

Title	球面と平面の接触機構とその工学的応用に関する研究
Author(s)	石垣,博行
Citation	大阪大学, 1979, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1706
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

球面と平面の接触機構と その工学的応用に関する研究

昭和53年9月

大阪府立大学 工学部



石垣博行

球面と平面の接触機構とその工学的応用に関する研究

昭和53年9月

大阪府立大学 工学部

博

行

石垣

	目次	
緒	論	1
· .		
第1編 粗云	さを有する平面と球の接触機構	
第1章 単-	- 突起の変形	9
1.1 緒	言	9
1.2 理	論	10
1.2.1	弾性接触突起の変形	10
1.2.2	塑件接触突起の変形	12
1.3 宝甌	ニューニシューション	14
	☆ お み ⊖	11
1 7 0	大 歌 衣 眞	14
1.5.2	天駅枯木やよび方奈	10
1.5.5		20
1.4 結		21
第2章 均-	ー形状突起を有する平面と球の接触	23
2.1 緒	音	23
2.2 理	論	23
2.2.1	突起が弾性変形する場合	23
2.2.2	突起が塑性変形する場合	26
2.3 数	值計算手順	28
2.4 数	值計算結果	29
2.4.1	突起が弾性変形する場合	29
2.4.2	突起が塑性変形する場合	33
2.5 実際	験方法および実験結果	34

•

(1)

2.	5.1	突起が弾	単性変	2形する場合	34
2.	5.2	突起が当	包性変	形する場合	35
2.6	結		言		38
第3章	最初	刀の接触な	之置		39
3.1	緒		言		39
3.2	理		論		39
3.	2.1	方向性0	つある	表面粗さの場合	40
	3.2.1	.1 突走	己間隔	ううわを指数分布と仮定する場合	41
	3.2.1	.2 突走	己間隔	るを均一間隔と仮定する場合	43
.3.	2.2	方向性の	Dなし	、表面粗さの場合	43
3.3	数(淔計算	果		45
3.	3.1	方向性の	りある	。 表面粗さの場合	45
3.	3.2	方向性の	りなし	>表面粗さの場合	48
3.4	実		験		50
3.	4.1	実験	方	法	50
3.	4.2	実験	結	果	52
3.5	考		察	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	55
3.	5.1	表面粗る	きの力	5向性の影響	55
3.	5.2	表面うれ	a b a)影響	57
3.	5.3	突起の変	変形の)影響	59
3.6	結		言	·	63
第4章	方向	同性のない	い表面	面粗さを有する平面と球の接触	66.
4.1	緒				66
4.2	理		論		66

(2)

4.2.1 突起が塑性変形する場合	67
4.2.2 突起が弾性変形する場合	70
4.3 数值計算結果	72
4.3.1 数値計算法についての検討	72
4.3.2 突起が塑性変形する場合	75
4.3.2.1 母材の弾性変形 ····································	75
4.3.2.2 食込み位置	76
4.3.3 突起が弾性変形する場合	76
4.3.3.1 真実接触面積	7.6
4.3.3.2 有効接触域半径	77
4.3.3.3 みかけの最大接触圧力	77
4.4 実 験	78
4.4.1 突起が塑性変形する場合	78
4.4.2 突起が弾性変形する場合	79
4.4.2.1 試験片材質	79
4.4.2.2 試験片の表面粗さに関する諸元	80
4.4.2.3 近接量測定結果	82
4.5 考 察	83
4.5.1 突起の変形形態に関する判定基準	84
4.5.2 母材の塑性変形開始条件	87
4.5.3 突起形状の設定の影響	90
4.5.4 Z _{os} が確定量の場合とランダム量の場合との相違	91
4.6 結 言	94

(3)

第	5章	方向性のあ	5る表面粗さ	*を有する平面と球の接触	
	5.1	緒	言		96
	5.2	理	孟		96
	5.2	.1 突起な	『弾性変形す	└る場合	
	5.2	.2 突起な	『塑性変形す	トる場合	100
	5	.2.2.1	負荷過程の接	长触機構 ·································	100
	5	.2.2.2	余荷過程の接	倿触機構	102
	5.3	数値計算	結果		104
	5.3	.1 突起太	が弾性変形す	トる場合	104
	5.3	.2 突起太	が塑性変形す	トる場合	108
	5 . 4	実	験	······	···· 110
	5.4	.1 突起太	が弾性変形す	する場合	111
	5.4	1.2 突起力	が塑性変形す	よる場合	112
	5.5	考	察		113
	5.5	5.1 突起の	D変形形態に	て関する判定基準	113
	5.5	5.2 母材(D塑性変形開	帮始条件	120
	5.5	5.3 Zop D	『確定量の場	易合とランダム量の場合との比較	121
	5.6	結			123

(4)

第2編 接触理論の工学的応用

第	1	章	転が	0抵抗に及ぼす	表面粘	且さの影響	127
	1	.1	緒	· · ····	 -		127
	1	.2	転がり)摩擦力に及ぼ	す表面	面粗さの影響	127
		1.2	.1 4	を接触突起が弾	性変刑	どする場合	129
		1	.2.1.	理	論		129
		1	.2.1.	2 数 値 計 算 約	吉 果		131
		1	.2.1.	3 実	験		132
		1	.2.1.	4 考	察	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	135
		1.2	.2 4	全接触突起が塑	性変刑	どする場合	136
		1	.2.2.	理	論		1 <u>.</u> 36
÷		1	.2.2.2	2 数値計算系	告 果 お		139
		1	.2.2.3	3 実	験		14 1
		1	.2.2.4	1 考	察		144
	1	.3	転が)抵抗の変動成	分につ	っいて	147
		1.3	.1 3	ミ起の変形が無	視でき	きる場合	148
		1	.3.1.	理	論		148
		1	.3.1.2	2 数値計算系	果 詩	·····	150
		1	.3.1.3	3 実	験		151
		. 1	.3.1.4	1 考	察		152
		1.3	.2 3	8起の変形を考	慮にフ	入れた場合	15 3
		1	.3.2.	理	論		153
		1	.3.2.2	2 数值計算	告 果	·	154
		1	.3.2.3	3 実	験		157
		1	.3.2.4	4 考	察		158
	1	.4	結				160

(5)

第	2 1	章	表	面お	うとつ	の測定	情度に	こついて	163
	2.	1	緒			言			163
	2.	2	表	面粗	さ測定	精度に	ついて	<u> </u>	163
		2.2	.1	触	針半径	の影響			163
		2.2	•2	ス	キッド	の上下	変動の)影響	164
		2	.2.	2.1	理		論		164
		. 2	.2.	2.2	実		験		167
		2	.2.	2.3	考		察		169
		2.2	.3	М	システ	ムとE	システ	Fムの比較	174
		2	.2.	3.1	理		論		175
		2	.2.	3.2	実		験		178
		2	.2.	3.3	考		察		178
	2.	.3	転	がり	円うね	りに関	する基	基礎的考察	180
		2.3	.1	転	がり円	中心線	うねり)に及ぼす表面粗さの影響	180
٠		2.3	.2	В	波中心	線うね	りと転	云がり円中心線うねりの関係	181 [.]
		2.3	.3	断	面曲線	のパワー	-スペ;	クトルと転がり円曲線の標準偏差の関係	184
		2	.3.	3.1	理		論		184
		2	.3.	3.2	シミ	ュレー	ション	ノ計算結果との比較	186
		· 2	.3.	3.3	考		察		188
	2.	.4	結			言	·····		191
総				括					194
謝				辞					197

(6)

主要記号表

Α	輪切りされただ円放物体の x y 平面への投影面積
A_p	塑性接触時の真実接触面積
A _r	弾性接触時の真実接触面積
A', B'	任意の曲面物体間の接触を平面と2次曲面物体との接触に置きかえたと
	きの 2 次曲面の方程式の x ² , y ² の係数
а	2 a で,単一接触突起の接触面だ円短径を表す。
a _r	除荷過程における a
a_n	2 anで, n 番目の接触突起の接触面だ円短径を表す。
<i>B</i> , <i>C</i>	単一接触突起に作用する荷重と近接量の関係を表す式の変数
Ь	2b で,単一接触突起の接触面だ円長径を表す。
b _r	除荷過程における b
b _n	2 bnで, n 番目の接触突起の接触面だ円長径を表す。
c_i, d_i	球および平面の母材の弾性変位量を 2 i 次方程式で表した場合の係数
D_{j}	j/2回目の往復における前進,後進時の転がり抵抗の差
Ε	$2\left(\frac{1-\nu_2^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^{-1}$
E_1 , E_2	球、および平面の縦弾性定数
E'	第2種完全だ円積分
F	転がり摩擦力
F'	第1種完全だ円積分
Fad	凝着力による転がり摩擦力(粗い面)
Fad0	凝着力による転がり摩擦力(なめらかな面)
Fbj	1回目の往復における後退時の転がり抵抗測定値
F _{fj}	j回目の往復における前進時の転がり抵抗測定値
F_R	ポテンシャル成分による転がり抵抗力
F_{Rfj}	 <i>j</i> 回目の往復におけるポテンシャル成分(前進時)

(7)

F _{Rbj}	j回目の往復におけるポテンシャル成分(後進時)
F _r	粗い面の転がり摩擦力(弾性接触)
Frfj	1 番目の往復における転がり摩擦力成分(前進時)
Frbj	/ 番目の往復における転がり摩擦力成分(後退時)
F_{p}	粗い面の転がり摩擦力(塑性接触)
Fs	滑らかな面の転がり摩擦力(弾性接触)
f_a, f_b	帯域制限スペクトル分布の下限周波数と上限周波数
f_m	中心周波数 = $\frac{1}{2} (f_a + f_b)$
f _R	転がり抵抗係数
h _p	表面粗さ曲線の中心線を基準高さとする突起頂点高さ
h _r	母材内で最大せん断応力が生じる深さ
J	$\frac{\sqrt{1.5}}{\sigma_s \ddot{\sigma}_s} \frac{\dot{\sigma}_s^2}{\sigma_s}$
k	$(1-\frac{a_n^2}{b_n^2})^{\frac{1}{2}}$
k _c	$\tau_{max} = k_c p_m$ で塑性変形開始条件を表す。
k _{max}	球の中心軸から最も離れた接触突起の番号
k _s	真実表面積とみかけの面積の比
l	突起間隔
$M_m(\Delta x)$	Δ x 区間中に突起がm個存在する確率
m _n	n次モーメント
Ν	平均接触突起個数
Ni	R _{max} 測定中に含まれる独立なサンプリング数
No	零交さ数
Ns	接触表面単位数
n _p	突起線密度(方向性あり)
n _{p3}	突起面密度(方向性なし)

(8)

ns	表面単位面密度
Þ	分布圧力
₽ _{av}	接触突起の接触面平均圧力
p_f	転がり前面部の分布圧力
$p_{\scriptscriptstyle H}$	ヘルツ圧力
p_m	材料の流れ圧力
p'_m	相当流れ圧力
p_{max}	最大圧力
₱ _{mc}	接触突起の大半が塑性変形する臨界流れ圧力
p_n	n 番目の突起上の分布圧力
<i>p</i> _r	転がり後方部の分布圧力
R	球の半径,相当曲率半径 $(=R_x R_y)^{\frac{1}{2}}$
R'	母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径
R_{A}	全接触面積に占める塑性接触突起の接触面積比
Ra	中心線平均粗さ
R_a'	スキッド使用時の中心線平均粗さ
$R_{a(E)}$	E システムの中心線平均粗さ
$R_{a(M)}$	Mシステムの中心線平均粗さ
R_{Ap}	塑性接触突起と弾性接触突起の接触面積比(平面間接触)
R_{As}	塑性接触突起と弾性接触突起の接触面積比(平面と球の接触)
R _{max}	最大高さ粗さ
R'_{max}	スキッド使用時の最大高さ粗さ
$R_{p(E)}$	Eシステムの平滑粗さ
Rrms	自乗平均粗さ
R_{rms}'	スキッド使用時の自乗平均粗さ
R_x	だ円放物面のな方向曲率半径

(9)

R_y	だ円放物面のッ方向曲率半径
R_{z}	10 点平均粗さ
R'_z	スキッド使用時の 10 点平均粗さ
<i>R</i> _w	塑性接触突起と弾性接触突起の荷重分担比
r _e	有効接触域半径
r _m	みかけの接触域半径
S .	ワイブル分布の形状母数
Sae	単一弾性接触突起の接触面積
Sap	単一塑性接触突起の接触面積
Sk	▶ 番目の接触突起の接触領域
Τ.	収束位置
t	<i>2</i> 軸に最も近い突起の <i>x</i> 座標
t _p	$= \log (a_p n_p^2 R)$
t _s	$= log (\sigma_s n_s R)$
U	unit function
u	突起頂点平均高さを基準にした食込み位置
u'	表面粗さ曲線の中心線を基準にした食込み位置
W	荷重
Wa	単一突起に作用する荷重
Wc	母材が塑性変形を開始する臨界荷重
W _{CA}	ろ波中心線うねり
Was	ろ波うねり曲線の標準偏差
W _{EA}	転がり円中心線うねり
W _{ES}	転がり円うねり曲線の標準偏差
$W_{\scriptscriptstyle ES}'$	表面粗さの影響を除去した W₅s
We	弾性接触突起全体で受けもつ荷重

(10)

W_f	転がり前方部で支える荷重
Wn	n 番目の接触突起に作用する荷重
W_p	塑性接触突起全体で受けもつ荷重
Wr	転がり後方部で支える荷重
W_z	Zopをランダム量とする場合と確定量とする場合とで Zop がほぼ等しい
	値になる臨界荷重
Wu	表面単位理論における平面間接触時の荷重
w	変位 $(=w_a + w_m)$
w _a	突起の変形による表面変位
w _e	突起の接触面上の一点における弾性変位量
W _m	母材の変形による表面変位
x _i	突起の中心軸の≭座標
X _{max}	<i>x</i> 軸方向接触域
Y	降伏応力
y_{max}	y軸方向接触域
Z_i	最初の接触位置
Zip	突起頂点平均高さを基準にした最初の接触位置
Zis	表面粗さ曲線の中心線を基準にした最初の接触位置
Zop	突起頂点平均高さを基準にした接触高さ
Z_{os}	表面粗さ曲線の中心線を基準にした接触高さ
Zor	除荷過程における Zop
Z_{om}	最大負荷時の Zop
Zmax	十分広い機械表面内の突起頂点高さの最大値
Zs	仮想曲面の高さ
Z_{p}	表面粗さ曲線の中心線を基準とした突起頂点高さ

•

(11)

α	近接量
¢a	突起の変形による近接量
Сl _{ea}	突起の弾性近接量
a' _{ea}	接触面内最大弾性変位量
𝔄 _{era}	突起の弾性近接量(除荷過程)
$lpha_{e^1}$	n=0以外の突起接触部の圧力による n=0の接触面だ円中心の弾性変
	位量
И _{в2}	n=0の突起接触部の圧力のみによる接触面だ円中心の弾性変位量
а _{ст}	塑性変形開始の臨界近接量
α _l	弾性履歴損失係数
α_m .	母材の弾性変形による球の近接量
𝒫 _n	n番目の接触突起の近接量
α_{pa}	突起の塑性近接量
$lpha'_{pa}$	不完全接触状態の突起の真の塑性近接量
¢ pra	突起の塑性近接量(除荷過程)
a,	突起の塑性変形による球の近接量
ß	突起先端曲率半径(2次元)
β_3	突起先端曲率半径(3次元)
T_f, T_r	$r_{f}R$, $r_{r}R$ で転がり接触時の母材の弾性変形による球の平面に対する x
	軸方向の転がり前方,および後方部の相対的曲率半径を表す。
γ_x , γ_y	љ.R., љ.R. で押付け時の母材の弾性変形による球の平面に対する相対的
	曲率半径を表す。
Txr, Tyr	除荷時の 7ェ, 7』
ζ _{zip}	方向性のある表面粗さの場合の最初の接触位置の中心線平均値
ζzis	方向性のない表面粗さの場合の最初の接触位置の中心線平均値
η	ワイブル分布の尺度母数

(12)

θ	突起の傾斜角
λ	球の中心線の≭座標
λο	カットオフ波長
$ u_1, u_2$	球,および平面のポアソン比
σ	断面曲線の標準偏差
σ_{E}	転がり曲線の標準偏差
σ_{F}	転がり抵抗の標準偏差
σ_f	転がり抵抗係数の標準偏差
σ_{M}	球に作用するモーメントの標準偏差
σ_p	突起頂点高さの標準偏差(方向性のある表面粗さ)
σ_{p_3}	突起頂点高さの標準偏差(方向性のない表面粗さ)
σ_R	高域フィルタのカットオフ値 0.8 mm で測定される断面曲線の標準偏差
σ_s	表面単位の高さの標準偏差
$\dot{\sigma}_s$	表面粗さ曲線の傾きの標準偏差
$\ddot{\sigma}_s$	表面粗さ曲線の2次微係数の標準偏差
σ _w	高域フィルタのカットオフ値2.5 mm で測定される断面曲線の標準偏差
0 _{wave}	表面うねり成分のみによる転がり曲線の標準偏差
Øzi	最初の接触位置の標準偏差(スキッド上下変動の標準偏差)
σ_{zi}^F	フィルタ通過後のスキッド上下変動の標準偏差
Ozip	方向性のある表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差
σ_{zis}	方向性のない表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差
σ'_{zis}	表面粗さの外に表面うねり成分も含む面の o _{sis}
σ _{zop}	方向性のある表面粗さに関する接触高さの標準偏差
σ_{zos}	方向性のない表面粗さに関する接触高さの標準偏差
τ	せん断応力
τ_{c}	せん断降伏応力

(13)

τ_{max}	最大せん断応力	

Ф	転がり前方部の入力仕事
${\cal O}_R$	粗い面の場合のの
Øs	なめらかな面の場合のの
	Φ_w α³ で突起に 作用する荷重を表す。
Ψ	接触面形状を定めるための媒介変数
φ .	<i>2</i> 軸に最も近い突起の中心軸の座標
$arphi_P$	平面間接触における塑性指標
φ_s	球と平面の接触における塑性指標
φ_w	荷重分担比を基準とした突起変形形態判定基準

無次元化表示

$A^* = \frac{A}{R^2}$	$A_p^* = \frac{A_p}{R^2}$	$A_r^* = \frac{A_r}{R^2}$	
$a^* = \frac{a}{R}$	$a_r^* = \frac{a_r}{R}$	$b^* = \frac{b}{R}$	$b_r^* = \frac{b_r}{R}$
$F_p^* = \frac{F_p}{ER^2}$	$l^* = \frac{l}{R}$	$n_p^* = n_p R$	$n_s^* = n_s R^2$
$p^* = \frac{p}{\pi E}$	$p_f^* = \frac{p_f}{\pi E}$	$p_m^* = \frac{p_m}{\pi E}$	$p_{max}^* = \frac{p_{max}}{\pi E}$
$p_{mc}^* = \frac{p_{mc}}{\pi E}$	$p_r^* = \frac{p_r}{\pi E}$	$R_x^* = \frac{R_x}{R_y}$	$u^*=\frac{u}{R_1}$
$u'^*=\frac{u'}{R}$	$W^* = \frac{W}{ER^2}$	$W_a^* = \frac{W_a}{ER_y^2} = \frac{W_a}{E(R\tau_y)^2}$	$W_e^* = \frac{W_e}{ER^2}$
$W_f^* = \frac{W_f}{ER^2}$	$W_p^* = \frac{W_p}{ER^2}$	$W_r^* = \frac{W_r}{ER^2}$	
$w^* = \frac{w}{R}$	$w_a^* = \frac{w_a}{R}$	$w_e^* = rac{w_e}{R}$	$w_m^* = \frac{w_m}{R}$
$x^* = \frac{x}{R}$	$x_{max}^* = \frac{x_{max}}{R}$	$y^* = \frac{y}{R}$	$y_{max}^* = \frac{y_{max}}{R}$

 $z^* = \frac{z}{R}$ $z_i^* = \frac{z_i}{R}$ $z_{ip}^* = \frac{z_{ip}}{R}$ $z_{is}^* = \frac{z_{is}}{R}$ $z_{op}^* = \frac{z_{op}}{R}$ $z_{om}^* = \frac{z_{om}}{R}$ $z_{max}^* = \frac{z_{max}}{R}$ $z_{os}^* = \frac{z_{os}}{R}$ $z_{or}^* = rac{z_{or}}{R}$ $\alpha^* = \frac{\alpha}{R}$ $\alpha_a^* = \frac{\alpha_a}{R_y} = \frac{\alpha_a}{R \gamma_y}$ $\boldsymbol{\alpha}_{ea}^{*} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{ea}}{R_{y}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{ea}}{R\boldsymbol{\gamma}_{y}}$ $\boldsymbol{lpha}_{era}^{*} = rac{\boldsymbol{lpha}_{era}}{R \boldsymbol{\gamma}_{y}}$ $\boldsymbol{\alpha}_{pa}^{*} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{pa}}{R_{y}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{pa}}{R\boldsymbol{\gamma}_{y}}$ $\alpha_{pra}^* = \frac{\alpha_{pra}}{R\gamma_u}$ $\beta^* = \frac{\beta}{R}$ $\sigma_p^* = \frac{\sigma_p}{R}$ $\beta_3^* = \frac{\beta_3}{R}$ $\zeta_{zip}^* = \frac{\zeta_{zip}}{R}$ $\zeta_{zis}^* = rac{\zeta_{zis}}{R}$ $\tau_{max}^* = \frac{\tau_{max}}{\pi E}$ $\sigma_{zis}^* = \frac{\sigma_{zis}}{R}$ $\sigma_{zis}^* = \frac{\sigma_{zis}}{R}$ $\sigma_s^* = \frac{\sigma_s}{R}$

緒

論

転がり抵抗と表面粗さの関係は、転がり抵抗発生原因を表面粗さで説明しよう とした J.J.Bikerman の表面粗さ説¹⁾ 以来の古典的な問題であるが転がり抵抗の 現象の複雑さゆえにいまだに定性的にも明確な説明がなされていない。本研究は この転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を理論的に解明することを最初の目的と して始めたものである。しかし、研究の過程において転がり抵抗に及ぼす表面粗 さの影響についての実験結果を理論的に解釈するには粗さを有する平面と球の接 触変形を解析する必要があり、しかもその際、球および平面の母材の弾性変形、 ならびに突起の弾性回復等が無視できずかなり厳密な解析が必要なことが明らか になった。

ところで,表面粗さを考慮に入れた球と平面の接触問題は単に転がり抵抗のみ にとどまらずその他の転がり接触現象(たとえば,転がり摩耗, EHL,転がり 接触部剛性など),および,球形測定子による寸法測定精度,表面おうとつ測定 精度,表面うねりを有する平面間接触等の広範囲にわたる問題の基礎として重要 な意味をもつものと考えられる。

そこで、本研究ではまず基礎的な問題として粗さを有する平面と球の一般的な 接触変形問題を比較的詳細に理論的に検討し、その接触理論の応用の一例として 転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を解析すると同時に表面おうとつ測定精度の 問題についても理論的考察を試みる。

第1編において粗さを有する平面となめらかな球の接触機構の解析を行う。

粗さを有する平面と球の接触問題は、機械表面の表面粗さ性状の多様性あるい は変形形態、接触形態等の多様性によりすべての場合を総括的に取扱うことは困 難である。本論文では図1のように粗さを有する平面と球の接触問題を分類し実 線で示した領域を解析する。なお、この分類において関連する文献の代表的なも

-1--



図1 粗さを有する平面と球の接触問題の分類

(本論文で扱う領域を実線で示す (編を示していない場合はすべて第1編を表す)

のも併記したが,方向性のある粗さを有する平面と球の接触の解析,球と平面の 接触における最初の接触位置の解析および除荷過程の解析等に関する類例はほと んど見当らない。

ところで平面と球の接触問題には以下に示すような問題点が含まれる。

1) 表面粗さ突起の変形だけでなく,球と平面の母材の弾性変形も考慮に入れ, これらの変形を幾何学的に適合させる必要がある。

2) 接触突起個数が少ないため確率論的処理が複雑になる。

3) 球と平面の母材の変形形態および突起の変形形態の両方を考慮に入れて理論の適用限界を定める必要がある。

このうち 1)の母材の変形による球と平面の巨視的形状変化については、これ を無視した理論⁵⁾, なめらかな平面と球の接触におけるヘルツ理論から定まる形 状で近似する理論^{2,6)}, 表面粗さと独立に一定の関数で近似する理論¹⁴⁾等の種々の 試みがあるが,表面粗さに無関係に球と平面の巨視的形状を定めるこれらの方法 は適用範囲がかなり限定される。一方,この問題を厳密に扱った理論^{4,7,9)} もある が、これらは数値計算がきわめて複雑になり第4章で指摘するように解の収束性 等の問題点がある。このため、これら厳密な解法は処女面転がり接触のような非 対称な変形問題に対する発展性に欠ける。

本論文では,球と平面の巨視的形状を2次曲面で近似し,このパラメータを荷 重や表面粗さ等の接触条件に応じて理論的に決定することによりこの問題を解決 した。なお,この近似解法は数値計算が容易なため複雑な接触問題への発展性に 富み,第4章で検討するように前述の厳密な解法と比較しても精度的にも十分満 足できるものである。

2)の問題に関しては、これを指摘している文献すらほとんど見当らないが、 表面粗さが大なる場合、あるいは軽荷重時においては平均接触突起数が少なくな りこの問題が無視できなくなる。とくに、図1に示すような、荷重一定の接触条件下の接触高さの統計的諸量を推定する場合に問題になる。本論文ではこのよう な接触条件下の接触問題を突起の変形が無視できるような軽荷重時と、無視でき ない荷重時に分け、前者については最初の接触位置の解析結果を、後者について は接触高さ一定の接触条件下における接触の解析結果を用いて統計的諸量を近似 的に推定する。

3)の平面と球の母材,および突起の変形形態について。母材の変形形態としては弾性変形状態のみを取扱い,この理論の成立する接触条件を理論および実験の両面から検討を加える。また,突起の変形形態としては,図1に示すように塑性変

-3-

形する場合と弾性変形する場合の2種類に分けて解析を試み両者の区分条件とし て球と平面の接触における塑性指標を導く。

以上のような接触に関する検討結果を第2編で種々の問題に応用する。粗さを 有する平面と球の接触変形が重要な因子となる問題は多数存在するが、このうち 図2に示すように、転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響、表面おうとつ測定精度 の問題について第2編で考察する。



図2 粗さを有する平面と球の接触理論の応用(本論文で扱う領域を実線で示す)

第1章では転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響を扱う。ここで、転がり抵抗と は球が平面上を転がるときの抵抗力全般を指し、次の2成分からなる。すなわち 1)転がりと逆の向きに作用しエネルギー損失を伴ういわゆる転がり摩擦力成分 2)球に作用する水平力のうち、球の上下変動等に起因しエネルギー損失を伴わ ない成分³²⁾である。

本論文では、転がり抵抗の平均値、標準偏差の解析を試みるが転がり抵抗の平

-4-

均値は、転がり摩擦力成分の平均値と等価である。

転がり摩擦力に関しては、その発生原因に関する諸説のうち材料の履歴損失に よるとする説^{29,30,30} が最も有力であるが、表面粗さの影響を材料の履歴損失で説 明した例は見当らない。本論文では転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響を 材料の履歴損失をもとに理論的に解析し、転がり摩擦の履歴損失説の問題点の一 つとされていた表面粗さの影響の解明と同時に、表面粗さと転がり摩擦力の関係 を定量的に表すことを試みる。

転がり抵抗の変動と表面粗さの関係については、サーボモータやシンクロのような小形精密回転機器用軸受の低速回転時のトルクの安定性の問題と関連し実験的研究はかなり報告³³⁻³⁶⁾されているが、理論的考察はほとんど見られない。本論文では転がり抵抗の変動に及ぼす表面粗さの影響を第1編第3,5章の解析結果を用い、あるいはそれらの接触理論を拡張することにより理論的に考察し両者の関係を定量的に表すことを試みる。

なお、これらの理論の妥当性については転がり抵抗の実験結果との比較により 検討する。

第2章では表面おうとつ測定精度の考察を試みる。触針式表面形状測定器を用いて表面粗さ,表面うねり等を測定する場合,以下に示すような幾何学的問題点 が数多く存在する。

表面粗 さ 測定 に 関 し て は ,

1) 触針半径が有限なことによる触針の幾何学的追従性,

2) スキッドの上下変動が表面粗さ測定値に及ぼす影響,

3) MシステムとEシステム間の換算方式, 等の問題点が挙げられる。

また、表面うねりに関しても、*JIS*(*B*0610) では電気的ろ波うねりと転 がり円うねりの2種類が併記されているが、両者の換算方式はもちろん、転がり 円うねり測定用触針半径の選択基準も明確ではなく、転がり円の幾何学的特性に 対する基礎的検討が欠けている。このような種々の幾何学的問題については図2 に示すように各々の項目についてかなりの研究が報告されているが、これらは大 体において定性的な報告にとどまっている。これは幾何学的にランダムな性状の 表面おうとつを有する平面上で球(あるいは任意の曲面)を転がす(あるいはす べらす)場合の球の軌跡の統計的諸量を理論的に把握できなかったことも一因し ていると考えられる。

本論文では第1編第3章の最初の接触位置の解析結果を用い,あるいはそれを 発展させ,触針,スキッド,および転がり円うねり測定子の上下変動の統計的諸 量を推定することにより上述の諸問題に関する定量的考察を試みる。

なお、これらの理論的考察の妥当性は実験やシミュレーション計算を用いて検 討する。

-6-

参考文献

- 1) J.J.Bikerman: J.App. Phys., 20, 10 (1949) 971.
- 2) J.F.Archard: Proc. Roy. Soc. Ser. A, 243, (1957) 190.

3) P.Barkan and E.J.Tuohy: Trans. IEEE, Pas-84, (1957) 1132.

- 4) J.A.Greenwood and J.H.Tripp: Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
- 5) 築添: 精密機械, 37, 5(1971) 344.
- 6) 久門: 日本機械学会論文集, 38, 315 (1972) 2945.
- 7) K.A.Nuri: Wear, 30, 3 (1974) 321.
- 8) 築添: 日本機械学会論文集, 41, 346 (1975) 1909.
- 9) T.Tsukada and Y.Anno: Bull. Japan Soc. of Prec. Engg., 11, 4 (1977) 207.
- 10) たとえば, T.E.Tallian: Wear, 21, 1 (1972) 49.
- 11) K.L.Johnson, J.A.Greenwood and S.Y.Poon: Wear, 19, 1 (1972)91.
- 12) T.E.Tallian : Trans. ASME Ser. F,96, 3 (1974) 398.
- 13) P.E.Fowles: Trans. ASME Ser. F, 97, 2 (1975) 311.
- 14) F.C.Yip and J.E.S.Venart: J.Phys., D4, (1971) 1470.
- 15) 佐々木, 沖野: 日本機械学会論文集, 27, 181 (1961) 1456.
- 16) G.A.D.Briggs and B.J.Brescoe: Nature, 260, 25 (1976) 313.
- 17) T.E.Tallian: Trans. ASLE, 10, 4 (1967) 418.
- 18) T.E.Tallian and J.I.McCool: Wear, 17, 5/6 (1971) 447.
- 19) たとえば, P.R.Nayak: J.Sound & Vibration, 22, (1972) 297.
- 20) 中村: 精密機械, 26, 2(1960) 86.
- D.J.Whitehouse and J.F.Archard: Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 316, (1970) 97.
- 22) V.Radhakrishnan: Wear. 16, 5 (1970) 325.
- 23) J.Nara: Bull, Jap. Soc. Precision Engg., 1, 4 (1966) 4.
- 24) H.Von Weingraber: Microtecnic, 11, (1957) 6.
- 25) V.Radhakrishnan: Proc, I. Mech. E., 187, (1973) 575.
- 26) M.S.Shunmugam and V.Radhakrishnan: Proc. I. Mech. E., 188, (1974) 691.

-7-

- 27) J.Nara: Ann. CIRP, 19,(1971) 687.
- 28) たとえば, R.M.Carson and K.L.Johnson: Wear, 17, 1 (1971) 59.
- 29) たとえば, F.P.Bowden and D.Tabor: The Friction and Lubrication of Solids Part 2, Oxford (1964) 306.
- 30) R.C.Drutowski: Trans. ASME Ser. D,81, (1959) 233.
- 31) 渡部,川口: 精密機械 ,42,11(1976)1056.
- 32) 川口, 永田, 奥野: 精密機械 , 34, 7 (1968) 454.
- 33) 機械試験所報告, No. 50 (1964).
- 34) 阿部, 高野, 神保: 精密機械 , 37, 2(1971)125.
- 35) 角田: 潤滑, 19, 2(1974) 102.
- 36) 津田: 潤滑, 23, 5 (1978) 312.

第 1 編

粗さを有する平面と球の接触機構

第1章 単一突起の変形

1.1 緒 言

種々の接触問題の解析を試みるにあたり単一接触突起の変形について考察を行 う。接触突起の変形状態としては 1)弾性接触状態 2)突起内部の一部のみで塑 性変形を生じている微視的塑性変形状態 3)接触域全域に塑性変形が及んでいる 塑性接触状態の3段階があげられる。球と平面のように比較的高い圧力が作用す ると考えられる接触状態では通常の接触状態としては 3)の塑性変形状態が考え られるが、かなり表面粗さが小なる面や、十分なじみ運転が行われた面など 1) 弾性接触状態または 2)微視的塑性変形状態と考える方が妥当な接触条件も存在 する。このうち、 2)の過渡的接触状態については解析が困難なため省略し、こ こでは 1)および 3)についてのみ考察する。

弾性接触状態についてはヘルツ理論が適用できるため、その概略を示すにとど める。塑性接触状態については、塑性変形突起内の弾性変形を無視して転がり接 触状態を解析し、転がり摩擦力の理論的推定を試みたところ¹⁾、理論値が実測値 の数倍もの大なる値を示した経験上、転がり接触状態では、塑性変形突起におけ る弾性変形量は無視できないものと考えられる。この突起の弾性回復量は転がり 摩擦の問題以外にも、すべり、あるいは転がり接触過程における表面粗さの変化、 すべり摩擦、摩耗、平面間の接触における接触部剛性等の種々の問題においても 重要な因子になると思われる。ところで塑性的接触問題に関する解析は、この弾 性変形を無視したものが多く^{2,3,4)}、考慮されたものとしては、主として接触部剛性 に関する研究例^{5,6,7)}が見られる程度である。そこで本章では、突起の弾塑性的接 触変形に関する単純な理論的解析を行い、単一突起の荷重と近接量の関係を簡単 な近似式で表示することを試みる。

-9-

1.2 理 論

1.2.1 弾性接触突起の変形

この問題については、二物体の接触に関するヘルツ理論⁸⁾ がそのまま適用 できるため、計算手順を示すにとどめる。いま任意の曲面形状を有する二物体の 接触を、平面物体と次式で表される二次曲面物体との接触に置きかえる。

$$z = A'x^2 + B'y^2 \tag{1.1.1}$$

ただし平面は x y 面に一致させ、二次曲面の中心軸を z 軸とする。この曲面物 体と平面物体が押し付けられた場合の両物体の表面変位をそれぞれ w₁, w₂, ま た原点における w₁ + w₂ の値を α_a とおくと、

$$w_1 + w_2 = \alpha_a - A' x^2 - B' y^2 \tag{1.1.2}$$

が接触面内で成立するはずである。一方,接触面に作用する分布圧力を *p*(*x*,*y*) とすると,表面変位の和は弾性論により次式で与えられる。

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}\right) \iint p(x, y) \left\{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\xi d\eta$$
(1.1.3)

 E_1, E_2 : 2物体の縦弾性定数 ν_1, ν_2 : 2物体のポアソン比

式 (1.1.2), (1.1.3) が同時に成立するように積分方程式を解いて p(x,y)の分布形を決定すればよいのだが、すでにポテンシャル理論において均質なだ円 体の内部の点のポテンシャルが式 (1.1.2)のような二次式になることがわかって いる。そこでだ円体のポテンシャルの式との比較を行うことにより圧力分布 $p(x,y), \alpha_a, A', B'$ はそれぞれ次式のように接触面だ円の短径 2*a*, 長径 2*b* および荷重 W_a と関係づけられる。

$$p(x, y) = \frac{3W_a}{2\pi a b} (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}$$
(1.1.4)
$$\alpha_a = \frac{3}{2} \frac{W_a}{\pi E} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\{(a^2 + \varphi)(b^2 + \varphi)\varphi\}^{\frac{1}{2}}}$$
(1.1.5)

-1 ೧–

$$A' = \frac{3}{2} \frac{W_a}{\pi E} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(a^2 + \varphi)^{\frac{3}{2}} \{(b^2 + \varphi) \varphi\}^{\frac{1}{2}}}$$
(1.1.6)

$$B' = \frac{3}{2} \frac{W_a}{\pi E} \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(b^2 + \varphi)^{\frac{3}{2}} \{(a^2 + \varphi)\varphi\}^{\frac{1}{2}}}$$
(1.1.7)

$$tr t l \frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$z z \overline{c} \frac{1}{k^2 - 1 - \frac{a^2}{b^2}}$$
(1.1.8)

とおくと、式(1.1.6)(1.1.7)は次式のように表される。

$$A' = \frac{3W_a}{\pi E} \frac{1}{a^2 b} \frac{1}{k^2} \{E'(k) - (1 - k^2) F'(k)\}$$
(1.1.9)

$$B' = \frac{3W_a}{\pi E} \frac{1}{b^3} \frac{1}{k^2} \{F'(k) - E'(k)\}$$
(1.1.10)

ただし F'(k):第1種完全だ円積分 E'(k):第2種完全だ円積分

$$\frac{B'-A'}{B'+A'} = \cos \Psi$$
(1.1.11)

とおき, 左辺に式 (1.1.9)(1.1.10) を代入すると

$$\frac{2(1-k^2) F'(k) - (2-k^2) E'(k)}{k^2 E'(k)} = \cos \Psi$$
(1.1.12)

cos 𝕊 は式 (1.1.11) で求まる既知の変数であり, 左辺は k のみの関数である ので上式を満足するような k を繰返し計算で求めてやればよい。実際の数値計算 ではこの繰返し計算は Newton-Raphson 法によった。

式 (1.1.11), (1.1.12) から

$$\frac{1}{B'} = \frac{1}{A' + B'} \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{E'(k)}{F'(k) - E'(k)}$$
(1.1.13)

これを式(1.1.10)に代入し,式(1.1.8)を用いると接触だ円形状は次式のように定まる。

$$b = \left\{ \frac{3}{\pi E} \frac{1}{A' + B'} \frac{E'(k)}{1 - k^2} \right\}^{\frac{1}{3}} W_a^{\frac{1}{3}}$$
(1.1.14)

$$a = \left\{ \frac{3}{\pi E} \frac{(1-k^2)^{\overline{2}}}{A'+B'} E'(k) \right\}^{\frac{1}{3}} W_a^{\frac{1}{3}}$$
(1.1.15)

-11-

式(1.1.14),(1.1.15)を式(1.1.5)に代入して整理すると荷重Wと a の関係は次式で表される。

$$\boldsymbol{\alpha}_{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{6 W_{a}}{\pi E} \right)^{\frac{2}{3}} \left\{ 2 \left(A' + B' \right) \left(1 - k^{2} \right) \frac{F'(k)^{3}}{E'(k)} \right\}^{\frac{1}{3}}$$
(1.1.16)

$$W_a = \frac{1}{5} \pi E \left\{ \frac{E'(k)}{(1-k^2) (A'+B') F'(k)^3} \right\}^{\frac{1}{2}} \alpha_a^{\frac{3}{2}}$$
(1.1.17)

また,接触面圧力分布も式(1.1.14),(1.1.15)を式(1.1.4)に代入すれば求まる。

1.2.2 塑性接触突起の変形⁹⁹

弾性接触の場合と同様、ここでも一般的な曲面間の接触を考えるため、次 式のような主曲率半径 R_x, R_y なるだ円放物面と平面の接触を扱う。

$$\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = -z \tag{1.1.18}$$

このようなだ円放物面と球面との接触変形を厳密に扱うには、塑性変形量と弾 性変形量の総和が幾何学的接触条件を満足する必要があるなどの問題のため、解 析がかなり複雑になる。しかも、この解析結果を多数の接触突起を有する接触問 題に適用するには最終的に単純な形で結果が表現されねばならない。そこで、こ こでは単純な仮定を設定して解析を行い、その結果と実験値との比較を通じて実 際の現象をある程度表現しうるような近似的な解を見いだすことを試みる。解析 にあたりつぎの4項目の仮定を設定する。

1)図1.1.1 に示すように突起の全変形量は突起の塑性変形量と弾性変形量の 和として表される。すなわち,

 $\boldsymbol{\alpha}_{a} = \boldsymbol{\alpha}_{pa} + \boldsymbol{\alpha}_{ea} \qquad (1.1.19)$

ここで α_a:突起の全近接量 α_{ba}:突起の塑性近接量 α_{ea}:突起の弾性近接量



2) 突起の塑性変形による接触面形状は一般に行われているように単に、突起

と平面の幾何学的交さ面として定まる。すなわち

$$a = (2 R_x \alpha_{pa})^{\frac{1}{2}}$$

$$b = (2 R_y \alpha_{pa})^{\frac{1}{2}}$$
(1.1.20)

こで a:接触面だ円の x 軸方向半径

22

h:y軸

3)接触面には均一な圧力が作用し、その圧力はやわらかい方の材料の流れ圧 力に等しい。2),3)の設定により、 an は次式で表される。

$$\alpha_{pa} = \frac{W_a}{2\pi (R_x R_y)^{\frac{1}{2}} p_m}$$
(1.1.21)

ここで Wa:荷 重

P_m:流れ圧力

つぎに、突起の弾性変位量を考える。幾何学的接触条件を満足、すなわち接触 部に間隙や重複を生じないためには仮定 1),2)の設定のもとでは弾性変位は 接触面上均一になる必要がある。しかし、仮定 2),3)の設定のもとで弾性論 により次式を用いて弾性変形量を求めると図1.1.2に示すように接触面上の位置 により分布し、中央部で最大変位を有す。

$$w_e(x, y) = 2 \frac{p_m}{\pi E} \iint_{S_i} \{ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \}^{-\frac{1}{2}} d\xi d\eta \qquad (1.1.22)$$

この矛盾は仮定 1) 2) 3) の設定の無理 が現れたものである。

Schofield¹⁰は突起の弾性近接量として 接触面中央部の変位量、すなわち最大変 位量を採用しているがこれでは幾何学的 接触条件が満足されず接触面中央以外で は重複を牛じる。本研究ではこの幾何学 的接触条件の誤差を少なくするため、つ ぎの仮定を設定する。4) 突起の弾性近 -13-



図 1.1.2 接触面のz 軸方向弾性変位分布 $R_x = 0.4 \text{ mm}$ $R_y = 5 \text{ mm}$ $p_m = 200 \text{ kgf/mm}^2 \quad \alpha_m = 7 \mu m$

接量 α_{ea} は次式に示すように接触面各部の弾性変位量の面積平均値 α_{ea} で近似する。

$$\alpha_{ea} = \frac{p_m}{W_a} \iint_{S_i} w_e(x, y) \, dx \, dy \tag{1.1.23}$$

なお w_e(x, y) は式(1.1.22) で求まり, 積分領域は式(1.1.20) で定まるだ 円とする。

面積平均値で近似することの妥当性は理論的には確認できないが 図 1.1.2 に 見られるように弾性変形量は接触面内で大きな変化は示していないことから、こ の近似の誤差も小さいと考えられる。

以上の設定により,負荷過程の近接量は式(1.1.21),(1.1.23)を式(1.1.19) に代入すれば求まる。また除荷過程の近接量は最大負荷時の近接量から弾性回復 量を引いたもので,弾性回復量は最大負荷時の弾性近接量から除荷時と同一条件 時の負荷過程における弾性近接量を引いた値として与えられる。

