 …… 76
4.3.3.2 有効接触域半径 …… 77
4.3.3.3 みかけの最大接触圧力 …… 77
4.4 実験 …… 78
4.4.1 突起が塑性変形する場合 …… 78
4.4.2 突起が弾性変形する場合 …… 79
4.4.2.1 試験片材質 …… 79
4.4.2.2 試験片の表面粗さに関する諸元 …… 80
4.4.2.3 近接量測定結果 …… 82
4.5 考察 …… 83
4.5.1 突起の変形形態に関する判定基準 …… 84
4.5.2 母材の塑性変形開始条件 …… 87
4.5.3 突起形状の設定の影響 …… 90
4.5.4 Z_{os} が確定量の場合とランダム量の場合との相違 …… 91
4.6 結言 …… 94

第５章　方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触 …… 96
5.1　緒　　言 …… 96
5.2　理　　論 …… 96
5.2.1　突起が弾性変形する場合 …… 96
5.2.2　突起が塑性変形する場合 …… 100
5.2.2.1　負荷過程の接触機構 …… 100
5.2.2.2　除荷過程の接触機構 …… 102
5.3　数値計算結果 …… 104
5.3.1　突起が弾性変形する場合 …… 104
5.3.2　突起が塑性変形する場合 …… 108
5.4　実　　験 …… 110
5.4.1　突起が弾性変形する場合 …… 111
5.4.2　突起が塑性変形する場合 …… 112
5.5　考　　察 …… 113
5.5.1　突起の変形形態に関する判定基準 …… 113
5.5.2　母材の塑性変形開始条件 …… 120
5.5.3　Z_{op} が確定量の場合とランダム量の場合との比較 …… 121
5.6　結　　言 …… 123

第２編　接触理論の工学的応用
第１章　転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響 …… 127
1.1　緒　　言 …… 127
1.2　転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響 …… 127
1.2.1　全接触突起が弾性変形する場合 …… 129
1.2.1.1　理　　論 …… 129
1.2.1.2　数値計算結果 …… 131
1.2.1.3　実　　験 …… 132
1.2.1.4　考　　察 …… 135
1.2.2　全接触突起が塑性変形する場合 …… 136
1.2.2.1　理　　論 …… 136
1.2.2.2　数値計算結果 …… 139
1.2.2.3　実　　験 …… 141
1.2.2.4　考　　察 …… 144
1.3　転がり抵抗の変動成分について …… 147
1.3.1　突起の変形が無視できる場合 …… 148
1.3.1.1　理　　論 …… 148
1.3.1.2　数値計算結果 …… 150
1.3.1.3　実　　験 …… 151
1.3.1.4　考　　察 …… 152
1.3.2　突起の変形を考慮に入れた場合 …… 153
1.3.2.1　理　　論 …… 153
1.3.2.2　数値計算結果 …… 154
1.3.2.3　実　　験 …… 157
1.3.2.4　考　　察 …… 158
1.4　結　　言 …… 160

第２章　表面おうとつの測定精度について …… 163
2.1　緒　　言 …… 163
2.2　表面粗さ測定精度について …… 163
2.2.1　触針半径の影響 …… 163
2.2.2　スキッドの上下変動の影響 …… 164
2.2.2.1　理　　論 …… 164
2.2.2.2　実　　験 …… 167
2.2.2.3　考　　察 …… 169
2.2.3　MシステムとEシステムの比較 …… 174
2.2.3.1　理　　論 …… 175
2.2.3.2　実　　験 …… 178
2.2.3.3　考　　察 …… 178
2.3　転がり円うねりに関する基礎的考察 …… 180
2.3.1　転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗さの影響 …… 180
2.3.2　ろ波中心線うねりと転がり円中心線うねりの関係 …… 181
2.3.3　断面曲線のパワースペクトルと転がり円曲線の標準偏差の関係 …… 184
2.3.3.1　理　　論 …… 184
2.3.3.2　シミュレーション計算結果との比較 …… 186
2.3.3.3　考　　察 …… 188
2.4　結　　言 …… 191

総　　括 …… 194

謝　　辞 …… 197

主 要 記 号 表

A	輪切りされただ円放物体の xy 平面への投影面積
A_p	塑性接触時の真実接触面積
A_r	弾性接触時の真実接触面積
A', B'	任意の曲面物体間の接触を平面と2次曲面物体との接触に置きかえたときの2次曲面の方程式の x^2, y^2 の係数
a	$2a$ で，単一接触突起の接触面だ円短径を表す。
a_r	除荷過程における a
a_n	$2a_n$で，n 番目の接触突起の接触面だ円短径を表す。
B, C	単一接触突起に作用する荷重と近接量の関係を表す式の変数
b	$2b$ で，単一接触突起の接触面だ円長径を表す。
b_r	除荷過程における b
b_n	$2b_n$で，n 番目の接触突起の接触面だ円長径を表す。
c_i, d_i	球および平面の母材の弾性変位量を $2i$ 次方程式で表した場合の係数
D_j	$j/2$ 回目の往復における前進，後進時の転がり抵抗の差
E	$2\left(\frac{1-\nu_2^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$
E_1, E_2	球，および平面の縦弾性定数
E'	第2種完全だ円積分
F	転がり摩擦力
F'	第1種完全だ円積分
F_{ad}	凝着力による転がり摩擦力（粗い面）
F_{ad0}	凝着力による転がり摩擦力（なめらかな面）
F_{bj}	j 回目の往復における後退時の転がり抵抗測定値
F_{fj}	j 回目の往復における前進時の転がり抵抗測定値
F_R	ポテンシャル成分による転がり抵抗力
F_{Rfj}	j 回目の往復におけるポテンシャル成分（前進時）

F_{Rbj}	j回目の往復におけるポテンシャル成分（後進時）
F_r	粗い面の転がり摩擦力（弾性接触）
F_{rfj}	j番目の往復における転がり摩擦力成分（前進時）
F_{rbj}	j番目の往復における転がり摩擦力成分（後退時）
F_p	粗い面の転がり摩擦力（塑性接触）
F_s	滑らかな面の転がり摩擦力（弾性接触）
f_a, f_b	帯域制限スペクトル分布の下限周波数と上限周波数
f_m	中心周波数　$=\frac{1}{2}(f_a+f_b)$
f_R	転がり抵抗係数
h_p	表面粗さ曲線の中心線を基準高さとする突起頂点高さ
h_τ	母材内で最大せん断応力が生じる深さ
J	$\frac{\sqrt{1.5}\ \ddot{\sigma}_s^2}{\sigma_s\ \ddot{\sigma}_s}$
k	$(1-\frac{a_n^2}{b_n^2})^{\frac{1}{2}}$
k_c	$\tau_{max}=k_c\,p_m$　で塑性変形開始条件を表す。
k_{max}	球の中心軸から最も離れた接触突起の番号
k_s	真実表面積とみかけの面積の比
l	突起間隔
$M_m(\Delta x)$	Δx 区間中に突起がm個存在する確率
m_n	n次モーメント
N	平均接触突起個数
N_i	R_{max}測定中に含まれる独立なサンプリング数
N_o	零交さ数
N_s	接触表面単位数
n_p	突起線密度（方向性あり）
n_{p3}	突起面密度（方向性なし）

n_s	表面単位面密度
p	分布圧力
p_{av}	接触突起の接触面平均圧力
p_f	転がり前面部の分布圧力
p_H	ヘルツ圧力
p_m	材料の流れ圧力
p'_m	相当流れ圧力
p_{max}	最大圧力
p_{mc}	接触突起の大半が塑性変形する臨界流れ圧力
p_n	n 番目の突起上の分布圧力
p_r	転がり後方部の分布圧力
R	球の半径，相当曲率半径（$=R_x R_y)^{\frac{1}{2}}$
R'	母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径
R_A	全接触面積に占める塑性接触突起の接触面積比
R_a	中心線平均粗さ
R'_a	スキッド使用時の中心線平均粗さ
$R_{a(E)}$	E システムの中心線平均粗さ
$R_{a(M)}$	M システムの中心線平均粗さ
R_{Ap}	塑性接触突起と弾性接触突起の接触面積比（平面間接触）
R_{As}	塑性接触突起と弾性接触突起の接触面積比（平面と球の接触）
R_{max}	最大高さ粗さ
R'_{max}	スキッド使用時の最大高さ粗さ
$R_{p(E)}$	E システムの平滑粗さ
R_{rms}	自乗平均粗さ
R'_{rms}	スキッド使用時の自乗平均粗さ
R_x	だ円放物面の x 方向曲率半径

R_y	だ円放物面の y 方向曲率半径
R_z	10点平均粗さ
R'_z	スキッド使用時の10点平均粗さ
R_W	塑性接触突起と弾性接触突起の荷重分担比
r_e	有効接触域半径
r_m	みかけの接触域半径
S	ワイブル分布の形状母数
S_{ae}	単一弾性接触突起の接触面積
S_{ap}	単一塑性接触突起の接触面積
S_k	k 番目の接触突起の接触領域
T	収束位置
t	z 軸に最も近い突起の x 座標
t_p	$= log\ (\sigma_p n_p^2 R)$
t_s	$= log\ (\sigma_s n_s R)$
U	*unit function*
u	突起頂点平均高さを基準にした食込み位置
u'	表面粗さ曲線の中心線を基準にした食込み位置
W	荷　重
W_a	単一突起に作用する荷重
W_c	母材が塑性変形を開始する臨界荷重
W_{CA}	ろ波中心線うねり
W_{CS}	ろ波うねり曲線の標準偏差
W_{EA}	転がり円中心線うねり
W_{ES}	転がり円うねり曲線の標準偏差
W'_{ES}	表面粗さの影響を除去した W_{ES}
W_e	弾性接触突起全体で受けもつ荷重

W_f	転がり前方部で支える荷重
W_n	n 番目の接触突起に作用する荷重
W_p	塑性接触突起全体で受けもつ荷重
W_r	転がり後方部で支える荷重
W_z	Z_{op} をランダム量とする場合と確定量とする場合とで Z_{op} がほぼ等しい値になる臨界荷重
W_u	表面単位理論における平面間接触時の荷重
w	変位（$=w_a+w_m$）
w_a	突起の変形による表面変位
w_e	突起の接触面上の一点における弾性変位量
w_m	母材の変形による表面変位
x_i	突起の中心軸の x 座標
x_{max}	x 軸方向接触域
Y	降伏応力
y_{max}	y 軸方向接触域
Z_i	最初の接触位置
Z_{ip}	突起頂点平均高さを基準にした最初の接触位置
Z_{is}	表面粗さ曲線の中心線を基準にした最初の接触位置
Z_{op}	突起頂点平均高さを基準にした接触高さ
Z_{os}	表面粗さ曲線の中心線を基準にした接触高さ
Z_{or}	除荷過程における Z_{op}
Z_{om}	最大負荷時の Z_{op}
Z_{max}	十分広い機械表面内の突起頂点高さの最大値
Z_s	仮想曲面の高さ
Z_p	表面粗さ曲線の中心線を基準とした突起頂点高さ

α	近接量
α_a	突起の変形による近接量
α_{ea}	突起の弾性近接量
α'_{ea}	接触面内最大弾性変位量
α_{era}	突起の弾性近接量（除荷過程）
α_{e1}	$n=0$ 以外の突起接触部の圧力による $n=0$ の接触面だ円中心の弾性変位量
α_{e2}	$n=0$ の突起接触部の圧力のみによる接触面だ円中心の弾性変位量
α_{cr}	塑性変形開始の臨界近接量
α_l	弾性履歴損失係数
α_m	母材の弾性変形による球の近接量
α_n	n 番目の接触突起の近接量
α_{pa}	突起の塑性近接量
α'_{pa}	不完全接触状態の突起の真の塑性近接量
α_{pra}	突起の塑性近接量（除荷過程）
α_p	突起の塑性変形による球の近接量
β	突起先端曲率半径（2次元）
β_3	突起先端曲率半径（3次元）
γ_f, γ_r	$\gamma_f R$, $\gamma_r R$ で転がり接触時の母材の弾性変形による球の平面に対する x 軸方向の転がり前方，および後方部の相対的曲率半径を表す。
γ_x, γ_y	$\gamma_x R$, $\gamma_y R$ で押付け時の母材の弾性変形による球の平面に対する相対的曲率半径を表す。
γ_{xr}, γ_{yr}	除荷時の γ_x , γ_y
ζ_{zip}	方向性のある表面粗さの場合の最初の接触位置の中心線平均値
ζ_{zis}	方向性のない表面粗さの場合の最初の接触位置の中心線平均値
η	ワイブル分布の尺度母数

θ	突起の傾斜角
λ	球の中心線の x 座標
λ_c	カットオフ波長
ν_1, ν_2	球，および平面のポアソン比
σ	断面曲線の標準偏差
σ_E	転がり曲線の標準偏差
σ_F	転がり抵抗の標準偏差
σ_f	転がり抵抗係数の標準偏差
σ_M	球に作用するモーメントの標準偏差
σ_p	突起頂点高さの標準偏差（方向性のある表面粗さ）
σ_{p3}	突起頂点高さの標準偏差（方向性のない表面粗さ）
σ_R	高域フィルタのカットオフ値 0.8 mm で測定される断面曲線の標準偏差
σ_s	表面単位の高さの標準偏差
$\dot{\sigma}_s$	表面粗さ曲線の傾きの標準偏差
$\ddot{\sigma}_s$	表面粗さ曲線の２次微係数の標準偏差
σ_w	高域フィルタのカットオフ値 2.5 mm で測定される断面曲線の標準偏差
σ_{wave}	表面うねり成分のみによる転がり曲線の標準偏差
σ_{zi}	最初の接触位置の標準偏差（スキッド上下変動の標準偏差）
σ_{zi}^F	フィルタ通過後のスキッド上下変動の標準偏差
σ_{zip}	方向性のある表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差
σ_{zis}	方向性のない表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差
σ'_{zis}	表面粗さの外に表面うねり成分も含む面の σ_{zis}
σ_{zop}	方向性のある表面粗さに関する接触高さの標準偏差
σ_{zos}	方向性のない表面粗さに関する接触高さの標準偏差
τ	せん断応力
τ_c	せん断降伏応力

τ_{max}	最大せん断応力
Φ	転がり前方部の入力仕事
Φ_R	粗い面の場合の Φ
Φ_S	なめらかな面の場合の Φ
Φ_W	$\Phi_W \alpha_n^{\frac{3}{2}}$ で突起に作用する荷重を表す。
Ψ	接触面形状を定めるための媒介変数
φ	z 軸に最も近い突起の中心軸の座標
φ_P	平面間接触における塑性指標
φ_S	球と平面の接触における塑性指標
φ_W	荷重分担比を基準とした突起変形形態判定基準

無次元化表示

$$A^*=\frac{A}{R^2} \qquad A_p^*=\frac{A_p}{R^2} \qquad A_r^*=\frac{A_r}{R^2}$$

$$a^*=\frac{a}{R} \qquad a_r^*=\frac{a_r}{R} \qquad b^*=\frac{b}{R} \qquad b_r^*=\frac{b_r}{R}$$

$$F_p^*=\frac{F_p}{ER^2} \qquad l^*=\frac{l}{R} \qquad n_p^*=n_pR \qquad n_s^*=n_sR^2$$

$$p^*=\frac{p}{\pi E} \qquad p_f^*=\frac{p_f}{\pi E} \qquad p_m^*=\frac{p_m}{\pi E} \qquad p_{max}^*=\frac{p_{max}}{\pi E}$$

$$p_{mc}^*=\frac{p_{mc}}{\pi E} \qquad p_r^*=\frac{p_r}{\pi E} \qquad R_x^*=\frac{R_x}{R_y} \qquad u^*=\frac{u}{R_1}$$

$$u'^*=\frac{u'}{R} \qquad W^*=\frac{W}{ER^2} \qquad W_a^*=\frac{W_a}{ER_y^2}=\frac{W_a}{E(R\gamma_y)^2} \qquad W_e^*=\frac{W_e}{ER^2}$$

$$W_f^*=\frac{W_f}{ER^2} \qquad W_p^*=\frac{W_p}{ER^2} \qquad W_r^*=\frac{W_r}{ER^2}$$

$$w^*=\frac{w}{R} \qquad w_a^*=\frac{w_a}{R} \qquad w_e^*=\frac{w_e}{R} \qquad w_m^*=\frac{w_m}{R}$$

$$x^*=\frac{x}{R} \qquad x_{max}^*=\frac{x_{max}}{R} \qquad y^*=\frac{y}{R} \qquad y_{max}^*=\frac{y_{max}}{R}$$

$$z^* = \frac{z}{R} \qquad z_i^* = \frac{z_i}{R} \qquad z_{ip}^* = \frac{z_{ip}}{R} \qquad z_{is}^* = \frac{z_{is}}{R}$$

$$z_{max}^* = \frac{z_{max}}{R} \qquad z_{op}^* = \frac{z_{op}}{R} \qquad z_{os}^* = \frac{z_{os}}{R} \qquad z_{om}^* = \frac{z_{om}}{R}$$

$$z_{or}^* = \frac{z_{or}}{R} \qquad \alpha^* = \frac{\alpha}{R} \qquad \alpha_a^* = \frac{\alpha_a}{R_y} = \frac{\alpha_a}{R\gamma_y} \qquad \alpha_{ea}^* = \frac{\alpha_{ea}}{R_y} = \frac{\alpha_{ea}}{R\gamma_y}$$

$$\alpha_{era}^* = \frac{\alpha_{era}}{R\gamma_y} \qquad \alpha_{pa}^* = \frac{\alpha_{pa}}{R_y} = \frac{\alpha_{pa}}{R\gamma_y} \qquad \alpha_{pra}^* = \frac{\alpha_{pra}}{R\gamma_y} \qquad \beta^* = \frac{\beta}{R}$$

$$\beta_3^* = \frac{\beta_3}{R} \qquad \zeta_{zip}^* = \frac{\zeta_{zip}}{R} \qquad \zeta_{zis}^* = \frac{\zeta_{zis}}{R} \qquad \sigma_p^* = \frac{\sigma_p}{R}$$

$$\sigma_s^* = \frac{\sigma_s}{R} \qquad \sigma_{zis}^* = \frac{\sigma_{zis}}{R} \qquad \sigma_{zis}^* = \frac{\sigma_{zis}}{R} \qquad \tau_{max}^* = \frac{\tau_{max}}{\pi E}$$

緒　　論

転がり抵抗と表面粗さの関係は，転がり抵抗発生原因を表面粗さで説明しようとした *J. J. Bikerman* の表面粗さ説[1)] 以来の古典的な問題であるが転がり抵抗の現象の複雑さゆえにいまだに定性的にも明確な説明がなされていない。本研究はこの転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を理論的に解明することを最初の目的として始めたものである。しかし，研究の過程において転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響についての実験結果を理論的に解釈するには粗さを有する平面と球の接触変形を解析する必要があり，しかもその際，球および平面の母材の弾性変形，ならびに突起の弾性回復等が無視できずかなり厳密な解析が必要なことが明らかになった。

ところで，表面粗さを考慮に入れた球と平面の接触問題は単に転がり抵抗のみにとどまらずその他の転がり接触現象（たとえば，転がり摩耗，*EHL*，転がり接触部剛性など），および，球形測定子による寸法測定精度，表面おうとつ測定精度，表面うねりを有する平面間接触等の広範囲にわたる問題の基礎として重要な意味をもつものと考えられる。

そこで，本研究ではまず基礎的な問題として粗さを有する平面と球の一般的な接触変形問題を比較的詳細に理論的に検討し，その接触理論の応用の一例として転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を解析すると同時に表面おうとつ測定精度の問題についても理論的考察を試みる。

第１編において粗さを有する平面となめらかな球の接触機構の解析を行う。

粗さを有する平面と球の接触問題は，機械表面の表面粗さ性状の多様性あるいは変形形態，接触形態等の多様性によりすべての場合を総括的に取扱うことは困難である。本論文では図１のように粗さを有する平面と球の接触問題を分類し実線で示した領域を解析する。なお，この分類において関連する文献の代表的なも

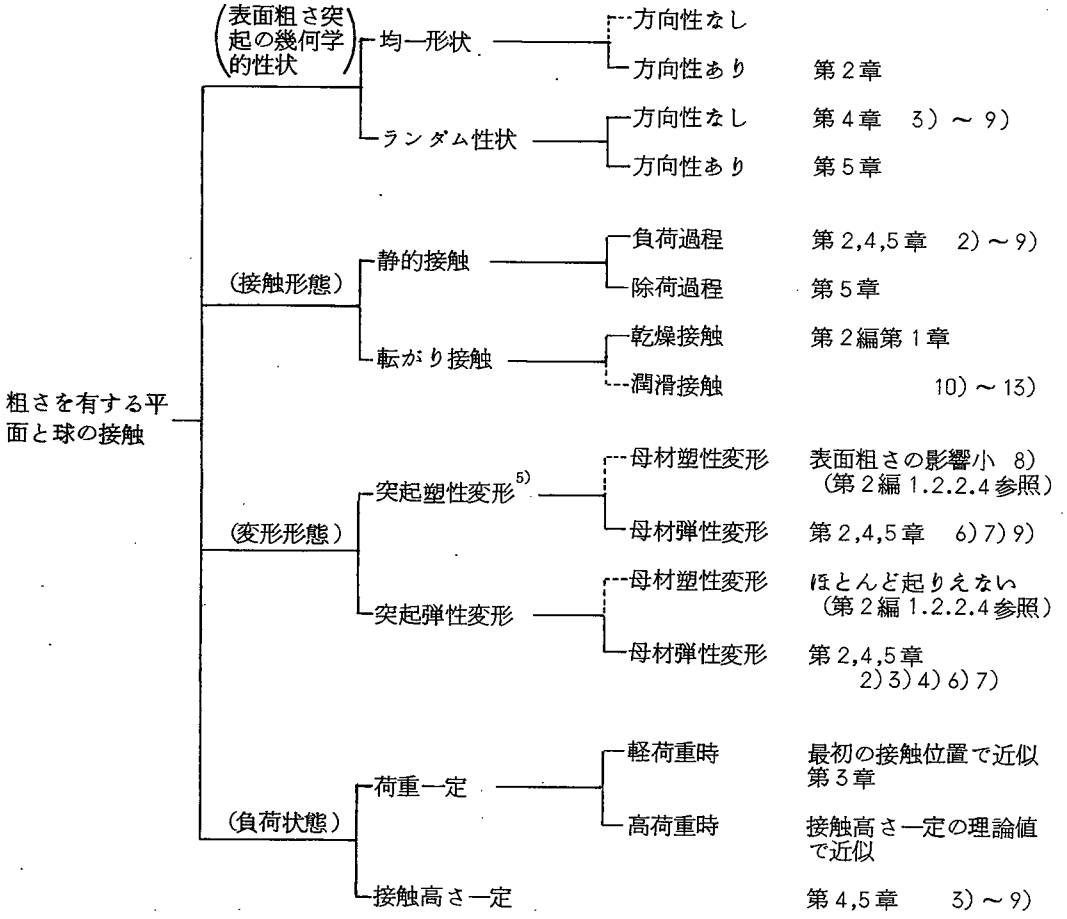


図1 粗さを有する平面と球の接触問題の分類

(本論文で扱う領域を実線で示す
編を示していない場合はすべて第1編を表す)

のも併記したが，方向性のある粗さを有する平面と球の接触の解析，球と平面の接触における最初の接触位置の解析および除荷過程の解析等に関する類例はほとんど見当らない。

ところで平面と球の接触問題には以下に示すような問題点が含まれる。

1) 表面粗さ突起の変形だけでなく，球と平面の母材の弾性変形も考慮に入れ，これらの変形を幾何学的に適合させる必要がある。

2) 接触突起個数が少ないため確率論的処理が複雑になる。

3）球と平面の母材の変形形態および突起の変形形態の両方を考慮に入れて理論の適用限界を定める必要がある。

このうち 1）の母材の変形による球と平面の巨視的形状変化については，これを無視した理論[5]，なめらかな平面と球の接触におけるヘルツ理論から定まる形状で近似する理論[2,6]，表面粗さと独立に一定の関数で近似する理論[14] 等の種々の試みがあるが，表面粗さに無関係に球と平面の巨視的形状を定めるこれらの方法は適用範囲がかなり限定される。一方，この問題を厳密に扱った理論[4,7,9] もあるが，これらは数値計算がきわめて複雑になり第 4 章で指摘するように解の収束性等の問題点がある。このため，これら厳密な解法は処女面転がり接触のような非対称な変形問題に対する発展性に欠ける。

本論文では，球と平面の巨視的形状を 2 次曲面で近似し，このパラメータを荷重や表面粗さ等の接触条件に応じて理論的に決定することによりこの問題を解決した。なお，この近似解法は数値計算が容易なため複雑な接触問題への発展性に富み，第 4 章で検討するように前述の厳密な解法と比較しても精度的にも十分満足できるものである。

2）の問題に関しては，これを指摘している文献すらほとんど見当らないが，表面粗さが大なる場合，あるいは軽荷重時においては平均接触突起数が少なくなりこの問題が無視できなくなる。とくに，図 1 に示すような，荷重一定の接触条件下の接触高さの統計的諸量を推定する場合に問題になる。本論文ではこのような接触条件下の接触問題を突起の変形が無視できるような軽荷重時と，無視できない荷重時に分け，前者については最初の接触位置の解析結果を，後者については接触高さ一定の接触条件下における接触の解析結果を用いて統計的諸量を近似的に推定する。

3）の平面と球の母材，および突起の変形形態について。母材の変形形態としては弾性変形状態のみを取扱い，この理論の成立する接触条件を理論および実験の両面から検討を加える。また，突起の変形形態としては，図 1 に示すように塑性変

形する場合と弾性変形する場合の２種類に分けて解析を試み両者の区分条件として球と平面の接触における塑性指標を導く。

以上のような接触に関する検討結果を第２編で種々の問題に応用する。粗さを有する平面と球の接触変形が重要な因子となる問題は多数存在するが，このうち図２に示すように，転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響，表面おうとつ測定精度の問題について第２編で考察する。

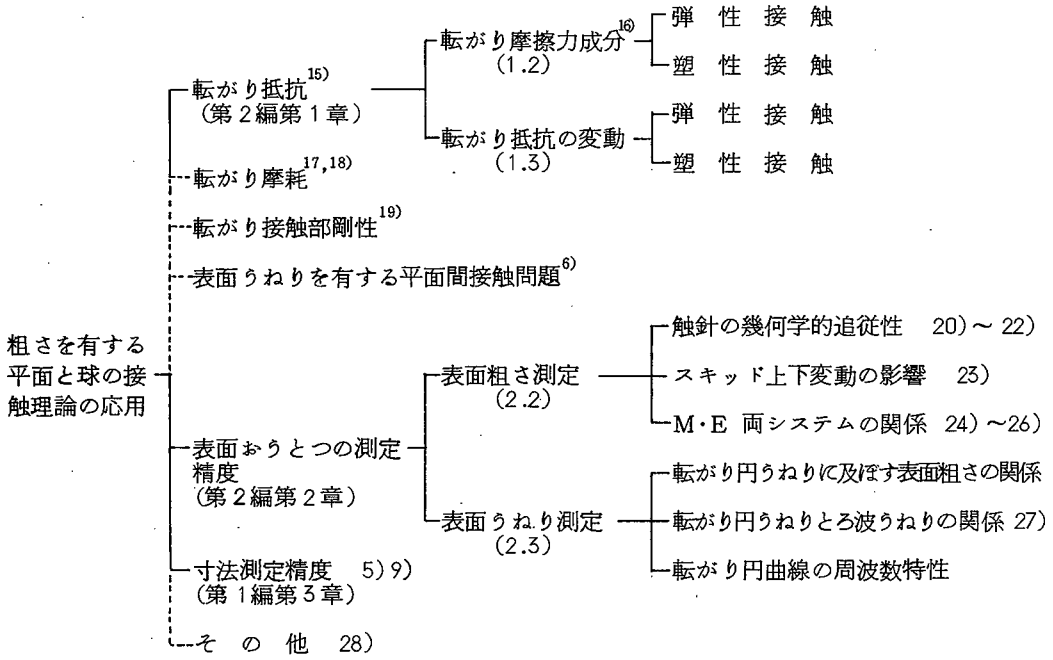


図２　粗さを有する平面と球の接触理論の応用（本論文で扱う領域を実線で示す）

第１章では転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を扱う。ここで，転がり抵抗とは球が平面上を転がるときの抵抗力全般を指し，次の２成分からなる。すなわち

１）転がりと逆の向きに作用しエネルギー損失を伴ういわゆる転がり摩擦力成分

２）球に作用する水平力のうち，球の上下変動等に起因しエネルギー損失を伴わない成分[32]である。

本論文では，転がり抵抗の平均値，標準偏差の解析を試みるが転がり抵抗の平

均値は，転がり摩擦力成分の平均値と等価である。

転がり摩擦力に関しては，その発生原因に関する諸説のうち材料の履歴損失によるとする説[29,30,31]が最も有力であるが，表面粗さの影響を材料の履歴損失で説明した例は見当らない。本論文では転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響を材料の履歴損失をもとに理論的に解析し，転がり摩擦の履歴損失説の問題点の一つとされていた表面粗さの影響の解明と同時に，表面粗さと転がり摩擦力の関係を定量的に表すことを試みる。

転がり抵抗の変動と表面粗さの関係については，サーボモータやシンクロのような小形精密回転機器用軸受の低速回転時のトルクの安定性の問題と関連し実験的研究はかなり報告[33~36]されているが，理論的考察はほとんど見られない。本論文では転がり抵抗の変動に及ぼす表面粗さの影響を第1編第3,5章の解析結果を用い，あるいはそれらの接触理論を拡張することにより理論的に考察し両者の関係を定量的に表すことを試みる。

なお，これらの理論の妥当性については転がり抵抗の実験結果との比較により検討する。

第2章では表面おうとつ測定精度の考察を試みる。触針式表面形状測定器を用いて表面粗さ，表面うねり等を測定する場合，以下に示すような幾何学的問題点が数多く存在する。

表面粗さ測定に関しては，

1） 触針半径が有限なことによる触針の幾何学的追従性，

2） スキッドの上下変動が表面粗さ測定値に及ぼす影響，

3） MシステムとEシステム間の換算方式，

等の問題点が挙げられる。

また，表面うねりに関しても，JIS（B 0610） では電気的ろ波うねりと転がり円うねりの2種類が併記されているが，両者の換算方式はもちろん，転がり円うねり測定用触針半径の選択基準も明確ではなく，転がり円の幾何学的特性に

対する基礎的検討が欠けている。このような種々の幾何学的問題については図２に示すように各々の項目についてかなりの研究が報告されているが，これらは大体において定性的な報告にとどまっている。これは幾何学的にランダムな性状の表面おうとつを有する平面上で球（あるいは任意の曲面）を転がす（あるいはすべらす）場合の球の軌跡の統計的諸量を理論的に把握できなかったことも一因していると考えられる。

本論文では第１編第３章の最初の接触位置の解析結果を用い，あるいはそれを発展させ，触針，スキッド，および転がり円うねり測定子の上下変動の統計的諸量を推定することにより上述の諸問題に関する定量的考察を試みる。

なお，これらの理論的考察の妥当性は実験やシミュレーション計算を用いて検討する。

参　考　文　献

1) J.J.Bikerman : J.App. Phys., 20, 10 (1949) 971.
2) J.F.Archard : Proc. Roy. Soc. Ser. A, 243, (1957) 190.
3) P.Barkan and E.J.Tuohy : Trans. IEEE, Pas-84, (1957) 1132.
4) J.A.Greenwood and J.H.Tripp : Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
5) 築添 : 精密機械 , 37, 5 (1971) 344.
6) 久門 : 日本機械学会論文集 , 38, 315 (1972) 2945.
7) K.A.Nuri : Wear, 30, 3 (1974) 321.
8) 築添 : 日本機械学会論文集 , 41, 346 (1975) 1909.
9) T.Tsukada and Y.Anno : Bull. Japan Soc. of Prec. Engg., 11, 4 (1977) 207.
10) たとえば, T.E.Tallian : Wear, 21, 1 (1972) 49.
11) K.L.Johnson, J.A.Greenwood and S.Y.Poon : Wear, 19, 1 (1972) 91.
12) T.E.Tallian : Trans. ASME Ser. F,96, 3 (1974) 398.
13) P.E.Fowles : Trans. ASME Ser. F, 97, 2 (1975) 311.
14) F.C.Yip and J.E.S.Venart : J.Phys., D4, (1971) 1470.
15) 佐々木, 沖野 : 日本機械学会論文集 , 27, 181 (1961) 1456.
16) G.A.D.Briggs and B.J.Brescoe : Nature, 260, 25 (1976) 313.
17) T.E.Tallian : Trans. ASLE, 10, 4 (1967) 418.
18) T.E.Tallian and J.I.McCool : Wear, 17, 5/6 (1971) 447.
19) たとえば, P.R.Nayak : J.Sound & Vibration, 22, (1972) 297.
20) 中村 : 精密機械 , 26, 2 (1960) 86.
21) D.J.Whitehouse and J.F.Archard : Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 316, (1970) 97.
22) V.Radhakrishnan : Wear. 16, 5 (1970) 325.
23) J.Nara : Bull. Jap. Soc. Precision Engg., 1, 4 (1966) 4.
24) H.Von Weingraber : Microtecnic, 11, (1957) 6.
25) V.Radhakrishnan : Proc, I. Mech. E., 187, (1973) 575.
26) M.S.Shunmugam and V.Radhakrishnan : Proc. I. Mech. E., 188, (1974) 691.

27) J.Nara： Ann. CIRP, 19,(1971) 687.
28) たとえば, R.M.Carson and K.L.Johnson： Wear, 17, 1 (1971) 59.
29) たとえば, F.P.Bowden and D.Tabor： The Friction and Lubrication of Solids Part 2, Oxford (1964) 306.
30) R.C.Drutowski： Trans. ASME Ser. D,81, (1959) 233.
31) 渡部, 川口： 精密機械 , 42, 11 (1976) 1056.
32) 川口, 永田, 奥野： 精密機械 , 34, 7 (1968) 454.
33) 機械試験所報告 , No. 50 (1964).
34) 阿部, 高野, 神保： 精密機械 , 37, 2 (1971) 125.
35) 角田： 潤 滑 , 19, 2 (1974) 102.
36) 津田： 潤 滑 , 23, 5 (1978) 312.

第　1　編

粗さを有する平面と球の接触機構

第 1 章　単一突起の変形

1・1　緒　　言

種々の接触問題の解析を試みるにあたり単一接触突起の変形について考察を行う。接触突起の変形状態としては 1）弾性接触状態 2）突起内部の一部のみで塑性変形を生じている微視的塑性変形状態 3）接触域全域に塑性変形が及んでいる塑性接触状態の3段階があげられる。球と平面のように比較的高い圧力が作用すると考えられる接触状態では通常の接触状態としては 3）の塑性変形状態が考えられるが，かなり表面粗さが小なる面や，十分なじみ運転が行われた面など 1）弾性接触状態 または 2）微視的塑性変形状態と考える方が妥当な接触条件も存在する。このうち，2）の過渡的接触状態については解析が困難なため省略し，ここでは 1）および 3）についてのみ考察する。

弾性接触状態についてはヘルツ理論が適用できるため，その概略を示すにとどめる。塑性接触状態については，塑性変形突起内の弾性変形を無視して転がり接触状態を解析し，転がり摩擦力の理論的推定を試みたところ[1)]，理論値が実測値の数倍もの大なる値を示した経験上，転がり接触状態では，塑性変形突起における弾性変形量は無視できないものと考えられる。この突起の弾性回復量は転がり摩擦の問題以外にも，すべり，あるいは転がり接触過程における表面粗さの変化，すべり摩擦，摩耗，平面間の接触における接触部剛性等の種々の問題においても重要な因子になると思われる。ところで塑性的接触問題に関する解析は，この弾性変形を無視したものが多く[2,3,4)]，考慮されたものとしては，主として接触部剛性に関する研究例[5,6,7)]が見られる程度である。そこで本章では，突起の弾塑性的接触変形に関する単純な理論的解析を行い，単一突起の荷重と近接量の関係を簡単な近似式で表示することを試みる。

1・2　理　　論

1.2.1　弾性接触突起の変形

この問題については，二物体の接触に関するヘルツ理論[8]がそのまま適用できるため，計算手順を示すにとどめる。いま任意の曲面形状を有する二物体の接触を，平面物体と次式で表される二次曲面物体との接触に置きかえる。

$$z = A'x^2 + B'y^2 \qquad (1.1.1)$$

ただし平面は xy 面に一致させ，二次曲面の中心軸を z 軸とする。この曲面物体と平面物体が押し付けられた場合の両物体の表面変位をそれぞれ w_1，w_2，また原点における $w_1 + w_2$ の値を α_a とおくと，

$$w_1 + w_2 = \alpha_a - A'x^2 - B'y^2 \qquad (1.1.2)$$

が接触面内で成立するはずである。一方，接触面に作用する分布圧力を $p(x,y)$ とすると，表面変位の和は弾性論により次式で与えられる。

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\right) \iint p(x,y) \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{-\frac{1}{2}} d\xi d\eta \qquad (1.1.3)$$

E_1, E_2 ：2物体の縦弾性定数　　ν_1, ν_2 ：2物体のポアソン比

式 (1.1.2)，(1.1.3) が同時に成立するように積分方程式を解いて $p(x,y)$ の分布形を決定すればよいのだが，すでにポテンシャル理論において均質な円体の内部の点のポテンシャルが式 (1.1.2) のような二次式になることがわかっている。そこでだ円体のポテンシャルの式との比較を行うことにより圧力分布 $p(x,y)$，α_a，A'，B' はそれぞれ次式のように接触面だ円の短径 $2a$，長径 $2b$ および荷重 W_a と関係づけられる。

$$p(x,y) = \frac{3W_a}{2\pi a b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1.4)$$

$$\alpha_a = \frac{3}{2}\frac{W_a}{\pi E}\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\{(a^2+\varphi)(b^2+\varphi)\varphi\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.1.5)$$

$$A' = \frac{3}{2} \frac{W_a}{\pi E} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(a^2+\varphi)^{\frac{3}{2}} \{(b^2+\varphi)\varphi\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.1.6)$$

$$B' = \frac{3}{2} \frac{W_a}{\pi E} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(b^2+\varphi)^{\frac{3}{2}} \{(a^2+\varphi)\varphi\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.1.7)$$

ただし $\frac{1}{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)$

ここで

$$k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \qquad (1.1.8)$$

とおくと，式(1.1.6)(1.1.7)は次式のように表される。

$$A' = \frac{3W_a}{\pi E} \frac{1}{a^2 b} \frac{1}{k^2} \{E'(k) - (1-k^2) F'(k)\} \qquad (1.1.9)$$

$$B' = \frac{3W_a}{\pi E} \frac{1}{b^3} \frac{1}{k^2} \{F'(k) - E'(k)\} \qquad (1.1.10)$$

ただし $F'(k)$：第1種完全だ円積分　$E'(k)$：第2種完全だ円積分

ここで

$$\frac{B'-A'}{B'+A'} = \cos \Psi \qquad (1.1.11)$$

とおき，左辺に式(1.1.9)(1.1.10)を代入すると

$$\frac{2(1-k^2) F'(k) - (2-k^2) E'(k)}{k^2 E'(k)} = \cos \Psi \qquad (1.1.12)$$

$\cos \Psi$ は式(1.1.11)で求まる既知の変数であり，左辺は k のみの関数であるので上式を満足するような k を繰返し計算で求めてやればよい。実際の数値計算ではこの繰返し計算は *Newton-Raphson* 法によった。

式(1.1.11)，(1.1.12)から

$$\frac{1}{B'} = \frac{1}{A'+B'} \frac{k^2}{1-k^2} \frac{E'(k)}{F'(k)-E'(k)} \qquad (1.1.13)$$

これを式(1.1.10)に代入し，式(1.1.8)を用いると接触だ円形状は次式のように定まる。

$$b = \left\{\frac{3}{\pi E} \frac{1}{A'+B'} \frac{E'(k)}{1-k^2}\right\}^{\frac{1}{3}} W_a^{\frac{1}{3}} \qquad (1.1.14)$$

$$a = \left\{\frac{3}{\pi E} \frac{(1-k^2)^{\frac{1}{2}}}{A'+B'} E'(k)\right\}^{\frac{1}{3}} W_a^{\frac{1}{3}} \qquad (1.1.15)$$

式（1.1.14），（1.1.15）を式（1.1.5）に代入して整理すると荷重Wとα_aの関係は次式で表される。

$$\alpha_a = \frac{1}{2}\left(\frac{6W_a}{\pi E}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{2(A'+B')(1-k^2)\frac{F'(k)^3}{E'(k)}\right\}^{\frac{1}{3}} \qquad (1.1.16)$$

$$W_a = \frac{1}{3}\pi E\left\{\frac{E'(k)}{(1-k^2)(A'+B')\ F'(k)^3}\right\}^{\frac{1}{2}}\alpha_a^{\frac{3}{2}} \qquad (1.1.17)$$

また，接触面圧力分布も式（1.1.14），（1.1.15）を式（1.1.4）に代入すれば求まる。

1.2.2　塑性接触突起の変形[9)]

弾性接触の場合と同様，ここでも一般的な曲面間の接触を考えるため，次式のような主曲率半径R_x，R_yなるだ円放物面と平面の接触を扱う。

$$\frac{x^2}{2R_x}+\frac{y^2}{2R_y}=-z \qquad (1.1.18)$$

このようなだ円放物面と球面との接触変形を厳密に扱うには，塑性変形量と弾性変形量の総和が幾何学的接触条件を満足する必要があるなどの問題のため，解析がかなり複雑になる。しかも，この解析結果を多数の接触突起を有する接触問題に適用するには最終的に単純な形で結果が表現されねばならない。そこで，ここでは単純な仮定を設定して解析を行い，その結果と実験値との比較を通じて実際の現象をある程度表現しうるような近似的な解を見いだすことを試みる。解析にあたりつぎの4項目の仮定を設定する。

1）図1.1.1に示すように突起の全変形量は突起の塑性変形量と弾性変形量の和として表される。すなわち，

$$\alpha_a = \alpha_{pa} + \alpha_{ea} \qquad (1.1.19)$$

ここで　α_a：突起の全近接量

α_{pa}：突起の塑性近接量

α_{ea}：突起の弾性近接量

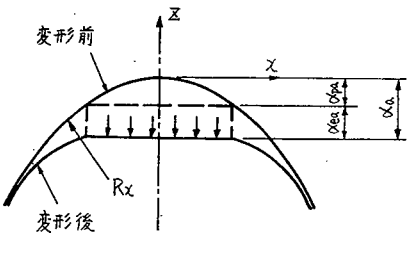


図1.1.1　突起変形状態の模式図

2）突起の塑性変形による接触面形状は一般に行われているように単に，突起

と平面の幾何学的交さ面として定まる。すなわち

$$a = (2R_x\,\alpha_{pa})^{\frac{1}{2}}$$

$$b = (2R_y\,\alpha_{pa})^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1.20)$$

ここで a ：接触面だ円の x 軸方向半径

b ：　〃　y 軸　〃

3）接触面には均一な圧力が作用し，その圧力はやわらかい方の材料の流れ圧力に等しい。2），3）の設定により，α_{pa} は次式で表される。

$$\alpha_{pa} = \frac{W_a}{2\pi\,(R_x R_y)^{\frac{1}{2}}\,p_m} \qquad (1.1.21)$$

ここで W_a ：荷　重

p_m ：流れ圧力

つぎに，突起の弾性変位量を考える。幾何学的接触条件を満足，すなわち接触部に間隙や重複を生じないためには仮定 1），2） の設定のもとでは弾性変位は接触面上均一になる必要がある。しかし，仮定 2），3）の設定のもとで弾性論[8]により次式を用いて弾性変形量を求めると図 1.1.2 に示すように接触面上の位置により分布し，中央部で最大変位を有す。

$$w_e(x,y) = 2\frac{p_m}{\pi E}\iint_{Si}\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\,d\eta \qquad (1.1.22)$$

この矛盾は仮定 1）2）3）の設定の無理が現れたものである。

Schofield[10]は突起の弾性近接量として接触面中央部の変位量，すなわち最大変位量を採用しているがこれでは幾何学的接触条件が満足されず接触面中央以外では重複を生じる。本研究ではこの幾何学的接触条件の誤差を少なくするため，つぎの仮定を設定する。4）突起の弾性近

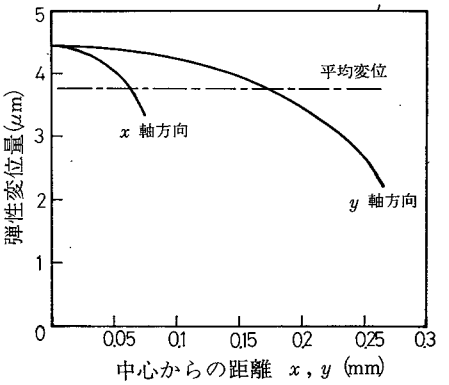


図 1.1.2　接触面の z 軸方向弾性変位分布

$R_x = 0.4$ mm　$R_y = 5$ mm

$p_m = 200$ kgf/mm^2　$\alpha_{pa} = 7\,\mu$m

接量 α_{ea} は次式に示すように接触面各部の弾性変位量の面積平均値 α_{ea} で近似する。

$$\alpha_{ea} = \frac{p_m}{W_a} \iint_{Si} w_e(x, y)\, dx\, dy \qquad (1.1.23)$$

なお $w_e(x, y)$ は式（1.1.22）で求まり，積分領域は式（1.1.20）で定まるだ円とする。

面積平均値で近似することの妥当性は理論的には確認できないが 図 1.1.2 に見られるように弾性変形量は接触面内で大きな変化は示していないことから，この近似の誤差も小さいと考えられる。

以上の設定により，負荷過程の近接量は式（1.1.21），(1.1.23) を式（1.1.19）に代入すれば求まる。また除荷過程の近接量は最大負荷時の近接量から弾性回復量を引いたもので，弾性回復量は最大負荷時の弾性近接量から除荷時と同一条件時の負荷過程における弾性近接量を引いた値として与えられる。

1・3　実験および考察

前述の塑性接触理論は種々の仮定のもとに近似的に求めたものであるためその仮定の設定の妥当性を検討する必要がある。ここでは，単一突起モデルとして球を用い，球が平面に接触開始した時点から変形後までに接触部から十分に離れており変形を生じていない点が変位する量(すなわち近接量)を測定し，この近接量と式（1.1.19）の α_a との比較を行う。

1.3.1　実　験　装　置

荷重と近接量の関係を実験的に求めるために用いた押付実験装置を図 1.1.3 に示す。測定方法としては，いまレバー a を微小量下げると，ピポット b で支えられている外筒 c がスライドベアリング d，ガイド e に拘束された状態で垂直に下降し，それとともに平行板ばね f を介して取付けられている心棒 g および上の平板試料 h が下降して，試料球 i および下の平板試料 j を押付ける。試料球と上下平板試料が接触すると，上の平板試料を取付けている心棒は下降できなくなり，

板ばねは外筒その他の自重によって弾性変形する。この変形に伴う弾性力が平面と球の押付力として作用し，レバーを下げるに従い負荷も増大する。従って，板ばねにはり付けたひずみゲージによりひずみ量を測定すると押付荷重がわかる。なお，レバーの下降は振動を極力避ける必要上，油圧シリンダ k を用いてバルブのわずかな開閉により調節している。接触部の変形が生じると2接触部の近接量に相当した量だけ心棒 g が下降しミラー m が移動する。このミラーの移動量の2倍の距離だけトワイマン干渉計の参照鏡に対しレーザー光の光路差が生じ，干渉計左端のスクリーン上の干渉縞が移動する。このスクリーン上の1点に太陽電池を取り付け干渉縞の移動による明暗を測定し，増幅器を通してペンレコーダで記録をする。同一記録紙上に板ばねのひずみも記録し，ひずみと明暗の変化から荷重と近接量の測定を行う。光源には *He-Ne* レーザを用いているため干渉縞の縞間隔は鏡の上下変位の 0.316 μm に相当し，近接量の測定精度は 0.03 μm 程度である。なお，上下平板試料は同一材質，同一仕上面の試料を用いているので，球と平面の接触部における近接量は鏡の変位の $\frac{1}{2}$ である。また，未接触時には干渉縞が左右に振動しているのが，接触を開始すると急に干渉縞の振動が止まる。この変化はきわめて軽荷重時（10 gf 程度）でも生じるため近接量測定時（とくに4章以下の接触問題で）問題となる接触開始の時点における突起の変形量は無視でき，最初の接触位置（第3章

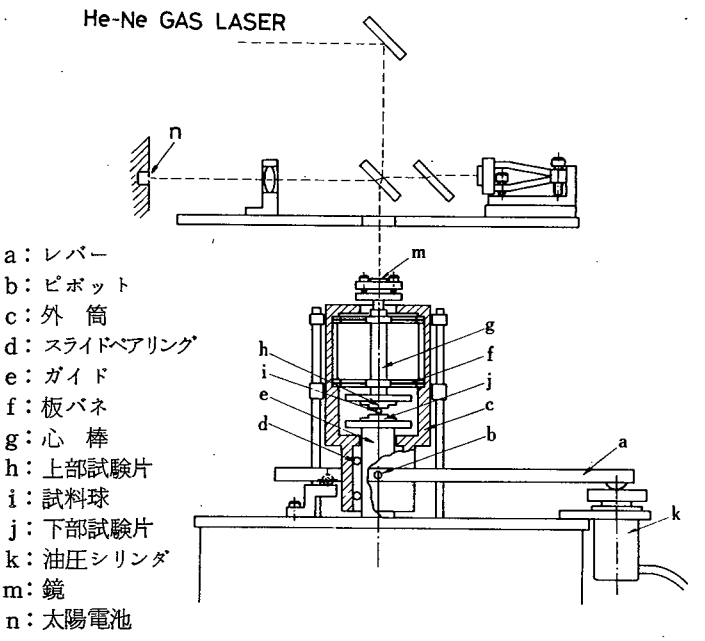


図 1.1.3　押付け実験装置

で定義をするが，理想的無負荷時の接触位置）を基準にした近接量が測定できる。

1.3.2　実験結果および考察

ヘルツの接触理論については検証実験を行う必要はないため，塑性接触理論に対する検証実験のみを行う。試料球には材質 $SUJ\ 2$ の精密球を用い，平板試験片には鋼板あるいは黄銅板を用いた。これら試験片の諸性状を 表1.1.1 に示す。ただし鋼板，黄銅板の流れ圧力 p_m としては，それぞれ $10\,kgf$，$6\,kgf$ の押付荷重で半径 $5\,mm$ の鋼球を押しつけたときに生じるくぼみの投影面積を測定し押付け荷重をその面積で除した平均圧力を用いた。

表 1.1.1　試験片の材質と表面粗さ

		縦弾性定数 (kgf/mm^2)	ポアソン比	流れ圧力 (kgf/mm^2)	降伏応力 (kgf/mm^2)	表面粗さ R_{max} (μm)
球	SUJ 2	21000	0.3	1000*		0.1 以下
鋼　板	S 35 C	21000	0.3	160	36	0.1
黄銅板	6/4 黄銅	10000	0.3	105	12	0.15

＊マイクロビッカース硬さ（50gf）から推定

鋼板に関する実験結果と理論値を図 1.1.4 に示す。最大荷重を 3 種類変化させ負荷曲線と除荷曲線を求めた。なお最大荷重条件を変えるたびに平面試験片上での接触場所も変えているが負荷曲線の実測値はほぼ同一曲線上に沿うため一本の曲線で示している。実線で示した理論値と破線の実測値とは負荷過程，ならびに除荷過程においてもかなりの一致を示している。図 1.1.5 は黄銅板に関する実験結果と理論値で鋼板と同様の実験を行っている。負荷過程では実験結果と理論値は良い一致を示しているが除荷過程にお

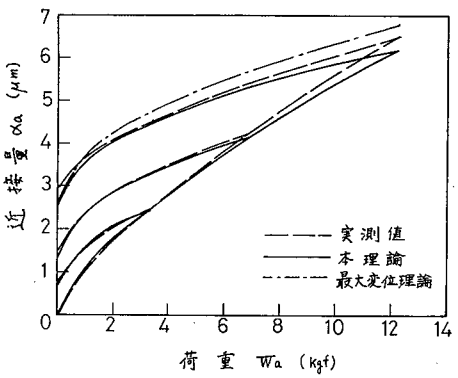


図 1.1.4　荷重と近接量の関係
（鋼板試験片）

いて実測値の勾配に比べ理論値の勾配が低目にでている。この結果から理論値では突起の弾性変位量を少し低目に推定していることが考えられる。すなわち理論値を求める際に設定した仮定のうち，突起の弾性変位量として接触面での変位分布の平均値で近似したことの妥当性が問題になる。そこで接触面の変位分布の内の最大変位でもって突起の弾性変形量を代表させている *R.E. Schofield* の理論[10]と本理論との比較を行う。

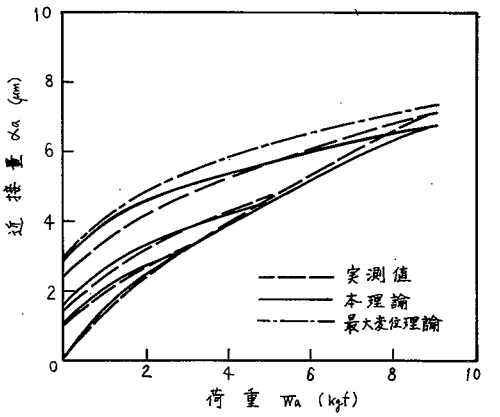


図 1.1.5　荷重と近接量の関係
（黄銅板試験片）

Schofield 理論に沿って球形突起と平面の接触における近接量を求めてみる。半径 R の球と平面の接触において平面の塑性変形により半径 a の接触円ができているとすると，そのときの弾性変形量 α'_{ea}（最大変形量）は次式で求まる。

$$\alpha'_{ea} = 2\frac{p_m}{\pi E}\iint_{\xi^2+\eta^2\leqq a^2}(\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}\,d\xi\,d\eta$$

$$= 4\,a\,\frac{p_m}{E}$$

$$= \frac{4}{E}\left(\frac{p_m W_a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1.24)$$

塑性変形による近接量 α_{pa} は本理論と同様で，式（1.1.21）の R_x, R_y かわりに R を代入すれば求まる。この α_{pa} と式(1.1.24)の α'_{ea} の和が求める近接量となる。計算結果の一例を図 1.1.4，図 1.1.5 の一点鎖線で示す。なお負荷過程は，図が繁雑になるのを避けるため省略する。図 1.1.5 の黄銅板の場合には除荷曲線の勾配は本理論より *Schofield* の理論の方が実測値とよく一致している。種々の最大荷重状態から除荷し，無負荷になるまでに回復した弾性回復量について実測値と理論値の比較を試みた結果を図 1.1.6 に示す。丸印で示した本理論より *Schofield* 理論の方が高い値を示している。なお両者の比は数値計算結果から検討するとだ

円放物面の曲率半径，荷重，球の半径に関係せず一定値 1.18 となる。鋼板試験片の場合は本理論の方が弾性回復量についても実測値に近い値を示すことがわかるが，黄銅板の場合はこの図ではどちらが良いとも言えない。逆に高荷重域では *Schofield* 理論の方が実測値に近い場合もある。以上の考察から，真の弾性変形量は，弾性変位分布の平均値と最大値の間にあると考えられる。この平均値と最大値の比は 1.18 と比較的小さな値であるが，真の値と本理論で採用した〝平均値〟との比はさらに 1 に近くなる。しかも第 2 章に示すように表面粗さを有する平面と球面の接触における近接量にはこの差はかなり小なる影響しか与えないため多数の接触点を有する接触問題に適用する単一接触点の変形解析としては本理論の近似で十分であると考えられる。第 2 編に示すように，突起の塑性変形履歴損失による転がり摩擦力の推定を行う場合には図 1.1.4，図 1.1.5 の負荷，除荷曲線の囲む面積（損失仕事）が問題になる。この場合には図 1.1.4，図 1.1.5 いずれの図からも，本理論の方が実測される損失仕事に近い推定ができることが明らかである。

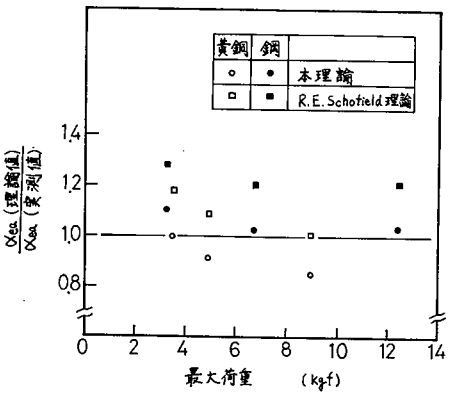


図 1.1.6　弾性履歴回復量における理論値と実験値の比較

本理論においては 仮定 2），3）の設定に見られるように突起の塑性変形が接触域全域にまで及んだ完全塑性接触状態を想定しているが，多数突起接触問題においては各突起の塑性変形進行状態はそれぞれに異るため塑性変形がそれほど進行していない不完全塑性接触状態もある程度推定できることが望ましい。

ヘルツ理論[11]に従って接触面下の最大せん断応力を計算し，この値が材料のせん断降伏応力の 1 ～ 3 倍の間にある接触状態（不完全塑性接触状態と考えられる[12]）を求めると図 1.1.4 の場合 $W_a = 0.2\ kgf \sim 5\ kgf$ の間が，また図 1.1.5 の場合 $W_a = 0.07\ kgf \sim 1.8\ kgf$ の間が不完全塑性接触状態にあることがわかる。

図 1.1.4 の場合，この不完全塑性接触状態においても理論値は実測値と比較的良い一致を示している。理論の設定とかけ離れた状態と考えられる領域にもかかわらずこのような一致を見たのは定性的には以下のような理由によるものと考えられる。

(1) 塑性近接量について

理論計算では，図 1.1.7 (a) に示すように突起と平面の幾何学的交さ面が 接触面積 $\times\ p_m = W_a$ なる条件を満足するときの幾何学的交さ量でもって α_{pa} を求めている。ところが，不完全塑性状態の場合，この p_m より実際の面圧は低く接触面積は図 1.1.7 (a) の $\overset{\frown}{ab}$ より大なる $A'B'$ (図 1.1.7 (b)) の状態で接触している。一方，このときは不完全塑性のために突起の曲率が変形前よりも大になって図の点線のようになったのち塑性変形していると思われ実際の塑性変形量は α'_{pa} のようになる。実験結果と理論値の塑性近接量が合致した理由はこの α_{pa} と α'_{pa} が偶然ながら良く一致することによるものと考えられる。

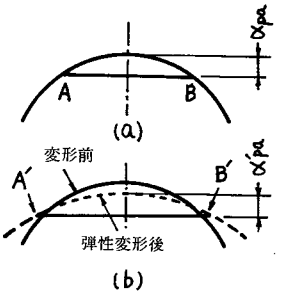


図 1.1.7 α_{pa} の推定

(2) 弾性近接量について

理論では接触圧力を p_m 一定としてそれによる弾性変位を弾性理論で計算しているが，このようにすると，(i) 不完全塑性変形状態では接触面上での圧力分布が p_m より小さいので理論で求めた中央部弾性変位量は実際の弾性近接量より大になるはずである，(ii) 接触面下に一部塑性変形領域があってその部分では弾性理論が適用できないにもかかわらず全部分弾性理論で計算していることから，弾性理論から求まる中央部弾性変位量は実際のものより大になる，等の理由から理論計算で中央部弾性変位量を求めるとそれは実際の弾性近接量より大になるはずである。それゆえ，中央部弾性変位量より小なる面積平均値を採用したことが偶然ではあるが理論値と実測値の良い一致を示した原因と考えられる。

1.3.3　近接量の近似式表示

塑性変形突起の変形に関する前述の理論を表面粗さを有する平面と球の接触問題の解析に適用するには式（1.1.19）～（1.1.23）のままでは解析が面倒である。そこで式（1.1.19）～（1.1.23）の数値計算結果をもとにして，近接量をもっと簡便な近似式で表現することを試みる。式（1.1.21），（1.1.23）を用いて $\alpha_{ea}^*/\alpha_{pa}^*$ を計算した結果を図 1.1.8 に示す。ただし図中＊印は，下記の無次元化量を表すものとする。

$$\alpha_{ea}^* = \frac{\alpha_{ea}}{R_y}\ ,\quad \alpha_{pa}^* = \frac{\alpha_{pa}}{R_y}\ ,$$

$$p_m^* = \frac{p_m}{\pi E}\ ,\quad W_a^* = \frac{W_a}{R_y^2 E}\ ,$$

$$R_x^* = \frac{R_x}{R_y}$$

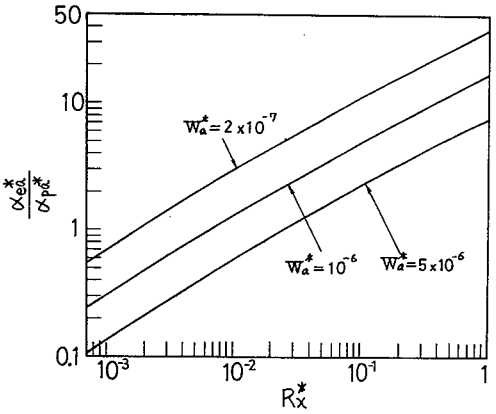


図 1.1.8　R_x^* と $\alpha_{ea}^*/\alpha_{pa}^*$ の関係

$\alpha_{ea}^*/\alpha_{pa}^*$ と R_x^* の関係は両対数においてほぼ直線で近似できることがわかる。一方，式（1.1.22），（1.1.23）を変数変換して整理し直すと，α_{ea} は次式のように $p_m^{\frac{1}{2}}$，$W_a^{\frac{1}{2}}$ に比例することがわかる。

$$\alpha_{ea} = (p_m\ W_a)^{\frac{1}{2}} \times g\left(\frac{R_x}{R_y}\right) \qquad (1.1.25)$$

ここで g は R_x/R_y のみで決まる 4 重積分形の関数である。

式（1.1.21），（1.1.25）および図 1.1.8 から $\alpha_{ea}^*/\alpha_{pa}^*$ と W_a^*，p_m^*，R_x^* の間には次式の関係が近似的に成立することがわかる。

$10^{-3} < R_x^* < 10^{-1}$ の領域では

$$\frac{\alpha_{ea}^*}{\alpha_{pa}^*} = 78\, {p_m^*}^{1.5}\ {W_a^*}^{-0.5}\ {R_x^*}^{0.6} \qquad (1.1.26)$$

$10^{-1} < R_x^* \leqq 1$ の領域では

$$\frac{\alpha_{ea}^*}{\alpha_{pa}^*} = 67.2\, {p_m^*}^{1.5}\ {W_a^*}^{-0.5}\ {R_x^*}^{0.5} \qquad (1.1.27)$$

統計的接触理論に適用するには α_a と W_a の関係が必要となる。式(1.1.26)あるいは式(1.1.27)と式(1.1.21)から α_a, α_{pa} を求め，これを式(1.1.19)に代入すると α_a と W_a の関係がもとまる。

$$W_a^* = 2B^2 + C - 2B\left(B^2 + C\right)^{0.5} \qquad (1.1.28)$$

ここで

$10^{-3} \leqq R_x^* \leqq 10^{-1}$ の場合

$$B = 39\, p_m^{*1.5}\, R_x^{*0.6}$$

$$C = 2\pi^2\, p_m^*\, \alpha_a^*\, R_x^{*0.5}$$

または

$10^{-1} \leqq R_x^* \leqq 1$ の場合

$$B = 33.6\, p_m^{*1.5}\, R_x^{*0.5}$$

$$C = 2\pi^2\, p_m^*\, R_x^{*0.5}\, \alpha_a^*$$

1．4　結　　言

種々の接触問題の解析を行う準備として単一突起の変形について解析を試みた。とくに，塑性接触状態についてはいささか大胆ではあるが以後の計算を進行可能にするために表面の弾性変位に関する仮定を設け，突起の弾塑性的接触変形に関する単純な理論的解析を行った。そして，その数値計算結果と精度の高い押付試験機による近接量測定結果との比較検討を通じ，仮定の妥当性を確かめると同時に以下の点を明らかにした。

1）単一接触突起の近接量は塑性変形による近接量と弾性変形による近接量の和として与えられ，このうち，弾性変形による近接量は，接触面に均一な圧力（流れ圧力）が作用する場合の表面弾性変位分布の平均値で近似しても実用上充分な精度が得られる。

2）突起の弾性変形による近接量と塑性変形による近接量の比は材料の流れ圧力

が大なるほど，荷重が小なるほど，また突起の主曲率半径が大なるほど大になる。この3因子の中では材料の流れ圧力の影響が最も大である。

3）突起の弾性変形による近接量と塑性変形による近接量の比，および荷重と近接量の関係等は簡単な式で近似できる。

参　考　文　献

1) 石垣，川口：昭和49年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集，(1974) 163.
2) たとえば，T.Tsukizoe and T.Hisakado： Trans ASME Ser. D, 87, (1965) 666.
3) P.K.Gupta and N.H.Cook： Trans. ASME Ser. F, 94, (1972) 19.
4) J.Pullen and J.B.P.Williamson： Proc. R. Soc. London Ser. A, 327, (1972) 159.
5) 久門：日本機械学会論文集，41，344 (1975) 1273.
6) 塚田，阿武：日本機械学会論文集，36，291 (1970) 1923.
7) H.A.Francis： Wear, 45, (1977) 221.
8) A.E.H.Love： A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity Dover, New York (1944) 193.
9) 石垣，川口：精密機械，44，11 (1978) 1341.
10) R.E.Schofield and R.H.Thornley：日本機械学会論文集，42，364 (1976) 4007.
11) S.Timoshenko and J.N. Goodier： Theory of Elasticity 2nd ed., McGRAW- HILL, New York (1951) 376.
12) D.Tabor： The Hardness of Metals, Oxford, (1951) 50.

