OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	高次元多胞体の建築的特性とその応用に関する研究
Author(s)	宮崎, 興二
Citation	大阪大学, 1988, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1707
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

高次元多胞体の建築的特性と
その応用に関する研究

宮　崎　興　二

1987

目　　次

内容梗概 ---------- 1

1　序論 ---------- 5

2　多胞体篇

2－1　胞の建築的特性 ---------- 48

2－2　多胞体の建築的特性 ---------- 59

2－3　多胞体の射影としての建築 ---------- 71

2－4　4次元等測軸の建築への導入 ---------- 119

2－5　多胞体に関する定性的公式の建築への適用 -- 137

3　正多胞体篇

3－1　正多胞体の建築的特性 ---------- 152

3－2　正多胞体の建築的応用 ---------- 201

3－3　n（≧5）次元正多胞体の建築的特性 ------ 228

3－4　n（≧5）次元正多胞体の建築的応用 ------ 247

4　結論 ---------- 277

参考文献 ---------- 279

本論文に関連して発表した論文著書目録 ---------- 288

謝辞 ---------- 290

内　容　梗　概

表象可能な物的実体として把握される場合の建築は、一般に、有限な３次元の広がりを持つ内部空間（建築的空間）、あるいはより具体的には、その空間とそれを限る構成部材（建築的材料）、が移動や変容をくり返しながら、やはり３次元の広がりを持つ外部空間の中で互いに側面を共有し合って間隙なく連結した図形的構造を持っている。

本論文前半の多胞体篇ではこのような構造を、４次元空間、とくに距離空間としての４次元ユークリッド空間、における胞（４次元空間における超平面の部分）あるいは多胞体（４次元多面体）の、３次元空間への何らかの射影としてとらえて建築上の形象の４次元性を指摘し、その４次元性に基づいて、建築計画上の空間の図形的な解析を基礎的に試みる。そのあと後半の正多胞体篇では、多胞体のうちとくに規則的な正多胞体の正射影の概念ならびにその高次元空間への拡張を媒介として、建築における形象の図形的な意味での４次元性ないしは高次元性を具体的に応用する。

それによって、従来、３次元諸空間においての理解と創成に束縛されることの多かった建築上の形象が、４次元ないしはそれを超える高次元の空間から把握されるとき、従来より以上に精緻に解析され、また新鮮に造形されることを指摘する。

各章は以下のような内容を持つ。

１　序論

本論文の研究目的とその建築的意義ならびに既往の諸説をまとめ、用語を定義する。

２　多胞体篇

４次元空間において定義される一般的な多胞体の概念によって建築上の形象における４次元性を指摘し、その４次元性に基づいて、建築計画上の空間の図形的な解析を基礎的に試みる。

２－１　胞の建築的特性

建築上の諸形象の構成素材としての３次元の広がりを持った個々の内部空間および構成部材を、４次元空間における胞として把握し、建築の根底にある図形的な意味での４次元性を基礎的に考察する。

２－２　多胞体の建築的特性

内部空間や構成部材が一体となって移動したり変容したりする建築上の形象における図

形的な意味での４次元性を４次元空間における複数個の胞の側面を共有し合う連結体としての多胞体を媒介として、一般的に考察する。

２－３　多胞体の射影としての建築

４次元空間における各種の射影によって多胞体をさまざまな形姿の模型として３次元空間の中で表現し、その場合の模型の変化の様相を建築上の諸形象の持つ４次元的な諸相と一致させる。

２－４　４次元等測軸の建築への導入

４次元空間における直交４座標軸の３次元空間への射影としての、互いに約109°28′をなして交わる４直線を４次元等測軸と名付け、それと建築上の形象との密接な関係を指摘するとともに、その４次元等測軸を媒介として建築上の形象を４次元的に表示する。

２－５　多胞体に関する定性的公式の建築への適用

多胞体を構成する頂点、稜、側面、側胞の個数Ｖ、Ｅ、Ｆ、Ｃのあいだに位相的に成立するSchläfliの多胞体公式Ｖ－Ｅ＋Ｆ－Ｃ＝０、ならびにその変形式、が建築上の諸形象にも適用されることを示し、それによって建築の持つ４次元性を定性的に確認する。

３　正多胞体篇

多胞体のうちとくに規則的な正多胞体とその一般化としての高次元正多胞体の概念によって建築上の形象における定量的な性質を備えた４次元性ないしは高次元性を指摘し、その事実を具体的に応用する。