1.3 実験および考察

前述の塑性接触理論は種々の仮定のもとに近似的に求めたものであるためその 仮定の設定の妥当性を検討する必要がある。ここでは、単一突起モデルとして球 を用い、球が平面に接触開始した時点から変形後までに接触部から十分に離れて おり変形を生じていない点が変位する量(すなわち近接量)を測定し、この近接量と 式(1.1.19)のα。との比較を行う。

1.3.1 実験装置

荷重と近接量の関係を実験的に求めるために用いた押付実験装置を図 1.1.3 に示す。測定方法としては、いまレバー a を微小量下げると、ピポット b で支え られている外筒 c がスライドベアリング d,ガイド e に拘束された状態で垂直に 下降し、それとともに平行板ばね f を介して取付けられている心棒 g および上の 平板試料 h が下降して、試料球 i および下の平板試料 j を押付ける。試料球と上 下平板試料が接触すると、上の平板試料を取付けている心棒は下降できなくなり、

-14-



極力避ける必要上,油圧シリンダ kを用いてバルブのわずかな開閉により調節し ている。接触部の変形が生じると2接触部の近接量に相当した量だけ心棒 g が下 降しミラーmが移動する。このミラーの移動量の2倍の距離だけトワイマン干渉 計の参照鏡に対しレーザー光の光路差が生じ,干渉計左端のスクリーン上の干渉 縞が移動する。このスクリーン上の1点に太陽電池を取り付け干渉縞の移動によ る明暗を測定し,増幅器を通してペンレコーダで記録をする。同一記録紙上に板 ばねのひずみも記録し,ひずみと明暗の変化から荷重と近接量の測定を行う。光 源には He-Ne レーザを用いているため干渉縞の縞間隔は鏡の上下変位の0.316 μm に相当し,近接量の測定精度は0.03 μm 程度である。なお,上下平板試料は 同一材質,同一仕上面の試料を用いているので,球と平面の接触部における近接 量は鏡の変位の $\frac{1}{2}$ である。また,未接触時には干渉縞が左右に振動しているのが, 接触を開始すると急に干渉縞の振動が止まる。この変化はきわめて軽荷重時(10 gf 程度) でも生じるため近接量測定時(とくに4章以下の接触問題で)問題と なる接触開始の時点における突起の変形量は無視でき,最初の接触位置(第3章

-15-

で定義をするが,理想的無負荷時の接触位置)を基準にした近接量が測定できる。 1.3.2 実験結果および考察

ヘルツの接触理論については検証実験を行う必要はないため、塑性接触理 論に対する検証実験のみを行う。試料球には材質 SUJ 2 の精密球を用い、平板 試験片には鋼板あるいは黄銅板を用いた。これら試験片の諸性状を 表1.1.1 に示 す。ただし鋼板,黄銅板の流れ圧力 pm としては、それぞれ 10 kgf, 6 kgf の押付 荷重で半径 5 mm の鋼球を押しつけたときに生じるくぼみの投影面積を測定し押 付け荷重をその面積で除した平均圧力を用いた。

		縦弾性定数 (kgf/mm ²)	ポアソン比	流れ圧力 (kgf/mm)	降伏応力 (kgf∕mm²)	表面粗さ R _{max} (µm)
球	SU J- 2	21000	0.3	1000*		0.1 以下
鋼板	S 35 C	21000	0.3	160	36	0.1
黄銅板	6/4 黄銅	10000	0.3	105	12	0.15

表 1.1.1 試験片の材質と表面粗さ

*マイクロビッカース硬さ(50gf)から推定

鋼板に関する実験結果と理論値を図1. 1.4 に示す。最大荷重を3種類変化させ 負荷曲線と除荷曲線を求めた。なお最大 荷重条件を変えるたびに平面試験片上で の接触場所も変えているが負荷曲線の実 測値はほぼ同一曲線上に沿うため一本の 曲線で示している。実線で示した理論値 と破線の実測値とは負荷過程,ならびに 除荷過程においてもかなりの一致を示し



図 1.1.4 荷重と近接量の関係 (鋼板試験片)

ている。図1.1.5 は黄銅板に関する実験結果と理論値で鋼板と同様の実験を行っている。負荷過程では実験結果と理論値は良い一致を示しているが除荷過程にお

-16-

いて実測値の勾配に比べ理論値の勾配が 低目にでている。この結果から理論値で は突起の弾性変位量を少し低目に推定し ていることが考えられる。すなわち理論 値を求める際に設定した仮定のうち,突 起の弾性変位量として接触面での変位分 布の平均値で近似したことの妥当性が問 題になる。そこで接触面の変位分布の内 の最大変位でもって突起の弾性変形量を



代表させている R.E.Schofield の理論¹⁰⁾と本理論との比較を行う。

Schofield 理論に沿って球形突起と平面の接触における近接量を求めてみる。 半径Rの球と平面の接触において平面の塑性変形により半径 aの接触円ができて いるとすると、そのときの弾性変形量 a'ea (最大変形量)は次式で求まる。

$$\begin{aligned} \alpha'_{ea} &= 2 \frac{p_m}{\pi E} \iint_{\xi^2 + \eta^2} (\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi d\eta \\ &= 4 a \frac{p_m}{E} \\ &= \frac{4}{E} \left(\frac{p_m W_a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$
(1.1.24)

塑性変形による近接量 α_{pa} は本理論と同様で,式(1.1.21)の R_x , R_y かわりに Rを代入すれば求まる。この α_{pa} と式(1.1.24)の α_{ea}' の和が求める近接量となる。 計算結果の一例を図 1.1.4,図 1.1.5の一点鎖線で示す。なお負荷過程は,図が 繁雑になるのを避けるため省略する。図 1.1.5の黄銅板の場合には除荷曲線の勾 配は本理論より Schofield の理論の方が実測値とよく一致している。種々の最大 荷重状態から除荷し,無負荷になるまでに回復した弾性回復量について実測値と 理論値の比較を試みた結果を図 1.1.6 に示す。丸印で示した本理論より Schofield 理論の方が高い値を示している。なお両者の比は数値計算結果から検討するとだ

-17-
円放物面の曲率半径,荷重,球の半径に 関係せず一定値1.18 となる。鋼板試験 片の場合は本理論の方が弾性回復量につ いても実測値に近い値を示すことがわか るが,黄銅板の場合はこの図ではどちら が良いとも言えない。逆に高荷重域では Schofield 理論の方が実測値に近い場合 もある。以上の考察から,真の弾性変形 量は,弾性変位分布の平均値と最大値の



理論値と実験値の比較

間にあると考えられる。この平均値と最大値の比は 1.18 と比較的小さな値であ るが、真の値と本理論で採用した"平均値"との比はさらに 1 に近くなる。しか も第2章に示すように表面粗さを有する平面と球面の接触における近接量にはこ の差はかなり小なる影響しか与えないため多数の接触点を有する接触問題に適用 する単一接触点の変形解析としては本理論の近似で十分であると考えられる。 第2編に示すように、突起の塑性変形履歴損失による転がり摩擦力の推定を行う 場合には 図 1.1.4、図 1.1.5 の負荷、除荷曲線の囲む面積(損失仕事)が問題に なる。この場合には 図 1.1.4、図 1.1.5 いずれの図からも、本理論の方が実測さ れる損失仕事に近い推定ができることが明らかである。

本理論においては 仮定 2),3)の設定に見られるように突起の塑性変形が接触 域全域にまで及んだ完全塑性接触状態を想定しているが、多数突起接触問題にお いては各突起の塑性変形進行状態はそれぞれに異るため塑性変形がそれほど進行 していない不完全塑性接触状態もある程度推定できることが望ましい。

ヘルツ理論¹¹⁾ に従って接触面下の最大せん断応力を計算し、この値が材料のせん断降伏応力の1~3倍の間にある接触状態(不完全塑性接触状態と考えられる¹²⁾を求めると 図 1.1.4 の場合 $W_a = 0.2 \ kgf \sim 5 \ kgf$ の間が、また 図 1.1.5 の場合 $W_a = 0.07 \ kgf \sim 1.8 \ kgf$ の間が不完全塑性接触状態にあることがわかる。

-18-

図 1.1.4 の場合, この不完全塑性接触状態においても理論値は実測値と比較的 良い一致を示している。理論の設定とかけ離れた状態と考えられる領域にもかか わらずこのような一致を見たのは定性的には以下のような理由によるものと考え られる。

(1) 塑性近接量について

理論計算では、図 1.1.7 (*a*) に示すように突起 と平面の幾何学的交さ面が 接触面積 × $p_m = W_a$ な る条件を満足するときの幾何学的交さ量でもって α_{pa} を求めている。ところが、不完全塑性状態 の場合、この p_m より実際の面圧は低く接触面 積は図 1.1.7 (*a*) の ab より大なる A'B' (図 1.1.



図 1.1.7 α/2 の推定

7(b))の状態で接触している。一方,このときは不完全塑性のために突起の曲率が変形前よりも大になって図の点線のようになったのち塑性変形していると思われ実際の塑性変形量は α'_{pa} のようになる。実験結果と理論値の塑性近接量が合致した理由はこの α_{pa} と α'_{pa} が偶然ながら良く一致することによるものと考えられる。

(2) 弾性近接量について

理論では接触圧力を *p_m* 一定としてそれによる弾性変位を弾性理論で計算し ているが、このようにすると、(i) 不完全塑性変形状態では接触面上での圧力分 布が *p_m* より小さいので理論で求めた中央部弾性変位量は実際の弾性近接量より 大になるはずである、(ii) 接触面下に一部塑性変形領域があってその部分では弾性 理論が適用できないにもかかわらず全部分弾性理論で計算していることから、弾 性理論から求まる中央部弾性変位量は実際のものより大になる、等の理由から理 論計算で中央部弾性変位量を求めるとそれは実際の弾性近接量より大になるはず である。それゆえ、中央部弾性変位量より小なる面積平均値を採用したことが偶 然ではあるが理論値と実測値の良い一致を示した原因と考えられる。

-19---

1.3.3 近接量の近似式表示

塑性変形突起の変形に関する前述の理論を表面粗さを有する平面と球の接触問題の解析に適用するには式(1.1.19)~(1.1.23)のままでは解析が面倒である。そこで式(1.1.19)~(1.1.23)の数値計算結果をもとにして,近接量をもっと簡便な近似式で表現することを試みる。式(1.1.21),(1.1.23)を用いて α_{ea}^{**}

/α_μ* を計算した結果を図 1.1.8 に示す。ただし図中*印は、下記の無次元化量を表すものとする。

$$\alpha_{ea}^{*} = \frac{\alpha_{ea}}{R_{y}} , \quad \alpha_{pa}^{*} = \frac{\alpha_{pa}}{R_{y}} ,$$
$$p_{m}^{*} = \frac{p_{m}}{\pi E} , \quad W_{a}^{*} = \frac{W_{a}}{R_{y}^{2}E} ,$$
$$R_{x}^{*} = \frac{R_{x}}{R_{y}}$$

 $\alpha_{ea}^{*} / \alpha_{pa}^{*} \ge R_{x}^{*}$ の関係は両対数においてほぼ直線で近似できることがわか



る。一方,式(1.1.22),(1.1.23)を変数変換して整理し直すと, α_{ex} は次式のように $p_m^{\frac{1}{2}}$, $W_a^{\frac{1}{2}}$ に比例することがわかる。

$$\alpha_{ea} = (p_m W_a)^{\frac{1}{2}} \times g(\frac{R_x}{R_y})$$
 (1.1.25)

ここでgは R_x/R_y のみで決まる4重積分形の関数である。

式 (1.1.21), (1.1.25) および 図 1.1.8 から $\alpha_{ea}^*/\alpha_{pa}^*$ と W_a^* , p_m^* , R_x^* の間 には次式の関係が近似的に成立することがわかる。

 $10^{-3} < R_x^* < 10^{-1}$ の領域では

$$\frac{\alpha_{ea}^{*}}{\alpha_{pa}^{*}} = 78 p_{m}^{*1.5} W_{a}^{*0.5} R_{x}^{*0.6}$$
(1.1.26)

 $10^{-1} < R_x^* \le 1$ の領域では

$$\frac{\alpha_{ea}^{*}}{\alpha_{pa}^{*}} = 67.2 p_{m}^{*1.5} W_{a}^{*0.5} R_{a}^{*0.5}$$
(1.1.27)

-20--

統計的接触理論に適用するには $\alpha_a \ge W_a$ の関係が必要となる。式 (1.1.26) あるいは式 (1.1.27)と式 (1.1.21)から α_a , α_{pa} を求め, これを式 (1.1.19) に 代入すると $\alpha_a \ge W_a$ の関係がもとまる。

$$W_a^* = 2B^2 + C - 2B (B^2 + C)^{0.5}$$
(1.1.28)

ここで

 $10^{-3} \leq R_x^* \leq 10^{-1}$ の場合

$$B = 39 p_m^{*1.5} R_x^{*0.6}$$
$$C = 2\pi^2 p_m^* \alpha_a^{*} R_x^{*0.5}$$

または

10⁻¹
$$\leq R_x^* \leq 1$$
 の場合
 $B = 33.6 p_m^{*1.5} R_x^{*0.1}$
 $C = 2\pi^2 p_m^* R_x^{*0.5} \alpha_a^*$

1.4 結 言

種々の接触問題の解析を行う準備として単一突起の変形について解析を試みた。 とくに、塑性接触状態についてはいささか大胆ではあるが以後の計算を進行可能 にするために表面の弾性変位に関する仮定を設け、突起の弾塑性的接触変形に関 する単純な理論的解析を行った。そして、その数値計算結果と精度の高い押付試 験機による近接量測定結果との比較検討を通じ、仮定の妥当性を確かめると同時 に以下の点を明らかにした。

単一接触突起の近接量は塑性変形による近接量と弾性変形による近接量の和
 として与えられ、このうち、弾性変形による近接量は、接触面に均一な圧力
 (流れ圧力)が作用する場合の表面弾性変位分布の平均値で近似しても実用上

充分な精度が得られる。

2) 突起の弾性変形による近接量と塑性変形による近接量の比は材料の流れ圧力

-21-

が大なるほど、荷重が小なるほど、また突起の主曲率半径が大なるほど大になる。この3因子の中では材料の流れ圧力の影響が最も大である。

3) 突起の弾性変形による近接量と塑性変形による近接量の比,および荷重と近接量の関係等は簡単な式で近似できる。

参 考 文 献

- 1) 石垣,川口:昭和49年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集,(1974)163.
- 2) たとえば, T.Tsukizoe and T.Hisakado: Trans ASME Ser. D, 87, (1965) 666.
- 3) P.K.Gupta and N.H.Cook : Trans. ASME Ser. F, 94, (1972) 19.
- J.Pullen and J.B.P.Williamson: Proc. R. Soc. London Ser. A, 327, (1972) 159.
- 5) 久門:日本機械学会論文集,41,344(1975)1273.
- 6) 塚田, 阿武:日本機械学会論文集, 36, 291 (1970) 1923.
- 7) H.A.Francis: Wear, 45, (1977) 221.
- 8) A.E.H.Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity Dover, New York (1944) 193.
- 9) 石垣,川口:精密機械,44,11(1978)1341.
- R.E.Schofield and R.H.Thornley:日本機械学会論文集,42,364 (1976)4007.
- S.Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity 2nd ed., McGRAW- HILL, New York (1951) 376.
- 12) D.Tabor: The Hardness of Metals, Oxford, (1951) 50.

第 2 章 均一形状突起を有する平 面と球の接触¹⁾

2.1 緒 言

機械加工面には旋削仕上面,形削り仕上面等のように統計的処理が不適である 場合も数多くある。しかも、これらの面はほとんど一方向性の表面粗さを有して いる。

そこで本章では一方向にのみ方向性を有し,高さ,半径などが均一な半円柱状 の突起を真平面に敷きならべたような面に真球を押付けた場合の球と平面の母材 の変形および突起の変形について解析を試みる。なお第4章以下で表面粗さを統 計論的にとらえた解析を行うが,個々の接触突起の圧力分布,変形といった微視的 な問題についての考え方を明確にする上からも,この様な均一形状突起に関する 解析は重要であろうと思われる。

粗さをもつ平面と球の接触の解析では球および平面の母材の変形と微小突起の 変形を適合させる必要がある。本章では母材表面の各点の垂直方向変位をその点 の座標の二次関数で近似されるものと仮定して計算を進め、微小突起の変形と母 材の変形を適合させて比較的簡単な近似解法で上記の接触問題を解析する。この 様な近似解法を以下において二次式近似と呼び、その精度上の検討は第4章で 行う。なお、変形の形態としては、球および平面の母材については弾性変形のみ を仮定し、突起の変形については弾性変形する場合と塑性変形する場合について 考えた。

2.2 理 論

2.2.1 突起が弾性変形する場合

方向性を有する表面おうとつの模型として、図 1.2.1 に示すような半径, 高さ,突起間隔が均一なおうとつの配列を考える。なお突起頂点を結ぶ直線を*

-23-

軸とし球の中心軸を ≈ 軸とする。このような 平面に真球を押付けた場合,球および平面の 垂直変位は球および平面の母材の弾性変形に よる変位 wm と接触突起の局部的な変形によ る変位 wa の和と考えられる。ここでは突起 が弾性変形すると考えられる場合を扱い,突



起の変位の計算には第1章で概略を示したヘルツ理論を適用する。いま,球の半 径をR,突起先端曲率半径をβ,突起密度を n,とすると球面および突起表面は それぞれ次式で表される。

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2R}$$
(1.2.1)

$$z = \frac{-(x + \varphi - nl)^{\circ}}{2\beta}$$
(1.2.2)

ここで l: 突起間隔 (= $1/n_p$), φ : z 軸とそれに最寄りの突起中心との距離 このとき幾何学的接触条件は

$$w_{a} + w_{m} = \alpha + \frac{\varphi^{2}}{2(R+\beta)} - \frac{(x+\varphi-nl)^{2}}{2\beta} - \frac{x^{2}+y^{2}}{2R}$$
(1.2.3)

のように表せる。ここで、αは球と平面の接触開始時点から負荷による変形後ま での間にひずみが生じない程度に接触部から十分に離れている球内の一点(たと えば球の中心)がα軸方向に移動する移動量(以後近接量と呼ぶ)を表す。また母 材の弾性変形による変位 w_m は一般に

 $w_m(x, y) = w_m(0, 0) - \sum_{i=1}^{\infty} (c_i x^{2i} + d_i y^{2i})$ (1.2.4) で与えられるべきものであるが、可能な限り計算を簡単化するために第一近似として、

$$w_m(x, y) \approx w_m(0, 0) - (c_1 x^2 + d_1 y^2)$$
 (1.2.5)

とする。これを式(1.2.3)に代入すると次式が得られる。

-24-

$$w_{a} = Z_{op} - \frac{(x + \varphi - nl)^{2}}{2\beta} - \frac{1}{2R} \left(\frac{x^{2}}{r_{x}} + \frac{y^{2}}{r_{y}}\right)$$
(1.2.6)

ただし

$$\frac{1}{\tau_x} = 1 - 2 c_1 R \quad , \qquad \frac{1}{\tau_y} = 1 - 2 d_1 R$$
$$Z_{op} = \alpha + \frac{q^2}{2(R+\beta)} - w_m (0, 0)$$

ここで Z_o は原点における単なる幾何学的交さ量から母材弾性量をとり除いた もので、母材の変形を考慮に入れた幾何学的交さ量を意味する。以後 Z_o を接触 高さと呼ぶ。

したがって何らかの方法で r_x , r_y を求めることができれば、母材の変形を考慮して突起の変位を求める問題は図 1.2.1 のように、母材の変形を無視して $r_x R$, $r_y R$ なる主曲率半径を有する二次曲面体を押付けた場合の突起の変位を求める問題に帰着する。式 (1.2.6)をさらに変形すると

$$w_a = Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(r_x R + \beta)} - A' x'^2 - B' y^2$$
(1.2.7)

ただし

$$A' = \frac{1}{2R r_x} + \frac{1}{2\beta} \qquad B' = \frac{1}{2R r_y} \qquad x' = x - \frac{nl - \varphi}{R r_x + \beta} \quad (1.2.8)$$

A', B'を第1章式(1.1.11)に代入すると cos ♥ は次式で表される。

$$\cos \Psi = \frac{(\gamma_x - \gamma_y)\beta - \gamma_x \gamma_y R}{(\gamma_x + \gamma_y)\beta + \gamma_x \gamma_y R}$$
(1.2.9)

この $\cos \Psi$ が式 (1.1.12)を満足するように $k \left\{ = (1 - \frac{a_n}{b_n})^{\frac{1}{2}} \right\}$ を繰返し計算で求 めると個々の接触だ円の形状が定まる。また,個々の接触だ円における近接量 a_n と分担荷重 W_n の関係として式 (1.1.17)を用いると,

$$W_n = \phi_W \, \alpha_n^{\frac{3}{2}} \tag{1.2.10}$$

ここで

$$\boldsymbol{\Phi}_{W} = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi E \left\{ \frac{\gamma_{x} \gamma_{y} R \beta}{\beta (\gamma_{x} + \gamma_{y}) + \gamma_{x} \gamma_{y} R} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{E'(k)}{(1 - k^{2}) F'^{(3)}(k)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$
(1.2.11)

また α_n は式 (1.2.7) において x' = 0, y = 0 とおけば次式のように定まる。

-25-

$$\alpha_n = Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(\tau_x R + \beta)}$$
(1.2.12)

ところで、分担荷重 W_n の総和は球に作用する荷重 W に等しいため次式が成立 する。

$$W = \Phi_{W} \sum_{n} \alpha_{n}^{\frac{3}{2}} = \Phi_{W} \sum_{n} \left\{ Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^{2}}{2(r_{x}R + \beta)} \right\}^{\frac{3}{2}}$$
(1.2.13)

通常,Wは接触条件として既知の量であり, Z_{op} は未知変数である。そこで,上 式を満足するような Z_{op} を繰返し計算で求める。その Z_{op} を式(1.2.10) に代入 すれば分担荷重 W_n が得られる。つぎに n 番目の接触だ円上での表面圧力分布 $p_n(x,y)$ は前章式(1.1.4)を用いると次式で表される。

$$p_n(x, y) = \frac{3W_n}{2\pi a_n b_n} \left[1 - \frac{1}{a_n^2} \left\{ x - \frac{nl - \varphi}{\beta + R \tau_x} \tau_x R \right\}^2 - \frac{y^2}{b_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.14)$$

ここで 2 a_n, 2 b_n は n 番目接触突起の接触面だ円の短径と長径を表す。圧力 分布が求まると, 球および平面の垂直変位の和は弾性論²⁰ により次式で求まる。

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi E} \sum_{n} \iint_{S_{i}} \frac{p_{n}(\xi, \eta)}{\{(\xi - x)^{2} + (\eta - y)^{2}\}^{\frac{1}{2}}} d\xi d\eta \qquad (1.2.15)$$

ただし,積分領域Si は各接触だ円面内とする。 このwは突起と母材の弾性変形による変位 W_a + W_m に相当するため接触域内では 式(1.2.3)の接触条件を満足しなければならない。式(1.2.3)を書きかえ

$$\frac{x^2 + y^2}{2R} + \frac{(x + \varphi - nl)^2}{2\beta} - \frac{\varphi^2}{2\beta} = w(0, 0) - w(x, y)$$
(1.2.16)

上式に式(1.2.15)を代入すると、上式の右辺は T_x , T_y の関数であることがわかる。結局、最初に仮定した T_x , T_y を接触領域内で式(1.2.16)が満足されるように繰返し計算で求めればよい。その T_x , T_y を式(1.2.15)に代入すれば近接量 α が

$$\alpha = w (0, 0) + \frac{\varphi^2 R}{2\beta (R+\beta)}$$
(1.2.17)

として求まる。

2.2.2 突起が塑性変形する場合

突起が弾性変形する場合と同様の解析手順をふむ。すなわち、母材の変位

を式 (1.2.5) で示したような二次関数で表す。この場合,母材の弾性変形量と弾 塑性的変形を生じている突起の弾性変形量の区別をつけることは困難なため,こ の *w_m* には突起の弾性変形も含まれているものと仮定する。球面からこの母材の 変位を差引いた後の曲面も 2 次曲面で近似的に表される。この 2 次曲面が図 1.2. 1 のように荷重 *W* のため *Z_q*の位置まで食込んだ状態を考える。個々の接触だ円 の短半径 *a_n* および長半径 *b_n* は次式で与えられる。

$$a_{n} = \left[\frac{2r_{x}\beta R}{\beta + r_{x}R} \left\{ Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^{2}}{2(r_{x}R + \beta)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$
(1.2.18)

$$b_n = \left[2 T_y R \left\{ Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^2}{2 (T_x R + \beta)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$
(1.2.19)

この場合,接触面の圧力は一定でやわらかい方の材料の流れ圧力 Pm に等しい と考えられるので, n番目の突起が受持つ荷重は式(1.2.10)の代わりに次式で 与えられる。

$$W_n = 2\pi R p_m \left\{ Z_{op} - \frac{(nl - \varphi)^2}{2(r_x R + \beta)} \right\} \left\{ \frac{r_x r_y \beta}{r_x R + \beta} \right\}^{\frac{1}{2}}$$
(1.2.20)

分担荷重の総和は荷重 W に等しいはずであるから次式が成立せねばならない。

$$W = \sum_{n} W_n \tag{1.2.21}$$

上式が成立するように Z_{op} を逐次計算で求めると突起の塑性変形のみによる近接量が求まり接触域が定まる。また母材の弾性変形量は式(1.2.15)に一定の面 圧 P_m を代入して式(1.2.18)(1.2.19)で定まる領域について積分すれば求まる。 接触条件は式(1.2.6)を使って式(1.2.3)を変形することにより次式で表される。

$$\frac{1}{2R}\left(x^{2}+y^{2}-\frac{x^{2}}{r_{x}}-\frac{y^{2}}{r_{y}}\right) = w_{m}(0,0) - w_{m}(x,y) \qquad (1.2.22)$$

すなわち,全接触領域で上式を満足するように T_x, T_yを逐次計算で決定すると 接触状態が定まる。

近接量 α は突起の塑性変形による近接量 α_p と, 球および平面の母材の弾性変形による近接量 α_m との和となる。

-27-

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_p + \boldsymbol{\alpha}_m \tag{1.2.23}$$

 α_p はn=0のところの接触突起の塑性近接量に相当し幾何学的に次式で定まる。

$$\alpha_p = Z_{op} - \frac{\varphi^2}{2\left(\tau_x R + \beta\right)} \tag{1.2.24}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{m} = \boldsymbol{\alpha}_{e1} + \boldsymbol{\alpha}_{e2} \tag{1.2.25}$$

$$\alpha_{e1} = \frac{2p_m}{\pi E} \left(\sum_{k=-k}^{-1} + \sum_{k=1}^{k} \right) \iint_{S_k} (\xi^2 + \eta^2) d\xi d\eta \qquad (1.2.26)$$

$$\alpha_{e2} = \frac{78}{\pi^{1.5}} \left(Z_{op} - \frac{\varphi^2}{2\gamma_x R + \beta} \right) p_m^{1.5} W_0^{-0.5} R \gamma_x^{0.6} \gamma_y^{0.4} E^{-1} \qquad (1.2.27)$$

ここで k_{max} は原点から最も離れた接触突起の番号で S_kは k 番目の接触面領域
を表す。

なお W6 は式 (1.2.20) で n=0 とおくことにより求まる。結局,近接量 α は式 (1.2.23)~(1.2.27) から計算できる。

以上の解析では個々の突起の接触域形状を独立に扱い,突起の合流は考慮しないためWや n,が非常に大きくて隣接突起の接触域の合流が生じるような場合には本理論は適用できない。

なお以上の理論式はすべて下記の無次元化量で表示できることが確認されたの で計算結果はこれら無次元化量を用いて示す。

 $\beta^* = \frac{\beta}{R}$, $l^* = \frac{l}{R}$, $W^* = \frac{W}{R^2 E}$, $p_m^* = \frac{p_m}{\pi E}$, $n_p^* = n_p R$

2.3 数值計算手順

計算手順としては図 1.2.2 に示すように表面粗さのパラメータ,弾性定数,荷 重等の接触状態を入力とし,繰返し計算を2重に行う。なお,いずれの繰返し計 算にも計算法としては Newton - Raphson 法を用いた。また式(1.2.15)の被積

-28-

分関数は特異点を有するため極座標表示にして 9~10次の Gauss 数値積分を行った。式(1. 2.16)および式(1.2.22)の接触条件は接触域 全域で成立しなければならないが,最初に母材 の弾性変形を式(1.2.5)で示されるような二次 関数で近似しているため接触条件を全接触域で 満足させることは不可能である。そのため,数 値計算では球の中心線に最も近い接触突起の接 触だ円内の2点($\frac{\varphi}{RT_x + \beta}$,0)($\frac{\varphi}{RT_y + \beta}$,0.55k) および,突起の x 座標が 0.55 x_{max} に最も近い 突起の接触だ円の中心点,この3点で接触条件 を満足させた。

なお, これらの点の座標は第1編第4章の考 察4.3.1をもとに定めたものであり, x_{max}はx 軸方向の接触域半径を表す。

球に対する突起の相対的位置を示す φ については $\varphi=0$ の場合と $\varphi=0.51$ の場合とで近接量の値を比較すると、接触点の数が3個以上の場合ではその差は2%以下にすぎないことが確認されたので数値計算はすべて $\varphi=0$ で行った。

2.4 数值計算結果

2.4.1 突起が弾性変形する場合

(1) 接触域形状

接触域形状を図 1.2.3 の実線で示す。上記手順で母材の弾性変形を考慮す ると粗さの方向性に無関係にみかけの接触域は円形をしているが、いま母材の弾 性変形を考慮せずに $T_x = T_y = 1$ とし、個々の突起にヘルツ理論を適用し荷重条件 のみを満足させた場合、図 1.2.3 で点線で示したようにみかけの接触域は x 方向



図1.2.2 計算手順

(条痕の方向と直角をなす方向)の半径の方がッ方向の半径より大なるだ円になる。母材の弾性変形量の半径方向の変化がx方向に比ベッ方向にゆるやかであるため、母材の弾性変形まで考慮に入れるとッ方向の接触域が拡がり、接触域形状が円形になると考えられる。すなわち、母材の弾性変形は条痕の方向に平行な方向 $r_{x}R$ の方が $r_{x}R$ より大になる。このことは、また図1.2.4より明らかであり β 、 n_{y} を変化させても常に $r_{x}R < r_{y}R$ である。



(2) 圧力分布

第4,5章で示すように表面粗さが大なるほどみかけの接触面積が増加し, みかけの平均圧力は平面と球の接触に関するヘルツ理論から求まる圧力よりも低 下する。しかし,個々の突起に作用する圧力は図1.2.5 に示すように局部的に高 い値を示す。この分布圧力の最大値 Pmax とヘルツ圧力 PH との比 (Pmax/PH) は突 起の半径が小なるほど,また突起の密度が小なるほど増加し,図1.2.6 に示すよ うな範囲では次式に示す関係で表される。

$$\frac{p_{max}}{p_{H}} \approx 0.70 W^{*^{-0.12}} n_{p}^{*^{-0.40}} \beta^{*^{-0.48}}$$
(1.2.29)

この式で示されるように、突起部にきわめて高い接触圧力が発生することは軸受

-30-



 $\beta^* = 0.04$ $n_p^* = 100$ $W^* = 2 \times 10^{-6}$



図 1.2.6 突起半径,間隔と最大圧力の関係

(3) 真実接触面積
 真実接触面積 A,
 はヘルツ理論による接触
 面積よりかなり小さく,
 また図 1.2.7 に示すよう
 に突起半径が小なるほど,
 突起間隔が大なるほど面
 積は小さくなる。なお A,



図1.2.7 突起半径,密度と真実接触面積の関係

-31-

は下記の接触条件下では次式で近似できる。

$$A_{r}^{*} = 6.7 W^{*^{0.8}} n_{p}^{*^{0.4}} \beta^{*^{0.5}}$$
(1.2.30)
$$\begin{cases} t t t \cup, \ 0.7 \times 10^{-6} \le W^{*} \le 3.4 \times 10^{-6}, \ 0.2 \times 10^{-2} \le \beta^{*} \le 5 \times 10^{-2} \\ 20 \le n_{p}^{*} \le 500 \end{cases}$$

(4) 近 接 量

突起半径および突起の密度と近接量の関係は図 1.2.8 に示すようになる。 すなわち、半径が小なるほど、また密度 n_p^* が小なるほど近接量は増加する。 β^*, n_p^*, W^* の接触条件のうち α^* に及ぼす影響は W^* が最も大である。



(a)	$\beta^* = 8 \times 10^{-3}$	$W^* = 3.4 \times 10^{-6}$
(b)	$n_{p}^{*} = 120$	$W^* = 3.4 \times 10^{-6}$
(c)	$\beta^* = 8 \times 10^{-3}$	$W^* = 2.0 \times 10^{-6}$
(d)	n _p *= 120	$W^* = 2.0 \times 10^{-6}$

図 1.2.8 突起半径,密度と近接量の関係

-32-

(5) 突起内部の最大せん断応力

以上の理論計算は接触突起が弾性変形 する場合に成立するが、荷重の増加や突起半 径の減少により突起の内部の最大せん断応力 が増大し、トレスカの降伏条件によるとこの 応力が0.5Y(Y:降状応力)以上になると 突起内部で塑性変形が生じる。中央の接触突 起における最大せん断応力を求めた結果を図 1.2.9に示す。負荷よりも突起半径の方が最



図 1.2.9 $\beta^* \geq \tau_{\max}^*$ の関係 $n_n^* = 120$ 大せん断応力に及ぼす影響が大であり、 β/R が 0.5×10^{-2} 程度以下では最大せ ん断応力が著しく大になり突起の塑性変形が生じる可能性が大になる。

2.4.2 突起が塑性変形する場合

図 1.2.10,図 1.2.11 に近接量に関する数値計算結果を示す。両図は、 β^* , n^{*}, *p*^{*}_m 小なるほど α^{*}が増加する傾向を 示している。しかも, β^{*}, n^{*}, <u>m</u>*いずれ も同程度の影響を *α^{*}* に 与えている。 通 常、表面粗さが大なるほど n_{*}^{*} , β^{*} が小 になるため,両図の結果から表面粗さ大 なるほど α^* が増加することがわかる。 しかし p_m^* , n_s^* , β^* 小なるほど各接触突 起の変形量は増加するが接触域が拡がる ため、逆に母材の変形量は減少する。こ のため p_m^* , n_h^* , β^* が α^* に及ぼす影響は あまり顕著ではない。

接触変形時の球の中心の位置から球の 半径Rだけ下方の位置すなわち仮想的な 球底の高さを食込み位置 u と定義すると, **u**は実質的な球底の位置を示すため球と 平面の接触理論を表面うねりを有する面 の接触問題や転がり上下変動等の問題に



適用する場合に重要な因子となる。均一形状突起を有する面の場合ルは

$$u \approx \frac{2}{l} \int_{0}^{\frac{l}{2}} \frac{x^{2}}{2R} dx - \alpha$$
 (1.2.31)

と表されるが、図1.2.10、図1.2.11 の接触条件下では右辺第1項が無視でき $u \approx -\alpha$ と近似できるため、図 1.2.10、図 1.2.11 は -u に関する数値計算結果

-33-

と見なしうる。

第1章で,塑性変形突起の弾性変形量として面積平均値で代表させ単一突起の 変形量を求める近似式を導いたが,より厳密に突起の変形を表すには,面積平均 値と最大変位値の間の値を弾性変形量として採用すべきであることを同時に示し

た。そこで、突起の弾性変形量として 最大変位値を採用した場合の近接量を 求め、面積平均で設定した場合の近接 量との比を計算する。その結果、図1. 2.12 に示すように両者の比はかなり 1に近いことがわかる。面積平均値設 定と、最大変位設定の間に存在すると 考えられる真の値との比は図1.2.12 より更に1に近いため、面積平均値近 似による誤差は無視できることがわかる。



2.5 実験方法および実験結果

2.5.1 突起が弾性変形する場合

真実接触面積について理論値と実測値の比較を試みる。弾性変形を確実に するため平面試験片としては常温硬化型シリコンゴムを用い,形削り仕上した軟 鋼面粗さをこのゴムに転写することによ

り方向性のある均一形状の表面粗さ試料 を作成した。この平面に印肉を薄く塗布 した球を押付けた後、ゴムの着色部分の 面積を顕微鏡で測定した。なお、理論値 を計算するにはシリコンゴムの弾性定数 を求める必要があるが、この値は硬化剤



図 1.2.13 常温硬化型シリコンゴムの弾性定数

の量で大きく変化する。そこで粗さ試験片と同一材料で鏡面を転写したなめらか な表面を有する試験片を作り、この試験片に球(半径 40 mm)を押付けた場合の 接触半径とヘルツ理論を比較することにより弾性定数を求めた。その結果を図 1. 2.13 に示す。荷重の変化に対して $(1-v_2^2)/E_2$ はほぼ一定であることから、シ リコンゴムを弾性接触用試験片に用いることの妥当性が確認できる。

 $(1 - \nu_2^2)/E_2 = 4.5 \ mm^2/kgf$ として計算した理論値と実測値の比較を図 1.2.14, 図 1.2.15 に示す。 両図とも理論と実測値の間にかなりの一致をみており,理論の妥当性がほぼ確認できたものと考えられる。



図 1.2.14 荷重と真実接触面積の関係 R=40 mm $n_p = 1.67 \text{ mm}^{-1} \beta = 0.51 \text{ mm}$

図 1.2.15 荷重と真実接触面積の関係 R=40 mm $n_p = 3.3 \text{ mm}^{-1} \beta = 0.11 \text{ mm}$

2.5.2 突起が塑性変形する場合

近接量について理論値と実測値の比較 を試みる。実験装置として図1.2.16 に示す ような治具をアムスラー型引張試験機に取付 け,上部試験片と球の接触変形による近接量 αを球の周囲4ケ所に設置した電気マイクロ メータで測定する。

平板試験片の材質は軟鋼(マイクロビッカ ースかたさ *H*_r = 240)で形削り仕上により図



-35-

1.2.17 に示すような均一形状のおうとつを 有する。鋼球は材質 SUJ 2 (マイクロビッ カース硬さ $H_v = 1000$)で表面粗さは 0.1 μm R_{max} 以下で平板試験片の表面おうとつに比 べ無視できる。



図 1.2.17 試験片の表面粗さ曲線

図1.2.18、図1.2.19 に荷重と近接量の関係についての実測値と理論値を示す。 丸印は実測値の平均(10回測定)で実測値のばらつきも図中に示す。実線は突起

-36-



図 1.2.18 荷重と近接量の関係 R=25.4 mm p_m=240 kg f/mm² β=0.07 mm n_p=3.3 mm⁻¹

の変形を塑性変形と設定した場合の理論値で 実測値とのかなり良い一致を示している。な お、この場合、突起が塑性変形していること は押付け後の表面観察により確認された。

図 1.2.20 に突起間隔を変えた場合の近接 量の変化について実測値と理論値を示す。実 線で示した理論値と点線で示した実測値は比 較的良い一致を示している。ただ、突起間隔



図 1.2.19 荷重と近接量の関係 R = 25.4 mm $p_m = 240 \text{ kg f/mm}^2$ $\beta = 0.07 \text{ mm}$ $n_p = 5 \text{ mm}^{-1}$





小なる場合には実測値が理論値より低目に,突起間隔大なる場合には逆に実測値 の方が理論値より大なる値を示している。しかも,この逆転は荷重が大なるほど 小なる突起間隔の所で生じている。

この原因については粗さ試験片の表面下の深さ方向に添っての流れ圧力の変化 の影響が考えられる。すなわち,一般に機械加工面は,加工硬化のため表層部が 内部に比べ高い硬度を有しているが,突起間隔が拡がるほど,また荷重が増すほ ど各接触突起の食込み深さは深くなり,より低い流れ圧力の位置で接触が起こる ため,理論値より塑性変形が進行する可能性がある。

ところで、本実験の荷重条件においてはヘルツ理論で内部の最大せん断応力を 試算すると球あるいは平面の母材の塑性変形の発生が懸念されるが、第4および 5章で示すように表面粗さが大なるほど母材内部の最大せん断応力は低下し、ヘ ルツ理論から推定される最大せん断応力に比べ、かなり低目の値になることがわ かる。また本実験において押付け実験後の試料面のおうとつを測定すると図1.2. 21 にその一例を示すように、母材の顕著な塑性変形の痕跡は見出されない。 以上より母材の塑性変形は 図1.2.20 の実測値に影響を及ぼしていないことがわ かる。



図 1.2.21 押付け実験後の断面曲線

-37-

 $W = 60 \text{ kg f}, n_p = 2.5 \text{ mm}^{-1}$ $\beta = 0.07 \text{ mm}, R = 25.4 \text{ mm}$

2.6 結 言

均一形状突起を有する平面と球の接触変形問題を,接触突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行い,真実接触面積や近接量の測定実験を 通じて理論の妥当性を検討した結果,以下のことが明らかになった。

- 1) 突起が弾性変形する場合,母材の弾性変形は表面粗さの方向性の影響を受け て,顕著な方向性を示す。
- 2) 突起が弾性変形する場合,接触突起に作用する圧力は,なめらかな平面と球の接触におけるヘルツ圧力より大で,その値は表面粗さ大なるほど,すなわち突起密度,突起先端曲率半径小なるほど大になる。
- 3) 突起が弾性変形する場合,真実接触面積は荷重の 0.79 乗に比例して増加し, 表面粗さが大なるほど真実接触面積は減少する。
- 4) 突起の変形形態のいかんによらず,近接量は表面粗さが大なるほど増加する。
- 5) 理論値と実測値はかなりの一致を示し、理論の妥当性が確認された。

参 考 文 献

- 1) 石垣,木原,川口:精密機械,41,4(1975)385.
- 2) A.E.H.Love : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.