第 2 章　均一形状突起を有する平面と球の接触[1)]

2・1　緒　　言

機械加工面には旋削仕上面，形削り仕上面等のように統計的処理が不適である場合も数多くある。しかも，これらの面はほとんど一方向性の表面粗さを有している。

そこで本章では一方向にのみ方向性を有し，高さ，半径などが均一な半円柱状の突起を真平面に敷きならべたような面に真球を押付けた場合の球と平面の母材の変形および突起の変形について解析を試みる。なお第 4 章以下で表面粗さを統計論的にとらえた解析を行うが，個々の接触突起の圧力分布，変形といった微視的な問題についての考え方を明確にする上からも，この様な均一形状突起に関する解析は重要であろうと思われる。

粗さをもつ平面と球の接触の解析では球および平面の母材の変形と微小突起の変形を適合させる必要がある。本章では母材表面の各点の垂直方向変位をその点の座標の二次関数で近似されるものと仮定して計算を進め，微小突起の変形と母材の変形を適合させて比較的簡単な近似解法で上記の接触問題を解析する。この様な近似解法を以下において二次式近似と呼び，その精度上の検討は第 4 章で行う。なお，変形の形態としては，球および平面の母材については弾性変形のみを仮定し，突起の変形については弾性変形する場合と塑性変形する場合について考えた。

2・2　理　　論

2.2.1　突起が弾性変形する場合

方向性を有する表面おうとつの模型として，図 1.2.1 に示すような半径，高さ，突起間隔が均一なおうとつの配列を考える。なお突起頂点を結ぶ直線を x

軸とし球の中心軸を z 軸とする。このような平面に真球を押付けた場合，球および平面の垂直変位は球および平面の母材の弾性変形による変位 w_m と接触突起の局部的な変形による変位 w_a の和と考えられる。ここでは突起が弾性変形すると考えられる場合を扱い，突起の変位の計算には第１章で概略を示したヘルツ理論を適用する。いま，球の半径を R，突起先端曲率半径を β，突起密度を n_p とすると球面および突起表面はそれぞれ次式で表される。

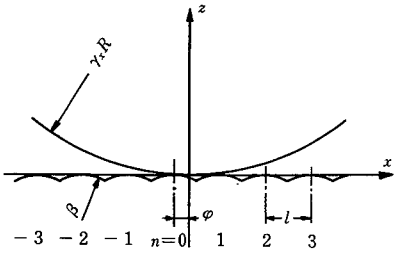


図 1.2.1　接触状態

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2R} \qquad (1.2.1)$$

$$z = \frac{-(x + \varphi - nl)^2}{2\beta} \qquad (1.2.2)$$

ここで　l：突起間隔（$= 1/n_p$），φ：z 軸とそれに最寄りの突起中心との距離

このとき幾何学的接触条件は

$$w_a + w_m = \alpha + \frac{\varphi^2}{2(R+\beta)} - \frac{(x+\varphi-nl)^2}{2\beta} - \frac{x^2+y^2}{2R} \qquad (1.2.3)$$

のように表せる。ここで，α は球と平面の接触開始時点から負荷による変形後までの間にひずみが生じない程度に接触部から十分に離れている球内の一点（たとえば球の中心）が z 軸方向に移動する移動量（以後近接量と呼ぶ）を表す。また母材の弾性変形による変位 w_m は一般に

$$w_m(x, y) = w_m(0, 0) - \sum_{i=1}^{\infty} (c_i x^{2i} + d_i y^{2i}) \qquad (1.2.4)$$

で与えられるべきものであるが，可能な限り計算を簡単化するために第一近似として，

$$w_m(x, y) \approx w_m(0, 0) - (c_1 x^2 + d_1 y^2) \qquad (1.2.5)$$

とする。これを式 (1.2.3) に代入すると次式が得られる。

$$w_a = Z_{op} - \frac{(x+\varphi-nl)^2}{2\beta} - \frac{1}{2R}\left(\frac{x^2}{r_x}+\frac{y^2}{r_y}\right) \qquad (1.2.6)$$

ただし

$$\frac{1}{r_x} = 1 - 2c_1 R \quad , \qquad \frac{1}{r_y} = 1 - 2d_1 R$$

$$Z_{op} = \alpha + \frac{\varphi^2}{2(R+\beta)} - w_m(0,0)$$

ここで Z_{op} は原点における単なる幾何学的交さ量から母材弾性量をとり除いたもので，母材の変形を考慮に入れた幾何学的交さ量を意味する。以後 Z_{op} を接触高さと呼ぶ。

したがって何らかの方法で r_x，r_y を求めることができれば，母材の変形を考慮して突起の変位を求める問題は図 1.2.1 のように，母材の変形を無視して $r_x R$，$r_y R$ なる主曲率半径を有する二次曲面体を押付けた場合の突起の変位を求める問題に帰着する。式 (1.2.6) をさらに変形すると

$$w_a = Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(r_x R+\beta)} - A' x'^2 - B' y^2 \qquad (1.2.7)$$

ただし

$$A' = \frac{1}{2R r_x} + \frac{1}{2\beta} \qquad B' = \frac{1}{2R r_y} \qquad x' = x - \frac{nl-\varphi}{R r_x + \beta} \qquad (1.2.8)$$

A'，B' を第 1 章式 (1.1.11) に代入すると $\cos\Psi$ は次式で表される。

$$\cos\Psi = \frac{(r_x - r_y)\beta - r_x r_y R}{(r_x + r_y)\beta + r_x r_y R} \qquad (1.2.9)$$

この $\cos\Psi$ が式 (1.1.12) を満足するように $k\{=(1-\frac{a_n}{b_n})^{\frac{1}{2}}\}$ を繰返し計算で求めると個々の接触だ円の形状が定まる。また，個々の接触だ円における近接量 α_n と分担荷重 W_n の関係として式 (1.1.17) を用いると，

$$W_n = \Phi_W \alpha_n^{\frac{3}{2}} \qquad (1.2.10)$$

ここで

$$\Phi_W = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi E \left\{\frac{r_x r_y R\beta}{\beta(r_x+r_y)+r_x r_y R}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\frac{E'(k)}{(1-k^2)F'^3(k)}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2.11)$$

また α_n は式 (1.2.7) において $x'=0$，$y=0$ とおけば次式のように定まる。

$$\alpha_n = Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(\gamma_x R+\beta)} \qquad (1.2.12)$$

ところで，分担荷重 W_n の総和は球に作用する荷重 W に等しいため次式が成立する。

$$W = \Phi_W \sum_n \alpha_n^{\frac{3}{2}} = \Phi_W \sum_n \{Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\}^{\frac{3}{2}} \qquad (1.2.13)$$

通常，W は接触条件として既知の量であり，Z_{op} は未知変数である。そこで，上式を満足するような Z_{op} を繰返し計算で求める。その Z_{op} を式 (1.2.10) に代入すれば分担荷重 W_n が得られる。つぎに n 番目の接触だ円上での表面圧力分布 $p_n(x, y)$ は前章式 (1.1.4) を用いると次式で表される。

$$p_n(x, y) = \frac{3W_n}{2\pi a_n b_n}\left[1 - \frac{1}{a_n^2}\left\{x - \frac{nl-\varphi}{\beta+R\gamma_x}\gamma_x R\right\}^2 - \frac{y^2}{b_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2.14)$$

ここで $2a_n$, $2b_n$ は n 番目接触突起の接触面だ円の短径と長径を表す。圧力分布が求まると，球および平面の垂直変位の和は弾性論[2] により次式で求まる。

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi E}\sum_n \iint_{Si} \frac{p_n(\xi, \eta)}{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\}^{\frac{1}{2}}}\, d\xi\, d\eta \qquad (1.2.15)$$

ただし，積分領域 Si は各接触だ円面内とする。

この w は突起と母材の弾性変形による変位 $w_a + w_m$ に相当するため接触域内では式 (1.2.3) の接触条件を満足しなければならない。式 (1.2.3) を書きかえ

$$\frac{x^2+y^2}{2R} + \frac{(x+\varphi-nl)^2}{2\beta} - \frac{\varphi^2}{2\beta} = w(0, 0) - w(x, y) \qquad (1.2.16)$$

上式に式 (1.2.15) を代入すると，上式の右辺は γ_x, γ_y の関数であることがわかる。結局，最初に仮定した γ_x, γ_y を接触領域内で式 (1.2.16) が満足されるように繰返し計算で求めればよい。その γ_x, γ_y を式 (1.2.15) に代入すれば近接量 α が

$$\alpha = w(0, 0) + \frac{\varphi^2 R}{2\beta(R+\beta)} \qquad (1.2.17)$$

として求まる。

2・2・2　突起が塑性変形する場合

突起が弾性変形する場合と同様の解析手順をふむ。すなわち，母材の変位

を式（1.2.5）で示したような二次関数で表す。この場合，母材の弾性変形量と弾塑性的変形を生じている突起の弾性変形量の区別をつけることは困難なため，この w_m には突起の弾性変形も含まれているものと仮定する。球面からこの母材の変位を差引いた後の曲面も２次曲面で近似的に表される。この２次曲面が図 1.2.1 のように荷重 W のため Z_{op} の位置まで食込んだ状態を考える。個々の接触だ円の短半径 a_n および長半径 b_n は次式で与えられる。

$$a_n = \left[\frac{2\gamma_x \beta R}{\beta + \gamma_x R}\left\{Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2.18)$$

$$b_n = \left[2\gamma_y R\left\{Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2.19)$$

この場合，接触面の圧力は一定でやわらかい方の材料の流れ圧力 p_m に等しいと考えられるので，n 番目の突起が受持つ荷重は式（1.2.10）の代わりに次式で与えられる。

$$W_n = 2\pi R p_m \left\{Z_{op} - \frac{(nl-\varphi)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\right\}\left\{\frac{\gamma_x \gamma_y \beta}{\gamma_x R+\beta}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2.20)$$

分担荷重の総和は荷重 W に等しいはずであるから次式が成立せねばならない。

$$W = \sum_n W_n \qquad (1.2.21)$$

上式が成立するように Z_{op} を逐次計算で求めると突起の塑性変形のみによる近接量が求まり接触域が定まる。また母材の弾性変形量は式（1.2.15）に一定の面圧 p_m を代入して式（1.2.18)(1.2.19）で定まる領域について積分すれば求まる。接触条件は式（1.2.6）を使って式（1.2.3）を変形することにより次式で表される。

$$\frac{1}{2R}\left(x^2+y^2-\frac{x^2}{\gamma_x}-\frac{y^2}{\gamma_y}\right) = w_m(0,0) - w_m(x,y) \qquad (1.2.22)$$

すなわち，全接触領域で上式を満足するように γ_x，γ_y を逐次計算で決定すると接触状態が定まる。

近接量 α は突起の塑性変形による近接量 α_p と，球および平面の母材の弾性変形による近接量 α_m との和となる。

$$\alpha = \alpha_p + \alpha_m \qquad (1.2.23)$$

α_p は $n=0$ のところの接触突起の塑性近接量に相当し幾何学的に次式で定まる。

$$\alpha_p = Z_{op} - \frac{\varphi^2}{2(\gamma_x R+\beta)} \qquad (1.2.24)$$

α_m は $n=0$ 以外の突起接触部面圧による弾性近接量 α_{e1}（近似的には母材の弾性近接量に相当する）と $n=0$ の突起のみの弾性変形による近接量 α_{e2}（突起の弾性近接量に相当する）の和として与えられ，それぞれ α_{e1} は式（1.2.15）から，α_{e2} は式（1.2.24）および式（1.1.26）を組み合わせて次式のように定まる。

$$\alpha_m = \alpha_{e1} + \alpha_{e2} \qquad (1.2.25)$$

$$\alpha_{e1} = \frac{2p_m}{\pi E}\left(\sum_{k=-k_{max}}^{-1} + \sum_{k=1}^{k_{max}}\right)\iint_{S_k}(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta \qquad (1.2.26)$$

$$\alpha_{e2} = \frac{78}{\pi^{1.5}}\left(Z_{op} - \frac{\varphi^2}{2\gamma_x R+\beta}\right) p_m^{1.5} W_0^{-0.5} R\,\gamma_x^{0.6}\,\gamma_y^{0.4}\,E^{-1} \qquad (1.2.27)$$

ここで k_{max} は原点から最も離れた接触突起の番号で S_k は k 番目の接触面領域を表す。

なお W_0 は式（1.2.20）で $n=0$ とおくことにより求まる。結局，近接量 α は式（1.2.23）～（1.2.27）から計算できる。

以上の解析では個々の突起の接触域形状を独立に扱い，突起の合流は考慮しないため W や n_p が非常に大きくて隣接突起の接触域の合流が生じるような場合には本理論は適用できない。

なお以上の理論式はすべて下記の無次元化量で表示できることが確認されたので計算結果はこれら無次元化量を用いて示す。

$$\beta^* = \frac{\beta}{R},\quad l^* = \frac{l}{R},\quad W^* = \frac{W}{R^2E},\quad p_m^* = \frac{p_m}{\pi E},\quad n_p^* = n_p R$$

2．3　数値計算手順

計算手順としては図 1.2.2 に示すように表面粗さのパラメータ，弾性定数，荷重等の接触状態を入力とし，繰返し計算を２重に行う。なお，いずれの繰返し計算にも計算法としては *Newton - Raphson* 法を用いた。また式（1.2.15）の被積

分関数は特異点を有するため極座標表示にして9～10次の *Gauss* 数値積分を行った。式(1.2.16)および式(1.2.22)の接触条件は接触域全域で成立しなければならないが，最初に母材の弾性変形を式(1.2.5)で示されるような二次関数で近似しているため接触条件を全接触域で満足させることは不可能である。そのため，数値計算では球の中心線に最も近い接触突起の接触だ円内の2点($\frac{\varphi}{R\gamma_x+\beta}$，0)($\frac{\varphi}{R\gamma_y+\beta}$，$0.55b_0$)および，突起の$x$座標が$0.55x_{max}$に最も近い突起の接触だ円の中心点，この3点で接触条件を満足させた。

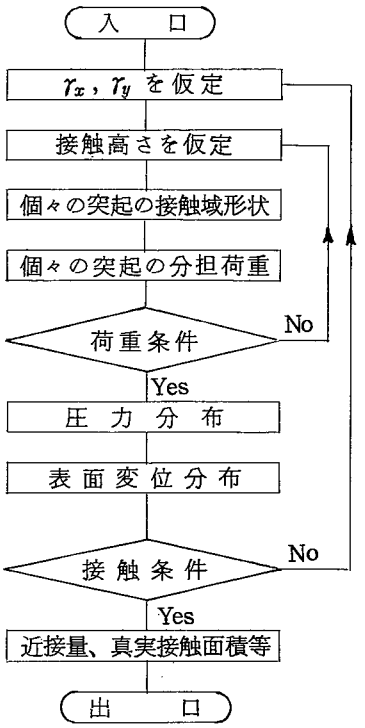


図1.2.2　計算手順

なお，これらの点の座標は第1編第4章の考察4.3.1をもとに定めたものであり，x_{max}はx軸方向の接触域半径を表す。

球に対する突起の相対的位置を示すφについては$\varphi=0$の場合と$\varphi=0.5l$の場合とで近接量の値を比較すると，接触点の数が3個以上の場合ではその差は2%以下にすぎないことが確認されたので数値計算はすべて$\varphi=0$で行った。

2・4　数値計算結果

2・4・1　突起が弾性変形する場合

(1) 接触域形状

接触域形状を図1.2.3の実線で示す。上記手順で母材の弾性変形を考慮すると粗さの方向性に無関係にみかけの接触域は円形をしているが，いま母材の弾性変形を考慮せずに$\gamma_x=\gamma_y=1$とし，個々の突起にヘルツ理論を適用し荷重条件のみを満足させた場合，図1.2.3で点線で示したようにみかけの接触域はx方向

（条痕の方向と直角をなす方向）の半径の方が y 方向の半径より大なるだ円になる。母材の弾性変形量の半径方向の変化が x 方向に比べ y 方向にゆるやかであるため，母材の弾性変形まで考慮に入れると y 方向の接触域が拡がり，接触域形状が円形になると考えられる。すなわち，母材の弾性変形は条痕の方向に平行な方向 $\gamma_y R$ の方が $\gamma_x R$ より大になる。このことは，また図 1.2.4 より明らかであり β，n_p を変化させても常に $\gamma_x R < \gamma_y R$ である。

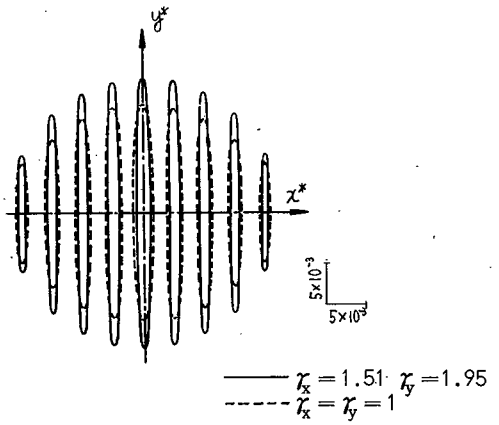


図 1.2.3　接触域形状

$\beta^* = 8\times10^{-3}$
$n_p^* = 250$
$W^* = 2\times10^{-6}$

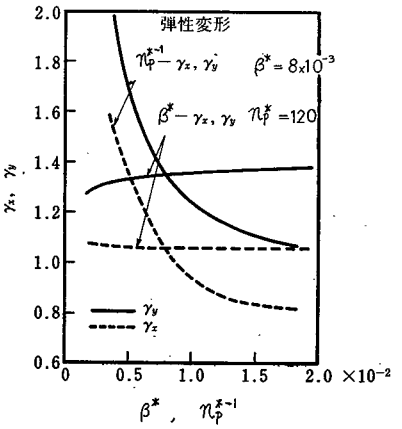


図 1.2.4　母材の弾性変形

$W^* = 2\times10^{-6}$

(2) 圧　力　分　布

第 4,5 章で示すように表面粗さが大なるほどみかけの接触面積が増加し，みかけの平均圧力は平面と球の接触に関するヘルツ理論から求まる圧力よりも低下する。しかし，個々の突起に作用する圧力は図 1.2.5 に示すように局部的に高い値を示す。この分布圧力の最大値 p_{max} とヘルツ圧力 p_H との比（p_{max}/p_H）は突起の半径が小なるほど，また突起の密度が小なるほど増加し，図 1.2.6 に示すような範囲では次式に示す関係で表される。

$$\frac{p_{max}}{p_H} \approx 0.70\, W^{*-0.12}\, n_p^{*-0.40}\, \beta^{*-0.48} \qquad (1.2.29)$$

この式で示されるように，突起部にきわめて高い接触圧力が発生することは軸受

や歯車等の転がり接触物の摩耗を考える上で重要な問題になると考えられる。

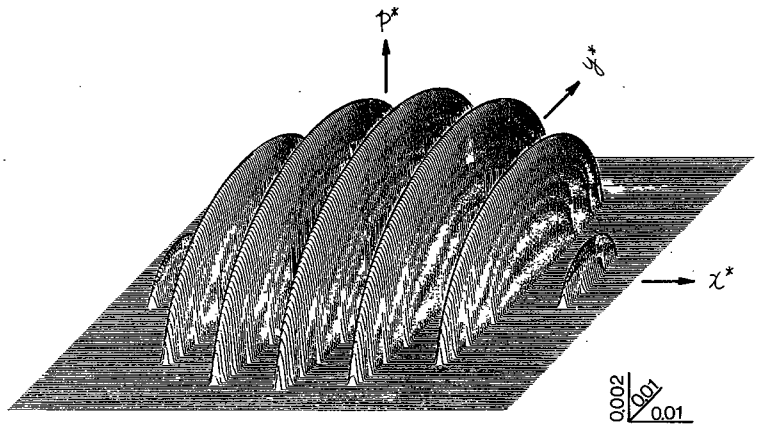
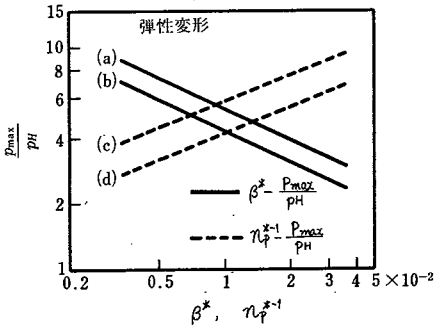


図 1.2.5　個々の接触突起の圧力分布

$\beta^* = 0.04$
$n_p^* = 100$
$W^* = 2\times10^{-6}$

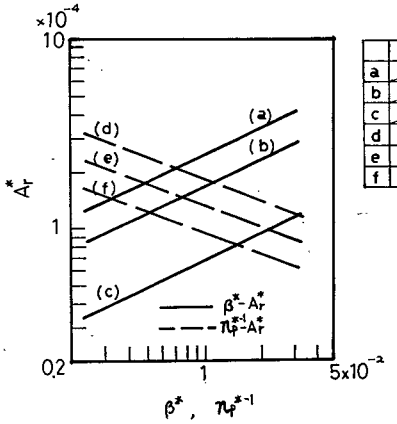


(a) $n_p^* = 120$　　$W^* = 7\times10^{-7}$
(b) $n_p^* = 120$　　$W^* = 3.5\times10^{-6}$
(c) $\beta^* = 8\times10^{-3}$　　$W^* = 7\times10^{-7}$
(d) $\beta^* = 1.6\times10^{-2}$　　$W^* = 7\times10^{-7}$

図 1.2.6　突起半径，間隔と最大圧力の関係

(3)　真実接触面積

真実接触面積 A_r はヘルツ理論による接触面積よりかなり小さく，また図 1.2.7 に示すように突起半径が小なるほど，突起間隔が大なるほど面積は小さくなる。なお A_r



	β^*	n_p^*	W^*
a		120	3.4×10^{-6}
b		〃	2×10^{-6}
c		〃	0.7×10^{-6}
d	1.6×10^{-2}		2×10^{-6}
e	0.8×10^{-2}		〃
f	0.4×10^{-2}		〃

図 1.2.7　突起半径，密度と真実接触面積の関係

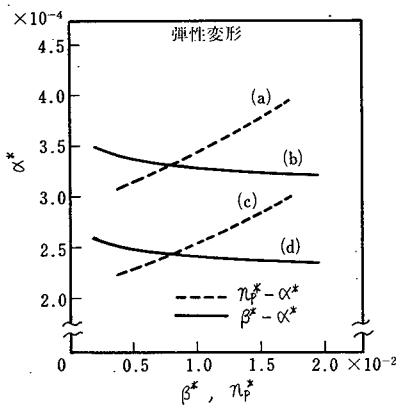
は下記の接触条件下では次式で近似できる。

$$A_r^* = 6.7\, W^{*0.8}\, n_p^{*0.4}\, \beta^{*0.5} \qquad (1.2.30)$$

$$\left\{ \text{ただし，} \ 0.7\times10^{-6} \leqq W^* \leqq 3.4\times10^{-6}, \ \ 0.2\times10^{-2} \leqq \beta^* \leqq 5\times10^{-2} \right.$$
$$\left. 20 \leqq n_p^* \leqq 500 \right\}$$

(4) 近　　接　　量

突起半径および突起の密度と近接量の関係は図1.2.8に示すようになる。すなわち，半径が小なるほど，また密度 n_p^* が小なるほど近接量は増加する。β^*, n_p^*, W^* の接触条件のうち α^* に及ぼす影響は W^* が最も大である。



(a) $\beta^* = 8\times10^{-3}$　　$W^* = 3.4\times10^{-6}$
(b) $n_p^* = 120$　　$W^* = 3.4\times10^{-6}$
(c) $\beta^* = 8\times10^{-3}$　　$W^* = 2.0\times10^{-6}$
(d) $n_p^* = 120$　　$W^* = 2.0\times10^{-6}$

図 1.2.8　突起半径，密度と近接量の関係

(5) 突起内部の最大せん断応力

以上の理論計算は接触突起が弾性変形する場合に成立するが，荷重の増加や突起半径の減少により突起の内部の最大せん断応力が増大し，トレスカの降伏条件によるとこの応力が0.5 Y（Y：降状応力）以上になると突起内部で塑性変形が生じる。中央の接触突起における最大せん断応力を求めた結果を図1.2.9に示す。負荷よりも突起半径の方が最

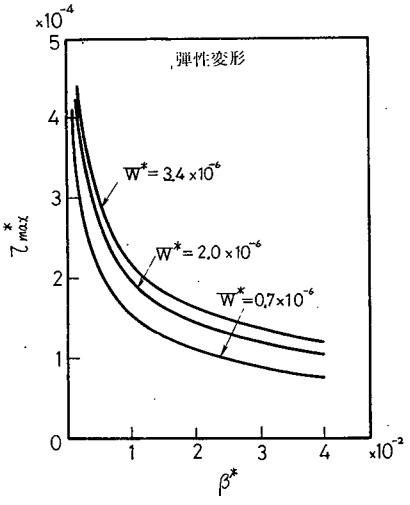


図 1.2.9　β^* と τ_{max}^* の関係
$n_p^* = 120$

大せん断応力に及ぼす影響が大であり，β/R が 0.5×10^{-2} 程度以下では最大せん断応力が著しく大になり突起の塑性変形が生じる可能性が大になる。

2.4.2　突起が塑性変形する場合

図 1.2.10，図 1.2.11 に近接量に関する数値計算結果を示す。両図は，β^*，n_p^*，p_m^* 小なるほど α^* が増加する傾向を示している。しかも，β^*，n_p^*，p_m^* いずれも同程度の影響を α^* に与えている。通常，表面粗さが大なるほど n_p^*，β^* が小になるため，両図の結果から表面粗さ大なるほど α^* が増加することがわかる。しかし p_m^*，n_p^*，β^* 小なるほど各接触突起の変形量は増加するが接触域が拡がるため，逆に母材の変形量は減少する。このため p_m^*，n_p^*，β^* が α^* に及ぼす影響はあまり顕著ではない。

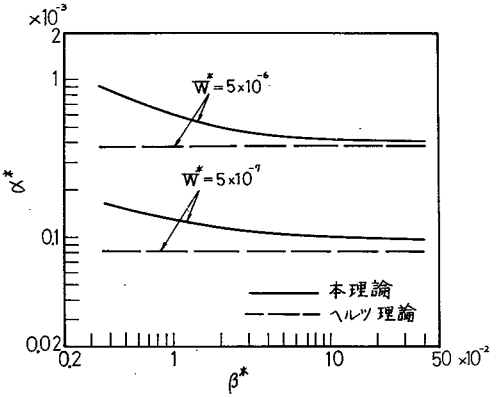


図 1.2.10　β^* と α^* の関係
$p_m^*=5\times10^{-3}$　$n_p^*=200$

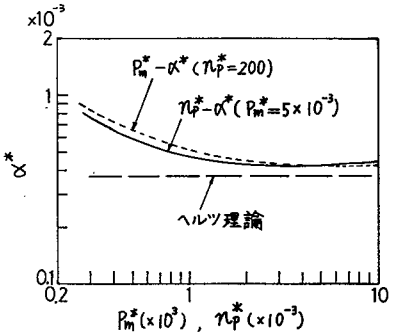


図 1.2.11　p_m^*，n_p^* と α^* の関係
$\beta^*=0.01$，$W^*=5\times10^{-6}$

接触変形時の球の中心の位置から球の半径 R だけ下方の位置すなわち仮想的な球底の高さを食込み位置 u と定義すると，u は実質的な球底の位置を示すため球と平面の接触理論を表面うねりを有する面の接触問題や転がり上下変動等の問題に適用する場合に重要な因子となる。均一形状突起を有する面の場合 u は

$$u \approx \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2}{2R}\,dx - \alpha \qquad (1.2.31)$$

と表されるが，図 1.2.10，図 1.2.11 の接触条件下では右辺第 1 項が無視でき $u\approx-\alpha$ と近似できるため，図 1.2.10，図 1.2.11 は $-u$ に関する数値計算結果

と見なしうる。

第１章で，塑性変形突起の弾性変形量として面積平均値で代表させ単一突起の変形量を求める近似式を導いたが，より厳密に突起の変形を表すには，面積平均値と最大変位値の間の値を弾性変形量として採用すべきであることを同時に示した。そこで，突起の弾性変形量として最大変位値を採用した場合の近接量を求め，面積平均で設定した場合の近接量との比を計算する。その結果，図１.２.12 に示すように両者の比はかなり１に近いことがわかる。面積平均値設定と，最大変位設定の間に存在すると考えられる真の値との比は図 1.2.12 より更に１に近いため，面積平均値近似による誤差は無視できることがわかる。

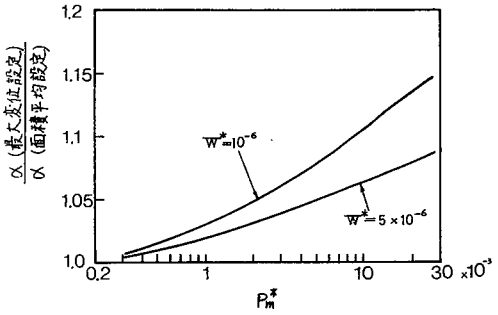


図 1.2.12　面積平均設定と最大変位設定との近接量に関する比
$\beta^* = 0.01 \quad n_p^* = 200$

２．５　実験方法および実験結果

2.5.1　突起が弾性変形する場合

真実接触面積について理論値と実測値の比較を試みる。弾性変形を確実にするため平面試験片としては常温硬化型シリコンゴムを用い，形削り仕上した軟鋼面粗さをこのゴムに転写することにより方向性のある均一形状の表面粗さ試料を作成した。この平面に印肉を薄く塗布した球を押付けた後，ゴムの着色部分の面積を顕微鏡で測定した。なお，理論値を計算するにはシリコンゴムの弾性定数を求める必要があるが，この値は硬化剤

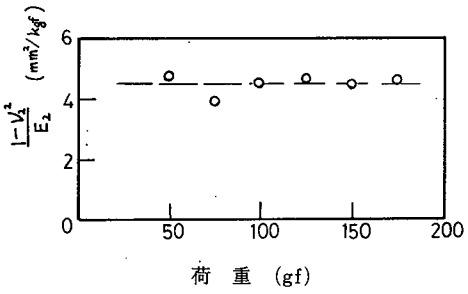


図 1.2.13　常温硬化型シリコンゴムの弾性定数

の量で大きく変化する。そこで粗さ試験片と同一材料で鏡面を転写したなめらかな表面を有する試験片を作り，この試験片に球（半径 40 mm）を押付けた場合の接触半径とヘルツ理論を比較することにより弾性定数を求めた。その結果を図 1.2.13 に示す。荷重の変化に対して $(1-\nu_2^2)/E_2$ はほぼ一定であることから，シリコンゴムを弾性接触用試験片に用いることの妥当性が確認できる。

$(1-\nu_2^2)/E_2 = 4.5\ mm^2/kgf$ として計算した理論値と実測値の比較を図 1.2.14，図 1.2.15 に示す。両図とも理論と実測値の間にかなりの一致をみており，理論の妥当性がほぼ確認できたものと考えられる。

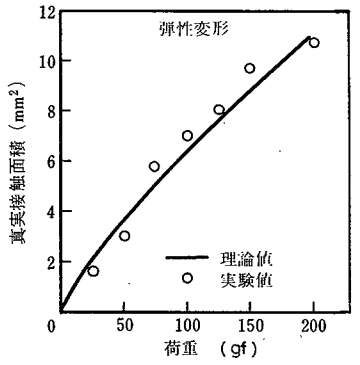


図 1.2.14　荷重と真実接触面積の関係
R＝40 mm　$n_p = 1.67\ mm^{-1}$　$\beta = 0.51$ mm

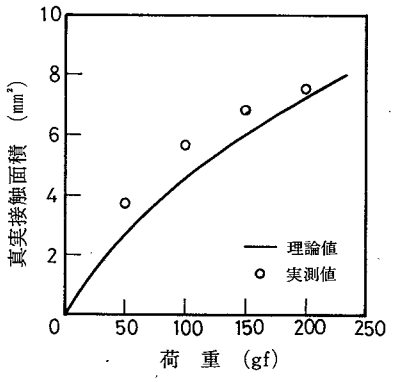


図 1.2.15　荷重と真実接触面積の関係
R＝40 mm　$n_p = 3.3\ mm^{-1}$　$\beta = 0.11$ mm

2.5.2　突起が塑性変形する場合

近接量について理論値と実測値の比較を試みる。実験装置として図 1.2.16 に示すような治具をアムスラー型引張試験機に取付け，上部試験片と球の接触変形による近接量 α を球の周囲 4 ケ所に設置した電気マイクロメータで測定する。

平板試験片の材質は軟鋼（マイクロビッカースかたさ $H_V = 240$）で形削り仕上により図

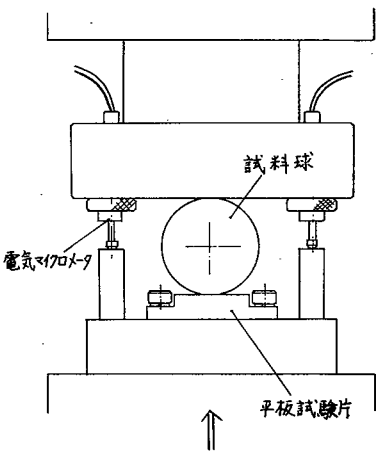


図 1.2.16　押付実験用治具

1.2.17 に示すような均一形状のおうとつを有する。鋼球は材質 $SUJ2$（マイクロビッカース硬さ $H_V = 1000$）で表面粗さは 0.1 μm R_{max} 以下で平板試験片の表面おうとつに比べ無視できる。

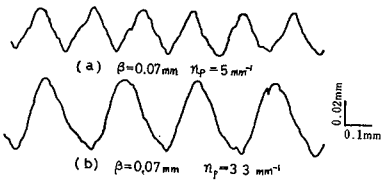


図 1.2.17　試験片の表面粗さ曲線

図 1.2.18，図 1.2.19 に荷重と近接量の関係についての実測値と理論値を示す。丸印は実測値の平均（10 回測定）で実測値のばらつきも図中に示す。実線は突起

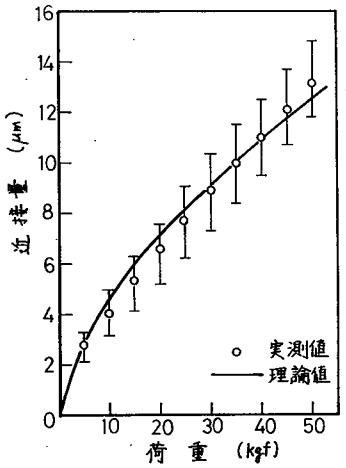


図 1.2.18　荷重と近接量の関係
R＝25.4 mm　p_m＝240 kgf/mm^2
β＝0.07 mm　n_p＝3.3 mm^{-1}

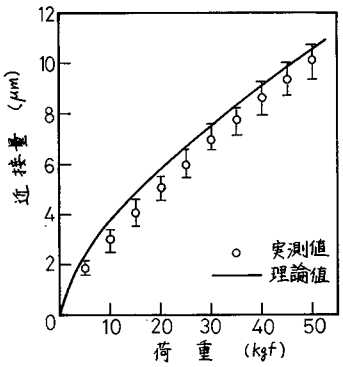


図 1.2.19　荷重と近接量の関係
R＝25.4 mm　p_m＝240 kgf/mm^2
β＝0.07 mm　n_p＝5 mm^{-1}

の変形を塑性変形と設定した場合の理論値で実測値とのかなり良い一致を示している。なお，この場合，突起が塑性変形していることは押付け後の表面観察により確認された。

図 1.2.20 に突起間隔を変えた場合の近接量の変化について実測値と理論値を示す。実線で示した理論値と点線で示した実測値は比較的良い一致を示している。ただ，突起間隔

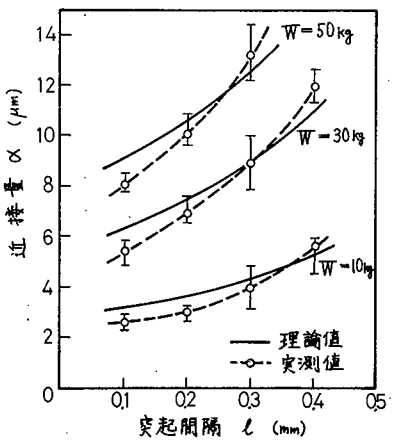


図 1.2.20　突起間隔と近接量の関係
R＝25.4 mm　p_m＝240 kgf/mm^2
β＝0.07 mm

小なる場合には実測値が理論値より低目に，突起間隔大なる場合には逆に実測値の方が理論値より大なる値を示している。しかも，この逆転は荷重が大なるほど小なる突起間隔の所で生じている。

この原因については粗さ試験片の表面下の深さ方向に添っての流れ圧力の変化の影響が考えられる。すなわち，一般に機械加工面は，加工硬化のため表層部が内部に比べ高い硬度を有しているが，突起間隔が拡がるほど，また荷重が増すほど各接触突起の食込み深さは深くなり，より低い流れ圧力の位置で接触が起こるため，理論値より塑性変形が進行する可能性がある。

ところで，本実験の荷重条件においてはヘルツ理論で内部の最大せん断応力を試算すると球あるいは平面の母材の塑性変形の発生が懸念されるが，第4および5章で示すように表面粗さが大なるほど母材内部の最大せん断応力は低下し，ヘルツ理論から推定される最大せん断応力に比べ，かなり低目の値になることがわかる。また本実験において押付け実験後の試料面のおうとつを測定すると図1.2.21にその一例を示すように，母材の顕著な塑性変形の痕跡は見出されない。以上より母材の塑性変形は図1.2.20の実測値に影響を及ぼしていないことがわかる。

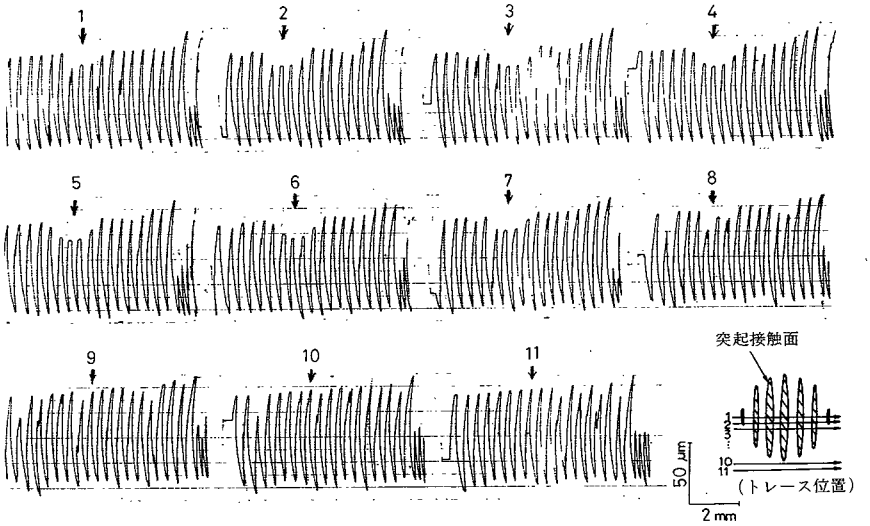


図1.2.21　押付け実験後の断面曲線

$W=60\,kgf$，　$n_p=2.5\,mm^{-1}$

$\beta=0.07\,mm$，　$R=25.4\,mm$

2.6 結　　言

均一形状突起を有する平面と球の接触変形問題を，接触突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行い，真実接触面積や近接量の測定実験を通じて理論の妥当性を検討した結果，以下のことが明らかになった。

1) 突起が弾性変形する場合，母材の弾性変形は表面粗さの方向性の影響を受けて，顕著な方向性を示す。

2) 突起が弾性変形する場合，接触突起に作用する圧力は，なめらかな平面と球の接触におけるヘルツ圧力より大で，その値は表面粗さ大なるほど，すなわち突起密度，突起先端曲率半径小なるほど大になる。

3) 突起が弾性変形する場合，真実接触面積は荷重の 0.79 乗に比例して増加し，表面粗さが大なるほど真実接触面積は減少する。

4) 突起の変形形態のいかんによらず，近接量は表面粗さが大なるほど増加する。

5) 理論値と実測値はかなりの一致を示し，理論の妥当性が確認された。

参　考　文　献

1) 石垣，木原，川口：精密機械，41，4(1975) 385.

2) A.E.H.Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.

第３章　最初の接触位置

３．１　緒　　言

球と平面の接触問題では，理論の妥当性を実験的に検討するには接触開始時点から食込み後までの球の変位（近接量）でもって比較するのが最も容易で測定精度も高い。ところで，近接量を理論的に求めるには，まず接触開始時の球底の高さを解析する必要がある。しかも，この高さ（以後，最初の接触位置と呼ぶ）は球形測定子による寸法測定精度，転がり上下運動，転がり抵抗の変動，表面のおうとつ測定精度等の諸問題においても重要な因子である。例えば表面おうとつ測定精度の問題だけを取り上げても〝最初の接触位置〟が関与する問題として第２編で考察するように，(1) 表面粗さ測定精度に及ぼすスキッドの影響，(2) M システムと E システム間の換算方式，(3) 転がり円うねりの測定精度等が挙げられる。しかるに，最初の接触位置の解析についての従来の報告[1~3]は平面間の接触の場合に限られ，球と平面の接触については見当たらない。そこで，この章では方向性のある面とない面の両方の場合について統計学の〝極値理論〟を応用して最初の接触位置の理論的解析を試み，その数値計算結果と実験結果との比較を行うことにより理論の妥当性を考察する。

なお，第２編で最初の接触位置の解析を応用してスキッドの上下変動，表面うねり測定用触針の挙動等を考察する必要上，この章では曲面の形状を球のみに限定せずに，だ円放物面と平面の接触について解析を試みる。

３．２　理　　論

一般の機械加工面は複雑な方向性を有している場合があるが，ここでは単一方向のみに方向性を有する表面粗さと，全く方向性のない表面粗さの両極端の場合についてそれぞれに解析を行った。なお，複雑な方向性を有する面については後

述のように両者の比較により推定できる。

3.2.1 方向性のある表面粗さの場合[4)]

一方向のみに方向性のある粗さを考え，表面粗さの方向性に平行な粗さ曲線上の表面粗さは無視できるものとする。

座標系を図1.3.1に示すようにとる。すなわち，y軸を表面粗さの条痕に平行にとり，x軸を表面粗さ突起頂点の高さ分布の平均線に一致させ，z軸をだ円放物体の中心軸に一致させる。

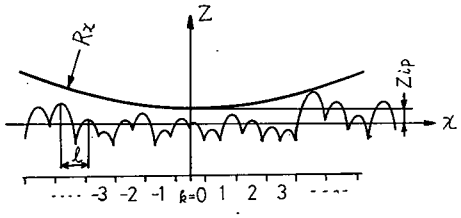


図1.3.1 接触状態

この場合，だ円放物体のy方向の曲率半径は最初の接触位置に影響を及ぼさないため，図1.3.1のようにx方向の曲率半径のみを考え，放物線と表面粗さ曲線との2次元的接触として扱える。そこで，この曲面の曲率半径をx方向曲率半径で代表させこれをR_xとおく。

つぎに，表面粗さの統計的性状を考える。一般に突起頂点の高さ分布は正規分布をなすと言われており，研摩布仕上面についての測定例でも図1.3.2に示すように頂点正規分布が確かめられたため，理論でもこれを仮定する。従来の接触理論では横方向突起間隔分布を考慮する必要はないが，球と平面の接触における最初の接触位置，とくに方向性のある面の場合には後述するように突起間隔分布の影響が無視できない。

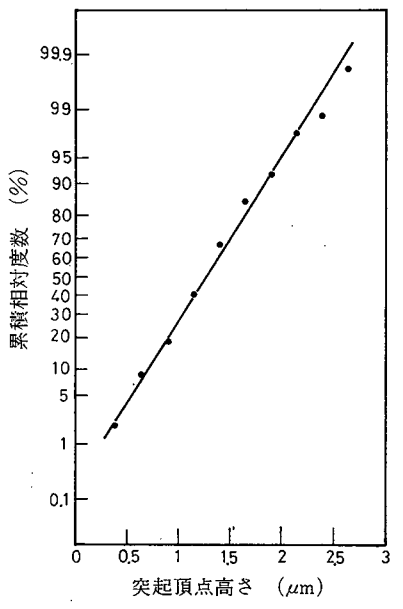


図1.3.2 正規確率紙による分布形の推定（研摩布仕上面）

研摩布仕上面に関して，頂点間隔分布を実測すると，図1.3.3の例にも見られるようにワイブル分布に近い形を示している。実際，

種々の研摩布仕上面について χ^2 検定[5]を行うと，全データの 85 % まではワイブル分布とみなせることが明らかになった[註]。すなわち，突起間隔 l の確率密度関数 $q(l)$ は次式で示すようなワイブル分布で近似できる。

$$q(l)=\frac{S}{\eta}\left(\frac{l}{\eta}\right)^{S-1}e^{-\left(\frac{l}{\eta}\right)^{S}} \qquad (1.3.1)$$

ここで，S：形状母数，η：尺度母数

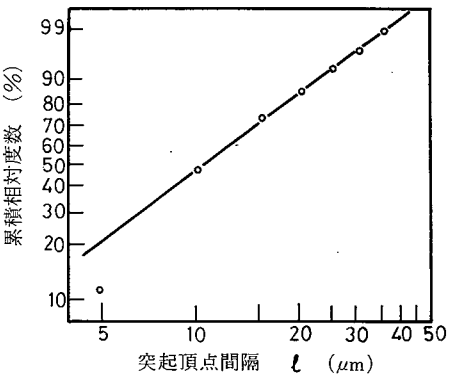


図 1.3.3 ワイブル確率紙による分布形の推定
研摩布仕上面 R_a =0.37 μm

しかし，式 (1.3.1) のままでは解析がきわめて複雑になるため $S=1$ の場合（指数分布）と，$S\to\infty$（均一間隔）の場合について最初の接触位置の解析を行う。また，接触開始時においては突起の頂部のみが曲面と接触し，突起の肩部では接触しないと仮定する。この仮定は球の半径 R が 2.5 mm 以上の場合には成立することが報告[7]されている。

3.2.1.1 突起間隔分布を指数分布と仮定する場合

指数分布と均一間隔を式 (1.3.1) のワイブル分布に対応させるために，両者とも単位幅あたりの平均突起数が次式で与えられるワイブル分布の場合の平均突起数に一致するように分布形のパラメータを決定する。

$$n_p=\frac{1}{\eta\Gamma\left(\frac{1}{S}+1\right)} \qquad (1.3.2)$$

ただし，Γ：ガンマ関数，n_p：平均突起密度

註）最近の実験[6]によれば，突起間隔分布は研摩布仕上面ではワイブル分布より二重指数分布の方により適合することが明らかになったが，両者の分布形の相違はわずかであるのでワイブル分布のままで考察を進める。

図 1.3.1 に示すように，x 方向に等間隔 Δx で断面曲線を分割すると，任意の k 番目の区間中に突起が m 個存在する確率は頂点間隔分布が指数分布の場合には他の区間の影響を受けないため，次式の M_m で与えられる。

$$M_m(\Delta x) = \frac{(n_p \Delta x)^m}{m!} e^{-n_p \Delta x} \qquad (1.3.3)$$

いま図 1.3.1 に示すように，z 軸の原点を表面粗さ突起頂点の平均高さにとり，最初の接触位置を Z_{ip} とすると，この k 番目の区間中のすべての突起が曲面と接触しない確率 p_k は次式で与えられる。

$$P_k = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz \right\}^m M_m(\Delta x) \right]$$

$$= exp\ \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz - 1 \right\} n_p \Delta x \right] \qquad (1.3.4)$$

ここで，$h_k = Z_{ip} + \dfrac{(k\Delta x)^2}{2R_x}$ ，　$f(z) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma_p})^2}}{\int_{-4\sigma_p}^{4\sigma_p} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma_p})^2}\, dz}$

σ_p ：突起頂点高さ分布の標準偏差

なお，上式では個々の突起の頂点高さは互いに独立であるとの仮定を設けているが，表面粗さ曲線の相関長は平均突起間隔より小になるとの報告[8] もあり，頂点高さの独立性はほぼ満足されていると考えられる。つぎに，任意の k 番目の区間中の突起の内，唯一の突起の頂点が高さ $h_k \sim h_k + dZ_{ip}$ の範囲にあって曲面と接触し，この区間中の他の突起はすべて接触しないという確率 Q_k は次式で与えられる。

$$Q_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\ dz \right\}^{m-1} mf(h_k)\ dZ_{ip}\, M_m(\Delta x) \right]$$

$$= n_p \Delta x f(h_k)\, dZ_{ip} \cdot exp\left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\ dz - 1 \right\} n_p \Delta x \right] \qquad (1.3.5)$$

k 番目の区間中に存在する突起のみと曲面が接触し，その時の最初の接触位置が $Z_{ip} \sim Z_{ip} + dZ_{ip}$ の間に存在する確率 G_k は次式で表される。

$$G_k = \frac{Q_k}{P_k \prod_{j=-\infty}^{\infty} P_j} \qquad (1.3.6)$$

よって，最初の接触位置 Z_{ip} の確率密度関数 $g_p(Z_{ip})$ は次式で求まる。

$$g_p(Z_{ip})\,dZ_{ip} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k$$

$$g_p(Z_{ip}) = \lim_{\Delta x \to 0} n_p \Delta x \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(h_x)$$

$$exp\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{h_k} f(z)\,dz - 1 \right) n_p \Delta x \right\} \qquad (1.3.7)$$

上式より確率密度 $g_p(Z_{ip})$ が定まると，最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{ip}$,標準偏差 σ_{zip},および中心線平均値 ζ_{zip} がそれぞれ次式より求まる。

$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_{ip} &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_{ip}\, g_p(Z_{ip})\, dZ_{ip} \\ \sigma_{zip} &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (Z_{ip} - \overline{Z}_{ip})^2\, g_p(Z_{ip})\, dZ_{ip} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \zeta_{zip} &= \int_{-\infty}^{\infty} | Z_{ip} - \overline{Z}_{ip} |\, g_p(Z_{ip})\, dZ_{ip} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.8)$$

3.2.1.2 突起間隔を均一間隔と仮定する場合

x 軸方向に一定の間隔で突起が並んでいると考える。突起密度を式（1.3.2）で定まる n_p とし，z 軸に最も近い突起の x 座標を φ とすると φ は $\frac{-1}{2n_p} \sim \frac{1}{2n_p}$ の間で一様分布をなす。そのため，最初の接触位置の確率密度関数 $g_p(Z_{ip})$ は次式のように表される。

$$g_p(Z_{ip}) = n_p \int_{-\left(\frac{1}{2n_p}\right)}^{\frac{1}{2n_p}} G_p(\varphi)\, d\varphi \qquad (1.3.9)$$

$$G_p(\varphi) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(h_j)}{\int_{-\infty}^{h_j} f(z)\, dz} \qquad (1.3.10)$$

ここで $f(z)$ は式（1.3.4）と同一であるが，h_k は次式で表される。

$$h_k = Z_{ip} + \frac{(k + n_p \varphi)^2}{2 R_x n_p^2} \qquad (1.3.11)$$

式（1.3.9）を式（1.3.8）に代入すれば $\overline{Z}_{ip}$，σ_{zip}，および ζ_{zip} が求まる。

3.2.2 方向性のない表面粗さの場合

方向性のない表面粗さの場合には，x 方向の曲率半径のみならず y 方向の曲率半径も考慮しなければならない。そこで，次式に示すように x，y 方向の主曲率

半径が R_x，R_y であるようなだ円放物面と粗い平面の接触を考える。

$$\frac{x^2}{2R_x}+\frac{y^2}{2R_y}=z \qquad (1.3.12)$$

方向性のない表面粗さの場合も，突起頂点高さ分布をもとに解析を行うのが方向性のある表面粗さの場合と比較する上から最も適当であるが，この場合，突起頂点間隔分布が2次元になることから解析がきわめて複雑になる。しかも，解析が可能であっても現実の加工面に適用する場合，3次元的頂点分布を実測することは容易でなく，また一般的でない。そこで，方向性のない表面粗さの場合には真実表面が互いに独立で面積が最小な微小な表面単位[2]で形成されていると考え，その表面単位の高さ分布をもとに最初の接触位置の解析を行う。いま，だ円放物体を図1.3.4に示すように等間隔 dz で分割すると，各部分の x，y 平面への投影面積は次式に表すようにに無関係になる。なお方向性のない面の解析の場合には z 軸の原点高さを表面単位の平均高さにとる。

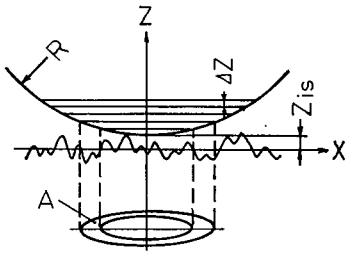


図 1.3.4 接触状態
(方向性のない表面粗さ)

$$A=2\pi\{R_xR_y\}^{\frac{1}{2}}\Delta z$$
$$=2\pi R\,\Delta z \qquad (1.3.13)$$

ここで，$R=(R_x\,R_y)^{\frac{1}{2}}$ とおく。

すなわち，輪切りされた各部分を x，y 平面へ投影した各リンク中に含まれる表面単位の数は一定になる。いま，この曲面の底が Z_{is} の位置にあるとき，任意の k 番目のリンク中のすべての表面単位が二次曲面と接触しない確率 P_k は式(1.3.4)と同様に次式で与えられる。

$$P_k=\left[\int_{-\infty}^{h_k} f_s(z)\,dz\right]^{An_s} \qquad (1.3.14)$$

ただし，n_s は x，y 平面への単位投影面積中に存在する平均表面単位数，

$f_s(z)$ は表面単位の高さ分布の確率密度関数で標準偏差 σ_s の正規分布とし，式（1.3.4）の場合と同様の条件付確率密度関数で表される。また，上式の h_k は次式で与えられる。

$$h_k = Z_{is} + k\,\Delta z \qquad (1.3.15)$$

一方，任意の k 番目のリンク中に含まれる表面単位のうち最も高い表面単位が高さ $h_k \sim h_k + dz_{is}$ の間で二次曲面と接触し，しかもこのリンク中の他の表面単位が二次曲面と接触しない確率 Q_k は次式で与えられる。

$$Q_k = An_s \left[\int_{-\infty}^{h_k} f_s(z)\,dz\right]^{An_s-1} f_s(h_k)\,dz_{is} \qquad (1.3.16)$$

最初の接触位置が $Z_{is} \sim Z_{is} + dz_{is}$ との間に存在する確率 G_k は方向性のある面の場合と同様に式（1.3.14），（1.3.16）を式（1.3.6）に代入すれば求まる。よって Z_{is} の確率密度関数 $g_s(Z_{is})$ は次式で表される。

$$g_s(Z_{is}) = \lim_{\substack{\Delta z\, m\to\infty \\ \Delta z\to 0}} \left[\prod_{k=1}^{m}\int_{-\infty}^{h_k} f_s(z)\,dz\right]^{An_s} \sum_{k=1}^{m} \frac{An_s f_s(h_k)}{\int_{-\infty}^{h_k} f_s(z)\,dz} \qquad (1.3.17)$$

式（1.3.17）を式（1.3.8）の $g_p(Z_{ip})$ に代入すると，最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{is}$，標準偏差 σ_{zis}，および中心線平均値 ζ_{zis} が算出される。

3.3 数値計算結果

3.3.1 方向性のある表面粗さの場合

（1）突起間隔が指数分布，あるいは等間隔である場合

式（1.3.7），（1.3.8）を用いて数値計算を行った結果を図1.3.5，図1.3.6に示す。なお，数値計算にあたっては Δx を順次減少させ，同時に式（1.3.7）の総和の項数を増加させ，式（1.3.8）の数値計算結果が一定になるところの値を用いた。

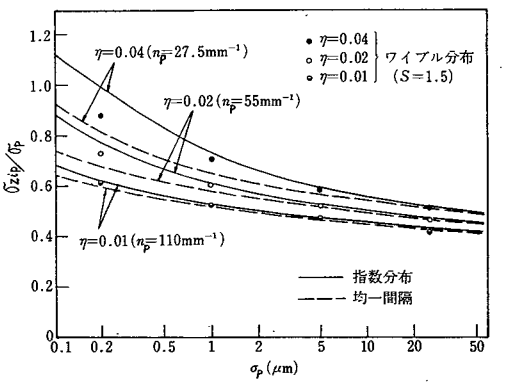


図1.3.5 σ_{zip} に及ぼす突起間隔分布の影響 （R_x = 5mm）

図 1.3.5，図 1.3.6 はそれぞれ最初の接触位置の標準偏差 σ_{zip}，および平均値 $\overline{Z}_{ip}$ の数値計算結果で実線は突起間隔分布が指数分布をなす場合，破線は均一間隔の場合を示す。

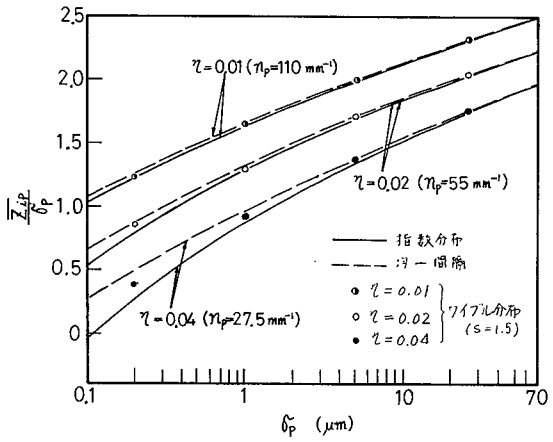


図 1.3.6　最初の接触位置の平均値
($R_x=5$mm)

(2) 突起間隔がワイブル分布である場合のシミュレーション

ワイブル分布の場合には，指数分布の場合のように x 軸方向に等間隔 Δx で分割しても，任意の k 番目の区間の突起数が $k-1$ 番目，あるいはそれ以前の区間の影響を受けるため区間内の突起存在個数が式 (1.3.3) のように簡単には表しえない。そこで，丸印の数値計算結果はシミュレーションによる計算から求めた。すなわち，正規乱数，およびワイブル乱数を一様乱数から発生させ，これらの乱数を高さ，および頂点間隔とする突起頂点の標本点を作り，この標本点列の上を転がる球の軌跡の高さの平均値や標準偏差を求めた。その結果を図 1.3.5，図 1.3.6 の丸印で示す。図 1.3.5 において表面粗さ突起頂点高さの標準偏差 σ_p が大で突起密度 n_p が大なる範囲では，突起間隔分布を指数分布と仮定する場合と，均一間隔と仮定する場合の両者の理論値はほぼ一致している。しかし，σ_p および n_p が小なる範囲では，図 1.3.1 の z 軸近傍のほんの数個の突起しか接触の可能性を有しないため，その数個の突起の間隔分布の差が最初の接触位置に大きな影響を及ぼす。そのため，図 1.3.5 でも σ_p，n_p が小なる場合には指数分布と均一間隔との間に大きな差が生じている。ところで，実際の砥粒加工面の突起間隔分布をかなりよく近似していると考えられるワイブル分布の場合の数値計算結果は図 1.3.5 の実線と破線のほぼ中間に位置している。これより，ワイブル分布の場合の理論値は指数分布と均一間隔の両者の理論値の平均値でもっ

て近似できるものと考えられる。また $\overline{Z}_{ip}$ に関しても図 1.3.6 に見られるように同様の近似が成立することが確認できる。よって以後の理論値は両者の理論値の平均値で示す。

(3) 無次元化処理

式 (1.3.7), (1.3.8) は下記の無次元化変数で表されるため，以下の数値計算結果はこの無次元化変数で示す。

$$\sigma_p^* = \frac{\sigma_p}{R_x}\ ,\quad n_p^* = n_p R_x\ ,\quad \overline{Z}_{ip}^* = \frac{\overline{Z}_{ip}}{R_x}$$

$$\sigma_{zip}^* = \frac{\sigma_{zip}}{R_x}\ ,\quad \zeta_{zip}^* = \frac{\zeta_{zip}}{R_x}$$

式 (1.3.7), (1.3.8) をこれら無次元化変数で表し，さらに変数変換を施してやると $\overline{Z}_{ip}^*/\sigma_p^*$, $\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$, ζ_{zip}^*/σ_p^* は $\sigma_p^* n_p^{*2}$ のみの関数として表しうる。すなわち，これらの理論値は図 1.3.7 に示すようにそれぞれ 1 本の曲線に整理できる。図 1.3.7 から σ_p^* あるいは n_p^* が大なるほど $\overline{Z}_{ip}^*/\sigma_p^*$ は増加し，$\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$, ζ_{zip}^*/σ_p^* は減少することがわかる。いま，σ_p, n_p が一定，すなわち表面粗さが一定の場合を考えると図 1.3.7 の横軸 $\sigma_p^* n_p^{*2}$ は球の半径 R_x のみになる。そこで図 1.3.7 を見直すと，球径が大なるほど $\overline{Z}_{ip}^*/\sigma_p^*$ は増加し，$\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$ は減少することがわかる。この傾向は最初の接触位置の分布において，R_x を増加させることが極値分布において標本数を増やすことに相当することから理解される。なお，これらの数値計算結果は図 1.3.7 の領域内については十分な精度で次式で近似できる。