３－１　正多胞体の建築的特性

多胞体のうちもっとも規則性が高くかつ定量的な性質の明快な６種類の正多胞体、ならびにそれから導かれる半正多胞体と星形正多胞体、さらにはそれらの連結図形、の建築的特性を図形的に考察する。

３－２　正多胞体の建築的応用

正多胞体ならびにその関連図形の持つ建築的特性を具体的に応用する

３－３　ｎ（≧５）次元正多胞体の建築的特性

多胞体、とくに正多胞体、の持つ建築的特性を、ｎ（≧５）次元空間における高次元多胞体において、より一般的かつ系統的に見つけ出し、前章までの図形的考察を総括する。

3－4　n（≧5）次元正多胞体の建築的応用

n（≧5）次元正多胞体ならびにその関連図形の持つ建築的特性を具体的に応用し、前章までに検討してきた建築上の形象の実際的な4次元性ないしは高次元性を総括する。

4　結論

以上の諸考察による研究成果を要約する。

1　序論

1－1　研究目的
1－2　研究意義
1－3　研究範囲
1－4　既往の諸説
1－5　用語の定義

1－1　研究目的

表象可能な物的実体として把握される場合の建築は、一般に、無限な3次元の広がりを持つ外部空間の中で、有限な3次元の広がりを持つ内部空間あるいは構成部材が、時間的経過や使用状態などに従って移動したり変容したりしながら、互いに側面を共有し合って連結した図形的構造を持っている。

本論文前半の多胞体篇ではこのような構造を、幾何学上の論理に従って、4次元空間における多胞体（4次元多面体）の3次元空間への何らかの射影として把えて建築上の形象の持つ4次元性を基礎的に解析し、後半の正多胞体篇では、そのうちとくに規則的な正多胞体の正射影の概念や性質ならびにそれらのn（≧5）次元空間における一般化に基づいて、建築における形象の図形的な意味での高次元的規則性を抽出し具体的に応用する。

それによって、建築上の形象の、3次元空間からの考察では得られない具体性のある理解を図るとともに、より要求に合致した新鮮な空間を一定の秩序のもとで系統的に創成するための図形的論理を構成することが本論文の主目的である。

1－2　研究意義

本論文で把握している建築は、原則として時間的経過や使用状態などによって移動したり変容したりする有限な3次元の広がりを持つ内部空間と構成部材の、側面を共有し合う連結体である。

その場合の各空間、各部材は、点（頂点）、線（稜）、面（側面）によって限定されていて、それらによって表示され表現される。しかも、そうした点、線、面についてのみ、従来の3次元幾何が適用されて、切断とか相貫といった図形的操作が加えられ建築上の意味が与えられてきた。

しかし、現実に存在する形象は、面によって囲まれながら移動したり変容したりする空間部分ないしは質体部分なのであって、よくいわれるように、点、線、面は幾何学的論理

上の仮想の存在に過ぎない。

この矛盾を解消する一方法が本論文で試みる4次元幾何、とくに4次元ユークリッド幾何、の導入であり、その場合には、部材のみならず空間それ自体の移動や変容をも、図形的に明示し把握することが可能となる。その可能性を指摘するところに本論文の研究意義の一つがある。

そのような前提に立って本論文では一般的な多胞体に関する建築的特性をとくに規則的な正多胞体（4次元正多面体）において見ようとする。

つまり、幾何学的論理を強調して判断する場合、従来の建築上の諸形象は、究極において、正方形を中心とする2次元平面上の正多辺形、あるいは、立方体を中心とする3次元空間内の正多面体、に基づいて決定されることが多い。たとえば、平面計画における正方格子や空間計画における立方格子の重要性に見られる通りである。理由の大半は、それぞれの持つ高度の対称性と定量的かつ定性的な性質の簡潔さにある。

その正多辺形や正多面体を拡張した図形が正多胞体である。しかも正多胞体は、点、線、面といった幾何学的仮想の要素のみからなるのではなく、正多面体状をした3次元空間の部分（胞）の側面を共有し合う集合体であって、建築的形象との関連における位置は重要である。この事実を指摘することも本論文の研究意義に加えられる。

さらに本論文では、主要部分を5次元以上の高次元空間において図形的に拡張し、結果を建築上の形象の持つ高次元的規則性と具体的に関係させるが、この操作は、建築上の諸形象の全体的な総括と一定の秩序のもとでの系統的な創成のための、実用的な図形的論理を導く。この論理の提案を、本論文の最終的な研究意義とする。