第3章 最初の接触位置

3.1 緒 言

球と平面の接触問題では,理論の妥当性を実験的に検討するには接触開始時点 から食込み後までの球の変位(近接量)でもって比較するのが最も容易で測定精 度も高い。ところで,近接量を理論的に求めるには,まず接触開始時の球底の高 さを解析する必要がある。しかも,この高さ(以後,最初の接触位置と呼ぶ)は 球形測定子による寸法測定精度,転がり上下運動,転がり抵抗の変動,表面のお うとつ測定精度等の諸問題においても重要な因子である。例えば表面おうとつ測 定精度の問題だけを取り上げても"最初の接触位置"が関与する問題として第2 編で考察するように,(1)表面粗さ測定精度に及ぼすスキッドの影響,(2) Mシ ステムとEシステム間の換算方式,(3)転がり円うねりの測定精度等が挙げられ る。しかるに,最初の接触位置の解析についての従来の報告^{1~8)}は平面間の接触の 場合に限られ,球と平面の接触については見当たらない。そこで,この章では方 向性のある面とない面の両方の場合について統計学の"極値理論"を応用して最 初の接触位置の理論的解析を試み,その数値計算結果と実験結果との比較を行う ことにより理論の妥当性を考察する。

なお,第2編で最初の接触位置の解析を応用してスキッドの上下変動,表面う ねり測定用触針の挙動等を考察する必要上,この章では曲面の形状を球のみに限 定せずに,だ円放物面と平面の接触について解析を試みる。

3.2 理 論

一般の機械加工面は複雑な方向性を有している場合があるが, ここでは単一方 向のみに方向性を有する表面粗さと, 全く方向性のない表面粗さの両極端の場合 についてそれぞれに解析を行った。なお, 複雑な方向性を有する面については後

-39-

述のように両者の比較により推定できる。

3.2.1 方向性のある表面粗さの場合40

一方向のみに方向性のある粗さを考え,表面粗さの方向性に平行な粗さ曲 線上の表面粗さは無視できるものとする。

座標系を図1.3.1 に示すようにとる。 すなわち、 ツ軸を表面粗さの条痕に平行 にとり、 エ軸を表面粗さ突起頂点の高さ 分布の平均線に一致させ、 ニ軸をだ円放 物体の中心軸に一致させる。



図 1.3.1 接触状態

この場合,だ円放物体のy方向の曲率半径は最初の接触位置に影響を及ぼさないため,図1.3.1のようにx方向の曲率半径のみを考え,放物線と表面粗さ曲線との2次元的接触として扱える。そこで,この曲面の曲率半径をx方向曲率半径で代表させこれを R_x とおく。

-40-

つぎに、表面粗さの統計的性状を考える。 一般に突起頂点の高さ分布は正規分布をなす と言われており、研摩布仕上面についての測 定例でも図1.3.2 に示すように頂点正規分布 が確かめられたため、理論でもこれを仮定す る。従来の接触理論では横方向突起間隔分布 を考慮する必要はないが、球と平面の接触に おける最初の接触位置、とくに方向性のある 面の場合には後述するように突起間隔分布の 影響が無視できない。

研摩布仕上面に関して,頂点間隔分布を実 測すると,図1.3.3の例にも見られるように ワイブル分布に近い形を示している。実際,



図 1.3.2 正規確率紙による分布形の推定 (研摩布仕上面)

種々の研摩布仕上面について χ^2 検定⁵⁾を 行うと, 全データの 85 % まではワイブ ル分布とみなせることが明らかになった^{\pm)} すなわち, 突起間隔 / の確率密度関数 q(I)は次式で示すようなワイブル分布で 近似できる。

$$q(l) = \frac{S}{\eta} \left(\frac{l}{\eta}\right)^{s-1} e^{-\left(\frac{l}{\eta}\right)^{s}}$$

$$(1.3.1)$$

ここで、S:形状母数、η:尺度母数



研摩布仕上面 R_a=0.37 μm

しかし,式(1.3.1)のままでは解析がきわめて複雑になるため S=1 の場合 (指数分布)と,S→∞(均一間隔)の場合について最初の接触位置の解析を行 う。また,接触開始時においては突起の頂部のみが曲面と接触し,突起の肩部で は接触しないと仮定する。この仮定は球の半径 R が 2.5 mm 以上の場合には成立 することが報告ⁿ されている。

3.2.1.1 突起間隔分布を指数分布と仮定する場合

指数分布と均一間隔を式(1.3.1)のワイブル分布に対応させるために、両 者とも単位幅あたりの平均突起数が次式で与えられるワイブル分布の場合の平均 突起数に一致するように分布形のパラメータを決定する。

$$n_{p} = \frac{1}{\eta \Gamma \left(\frac{1}{S} + 1\right)}$$
(1.3.2)

ただし、 Γ :ガンマ関数、 n_p :平均突起密度

-41-

図1.3.1 に示すように、 * 方向に等間隔 **4** * で断面曲線を分割すると、任意の * 番目の区間中に突起が m 個存在する確率は頂点間隔分布が指数分布の場合には 他の区間の影響を受けないため、次式の M_m で与えられる。

$$M_m(\Delta x) = \frac{(n_p \Delta x)^m}{m!} e^{-n_p \Delta x}$$
(1.3.3)

いま図 1.3.1 に示すように、2軸の原点を表面粗さ突起頂点の平均高さにとり、 最初の接触位置を Z_{ip} とすると、この k 番目の区間中のすべての突起が曲面と接 触しない確率 A は次式で与えられる。

$$P_{k} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz \right\}^{m} M_{m} (\Delta x) \right]$$

= $exp \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz - 1 \right\} n_{p} \Delta x \right]$ (1.3.4)
ここで, $h_{k} = Z_{ip} + \frac{(k \Delta x)^{2}}{2R_{x}}$, $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{op})^{2}}}{\int_{-4op}^{4op} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{op})^{2}} \, dz}$
 σ_{p} : 突起頂点高さ分布の標準偏差

なお、上式では個々の突起の頂点高さは互いに独立であるとの仮定を設けてい るが、表面粗さ曲線の相関長は平均突起間隔より小になるとの報告⁸⁾ もあり、頂 点高さの独立性はほぼ満足されていると考えられる。つぎに、任意の k 番目の区 間中の突起の内、唯一の突起の頂点が高さ $h_k \sim h_k + dZ_{ip}$ の範囲にあって曲面と 接触し、この区間中の他の突起はすべて接触しないという確率 Q_k は次式で与え られる。

$$Q_{k} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz \right\}^{m-1} \, mf(h_{k}) \, dZ_{ip} \, M_{m}(\Delta x) \right]$$
$$= n_{p} \, \Delta x f(h_{k}) \, dZ_{ip} \cdot exp\left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz - 1 \right\} \, n_{p} \, \Delta x \right] \qquad (1.3.5)$$

k番目の区間中に存在する突起のみと曲面が接触し、その時の最初の接触位置が $Z_{ip} \sim Z_{ip} + dZ_{ip}$ の間に存在する確率 G_k は次式で表される。

$$G_k = \frac{Q_k}{P_k} \prod_{j=-\infty}^{\infty} P_j \tag{1.3.6}$$

-42-

よって、最初の接触位置 Zip の確率密度関数 gp(Zip) は次式で求まる。

$$g_{p} (Z_{ip}) \ dZ_{ip} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{k}$$

$$g_{p} (Z_{ip}) = \lim_{\Delta x \to 0} n_{p} \ \Delta x \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(h_{x})$$

$$exp \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \ dz - 1) \ n_{p} \ \Delta x \right\}$$
(1.3.7)

上式より確率密度 $B_p(Z_{ip})$ が定まると,最初の接触位置の平均値 $\overline{Z_{ip}}$,標準偏差 σ_{zip} ,および中心線平均値 ζ_{zip} がそれぞれ次式より求まる。

$$\overline{Z}_{ip} = \int_{-\infty}^{\infty} Z_{ip} g_{p} (Z_{ip}) dZ_{ip}
\sigma_{zip} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (Z_{ip} - \overline{Z}_{ip})^{2} g_{p} (Z_{ip}) dZ_{ip} \right\}^{\frac{1}{2}}
\zeta_{zip} = \int_{-\infty}^{\infty} |Z_{ip} - \overline{Z}_{ip}| g_{p} (Z_{ip}) dZ_{ip}$$
(1.3.8)

3.2.1.2 突起間隔を均一間隔と仮定する場合

x 軸方向に一定の間隔で突起が並んでいると考える。突起密度を式 (1.3. $2) で定まる <math>n_p \ge 0$, $z 軸に最も近い突起の x 座標を <math>\varphi \ge g$ $\frac{-1}{2 n_p} \sim \frac{1}{2 n_p}$ の間で一様分布をなす。そのため,最初の接触位置の確率密度関数 $g_p(Z_p)$ は次式のように表される。

$$g_{p}(Z_{ip}) = n_{p} \int_{-(\frac{1}{2np})}^{\frac{1}{2np}} G_{p}(\varphi) d\varphi \qquad (1.3.9)$$

$$G_{p}(\varphi) = \prod_{k=-\infty}^{\widetilde{n}} \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) dz \sum_{j=-\infty}^{\widetilde{n}} \frac{f(h_{j})}{\int_{-\infty}^{h_{j}} f(z) dz}$$
(1.3.10)

ここでf(z)は式(1.3.4)と同一であるが、 h_a は次式で表される。

$$h_{k} = Z_{ip} + \frac{(k + n_{p} \varphi)^{2}}{2R_{x} n_{p}^{2}}$$
(1.3.11)

式 (1.3.9)を式 (1.3.8) に代入すれば \overline{Z}_{ip} , σ_{aip} , および ζ_{aip} が求まる。 3.2.2 方向性のない表面粗さの場合

方向性のない表面粗さの場合には、 x 方向の曲率半径のみならず y 方向の曲率 半径も考慮しなければならない。そこで、次式に示すように x 、 y 方向の主曲率

半径が R_x, R_y であるようなだ円放物面と粗い平面の接触を考える。

$$\frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} = z \tag{1.3.12}$$

方向性のない表面粗さの場合も、突起頂点高さ分布をもとに解析を行うのが方 向性のある表面粗さの場合と比較する上から最も適当であるが、この場合、突起 頂点間隔分布が2次元になることから解析がきわめて複雑になる。しかも、解析 が可能であっても現実の加工面に適用する場合、3次元的頂点分布を実測するこ とは容易でなく、また一般的でない。そこで、方向性のない表面粗さの場合には

真実表面が互いに独立で面積が最小な微小な 表面単位²⁾ で形成されていると考え,その 表面単位の高さ分布をもとに最初の接触位置 の解析を行う。いま,だ円放物体を図1.3.4 に示すように等間隔 d z で分割すると,各部 分の x, y 平面への投影面積は次式に表す ように z に無関係になる。なお方向性のない



図 1.3.4 接触状態 (方向性のない表面粗さ)

面の解析の場合には ≈ 軸の原点高さを表面単位の平均高さにとる。

$$A = 2 \pi \left\{ R_x R_y \right\}^{\frac{1}{2}} \Delta z$$
$$= 2 \pi R \Delta z \qquad (1.3.13)$$

ここで, $R = (R_x R_y)^{\frac{1}{2}} とおく。$

すなわち,輪切りされた各部分を x, y 平面へ投影した各リンク中に含まれる 表面単位の数は一定になる。いま,この曲面の底が Z_{is}の位置にあるとき,任意 の k 番目のリンク中のすべての表面単位が二次曲面と接触しない確率 P_k は式 (1.3.4)と同様に次式で与えられる。

 $P_{k} = \left(\int_{-\infty}^{h_{k}} f_{s}(z) dz \right)^{An_{s}}$ (1.3.14)

ただし, n_s は x, y 平面への単位投影面積中に存在する平均表面単位数,

f_s(z) は表面単位の高さ分布の確率密度関数で標準偏差 σ_sの正規分布とし,式 (1.3.4)の場合と同様の条件付確率密度関数で表される。また,上式の h_k は次 式で与えられる。

$$h_k = Z_{is} + k \Delta z \tag{1.3.15}$$

一方,任意の k 番目のリンク中に含まれる表面単位のうち最も高い表面単位が 高さ $h_k \sim h_k + dz_{is}$ の間で二次曲面と接触し、しかもこのリンク中の他の表面単 位が二次曲面と接触しない確率 Q_k は次式で与えられる。

$$Q_{k} = An_{s} \left(\int_{-\infty}^{h_{k}} f_{s}(z) dz \right)^{An_{s}-1} f_{s}(h_{k}) dz_{is}$$
(1.3.16)

最初の接触位置が $Z_{is} \sim Z_{is} + dz_{is}$ との間に存在する確率 G_k は方向性のある面の場合と同様に式 (1.3.14), (1.3.16)を式 (1.3.6)に代入すれば求まる。よって Z_{is} の確率密度関数 $g_s(Z_{is})$ は次式で表される。

$$g_{s}(Z_{is}) = \lim_{\substack{Az \ m \to \infty \\ Az \to 0}} \left(\prod_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{h_{k}} f_{s}(z) dz \right)^{An_{s}} \sum_{k=1}^{m} \frac{An_{s} f_{s}(h_{k})}{\int_{-\infty}^{h_{k}} f_{s}(z) dz}$$
(1.3.17)

式 (1.3.17)を式 (1.3.8)の $g_p(Z_{ip})$ に代入すると、最初の接触位置の平均値 \overline{Z}_{is} ,標準偏差 σ_{zis} ,および中心線平均値 ζ_{zis} が算出される。

3.3 数值計算結果

3.3.1 方向性のある表面粗さの場合

(1) 突起間隔が指数分布,あるいは等間 隔である場合

式 (1.3.7), (1.3.8) を用いて数値 計算を行った結果を図 1.3.5, 図 1.3.6 に 示す。なお,数値計算にあたっては *4x* を 順次減少させ,同時に式 (1.3.7)の総和の 項数を増加させ,式 (1.3.8)の数値計算結 果が一定になるところの値を用いた。



)

-45-

図 1.3.5, 図 1.3.6 はそれぞれ最 初の接触位置の標準偏差 σ_{zip}, お よび平均値 Z_{ip} の数値計算結果で 実線は突起間隔分布が指数分布を なす場合,破線は均一間隔の場合 を示す。

(2) 突起間隔がワイブル分布で ある場合のシミュレーション

ワイブル分布の場合には, 指数分布の場合のように * 軸方向 に等問隔 4* で分割しても 任意



 $(R_x = 5 \text{ mm})$

に等間隔 **Δ**× で分割しても,任意の k 番目の区間の突起数が k-1 番目,あるい はそれ以前の区間の影響を受けるため区間内の突起存在個数が式(1.3.3)のよう に簡単には表しえない。そこで、丸印の数値計算結果はシミュレーションによる 計算から求めた。すなわち,正規乱数,およびワイブル乱数を一様乱数から発生 させ,これらの乱数を高さ,および頂点間隔とする突起頂点の標本点を作り,こ の標本点列の上を転がる球の軌跡の高さの平均値や標準偏差を求めた。その結果 を図 1.3.5, 図 1.3.6 の丸印で示す。図 1.3.5 において表面粗さ突起頂点高さの 標準偏差 ゐ が大で突起密度 n。が大なる範囲では,突起間隔分布を指数分布と仮 定する場合と、均一間隔と仮定する場合の両者の理論値はほぼ一致している。し かし, 🛯 および 75 が小なる範囲では, 図 1.3.1 の 2 軸近傍のほんの数個の突起 しか接触の可能性を有しないため、その数個の突起の間隔分布の差が最初の接触 位置に大きな影響を及ぼす。そのため,図1.3.5 でも op, np が小なる場合には 指数分布と均一間隔との間に大きな差が生じている。ところで,実際の砥粒加工 面の突起間隔分布をかなりよく近似していると考えられるワイブル分布の場合の 数値計算結果は図1.3.5の実線と破線のほぼ中間に位置している。これより,ワ イブル分布の場合の理論値は指数分布と均一間隔の両者の理論値の平均値でもっ

-46-

て近似できるものと考えられる。また Z_i, に関しても図 1.3.6 に見られるように 同様の近似が成立することが確認できる。よって以後の理論値は両者の理論値の 平均値で示す。

(3) 無次元化処理

式(1.3.7),(1.3.8)は下記の無次元化変数で表されるため、以下の数 値計算結果はこの無次元化変数で示す。

$$\sigma_p^* = \frac{\sigma_p}{R_x} , \quad n_p^* = n_p R_x , \quad \overline{Z}_{ip}^* = \frac{\overline{Z}_{ip}}{R_x}$$
$$\sigma_{zip}^* = \frac{\sigma_{zip}}{R_x} , \quad \zeta_{zip}^* = \frac{\zeta_{zip}}{R_x}$$

式 (1.3.7), (1.3.8) をこれら無次元化変数で表し、さらに変数変換を施してやると $\overline{Z_{ip}^*}/\sigma_p^*$, $\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$, ζ_{zip}^*/σ_p^* は $\sigma_p^* n_p^{*^2}$ のみの関数として表しうる。すなわち、これらの理論値は図 1.

3.7 に示すようにそれぞれ 1 本の曲線に整理できる。 図 1.3.7 から σ_p^* あるいは n_p^* が大なるほど $\overline{Z_{ip}}/\sigma_p^*$ は 増加し, $\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$, ζ_{zip}^*/σ_p^* は 減少することがわかる。い ま, σ_p , n_p が一定, すなわ ち表面知さが一定の場合を



考えると図 1.3.7 の横軸 $\sigma_p^* n_p^{*^2}$ は球の半径 R_x のみになる。そこで図 1.3.7 を見 直すと,球径が大なるほど $\overline{Z_{ip}^*}/\sigma_p^*$ は増加し, $\sigma_{zip}^*/\sigma_p^*$ は減少することがわかる。 この傾向は最初の接触位置の分布において, R_x を増加させることが極値分布に おいて標本数を増やすことに相当することから理解される。なお,これらの数値 計算結果は図 1.3.7 の領域内については十分な精度で次式で近似できる。

-47-

$$\frac{\sigma_{zip}^{*}}{\sigma_{p}^{*}} = (-0.02 t_{p}^{3} + 0.135 t_{p}^{2} - 0.365 t_{p} + 0.86)
\frac{\overline{Z}_{ip}^{*}}{\sigma_{p}^{*}} = (0.023 t_{p}^{3} - 0.165 t_{p}^{2} + 0.862 t_{p} + 0.5)
\zeta_{zip}^{*} = 0.8 \sigma_{zip}^{*}$$
(1.3.18)

最初の接触位置の分布形は図 1.3.8 に示すようにかなり正規 分布に近いが,その最大値が僅 かに Z_{ip} の小さい側に偏位した 非対称の分布形をなす。

3.3.2 方向性のない表面粗

さの場合

方向性のない表面粗さの場合 についても、Rに関する無次元 化を行うと方向性のある表面粗 さの場合と同様に、 $\overline{Z_{is}}/\sigma_{s}^{s}$ 、 $\sigma_{zis}^{zis}/\sigma_{s}^{s}$ 、 $\sigma_{zis}^{s}/\sigma_{s}^{s}$ して表される。これらの統計 量に関する数値計算結果を図 1.3.9に示す。 $\sigma_{s}^{s}n_{s}^{s}$ 大なるほ ど(表面粗さが一定の場合には 相当曲率半径Rが大なるほど) $\overline{Z_{is}}/\sigma_{s}^{s}$ が大に、また $\sigma_{zis}^{s}/\sigma_{s}^{s}$ や $\zeta_{zis}^{s}/\sigma_{s}^{s}$ が小になることがわかる。 これらの数値計算結果は図 1.3.

9の領域内では十分の精度で次式で近似できる。





-

-48-

$$\frac{\overline{Z}_{is}^{*}}{\sigma_{s}^{*}} = 0.08 t_{s}^{3} - 0.125 t_{s}^{2} + 1.14 t_{s} + 0.915$$

$$\frac{\sigma_{zis}^{*}}{\sigma_{s}^{*}} = -0.0068 t_{s}^{3} + 0.061 t_{s}^{2} - 0.218 t_{s} + 0.618$$

$$\left\{ \zeta_{zis}^{*} = 0.8 \sigma_{zis}^{*} \right\}$$
(1.3.19)

ところで, *a*, *n*, は表面粗さの表示法としては一般的でない。 *a*, については, ここで扱うような表面粗さ曲線の高さ分布の分布形が正規分布をなす面の場合, 中心線平均粗さ *R*, を用いて次式で推定できる。

$$\sigma_s = 1.25 R_a$$
 (1.3.20)

砂吹仕上面の *n*。については突起の傾斜角の実測値と連の理論を用いた解析結 果をもとにして次式が提示されている²⁰。

$$n_{s} = \frac{0.7978^{2}}{\sigma_{s}^{2}} \left(\frac{R_{max}}{3.45 R_{max} + 11.1}\right)^{2}$$
(1.3.21)

ただし, R_{max} のみ µm 単位で他は mm 単位

また, *R_{max} と o_s* の関係としては極値理論による推定および計算機による表面粗 さ曲線のデータ処理結果等を用いて次式が提示されている⁹。

 $R_{max} = \{ 4.14 \ln (\ln 10 Ni) - 3.38 \} \sigma_s \qquad (1.3.22)$

ここで Ni は R_{max} 測定長中に含まれる独立なサンプリングの数で、当然 R_{max} が異なると Ni そのものも変化するが、その変化は上式の形からも明らかなように右辺の値に大きな影響を与えない。いま、 $\sigma_s = 1 \mu m$ (測定長 0.8 mm)の時 Ni を実測すると 120 程度であるので、上式より

$$R_{max} = 4.6 \sigma_s \tag{1.3.23}$$

が求まる。

上式と式 (1.3.20)を式 (1.3.22) に代入し n_s を R_a の関数として表し、この n_s と式 (1.3.20)を式 (1.3.19) に代入して σ_{zis} 、 \overline{Z}_{is} と R_a の関係を求めた結果

を図 1.3.10, 図 1.3.11 に示す。



3.4 実 験

3.4.1 実験方法

最初の接触位置の統計量は、触針式表面粗さ計の触針のかわりに球を取りつければこの球による表面おうとつの包絡線軌跡から求めることができる。

測定に用いた表面粗さ計は小坂式SE3型で測定荷重は表1.3.1に示す。まず,

 $\sigma_{zip}, \sigma_{zis}$ の測定について述 べる。図 1.3.7,図 1.3.9 を見ると, σ_{zip} と $\zeta_{zip},$ ま た σ_{zis} と ζ_{zis} はほぼ比例関

表 1.3.1 半球形触針の測定荷重

半径	4 μm*	5 mm	10 mm	18 mm
測定荷重	0.5 gf	0.7 gf	0.8 gf	1.4 gf

*表面粗さ測定用触針

係にあり、しかも後に示す図 1.3.16、図 1.3.17 のように最初の接触位置の分布 形の実測値は理論とかなり良い一致を示していることから ζ_{zip} 、あるいは ζ_{zis} を 測定してそれぞれの理論値との比較を行うとその結果はそのまま σ_{zip} 、あるいは σ_{zis} に関する実験値と理論値の比較と見なしうる。なお ζ_{zip} 、 ζ_{zis} は表面粗さ計の R_a 目盛から直読できる(高域フィルターのカットオフ値 2.5 mm)。

 $\overline{Z_{ip}} \ge \overline{Z_{is}}$ では理論解析において設定した基準高さが異なるため検証実験を行うにはそれぞれ理論の設定にしたがい、方向性のある面の場合には表面粗さ突起の頂点の平均高さを基準とした包絡線平均高さを、方向性のない場合には表面粗さ曲線の中心線を基準高さにした包絡線平均高さを求めなければならない。その

-50-

ために、図1.3.12 のような保持具を作り粗面と同一 面上になめらかな基準面を設定する。そして図1.3.13 に一例を示すようにこの3面を連続して表面粗さ計の 触針および球形子でもってトレースし、表面粗さ曲線 と球による包絡線とを測定する。これらを基準面をも とにして重ね合わせ、表面粗さ曲線の中心線(あるい



図 1.3.12 最初の接触位置 測定用保持具



図 1.3.13 最初の接触位置の実測例

は突起頂点平均高さ)と包絡線との距離を求める。表面粗さ試験片としては方向 性のある面として黄銅面に研摩布仕上げを施したものを,方向性のない面として SS 41 の面に湿式ラップ仕上げを施したものを用いた。

これらの試験片と球面との接触における最初の接触位置の理論値を算出するためには、 σ_p , n_p , σ_s , n_s といった因子の値を求める必要がある。研摩布仕上面の表面粗さ曲線を実測し、それをミニコンピュータでデータ処理し σ_p と n_p の値を算出した結果を図 1.3.14 に示す。湿式ラップ仕上面についても σ_s と n_s を以下の方法で実測した結果を図 1.3.15 に示す。 σ_s は表面粗さ計により測定した R_a 値

-51-



と式(1.3.20)から求め、れ。は表面粗さ曲線から測定した単位長さ当たりの零交 さ数を n。とすると連の理論から 4 n² として求まる。 図 1.3.14, 図 1.3.15 から 次式が近似的に導かれる。

$$\sigma_p n_p^2 = 1.1$$
 (1.3.24)
 $\sigma_s n_s = 16$ (1.3.25)
式 (1.3.24), (1.3.25) をそれぞれ式 (1.3.18), (1.3.19) に代入すれば $\frac{\overline{Z}_{ip}}{\sigma_p}$
 $\frac{\overline{Z}_{is}}{\sigma_s}$, $\frac{\zeta_{zip}}{\sigma_s}$, $\frac{\zeta_{zip}}{\sigma_s}$ 等の理論値は球の半径のみの関数となる。

験 果 3.4.2 実 結

 $\frac{\overline{Z_{is}}}{\sigma_s}$

(1) 方向性のある表面粗さの場合。

最初の接触位置の分布形について実測値と理論値の比較を行った結果、図 1.3.16, 図 1.3.17 に示すように平均高さについても分布形についてもかなり良 い一致が見られる。図 1.3.18 に ζ_{sib}/σ, についての実験結果を示す。。印は個々 の試験片についての理論値を示す。図1.3.14 では みと れの関係にはかなり大な るばらつきがあるが 図 1.3.18 の。印はほぼ一定の値を示している。すなわち, 最初の接触位置の理論的推定では ๑ n² = 1.1 で近似しても大きな誤差を生じない ことがわかる。図1.3.18の実験値(●印)と理論値とはかなりよい一致を示して

-52-



いるが, o, 小なる領域では実測値が少し理論値より大きめの値を示している。 これは表面粗さが小なる試験片では突起頂点高さ分布が正規分布に適合しなくな るような異常に高い突起が多く含まれるためと考えられる。図1.3.19 は Z_{ip}につ いての実測値を示す。実測値も理論値と同様の傾向を示し, Z_{ip}/o_p の実測値はほ ぼ一定である。しかし,実測値は理論値より少し高い値を示している。これは理

-53-
論では無視した表面粗さの方向に沿っての粗さの影響が出ているものと考えられる。 る。この表面粗さの方向性の影響については後に考察を試みる。

(2) 方向性のない表面粗さの場合

ζ_{xis} についての実測値を図 1.3.20, 図 1.3.21, 図 1.3.22に示す。各々, 半径 5 mm, 10 mm, 18 mm での測定結果だが,いずれも実測値が理論値より少 し大なる値を示している。これは後述するような表面うねりの影響が表れている ものと考えられる。なお理論値は図 1.3.18, 図 1.3.19 同様ほぼ一定なためその 平均値のみ示す。





図 1.3.23, 図 1.3.24, 図 1.3.25 に Z_{is} の実測値を示す。各々,半径 5 mm, 10 mm, 18 mm での測定結果であるが,いずれの場合も実測値と理論値の間には 良い一致をみている。この場合,表面うねりの影響が表れてないのは Z_{is} を断面 曲線と包絡線との比較から目測で測定する際にうねり成分は除去されているため である。

3.5 考察

 \overline{Z}_{ip} の実験結果に表れた表面粗さの方向性の影響、 σ_{zix} の測定で問題になる表面 うねりの影響、および突起の変形の影響について考察する。

3.5.1 表面粗さの方向性の影響

表面粗さに方向性がある場合とな い場合に関する最初の接触位置の統計量 の相違を考察するには、図1.3.7と図1. 3.9の縦軸、横軸を同一にする必要があ る。研摩布仕上面についてのよ表面粗さ 曲線の標準偏差のを測定した結果を図 1.3.26 に示す。この図から次式が近似 的に成立することがわかる。



-55-

 $\sigma_{h} = 0.86 \sigma_{s}$ (1.3.26)式 (1.3.24), (1.3.25) と式 (1.3. 26) を式 (1.3.18), (1.3.19) に代 入すると ozip と ozis の理論的関係が 図 1.3.27 のように求まる。 この図 においてつねに $\sigma_{zib}/\sigma_{zis} > 1$ なる関係 が成立している。すなわち、単一方 向性の表面粗さの場合に比べ、複雑 な方向性を有する面では最初の接触 位置の変動の標準偏差が小になるこ とが明らかである。つぎに、 $\overline{Z_{in}}$ と Z_{is}の関係を求める。Z_{ib}の場合,突 起頂点の平均高さを基準高さとして 解析してきたため、 \overline{Z}_{ib} を \overline{Z}_{is} と比較 するには 乙。の基準高さである表面 粗さ曲線の中心線に基準高さを補正 する必要がある。突起頂点の平均高 さと表面粗さ曲線の中心線との間の 距離をりとすると、りとのの関係 は 図 1.3.28 に示す実測値から次式 のように近似できることがわかる。

 $\overline{h_p} \coloneqq a_p \qquad (1.3.27)$

式 (1.3.24),(1.3.25),(1.3.26), (1.3.27)を式 (1.3.18) に代入する



図 1.3.27 最初の接触位置の標準偏差に及ぼす 方向性の影響



図 1.3.28 突起頂点高さの標準偏差と平均値



方向性の影響

と、表面粗さ曲線の中心線を基準高さとした場合の方向性のある表面粗さに関す

-56-

る最初の接触位置の平均値 Z: が求まる。この Z: と Z: の比を求めた結果を図 1. 3.29 に示す。この図から,両者の比はほぼ一定 (0.63) で,方向性のない面に比 べ方向性のある面は接触位置が下がることがわかる。

3.5.2 表面うねりの影響

3.4.2の実験結果において ζ_{zis}/σ,の実測値が理論値より大になる傾向を示している。この原因として、以下に示すように表面うねりの影響を考える。

最初の接触位置の理論解析においては,表面おうとつとして短い波長の表面粗 さ成分のみで構成されていると設定している。しかるに,実測値は表面粗さ以外 にもっと波長の長い表面うねり成分も含まれる試験面上のトレースから求めてい る。しかも, *ζ_{zis}* 測定に際しては高域フィルターのカットオフ値 0.8 mm では包 絡線そのものがカットされてしまうため,カットオフ値 2.5 mm で測定している。 すなわち, *ζ_{zis}* の実測値の中には理論では考慮されていない表面うねりの成分が 含まれる。

いま,表面粗さ曲線の中心線上の単位長さ内で中心線と表面粗さ曲線が交さす る数を N₆ とすると、この表面粗さ曲線の平均波長 / は、この表面粗さ曲線のスペクトル幅が平均周波数の値に比べて狭い場合には次式で近似できる¹⁰⁾。

$$N_{a} = 2 l^{-1} \tag{1.3.28}$$

よって れと / の関係は次式で表される。

 N_s

$$= 16 l^{-2}$$
(1.3.29)

上式を用い,かつ図 1.3.9 において R と a を一定とすると横軸は /⁻² と見な せる。図 1.3.9 から波長が増加すると g_{is}/a が大になることがわかる。そこで, たとえ試験面に含まれる表面うねり成分が表面粗さ成分に比べ低いとしてもその 影響は無視できないと考えられる。この影響を定量的に概算するために,表面粗 さによる最初の接触位置と表面うねりによる最初の接触位置とが互いに独立であ るとの設定で,次式を用いて表面うねりの効果を含めた最初の接触位置の標準偏

差 🖾 を求める。

 $\sigma'_{zis} = (\sigma^2_{zis} + \sigma^2_{wave})^{\frac{1}{2}}$ (1.3.30)

なお oware は表面うねりに起因する最初の接触位置の標準偏差。

ここで、表面おうとつ中の表面うねりと表面粗さ成分の境界を表す妥当な臨界 波長を定めることが問題になる。本章では概算として σ_{ais} = σ_a になる波長を臨界 波長と定める。

 $\sigma_{mane} = (\sigma_m^2 - \sigma_R^2)^{\frac{1}{2}}$

(1.3.31)

なお σ_w, σ_R はそれぞれカットオフ値 2.5 mm, 0.8 mm で測定される断面曲線 の標準偏差。

この σ_{wave} の値を式 (1.3.30) に代入すると σ_{zis} が求まる。ただし表面粗さ成分 に関する σ_{zis} は図 1.3.9 の数値計算結果から推定する。 ζ_{zis} に関しても σ_{zis} の場 合と同程度の割合で表面うねりの影響が入ると考えて,各試験面についての理論 値にこのような補正を施した結果,その平均値は 図 1.3.20,図 1.3.21,図 1.3. 22 の破線で示すように実測値にかなり近い値を示す。以上から 図 1.3.20,図 1. 3.21,図 1.3.22 における実験値と理論値のひらきは表面うねりの影響と考えら れる。図 1.3.18 において方向性のある面の場合にも当然表面うねりの影響が表 れてよいはずであるが、実測値と理論値がかなり良く一致しておりこの影響は一 見したところ認められない。これは表面うねりの影響と表面粗さの複雑な方向性

-58-

の影響が互いに補償しあっていることによると考えられる。

突起の変形の影響 3.5.3

最初の接触位置の解析では無負荷の接触を想定していたが、この解析を実 際の接触問題に適用するには、たとえその問題が球形測定子による寸法測定精度 や第2編で示す表面おうとつ測定精度といったきわめて軽負荷の接触問題であっ ても突起の変形の影響が懸念される。そこで、ここでは負荷時、すなわち突起が 変形した状態の接触高さを Z_{ob}, Z_{ac} とし,これらの平均値 $\overline{Z}_{ob}, \overline{Z}_{ac}, \,\,$ 標準偏差 σ₂₀₀, σ₂₀₀を求め,最初の接触位置の平均値,標準偏差との比較を行う。ただし 接触高さとは突起の変形のみによって平面に食込んだ球の底の高さを意味する。 なお, Zob, Zos はそれぞれ方向性のある表面粗さの場合と方向性のない表面粗さ の場合の接触高さを表し、Zoo は突起頂点平均高さを基準高さとし、Zoo は表面粗 さの中心線を基準高さとする。

ここでは寸法測定器の測定圧のような軽負荷 の場合について考察するため、球および平面の 母材の弾性変形は無視する。

(1) 方向性のある表面粗さの場合

接触突起はすべて塑性変形し,個々の接 触突起で支える荷重 Wa と突起の近接量 aaの 間には第1章の式(1.1.28)の関係が成立する との仮定のもとに Z_{ob} , σ_{zob} および平均接触突 起個数Nをシミュレーション計算で求める。シ ミュレーションは図 1.3.30 に示す手順で行った。

最初の接触位置の平均値 Zip と Zop の差を図 1.3.31 に示す。 この図より突起半径 βの影響 は少ないことがわかるが、突起密度 n, の影響 も少ないことが計算結果より確認できた(図省 図1.3.30 シミュレーション計算手順



-59-

略)。 図 1.3.31 に見られるように $\overline{Z_{ip}} \ge \overline{Z_{op}}$ の差はかなり小さく,表 面粗さが大なる場合には $\overline{Z_{ip}}$ に比べ て無視できる程度のものである。し かも,表面粗さがきわめて小なる場 合を除くと $\overline{Z_{ip}} - \overline{Z_{op}}$ はほぼ一定であ り,その値は単一突起のみに全負荷 が作用する場合の突起の近接量(図 中,一点鎖線で一例を示す)にかな り近い。

図 1.3.32 に荷重 $W \ge \overline{Z_{ip}} - \overline{Z_{op}}$ の関係を示 す。 σ_p 大なる場合には $\overline{Z_{ip}} - \overline{Z_{op}}$ はかなり高 荷重域まで単一突起の変形による近接量に近 い値を示している。

以上から 0.1 kgf 程度のきわめて軽荷重域 では突起の変形の影響は小さく、しかもこの 影響は単一突起の近接量を求めることにより 補正できることがわかる。しかしW大、 q_p 小になるにつれて単一突起の近接量と \overline{Z}_{ip} – \overline{Z}_{op} の差は大になる。この場合には第5章の





 $n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}}mn^{-1}$ R = 5 mm $p_m = 150 \text{ kgf/mm}^2$ $\beta = 0.1 \text{ mm}$

解析が近似的に適用できる。すなわち,第5章の5.5.3で考察するが,図1.3.32 に丸印で示した荷重より大なる領域では第5章の解析が近似的に適用できる。

図 1.3.33 に σ₂₀/σ_{zip}と σ₉ の関係を示す。 σ₂₀/σ_{zip} は σ_p あるいは β が変化しても 大きな変化は示さず 1 に近い値を示している。これは平均接触突起個数が図 1.3. 33 に見られるように数個にすぎないため、サンプリング面の接触突起の高さや 接触位置が変わっても突起の変形による球の変位量はほとんど一定で、接触高さ

-60-



 $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kg} \text{ f/mm}^2$

の変動そのものは突起が変形しない 場合に比べあまり差がないことを意 味している。図 1.3.34 に $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ と Wの関係を示す。材料の流れ圧力 p_m の値は $\sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ にあまり影響を及ぼし ていない。図 1.3.33,図 1.3.34 か ら 0.1 kgf 程度の低荷重域では σ_{zop} を σ_{zip} で近似しても大きな誤差を生 じないことがわかる。

1,0

以上は突起が塑性変形する場合であるが、突起が弾性変形する場合のシミュレ ーション計算にも同様の傾向の結果が得られる。図 1.3.35 で $\overline{Z_{ip}} - \overline{Z_{op}} \ge \sigma_{zop}/\sigma_{zip}$ に関しての塑性変形と弾性変形の比較を行うと、弾性変形の場合の突起変形の影 響は塑性変形の場合と定性的にはよく似た傾向を示し、定量的には少し低い値に なることがわかる。

-61-

(2) 方向性のない表面粗さの場合

最初の接触位置の理論解析では機械表面が互いに独立な表面単位で構成されていると仮定した。そこで Z_{os}, o_{zos}, Z_{is}, o_{zis} をシミュレーション計算で求める に際しても正規乱数を個々の表面単位の高さにとり, それぞれの表面単位を独立 細柱の表面のように扱い計算を行った。

個々の独立細柱の変形をどのように考えるかが問題であるが、ここでは Z_s、 σ_{zis} に及ぼす変形の影響の概要を得るのが目的であるから、便宜的に次のように変形 を仮定する。1)独立細柱は弾塑性変形する、2)各独立細柱が支える限界荷重 は一定でその値は材料の相当流れ圧力 p'm と表面単位の x y 平面への投影面積の 積で与えられる、3)細柱に作用する負荷がその限界荷重に達するまでは細柱は 変形しないものとする。なお、相当流れ圧力とは突起の弾塑性変形問題を単なる 塑性変形問題でおきかえるための仮想的流れ圧力を意味し、σ_s と真の流れ圧力A_m の関数として次章の式 (1.4.7)で表される。

以上の設定のもとでのシミュレーション計算では計算手順は図1.3.30 と同一 であるが接触条件式が異なり、次式を満足する接触高さ Zoo を求めることになる。

-62-

 $p'_{m} N_{s} (Z_{os}) > W > p'_{m} \{ N_{s} (Z_{os}) - 1 \}$

(1.3.32)

 $N_{s}(Z_{os})$ は球が Z_{os} まで食込んだ場合の接触表面単位数。

計算結果の一例を図 1.3.36,

図 1.3.37 に示す。計算結果は階 段状になっているがこれは上式の 接触条件,すなわち仮定 3)の設 定に起因している。実際には細柱 の変形は連続的であるため両図と もなめらかな曲線になるはずであ る。両図ともかなり軽荷重域でも

図 1.3.36 接触高さの平均値に及ぼす荷重の影響 $\sigma_s = 1 \mu m$ $p_m = 500 \text{ kg} \text{f/mm}^2$ $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kg} \text{f/mm}^2$

突起変形の影響が表れており,とく に σ_{zos}/σ_{zis} にはこの影響が顕著に表 れている。すなわち最初の接触位置 の理論は接触表面単位数がほとんど 単一個の場合にしか適用できない。 いま σ_s と表面単位面密度 n_s との関 係として式(1.3.25)を用いると最 初の接触位置の適当範囲は次式で表 される。

 $W < \frac{p'_m \sigma_s}{16}$ (1.3.33)

なお,第4章の考察 4.5.4 によると上式を満足しない荷重域においては \overline{Z}_{as} だけは第4章の解析結果で近似できることがわかる。

最後に、最初の接触位置の応用例として球形測定子による寸法測定精度の問題 について考えてみると、測定圧 0.1 kgf 前後の測定器においては、方向性のある 面の場合、正確度、精密度はそれぞれ $\overline{Z_{ip}}$ 、 σ_{aip} で推定できる。しかし、方向性の ない面の場合には正確度は次章の $\overline{Z_{os}}$ で推定できるが、精密度に関しては理論的 推定は現時点では不可能である。ただ、図 1.3.37 によると方向性のない面の場 合 σ_{aos} そのものが非常に小さくなり精密度はあまり問題にならないと考えられる。

3.5. 結 言

だ円放物面と平面の接触における最初の接触位置を,表面粗さが方向性を有す る場合と方向性のない場合とに分けて理論的解析を試みた。その数値計算結果と 計算機シミュレーション結果,ならびに表面粗さ計を用いての実験結果等を比較 することにより,以下のことが明らかになった。

1) 方向性のある表面粗さの場合,突起間隔分布を指数分布,および均一間隔と 設定した場合の両者の解析結果の平均値でもって現実の突起間隔分布の場合

-63-

の理論値を近似できることが、シミュレーション計算との比較により確かめられた。

- 2) 最初の接触位置の種々の統計量,平均値 $\overline{Z_{ip}}/q_p$, $\overline{Z_{is}}/q_s$,標準偏差 q_{ip}/q_p , σ_{zis}/a_s ,中心線平均値 ζ_{zip}/a_p , ζ_{zis}/a_s の理論値は一つの等価変数で整理でき,その変数は方向性のある表面粗さの場合 $\sigma_p^* n_p^{*2}$,方向性のない表面粗さの場合 $\sigma_s^* n_s^*$ となる。
- 3) 方向性のある表面粗さの場合、 $\sigma_{s}^{*} n_{b}^{*^{2}}$ 大なるほど $\overline{Z_{ip}}/\sigma_{p}$ は増加し、 σ_{zip}/σ_{p} は減 少する。また、方向性のない表面粗さの場合も同様の傾向を示す。
- 4) 同一半径の球と平面の接触においては方向性のある表面粗さの最初の接触位置の平均高さは、方向性のない表面粗さの場合の約0.6倍の低い値となり、最初の接触位置の標準偏差は、方向性のある表面粗さの場合の方が方向性のない面の約1.5倍の大なる値を示す。
- 5)最初の接触位置の理論値と実測値はかなりの一致を示し,理論の妥当性が確 かめられた。
- 6)方向性のある表面粗さの場合 0.1 kg f 程度の軽荷重接触状態では接触高さの 平均値,標準偏差は最初の接触位置の平均値,標準偏差で近似できる。

参考 文献

- 1) 吉本,築添,菊池: 日本機械学会論文集,21,111(1950)811.
- 2) 久門: 日本機械学会論文集, 35, 272 (1967) 861.
- 3) 塚田, 阿武, 釜洞: 日本機械学会論文集, 37, 304 (1971) 2394.
- 4) 石垣, 川口: 精密機械, 43, 7(1977)831.
- 5) 渡辺,石垣,川口:昭和 50 年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集, (1975) 345.
- 6)川口,石垣: 昭和 51 年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集,(1976)525.
- 7) V.Radhakrishnan: Wear, 16, 5 (1970) 325.
- 8) 奈良: 計量研究所報告, 15, 4 (1966) 306.
- 9) 塚田, 阿武: 精密機械, 40, 3 (1974) 250.
- 10) T.T.Soong: Random differential equations in science and engineering, Academic Press, New York (1973) 299.