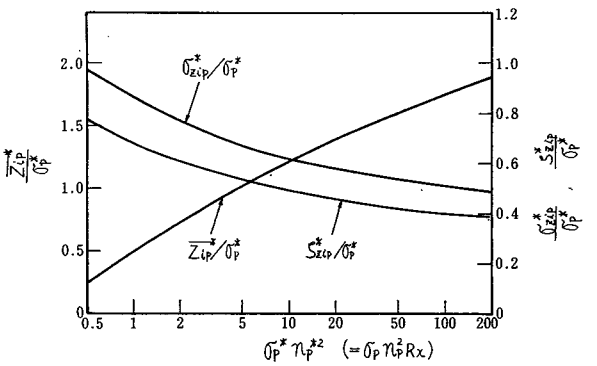


図 1.3.7 $\sigma_p^* n_p^{*2}$ と $\frac{\overline{Z}_{ip}}{\sigma_p^*}$, $\frac{\sigma_{zip}^*}{\sigma_p^*}$, $\frac{\zeta_{zip}^*}{\sigma_p^*}$ の関係

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma^*_{zip}}{\sigma^*_p} &= (-0.02\,t_p^3 + 0.135\,t_p^2 - 0.365\,t_p + 0.86)\\ \frac{\overline{Z}^*_{ip}}{\sigma^*_p} &= (0.023\,t_p^3 - 0.165\,t_p^2 + 0.862\,t_p + 0.5)\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.18)$$

$$\zeta^*_{zip} = 0.8\,\sigma^*_{zip}$$

ここで　$t_p = log\ (\sigma^*_p n^{*2}_p)$

最初の接触位置の分布形は図1.3.8に示すようにかなり正規分布に近いが，その最大値が僅かに Z_{ip} の小さい側に偏位した非対称の分布形をなす。

3.3.2　方向性のない表面粗さの場合

方向性のない表面粗さの場合についても，R に関する無次元化を行うと方向性のある表面粗さの場合と同様に，$\overline{Z}^*_{is}/\sigma^*_s$，$\sigma^*_{zis}/\sigma^*_s$，$\zeta^*_{zis}/\sigma^*_s$ は $\sigma^*_s n^*_s$ のみの関数として表される。これらの統計量に関する数値計算結果を図1.3.9に示す。$\sigma^*_s n^*_s$ 大なるほど（表面粗さが一定の場合には相当曲率半径 R が大なるほど）$\overline{Z}^*_{is}/\sigma^*_s$ が大に，また $\sigma^*_{zis}/\sigma^*_s$ や ζ^*_{zis}/σ^*_s が小になることがわかる。これらの数値計算結果は図1.3.9の領域内では十分の精度で次式で近似できる。

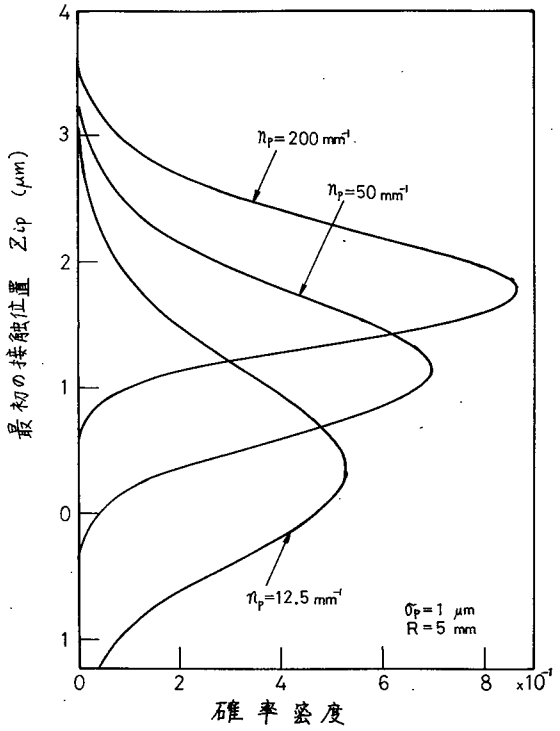


図1.3.8　最初の接触位置の分布形

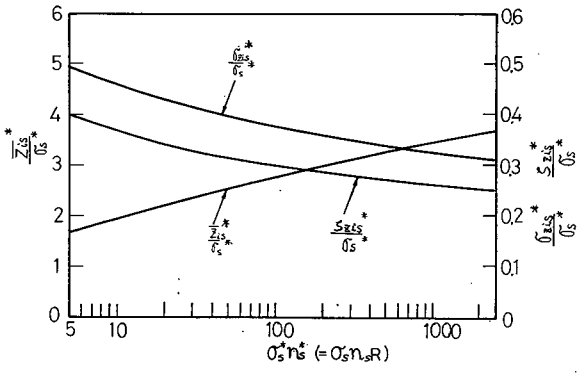


図1.3.9　$\sigma^*_s n^*_s$ と $\frac{\overline{Z}_{is}}{\sigma_s}$，$\frac{\sigma_{zis}}{\sigma_s}$，$\frac{\zeta_{zis}}{\sigma_s}$ の関係

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overline{Z}_{is}^{*}}{\sigma_s^{*}} &= 0.08\,t_s^3 - 0.125\,t_s^2 + 1.14\,t_s + 0.915\\ \frac{\sigma_{zis}^{*}}{\sigma_s^{*}} &= -0.0068\,t_s^3 + 0.061\,t_s^2 - 0.218\,t_s + 0.618\\ \zeta_{zis}^{*} &= 0.8\,\sigma_{zis}^{*}\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.19)$$

ここで　$t_s = log\ \sigma_s^{*}\ n_s^{*}$

ところで，σ_s，n_s は表面粗さの表示法としては一般的でない。σ_s については，ここで扱うような表面粗さ曲線の高さ分布の分布形が正規分布をなす面の場合，中心線平均粗さ R_a を用いて次式で推定できる。

$$\sigma_s = 1.25\,R_a \qquad (1.3.20)$$

砂吹仕上面の n_s については突起の傾斜角の実測値と連の理論を用いた解析結果をもとにして次式が提示されている[2)]。

$$n_s = \frac{0.7978^2}{\sigma_s^2}\left(\frac{R_{max}}{3.45\,R_{max} + 11.1}\right)^2 \qquad (1.3.21)$$

ただし，R_{max} のみ μm 単位で他は mm 単位

また，R_{max} と σ_s の関係としては極値理論による推定および計算機による表面粗さ曲線のデータ処理結果等を用いて次式が提示されている[9)]。

$$R_{max} = \{4.14\,ln\,(ln\,10\,Ni) - 3.38\}\,\sigma_s \qquad (1.3.22)$$

ここで Ni は R_{max} 測定長中に含まれる独立なサンプリングの数で，当然 R_{max} が異なると Ni そのものも変化するが，その変化は上式の形からも明らかなように右辺の値に大きな影響を与えない。いま，$\sigma_s = 1\,\mu m$（測定長 0.8 mm）の時 Ni を実測すると 120 程度であるので，上式より

$$R_{max} = 4.6\,\sigma_s \qquad (1.3.23)$$

が求まる。

上式と式（1.3.20）を式（1.3.22）に代入し n_s を R_a の関数として表し，この n_s と式（1.3.20）を式（1.3.19）に代入して σ_{zis}，$\overline{Z}_{is}$ と R_a の関係を求めた結果

を図 1.3.10，図 1.3.11 に示す。

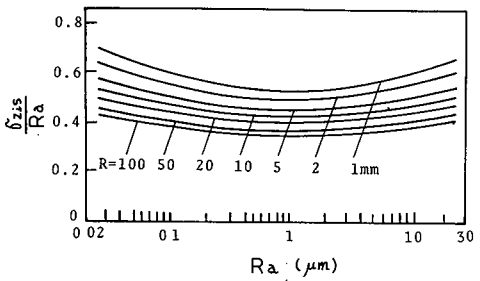


図 1.3.10　R_a と σ_{zis}/R_a の関係

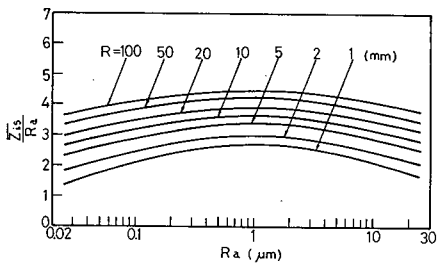


図 1.3.11　R_a と $\overline{Z}_{is}/R_a$ の関係

3.4　実　　験

3.4.1　実 験 方 法

最初の接触位置の統計量は，触針式表面粗さ計の触針のかわりに球を取りつければこの球による表面おうとつの包絡線軌跡から求めることができる。

測定に用いた表面粗さ計は小坂式 SE 3 型で測定荷重は表 1.3.1 に示す。まず，σ_{zip}，σ_{zis} の測定について述べる。図 1.3.7，図 1.3.9 を見ると，σ_{zip} と ζ_{zip}，また σ_{zis} と ζ_{zis} はほぼ比例関係にあり，しかも後に示す図 1.3.16，図 1.3.17 のように最初の接触位置の分布形の実測値は理論とかなり良い一致を示していることから ζ_{zip}，あるいは ζ_{zis} を測定してそれぞれの理論値との比較を行うとその結果はそのまま σ_{zip}，あるいは σ_{zis} に関する実験値と理論値の比較と見なしうる。なお ζ_{zip}，ζ_{zis} は表面粗さ計の R_a 目盛から直読できる（高域フィルターのカットオフ値 2.5 mm）。

表 1.3.1　半球形触針の測定荷重

半　　径	4 μm*	5 mm	10 mm	18 mm
測定荷重	0.5 gf	0.7 gf	0.8 gf	1.4 gf

*表面粗さ測定用触針

$\overline{Z}_{ip}$ と $\overline{Z}_{is}$ では理論解析において設定した基準高さが異なるため検証実験を行うにはそれぞれ理論の設定にしたがい，方向性のある面の場合には表面粗さ突起の頂点の平均高さを基準とした包絡線平均高さを，方向性のない場合には表面粗さ曲線の中心線を基準高さにした包絡線平均高さを求めなければならない。その

ために，図 1.3.12 のような保持具を作り粗面と同一面上になめらかな基準面を設定する。そして図 1.3.13 に一例を示すようにこの 3 面を連続して表面粗さ計の触針および球形子でもってトレースし，表面粗さ曲線と球による包絡線とを測定する。これらを基準面をもとにして重ね合わせ，表面粗さ曲線の中心線（あるい

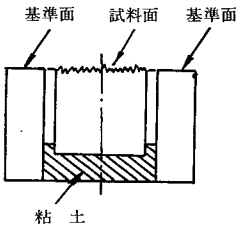


図 1.3.12 最初の接触位置測定用保持具

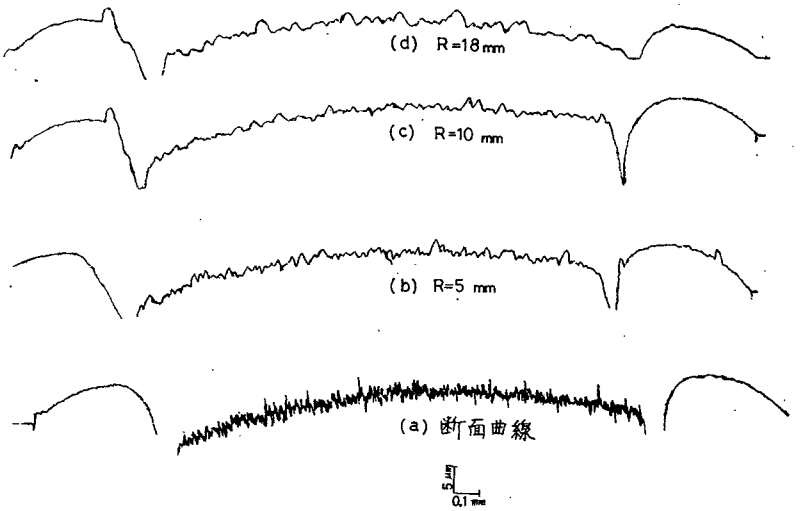


図 1.3.13 最初の接触位置の実測例

は突起頂点平均高さ）と包絡線との距離を求める。表面粗さ試験片としては方向性のある面として黄銅面に研摩布仕上げを施したものを，方向性のない面として SS 41 の面に湿式ラップ仕上げを施したものを用いた。

これらの試験片と球面との接触における最初の接触位置の理論値を算出するためには，σ_p，n_p，σ_s，n_s といった因子の値を求める必要がある。研摩布仕上面の表面粗さ曲線を実測し，それをミニコンピュータでデータ処理し σ_p と n_p の値を算出した結果を図 1.3.14 に示す。湿式ラップ仕上面についても σ_s と n_s を以下の方法で実測した結果を図 1.3.15 に示す。σ_s は表面粗さ計により測定した R_a 値

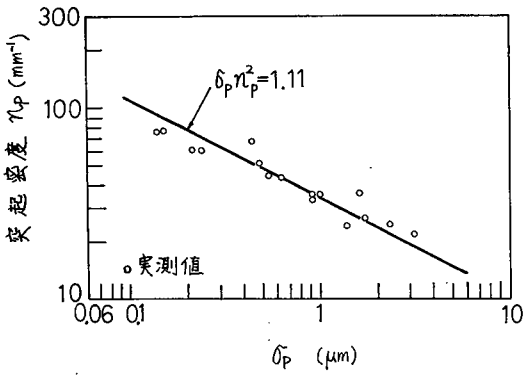


図 1.3.14　研摩布仕上面に関する
σ_p と n_p の関係

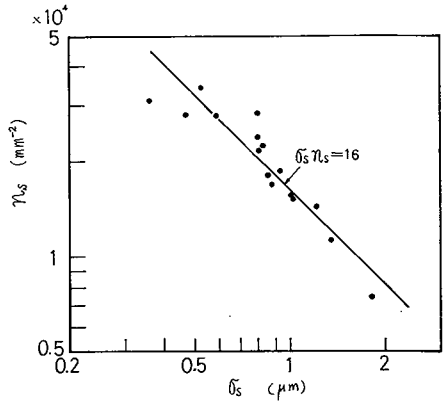


図 1.3.15　湿式ラップ仕上面における
σ_s と n_s の関係

と式（1.3.20）から求め，n_s は表面粗さ曲線から測定した単位長さ当たりの零交さ数を n_o とすると連の理論から $4n_o^2$ として求まる。図 1.3.14，図 1.3.15 から次式が近似的に導かれる。

$$\sigma_p n_p^2 \fallingdotseq 1.1 \qquad (1.3.24)$$

$$\sigma_s n_s \fallingdotseq 16 \qquad (1.3.25)$$

式（1.3.24），（1.3.25）をそれぞれ式（1.3.18），（1.3.19）に代入すれば $\frac{\overline{Z}_{ip}}{\sigma_p}$，$\frac{\overline{Z}_{is}}{\sigma_s}$，$\frac{\zeta_{zip}}{\sigma_p}$，$\frac{\zeta_{zis}}{\sigma_s}$ 等の理論値は球の半径のみの関数となる。

3.4.2　実　験　結　果

(1) 方向性のある表面粗さの場合

最初の接触位置の分布形について実測値と理論値の比較を行った結果，図 1.3.16，図 1.3.17 に示すように平均高さについても分布形についてもかなり良い一致が見られる。図 1.3.18 に ζ_{zip}/σ_p についての実験結果を示す。◦印は個々の試験片についての理論値を示す。図 1.3.14 では σ_p と n_p の関係にはかなり大なるばらつきがあるが図 1.3.18 の◦印はほぼ一定の値を示している。すなわち，最初の接触位置の理論的推定では $\sigma_p n_p^2 = 1.1$ で近似しても大きな誤差を生じないことがわかる。図 1.3.18 の実験値（•印）と理論値とはかなりよい一致を示して

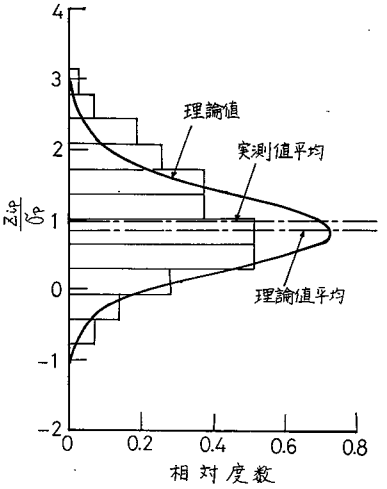


図 1.3.16　最初の接触位置の分布形

$\sigma_p = 1.4\,\mu m$

$n_p = 22\,mm^{-1}$

$R_x = 5\,mm$

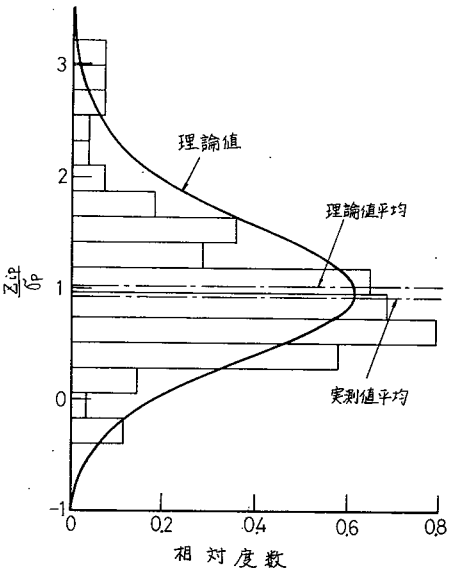


図 1.3.17　最初の接触位置の分布形

$\sigma_p = 2.2\,\mu m$

$n_p = 24\,mm^{-1}$

$R_x = 5\,mm$

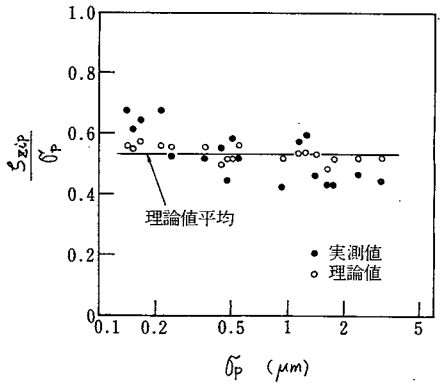


図 1.3.18　ζ_{zip} の理論値と実測値の比較

$R_x = 5\,mm$

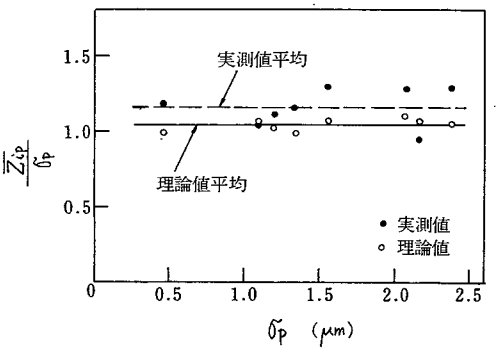


図 1.3.19　$\overline{Z}_{ip}$ の理論値と実測値の比較

$R_x = 5\,mm$

いるが，σ_p 小なる領域では実測値が少し理論値より大きめの値を示している。これは表面粗さが小なる試験片では突起頂点高さ分布が正規分布に適合しなくなるような異常に高い突起が多く含まれるためと考えられる。図 1.3.19 は $\overline{Z}_{ip}$ についての実測値を示す。実測値も理論値と同様の傾向を示し，$\overline{Z}_{ip}/\sigma_p$ の実測値はほぼ一定である。しかし，実測値は理論値より少し高い値を示している。これは理

論では無視した表面粗さの方向に沿っての粗さの影響が出ているものと考えられる。この表面粗さの方向性の影響については後に考察を試みる。

(2) 方向性のない表面粗さの場合

ζ_{zis} についての実測値を図 1.3.20，図 1.3.21，図 1.3.22 に示す。各々，半径 5 mm，10 mm，18 mm での測定結果だが，いずれも実測値が理論値より少し大なる値を示している。これは後述するような表面うねりの影響が表れているものと考えられる。なお理論値は図 1.3.18，図 1.3.19 同様ほぼ一定なためその平均値のみ示す。

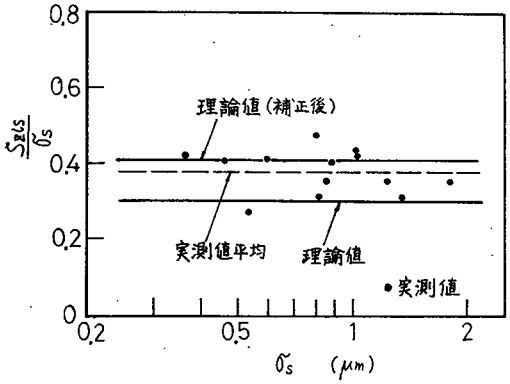


図 1.3.20 ζ_{zis} の理論値と実測値の比較
R = 5 mm

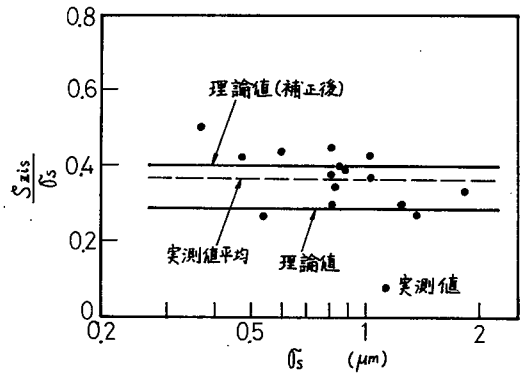


図 1.3.21 ζ_{zis} の理論値と実測値の比較
R = 10 mm

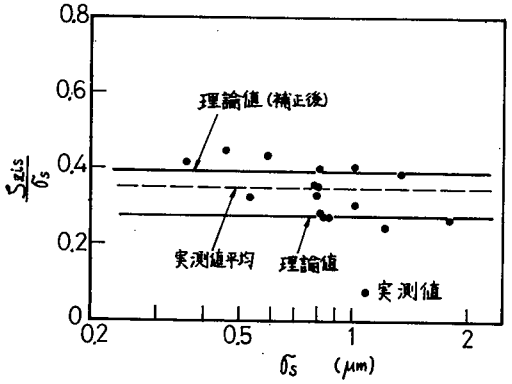


図 1.3.22 ζ_{zis} の理論値と実測値の比較
R = 18 mm

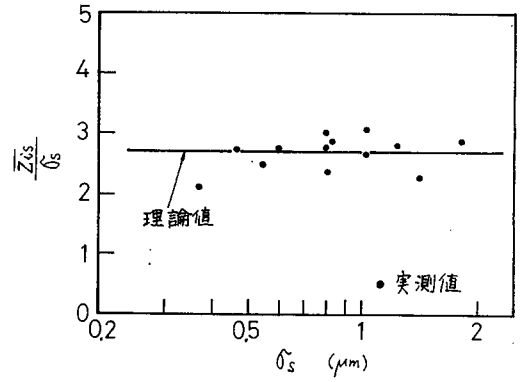


図 1.3.23 $\overline{Z}_{is}$ の理論値と実測値の比較
R = 5 mm

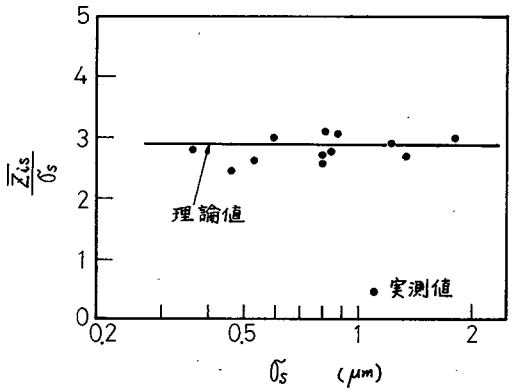


図 1.3.24　$\overline{Z}_{is}$ の理論値と実測値の比較
R = 10mm

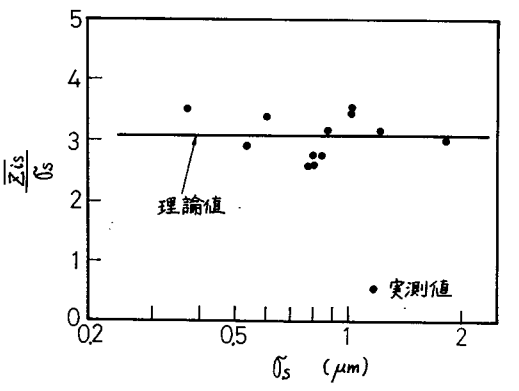


図 1.3.25　$\overline{Z}_{is}$ の理論値と実測値の比較
R = 18mm

図 1.3.23，図 1.3.24，図 1.3.25 に $\overline{Z}_{is}$ の実測値を示す。各々，半径 5 mm，10 mm，18 mm での測定結果であるが，いずれの場合も実測値と理論値の間には良い一致をみている。この場合，表面うねりの影響が表れてないのは $\overline{Z}_{is}$ を断面曲線と包絡線との比較から目測で測定する際にうねり成分は除去されているためである。

3.5　考　　察

$\overline{Z}_{ip}$ の実験結果に表れた表面粗さの方向性の影響，σ_{zis} の測定で問題になる表面うねりの影響，および突起の変形の影響について考察する。

3.5.1　表面粗さの方向性の影響

表面粗さに方向性がある場合とない場合に関する最初の接触位置の統計量の相違を考察するには，図 1.3.7 と図 1.3.9 の縦軸，横軸を同一にする必要がある。研摩布仕上面について σ_p と表面粗さ曲線の標準偏差 σ_s を測定した結果を図 1.3.26 に示す。この図から次式が近似的に成立することがわかる。

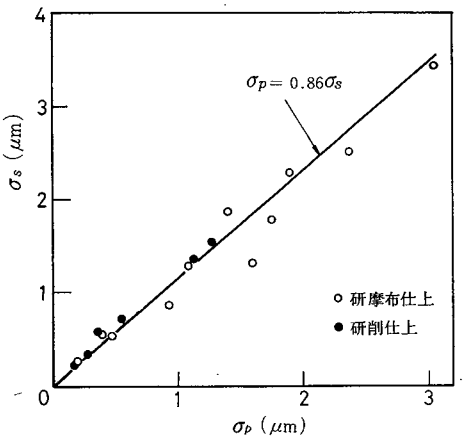


図 1.3.26　σ_p と σ_s の関係

$$\sigma_p \fallingdotseq 0.86\,\sigma_s \qquad (1.3.26)$$

式（1.3.24），（1.3.25）と式（1.3.26）を式（1.3.18），（1.3.19）に代入すると σ_{zip} と σ_{zis} の理論的関係が図 1.3.27 のように求まる。この図においてつねに $\sigma_{zip}/\sigma_{zis} > 1$ なる関係が成立している。すなわち，単一方向性の表面粗さの場合に比べ，複雑な方向性を有する面では最初の接触位置の変動の標準偏差が小になることが明らかである。つぎに，$\overline{Z}_{ip}$ と $\overline{Z}_{is}$ の関係を求める。$\overline{Z}_{ip}$ の場合，突起頂点の平均高さを基準高さとして解析してきたため，$\overline{Z}_{ip}$ を $\overline{Z}_{is}$ と比較するには $\overline{Z}_{is}$ の基準高さである表面粗さ曲線の中心線に基準高さを補正する必要がある。突起頂点の平均高さと表面粗さ曲線の中心線との間の距離を h_p とすると，h_p と σ_p の関係は図 1.3.28 に示す実測値から次式のように近似できることがわかる。

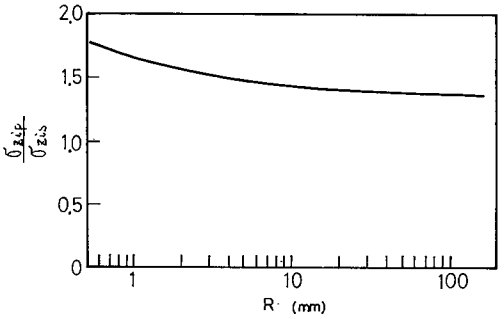


図 1.3.27　最初の接触位置の標準偏差に及ぼす方向性の影響

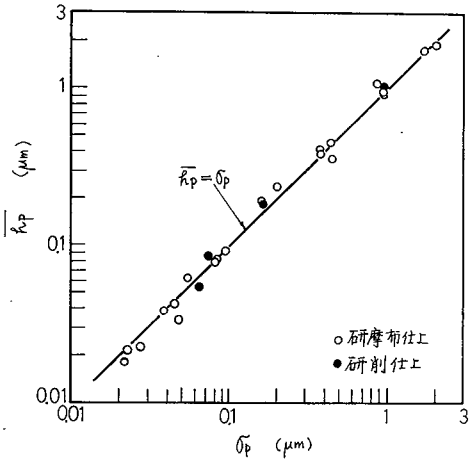


図 1.3.28　突起頂点高さの標準偏差と平均値

$$\overline{h_p} \fallingdotseq \sigma_p \qquad (1.3.27)$$

式（1.3.24），（1.3.25），（1.3.26），（1.3.27）を式（1.3.18）に代入すると，表面粗さ曲線の中心線を基準高さとした場合の方向性のある表面粗さに関す

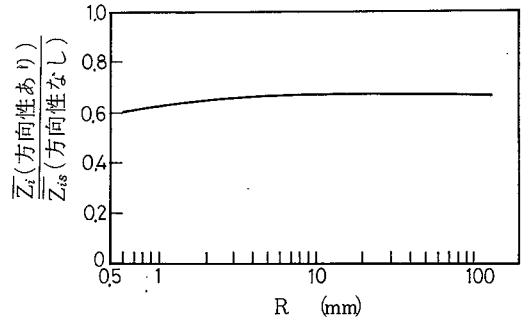


図 1.3.29　最初の接触位置の平均値に及ぼす方向性の影響

る最初の接触位置の平均値 $\overline{Z_i}$ が求まる。この $\overline{Z_i}$ と $\overline{Z_{is}}$ の比を求めた結果を図1.3.29に示す。この図から，両者の比はほぼ一定（0.63）で，方向性のない面に比べ方向性のある面は接触位置が下がることがわかる。

3.5.2 表面うねりの影響

3.4.2の実験結果において ζ_{zis}/σ_s の実測値が理論値より大になる傾向を示している。この原因として，以下に示すように表面うねりの影響を考える。

最初の接触位置の理論解析においては，表面おうとつとして短い波長の表面粗さ成分のみで構成されていると設定している。しかるに，実測値は表面粗さ以外にもっと波長の長い表面うねり成分も含まれる試験面上のトレースから求めている。しかも，ζ_{zis} 測定に際しては高域フィルターのカットオフ値0.8 mm では包絡線そのものがカットされてしまうため，カットオフ値2.5 mm で測定している。すなわち，ζ_{zis} の実測値の中には理論では考慮されていない表面うねりの成分が含まれる。

いま，表面粗さ曲線の中心線上の単位長さ内で中心線と表面粗さ曲線が交さする数を N_o とすると，この表面粗さ曲線の平均波長 l は，この表面粗さ曲線のスペクトル幅が平均周波数の値に比べて狭い場合には次式で近似できる[10]。

$$N_o = 2l^{-1} \qquad (1.3.28)$$

よって n_s と l の関係は次式で表される。

$$N_s = 16l^{-2} \qquad (1.3.29)$$

上式を用い，かつ図1.3.9において R と σ_s を一定とすると横軸は l^{-2} と見なせる。図1.3.9から波長が増加すると σ_{zis}/σ_s が大になることがわかる。そこで，たとえ試験面に含まれる表面うねり成分が表面粗さ成分に比べ低いとしてもその影響は無視できないと考えられる。この影響を定量的に概算するために，表面粗さによる最初の接触位置と表面うねりによる最初の接触位置とが互いに独立であるとの設定で，次式を用いて表面うねりの効果を含めた最初の接触位置の標準偏

差 σ'_{zis} を求める。

$$\sigma'_{zis} = (\sigma^2_{zis} + \sigma^2_{wave})^{\frac{1}{2}} \qquad (1.3.30)$$

なお σ_{wave} は表面うねりに起因する最初の接触位置の標準偏差。

ここで，表面おうとつ中の表面うねりと表面粗さ成分の境界を表す妥当な臨界波長を定めることが問題になる。本章では概算として $\sigma_{zis} = \sigma_s$ になる波長を臨界波長と定める。

$\sigma_{zis} = \sigma_s$ になる $\sigma_s n_s R$ を式 (1.3.8), (1.3.17) から求めると約 0.07 となる。いま，仮に $R = 5\,mm$，$\sigma_s = 0.5\,\mu m$ とすると，臨界波長は式 (1.3.29) を用いると約 0.8 mm となる。そこで，表面おうとつの成分のうち，波長が約 0.8 mm 以上の成分に関しては，それに起因する最初の接触位置の標準偏差 σ_{wave} が表面おうとつのそれと等しいと設定することは妥当と考えられる。そこで各試験面につき断面曲線の標準偏差をカットオフ 0.8 mm と 2.5 mm で測定し次式で σ_{wave} を算出する。

$$\sigma_{wave} = (\sigma^2_w - \sigma^2_R)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.3.31)$$

なお σ_w，σ_R はそれぞれカットオフ値 2.5 mm，0.8 mm で測定される断面曲線の標準偏差。

この σ_{wave} の値を式 (1.3.30) に代入すると σ'_{zis} が求まる。ただし表面粗さ成分に関する σ_{zis} は図 1.3.9 の数値計算結果から推定する。ζ_{zis} に関しても σ_{zis} の場合と同程度の割合で表面うねりの影響が入ると考えて，各試験面についての理論値にこのような補正を施した結果，その平均値は図 1.3.20，図 1.3.21，図 1.3.22 の破線で示すように実測値にかなり近い値を示す。以上から図 1.3.20，図 1.3.21，図 1.3.22 における実験値と理論値のひらきは表面うねりの影響と考えられる。図 1.3.18 において方向性のある面の場合にも当然表面うねりの影響が表れてよいはずであるが，実測値と理論値がかなり良く一致しておりこの影響は一見したところ認められない。これは表面うねりの影響と表面粗さの複雑な方向性

の影響が互いに補償しあっていることによると考えられる。

3.5.3　突起の変形の影響

最初の接触位置の解析では無負荷の接触を想定していたが，この解析を実際の接触問題に適用するには，たとえその問題が球形測定子による寸法測定精度や第２編で示す表面おうとつ測定精度といったきわめて軽負荷の接触問題であっても突起の変形の影響が懸念される。そこで，ここでは負荷時，すなわち突起が変形した状態の接触高さを Z_{op}，Z_{os} とし，これらの平均値 $\overline{Z}_{op}$，$\overline{Z}_{os}$，標準偏差 σ_{zop}，σ_{zos} を求め，最初の接触位置の平均値，標準偏差との比較を行う。ただし接触高さとは突起の変形のみによって平面に食込んだ球の底の高さを意味する。なお，Z_{op}，Z_{os} はそれぞれ方向性のある表面粗さの場合と方向性のない表面粗さの場合の接触高さを表し，Z_{op} は突起頂点平均高さを基準高さとし，Z_{os} は表面粗さの中心線を基準高さとする。

ここでは寸法測定器の測定圧のような軽負荷の場合について考察するため，球および平面の母材の弾性変形は無視する。

(1)　方向性のある表面粗さの場合

接触突起はすべて塑性変形し，個々の接触突起で支える荷重 W_a と突起の近接量 α_a の間には第１章の式（1.1.28）の関係が成立するとの仮定のもとに $\overline{Z}_{op}$，σ_{zop} および平均接触突起個数 N をシミュレーション計算で求める。シミュレーションは図 1.3.30 に示す手順で行った。

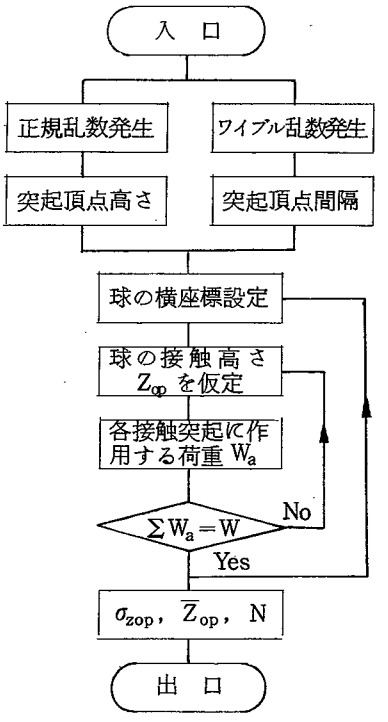


図 1.3.30　シミュレーション計算手順

最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{ip}$ と $\overline{Z}_{op}$ の差を図 1.3.31 に示す。この図より突起半径 β の影響は少ないことがわかるが，突起密度 n_p の影響も少ないことが計算結果より確認できた（図省

略）。図 1.3.31 に見られるように $\overline{Z}_{ip}$ と $\overline{Z}_{op}$ の差はかなり小さく，表面粗さが大なる場合には $\overline{Z}_{ip}$ に比べて無視できる程度のものである。しかも，表面粗さがきわめて小なる場合を除くと $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ はほぼ一定であり，その値は単一突起のみに全負荷が作用する場合の突起の近接量（図中，一点鎖線で一例を示す）にかなり近い。

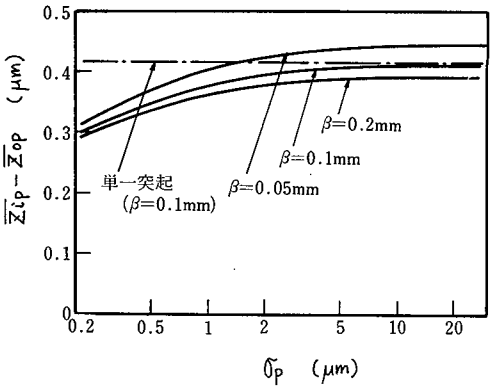


図 1.3.31 σ_p と $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ の関係
$W=0.1$ kg　$R=5$ mm
$n_p=50\,mm^{-1}$　$p_m=150\,kgf/mm^2$
$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

図 1.3.32 に荷重 W と $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ の関係を示す。σ_p 大なる場合には $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ はかなり高荷重域まで単一突起の変形による近接量に近い値を示している。

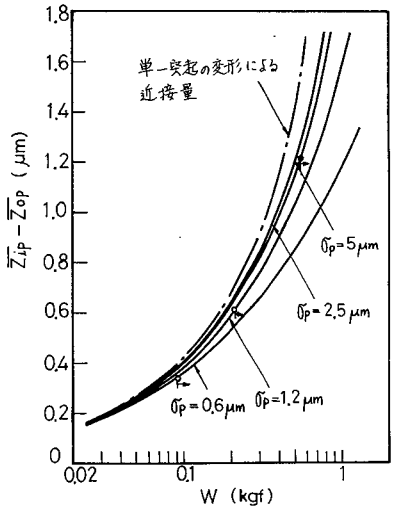


図 1.3.32 W と $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ の関係
$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}mm^{-1}$　$R=5$ mm
$p_m=150\,kgf/mm^2$　$\beta=0.1$ mm

以上から 0.1 kgf 程度のきわめて軽荷重域では突起の変形の影響は小さく，しかもこの影響は単一突起の近接量を求めることにより補正できることがわかる。しかし W 大，σ_p 小になるにつれて単一突起の近接量と $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ の差は大になる。この場合には第 5 章の解析が近似的に適用できる。すなわち，第 5 章の 5.5.3 で考察するが，図 1.3.32 に丸印で示した荷重より大なる領域では第 5 章の解析が近似的に適用できる。

図 1.3.33 に $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ と σ_p の関係を示す。$\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ は σ_p あるいは β が変化しても大きな変化は示さず 1 に近い値を示している。これは平均接触突起個数が図 1.3.33 に見られるように数個にすぎないため，サンプリング面の接触突起の高さや接触位置が変わっても突起の変形による球の変位量はほとんど一定で，接触高さ

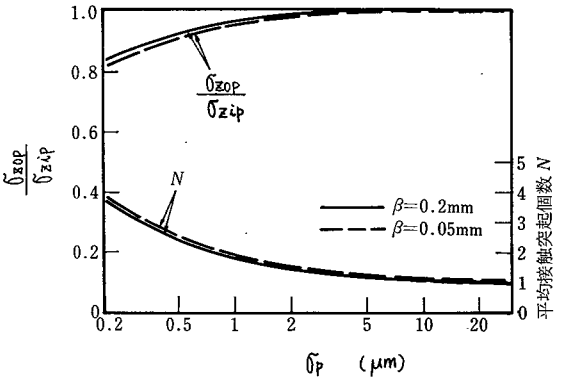


図 1.3.33　σ_p と $\frac{\sigma_{zop}}{\sigma_{zip}}$ の関係

$W=0.1\,kgf$　　$R=5\,mm$

$n_p=50\,mm^{-1}$　　$p_m=150\,kgf/mm^2$

$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

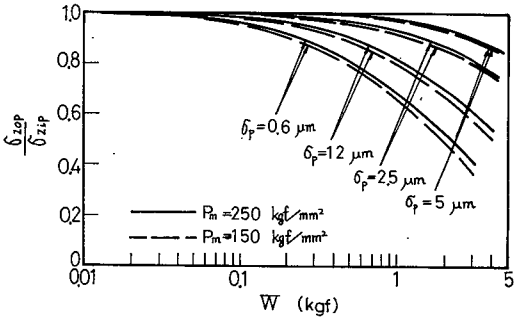


図 1.3.34　σ_{zop} と σ_{zip} の比較

$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}\,mm^{-1}$　　$R=5\,mm$

$\beta=0.05\,mm$

$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

の変動そのものは突起が変形しない場合に比べあまり差がないことを意味している。図 1.3.34 に $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ と W の関係を示す。材料の流れ圧力 p_m の値は $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ にあまり影響を及ぼしていない。図 1.3.33，図 1.3.34 から 0.1 *kgf* 程度の低荷重域では σ_{zop} を σ_{zip} で近似しても大きな誤差を生じないことがわかる。

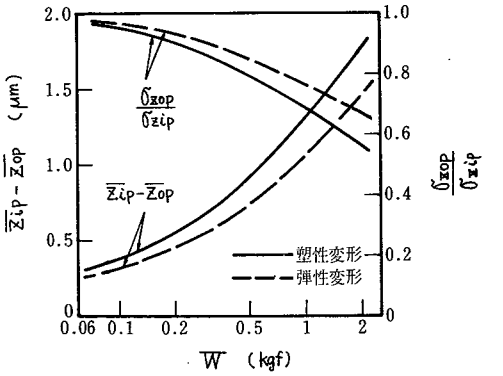


図 1.3.35　$Z_{ip}-Z_{op}$，$\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ に及ぼす突起変形形態の影響

$\sigma_p=1\,\mu m$，$n_p=50\,mm^{-1}$

$\beta=0.1\,mm$，$R=5\,mm$

$p_m=150\,kgf/mm^2$

$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

以上は突起が塑性変形する場合であるが，突起が弾性変形する場合のシミュレーション計算にも同様の傾向の結果が得られる。図 1.3.35 で $\overline{Z}_{ip}-\overline{Z}_{op}$ と $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ に関しての塑性変形と弾性変形の比較を行うと，弾性変形の場合の突起変形の影響は塑性変形の場合と定性的にはよく似た傾向を示し，定量的には少し低い値になることがわかる。

(2) 方向性のない表面粗さの場合

最初の接触位置の理論解析では機械表面が互いに独立な表面単位で構成されていると仮定した。そこで $\overline{Z}_{os}$, σ_{zos}, $\overline{Z}_{is}$, σ_{zis} をシミュレーション計算で求めるに際しても正規乱数を個々の表面単位の高さにとり，それぞれの表面単位を独立細柱の表面のように扱い計算を行った。

個々の独立細柱の変形をどのように考えるかが問題であるが，ここでは $\overline{Z}_{is}$, σ_{zis} に及ぼす変形の影響の概要を得るのが目的であるから，便宜的に次のように変形を仮定する。1）独立細柱は弾塑性変形する，2）各独立細柱が支える限界荷重は一定でその値は材料の相当流れ圧力 p'_m と表面単位の xy 平面への投影面積の積で与えられる，3）細柱に作用する負荷がその限界荷重に達するまでは細柱は変形しないものとする。なお，相当流れ圧力とは突起の弾塑性変形問題を単なる塑性変形問題でおきかえるための仮想的流れ圧力を意味し，σ_s と真の流れ圧力 p_m の関数として次章の式（1.4.7）で表される。

以上の設定のもとでのシミュレーション計算では計算手順は図 1.3.30 と同一であるが接触条件式が異なり，次式を満足する接触高さ Z_{os} を求めることになる。

$$p'_m N_s(Z_{os}) > W > p'_m \{N_s(Z_{os}) - 1\} \qquad (1.3.32)$$

$N_s(Z_{os})$ は球が Z_{os} まで食込んだ場合の接触表面単位数。

計算結果の一例を図 1.3.36，図 1.3.37 に示す。計算結果は階段状になっているがこれは上式の接触条件，すなわち仮定 3）の設定に起因している。実際には細柱の変形は連続的であるため両図ともなめらかな曲線になるはずである。両図ともかなり軽荷重域でも

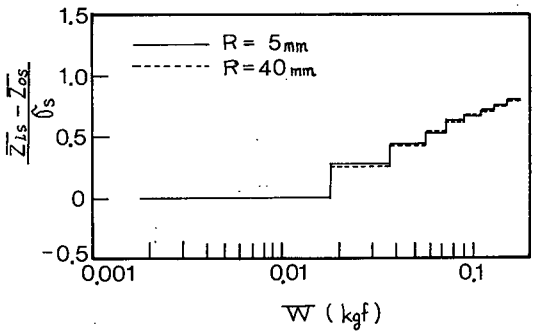


図 1.3.36 接触高さの平均値に及ぼす荷重の影響
$\sigma_s = 1\,\mu m$ $p_m = 500\,kgf/mm^2$
$E_1 = E_2 = 21000\,kgf/mm^2$

突起変形の影響が表れており，とくに $\sigma_{zos}/\sigma_{zis}$ にはこの影響が顕著に表れている。すなわち最初の接触位置の理論は接触表面単位数がほとんど単一個の場合にしか適用できない。いま σ_s と表面単位面密度 n_s との関係として式（1.3.25）を用いると最初の接触位置の適当範囲は次式で表される。

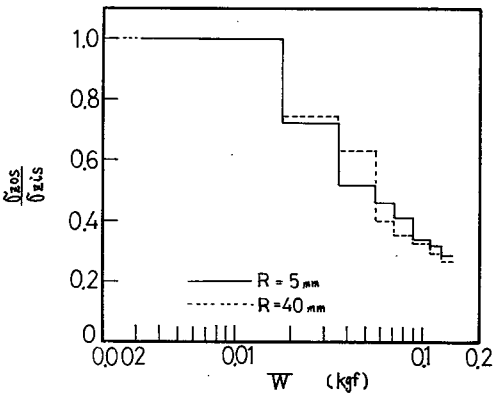


図 1.3.37　W と $\sigma_{zos}/\sigma_{zis}$ の関係
$\sigma_s = 1\ \mu m$　$p_m = 500\ kgf/mm^2$
$E_1 = E_2 = 21000\ kgf/mm^2$

$$W < \frac{p'_m \sigma_s}{16} \qquad (1.3.33)$$

なお，第4章の考察 4.5.4 によると上式を満足しない荷重域においては $\overline{Z}_{os}$ だけは第4章の解析結果で近似できることがわかる。

最後に，最初の接触位置の応用例として球形測定子による寸法測定精度の問題について考えてみると，測定圧 0.1 kgf 前後の測定器においては，方向性のある面の場合，正確度，精密度はそれぞれ $\overline{Z}_{ip}$，σ_{zip} で推定できる。しかし，方向性のない面の場合には正確度は次章の $\overline{Z}_{os}$ で推定できるが，精密度に関しては理論的推定は現時点では不可能である。ただ，図 1.3.37 によると方向性のない面の場合 σ_{zos} そのものが非常に小さくなり精密度はあまり問題にならないと考えられる。

3.5 結　　言

だ円放物面と平面の接触における最初の接触位置を，表面粗さが方向性を有する場合と方向性のない場合とに分けて理論的解析を試みた。その数値計算結果と計算機シミュレーション結果，ならびに表面粗さ計を用いての実験結果等を比較することにより，以下のことが明らかになった。

1）方向性のある表面粗さの場合，突起間隔分布を指数分布，および均一間隔と設定した場合の両者の解析結果の平均値でもって現実の突起間隔分布の場合

の理論値を近似できることが，シミュレーション計算との比較により確かめられた。

2）最初の接触位置の種々の統計量，平均値 $\overline{Z}_{ip}/\sigma_p$，$\overline{Z}_{is}/\sigma_s$，標準偏差 σ_{zip}/σ_p，σ_{zis}/σ_s，中心線平均値 ζ_{zip}/σ_p，ζ_{zis}/σ_s の理論値は一つの等価変数で整理でき，その変数は方向性のある表面粗さの場合 $\sigma_p^* n_p^{*2}$，方向性のない表面粗さの場合 $\sigma_s^* n_s^*$ となる。

3）方向性のある表面粗さの場合，$\sigma_p^* n_p^{*2}$ 大なるほど $\overline{Z}_{ip}/\sigma_p$ は増加し，σ_{zip}/σ_p は減少する。また，方向性のない表面粗さの場合も同様の傾向を示す。

4）同一半径の球と平面の接触においては方向性のある表面粗さの最初の接触位置の平均高さは，方向性のない表面粗さの場合の約 0.6 倍の低い値となり，最初の接触位置の標準偏差は，方向性のある表面粗さの場合の方が方向性のない面の約 1.5 倍の大なる値を示す。

5）最初の接触位置の理論値と実測値はかなりの一致を示し，理論の妥当性が確かめられた。

6）方向性のある表面粗さの場合 0.1 kgf 程度の軽荷重接触状態では接触高さの平均値，標準偏差は最初の接触位置の平均値，標準偏差で近似できる。

参　考　文　献

1) 吉本，築添，菊池： 日本機械学会論文集，21，111 (1950) 811.

2) 久門： 日本機械学会論文集，35，272 (1967) 861.

3) 塚田，阿武，釜洞： 日本機械学会論文集，37，304 (1971) 2394.

4) 石垣，川口： 精密機械，43，7 (1977) 831.

5) 渡辺，石垣，川口： 昭和50年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集，(1975) 345.

6) 川口，石垣： 昭和51年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集，(1976) 525.

7) V.Radhakrishnan： Wear, 16, 5 (1970) 325.

8) 奈良： 計量研究所報告，15，4 (1966) 306.

9) 塚田，阿武： 精密機械，40，3 (1974) 250.

10) T.T.Soong： Random differential equations in science and engineering, Academic Press, New York (1973) 299.

第 4 章　方向性のない表面粗さを有する平面と球の接触[1)]

4・1　緒　　言

本研究では主として幾何学的に一方向に方向性のある表面粗さに重点をおいて解析を試みているが，砂吹仕上面，ラップ仕上面等，方向性のない面とみなす方が妥当な機械加工面も多く，そのような面に関する考察も重要な意味をもつと考えられる。また，方向性のない表面粗さの場合，球と平面の接触における母材の変形が球の中心軸に関し対称となるため計算が比較的単純で，母材の変形に対して第２章で試みた２次式近似の次数を上げて，より高精度な計算を行うことが容易である。そこで本論文を通じて行う母材の変形の２次式近似の計算精度上の妥当性を検討するのに，方向性のない面の場合の解析が最も適している。

本章では以上のような目的で，方向性のない表面粗さを有する平面と球の接触変形を解析する。

方向性のある面の場合には，突起頂点の高さ分布をもとに解析を行うが，方向性のない面の場合，頂点分布を求めるには三次元的表面粗さ測定を必要とするため，頂点分布をもとにした理論解析は現実の加工面へ応用する場合には適当でない。そこで本章では主として表面粗さ曲線の高さ分布をもとに解析を進める。

4・2　理　　論

座標系を図 1.4.1 に示すように，球の中心線が z 軸上にありその原点が表面粗さ曲線の中心線に一致するようにとる。また表面粗さ曲線の分布形は正規分布とする。

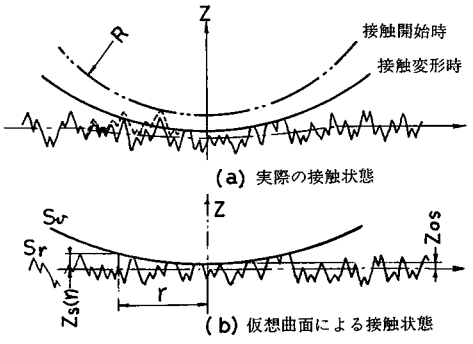


図 1.4.1　接 触 状 態

4.2.1 突起が塑性変形する場合

(1) 相当流れ圧力

突起は傾斜角 θ 一定の円錐形をなすものと考える。いま単一円錐突起に平面（球面の一部を平面で近似）を押付けた場合，突起の塑性変形による近接量を α_{pa}，やわらかい方の材料の流れ圧力を p_m とすると，接触面半径 a および突起に作用する荷重 W_a は次式で表される。

$$a = \frac{\alpha_{pa}}{\tan\theta} \tag{1.4.1}$$

$$W_a = \pi \left(\frac{\alpha_{pa}}{\tan\theta}\right)^2 p_m \tag{1.4.2}$$

この場合円形の接触面に等分布圧力が負荷されているのであるから，突起の弾性変形量 α_{ea} の計算には第1編第1章式(1.1.21)および式(1.1.27)が適用でき α_{ea} は次式で表される。

$$\alpha_{ea} = 67.2 \left(\frac{p_m}{\pi E}\right)^{1.5} \left(\frac{W_a}{ER^2}\right)^{-0.5} \left(\frac{W_a}{2\pi R p_m}\right) \tag{1.4.3}$$

ただし　$R = R_x = R_y$

また，E は第1章式(1.1.7)と同一である。

式(1.4.2)を式(1.4.3)に代入すると，

$$\frac{\alpha_{ea}}{\alpha_{pa}} = \frac{33.6\, p_m}{\pi^2 E \tan\theta} \tag{1.4.4}$$

突起の全変形量 α_a は上式を用いると次式で表される。

$$\alpha_a = \alpha_{pa} + \alpha_{ea} = \left(\frac{33.6\, p_m}{\pi^2 E \tan\theta} + 1\right) \alpha_{pa} \tag{1.4.5}$$

式(1.4.5)を式(1.4.2)に代入すると，W_a と α_a の関係として次式が求まる。

$$W_a = \frac{\pi}{\tan^2\theta} \left(\frac{\pi^2 E \tan\theta}{33.6\, p_m + \pi^2 E \tan\theta}\right)^2 p_m \alpha_a^2$$

$$= \frac{\pi}{\tan^2\theta} p'_m \alpha_a^2 \tag{1.4.6}$$

ただし

$$p'_m = \left(\frac{\pi^2 E \tan\theta}{33.6\, p_m + \pi^2 E \tan\theta}\right)^2 p_m \tag{1.4.7}$$

式 (1.4.2) の p_m の代わりに相当流れ圧力 p'_m を用いると突起の弾性変形を考慮した全変形量 α_a と荷重 W_a の関係が同式で表されることがわかる。この式には式の形の上からは直接弾性変形を含まないので後々の計算に大変便利になる。

突起の平均傾斜 $\overline{\tan\theta}$ は砂吹仕上面の表面粗さ曲線をもとにしての実験結果および理論的考察により次式で近似できることが報告[2]されている。

$$\overline{\tan\theta} = \frac{\pi}{2}\,\frac{R_{max}}{3.45\,R_{max}+11.1}$$

ここで R_{max} は JIS の最大高さ粗さで式 (1.3.23) で示した表面粗さ曲線の標準偏差 σ_s との関係を用いると,

$$\overline{\tan\theta} = \frac{7.23\,\sigma_s}{15.87\,\sigma_s+11.1} \qquad (1.4.8)$$

となる。ただし R_{max}, σ_s の単位は μm である。

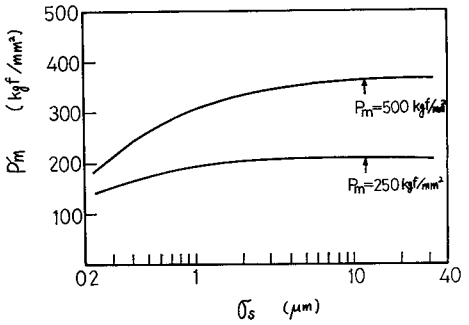


図 1.4.2 σ_s と相当流れ圧力 p'_m の関係
$E_1 = E_2 = 21000\ \mathrm{kgf/mm^2}$
$\nu_1, \nu_2 = 0.3$

上式を式 (1.4.7) に代入して求めた p'_m を図 1.4.2 に示す。相当流れ圧力 p'_m は真の流れ圧力 p_m に比べ常に低い値を示し，この傾向は σ_s が小なるほど顕著である。このように弾塑性変形を考慮した単一突起の変形挙動が定式化できると，粗い平面と球の接触問題は第 1 編第 2 章と同様の手順で解析できる。

(2) 解 析 手 順

方向性のない表面粗さを有する平面に粗さが無視できる半径 R の球を押付けた場合，球および平面はその母材の弾性変形のために図 1.4.1 の (a) に示したように曲率を変える。この両者の母材の弾性変形を球の形状の変化に集約したものが図 1.4.1 の (b) に示すように仮想の $2n$ 次曲面 S_v で表しうるものと仮定すれば，問題を粗い平面 S_r と仮想曲面 S_v との接触に置換えて考えることができる。そして，この仮想曲面 S_v の高さ Z_s を平面の表面粗さ曲線の中心線を基準にして表すと式 (1.4.9) となる。

$$Z_s(r) = Z_{os} + \sum_{k=1}^{n} c_k\, r^{2k} = Z_{os} + \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x^2+y^2)^k \qquad (1.4.9)$$

$Z_s(r)$ は接触領域内で次式の接触条件を満足しなければならない。

$$w_m(r) - w_m(0) = Z_s(r) - \frac{r^2}{2R} - Z_{os} \qquad (1.4.10)$$

上式において $w_m(r)$ は球および平面の母材の弾性変形の和であり，また $Z_s(r)$ 中に含まれている Z_{os} は図 1.4.1 の (b) に示すように突起の変形による接触高さで，これらはいずれもつぎに述べるように c_k が定まって初めて計算できるものである。そこで，最初 c_k を適当に仮定しておいて，以下の手順で逐次修正をして最終的に式 (1.4.10) を満足するように c_k を定める。

手順 1　　c_k の初期値の決定

手順 2　　Z_{os} の計算：c_k の仮定に次いで Z_{os} の初期値を仮定すれば $Z_s(r)$ が式 (1.4.9) により定まり，粗い平面の突起部分で仮想曲面 S_v より突き出す部分の底面積，すなわち真実接触面積が下記のようにして平均値として定まる。

$$A_r = \iint_{Si} \int_{z_s(x,y)}^{z_{max}} f_s(z)\, dz\, dx\, dy \qquad (1.4.11)$$

ここで $f_s(z)$ は次式の条件付密度関数で表される。

$$f_s(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_s}\right)^2}}{\int_{-z_{max}}^{z_{max}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_s}\right)^2} dz} \qquad (1.4.11')$$

なお，積分範囲 S_i は次式で定まる半径 r_m の円形をなすみかけの接触領域を表し，Z_{max} は十分広い機械表面内の表面粗さ曲線の最大の高さを表す。

$$\sum_{k=1}^{n} c_k r_m^{2k} = Z_{max} - Z_{os} \qquad (1.4.12)$$

やわらかい方の材料の相当流れ圧力を p'_m，球に作用する全荷重を W とすると次式の荷重条件式が得られる。

$$W = p'_m A_r \qquad (1.4.13)$$

式 (1.4.13) に式 (1.4.11) を代入し，この荷重条件式を満足するように Z_{os} を *Newton-Raphson* の反復法で計算する。

手順 3　　$w_m(r)$ の計算：Z_{os} が定まるとみかけの圧力分布 $p(x,y)$ は次式で求まる。

$$p(x,y) = p'_m \int_{z_s(x,y)}^{z_{max}} f_s(z)\, dz \qquad (1.4.14)$$

接触面中心から r 離れた位置における球および平面の母材の弾性変位量の和は弾性論[3] を用いると次式で与えられる。

$$w_m(r) = \frac{2}{\pi E} \iint_s \frac{p(x,y)}{\{(x-r)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}}\, dx\, dy \qquad (1.4.15)$$

結局，式 (1.4.15) を式 (1.4.10) に代入し，接触領域内で接触条件を満足するような c_k を *Newton-Raphson* の反復法を用いて手順 1 ～ 3 を繰返すことにより求める。以上のようにして c_k が定まれば接触状態が求まり，その結果，第 1 編第 1 章と第 2 章で接触開始時点から負荷時点までの間の球の変位量で定義した近接量 α が次式から求まる。

$$\alpha = w_m(0) + \overline{Z}_{is} - Z_{os} \qquad (1.4.16)$$

ここで $\overline{Z}_{is}$ は最初の接触位置の平均値で第 3 章式 (1.3.19) から求まる。また，母材が変形しない球および平面を仮想しそれらを α だけ近接させて幾何学的に交ささせたときの x,y 面を基準高さとして測った球底の高さ（以下でこれを食込位置と呼ぶ）u' は

$$u' = Z_{os} - w_m(0) \qquad (1.4.17)$$

で与えられる。

4.2.2 突起が弾性変形する場合

接触突起がすべて弾性変形すると仮定しうる場合について近接量，食込み位置，真実接触面積，有効接触域半径等の解析を試みる。平面間の接触においては，表面粗さの弾性接触問題は種々の方法で解析されている[4~6]。これらはいずれも個々の接触突起の変形にはヘルツ理論を適用しているが突起の分布の設定が異なっている。これら平面間の接触理論のうち，代表例として *Greenwood* 理論[7] 等に見られるような突起頂点高さの分布を正規分布とする理論（かりに頂点分布理論と呼ぶ）と，久門理論[8] に見られるような表面粗さ曲線の分布を正規分布とする

理論（かりに表面単位理論と呼ぶ）が挙げられる。どちらの理論も球と平面の接触問題に拡張するのに都合のよい比較的簡単な形で表されているが，実際の機械加工面に適用する場合パラメータの決定が容易でない等の問題をそれぞれにいくつか含んでおり両者の優劣を理論的に判断することはできない。本章では両方の理論を球と平面の接触問題に適用して，設定の相違の影響を考察すると同時に両者の数値計算結果と実測値との比較検討を試みる。なお，平面間の接触問題を球と平面の接触問題に拡張する手法はいずれの場合も同一であり，しかも頂点分布理論については球と平面の接触問題についてかなり厳密な解が得られている[9]ので，ここでは主として表面単位理論について記す。

真実表面を形成する微小平面の高さ分布が標準偏差 σ_s の正規分布をなし，突起の形状が半径 β_3 一定の半球形であると設定する。すると，粗い平面になめらかな平面が Z_{os} の位置まで食込む場合の負荷 W_u は次式で与えられる[8]。

$$W_u = \frac{k_s E L_x L_y}{3\pi \beta_3^{\frac{1}{2}}} \int_{zos}^{zmax} (Z - Z_{os})^{\frac{3}{2}} f_s'(z)\ dz \qquad (1.4.18)$$