1－3　研究範囲

本論文は、物的実体としての建築の、4次元あるいはそれを越える高次元の多胞体の3次元空間への各種射影に関係する図形的内容について、おもにユークリッド空間内で成立する図法幾何の範囲で建築計画的考察を行なう。

1－4　既往の諸説

本論文で中心的位置に置く正多胞体、あるいはより一般的には多胞体（Polytope, Polyhedroid)、の概念の建築への系統的な導入を試みた既往の説は、管見から判断する限り、わが国の内外を問わず皆無に近い。たとえそれに類するものがあっても、正多胞体のうちの一部分、たとえばしばしば超立方体とかn次元立方体（Hyper-cube, n-cube）などと名付けられる図形、の表層的な概念の応用などに終始している。

しかし、多胞体の基本的な構成内容、つまり、3次元空間の部分（胞）が側面を共有し

合いながら連結する空間構成、は自ら建築的な内容を持っているのであり、その事実を建築の分野において理念的にある種の４次元空間から判断し、かつそれを高次元空間へ拡張しようとした試みは、１９世紀末にモダニズム建築の萌芽が見られた時点から、すでに散見される。しかも、それは今世紀後半の情報処理技術の進歩に伴なって実際への応用を前提として数理的かつ図形的に見直され厳密化されてきている。

以上のような現象をふまえて、以下では、今世紀前半に原点を置く理念的諸説と今世紀後半に原点を置く理念的諸説ならびに今世紀を通じて見た場合の図形的内容に重点を置く諸説に区分して、本論文に関係する既往の説を概観し、その中における本論文の位置を明確にする。

（１）今世紀前半に原点を置く理念的諸説

モダニズム建築萌芽の一つの前提となったのは、建築における“空間”の認識である。Ven(1980)[1] の指摘するように、「空間の理念は、古代ギリシア時代以来、哲学や自然科学の重要な研究対象だったにもかかわらず、建築の分野では１９世紀後半になるまで現われなかった」と考えられるのであり、１９世紀末から２０世紀初頭にかけてのオランダにおける H.P.Berlageらの、幾何学的知識を基礎にした空間概念によって、初めて建築の構成要素に空間(Space) が取入れられ、モダニズム建築確立の足掛りの一つが得られたことになる。

ところが、そうした空間理念の誕生と並行するように、当時のオランダでは４次元以上の高次元図形、とくに高次元多胞体、の研究が幾何学者たちのあいだで盛んに行なわれていた。

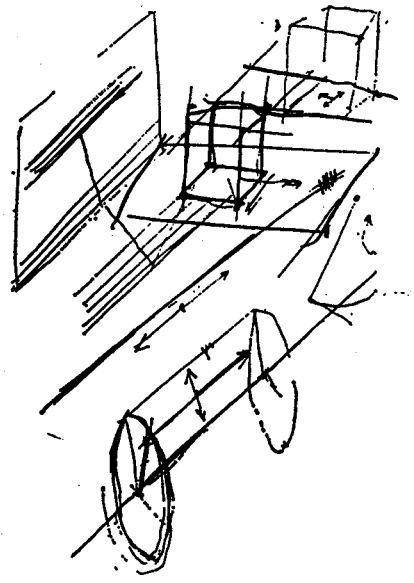
数学者 Coxeter(1978)[2]によると、任意のｎ次元正多胞体やその連結図形、半正多胞体や星形正多胞体など、高次元多胞体に関する主要な知識の大半が当時のオランダを中心に調べ尽くされていたという。

その一方では４次元空間に関係する小説や啓蒙書もいくつか出され、さらに１９０５年、 Einstein が４次元時空の概念を取り入れた特殊相対論を発表したのである。

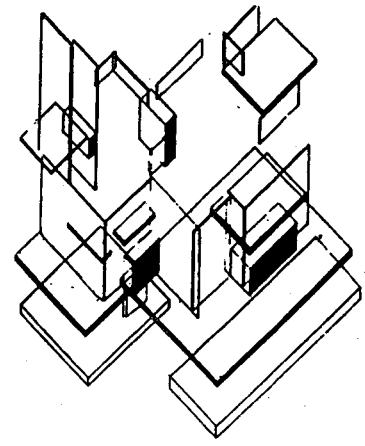
その現象に注目したオランダ人 Venは、上掲書[3]の中に“Après le cubisme : From four- to three-dimensional space”とか“De stijl : plane versus fourth dimension”といった章を設けて当時の空間理念における４次元概念の重要性を指摘している。

あげられている Cubism や De Stijl 、さらには Bauhausなど、において４次元的概念は多胞体とは関係しないまでもたえず中心的な位置を占めていた。