第4章 方向性のない表面粗さを 有する平面と球の接触¹¹

4.1 緒 言

本研究では主として幾何学的に一方向に方向性のある表面粗さに重点をおいて 解析を試みているが、砂吹仕上面、ラップ仕上面等、方向性のない面とみなす方 が妥当な機械加工面も多く、そのような面に関する考察も重要な意味をもつと考 えられる。また、方向性のない表面粗さの場合、球と平面の接触における母材の 変形が球の中心軸に関し対称となるため計算が比較的単純で、母材の変形に対し て第2章で試みた2次式近似の次数を上げて、より高精度な計算を行うことが容 易である。そこで本論文を通じて行う母材の変形の2次式近似の計算精度上の妥 当性を検討するのに、方向性のない面の場合の解析が最も適している。

本章では以上のような目的で,方向性のない表面粗さを有する平面と球の接触 変形を解析する。

方向性のある面の場合には、突起頂点の高さ分布をもとに解析を行うが、方向 性のない面の場合、頂点分布を求めるには三次元的表面粗さ測定を必要とするた め、頂点分布をもとにした理論解析は現実の加工面へ応用する場合には適当でな い。そこで本章では主として表面粗さ曲線の高さ分布をもとに解析を進める。

4 · 2 理 論
 座標系を図 1.4.1 に示すように、
 球の中心線が ≈ 軸上にありその原点
 が表面粗さ曲線の中心線に一致する
 ようにとる。また表面粗さ曲線の分
 布形は正規分布とする。

図 1.4.1 接触状態

-66-

4.2.1 突起が塑性変形する場合

(1) 相当流れ圧力

突起は傾斜角 θ 一定の円錐形をなすものと考える。いま単一円錐突起に平面(球面の一部を平面で近似)を押付けた場合,突起の塑性変形による近接量を α_{pa},やわらかい方の材料の流れ圧力を p_mとすると,接触面半径 α および突起に 作用する荷重 W_a は次式で表される。

$$a = \frac{\alpha_{pa}}{tan \theta}$$
(1.4.1)
$$W_{a} = \pi \left(\frac{\alpha_{pa}}{tan \theta}\right)^{2} p_{m}$$
(1.4.2)

この場合円形の接触面に等分布圧力が負荷されているのであるから、突起の弾 性変形量 α_{ea} の計算には第1編第1章式(1.1.21)および式(1.1.27)が適用でき α_{ea} は次式で表される。

$$\alpha_{ea} = 67.2 \left(\frac{p_m}{\pi E}\right)^{1.5} \left(\frac{W_a}{ER^2}\right)^{-0.5} \left(\frac{W_a}{2\pi R p_m}\right)$$
(1.4.3)
ただし $R = R_x = R_y$
また, Eは第1章式 (1.1.7)と同一である。
式 (1.4.2)を式 (1.4.3) に代入すると,

$$\frac{\alpha_{ea}}{\alpha_{pa}} = \frac{33.6 \, p_m}{\pi^2 E \, tan \, \theta} \tag{1.4.4}$$

突起の全変形量 α。は上式を用いると次式で表される。

$$\alpha_a = \alpha_{pa} + \alpha_{ea} = \left(\frac{33.6 \, p_m}{\pi^2 E \, tan \, \theta} + 1\right) \, \alpha_{pa} \tag{1.4.5}$$

式(1.4.5)を式(1.4.2)に代入すると、Waと a。の関係として次式が求まる。

$$W_{a} = \frac{\pi}{tan^{2}\theta} \left(\frac{\pi^{2}E \tan\theta}{33.6 p_{m} + \pi^{2}E \tan\theta}\right)^{2} p_{m} \alpha_{a}^{2}$$
$$= \frac{\pi}{tan^{2}\theta} p_{m}^{\prime} \alpha_{a}^{2} \qquad (1.4.6)$$

ただし

$$p'_{m} = \left(\frac{\pi^{2} E \tan \theta}{33.6 p_{m} + \pi^{2} E \tan \theta}\right)^{2} p_{m} \qquad (1.4.7)$$

式(1.4.2)の *p*_mの代わりに相当流れ圧力 *p*_mを用いると突起の弾性変形を考慮した全変形量 *a*_aと荷重 *W*_aの関係が同式で表されることがわかる。 この式には 式の形の上からは直接弾性変形を含まないので後々の計算に大変便利になる。

突起の平均傾斜 tan θ は砂吹仕上面の表面粗さ曲線をもとにしての実験結果および理論的考察により次式で近似できる ことが報告²⁰ されている。 500 500

$$\overline{tan \theta} = \frac{\pi}{2} \frac{R_{max}}{3.45 R_{max} + 11.1}$$

ここで R_{max} は JIS の最大高さ粗さで式 (1.3.23) で示した表面粗さ曲線の標準 偏差 & との関係を用いると,

$$\overline{\tan\theta} = \frac{7.23\,\sigma_s}{15.87\,\sigma_s + 11.1}$$

となる。ただし Rmax, Gの単位は µm である。

図 1.4.2 σ_s と相当流れ圧力 p'_m の関係 $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kg f/mm}^2$ $\nu_1, \nu_2 = 0.3$

上式を式(1.4.7)に代入して求めた 4m を図 1.4.2 に示す。相当流れ圧力 4m は真の流れ圧力 4m に比べ常に低い値を示し、この傾向は cm が小なるほど顕著 である。このように弾塑性変形を考慮した単一突起の変形挙動が定式化できると、 粗い平面と球の接触問題は第1編第2章と同様の手順で解析できる。

(2) 解析手順

方向性のない表面粗さを有する平面に粗さが無視できる半径Rの球を押付けた場合,球および平面はその母材の弾性変形のために図1.4.1の(*a*) に示したように曲率を変える。この両者の母材の弾性変形を球の形状の変化に集約したものが図1.4.1の(*b*) に示すように仮想の2n次曲面*S*,で表しうるものと仮定すれば,問題を粗い平面*S*,と仮想曲面*S*,との接触に置換えて考えることができる。そして,この仮想曲面*S*,の高さ*Z*。を平面の表面粗さ曲線の中心線を基準にして表すと式(1.4.9)となる。

$$Z_{s}(r) = Z_{os} + \sum_{k=1}^{n} c_{k} r^{2k} = Z_{os} + \sum_{k=1}^{n} c_{k} (x^{2} + y^{2})^{k}$$
(1.4.9)
-68-

Z_s(r) は接触領域内で次式の接触条件を満足しなければならない。

$$w_m(r) - w_m(0) = Z_s(r) - \frac{r^2}{2R} - Z_{os} \qquad (1.4.10)$$

上式において $w_m(r)$ は球および平面の母材の弾性変形の和であり、また $Z_s(r)$ 中に含まれている Z_{os} は 図 1.4.1 の(b) に示すように突起の変形による接触高さで、これらはいずれもつぎに述べるように c_k が定まって初めて計算できるものである。そこで、最初 c_k を適当に仮定しておいて、以下の手順で逐次修正をして最終的に式 (1.4.10)を満足するように c_k を定める。

手順1 & の初期値の決定

手順2 Z_{os}の計算: C_kの仮定に次いで Z_{os}の初期値を仮定すれば Z_s(r)が 式(1.4.9)により定まり,粗い平面の突起部分で仮想曲面 S_vより突き出す部分 の底面積,すなわち真実接触面積が下記のようにして平均値として定まる。

$$A_{r} = \iint_{z_{s}} \int_{z_{s}(x,y)}^{z_{max}} f_{s}(z) \, dz \, dx \, dy \tag{1.4.11}$$

ここで $f_s(z)$ は次式の条件付密度関数で表される。

$$f_{s}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma_{s}})^{2}}}{\int_{-z_{max}}^{z_{max}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma_{s}})^{2}} dz}$$
(1.4.11')

なお,積分範囲Siは次式で定まる半径 fm の円形をなすみかけの接触領域を表し, Zmax は十分広い機械表面内の表面粗さ曲線の最大の高さを表す。

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \, r_m^{2k} = Z_{max} - Z_{os} \tag{1.4.12}$$

やわらかい方の材料の相当流れ圧力を pm/, 球に作用する全荷重をW とすると次 式の荷重条件式が得られる。

$$W = p'_m A_r \tag{1.4.13}$$

式(1.4.13)に式(1.4.11)を代入し、この荷重条件式を満足するように Z_{os} を Newton-Raphson の反復法で計算する。

手順3 $w_m(r)$ の計算: Z_{os} が定まるとみかけの圧力分布 p(x,y) は次式で 求まる。

$$p(x,y) = p'_m \int_{z_s(x,y)}^{z_max} f_s(z) dz \qquad (1.4.14)$$

接触面中心から * 離れた位置における球および平面の母材の弾性変位量の和は 弾性論³⁾を用いると次式で与えられる。

$$w_m(r) = \frac{2}{\pi E} \iint_s \frac{p(x,y)}{\{(x-r)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}} dx dy \qquad (1.4.15)$$

結局,式(1.4.15)を式(1.4.10)に代入し,接触領域内で接触条件を満足する ような G_k を Newton-Raphson の反復法を用いて手順1~3を繰返すことにより 求める。以上のようにして G_k が定まれば接触状態が求まり,その結果,第1編第 1章と第2章で接触開始時点から負荷時点までの間の球の変位量で定義した近接 量αが次式から求まる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{w}_m(0) + \overline{Z_{is}} - Z_{os} \tag{1.4.16}$$

ここで Z_i は最初の接触位置の平均値で第3章式(1.3.19)から求まる。また, 母材が変形しない球および平面を仮想しそれらをαだけ近接させて幾何学的に交 ささせたときの x, y 面を基準高さとして測った球底の高さ(以下でこれを食込位 置と呼ぶ) u' は

$$u' = Z_{os} - w_m (0) \tag{1.4.17}$$

で与えられる。

4.2.2 突起が弾性変形する場合

接触突起がすべて弾性変形すると仮定しうる場合について近接量,食込み 位置,真実接触面積,有効接触域半径等の解析を試みる。平面間の接触において は,表面粗さの弾性接触問題は種々の方法で解析されている⁴⁻⁶⁾。 これらはいずれ も個々の接触突起の変形にはヘルツ理論を適用しているが突起の分布の設定が異 なっている。これら平面間の接触理論のうち,代表例として Greenwood 理論⁷⁰等に 見られるような突起頂点高さの分布を正規分布とする理論(かりに頂点分布理論 と呼ぶ)と,久門理論⁸⁰ に見られるような表面粗さ曲線の分布を正規分布とする

-70-

理論(かりに表面単位理論と呼ぶ)が挙げられる。どちらの理論も球と平面の接触問題に拡張するのに都合のよい比較的簡単な形で表されているが、実際の機械 加工面に適用する場合パラメータの決定が容易でない等の問題をそれぞれにいく つか含んでおり両者の優劣を理論的に判断することはできない。本章では両方の 理論を球と平面の接触問題に適用して、設定の相違の影響を考察すると同時に両 者の数値計算結果と実測値との比較検討を試みる。なお、平面間の接触問題を球 と平面の接触問題に拡張する手法はいずれの場合も同一であり、しかも頂点分布 理論については球と平面の接触問題についてかなり厳密な解が得られている⁹⁰の で、ここでは主として表面単位理論について記す。

真実表面を形成する微小平面の高さ分布が標準偏差 σ。の正規分布をなし、突起の形状が半径 β。一定の半球形であると設定する。すると、粗い平面になめらかな 平面が Z_α の位置まで食込む場合の負荷 W₄ は次式で与えられる⁸。

 $W_{u} = \frac{k_{s} E L_{x} L_{y}}{3 \pi \beta_{3}^{\frac{1}{2}}} \int_{z_{s}}^{z_{max}} (Z - Z_{os})^{\frac{3}{2}} f'_{s}(z) dz \qquad (1.4.18)$ ただし, k_{s} : 真実表面積/みかけの接触面積 $L_{x} L_{y}$

> $L_x L_y$:みかけの接触面積 $f'_s(z) = \frac{df_s(z)}{dz}$

f_s(z):表面単位の高さ分布の確率密度関数で式(1.4.11)を参照

ゆえに,図1.4.1のように粗い平面に球を押込む場合,2軸からアの距離にある 部分の平均接触圧力 *p*(*r*) は次式で表される。

$$p(r) = -\frac{k_s}{3\pi E \beta_3^{\frac{1}{2}}} \int_{z_s(r)}^{z_{max}} \{Z - Z_s(r)\}^{\frac{3}{2}} f'_s(z) dz \qquad (1.4.19)$$

ただし, Z_s(r) は式(1.4.9)と同様に表される。 よって塑性変形の場合の式(1.4.13) に相当する荷重条件式は次式に上式を代入 すれば求まる。

 $W = \iint_{S_i} p(x, y) \, dx \, dy \tag{1.4.20}$

以下の手順は 4.2.1 と同様で、上式を満足する Zoo を繰返し計算で求め、その

Z_{as}を式(1.4.19)に代入し分布圧力を計算する。そして *p*を式(1.4.15)に代入 し,接触条件を満足するような g を繰返し計算で求めれば接触状態が定まる。そ の結果,近接量,食込み位置は式(1.4.16),(1.4.17)から,また真実接触面積 *A*,は次式を用いてそれぞれ定まる。

$$A_{r} = \frac{k_{s}}{2} \iint_{z_{s}(r)} \int_{z_{s}(r)}^{z_{max}} f_{s}(z) \, dz \, dx \, dy \qquad (1.4.21)$$

また, Greenwood は球と粗い平面の接触における有効な接触域半径 なを次式の ように定義している⁹⁰が,表面単位理論と頂点分布理論との比較を行うため同 じ定義に従って有効接触域半径の計算も行う。

$$r_{e} = \frac{K_{e} \int_{0}^{r_{m}} r p(r) dr}{\int_{0}^{r_{m}} p(r) dr}$$
(1.4.22)

なお、上式で表面がなめらかな場合にながヘルツ理論の接触半径と一致するよう に Ke = 2.356 として計算を行う。

4.3 数值計算結果

突起が塑性変形する場合については無次元化表示できないため、R = 5 mm, $E_1 = E_2 = 21000 \ kgf/mm^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3 \ cd$ 表的接触条件として数値計算結果を 示す。また弾性接触の場合も特別のことわりなき限りR, E_1 , E_2 , ν_1 , ν_2 としては この値を用いる。

4.3.1 数値計算法についての検討

母材の弾性変形後の平面に対する球の相対的曲面を決定する係数 *c*₁, *c*₂, ……… *c*_n を求める方法について考察する。

式(1.4.9)の自由度は有限のnであるため,接触領域全域において式(1.4.10)の接触条件を満足させることは不可能である。実際には接触面上のn点を接触条件の収束位値,次式を収束条件と定め,次式の左辺(接触条件誤差)が右辺の値以下に収束するまでくり返し計算を行い, c_1, c_2, \dots, c_n を求める。

 $|w_m(r_i, c_1, c_2, \dots, c_n) - w_m(0, c_1, c_2, \dots, c_n)|$

 $-\sum_{k=1}^{n} c_k r_i^{2k} - \frac{r_i^2}{2R} \mid \leq w_m (0, c_1, c_2, \dots, c_n) \times 0.001 \quad (1.4.23)$

ここで*i*は収束位置の番号(*i*=1.2, ………*n*)を示し,式(1.4.23)は*n*元の連立方程式となる。したがって,式(1.4.9)の曲面近似でrの高次の項まで求めた方が計算精度が良くなるが,精度の許す範囲でできるだけ高次項を省略して計算時間を短縮することが望ましい。そこで,高次項の影響を知るために,2次式近似と4次式近似の場合について収束位置以外の場所における接触状件誤差を下記の式(1.4.24)でそれぞれ求め,それらを比較した結果を図1.4.3に示す。なお,収束位置は4次式近似の場合には原点,0.4 r_m ,0.8 r_m の3か所,2次式近似の場合には原点がよびr=Tの2か所に選ぶ。

接触条件誤差 = $w_m(r) - w_m(0) + \frac{r^2}{2R} + Z_{os} - Z_s(r)$ (1.4.24)

この図から接触条件誤差は4次式近似した場合2次に比べ大幅に減少すること がわかる。また2次式近似の場合,接触条件誤差は収束位置Tにより変化し,T を適当に選ぶことにより誤差を最小にすることが可能である。このことから近接 量の誤差が最小になるような収束位置を知るべく,4次式近似の場合の近接量と2

図 1.4.3 接触条件誤差. $\sigma_{\rm s} = 1 \, \mu {
m m} \quad {
m W} = 1 \, {
m kgf}$ $p_{\rm m} = 500 \, {
m kgf/mm}^2 \; {
m R} = 5 \, {
m mm}$

 $p_m = 500 \text{ kgf/mm}^2 \text{ R} = 5 \text{ mm}$

-73-

次式近似の場合の値との比を求めた結果,図1.4.4 に示すように $T = 0.55 r_m$ 附近 で4次式近似に対する2次式近似の誤差は最小になる。 $T = 0.55 r_m$ での4次式近似 と2次式近似の近接量の差は $\sigma_s = 0.1 \sim 100 \mu m$, $W = 0.01 \sim 10 kgf$ の範囲では 0.2%以内であることが確認できたため、以下の計算はすべて収束位置を0.55 r_m として2次式近似で行った。

この計算アルゴリズムに関連して、Greenwood⁹⁹はこのような多項式近似を用 いずに接触条件を接触域全域において満足させようとしているため、(1)計算条 件としては押付荷重と粗い表面の諸元を与えるのが最も便利であるが、これらの 条件からは直接には収束解が得られないため、事前には知ることができない間接 的量を条件として与えて、その計算結果から荷重および表面形状の条件に合致す る場合を選択しなければならない、(2)繰返し計算の収束性が悪く計算過程にお いて収束係数を変化させてやらねばならない、等の問題点が生じる。一方、本解 法では4次式近似でほとんど接触域全域で接触条件が満足でき、さらに2次式近 似に下げても0.2%以下しか近接量が変化しないことから、Greenwood の解析 方法と2次式近似との差もこの程度のものであろうと考えられる。実際、Greenwood の解析と同じ表面粗さ、すなわち、突起頂点の高さが正規分布をし接触突 起の変形は弾性的とする等の仮定で2次式近似を用いて計算し、文献9)の図の

-74-

内の数例と比較するとほとんど差が認めら れない。このように精度的に問題がなく, しかもこの解法では上述の問題点も生じな いため本解法の方が実用的に優れていると 考えられる。

つぎに Z_{max} の決定であるが, 図 1.4.5 に食込み位置と Z_{max} の関係に関する数値 計算結果を示すが,

$$\begin{array}{c} 3 \\ & W = 0.03 \text{kgf} \\ 2 \\ & W = 0.1 \text{kgf} \\ \hline W = 0.5 \text{kgf} \\ \hline W = 0.5 \text{kgf} \\ \hline W = 1 \text{kgf} \\ \hline W = 2 \text{kgf} \\ \hline W = 2 \text{kgf} \\ \hline W = 4 \text{kgf} \\ \hline \\ -1 \\ -2 \\ \hline \\ -2 \\ \hline \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \hline \\ Z_{\text{max}} / \sigma_s \end{array}$$

図 1.4.5 Z_{max} と食込み位置の関係 $\sigma_s = 1 \mu m$ $p_m = 500 \text{ kg} \text{f/mm}^2$ R=5 mm

 $\frac{Z_{max}}{\sigma_s} \ge 4$

の場合 u' は Z_{max} に無関係にほぼ一定となる。そこで $Z_{max} = 4\sigma_s$ として計算を 行った。

4.3.2 突起が塑性変形する場合

4.3.2.1 母材の弾性変形

接触域中心部における球と平 面の母材の弾性変位量の和 Wm(0)と 表面粗さの標準偏差との関係を図 1. 4.6 に示す。標準偏差のが小さくな るとヘルツ理論によるなめらかな平 面と球の接触における変位量に近づ くが、 のが大になると母材の弾性変 位量は減少することがわかる。また, 母材の変形後における平面に対する 球の相対的曲率半径 $R' = \frac{1}{2} c_1$ は図 1.4.7 に示すように標準偏差 のによ り大きく変化する。しかし、の が 10 μm 程度以上では $R' \approx R$ となる。これは のが増すと粗さ の影響で接触領域中心部の分布 `α|α 圧力が低下し、それにより図1. 4.6 に示すように中心部の母材 の変形が減少するためである。 図 1.4.7 から母材の弾性変形は 荷重や材料の流れ圧力よりも表 面粗さの標準偏差に大きな影響 を受けることがわかる。

R = 5 mm

-75-

4.3.2.2 食込み位置

図 1.4.8 に σ_s, W, A_h と食込 み位置 u'の関係を示す。u'/o_s は σ_s 大なるほど,W小なるほど増加する が, P_m の影響はあまり顕著ではない。 これは, A_m が増加すると突起の塑性 変形量は減少するが,突起の弾性変 形量が増加し効果が相殺しあうため 食込み位置の変化としては小さくな ると考えられる。σ_s,W, P_m の諸因

子の内 u'/osには os が最も大なる影響を及ぼす。

4.5.5 突起が弾性変形する場合

頂点分布理論に関しては Greenwood の解⁹⁾ があるのでここでは主として表 面単位理論の数値計算結果を示す。なお,母材の弾性変形後の球の平面に対する 相対的曲面形状は塑性接触の場合同様 2 次式で近似し,式(1.4.18)の k_s は文献⁸⁾ 同様 2 として計算を行う。

-76-

4.3.3.1 真実接触面積

式(1.4.21)を用いて計算した真実接 触面積 A, と荷重の関係を 図 1.4.9 に, A, と表面粗さの標準偏差 & や突起半径 B。 との 関係をそれぞれ 図 1.4.10, 図 1.4.11 に示す。 真実接触面積は荷重大なるほど,表面粗さの 標準偏差小なるほど,また突起の曲率半径大な るほど増加することがわかる。なお,図1.4.9~ 図 1.4.11 の数値計算結果は次式で近似できる。

$$A_r^* = 4.17 \, \beta_3^{*0.45} \, \sigma_s^{*-0.40} \, W^{*0.93}$$

(1.4.25)

図 1.4.10 標準偏差と真実接触面積の関係 W = 1 kgf

4.3.3.2 有効接触域半径

荷重と有効接触域半径の関係を図 1. 4.12 に示す。図中実線は表面単位理論, 破線は頂点分布理論,一点鎖線はなめらか な平面と球の接触におけるヘルツ理論を表 す。表面単位理論と頂点分布理論とを比べ ると両者はかなり良く一致した傾向を示し ており,表面粗さ分布の設定が異なっても有 効接触域半径には大きな相違を生じないこ とがわかる。

一方,両理論をヘルツ理論と比較すると,荷重が小なる範囲では表面粗さの影響が大きく表れヘルツ理論より接触域が拡がっているが,荷重が大になるとヘル ツ理論に近づく。

4.3.3.3 みかけの最大接触圧力

均一形状突起の場合 2.4.1.(2) に示したように個々の接触突起にはきわめ て高い接触圧力が発生するが,平均的なみかけの接触圧力は表面粗さが大なるほ

-77--

ど逆に低下する。みかけの最大接触圧力p(0)を式 (1.4.19)から計算すると図 1.4.13 に見 られるようにヘルツの最大圧力より小で q大 なるほど減少する。この減少は考察に示すよ うに母材内部の最大せん断応力の低下を導く。 また,表面単位理論と頂点分布理論はこの場 合にも良く一致した傾向を示している。なお, 図 1.4.12,図 1.4.13 だけ他の計算例と異な る E_1, E_2, R の値を用いているがこれは文献⁹⁹ と比較するためである。

4.4 実 験

理論の妥当性を検討するため近接量測定実験を行い,式(1.4.16)を用いて計算した理論値と実測値の比較を行う。実験装置および実験方法は第1編第1章1. 3.1と同一であるので省略する。

4.4.1 突起が塑性変形する場合

試料平板,鋼球の材質およびマイクロビッカース硬さ H_a(測定荷重 50 gf)を下記に示す。

鋼球:SUJ2
 H₀ = 1000
 試料平板:軟鋼
 H₀ = 220
 黄銅
 H₀ = 150

なお、鋼球の半径は5mm である。

図 1.4.14 ~ 図 1.4.17 に荷重と近接量の関係を示す。図の丸印は測定値 10 点 の平均で縦線はばらつきを示す。図 1.4.14, 図 1.4.15 は軟鋼板に関する実験結 果と数値計算結果を示し, 図 1.4.16, 図 1.4.17 は黄銅板に関する実験結果と数 値計算結果を示す。いずれの場合も実測値と理論値はかなり良い一致を示し,本

-78-

理論の妥当性が確かめられたものと考えられる。

4.4.2 突起が弾性変形する場合

4.4.2.1 試験片材質

試料平面としては黄銅板を湿式ラップ仕上したものを用い,試料球として ナイロン球(材質 ナイロン6,表面粗さ $R_a = 0.2 \mu m$)を用いる。平板試験片 に湿式ラップで種々の表面粗さ ($R_a = 0.65 \mu m \sim 1.22 \mu m$) を付けている。理 論解析では突起そのものが弾性変形をするように記述してきたが,この実験では 黄銅板はナイロン球に比べるとほとんど剛体と考えられるので突起は変形せず球

-79-

にくい込む。しかし理論的にはナイロン球の局部的変形を弾性変形とすると前述の理論がそのまま適用できる。高分子材料は完全な弾性体とは考えられず,当然 粘弾性効果が懸念されるが,球となめらかな平面との接触における近接量αを測 定すると,図1.4.18 に示すように両対数グラフでほぼ

 $\alpha \propto W^{\frac{2}{3}}$

の直線上にのる。すなわちナイロン球は ヘルツの弾性接触理論にほぼ従うことに なり,本弾性接触理論の検証実験に使用 しうるものと考えられる。

なお、図1.4.18の実測値を図中の直線で近似し、この直線とヘルツ理論から 弾性定数を求めた結果

 $\frac{1-\nu_1^2}{E_1} = 0.01$

となり、ナイロン球を用いての押付け実験の荷重は鋼球の場合に換算すると約 230 倍になる。このため近接量を実測する場合突起の変形が無視できるような接触開 始時点を知るのは困難で、初期荷重 5 gf の時点を基準にして近接量を計算する。

4.4.2.2 試験片の表面粗さに関する諸元

近接量の理論値を表面単位理論および頂点分布理論を用いて計算するには、 3次元的突起先端曲率半径 β₃,突起頂点分布の標準偏差 σ_{p3},突起密度 n_{p3}等の諸 元が必要になる。これらの3次元的諸量の測定は特別な測定機¹⁰⁾を必要とする。 ここでは表面粗さの2次元的諸量の実測値と確率過程理論を用いて推定する。

湿式ラップ仕上面の表面粗さ曲線(一例を図1.4.19 に示す)を触針式表面粗 さ計で測定し、これをミニコンピュータでデータ処理を施し¹¹⁾, 2次元的曲率半 径 β, 突起頂点密度 n, 表面粗さ曲線の中心線を基準とした突起頂点平均高さ Z, 等を求めた結果を 図1.4.20 ~ 図1.4.22 に示す。

-80-

Minty and prophyla and an and many and many and an and an and an and an and an and the second an

⁵ζ 100μπ

図 1.4.19 湿式ラップ仕上面の断面曲線

-81-

これらの2次元的諸量から3次元的諸量を 推定するのに表面粗さ曲線上の各点の高さ, 傾き,高さの二次微分などを確率変数とする 分布を多次元正規分布と仮定して理論的^{12,13,40} に導かれた次式を用いる。

 $\beta_3 = 0.609 \beta$ (1.4.26)

 $n_{p3} = 1.21 n_p^2$ (1.4.27)

$$\sigma_{p3} = (1 - 0.598 J^2)^{\frac{1}{2}} \sigma_s$$

ここで」は

$$J = \frac{1.5^{\frac{1}{2}} \dot{o}_s^2}{\sigma_s \ddot{o}_s}$$
 $\dot{o}_s : 表面粗さ曲線の傾きの標準偏差$
 $\ddot{o}_s : 表面粗さ曲線の2次微係数の標準偏$

で定義されており、次式で推定できる。

$$J = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a_{s}} \overline{Z_{p}}$$

すなわち, β_3 , n_{μ_3} は式 (1.4.26), (1.4.27), 図 1.4.20, 図 1.4.21からす ぐに求まり、 の3 は式(1.4.29) および 図 1.4.22 からまず Jを求め (図1.4.23), これと式(1.4.28)とから算出する。こ のようにして推定したる次元的諸元を図 1.4.20, 図 1.4.21 および 図 1.4.24 に・ 示す。近接量の理論計算にあたってはこ れらの図中に示した直線近似を用いる。 すなわち,

$$\beta_{3} = 2.18 \times 10^{-4} a_{s}^{-0.4}$$

$$n_{p_{3}} = 5.41 a_{s}^{-0.74}$$

$$q_{p_{3}} = 0.331 a_{s}^{0.83}$$

$$\left. \left(1.4.30 \right) \right.$$

図 1.4.23 R_aとJの関係

4.4.2.3 近接量測定結果

図1.4.25 ~図1.4.27 にナイロン球の近接量の実測値と理論値を示す。 頂点分布理論の理論値は 図 1.4.12, 図 1.4.13 で引用 した Greenwood 理論⁹ で はなく平面間接触における理論^かを本研究で行っている2次曲面近似法に適用し て数値計算を行った結果である。表面単位理論は実測値より少し大きめの値を示 し、逆に頂点分布理論は低い値を示している。このような理論値と実測値の差は

-82-

(1.4.28)

差

各々の理論そのものに問題があるのか、 k_s 、 β_3 、 σ_{p3} 、 n_{p3} 等のパラメータの推定に問 題があるのは明らかでなく、この問題を 検討するには弾性接触突起の合流の問題 や表面粗さの3次元的測定法の確立等の 大きな研究課題を残している。

4.5 考 察

突起が弾性変形する場合と塑性変形す る場合に分けて解析を行ったが, この理

論を実際の接触問題に適用するには両者の選択基準を決める必要がある。母材の 変形を弾性変形として扱ってきたため、解析の適用限界を明らかにしておく必要 がある。また理論計算では Zos を確定量として扱ってきたが実験ではランダム量 となり、この相違の検討を行う必要がある。 以上の3点について考察を行う。

-83-

4.5.1 突起の変形形態に関する判定基準

接触問題において弾性接触から塑性接触へ遷移する条件についての検討は、 表面粗さを有する平面間の接触の場合には数多く行われており⁵⁻¹⁸⁾とくに Greenwood と Williamson⁷⁾ が提唱した塑性指標 (plastity index) φ_p が有名で、その他 の報告もこの φ_p を基準にしたり、 φ_p との対比で述べられている例が多い。

しかるに,球と平面の接触に関しては,この種の検討は全く報告されてない。 この問題に関するより厳密な検討は第5章で考察するので,ここでは母材の幾何 学的形状がこの問題にいかなる影響を及ぼすか,すなわち平面どうしの接触と球 と平面の接触とでは *φ*,がどの程度異なるかを検討するにとどめる。このため *Greenwood*⁷⁰ と同じ設定,便法で塑性変形突起の接触面積と全接触面積の比 *R*_A を求める。

表面粗さ,材質,食込み高さ等の接触条件を同一にした状態で,平面間の接触と,球と平面の接触における R₄の値に生じる差について概算するため表面粗さについて以下の設定をおく。

1) 突起の先端形状は半球形とし曲率半径を β₃とおく。

2) 突起頂点の高さ分布の分布形は偏差 og の正規分布とする。

なお、理論的妥当性には欠けるが Greenwood と同じ設定にするため、全接触面積 は全荷重を弾性接触突起で支えると仮定した場合の真実接触面積で近似する。

球と平面の接触におけるヘルツ理論によると単一接触突起における近接量 α_a と接触面積 S_{ae} の間には次式の比例関係が成立する。

$$S_{ae} = \pi \beta_3 \, \alpha_a \tag{1.4.31}$$

また同一近接量だけ食込んだ単一塑性接触突起の接触面積 Sap は幾何学的考察に より次式で表される。

$$S_{ab} = 2 \pi \beta_3 \alpha_a \qquad (1.4.32)$$

以上の2式より α や β と無関係に次式が成立することがわかる。

$$S_{ap} = 2 S_{ap}$$

(1.4.33)

そこで接触突起の変形が弾性変形から塑性変形へ遷移する臨界の個々の突起に ついての近接量を α_{cr} とし,球を粗い平面に押し付けた場合の接触高さを Z_{os} と すると,球と平面の接触における全接触面積中に占める塑性変形突起の接触面積 比 R_{4s} は次式で求まる。

$$R_{AS} = \frac{2\int_{z_{OS}}^{z_{max}} \int_{h+d_{CT}}^{z_{max}} (z-h) f(z) dz dh}{\int_{z_{OS}}^{z_{max}} \int_{h}^{z_{max}} \int_{h}^{z_{max}} (z-h) f(z) dz dh}$$
(1.4.34)

ここで f(z) は突起頂点高さ分布の確率密度関数

一方,平面どうしの接触における接触面積比 RAP は次式で求まる。

$$R_{AP} = \frac{2\int_{z_{ob}-\alpha_{cr}}^{z_{max}} (z-h) f(z) dz}{\int_{z_{ob}}^{z_{max}} (z-h) f(z) dz}$$
(1.4.35)

式 (1.4.34), (1.4.35) を用いて R_{AS}, R_{AP} を求めた結果を 図 1.4.28 に示す。

R_{As}, R_{AP}両者とも同様の傾向を示し, α_{cr}/o_{ps} が1以上になると急激に塑性変形突起部の接 触面積比は低下することがわかる。また, 球 の場合の面積比 R_{As}の方が平面の場合の面積 比 R_{AP}に比べ低い値を示しているのは, 球の 場合接触域の内で中心から離れるにしたがっ て各接触突起の近接量が低下し, 塑性変形が 生じにくくなるためである。しかし, この図 から球と平面の接触の方が平面どうしの接触 に比べ突起が塑性変形しにくいとは判断でき

図 1.4.28 R_{AS} と R_{AP} の比較

ない。球や平面に同一荷重をかけると球と平面の接触の場合,平面間の接触に比 べ当然接触高さ Zoo が低下する。これは 図 1.4.28 からも 明らかなように塑性変 形部の面積比の増大を意味する。しかし,平面どうしの接触理論と球と平面間の 接触理論では,対象とする荷重条件が大幅に異なるため同一荷重条件下での比較

-85-

は意味がなく, 図 1.4.28 のように接触高さを基準にした比較の方が有効と考えられる。

つぎに平面間接触における Greenwood の塑性指標に相当する球と平面の接触の場合の塑性指標 gs を求める。

球形突起と平面の接触における突起内部の最大せん断応力 *τ_{max}* はヘルツ理論 により次式で与えられる。

$$\tau_{max} = 0.47 \frac{W_a}{\pi a^2}$$
$$= \frac{0.3133 E}{\pi} \left(\frac{\alpha_a}{\beta_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(1.4.36)

ここで *a*:接触円半径 *Wa*:荷重, いま,

$$\tau_{max} \ge k_c \ p_m \tag{1.4.37}$$

なる条件下のとき突起が塑性変形すると設定すると、突起が塑性変形する臨界近接量 α_{cr} は次式で表される。

$$\boldsymbol{\alpha}_{cr} = (10 \ E \ k_c \cdot \boldsymbol{p}_m)^2 \ \beta_3 \tag{1.4.38}$$

また, Greenwood の塑性指標 φ_p は次式で定義ⁿ されている。

$$\varphi_{p} = \left(\frac{\sigma_{p3}}{\beta_{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E}{2p_{m}}$$
(1.4.39)

式(1.4.38),(1.4.39)から次式が求まる。

$$\varphi_{p} = \frac{k_{c}}{0.2} \left(\frac{\sigma_{p3}}{\alpha_{cr}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4.40}$$

*Greenwood*⁷⁰は $k_c \ge 0.2$ に設定し、 $\varphi_p \ge 1$ のとき接触はほとんど塑性変形突起 のみ、 $\varphi_p \le 0.6$ のときほとんど弾性変形突起のみで構成されているとしている。こ の基準に従い、 $\varphi_p = 1$ および $\varphi_p = 0.6$ のときの α_{cr}/σ_{ps} を式 (1.4.40)から求め、 相当する R_{AP} を図 1.4.28 の破線から求める。その R_{AP} と等しい R_{AS} を有する α_{cr}/σ_{ps} を実線から求め、式 (1.4.40) に代入して逆に球と平面の接触における塑 性指標 φ_s を算出すると、

-86-

となり、平面どうしの場合に比べ *g*_s は 10 % 弱程度増加するにすぎないことがわかる。た だし、この値は 図 1.4.28 から明らかなよう に *Z*_{os}/*q*_{p3} により多少変化する。式 (1.4.41) の値は 図 1.4.28 の3種類の *Z*_{os}/*q*_{p3} に対する 値の平均値である。

一例として、湿式ラップ仕上面に式(1.4.
41)の判定基準を適用してみる。すなわち
式(1.4.30)の関係式を式(1.4.39)に代入し、 9%を Amと as で表し、さらに as を式(1.
3.20)により Ra で表して式(1.4.41)の判

定基準を適用すると、図1.4.29のように弾性接触理論と塑性接触理論の適用領 域が明確になる。

4.5.2 母材の塑性変形開始条件

本論文の解析では母材の変形を弾性変形と設定しているため理論の適用範 囲が限られる。ここではこの範囲を明確にするため母材内部の最大せん断応力を 推定する。

弾性論¹⁹⁾ によると、 z 軸に関し軸対称な垂直応力 p(r) が x y 面に作用する場合 z 軸に添って深さ z の位置の応力は次式で表される。

$$\sigma_{r} = \sigma_{\theta} = \frac{1}{2} \int_{0}^{r_{max}} p(r) \left[-2 \left(1 + \nu \right) z \left(r^{2} + z^{2} \right)^{\frac{3}{2}} + 3 z^{3} \left(r^{2} + z^{2} \right)^{\frac{5}{2}} \right] r dr$$

$$(1.4.42)$$

$$\sigma_z = -3 \int_0^{r_{max}} p(r) r z^2 (r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} r dr \qquad (1.4.43)$$

よってせん断応力では次式で定まる。

-87-

(1.4.41)

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\theta} - \sigma_{z} \right)^{2} \qquad (1.4.44)^{2}$$

式(1.4.14)の圧力分布を式(1.4.42),(1.4.43) に代入し,母材内部の応力分 布を2軸上の点について求めた一例を図1.4.30 に示す。接触条件を変化させて 応力分布を計算し,そのつどこのような図を描き,図から最大せん断応力 τ_{max} およびそれが生じる深さ h_xを求める。

突起が塑性変形する場合の計算結果を図 1.4.31 と図 1.4.32 に示す。図 1.4.31

-88-

は荷重と最大せん断応力の関係を示す。荷 重が小なるほど一点鎖線で示したなめらか な面の場合のヘルツ理論と実線および点線 で示した粗い面の場合の理論値の差が大に なる。また、σ。が小なるほど τmax は増加し ヘルツ理論に近い値を示すが、 pm は τmax の値にほとんど影響を及ぼしていない。

トレスカの降伏条件によると母材の塑性 変形は *tmax* が材料の降伏せん断強さ t に Q5 $\delta_{5}=40 \mu n$ $\delta_{5}=8 \mu n$ $\delta_{5}=0.1$ $\delta_{5}=0.32 \mu n$ $\delta_{5}=0.32 \mu n$ $\delta_{5}=0.32 \mu n$ $\delta_{5}=0.32 \mu n$ 0.01Q005 Q1 1.4.32 W と h τ の関係 $p_{m} = 500 \text{ kgf/mm}^{2}$ 等しくなった時点で母材内部の一点で発生する。しかし、これはきわめて局部的 な塑性変形にすぎず、本理論の適用条件としては後述の第2編第1章1.2.2.4の 考察から推定される次式を用いるのが妥当と考えられる。

 $\tau_{max} < 2 \tau_c$

(1.4.45)

なお、鋼板を用いた近接量測定実験では τ_c = 20 kgf/mm² であるから、図 1.4. 14 ~ 図 1.4.17 の実験条件は 図 1.4.31 から判断すると式(1.4.45) の本理論適 用条件をほぼ満足している。

図 1.4.32 は最大せん断応力が生じる位置を表面からの深さで表したもので、 なめらかな面の場合に比べ表面粗さが大なるほど深い位置に *r_{max}* が発生している。 またこの深さは荷重が大なるほど深くなるが、荷重によってそれほど大きくは左 右されないことがわかる。

図 1.4.33, 図 1.4.34 に突起が弾性変形する場合の計算結果を示す。図 1.4.33 に *τ_{max}* とみかけの最大圧力 *p*(0) との比を示しているが, この比は g に無関係に ほぼ一定で

 $\tau_{max} \approx 0.29 \ p(0)$

(1.4.46)

-89-
$(\tau_{max} = 0.31 p(0))$ とよく似た傾向を示す。なお、この比は突起半径や荷重を変 化させてもほぼ一定である。また、この図から突起先端曲率半径は τ_{max} にあまり 影響を及ぼさないことがわかる。そこで、 β_3 の代表値として式(1.4.30)を採用 して τ_{max} を求めてもそれほど一般性を失わないと考えられる。この場合の数値計 算結果を図1.4.34 に示す。この図は突起が塑性変形する場合の図1.4.31 とよ く似た傾向を示している。

結局,塑性変形の場合も弾性変形の場合もほとんど σ_s , W のみで τ_{max} が決定 され,無次元化の妨げになっていた μ_n , β_s と σ_s の関係は無視でき,図 1.4.31 と 図 1.4.34 は次式で定義する無次元化変数で近似的に表示できる。

 $\tau_{max}^{*} = \frac{\tau_{max}}{\pi E}$, $W^{*} = \frac{W}{ER^{2}}$, $\sigma_{s}^{*} = \frac{\sigma_{s}}{R}$ (1.4.47) このようにして無次元化変数で表した 図 1.4.31, 図 1.4.34, および式 (1.4.47) を用いると材質さえ決まると本理論の適用範囲が決定されることになる。

4.5.3 突起形状の設定の影響

4.2.1 の解析では解析の便宜上円錐形突起を想定したが,弾性接触の場合 や第2章,第5章では突起形状を2次曲線で表している。そこで突起形状を円錐 と設定する場合と放物体と設定する場合とで,球と粗い平面の接触理論の解析に どの程度の差が生じるかをシミュレーション計算で検討してみる。計算手順とし ては計算機で正規乱数を発生させ,それを頂点高さとする円錐突起,あるいは放 物体突起を突起間隔一定に3次元的に配置し,そのモデル面上の一定接触高さ Zos まで球を食込ませ,各接触突起の食込み量を求める。各接触突起に作用する負荷 を第1章の理論式をもとに計算し各突起の負荷の総和,すなわち球に作用する負 荷を求める。モデル面を変化させこの負荷の平均値Wを求める。以上の手順を種 種の接触高さ Zos について計算し, Zos とWの関係を求める。

モデル面としては湿式ラップ面を想定し、突起先端曲率半径 β は式 (1.4.30) から、 平均傾斜 $tan \theta$ は表面単位面密度 $n_{b} \ge tan \theta$ との関係を示す次式の理論式²⁰ と式

-90-

(1.3.25)から推定する。

 $tan \theta = 0.6363 \sigma_s^2 n_s$

(1.4.48)

数値計算結果を図 1.4.35 に示す。この図から突起設定の相違による差は図中 に示した程度の接触条件下ではかなり小なることがわかる。



 $p_m = 500 \text{ kg} f/\text{mm}^2$ R = 5 mm

4.5.4 Zos が確定量の場合とランダム量の場合との相違

式(1.4.11) あるいは式(1.4.18) を見ると明らかなように いずれも接触 高さ Z₀ を確定量とし,真実接触面積,あるいは荷重をランダム変数として扱っ ている。式(1.4.11)の真実接触面積は荷重と比例関係にあるからこの場合も荷 重をランダム変数としてその平均値を求めていることになる。

一方,近接量測定実験においては実験条件として荷重Wが与えられるためWは 確定量になり,近接量がランダム量,すなわち接触高さ Z_os がランダム量になる。 このように理論と実験とは異った接触状態にある。そこで, Z_{os}をランダム量とす る場合と確定量とする場合の相違について考察する。

(1) 突起が塑性変形する場合

 Z_{os} をランダム量とする場合の \overline{Z}_{os} とWの関係は塑性接触の場合には統計

-91-

論でいう順序統計量を求めることに帰着すると考えられる。しかし、この問題は きわめて複雑で解析が容易でない。ここでは前章 3.5.3.2 と同様のシミュレーシ ョン計算で Z_{os} と W の関係を求める。また、 Z_{os} を確定量とする場合にはWがラ

ンダム量になるが、このWの平均値 \overline{W} と Z_{os} の関係もシミュレーション 計算で求める。そしてWと \overline{W} を同じ 横軸にとり \overline{Z}_{os} と Z_{os} の比較を行っ た例を図1.4.36に示す。 $W-\overline{Z}_{os}$ に 関する計算結果が階段状になってい るのは前章 3.5.3.2で述べた理由に よる。

Zos をランダム量に設定したとき で表面単位が唯一個しか球と接触し



ない領域での \overline{Z}_{os} (これは最初の接触位置の平均値 \overline{Z}_{is} に相当する) は Z_{os} より低 い値を示し, 軽荷重になるほどこの差は拡がっている。一方,荷重が増加し複数 個の表面単位が接触する領域では \overline{Z}_{os} と Z_{os} の差はほとんど無視できる。また, a_s と n_s の関係として式 (1.3.25) を用いると a_s を変えても接触状態が幾何学的に 相似なため, \overline{Z}_{os} と Z_{os} の関係も a_s が変化しても 図 1.4.36 と全く相似なものにな る。以上から,表面単位が複数個接触する条件,すなわち前章の式 (1.3.33) と 同様,

$$W > \frac{p'_m \sigma_s}{16} \tag{1.4.49}$$

なる条件を接触荷重が満足しておれば, Z_{os} がランダム量である接触状態は Z_{os} を確定量とする本章の解析結果で近似的に推定できる。図 1.4.14 ~図 1.4.17 の 近接量測定実験では実験条件の大半の領域で上式の荷重問題を満足しているため 実験と理論の設定の相違はほとんど問題にならない。

-92-

(2) 突起が弾性変形する場合

突起が弾性変形する場合のシミュレーション計算は、計算の便宜上、頂点 分布理論に添って行う。すなわち計算にあたっては正規乱数を突起頂点高さにと り、その平均高さを基準にした接触高さ Z_{op} の平均値 \overline{Z}_{op} を求める。なお、突起 頂点の諸量、 σ_{p3} 、 n_{p3} 、 β_3 は式(1.4.30)から推定する。個々の接触突起の近接 量と荷重の関係は球と平面の接触におけるヘルツ理論に従うものとする。このた め、近接量は荷重に関する連続量となり、 \overline{Z}_{op} とWの関係も図1.4.36のような 階段状にはならずなめらかな曲線となる。

W と $\overline{Z_{op}}/o_{p3}$ の関係,および \overline{W} と Z_{op}/o_{p3} の関係をシミュレーション計算で求め た結果を 図 1.4.37 に示す。定性的には突起が塑性変形する場合と同様の傾向を 示している。 $\overline{Z_{op}}$ と Z_{op} の差が 0.2 σ_{p3} 以下の場合 $\overline{Z_{op}}$ が Z_{op} で近似できるものと しその臨界荷重を W_{z} とする。この W_{z} を図 1.4.37 のようにして種々の接触条件 について求めた結果を 図 1.4.38 に示す。本章 4.4.2.3 の近接量測定実験におい ては荷重 $W = 0.1 \ kgf$ が 図 1.4.38 では 約 23 kgf に相当するため実験条件のほ とんどの領域で $W > W_{z}$ を満足しており、実験と理論の設定の相違はあまり問題 にしなくてよい。



 $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$

-93-

4.6 結 言

方向性のない表面粗さを有する平面と球の押付けにおける変形挙動を,接触突 起が塑性変形する場合と弾性変形する場合に分けて解析を行った。突起が塑性変 形する場合は第1章で定式化した突起の弾塑性変位を考慮に入れて解析し,突起 が弾性変形する場合は平面間接触における表面単位理論⁸⁰,および頂点分布理論⁷⁰ の両者を球と平面の接触問題に拡張して考察を試みた。また,突起,および母材 の塑性変形開始条件等についての考察,および本論文中随所に現われる母材の弾 性変位の2次式近似の計算精度についての検討も試みた結果,以下のことが明ら かになった。

- 1) 母材の弾性変位後の球の相対的曲面を2次式近似および4次式近似で計算し た結果を比較して、2次式近似でも十分な精度が得られることが確認できた。
- 2) 食込み位置,真実接触面積,有効接触域半径,みかけの最大接触圧力等を理論的に推定できる。
- 3)上述の諸量に影響を及ぼす種々の因子のうち、表面粗さ曲線の標準偏差が最も顕著な影響を及ぼす。
- 4) 近接量に関して実測値と理論値の比較を試みた結果,突起が塑性変形する場合は実測値と理論値とかなり良好な一致を示し,本理論の妥当性が確かめられた。しかし,弾性接触状態の場合,理論値と実測値の間にそれほどの一致が見られず,弾性接触理論を現実の機械加工面に適用するには今後の検討および表面粗さの高精度な3次元的測定方式の確立が必要である。
- 5) 突起の塑性変形開始条件としては平面間接触の場合の塑性指標がほとんどそのまま準用できる。
- 6)表面粗さが大なるほど母材の最大せん断応力は低下する。

- 1) 石垣,川口: 精密機械,42,9(1976)858.
- 2) 久門: 日本機械学会論文集, 35, 272 (1967) 861.
- A.E.H.Love; A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.
- 4) たとえば, J.F.Archard: J.Appl. Phys., 24, (1953) 193.
- J.A.Greenwood and J.H.Tripp: Proc. I.Mech. E., 185, (1970/71) 625.
- 6) A.W.Bush, R.D.Gibson and T.R.Thomas: Wear, 35, 1 (1975) 87.
- J.A.Greenwood and J.B.P.Williamson: Proc. Roy. Soc. Ser.A, 295, (1966) 300.
- 8) 久門: 日本機械学会論文集, 38, 314 (1972) 2657.
- 9) J.A.Greenwood and J.H.Tripp: Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
- R.S.Sayles and T.R.Thomas: J.Phys. E.Sci. Instrum, 9, (1976) 855.
- 11) 渡辺,石垣,川口: 昭和 50 年度 精機学会春季全国大会 前刷集,(1975)147.
- D.E.Cartwright and M.S.Longuet-Higgins: Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 237, (1956) 212.
- 13) P.R.Nayak: J. Lubr. Technol., 93, (1971) 398.
- 14) H.A.Francis: Wear, 45 (1977) 221.
- 15) たとえば , D.J.Whitehouse and J.F.Archard : Proc. R. Soc. London Ser. A, 316, (1970) 97.
- R.A.Onions and J.F.Archard, J.Phys. D.Appl. Phys., 6, 3 (1973) 289.
- 17) 久門: 日本機械学会論文集, 38, 314 (1972) 2657.
- 18) D.Tabor: Wear, 32, 2 (1975) 269.
- S.Timoshenko and J.N.Goodier: Theory of Elasticity 2nd ed., McGRAW-HILL, New York (1951) 369.
- 20) S.Timoshenko and J.N.Goodier:同上, p.380.