ただし，k_s：真実表面積/みかけの接触面積 $L_x L_y$

$L_x L_y$：みかけの接触面積

$f_s'(z) = \dfrac{df_s(z)}{dz}$

$f_s(z)$：表面単位の高さ分布の確率密度関数で式（1.4.11′）を参照

ゆえに，図 1.4.1 のように粗い平面に球を押込む場合，z 軸から r の距離にある部分の平均接触圧力 $p(r)$ は次式で表される。

$$p(r) = -\frac{k_s}{3\pi E \beta_3^{\frac{1}{2}}} \int_{z_s(r)}^{zmax} \{Z - Z_s(r)\}^{\frac{3}{2}} f_s'(z)\ dz \qquad (1.4.19)$$

ただし，$Z_s(r)$ は式（1.4.9）と同様に表される。

よって塑性変形の場合の式（1.4.13）に相当する荷重条件式は次式に上式を代入すれば求まる。

$$W = \iint_{Si} p(x,y)\ dx\, dy \qquad (1.4.20)$$

以下の手順は 4.2.1 と同様で，上式を満足する Z_{os} を繰返し計算で求め，その

Z_{os} を式（1.4.19）に代入し分布圧力を計算する。そして p を式（1.4.15）に代入し，接触条件を満足するような c_k を繰返し計算で求めれば接触状態が定まる。その結果，近接量，食込み位置は式（1.4.16），（1.4.17）から，また真実接触面積 A_r は次式を用いてそれぞれ定まる。

$$A_r = \frac{k_s}{2} \iint_{Si} \int_{z_s(r)}^{z_{max}} f_s(z)\, dz\, dx\, dy \qquad (1.4.21)$$

また，*Greenwood* は球と粗い平面の接触における有効な接触域半径 r_e を次式のように定義している[9]が，表面単位理論と頂点分布理論との比較を行うため同じ定義に従って有効接触域半径の計算も行う。

$$r_e = \frac{K_e \int_0^{r_m} r\, p(r)\, dr}{\int_0^{r_m} p(r)\, dr} \qquad (1.4.22)$$

なお，上式で表面がなめらかな場合に r_e がヘルツ理論の接触半径と一致するように $Ke = 2.356$ として計算を行う。

4.3 数値計算結果

突起が塑性変形する場合については無次元化表示できないため，$R = 5\,mm$，$E_1 = E_2 = 21000\ kgf/mm^2$，$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ を代表的接触条件として数値計算結果を示す。また弾性接触の場合も特別のことわりなき限り R, E_1, E_2, ν_1, ν_2 としてはこの値を用いる。

4.3.1 数値計算法についての検討

母材の弾性変形後の平面に対する球の相対的曲面を決定する係数 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ を求める方法について考察する。

式（1.4.9）の自由度は有限の n であるため，接触領域全域において式（1.4.10）の接触条件を満足させることは不可能である。実際には接触面上の n 点を接触条件の収束位値，次式を収束条件と定め，次式の左辺（接触条件誤差）が右辺の値以下に収束するまでくり返し計算を行い，$c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ を求める。

$$|w_m(r_i, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n) - w_m(0, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n)$$

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k r_i^{2k} - \frac{r_i^2}{2R}| \leqq w_m(0, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n) \times 0.001 \quad (1.4.23)$$

ここで i は収束位置の番号（$i=1.2, \cdots\cdots n.$）を示し，式（1.4.23）は n 元の連立方程式となる。したがって，式（1.4.9）の曲面近似で r の高次の項まで求めた方が計算精度が良くなるが，精度の許す範囲でできるだけ高次項を省略して計算時間を短縮することが望ましい。そこで，高次項の影響を知るために，2次式近似と4次式近似の場合について収束位置以外の場所における接触状件誤差を下記の式（1.4.24）でそれぞれ求め，それらを比較した結果を図1.4.3に示す。なお，収束位置は4次式近似の場合には原点，$0.4r_m$，$0.8r_m$ の3か所，2次式近似の場合には原点および $r=T$ の2か所に選ぶ。

$$\text{接触条件誤差} = w_m(r) - w_m(0) + \frac{r^2}{2R} + Z_{os} - Z_s(r) \quad (1.4.24)$$

この図から接触条件誤差は4次式近似した場合2次に比べ大幅に減少することがわかる。また2次式近似の場合，接触条件誤差は収束位置 T により変化し，T を適当に選ぶことにより誤差を最小にすることが可能である。このことから近接量の誤差が最小になるような収束位置を知るべく，4次式近似の場合の近接量と2

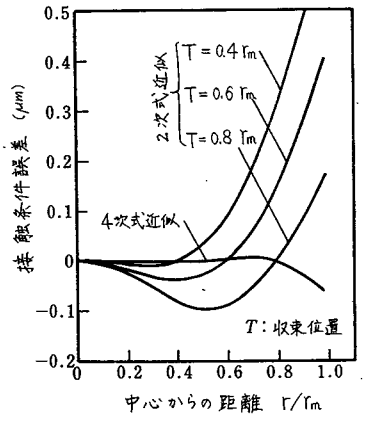


図 1.4.3　接触条件誤差.
$\sigma_s = 1\ \mu m$　W=1 kgf
$p_m = 500\ kgf/mm^2$　R=5 mm

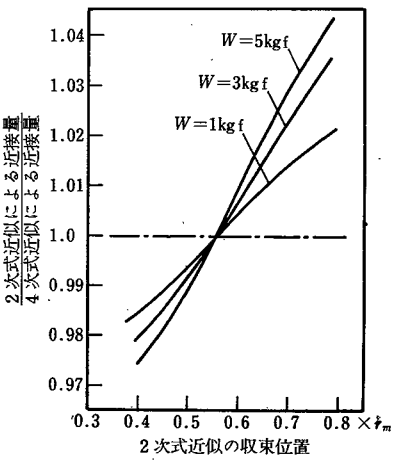


図 1.4.4　収束位置の影響
$\sigma_s = 1\ \mu m$
$p_m = 500\ kgf/mm^2$　R=5 mm

次式近似の場合の値との比を求めた結果，図1.4.4に示すように $T=0.55\,r_m$ 附近で4次式近似に対する2次式近似の誤差は最小になる。$T=0.55\,r_m$ での4次式近似と2次式近似の近接量の差は $\sigma_s=0.1\sim100\,\mu m$，$W=0.01\sim10\,kgf$ の範囲では0.2％以内であることが確認できたため，以下の計算はすべて収束位置を $0.55\,r_m$ として2次式近似で行った。

この計算アルゴリズムに関連して，*Greenwood*[9] はこのような多項式近似を用いずに接触条件を接触域全域において満足させようとしているため，(1) 計算条件としては押付荷重と粗い表面の諸元を与えるのが最も便利であるが，これらの条件からは直接には収束解が得られないため，事前には知ることができない間接的量を条件として与えて，その計算結果から荷重および表面形状の条件に合致する場合を選択しなければならない，(2) 繰返し計算の収束性が悪く計算過程において収束係数を変化させてやらねばならない，等の問題点が生じる。一方，本解法では4次式近似でほとんど接触域全域で接触条件が満足でき，さらに2次式近似に下げても0.2％以下しか近接量が変化しないことから，*Greenwood* の解析方法と2次式近似との差もこの程度のものであろうと考えられる。実際，*Greenwood* の解析と同じ表面粗さ，すなわち，突起頂点の高さが正規分布をし接触突起の変形は弾性的とする等の仮定で2次式近似を用いて計算し，文献9）の図の内の数例と比較するとほとんど差が認められない。このように精度的に問題がなく，しかもこの解法では上述の問題点も生じないため本解法の方が実用的に優れていると考えられる。

つぎに Z_{max} の決定であるが，図1.4.5に食込み位置と Z_{max} の関係に関する数値計算結果を示すが，

$$\frac{Z_{max}}{\sigma_s}\geqq 4$$

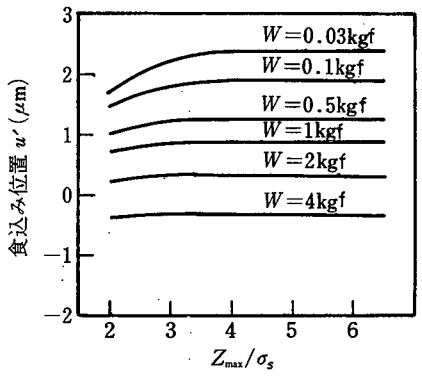


図 1.4.5　Z_{max} と食込み位置の関係
$\sigma_s=1\,\mu m$　$p_m=500\,kgf/mm^2$
$R=5\,mm$

の場合 w' は Z_{max} に無関係にほぼ一定となる。そこで $Z_{max}=4\sigma_s$ として計算を行った。

4.3.2 突起が塑性変形する場合

4.3.2.1 母材の弾性変形

接触域中心部における球と平面の母材の弾性変位量の和 $w_m(0)$ と表面粗さの標準偏差との関係を図 1.4.6 に示す。標準偏差 σ_s が小さくなるとヘルツ理論によるなめらかな平面と球の接触における変位量に近づくが，σ_s が大になると母材の弾性変位量は減少することがわかる。また，母材の変形後における平面に対する球の相対的曲率半径 $R'=\frac{1}{2}c_1$ は図 1.4.7 に示すように標準偏差 σ_s により大きく変化する。しかし σ_s が 10 μm 程度以上では $R'\approx R$ となる。これは σ_s が増すと粗さの影響で接触領域中心部の分布圧力が低下し，それにより図 1.4.6 に示すように中心部の母材の変形が減少するためである。図 1.4.7 から母材の弾性変形は荷重や材料の流れ圧力よりも表面粗さの標準偏差に大きな影響を受けることがわかる。

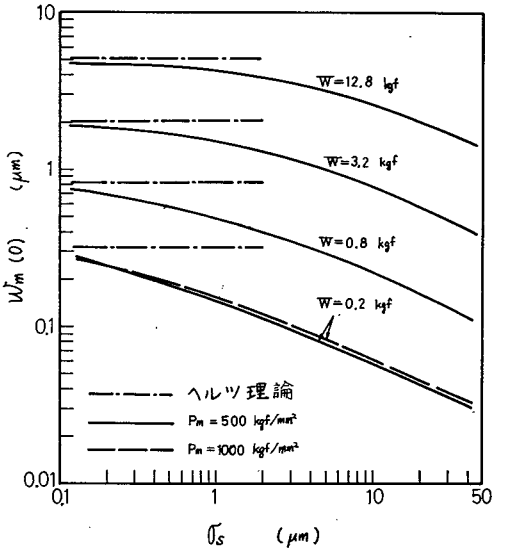


図 1.4.6 σ_s と母材の弾性変形量 $w_m(0)$ の関係

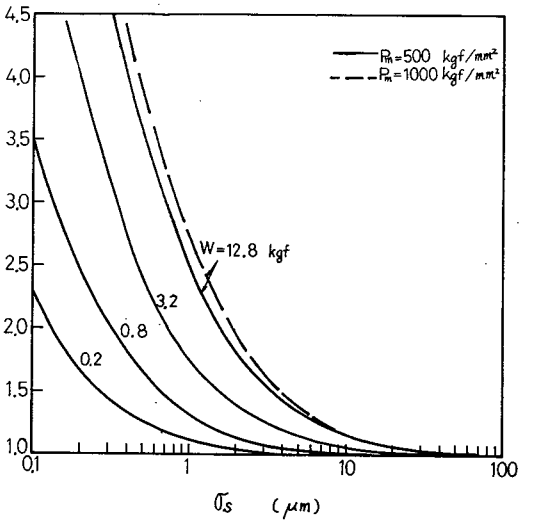


図 1.4.7 σ_s と相対的曲率半径の関係
R＝5mm

4.3.2.2 食込み位置

図 1.4.8 に σ_s, W, p_m と食込み位置 u' の関係を示す。u'/σ_s は σ_s 大なるほど，W 小なるほど増加するが，p_m の影響はあまり顕著ではない。これは，p_m が増加すると突起の塑性変形量は減少するが，突起の弾性変形量が増加し効果が相殺しあうため食込み位置の変化としては小さくなると考えられる。σ_s, W, p_m の諸因子の内 u'/σ_s には σ_s が最も大なる影響を及ぼす。

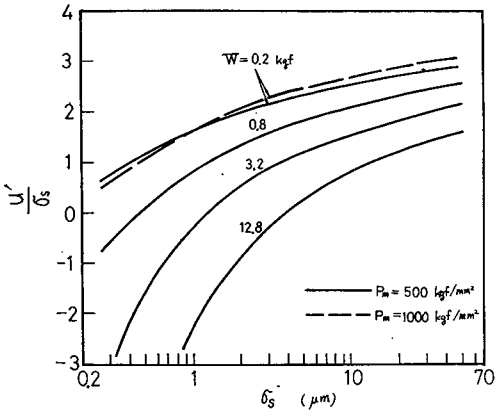


図 1.4.8 σ_s と u'/σ_s の関係
R = 5 mm

4.3.3 突起が弾性変形する場合

頂点分布理論に関しては *Greenwood* の解[9] があるのでここでは主として表面単位理論の数値計算結果を示す。なお，母材の弾性変形後の球の平面に対する相対的曲面形状は塑性接触の場合同様 2 次式で近似し，式 (1.4.18) の k_s は文献[8] 同様 2 として計算を行う。

4.3.3.1 真実接触面積

式 (1.4.21) を用いて計算した真実接触面積 A_r と荷重の関係を図 1.4.9 に，A_r と表面粗さの標準偏差 σ_s や突起半径 β_3 との関係をそれぞれ図 1.4.10，図 1.4.11 に示す。真実接触面積は荷重大なるほど，表面粗さの標準偏差小なるほど，また突起の曲率半径大なるほど増加することがわかる。なお，図1.4.9～図1.4.11 の数値計算結果は次式で近似できる。

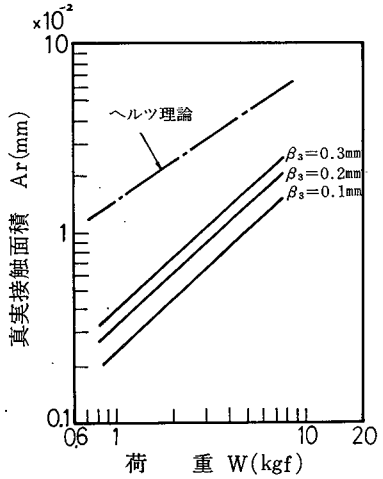


図 1.4.9 荷重と真実接触面積の関係
$\sigma_s = 1\ \mu m$

$$A_r^* = 4.17\,\beta_3^{*0.45}\,\sigma_s^{*-0.40}\,W^{*0.98} \qquad (1.4.25)$$

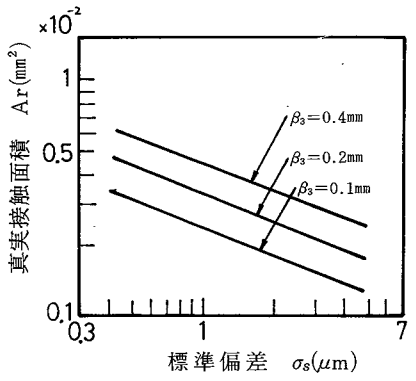


図 1.4.10 標準偏差と真実接触面積の関係
W = 1 kgf

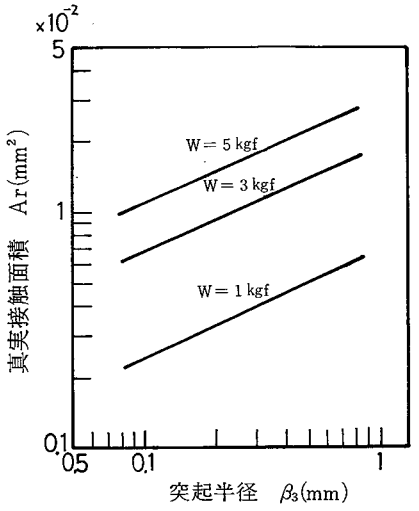


図 1.4.11 突起半径と真実接触面積
$\sigma_s = 1\ \mu m$

4.3.3.2 有効接触域半径

荷重と有効接触域半径の関係を図 1.4.12 に示す。図中実線は表面単位理論，破線は頂点分布理論，一点鎖線はなめらかな平面と球の接触におけるヘルツ理論を表す。表面単位理論と頂点分布理論とを比べると両者はかなり良く一致した傾向を示しており，表面粗さ分布の設定が異なっても有効接触域半径には大きな相違を生じないことがわかる。

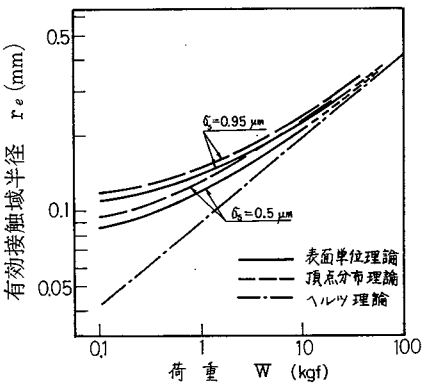


図1.4.12 荷重と有効接触域半径の関係
$\beta_3 = 0.2$ mm　R = 10 mm
$E_1 = E_2 = 10000$ kgf/mm²

一方，両理論をヘルツ理論と比較すると，荷重が小なる範囲では表面粗さの影響が大きく表れヘルツ理論より接触域が拡がっているが，荷重が大になるとヘルツ理論に近づく。

4.3.3.3 みかけの最大接触圧力

均一形状突起の場合 2.4.1.(2)に示したように個々の接触突起にはきわめて高い接触圧力が発生するが，平均的なみかけの接触圧力は表面粗さが大なるほ

ど逆に低下する。みかけの最大接触圧力 $p(0)$ を式（1.4.19）から計算すると図 1.4.13 に見られるようにヘルツの最大圧力より小で σ_s 大なるほど減少する。この減少は考察に示すように母材内部の最大せん断応力の低下を導く。また，表面単位理論と頂点分布理論はこの場合にも良く一致した傾向を示している。なお，図 1.4.12，図 1.4.13 だけ他の計算例と異なる E_1, E_2, R の値を用いているがこれは文献[9]と比較するためである。

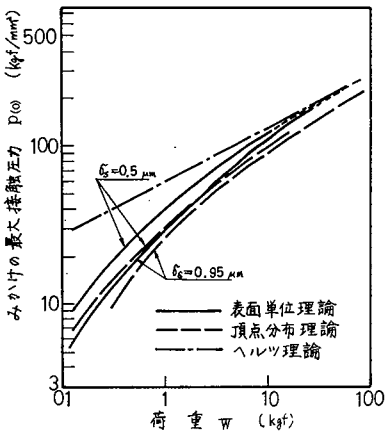


図 1.4.13 荷重とみかけの最大接触圧力の関係
$\beta_3 = 0.2\,\mathrm{mm}$　$R = 10\,\mathrm{mm}$
$E_1 = E_2 = 10000\,\mathrm{kgf/mm^2}$

4.4 実　　験

理論の妥当性を検討するため近接量測定実験を行い，式（1.4.16）を用いて計算した理論値と実測値の比較を行う。実験装置および実験方法は第 1 編第 1 章 1.3.1 と同一であるので省略する。

4.4.1 突起が塑性変形する場合

試料平板，鋼球の材質およびマイクロビッカース硬さ H_v（測定荷重 50 gf）を下記に示す。

鋼球：$SUJ\ 2$　　$H_v = 1000$

試料平板：軟鋼　　$H_v = 220$

黄銅　　$H_v = 150$

なお，鋼球の半径は 5 mm である。

図 1.4.14 ～図 1.4.17 に荷重と近接量の関係を示す。図の丸印は測定値 10 点の平均で縦線はばらつきを示す。図 1.4.14，図 1.4.15 は軟鋼板に関する実験結果と数値計算結果を示し，図 1.4.16，図 1.4.17 は黄銅板に関する実験結果と数値計算結果を示す。いずれの場合も実測値と理論値はかなり良い一致を示し，本

理論の妥当性が確かめられたものと考えられる。

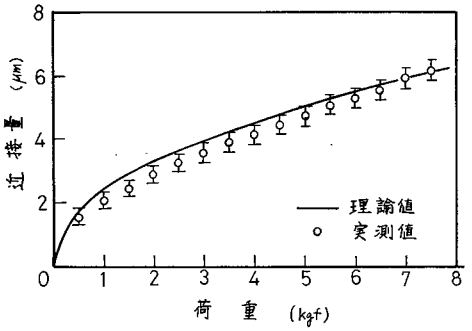


図 1.4.14 近接量に関する理論値と実測値の比較
中心線平均粗さ $R_a = 0.81\ \mu m$

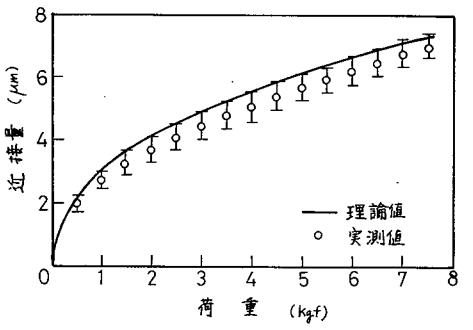


図 1.4.15 近接量に関する理論値と実測値の比較
中心線平均粗さ $R_a = 1.52\ \mu m$

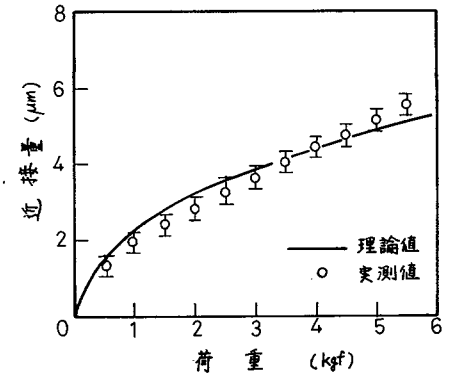


図 1.4.16 近接量に関する理論値と実測値の比較
中心線平均粗さ $R_a = 0.62\ \mu m$

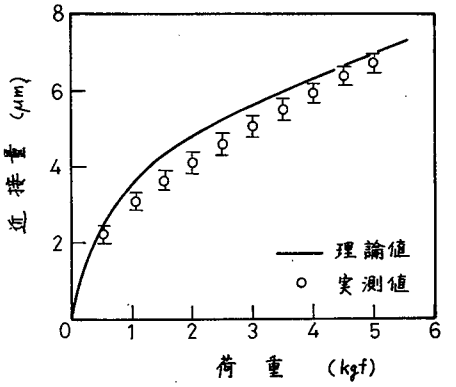


図 1.4.17 近接量に関する理論値と実測値の比較
中心線平均粗さ $R_a = 1.51\ \mu m$

4.4.2 突起が弾性変形する場合

4.4.2.1 試 験 片 材 質

試料平面としては黄銅板を湿式ラップ仕上したものを用い，試料球としてナイロン球（材質　ナイロン６，表面粗さ $R_a = 0.2\ \mu m$）を用いる。平板試験片に湿式ラップで種々の表面粗さ（$R_a = 0.65\ \mu m \sim 1.22\ \mu m$）を付けている。理論解析では突起そのものが弾性変形をするように記述してきたが，この実験では黄銅板はナイロン球に比べるとほとんど剛体と考えられるので突起は変形せず球

にくい込む。しかし理論的にはナイロン球の局部的変形を弾性変形とすると前述の理論がそのまま適用できる。高分子材料は完全な弾性体とは考えられず，当然粘弾性効果が懸念されるが，球となめらかな平面との接触における近接量αを測定すると，図 1.4.18 に示すように両対数グラフでほぼ

$$\alpha \propto W^{\frac{2}{3}}$$

の直線上にのる。すなわちナイロン球はヘルツの弾性接触理論にほぼ従うことになり，本弾性接触理論の検証実験に使用しうるものと考えられる。

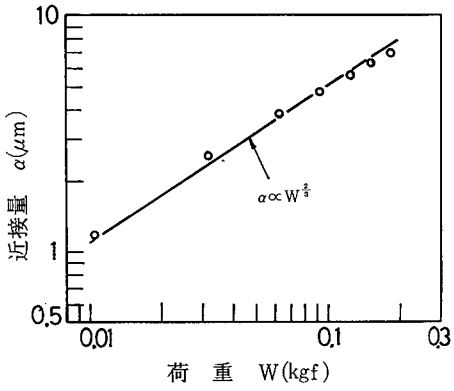


図 1.4.18　ナイロンボールの荷重と近接量の関係

なお，図 1.4.18 の実測値を図中の直線で近似し，この直線とヘルツ理論から弾性定数を求めた結果

$$\frac{1-\nu_1^2}{E_1} = 0.01$$

となり，ナイロン球を用いての押付け実験の荷重は鋼球の場合に換算すると約 230 倍になる。このため近接量を実測する場合突起の変形が無視できるような接触開始時点を知るのは困難で，初期荷重 5 gf の時点を基準にして近接量を計算する。

4.4.2.2　試験片の表面粗さに関する諸元

近接量の理論値を表面単位理論および頂点分布理論を用いて計算するには，3 次元的突起先端曲率半径β_3，突起頂点分布の標準偏差σ_{p3}，突起密度n_{p3}等の諸元が必要になる。これらの 3 次元的諸量の測定は特別な測定機[10]を必要とする。ここでは表面粗さの 2 次元的諸量の実測値と確率過程理論を用いて推定する。

湿式ラップ仕上面の表面粗さ曲線（一例を図 1.4.19 に示す）を触針式表面粗さ計で測定し，これをミニコンピュータでデータ処理を施し[11]，2 次元的曲率半径β，突起頂点密度n_p，表面粗さ曲線の中心線を基準とした突起頂点平均高さ$\overline{Z_p}$等を求めた結果を図 1.4.20 ～図 1.4.22 に示す。

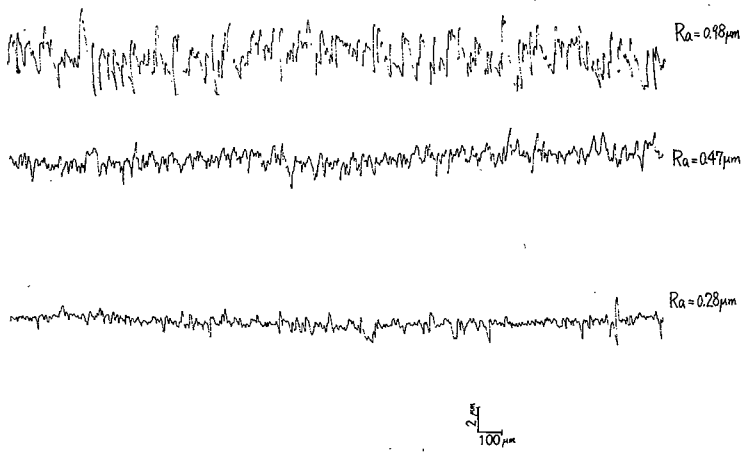


図 1.4.19　湿式ラップ仕上面の断面曲線

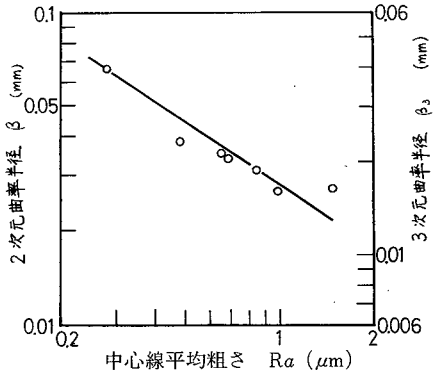


図 1.4.20　ラップ仕上面における
突起先端曲率半径

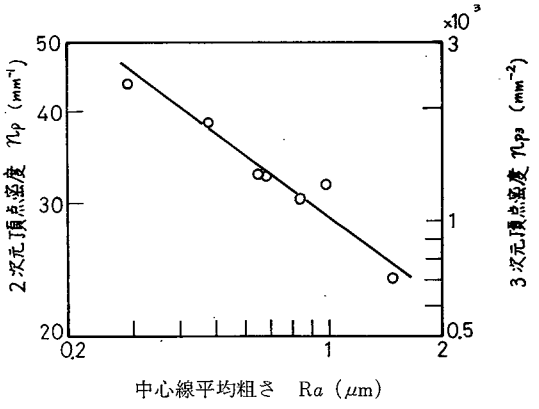


図 1.4.21　R_a と n_p，n_{p3} の関係

これらの２次元的諸量から３次元的諸量を推定するのに表面粗さ曲線上の各点の高さ，傾き，高さの二次微分などを確率変数とする分布を多次元正規分布と仮定して理論的[12,13,14]に導かれた次式を用いる。

$$\beta_3 = 0.609\,\beta \qquad (1.4.26)$$

$$n_{p3} = 1.21\,n_p^2 \qquad (1.4.27)$$

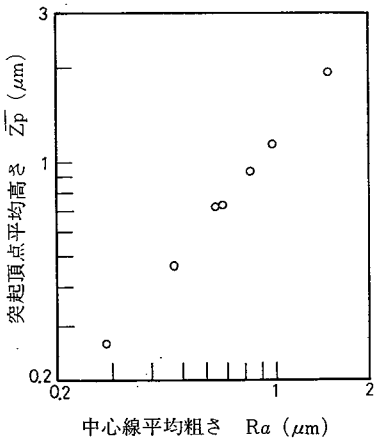


図 1.4.22　R_a と Z_p の関係

$$\sigma_{p3} = (1 - 0.598\, J^2)^{\frac{1}{2}}\, \sigma_s \qquad (1.4.28)$$

ここで J は

$$J = \frac{1.5^{\frac{1}{2}}\, \dot{\sigma}_s^2}{\sigma_s\, \ddot{\sigma}_s}$$

$\dot{\sigma}_s$：表面粗さ曲線の傾きの標準偏差

$\ddot{\sigma}_s$：表面粗さ曲線の2次微係数の標準偏差

で定義されており，次式で推定できる。

$$J = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_s}\, \overline{Z_p} \qquad (1.4.29)$$

すなわち，β_3，n_{p3} は式（1.4.26），（1.4.27），図 1.4.20，図 1.4.21 からすぐに求まり，σ_{p3} は式（1.4.29）および図 1.4.22 からまず J を求め（図1.4.23），これと式（1.4.28）とから算出する。このようにして推定した3次元的諸元を図 1.4.20，図 1.4.21 および図 1.4.24 に示す。近接量の理論計算にあたってはこれらの図中に示した直線近似を用いる。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} \beta_3 &= 2.18 \times 10^{-4}\, \sigma_s^{-0.4} \\ n_{p3} &= 5.41\, \sigma_s^{-0.74} \\ \sigma_{p3} &= 0.331\, \sigma_s^{0.83} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.30)$$

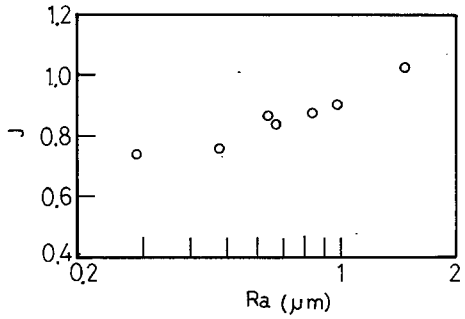


図 1.4.23　R_a と J の関係

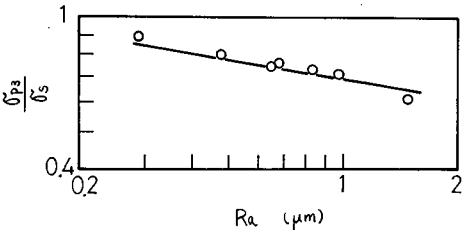


図 1.4.24　R_a と $\frac{\sigma_{p3}}{\sigma_s}$ の関係

4.4.2.3　近接量測定結果

図 1.4.25 ～図 1.4.27 にナイロン球の近接量の実測値と理論値を示す。

頂点分布理論の理論値は図 1.4.12，図 1.4.13 で引用した *Greenwood* 理論[9] ではなく平面間接触における理論[7] を本研究で行っている2次曲面近似法に適用して数値計算を行った結果である。表面単位理論は実測値より少し大きめの値を示し，逆に頂点分布理論は低い値を示している。このような理論値と実測値の差は

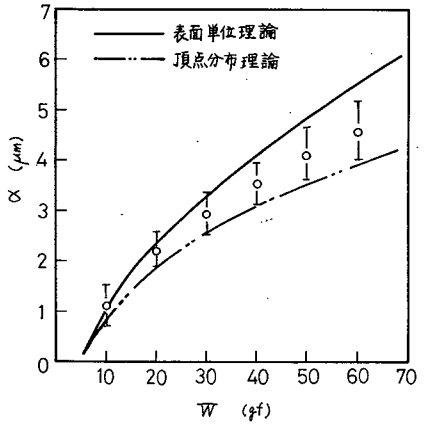


図 1.4.25　荷重と近接量の関係
$R_a = 1.22\ \mu m$
$R = 5\,mm$

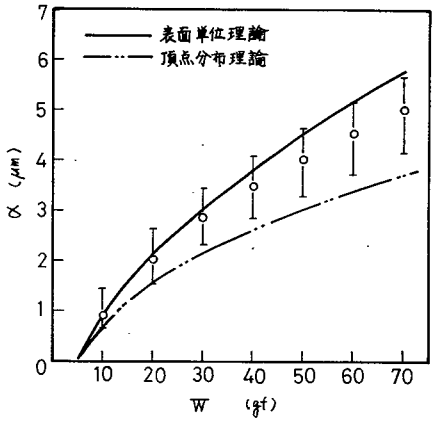


図 1.4.26　荷重と近接量の関係
$R_a = 0.97\ \mu m$
$R = 5\,mm$

各々の理論そのものに問題があるのか，k_s，β_3，σ_{p3}，n_{p3} 等のパラメータの推定に問題があるのは明らかでなく，この問題を検討するには弾性接触突起の合流の問題や表面粗さの３次元的測定法の確立等の大きな研究課題を残している。

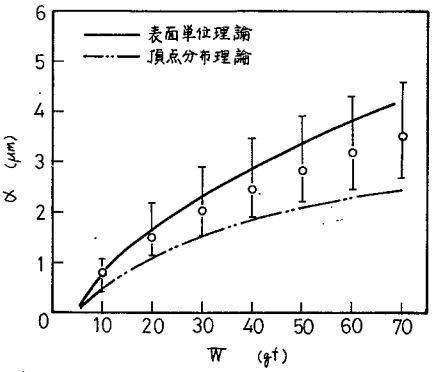


図 1.4.27　荷重と近接量の関係
$R_a = 0.65\ \mu m$
$R = 5\,mm$

４．５　考　　察

突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行ったが，この理論を実際の接触問題に適用するには両者の選択基準を決める必要がある。母材の変形を弾性変形として扱ってきたため，解析の適用限界を明らかにしておく必要がある。また理論計算では Z_{os} を確定量として扱ってきたが実験ではランダム量となり，この相違の検討を行う必要がある。

以上の３点について考察を行う。

4.5.1　突起の変形形態に関する判定基準

接触問題において弾性接触から塑性接触へ遷移する条件についての検討は，表面粗さを有する平面間の接触の場合には数多く行われており[15~18]，とくに *Greenwood* と *Williamson*[7] が提唱した塑性指標（*plastity index*）φ_p が有名で，その他の報告もこの φ_p を基準にしたり，φ_p との対比で述べられている例が多い。

しかるに，球と平面の接触に関しては，この種の検討は全く報告されてない。この問題に関するより厳密な検討は第５章で考察するので，ここでは母材の幾何学的形状がこの問題にいかなる影響を及ぼすか，すなわち平面どうしの接触と球と平面の接触とでは φ_p がどの程度異なるかを検討するにとどめる。このため *Greenwood*[7] と同じ設定，便法で塑性変形突起の接触面積と全接触面積の比 R_A を求める。

表面粗さ，材質，食込み高さ等の接触条件を同一にした状態で，平面間の接触と，球と平面の接触における R_A の値に生じる差について概算するため表面粗さについて以下の設定をおく。

1）突起の先端形状は半球形とし曲率半径を β_3 とおく。

2）突起頂点の高さ分布の分布形は偏差 σ_{ps} の正規分布とする。

なお，理論的妥当性には欠けるが *Greenwood* と同じ設定にするため，全接触面積は全荷重を弾性接触突起で支えると仮定した場合の真実接触面積で近似する。

球と平面の接触におけるヘルツ理論によると単一接触突起における近接量 α_a と接触面積 S_{ae} の間には次式の比例関係が成立する。

$$S_{ae} = \pi \beta_3 \alpha_a \qquad (1.4.31)$$

また同一近接量だけ食込んだ単一塑性接触突起の接触面積 S_{ap} は幾何学的考察により次式で表される。

$$S_{ap} = 2\pi \beta_3 \alpha_a \qquad (1.4.32)$$

以上の２式より α_a や β_3 と無関係に次式が成立することがわかる。

$$S_{ap} = 2\,S_{ae} \qquad (1.4.33)$$

そこで接触突起の変形が弾性変形から塑性変形へ遷移する臨界の個々の突起についての近接量を α_{cr} とし，球を粗い平面に押し付けた場合の接触高さを Z_{os} とすると，球と平面の接触における全接触面積中に占める塑性変形突起の接触面積比 R_{AS} は次式で求まる。

$$R_{AS} = \frac{2\int_{z_{os}}^{z_{max}} \int_{h+\alpha_{cr}}^{z_{max}} (z-h)\, f(z)\, dz\, dh}{\int_{z_{os}}^{z_{max}} \int_{h}^{z_{max}} (z-h)\, f(z)\, dz\, dh} \qquad (1.4.34)$$

ここで $f(z)$ は突起頂点高さ分布の確率密度関数

一方，平面どうしの接触における接触面積比 R_{AP} は次式で求まる。

$$R_{AP} = \frac{2\int_{z_{op}-\alpha_{cr}}^{z_{max}} (z-h)\, f(z)\, dz}{\int_{z_{op}}^{z_{max}} (z-h)\, f(z)\, dz} \qquad (1.4.35)$$

式 (1.4.34)，(1.4.35) を用いて R_{AS}，R_{AP} を求めた結果を図 1.4.28 に示す。

R_{AS}，R_{AP} 両者とも同様の傾向を示し，α_{cr}/σ_{ps} が 1 以上になると急激に塑性変形突起部の接触面積比は低下することがわかる。また，球の場合の面積比 R_{AS} の方が平面の場合の面積比 R_{AP} に比べ低い値を示しているのは，球の場合接触域の内で中心から離れるにしたがって各接触突起の近接量が低下し，塑性変形が生じにくくなるためである。しかし，この図から球と平面の接触の方が平面どうしの接触に比べ突起が塑性変形しにくいとは判断できない。球や平面に同一荷重をかけると球と平面の接触の場合，平面間の接触に比べ当然接触高さ Z_{os} が低下する。これは図 1.4.28 からも明らかなように塑性変形部の面積比の増大を意味する。しかし，平面どうしの接触理論と球と平面間の接触理論では，対象とする荷重条件が大幅に異なるため同一荷重条件下での比較

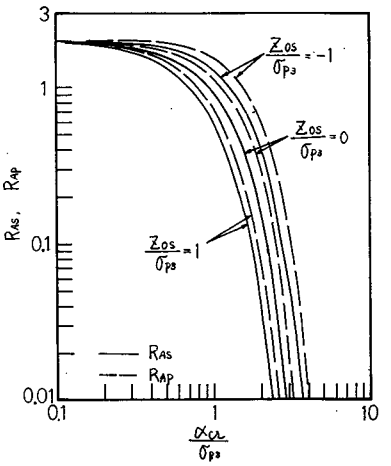


図 1.4.28　R_{AS} と R_{AP} の比較

は意味がなく，図 1.4.28 のように接触高さを基準にした比較の方が有効と考えられる。

つぎに平面間接触における *Greenwood* の塑性指標に相当する球と平面の接触の場合の塑性指標 φ_s を求める。

球形突起と平面の接触における突起内部の最大せん断応力 τ_{max} はヘルツ理論により次式で与えられる。

$$\tau_{max} = 0.47 \frac{W_a}{\pi a^2}$$

$$= \frac{0.3133 E}{\pi} \left(\frac{\alpha_a}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.4.36)$$

ここで　a ：接触円半径　　W_a ：荷重，

いま，

$$\tau_{max} \geqq k_c \, p_m \qquad (1.4.37)$$

なる条件下のとき突起が塑性変形すると設定すると，突起が塑性変形する臨界近接量 α_{cr} は次式で表される。

$$\alpha_{cr} = (10 E k_c \cdot p_m)^2 \beta_3 \qquad (1.4.38)$$

また，*Greenwood* の塑性指標 φ_p は次式で定義[7]されている。

$$\varphi_p = \left(\frac{\sigma_{p3}}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E}{2 p_m} \qquad (1.4.39)$$

式 (1.4.38)，(1.4.39) から次式が求まる。

$$\varphi_p = \frac{k_c}{0.2} \left(\frac{\sigma_{p3}}{\alpha_{cr}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.4.40)$$

Greenwood[7] は k_c を 0.2 に設定し，$\varphi_p \geqq 1$ のとき接触はほとんど塑性変形突起のみ，$\varphi_p \leqq 0.6$ のときほとんど弾性変形突起のみで構成されているとしている。この基準に従い，$\varphi_p = 1$ および $\varphi_p = 0.6$ のときの α_{cr}/σ_{p3} を式 (1.4.40) から求め，相当する R_{AP} を図 1.4.28 の破線から求める。その R_{AP} と等しい R_{AS} を有する α_{cr}/σ_{p3} を実線から求め，式 (1.4.40) に代入して逆に球と平面の接触における塑性指標 φ_s を算出すると，

$\varphi_p = 1$ に相当する　　$\varphi_s = 1.10$

$\varphi_p = 0.6$ に相当する　　$\varphi_s = 0.65$　　(1.4.41)

となり，平面どうしの場合に比べ φ_s は 10％弱程度増加するにすぎないことがわかる。ただし，この値は図 1.4.28 から明らかなように Z_{os}/σ_{p3} により多少変化する。式 (1.4.41) の値は図 1.4.28 の 3 種類の Z_{os}/σ_{p3} に対する値の平均値である。

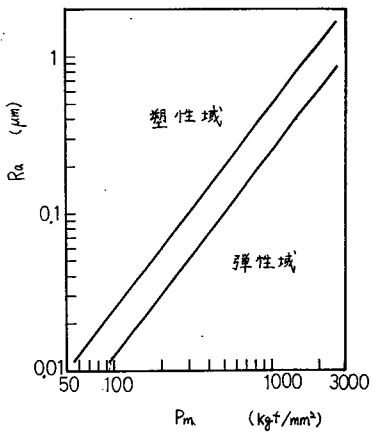


図 1.4.29　湿式ラップ仕上面における変形形態
$R = 5\,mm$
$E_1 = E_2 = 21000\,kgf/mm^2$

一例として，湿式ラップ仕上面に式 (1.4.41) の判定基準を適用してみる。すなわち式 (1.4.30) の関係式を式 (1.4.39) に代入し，φ_p を p_m と σ_s で表し，さらに σ_s を式 (1.3.20) により R_a で表して式 (1.4.41) の判定基準を適用すると，図 1.4.29 のように弾性接触理論と塑性接触理論の適用領域が明確になる。

4.5.2　母材の塑性変形開始条件

本論文の解析では母材の変形を弾性変形と設定しているため理論の適用範囲が限られる。ここではこの範囲を明確にするため母材内部の最大せん断応力を推定する。

弾性論[19] によると，z 軸に関し軸対称な垂直応力 $p(r)$ が xy 面に作用する場合 z 軸に添って深さ z の位置の応力は次式で表される。

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{1}{2}\int_0^{r_{max}} p(r)\left\{-2(1+\nu)z(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^3(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\right\} r\,dr \qquad (1.4.42)$$

$$\sigma_z = -3\int_0^{r_{max}} p(r)\, rz^2\,(r^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\, r\,dr \qquad (1.4.43)$$

よってせん断応力 τ は次式で定まる。

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z) \qquad (1.4.44)$$

式（1.4.14）の圧力分布を式（1.4.42),(1.4.43）に代入し，母材内部の応力分布を z 軸上の点について求めた一例を図 1.4.30 に示す。接触条件を変化させて応力分布を計算し，そのつどこのような図を描き，図から最大せん断応力 τ_{max} およびそれが生じる深さ h_τ を求める。

突起が塑性変形する場合の計算結果を図 1.4.31 と図 1.4.32 に示す。図 1.4.31

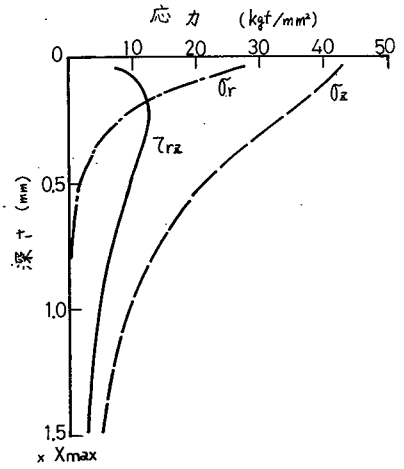


図 1.4.30　母材内部の応力分布
$\sigma_s = 1\,\mu m$　$p_m = 500\,kgf/mm^2$
$R = 5mm$　$E_1 = E_2 = 21000\,kgf/mm^2$

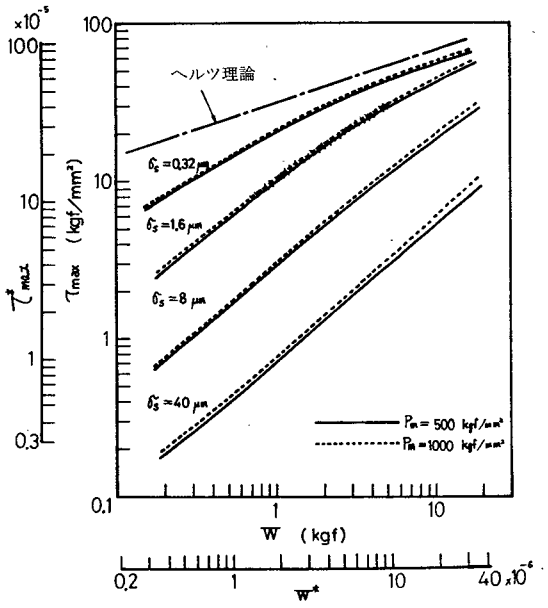


図 1.4.31　W と τ_{max} の関係

は荷重と最大せん断応力の関係を示す。荷重が小なるほど一点鎖線で示したなめらかな面の場合のヘルツ理論と実線および点線で示した粗い面の場合の理論値の差が大になる。また，σ_s が小なるほど τ_{max} は増加しヘルツ理論に近い値を示すが，p_m は τ_{max} の値にほとんど影響を及ぼしていない。

トレスカの降伏条件によると母材の塑性変形は τ_{max} が材料の降伏せん断強さ τ_c に

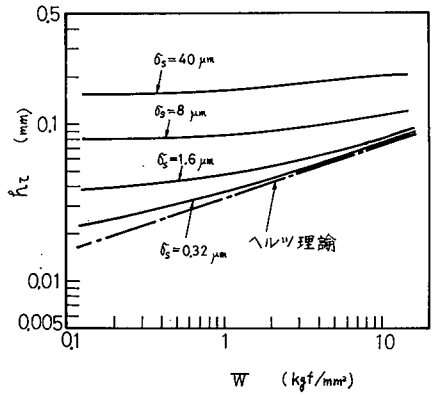


図 1.4.32　W と hτ の関係
$p_m = 500\,kgf/mm^2$

等しくなった時点で母材内部の一点で発生する。しかし，これはきわめて局部的な塑性変形にすぎず，本理論の適用条件としては後述の第２編第１章 1.2.2.4 の考察から推定される次式を用いるのが妥当と考えられる。

$$\tau_{max} < 2\tau_c \qquad (1.4.45)$$

なお，鋼板を用いた近接量測定実験では $\tau_c = 20\ kgf/mm^2$ であるから，図 1.4.14～図 1.4.17 の実験条件は図 1.4.31 から判断すると式（1.4.45） の本理論適用条件をほぼ満足している。

図 1.4.32 は最大せん断応力が生じる位置を表面からの深さで表したもので，なめらかな面の場合に比べ表面粗さが大なるほど深い位置に τ_{max} が発生している。またこの深さは荷重が大なるほど深くなるが，荷重によってそれほど大きくは左右されないことがわかる。

図 1.4.33，図 1.4.34 に突起が弾性変形する場合の計算結果を示す。図 1.4.33 に τ_{max} とみかけの最大圧力 $p(0)$ との比を示しているが，この比は σ_s に無関係にほぼ一定で

$$\tau_{max} \approx 0.29\ p(0) \qquad (1.4.46)$$

となりなめらかな面と球の接触の場合[20]

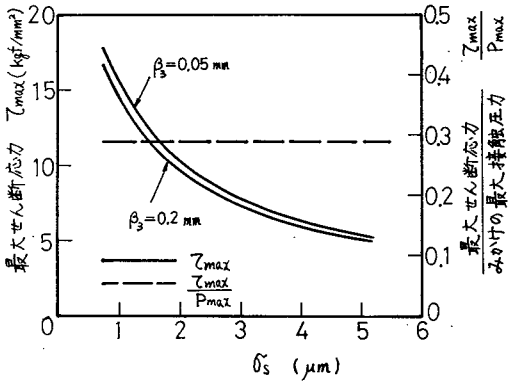


図 1.4.33　σ_s と τ_{max}，$\frac{\tau_{max}}{p_{max}}$ の関係
W＝1 kgf

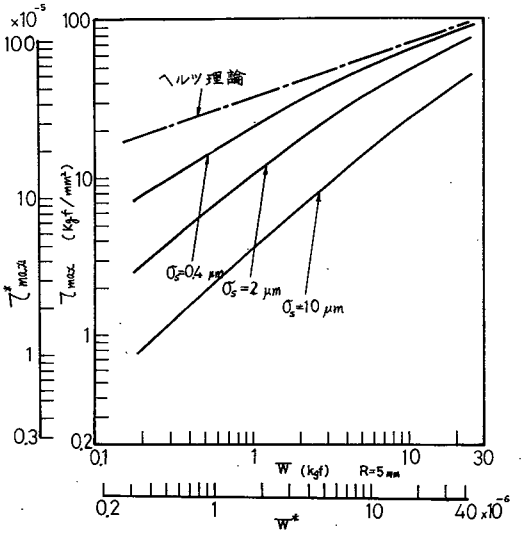


図 1.4.34　W と τ_{max} の関係

($\tau_{max}=0.31\ p(0)$) とよく似た傾向を示す。なお，この比は突起半径や荷重を変化させてもほぼ一定である。また，この図から突起先端曲率半径は τ_{max} にあまり影響を及ぼさないことがわかる。そこで，β_3 の代表値として式 (1.4.30) を採用して τ_{max} を求めてもそれほど一般性を失わないと考えられる。この場合の数値計算結果を図 1.4.34 に示す。この図は突起が塑性変形する場合の図 1.4.31 とよく似た傾向を示している。

結局，塑性変形の場合も弾性変形の場合もほとんど σ_s，W のみで τ_{max} が決定され，無次元化の妨げになっていた p_m'，β_3 と σ_s の関係は無視でき，図 1.4.31 と図 1.4.34 は次式で定義する無次元化変数で近似的に表示できる。

$$\tau_{max}^{*}=\frac{\tau_{max}}{\pi E}\ ,\quad W^{*}=\frac{W}{ER^{2}}\ ,\quad \sigma_s^{*}=\frac{\sigma_s}{R} \qquad (1.4.47)$$

このようにして無次元化変数で表した図 1.4.31，図 1.4.34，および式 (1.4.47) を用いると材質さえ決まると本理論の適用範囲が決定されることになる。

4.5.3 突起形状の設定の影響

4.2.1 の解析では解析の便宜上円錐形突起を想定したが，弾性接触の場合や第 2 章，第 5 章では突起形状を 2 次曲線で表している。そこで突起形状を円錐と設定する場合と放物体と設定する場合とで，球と粗い平面の接触理論の解析にどの程度の差が生じるかをシミュレーション計算で検討してみる。計算手順としては計算機で正規乱数を発生させ，それを頂点高さとする円錐突起，あるいは放物体突起を突起間隔一定に 3 次元的に配置し，そのモデル面上の一定接触高さ Z_{os} まで球を食込ませ，各接触突起の食込み量を求める。各接触突起に作用する負荷を第 1 章の理論式をもとに計算し各突起の負荷の総和，すなわち球に作用する負荷を求める。モデル面を変化させこの負荷の平均値 W を求める。以上の手順を種種の接触高さ Z_{os} について計算し，Z_{os} と W の関係を求める。

モデル面としては湿式ラップ面を想定し，突起先端曲率半径 β_3 は式 (1.4.30) から，平均傾斜 $\tan\theta$ は表面単位面密度 n_s と $\tan\theta$ との関係を示す次式の理論式[2] と式

(1.3.25) から推定する。

$$tan\,\theta = 0.6363\,\sigma_s^2\,n_s \qquad (1.4.48)$$

数値計算結果を図 1.4.35 に示す。この図から突起設定の相違による差は図中に示した程度の接触条件下ではかなり小なることがわかる。

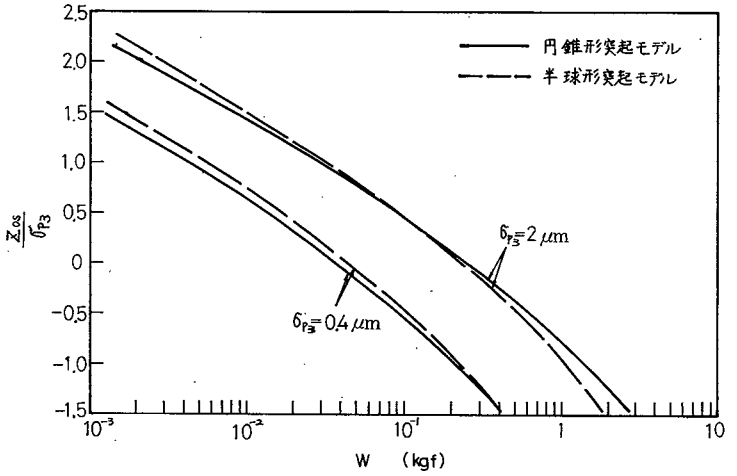


図 1.4.35 Z_{os} に及ぼす突起形状の影響
p_m=500 kgf/mm² R=5 mm

4.5.4 Zos が確定量の場合とランダム量の場合との相違

式 (1.4.11) あるいは式 (1.4.18) を見ると明らかなように いずれも接触高さ Z_{os} を確定量とし，真実接触面積，あるいは荷重をランダム変数として扱っている。式 (1.4.11) の真実接触面積は荷重と比例関係にあるからこの場合も荷重をランダム変数としてその平均値を求めていることになる。

一方，近接量測定実験においては実験条件として荷重Wが与えられるためWは確定量になり，近接量がランダム量，すなわち接触高さ Z_{os} がランダム量になる。このように理論と実験とは異った接触状態にある。そこで，Z_{os} をランダム量とする場合と確定量とする場合の相違について考察する。

(1) 突起が塑性変形する場合

Z_{os} をランダム量とする場合の $\overline{Z}_{os}$ と W の関係は塑性接触の場合には統計

論でいう順序統計量を求めることに帰着すると考えられる。しかし，この問題はきわめて複雑で解析が容易でない。ここでは前章 3.5.3.2 と同様のシミュレーション計算で $\overline{Z}_{os}$ と W の関係を求める。また，Z_{os} を確定量とする場合には W がランダム量になるが，この W の平均値 $\overline{W}$ と Z_{os} の関係もシミュレーション計算で求める。そして W と $\overline{W}$ を同じ横軸にとり $\overline{Z}_{os}$ と Z_{os} の比較を行った例を図 1.4.36 に示す。$W-\overline{Z}_{os}$ に関する計算結果が階段状になっているのは前章 3.5.3.2 で述べた理由による。

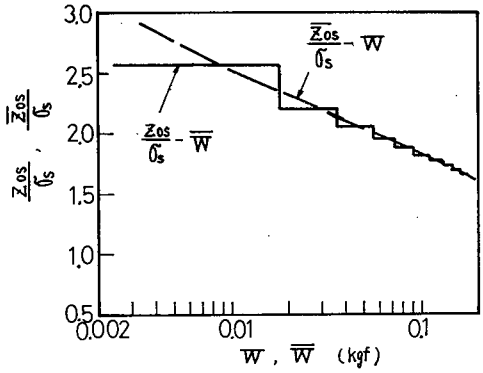


図 1.4.36 $\frac{Z_{os}}{\sigma_s}$ と $\frac{\overline{Z}_{os}}{\sigma_s}$ の比較

$\sigma_s=1\,\mu m$ $p_m=500\,kgf/mm^2$
$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$ $R=5\,mm$

Z_{os} をランダム量に設定したときで表面単位が唯一個しか球と接触しない領域での $\overline{Z}_{os}$（これは最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{is}$ に相当する）は Z_{os} より低い値を示し，軽荷重になるほどこの差は拡がっている。一方，荷重が増加し複数個の表面単位が接触する領域では $\overline{Z}_{os}$ と Z_{os} の差はほとんど無視できる。また，σ_s と n_s の関係として式（1.3.25）を用いると σ_s を変えても接触状態が幾何学的に相似なため，$\overline{Z}_{os}$ と Z_{os} の関係も σ_s が変化しても図 1.4.36 と全く相似なものになる。以上から，表面単位が複数個接触する条件，すなわち前章の式（1.3.33）と同様，

$$W > \frac{p'_m \sigma_s}{16} \qquad (1.4.49)$$

なる条件を接触荷重が満足しておれば，Z_{os} がランダム量である接触状態は Z_{os} を確定量とする本章の解析結果で近似的に推定できる。図 1.4.14 ～図 1.4.17 の近接量測定実験では実験条件の大半の領域で上式の荷重問題を満足しているため実験と理論の設定の相違はほとんど問題にならない。

(2) 突起が弾性変形する場合

突起が弾性変形する場合のシミュレーション計算は，計算の便宜上，頂点分布理論に添って行う。すなわち計算にあたっては正規乱数を突起頂点高さにとり，その平均高さを基準にした接触高さ Z_{op} の平均値 $\overline{Z}_{op}$ を求める。なお，突起頂点の諸量，σ_{p3}，n_{p3}，β_3 は式（1.4.30）から推定する。個々の接触突起の近接量と荷重の関係は球と平面の接触におけるヘルツ理論に従うものとする。このため，近接量は荷重に関する連続量となり，$\overline{Z}_{op}$ と W の関係も図 1.4.36 のような階段状にはならずなめらかな曲線となる。

W と $\overline{Z}_{op}/\sigma_{p3}$ の関係，および $\overline{W}$ と Z_{op}/σ_{p3} の関係をシミュレーション計算で求めた結果を図 1.4.37 に示す。定性的には突起が塑性変形する場合と同様の傾向を示している。$\overline{Z}_{op}$ と Z_{op} の差が 0.2 σ_{p3} 以下の場合 $\overline{Z}_{op}$ が Z_{op} で近似できるものとしその臨界荷重を W_z とする。この W_z を図 1.4.37 のようにして種々の接触条件について求めた結果を図 1.4.38 に示す。本章 4.4.2.3 の近接量測定実験においては荷重 $W = 0.1\ kgf$ が図 1.4.38 では約 23 kgf に相当するため実験条件のほとんどの領域で $W > W_z$ を満足しており，実験と理論の設定の相違はあまり問題にしなくてよい。

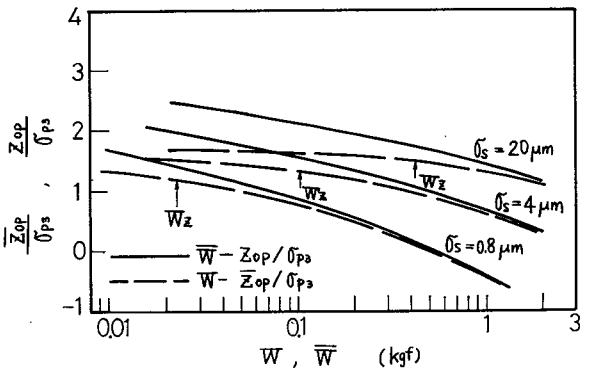


図 1.4.37 Z_{op} がランダム量の場合と Z_{op} が確定量の場合の比較
$\beta = 0.1$ mm　R = 5 mm
$E_1 = E_2 = 21000$ kgf/mm^2

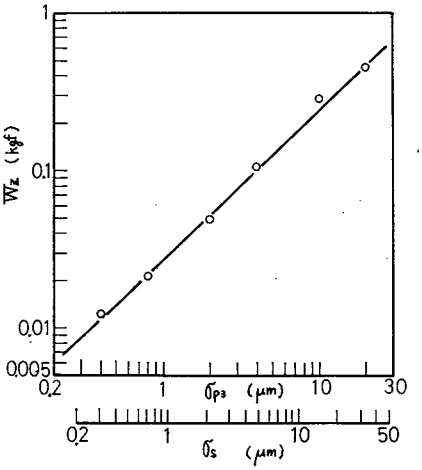


図 1.4.38 σ_{p3}，σ_s と W_z の関係
R = 5 mm
$E_1 = E_2 = 21000$ kgf/mm^2

4.6 結　　言

方向性のない表面粗さを有する平面と球の押付けにおける変形挙動を，接触突起が塑性変形する場合と弾性変形する場合に分けて解析を行った。突起が塑性変形する場合は第1章で定式化した突起の弾塑性変位を考慮に入れて解析し，突起が弾性変形する場合は平面間接触における表面単位理論[8]，および頂点分布理論[7]の両者を球と平面の接触問題に拡張して考察を試みた。また，突起，および母材の塑性変形開始条件等についての考察，および本論文中随所に現われる母材の弾性変位の2次式近似の計算精度についての検討も試みた結果，以下のことが明らかになった。

1）母材の弾性変位後の球の相対的曲面を2次式近似および4次式近似で計算した結果を比較して，2次式近似でも十分な精度が得られることが確認できた。

2）食込み位置，真実接触面積，有効接触域半径，みかけの最大接触圧力等を理論的に推定できる。

3）上述の諸量に影響を及ぼす種々の因子のうち，表面粗さ曲線の標準偏差が最も顕著な影響を及ぼす。

4）近接量に関して実測値と理論値の比較を試みた結果，突起が塑性変形する場合は実測値と理論値とかなり良好な一致を示し，本理論の妥当性が確かめられた。しかし，弾性接触状態の場合，理論値と実測値の間にそれほどの一致が見られず，弾性接触理論を現実の機械加工面に適用するには今後の検討および表面粗さの高精度な3次元的測定方式の確立が必要である。

5）突起の塑性変形開始条件としては平面間接触の場合の塑性指標がほとんどそのまま準用できる。

6）表面粗さが大なるほど母材の最大せん断応力は低下する。

参　考　文　献

1) 石垣，川口： 精密機械，42，9 (1976) 858.
2) 久門： 日本機械学会論文集，35，272 (1967) 861.
3) A.E.H.Love ; A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.
4) たとえば，J.F.Archard： J.Appl. Phys., 24, (1953) 193.
5) J.A.Greenwood and J.H.Tripp： Proc. I.Mech. E., 185, (1970/71) 625.
6) A.W.Bush, R.D.Gibson and T.R.Thomas： Wear, 35, 1 (1975) 87.
7) J.A.Greenwood and J.B.P.Williamson： Proc. Roy. Soc. Ser.A, 295, (1966) 300.
8) 久門： 日本機械学会論文集，38，314 (1972) 2657.
9) J.A.Greenwood and J.H.Tripp： Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
10) R.S.Sayles and T.R.Thomas： J.Phys. E.Sci. Instrum, 9, (1976) 855.
11) 渡辺，石垣，川口： 昭和50年度 精機学会春季全国大会 前刷集，(1975) 147.
12) D.E.Cartwright and M.S.Longuet-Higgins： Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 237, (1956) 212.
13) P.R.Nayak： J. Lubr. Technol., 93, (1971) 398.
14) H.A.Francis： Wear, 45 (1977) 221.
15) たとえば，D.J.Whitehouse and J.F.Archard： Proc. R. Soc. London Ser. A, 316, (1970) 97.
16) R.A.Onions and J.F.Archard, J.Phys. D.Appl. Phys., 6, 3 (1973) 289.
17) 久門： 日本機械学会論文集，38，314 (1972) 2657.
18) D.Tabor： Wear, 32, 2 (1975) 269.
19) S.Timoshenko and J.N.Goodier： Theory of Elasticity 2nd ed., McGRAW-HILL, New York (1951) 369.
20) S.Timoshenko and J.N.Goodier： 同上，p.380.