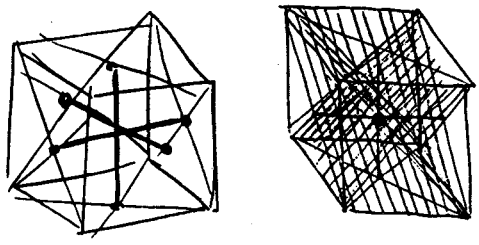
たとえば Cubism のキャッチフレーズは“第４次元(La guatrième dimension)”でありメンバーの１人 Duchamp(1977)[4]は４次元空間における図形の３次元空間への射影（図表1-1)の意味や作図法について概念的ではあるが図法幾何学的解説を残している。Adcock



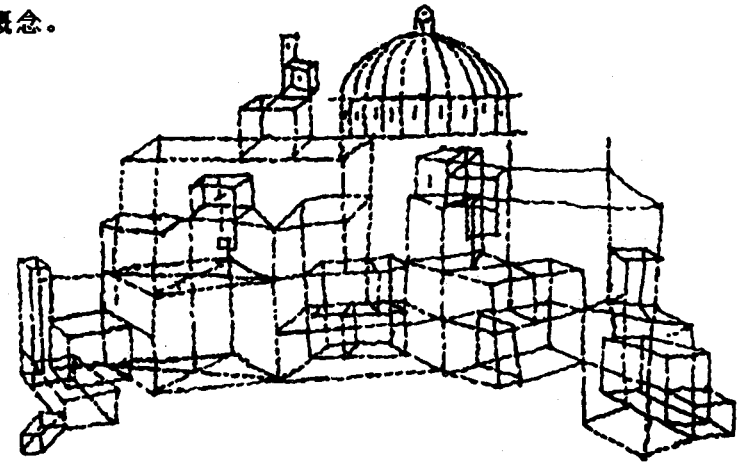
図表 1-1 M.Duchamp による
4次元空間における図形の射影の概念。
"表象の美学" (1977)より。



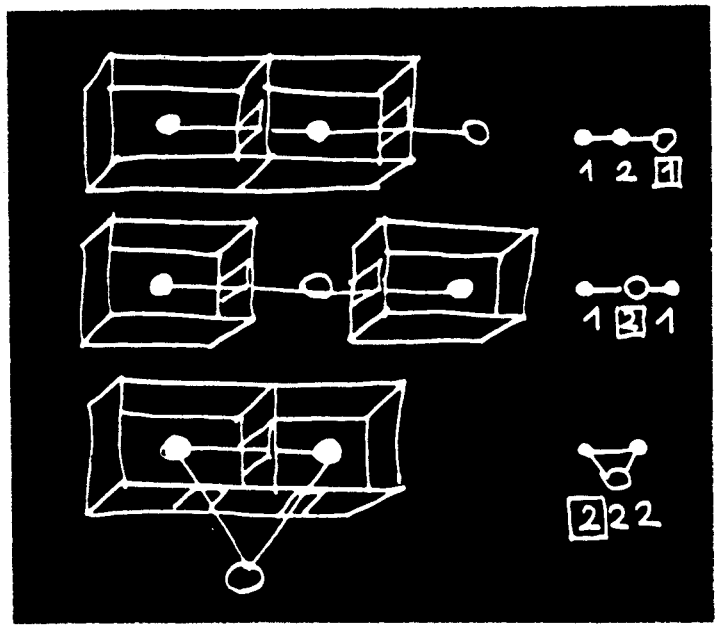
図表 1-2 T.V.Doesburg
"Counter Composition"(1922)



図表 1-3 P.Kleeによる立方体の内部のイメージ。
"造形思考 (上)"(1973)より。



図表 1-4 P.Klee "Saint A in B" (1929)
(筆者によるコピー)



図表 1-5 Y.Friedmanによる空間の表示。
Cahiers du Centre D'Etudes Architecturales 6より。

(1981)[5]によると、Duchamp の代表作である“The Large Glass ”(1915 ～23) は、E. Jouffretの“Mélanges de géométrie à quatre dimensions ”(1906)の図法幾何学的解説にしたがって制作されたという。