-95--

第 5 章 方向性のある表面粗さを 有する平面と球の接触¹⁾

5.1 緒 言

第1編第2章において方向性のある表面粗さとして,突起の高さ形状が均一な 面を想定したが,現実の加工面には研削仕上面,研摩布仕上面等のように表面粗 さを統計的に処理して扱う方が適している場合の方が多い。この章では突起頂点 の高さを確率変数として方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触変形の解 析を行う。第1編第2,4章と同じくすべての接触突起が弾性変形する場合と塑性 変形する場合に分けて解析を行い,この両者の適用範囲については考察で検討す る。なお,方向性のない表面粗さを想定した球と平面の接触理論²⁻⁹⁾は多いが,方 向性のある表面粗さに関してはほとんど見あたらない。

5.2 理 論

5.2.1 突起が弾性変形する場合

理論解析にあたり以下の仮定をおく。

- 1) 一方向性の表面粗さを考え、突起の条痕にそってのおうとつは無視できるものとする。
- 2) 突起頂点高さ分布は標準偏差のの正規分布とする。
- 3) 突起の合流は無視する。
- 4) 母材の変形は弾性変形とする。

現実の加工面には完全な一方向性の表面粗さは存在しないが,球と平面の接触 においては平面間接触に比べ接触域が極めて狭いため条痕方向の突起長さは無限 と近似しうる場合が多いと考えられる。砥粒加工面において頂点分布が正規分布 で近似できることは一般に示されており,第3章においても実測例を示した。突 起の合流は当然考慮に入れる必要がある。しかし,これを解析の中に含めること はきわめて困難である。本研究では,表面のおうとつのうちで,接触時に容易に 合流を起こし単独の突起として存在し得なくなるような微細なおうとつを表面突 起分布測定時に除去する¹⁰⁰ ことにより,仮定 3)に起因する誤差の低減をはかっ た。仮定 4)の設定により本章の理論の適用限界の上限が定まるが,詳細は考察 に示す。

以上の設定をもとにして解析を試みる。球および平面の母材の弾性変形として は第1編第4章で近似精度を確認した2次式近似をここでも採用する。すなわち 第1編第4章の2次式を2次元に拡張し、母材の変形後の球の平面に対する相対 的曲率半径を *r_xR*, *r_yR* とすると、母材の変形後の2次曲面は次式で表される。

$$Z_1 = \frac{x^2}{2\tau_x R} + \frac{y^2}{2\tau_y R} + Z_{op}$$

ここで Z_{op} は接触高さで、 z 軸の原点 高さは図 1.5.1 に示すように突起頂点高 さの平均高さに一致させている。また、 表面粗さの条痕の方向をy 軸方向に一致 させると、突起先端の高さが Z_{b} 、曲率半



(1.5.1)

図 1.5.1 負荷過程の接触状態

径β,突起の中心がx,の位置にある突起の表面は次式で表される。

$$Z_2 = \frac{-(x - x_p)^2}{2\beta} + Z_p \tag{1.5.2}$$

式(1.5.1)と(1.5.2)を用いると, 球と突起の幾何的交さ量 w_a(x,y)は次式 で表される。

$$w_{a}(x,y) = Z_{2} - Z_{1} = -\left(\frac{1}{2r_{x}R} + \frac{1}{2\beta}\right)x^{2} - \frac{1}{2r_{y}R}y^{2} - Z_{op} + Z_{p} + \frac{x_{p}}{\beta}x - \frac{x_{p}^{2}}{2\beta}$$
$$= -\left(\frac{1}{2r_{x}R} + \frac{1}{2\beta}\right)x^{\prime 2} - \frac{1}{2r_{x}R}y^{2} - Z_{op} + Z_{p} - \frac{x_{p}^{2}}{2(r_{x}R + \beta)} \quad (1.5.3)$$

 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{T} \quad x' = x - \frac{\gamma_x R x_p}{\gamma_x R + \beta}$

上式と式(1.1.2)とを比較すると式(1.5.3)の Wa は式(1.1.2)の W1+W2に

相当するため、その他の係数についてはそれぞれ次式の対応が成立する。

$$A' = \frac{1}{2r_x R} + \frac{1}{2\beta}$$
(1.5.4)

$$B' = \frac{1}{2\,r_y\,R} \tag{1.5.5}$$

$$\alpha_a = Z_p - Z_{op} - \frac{x_p^2}{2(\gamma_x R + \beta)}$$
(1.5.6)

よって第1編第1章 式(1.1.11)の cos y は次式で表される。

$$\cos \Psi = \frac{B' - A'}{B' + A'} = \frac{\beta (r_x - r_y) - r_x r_y}{\beta (r_x + r_y) + r_x r_y}$$
(1.5.7)

これを式(1.1.12)の右辺に代入して等式が成立するまで繰返し計算を行い*k*を求めると,各接触だ円の短径 2*a*,長径 2*b*の比が次式で求まる。

$$\frac{a}{b} = (1 - k^2)^{\frac{1}{2}}$$
(1.5.8)

また,この k と式(1.5.6)の α を式(1.1.17) に代入すると各接触突起に作用 する荷重 W が求まる。ここではその式を略記して次式で表す。

$$W_{a} = Q_{a} \alpha_{a}^{\frac{3}{2}} = Q_{a} \left\{ Z_{p} - Z_{op} - \frac{x_{p}^{2}}{2(r_{x}R + \beta)} \right\}^{\frac{3}{2}}$$
(1.5.9)

ただし Q_a は式 (1.1.17)の α_a の係数で, A', B', k, E₁, E₂, ν₁, ν₂ の関数す なわち r_aR, r_yR, β および材料の弾性定数で定まる定数である。いま, 仮りに接 触高さ Z_{op} の位置まで二次曲面が食い込んだ場合を考える。平面全体で支える荷 重の平均値は式 (1.5.9)を用いると次式で与えられる。

$$W = 2 Q_a n_p \int_0^{x_{max}} \int_{Z_{op} + \frac{x^2}{2(\tau_x R + \beta)}}^{z_{max}} \{ z - Z_{op} - \frac{x^2}{2(\tau_x R + \beta)} \}^{\frac{3}{2}} f(z) dz dx$$
(1.5.10)

ここで *n*, は単位幅あたりの平均突起数, また *f*(*z*) は突起頂点高さ分布の確率 密度関数で次式のような条件付確率密度関数として表される。

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma p})^2}}{\int_{-z_{max}}^{z_{max}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z}{\sigma p})^2} dz}$$
(1.5.11)

式(1.5.10)を満足する Zop を繰返し計算で求めれば、接触高さが定まる。

--98--

つぎに、見かけの平均圧力分布を求める。個々の接触だ円内の圧力分布 p(x, y) は第1章式 (1.1.4) で表されるため、微小区間 $y = y \sim y = y + dy$ 中の負荷 δW_a は次式で求まることがわかる。

$$\delta W_a(y) = \frac{3W_a}{4b^3} (b^2 - y^2) dy \qquad (1.5.12)$$

上式の b は式(1.1.14) で表される。同式右辺の係数をK とおくと

$$b = K W_a^{\frac{1}{3}} = K Q_a^{\frac{1}{3}} \alpha_a^{\frac{1}{2}}$$
(1.5.13)

$$\therefore \ \delta W_a(y) = \frac{3}{4K^3} \left(K^2 Q_a^{\frac{2}{3}} \alpha_a - y^2 \right) \, dy \tag{1.5.14}$$

 α_a は確率変数であるので点(x, y)における見かけの平均圧力 p(x, y) は上 式を用いると次式で表される。

$$p(x,y) = \frac{3n_b}{4K^3} \int_c^{z_{max}} \left\{ K^2 Q_a^{\frac{2}{3}} (z-c) - y^2 \right\} f(z) dz \qquad (1.5.15)$$

ててで

$$C = Z_{op} - \frac{x^2}{2(\gamma_x R + \beta)} + \frac{y^2}{K^2 Q_a^2}$$

式(1.5.15)を弾性論¹¹⁾から導かれる次式に代入すると平面に対する球の相対的表面変位量分布は次式で求まる。

$$w_m(x,y) = \frac{1}{\pi E} \iint_{S_i} \frac{p(\xi,\eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{\frac{1}{2}}} d\xi \, d\eta \qquad (1.5.16)$$

ただし積分領域 S_i は短径 $2x_{max}$,長径 $2y_{max}$ で定まるだ円形である。

$$x_{max} = \{2(Z_{max} - Z_{op})(\gamma_x R + \beta)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$y_{max} = KQ_a^{\frac{1}{3}}(Z_{max} - Z_{op})^{\frac{1}{2}}$$
(1.5.17)

この母材の弾性変形による球の相対的曲率半径が最初に仮定した $r_x R$, $r_y R$ に 一致するまで, すなわち次式が成立するまで式(1.5.1)~式(1.5.16)を繰返し 計算すれば接触状態が定まる。

$$\frac{x^2 + y^2}{2R} - \left(\frac{x^2}{2r_xR} + \frac{y^2}{2r_yR}\right) = w_m(0,0) - w_m(x,y) \qquad (1.5.18)$$

なお、上式の接触条件式は未知数が2個 (r_x, r_y) であるから、接触面内の2

点でしか満足されない。その2点として第1編第4章の考察を適用して近接量の 推定誤差が最小になるよう下記の位置を採用する。

$$(x, y) = (0.55 x_{max}, 0)$$

 $(x, y) = (0, 0.55 y_{max})$ (1.5.19)

以上の手順で接触状態が定まると食込み位置 μ および近接量 α は次式で定まる。

$$u = Z_{op} - w_m (0, 0)$$
 (1.5.20)

$$\alpha = Z_{ip} - Z_{op} + w_m (U, U)$$
 (1.5.21)

つぎに、摩擦、摩耗,接触熱(電気)抵抗等の問題において、主たる因子の一つ と考えられる真実接触面積を求める。個々の接触突起において、それぞれの近接 量 *α*_a と真実接触面積 *S*_{ae} の関係は第1章式(1.1.14),(1.1.15),(1.1.17)を用 いると次式で表される。

よって,球と粗い平面の接触における真実接触面積の平均値 Ar は次式で求まる。

$$A_{r} = 2 n_{p} A_{s} \int_{0}^{x \max} \int_{Z_{op} + \frac{x^{2}}{2(R_{Tx} + \beta)}}^{Z_{max}} \left\{ z - Z_{op} - \frac{x^{2}}{2(R_{Tx} + \beta)} \right\} f(z) \, dz \, dx$$

$$(1.5.23)$$

5.2.2 突起が塑性変形する場合

5.2.2.1 負荷過程の接触機構

解析手順としては弾性変形する場合と同様であるため省略し、本章 5.2.1 と対応する式のみを示す。個々の接触突起の変形は第1編第1章の解析結果を用 い表面粗さの幾何学的性状は本章 5.2.1 と同一とする。いま、球および平面の母 材の弾性変形後の球の平面に対する相対的仮想曲率半径を *r_xR*, *r_yR* とすると、 この曲面が *x* 軸方向の曲率半径 β なる突起と接触する場合、第1編第1章の式

-100 -

(1.1.18) における球面に対する突起の相対的曲率半径 R_x, R_y はそれぞれ次式 で表される。

$$R_x = \frac{\gamma_x R\beta}{\gamma_x R + \beta} \approx \beta \tag{1.5.24}$$

 $R_y = \gamma_y R \tag{1.5.25}$

よって個々の接触突起の近接量と荷重の関係は式(1.1.28)の R_x, R_yの代わりに 上式(1.5.24),(1.5.25)を代入すれば求まる。すなわち,

$$W_a^* = 2B^2 + C - 2B(B^2 + C)^{0.5} (= g(\alpha_a^*) \succeq \ddagger \zeta)$$
(1.5.26)

ただし $B = 39 p_m^{*1.5} \beta^{*0.6} r_y^{-0.6}$

 $C = 2 \pi^2 p_m^* \alpha_a^* \beta^{*} \gamma_y^{-0.5}$

なお第1編第1章における無次元化は R_y で行ったが R_y は母材の弾性変形に より変化するので、この章では球の半径 R で無次元化している。

式(1.5.26)を用いると、仮想二次曲面が Z_oの位置まで食込んだ場合の球に 作用する負荷の平均値は式(1.5.10)の代りに次式で表される。

$$W^{*} = 2 n_{p}^{*} \gamma_{y}^{2} \int_{0}^{x_{max}^{*}} \int_{z_{0p}^{*} + \frac{x^{*}}{2\gamma_{x}}}^{\infty} g(\alpha_{a}^{*}) f(z^{*}) dz^{*} dx^{*}$$
(1.5.27)

上式を New ton-Raphson 法で解けば食込み高さ Z_{op}^* が求まる。

ところで、個々の接触突起の全変形量 α_α と塑性変形量 α_{pa}の間には第1編第1 章の式(1.1.26)と式(1.1.28)から次式の関係が成立することがわかる。

 $\alpha_{pa}^{*} = 2D^{2} + \alpha_{a}^{*} - 2D(D^{2} + \alpha_{a}^{*})^{0.5} (= G(\alpha_{a}^{*}) \succeq \ddagger \zeta)$ (1.5.28) $\subset \subset \mathcal{C}, \quad D = 8.78 p_{m}^{*} \beta^{*0.35} r_{y}^{-0.35}$

また,突起と二次曲面の接触面はだ円形となり,その短径 2a,長径 2b は

$$a^{*} = (2\beta^{*}\gamma_{y}\alpha_{pa}^{*})^{\frac{1}{2}} \qquad b^{*} = (2\alpha_{pa}^{*})^{\frac{1}{2}}\gamma_{y} \qquad (1.5.29)$$

で与えられるため,一個の接触だ円中の y~y+dy 間に作用する負荷 δW は次式 で表される。

-101-

$$\delta W_a^*(y^*) = 2 \left\{ a^{*2} - \frac{a^{*2}}{b^{*2}} y^{*2} \right\}^{\frac{1}{2}} p_m^* \, dy^* \qquad (1.5.30)$$

式(1.5.28),(1.5.29)から*a*,*b*は*α*,の関数として表され,それを式(1.5.30) に代入すれば δWa も *α*aで表される。この *α*aを確率変数として扱うと,平面と 球の接触における接触部のみかけの平均的圧力は次式で与えられる。

$$p^{*}(x^{*}, y^{*}) = 2\beta^{*^{0.5}} p_{m}^{*} n_{p}^{*} \gamma_{y}^{-0.5} \int_{z_{op}^{*} + \frac{x^{*2}}{2\gamma_{x}}}^{\infty} \left\{ 2 \gamma_{y}^{2} G(\alpha_{a}^{*}) - y^{*^{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} f(z^{*}) dz^{*}$$

$$(1.5.31)$$

これを式(1.5.16) に代入すると球および平面の母材の弾性変形に起因する表面 変位分布が求まる。この表面変位による球の平面に対する相対的曲率半径が最初 に仮定した r_x R, r_y R に一致するまで繰返し計算を行う。その結果,接触状態が 定まると食込み位置,近接量が式(1.5.20),(1.5.21) から求まる。

5.2.2.2 除荷過程の接触機構

単一接触突起の変形において,除荷過程における荷重と弾性近接量の関係 は負荷過程におけるそれと同じであるため,式(1.1.21),(1.1.26)。を用いて次 式で表される。

 $W_{a}^{*} = \left(\frac{2\pi^{2}}{78}\right)^{2} p_{m}^{*-1} \alpha_{era}^{*2} R_{x}^{*-0.2} = \left(\frac{2\pi^{2}}{78}\right)^{2} p_{m}^{*-1} \alpha_{era}^{*2} \beta^{*-0.2} \gamma_{yr}^{0.2} \quad (=g_{r}(\alpha_{era}^{*}) \geq \forall <)$ (1.5.32)

ただし、 $\alpha_{era}^* = \alpha_{era}/R_y$ で α_{era} は除荷時の接触突起の弾性近接量。

除荷過程においても負荷過程と同様,接触突起の接触面内には一様な圧力が作用すると考えると,同一負荷時における負荷過程と除荷過程の弾性近接量が等し くなるためには,その圧力,接触面形状ともに負荷過程と同一と設定するのが妥 当である。以上の設定をもとにして,除

荷過程の接触機構を解析する。

いま,図 1.5.2 に示すように最大負荷 時に接触高さ Zom の位置にまで食込み, その時の球の相対的曲率半径が T_x R, T_y R 

-102 -

であったものが除荷過程において球の底の高さが Z_{or} の位置にまで戻り, x, y 方向の球の仮想的相対曲率半径がそれぞれ $r_{xr}R$, $r_{yr}R$ に変化したとすると,式(1.5.27)の代わりに次式が成立する。

 $W^{*} = 2 n_{p}^{*} \gamma_{yr}^{2} \int_{0}^{x_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{r} (\alpha_{era}^{*}) U(\alpha_{era}^{*}) f(z^{*}) dz^{*} dx^{*} \qquad (1.5.33)$ $\subset \subset \mathcal{T},$

$$U(\boldsymbol{\alpha}_{era}^{*}) = \begin{cases} 0 : \boldsymbol{\alpha}_{era}^{*} \leq 0 \\ 1 : \boldsymbol{\alpha}_{era}^{*} > 0 \end{cases}$$

ただし、 α_{era}^{*} は負荷過程とは異なり、球と突起の幾何学的交さ量から最大負荷時における塑性変形量を差引いたもので次式で与えられる。

$$a_{era}^{*} = \frac{z^{*}}{\gamma_{yr}} - \frac{Z_{or}^{*}}{\gamma_{yr}} - \frac{x^{*2}}{2\gamma_{xr}\gamma_{yr}} - G\left(\frac{z^{*}}{\gamma_{y}} - \frac{Z_{om}^{*}}{\gamma_{y}} - \frac{x^{*2}}{2\gamma_{x}\gamma_{y}}\right)$$
(1.5.34)

ここで、Gは式(1.5.28)と同一で塑性変位量を表す関数。式(1.5.34)を式 (1.5.33)に代入して、この式を満足する食込み高さ Z^{*} を求める。つぎに式 (1.5.31)に相当するみかけの圧力分布を求めるため、各接触突起の接触面だ円 形状を決定する。前述の設定に従い、除荷時の接触面形状を同一負荷における負荷 過程時の接触面形状に等しいと考える。除荷過程において式(1.5.34)で求まる 弾性変位量を有するような接触状態での相当塑性変位量 a^{*}_{pra}を求めると、式(1. 1.21)、(1.1.26)から

$$\alpha_{pra}^{*} = 2 \left(\frac{\pi}{78}\right)^{2} p_{m}^{*^{-2}} \alpha_{era}^{*^{2}} \beta^{*^{-0.7}} \gamma_{yr}^{0.7}$$
(1.5.35)

となる。よって, 突起の接触面だ円の短径 *a*^{*}, 長径 *b*^{*}, は次式に式 (1.5.35) を 代入すれば求まる。

$$a_r^* = (2 \, \alpha_{pra}^* \, \beta^* \gamma_{yr})^{\frac{1}{2}} , \qquad b_r^* = (2 \, \alpha_{pra}^*)^{\frac{1}{2}} \, \gamma_{yr} \qquad (1.5.36)$$

このように接触だ円が定まると式(1.5.31)と同様にして接触部のみかけの圧 力分布が定まる。

$$p^{*}(x^{*}, y^{*}) = 2 p_{m}^{*} n_{p}^{*} \beta^{*} \gamma_{yr}^{-0.5} \int_{-\infty}^{\infty} \{2 \alpha_{pra}^{*} \gamma_{yr}^{2} - y^{*2}\}^{\frac{1}{2}} U(2 \alpha_{pra}^{*} \gamma_{yr}^{2} - y^{*2}) f(z^{*}) dz^{*}$$

$$(1.5.37)$$

式(1.5.37)に式(1.5.35)を代入すると圧力分布が求まり、これを式(1.5. 16)に代入すると、球および平面の母材の弾性変位量が求まる。以下、負荷時 と同様の手順で繰返し計算を行うと *r*ar, *r*yr が定まり接触状態が計算できる。

5.3 数值計算結果

5.5.1 突起が弾性変形する場合

(1) 食込み位置,母材の変形量

図 1.5.3 に o_p^* , W^* と食込み位置 u^* の関係を示す。 o_p^* 大なるほど, また W^* 大なるほど u^*/o_p^* は低い値を示している。 W^* 大なるほど u^* に及ぼす o_p^* の 影響が大になっているのは, W^* 大なるほど式 (1.5.20) における母材の弾性変 位の項 w_m (0,0) の効果が大になるためである。すなわち,後述するように o_p^* 大なるほど w_m (0,0) は減少するため, o_p^* 大なるほど u^* は増加する。 o_p^* 大な るほど式 (1.5.20) の Z_{op} は当然増加するため, w_e (0,0) の効果が加わると, σ_p^* の影響が大になる。

n^{*}_p と u^{*}の関係を図 1.5.4 に示す。 n^{*}_p 大なるほど u^{*}も増加し W^{*} と逆の効果 を示す。式 (1.5.10) だけから推定すると Z_{op} に及ぼす影響としては W^{*}と n^{*}_p は 逆比例すると考えられるが 図 1.5.4 の u^{*} は n^{*}_p より W^{*} の変化の方に大きく左



-104-

右される。これは W^* が増加すると Z_{op} が減少すると同時に w_m (0,0)も増加するのに比べ、 n_p^* が減少すると Z_{op} は減少するが w_m (0,0)は後述の図1.5.7 に見られるようにほとんど変化しないことによる。

図 1.5.5 に β^* と u^* の関係を示す。 β^* が変化しても u^* はほとんど一定である。以 上から u^* に及ぼす影響としては o_p^* , W^* , n_p^* , β^* の順に減少することがわかる。

母材の弾性変形量 *w_m*(0,0)の数値計算 結果を図 1.5.6,図 1.5.7 に示す。図 1.5. 6から *w_m*(0,0)は σ^{*} 大なるほど球と平面



の接触におけるヘルツ理論から求めた値(図中の破線)より低くなり,荷重小なるほど両者の比(ヘルツ理論/本理論)は大になる。図 1.5.7 から $w_m(0,0)$ は β^* , n_p^* が変化してもほとんど一定に保たれることがわかる。



(2) 真実接触面積

真実接触面積 A, に関する数値計算結果を図 1.5.8 および図 1.5.9 に示す。





図 1.5.9 n_p^* , $\beta^* \ge A_r^* \mathcal{O}$ 関係 $\sigma_p^* = 8 \times 10^{-4} \quad W^* = 10^{-6}$

図 1.5.8 から真実接触面積は荷重の増大と ともにほぼ比例して増加し,逆に σ^{*}_pの増大 につれて減少することがわかる。図 1.5.9

から n^{*}_p, β^{*}が増大すると真実接触面積も増加することがわかる。なお, これら4 種の因子の内ではW^{*}の影響が最も大で, 逆に n^{*}_pの影響はきわめて小である。 以上の数値計算結果は次式で近似できる。

-106-

 $A_{r}^{*} = 4.5 \sigma_{p}^{*^{-0.4}} \beta^{*^{0.42}} n_{p}^{*^{0.1}} W^{*^{0.95}}$

(1.5.38)

(3) 圧力分布

図 1.5.10 に接触面に作 用する圧力分布を示す。表面粗 さが大なるほど接触領域が拡が り、逆に圧力が低下することが わかる。また、圧力分布にも方 向性が生じ、表面粗さの条痕方 向(Y軸方向)の圧力の方がそ れと直角(X軸方向)の圧力よ り低い値を示している。この圧



図 1.5.10 接触面圧力分布 β^{*}=0.02 n_p^{*}=250 W^{*}=5×10⁶

力分布の方向性は第2編第1章に示 すように、転がり摩擦力の方向性に つながる。

接触面内の最大圧力と表面粗さの 性状の関係を図1.5.11,図1.5.12 に 示す。σ_p大なるほど最大圧力は低下 し,β,n_pは最大圧力に大きな影響 を及ぼさないことがわかる。このよ うな圧力分布の低下は第1編第4章 および本章5.3.2 でも示すように, 母材内部の分布応力を低下させる。

ところで、軸受や歯車等の転がり 接触部の摩耗の問題において近年表 面おうとつの影響について考察を行 っている文献^{12~16)}が数多く見られる。 これは材質の向上にともない母材内 部の疲労破壊に起因する摩耗が減少 し、表面おうとつの影響による摩耗



の相対的な割合が増加しているためと考えられる。このような転がり摩耗に及ぼ す表面おうとつの影響を考える場合,図1.5.11 に見られるように表面粗さが大 なるほど接触面のみかけの圧力分布は低下し(それにともなって母材内部のせん 断応力が低下する),一方,図1.2.5 に見られるように、各接触突起にはなめら かな面どうしの接触の場合に比べ,はるかに高い圧力が作用するという結果は重 要な意味を持つ。すなわち,表面粗さが大なる場合,なめらかな面の場合に比べ 球および平面の母材内部のせん断応力は低下し、母材の疲労破壊に起因する損耗 は生じにくくなる。逆に表面粗さ突起には高い応力が作用するため、突起内部、

-107-

すなわちきわめて表面近傍からクラックが発生する可能性が高くなる。なお、粗 い平面と球の接触において表面粗さ突起内部にきわめて高い応力が発生すること が応力凍結法による三次元光弾性実験¹⁷⁾でも確かめられている。

5.3.2 突起が塑性変形する場合

(1) 食込み位置

図 1.5.13 に σ_p^* , W^* と食込み 位置 u^* の関係を示す。 σ_p^* 大なるほ ど,また W^* 小なるほど u^*/σ_p^* は大な る値を示す。また u^*/σ_p^* の値は W^* の 影響よりも σ_p^* の影響を強く受けるこ とがわかる。

図 1.5.14 に *p*^{*} と *u*^{*} の関係を示す。 *p*^{*} 大なるほど突起の塑性近接量は減 少するが,突起の弾性近接量および 母材の弾性変位量は反対に増加する ため,食込み位置はほぼ一定となる。

図 1.5.15 に β^* , $n_p^* \ge u^*$ の関係を 示す。 β^* 大なるほど,また n_b^* 小な るほど食込み位置 u^* は低くなる傾向 を示してはいるが, β^* , n_b^* の変化に



対して u^* は大きな影響は受けていないことがわかる。実際の加工面の表面粗さ曲線をもとにして、ミニコンピータで突起先端曲率半径の平均値を求めると、図 1. 5.16 に示すように実測値はかなりばらついており、中心線平均粗さ R_a に対し 顕著な傾向は有していない。なお図中の・印は研摩布仕上面(黄銅板)で、。印 は研削仕上面(鋼板)についての実測値を示す。この図で、 $R_a = 0.2 \sim 2 \mu m$ の 範囲内なら $\beta = 0.035 mm$ で代表させても ± 50% 以内に全実測値が入る。 β に

-108-



おける ±50% 程度の差は図 1.5.15 で検討すると u^* の値には±10% 程度しか 影響を及ぼさないことがわかる。そこで第1編第3章で示した研摩布仕上面に関 する σ_p と n_p の関係 $\sigma_p n_p^2 = 1.1$ を用い、 $\beta = 0.035 mm$ 一定で食込み位置を計算 する。なお第1編第3章図 1.3.14 の n_p の実測値はかなりばらついているが、 u^* は図 1.5.15 にみられるように n_p^* の変化に対しほとんど影響を受けないため、上 述の近似で十分である。

計算結果を図1.5.17 に示す。図中, 縦軸,横軸を中心線平均粗さ R_a で整理 し直しており, uが突起頂点平均高さを 基準としての食込み位置であるのに対し, u'は表面粗さ曲線の中心線を基準にして いる。すなわち,第3章式(1.5.26), (1.3.27)および次式(1.5.39)を用いて 求めた式(1.5.40)から u'を計算した。

$$\sigma_s = 1.25 R_a \qquad (1.5.39)$$
$$\frac{u'}{R_a} = 1.08 \left(\frac{u}{\sigma_p} + 1\right) \qquad (1.5.40)$$



図 1.5.17 σ_p , R_a と食込み位置の関係 $\sigma_p n_p^2 = 1.1 \text{ mm}^{-1} \beta = 0.035 \text{ mm}$ $p_m = 500 \text{ kgf/mm}^2$ $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$

-109-

この図から R_a, R 大なるほど, またW小なるほど u/R_a は増加し, この3種の因 子のうち R_a の影響が最も大で, R および 1/W は同程度の影響を u に及ぼすこと がわかる。なお,以下の数値計算では鋼球と鋼板の接触を想定している。

(2) 接触点の数

図 1.5.18 に平均接触点数の 計算結果を示す。の小なるほど、ま たW大なるほど平均接触点数は増加 する。のが大でW小なる場合、接触 点の数が数個、極端な場合には接触 点が1以下になる。このように接触 点の数が少ない場合には式(1.5.21) で示したような近接量は意味を持た なくなる。なお、この問題に関して は本章 5.5.3 で考察を行う。

(3) 弾性回復量

除荷過程の数値計算結果の一例を図 1.5.19 に示す。図は最大負荷 1 kgf まで 作用させたのち,荷重を半分にまで除荷し た場合の突起および母材の弾性回復による 近接量の回復を計算したものである。 o,が 大になると母材の弾性回復量は減少するが, それ以上に突起の回復量が増加するため全 体としては回復量は増加する。



図 1.5.18 荷重と接触突起数の関係 R = 5 mm $n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}} \text{mm}^{-1}$ $\beta = 0.035 \text{ mm}$ $p_m = 250 \text{ kgf/mm}^2$



 $\sigma_{\rm p} n_{\rm p}^2 = 1.1 \,{\rm mm}^{-1} \,{\rm W}_{\rm max} = 1 \,{\rm kg} \,{\rm f}$ $\beta = 0.1 \,{\rm mm} \,{\rm W} = 0.5 \,{\rm kg} \,{\rm f}$ $p_{\rm m} = 500 \,{\rm kg} {\rm f} / {\rm mm}^2$ $R = 5 \,{\rm mm}$

5.4 実 験

前述の理論の妥当性を検討するため近接量について実測値と理論値の比較を行

-110-

う。なお、実験方法、実験装置は第1編第1章の1.3.1と同一である。

5.4.1 突起が弾性変形する場合

試験球としては 4.4.2 と同一のプラスチックボールを用い,平板試験片と としては研摩布仕上げによる種々の表面粗さを有する鋼板を用いる。

測定結果を図1.5.20~図1.5.24 に示す。



いずれの図も理論と実験結果の絶 対値はかなり良好な一致を示して いるが,荷重の増加に対する近接 量の増加増合を見ると,実測値は 理論値より少し低い傾向が見られ る。これはプラスチックボールの 粘弾性効果が生じたためと考えら れる。球となめらかな平面間の接 触では 図 1.4.18 のようにこの効



 $R_a = 0.55 \,\mu m$ $R = 5 \,mm$

果がわずかしか表れていなかったが,図1.5.20 ~ 図1.5.24 の場合には接触突 起部が 図 1.4.18 より高ひずみの接触状態になっているため、この効果が大きく 表れたものと思われる。

5.4.2 突起が塑性変形する場合

試験球は前章 4.4.1 と同一で, 平板試験片は S 35 C を研摩布仕上げした ものを用いる。なお平板試験片のマイクロビッカース硬さ(50 gf)は H,= 250

-112-



図 1.5.25 押付け実験による履歴曲線 $\sigma_{\rm p} = 0.9 \,\mu{\rm m}$ $R = 5 \, \text{mm}$ $\beta = 0.02 \text{mm} \text{ p}_{\text{m}} = 250 \text{ kgf/mm}^2$ $n_{\rm p} = 34 \, {\rm mm}^{-1}$



理論値

実測値

2

である。図1.5.25,図1.5.26 に実験結果と理論値を示す。丸印の実測値は5回の測定の平均値,すなわち10箇所の接触における平均値を表す。いずれの結果 も負荷過程,除荷過程ともに理論値と実測値のかなりの一致をみており,本理論の妥当性が確かめられたものと考えられる。

5.5 考 察

突起が弾性変形する場合と塑性変形する場合に分けて解析を行ったが、この両 者の理論の選択基準,母材の変形を常に弾性変形として解析したことによる本理 論の適用限界,Z_{op}を確定量として扱う場合とランダム量として扱う場合の相違, 以上の3点について考察を試みる。

5.5.1 突起の変形形態に関する判定基準

前章 4.5.1 では Greenwood 理論との対比という形で大まかな検討を行っただけであるので、ここでは詳細に検討を試みる。

塑性指標を決定する基準としては,真実接触面積中に占める塑性変形部の接触 面積の割合を基準とする考え方と,全負荷中に占める塑性接触突起の負荷の割合 を基準とする二通りの考え方がある。第1編第4章で示したような面積比を基準 とする方式は接触理論を接触電気抵抗,熱伝導,摩耗等の問題に適用する場合の ように接触面積が重要な意味を持つ場合には適しているが。食込み位置,近接量, および第2編で取扱う転がり摩擦力等の問題を解析するには,荷重比を基準に考 える方式の方が適している。ここでは,塑性変形突起と弾性変形突起とが混在し ている状態における接触変形の解析を行い,全塑性変形突起および全弾性変形突 起それぞれで受けもつ荷重の比を求める。そしてその結果をもとに,荷重比を基 準にした塑性指標を決定する。

また, Greenwood の plasticity index¹⁸⁾ と比較するため面積比の観点からみた 塑性指標についての解析も試みる。

接触突起内部の最大せん断応力を tmax とすると、 tmax は弾性理論から求めう

-113-

るが比較的面倒な計算を要す。し
かし、これについては既に数値計
算結果¹⁹⁾(図 1.5.27)が示されてお
り、この結果を次式で近似する。
$$0 < \frac{a}{b} \le 0.6$$

 $O = 0.6$
 $O = 0.6$

 $\frac{\tau_{max}}{p_{max}} = -0.2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.17 \left(\frac{a}{b}\right) + 0.3$ (1.5.41)

ここで 2*a*, 2*b* は各接触突起の接触面で形成されるだ円の短径と長径。 *P_{max}* はだ円面上の分布圧力の最大値で次式で求まる。

$$p_{max} = \frac{3W_a}{2\pi ab}$$
(1.5.42)

Wa:単一接触突起に作用する荷重

式 (1.5.26)を用いると W_a は突起の近接量 α_a の関数として表され, abも 式 (1.5.29) に示すように球の半径 R, 突起の半径 β , および α_a で表されるた め p_{max} はこれらの変数の関数となる。また, a/b も式 (1.1.8)を用いると媒介変 数 k で表されるが, この k は式 (1.1.11) および式 (1.1.12) から明らかなように 接触 2 物体の幾何学的形状 (すなわち $r_x R$, $r_y R$, β) と弾性定数 Eの関数である。 それらの関数を式 (1.5.41) に代入すると τ_{max} と α_a の関係は次式で表される。

$$\tau_{max} = 1.5 \{ -0.2 (1 - k^2) + 0.17 (1 - k^2)^{\frac{1}{2}} + 0.3 \} Q_a A_s^{-1} \alpha_a^{\frac{1}{2}}$$
$$= T_\tau (r_x R, r_y R, \beta, E) \alpha_a^{\frac{1}{2}} \succeq \ddagger \zeta \qquad (1.5.43)$$

ててで

 $T_r: k, Q_a, A_s^{-1}$ の関数, すなわち $r_a R, r_y R, eta, E$ の関数

$$\tau_{max} \ge k_c \, p_m \tag{1.5.44}$$

のとき突起は塑性変形すると仮定すると、そのときの突起の近接量 *a*_{cr} (臨界近接量と呼ぶ)は式(1.5.43)および式(1.5.44)を用いると次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\alpha}_{cr} = \left(\frac{k_c \, \boldsymbol{p}_m}{T_\tau}\right)^2 \tag{1.5.45}$$

(1) 荷重比基準 方向性のある表面粗さを有する平面と球の接触において, 塑性接触状態にある突起が受け持つ全荷重 W, と弾性接触状態にある突起が受け 持つ全荷重 W, の割合を式(1.5.44)を用いて求める。

解析手順はこれまでの解析と同一のため概略だけ示す。

いま,母材の弾性変形後の平面に対する球の相対的曲率半径を *r_xR*, *r_yR* とし, 球が表面粗さ突起頂点の平均高さを基準高さとして *Z_{op}* の位置まで食込んだ場合, 平面が支える荷重の期待値は次式で与えられる。

$$W = 2 Q_a n_p \int_0^{x_{max}} \int_{h(x, z_{op}) + a_{cr}}^{h(x, z_{op}) + a_{cr}} \{ z - h(x, z_{op}) \}^{\frac{3}{2}} f(z) dz dx$$

+ 2 E R² n_p $\int_0^{x_{max}} \int_{h(x, z_{op}) + a_{cr}}^{z_{max}} g\{ z - h(x, z_{op}), p_m, \beta, E, \tau_x R, \tau_y R \} f(z) dz dx$
= W_e + W_p (1.5.46)

ただし

$$h(x) = Z_{op} + \frac{x^2}{2R\gamma_x}$$

第1項は弾性変形突起で受けもつ荷重で,第2項は塑性変形突起で受けもつ荷 重を表す。なお関数 g は式(1.5.26)と同一であり, Q は式(1.5.9)と同一で ある。

式(1.5.46)を満足するような Zopを求めると圧力分布は次式で求まる。

$$p(x,y) = \frac{3n_p}{4K^3} \int_h^{h+\alpha_{cr}} \left\{ K^2 Q_a^{\frac{2}{3}} (z-h) - y^2 \right\} f(z) dz + 2 \frac{p_m \beta^{0.5} n_p}{r_y^{0.5} R^{1.5}} \int_{h+\alpha_{cr}}^{z_{max}} \left\{ 2 r_y^2 R^2 G(\frac{\alpha_a}{R}) - y^2 \right\}^{\frac{1}{2}} f(z) dz$$
(1.5.47)

圧力分布が求まると、母材の弾性変形による表面の弾性変位分布が求まり、この 変位分布が接触条件を満足するまで r_x , r_y を変化させて繰り返し計算を行えばよ い。このようにして求めた r_x , r_y を式 (1.5.46) に代入して W_p , W_e を計算し, 両者の比 R_W (= W_p/W_e) を求めた結果の数例を図 1.5.28, 図 1.5.29, 図 1.5.30 に示す。なお、これらの図は図 1.5.30 の一部以外は $k_e = \frac{1}{6}$ として計算したもの

-115-





図 1.5.29 σ_p と荷重分担比の関係 $R = 5 \text{ mm} p_m = 1000 \text{ kg}^{\text{f}}/\text{mm}^2$ $\sigma_p n_p^2 = 1.1 \text{ mm}^{-1} K_c = 1/6$