第 5 章　方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触[1)]

5・1　緒　　言

第 1 編第 2 章において方向性のある表面粗さとして，突起の高さ形状が均一な面を想定したが，現実の加工面には研削仕上面，研摩布仕上面等のように表面粗さを統計的に処理して扱う方が適している場合の方が多い。この章では突起頂点の高さを確率変数として方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触変形の解析を行う。第 1 編第 2,4 章と同じくすべての接触突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行い，この両者の適用範囲については考察で検討する。なお，方向性のない表面粗さを想定した球と平面の接触理論[2~9)]は多いが，方向性のある表面粗さに関してはほとんど見あたらない。

5・2　理　　論

5.2.1　突起が弾性変形する場合

理論解析にあたり以下の仮定をおく。

1）一方向性の表面粗さを考え，突起の条痕にそってのおうとつは無視できるものとする。

2）突起頂点高さ分布は標準偏差 σ_s の正規分布とする。

3）突起の合流は無視する。

4）母材の変形は弾性変形とする。

現実の加工面には完全な一方向性の表面粗さは存在しないが，球と平面の接触においては平面間接触に比べ接触域が極めて狭いため条痕方向の突起長さは無限と近似しうる場合が多いと考えられる。砥粒加工面において頂点分布が正規分布で近似できることは一般に示されており，第 3 章においても実測例を示した。突起の合流は当然考慮に入れる必要がある。しかし，これを解析の中に含めること

はきわめて困難である。本研究では，表面のおうとつのうちで，接触時に容易に合流を起こし単独の突起として存在し得なくなるような微細なおうとつを表面突起分布測定時に除去する[10]ことにより，仮定 3）に起因する誤差の低減をはかった。仮定 4）の設定により本章の理論の適用限界の上限が定まるが，詳細は考察に示す。

以上の設定をもとにして解析を試みる。球および平面の母材の弾性変形としては第 1 編第 4 章で近似精度を確認した 2 次式近似をここでも採用する。すなわち第 1 編第 4 章の 2 次式を 2 次元に拡張し，母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径を $\gamma_x R$, $\gamma_y R$ とすると，母材の変形後の 2 次曲面は次式で表される。

$$Z_1 = \frac{x^2}{2\gamma_x R} + \frac{y^2}{2\gamma_y R} + Z_{op} \qquad (1.5.1)$$

ここで Z_{op} は接触高さで，z 軸の原点高さは図 1.5.1 に示すように突起頂点高さの平均高さに一致させている。また，表面粗さの条痕の方向を y 軸方向に一致させると，突起先端の高さが Z_p，曲率半径 β，突起の中心が x_p の位置にある突起の表面は次式で表される。

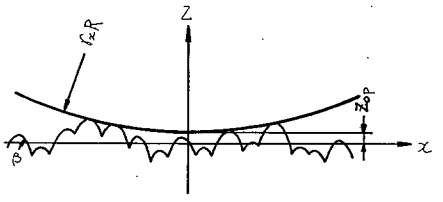


図 1.5.1　負荷過程の接触状態

$$Z_2 = \frac{-(x-x_p)^2}{2\beta} + Z_p \qquad (1.5.2)$$

式 (1.5.1) と (1.5.2) を用いると，球と突起の幾何的交さ量 $w_a(x,y)$ は次式で表される。

$$w_a(x,y) = Z_2 - Z_1 = -\left(\frac{1}{2\gamma_x R} + \frac{1}{2\beta}\right)x^2 - \frac{1}{2\gamma_y R}y^2 - Z_{op} + Z_p + \frac{x_p}{\beta}x - \frac{x_p^2}{2\beta}$$

$$= -\left(\frac{1}{2\gamma_x R} + \frac{1}{2\beta}\right)x'^2 - \frac{1}{2\gamma_x R}y^2 - Z_{op} + Z_p - \frac{x_p^2}{2(\gamma_x R+\beta)} \qquad (1.5.3)$$

ここで　$x' = x - \dfrac{\gamma_x R x_p}{\gamma_x R+\beta}$

上式と式 (1.1.2) とを比較すると式 (1.5.3) の w_a は式 (1.1.2) の $w_1 + w_2$ に

相当するため，その他の係数についてはそれぞれ次式の対応が成立する。

$$A' = \frac{1}{2\gamma_x R} + \frac{1}{2\beta} \qquad (1.5.4)$$

$$B' = \frac{1}{2\gamma_y R} \qquad (1.5.5)$$

$$\alpha_a = Z_p - Z_{op} - \frac{x_p^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \qquad (1.5.6)$$

よって第1編第1章 式（1.1.11）の $\cos\Psi$ は次式で表される。

$$\cos\Psi = \frac{B'-A'}{B'+A'} = \frac{\beta(\gamma_x-\gamma_y)-\gamma_x\gamma_y}{\beta(\gamma_x+\gamma_y)+\gamma_x\gamma_y} \qquad (1.5.7)$$

これを式（1.1.12）の右辺に代入して等式が成立するまで繰返し計算を行い k を求めると，各接触だ円の短径 $2a$，長径 $2b$ の比が次式で求まる。

$$\frac{a}{b} = (1-k^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.5.8)$$

また，この k と式（1.5.6）の α_a を式（1.1.17）に代入すると各接触突起に作用する荷重 W_a が求まる。ここではその式を略記して次式で表す。

$$W_a = Q_a \alpha_a^{\frac{3}{2}} = Q_a \left\{ Z_p - Z_{op} - \frac{x_p^2}{2(\gamma_x R + \beta)} \right\}^{\frac{3}{2}} \qquad (1.5.9)$$

ただし Q_a は式（1.1.17）の α_a の係数で，A', B', k, E_1, E_2, ν_1, ν_2 の関数すなわち $\gamma_x R$, $\gamma_y R$, β および材料の弾性定数で定まる定数である。いま，仮りに接触高さ Z_{op} の位置まで二次曲面が食い込んだ場合を考える。平面全体で支える荷重の平均値は式（1.5.9）を用いると次式で与えられる。

$$W = 2 Q_a n_p \int_0^{x_{max}} \int_{Z_{op}+\frac{x^2}{2(\gamma_x R+\beta)}}^{Z_{max}} \left\{ z - Z_{op} - \frac{x^2}{2(\gamma_x R+\beta)} \right\}^{\frac{3}{2}} f(z)\, dz\, dx \qquad (1.5.10)$$

ここで n_p は単位幅あたりの平均突起数，また $f(z)$ は突起頂点高さ分布の確率密度関数で次式のような条件付確率密度関数として表される。

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_p}\right)^2}}{\int_{-Z_{max}}^{Z_{max}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sigma_p}\right)^2} dz} \qquad (1.5.11)$$

式（1.5.10）を満足する Z_{op} を繰返し計算で求めれば，接触高さが定まる。

つぎに，見かけの平均圧力分布を求める。個々の接触だ円内の圧力分布 $p(x, y)$ は第1章式（1.1.4）で表されるため，微小区間 $y=y \sim y=y+dy$ 中の負荷 δW_a は次式で求まることがわかる。

$$\delta W_a(y) = \frac{3W_a}{4b^3}(b^2-y^2)\,dy \qquad (1.5.12)$$

上式の b は式（1.1.14）で表される。同式右辺の係数を K とおくと

$$b = KW_a^{\frac{1}{3}} = K\,Q_a^{\frac{1}{3}}\,\alpha_a^{\frac{1}{2}} \qquad (1.5.13)$$

$$\therefore\ \delta W_a(y) = \frac{3}{4K^3}(K^2 Q_a^{\frac{2}{3}}\,\alpha_a - y^2)\,dy \qquad (1.5.14)$$

α_a は確率変数であるので点 (x, y) における見かけの平均圧力 $p(x, y)$ は上式を用いると次式で表される。

$$p(x,y) = \frac{3n_p}{4K^3}\int_c^{z_{max}} \{K^2 Q_a^{\frac{2}{3}}(z-c) - y^2\} f(z)\,dz \qquad (1.5.15)$$

ここで

$$C = Z_{op} - \frac{x^2}{2(\gamma_x R+\beta)} + \frac{y^2}{K^2 Q_a^{\frac{2}{3}}}$$

式（1.5.15）を弾性論[11]から導かれる次式に代入すると平面に対する球の相対的表面変位量分布は次式で求まる。

$$w_m(x,y) = \frac{1}{\pi E}\iint_{S_i} \frac{p(\xi,\eta)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}^{\frac{1}{2}}}\,d\xi\,d\eta \qquad (1.5.16)$$

ただし積分領域 S_i は短径 $2x_{max}$，長径 $2y_{max}$ で定まるだ円形である。

$$x_{max} = \{2(Z_{max}-Z_{op})(\gamma_x R+\beta)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y_{max} = KQ_a^{\frac{1}{3}}(Z_{max}-Z_{op})^{\frac{1}{2}} \qquad (1.5.17)$$

この母材の弾性変形による球の相対的曲率半径が最初に仮定した $\gamma_x R$，$\gamma_y R$ に一致するまで，すなわち次式が成立するまで式（1.5.1）～式（1.5.16）を繰返し計算すれば接触状態が定まる。

$$\frac{x^2+y^2}{2R} - \left(\frac{x^2}{2\gamma_x R} + \frac{y^2}{2\gamma_y R}\right) = w_m(0,0) - w_m(x,y) \qquad (1.5.18)$$

なお，上式の接触条件式は未知数が2個（γ_x，γ_y）であるから，接触面内の2

点でしか満足されない。その2点として第1編第4章の考察を適用して近接量の推定誤差が最小になるよう下記の位置を採用する。

$$(x, y) = (0.55\, x_{max},\ 0)$$
$$(x, y) = (0,\ 0.55\, y_{max}) \qquad (1.5.19)$$

以上の手順で接触状態が定まると食込み位置 u および近接量 α は次式で定まる。

$$u = Z_{op} - w_m(0,0) \qquad (1.5.20)$$

$$\alpha = \overline{Z}_{ip} - Z_{op} + w_m(0,0) \qquad (1.5.21)$$

つぎに，摩擦，摩耗，接触熱（電気）抵抗等の問題において，主たる因子の一つと考えられる真実接触面積を求める。個々の接触突起において，それぞれの近接量 α_a と真実接触面積 S_{ae} の関係は第1章式（1.1.14），（1.1.15），（1.1.17）を用いると次式で表される。

$$S_{ae} = \pi ab$$
$$= \frac{E'(k)\,\pi}{(A'+B')(1-k^2)^{\frac{1}{2}}\,F'(k)}\,\alpha_a \quad (= A_s\,\alpha_a \text{とおく}) \qquad (1.5.22)$$

よって，球と粗い平面の接触における真実接触面積の平均値 Ar は次式で求まる。

$$A_r = 2\,n_p\,A_s \int_0^{x\,max}\int_{Z_{op}+\frac{x^2}{2(R\gamma_x+\beta)}}^{z\,max} \left\{z - Z_{op} - \frac{x^2}{2(R\gamma_x+\beta)}\right\} f(z)\,dz\,dx \qquad (1.5.23)$$

5.2.2　突起が塑性変形する場合

5.2.2.1　負荷過程の接触機構

解析手順としては弾性変形する場合と同様であるため省略し，本章5.2.1と対応する式のみを示す。個々の接触突起の変形は第1編第1章の解析結果を用い表面粗さの幾何学的性状は本章5.2.1と同一とする。いま，球および平面の母材の弾性変形後の球の平面に対する相対的仮想曲率半径を $\gamma_x R$，$\gamma_y R$ とすると，この曲面が x 軸方向の曲率半径 β なる突起と接触する場合，第1編第1章の式

(1.1.18) における球面に対する突起の相対的曲率半径 R_x, R_y はそれぞれ次式で表される。

$$R_x = \frac{\gamma_x R\beta}{\gamma_x R + \beta} \approx \beta \qquad (1.5.24)$$

$$R_y = \gamma_y R \qquad (1.5.25)$$

よって個々の接触突起の近接量と荷重の関係は式 (1.1.28) の R_x, R_y の代わりに上式 (1.5.24), (1.5.25) を代入すれば求まる。すなわち,

$$W_a^* = 2B^2 + C - 2B\,(B^2 + C)^{0.5} \quad (= g(\alpha_a^*) \text{ とおく}) \qquad (1.5.26)$$

ただし $B = 39\, p_m^{*1.5} \beta^{*0.6} \gamma_y^{-0.6}$

$C = 2\pi^2 p_m^* \alpha_a^* \beta^{*0.5} \gamma_y^{-0.5}$

なお第1編第1章における無次元化は R_y で行ったが R_y は母材の弾性変形により変化するので, この章では球の半径 R で無次元化している。

式 (1.5.26) を用いると, 仮想二次曲面が Z_{op} の位置まで食込んだ場合の球に作用する負荷の平均値は式 (1.5.10) の代りに次式で表される。

$$W^* = 2 n_p^* \gamma_y^2 \int_0^{x^*_{max}} \int_{Z_{op}^* + \frac{x^{*2}}{2\gamma_x}}^{\infty} g(\alpha_a^*)\, f(z^*)\, dz^* dx^* \qquad (1.5.27)$$

上式を *Newton-Raphson* 法で解けば食込み高さ Z_{op}^* が求まる。

ところで, 個々の接触突起の全変形量 α_a と塑性変形量 α_{pa} の間には第1編第1章の式 (1.1.26) と式 (1.1.28) から次式の関係が成立することがわかる。

$$\alpha_{pa}^* = 2D^2 + \alpha_a^* - 2D\,(D^2 + \alpha_a^*)^{0.5} \quad (= G(\alpha_a^*) \text{ とおく}) \qquad (1.5.28)$$

ここで, $D = 8.78\, p_m^* \beta^{*0.35} \gamma_y^{-0.35}$

また, 突起と二次曲面の接触面はだ円形となり, その短径 $2a$, 長径 $2b$ は

$$a^* = (2\beta^* \gamma_y \alpha_{pa}^*)^{\frac{1}{2}} \qquad b^* = (2\alpha_{pa}^*)^{\frac{1}{2}} \gamma_y \qquad (1.5.29)$$

で与えられるため, 一個の接触だ円中の $y \sim y + dy$ 間に作用する負荷 δW_a は次式で表される。

$$\delta W_a^*(y^*) = 2\left\{a^{*2} - \frac{a^{*2}}{b^{*2}} y^{*2}\right\}^{\frac{1}{2}} p_m^*\, dy^* \qquad (1.5.30)$$

式（1.5.28），（1.5.29）から a, b は α_a の関数として表され，それを式（1.5.30）に代入すれば δW_a も α_a で表される。この α_a を確率変数として扱うと，平面と球の接触における接触部のみかけの平均的圧力は次式で与えられる。

$$p^*(x^*, y^*) = 2\beta^{*0.5} p_m^*\, n_p^*\, \gamma_y^{-0.5} \int_{z_{op}+\frac{x^{*2}}{2\gamma_x}}^{\infty} \left\{2\gamma_y^2 G(\alpha_a^*) - y^{*2}\right\}^{\frac{1}{2}} f(z^*)\, dz^* \qquad (1.5.31)$$

これを式（1.5.16）に代入すると球および平面の母材の弾性変形に起因する表面変位分布が求まる。この表面変位による球の平面に対する相対的曲率半径が最初に仮定した $\gamma_x R$, $\gamma_y R$ に一致するまで繰返し計算を行う。その結果，接触状態が定まると食込み位置，近接量が式（1.5.20），（1.5.21）から求まる。

5.2.2.2 除荷過程の接触機構

単一接触突起の変形において，除荷過程における荷重と弾性近接量の関係は負荷過程におけるそれと同じであるため，式（1.1.21），（1.1.26）を用いて次式で表される。

$$W_a^* = \left(\frac{2\pi^2}{78}\right)^2 p_m^{*-1} \alpha_{era}^{*2} R_x^{*-0.2} = \left(\frac{2\pi^2}{78}\right)^2 p_m^{*-1} \alpha_{era}^{*2} \beta^{*-0.2} \gamma_{yr}^{0.2} \quad (= g_r(\alpha_{era}^*) \text{ とおく}) \qquad (1.5.32)$$

ただし，$\alpha_{era}^* = \alpha_{era}/R_y$ で α_{era} は除荷時の接触突起の弾性近接量。

除荷過程においても負荷過程と同様，接触突起の接触面内には一様な圧力が作用すると考えると，同一負荷時における負荷過程と除荷過程の弾性近接量が等しくなるためには，その圧力，接触面形状ともに負荷過程と同一と設定するのが妥当である。以上の設定をもとにして，除荷過程の接触機構を解析する。

いま，図 1.5.2 に示すように最大負荷時に接触高さ Z_{om} の位置にまで食込み，その時の球の相対的曲率半径が $\gamma_x R$, $\gamma_y R$

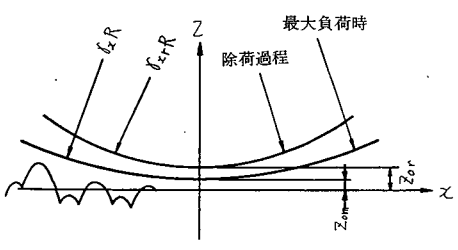


図 1.5.2 除荷過程の接触状態

であったものが除荷過程において球の底の高さが Z_{or} の位置にまで戻り，x, y 方向の球の仮想的相対曲率半径がそれぞれ $\gamma_{xr}R$, $\gamma_{yr}R$ に変化したとすると，式（1.5.27）の代わりに次式が成立する。

$$W^* = 2n_p^* \gamma_{yr}^2 \int_0^{x_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\alpha_{era}^*)\, U(\alpha_{era}^*)\, f(z^*)\, dz^* dx^* \qquad (1.5.33)$$

ここで，

$$U(\alpha_{era}^*) = \begin{cases} 0 : \alpha_{era}^* \leqq 0 \\ 1 : \alpha_{era}^* > 0 \end{cases}$$

ただし，α_{era}^* は負荷過程とは異なり，球と突起の幾何学的交さ量から最大負荷時における塑性変形量を差引いたもので次式で与えられる。

$$\alpha_{era}^* = \frac{z^*}{\gamma_{yr}} - \frac{Z_{or}^*}{\gamma_{yr}} - \frac{x^{*2}}{2\gamma_{xr}\gamma_{yr}} - G\left(\frac{z^*}{\gamma_y} - \frac{Z_{om}^*}{\gamma_y} - \frac{x^{*2}}{2\gamma_x \gamma_y}\right) \qquad (1.5.34)$$

ここで，Gは式（1.5.28）と同一で塑性変位量を表す関数。式（1.5.34）を式（1.5.33）に代入して，この式を満足する食込み高さ Z_{or}^* を求める。つぎに式（1.5.31）に相当するみかけの圧力分布を求めるため，各接触突起の接触面だ円形状を決定する。前述の設定に従い，除荷時の接触面形状を同一負荷における負荷過程時の接触面形状に等しいと考える。除荷過程において式（1.5.34）で求まる弾性変位量を有するような接触状態での相当塑性変位量 α_{pra}^* を求めると，式（1.1.21），（1.1.26）から

$$\alpha_{pra}^* = 2\left(\frac{\pi}{78}\right)^2 p_m^{*-2}\, \alpha_{era}^{*2}\, \beta^{*-0.7}\, \gamma_{yr}^{0.7} \qquad (1.5.35)$$

となる。よって，突起の接触面だ円の短径 a_r^*，長径 b_r^* は次式に式（1.5.35）を代入すれば求まる。

$$a_r^* = (2\alpha_{pra}^* \beta^* \gamma_{yr})^{\frac{1}{2}}, \quad b_r^* = (2\alpha_{pra}^*)^{\frac{1}{2}} \gamma_{yr} \qquad (1.5.36)$$

このように接触だ円が定まると式（1.5.31）と同様にして接触部のみかけの圧力分布が定まる。

$$p^*(x^*, y^*) = 2p_m^* n_p^* \beta^* \gamma_{yr}^{-0.5} \int_{-\infty}^{\infty} \{2\alpha_{pra}^* \gamma_{yr}^2 - y^{*2}\}^{\frac{1}{2}} U(2\alpha_{pra}^* \gamma_{yr}^2 - y^{*2})\, f(z^*)\, dz^* \qquad (1.5.37)$$

式（1.5.37）に式（1.5.35）を代入すると圧力分布が求まり，これを式（1.5.16）に代入すると，球および平面の母材の弾性変位量が求まる。以下，負荷時と同様の手順で繰返し計算を行うと γ_{xr}, γ_{yr} が定まり接触状態が計算できる。

5．3　数値計算結果

5.3.1　突起が弾性変形する場合

(1) 食込み位置，母材の変形量

図 1.5.3 に σ_p^*, W^* と食込み位置 u^* の関係を示す。σ_p^* 大なるほど，また W^* 大なるほど u^*/σ_p^* は低い値を示している。W^* 大なるほど u^* に及ぼす σ_p^* の影響が大になっているのは，W^* 大なるほど式（1.5.20）における母材の弾性変位の項 $w_m(0,0)$ の効果が大になるためである。すなわち，後述するように σ_p^* 大なるほど $w_m(0,0)$ は減少するため，σ_p^* 大なるほど u^* は増加する。σ_p^* 大なるほど式（1.5.20）の Z_{op} は当然増加するため，$w_e(0,0)$ の効果が加わると，σ_p^* の影響が大になる。

n_p^* と u^* の関係を図 1.5.4 に示す。n_p^* 大なるほど u^* も増加し W^* と逆の効果を示す。式（1.5.10）だけから推定すると Z_{op} に及ぼす影響としては W^* と n_p^* は逆比例すると考えられるが図 1.5.4 の u^* は n_p^* より W^* の変化の方に大きく左

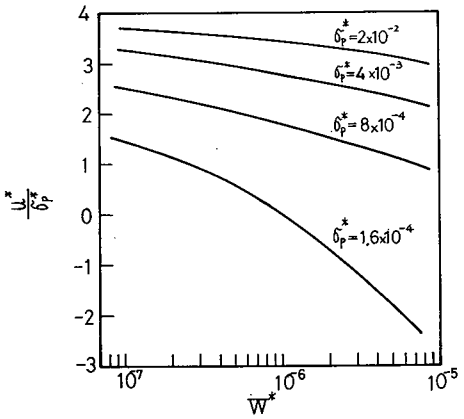


図 1.5.3　W^* と $\frac{u^*}{\sigma_p^*}$ の関係
$n_p^*=300$　$\beta^*=0.02$

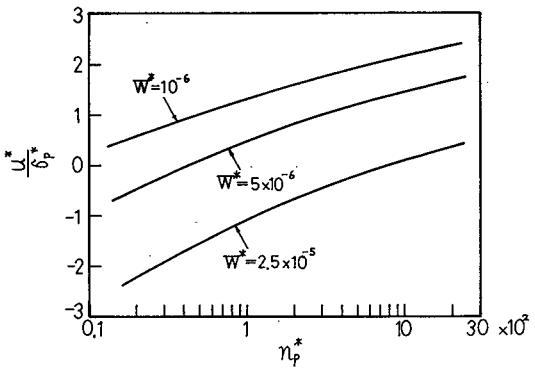


図 1.5.4　n_p^* と $\frac{u^*}{\sigma_p^*}$ の関係
$\beta^*=0.01$　$\sigma_p=8\times10^{-4}$

右される。これはW^*が増加するとZ_{op}が減少すると同時にw_m(0,0)も増加するのに比べ，n_p^*が減少するとZ_{op}は減少するがw_m(0,0)は後述の図1.5.7に見られるようにほとんど変化しないことによる。

図1.5.5にβ^*とu^*の関係を示す。β^*が変化してもu^*はほとんど一定である。以上からu^*に及ぼす影響としてはσ_p^*, W^*, n_p^*, β^*の順に減少することがわかる。

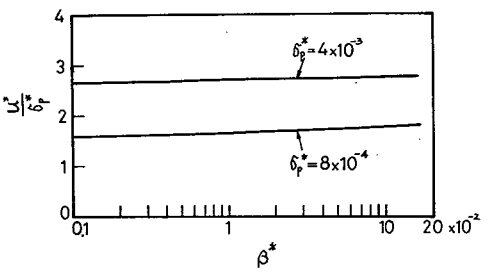


図1.5.5　β^*と$\frac{u^*}{\sigma_p^*}$の関係
$n_p^*=250$　$W^*=10^{-6}$

母材の弾性変形量w_m(0,0)の数値計算結果を図1.5.6，図1.5.7に示す。図1.5.6からw_m(0,0)はσ_p^*大なるほど球と平面の接触におけるヘルツ理論から求めた値（図中の破線）より低くなり，荷重小なるほど両者の比（ヘルツ理論／本理論）は大になる。図1.5.7からw_m(0,0)はβ^*, n_p^*が変化してもほとんど一定に保たれることがわかる。

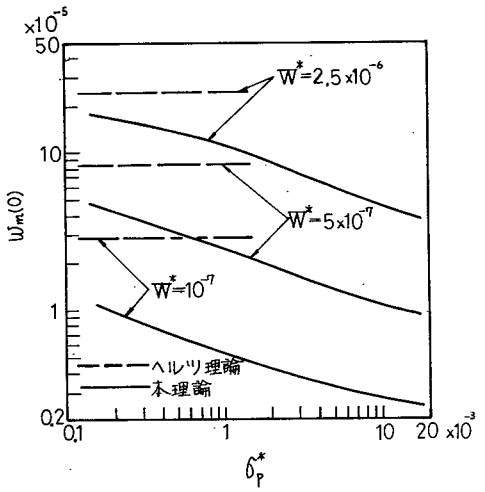


図1.5.6　σ_p^*と母材の弾性変形量の関係
$n_p^*=300$　$\beta^*=0.02$

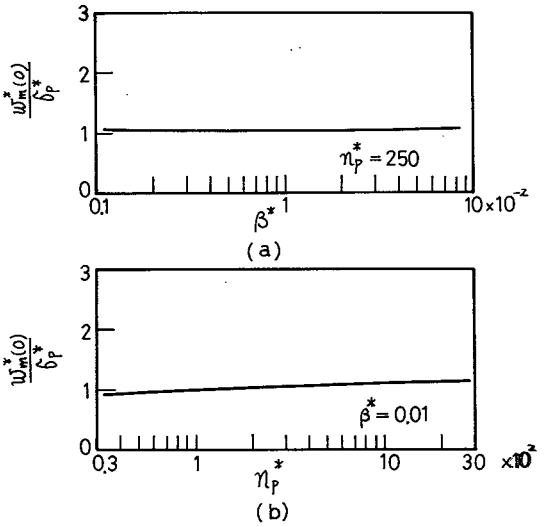


図1.5.7　β^*, n_p^*と母材の弾性変形量の関係
$\sigma_p^*=8\times10^{-4}$　$W^*=2.5\times10^{-5}$

(2) 真実接触面積

真実接触面積A_rに関する数値計算結果を図1.5.8および図1.5.9に示す。

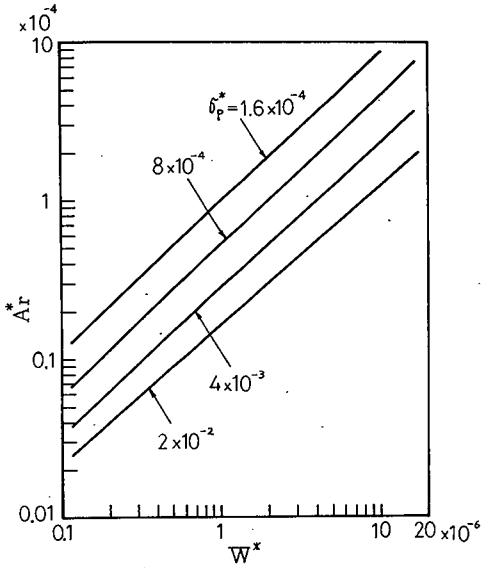


図 1.5.8　W^* と A_r^* の関係
$\beta^* = 0.02$　$n_p^* = 300$

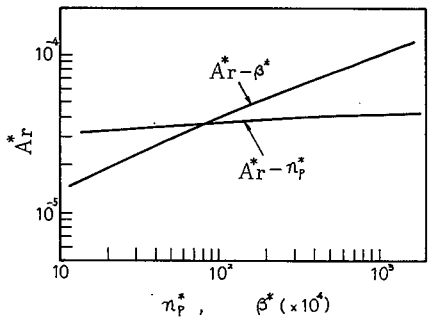


図 1.5.9　n_p^*, β^* と A_r^* の関係
$\sigma_p^* = 8 \times 10^{-4}$　$W^* = 10^{-6}$

図 1.5.8 から真実接触面積は荷重の増大とともにほぼ比例して増加し，逆に σ_p^* の増大につれて減少することがわかる。図 1.5.9 から n_p^*, β^* が増大すると真実接触面積も増加することがわかる。なお，これら 4 種の因子の内では W^* の影響が最も大で，逆に n_p^* の影響はきわめて小である。以上の数値計算結果は次式で近似できる。

$$A_r^* = 4.5\, \sigma_p^{*-0.4}\, \beta^{*0.42}\, n_p^{*0.1}\, W^{*0.95} \qquad (1.5.38)$$

(3) 圧　力　分　布

図 1.5.10 に接触面に作用する圧力分布を示す。表面粗さが大なるほど接触領域が拡がり，逆に圧力が低下することがわかる。また，圧力分布にも方向性が生じ，表面粗さの条痕方向（Y 軸方向）の圧力の方がそれと直角（X 軸方向）の圧力より低い値を示している。この圧

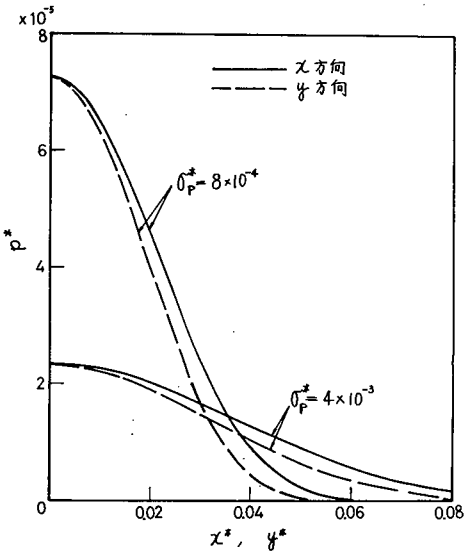


図 1.5.10　接触面圧力分布
$\beta^* = 0.02$　$n_p^* = 250$　$W^* = 5 \times 10^{-6}$

力分布の方向性は第２編第１章に示すように，転がり摩擦力の方向性につながる。

接触面内の最大圧力と表面粗さの性状の関係を図1.5.11，図1.5.12に示す。σ_p大なるほど最大圧力は低下し，β，n_p は最大圧力に大きな影響を及ぼさないことがわかる。このような圧力分布の低下は第１編第４章および本章5.3.2でも示すように，母材内部の分布応力を低下させる。

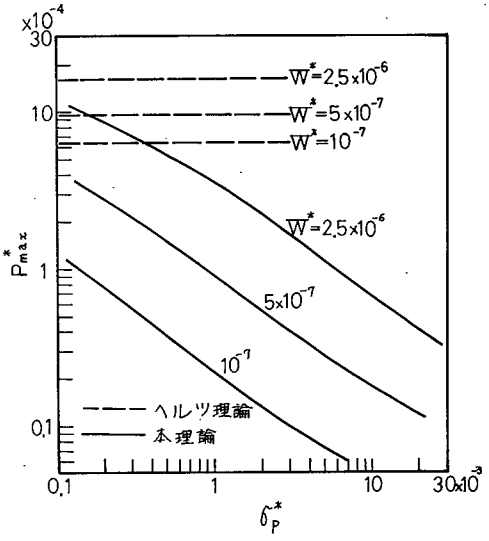


図 1.5.11　σ_p^* と p_{max}^* の関係
$n_p^* = 300$　$\beta^* = 0.02$

ところで，軸受や歯車等の転がり接触部の摩耗の問題において近年表面おうとつの影響について考察を行っている文献[12~16]が数多く見られる。これは材質の向上にともない母材内部の疲労破壊に起因する摩耗が減少し，表面おうとつの影響による摩耗の相対的な割合が増加しているためと考えられる。このような転がり摩耗に及ぼす表面おうとつの影響を考える場合，図1.5.11に見られるように表面粗さが大なるほど接触面のみかけの圧力分布は低下し（それにともなって母材内部のせん断応力が低下する），一方，図1.2.5に見られるように，各接触突起にはなめらかな面どうしの接触の場合に比べ，はるかに高い圧力が作用するという結果は重要な意味を持つ。すなわち，表面粗さが大なる場合，なめらかな面の場合に比べ球および平面の母材内部のせん断応力は低下し，母材の疲労破壊に起因する損耗は生じにくくなる。逆に表面粗さ突起には高い応力が作用するため，突起内部，

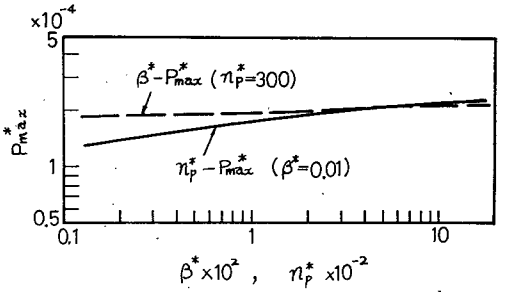


図 1.5.12　β^*, n_p^* と p_{max}^* の関係
$W^* = 10^{-6}$

すなわちきわめて表面近傍からクラックが発生する可能性が高くなる。なお，粗い平面と球の接触において表面粗さ突起内部にきわめて高い応力が発生することが応力凍結法による三次元光弾性実験[17]でも確かめられている。

5.3.2 突起が塑性変形する場合

(1) 食込み位置

図 1.5.13 に σ_p^*, W^* と食込み位置 u^* の関係を示す。σ_p^* 大なるほど，また W^* 小なるほど u^*/σ_p^* は大なる値を示す。また u^*/σ_p^* の値は W^* の影響よりも σ_p^* の影響を強く受けることがわかる。

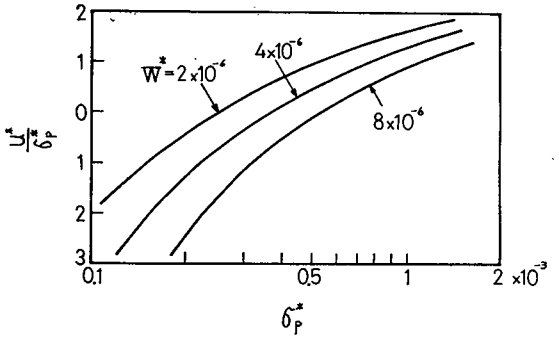


図 1.5.13 σ_p^* と $\frac{u^*}{\sigma_p^*}$ の関係
$\beta^* = 0.02$ $p_m^* = 10^{-2}$
$n_p^* = 400$

図 1.5.14 に p_m^* と u^* の関係を示す。p_m^* 大なるほど突起の塑性近接量は減少するが，突起の弾性近接量および母材の弾性変位量は反対に増加するため，食込み位置はほぼ一定となる。

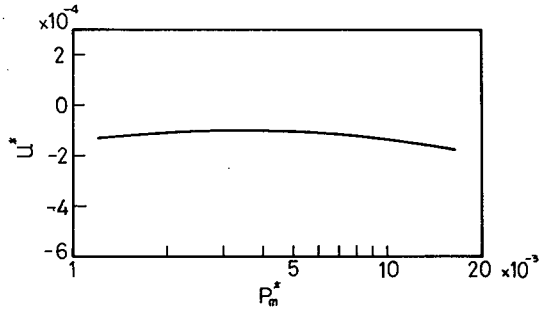


図 1.5.14 p_m^* と u^* の関係
$n_p^* = 330$ $\sigma_p^* = 2 \times 10^{-4}$
$\beta^* = 0.02$ $W^* = 2 \times 10^{-6}$

図 1.5.15 に β^*, n_p^* と u^* の関係を示す。β^* 大なるほど，また n_p^* 小なるほど食込み位置 u^* は低くなる傾向を示してはいるが，β^*, n_p^* の変化に対して u^* は大きな影響は受けていないことがわかる。実際の加工面の表面粗さ曲線をもとにして，ミニコンピータで突起先端曲率半径の平均値を求めると，図 1.5.16 に示すように実測値はかなりばらついており，中心線平均粗さ R_a に対し顕著な傾向は有していない。なお図中の • 印は研摩布仕上面（黄銅板）で，◦印は研削仕上面（鋼板）についての実測値を示す。この図で，$R_a = 0.2 \sim 2\,\mu m$ の範囲内なら $\beta = 0.035\,mm$ で代表させても ±50% 以内に全実測値が入る。β に

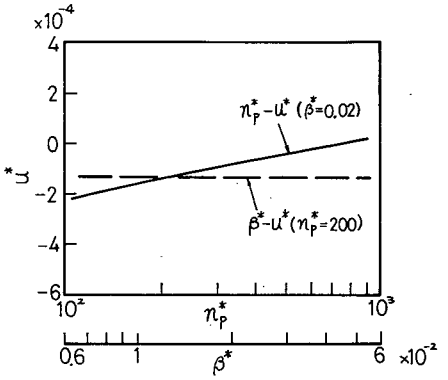


図 1.5.15　n_p^*, β^* と u^* の関係
$\sigma_p^*=2\times10^{-4}$　$p_m^*=7\times10^{-3}$
$W^*=2\times10^{-6}$

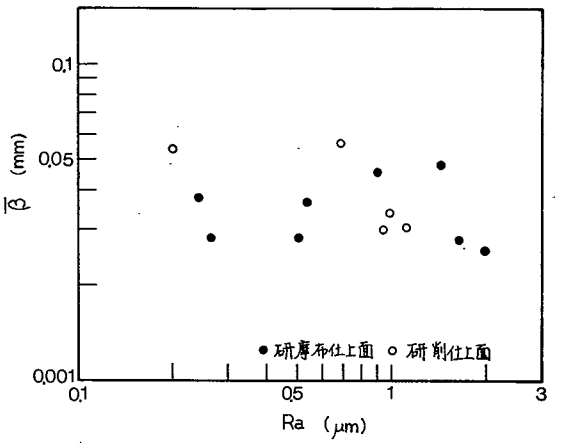


図 1.5.16　R_a と β の関係

おける ±50% 程度の差は図 1.5.15 で検討すると u^* の値には ±10% 程度しか影響を及ぼさないことがわかる。そこで第 1 編第 3 章で示した研摩布仕上面に関する σ_p と n_p の関係 $\sigma_p n_p^2=1.1$ を用い，$\beta=0.035\,mm$ 一定で食込み位置を計算する。なお第 1 編第 3 章図 1.3.14 の n_p の実測値はかなりばらついているが，u^* は図 1.5.15 にみられるように n_p^* の変化に対しほとんど影響を受けないため，上述の近似で十分である。

計算結果を図 1.5.17 に示す。図中，縦軸，横軸を中心線平均粗さ R_a で整理し直しており，u が突起頂点平均高さを基準としての食込み位置であるのに対し，u' は表面粗さ曲線の中心線を基準にしている。すなわち，第 3 章式 (1.3.26)，(1.3.27) および次式 (1.5.39) を用いて求めた式 (1.5.40) から u' を計算した。

$$\sigma_s = 1.25\,R_a \qquad (1.5.39)$$

$$\frac{u'}{R_a} = 1.08\left(\frac{u}{\sigma_p}+1\right) \qquad (1.5.40)$$

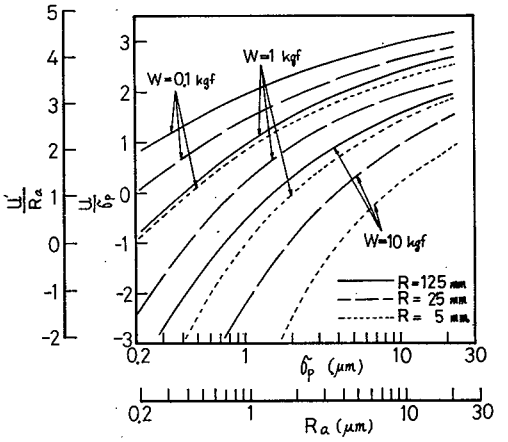


図 1.5.17　σ_p, R_a と食込み位置の関係
$\sigma_p n_p^2=1.1\,mm^{-1}$　$\beta=0.035mm$
$p_m=500\,kgf/mm^2$
$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

この図から R_a，R 大なるほど，また W 小なるほど u/R_a は増加し，この3種の因子のうち R_a の影響が最も大で，R および $1/W$ は同程度の影響を u に及ぼすことがわかる。なお，以下の数値計算では鋼球と鋼板の接触を想定している。

(2) 接触点の数

図 1.5.18 に平均接触点数の計算結果を示す。σ_p 小なるほど，また W 大なるほど平均接触点数は増加する。σ_p が大で W 小なる場合，接触点の数が数個，極端な場合には接触点が1以下になる。このように接触点の数が少ない場合には式 (1.5.21) で示したような近接量は意味を持たなくなる。なお，この問題に関しては本章 5.5.3 で考察を行う。

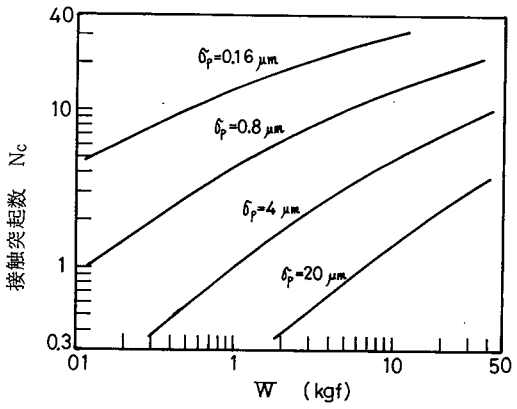


図 1.5.18 荷重と接触突起数の関係
$R=5\,mm$ $n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}mm^{-1}$
$\beta=0.035\,mm$ $p_m=250\,kgf/mm^2$

(3) 弾性回復量

除荷過程の数値計算結果の一例を図 1.5.19 に示す。図は最大負荷 1 kgf まで作用させたのち，荷重を半分にまで除荷した場合の突起および母材の弾性回復による近接量の回復を計算したものである。σ_p が大になると母材の弾性回復量は減少するが，それ以上に突起の回復量が増加するため全体としては回復量は増加する。

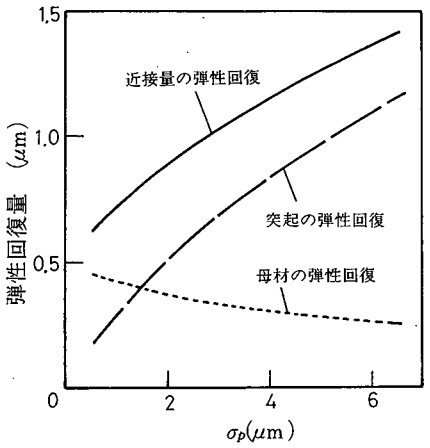


図 1.5.19 母材と突起の弾性回復
$\sigma_p n_p^2=1.1\,mm^{-1}$ $W_{max}=1\,kgf$
$\beta=0.1\,mm$ $W=0.5\,kgf$
$p_m=500\,kgf/mm^2$
$R=5\,mm$

5・4 実　　験

前述の理論の妥当性を検討するため近接量について実測値と理論値の比較を行

う。なお，実験方法，実験装置は第１編第１章の 1.3.1 と同一である。

5.4.1　突起が弾性変形する場合

試験球としては 4.4.2 と同一のプラスチックボールを用い，平板試験片としては研摩布仕上げによる種々の表面粗さを有する鋼板を用いる。

測定結果を図 1.5.20 ～ 図 1.5.24 に示す。

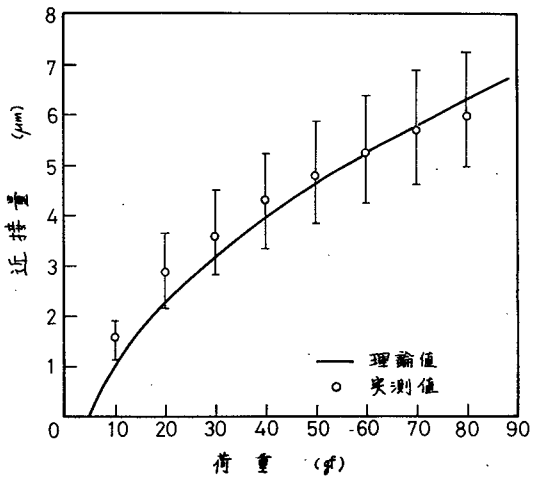


図 1.5.20　荷重と近接量の関係
R_a=0.8 μm　R＝5 mm
E＝100 kgf/mm^2

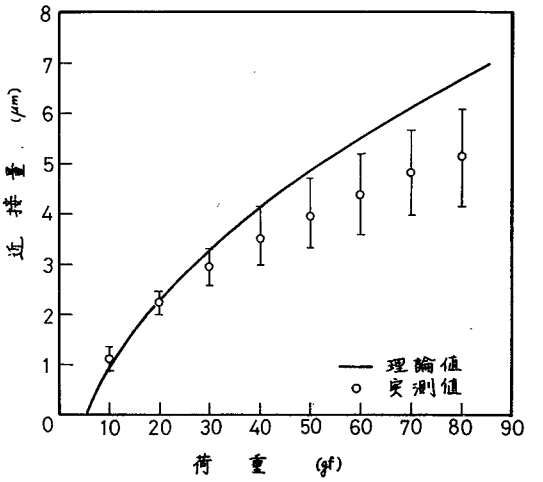


図 1.5.21　荷重と近接量の関係
R_a=1.0 μm　R＝5 mm
E＝100 kgf/mm^2

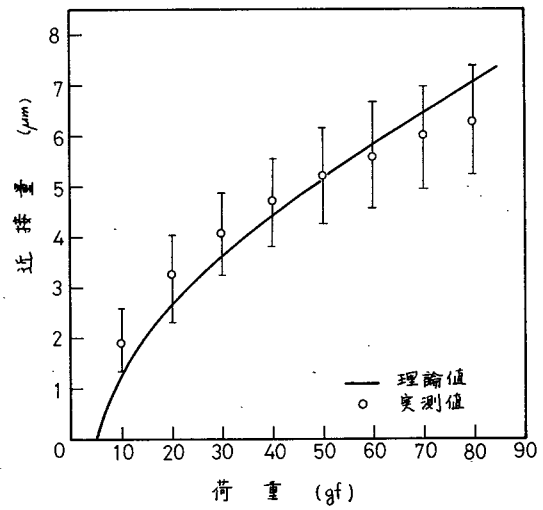


図 1.5.22　荷重と近接量の関係
R_a=1.3 μm　R＝5 mm
E＝100 kgf/mm^2

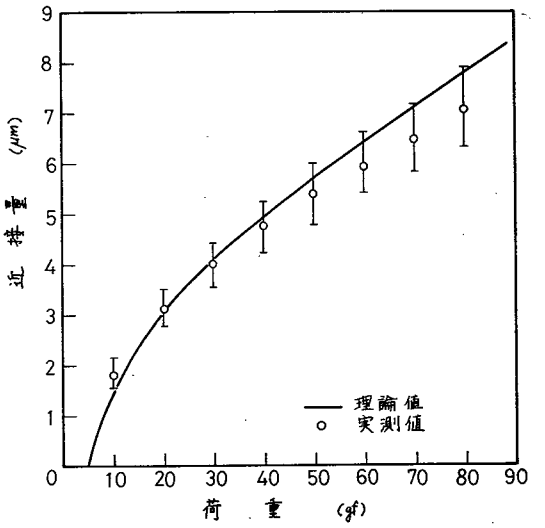


図 1.5.23　荷重と近接量の関係
R_a=1.5 μm　R＝5 mm
E＝100 kgf/mm^2

いずれの図も理論と実験結果の絶対値はかなり良好な一致を示しているが，荷重の増加に対する近接量の増加増合を見ると，実測値は理論値より少し低い傾向が見られる。これはプラスチックボールの粘弾性効果が生じたためと考えられる。球となめらかな平面間の接触では図 1.4.18 のようにこの効果がわずかしか表れていなかったが，図 1.5.20 ～ 図 1.5.24 の場合には接触突起部が図 1.4.18 より高ひずみの接触状態になっているため，この効果が大きく表れたものと思われる。

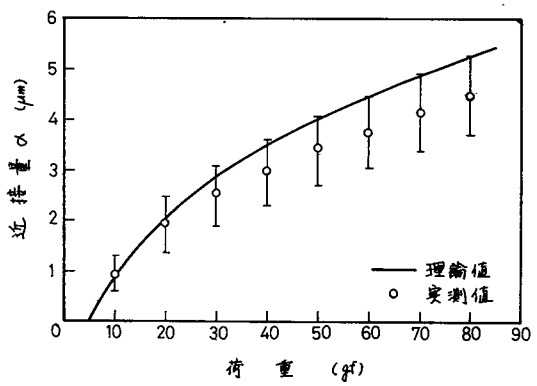


図 1.5.24 荷重と近接量の関係
$R_a = 0.55\,\mu m$ $R = 5\,mm$

5.4.2 突起が塑性変形する場合

試験球は前章 4.4.1 と同一で，平板試験片は $S35C$ を研摩布仕上げしたものを用いる。なお平板試験片のマイクロビッカース硬さ（$50\,gf$）は $H_v = 250$

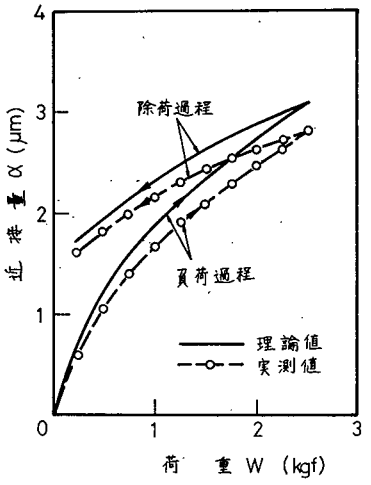


図 1.5.25 押付け実験による履歴曲線
$\sigma_p = 0.9\,\mu m$ $R = 5\,mm$
$\beta = 0.02mm$ $p_m = 250\,kgf/mm^2$
$n_p = 34\,mm^{-1}$

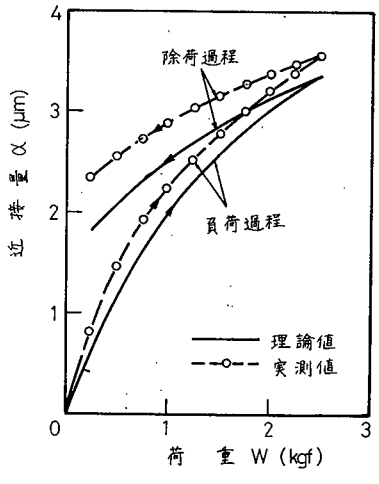


図 1.5.26 押付け実験による履歴曲線
$\sigma_p = 1.4\,\mu m$ $R = 5\,mm$
$\beta = 0.04mm$ $p_m = 250\,kgf/mm^2$
$n_p = 24\,mm^{-1}$

である。図 1.5.25，図 1.5.26 に実験結果と理論値を示す。丸印の実測値は 5 回の測定の平均値，すなわち 10 箇所の接触における平均値を表す。いずれの結果も負荷過程，除荷過程ともに理論値と実測値のかなりの一致をみており，本理論の妥当性が確かめられたものと考えられる。

5.5 考　　察

突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行ったが，この両者の理論の選択基準，母材の変形を常に弾性変形として解析したことによる本理論の適用限界，Z_{op} を確定量として扱う場合とランダム量として扱う場合の相違，以上の 3 点について考察を試みる。

5.5.1 突起の変形形態に関する判定基準

前章 4.5.1 では *Greenwood* 理論との対比という形で大まかな検討を行っただけであるので，ここでは詳細に検討を試みる。

塑性指標を決定する基準としては，真実接触面積中に占める塑性変形部の接触面積の割合を基準とする考え方と，全負荷中に占める塑性接触突起の負荷の割合を基準とする二通りの考え方がある。第 1 編第 4 章で示したような面積比を基準とする方式は接触理論を接触電気抵抗，熱伝導，摩耗等の問題に適用する場合のように接触面積が重要な意味を持つ場合には適しているが。食込み位置，近接量，および第 2 編で取扱う転がり摩擦力等の問題を解析するには，荷重比を基準に考える方式の方が適している。ここでは，塑性変形突起と弾性変形突起とが混在している状態における接触変形の解析を行い，全塑性変形突起および全弾性変形突起それぞれで受けもつ荷重の比を求める。そしてその結果をもとに，荷重比を基準にした塑性指標を決定する。

また，*Greenwood* の *plasticity index*[18] と比較するため面積比の観点からみた塑性指標についての解析も試みる。

接触突起内部の最大せん断応力を τ_{max} とすると，τ_{max} は弾性理論から求めう

るが比較的面倒な計算を要す。しかし，これについては既に数値計算結果[19]（図 1.5.27）が示されており，この結果を次式で近似する。

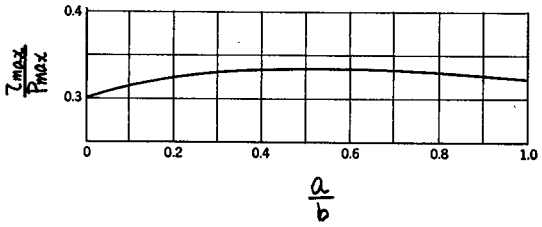


図 1.5.27　$\frac{a}{b}$ と $\frac{\tau_{max}}{p_{max}}$ の関係

$$0 < \frac{a}{b} \leqq 0.6$$

$$\frac{\tau_{max}}{p_{max}} = -0.2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.17\left(\frac{a}{b}\right) + 0.3 \qquad (1.5.41)$$

ここで $2a$，$2b$ は各接触突起の接触面で形成されるだ円の短径と長径。p_{max} はだ円面上の分布圧力の最大値で次式で求まる。

$$p_{max} = \frac{3W_a}{2\pi ab} \qquad (1.5.42)$$

W_a：単一接触突起に作用する荷重

式（1.5.26）を用いると W_a は突起の近接量 α_a の関数として表され，a b も式（1.5.29）に示すように球の半径 R，突起の半径 β，および α_a で表されるため p_{max} はこれらの変数の関数となる。また，a/b も式（1.1.8）を用いると媒介変数 k で表されるが，この k は式（1.1.11）および式（1.1.12）から明らかなように接触 2 物体の幾何学的形状（すなわち $\gamma_x R$，$\gamma_y R$，β）と弾性定数 E の関数である。それらの関数を式（1.5.41）に代入すると τ_{max} と α_a の関係は次式で表される。

$$\tau_{max} = 1.5\{-0.2(1-k^2) + 0.17(1-k^2)^{\frac{1}{2}} + 0.3\} Q_a A_s^{-1} \alpha_a^{\frac{1}{2}}$$
$$= T_\tau(\gamma_x R, \gamma_y R, \beta, E)\, \alpha_a^{\frac{1}{2}} \quad \text{とおく} \qquad (1.5.43)$$

ここで

T_τ：k，Q_a，A_s^{-1} の関数，すなわち $\gamma_x R$，$\gamma_y R$，β，E の関数

いま

$$\tau_{max} \geqq k_c p_m \qquad (1.5.44)$$

のとき突起は塑性変形すると仮定すると，そのときの突起の近接量 α_{cr}（臨界近接量と呼ぶ）は式（1.5.43）および式（1.5.44）を用いると次式で与えられる。

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{k_c\, p_m}{T_\tau}\right)^2 \qquad (1.5.45)$$

(1) 荷重比基準　方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触において，塑性接触状態にある突起が受け持つ全荷重 W_p と弾性接触状態にある突起が受け持つ全荷重 W_e の割合を式（1.5.44）を用いて求める。

解析手順はこれまでの解析と同一のため概略だけ示す。

いま，母材の弾性変形後の平面に対する球の相対的曲率半径を $\gamma_x R$，$\gamma_y R$ とし，球が表面粗さ突起頂点の平均高さを基準高さとして Z_{op} の位置まで食込んだ場合，平面が支える荷重の期待値は次式で与えられる。

$$W = 2Q_a n_p \int_0^{x_{max}} \int_{h(x,z_{op})}^{h(x,z_{op})+\alpha_{cr}} \{z - h(x,z_{op})\}^{\frac{3}{2}} f(z)\, dz\, dx$$
$$+ 2ER^2 n_p \int_0^{x_{max}} \int_{h(x,z_{op})+\alpha_{cr}}^{z_{max}} g\{z - h(x,z_{op}), p_m, \beta, E, \gamma_x R, \gamma_y R\} f(z)\, dz dx$$
$$= W_e + W_p \qquad (1.5.46)$$

ただし

$$h(x) = Z_{op} + \frac{x^2}{2R\gamma_x}$$

第1項は弾性変形突起で受けもつ荷重で，第2項は塑性変形突起で受けもつ荷重を表す。なお関数 g は式（1.5.26）と同一であり，Q_a は式（1.5.9）と同一である。

式（1.5.46）を満足するような Z_{op} を求めると圧力分布は次式で求まる。

$$p(x,y) = \frac{3n_p}{4K^3} \int_h^{h+\alpha_{cr}} \{K^2 Q_a^{\frac{2}{3}}(z-h) - y^2\} f(z)\, dz$$
$$+ 2\frac{p_m \beta^{0.5} n_p}{\gamma_y^{0.5} R^{1.5}} \int_{h+\alpha_{cr}}^{z_{max}} \{2\gamma_y^2 R^2 G\left(\frac{\alpha_a}{R}\right) - y^2\}^{\frac{1}{2}} f(z)\, dz \qquad (1.5.47)$$

圧力分布が求まると，母材の弾性変形による表面の弾性変位分布が求まり，この変位分布が接触条件を満足するまで γ_x，γ_y を変化させて繰り返し計算を行えばよい。このようにして求めた γ_x，γ_y を式（1.5.46）に代入して W_p，W_e を計算し，両者の比 R_W（$= W_p/W_e$）を求めた結果の数例を図 1.5.28，図 1.5.29，図 1.5.30 に示す。なお，これらの図は図 1.5.30 の一部以外は $k_c = \frac{1}{6}$ として計算したもの

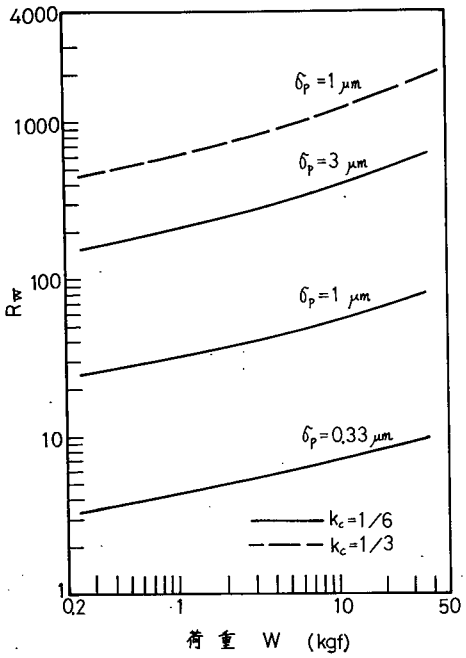


図 1.5.28　荷重と荷重分担比の関係

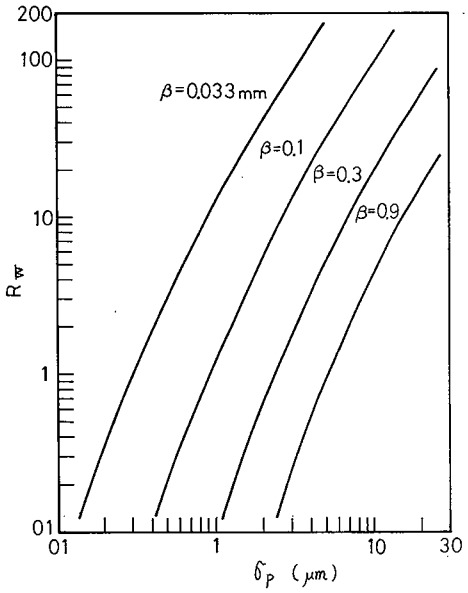


図 1.5.29　σ_p と荷重分担比の関係
R＝5mm　p_m＝1000kgf/mm^2
$\sigma_p n_p^2$＝1.1 mm^{-1}　K_c＝1/6

である。以上の図から R_W に及ぼす影響としては p_m, σ_p, β の影響が大で，n_p, W はあまり影響を及ぼさないことがわかる。また p_m, β 大なるほど R_W が小で，σ_p 大なるほど R_W が大になることがわかる。この他，n_p や k の値を変化させた場合についても R_W を求め，それらの結果を総合すると

$$\sigma_p^{*0.5}\beta^{*-0.5}n_p^{*-0.1}p_m^{*-1.25}W^{*0.05}=33.4R_W^{0.2}k_c \qquad (1.5.48)$$

なる近似式が下記の領域内では ±15％ 以内の誤差で成立することがわかる。

$$\sigma_p^* n_p^{*2}=2.75\sim11.0 \qquad W^*=10^{-10}\sim10^{-7}$$
$$\sigma_p^*=10^{-5}\sim10^{-3} \qquad \beta^*=5\times10^{-3}\sim2\times10^{-1}$$
$$p_m^*=3\times10^{-3}\sim10^{-2} \qquad R_W=0.1\sim10$$
$$k_c=\frac{1}{6}\sim\frac{1}{2} \qquad (1.5.49)$$

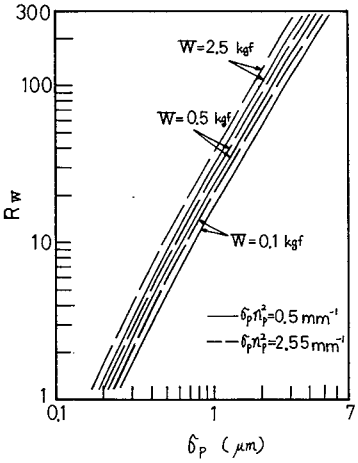


図 1.5.30　σ_p と R_W の関係
β＝0.1 mm　R＝5mm
p_m＝500kgf/mm^2　k_c＝1/6
E_1＝E_2＝21000 kgf/mm^2

つぎに k_c を決定する。*D. Tabor*[20] によるとなめらかな平面と球の接触では内部の最大せん断応力がトレスカの降伏条件

$$\tau_{max} = 0.5\,Y \qquad Y：材料の降伏応力 \tag{1.5.50}$$

を超えると接触突起の内部で塑性変形が開始し，そのとき接触面の平均面圧 P_{av} は

$$P_{av} = 1.1\,Y \tag{1.5.51}$$

となり，さらに荷重を増加させ平均面圧が

$$P_{av} = 3\,Y \tag{1.5.52}$$

になると塑性変形は接触域全域に拡がることが明らかになっている[20]。

この式（1.5.52）の時点での P_{av} は材料の流れ圧力 p_m に等しいので，結局

$$\tau_{max} = \frac{1}{6}\,p_m \tag{1.5.53}$$

のとき塑性変形開始し，

$$\tau_{max} = 0.45\,p_m \tag{1.5.54}$$

のとき完全な塑性変形状態になる。そこで k_c の値としてはこの中間の

$$k_c = 0.3 \tag{1.5.55}$$

にとる。塑性変形突起で主たる荷重を支える状態として，

$$R_W \geqq 10 \tag{1.5.56}$$

反対に弾性変形突起で主たる荷重を支える状態として，

$$R_W \leqq 0.1 \tag{1.5.57}$$

と定義すると式（1.5.48），（1.5.55），（1.5.56），（1.5.57）から接触状態の区分条件として次式が得られる。なお，式（1.5.48）の左辺を φ_W とおく。

塑性接触状態（$R_W \geqq 10$）

$$\varphi_W = \sigma_p^{*0.5}\,\beta^{*-0.5}\,p_m^{*-1.25}\,n_p^{*-0.1}\,W^{*0.05} \geqq 15.9 \tag{1.5.58}$$

弾性接触状態（$R_W \leqq 0.1$）

$$\varphi_W \leqq 6.3 \qquad (1.5.59)$$

いま一例として下記の接触条件で

$$\begin{pmatrix} \sigma_p = 1\ \mu m & E_1 = E_2 = 21000\ kgf \cdot mm^{-2} \\ n_p = 33\ mm^{-1} & \nu_1 = \nu_2 = 0.3 \\ \beta = 0.05\ mm & W = 1\ kgf \qquad p_m = 500\ kgf \cdot mm^{-2} \end{pmatrix}$$

式（1.5.48）の左辺を計算すると φ_W は 22 となり塑性接触していることがわかる。なお第1編第4章，第2編第1章中，塑性接触理論の検証実験に用いた試料はすべて式（1.5.58）の塑性接触条件を満足していることが確認できる。

また，式（1.5.58），（1.5.59）を *Greenwood* の理論[18]の *plasticity index* φ_p と同一の式に書き改めると

$$\varphi_s = \left(\frac{\sigma_p}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E}{2p_m} = \frac{33.4}{2\pi}\, p_m^{*0.25}\, n_p^{*0.1}\, W^{*-0.05}\, R_W^{0.2}\, k_c \qquad (1.5.59)$$

ここで φ_s は球と平面の接触における塑性指標。

p_m^*，n_p^*，W^* として前述の計算例を用いると接触状態の区分条件は下記のように表される。

塑性接触状態（$R_W \geqq 10$）　　$\varphi_s \geqq 3.0$

弾性接触状態（$R_W \leqq 0.1$）　　$\varphi_s \leqq 1.2$　　(1.5.60)

なお，式（1.5.59）の右辺は p_m^*，n_p^*，W^* の関数ではあるが指数部が小なるため，式（1.5.60）の関係は一般の接触条件についても近似的に成立すると考えられる。

(2) 面積比基準　　弾性接触状態における真実接触面積は式（1.5.38）で表される。一方，全接触突起の内の一部が塑性変形し，その接触面積を A_p^*，塑性変形部で支える荷重を W_p^* とすると幾何学的考察により次式が成立する。

$$A_p^* = \frac{W_p^*}{p_m^* \pi} \qquad (1.5.61)$$

いま，無次元化表示した全接触面積を A_r^* とし，

$$\frac{A_p^*}{A_r^*} \fallingdotseq \frac{A_p^*}{A_e^*} = R_A \qquad (1.5.62)$$

とおくと式(1.5.38)，(1.5.61)，(1.5.62) から

$$R_A^{1.25} = 0.0365\,\sigma_p^{*0.5}\,\beta^{*-0.52}\,n_p^{-0.12}\,p_m^{*-1.25}\,W^{*0.062}\left(\frac{R_W}{1+R_W}\right)^{1.25} \qquad (1.5.63)$$

上式が求まる。この式の右辺に式(1.5.48) を代入すると，

$$R_A^{1.25} = 1.22\,R_W^{0.2}\,k_c\left(\frac{R_W}{1+R_W}\right)^{1.25} B_R \qquad (1.5.64)$$

ただし

$$B_R = \beta^{*-0.025}\,n_p^{*-0.025}\,W^{*0.012}$$

ここで k_c は式(1.5.55) 同様 0.3 にとる。B_R は β^*, n_p^*, W^* が変化してもほぼ一定であるので β^*, n_p^*, W^* の値としてそれぞれ式(1.5.49) に示した領域の中間の値で代表させて，これらの値を式(1.5.64) に代入すると図 1.5.31 に示すような R_W と R_A の関係が求まる。ただし，前述の計算には塑性変形突起が存在している状態にもかかわらず，全接触面積を弾性接触理論から推定するという便法を用いているため，図中 R_W 大なる領域では R_W に対する R_A の値が実際より小なる値になっている。

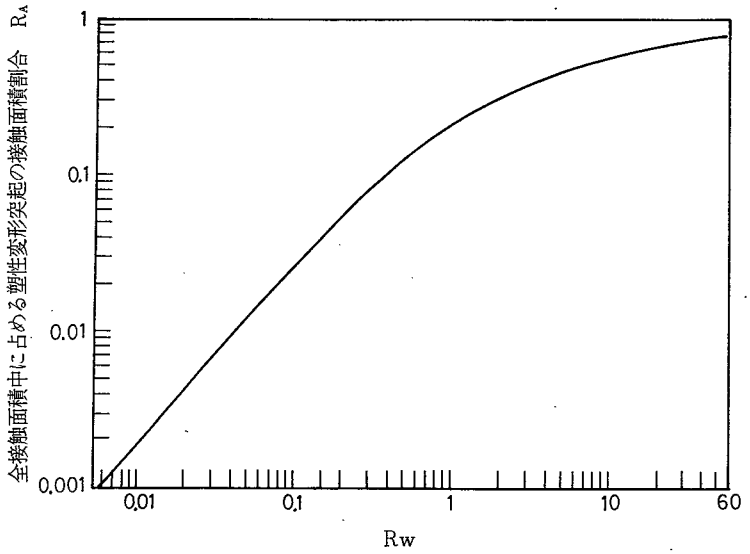


図 1.5.31　R_W と R_A の関係

5.5.2　母材の塑性変形開始条件について

前章 4.5.2 と同様の解析で母材内部の最大せん断応力を求める。すなわち式（1.4.42）と式（1.4.43）に式（1.5.15），あるいは式（1.5.31）の圧力分布を代入すると τ_{max} が求まる。ただし，方向性のある面の場合には接触圧力分布も方向性を有するが，相当圧力として x 方向と y 方向の 2 方向圧力の平均値で代表させそれを用いて τ_{max} を概算する。

図 1.5.32 に突起が弾性変形する場合の最大せん断応力を示す。表面粗さが大なるほど τ_{max} が低下し，粗さが小になるにつれヘルツ理論から求めた τ_{max} の値に近づくのは前章 4.5.2 と同様の傾向である。ところで本章 5.5.1 の考察を用いて，大半の接触突起の変形が弾性接触と考えられる臨界の流れ圧力 p_{mc} を求めてみる。式（1.5.48）と式（1.5.59）を用いると p_{mc} は次式で求まる。

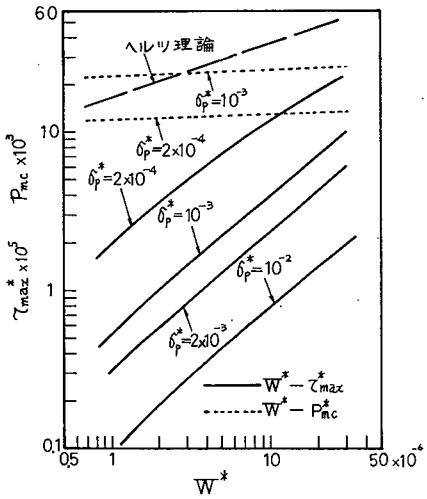


図 1.5.32　W^* と τ_{max} の関係
$\beta^*=0.02$　$n_p^*=300$

$$p_{mc}^* = 0.23\,\sigma_p^{*0.4}\,\beta^{*-0.4}\,n_p^{*-0.08}\,W^{*0.04} \qquad (1.5.65)$$

上式の計算結果の一例を図 1.5.32 に点線で示す。p_{mc}^* と τ_{max}^* を比べると p_{mc}^* は τ_{max}^* より 2 桁程度高い値になることがわかる。材質が均質な場合には式（1.5.53）から推定されるように，材料のせん断降伏応力は $\frac{1}{6}\,p_m$ と考えられるが，一般の機械加工面は加工硬化のため表面層の p_m が母材のそれよりかなり大になっている。これを考慮に入れてかりに材断のせん断応力を $\frac{1}{10}\,p_m$ と考えても，母材の塑性変形開始条件よりも突起の塑性変形開始条件の方が p_m に関しては 1 桁近く厳しいことになり，突起の弾性接触状態で母材が塑性変形することはほとんど考慮する必要がないことがわかる。

図 1.5.33 ～ 図 1.5.35 に突起が塑性変形する場合の最大せん断応力 τ_{max} と，それが生じる深さ h_τ に関する計算結果を示す。

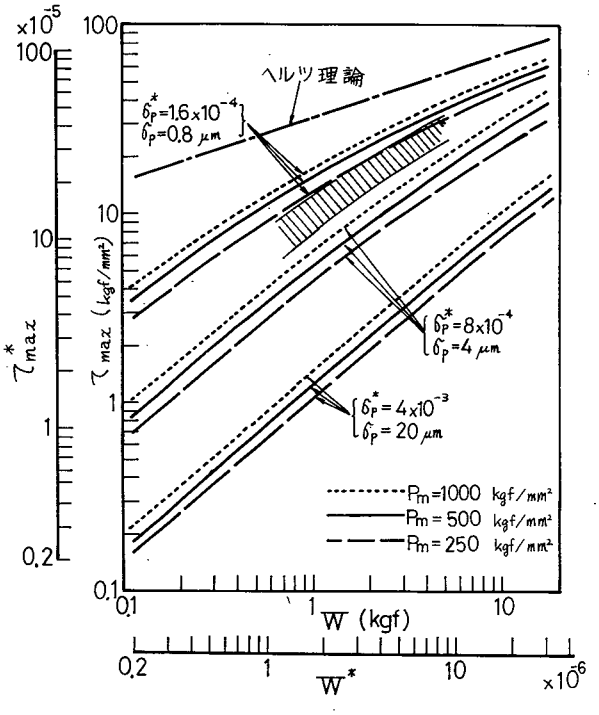


図 1.5.33　W と τ_{max} の関係
$\beta=0.05$ mm　R=5 mm
$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}$ mm^{-1}

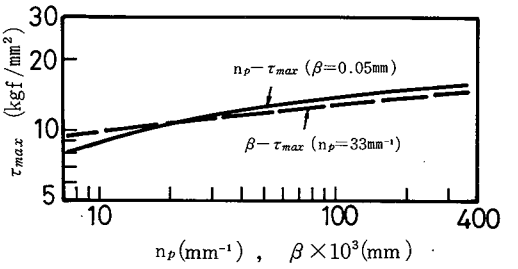


図 1.5.34　n_p，β と τ_{max} の関係
$\sigma_p=1\ \mu$m　W=1 kgf
p_m=250kgf/mm²　R=5 mm

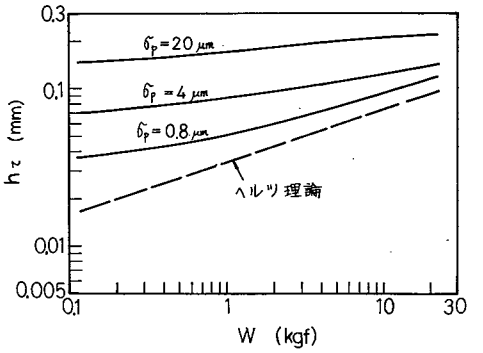


図 1.5.35　最大せん断応力が生じる深さ
$\sigma_p\ n_p^2=1.1$ mm^{-1}　$\beta=0.05$ mm
p_m=250kgf/mm²　R=5 mm

定性的には弾性接触の場合と同様で，σ_p 大なるほど τ_{max} は低下する。また，p_m，n_p，β 小なるほど τ_{max} も低下するが，これらの因子の影響は σ_p のそれに比べかなり小さいことがわかる。

母材の変形を弾性変形と想定している本理論の適用範囲は 4.5.2 で述べたように図 1.5.33 の τ_{max} が材料の降伏せん断応力の約 2 倍を超えない範囲と考えられる。なお，図 1.5.25，図 1.5.26 の実験については，実験条件が図 1.5.33 の斜線内にあり母材の塑性変形は無視できると思われる。

5.5.3　Zop が確定量の場合とランダム量の場合との相違

前章 4.5.4 と同様，本理論のように Z_{op} を確定量として扱う場合と，近接量測定実験に見られるように Z_{op} がランダム量である場合とで荷重と接触高さの間の関係に生じる相違を検討する。

Z_{op} をランダム量とする場合の $\overline{Z}_{op}$ と W の関係を求めるシミュレーション計算手順は図 1.3.30 と同一で，Z_{op} を確定量とする場合の Z_{op} と $\overline{W}$ の関係を求める計算手順は図 1.3.30 の内側ループのかわりに，単に各接触突起に作用する荷重の総和（ΣW_a）を求める式が入ったものになる。

(1) 突起が弾性変形する場合

W と $\overline{Z}_{op}/\sigma_p$ の関係および $\overline{W}$ と Z_{op}/σ_p の関係についての数値計算結果を図 1.5.36 に示す。荷重大なる領域では $\overline{Z}_{op}$ と Z_{op} とはほぼ一致しているが荷重小なる領域では Z_{op} が $\overline{Z}_{op}$ より大になり，荷重小なるほど両者の差は大になる。この傾向は前章 4.5.4 にも見られたが定性的には以下のように理解できる。

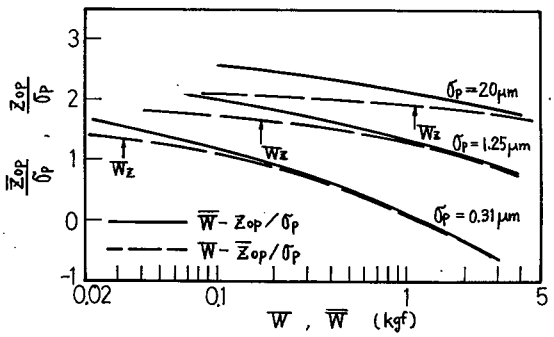


図 1.5.36　Z_{op} がランダム量の場合と
Z_{op} が確定量の場合の比較
β=0.1mm　R=5mm　n_p=120 mm^{-1}
E_1=E_2=21000 kgf/mm^2

$\overline{W}$ を求める計算は式（1.5.10）に見られるように，個々の突起に作用するランダムな負荷の和の分布の期待値を求めていることになる。荷重大なるほど接触突起数が増えるため大数定理よりランダム変数の和の分布の分散は減少する。すなわち，任意の Z_{op} に対し W はほぼ一定になり，W を確定量（Z_{op} をランダム量）とする場合と W をランダム量（Z_{op} を確定量）とする場合の差が少なくなる。

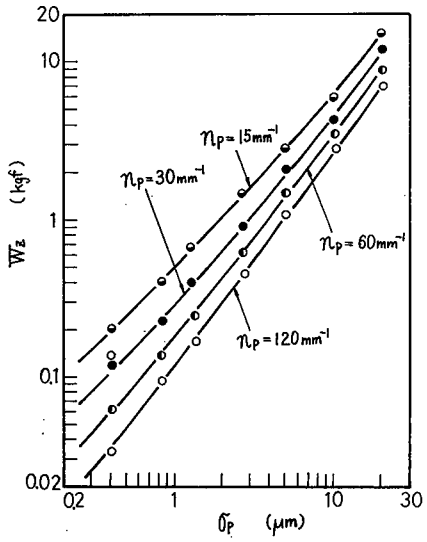


図 1.5.37　σ_p と W_z の関係
β=0.1 mm　R=5 mm
E_1=E_2=21000 kgf/mm^2

いま，同一荷重時における Z_{op} と $\overline{Z}_{op}$ の差が $0.2\sigma_p$ 以下の場合に $\overline{Z}_{op}$ を Z_{op} で近似できるものとし，その臨界荷重 W_z を図 1.5.36 の

ように各種接触条件について求めた。その結果を図 1.5.37 に示す。

σ_p 大なるほど n_p 小なるほど W_z は増加している。また，β と W_z の関係は図中に示していないが W_z は $\beta^{\frac{1}{2}}$ にほぼ比例する。

5.4.1 の近接量測定実験の場合，図 1.5.20 ～ 図 1.5.24 における荷重 0.1 kgf が図 1.5.37 の約 23 kgf に相当するため，実験荷重は W_z より大なる領域が大半を占め実験と理論の設定の相違はほとんど問題にしなくてよい。

(2) 突起が塑性変形する場合

この場合も，接触突起の近接量と荷重の関係式が異なるだけで弾性接触の場合と同様の手順で W_z が求まる。その結果を図 1.5.38 に示す。σ_p 大なるほど，また p_m や β が大なるほど W_z も大になる傾向が見られる。なお，これらの因子のうち p_m，β の W_z に及ぼす影響は比較的小さく，W_z はほとんど σ_p で決定されることがわかる。

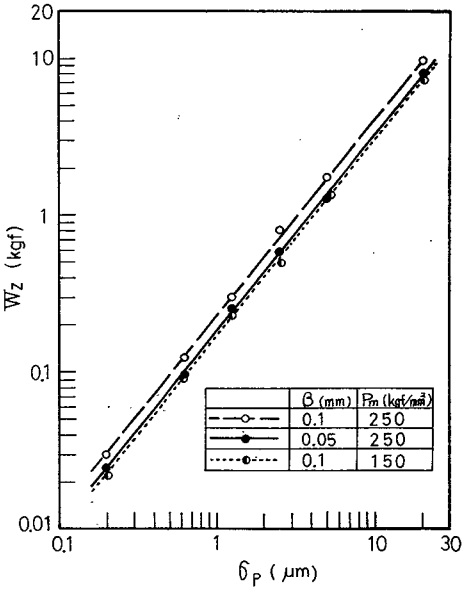


図 1.5.38 σ_p と W_z の関係
$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}\,mm^{-1}$ $R=5$ mm
$E_1=E_2=21000\,kgf/mm^2$

近接量測定実験についても図 1.5.25，図 1.5.26 における荷重条件のほとんどが図 1.5.38 の W_z より大なるため，Z_{op} の設定の相違は近接量にほとんど影響を及ぼさないと考えられる。

5・6 結　　言

一方向に方向性があり，頂点高さがランダムであるような表面粗さを有する平面と球の接触変形問題について，第 1 編第 1 章で示した単一突起の変形の解析結果と第 1 編第 4 章で検討した母材の変形の 2 次曲面近似解法を用いて解析を試みた。

突起の変形としてはこれまで同様，突起が塑性変形する場合と弾性変形する場合に分けて扱い，突起が塑性変形する場合には負荷過程のみならず，転がり接触を考えるための基礎として除荷過程についても解析を試みた。

これらの数値計算結果と近接量測定結果との比較により，理論の妥当性が確かめられたほか，以下のことが明らかになった。

1）突起が弾性変形する場合

食込み位置，真実接触面積，圧力分布等が理論的に推定でき，これらの諸量は突起頂点高さの標準偏差σ_pの値に最も大きく左右され，σ_p大なるほど食込み位置は高くなり，真実接触面積および最大圧力は減少する。

2）突起が塑性変形する場合

材料の流れ圧力や突起の曲率半径等が食込み位置に及ぼす影響はこれらが突起の塑性および弾性変形量に及ぼす影響が相殺されることによりかなり小さくなり，食込み位置はσ_p，荷重，球の半径だけでほぼ決定される。

3）除荷過程の接触変形についてはσ_pが大なるほど母材の弾性回復量は減少するが，それ以上に突起の弾性回復量が増加するため結果的には回復量は増加する。

4）塑性変形突起と弾性変形突起が混在する状態での接触変形を解析し，塑性接触部と弾性接触部で受け持つ荷重の分担比を計算することにより，荷重比基準の新しい塑性指標を定式化できた。

5）母材内部の最大せん断応力を算出することにより本理論の適用範囲が定まった。また，突起の弾性接触状態で母材が塑性変形する可能性はほとんどない。

参　考　文　献

1) 石垣，川口： 精密機械，44，11 (1978) 1341.
2) 築添： 精密機械 ，37，5 (1971) 344.
3) 築添： 日本機械学会論文集 ，41，346 (1975) 1909.
4) 久門： 日本機械学会論文集 ，38，315(1972) 2945.
5) T.Tsukada and Y.Anno： Bull. Japan Soc. of Prec. Engg., 11, 4 (1977) 207.
6) P.Barkan and E.J.Tuohy： Trans. IEEE, Pas-84, (1965) 1132.
7) J.A.Greenwood and J.H.Tripp： Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
8) J.Halling and M.EI-Refaie： Proc. Instn. Mech. Engrs., 183 (3P) (1968/69) 116.
9) K.A.Nuri： Wear, 30, 3 (1974) 321.
10) 渡辺，石垣，川口：昭和50年度 精機学会春季全国大会前刷集 ，(1975)147.
11) A.E.H.Love： A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.
12) T.E.Tallian and J.I.McCool： Wear, 17, 5/6 (1971) 447.
13) T.E.Tallian： Wear, 17, 5/6 (1971) 463.
14) T.E.Tallian： Wear, 21, 1 (1972) 49.
15) B.Michau, D.Berthe and M.Godet： Wear, 28, 2 (1974) 187.
16) 石橋： 潤 滑 ，19，2 (1974) 146.
17) R.L.Leibensperger and T.M.Brittain： Trans. ASME Ser. F., 93, (1973) 277.
18) J.A.Greenwood and J.B.P.Williamson： Proc. Roy. Soc. Ser. A, 295, (1966) 300.
19) T.A.Harris： Rolling Bearing Analysis, John Wiley & Sons Inc., New York, (1966) 132.
20) D.Tabor： The Hardness of Metals, Oxford, (1951) 50.

第 2 編

接触理論の工学的応用

第 1 章　転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響

1・1　緒　　言

本章ではこれまで述べてきた粗面と球面の接触理論の応用の一例として転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響について論ずる。ここで述べる転がり抵抗とは球が平面上を転がるときの抵抗力全般を指し，大別してつぎの２成分からなる。すなわち，１）転がりの向きに対し常に反対の向きに作用しエネルギー損失を伴ういわゆる転がり摩擦力，２）転がり中平面の幾何学的不規則性のため球に作用する水平力で，転がり方向に対しその時々で正負方向に働き，エネルギー損失を伴わない抵抗力である。

物理的な観点からは１）の転がり摩擦力成分が重要な意味をもつが，工業的観点からは１），２）を含めた転がり抵抗の変動成分も重要な問題と考えられる。そこで本章では転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響と，転がり抵抗の変動に及ぼす表面粗さの影響とを分けて，それぞれについて理論的考察を試みる。

1・2　転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響

表面粗さが転がり摩擦に影響を及ぼすことは実験的にはかなり報告[1~4]されているが，この機構に関する理論的考察は少なく，多角柱近似[5]，凝着による転がり摩擦と表面粗さの関係等の解析[6]が見られる程度である。

なめらかな平面と球の転がりにおける転がり摩擦力の発生機構についてこれまでに，１）*O. Reynolds* の微小すべり説[7]，２）*H. L. Heathcote* の差動すべり説[8]，３）*G. A. Tomlinson* の凝着説[9]，４）履歴損失説[10]などの仮説が立てられたが，前三者はいずれも平面と球の場合のような両転がり素子の曲率半径の差が大きい場合には転がり摩擦発生の主因とは成り得ないことがこれまでに明らかにされている。これらのうち１），２）は平面が粗面に代わっても転がり摩擦に対する影響

がとくに大きくなる因子を持たないので否定されうる。3）の凝着説については粗面の場合真実接触面積の変化，真実接触面での圧力増加などのために平面が粗面になることによって何らかの影響を与えることは充分考えられるが，その大きさがきわめて軽負荷の場合を除いて，4）の履歴損失に比べて小さいのでここでは一応これを無視して履歴損失のみに着目して解析を行う。そして実験結果との比較検討に際して凝着による影響が小なることを確認する。履歴損失説は転がり摩擦力発生機構として最も有力視されている説であるが，表面粗さの影響を説明できない点をこの説の問題点の一つとして挙げている例[11]もあり，表面粗さとの関係についてはこれまでのところ明確にされていない。しかし履歴損失は次のようにして表面粗さの転がり摩擦に対する影響の主因子となることが考えられる。すなわち，前編で述べてきたところから明らかなように，1）表面粗さを形成している突起そのものの変形の履歴損失，2）表面の突起を介して接触することにより母材の弾性変形の状態が変化してそれに伴う履歴損失が変化するなどである。

本節では上記の仮説にしたがって表面粗さの転がり摩擦に対する影響を論ずるが，この場合接触時の変形形態が問題になる。通常履歴損失説は弾性履歴損失を意味していると考えられるが，粗平面と球の接触においては第1編5.5.1で述べたように接触条件にしたがって種々な場合が考えられる。本研究ではならし運転後の接触状態に相当する弾性接触状態はもちろん，処女面転がりを想定して接触突起が塑性変形する塑性接触状態についても解析を試みる。なお表面粗さとしては第1編第5章で扱ったような方向性のある粗さを想定する。すなわち弾性接触の場合は第1編5.2.1の解析をそのまま利用し，塑性接触の場合は第1編5.2.2の負荷過程および除荷過程の解析を応用して転がり接触時の変形を解析し，それをもとにして摩擦力の推定を行う。

なお，いづれの場合も表面粗さ条痕と直角の方向に転がすことを想定して解析する。

1・2・1　全接触突起が弾性変形する場合[12)]

1・2・1・1　理　　論

弾性履歴損失説[10)]によると平面と球の転がり摩擦力は

$$F = \alpha_l \, \Phi \qquad (2.1.1)$$

で与えられる。ここでΦは単位距離転がり中の転がり前面部での入力エネルギー，α_l は弾性履歴損失係数である。

そこで本研究ではこのΦを表面の突起の変形および母材の変形を考慮して解析する。α_lについてはこれまでいくつかの研究がなされ，ゴムやプラスチック等の高分子材料の場合には応力状態によらず一定であることが報告[10,13)]されている。金属の場合には種々の説[14)]があるが，最近では応力の２乗にほぼ比例することが報告[15)]されている。本研究ではα_lを応力にかかわらず一定と考えて解析を行い，その検証実験には高分子材料を用いた。

転がり接触状態を図 2.1.1 に模式的に示す。

x 軸を転がり方向に，z 軸を x 軸と垂直に任意の位置にとる。

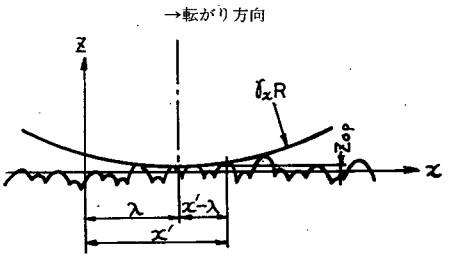


図 2.1.1　転がり接触状態

球の中心軸が λ の位置にあるとき，球が単位距離転がる間に転がり前面部でなされる仕事 Φ_R は次式で表される。

$$\Phi_R = \int_{\lambda}^{\lambda + x_{max}} W_x(x') \, \delta w(x') \, dx' \qquad (2.1.2)$$

ここで　$W_x(x')$：x' 点での単位幅あたりの分布荷重

x_{max}　：x 方向接触域

$\delta w(x')$ は，単位距離転がる間に $x = x'$ の位置の球面上の１点で生じる z 方向変位で，球と平面の母材の変形による変位量 $w_m(x')$ と突起の変形による変位量 $w_a(x')$ の和

$$w(x') = w_a(x') + w_m(x') \qquad (2.1.3)$$

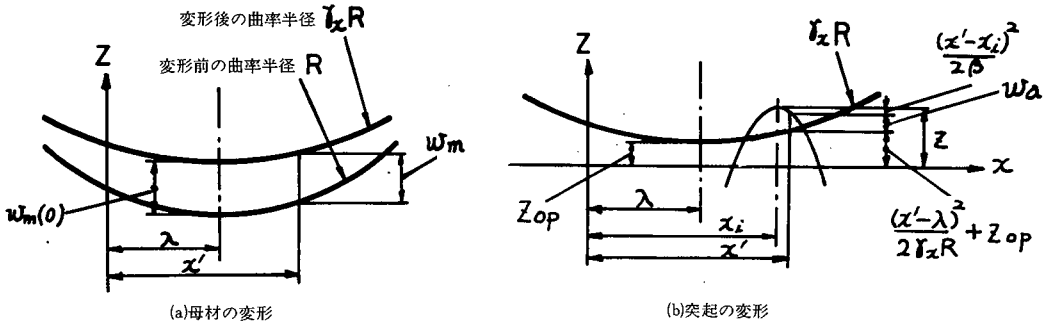


図 2.1.2　母材の変形と突起の変形

の増分として与えられる。$w_a(x')$ および $w_m(x')$ は図 2.1.2 (a)(b) に示すような幾何学的関係からそれぞれ次式で表される。

$$w_a(x') = z - \frac{(x'-x_i)^2}{2\beta} - \frac{(x'-\lambda)^2}{2R\gamma_x} - \frac{y^2}{2R\gamma_y} - Z_{op} \qquad (2.1.4)$$

$$w_m(x') = \frac{(x'-\lambda)^2}{2R\gamma_x} + \frac{y^2}{2R\gamma_y} + w_m(0) - \frac{(x'-\lambda)^2+y^2}{2R} \qquad (2.1.5)$$

ただし，$\gamma_x R$，$\gamma_y R$ は母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径，Z_o は接触高さ，x_i は突起中心線の x 座標，z は突起頂点高さ，β は突起先端曲率半径を表す。

よって

$$\delta w(x') = \frac{\partial}{\partial\lambda}\{w_a(x') + w_m(x')\} = \frac{x'-\lambda}{R} \qquad (2.1.6)$$

式 (2.1.6) を式 (2.1.2) に代入すると単位距離転がり中転がり前方でなされる仕事 Φ_R は次式で表される。

$$\Phi_R = \frac{1}{R}\int_{\lambda}^{x_{max}+\lambda} W_x(x')(x'-\lambda)\,dx' \qquad (2.1.7)$$

突起が弾性変形する場合の分布荷重 $W_x(x')$ は式 (1.5.9) を用いると次式で表される。なお n_p は突起密度で Q_a は式 (1.5.9) の場合と同じ定数。

$$W_x(x') = Q_a n_p \int_{z_{op}+\frac{(x'-\lambda)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}}^{z_{max}} \{z - Z_{op} - \frac{(x'-\lambda)^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\}^{\frac{3}{2}} f(z)\,dz \qquad (2.1.8)$$

式 (2.1.8) を式 (2.1.7) に代入すると Φ_R が求まる。

一方，なめらかな平面と球の接触における入力仕事（Φ_sとおく）はヘルツ理論を用いて次式のように表される[10]。

$$\Phi_s = \frac{3}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{W^{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}} \left\{ \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right\}^{\frac{1}{3}} \qquad (2.1.9)$$

よって，転がり摩擦力が入力仕事に比例すると考えると転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響が次式で表される。

$$\frac{F_r}{F_s} = \frac{\Phi_R}{\Phi_S} \qquad (2.1.10)$$

ここでF_rは粗い面の接触における摩擦力を，またF_sはなめらかな面の接触における摩擦力を表す。

1.2.1.2 数値計算結果

突起頂点高さの標準偏差σ_pと入力仕事Φ_Rの関係を図2.1.3に示す。σ_p大なるほど入力仕事Φ_Rも増加しており，なめらかな面の場合の入力仕事Φ_Sとの隔りは荷重が大なるほど小になる傾向を示している。この傾向はσ_p大なるほど転がり摩擦力が大になるが，荷重が大になるとこの表面粗さの影響は減少することを意味する。

図2.1.4にβ，n_pとΦ_Rの関係を示す。この図からβ，n_pはΦ_Rにあまり影響を及ぼさないことがわかる。

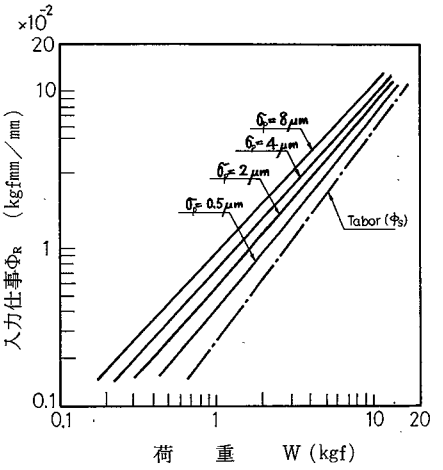


図2.1.3 荷重と入力仕事の関係
$n_p = 30\ mm^{-1}$ $\beta = 0.1$ mm
R = 5 mm
$E_1 = E_2 = 21000\ kgf/mm^2$

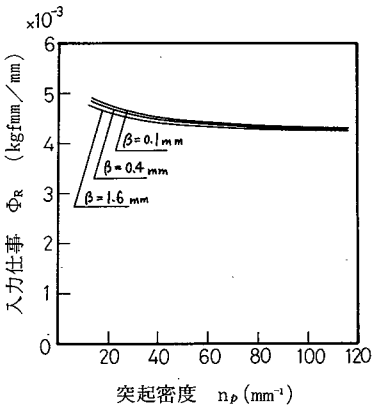


図2.1.4 n_p，βとΦ_Rの関係
R = 5 mm
$E_1 = E_2 = 21000\ kgf/mm^2$
W = 1 kgf $\sigma_p = 1\mu m$

1.2.1.3 実　　験

前述の理論の妥当性を検討するため，なめらかな面の場合の転がり摩擦力と粗い面の場合の転がり摩擦力を測定し，両者の比と式（2.1.10）を用いて求めた理論値との比較を試みる。

(1) 実 験 装 置

実験に用いた転がり摩擦力測定装置を図 2.1.5 に示す。下部試験片として表面粗さ試験片を取り付ける。

上部試験片，および球（R ＝5 mm）の材質は $SUJ\,2$（マイクロビッカース硬さ H_v＝1000）で表面粗さはいずれも $R_{max} < 0.1\ \mu m$ である。垂直荷重は上部試験片上に重錘を直接置くことにより与えられる。この上部試験片を平行板バネを介してフォークで前後に動かせ試料球を転がらせる。フォークは送りテーブルと一体になっていてベルトを介して同期モータにより 0.1 mm/s の速度で駆動される。このとき，転がり抵抗に応じて平行板バネに生じるひずみをひずみゲージで測定し，転がり抵抗に換算する。なお図 2.1.5 では省略しているが，上部試験片とフォークの間にオイルダンパを並列に設け，転がり抵抗の変動による振動を防止し，また装置全体を除震台の上に置くことにより外部の振動の影響を防止している。

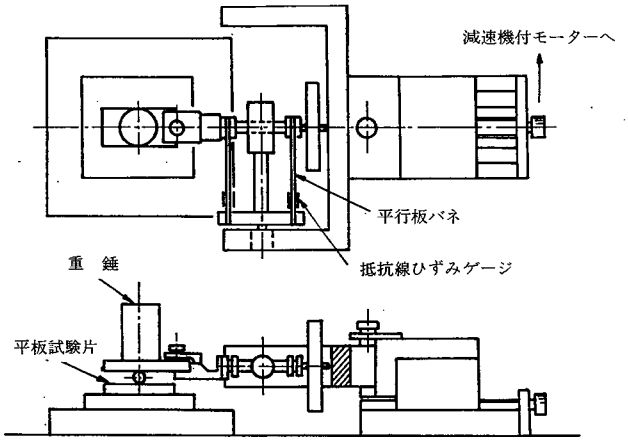


図 2.1.5　転がり摩擦測定装置（軽荷重用）

平行板バネで測定される転がり抵抗の中には，常に転がりの向きに逆に作用する転がり摩擦力のほかに，球が突起を乗り越えたり変形させたりするのに要するいわゆるポテンシャル的抵抗が含まれる。

そこで図 2.1.6 に示すようにフォークが前進する場合の抵抗力 F_f と後退する

時の抵抗力 F_b を測定し，この抵抗の差を求めることによりポテンシャル成分の除去をはかる。すなわち，

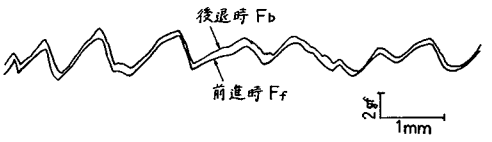


図 2.1.6　転がり抵抗実測例
$\sigma_p = 2.0\,\mu m$　$W = 100\,gf$

$$F_f = -F_{rf} + F_{Rf}$$
$$F_b = F_{rb} + F_{Rb} \qquad (2.1.11)$$

ここで　F_{rf}, F_{rb} ：前進時と後退時において常に転がり方向と反対の方向に働く転がり摩擦力

F_{Rf}, F_{Rb} ：前進時と後退時において作用するポテンシャル力成分

弾性接触状態においては

$$F_{rf} = F_{rb}$$
$$F_{Rf} = F_{Rb}$$

であるから

$$F_{rf} = F_{rb} = \frac{1}{2}(F_b - F_f) \qquad (2.1.12)$$

が求める摩擦力となる。なお上部試験片と球との接触部の転がり摩擦力は下部試験片のそれに比べ無視できる。また転がり方向は表面粗さの条痕に対し直角な方向である。

(2) 試　験　片

弾性接触用試験片の材質は塩化ビニールで，金属面の転写により種々の表面粗さを付けた。すなわち，黄銅の研摩布仕上面と塩化ビニール面とを加圧した状態で 130℃ の炉

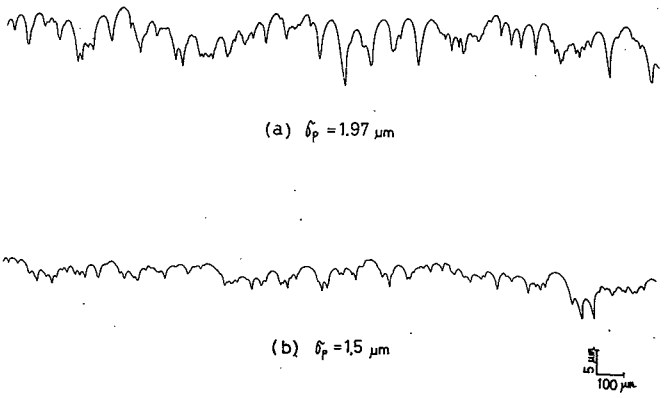


図 2.1.7　試験片表面の表面粗さ曲線
（塩化ビニール試験片）

中で1時間保持し表面粗さを転写した。塩化ビニールの表面粗さの一例を図1.2.7に示す。

(3) 実 験 結 果

なめらかな面（$R_a = 0.12\ \mu m$）の場合の転がり摩擦力と粗い面の転がり摩擦力の比について実測値と理論値の比較を行った結果を図2.1.8～図2.1.10に

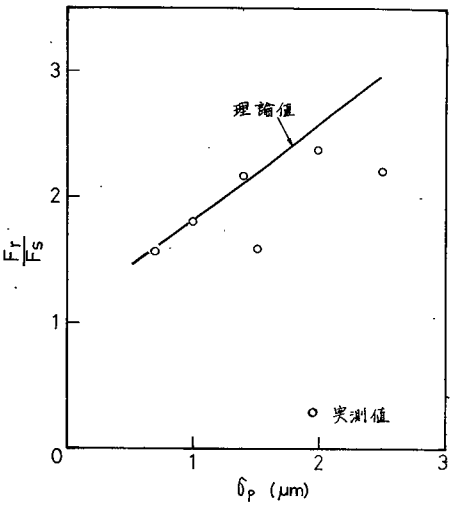


図2.1.8 $\frac{F_r}{F_s}$ に関する理論値と実測値の比較
W = 25 gf　R = 5 mm
E = 225 kgf/mm²

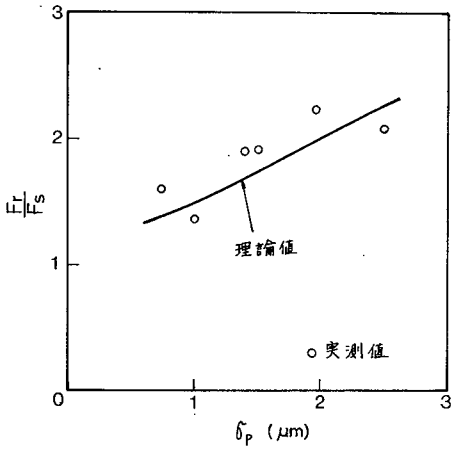


図2.1.9 $\frac{F_r}{F_s}$ に関する理論値と実測値の比較
W = 50 gf　R = 5 mm
E = 225 kgf/mm²

示す。いずれの結果も定性的には理論値とよく似た傾向を示している。定量的にもかなりの一致を示しているが，荷重小なる場合（$W = 25\ gf$）に実測値が理論値より少し低めに，また逆に荷重大なる場合（$W = 100\ gf$）に実測値が少し高めに出ている。

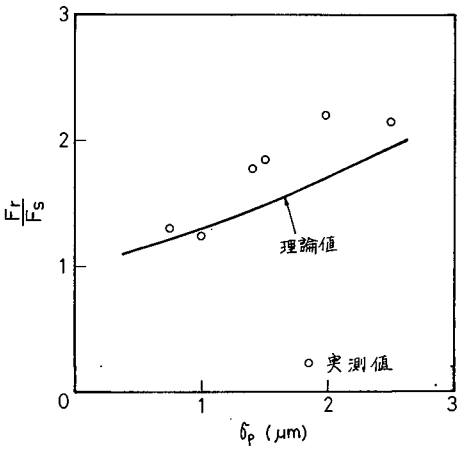


図2.1.10 $\frac{F_r}{F_s}$ に関する理論値と実測値の比較
W = 100 gf　R = 5 mm
E = 225 kgf/mm²

1.2.1.4 考　　察

(1) 理論値と実測値の差について

この原因としては凝着摩擦の影響や材料の粘弾性効果が考えられる。いま各接触突起凝着力が真実接触面積に比例すると設定した場合の凝着力による転がり摩擦力 F_{ad} と表面粗さの関係を式(1.5.23)を用いて次式のように概算してみる。

$$\frac{F_{ad}}{F_{ad_0}}=\frac{n_p A_s \int_0^{x_{max}} x \int_{z_{op}+\frac{x^2}{2(R\gamma_x+\beta)}}^{z_{max}} \{Z-Z_{op}-\frac{x^2}{2(R\gamma_x+\beta)}\} f(z)\,dz\,dx}{2\int_0^a x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx} \qquad (2.1.13)$$

ただし，A_s は式(1.5.23)と同一の定数で，a はヘルツ理論から求まる接触域半径，また F_{ad_0} はなめらかな面の場合の凝着による転がり摩擦力。

数値計算結果の一例を図2.1.11に示す。この図から σ_p 大なるほど凝着による摩擦力は逆に低下することがわかる。表面粗さにより凝着による転がり摩擦力が減少することは他の文献の理論[6]とも定性的には一致している。転がり摩擦力中に占めるこの凝着による摩擦力の割合は低荷重になるほど増加する。そこで軽荷重時には，本論文のような履歴損失による表面粗さの影響は凝着力により低減することが考えられる。また高荷重時に表面粗さの影響が本理論より顕著に表れた原因は高分子材料の粘弾性による速度効果とも考えられる。表面粗さが大なるほど接触領域が拡がり，変形速度の速い領域が増加するため粘弾性効果が大になり摩擦力も大になることが予想される。この凝着力と粘弾性効果の相反する作用を考慮に入れると図2.1.8～図2.1.10の傾向は定性的には説明がつく。これらの効果を確認するにはさらに精度の高い測定を必要とし今後の課題として残される

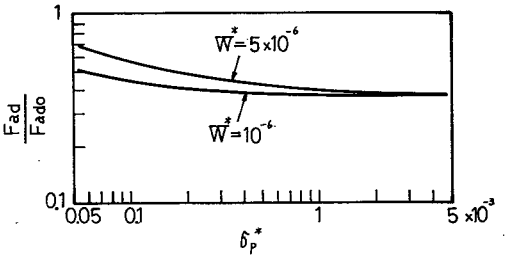


図 2.1.11　凝着による摩擦に及ぼす表面粗さの影響
$\beta^*=2\times10^{-2}$　　$n_p^*=300$

が，履歴損失説で表面粗さの影響を説明する試みとしては図 2.1.8 ～ 図 2.1.10 程度の理論値と実験値の一致で十分と考えられる。

(2) 高分子材料の試験片材質としての妥当性

高分子材料を試験片に使用すると粘弾性効果が懸念されるが，塑性変形が少しでも含まれることの方が弾性履歴損失説の検証実験としては問題となるので金属材料は使用できない。また，高分子材料を用いた実験結果が，粘弾性効果を無視し弾性接触理論をもとにしたなめらかな平面と球の転がり履歴損失理論によく一致している報告例[13,16] も多い。そこで，表面粗さの影響を検討するのが目的である本研究の場合の試験片材料として，高分子材料はあながち不適当とは考えられない。

(3) 金属材料について

金属材料の場合には損失係数がひずみエネルギー密度の関数となるため本理論をそのまま適用することはできない。しかし，この場合も解析は複雑になるが表面粗さの影響に関する基本的な考え方は同じで，定性的には本理論と同様の結果がでるものと考えられる。鋼材を用いた実験結果[17] にも，荷重小なる範囲では表面粗さの影響が顕著に表れ，表面粗さ大なるほど摩擦力が増加し，高荷重域では表面粗さの影響が小になるという本理論の結果（図 2.1.3 ）と定性的によく一致する傾向がみられる。

1.2.2 全接触突起が塑性変形する場合

1.2.2.1 理　　論[18]

突起の塑性変形履歴に起因する転がり摩擦力を求める。弾性接触の場合，転がり前方と後方での圧力分布はほぼ対称になるため，転がり接触と静的接触との差は無視できた。しかし塑性接触の場合には，転がり後方で発生する圧力は突起および母材の弾性回復に起因するものであるため転がり前方の圧力に比べ低くなり，転がり接触と静的接触とはかなり異なる。そこで，まず第 1 編 5.2 で試みた負荷過程の接触理論を転がり前面の接触部に，除荷過程の接触理論を転がり後

部の接触に適用して転がり接触機構を解析する。解析にあたり設定する表面粗さ突起の形状，分布，および突起の変形機構は第1編5.2.2と同一とする。

粗面と球の接触変形問題においては球，および平面の母材の弾性変形が球の曲率の変化のみに置き換えられ，母材の変形後の球の曲面を二次曲面で近似しても十分な精度が得られることは前編で明らかにしてきた通りであるが，本章のような転がり接触では，転がり前方と後方では接触部圧力分布の非対称性のため母材の変形も非対称になる。そこで図2.1.12に示すように，母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径として，転がり前方の x 軸方向を $\gamma_f R$，転がり後方の x 軸方向を $\gamma_r R$，y 軸方向は前方後方を通じて一定の $\gamma_y R$ とかりに設定する。

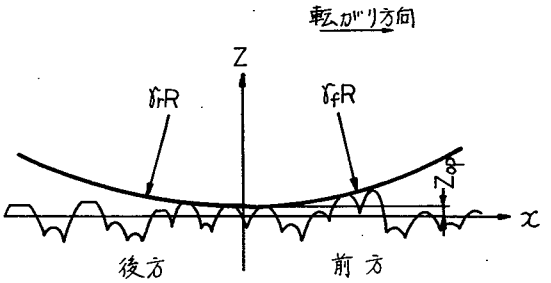


図2.1.12　転がり接触状態

いま，x 軸座標を突起頂点の平均高さにとり，球底が Z_{op} の高さまで食込んでいるとすると，転がり前方部で全接触突起が受ける荷重 W_f は式(1.5.27)を用いて次式で定まる。

$$W_f^* = n_p^* \gamma_y^2 \int_0^{x^*_{max}} \int_{z^*_{op}+\frac{x^{*2}}{2\gamma_x R}}^{\infty} g(\alpha_a^*)\, f(z^*)\, dz^* dx^* \qquad (2.1.14)$$

一方，転がり後方部で受ける荷重 W_r は式(1.5.33)を用いると次式で表される。

$$W_r^* = n_p^* \gamma_y^2 \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} g_r(\alpha_{era}^*)\, U(\alpha_{era}^*)\, f(z^*)\, dz^* dx^* \qquad (2.1.15)$$

ここで α_{era} は突起の弾性近接量を表す。これは次式のように単一突起が転がり過程で生じた最大の弾性近接量から x の位置まで転がる間の弾性回復量を引いたものである。

$$\alpha_{era}^* = (\alpha_a^* - \alpha_{pa}^*)_{max} - \frac{x^{*2}}{2\gamma_y \gamma_r}$$
$$= \frac{z^*}{\gamma_y} - \frac{Z_{op}^*}{\gamma_y} - G\left(\frac{z^*}{\gamma_y} - \frac{Z_{op}^*}{\gamma_y}\right) - \frac{x^{*2}}{2\gamma_r \gamma_y} \qquad (2.1.16)$$

なお，α_{pa} は突起の塑性近接量を表し，これは式（1.5.28）で示したように突起の全近接量 α_a の関数で示される。よって，球に作用する全荷重の平均値は次式で定まる。

$$W^* = W_f^* + W_r^* \qquad (2.1.17)$$

接触条件として W^* が与えられた場合，上式を満足するような Z_{op}^* を繰り返し計算で求めればよい。接触高さ Z_{op}^* が定まると接触部のみかけの圧力分布は式（1.5.31）および式（1.5.37）を用いて次式で求まる。

転がり前方

$$p_f^*(x^*, y^*) = 2\beta^{*0.5} p_m^* n_p^* \gamma_y^{-0.5} \int_{z_{0p}^* + \frac{x^{*2}}{2r_x}}^{\infty} \{2\gamma_y^2 G(\alpha_a^*) - y^{*2}\}^{\frac{1}{2}} f(z^*)\, dz^* \qquad (2.1.18)$$

転がり後方

$$p_r^*(x^*, y^*) = 2\beta^{*0.5} p_m^* n_p^* \gamma_y^{-0.5} \int_{-\infty}^{\infty} \{2\gamma_y^2 \alpha_{pra}^* - y^{*2}\}^{\frac{1}{2}} \times U(2\gamma_y^2 \alpha_{pa}^* - y^{*2})\, f(z^*)\, dz^* \qquad (2.1.19)$$

ただし，α_{pra} は転がり後方部の接触突起における相当塑性近接量で次式に式（2.1.16）を代入することにより求まる。

$$\alpha_{pra}^* = 2\left(\frac{\pi}{78}\right)^2 p_m^{*-2} \beta^{*-0.7} \alpha_{era}^{*2} \gamma_y^{0.7} \qquad (2.1.20)$$

球および平面の母材の弾性変形の和は次式に式（2.1.18），（2.1.19）を代入すれば求まる。

$$w_m^*(x^*, y^*) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{0} \{(x^*-\xi^*)^2 + (y^*-\eta^*)^2\}^{-\frac{1}{2}} p_r^*(\xi^*, \eta^*)\, d\xi^* + \int_{0}^{\infty} \{(x^*-\xi^*)^2 + (y^*-\eta^*)^2\}^{-\frac{1}{2}} p_f^*(\xi^*, \eta^*)\, d\xi^*\right] d\eta^* \qquad (2.1.21)$$

球および平面が上式で定まる弾性変形をした後の，球の平面に対する相対的曲率半径が最初に設定した曲率半径と一致するまで，式（2.1.15）～（2.1.21）を繰返し計算する。このようにして γ_f，γ_r，γ_y が求まると接触状態が定まり，接触面圧力分布が計算できる。圧力分布の数値計算結果の一例を図 2.1.13 に示す。

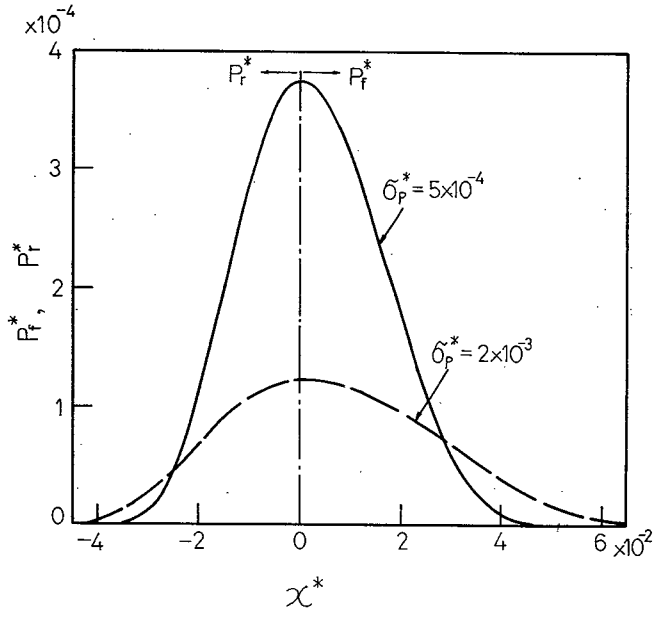


図 2.1.13　接触面圧力分布

$\beta^* = 2\times10^{-2}$　$W^* = 10^{-6}$

$n_p^* = 200$　$p_m^* = 5\times10^{-3}$

接触突起の塑性変形のため，転がり後方では当然圧力が低下する。この圧力分布の非対称性のため転がりを妨げるモーメントが発生する。転がり摩擦力 F_p はこのモーメントの釣合条件から次式のように定まる。

$$F_p^* = \pi\int_{-\infty}^{\infty} x^* \int_{-\infty}^{\infty} \{ p_f^*(x^*, y^*)\, U(x^*) + p_r^*(x^*, y^*)\, U(-x^*) \}\, dy^*\, dx^*$$

ここで　$U(x^*) = \begin{cases} 0 & x^* \leqq 0 \\ 1 & x^* > 0 \end{cases}$　　(2.1.22)

なお，球および平面の弾性履歴損失に起因する摩擦成分は処女面転がりの場合，F_p に比べはるかに小なることが実験的に確認[17]されているため，ここでは無視する。

1・2・2・2　数値計算結果

転がり摩擦力 F_p^* の数値計算結果を図 2.1.14，図 2.1.15 に示す。図 2.1.14 から F_p^* は荷重 W^* にほぼ比例することがわかる。両図から σ_p^* 大なるほど，また p_m^*，n_p^*，β^* が小なるほど F_p^* は大になり，これらの因子のうち F_p^* に及ぼす影

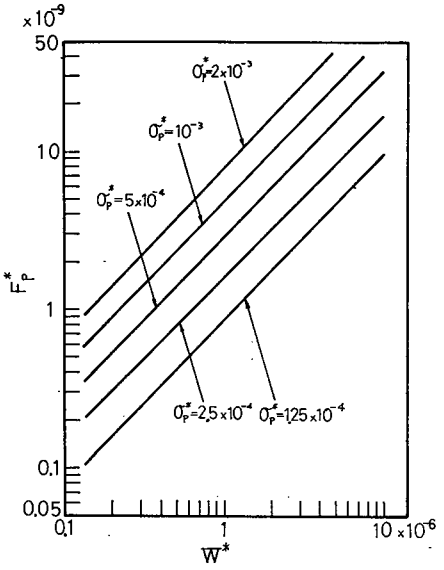


図 2.1.14　荷重と転がり摩擦力の関係
$\beta^*=0.02$　$n_p^*=200$
$p_m^*=5\times10^{-3}$

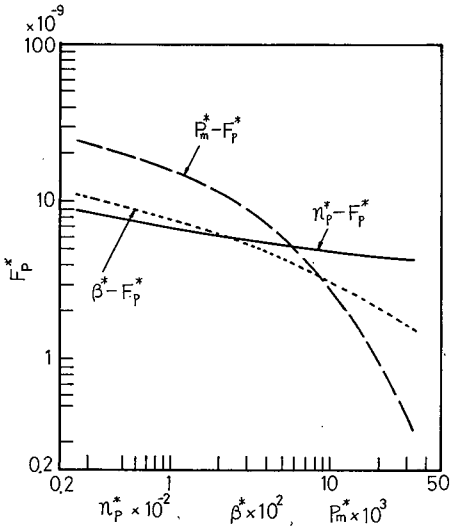


図 2.1.15　n_p^*, β^*, p_m^* と F_p^* の関係
$\sigma_p^*=5\times10^{-4}$　$\beta^*=0.02$
$n_p^*=200$　$p_m^*=5\times10^{-3}$
$W^*=2\times10^{-6}$

響としては σ_p^*, p_m^* が大で n_p^* が最も少ないことがわかる。

いま，かりに研摩布仕上面を想定すると，σ_p，n_p 間の関係は式（1.3.24）から，σ_p と R_a の関係は式（1.3.26），（1.3.20）から求まる。この関係を用いて整理し直すと，図 2.1.16 に示すように F_p と R_a の関係が表される。実際の加工面では $\sigma_p n_p^2$ の値はかなり変動するが F_p に及ぼす影響は小さい。しかし図 2.1.15 から明らかなように，β の影響が無視できないことから図 2.1.14 の比例関係はかなりの誤差を伴うが，表面粗さの影響についての一つの目安として考えられる。

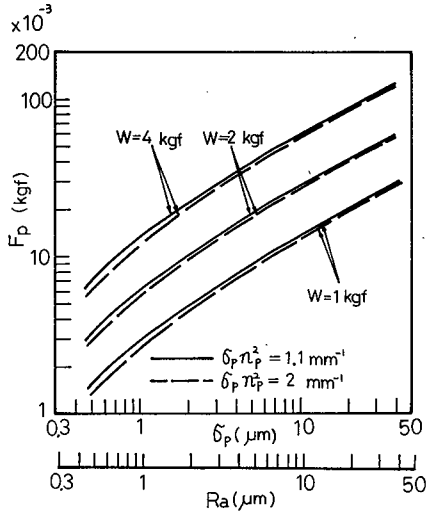


図 2.1.16　R_a と F_p の関係
（研摩布仕上面）
$R=5$ mm　$E_1=21000$ kgf/mm²
$\beta=0.04$ mm　$E_2=10000$ kgf/mm²
$p_m=157$ kgf/mm²

つぎに本理論の妥当性を実験的に検討する。

1.2.2.3 実　　験

(1) 実 験 方 法

用いた実験装置および上部平板試料は本章1.2.1.3で述べたものと全く同じである。研摩布仕上で種々な表面粗さをつけた黄銅板（6/4黄銅，降伏応力12 kgf/mm^2，マイクロビッカース硬さ $H_v = 157$）を仕上げ条痕が転がり方向に直角になるように下部平板試料として取りつけて，この試料の表面粗さの転がり摩擦に対する影響を調べた。

この場合，上部平板試料と球の接触による転がり摩擦力は下部試験のそれに比べて無視できる。

塑性接触の場合，球の最初の前進時において突起の塑性変形がほとんど完了してしまい，後退時における塑性変形の進行量は前進時のそれに比べかなり減少する。しかし全く無視するわけにはいかない。そこで転がり抵抗の実測値からポテンシャル成分を除去した摩擦力成分は式（2.1.12）では求まらず，下記のように推定して求める。

いま，同一接触箇所を数回くり返して転がし，次式のようにそれぞれの往復時の転がり抵抗の差を求める。

$$
\begin{aligned}
D_1 &= F_{b1} - F_{f1} = F_{rf1} + F_{rb1} + F_{Rb1} - F_{Rf1} \approx F_{rf1} + F_{rb1} \\
D_2 &= F_{b1} - F_{f2} \approx F_{rb1} + F_{rf2} \\
D_3 &= F_{b2} - F_{f2} \approx F_{rf2} + F_{rb2} \qquad (2.1.23) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

F_{fj}，F_{bj} ： それぞれ j 回目の往復における前進時，後退時の転がり抵抗。

F_{rfj}，F_{rbj} ： それぞれ j 回目の往復における前進時，後退時の転がり摩擦力成分。

F_{Rfj}，F_{Rbj} ： それぞれ j 回目の往復における前進時，後退時のポテンシャル力成分。

ただし，往復時において転がり抵抗の波形そのものはほとんど相似であることから，F_{Rf}，F_{Rb} は近似的に等しいと見なす。

この D_1，D_2，D_3 …… の実測例を図 2.1.17 に示すが D_1 に比べ D_2 以後ははるかに小で，しかも D_2 以後は変化がゆるやかである。すなわち次式が成立する。

$$F_{rb1} \approx F_{rf2} \approx F_{rb2} \approx F_{rf3} \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\approx \frac{D_2}{2} \approx \frac{D_3}{2} \cdots\cdots \qquad (2.1.24)$$

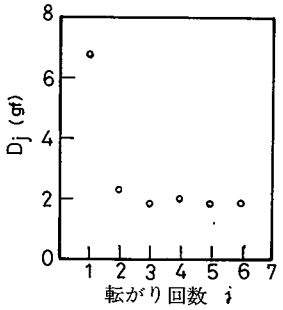


図 2.1.17 転がり回数と転がり抵抗差の関係
W＝1 kgf/mm² σ_p＝3 μm
R＝5 mm E_1＝21000 kgf/mm²
E_2＝10000 kgf/mm²

式 (2.1.23)，(2.1.24) を用いると，求める処女面転がり摩擦力 F_{rf1} は

$$F_{rf1} \approx D_1 - \frac{1}{2} D_2 = (F_{b1} - F_{f1}) - \frac{1}{2}(F_{b1} - F_{f2}) \qquad (2.1.25)$$

から推定できる。

(2) 実 験 結 果

図 2.1.18 ～ 図 2.1.20 に実験結果の一例を示す。図中実線は本理論によ

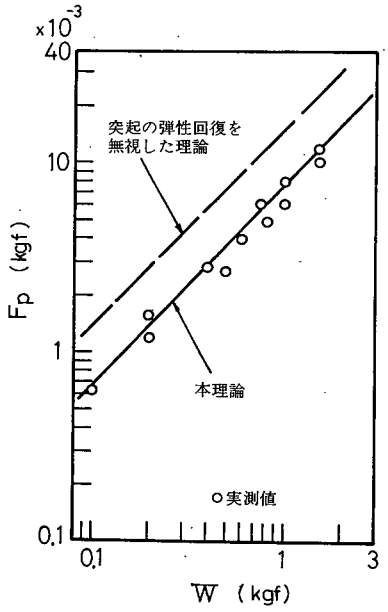


図 2.1.18 転がり摩擦実験結果
σ_p＝3.0 μm n_p＝24 mm⁻¹
β＝20 μm R＝5 mm

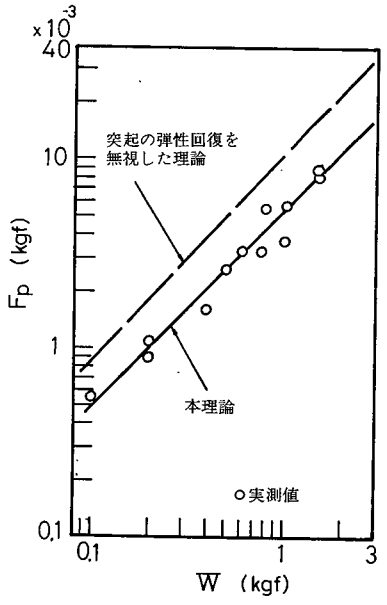


図 2.1.19 転がり摩擦実験結果
σ_p＝1.8 μm n_p＝32 mm⁻¹
β＝22 μm R＝5 mm

る計算結果であり，これらの図では丸印で示した実測値とかなり良い一致を示している。一方，図中の破線は接触突起の変形を塑性変形のみと考えた場合の理論値[12]で弾性変形まで考慮に入れた今回の理論値と同様の傾向を示しているが，定量的には実測値の数倍程度大なる値となり大きな隔たりを示している。以上から，塑性変形突起中の弾性変形が転がり摩擦低減に大きな役割を果たしていることが明らかであり，本理論の妥当性も確認できたものと考えられる。しかし表面粗さが小なる面の場合，図 2.1.20 に見られるように荷重の低い領域では理論値と実測値はかなり一致しているが，荷重の高い領域では理論値より実測値が大になり，理論値の傾斜に比べ実測値の傾斜のこう配も大になる。この傾斜の変化は表面粗さが小なるほど低荷重域で生じる。いま図 2.1.18，図 2.1.19 のような表面粗さが大なる試料についてもこの傾向が生じるか否かを調べるために，さらに高荷重の実験を行った。装置としては基本的には図 2.1.5 と同一であるが，荷重はカウンタウェイト方式で与えられる[17]。このようにして実験条件を $W = 25\ kgf$ まで拡げ，種々の表面