である。以上の図から R_W に及ぼす影響としては p_m, σ_p, β の影響が大で, n_p, W はあまり影響を及 ぼさないことがわかる。また p_m, β 大なるほど R_W が小で, σ_p 大なるほど R_W が大になることがわか る。この他, n_p や kの値を変化させた場合につい ても R_W を求め, それらの結果を総合すると

 $\sigma_{p}^{*0.5} \beta^{*-0.5} n_{p}^{*-0.1} p_{m}^{*-1.25} W^{*0.05} = 33.4 R_{W}^{0.2} k_{c}$ (1.5.48)

なる近似式が下記の領域内では ±15% 以内の誤 差で成立することがわかる。

> $\sigma_{p}^{*} n_{p}^{*2} = 2.75 \sim 11.0 \qquad W^{*} = 10^{-10} \sim 10^{-7}$ $\sigma_{p}^{*} = 10^{-5} \sim 10^{-3} \qquad \beta^{*} = 5 \times 10^{-3} \sim 2 \times 10^{-1}$ $p_{m}^{*} = 3 \times 10^{-3} \sim 10^{-2} \qquad R_{W} = 0.1 \sim 10$ $k_{c} = \frac{1}{6} \sim \frac{1}{2}$ -116^{-1}



図 1.5.30 $\sigma_p \ge R_w \oslash \emptyset係$ $\beta = 0.1 \text{ mm}$ R=5 mm $p_m = 500 \text{ kgf/mm}^2 \text{ k}_c = 1/6$ $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$

(1.5.49)

つぎに k_eを決定する。 D. Tabor²⁰⁾ によるとなめらかな平面と球の接触では内 部の最大せん断応力がトレスカの降伏条件

$$P_{av} = 1.1 Y$$
 (1.5.51)

となり、さらに荷重を増加させ平均面圧が

$$P_{av} = 3 Y$$
 (1.5.52)

になると塑性変形は接触域全域に拡がることが明らかになっている²⁰⁾。 この式(1.5.52)の時点での *Pao* は材料の流れ圧力 *Pm* に等しいので,結局

$$\tau_{max} = \frac{1}{6} p_m \tag{1.5.53}$$

のとき塑性変形開始し,

$$\tau_{max} = 0.45 \ p_m$$
 (1.5.54)

のとき完全な塑性変形状態になる。そこでんの値としてはこの中間の

$$k_c = 0.3$$
 (1.5.55)

にとる。塑性変形突起で主たる荷重を支える状態として、

$$R_{W} \ge 10 \tag{1.5.56}$$

反対に弾性変形突起で主たる荷重を支える状態として、

$$R_{\rm W} \le 0.1$$
 (1.5.57)

と定義すると式(1.5.48),(1.5.55),(1.5.56),(1.5.57)から接触状態の区分 条件として次式が得られる。なお,式(1.5.48)の左辺を 𝔎 とおく。

塑性接触状態 ($R_W \ge 10$)

$$\varphi_{W} = \sigma_{p}^{*0.5} \beta^{*-0.5} p_{m}^{*-1.25} n_{p}^{*-0.1} W^{*0.05} \ge 15.9 \qquad (1.5.58)$$

-117-

弹性接触状態 ($R_{W} \leq 0.1$)

$$\varphi_{W} \leq 6.3 \tag{1.5.59}$$

いま一例として下記の接触条件で

$$\begin{pmatrix} \sigma_p = 1 \ \mu m & E_1 = E_2 = 21000 \ kgf \cdot mm^{-2} & \\ n_p = 33 \ mm^{-1} & \nu_1 = \nu_2 = 0.3 \\ \beta = 0.05 \ mm & W = 1 \ kgf & p_m = 500 \ kgf \cdot mm^{-2} \end{pmatrix}$$

式(1.5.48)の左辺を計算すると φ_W は 22 となり塑性接触していることがわかる。なお第1編第4章,第2編第1章中,塑性接触理論の検証実験に用いた試料はすべて式(1.5.58)の塑性接触条件を満足していることが確認できる。

また,式(1.5.58),(1.5.59)を Greenwood の理論¹⁸⁾の plasticity index φ_p と同一の式に書き改めると

$$\varphi_s = \left(\frac{a_p}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{E}{2p_m} = \frac{33.4}{2\pi} p_m^{*0.25} n_p^{*0.1} W^{*-0.05} R_W^{0.2} k_c \qquad (1.5.59)$$

ここで β は球と平面の接触における塑性指標。

 p_m^*, n_b^*, W^* として前述の計算例を用いると接触状態の区分条件は下記のように 表される。

塑性接触状態 $(R_W \ge 10)$ $\varphi_s \ge 3.0$ (1.5.60) 弾性接触状態 $(R_W \le 0.1)$ $\varphi_s \le 1.2$

なお,式(1.5.59)の右辺は p_m^* , n_s^* , W^* の関数ではあるが指数部が小なるため, 式(1.5.60)の関係は一般の接触条件についても近似的に成立すると考えられる。

(2) 面積比基準 弾性接触状態における真実接触面積は式(1.5.38)で表される。一方,全接触突起の内の一部が塑性変形し,その接触面積を A^{*},塑性変形 部で支える荷重を W^{*},とすると幾何学的考察により次式が成立する。

$$A_{p}^{*} = \frac{W_{p}^{*}}{\dot{p}_{m}^{*}\pi} \tag{1.5.61}$$

いま,無次元化表示した全接触面積を A*とし,

$$\frac{A_{p}^{*}}{A_{r}^{*}} = \frac{A_{p}^{*}}{A_{e}^{*}} = R_{A}$$
(1.5.62)

-118-

とおくと式 (1.5.38), (1.5.61), (1.5.62) から

$$R_{A}^{1.25} = 0.0365 \, \sigma_{p}^{*0.5} \beta^{*-0.52} n_{p}^{-0.12} p_{m}^{*-1.25} W^{*0.062} \left(\frac{R_{W}}{1+R_{W}}\right)^{1.25}$$
(1.5.63)

上式が求まる。この式の右辺に式(1.5.48)を代入すると、

$$R_A^{1.25} = 1.22 R_W^{0.2} k_c \left(\frac{R_W}{1+R_W}\right)^{1.25} B_R \tag{1.5.64}$$

ただし

$$B_{R} = \beta^{*^{-0.025}} n_{p}^{*^{-0.025}} W^{*^{0.012}}$$

ここで k_a は式 (1.5.55) 同様 0.3 にとる。 B_R は β^* , n_b^* , W^* が変化してもほぼ一 定であるので β^* , n_b^* , W^* の値としてそれぞれ式 (1.5.49) に示した領域の中間の 値で代表させて,これらの値を式 (1.5.64) に代入すると図 1.5.31 に示すよう な R_W と R_A の関係が求まる。ただし、前述の計算には塑性変形突起が存在してい る状態にもかかわらず,全接触面積を弾性接触理論から推定するという便法を用 いているため、図中 R_W 大なる領域では R_W に対する R_A の値が実際より小なる 値になっている。



図 1.5.31 Rw と RA の関係

5.5.2 母材の塑性変形開始条件について

前章 4.5.2 と同様の解析で母材内部の最大せん断応力を求める。すなわち 式(1.4.42) と式(1.4.43) に式(1.5.15),あるいは式(1.5.31)の圧力分布を 代入すると *τ_{max}* が求まる。ただし、方向性のある面の場合には接触圧力分布も方 向性を有するが、相当圧力として *x* 方向と *y* 方向の 2 方向圧力の平均値で代表さ せそれを用いて *τ_{max}* を概算する。

図 1.5.32 に突起が弾性変形する場合の最大 せん断応力を示す。表面粗さが大なるほど τ_{max} が低下し、粗さが小になるにつれヘルツ理論か ら求めた τ_{max} の値に近づくのは前章 4.5.2 と同 様の傾向である。ところで本章 5.5.1 の考察 を用いて、大半の接触突起の変形が弾性接触と 考えられる臨界の流れ圧力 p_{mc} を求めてみる。 式 (1.5.48) と式 (1.5.59) を用いると p_{mc} は 次式で求まる。

 $p_{mc}^{*} = 0.23 \sigma_{p}^{*0.4} \beta^{*-0.4} n_{p}^{*-0.08} W^{*0.04}$



(1.5.65)

上式の計算結果の一例を図 1.5.32 に点線で示す。 p_{mc}^{*} と τ_{max}^{*} を比べると p_{mc}^{*} は τ_{max}^{*} より 2 桁程度高い値になることがわかる。材質が均質な場合には式 (1.5.53) から推定されるように、材料のせん断降伏応力は $\frac{1}{6}$ p_m と考えられるが、一般の機 械加工面は加工硬化のため表面層の p_m が母材のそれよりかなり大になっている。 これを考慮に入れてかりに材断のせん断応力を $\frac{1}{10}$ p_m と考えても、母材の塑性変 形開始条件よりも突起の塑性変形開始条件の方が p_m に関しては 1 桁近く厳しい ことになり、突起の弾性接触状態で母材が塑性変形することはほとんど考慮する 必要がないことがわかる。

図 1.5.33 ~ 図 1.5.35 に突起が塑性変形する場合の最大せん断応力 τ_{max} と、 それが生じる深さ h_{τ} に関する計算結果を示す。

-120-



定性的には弾性接触の場合と同様で、 σ_p 大なるほど τ_{max} は低下する。また、 p_m, n_p, β 小なるほど τ_{max} も低下するが、これらの因子の影響は q_p のそれに比べ かなり小さいことがわかる。

母材の変形を弾性変形と想定している本理論の適用範囲は 4.5.2 で述べたよう に 図 1.5.33 の τ_{max} が材料の降伏せん断応力の約 2 倍を超えない範囲と考えられ る。なお、 図 1.5.25、 図 1.5.26 の実験については、実験条件が 図 1.5.33 の斜線 内にあり母材の塑性変形は無視できると思われる。

5.5.3 Zop が確定量の場合とランダム量の場合との相違

前章4.5.4と同様,本理論のように Zop を確定量として扱う場合と,近接 量測定実験に見られるように Zop がランダム量である場合とで荷重と接触高さの 間の関係に生じる相違を検討する。

-121-

 Z_{op} をランダム量とする場合の \overline{Z}_{op} とWの関係を求めるシミュレーション計算 手順は図 1.3.30 と同一で、 Z_{op} を確定量とする場合の Z_{op} と \overline{W} の関係を求める 計算手順は図 1.3.30 の内側ループのかわりに、単に各接触突起に作用する荷重 の総和(ΣW_a)を求める式が入ったものになる。

(1) 突起が弾性変形する場合

 $W \ge \overline{Z}_{op}/o_p$ の関係および $\overline{W} \ge$ Z_{op}/σ_p の関係についての数値計算 結果を図 1.5.36 に示す。荷重大 なる領域では \overline{Z}_{op} と Z_{op} とはほぼ 50 一致しているが荷重小なる領域で は Zop が Zop より大になり、荷重小 なるほど両者の差は大になる。こ の傾向は前章 4.5.4 にも見られた が定性的には以下のように理解できる。 ₩を求める計算は式(1.5.10)に見られるよ うに、個々の突起に作用するランダムな負荷 の和の分布の期待値を求めていることになる。 荷重大なるほど接触突起数が増えるため大数 定理よりランダム変数の和の分布の分散は減 少する。すなわち、任意の Zop に対し Wはほ ば一定になり、Wを確定量(Zopをランダム 量)とする場合とWをランダム量(Zop を確 定量)とする場合の差が少なくなる。

いま,同一荷重時における Z_{op} と Z_{op} の差 が 0.2 op 以下の場合に Z_{op} を Z_{op} で近似でき るものとし,その臨界荷重 W₂ を図 1.5.36の

-122-



図 1.5.36 Z_{op} ガランダム量の場合と Z_{op} が確定量の場合の比較 β=0.1mm R=5mm n_p=120 mm⁻¹ E₁=E₂=21000 kgf/mm²



ように各種接触条件について求めた。その結果を図1.5.37に示す。

 σ_p 大なるほど n_p 小なるほど W_z は増加している。また、 $\beta \ge W_z$ の関係は図中に示していないが W_z は $\beta^{\frac{1}{2}}$ にほぼ比例する。

5.4.1 の近接量測定実験の場合,図1.5.20 ~ 図1.5.24 における荷重0.1 kgf が図1.5.37 の約23 kgf に相当するため,実験荷重はWaより大なる領域が大半 を占め実験と理論の設定の相違はほとんど問題にしなくてよい。

(2) 突起が塑性変形する場合

この場合も,接触突起の近接量と 荷重の関係式が異なるだけで弾性接触の 場合と同様の手順で W_2 が求まる。その 結果を図1.5.38 に示す。 σ_p 大なるほど, また p_m や β が大なるほど W_2 も大にな る傾向が見られる。なお,これらの因子 のうち p_m , β の W_2 に及ぼす影響は比較 的小さく, W_2 はほとんど σ_p で決定され ることがわかる。

近接量測定実験についても 図 1.5.25, 図 1.5.26 における荷重条件のほとんどが 図 1.5.38 の W₂ より大なるため, Zop



図 1.5.38 $\sigma_p \geq W_z \odot$ 関係 $n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}} \text{mm}^{-1} \quad R = 5 \text{ mm}$ $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$

の設定の相違は近接量にほとんど影響を及ぼさないと考えられる。

5.6 結 言

一方向に方向性があり,頂点高さがランダムであるような表面粗さを有する平 面と球の接触変形問題について,第1編第1章で示した単一突起の変形の解析結 果と第1編第4章で検討した母材の変形の2次曲面近似解法を用いて解析を試み た。 突起の変形としてはこれまで同様,突起が塑性変形する場合と弾性変形する場 合に分けて扱い,突起が塑性変形する場合には負荷過程のみならず,転がり接触 を考えるための基礎として除荷過程についても解析を試みた。

これらの数値計算結果と近接量測定結果との比較により,理論の妥当性が確か められたほか,以下のことが明らかになった。

1) 突起が弾性変形する場合

食込み位置,真実接触面積,圧力分布等が理論的に推定でき,これらの諸量 は突起頂点高さの標準偏差のの値に最も大きく左右され,の大なるほど食込み 位置は高くなり,真実接触面積および最大圧力は減少する。

2) 突起が塑性変形する場合

材料の流れ圧力や突起の曲率半径等が食込み位置に及ぼす影響はこれらが突 起の塑性および弾性変形量に及ぼす影響が相殺されることによりかなり小さく なり、食込み位置は ω、荷重、球の半径だけでほぼ決定される。

3)除荷過程の接触変形についてはgが大なるほど母材の弾性回復量は減少する が、それ以上に突起の弾性回復量が増加するため結果的には回復量は増加する。

- 4) 塑性変形突起と弾性変形突起が混在する状態での接触変形を解析し、塑性接触部と弾性接触部で受け持つ荷重の分担比を計算することにより、荷重比基準の新しい塑性指標を定式化できた。
- 5) 母材内部の最大せん断応力を算出することにより本理論の適用範囲が定まった。また、突起の弾性接触状態で母材が塑性変形する可能性はほとんどない。

参考 文献

- 1) 石垣,川口: 精密機械,44,11(1978)1341.
- 2) 築添: 精密機械, 37, 5(1971) 344.
- 3) 築添: 日本機械学会論文集, 41, 346 (1975) 1909.
- 4) 久門: 日本機械学会論文集, 38, 315(1972) 2945.
- 5) T.Tsukada and Y.Anno: Bull. Japan Soc. of Prec. Engg., 11, 4 (1977) 207.
- 6) P.Barkan and E.J.Tuohy: Trans. IEEE, Pas-84, (1965) 1132.
- 7) J.A.Greenwood and J.H.Tripp: Trans. ASME Ser. E, 34, 2 (1967) 153.
- J.Halling and M.EI-Refaie: Proc. Instn. Mech. Engrs., 183 (3P) (1968/69) 116.
- 9) K.A.Nuri: Wear, 30, 3 (1974) 321.
- 10) 渡辺,石垣,川口:昭和50年度精機学会春季全国大会前刷集,(1975)147.
- 11) A.E.H.Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York (1944) 193.
- 12) T.E.Tallian and J.I.McCool: Wear, 17, 5/6 (1971) 447.
- 13) T.E.Tallian: Wear, 17, 5/6 (1971) 463.
- 14) T.E.Tallian: Wear, 21, 1 (1972) 49.
- 15) B.Michau, D.Berthe and M.Godet: Wear, 28, 2 (1974) 187.
- 16) 石橋: 潤 滑, 19, 2(1974) 146.
- R.L.Leibensperger and T.M.Brittain: Trans. ASME Ser. F., 93, (1973) 277.
- 18) J.A.Greenwood and J.B.P.Williamson: Proc. Roy. Soc. Ser. A, 295, (1966) 300.
- 19) T.A.Harris: Rolling Bearing Analysis, John Wiley & Sons Inc., New York, (1966) 132.
- 20) D.Tabor: The Hardness of Metals, Oxford, (1951) 50.

-125-
第 2 編

接触理論の工学的応用

第 1 章 転がり抵抗に及ぼす表面 粗さの影響

1.1 緒 言

本章ではこれまで述べてきた粗面と球面の接触理論の応用の一例として転がり 抵抗に及ぼす表面粗さの影響について論ずる。ここで述べる転がり抵抗とは球が 平面上を転がるときの抵抗力全般を指し、大別してつぎの2成分からなる。すな わち、1)転がりの向きに対し常に反対の向きに作用しエネルギー損失を伴うい わゆる転がり摩擦力、2)転がり中平面の幾何学的不規則性のため球に作用する 水平力で、転がり方向に対しその時々で正負方向に働き、エネルギー損失を伴わ ない抵抗力である。

物理的な観点からは 1)の転がり摩擦力成分が重要な意味をもつが,工業的観 点からは 1),2)を含めた転がり抵抗の変動成分も重要な問題と考えられる。 そこで本章では転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響と,転がり抵抗の変動 に及ぼす表面粗さの影響とを分けて,それぞれについて理論的考察を試みる。

1.2 転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響

表面粗さが転がり摩擦に影響を及ぼすことは実験的にはかなり報告^{1~4)}されているが、この機構に関する理論的考察は少なく、多角柱近似⁵⁾、凝着による転がり摩擦と表面粗さの関係等の解析⁶⁾が見られる程度である。

なめらかな平面と球の転がりにおける転がり摩擦力の発生機構についてこれまでに、1) O. Reynolds の微小すべり説⁷⁰, 2) H.L. Heathcote の差動すべり説⁸⁰, 3) G.A. Tomlinson の凝着説⁹⁰, 4) 履歴損失説¹⁰⁰ などの仮説が立てられたが, 前三者はいずれも平面と球の場合のような両転がり素子の曲率半径の差が大きい 場合には転がり摩擦発生の主因とは成り得ないことがこれまでに明らかにされて いる。これらのうち 1),2) は平面が粗面に代わっても転がり摩擦に対する影響

-127-

がとくに大きくなる因子を持たないので否定されうる。 3)の凝着説については 相面の場合真実接触面積の変化,真実接触面での圧力増加などのために平面が粗 面になることによって何らかの影響を与えることは充分考えられるが,その大き さがきわめて軽負荷の場合を除いて,4)の履歴損失に比べて小さいのでここで は一応これを無視して履歴損失のみに着目して解析を行う。そして実験結果との 比較検討に際して凝着による影響が小なることを確認する。履歴損失説は転がり 摩擦力発生機構として最も有力視されている説であるが,表面粗さの影響を説明 できない点をこの説の問題点の一つとして挙げている例¹¹⁾もあり,表面粗さとの 関係についてはこれまでのところ明確にされていない。しかし履歴損失は次のよ うにして表面粗さの転がり摩擦に対する影響の主因子となることが考えられる。 すなわち,前編で述べてきたところから明らかなように、1)表面粗さを形成し ている突起そのものの変形の履歴損失,2)表面の突起を介して接触することに より母材の弾性変形の状態が変化してそれに伴う履歴損失が変化するなどである。

本節では上記の仮説にしたがって表面粗さの転がり摩擦に対する影響を論ずる が、この場合接触時の変形形態が問題になる。通常履歴損失説は弾性履歴損失を 意味していると考えられるが、粗平面と球の接触においては第1編5.5.1で述べ たように接触条件にしたがって種々な場合が考えられる。本研究ではならし運転 後の接触状態に相当する弾性接触状態はもちろん、処女面転がりを想定して接触 突起が塑性変形する塑性接触状態についても解析を試みる。なお表面粗さとして は第1編第5章で扱ったような方向性のある粗さを想定する。すなわち弾性接触 の場合は第1編5.2.1の解析をそのまま利用し、塑性接触の場合は第1編5.2.2 の負荷過程および除荷過程の解析を応用して転がり接触時の変形を解析し、それ をもとにして摩擦力の推定を行う。

なお,いづれの場合も表面粗さ条痕と直角の方向に転がすことを想定して解析 する。

-128-

1.2.1 全接触突起が弾性変形する場合¹²⁰

1.2.1.1 理 論

弾性履歴損失説¹⁰⁾によると平面と球の転がり摩擦力は

$$F = \alpha_l \Phi$$

(2:1.1)

で与えられる。ここでのは単位距離転がり中の転がり前面部での入力エネルギー, α,は弾性履歴損失係数である。

そこで本研究ではこの**の**を表面の突起の変形および母材の変形を考慮して解析 する。**α**₁についてはこれまでいくつかの研究がなされ、ゴムやプラスチック等の 高分子材料の場合には応力状態によらず一定であることが報告^{10,13)}されている。 金属の場合には種々の説¹⁴⁾があるが、最近では応力の2乗にほぼ比例することが 報告¹⁵⁾されている。本研究では**α**₁を応力にかかわらず一定と考えて解析を行い、 その検証実験には高分子材料を用いた。→^{転がり方向}

転がり接触状態を図 2.1.1 に模式的に 示す。

x軸を転がり方向に、 x 軸を x 軸と垂 直に任意の位置にとる。

球の中心軸が λ の位置にあるとき、球



図 2.1.1 転がり接触状態

が単位距離転がる間に転がり前面部でなされる仕事 ØR は次式で表される。

$$\boldsymbol{\Phi}_{R} = \int_{\lambda}^{\lambda + x_{max}} W_{x} (x') \, \delta w (x') \, dx' \qquad (2.1.2)$$

ここで W_x(x'): x' 点での単位幅あたりの分布荷重

 x_{max} : x 方向接触域

 $\delta w(x')$ は、単位距離転がる間に x = x'の位置の球面上の1点で生じるz方向変位で、球と平面の母材の変形による変位量 $w_m(x')$ と突起の変形による変位量 $w_a(x')$ の和

$$w(x') = w_a(x') + w_m(x')$$
(2.1.3)



図 2.1.2 母材の変形と突起の変形

の増分として与えられる。 $w_a(x')$ および $w_m(x')$ は $\boxtimes 2.1.2(a)(b)$ に示すよう な幾何学的関係からそれぞれ次式で表される。

$$w_{a}(x') = z - \frac{(x'-x_{i})^{2}}{2\beta} - \frac{(x'-\lambda)^{2}}{2R\gamma_{x}} - \frac{y^{2}}{2R\gamma_{y}} - Z_{op} \qquad (2.1.4)$$

$$w_m(x') = \frac{(x'-\lambda)^2}{2R\,r_x} + \frac{y^2}{2R\,r_y} + w_m(0) - \frac{(x'-\lambda)^2 + y^2}{2R}$$
(2.1.5)

ただし, *r_x R*, *r_y R* は母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径, *Z_o* は接触高さ, *x_i* は突起中心線の *x* 座標, *z* は突起頂点高さ, *β* は突起先端曲率半径を表す。

よって

$$\delta w(x') = \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ w_a(x') + w_m(x') \} = \frac{x' - \lambda}{R}$$
(2.1.6)

式(2.1.6)を式(2.1.2)に代入すると単位距離転がり中転がり前方でなされる 仕事 **の** は次式で表される。

$$\boldsymbol{\Phi}_{R} = \frac{1}{R} \int_{\lambda}^{\boldsymbol{x}_{max} + \lambda} W_{\boldsymbol{x}} \left(\boldsymbol{x}' \right) \left(\boldsymbol{x}' - \lambda \right) \, d\boldsymbol{x}' \tag{2.1.7}$$

突起が弾性変形する場合の分布荷重 W_x (x') は式 (1.5.9) を用いると次式で表される。なお 𝔥 は突起密度で Q₂ は式 (1.5.9) の場合と同じ定数。

$$W_{x}(x') = Q_{a} n_{p} \int_{z_{op}+\frac{(x'-\lambda)^{2}}{2(r_{x}R+\beta)}}^{z_{max}} \left\{ z - Z_{op} - \frac{(x'-\lambda)^{2}}{2(r_{x}R+\beta)} \right\}^{\frac{3}{2}} f(z) dz \quad (2.1.8)$$

式 (2.1.8) を式 (2.1.7) に代入すると \mathcal{O}_{R} が求まる。

一方,なめらかな平面と球の接触における入力仕事(**の**とおく)はヘルツ理論 を用いて次式のように表される。

$$\boldsymbol{\Phi}_{s} = \frac{3}{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{W^{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}} \left\{ \frac{1-\nu_{1}^{2}}{E_{1}} + \frac{1-\nu_{2}^{2}}{E_{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}$$
(2.1.9)

よって、転がり摩擦力が入力仕事に比例すると考えると転がり摩擦力に及ぼす表 面粗さの影響が次式で表される。

$$\frac{F_r}{F_s} = \frac{\Phi_R}{\Phi_s} \tag{2.1.10}$$

ここで F, は粗い面の接触における摩擦力を, また F, はなめらかな面の接触における摩擦力を表す。

1.2.1.2 数值計算結果

突起頂点高さの標準偏差 ኇと入力仕事 𝗞 の関係を図 2.1.3 に示す。 ኇ大 なるほど入力仕事 𝔩 も増加しており,なめらかな面の場合の入力仕事 𝔩 との隔 りは荷重が大なるほど小になる傾向を示している。この傾向は φ 大なるほど転がり摩 擦力が大になるが,荷重が大になるとこの表面粗さの影響は減少することを意味する。

図 2.1.4 に β , n_p と \mathcal{O}_R の関係を示す。この図から β , n_p は \mathcal{O}_R にあまり影響 を及ぼさないことがわかる。





図 2.1.4 n_p , $\beta \ge \mathcal{O}_R \mathcal{O}$ 関係 R = 5 mm $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$ $W = 1 \text{ kgf} \sigma_p = 1 \mu \text{m}$

1.2.1.3 実 験

前述の理論の妥当性を検討するため、なめらかな面の場合の転がり摩擦力 と粗い面の場合の転がり摩擦力を測定し、両者の比と式(2.1.10)を用いて求め た理論値との比較を試みる。

(1) 実 験 装 置

実験に用いた転がり摩擦力測定装置を図 2.1.5 に示す。下部試験片として 表面粗さ試験片を取り付ける。

上部試験片,および球(R=5mm)の材質はSUJ2(マイクロビッカース硬さ H_{σ} =1000)で表面粗さはい ずれも $R_{max} < 0.1 \mu m$ である。 垂直荷重は上部試験片上に重 錘を直接置くことにより与え られる。この上部試験片を平 行板バネを介してフォークで



図2.1.5 転がり摩擦測定装置(軽荷重用)

前後に動かせ試料球を転がらせる。フォークは送りテーブルと一体になっていて ベルトを介して同期モータにより 0.1 mm/s の速度で駆動される。このとき、転 がり抵抗に応じて平行板バネに生じるひずみをひずみゲージで測定し、転がり抵 抗に換算する。なお図 2.1.5 では省略しているが、上部試験片とフォークの間に オイルダンパを並列に設け、転がり抵抗の変動による振動を防止し、また装置全 体を除震台の上に置くことにより外部の振動の影響を防止している。

平行板バネで測定される転がり抵抗の中には、常に転がりの向きに逆に作用す る転がり摩擦力のほかに、球が突起を乗り越えたり変形させたりするのに要す るいわゆるポテンシャル的抵抗が含まれる。

そこで図 2.1.6 に示すようにフォークが前進する場合の抵抗力 Ff と後退する

-132-

時の抵抗力 Fa を測定し、この抵抗の差を求めることによりポテンシャル成分の除去をはかる。すなわち、



$$F_{f} = -F_{rf} + F_{Rf}$$

$$(2.1.11)$$

$$\sigma_{p} = 2.0 \,\mu m \quad W = 100 \,\text{gf}$$

$$F_{b} = F_{rb} + F_{Rb}$$

ここで F_{rf}, F_{re}: 前進時と後退時において常に転がり方向と反対の方向に働く 転がり摩擦力

 F_{Rf}, F_{Rb} : 前進時と後退時において作用するポテンシャル力成分 弾性接触状態においては

$$F_{rf} = F_{rb}$$
$$F_{Rf} = F_{Rb}$$

であるから

$$F_{rf} = F_{rb} = \frac{1}{2} (F_b - F_f)$$
(2.1.12)

が求める摩擦力となる。なお上部試験片と球との接触部の転がり摩擦力は下部試 験片のそれに比べ無視できる。また転がり方向は表面粗さの条痕に対し直角な方 向である。



-133-

中で1時間保持し表面粗さを転写した。塩化ビニールの表面粗さの一例を図1.2. 7に示す。

(3) 実験結果

なめらかな面 (R_a = 0.12 μm)の場合の転がり摩擦力と粗い面の転がり摩 擦力の比について実測値と理論値の比較を行った結果を 図 2.1.8 ~ 図 2.1.10 に



示す。いずれの結果も定性的には理論値 とよく似た傾向を示している。定量的に もかなりの一致を示しているが、荷重小 なる場合(W = 25 gf)に実測値が理論 値より少し低めに、また逆に荷重大なる 場合(W = 100 gf)に実測値が少し高 めに出ている。



 $\mathbf{E} = 225 \, \mathrm{kg} \mathrm{f/mm}^2$

1.2.1.4 考 察

(1) 理論値と実測値の差について

この原因としては凝着摩擦の影響や材料の粘弾性効果が考えられる。いま 各接触突起凝着力が真実接触面積に比例すると設定した場合の凝着力による転が り摩擦力 Fad と表面粗さの関係を式(1.5.23)を用いて次式のように概算してみ る。

$$\frac{F_{ad}}{F_{ad_0}} = \frac{n_p A_s \int_0^{x_{max}} x \int_{z_{op}^+}^{z_{max}} \frac{x^2}{2(R\gamma_x + \beta)} \left\{ Z - Z_{op} - \frac{x^2}{2(R\gamma_x + \beta)} \right\} f(z) \, dz \, dx}{2 \int_0^a x \, (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx}$$
(2.1.13)

ただし, A_s は式(1.5.23) と同一の定数で, a はヘルツ理論から求まる接触域 半径, また F_{ad}, はなめらかな面の場合の凝着による転がり摩擦力。

数値計算結果の一例を図2.1.11 に示 す。この図から g 大なるほど凝着による 摩擦力は逆に低下することがわかる。表 面粗さにより凝着による転がり摩擦力が 減少することは他の文献の理論⁶⁰とも定 性的には一致している。転がり摩擦力中 に占めるこの凝着による摩擦力の割合は 低荷重になるほど増加する。そこで軽荷



重時には、本論文のような履歴損失による表面粗さの影響は凝着力により低減す ることが考えられる。また高荷重時に表面粗さの影響が本理論より顕著に表れた 原因は高分子材料の粘弾性による速度効果とも考えられる。表面粗さが大なるほ ど接触領域が拡がり、変形速度の速い領域が増加するため粘弾性効果が大になり 摩擦力も大になることが予想される。この凝着力と粘弾性効果の相反する作用を 考慮に入れると図 2.1.8 ~ 図 2.1.10 の傾向は定性的には説明がつく。これらの 効果を確認するにはさらに精度の高い測定を必要とし今後の課題として残される

-135-

が,履歴損失説で表面粗さの影響を説明する試みとしては図2.1.8 ~ 図2.1.10 程度の理論値と実験値の一致で十分と考えられる。

(2) 高分子材料の試験片材質としての妥当性

高分子材料を試験片に使用すると粘弾性効果が懸念されるが,塑性変形が 少しでも含まれることの方が弾性履歴損失説の検証実験としては問題となるので 金属材料は使用できない。また,高分子材料を用いた実験結果が,粘弾性効果を 無視し弾性接触理論をもとにしたなめらかな平面と球の転がり履歴損失理論によ く一致している報告例^{13,16)} も多い。そこで,表面粗さの影響を検討するのが目的 である本研究の場合の試験片材料として,高分子材料はあながち不適当とは考え られない。

(3) 金属材料について

金属材料の場合には損失係数がひずみエネルギー密度の関数となるため本 理論をそのまま適用することはできない。しかし、この場合も解析は複雑になる が表面粗さの影響に関する基本的な考え方は同じで、定性的には本理論と同様の 結果がでるものと考えられる。鋼材を用いた実験結果¹⁷⁰にも、荷重小なる範囲で は表面粗さの影響が顕著に表れ、表面粗さ大なるほど摩擦力が増加し、高荷重域 では表面粗さの影響が小になるという本理論の結果(図 2.1.3)と定性的によく 一致する傾向がみられる。

1.2.2 全接触突起が塑性変形する場合

1.2.2.1 理 論¹⁸⁾

突起の塑性変形履歴に起因する転がり摩擦力を求める。弾性接触の場合, 転がり前方と後方での圧力分布はほぼ対称になるため,転がり接触と静的接触と の差は無視できた。しかし塑性接触の場合には,転がり後方で発生する圧力は突 起および母材の弾性回復に起因するものであるため転がり前方の圧力に比べ低く なり,転がり接触と静的接触とはかなり異なる。そこで,まず第1編5.2で試み た負荷過程の接触理論を転がり前面の接触部に,除荷過程の接触理論を転がり後

-136-

部の接触に適用して転がり接触機構を解析する。解析にあたり設定する表面粗さ 突起の形状,分布,および突起の変形機構は第1編5.2.2と同一とする。

粗面と球の接触変形問題においては球,および平面の母材の弾性変形が球の曲 率の変化のみに置き換えられ,母材の変形後の球の曲面を二次曲面で近似しても 十分な精度が得られることは前編で明らかにしてきた通りであるが,本章のよう な転がり接触では,転がり前方と後方では接触部圧力分布の非対称性のため母材

の変形も非対称になる。そこで図 2.1.12 に示すように,母材の変 形後の球の平面に対する相対的曲 率半径として,転がり前方の x 軸 方向を r_f R,転がり後方の x 軸方 向を r_F R, y 軸方向は前方後方を通 じて一定の r_y R とかりに設定する。



図 2.1.12 転がり接触状態

いま, × 軸座標を突起頂点の平均高さにとり, 球底が Z_o, の高さまで食込んで いるとすると, 転がり前方部で全接触突起が受ける荷重 W は式(1.5.27) を用 いて次式で定まる。

$$W_{f}^{*} = n_{p}^{*} \gamma_{y}^{2} \int_{0}^{x_{max}^{*}} \int_{z_{op}^{*}+}^{\infty} \frac{x^{*2}}{z_{Tx^{R}}} g(\alpha_{a}^{*}) f(z^{*}) dz^{*} dx^{*}$$
(2.1.14)

一方,転がり後方部で受ける荷重 W4 は式(1.5.33)を用いると次式で表される。

$$W_{r}^{*} = n_{p}^{*} \gamma_{y}^{2} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} g_{r} \left(\alpha_{era}^{*} \right) U\left(\alpha_{era}^{*} \right) f\left(z^{*} \right) dz^{*} dx^{*}$$
(2.1.15)

ここで α_{era} は突起の弾性近接量を表す。これは次式のように単一突起が転がり過 程で生じた最大の弾性近接量から *x* の位置まで転がる間の弾性回復量を引いたものである。

$$\alpha_{era}^{*} = (\alpha_{a}^{*} - \alpha_{pa}^{*})_{max} - \frac{x^{*^{2}}}{2 \gamma_{y} \gamma_{r}}$$

$$= \frac{z^{*}}{\gamma_{y}} - \frac{Z_{op}^{*}}{\gamma_{y}} - G\left(\frac{z^{*}}{\gamma_{y}} - \frac{Z_{op}^{*}}{\gamma_{y}}\right) - \frac{x^{*^{2}}}{2 \gamma_{r} \gamma_{y}} \qquad (2.1.16)$$

-137-

なお, α_{pa}は突起の塑性近接量を表し, これは式(1.5.28) で示したように突起の全近接量 α_aの関数で示される。よって, 球に作用する全荷重の平均値は次式で定まる。

$$W^* = W_f^* + W_r^* \tag{2.1.17}$$

接触条件として W^* が与えられた場合,上式を満足するような Z_{op}^* を繰り返し 計算で求めればよい。接触高さ Z_{op}^* が定まると接触部のみかけの圧力分布は式 (1.5.31) および式 (1.5.37) を用いて次式で求まる。

転がり前方

$$p_{f}^{*}(x^{*}, y^{*}) = 2\beta^{*^{0.5}} p_{m}^{*} n_{p}^{*} \gamma_{y}^{-0.5} \int_{z_{op}^{*}+\frac{x^{*}^{2}}{2T_{x}}}^{\infty} \{2\gamma_{y}^{2} G(\alpha_{a}^{*}) - y^{*^{2}}\}^{\frac{1}{2}} f(z^{*}) dz^{*}$$

$$(2.1.18)$$

転がり後方

$$p_{r}^{*}(x^{*}, y^{*}) = 2\beta^{*^{0.5}} p_{m}^{*} n_{p}^{*} \tau_{y}^{-0.5} \int_{-\infty}^{\infty} \{2\gamma_{y}^{2} a_{pra}^{*} - y^{*^{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ \times U(2\gamma_{y}^{2} a_{pa}^{*} - y^{*^{2}}) f(z^{*}) dz^{*}$$
(2.1.19)

ただし、 α_{pra} は転がり後方部の接触突起における相当塑性近接量で次式に式 (2.1.16)を代入することにより求まる。

$$\boldsymbol{\alpha}_{pra}^{*} = 2 \left(\frac{\pi}{78}\right)^{2} p_{m}^{*^{-2}} \beta^{*^{-0.7}} \alpha_{era}^{*^{2}} \gamma_{y}^{0.7}$$
(2.1.20)

球および平面の母材の弾性変形の和は次式に式(2.1.18),(2.1.19)を代入す れば求まる。

$$w_m^*(x^*, y^*) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left\{ (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} p_r^*(\xi^*, \eta^*) d\xi^* + \int_{0}^{\infty} \left\{ (x^* - \xi^*)^2 + (y^* - \eta^*)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} p_f^*(\xi^*, \eta^*) d\xi^* \right\} d\eta^* \quad (2.1.21)$$

)

球および平面が上式で定まる弾性変形をした後の,球の平面に対する相対的曲率半径が最初に設定した曲率半径と一致するまで,式(2.1.15)~(2.1.21)を繰返し計算する。このようにして ア_f, ア_r, ア_y が求まると接触状態が定まり,接触面 圧力分布が計算できる。圧力分布の数値計算結果の一例を図 2.1.13 に示す。

-138-



 $\beta^* = 2 \times 10^{-2} \quad \text{W}^* = 10^{-6}$ $n_p^* = 200 \qquad p_m^* = 5 \times 10^{-3}$

接触突起の塑性変形のため、転がり後方では当然圧力が低下する。この圧力分布 の非対称性のため転がりを妨げるモーメントが発生する。転がり摩擦力 F_p はこ のモーメントの釣合条件から次式のように定まる。

$$F_{p}^{*} = \pi \int_{-\infty}^{\infty} x^{*} \int_{-\infty}^{\infty} \{ p_{f}^{*}(x^{*}, y^{*}) \ U(x^{*}) + p_{r}^{*}(x^{*}, y^{*}) \ U(-x^{*}) \} \ dy^{*} \ dx^{*}$$

$$C \subset \mathcal{C} \quad U(x^{*}) = \begin{cases} 0 & x^{*} \leq 0 \\ 1 & x^{*} > 0 \end{cases}$$

$$(2.1.22)$$

なお,球および平面の弾性履歴損失に起因する摩擦成分は処女面転がりの場合, F,に比べはるかに小なることが実験的に確認¹⁷⁰されているため,ここでは無視する。

1.2.2.2 数值計算結果

転がり摩擦力 F_p^* の数値計算結果を図 2.1.14,図 2.1.15 に示す。図 2.1. 14 から F_p^* は荷重 W^* にほぼ比例することがわかる。両図から \mathfrak{s}^* 大なるほど,ま た p_m^* , n_p^* , β^* が小なるほど F_p^* は大になり、これらの因子のうち F_p^* に及ぼす影

-139--



図 2.1.14 荷重と転がり摩擦力の関係 $\beta^* = 0.02 \quad n_p^* = 200$ $p_m^* = 5 \times 10^{-3}$

響としては q_p^* , p_m^* が大で n_p^* が最も少ない ことがわかる。

いま、かりに研摩布仕上面を想定すると、 9、7%間の関係は式(1.3.24)から、9、と R_a の関係は式(1.3.26)、(1.3.20)から求 L^a_{10} まる。この関係を用いて整理し直すと、図 2.1.16に示すように F_b と R_a の関係が表 される。実際の加工面では 9 n_b^a の値はかな り変動するが F_b に及ぼす影響は小さい。 しかし図 2.1.15 から明らかなように、 β の影響が無視できないことから 図 2.1.14 の比例関係はかなりの誤差を伴うが、表面 粗さの影響についての一つの目安として考えられる。







-140-

つぎに本理論の妥当性を実験的に検討する。

1.2.2.3 実 験

(1) 実 験 方 法

用いた実験装置および上部平板試料は本章 1.2.1.3 で述べたものと全く同 じである。研摩布仕上で種々な表面粗さをつけた黄銅板(6/4 黄銅,降伏応力 12 kgf/mm²,マイクロビッカース硬さ H_o = 157) を仕上げ条痕が転がり方向に直角 になるように下部平板試料として取りつけて,この試料の表面粗さの転がり摩擦 に対する影響を調べた。

この場合,上部平板試料と球の接触による転がり摩擦力は下部試験のそれに比 べて無視できる。

塑性接触の場合,球の最初の前進時において突起の塑性変形がほとんど完了してしまい,後退時における塑性変形の進行量は前進時のそれに比べかなり減少する。しかし全く無視するわけにはいかない。そこで転がり抵抗の実測値からポテンシャル成分を除去した摩擦力成分は式(2.1.12)では求まらず,下記のように 推定して求める。

いま,同一接触箇所を数回くり返して転がし,次式のようにそれぞれの往復時の転がり抵抗の差を求める。

 $D_1 = F_{b1} - F_{f1} = F_{rf1} + F_{rb1} + F_{Rb1} - F_{Rf1} \approx F_{rf1} + F_{rb1}$

 $D_2 = F_{b1} - F_{f2} \approx F_{rb\ 1} + F_{rf2}$

- $D_{3} = F_{b2} F_{f2} \approx F_{rf2} + F_{rb2}$ (2.1.23)
 - *F_{fj}*, *F_{bj}*: それぞれ *j* 回目の往復における前進時,後退時の転がり
 抵抗。
 - *F_{rfj}*, *F_{nj}*: それぞれ *j* 回目の往復における前進時,後退時の転がり
 摩擦力成分。
 - F_{Rfj} , F_{Rbj} : それぞれ j 回目の往復における前進時,後退時のポテン シャル力成分。

$$-141-$$

ただし,往復時において転がり抵抗の波形そのものはほとんど相似であることから, *F_{Rf}*, *F_{Rb}* は近似的に等しいと見なす。

この D₁, D₂, D₃ ……… の実測例を図 2.1.17 に示すが D₁ に比べ D₂ 以後ははるかに小で, しかも D₂ 以後は変化がゆるやかである。すな わち次式が成立する。

式 (2.1.23), (2.1.24) を用いると, 求める処女 面転がり摩擦力 *F*_{f1} は



図 2.1.17 転がり回数と転がり抵 抗差の関係 W=1 kgf/mm² σ_p=3 μm R=5 mm E₁=21000 kgf/mm² E₂=10000 kgf/mm²

$$F_{rf1} \approx D_1 - \frac{1}{2} D_2 = (F_{b1} - F_{f1}) - \frac{1}{2} (F_{b1} - F_{f2})$$
 (2.1.25)
から推定できる。

(2) 実験結果

図 2.1.18 ~ 図 2.1.20 に実験結果の一例を示す。図中実線は本理論によ



 $\sigma_{\rm p} = 3.0 \,\mu{\rm m} \qquad n_{\rm p} = 24 \,\,{\rm mm}^{-1}$ $\beta = 20 \,\mu{\rm m} \qquad R = 5 \,\,{\rm mm}$

-142-

 $\sigma_{\rm p} = 1.8 \,\mu {\rm m} \qquad n_{\rm p} = 32 \,{\rm mm}^{-1}$ $\beta = 22 \,\mu {\rm m} \qquad {\rm R} = 5 \,{\rm mm}$

る計算結果であり、これらの図では丸印で示し た実測値とかなり良い一致を示している。一方, 図中の破線は接触突起の変形を塑性変形のみと 考えた場合の理論値¹²⁰で弾性変形まで考慮に入 れた今回の理論値と同様の傾向を示しているが, 定量的には実測値の数倍程度大なる値となり大 きな隔たりを示している。以上から,塑性変形 突起中の弾性変形が転がり摩擦低減に大きな役 割を果たしていることが明らかであり,本理論 の妥当性も確認できたものと考えられる。しか し表面粗さが小なる面の場合, 図 2.1.20 に見 られるように荷重の低い領域では理論値と実測 値はかなり一致しているが,荷重の

高い領域では理論値より実測値が大 になり,理論値の傾斜に比べ実測値 の傾斜のこう配も大になる。この傾 斜の変化は表面粗さが小なるほど低 荷重域で生じる。いま図2.1.18, 図2.1.19 のような表面粗さが大な る試料についてもこの傾向が生じる か否かを調べるために,さらに高荷 重の実験を行った。装置としては基 本的には図2.1.5 と同一であるが, 荷重はカウンタウェイト方式で与え られる¹⁰。このようにして実験条件を $W = 25 \ kgf$ まで拡げ,種々の表面



図 2.1.20 転がり摩擦実験結果 $\sigma_{\rm p} = 0.7 \,\mu{
m m}$ $\beta = 40 \,\mu{
m m}$ $n_{\rm p} = 50 \,{
m mm}^{-1}$ R=5 mm



R = 5 mm

-143 -

粗さの面について測定した転がり摩擦力を図 2.1.20 の一点鎖線と同様に平均した結果を図 2.1.21 に示す。高荷重域では表面粗さが異なっても摩擦力に大きな差はなく、傾きもほぼ一定で $F_p \propto W^{\frac{7}{4}}$ となる。*Tabor* 理論¹⁰⁾によると、なめらかな面に溝を付けるに要する転がり摩擦力は $W^{\frac{3}{2}}$ に比例することになり、これに従うと母材が塑性変形すると指数部が本理論より増加すると考えられる。

以上から、高荷重域での傾きの変化は平面の母材の塑性変形が生じたことによるものと判断できる。すなわち 図 2.1.21 は表面粗さが無視できない面に対する 母材の降伏条件を表す図と見なせる。

1.2.2.4 考 察

(1) 母材の塑性変形

上述のように 図 2.1.21 で曲線の傾斜が変る点は母材の塑性変形開始の臨 界点と思われるが、これを理論値と比較するためにその条件下における母材の最 大せん断応力の計算を行った。ところで、塑性変形開始の臨界荷重そのものが図 2.1.21 からわかるようにさ程明確でなく、したがって最大せん断応力もおおよ その推定でよいこと、および転がり時の圧力分布は前述のように複雑でこのよう な圧力分布に対する厳密な最大せん断応力を求めるにはかなりの計算時間を要す るのでそれを短縮したい、などの理由から最大せん断応力は下記のようにして近 似的に求めた。すなわち、圧力分布を円周方向に平均して点対称の圧力分布を仮 想し、式(1.4.42)~(1.4.44)を用いて接触面下のせん断応力分布を計算し、そ の最大値をもって最大せん断応力とする。

計算結果の一例を図2.1.22 に示す。研摩布仕上面についての実験結果と比較 するため図2.1.22 も $q_n r_s^2 = 1.1 \ mm^{-1}$ で計算を行っている。最大せん断応力 τ_{max} が黄銅のせん断降伏応力 $\tau_c = 6 \ kg f/mm^2$ の1,2,3倍になる臨界荷重 W_c と図2.1. 21 より求めた臨界荷重(図2.1.21 に示すように2接線の交点で W_c を定義する) を比較した結果を図2.1.23 に示す。W_c の実測値は理論値の範囲内にあり、とく に $\tau_{max} = 2\tau_c$ の理論値に最も良く一致している。これは母材内の一点で塑性変形

-144-







図 2.1.23 q_p と臨界荷重の関係 R=5mm $p_m = 157 \text{ kgf/mm}^2$ $E_1 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$ $E_2 = 10000 \text{ kgf/mm}^2$ $\beta = 0.04 \text{ mm} n_p = (1.1/\sigma_p)^{\frac{1}{2}} \text{ mm}^{-1}$

が開始する条件($Tabor^{19}$ では $\tau_{max} = \tau_c$)のと、塑性変形が全域にまで及ぶ条件 ($\tau_{max} = 3\tau_c$)の中間に相当するが、 W_c の実測値も両条件の中間にあることは図 2.1.21から推定される。

結局,母材の塑性変形開始条件および母材内部の最大せん断応力を平均的圧力 分布から理論的に推定することの妥当性が 図 2.1.23 から確かめられたものと考 えられる。同時に 図 2.1.22 から表面粗さが大なるほど臨界荷重が増加し母材が 塑性変形を起こしにくくなることがわかる。

(2) 自由転がり接触状態における本理論の適用限界

転がり接触状態の解析においては弾性接触状態,塑性接触状態いずれの場合も接触高さを確定量とし、荷重を確率変数として扱っている。これは、転がり接触部の剛性より周囲の剛性の方が大なる場合や、高速転がりで慣性力が大なる場合のように拘束力が作用する場合の転がり接触状態に相当する。実験で行ったような自由転がりの接触問題を解析的に解くのはきわめて困難なため、本研究では前述の理論でもって自由転がり接触における転がり摩擦力の統計量が近似的に

-145-

推定できるものとして扱ってきた。ここではこの近似の成立範囲について考察を 試みる。

突起頂点高さとして正規乱数を,頂点の横方向間隔としてワイブル乱数を計算 機で発生させ,このようなモデル面上の転がり接触状態を第1編3.5.1と同様の 手順でシミュレーション計算して求めた。なお母材の変形は無視する。

弾性接触の場合の入力仕事に関するシミュレーション結果を 図 2.1.24 に示す。 本理論の設定の場合より自由転がりの方が大なる値を示していることから、本理 論の場合転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響を過小評価していると考えられる が、両者の差が問題になるのは軽荷重域のみで同図の場合 20 % の誤差を許容す れば約 0.4 kgf 以上の荷重条件においては本理論で自由転がり接触状態の近似が できることになる。なお 図 2.1.8 ~ 図 2.1.10 の実験の場合、最小荷重 (25 gf) 条件でも 図 2.1.24 の W = 1.25 kgf の接触条件に相当するのでこの差は問題に ならない。



-146-

塑性接触の場合のシミュレーション結果を 図 2.1.25 に示す。この図も 図 2.1. 24 ときわめてよく似た傾向を示し、やはり図中の接触条件範囲で 20 % の誤差 を許容すれば W > 0.5 kgf の荷重条件下で本理論を用いて自由転がり接触状態の F_b の推定ができることになる。

1.3 転がり抵抗の変動成分について

軽荷重,低速度の自由転がり接触においては転がり抵抗中に含まれる転がり摩 擦力成分の割合はわずかである場合が多く,転がり接触を精密測定機に使用する 場合には前述の転がり摩擦力の平均値よりも転がり抵抗の変動の方が重大な悪影 響を及ぼす。

その実際例としてジャイロのロータとシンバル、シンクロ電機、サーボモータ などに使われる計器用精密軸受等では、転がり摩擦の平均値より転がり抵抗の変 動が問題になり²⁰⁾、こまかい抵抗変動が表面粗さの大小に強く依存することが報告²¹⁾ されている。また、表面粗さによる転がり抵抗変動と軸受騒音とは高い相関があ ることが実験的に²²⁾確かめられている。

転がり抵抗の変動の因子として,表面粗さおよび表面うねりによる重力ポテン シャルの変動,接触突起の確率的分布による転がりの瞬間中心の変動,高速度運 転における球と表面突起との衝突現象など多くの現象が考えられるが,転がり抵 抗の変動が問題になったとき,これらの因子のうちどれが主因となっているかを 推定することが重要である。そのような推定のための基礎的な研究として,ここ では準静的な転がり運動において表面粗さが転がり抵抗の変動に対して及ぼす影 響について解析する。

自由転がりにおける転がり抵抗の変動を理論的に考察するには、表面粗さ突起 と母材の変形を考慮に入れて球の上下変動を解析する必要がある。しかし後述す るように、この解析にはきわめて困難な問題を含んでおり解を求めることは容易 でない。本章では突起の変形が無視できる場合と無視できない場合に分け、前者

-147-

では突起の変形を無視するかわりに球の上下変動を扱い自由転がり状態そのもの を解析し,後者では突起や母材の変形は扱うが,接触高さ一定の拘束された転が り状態の解析を自由転がりにおける抵抗変動の近似解とみなして解析する。そし てシミュレーション計算により前者の適用範囲,後者の近似精度の検討を行う。

1.3.1 突起の変形が無視できる場合

突起の変形が無視できるような軽負荷時の自由転がり接触中におけるポテ ンシャル成分の変動による転がり抵抗の変動を,第1編第3章と類似の手法で解 析する。

1.3.1.1 理 論

表面粗さ突起の変形の影響が無視 できるような軽荷重域を想定する。図 2. 1.26 に示すように, xの位置にある突 起の先端に球が接触している場合のポテ ンシャル成分による転がり抵抗力 F_Rは 次式で与えられる。



$$F_{R} = -W \frac{dz_{ip}}{dx} \approx \frac{Wx}{R}$$

W:垂直荷重

(2.1.26)

よって,抵抗係数 $f_{R}(=F_{R}/W)$ の分布を求めることは x の分布を求めること になる。この単一接触突起の x 座標位置の分布を求めるには第1編第3章の最初 の接触位置の解析と類似の考察を行えばよい。理論解析にあたっては、1)方向 性のある表面粗さを考え,その方向性に直角な方向に球が転がる、2)接触突起 および母材の変形は無視する、2)突起頂点の高さ分布は標準偏差 ϕ の正規分布 をなす、といった仮定をおく。なお、突起間隔の分布はほぼワイブル分布をなす ことが実測例²²⁾より明らかになっているが、解析の複雑さを避けるため、ワイブ ル分布の両極端である指数分布と均一間隔の各々の分布を想定した場合の解を求 め、両者の平均値でもってワイブル分布の場合の近似解とする。この近似の妥当 性については第1編第3章で確かめている。

以下,主として突起間隔分布を指数分布と設定した場合について述べる。図2. 1.26 において, x 方向に等間隔 dx で断面曲線を分割すると,任意の k 番目の 区間中に突起がm 個存在する確率 $M_m(dx)$ は式(1.3.3)で与えられる。任意の x の位置(x = k dx)において幅 dx間に球に接触する突起が1個だけ存在する 確率 Q_k は

 $Q_{k} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz \right\}^{m-1} \, mf(h_{k}) \, dz_{ip} \, M_{m}(\Delta x) \right\}$

 $= f(h_k) \ dz_{ip} \ n_p \ \Delta x \ exp \ [\{\int_{-\infty}^{h_k} f(z) \ dz - 1\} \ n_p \ \Delta x] \ (2.1.27)$

ここで

f(z): 突起頂点高さ分布の確率密度関数, $h_k = Z_{ip} + \frac{x^2}{2R}$ 同様に,任意の $x (= k \Delta x)$ の位置において幅 Δx 中に球と接触する突起が存在し ない確率 P_k は次式で求まる。

$$P_{k} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz \right\}^{m} M_{m} (\Delta x) \right]$$

= $exp \left[\left\{ \int_{-\infty}^{h_{k}} f(z) \, dz - 1 \right\} n_{p} \Delta x \right]$ (2.1.28)

球底の高さが $Z_{ip} \sim Z_{ip} + \Delta Z_{ip}$ の間にあるとき,唯一の接触突起の位置が $(k - \frac{1}{2}) \Delta x \sim (k + \frac{1}{2}) \Delta x$ の間にくる確率 G_k は次式で表される。

$$G_k = \frac{Q_k}{P_k} \prod_{j=-\infty}^{\infty} P_j \tag{2.1.29}$$

Zip はどこの位置でもよいから、結局 x の確率密度関数 g(x) は次式で表される。

 $g(x) = \lim_{dx \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp(n_p \, dx \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{h_k} f(z) \, dz - 1)) n_p f(h_k) \, dz_{ip} \quad (2.1.30)$

同様の手順で突起頂点間隔が均一な場合の x の確率密度関数も求まり,次式で 表される。

$$g(x) = \lim_{dx \to \infty} 2n_p \int_0^{\frac{1}{2n_p}} dt \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=-\infty}^{m} \int_{-\infty}^{h'_j} f(z) dz \frac{f(h'_j)}{\int_{-\infty}^{h_j} f(z) dz} dz_i \qquad (2.1.31)$$

-149-

ててで,

 $h'_j = Z_{ip} + (t + j \Delta x)^2 / 2R$

よって転がり抵抗係数の変動の標準偏差 % は次式に式(2.1.30)あるいは式(2. 1.31)を代入すれば求まる。

 $\sigma_f = \frac{1}{R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.32}$

1.3.1.2 数值計算結果

突起間隔分布が指数分布をなす場合の g について式 (2.1.30), (2.1.32) を用いて数値計算を行った結果を 図 2.1.27 に示す。また式 (2.1.31), (2.1.32) を用いて突起間隔が均一な場合の g について数値計算を行った結果を 図 2.1.28 に示す。第1編第3章の方向性のある表面粗さに関する最初の接触位置の解析に おいて行ったように,ここでも突起間隔を指数分布と設定する場合と均一とする 場合の理論値の平均値でもって実際の機械加工面の突起間隔分布にかなり近いと 考えられるワイブル分布の場合の理論値の近似解とする。すなわち 図 2.1.27 と 図 2.1.28 両図の平均値を求める。また式 (2.1.30), (2.1.31), (2.1.32) を無 次元化表示し,変数変換を施すと、g は

$$\sigma_f = \frac{\sigma_b^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} V_f \left(\sigma_b^* n_b^{*2} \right) \tag{2.1.33}$$

の形に表されることがわかる。ただし V は ながな のみの関数で多重積分形で表さ



図 2.1.27 of に及ぼす突起間隔分布形の影響



図 2.1.28 of に及ぼす突起間隔分布形の影響

-150-

れる。結局,ワイブル分布の場 合のみの理論値は図2.1.29の ように一本の曲線で表される。 研摩布仕上面について考えると 式(1.3.24)に示したように みっぱはほぼ一定になるため図2. 1.29の横軸は表面粗さに無関 係に球の半径Rのみで表される。 この観点から図2.1.29を見直



すと gは $g^{\frac{1}{2}}$ に比例して増加し、R大なる(大体 R > 1 mm)場合 $R^{\frac{1}{2}}$ にほぼ逆 比例することがわかる。

1.5.1.3 実 験

実験装置はさきに図 2.1.5 で示した転がり摩擦 力測定装置を用い,図 2.1.30 に示す手順で of を測定 した。球および上部試験片は前節の実験と同一のもの を使用し,下部試験片の材質,表面仕上げ方法ともに 本章 1.2.2.3 のそれと同一である。

転がり摩擦力測定装置 ↓ 動ひずみ計 ↓ パンドパスフィルタ ↓ データレコータ ↓ A・D 変換器 ↓ ミニコンピュータ ↓ G 図 2.1.30 Gf の測定手順







-151-

面上5ケ所における転がり距離6mmの測定結果の平均値で実線は式(2.1.32) による数値計算結果を示し,破線は後述(図2.1.33)のシミュレーション結果 に従って突起の変形の影響を考慮に入れて実線を補正したものである。いずれに しても理論値と実測値はかなり良好な一致を示し,本理論の妥当性が実験的に確 認できたものと考えられる。

1.3.1.4 考 察

この突起の変形を無視した理論の適用範囲を検討する。そのために突起頂点高 さとして正規乱数を,頂点の横方向間隔としてワイブル乱数を計算機内で発生さ せ,突起の変形を考慮に入れた転がり抵抗の変動をシミュレーション計算で求め た。

接触突起が弾性変形する場合のシミュレーション結果を図2.1.32 に、塑性変形する場合のそれを図2.1.33 に示す。なお図2.1.33 の計算条件は、後述する検証実験に合わせて平板の材質として黄銅を想定している。





図 2.1.33 $\sigma_{\rm f}$ に及ぼす突起の変形の影響 $\beta = 0.15 \,{\rm mm}$ $p_{\rm m} = 150 \,{\rm kgf/mm}^2$ $n_{\rm p} = (1.1/\sigma_{\rm p})^{\frac{1}{2}} {\rm mm}^{1}$ R = 5 mm $E_1 = 21000 \,{\rm kgf/mm}^2$ $E_2 = 10000 \,{\rm kgf/mm}^2$

図 2.1.32 から、 ゅ 大なる場合はかなり高荷重でも突起の変形を無視した解が 適用できるが、 ゅ小なる場合には軽荷重時でも接触点の数が多くなるため、突起 の変形を無視し常に単一の突起しか球と接触しないという理論の設定では大きな

-152-

誤差を伴うことがわかる。 図 2.1.33 でも定性的には前図と同様の傾向を示して おり、突起の変形の影響は前図よりさらに顕著に表れている。

以上から、処女面転がりのような塑性接触状態では本理論の適当範囲はきわめ て軽荷重域に限られ、定常転がりのような弾性接触状態では塑性接触の場合に比 べ適用範囲はかなり拡がるが、やはり0.2 kgf以下の軽荷重域に限られることが わかる。結局、突起の変形を無視した解は現実の接触問題にそのまま適用できる ことは少なく、自由転がりにおける転がり抵抗の変動の標準偏差の上限を示すと いう点にのみ意味があると考えられる。

1.3.2 突起の変形を考慮に入れた場合

前述の突起の変形を無視した解はポテンシャル変動による抵抗力変動の標 準偏差の最大値を推定するのには適しているが,現実の接触条件で突起の変形を 無視しうる場合は少ない。そこで突起および母材の変形を考慮に入れて転がり抵 抗の変動を解析しなければならぬが,そのとき一つの大きな難問に逢着する。自 由転がりにおいては負荷一定条件で接触高さ Zop がランダムとなるような転がり 運動を行っているのでその設定のもとで解析すべきであるが,これは前節でも述 べたが現状では解けない。そこでやむなく,荷重の平均値が設定荷重になるよう な確定量 Zop を取り,一定の接触高さを保ちつつ転がる場合の転がり抵抗の変動 について解析する。そして Zop 一定,すなわち拘束された転がり接触状態と, Zop がランダムになる自由転がり接触状態とで転がり抵抗の変動にどの程度の差が生 じるかをシミュレーション計算を用いて比較し、上記解析の自由転がりに対する 近似度,適用範囲などについて検討する。

1.3.2.1 理 論

単一突起の近接量 a。と突起に作用する荷重 W。との関係を

 $W_a = g\left(\alpha_a\right) \tag{2.1.34}$

とおき、母材の変形後の球の平面に対する相対的曲率半径(* 軸方向)が rxR

-153-

なる2次曲面が接触高さ Zop の位置まで食込んだ状態を想定する。

各接触突起により球に作用するモーメント Ma は突起頂点高さを a とすると

$$M_{a} = x \cdot g \left(z - Z_{op} - \frac{x^{2}}{2Rr_{x}} \right)$$
 (2.1.35)

となる。各接触突起による M_a はたがいに独立な確率変数と考えられるから、これらの和の確率変数の標準偏差、すなわち球に作用する転がりモーメントの標準 偏差 o_M は次式で表される。

$$\sigma_M^2 = n_p \int_{-x_{max}}^{x_{max}} x^2 \int_{z_{op}+\frac{x^2}{2R\tau_x}}^{z_{max}} g^2 \left(z - Z_{op} - \frac{x^2}{2R\tau_x}\right) f(z) dz \qquad (2.1.36)$$

上式の関数 8 および接触条件により定まる定数 Zop, rx に従来の解析結果を代入 すればよい。

(1) 弾性接触の場合

式 (2.1.36) のgのかわりに式 (1.5.9)の W を代入すればよい。 すなわち,

$$\sigma_{M}^{2} = 2 Q_{a}^{2} n_{p} \int_{0}^{x \max} x^{2} \int_{z_{op}+\frac{x^{2}}{2RT_{x}}}^{z \max} \left\{ z - Z_{op} - \frac{x^{2}}{2(\tau_{x}R+\beta)} \right\}^{3} f(z) \, dz \, dx \quad (2.1.37)$$

(2) 塑性接触の場合

圧力分布が非対称なため、転がり前方と転がり後方に分け、前方の分布圧
 カ み としては式(2.1.18)を用い、後方の分布圧力 み としては式(2.1.19)を
 用いる。すなわち σ_M は次式で定まり、

$$\sigma_{M}^{2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_{f}^{2}(x, y) \ U(x) + p_{r}^{2}(x, y) \ U(-x) \right\} dy dx - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_{f}(x, y) \ U(x) + p_{r}(x, y) \ U(-x) \right\} dy dx \right\}^{2}$$
(2.1.38)

転がり抵抗の標準偏差 or は on から次式のように求まる。

$$\sigma_F = \frac{\sigma_M}{R} \tag{2.1.39}$$

1.3.2.2 数值計算結果

(1) 突起が弾性変形する場合

図 2.1.34 に球の半径 R と転がり抵抗力の標準偏差 or の関係を示す。この

-154-

図から φは R の約 0.4 乗に逆比例し、 φ の約 0.88 乗に比例することがわかる。 図 2.1.35 に荷重と φ の関係を示す。荷重大なるほど φ/W, すなわち見かけ^{註)}



図 2.1.34 Rと $\sigma_{\rm F}$ の関係 W=1 kgf $n_{\rm p} = 50 \,\mathrm{mm}^{-1}$ $\beta = 0.1 \,\mathrm{mm}$ E=21000 kgf/mm²

の転がり抵抗係数は減少する。これは荷重が大になると球に接触する突起の数が増加するため、転がり前方と後方の接触突起によるモーメントが平均化され、の床が減少するものと考えられる。

図 2.1.36 に β, n_p と σ_F の関係 を示す。 n_p 大なるほど接触突起 の数が増えるためW増加と同一の 効果が表れ σ_F は減少する。 n_p, β



がのに及ぼす影響はの, Rに比べかなり小なることがわかる。

(2) 突起が塑性変形する場合

註)のと平均荷重の比を示し、いわゆる摩擦係数の標準偏差とは異なるため見かけと呼ぶ。

-155-



図 2.1.37 Rと $\sigma_{\rm f}$ の関係 $\beta = 0.05 \,\rm mm$ $p_{\rm m} = 150 \,\rm kgf/mm^2$ $n_{\rm p} = 50 \,\rm mm^{-1}$ $E_1 = 21000 \,\rm kgf/mm^2$ W = 1 kgf $E_2 = 10000 \,\rm kgf/mm^2$





図 2.1.37 に R と ゅ の関係を示す。定 性的には 図 2.1.34 と全く同じ傾向を示 し, ゅは R の約 0.4 乗に逆比例しゅの約 0.8 乗に比例する。

図 2.1.38 に荷重 W と σ_Fの関係を,図 2.1.39 に β, n_p と σ_Fの関係を示す。 そ



図 2.1.38 Wと oF の関係

 $\begin{pmatrix} \beta = 0.05 \text{ mm} & p_m = 150 \text{ kgf/mm}^2 \\ n_p = 50 \text{ mm}^{-1} & E_1 = 21000 \text{ kgf/mm}^2 \\ R = 5 \text{ mm} & E_2 = 10000 \text{ kgf/mm}^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \beta^* = 10^{-2} \\ n_p = 250 \\ p_m^* = 3.2 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$



図 2.1.40 $R_a \succeq \sigma_F \oslash$ 関係 $\beta = 0.05 \text{ mm} \quad E_1 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$ $R = 5 \text{ mm} \quad E_2 = 10000 \text{ kgf/mm}^2$ $p_m = 150 \text{ kgf/mm}^2$

れぞれ図2.1.35と図2.1.36と類似の傾向を示しており、Wやn,が大なるほど、

-156-

β小なるほど σ_F/W が減少することがわかる。なお 図 2.1.38 に平均転がり摩擦 力 F_pも破線で示したが,Wが増加すると σ_F/W は減少するが F_p/W は逆にわず かであるが増加の傾向を示している。すなわち荷重が増大すると,転がり抵抗の 変動に比べ転がり摩擦力の平均値の重要性が相対的に増すことがわかる。

1.3.2.3 実 験

前述の σ_r に関する理論の妥当性を確かめるために転がり抵抗の変動を測定 し、実測値と理論値の比較を行う。実験装置、実験方法は本章 1.3.1.3 と同じで 荷重条件のみを変えている。

(1) 弾性接触状態

平板試験片および球としては本章 1.2.1.3 と同一で,塩化ビニール板と鋼 球を用いた。 図 2.1.41 に実験結果を示 す。図中,黒丸は各試験片に対する理論 値を,白丸は実験結果を示す。

定性的には理論値と実測値は似た傾向 を有しているが, の小なる領域で理論値 に比べ実測値が小なる値を示している。



図 2.1.41 σ_Fの理論値と実測値の比較 R=5mm W=100gf

(2) 塑性接触状態

平板試験片および球としては本章1.2.2.3と同一で黄銅板と鋼球を用いた。

-157-

図 2.1.42 と 図 2.1.43 に実験結果を示す。 これらの図も定性的には理論値と実 剤値は似た傾向を有しているが理論値に比べ実剤値が小なる値を示している。



図 2.1.42 $\sigma_{\rm F}$ に関する理論値と実測値の比較 図 $R=5\,{\rm mm}$ W=0.5kgf

図 2.1.43 $\sigma_{\rm F}$ に関する理論値と実測値の比較 R=5mm W=1 kgf

弾性接触,塑性接触ともに実測値が理論値より低い値を示すのは試料面が単純 な一方向性の粗さでなく,条痕方向にも微小おうとつを有していることによるも のと考えられる。また 図 2.1.43 に見られるように,荷重が大でゅ小なる場合に 理論値と実測値の差が顕著なのは,図 2.1.21 の F₀ の場合にも認められたよう に母材の塑性変形の影響が表れているものと考えられる。

しかし、これらはいずれも推定にすぎず、この差の原因は判然としない。以上のように or に関しては定量的には検討の余地を残すが、定性的あるいは or の大まかな推定としては本理論でも満足できるものと考えられる。

1.3.2.4 考 察

接触高さ Z_{op} を確定量とする場合とランダム変数とする場合とで op にどの 程度の差が生じるかについてシミュレーション計算を用いて検討する。転がり接 触状態の計算手順は前節同様で,前者についてはモデル面上に確定接触高さ Z_{op} だけ食込んだ時の球に作用する荷重と,接触突起からうける球の中心のまわりの

-158-

モーメントの不釣合による抵抗力を計算する。この計算をモデル面上の 100 箇所 で繰返し行い荷重,抵抗力それぞれの平均値W,標準偏差のを求める。

後者についても、モデル面上で突起に作用する負荷 W_a の総和が確定荷重 W に 等しくなるような接触高さ Z_{op} を繰返し計算で求め、 Z_{op} が求まると球の中心のま わりのモーメントの不釣合による抵抗力を計算する。この計算をモデル面を変え て繰返し行い、抵抗力の標準偏差 σ_F を求める。以上のシミュレーションによるW、 \overline{W} が同じ値のときの両者の σ_F を比較する。

弾性接触の場合には 図 2.1.44 に, 塑性接触の場合には 図 2.1.45 に見られる ように, いずれの場合も g大でW小なる場合を除いて両者の差はかなり小なるこ とがわかる。平均摩擦力の場合同様, g についても本理論で自由転がりの場合の 理論値を推定することができる。



図 2.1.44 自由転がりと本理論の比較 $\beta = 0.1 \text{ mm}$ $E_1 = E_2 = 21000 \text{ kgf/mm}^2$ $n_p = 30 \text{ mm}^{-1}$ R = 5 mm



図 2.1.45 自由転がりと本理論の差 $n_p = (1.1/q_p)^{\frac{1}{2}} mm^{-1}$ $p_m = 150 kg f/mm^2$ $\beta = 0.05 mm$ $E_1 = 21000 kg f/mm^2$ R = 5 mm $E_2 = 10000 kg f/mm^2$

-159-

1.4 結 言

転がり摩擦力に及ぼす表面粗さの影響について前編の接触理論を適用あるいは 発展させて理論的に考察を試みた。また,ポテンシャル変動成分も含めた転がり 抵抗の変動の標準偏差と表面粗さの関係についても解析を試み,以下に示すよう な結果を得た。

- (1) 転がり摩擦力と表面粗さの関係について
- ii) 接触突起が塑性変形する場合の転がり摩擦力も突起および母材の弾性回復を 考慮に入れることにより、かなり精度の高い理論的推定が可能になった。
- ■)弾性接触,塑性接触いずれの場合も理論値と実測値はかなりの一致を示し,理論の妥当性が確かめられた。
- Ⅳ)母材の塑性変形開始条件が処女面転がり摩擦実験と理論解析結果との比較から求まり、表面粗さ大なるほど母材の塑性変形開始条件が高荷重域になることが明らかになった。
- (2) 転がり抵抗の変動の標準偏差について
- i) 突起の変形を無視した自由転がり接触の解析結果は実験結果と良好な一致を示し、きわめて低荷重域の転がり抵抗係数のの理論的推定が可能になったと同時に、自由転がり接触におけるのの値の上限が推定できた。
- ii) 突起の変形を考慮に入れた解で自由転がり接触時の抵抗の標準偏差 ゅがきわ めて低荷重域を除いて近似的に推定できることが明らかになった。
- Ⅲ) 弾性接触状態と塑性接触状態では σ_F と表面粗さの関係についての理論値は定 性的に同様の傾向を示し、 σ_F は突起頂点分布の標準偏差にほぼ比例し、球径の 約 0.4 乗に逆比例する。
- Ⅳ) のに関する実測値は理論値より低目に表れるが、定性的には理論と良い一致

-160-

を示す。

(1),(2)を通じて,接触高さがランダムに変化する自由転がり状態の平均摩擦力, 転がり抵抗の変動等が接触高さを一定と設定する拘束転がり状態の解析で,近似 的に推定できることがシミュレーション計算結果により明らかになった。

参考 文献

1) J.J.Bikerman: J. of Appl. Phys., 20, 10 (1949) 971.

2) J.Halling: Brit. J. of Appl. Phys., 10, April (1959) 172.

3) 久田: 精密機械, 17, 2(1950), 49.

4) 佐々木, 沖野, 大塚: 日本機械学会論文集, 26, 169 (1960) 1281.

5) 佐々木, 沖野: 日本機械学会論文集, 27, 181 (1961) 1456.

6) G.A.D.Briggs and B.J.Briscoe: Nature, 260, March 25 (1976) 313.

7) O.Reynolds: Phil. Trans. Roy. Soc., 166 (1876)155.

8) H.L.Heathcote: Proc. Inst. Aut. Eng., 15 (1921) 569.

9) G.A.Tomlinson: Phil. Mag., 7, (1929) 905.

10) たとえばF.P.Bowden and D.Tabor: The Friction and Lubrication of Solids Part 2, Oxford (1964) 306.

11) 佐藤: 表面工学概論,養覧堂(1965)114.

12) 石垣,川口:昭和49年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集,(1974)232.

13) D.G.Flom: J.Appl. Phys., 31, (1960) 306.

14) たとえば, R.C.Drutowski: Trans. ASME Ser. D. 81, (1959) 233.

15) 渡部, 川口: 精密機械, 42, 11 (1976) 1056.

16) A.N.Gent and R.L.Henry: Trans. of the Soci. of Rheology, 13, 2 (1969) 255.

17) 川口: 潤滑, 15, 4 (1970) 187.

-161-
- 18) 石垣,川口: 精密機械,投稿中.
- 19) D.Tabor: The Hardness of Metals, Oxford (1951) 50.
- 20) 角田: 潤滑, 19, 2(1974) 102.
- 21) 機械試験所報告,50(1964).
- 22) 渡辺,石垣,川口: 昭和50年度 精機学会秋季大会学術講演会前刷,(1975) 345.

第 2 章 表面おうとつの測定精度 について

2.1 緒 言

表面粗さ,表面うねり等の測定には現在触針式表面形状測定器が最も広く使用 されている。この触針式測定器には触針およびスキッドによる測定面の損傷^{1,2)}, 触針の動特性³⁾等に起因する測定誤差のほかに以下に示すような幾何学的問題点 も数多く残っている。

表面粗さの測定に関しては、1) 触針半径と触針の幾何学的追従性の関係、 2) スキッドの上下変動が表面粗さ測定値に及ぼす影響、3) MシステムとEシ ステム間の関係、等の問題点が挙げられる。

また,表面うねりに関しても JIS(B0610)では電気的ろ波うねりと転がり 円うねりの2種類のうねりが併記されているが,両者の換算方式はもちろん,転 がり円うねり測定用触針の半径の選択基準も明確ではなく,転がり円の幾何学的 特性に対する基礎的検討が欠けている。

以上のような幾何学的問題に関しても研究報告がいくつか見られるが、これら は大体において定性的な報告にとどまっている。本章では第1編第3章の最初の 接触位置の解析結果をもとにして、表面粗さ測定精度に関する前述の1)、2)、 3)の項目、および転がり円うねりに及ぼす表面粗さの影響等の問題について考 察を試みる。

2.2 表面粗さ測定精度について

2.2.1 触針半径の影響

触針半径が有限であるため、きわめて微小なおうとつについては触針が表面の幾何学的形状に対して追従できない場合がある。この問題に対する従来の理論的研究^{45,60}は規則的な表面粗さや、一方向のみに方向性を有する表面粗さに関す

-163-

るものがほとんどである。本章ではランダムな性状を有し、方向性のある表面粗 さ、および方向性のない表面粗さに関して自乗平均粗さ(および中心線平均粗さ) に及ぼす触針半径の影響について考察する。なお、この問題については説明の都 合上本章 2.3.3.3 の中で述べる。

2.2.2 スキッドの上下変動の影響

スキッドを使用して表面粗さを測定する場合,測定値の中に真の表面粗さ 成分のほかに表面粗さによるスキッド上下変動の成分が含まれる。このスキッド 上下変動が自乗平均粗さ(*R_{ms}とおく*)や*R_a*,*R_{max},<i>R_z* に及ぼす影響について考 察を試みる。ところで、この問題に関しては実験的研究⁷⁰ はあるが理論的にはほ とんど報告されていない。なお、後述するように、方向性のない表面粗さの場合 にはスキッド上下変動の影響が小さく、しかも理論解析上の問題点も残っている ので、ここでは主として方向性のある表面粗さの場合について考察する。

2.2.2.1 理 論⁸⁾

Ra, Rmax と Rrmsの関係を考える。いま同一試料面上をスキッドを用いて

測定した表面粗さ曲線とスキッドを用い ずに測定した表面粗さ曲線をもとにして, それぞれの表面粗さ曲線の高さ分布を求 めたところ図2.2.1 に示すように両者と もほぼ正規分布をなすことがわかる。

正規分布の場合,式(1.3.20)で示し たように $R_{rms} \ge R_a \ge t t \ge t$ の関係にある ことが理論的に明らかであるので, R_a に対するスキッドの影響は R_{rms} に対する スキッドの影響と同一と考えられる。 R_{max} についても式(1.3.23)に示したよ うに $R_{rms} \ge t$ 近似的に比例関係にある。



図 2.2.1 表面粗 さ曲線の高さ分布 研削仕上面 R_a=1.6 µm

-164-

そこで R_{max} も R_{rms} に対する考察が準用できる。ただし R_{max} の測定の場合は R_{rms} と異なり電気的フィルタと基準長のカットオフ効果が異なるため、後述するよう にスキッドの効果にも R_{rms}の場合に比べ少し差が生じる。

以上の観点から主として R_{rms} に及ぼすスキッド上下変動の影響を理論的に考察 する。なお、検証実験においては使用した表面粗さ計では R_{rms} が測定できない^{註)} ため、R_a についてスキッドの影響を測定した。

ここではスキッドとして最も一般的と考えられる,だ円体の単一スキッドでス キッドと触針の間がトレース方向に数mm離れている場合を扱う。なお、マタギ スキッドや複数スキッドのような特殊なものについてはのちに考察を行う。この ようなスキッドの場合,形状誤差や表面うねりの影響を無視すればスキッドの上 下変動と触針の上下変動は互いに独立であると考えられる。そこで、スキッド使 用時の自乗平均粗さ測定値を R'rms,真の自乗平均粗さを Rrms とすると R'rms と Rrms の比は次式で与えられる。

$$\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \frac{(\sigma_{zi}^2 + \sigma_s^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_s} = \left\{ \left(\frac{\sigma_{zi}}{\sigma_s}\right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$$
(2.2.1)

ここで q は R_{rms} そのもので、 σ_{zi} はスキッド上下変動の標準偏差を表す。 σ_{zi} は粗い平面に球を近づけた場合の最初の接触位置の標準偏差に等しいと考えられるため、第1編第3章の σ_{zip} 、 σ_{zis} の解析結果がそのまま適用できる。

(1) 方向性のある表面粗さの場合

式 (2.2.1) の σ_{zi} の代わりに式 (1.3.18) の σ_{zip} を,また式 (2.2.1) の σ_s を式 (1.3.26) を用いて σ_p で表すと, R'_{rms}/R_{rms} は σ_p , n_p , R_x の関数 として表 される。ただし σ_p , n_p はそれぞれ突起頂点高さの標準偏差,突起密度で R_x はス キッドのトレース方向曲率半径を表す。

 $\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \{0.74 \ (-0.02t_p^2 + 0.135 \ t_p^2 - 0.356 \ t_p + 0.86)^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} \ (2.2.2)$

註)使用した小坂式 SE 3型表面形状測定器では R_{rms} は一応測定できることになっているが、その値は R_a 値の 1.1 倍に固定されているので測定の意味がない。

-165-

ここで,

$$t_p = \log q_p n_p^2 R_x$$

上式の計算結果を図 2.2.2 に示す。

gとれの関係として式(1.3.24)の実 験式を用いると、図2.2.2の横軸はスキ ッドのトレース方向曲率半径 R_x のみで 表される。この図からスキッド半径 R_x 小なるほどスキッドの上下変動が Rrms 測 定値に大きな影響を与えることがわかる。 市販の表面粗さ計のスキッド(R_x=8~ 40 mm)の場合, $R'_{rms}/R_{rms} = 1.13 (R_x = 8 mm) \sim 1.10 (R_x = 40 mm) となる。$

(2) 方向性のない表面粗さの場合

式 (2.2.1) の ozi に式 (1.3. 19)の Gzis を代入すると, 次式およ び図 2.2.3 に示すように R_{rms}/R_{rms} がな, n, Rの関数として表される。 $\frac{R'_{rms}}{R_{rms}} = \{(-0.0068 t_s^3 + 0.061 t_s^2)\}$ $-0.218t_{s}+0.618)^{2}+1\}^{\frac{1}{2}}$



図 2.2.2 Rrms に及ぼすスキッド上下 変動の影響 (方向性あり)



ここで,

 $t_s = \log \sigma_s^* n_s^* = \log \sigma_s n_s R$

ただし, Rは式 (1.3.13) と同様, 次式のように *, y 方向曲率半径 R,, R, の幾 何平均を表す。なお, *, y 方向はそれぞれトレース方向と, それと直角の方向を 表す。

(2.2.3)

$$R = (R_x R_y)^{\frac{1}{2}}$$
 (2.2.4)

-166-

αとれの関係として湿式ラップ仕上面に関する実験式(1.3.25)を用いると、 図 2.2.3の横軸は R のみで表される。図 2.2.2と図 2.2.3を比べると、方向性の ない面の場合は一方向に方向性を有する場合に比べスキッド上下変動の影響を受 けにくいことがわかる。

図2.2.3から

 $R = 8 mm \quad \text{Clt} \qquad R'_{rms}/R_{rms} = 1.07$ $R = 40 mm \quad \text{Clt} \qquad R'_{rms}/R_{rms} = 1.06$ (2.2.5)

以上の結果から,スキッド使用時には方向性のある表面粗さの場合測定値が真 の値より1割強,方向性のない表面粗さの場合1割弱程度大きめの値になること が考えられる。

2.2.2.2 実 験

スキッドの有無により R_a , R_{max} , R_z がどの程度変化するかを表面粗さ計を 用いて実測し,理論との比較を行う。実験条件を表 2.2.1 に示す。

表2.2.1 実験条件

(1) 表面粗さ計の諸元

機種	小坂製作所 SE 3型		
スキッド 形状	球形,半径 40mm		
測定荷重	約 50gf		
触 針 半径	約 4 µm		
. 測定荷重	0.5 gf		
高域フィルタ カットオフ値	0.8,2.5mm (R _a 測定時)		
基準長	0.8mm (1部 2.5mm)		

(2) 表面粗さ試験片

	方向性のある面	方向性のない面
材質	6/4 黄 銅 マイクロビッカース硬さ Hy=150	S 25 C $H_v = 190$
表面仕上	研摩布仕上 R _a = 0.13~3.2 μm	湿式ラップ仕上 R _a =0.3~1.5 µm

-167-

(1) R_a について

方向性のある面に関する実験結果を 図 2.2.4 に、方向性のない面に関する実験 結果を図 2.2.5 に示す。丸印は実測値で、 1 個の試験片につき同一カットオフ値でス キッドを使用した場合と使用しない場合に つき、それぞれ5箇所の R_a の値を測定しそ れぞれの平均値の比を求めた結果を示 す。実線は理論値を示し、図 2.2.2 で $R_x = 40 \, mm$ における値を用いた。図 2.2.4 では、カットオフ値 2.5 mm の 場合には白丸の実測値は実線の理論値 のまわりにばらつき、スキッドの影響 を理論値で推定することはほぼ妥当と 考えられる。しかし、カットオフ値を



図 2.2.5 R_a に及ぼすスキッドの影響 (方向性なし) R=40mm

0.8 mm にすると黒丸で示した実測値は理論値より低い値を示す。これはスキッドの上下変動の成分が高域フィルターにより減衰されているためと考えられる。

方向性のない表面粗さに関する測定結果を図 2.2.5 に示す。黒丸で示したカッ トオフ値 0.8 mm の測定結果は理論値に近い値を示しており、フィルターの影響 をあまり受けていない。これは方向性のない面の場合、方向性のある面に比べて スキッドに接触する突起の数が多いため、スキッド上下運動のスペクトル分布が 高周波側に高くなっているためと考えられる。白丸で示したカットオフ値 2.5 mm の場合の測定結果も理論値にかなり近い値ではあるがいくらか高い値を示してい る。これは表面うねりによりスキッドが上下変動したためと考えられる。

(2) R_{max} , R_z について

図 2.2.6 に方向性のある表面粗さに関する測定結果を示す。丸印で示し

-168-

た実測値は、各試験片について5箇所の 測定結果の平均値である。 Rmax, Rz い ずれの場合も理論値のまわりにばらつい ており、スキッドの影響を本理論で推定 しうることがわかる。図 2.2.7, 図 2.2. 8に方向性のない表面粗さの場合の、そ れぞれ Rmax, Rz についての実測値を示 す。両図とも測定値のばらつきは大であ