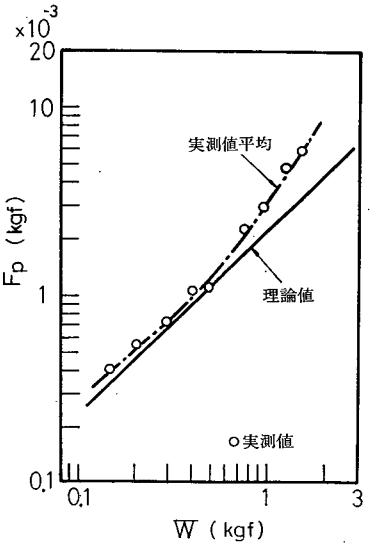


図 2.1.20　転がり摩擦実験結果
$\sigma_p = 0.7\ \mu m$　$\beta = 40\ \mu m$
$n_p = 50\ mm^{-1}$　$R = 5\ mm$

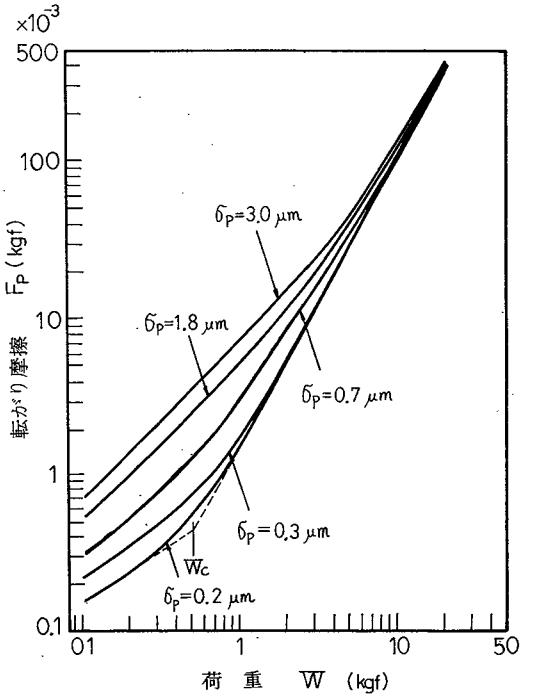


図 2.1.21　荷重と転がり摩擦の関係
$R = 5\ mm$

粗さの面について測定した転がり摩擦力を図 2.1.20 の一点鎖線と同様に平均した結果を図 2.1.21 に示す。高荷重域では表面粗さが異なっても摩擦力に大きな差はなく，傾きもほぼ一定で $F_p \propto W^{\frac{7}{4}}$ となる。*Tabor* 理論[10]によると，なめらかな面に溝を付けるに要する転がり摩擦力は $W^{\frac{3}{2}}$ に比例することになり，これに従うと母材が塑性変形すると指数部が本理論より増加すると考えられる。

以上から，高荷重域での傾きの変化は平面の母材の塑性変形が生じたことによるものと判断できる。すなわち図 2.1.21 は表面粗さが無視できない面に対する母材の降伏条件を表す図と見なせる。

1.2.2.4 考　　察

(1) 母材の塑性変形

上述のように図 2.1.21 で曲線の傾斜が変る点は母材の塑性変形開始の臨界点と思われるが，これを理論値と比較するためにその条件下における母材の最大せん断応力の計算を行った。ところで，塑性変形開始の臨界荷重そのものが図 2.1.21 からわかるようにさ程明確でなく，したがって最大せん断応力もおおよその推定でよいこと，および転がり時の圧力分布は前述のように複雑でこのような圧力分布に対する厳密な最大せん断応力を求めるにはかなりの計算時間を要するのでそれを短縮したい，などの理由から最大せん断応力は下記のようにして近似的に求めた。すなわち，圧力分布を円周方向に平均して点対称の圧力分布を仮想し，式 (1.4.42)～(1.4.44) を用いて接触面下のせん断応力分布を計算し，その最大値をもって最大せん断応力とする。

計算結果の一例を図 2.1.22 に示す。研摩布仕上面についての実験結果と比較するため図 2.1.22 も $\sigma_p n_p^2 = 1.1\ mm^{-1}$ で計算を行っている。最大せん断応力 τ_{max} が黄銅のせん断降伏応力 $\tau_c = 6\ kgf/mm^2$ の 1,2,3 倍になる臨界荷重 W_c と図 2.1.21 より求めた臨界荷重（図 2.1.21 に示すように 2 接線の交点で W_c を定義する）を比較した結果を図 2.1.23 に示す。W_c の実測値は理論値の範囲内にあり，とくに $\tau_{max} = 2\tau_c$ の理論値に最も良く一致している。これは母材内の一点で塑性変形

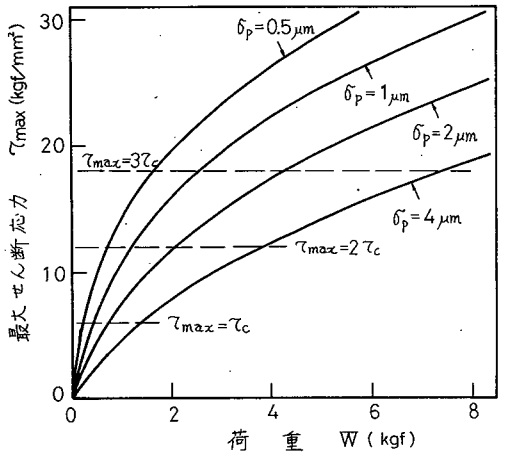


図 2.1.22 荷重と最大せん断応力の関係

$\sigma_p n_p^2 = 1.1$ $\beta = 0.04$ mm

$p_m = 157$ kgf/mm² $R = 5$ mm

$E_1 = 21000$ kgf/mm²

$E_2 = 10000$ kgf/mm²

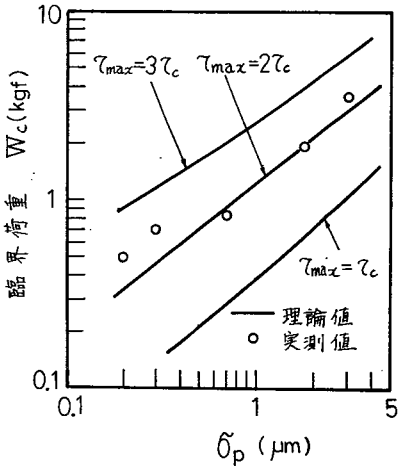


図 2.1.23 σ_p と臨界荷重の関係

$R = 5$ mm $p_m = 157$ kgf/mm²

$E_1 = 21000$ kgf/mm²

$E_2 = 10000$ kgf/mm²

$\beta = 0.04$ mm $n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}$ mm^{-1}

が開始する条件（*Tabor*[19]では $\tau_{max} = \tau_c$）のと，塑性変形が全域にまで及ぶ条件（$\tau_{max} = 3\tau_c$）の中間に相当するが，W_c の実測値も両条件の中間にあることは図 2.1.21 から推定される。

結局，母材の塑性変形開始条件および母材内部の最大せん断応力を平均的圧力分布から理論的に推定することの妥当性が図 2.1.23 から確かめられたものと考えられる。同時に図 2.1.22 から表面粗さが大なるほど臨界荷重が増加し母材が塑性変形を起こしにくくなることがわかる。

(2) 自由転がり接触状態における本理論の適用限界

転がり接触状態の解析においては弾性接触状態，塑性接触状態いずれの場合も接触高さを確定量とし，荷重を確率変数として扱っている。これは，転がり接触部の剛性より周囲の剛性の方が大なる場合や，高速転がりで慣性力が大なる場合のように拘束力が作用する場合の転がり接触状態に相当する。実験で行ったような自由転がりの接触問題を解析的に解くのはきわめて困難なため，本研究では前述の理論でもって自由転がり接触における転がり摩擦力の統計量が近似的に

推定できるものとして扱ってきた。ここではこの近似の成立範囲について考察を試みる。

突起頂点高さとして正規乱数を，頂点の横方向間隔としてワイブル乱数を計算機で発生させ，このようなモデル面上の転がり接触状態を第1編3.5.1と同様の手順でシミュレーション計算して求めた。なお母材の変形は無視する。

弾性接触の場合の入力仕事に関するシミュレーション結果を図2.1.24に示す。本理論の設定の場合より自由転がりの方が大なる値を示していることから，本理論の場合転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響を過小評価していると考えられるが，両者の差が問題になるのは軽荷重域のみで同図の場合20％の誤差を許容すれば約0.4 kgf 以上の荷重条件においては本理論で自由転がり接触状態の近似ができることになる。なお図2.1.8～図2.1.10の実験の場合，最小荷重（25 gf）条件でも図2.1.24の $W=1.25\ kgf$ の接触条件に相当するのでこの差は問題にならない。

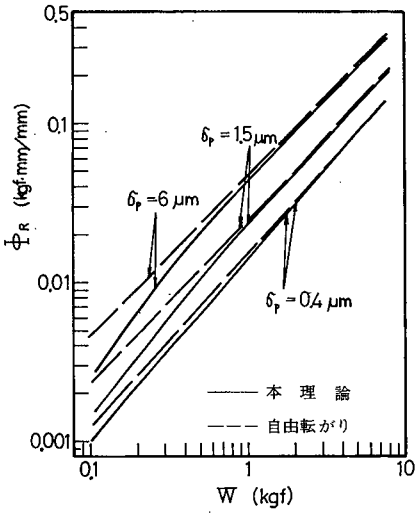


図2.1.24 Φ_R に関する理論と自由転がり接触の比較
$\beta=0.1$ mm　$n_p=30\ mm^{-1}$
$R=5$ mm
$E_1=E_2=21000\ kgf/mm^2$

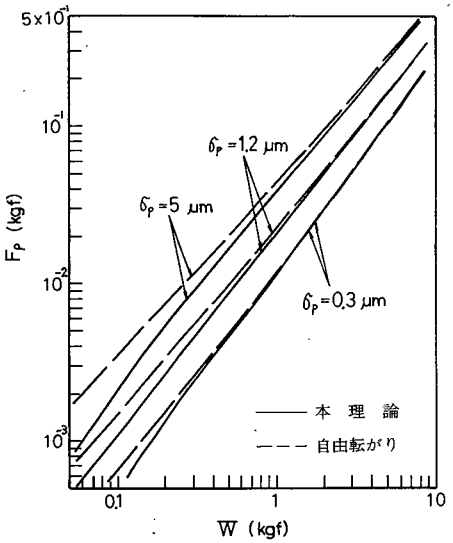


図2.1.25 $\overline{F_p}$ に関する本理論と自由転がり接触の比較
$\beta=0.05$ mm　$p_m=150\ kgf/mm^2$
$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}\ mm^{-1}$　$R=5$ mm
$E_1=21000\ kgf/mm^2$
$E_2=10000\ kgf/mm^2$

塑性接触の場合のシミュレーション結果を図2.1.25に示す。この図も図2.1.24ときわめてよく似た傾向を示し，やはり図中の接触条件範囲で20％の誤差を許容すれば$W > 0.5\ kgf$の荷重条件下で本理論を用いて自由転がり接触状態のF_pの推定ができることになる。

1・3　転がり抵抗の変動成分について

軽荷重，低速度の自由転がり接触においては転がり抵抗中に含まれる転がり摩擦力成分の割合はわずかである場合が多く，転がり接触を精密測定機に使用する場合には前述の転がり摩擦力の平均値よりも転がり抵抗の変動の方が重大な悪影響を及ぼす。

その実際例としてジャイロのロータとシンバル，シンクロ電機，サーボモータなどに使われる計器用精密軸受等では，転がり摩擦の平均値より転がり抵抗の変動が問題になり[20]，こまかい抵抗変動が表面粗さの大小に強く依存することが報告[21]されている。また，表面粗さによる転がり抵抗変動と軸受騒音とは高い相関があることが実験的に[22]確かめられている。

転がり抵抗の変動の因子として，表面粗さおよび表面うねりによる重力ポテンシャルの変動，接触突起の確率的分布による転がりの瞬間中心の変動，高速度運転における球と表面突起との衝突現象など多くの現象が考えられるが，転がり抵抗の変動が問題になったとき，これらの因子のうちどれが主因となっているかを推定することが重要である。そのような推定のための基礎的な研究として，ここでは準静的な転がり運動において表面粗さが転がり抵抗の変動に対して及ぼす影響について解析する。

自由転がりにおける転がり抵抗の変動を理論的に考察するには，表面粗さ突起と母材の変形を考慮に入れて球の上下変動を解析する必要がある。しかし後述するように，この解析にはきわめて困難な問題を含んでおり解を求めることは容易でない。本章では突起の変形が無視できる場合と無視できない場合に分け，前者

では突起の変形を無視するかわりに球の上下変動を扱い自由転がり状態そのものを解析し，後者では突起や母材の変形は扱うが，接触高さ一定の拘束された転がり状態の解析を自由転がりにおける抵抗変動の近似解とみなして解析する。そしてシミュレーション計算により前者の適用範囲，後者の近似精度の検討を行う。

1.3.1 突起の変形が無視できる場合

突起の変形が無視できるような軽負荷時の自由転がり接触中におけるポテンシャル成分の変動による転がり抵抗の変動を，第1編第3章と類似の手法で解析する。

1.3.1.1 理　　論

表面粗さ突起の変形の影響が無視できるような軽荷重域を想定する。図2.1.26に示すように，xの位置にある突起の先端に球が接触している場合のポテンシャル成分による転がり抵抗力F_Rは次式で与えられる。

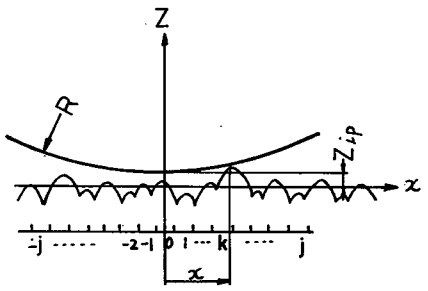


図2.1.26 接 触 状 態

$$F_R = -W\frac{dz_{ip}}{dx} \approx \frac{Wx}{R} \qquad (2.1.26)$$

W：垂直荷重

よって，抵抗係数f_R（$=F_R/W$）の分布を求めることはxの分布を求めることになる。この単一接触突起のx座標位置の分布を求めるには第1編第3章の最初の接触位置の解析と類似の考察を行えばよい。理論解析にあたっては，1）方向性のある表面粗さを考え，その方向性に直角な方向に球が転がる，2）接触突起および母材の変形は無視する，2）突起頂点の高さ分布は標準偏差σ_ϕの正規分布をなす，といった仮定をおく。なお，突起間隔の分布はほぼワイブル分布をなすことが実測例[22]より明らかになっているが，解析の複雑さを避けるため，ワイブル分布の両極端である指数分布と均一間隔の各々の分布を想定した場合の解を求

め，両者の平均値でもってワイブル分布の場合の近似解とする。この近似の妥当性については第１編第３章で確かめている。

以下，主として突起間隔分布を指数分布と設定した場合について述べる。図2.1.26 において，x 方向に等間隔 Δx で断面曲線を分割すると，任意の k 番目の区間中に突起が m 個存在する確率 $M_m(\Delta x)$ は式（1.3.3）で与えられる。任意の x の位置（$x = k\Delta x$）において幅 Δx 間に球に接触する突起が１個だけ存在する確率 Q_k は

$$Q_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz \right\}^{m-1} m f(h_k)\, dz_{ip} M_m(\Delta x) \right]$$

$$= f(h_k)\, dz_{ip}\, n_p\, \Delta x\, exp\left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz - 1 \right\} n_p\, \Delta x \right] \qquad (2.1.27)$$

ここで

$f(z)$：突起頂点高さ分布の確率密度関数，　$h_k = Z_{ip} + \dfrac{x^2}{2R}$

同様に，任意の $x(= k\Delta x)$ の位置において幅 Δx 中に球と接触する突起が存在しない確率 P_k は次式で求まる。

$$P_k = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz \right\}^m M_m(\Delta x) \right]$$

$$= exp\left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz - 1 \right\} n_p\, \Delta x \right] \qquad (2.1.28)$$

球底の高さが $Z_{ip} \sim Z_{ip} + \Delta Z_{ip}$ の間にあるとき，唯一の接触突起の位置が $(k - \frac{1}{2})\Delta x \sim (k + \frac{1}{2})\Delta x$ の間にくる確率 G_k は次式で表される。

$$G_k = \frac{Q_k}{P_k} \prod_{j=-\infty}^{\infty} P_j \qquad (2.1.29)$$

Z_{ip} はどこの位置でもよいから，結局 x の確率密度関数 $g(x)$ は次式で表される。

$$g(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left[n_p\, \Delta x \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{h_k} f(z)\, dz - 1 \right) \right] n_p f(h_k)\, dz_{ip} \qquad (2.1.30)$$

同様の手順で突起頂点間隔が均一な場合の x の確率密度関数も求まり，次式で表される。

$$g(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} 2 n_p \int_0^{\frac{1}{2n_p}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{h'_j} f(z)\, dz \frac{f(h'_j)}{\int_{-\infty}^{h_j} f(z)\, dz}\, dz_i \qquad (2.1.31)$$

ここで，

$$h'_j = Z_{ip} + (t + j\Delta x)^2/2R$$

よって転がり抵抗係数の変動の標準偏差 σ_f は次式に式（2.1.30）あるいは式（2.1.31）を代入すれば求まる。

$$\sigma_f = \frac{1}{R}\{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x)\,dx\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1.32)$$

1.3.1.2 数値計算結果

突起間隔分布が指数分布をなす場合の σ_f について式（2.1.30），（2.1.32）を用いて数値計算を行った結果を図 2.1.27 に示す。また式（2.1.31），（2.1.32）を用いて突起間隔が均一な場合の σ_f について数値計算を行った結果を図 2.1.28 に示す。第 1 編第 3 章の方向性のある表面粗さに関する最初の接触位置の解析において行ったように，ここでも突起間隔を指数分布と設定する場合と均一とする場合の理論値の平均値でもって実際の機械加工面の突起間隔分布にかなり近いと考えられるワイブル分布の場合の理論値の近似解とする。すなわち図 2.1.27 と図 2.1.28 両図の平均値を求める。また式（2.1.30），（2.1.31），（2.1.32）を無次元化表示し，変数変換を施すと，σ_f は

$$\sigma_f = \frac{\sigma_p^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} V_f(\sigma_p^* n_p^{*2}) \qquad (2.1.33)$$

の形に表されることがわかる。ただし V_f は $\sigma_p^* n_p^{*2}$ のみの関数で多重積分形で表さ

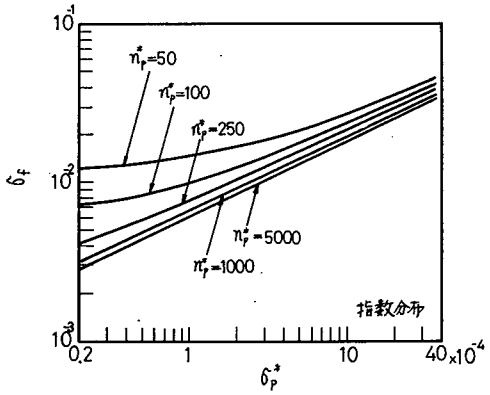


図 2.1.27 σ_f に及ぼす突起間隔分布形の影響

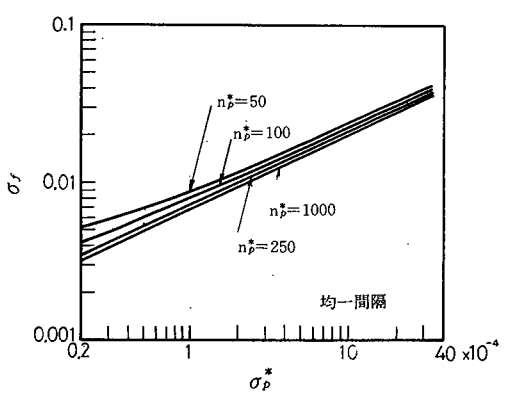


図 2.1.28 σ_f に及ぼす突起間隔分布形の影響

れる。結局，ワイブル分布の場合のσ_fの理論値は図2.1.29のように一本の曲線で表される。研摩布仕上面について考えると式(1.3.24)に示したように$\sigma_p n_p^2$はほぼ一定になるため図2.1.29の横軸は表面粗さに無関係に球の半径Rのみで表される。この観点から図2.1.29を見直すとσ_fは$\sigma_p^{\frac{1}{2}}$に比例して増加し，R大なる（大体$R>1\ mm$）場合$R^{\frac{1}{2}}$にほぼ逆比例することがわかる。

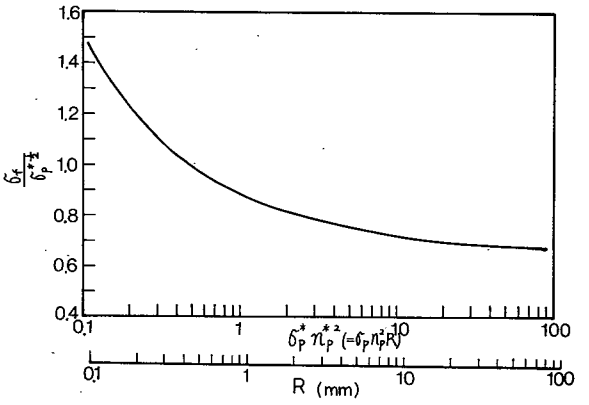


図2.1.29 $\sigma_p^* n_p^*$ と $\sigma_f/\sigma_p^{*\frac{1}{2}}$ の関係

1.3.1.3 実　　験

実験装置はさきに図2.1.5で示した転がり摩擦力測定装置を用い，図2.1.30に示す手順でσ_fを測定した。球および上部試験片は前節の実験と同一のものを使用し，下部試験片の材質，表面仕上げ方法ともに本章1.2.2.3のそれと同一である。

転がり摩擦力測定装置
↓
動ひずみ計
↓
バンドパスフィルタ
↓
データレコーダ
↓
A・D変換器
↓
ミニコンピュータ
↓
σ_f

図2.1.30 σ_f の測定手順

測定結果を図2.1.31に示す。図中の丸印は試料表

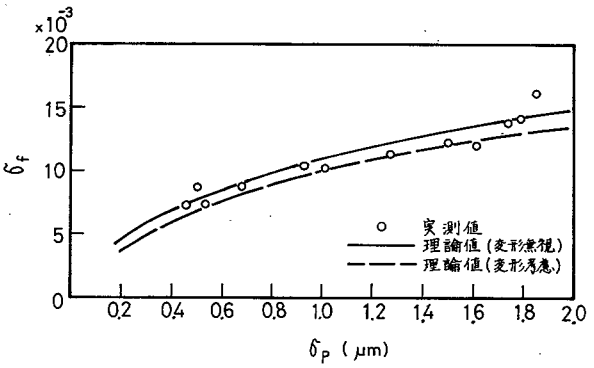


図2.1.31 σ_f に関する理論値と実験値との比較
$R=5\text{mm}$　　$W=50\text{gf}$

面上5ケ所における転がり距離 6 mm の測定結果の平均値で実線は式（2.1.32）による数値計算結果を示し，破線は後述（図 2.1.33）のシミュレーション結果に従って突起の変形の影響を考慮に入れて実線を補正したものである。いずれにしても理論値と実測値はかなり良好な一致を示し，本理論の妥当性が実験的に確認できたものと考えられる。

1.3.1.4 考　　察

この突起の変形を無視した理論の適用範囲を検討する。そのために突起頂点高さとして正規乱数を，頂点の横方向間隔としてワイブル乱数を計算機内で発生させ，突起の変形を考慮に入れた転がり抵抗の変動をシミュレーション計算で求めた。

接触突起が弾性変形する場合のシミュレーション結果を図 2.1.32 に，塑性変形する場合のそれを図 2.1.33 に示す。なお図 2.1.33 の計算条件は，後述する検証実験に合わせて平板の材質として黄銅を想定している。

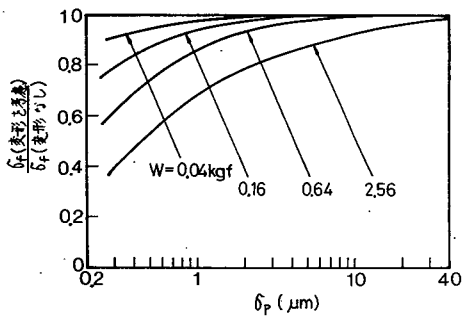


図 2.1.32　σ_p に及ぼす突起の変形の影響
$\beta = 0.1$ mm　　$n_p = 50$ mm^{-1}
R = 5 mm
$E_1 = E_2 = 21000$ kgf/mm^2

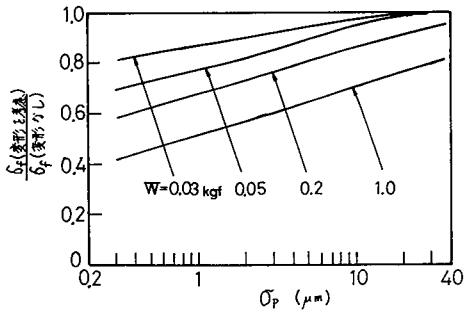


図 2.1.33　σ_f に及ぼす突起の変形の影響
$\beta = 0.15$ mm　　$p_m = 150$ kgf/mm^2
$n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}$ mm^{-1}　　R = 5 mm
$E_1 = 21000$ kgf/mm^2
$E_2 = 10000$ kgf/mm^2

図 2.1.32 から，σ_p 大なる場合はかなり高荷重でも突起の変形を無視した解が適用できるが，σ_p 小なる場合には軽荷重時でも接触点の数が多くなるため，突起の変形を無視し常に単一の突起しか球と接触しないという理論の設定では大きな

誤差を伴うことがわかる。図 2.1.33 でも定性的には前図と同様の傾向を示しており，突起の変形の影響は前図よりさらに顕著に表れている。

以上から，処女面転がりのような塑性接触状態では本理論の適当範囲はきわめて軽荷重域に限られ，定常転がりのような弾性接触状態では塑性接触の場合に比べ適用範囲はかなり拡がるが，やはり 0.2 kgf 以下の軽荷重域に限られることがわかる。結局，突起の変形を無視した解は現実の接触問題にそのまま適用できることは少なく，自由転がりにおける転がり抵抗の変動の標準偏差の上限を示すという点にのみ意味があると考えられる。

1.3.2 突起の変形を考慮に入れた場合

前述の突起の変形を無視した解はポテンシャル変動による抵抗力変動の標準偏差の最大値を推定するのには適しているが，現実の接触条件で突起の変形を無視しうる場合は少ない。そこで突起および母材の変形を考慮に入れて転がり抵抗の変動を解析しなければならぬが，そのとき一つの大きな難問に逢着する。自由転がりにおいては負荷一定条件で接触高さ Z_{op} がランダムとなるような転がり運動を行っているのでその設定のもとで解析すべきであるが，これは前節でも述べたが現状では解けない。そこでやむなく，荷重の平均値が設定荷重になるような確定量 Z_{op} を取り，一定の接触高さを保ちつつ転がる場合の転がり抵抗の変動について解析する。そして Z_{op} 一定，すなわち拘束された転がり接触状態と，Z_{op} がランダムになる自由転がり接触状態とで転がり抵抗の変動にどの程度の差が生じるかをシミュレーション計算を用いて比較し，上記解析の自由転がりに対する近似度，適用範囲などについて検討する。

1.3.2.1 理　　論

単一突起の近接量 α_a と突起に作用する荷重 W_a との関係を

$$W_a = g(\alpha_a) \qquad (2.1.34)$$

とおき，母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径（x 軸方向）が $\gamma_x \bar{R}$

なる2次曲面が接触高さ Z_{op} の位置まで食込んだ状態を想定する。

各接触突起により球に作用するモーメント M_a は突起頂点高さを z とすると

$$M_a = x \cdot g\left(z - Z_{op} - \frac{x^2}{2R\gamma_x}\right) \qquad (2.1.35)$$

となる。各接触突起による M_a はたがいに独立な確率変数と考えられるから，これらの和の確率変数の標準偏差，すなわち球に作用する転がりモーメントの標準偏差 σ_M は次式で表される。

$$\sigma_M^2 = n_p \int_{-x_{max}}^{x_{max}} x^2 \int_{z_{op}+\frac{x^2}{2R\gamma_x}}^{z_{max}} g^2\left(z - Z_{op} - \frac{x^2}{2R\gamma_x}\right) f(z)\, dz \qquad (2.1.36)$$

上式の関数 g および接触条件により定まる定数 Z_{op}，γ_x に従来の解析結果を代入すればよい。

(1) 弾性接触の場合

式 (2.1.36) の g のかわりに式 (1.5.9) の W_a を代入すればよい。すなわち，

$$\sigma_M^2 = 2Q_a^2 n_p \int_0^{x_{max}} x^2 \int_{z_{op}+\frac{x^2}{2R\gamma_x}}^{z_{max}} \left\{z - Z_{op} - \frac{x^2}{2(\gamma_x R+\beta)}\right\}^3 f(z)\, dz\, dx \qquad (2.1.37)$$

(2) 塑性接触の場合

圧力分布が非対称なため，転がり前方と転がり後方に分け，前方の分布圧力 p_f としては式 (2.1.18) を用い，後方の分布圧力 p_r としては式 (2.1.19) を用いる。すなわち σ_M は次式で定まり，

$$\sigma_M^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{p_f^2(x,y)\, U(x) + p_r^2(x,y)\, U(-x)\}\, dy\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} \{p_f(x,y)\, U(x) + p_r(x,y)\, U(-x)\}\, dy\, dx\right]^2 \qquad (2.1.38)$$

転がり抵抗の標準偏差 σ_F は σ_M から次式のように求まる。

$$\sigma_F = \frac{\sigma_M}{R} \qquad (2.1.39)$$

1.3.2.2 数値計算結果

(1) 突起が弾性変形する場合

図 2.1.34 に球の半径 R と転がり抵抗力の標準偏差 σ_F の関係を示す。この

図から σ_F は R の約 0.4 乗に逆比例し，σ_p の約 0.88 乗に比例することがわかる。

図 2.1.35 に荷重と σ_F の関係を示す。荷重大なるほど σ_F/W，すなわち見かけ[註)]

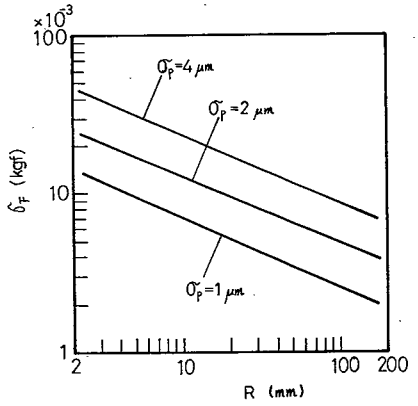


図 2.1.34　R と σ_F の関係
$W=1\,kgf$　$n_p=50\,mm^{-1}$
$\beta=0.1\,mm$　$E=21000\,kgf/mm^2$

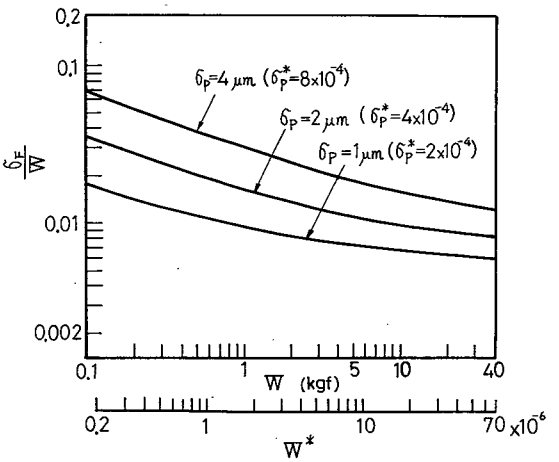


図 2.1.35　W と σ_F の関係
$(\beta=0.05\,mm \quad R=5\,mm$
$n_p=50\,mm^{-1} \quad E=21000\,kgf/mm^2)$
$(\beta^*=10^{-2}$
$n_p^*=250)$

の転がり抵抗係数は減少する。これは荷重が大になると球に接触する突起の数が増加するため，転がり前方と後方の接触突起によるモーメントが平均化され，σ_F が減少するものと考えられる。

図 2.1.36 に β，n_p と σ_F の関係を示す。n_p 大なるほど接触突起の数が増えるため W 増加と同一の効果が表れ σ_F は減少する。n_p，β が σ_F に及ぼす影響は σ_p，R に比べかなり小なることがわかる。

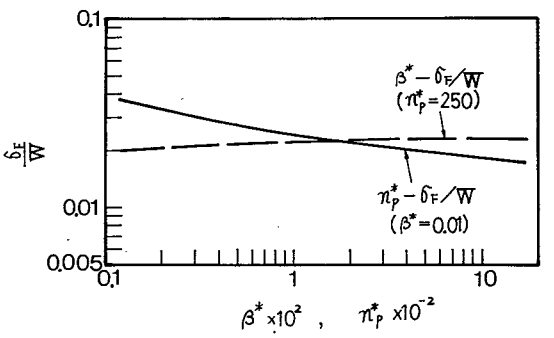


図 2.1.36　β^*，n_p^* と σ_F/W の関係
$W^*=5\times10^{-6}$　$\sigma_p^*=8\times10^{-4}$

(2)　突起が塑性変形する場合

註）σ_F と平均荷重の比を示し，いわゆる摩擦係数の標準偏差とは異なるため見かけと呼ぶ。

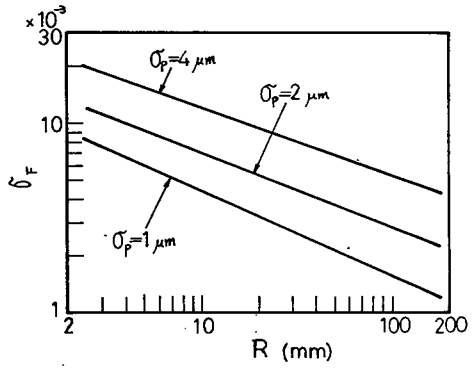


図 2.1.37　R と σ_f の関係

$\beta = 0.05$ mm　$p_m = 150$ kgf/mm²

$n_p = 50$ mm⁻¹　$E_1 = 21000$ kgf/mm²

W = 1 kgf　$E_2 = 10000$ kgf/mm²

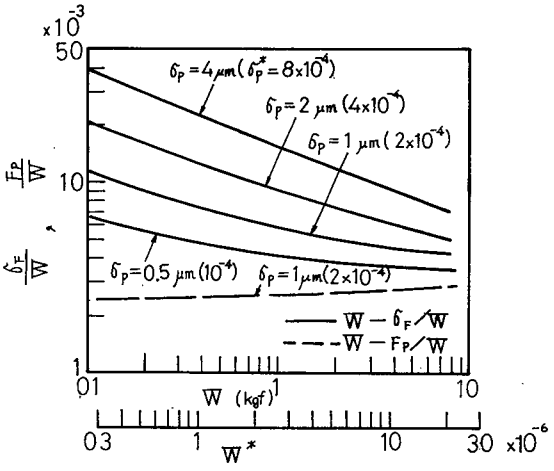


図 2.1.38　W と σ_F の関係

$\beta = 0.05$ mm　$p_m = 150$ kgf/mm²

$n_p = 50$ mm⁻¹　$E_1 = 21000$ kgf/mm²

R = 5 mm　$E_2 = 10000$ kgf/mm²

$\beta^* = 10^{-2}$

$n_p = 250$

$p_m^* = 3.2 \times 10^{-3}$

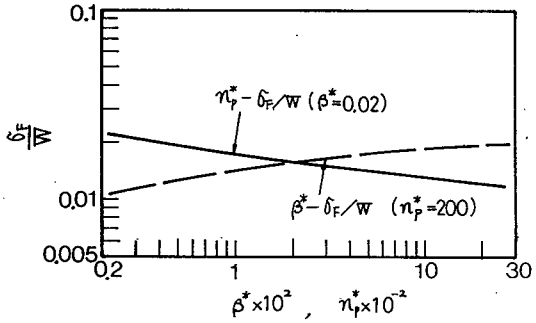


図 2.1.39　β^*, n_p^* と σ_F/W の関係

$W^* = 2 \times 10^{-6}$　$\sigma_p^* = 5 \times 10^{-4}$

$p_m^* = 5 \times 10^{-3}$

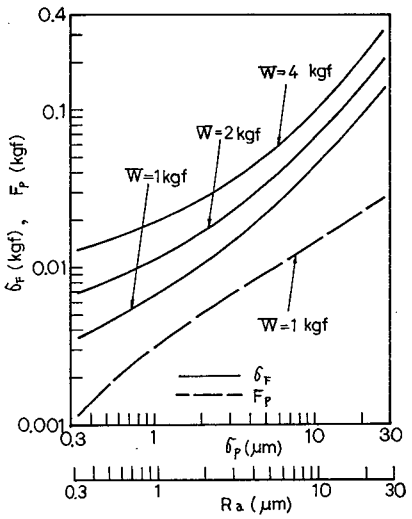


図 2.1.40　R_a と σ_F の関係

$\beta = 0.05$ mm　$E_1 = 21000$ kgf/mm²

R = 5 mm　$E_2 = 10000$ kgf/mm²

$p_m = 150$ kgf/mm²

図 2.1.37 に R と σ_F の関係を示す。定性的には図 2.1.34 と全く同じ傾向を示し，σ_F は R の約 0.4 乗に逆比例し σ_p の約 0.8 乗に比例する。

図 2.1.38 に荷重 W と σ_F の関係を，図 2.1.39 に β, n_p と σ_F の関係を示す。それぞれ図 2.1.35 と図 2.1.36 と類似の傾向を示しており，W や n_p が大なるほど，

β小なるほどσ_F/Wが減少することがわかる。なお図2.1.38に平均転がり摩擦力F_pも破線で示したが，Wが増加するとσ_F/Wは減少するがF_p/Wは逆にわずかであるが増加の傾向を示している。すなわち荷重が増大すると，転がり抵抗の変動に比べ転がり摩擦力の平均値の重要性が相対的に増すことがわかる。

σ_pとn_pの関係として研摩布仕上面に関する実験式(1.3.24)を，またσ_pとR_aの関係として式(1.3.20)，(1.3.26)を用いて整理した結果を図2.1.40に示す。この図ではβはσ_pと独立に一定と設定しているが，βがσ_Fに及ぼす影響は図2.1.39に見られるようにかなり小さいため，図2.1.40はR_aとσ_Fの関係を近似的に示していると見なしうる。図中，F_pとR_aの関係も破線で示したが，σ_FとF_pを比較すると両者の比はR_aの値により変化するが，近似的には$W=1\ kgf$の場合σ_FはF_pの2～3倍の値になることがわかる。

1.3.2.3 実　　験

前述のσ_Fに関する理論の妥当性を確かめるために転がり抵抗の変動を測定し，実測値と理論値の比較を行う。実験装置，実験方法は本章1.3.1.3と同じで荷重条件のみを変えている。

(1) 弾性接触状態

平板試験片および球としては本章1.2.1.3と同一で，塩化ビニール板と鋼球を用いた。図2.1.41に実験結果を示す。図中，黒丸は各試験片に対する理論値を，白丸は実験結果を示す。

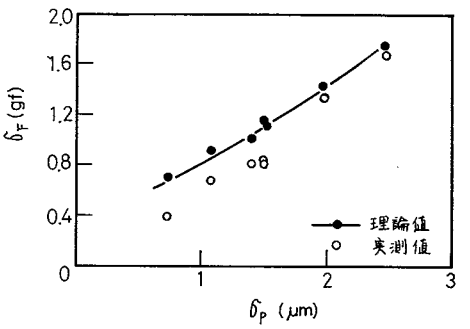


図2.1.41　σ_Fの理論値と実測値の比較
R＝5mm　W＝100gf

定性的には理論値と実測値は似た傾向を有しているが，σ_p小なる領域で理論値に比べ実測値が小なる値を示している。

(2) 塑性接触状態

平板試験片および球としては本章1.2.2.3と同一で黄銅板と鋼球を用いた。

図 2.1.42 と 図 2.1.43 に実験結果を示す。これらの図も定性的には理論値と実測値は似た傾向を有しているが理論値に比べ実測値が小なる値を示している。

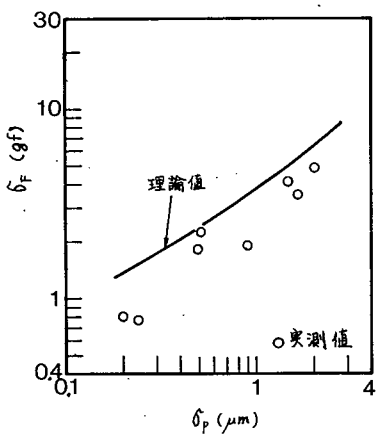


図 2.1.42 σ_F に関する理論値と実測値の比較
R＝5mm　W＝0.5kgf

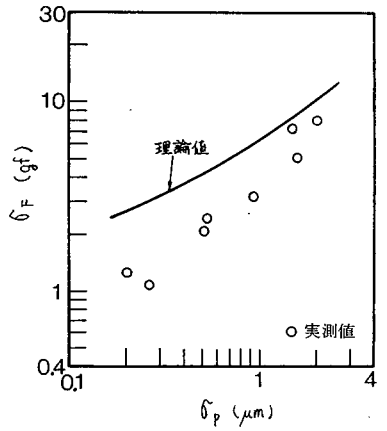


図 2.1.43 σ_F に関する理論値と実測値の比較
R＝5mm　W＝1kgf

弾性接触，塑性接触ともに実測値が理論値より低い値を示すのは試料面が単純な一方向性の粗さでなく，条痕方向にも微小おうとつを有していることによるものと考えられる。また 図 2.1.43 に見られるように，荷重が大で σ_p 小なる場合に理論値と実測値の差が顕著なのは，図 2.1.21 の F_p の場合にも認められたように母材の塑性変形の影響が表れているものと考えられる。

しかし，これらはいずれも推定にすぎず，この差の原因は判然としない。以上のように σ_F に関しては定量的には検討の余地を残すが，定性的あるいは σ_F の大まかな推定としては本理論でも満足できるものと考えられる。

1.3.2.4　考　　察

接触高さ Z_{op} を確定量とする場合とランダム変数とする場合とで σ_F にどの程度の差が生じるかについてシミュレーション計算を用いて検討する。転がり接触状態の計算手順は前節同様で，前者についてはモデル面上に確定接触高さ Z_{op} だけ食込んだ時の球に作用する荷重と，接触突起からうける球の中心のまわりの

モーメントの不釣合による抵抗力を計算する。この計算をモデル面上の 100 箇所で繰返し行い荷重，抵抗力それぞれの平均値$\overline{W}$，標準偏差σ_Fを求める。

後者についても，モデル面上で突起に作用する負荷W_aの総和が確定荷重Wに等しくなるような接触高さZ_{op}を繰返し計算で求め，Z_{op}が求まると球の中心のまわりのモーメントの不釣合による抵抗力を計算する。この計算をモデル面を変えて繰返し行い，抵抗力の標準偏差σ_Fを求める。以上のシミュレーションによるW，$\overline{W}$が同じ値のときの両者のσ_Fを比較する。

弾性接触の場合には図 2.1.44 に，塑性接触の場合には図 2.1.45 に見られるように，いずれの場合もσ_p大でW小なる場合を除いて両者の差はかなり小なることがわかる。平均摩擦力の場合同様，σ_Fについても本理論で自由転がりの場合の理論値を推定することができる。

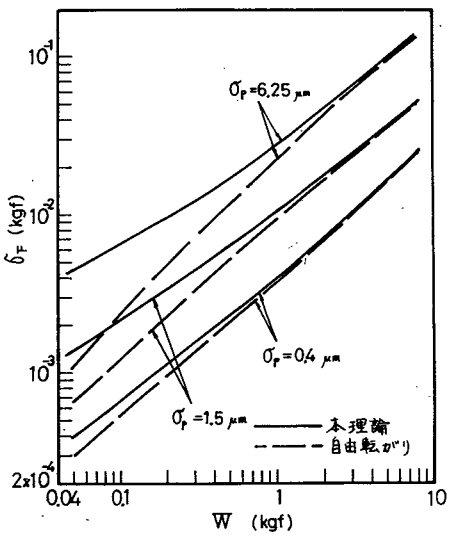


図 2.1.44　自由転がりと本理論の比較
$\beta=0.1$mm　$E_1=E_2=21000$ kgf/mm^2
$n_p=30$ mm^{-1}
R＝5 mm

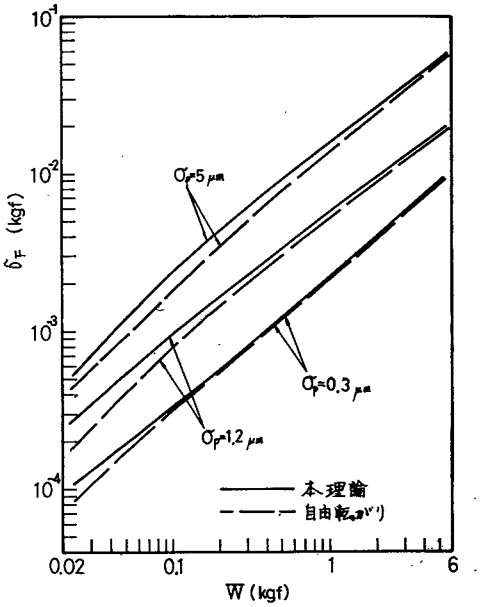


図 2.1.45　自由転がりと本理論の差
$n_p=(1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}$ mm^{-1}　$p_m=150$ kgf/mm^2
$\beta=0.05$ mm　$E_1=21000$ kgf/mm^2
R＝5 mm　$E_2=10000$ kgf/mm^2

1・4 結　　言

転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響について前編の接触理論を適用あるいは発展させて理論的に考察を試みた。また，ポテンシャル変動成分も含めた転がり抵抗の変動の標準偏差と表面粗さの関係についても解析を試み，以下に示すような結果を得た。

(1) 転がり摩擦力と表面粗さの関係について

i) 接触突起が弾性変形する場合の転がり摩擦に及ぼす表面粗さの影響は突起，および母材の弾性変形にともなう履歴損失と表面粗さとの関係から説明でき，この影響を定量的に推定することが可能になった。

ii) 接触突起が塑性変形する場合の転がり摩擦力も突起および母材の弾性回復を考慮に入れることにより，かなり精度の高い理論的推定が可能になった。

iii) 弾性接触，塑性接触いずれの場合も理論値と実測値はかなりの一致を示し，理論の妥当性が確かめられた。

iv) 母材の塑性変形開始条件が処女面転がり摩擦実験と理論解析結果との比較から求まり，表面粗さ大なるほど母材の塑性変形開始条件が高荷重域になることが明らかになった。

(2) 転がり抵抗の変動の標準偏差について

i) 突起の変形を無視した自由転がり接触の解析結果は実験結果と良好な一致を示し，きわめて低荷重域の転がり抵抗係数 σ_f の理論的推定が可能になったと同時に，自由転がり接触における σ_f の値の上限が推定できた。

ii) 突起の変形を考慮に入れた解で自由転がり接触時の抵抗の標準偏差 σ_F がきわめて低荷重域を除いて近似的に推定できることが明らかになった。

iii) 弾性接触状態と塑性接触状態では σ_F と表面粗さの関係についての理論値は定性的に同様の傾向を示し，σ_F は突起頂点分布の標準偏差にほぼ比例し，球径の約 0.4 乗に逆比例する。

iv) σ_F に関する実測値は理論値より低目に表れるが，定性的には理論と良い一致

を示す。

(1), (2) を通じて，接触高さがランダムに変化する自由転がり状態の平均摩擦力，転がり抵抗の変動等が接触高さを一定と設定する拘束転がり状態の解析で，近似的に推定できることがシミュレーション計算結果により明らかになった。

参　考　文　献

1) J.J.Bikerman : J. of Appl. Phys., 20, 10 (1949) 971.
2) J.Halling : Brit. J. of Appl. Phys., 10, April (1959) 172.
3) 久田 : 精密機械 , 17, 2 (1950) 49.
4) 佐々木, 沖野, 大塚 : 日本機械学会論文集 , 26, 169 (1960) 1281.
5) 佐々木, 沖野 : 日本機械学会論文集 , 27, 181 (1961) 1456.
6) G.A.D.Briggs and B.J.Briscoe : Nature, 260, March 25 (1976) 313.
7) O.Reynolds : Phil. Trans. Roy. Soc., 166 (1876)155.
8) H.L.Heathcote : Proc. Inst. Aut. Eng., 15 (1921) 569.
9) G.A.Tomlinson : Phil. Mag., 7, (1929) 905.
10) たとえばF.P.Bowden and D.Tabor : The Friction and Lubrication of Solids Part 2, Oxford (1964) 306.
11) 佐藤 : 表面工学概論, 養賢堂 (1965) 114.
12) 石垣, 川口 : 昭和49年度 精機学会秋季大会学術講演会前刷集 , (1974) 232.
13) D.G.Flom : J.Appl. Phys., 31, (1960) 306.
14) たとえば, R.C.Drutowski : Trans. ASME Ser. D. 81, (1959) 233.
15) 渡部, 川口 : 精密機械 , 42, 11 (1976) 1056.
16) A.N.Gent and R.L.Henry : Trans. of the Soci. of Rheology, 13, 2 (1969) 255.
17) 川口 : 潤 滑 , 15, 4 (1970) 187.

18) 石垣，川口： 精密機械，投稿中.
19) D.Tabor： The Hardness of Metals, Oxford (1951) 50.
20) 角田： 潤 滑 , 19, 2 (1974) 102.
21) 機械試験所報告 , 50 (1964).
22) 渡辺，石垣，川口： 昭和50年度 精機学会秋季大会学術講演会前刷，(1975) 345.

第 2 章　表面おうとつの測定精度について

2．1　緒　　言

表面粗さ，表面うねり等の測定には現在触針式表面形状測定器が最も広く使用されている。この触針式測定器には触針およびスキッドによる測定面の損傷[1,2]，触針の動特性[3] 等に起因する測定誤差のほかに以下に示すような幾何学的問題点も数多く残っている。

表面粗さの測定に関しては，1）触針半径と触針の幾何学的追従性の関係，2）スキッドの上下変動が表面粗さ測定値に及ぼす影響，3）MシステムとEシステム間の関係，等の問題点が挙げられる。

また，表面うねりに関しても JIS（B 0610）では電気的ろ波うねりと転がり円うねりの２種類のうねりが併記されているが，両者の換算方式はもちろん，転がり円うねり測定用触針の半径の選択基準も明確ではなく，転がり円の幾何学的特性に対する基礎的検討が欠けている。

以上のような幾何学的問題に関しても研究報告がいくつか見られるが，これらは大体において定性的な報告にとどまっている。本章では第１編第３章の最初の接触位置の解析結果をもとにして，表面粗さ測定精度に関する前述の 1），2），3）の項目，および転がり円うねりに及ぼす表面粗さの影響等の問題について考察を試みる。

2．2　表面粗さ測定精度について

2.2.1　触針半径の影響

触針半径が有限であるため，きわめて微小なおうとつについては触針が表面の幾何学的形状に対して追従できない場合がある。この問題に対する従来の理論的研究[4,5,6]は規則的な表面粗さや，一方向のみに方向性を有する表面粗さに関す

るものがほとんどである。本章ではランダムな性状を有し，方向性のある表面粗さ，および方向性のない表面粗さに関して自乗平均粗さ（および中心線平均粗さ）に及ぼす触針半径の影響について考察する。なお，この問題については説明の都合上本章2.3.3.3の中で述べる。

2.2.2 スキッドの上下変動の影響

スキッドを使用して表面粗さを測定する場合，測定値の中に真の表面粗さ成分のほかに表面粗さによるスキッド上下変動の成分が含まれる。このスキッド上下変動が自乗平均粗さ（R_{rms}とおく）やR_a，R_{max}，R_zに及ぼす影響について考察を試みる。ところで，この問題に関しては実験的研究[7]はあるが理論的にはほとんど報告されていない。なお，後述するように，方向性のない表面粗さの場合にはスキッド上下変動の影響が小さく，しかも理論解析上の問題点も残っているので，ここでは主として方向性のある表面粗さの場合について考察する。

2.2.2.1 理　　論[8]

R_a，R_{max}とR_{rms}の関係を考える。いま同一試料面上をスキッドを用いて測定した表面粗さ曲線とスキッドを用いずに測定した表面粗さ曲線をもとにして，それぞれの表面粗さ曲線の高さ分布を求めたところ図2.2.1に示すように両者ともほぼ正規分布をなすことがわかる。

正規分布の場合，式（1.3.20）で示したようにR_{rms}とR_aとは比例関係にあることが理論的に明らかであるので，R_aに対するスキッドの影響はR_{rms}に対するスキッドの影響と同一と考えられる。R_{max}についても式（1.3.23）に示したようにR_{rms}と近似的に比例関係にある。

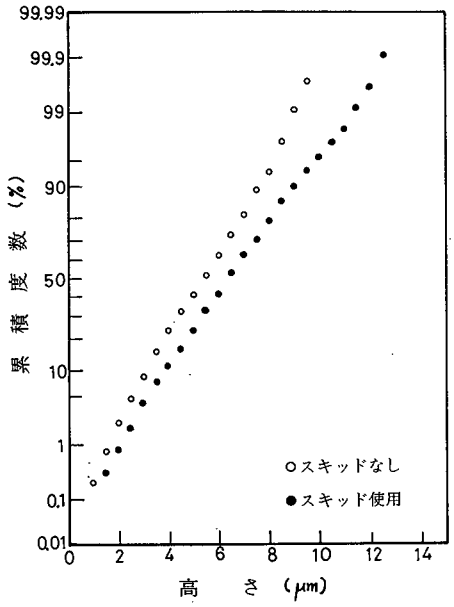


図2.2.1　表面粗さ曲線の高さ分布
研削仕上面　R_a=1.6μm

そこで R_{max} も R_{rms} に対する考察が準用できる。ただし R_{max} の測定の場合は R_{rms} と異なり電気的フィルタと基準長のカットオフ効果が異なるため，後述するようにスキッドの効果にも R_{rms} の場合に比べ少し差が生じる。

以上の観点から主として R_{rms} に及ぼすスキッド上下変動の影響を理論的に考察する。なお，検証実験においては使用した表面粗さ計では R_{rms} が測定できない[註)]ため，R_a についてスキッドの影響を測定した。

ここではスキッドとして最も一般的と考えられる，だ円体の単一スキッドでスキッドと触針の間がトレース方向に数mm 離れている場合を扱う。なお，マタギスキッドや複数スキッドのような特殊なものについてはのちに考察を行う。このようなスキッドの場合，形状誤差や表面うねりの影響を無視すればスキッドの上下変動と触針の上下変動は互いに独立であると考えられる。そこで，スキッド使用時の自乗平均粗さ測定値を R'_{rms}，真の自乗平均粗さを R_{rms} とすると R'_{rms} と R_{rms} の比は次式で与えられる。

$$\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \frac{(\sigma_{zi}^2 + \sigma_s^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_s} = \left\{ \left(\frac{\sigma_{zi}}{\sigma_s}\right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.1)$$

ここで σ_s は R_{rms} そのもので，σ_{zi} はスキッド上下変動の標準偏差を表す。σ_{zi} は粗い平面に球を近づけた場合の最初の接触位置の標準偏差に等しいと考えられるため，第1編第3章の σ_{zip}，σ_{zis} の解析結果がそのまま適用できる。

(1) 方向性のある表面粗さの場合

式 (2.2.1) の σ_{zi} の代わりに式 (1.3.18) の σ_{zip} を，また式 (2.2.1) の σ_s を式 (1.3.26) を用いて σ_p で表すと，R'_{rms}/R_{rms} は σ_p，n_p，R_x の関数として表される。ただし σ_p，n_p はそれぞれ突起頂点高さの標準偏差，突起密度で R_x はスキッドのトレース方向曲率半径を表す。

$$\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \left\{ 0.74\,(-0.02 t_p^2 + 0.135\, t_p^2 - 0.356\, t_p + 0.86)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.2)$$

註）使用した小坂式 SE 3型表面形状測定器では R_{rms} は一応測定できることになっているが，その値は R_a 値の 1.1 倍に固定されているので測定の意味がない。

ここで，

$$t_p = log\ \sigma_p n_p^2 R_x$$

上式の計算結果を図 2.2.2 に示す。

σ_p と n_p の関係として式（1.3.24）の実験式を用いると，図 2.2.2 の横軸はスキッドのトレース方向曲率半径 R_x のみで表される。この図からスキッド半径 R_x 小なるほどスキッドの上下変動が R_{rms} 測定値に大きな影響を与えることがわかる。市販の表面粗さ計のスキッド（$R_x = 8 \sim 40\ mm$）の場合，$R'_{rms}/R_{rms} = 1.13$（$R_x = 8\ mm$）～ 1.10（$R_x = 40\ mm$）となる。

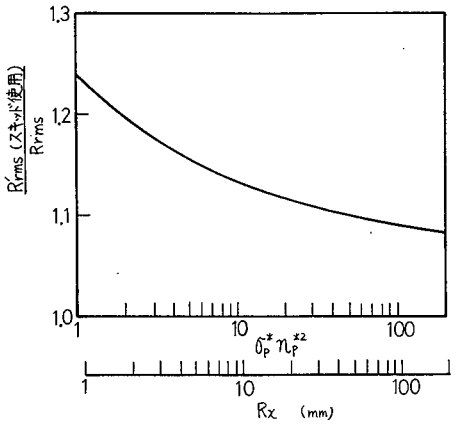


図 2.2.2　R_{rms} に及ぼすスキッド上下変動の影響　（方向性あり）

(2) 方向性のない表面粗さの場合

式（2.2.1）の σ_{zi} に式（1.3.19）の σ_{zis} を代入すると，次式および図 2.2.3 に示すように R'_{rms}/R_{rms} が σ_s，n_s，R の関数として表される。

$$\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \{(-0.0068\, t_s^3 + 0.061\, t_s^2 - 0.218 t_s + 0.618)^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.3)$$

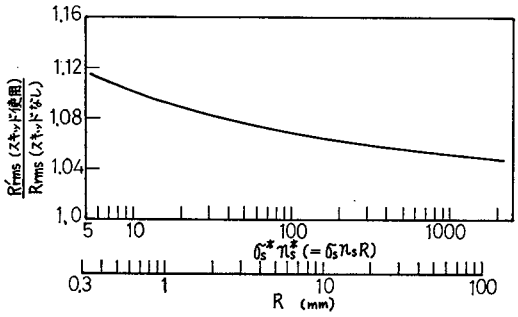


図 2.2.3　R_{rms} に及ぼすスキッドの影響　（方向性なし）

ここで，

$$t_s = log\ \sigma_s^* n_s^* = log\ \sigma_s n_s R$$

ただし，R は式（1.3.13）と同様，次式のように x;y 方向曲率半径 R_x，R_y の幾何平均を表す。なお，x,y 方向はそれぞれトレース方向と，それと直角の方向を表す。

$$R = (R_x R_y)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.4)$$

σ_s と n_s の関係として湿式ラップ仕上面に関する実験式（1.3.25）を用いると，図 2.2.3 の横軸は R のみで表される。図 2.2.2 と図 2.2.3 を比べると，方向性のない面の場合は一方向に方向性を有する場合に比べスキッド上下変動の影響を受けにくいことがわかる。

図 2.2.3 から

$$R = 8\ mm \quad では \qquad R'_{rms}/R_{rms} = 1.07$$
$$R = 40\ mm \quad では \qquad R'_{rms}/R_{rms} = 1.06 \qquad (2.2.5)$$

以上の結果から，スキッド使用時には方向性のある表面粗さの場合測定値が真の値より 1 割強，方向性のない表面粗さの場合 1 割弱程度大きめの値になることが考えられる。

2.2.2.2 実　　験

スキッドの有無により R_a，R_{max}，R_z がどの程度変化するかを表面粗さ計を用いて実測し，理論との比較を行う。実験条件を表 2.2.1 に示す。

表 2.2.1　実　験　条　件

(1) 表面粗さ計の諸元

機　種		小坂製作所　SE 3 型
スキッド	形状 測定荷重	球形，半径 40 mm 約 50 gf
触　針	半径 測定荷重	約 4 μm 0.5 gf
高域フィルタ　カットオフ値 基 準 長		0.8，2.5 mm （R_a 測定時） 0.8 mm （1 部　2.5 mm）

(2) 表面粗さ試験片

	方向性のある面	方向性のない面
材　質	6/4 黄銅 マイクロビッカース硬さ H_V=150	S 25 C H_V = 190
表面仕上	研摩布仕上 R_a = 0.13～3.2 μm	湿式ラップ仕上 R_a = 0.3～1.5 μm

(1) R_a について

方向性のある面に関する実験結果を図 2.2.4 に，方向性のない面に関する実験結果を図 2.2.5 に示す。丸印は実測値で，1個の試験片につき同一カットオフ値でスキッドを使用した場合と使用しない場合につき，それぞれ5箇所の R_a の値を測定しそれぞれの平均値の比を求めた結果を示す。実線は理論値を示し，図 2.2.2 で $R_x = 40\,mm$ における値を用いた。図 2.2.4 では，カットオフ値 2.5 mm の場合には白丸の実測値は実線の理論値のまわりにばらつき，スキッドの影響を理論値で推定することはほぼ妥当と考えられる。しかし，カットオフ値を 0.8 mm にすると黒丸で示した実測値は理論値より低い値を示す。これはスキッドの上下変動の成分が高域フィルターにより減衰されているためと考えられる。