図 2.2.6 R_{max} , R_z に及ぼすスキッドの影響 (方向性あり) $R_x = 40 \text{ mm}$

るが平均的には本理論が成立することがわかる。



(方向性なし) R = 40 mm



図 2.2.8 R_z に及ぼすスキッドの影響 (方向性なし) R = 40 mm

2.2.2.3 考 察

R_aに関する測定結果に表れたスキッド上下変動に対する電気的フィルタの 効果や,規則性のある表面粗さの場合のスキッド上下変動の影響,特殊形状スキ ッドの場合の上下変動の影響,および突起の変形がスキッド上下運動に及ぼす影 響等について考察を試みる。

(1) 電気的フィルタの効果

図 2.2.4 で認められたように高域フィルタによりスキッド上下変動成分が 減衰することが考えられる。この高域フィルタの効果についてもう少し細かく検

-169-

討してみる。

触針式表面粗さ計の触針の代わりに球形子を取付けることにより、表面粗さ曲線の 代わりに転がり曲線^{注)}を測定し、それのパワースペクトルを計算する。その一例 を図 2.2.9 に示す。なお、パワースペク

トル算出にあたっては転がり曲線から最 小自乗法により形状誤差を取り除き,そ のデータを直接フーリエ変換して赤池ウ ィンドウを施すことによりスペクトルを 求めた。

JIS B 0651 にのっとり減衰率
-12 dB/oct のフィルタ特性のテーブル
を 図 2.2.10 のように作る。この値を図
2.2.9 のパワースペクトルにかけること
により数値計算でフィルタの代用をする。

すなわち、フィルタ通過後に相当 する転がり曲線のパワースペクト ルを図2.2.9の破線等のように求 め、これらの曲線を積分すること によりフィルタ通過後のスキッド 上下変動の標準偏差 o^F_{zi} が求まる。

以上の手順により求めた計算結 果を図2.2.11,図2.2.12に示す。 図中,記号で示した各試験片の表



 $R_x = 30 \text{ mm} \quad \lambda_m = 12.3 \text{ mm}$



面粗さを表2.2.2に示す。電気的フィルタの効果は中心線平均粗さにほぼ無関係

註)すべり接触であるが JIS の転がり円うねり曲線と似た意味で転がり曲線と呼ぶ。

-170-



図 2.2.11 スキッドの上下変動に及ぼす フィルタの影響 R_x=5mm

であり、スキッド半径が大きい場 合にフィルタの効果が顕著である ことがわかる。いま JIS で定め られているカットオフ値 0.8 mmの場合、半径 5 mm ではフィルタ を通しても標準偏差は $2 \sim 3$ 割程 度しか減少しないが、半径 30 mmでは 5 割前後減少する。



図 2.2.12 スキッドの上下変動に及ぼす フィルタの影響 R_x = 30 mm

研磨布住上				研削仕上			
A	0.18	J	1.51	S	2.45	0	0.45
В	0.22	к	1.52	Т	2.60	•	0.47
С	.0.23	L	1.71	U	2.61	•	1.03
D	0.51	М	1.85	v	2.78	•	1.09
Е	0.55	N	1.87	W	2.95	•	3.54
F	0.69	0	1.88	х	3.10	•	3.75
G	0.70	P	2.15	Y	3.83		
н	1.22	Q	2.18				
I	1.26	R	2.35				

(研削仕上の試験片は本章2.3.2の実験で使用する)

結局,図2.2.2,図2.2.11,図2.2.12から方向性のある表面粗さの場合スキッドの上下変動の影響は次式の程度になることがわかる。

 $\frac{R'_{rms}}{R_{ms}} = \begin{cases} 1.03 & R = 30 \, mm \\ 1.07 & R = 5 \, mm \end{cases}$ なお、R=5 mm 程度のスキッドを用いて R=30 mm カットオフ 0.8 mm と同
程度の影響内におさめるにはカットオフ値を 0.3 mm 程度にすればよいことがわ

かる。

(2) 均一形状表面粗さ突起の場合

以上は砥粒加工面のように表面粗さ曲線がランダムな性状を有する場合に

表 2.2.2 試験片表面粗さ R_a (*u*m)

-171-

ついての検討であったが,表面粗さ突起が均一 な形状で規則性を有するような加工面も多い。 そこで,代表例として 図 2.2.13 に示すように 三角形突起形状の場合についてスキッドの影響 を概算してみる。



図 2.2.13 均一形状突起と スキッドの接触

この場合,スキッドの上下変動と触針の上下変動は独立ではなく,スキッドと 触針間の距離によりスキッド使用時の自乗平均粗さ R'_{rms} が左右される。 いま図 2.2.13 において,突起間隔を l とし触針とスキッド間の距離を $nl + \Delta x$ (n = 0, 1, 2 ………) とすると $\Delta x = 0$ のとき,すなわちスキッドの上下変動と触針の 上下変動の位相が合致する場合スキッドは R'_{rms} の値を最も減少せしめる。逆に $\Delta x = \frac{1}{2}l$ のとき,すなわちスキッドの上下変動と触針の上下変動の位相が逆転 するときスキッドは R'_{rms} の値を最も増加せしめる。これらは簡単な幾何学的考 察から明らかである。そこで両者の場合の R'_{rms} を求めて真の自乗平均粗さ R_{rms}

に対する相対誤差を算出したところ,図 2.2.14 に示すように $dx = 0 \ge dx = \frac{1}{2}l$ とで正負は異なるが相対誤差はほとんど等 しい絶対値を示し,いずれの場合にも相 対誤差の絶対値は非常に小なることがわ かる。たとえば $\frac{l^2}{hR_x} = 0.025 (R_x = 40 mm, l = 0.1 mm) のとき相対$ $誤差 = ± 0.16% となる。なお <math>R'_{rms}$ の計 算にあたってはスキッドが突起頂点にし か接触しないとの仮定をおいて概算した

 $\frac{l^2}{hR_{\pi}} < 4$



が、この仮定の成立条件は次式で表され、通常の場合これは十分満足されている。

-172 -

(2.2.7)

以上から均一形状突起の場合、スキッドの影響は無視できることがわかる。

(3) 特殊形状スキッドについて

(a) 触針の両側にスキッドがある場合

図2.2.15 に示すようにトレース方向に触針をはさんで両側にスキッドが ある場合には、スキッド上下変動の影響は単一スキッド の場合に比べ低減される。たとえば同一形状スキッドが 触針から等距離離れた位置にある場合について単純な計 算を行うと、スキッドの上下変動に起因する触針の位置

での上下変動の標準偏差は単一スキッドの場合の半分になる。

(b) スキッドと触針の位相が一致する場合

曲面の表面粗さを測定する場合に使用するスキッドではマタギスキッドに 見られるようにスキッドの中心線と触針の位置とが一致している。この場合,幾 何学的にランダムな性状を有する面を測定するにしても,スキッド上下変動と触 針の上下変動とが必ずしも独立とは考えられないため,式(2.2.1)の妥当性が問 題になる。

そこでスキッドと触針の位相の一致が R_{ms} に及ぼす影響をシミュレーション 計算により考察する。すなわち狭帯域パワースペクトル分布を有する表面粗さ曲 線を正規乱数を用いて計算機内

で発生させ、スキッド上下変動 に対する触針の相対的変位を求 め、その自乗平均値 R'rms を計 算する。その結果、図 2.2.16 に示すようにスキッドと触針間 の距離の影響は R'rms の値にほ とんど見いだされない。すなわ ち表面粗さに起因するスキッド



図 2.2.16 スキッドと触針間の距離と R'rmsの関係 白色性帯域制限スペクトル分布の 下限周波数 20 (mm¹)

上限周波数 40 (mm⁻¹)

-173-

上下変動が R_{rms} に及ぼす影響を理論的に推定するには,たとえスキッドと触針 の位相が一致していても,スキッドと触針の上下変動が互いに独立であると見な して 図 2 .2 .2,図 2 .2 .3 を用いて概算しても十分な精度が得られることがわかる。

(4) 突起の変形の影響

以上の解析はすべて突起の変形を無視したものであるが、現実のスキッド には軽荷重(50gf程度) ではあるが負荷が作用するため突起の変形の影響を検 討する必要がある。第1編3.5.3によると方向性のある表面粗さの場合、50gf 程度の測定荷重では突起の変形を考慮に入れても a_{zip} はほとんど減少しないこと が予想される。一方、方向性のない表面粗さの場合、図1.3.37に見られるよう に 50gf 程度の測定荷重では a_{zis} は突起の変形がない場合に比べ40%前後減少 ($a_s = 1 \mu m$)する。

以上から、表面粗さ測定におけるスキッド上下変動の影響を考える場合、方向 性のある表面粗さについては前述の解がほぼそのまま現実の問題に適用できるが、 方向性のない表面粗さについては突起の変形のためスキッド上下変動の標準偏差 は減少し、スキッド上下変動の影響は前述の解析結果より小になることがわかる。 すなわち、方向性のない表面粗さの場合の解析結果はスキッドの影響の最大値を 推定することにのみ意味がある。なお、方向性のない表面粗さの場合にも図2.2. 5、図2.2.7、図2.2.8 に見られたように実測値と突起の変形を無視した理論値 がかなり良好な一致を示していた。これは湿式ラップ仕上面が完全な無方向性の 面ではないために、突起の変形の影響が図1.3.37 ほど顕著ではなかったことに よるものと考えられる。

2.2.3 MシステムとEシステムの比較

表面粗さの規格は基準線の取り方により分類するとMシステムとEシステムの2種類に分けられる。Mシステムは JIS, ISO, DIN, BS など一般的に広く用いられており表面粗さ曲線の中心線を基準線にして定められた表面粗さ 測定方式である。一方, Eシステムは VSM (スイス), UNI (イタリー) な

-174-

どのきわめて限られた国で用いられている方式で、断面曲線上に一定半径の円を 転がし、この円の中心が描く軌跡を表面上に移動させ、この曲線(包絡線)を測 定の基準とする表面粗さ測定方式である。Eシステムを採用している国はきわめ て限られてはいるがEシステムに関する研究^{9,10,10}は現在も進められており両シス テムの優劣はいまだ結論がでていない¹²⁾。そこでE、M両システムの表面粗さ表示 間の換算方式を検討することは意味のあることと考えられるが、この問題に関す る従来の研究としては各種加工面についての実験的な比較例やシミュレーション 計算を用いた検討が見られる程度である。ここでは、主としてEシステムの代表 的粗さである平滑粗さ *R*_{p(E)} (*Mittere Rauhtiefe*) とMシステムの中心線平均粗 さ *R*_{aut} との関係について理論的考察を試みる。

なお,EシステムとMシステムの区別のため R_p , R_a にそれぞれ添字 ω , ω をつける。

2.2.3.1 理 論

R_{p(E)} は 図 2.2.17 に示すように断 面曲線(あるいは機械表面)に接する転 がり曲線を基準とし、この曲線と断面曲 線との間の距離の平均値でもって定義さ れている。この *R_{b(E)}の値は表*面うねりの





影響が無視できると仮定すれば、図 2.2.17 から明らかなように表面粗さ曲線の 中心線と転がり曲線の中心線との間の距離と等価である。

転がり曲線の中心線高さは第1編第3章で最初の接触位置の平均値として理論 的に求まっている。

ところで, R.E.Reason の分類¹³ に従うとEシステムはつぎの2種類に分類で きる。 a) 2次元的断面曲線をもとに作図的にあるいは計算により転がり円軌跡 をもとめその曲線を基準とする方式(転がり円方式と呼ぶ)。 b) 球形触針で試 料面上をすべらし(あるいは転がし)その軌跡を基準とする方式(転がり球方式

-175-

と呼ぶ)。

前者の転がり円方式の場合には2次元的表面粗さと円との幾何学的接触を考え ればよいため、転がり円曲線の中心線の高さとしては方向性のある粗い平面と球 の接触における最初の接触位置の平均値 Z_{ip}の理論値を採用でき、後者の転がり 球方式の場合は3次元的表面粗さと球との幾何学的接触になるため、R_{p(E)} は方向 性のある面、ない面について分かれ、それぞれ第1編第3章の Z_p, Z_{is} の理論値 から推定できる。

しかし, Eシステムの規格, Eシステムに関する研究, 市販の測定器等はほと んど前者の転がり円方式であるのでここでも主として転がり円方式について考察 する。

(1) 転がり円方式の Rp(g)

Z_{ip} は突起頂点の平均高さを基準にした最初の接触位置の平均値なので R_b との関係としては次式のように表される。

 $R_{p(\underline{e})} = \overline{Z_{ip}} + \overline{h_p} \tag{2.2.8}$

ここで, h, は表面粗さ曲線の中心線を基準にした突起頂点平均高さを表す。

上式において、 $\overline{Z_{ip}}$ に理論結果から求めた近似式 (1.3.18)を、 \overline{h} に実験式 (1. 3.27)をそれぞれ代入し、 $\sigma_p \ge R_{alup}$ の関係を式 (1.3.20)、(1.3.26) から求め ると、 R_{bla}/R_{alup} は $\sigma_s^* n_b^{*2}$ の関数として表さ

-176-

れる。この関係を図示すると,図 2.2.18 に 見られるように op^{*} n^{*2}大なるほど R_{p(E)}と R_{a(M} の比は大になることがわかる。

いま, みとかの関係として研摩布仕上面に 関する実験式 (1.3.24)を用いると 図 2.2.18 の横軸は半径 R_xのみで表される。その結果, R_x大なるほど R_{b(g)} と R_{a(y)}の比は大になり,



図 2.2.18 R_{p®}と R_{aM}の関係 (方向性あり)

通常用いられている $R_x = 25 mm$ の円の場合, $R_{p(x)} \ge R_a$ の関係は次式で表されることがわかる。

 $R_{p(E)} = 2.3 R_{a(M)}$

(2) 転がり球方式の R_{p(E)}

一方向に方向性のある表面粗さ については、転がり球方式の場合でも *R*_{p(g)} は (1) と全く同じに扱えるので方 向性のない表面粗さについて考える。

方向性のない表面粗さに関する最初 の接触位置の平均値 \overline{Z}_{is} は表面粗さ曲 線の中心線を基準にしているため $R_{p(E)}$ と等価と考えられる。そこで, 式 (1.3.19) と式 (1.3.20) を 用いて \overline{Z}_{is}/R_a , すなわち $R_{p(E)}/$ $R_{a(M)}$ を求めると 図 2.2.19 が得 $\mathbb{Q}_{a(X)}^{\mathbb{Q}}$ られる。

なとれの関係として、湿式ラ
ップ仕上面に関する実験式(1.
3.25)を用いると、図 2.2.19
の横座標は球の半径 R で表され、

(2.2.9)

(2.2.10)



図 2.2.20 R_{p(E)} と R_{a(M}の関係 (砂吹仕上面)

また砂吹仕上面⁴⁰ に関する式 (1.3.21) および式 (1.3.23) を用いると 図 2.2.19 は 図 2.2.20 のように表される。

両図から、R = 25 mm の場合、ただし $0.02 \mu m < R_{a(m)} < 30 \mu m$ 、

$$R_{p(E)} = 3 \sim 4 R_{a(M)}$$

となることがわかる。

-177-

2.2.3.2 実 験

実測した断面曲線から転がり円方式に従って R_{p(g)} を計算機で算出し図 2. 2.18 の妥当性を検討する。

各種研摩布仕上面の断面曲線を触針式表面粗さ計で測定しこれを AD 変換によ りデジタル化したデータを用い、計算機で転がり曲線を算出する。そして R_{p(E)}を 計算すると同時に R_{a(M} も計算し R_{p(E)}/R_{a(M} を求める。なお、実験に用いた試験片 の表面粗さは表 2.2.2 と同一であり測定長は 5 mm である。

図 2.2.21 に実験結果を示すが、 理論値と実測値はかなり良く一致 している。また、試料面の R_{a(M}) 値と R_{p(E}/R_{a(M}) とはほぼ無関係で あることがわかる。Von Weingraber⁹⁾は研削、切削、ラップ仕上面 等の各種加工面について R_{p(E)}/R_{a(M}) を実測しているが、その平均値を 参考までに 図 2.2.21 中に黒丸印 で示す。この値もかなり理論値と



良い一致を示している。以上から、図 2.2.18 で R_{b(E)}/R_{a(M)}の推定を行うことの妥 当性が確かめられたものと考えられる。

2.2.3.3 考 察

Eシステムにおける平均粗さ $R_{a(E)}$ に関する考察,および,均一形状表面粗 さ突起を有する面における $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ についての考察を試みる。

(1) $R_{a(E)}$ について

Eシステムにおける平均粗さ Race は、転がり曲線を被測定面の表面に垂直 な方向に平行移動させその曲線と断面曲線で囲まれる面積が転がり曲線の両側で 等しくなるようにした場合、この転がり曲線を基準にした断面曲線の平均偏差と

-178-

して定義されている。このため $R_{a(e)}$ は幾何学的には前述のマタギスキッド使用時 の中心線平均粗さ $R_{a(M)}$ と同一になる。マタギスキッド使用時の $R_{a(M)}$ は 図 2.2.16 に見られたように独立スキッド^{註)}使用時の $R_{a(M)}$ とほとんど差がない。結局,表面 うねりが無視できる場合には $R_{a(e)}$ は幾何学的には独立スキッド使用時の $R_{a(M)}$ と ほぼ同一と考えられ,スキッドを使用しない場合の $R_{a(M)}$ と比べても 10 % 程度大 なる値になるにすぎないことが図 2.2.2 からわかる。

しかし表面うねりが無視できない場合には、Mシステムの電気的フィルタとEシステムの転がり円とでは表面うねりに対するカットオフ特性が異なる(2.3.3. 3参照)ため、 $R_{a(E)} \ge R_{a(M)}$ の関係は複雑になり前述のような一般的な形に表せない。このことは $R_{p(E)} \ge R_{a(M)}$ の関係においても同様に考えられる。

(2) 均一形状表面粗さ突起の場合

三角形,あるいは sin 波形の規則的な突起を有する表面粗さの場合につい て R_{b(b)} / R_{a(M)}を概算すると次式が得られる。

(三角形突起の場合)

(sin 波形突起の場合)

 $\frac{R_{p(E)}}{R_{a(M)}} = 2 - \frac{l^2}{12R_x h_p}$ (2.2.11)

$$\frac{R_{p(E)}}{R_{a(M)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi l^2}{48R_x h_p}$$
(2.2.12)

ただし

 $l^2 \ll Rh_p$ l : 突起間隔

h_p:突起頂点高さ(表面粗さ曲線の中心線を基準にとる)

以上から均一形状表面粗さ突起の場合はランダムな性状を有する面の場合に比べ $R_{p(E)}/R_{a(M)}$ の値が低めになることがわかる。 $R_{a(E)}$ についても上式のような近似を行うと $R_{a(E)}$ と $R_{a(M)}$ はほぼ等しいことがわかる。

註)スキッドと触針がトレース方向に離れていて両者の上下変動が独立とみなせるようなスキッド方式

-179-

2.3 転がり円うねりに関する基礎的考察

表面うねりを測定する方式として、*JIS* では電気的フィルタにより表面粗さ 成分を取り除くろ波方式と、転がり円軌跡として表面うねりを測定する転がり円 方式とが並列に定められている。ところが、この両方式間の相関、転がり円測定 用円板半径の選択基準等については何ら示されておらず、この問題に関する研究¹⁵⁰ もあまり報告されていない。転がり円うねり方式の最大の問題点は、うねり成分 のほかに表面粗さによっても円板が上下変動し、測定値の中に表面粗さ成分が含 まれてしまう点と考えられる。

そこで本節では、ろ波方式と転がり円方式の関係、転がり円測定用円板半径の 選択基準の問題に対する基礎的考察として転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗 さの影響、および転がり円の周波数特性を定量的に把握することを試みる。

なお、転がり円うねり曲線は円板を用いて測定するため、ここでは断面曲線と 円との2次元的接触状態のみを想定する。

2.3.1 転がり円中心線うねりに及ぼす表面粗さの影響¹⁰⁾

転がり円中心線うねり W_{EA} は転がり円曲線の平均偏差で定義されているから, W_{EA} と表面粗さの関係は第1編第3章の最初の接触位置の解析における中心線平均値 C_{zip} と表面粗さの関係と同等と考えられる。

図 1.3.7 において ζ_{zip} を W_{EA} とし、式 (1.3.20)、(1.3.26) を用いて σ_p を R_a で表し、 σ_p と n_b の関係として式 (1.3.

24)を用いると WEA と Ra の関係 が 図 2.2.22 のように定まる。

JIS B 0610 によると、転がり円 の曲率半径 R_x として 0.08 mm ~ 25 mm 間の 6 種類が定められており、市販の 測定器(小坂製作所 SE型)では $R_x =$ 0.8 mm の 1 種類が用いられている。



及ぼす表面粗さの影響

-180-

図 2.2.22 から明らかなように、 $R_x = 0.8 \ mm$ の場合 R_a 値の 80% 弱もの値が W_{EA} 値中に含まれることになり、表面粗さの影響が無視できない。それどころか、 表面うねりの小なる面を測定している場合には表面粗さそのものを測定している ことになる。また、規格における R_x の最大値 $R_x = 25 \ mm$ の場合でも、 W_{EA} 測定 値の中に R_a 値の 50% 程度の表面粗さ成分が含まれることになり、表面粗さの影 響が無視できないことがわかる。なお、旋削仕上面等のように規則性を有する表 面粗さの場合には W_{EA}/R_a は次式のように表される。

$$\frac{W_{EA}}{R_a} = 0.032 \frac{l^2}{R_x h} \tag{2.2.13}$$

ただし,表面粗さ突起の形状は 図 2.2.13 のように三角形を考え/は突起間隔, hは中心線を基準にした突起高さを表す。

 $R_x = 0.8 mm$ の場合を考えると,

 $\frac{l^2}{h} < 2.5$ (2.2.14)

なる条件のもとでは

$$\frac{W_{EA}}{R_{e}} < 0.1 \tag{2.2.15}$$

となり,規則的な表面粗さについてはきわめて粗い面の場合以外は WeA に及ぼす 表面粗さの影響は無視できる。

2.3.2 ろ波中心線うねりと転がり円中心線うねりの関係

転がり円うねり曲線は前述のように表面粗さの影響を強く受け、これをフィルタと見なした場合のろ波特性も後述するようにきわめて複雑である。そのため Wea とろ波中心線うねり Wa の関係を理論的に解析するのは非常に困難である。

ここでは、W_c 測定におけるカットオフ波長とW_e 測定における円板半径との 間の関係の概要を実験により把握することを試みる。

中心線うねりは平均偏差で定義されているが、フィルタリング等の理論的取扱 いには標準偏差の方が適している。そこで新たに転がり円うねりの標準偏差(Wes)

-181-

とろ波うねり曲線の標準偏差(Wes)とを定義する。

転がり円中心線うねり(Wea)と転がり円うねりの標準偏差(Wes)の関係を考え るに、それぞれに相当すると考えられる最初の接触位置の中心線平均値 ζ ニュ と標 準偏差 σ_{zip} が図 1.3.7 に見られるようにほぼ比例関係にあることから,W_{EA}とW_{ES} もほぼ比例関係が成立すると思われる。すなわち Wea と Wea の関係の代わりに、Wes とろ波うねり曲線の標準偏差(Was)の関係について考察を行う。

種々の表面粗さを有する研摩布仕上面の断面曲線 を触針式表面粗さ計で実測し、この断面曲線をもと に 図 2.2.23 に示す手順で Wes と Was を算出する。 すなわち、断面曲線をもとに幾何学的に転がり円軌 跡を求め,この転がり円と断面曲線のパワースペク トルを高速フーリエ変換および赤池ウィンドウを通 |断面曲線のパワースペクトル| | FFT| じて計算する。

振幅減衰率 - 12 dB/oct に相当する低減フィルタ の特性を式で表し、前節の図2.2.9で行ったと同様 に断面曲線のパワースペクトルにこのフィルタのゲー

インをかけることによりWcs を求める。一方,Wes は転がり円のパワースペクト ルを積分することにより計算する。そして、転がり円半径 R₂ や低減フィルタのカ ットオフ値を種々に変化させ、それ

-182 -

ぞれの W_{cs}/W_{es} の値を計算する。

一例として Ra=1.7 µm の断面曲 線に関する Wes/Wes の計算結果を図 2.2.24 に示す。この図から種々の R_x について $W_{cs} = W_{Es}$ になるような 低域フィルタのカットオフ値(相当 カットオフ波長と呼ぶ)が求まる。



図 2.2.23 W_{CS}/W_{ES} 計算手順



図 2.2.24 転がり円方式と電気的フィルタ方式の 比較例 $R_a = 1.7 \,\mu m$

このようにして各種の研摩布 仕上面,研削仕上面に関する相 当カットオフ波長を求めた結果 を図2.2.25 に示す。この図か ら,円板の半径を大にすること はカットオフ波長を長くするこ とに相当することがわかる。市 販の測定器の場合,ろ波うねり の高域カットオフ値と転がり円 うねりの円板半径をいずれも



図 2.2.25 転がり円方式に相当するろ波方式のカット オフ値 (記号は表 2.2.2参照)

0.8mm 一定にしているが、この図から、カットオフ値と円板半径を同じ値にすることは全く意味がなく、カットオフ値 0.8mm に対しては円板半径 R_x は数 10 mm にすべきであると考えられる。

図 2.2.25 で W_{Es} と W_{cs} の関係の概略はつかめるが,計算値がかなりばらついている。そこで,この図の精度を上げるために W_{Es} の値に含まれる表面粗さの影響を次式で取り除くことを試みる。

-183-

 $W_{ES}^{\prime 2} = W_{ES}^2 - \sigma_{zib}^2$

(2.2.16)

W^{'s} は表面粗さの影響を取り除 けたものと想定した転がり円う ねりの標準偏差。*σ*_{zi}, は表面粗 さのみによる転がり円曲線の標 準偏差で,最初の接触位置の標 準偏差に関する理論式(1.3.18) から求まる。

このようにして求めた*W*[']_{ES}を



用い, 図 2・2・24 と同様の方法で相当カットオフ波長を計算した結果を 図 2・2・26 に示す。 図 2・2・26 は 図 2・2・25 に比べて計算値のばらつきは全く減少していな い。前式は表面うねりによる転がり円曲線と表面粗さによる転がり円曲線とが独 立であると仮定した上での補正式であったが, この図はこの式の妥当性を否定し たもので転がり円曲線の複雑性を示唆している。

そこで、つぎに転がり円曲線の特性を少し細かく検討する。

2.3.3 断面曲線のパワースペクトルと転がり円曲線の標準偏差の関係

前述のように表面粗さやうねりを有する断面曲線に対する転がり円うねり 曲線の特性は、かなり複雑であることが予想される。また規格においても表面粗 さと表面うねりとの境界の波長そのものが明確でないため、図2.2.22 や図2.2. 25 はあくまでおおまかな目安にすぎない。そこで、ここでは表面粗さ、表面う ねりのような分類はせずに、転がり円曲線の基礎的特性を把握するため、任意の パワースペクトル分布を有する断面曲線と転がり円曲線の標準偏差(og とおく) の関係について考察を試みる。

2.3.3.1 理 論

第1編第3章の方向性のある表面粗さを有する平面に関する最初の接触位 置の標準偏差 σ_{zip} の解析結果を用いて、帯域制限白色スペクトル分布を有する断 面曲線に対する転がり円曲線の標準偏差の推定を試みる。

最初の接触位置の理論は、突起頂点高さ分布を正規分布と、また突起間隔分布 をワイブル分布と設定し、球(あるいは円)が突起頂点のみと接触すると仮定し ての解析であるから、一般的なスペクトルを有する場合にはそのままでは適用で きない。ここでは σ_E = σ_{zip} と見なし、つぎの2種類の便法で σ_E を推定する。そし て、この両者の結果と σ_E に関するシミュレーション計算結果との比較により妥当 な近似解法を探す。

(1) 突起頂点分布基準

o_{zi},は突起頂点高さの標準偏差と突起密度の関数として表されている。そ

-184-

こで、スペクトル分布から突起頂点高さの標準偏差 \mathfrak{g} と突起密度 n_p を求め、この \mathfrak{g} 、 n_p を用いて \mathfrak{g}_{zip} の理論計算を行い $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$ を推定する。

D.E. Cartwright¹⁷によると、正規過程と見なせるような断面曲線において任意のスペクトル分布に対するみおよびなは次式で求まることが示されている。

$$\sigma_{p} = \left\{ 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(1 - \varepsilon^{2}\right) \right\} \sigma \qquad (2.2.17)$$

$$n_{p} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_{4}}{m_{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2.18)$$

ててで,

$$\epsilon = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}$$

 $m_n = \int_0^\infty S(\omega) \, \omega^n \, d\omega$

 $S(\omega): パワースペクトル分布$

σ :断面曲線の標準偏差

スペクトル分布 $S(\omega)$ から $\epsilon \ge m_n$ を求め、式 (2.2.17)、(2.2.18) に代入する ことにより q_n , n_p が算出できる。この q_p , n_p を用いて式 (1.3.7) ~ (1.3.9) から $\sigma_B(=\sigma_{zip})$ を推定する。

なお,頂点のみで接触すると設定しているため,転がり円半径 R_{α} (あるいは突 起密度)が非常に小なる場合には上記の解析では $\sigma_{E} > \sigma$ になる。しかし実際に は半径がきわめて小になると,表面粗さ計の触針のように円が断面曲線上を添っ て変動するから $\sigma_{E} = \sigma$ となる。そこで $\sigma_{E} > \sigma$ になる範囲はすべて $\sigma_{E} = \sigma$ とみなす。 つぎに示す零交さ数基準の解析においても $\sigma_{E} > \sigma$ の領域では同様の処理を行う。

(2) 零交さ数基準

第1編第3章の σ_{zip}の解析にあたっては,表面を高さが正規分布をなす独 立な点のみで構成されていると設定しこの点を頂点とみなしていたが,必ずしも 頂点と限定せずに単に断面曲線上の独立な点と考えても同一の結果が得られるは ずである。

そこで, 突起頂点高さの標準偏差の代わりに断面曲線の標準偏差σを, また突起

-185-

密度の代りに独立な標本点密度を考え、 $\sigma_E (= \sigma_{zip})$ を式(1.3.7)~(1.3.9)から 推定する。標本点密度は連の理論を適用して断面曲線の零交さ数 n_0 の2倍の値を 採用する。なお、 n_0 は次式^{B0}を用いて断面曲線のスペクトル分布から計算できる。

$$n_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_2}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.19}$$

ここで、*m*₀,*m*₂は式(2.2.18)と同じく0次、2次モーメントを表す。

以上,(1),(2)の推定方式はいずれも理論的厳密性に欠けるため、シミュレー ション計算との比較を通じてどの推定方式が妥当であるかを検討する。

2.3.3.2 シミュレーション計算結果との比較

シミュレーション計算手順の概略を示す。計算機内で正規性白色雑音を発 生させ、この雑音をたたみこみ積分することにより所定の帯域制限白色スペクト ルを有する断面曲線を作る。この断面曲線に対する転がり円曲線を求めその標準 偏差 og を計算する。

以上の手順で求めた σ_{a} と,頂点分布基準および零交さ数基準から推定した σ_{a} の 比較を行った結果を 図 2.2.27 に示す。図中において f_{a} , f_{b} は帯域制限スペクト



図 2.2.27 零交さ数基準と頂点分布基準の比較 $f_b = 2 f_a, \sigma = 1 \mu m$

-186-

ル分布の周波数領域の下限と上限を表し、実線は零交さ数基準から求めた σ_{E} ,破線は頂点分布基準から求めた σ_{E} ,また丸印はシミュレーション計算から求めた σ_{E} を示す。

頂点分布基準より零交さ数基準の方がシミュレーション結果に近い値を示して いる。頂点分布基準方式で大きな誤差を生じた原因としては,断面曲線の波長が 長くなると頂点以外の所で球と断面曲線の接触を生じる確率が高くなることと, 帯域制限スペクトルを有する断面曲線の頂点の分布が正規分布をなさないことに よると考えられる。

零交さ数基準による og はシミュレーション結果よりいくぶん大なる値を示して はいるが、この差はわずかであり、このような白色性帯域制限波形に対する og の 推定としてはほぼ満足できるものと

考えられる。

図 2.2.27 は $f_b = 2f_a$ の場合につ いての比較であったが、つぎに帯域 幅を変えた場合における零交さ数基 準による σ_b の推定の妥当性を検討す る。図 2.2.28、図 2.2.29、図 2.2. 30 にそれぞれ $f_b = 1.5f_a$ 、 $f_b = 3f_a$ 、



図 2.2.28 $\sigma_{\rm E}$ に関するシミュレーション結果 と理論値の比較 $f_{\rm b} = 1.5 f_{\rm a} \sigma = 1 \mu m$



 $f_b = 3 f_a \sigma = 1 \mu m$



図 2.2.30 の に関するシミュレーション結果 と理論値の比較

 $f_b = 4 f_a \sigma = 1 \mu m$

 $f_b = 4 f_a$ の場合の σ_B のシミュレーション結果と零交さ数基準による推定結果を示す。

帯域幅が拡がるほどシミュレーション結果が理論的推定結果より低くなる傾向 を示している。これらの結果から $f_b \leq 3f_a$ 程度までは、零交さ数基準で推定でき ることがわかる。

2.3.3.3 考 察

上述の理論結果の整理を行うほかに,方向性のない面に関する og の推定, 表面おうとつの標準偏差と転がり円曲線の標準偏差が等しくなる条件等について 考察を行う。

(1) 2次元断面曲線(あるいは方向性のある表面おうとつ)に対する o_E

上述の零交さ数基 準の理論結果をまとめる と図2.2.31のようにな る。横軸の*f_m*は帯域制 限スペクトルの中心周波 数を表す。この図は各種 断面曲線の中心周波数, 帯域幅,標準偏差に対す る転がり円のろ波特性を 表すもので,*f_mやoが*大



なるほど,またR大なるほど σ_E/σ が小になることがわかる。また, f_m 一定なら 帯域幅が変化しても σ_E/σ はほとんど変化しないことがわかる。

(2) 3次元的(あるいは方向性のない)表面おうとつに対する or

帯域制限スペクトル分布を有する方向性のない表面に球を転がす場合の転がり円曲線の σ_Eを,第1編第3章の方向性のない表面粗さに関する最初の接触位置の標準偏差 σ_{zis} から推定する。この問題は転がり円うねりとは関係がないが,

-188 -

表面粗さ測定時の触針の追従性やスキッドの上下変動等の問題に関連するので考 察を行う。

推定方法は2次元の場合と同様で,まずスペクトル分布から零交さ数 %を求める。そして表面単位の面密度 %を次式で推定し,

$$n_s = 4 n_0^2 \tag{2.2.20}$$

式 (1.3.8) と (1.3.17)を用いて σ_{zis} , すなわち σ_{E} を求める。このようにして求めた結果を 図 2.2.32 に示す。この図は 2 次元の場合の 図 2.2.31 と定性的には同じ傾向を示しているが、 σ_{E} の値は 図 2.2.31 の場合より低い値を示している。



(3) 断面曲線と転がり軌跡の標準偏差が等しくなる条件

図 2.2.31, 図 2.2.32 から断面曲線と転がり軌跡の標準偏差が等しくなる 条件, すなわち $\sigma_{E} = \sigma$ になる条件を求める。 図 2.2.33 にこの条件を表す。実線 は方向性のある面の場合で,破線は方向性のない面の場合を示し,表面の幾何学 的性状がこれらの直線の左側の領域にあれば $\sigma_{E} = \sigma$ が成立する。

転がり円うねりの問題に関連させてこの図を見ると、表面うねりの中心周波数によって円板の半径を変えるべきであることがわかる。どの程度の周波数成分を

-189-



図 2.2.33 断面曲線の標準偏差と転がり軌跡の標準偏差が 等しくなる条件

表面うねりと考えるかは、加工法、表面の機能等の観点から決定すべきものであ るが、それが定まれば 図 2.2.33 はその周波数に応じた円板半径を選ぶための目 安となる。

表面粗さ測定時の触針半径の影響,すなわち触針の表面追従性の問題に関連させて 図 2.2.33 を見ると,この図は自乗平均粗さや中心線平均粗さを測定する場合の触針半径に対する測定可能な被測定面の周波数限界を示している。

方向性のない面と方向性のある面の例として研摩布仕上面および湿式ラップ仕 上面を考え,それぞれに関する実験式,式(1.3.24),式(1.3.25)を用いてこれ らの加工面に関する触針の追従性を検討する。両実験式から近似的に次式が導か れる。

研摩布仕上面の場合

 $\sigma f_m^2 \approx 1.28$

(2.2.21)

湿式ラップ仕上面の場合

$$f_m^2 \approx 1.13$$

(2.2.22)

-190-

これを 図 2.2.33 にプロットすると、両者ともほぼ $R = 2^{-8}$ のときの破線(方向 性のない面の場合の理論値)に近い値を示す。市販の表面粗さ計では触針半径 $R = 2^{-8} mm (4 \mu m)$ 前後の触針を用いている。この場合、研摩布仕上面に関し ては $\sigma_E = \sigma$ が成立する境界線と十分離れており問題はないが、湿式ラップ仕上面 に関しては境界線とほとんど一致しており、この半径は限界の触針半径というこ とになる。

従来,触針の追従性についての理論的研究は一方向にのみ方向性を有する表面 粗さに関するものが大半であったが、この図にみられるように、この問題は方向 性のない表面粗さの場合の方がより重要であると考えられる。

2.4 結 言

第1編の最初の接触位置の解析結果を用い,あるいはさらに理論を発展させる ことによって,表面おうとつの測定精度に関する種々の幾何学的問題について理 論的考察を試みた。その結果の要点を以下に示す。

(1) 表面粗さ測定精度について

- i) 自乗平均粗さ R_{rms} や中心線平均粗さ R_a に及ぼす触針半径の影響が定量的に 表され、方向性のない表面粗さを測定する場合、触針半径の影響に留意する必 要があることが明らかになった。
- II) スキッド上下変動の R_{rms}, R_a, R_{max}, R_z に及ぼす影響が定量的に表され、この影響は方向性のある表面粗さについて R_{max}, R_z を測定する場合に顕著に表れることが明らかになった。
- ■) EシステムとMシステムの比較

Eシステムの平滑粗さ R_{b(E)}とMシステムの中心線平均粗さ R_{a(M)}の関係を理論的に解析した結果,両システムの換算方式が明らかになった。

- (2) 転がり円うねりについて
- i) 転がり円中心線うねり Wea に及ぼす表面粗さ Ra の影響が定量的に求まり,

-191 -

WEA には表面粗さの影響が強く表れることが明らかになった。

- ii) ろ波中心線うねりと転がり円中心線うねりの関係が実験を通じて明らかになると同時に、市販の測定器に見られるように電気的カットオフ値と同じ値の半径の触針を用いた転がり円うねり測定方式では、電気的フィルタのカットオフ 特性に対応させるには極端に半径が小さすぎることが明らかになった。
- ■)任意の帯域制限スペクトル分布を有する断面曲線に対する転がり円の標準偏差を理論的に推定することが可能になり、断面曲線に対する転がり円のろ波特性が明らかになった。

参考文献

- 1) R.G.Quiney: ASLE Trans., 10, 2 (1967) 193.
- 2) J.L.Guerrers: Trans. ASME Ser. B, 94, 4 (1972) 1087.
- 3) S.Ajioka: Bull. Jap. Soc. Precision Engng., 1, 4 (1966) 228.
- 4) 中村: 精密機械, 26, 2(1960) 86.
- 5) D.J.Whitehouse and J.F.Archard: Proc. R.Soc. Lond. Ser. A,, 316, (1970) 97.
- 6) V.Radhakrishnan: Wear, 16, 5 (1970) 325.
- 7) J.Nara: Bull. Jap. Soc. Precision Engng., 1, 4 (1966) 4.
- 8) 石垣,川口: 昭和52年度精機学会春季大会学術講演会前刷集(1977)239.
- 9) H.Von Weingraber: Microtecnic, 11, (1957) 6.
- 10) V.Radhakrishnan: Proc. I. Mech. E., 187, (1973) 575.
- M.S.Shunmugam and V.Radhakrishnan: Proc. I. Mech. E., 188, (1974) 691.
- 12) T.R.Thomas: Wear, 33, (1975) 205.

-192-

- 13) R.E.Reason: Ann. CIRP, 19, (1971) 559.
- 14) 久門: 日本機械学会論文集, 35, 272 (1967) 861.
- 15) J.Nara: Ann. CIRP, 19, (1971) 687.
- 16) 石垣,川口:昭和52年度精機学会秋季大会学術講演会前刷集,(1977)107.
- 17) D.E.Cartwright and M.S.Longuet-Higgins: Proc. Roy. Soc.Ser. A, 237, (1956) 212.
- A.Papoulis: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, Mc Graw-Hill, New York (1965) 487.

茶が

括

本研究では粗さを有する平面と球の接触変形問題を種々の表面粗さ,種々の変 形形態について解析し,その接触理論の応用として転がり抵抗に及ぼす表面粗さ の影響や表面おうとつ測定精度の問題に関する考察を試みた。その結果,所期の 目的である転がり抵抗と表面粗さの関係が明らかになると同時に以下に述べる種 々の問題が明らかになった。なお,第1編,第2編いずれも各章ごとに結論を記 述したため,ここでは本研究で明らかになった点の概要を記するにとどめる。

第1編で粗さを有する平面と球の接触変形問題を理論的に解析し,実験結果との比較によりその理論の妥当性を確認した。得られた結果の概要を以下に示す。

1) 接触突起の弾塑性変形量に対する実用式を求めることができた。

- 2) 平面と球(あるいは楕円放物面)の接触における最初の接触位置に関する種 々の統計量が理論的に推定でき、これらが唯一の等価変数の簡単な式で表され た。
- 3)種々の形態の表面粗さを有する平面と球の接触時の変形を平面と球の母材の 弾性変形、および突起の変形を考慮に入れて解析することにより近接量、真実 接触面積、接触面圧力分布、母材内部の最大せん断応力等に及ぼす表面粗さの 影響を明らかにすることができた。
- 4) 平面と球の接触における突起の変形形態に対する判定基準や母材の変形形態 に対する判定基準が明らかになった。

第2編で接触理論の応用として転がり抵抗に及ぼす表面粗さの影響と表面おう とつ測定精度の問題について理論的に考察し,実験値との比較によりその理論の 妥当性を確認した。得られた結果の概要を以下に示す。

1) 表面粗さ突起および母材の弾性回復を考慮に入れた転がり接触機構が理論的 に明らかになった。

-194 -

- 2)転がり摩擦力成分に及ぼす表面粗さの影響は接触突起の弾性変形(あるいは 塑性変形)の履歴損失と表面粗さの関係から説明できる。
- 3) 転がり摩擦力成分の平均値,および転がり抵抗の変動と表面粗さの関係が定 量的に定まった。
- 4) 表面粗さ測定時の触針の幾何学的追従特性が理論的に明らかになった。
- 5) 表面粗さ測定値に及ぼすスキッド上下変動の影響が定量的に定まった。
- 6) 表面粗さ規格におけるMシステムとEシステム間の換算方式が定まった。
- 7)転がり円うねり規格の問題点を指摘し、転がり円うねりに及ぼす表面粗さの 影響が定量的に明らかになった。
- 8) 転がり円うねり測定子の半径に対する一つの選択基準が得られた。

3

謝

辞

終りに臨み,本研究を遂行するにあたって終始変らぬ御指導御鞭撻をいただい た大阪大学 築添正教授に深甚の謝意を表すとともに,しばしば有益なる御教示 を賜わった大阪大学 牧之内三郎教授,中川憲治教授,川辺秀昭教授,津和秀夫 教授,山田朝治教授,井川直哉教授,久門輝正助教授ならびに大阪大学精密工学 教室の諸先生方に厚く感謝の意を表します。

また,多大の御助力をいただいた大阪府立大学 永田良教授,川口格助教授を はじめ大阪府立大学永田研究室の方々に厚く感謝する次第です。