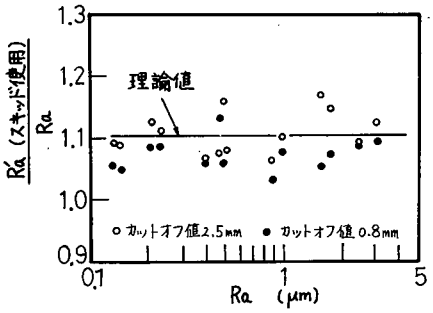


図 2.2.4 R_a に及ぼすスキッドの影響（方向性あり） $R_x = 40$ mm

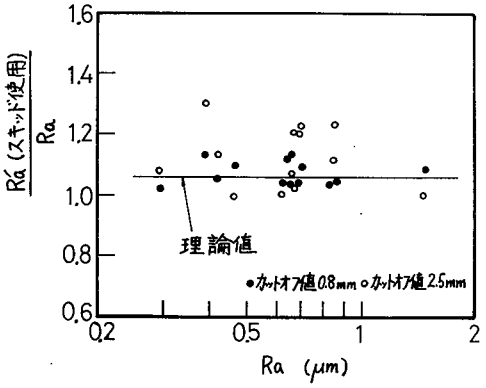


図 2.2.5 R_a に及ぼすスキッドの影響（方向性なし） R = 40 mm

方向性のない表面粗さに関する測定結果を図 2.2.5 に示す。黒丸で示したカットオフ値 0.8 mm の測定結果は理論値に近い値を示しており，フィルターの影響をあまり受けていない。これは方向性のない面の場合，方向性のある面に比べてスキッドに接触する突起の数が多いため，スキッド上下運動のスペクトル分布が高周波側に高くなっているためと考えられる。白丸で示したカットオフ値 2.5 mm の場合の測定結果も理論値にかなり近い値ではあるがいくらか高い値を示している。これは表面うねりによりスキッドが上下変動したためと考えられる。

(2) R_{max}，R_z について

図 2.2.6 に方向性のある表面粗さに関する測定結果を示す。丸印で示し

た実測値は，各試験片について５箇所の測定結果の平均値である。R_{max}，R_z いずれの場合も理論値のまわりにばらついており，スキッドの影響を本理論で推定しうることがわかる。図 2.2.7，図 2.2.8 に方向性のない表面粗さの場合の，それぞれ R_{max}，R_z についての実測値を示す。両図とも測定値のばらつきは大であるが平均的には本理論が成立することがわかる。

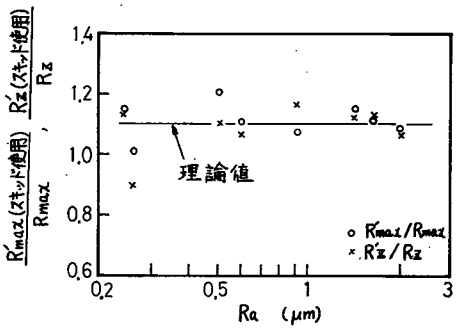


図 2.2.6 R_{max}，R_z に及ぼすスキッドの影響
（方向性あり） $R_x = 40$ mm

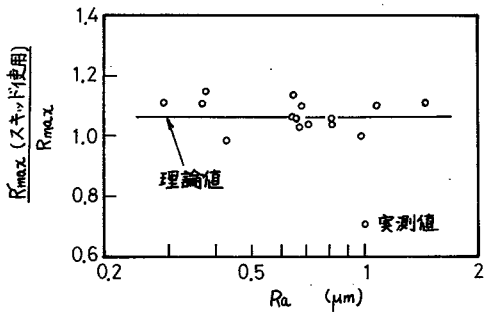


図 2.2.7 R_{max} に及ぼすスキッドの影響
（方向性なし） $R = 40$ mm

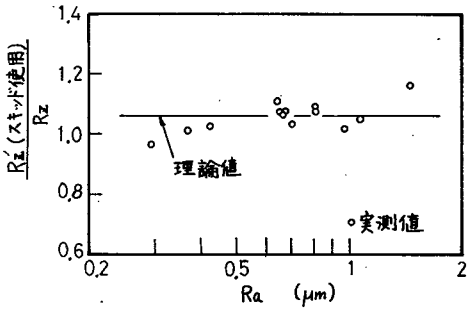


図 2.2.8 R_z に及ぼすスキッドの影響
（方向性なし） $R = 40$ mm

2.2.2.3 考　　察

R_a に関する測定結果に表れたスキッド上下変動に対する電気的フィルタの効果や，規則性のある表面粗さの場合のスキッド上下変動の影響，特殊形状スキッドの場合の上下変動の影響，および突起の変形がスキッド上下運動に及ぼす影響等について考察を試みる。

(1) 電気的フィルタの効果

図 2.2.4 で認められたように高域フィルタによりスキッド上下変動成分が減衰することが考えられる。この高域フィルタの効果についてもう少し細かく検

討してみる。

触針式表面粗さ計の触針の代わりに球形子を取付けることにより，表面粗さ曲線の代わりに転がり曲線[註)]を測定し，それのパワースペクトルを計算する。その一例を図 2.2.9 に示す。なお，パワースペクトル算出にあたっては転がり曲線から最小自乗法により形状誤差を取り除き，そのデータを直接フーリエ変換して赤池ウィンドウを施すことによりスペクトルを求めた。

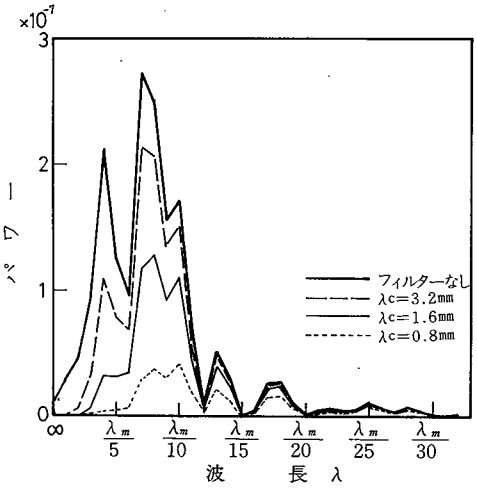


図 2.2.9 パワースペクトル

$R_x=30\,mm$ $\lambda_m=12.3\,mm$

JIS B 0651 にのっとり減衰率 $-12\,dB/oct$ のフィルタ特性のテーブルを図 2.2.10 のように作る。この値を図 2.2.9 のパワースペクトルにかけることにより数値計算でフィルタの代用をする。すなわち，フィルタ通過後に相当する転がり曲線のパワースペクトルを図 2.2.9 の破線等のように求め，これらの曲線を積分することによりフィルタ通過後のスキッド上下変動の標準偏差 σ_{zi}^{F} が求まる。

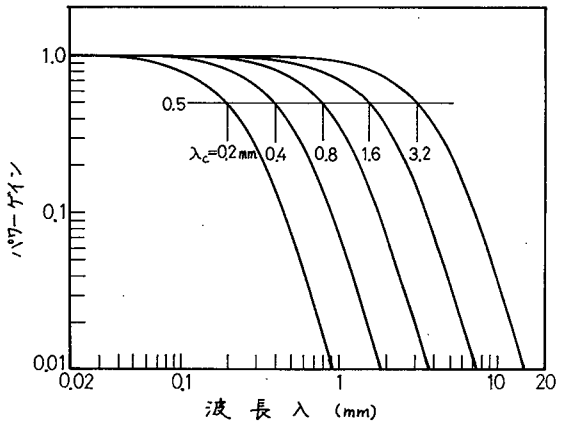


図 2.2.10 フィルタ特性

以上の手順により求めた計算結果を図 2.2.11，図 2.2.12 に示す。図中，記号で示した各試験片の表面粗さを表 2.2.2 に示す。電気的フィルタの効果は中心線平均粗さにほぼ無関係

註）すべり接触であるが JIS の転がり円うねり曲線と似た意味で転がり曲線と呼ぶ。

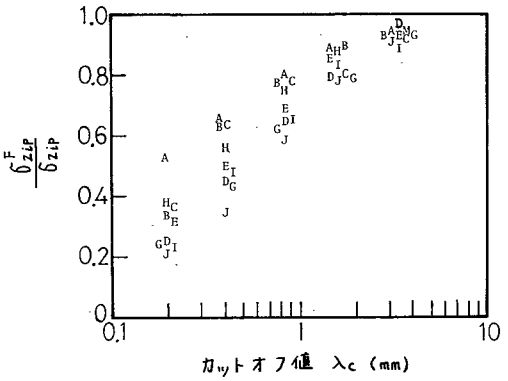


図 2.2.11　スキッドの上下変動に及ぼすフィルタの影響
$R_x = 5\,mm$

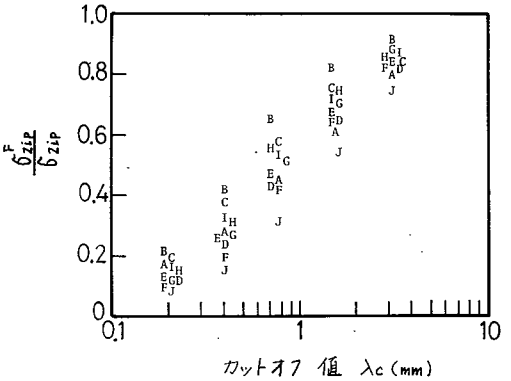


図 2.2.12　スキッドの上下変動に及ぼすフィルタの影響
$R_x = 30\,mm$

であり，スキッド半径が大きい場合にフィルタの効果が顕著であることがわかる。いま JIS で定められているカットオフ値 0.8 mm の場合，半径 5 mm ではフィルタを通しても標準偏差は 2 ～ 3 割程度しか減少しないが，半径 30 mm では 5 割前後減少する。

表 2.2.2　試験片表面粗さ R_a (μm)

研摩布仕上						研削仕上	
A	0.18	J	1.51	S	2.45	○	0.45
B	0.22	K	1.52	T	2.60	◒	0.47
C	0.23	L	1.71	U	2.61	◓	1.03
D	0.51	M	1.85	V	2.78	●	1.09
E	0.55	N	1.87	W	2.95	◐	3.54
F	0.69	O	1.88	X	3.10	◑	3.75
G	0.70	P	2.15	Y	3.83		
H	1.22	Q	2.18				
I	1.26	R	2.35				

(研削仕上の試験片は本章2.3.2の実験で使用する)

結局，図 2.2.2，図 2.2.11，図 2.2.12 から方向性のある表面粗さの場合スキッドの上下変動の影響は次式の程度になることがわかる。

$$\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \begin{cases} 1.03 & R = 30\,mm \\ 1.07 & R = 5\,mm \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

なお，$R = 5\,mm$ 程度のスキッドを用いて $R = 30\,mm$ カットオフ 0.8 mm と同程度の影響内におさめるにはカットオフ値を 0.3 mm 程度にすればよいことがわかる。

(2)　均一形状表面粗さ突起の場合

以上は砥粒加工面のように表面粗さ曲線がランダムな性状を有する場合に

ついての検討であったが，表面粗さ突起が均一な形状で規則性を有するような加工面も多い。そこで，代表例として図2.2.13に示すように三角形突起形状の場合についてスキッドの影響を概算してみる。

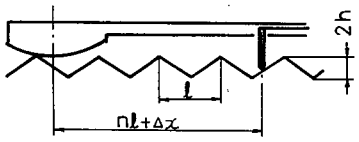


図2.2.13　均一形状突起とスキッドの接触

この場合，スキッドの上下変動と触針の上下変動は独立ではなく，スキッドと触針間の距離によりスキッド使用時の自乗平均粗さ R'_{rms} が左右される。いま図2.2.13において，突起間隔を l とし触針とスキッド間の距離を $nl+\Delta x$（$n=0,1,2\cdots\cdots$）とすると $\Delta x=0$ のとき，すなわちスキッドの上下変動と触針の上下変動の位相が合致する場合スキッドは R'_{rms} の値を最も減少せしめる。逆に $\Delta x=\frac{1}{2}l$ のとき，すなわちスキッドの上下変動と触針の上下変動の位相が逆転するときスキッドは R'_{rms} の値を最も増加せしめる。これらは簡単な幾何学的考察から明らかである。そこで両者の場合の R'_{rms} を求めて真の自乗平均粗さ R_{rms} に対する相対誤差を算出したところ，図2.2.14に示すように $\Delta x=0$ と $\Delta x=\frac{1}{2}l$ とで正負は異なるが相対誤差はほとんど等しい絶対値を示し，いずれの場合にも相対誤差の絶対値は非常に小なることがわかる。たとえば $\frac{l^2}{hR_x}=0.025$（$R_x=40\,mm$，$l=0.1\,mm$，$h=0.01\,mm$）のとき相対誤差＝±0.16％となる。なお R'_{rms} の計算にあたってはスキッドが突起頂点にしか接触しないとの仮定をおいて概算したが，この仮定の成立条件は次式で表され，通常の場合これは十分満足されている。

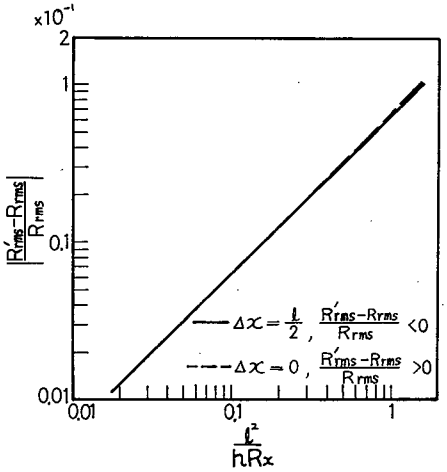


図2.2.14　均一形状表面粗さ突起の場合のスキッドの影響

$$\frac{l^2}{hR_x}<4 \qquad (2.2.7)$$

以上から均一形状突起の場合，スキッドの影響は無視できることがわかる。

(3) 特殊形状スキッドについて

(a) 触針の両側にスキッドがある場合

図2.2.15に示すようにトレース方向に触針をはさんで両側にスキッドがある場合には，スキッド上下変動の影響は単一スキッドの場合に比べ低減される。たとえば同一形状スキッドが触針から等距離離れた位置にある場合について単純な計算を行うと，スキッドの上下変動に起因する触針の位置での上下変動の標準偏差は単一スキッドの場合の半分になる。

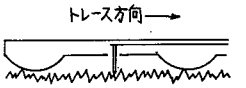


図2.2.15 両側スキッド

(b) スキッドと触針の位相が一致する場合

曲面の表面粗さを測定する場合に使用するスキッドではマタギスキッドに見られるようにスキッドの中心線と触針の位置とが一致している。この場合，幾何学的にランダムな性状を有する面を測定するにしても，スキッド上下変動と触針の上下変動とが必ずしも独立とは考えられないため，式(2.2.1)の妥当性が問題になる。

そこでスキッドと触針の位相の一致が R_{rms} に及ぼす影響をシミュレーション計算により考察する。すなわち狭帯域パワースペクトル分布を有する表面粗さ曲線を正規乱数を用いて計算機内で発生させ，スキッド上下変動に対する触針の相対的変位を求め，その自乗平均値 R'_{rms} を計算する。その結果，図2.2.16に示すようにスキッドと触針間の距離の影響は R'_{rms} の値にほとんど見いだされない。すなわち表面粗さに起因するスキッド

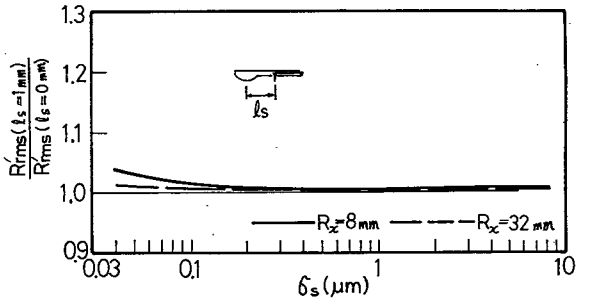


図2.2.16 スキッドと触針間の距離と R'_{rms} の関係
白色性帯域制限スペクトル分布の
下限周波数 20 (mm^{-1})
上限周波数 40 (mm^{-1})

上下変動が R_{rms} に及ぼす影響を理論的に推定するには，たとえスキッドと触針の位相が一致していても，スキッドと触針の上下変動が互いに独立であると見なして図 2.2.2，図 2.2.3 を用いて概算しても十分な精度が得られることがわかる。

(4) 突起の変形の影響

以上の解析はすべて突起の変形を無視したものであるが，現実のスキッドには軽荷重（50 gf 程度）ではあるが負荷が作用するため突起の変形の影響を検討する必要がある。第 1 編 3.5.3 によると方向性のある表面粗さの場合，50 gf 程度の測定荷重では突起の変形を考慮に入れても σ_{zip} はほとんど減少しないことが予想される。一方，方向性のない表面粗さの場合，図 1.3.37 に見られるように 50 gf 程度の測定荷重では σ_{zis} は突起の変形がない場合に比べ 40 % 前後減少（$\sigma_s = 1\ \mu m$）する。

以上から，表面粗さ測定におけるスキッド上下変動の影響を考える場合，方向性のある表面粗さについては前述の解がほぼそのまま現実の問題に適用できるが，方向性のない表面粗さについては突起の変形のためスキッド上下変動の標準偏差は減少し，スキッド上下変動の影響は前述の解析結果より小になることがわかる。すなわち，方向性のない表面粗さの場合の解析結果はスキッドの影響の最大値を推定することにのみ意味がある。なお，方向性のない表面粗さの場合にも図 2.2.5，図 2.2.7，図 2.2.8 に見られたように実測値と突起の変形を無視した理論値がかなり良好な一致を示していた。これは湿式ラップ仕上面が完全な無方向性の面ではないために，突起の変形の影響が図 1.3.37 ほど顕著ではなかったことによるものと考えられる。

2.2.3 Mシステムと E システムの比較

表面粗さの規格は基準線の取り方により分類すると M システムと E システムの 2 種類に分けられる。M システムは JIS，ISO，DIN，BS など一般的に広く用いられており表面粗さ曲線の中心線を基準線にして定められた表面粗さ測定方式である。一方，E システムは VSM（スイス），UNI（イタリー）な

どのきわめて限られた国で用いられている方式で，断面曲線上に一定半径の円を転がし，この円の中心が描く軌跡を表面上に移動させ，この曲線（包絡線）を測定の基準とする表面粗さ測定方式である。Eシステムを採用している国はきわめて限られてはいるがEシステムに関する研究[9,10,11]は現在も進められており両システムの優劣はいまだ結論がでていない[12]。そこでE，M両システムの表面粗さ表示間の換算方式を検討することは意味のあることと考えられるが，この問題に関する従来の研究としては各種加工面についての実験的な比較例やシミュレーション計算を用いた検討が見られる程度である。ここでは，主としてEシステムの代表的粗さである平滑粗さ $R_{p(E)}$ （*Mittere Rauhtiefe*）とMシステムの中心線平均粗さ $R_{a(M)}$ との関係について理論的考察を試みる。

なお，EシステムとMシステムの区別のため R_p，R_a にそれぞれ添字 $_{(E)}$，$_{(M)}$ をつける。

2.2.3.1 理　　論

$R_{p(E)}$ は図 2.2.17 に示すように断面曲線（あるいは機械表面）に接する転がり曲線を基準とし，この曲線と断面曲線との間の距離の平均値でもって定義されている。この $R_{p(E)}$ の値は表面うねりの影響が無視できると仮定すれば，図 2.2.17 から明らかなように表面粗さ曲線の中心線と転がり曲線の中心線との間の距離と等価である。

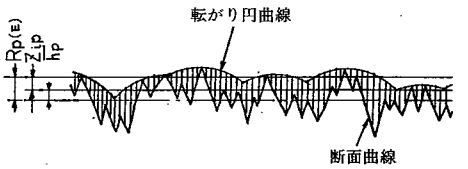


図 2.2.17　Eシステムにおける平滑高さ $R_{p(E)}$

転がり曲線の中心線高さは第 1 編第 3 章で最初の接触位置の平均値として理論的に求まっている。

ところで，*R.E.Reason* の分類[13]に従うとEシステムはつぎの 2 種類に分類できる。 *a*）2 次元的断面曲線をもとに作図的にあるいは計算により転がり円軌跡をもとめその曲線を基準とする方式（転がり円方式と呼ぶ）。 *b*）球形触針で試料面上をすべらし（あるいは転がし）その軌跡を基準とする方式（転がり球方式

と呼ぶ）。

前者の転がり円方式の場合には2次元的表面粗さと円との幾何学的接触を考えればよいため，転がり円曲線の中心線の高さとしては方向性のある粗い平面と球の接触における最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{ip}$ の理論値を採用でき，後者の転がり球方式の場合は3次元的表面粗さと球との幾何学的接触になるため，$R_{p(E)}$ は方向性のある面，ない面について分かれ，それぞれ第1編第3章の $\overline{Z}_{ip}$，$\overline{Z}_{is}$ の理論値から推定できる。

しかし，E システムの規格，E システムに関する研究，市販の測定器等はほとんど前者の転がり円方式であるのでここでも主として転がり円方式について考察する。

(1) 転がり円方式の $R_{p(E)}$

$\overline{Z}_{ip}$ は突起頂点の平均高さを基準にした最初の接触位置の平均値なので $R_{p(E)}$ との関係としては次式のように表される。

$$R_{p(E)} = \overline{Z}_{ip} + \overline{h}_p \qquad (2.2.8)$$

ここで，$\overline{h}_p$ は表面粗さ曲線の中心線を基準にした突起頂点平均高さを表す。

上式において，$\overline{Z}_{ip}$ に理論結果から求めた近似式（1.3.18）を，$\overline{h}_p$ に実験式（1.3.27）をそれぞれ代入し，σ_p と $R_{a(M)}$ の関係を式（1.3.20），（1.3.26） から求めると，$R_{p(E)}/R_{a(M)}$ は $\sigma_p^* n_p^{*2}$ の関数として表される。この関係を図示すると，図 2.2.18 に見られるように $\sigma_p^* n_p^{*2}$ 大なるほど $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の比は大になることがわかる。

いま，σ_p と n_p の関係として研摩布仕上面に関する実験式（1.3.24）を用いると図 2.2.18 の横軸は半径 R_x のみで表される。その結果，R_x 大なるほど $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の比は大になり，

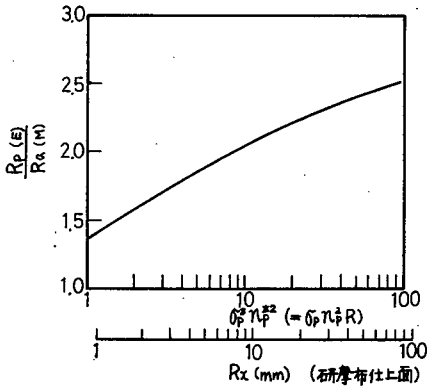


図 2.2.18 $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の関係
（方向性あり）

通常用いられている $R_x = 25\,mm$ の円の場合，$R_{p(E)}$ と R_a の関係は次式で表されることがわかる。

$$R_{p(E)} = 2.3\,R_{a(M)} \qquad (2.2.9)$$

(2) 転がり球方式の $R_{p(E)}$

一方向に方向性のある表面粗さについては，転がり球方式の場合でも $R_{p(E)}$ は (1) と全く同じに扱えるので方向性のない表面粗さについて考える。

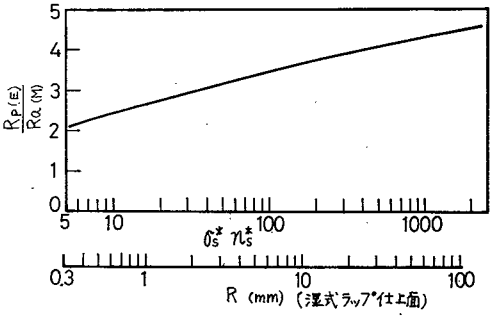


図 2.2.19 $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の関係
(方向性なし)

方向性のない表面粗さに関する最初の接触位置の平均値 $\overline{Z}_{is}$ は表面粗さ曲線の中心線を基準にしているため $R_{p(E)}$ と等価と考えられる。そこで，式 (1.3.19) と式 (1.3.20) を用いて $\overline{Z}_{is}/R_a$，すなわち $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ を求めると図 2.2.19 が得られる。

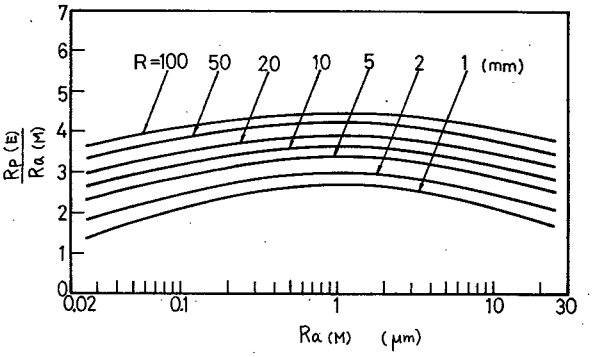


図 2.2.20 $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の関係
(砂吹仕上面)

σ_s と n_s の関係として，湿式ラップ仕上面に関する実験式 (1.3.25) を用いると，図 2.2.19 の横座標は球の半径 R で表され，また砂吹仕上面[14] に関する式 (1.3.21) および式 (1.3.23) を用いると図 2.2.19 は図 2.2.20 のように表される。

両図から，$R = 25\,mm$ の場合，ただし $0.02\,\mu m < R_{a(M)} < 30\,\mu m$，

$$R_{p(E)} = 3 \sim 4\,R_{a(M)} \qquad (2.2.10)$$

となることがわかる。

2.2.3.2 実　　験

実測した断面曲線から転がり円方式に従って $R_{p(E)}$ を計算機で算出し図 2.2.18 の妥当性を検討する。

各種研摩布仕上面の断面曲線を触針式表面粗さ計で測定しこれを AD 変換によりデジタル化したデータを用い，計算機で転がり曲線を算出する。そして $R_{p(E)}$ を計算すると同時に $R_{a(M)}$ も計算し $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ を求める。なお，実験に用いた試験片の表面粗さは表 2.2.2 と同一であり測定長は 5 mm である。

図 2.2.21 に実験結果を示すが，理論値と実測値はかなり良く一致している。また，試料面の $R_{a(M)}$ 値と $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ とはほぼ無関係であることがわかる。*Von Weingraber*[9] は研削，切削，ラップ仕上面等の各種加工面について $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ を実測しているが，その平均値を参考までに図 2.2.21 中に黒丸印で示す。この値もかなり理論値と良い一致を示している。以上から，図 2.2.18 で $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ の推定を行うことの妥当性が確かめられたものと考えられる。

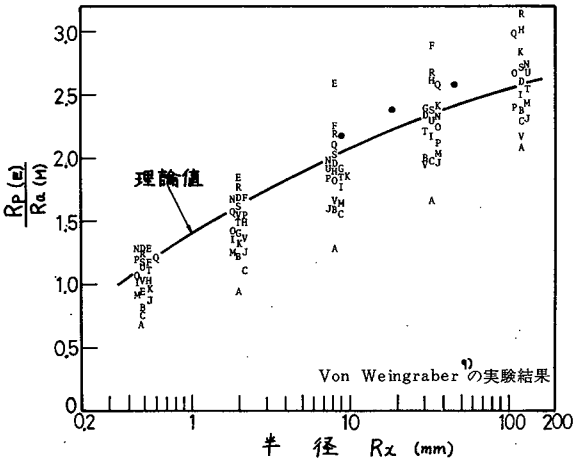


図 2.2.21 $R_{p(E)}$ の理論値と実測値の比較

2.2.3.3 考　　察

E システムにおける平均粗さ $R_{a(E)}$ に関する考察，および，均一形状表面粗さ突起を有する面における $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ についての考察を試みる。

(1) $R_{a(E)}$ について

E システムにおける平均粗さ $R_{a(E)}$ は，転がり曲線を被測定面の表面に垂直な方向に平行移動させその曲線と断面曲線で囲まれる面積が転がり曲線の両側で等しくなるようにした場合，この転がり曲線を基準にした断面曲線の平均偏差と

して定義されている。このため $R_{a(E)}$ は幾何学的には前述のマタギスキッド使用時の中心線平均粗さ $R_{a(M)}$ と同一になる。マタギスキッド使用時の $R_{a(M)}$ は図 2.2.16 に見られたように独立スキッド[註)]使用時の $R_{a(M)}$ とほとんど差がない。結局，表面うねりが無視できる場合には $R_{a(E)}$ は幾何学的には独立スキッド使用時の $R_{a(M)}$ とほぼ同一と考えられ，スキッドを使用しない場合の $R_{a(M)}$ と比べても 10％程度大なる値になるにすぎないことが図 2.2.2 からわかる。

しかし表面うねりが無視できない場合には，M システムの電気的フィルタと E システムの転がり円とでは表面うねりに対するカットオフ特性が異なる（2.3.3.3 参照）ため，$R_{a(E)}$ と $R_{a(M)}$ の関係は複雑になり前述のような一般的な形に表せない。このことは $R_{p(E)}$ と $R_{a(M)}$ の関係においても同様に考えられる。

(2) 均一形状表面粗さ突起の場合

三角形，あるいは *sin* 波形の規則的な突起を有する表面粗さの場合について $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ を概算すると次式が得られる。

（三角形突起の場合）

$$\frac{R_{p(E)}}{R_{a(M)}} = 2 - \frac{l^2}{12 R_x h_p} \qquad (2.2.11)$$

（*sin* 波形突起の場合）

$$\frac{R_{p(E)}}{R_{a(M)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi l^2}{48 R_x h_p} \qquad (2.2.12)$$

ただし

$l^2 \ll R h_p$

l ：突起間隔

h_p：突起頂点高さ（表面粗さ曲線の中心線を基準にとる）

以上から均一形状表面粗さ突起の場合はランダムな性状を有する面の場合に比べ $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ の値が低めになることがわかる。$R_{a(E)}$ についても上式のような近似を行うと $R_{a(E)}$ と $R_{a(M)}$ はほぼ等しいことがわかる。

註）スキッドと触針がトレース方向に離れていて両者の上下変動が独立とみなせるようなスキッド方式

2・3　転がり円うねりに関する基礎的考察

表面うねりを測定する方式として，JIS では電気的フィルタにより表面粗さ成分を取り除くろ波方式と，転がり円軌跡として表面うねりを測定する転がり円方式とが並列に定められている。ところが，この両方式間の相関，転がり円測定用円板半径の選択基準等については何ら示されておらず，この問題に関する研究[15]もあまり報告されていない。転がり円うねり方式の最大の問題点は，うねり成分のほかに表面粗さによっても円板が上下変動し，測定値の中に表面粗さ成分が含まれてしまう点と考えられる。

そこで本節では，ろ波方式と転がり円方式の関係，転がり円測定用円板半径の選択基準の問題に対する基礎的考察として転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗さの影響，および転がり円の周波数特性を定量的に把握することを試みる。

なお，転がり円うねり曲線は円板を用いて測定するため，ここでは断面曲線と円との2次元的接触状態のみを想定する。

2.3.1　転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗さの影響[16]

転がり円中心線うねり W_{EA} は転がり円曲線の平均偏差で定義されているから，W_{EA} と表面粗さの関係は第1編第3章の最初の接触位置の解析における中心線平均値 ζ_{zip} と表面粗さの関係と同等と考えられる。

図 1.3.7 において ζ_{zip} を W_{EA} とし，式 (1.3.20)，(1.3.26) を用いて σ_p を R_a で表し，σ_p と n_p の関係として式 (1.3.24) を用いると W_{EA} と R_a の関係が図 2.2.22 のように定まる。

JIS B 0610 によると，転がり円の曲率半径 R_x として 0.08 mm ～ 25 mm 間の6種類が定められており，市販の測定器（小坂製作所 SE 型）では R_x = 0.8 mm の1種類が用いられている。

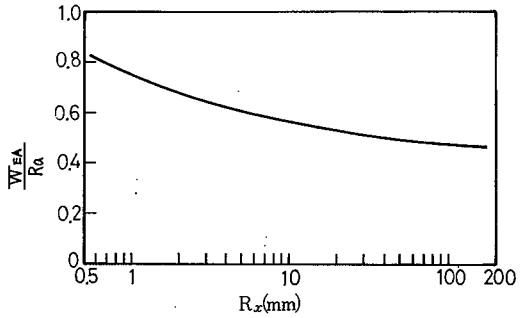


図 2.2.22　転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗さの影響

図 2.2.22 から明らかなように，$R_x = 0.8\,mm$ の場合 R_a 値の 80% 弱もの値が W_{EA} 値中に含まれることになり，表面粗さの影響が無視できない。それどころか，表面うねりの小なる面を測定している場合には表面粗さそのものを測定していることになる。また，規格における R_x の最大値 $R_x = 25\,mm$ の場合でも，W_{EA} 測定値の中に R_a 値の 50% 程度の表面粗さ成分が含まれることになり，表面粗さの影響が無視できないことがわかる。なお，旋削仕上面等のように規則性を有する表面粗さの場合には W_{EA}/R_a は次式のように表される。

$$\frac{W_{EA}}{R_a} = 0.032\,\frac{l^2}{R_x h} \qquad (2.2.13)$$

ただし，表面粗さ突起の形状は 図 2.2.13 のように三角形を考え l は突起間隔，h は中心線を基準にした突起高さを表す。

$R_x = 0.8\,mm$ の場合を考えると，

$$\frac{l^2}{h} < 2.5 \qquad (2.2.14)$$

なる条件のもとでは

$$\frac{W_{EA}}{R_a} < 0.1 \qquad (2.2.15)$$

となり，規則的な表面粗さについてはきわめて粗い面の場合以外は W_{EA} に及ぼす表面粗さの影響は無視できる。

2.3.2 ろ波中心線うねりと転がり円中心線うねりの関係

転がり円うねり曲線は前述のように表面粗さの影響を強く受け，これをフィルタと見なした場合のろ波特性も後述するようにきわめて複雑である。そのため W_{EA} とろ波中心線うねり W_{CA} の関係を理論的に解析するのは非常に困難である。

ここでは，W_{CA} 測定におけるカットオフ波長と W_{EA} 測定における円板半径との間の関係の概要を実験により把握することを試みる。

中心線うねりは平均偏差で定義されているが，フィルタリング等の理論的取扱いには標準偏差の方が適している。そこで新たに転がり円うねりの標準偏差 (W_{ES})

とろ波うねり曲線の標準偏差（W_{ES}）とを定義する。

転がり円中心線うねり（W_{EA}）と転がり円うねりの標準偏差（W_{ES}）の関係を考えるに，それぞれに相当すると考えられる最初の接触位置の中心線平均値 ζ_{zip} と標準偏差 σ_{zip} が図 1.3.7 に見られるようにほぼ比例関係にあることから，W_{EA} と W_{ES} もほぼ比例関係が成立すると思われる。すなわち W_{EA} と W_{CA} の関係の代わりに，W_{ES} とろ波うねり曲線の標準偏差（W_{CS}）の関係について考察を行う。

種々の表面粗さを有する研摩布仕上面の断面曲線を触針式表面粗さ計で実測し，この断面曲線をもとに図 2.2.23 に示す手順で W_{ES} と W_{CS} を算出する。すなわち，断面曲線をもとに幾何学的に転がり円軌跡を求め，この転がり円と断面曲線のパワースペクトルを高速フーリエ変換および赤池ウィンドウを通じて計算する。

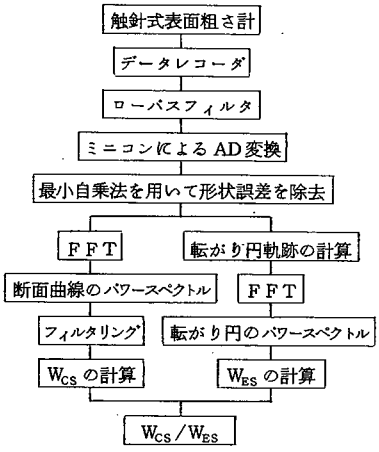


図 2.2.23　W_{CS}/W_{ES} 計算手順

振幅減衰率 $-12\ dB/oct$ に相当する低減フィルタの特性を式で表し，前節の図 2.2.9 で行ったと同様に断面曲線のパワースペクトルにこのフィルタのゲインをかけることにより W_{CS} を求める。一方，W_{ES} は転がり円のパワースペクトルを積分することにより計算する。そして，転がり円半径 R_x や低減フィルタのカットオフ値を種々に変化させ，それぞれの W_{CS}/W_{ES} の値を計算する。

一例として $R_a = 1.7\ \mu m$ の断面曲線に関する W_{CS}/W_{ES} の計算結果を図 2.2.24 に示す。この図から種々の R_x について $W_{CS} = W_{ES}$ になるような低域フィルタのカットオフ値（相当カットオフ波長と呼ぶ）が求まる。

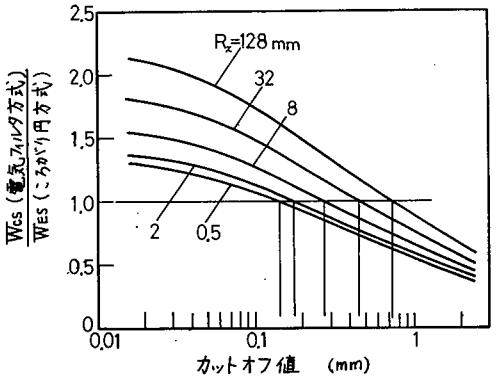


図 2.2.24　転がり円方式と電気的フィルタ方式の比較例　　$R_a = 1.7\ \mu m$

このようにして各種の研摩布仕上面，研削仕上面に関する相当カットオフ波長を求めた結果を図 2.2.25 に示す。この図から，円板の半径を大にすることはカットオフ波長を長くすることに相当することがわかる。市販の測定器の場合，ろ波うねりの高域カットオフ値と転がり円うねりの円板半径をいずれも 0.8 *mm* 一定にしているが，この図から，カットオフ値と円板半径を同じ値にすることは全く意味がなく，カットオフ値 0.8 *mm* に対しては円板半径 R_x は数 10 *mm* にすべきであると考えられる。

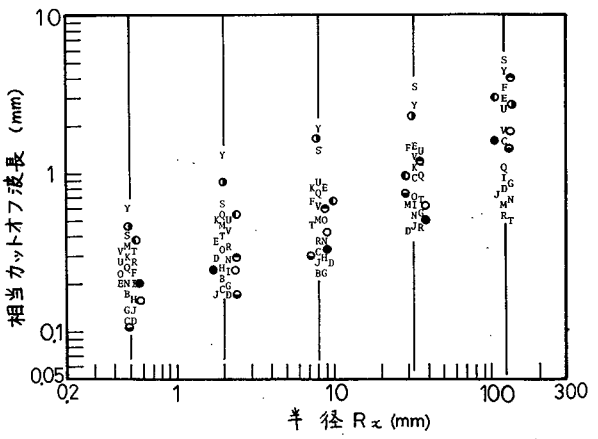


図 2.2.25　転がり円方式に相当するろ波方式のカットオフ値　（記号は表 2.2.2 参照）

図 2.2.25 で W_{ES} と W_{CS} の関係の概略はつかめるが，計算値がかなりばらついている。そこで，この図の精度を上げるために W_{ES} の値に含まれる表面粗さの影響を次式で取り除くことを試みる。

$$W'^2_{ES} = W^2_{ES} - \sigma^2_{zip} \qquad (2.2.16)$$

W'_{ES} は表面粗さの影響を取り除けたものと想定した転がり円うねりの標準偏差。σ_{zip} は表面粗さのみによる転がり円曲線の標準偏差で，最初の接触位置の標準偏差に関する理論式（1.3.18）から求まる。

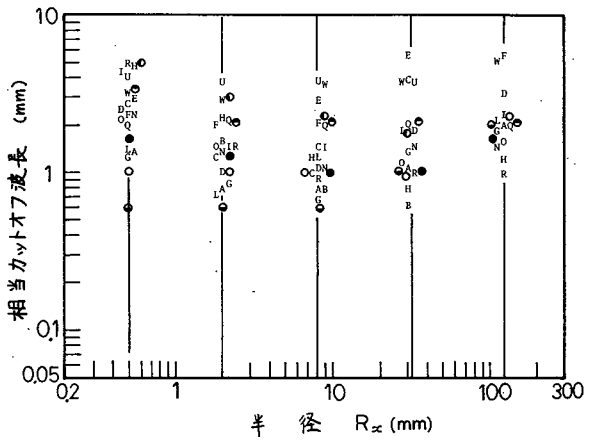


図 2.2.26　転がり円方式に相当するろ波方式のカットオフ値　（表面粗さの影響を補正）

このようにして求めた W'_{ES} を

用い，図 2.2.24 と同様の方法で相当カットオフ波長を計算した結果を図 2.2.26 に示す。図 2.2.26 は図 2.2.25 に比べて計算値のばらつきは全く減少していない。前式は表面うねりによる転がり円曲線と表面粗さによる転がり円曲線とが独立であると仮定した上での補正式であったが，この図はこの式の妥当性を否定したもので転がり円曲線の複雑性を示唆している。

そこで，つぎに転がり円曲線の特性を少し細かく検討する。

2.3.3 断面曲線のパワースペクトルと転がり円曲線の標準偏差の関係

前述のように表面粗さやうねりを有する断面曲線に対する転がり円うねり曲線の特性は，かなり複雑であることが予想される。また規格においても表面粗さと表面うねりとの境界の波長そのものが明確でないため，図 2.2.22 や図 2.2.25 はあくまでおおまかな目安にすぎない。そこで，ここでは表面粗さ，表面うねりのような分類はせずに，転がり円曲線の基礎的特性を把握するため，任意のパワースペクトル分布を有する断面曲線と転がり円曲線の標準偏差（σ_E とおく）の関係について考察を試みる。

2.3.3.1 理　　論

第 1 編第 3 章の方向性のある表面粗さを有する平面に関する最初の接触位置の標準偏差 σ_{zip} の解析結果を用いて，帯域制限白色スペクトル分布を有する断面曲線に対する転がり円曲線の標準偏差の推定を試みる。

最初の接触位置の理論は，突起頂点高さ分布を正規分布と，また突起間隔分布をワイブル分布と設定し，球（あるいは円）が突起頂点のみと接触すると仮定しての解析であるから，一般的なスペクトルを有する場合にはそのままでは適用できない。ここでは $\sigma_E = \sigma_{zip}$ と見なし，つぎの 2 種類の便法で σ_E を推定する。そして，この両者の結果と σ_E に関するシミュレーション計算結果との比較により妥当な近似解法を探す。

(1) 突起頂点分布基準

σ_{zip} は突起頂点高さの標準偏差と突起密度の関数として表されている。そ

こで，スペクトル分布から突起頂点高さの標準偏差 σ_p と突起密度 n_p を求め，この σ_p，n_p を用いて σ_{zip} の理論計算を行い σ_E を推定する。

D.E.Cartwright[17]によると，正規過程と見なせるような断面曲線において任意のスペクトル分布に対する σ_p および n_p は次式で求まることが示されている。

$$\sigma_p = \{1-(\frac{\pi}{2}-1)(1-\varepsilon^2)\}\sigma \qquad (2.2.17)$$

$$n_p = \frac{1}{2\pi}(\frac{m_4}{m_2})^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.18)$$

ここで，

$$\varepsilon = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}$$

$$m_n = \int_0^\infty S(\omega)\,\omega^n\,d\omega$$

$S(\omega)$：パワースペクトル分布

σ　：断面曲線の標準偏差

スペクトル分布 $S(\omega)$ から ε と m_n を求め，式 (2.2.17)，(2.2.18) に代入することにより σ_p，n_p が算出できる。この σ_p，n_p を用いて式 (1.3.7)～(1.3.9) から σ_E $(=\sigma_{zip})$ を推定する。

なお，頂点のみで接触すると設定しているため，転がり円半径 R_x（あるいは突起密度）が非常に小なる場合には上記の解析では $\sigma_E > \sigma$ になる。しかし実際には半径がきわめて小になると，表面粗さ計の触針のように円が断面曲線上を添って変動するから $\sigma_E = \sigma$ となる。そこで $\sigma_E > \sigma$ になる範囲はすべて $\sigma_E = \sigma$ とみなす。つぎに示す零交さ数基準の解析においても $\sigma_E > \sigma$ の領域では同様の処理を行う。

(2) 零交さ数基準

第1編第3章の σ_{zip} の解析にあたっては，表面を高さが正規分布をなす独立な点のみで構成されていると設定しこの点を頂点とみなしていたが，必ずしも頂点と限定せずに単に断面曲線上の独立な点と考えても同一の結果が得られるはずである。

そこで，突起頂点高さの標準偏差の代わりに断面曲線の標準偏差 σ を，また突起

密度の代りに独立な標本点密度を考え，σ_E（$=\sigma_{zip}$）を式（1.3.7）～（1.3.9）から推定する。標本点密度は連の理論を適用して断面曲線の零交さ数 n_0 の2倍の値を採用する。なお，n_0 は次式[18]を用いて断面曲線のスペクトル分布から計算できる。

$$n_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.19)$$

ここで，m_0，m_2 は式（2.2.18）と同じく0次，2次モーメントを表す。

以上，(1)，(2) の推定方式はいずれも理論的厳密性に欠けるため，シミュレーション計算との比較を通じてどの推定方式が妥当であるかを検討する。

2.3.3.2　シミュレーション計算結果との比較

シミュレーション計算手順の概略を示す。計算機内で正規性白色雑音を発生させ，この雑音をたたみこみ積分することにより所定の帯域制限白色スペクトルを有する断面曲線を作る。この断面曲線に対する転がり円曲線を求めその標準偏差 σ_E を計算する。

以上の手順で求めた σ_E と，頂点分布基準および零交さ数基準から推定した σ_E の比較を行った結果を図2.2.27に示す。図中において f_a，f_b は帯域制限スペクト

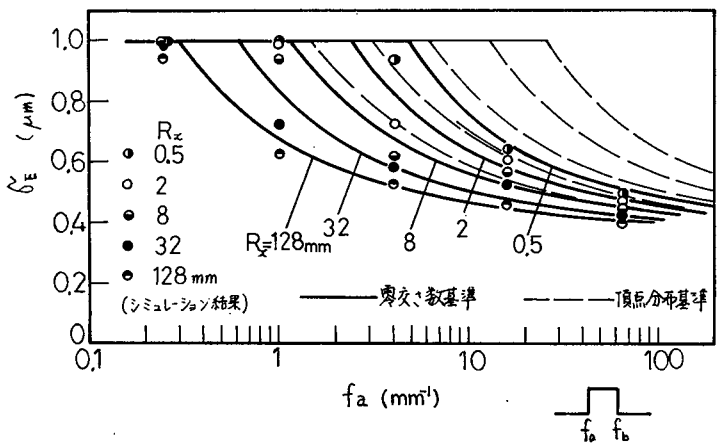


図2.2.27　零交さ数基準と頂点分布基準の比較
$f_b = 2f_a$，$\sigma = 1\,\mu m$

ル分布の周波数領域の下限と上限を表し，実線は零交さ数基準から求めた σ_E，破線は頂点分布基準から求めた σ_E，また丸印はシミュレーション計算から求めた σ_E を示す。

頂点分布基準より零交さ数基準の方がシミュレーション結果に近い値を示している。頂点分布基準方式で大きな誤差を生じた原因としては，断面曲線の波長が長くなると頂点以外の所で球と断面曲線の接触を生じる確率が高くなることと，帯域制限スペクトルを有する断面曲線の頂点の分布が正規分布をなさないことによると考えられる。

零交さ数基準による σ_E はシミュレーション結果よりいくぶん大なる値を示してはいるが，この差はわずかであり，このような白色性帯域制限波形に対する σ_E の推定としてはほぼ満足できるものと考えられる。

図 2.2.27 は $f_b = 2f_a$ の場合についての比較であったが，つぎに帯域幅を変えた場合における零交さ数基準による σ_E の推定の妥当性を検討する。図 2.2.28，図 2.2.29，図 2.2.30 にそれぞれ $f_b = 1.5f_a$，$f_b = 3f_a$，

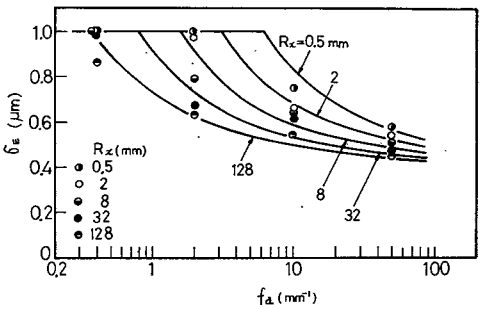


図 2.2.28 σ_E に関するシミュレーション結果と理論値の比較
$f_b = 1.5\,f_a$　$\sigma = 1\,\mu m$

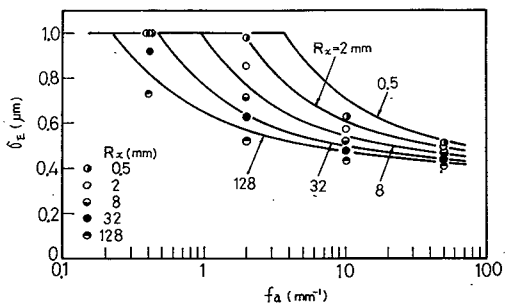


図 2.2.29 σ_E に関するシミュレーション結果と理論値の比較
$f_b = 3\,f_a$　$\sigma = 1\,\mu m$

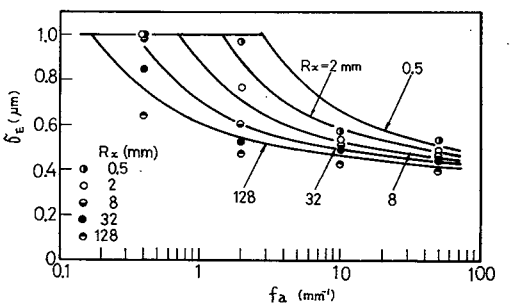


図 2.2.30 σ_E に関するシミュレーション結果と理論値の比較
$f_b = 4\,f_a$　$\sigma = 1\,\mu m$

$f_b = 4f_a$ の場合の σ_E のシミュレーション結果と零交さ数基準による推定結果を示す。

帯域幅が拡がるほどシミュレーション結果が理論的推定結果より低くなる傾向を示している。これらの結果から $f_b \leqq 3f_a$ 程度までは，零交さ数基準で推定できることがわかる。

2.3.3.3 考　　察

上述の理論結果の整理を行うほかに，方向性のない面に関する σ_E の推定，表面おうとつの標準偏差と転がり円曲線の標準偏差が等しくなる条件等について考察を行う。

(1) 2次元断面曲線（あるいは方向性のある表面おうとつ）に対する σ_E

上述の零交さ数基準の理論結果をまとめると図 2.2.31 のようになる。横軸の f_m は帯域制限スペクトルの中心周波数を表す。この図は各種断面曲線の中心周波数，帯域幅，標準偏差に対する転がり円のろ波特性を表すもので，f_m や σ が大なるほど，また R 大なるほど σ_E/σ が小になることがわかる。また，f_m 一定なら帯域幅が変化しても σ_E/σ はほとんど変化しないことがわかる。

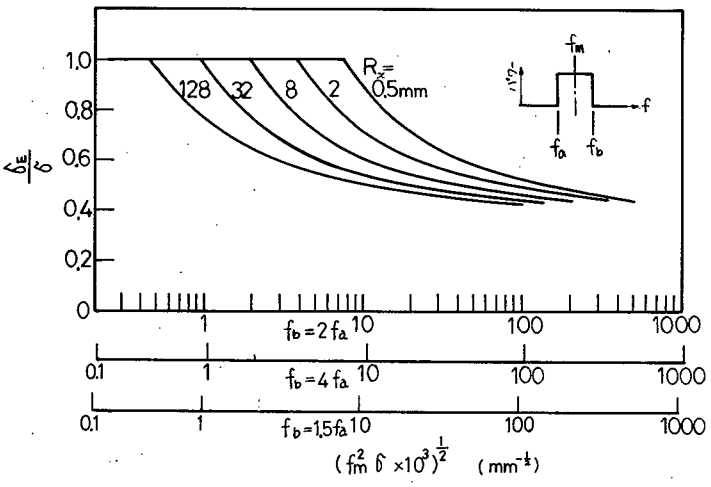


図 2.2.31　f_m と $\frac{\sigma_E}{\sigma}$ の関係　　(方向性あり)

(2) 3次元的（あるいは方向性のない）表面おうとつに対する σ_E

帯域制限スペクトル分布を有する方向性のない表面に球を転がす場合の転がり円曲線の σ_E を，第1編第3章の方向性のない表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差 σ_{zis} から推定する。この問題は転がり円うねりとは関係がないが，

表面粗さ測定時の触針の追従性やスキッドの上下変動等の問題に関連するので考察を行う。

推定方法は2次元の場合と同様で，まずスペクトル分布から零交さ数n_0を求める。そして表面単位の面密度n_sを次式で推定し，

$$n_s = 4\,n_0^2 \qquad (2.2.20)$$

式(1.3.8)と(1.3.17)を用いてσ_{zis}，すなわちσ_Eを求める。このようにして求めた結果を図2.2.32に示す。この図は2次元の場合の図2.2.31と定性的には同じ傾向を示しているが，σ_Eの値は図2.2.31の場合より低い値を示している。

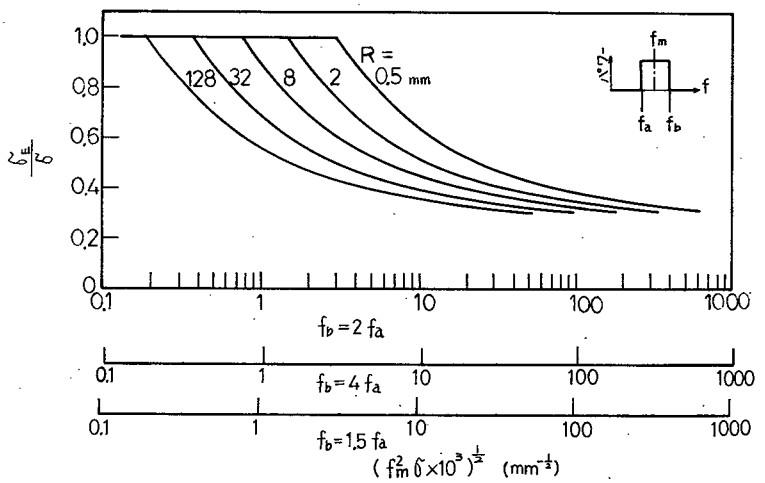


図2.2.32　f_m と $\frac{\sigma_E}{\sigma}$ の関係　　(方向性なし)

(3) 断面曲線と転がり軌跡の標準偏差が等しくなる条件

図2.2.31，図2.2.32から断面曲線と転がり軌跡の標準偏差が等しくなる条件，すなわち$\sigma_E = \sigma$になる条件を求める。図2.2.33にこの条件を表す。実線は方向性のある面の場合で，破線は方向性のない面の場合を示し，表面の幾何学的性状がこれらの直線の左側の領域にあれば$\sigma_E = \sigma$が成立する。

転がり円うねりの問題に関連させてこの図を見ると，表面うねりの中心周波数によって円板の半径を変えるべきであることがわかる。どの程度の周波数成分を

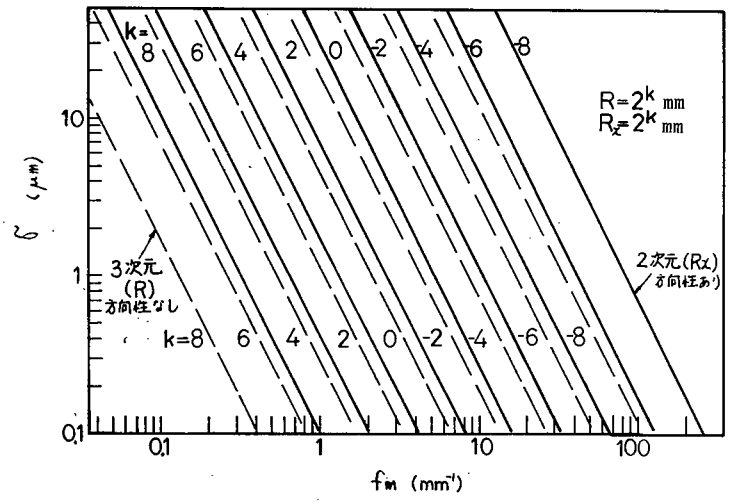


図 2.2.33　断面曲線の標準偏差と転がり軌跡の標準偏差が等しくなる条件

表面うねりと考えるかは，加工法，表面の機能等の観点から決定すべきものであるが，それが定まれば 図 2.2.33 はその周波数に応じた円板半径を選ぶための目安となる。

表面粗さ測定時の触針半径の影響，すなわち触針の表面追従性の問題に関連させて 図 2.2.33 を見ると，この図は自乗平均粗さや中心線平均粗さを測定する場合の触針半径に対する測定可能な被測定面の周波数限界を示している。

方向性のない面と方向性のある面の例として研摩布仕上面および湿式ラップ仕上面を考え，それぞれに関する実験式，式 (1.3.24)，式 (1.3.25) を用いてこれらの加工面に関する触針の追従性を検討する。両実験式から近似的に次式が導かれる。

研摩布仕上面の場合

$$\sigma f_m^2 \approx 1.28 \qquad (2.2.21)$$

湿式ラップ仕上面の場合

$$\sigma f_m^2 \approx 1.13 \qquad (2.2.22)$$

これを図2.2.33にプロットすると，両者ともほぼ $R=2^{-8}$ のときの破線（方向性のない面の場合の理論値）に近い値を示す。市販の表面粗さ計では触針半径 $R=2^{-8}\,mm$（$4\,\mu m$）前後の触針を用いている。この場合，研摩布仕上面に関しては $\sigma_E=\sigma$ が成立する境界線と十分離れており問題はないが，湿式ラップ仕上面に関しては境界線とほとんど一致しており，この半径は限界の触針半径ということになる。

従来，触針の追従性についての理論的研究は一方向にのみ方向性を有する表面粗さに関するものが大半であったが，この図にみられるように，この問題は方向性のない表面粗さの場合の方がより重要であると考えられる。

2.4 結　　言

第1編の最初の接触位置の解析結果を用い，あるいはさらに理論を発展させることによって，表面おうとつの測定精度に関する種々の幾何学的問題について理論的考察を試みた。その結果の要点を以下に示す。

(1) 表面粗さ測定精度について

ⅰ）自乗平均粗さ R_{rms} や中心線平均粗さ R_a に及ぼす触針半径の影響が定量的に表され，方向性のない表面粗さを測定する場合，触針半径の影響に留意する必要があることが明らかになった。

ⅱ）スキッド上下変動の R_{rms}，R_a，R_{max}，R_z に及ぼす影響が定量的に表され，この影響は方向性のある表面粗さについて R_{max}，R_z を測定する場合に顕著に表れることが明らかになった。

ⅲ）E システムと M システムの比較

E システムの平滑粗さ $R_{p(E)}$ と M システムの中心線平均粗さ $R_{a(M)}$ の関係を理論的に解析した結果，両システムの換算方式が明らかになった。

(2) 転がり円うねりについて

ⅰ）転がり円中心線うねり W_{EA} に及ぼす表面粗さ R_a の影響が定量的に求まり，

W_{EA} には表面粗さの影響が強く表れることが明らかになった。

ii) ろ波中心線うねりと転がり円中心線うねりの関係が実験を通じて明らかになると同時に，市販の測定器に見られるように電気的カットオフ値と同じ値の半径の触針を用いた転がり円うねり測定方式では，電気的フィルタのカットオフ特性に対応させるには極端に半径が小さすぎることが明らかになった。

iii) 任意の帯域制限スペクトル分布を有する断面曲線に対する転がり円の標準偏差を理論的に推定することが可能になり，断面曲線に対する転がり円のろ波特性が明らかになった。

参　考　文　献

1) R.G.Quiney : ASLE Trans., 10, 2 (1967) 193.
2) J.L.Guerrers : Trans. ASME Ser. B, 94, 4 (1972) 1087.
3) S.Ajioka : Bull. Jap. Soc. Precision Engng., 1, 4 (1966) 228.
4) 中村 : 精密機械 , 26, 2 (1960) 86.
5) D.J.Whitehouse and J.F.Archard : Proc. R.Soc. Lond. Ser. A,, 316, (1970) 97.
6) V.Radhakrishnan : Wear, 16, 5 (1970) 325.
7) J.Nara : Bull. Jap. Soc. Precision Engng., 1, 4 (1966) 4.
8) 石垣，川口 : 昭和52年度 精機学会春季大会学術講演会前刷集 (1977) 239.
9) H.Von Weingraber : Microtecnic, 11, (1957) 6.
10) V.Radhakrishnan : Proc. I. Mech. E., 187, (1973) 575.
11) M.S.Shunmugam and V.Radhakrishnan : Proc. I. Mech. E., 188, (1974) 691.
12) T.R.Thomas : Wear, 33, (1975) 205.

13) R.E.Reason : Ann. CIRP, 19, (1971) 559.
14) 久門 : 日本機械学会論文集 , 35, 272 (1967) 861.
15) J.Nara : Ann. CIRP, 19, (1971) 687.
16) 石垣, 川口 : 昭和52年度 精機学会秋季大会学術講演会前刷集 , (1977) 107.
17) D.E.Cartwright and M.S.Longuet-Higgins : Proc. Roy. Soc. Ser. A, 237, (1956) 212.
18) A.Papoulis : Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Mc Graw-Hill, New York (1965) 487.

総　　括

本研究では粗さを有する平面と球の接触変形問題を種々の表面粗さ，種々の変形形態について解析し，その接触理論の応用として転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響や表面おうとつ測定精度の問題に関する考察を試みた。その結果，所期の目的である転がり抵抗と表面粗さの関係が明らかになると同時に以下に述べる種々の問題が明らかになった。なお，第１編，第２編いずれも各章ごとに結論を記述したため，ここでは本研究で明らかになった点の概要を記するにとどめる。

第１編で粗さを有する平面と球の接触変形問題を理論的に解析し，実験結果との比較によりその理論の妥当性を確認した。得られた結果の概要を以下に示す。

1）接触突起の弾塑性変形量に対する実用式を求めることができた。

2）平面と球（あるいは楕円放物面）の接触における最初の接触位置に関する種々の統計量が理論的に推定でき，これらが唯一の等価変数の簡単な式で表された。

3）種々の形態の表面粗さを有する平面と球の接触時の変形を平面と球の母材の弾性変形，および突起の変形を考慮に入れて解析することにより近接量，真実接触面積，接触面圧力分布，母材内部の最大せん断応力等に及ぼす表面粗さの影響を明らかにすることができた。

4）平面と球の接触における突起の変形形態に対する判定基準や母材の変形形態に対する判定基準が明らかになった。

第２編で接触理論の応用として転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響と表面おうとつ測定精度の問題について理論的に考察し，実験値との比較によりその理論の妥当性を確認した。得られた結果の概要を以下に示す。

1）表面粗さ突起および母材の弾性回復を考慮に入れた転がり接触機構が理論的に明らかになった。

2）転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響は接触突起の弾性変形（あるいは塑性変形）の履歴損失と表面粗さの関係から説明できる。

3）転がり摩擦力成分の平均値，および転がり抵抗の変動と表面粗さの関係が定量的に定まった。

4）表面粗さ測定時の触針の幾何学的追従特性が理論的に明らかになった。

5）表面粗さ測定値に及ぼすスキッド上下変動の影響が定量的に定まった。

6）表面粗さ規格におけるMシステムとEシステム間の換算方式が定まった。

7）転がり円うねり規格の問題点を指摘し，転がり円うねりに及ぼす表面粗さの影響が定量的に明らかになった。

8）転がり円うねり測定子の半径に対する一つの選択基準が得られた。

謝　　辞

終りに臨み，本研究を遂行するにあたって終始変らぬ御指導御鞭撻をいただいた大阪大学　築添正教授に深甚の謝意を表すとともに，しばしば有益なる御教示を賜わった大阪大学　牧之内三郎教授，中川憲治教授，川辺秀昭教授，津和秀夫教授，山田朝治教授，井川直哉教授，久門輝正助教授ならびに大阪大学精密工学教室の諸先生方に厚く感謝の意を表します。

また，多大の御助力をいただいた大阪府立大学　永田良教授，川口格助教授をはじめ大阪府立大学永田研究室の方々に厚く感謝する次第です。