オランダで発刊された De Stijl 誌の中心的なテーマも、しばしば建築における４次元的概念にあった。

たとえばその Ⅵ 号の「造形的建築をめざして」(1924)[6]の中で Doesburg はいう。

「新しい建築の構成はユークリッド幾何でなく４次元を考慮した非ユークリッド幾何によって計算される」

「新しい建築は時間と空間の４次元的統一によって造形される」

「新しい建築は反立方体的であって、高さ、幅、深さに時間が加わって外へと開放され、いわば自然界の重力に抗して空間（４次元空間）に浮遊する」

「新しい建築は３次元的に固定した静的な造形を持つのではなく、空間と時間の中で多面的、動的な造形を持つ」

「新しい建築は、諸芸術を４次元的に総合するとき現われる」。

最終的にはこのような結論に行き着くことになる De Stijl 誌には、数学者 Poincaré の Dernieres Pensées(1912)における厳密な次元の定義が再録され(1923)、そのころ同誌に参画していた Kiesler は、空間に浮遊する都市を計画した。 Doesburg 自身は、Mondrianの作品の高次元化（図表1-2)を試みている。

この De Stijl と並行して活動しながらも結局協力し合うことはなかったとされる Bauhaus においても Klee(1956)[7] や Kandinsky(1926)[8]らによって、点、線、面、に続く立体（つまり本論文でいう胞）に注目が集められ、その「内部」に関心が持たれた。点が動いて線になり、線が動いて面になり、面が動いて立体となるが、その立体の内部には何があるか、そこにはどのような力が隠されているか、を議論するのである（Klee上掲書。図表1-3)。Kleeの“Saint A in B”(1929,図表1-4)には、その議論の結果としての透明な内部が４次元的に表現されている。

したがって、Ven に先立つ Giedion(1941)[9]も、「１９世紀前半に姿を現わした高次元空間としての非ユークリッド空間が、科学者と同じく芸術家にも、透視図法の開拓されたルネサンス期以来初めて新しい空間概念を持たせるようになった」として、その典型的な例を、1910年前後に特殊相対論に誘発されながら起った、とされる Cubism や未来派の動きに見ている。

Zevi(1977)[10] も、「Cubismの、移動する視点に基づく“第４次元”の考え方がなかったならば、Corbusier のピロティの上に浮かんだ Villa Savoye のアイデアは生まれなかったであろうし、 Einstein の４次元時空の概念がなかったならば、新造形主義も構成主義も未来主義も、またそれらの亜流も、現われることはなかったであろう」という。

さらに Zevi(1978)[11]は、モダニズム建築を規定する概念としての７個の“The Modern

Languages of Architecture”の中に、“The Syntax of Four-dimensional Decomposition”と“Space in Time ”を加えた。

Rowe(1976)[12]がモダニズム建築の同義語としてあげる“Simultaneity”、“Interpenetration”、“Superimposition ”、“Ambivalence ”、“Space-time”、“Transparency”といった単語も、すべて4次元的概念に基づいて説明されるのであり、よく指摘されるように、Mass（構成部材）と Volume （内部空間）の相剋や、 Volume における時空間の意味の検討はモダニズム建築の形成原理となる。

Zevi(1957)[13]や Doxiadis(1963)[14]らによる、「絵画は2次元平面上の線によって、彫刻は3次元空間内の面によって、原則的に表現されるのに対し、建築は4次元空間内の空間（3次元空間）によって表現される」という指摘や、 Zevi(1957)[15]の「建築が4次元的に定義され得るなら、たしかに人間は空間の完全な表現方法を獲得したことになる」とか、 Boudon(1971)[16]が紹介する言葉にあるような、「点、線、面のみによる限り幾何学と建築は一体化させることはできないが、物の大きさ(Volume。本論文でいう胞）を出発点とすれば建築に関係する感覚的現実を表現する幾何学の構築が可能となる」とかいった理想は、いずれも、上述のようなモダニズム建築の理念に根ざすものであろう。Boudonが多くを引用するFocillon(1943)[17] の、たとえば「3次元にもう一つの新たな価値を付与することこそが建築の基本的特権なのである」などといった思考も例外ではない。

ただし、以上のような4次元的と説明される空間概念には時間軸を初めとするさまざまな物理的、生理的、心理的、思想的要素が積層されていて、Coxeter がオランダについて調べたような一般性のある幾何学的論理に基づいた図形的知識はほとんど要求されていない。

そのため、たとえば、前掲の Klee や Kandinskyが、立体の内部とは非物質的で定義できないもの、などといった感覚的な見方を述べるに止まったり、Zevi(1957)[18] の、さまざまに複雑な情報がからみ合ってできている建築を全体的に表現しようとすれば無限次元が必要かもしれない、という極論や、だからこそ建築における次元については定義しないところに意味がある、という Boudon(上掲書)[19]の逆説が可能になったりする。

とはいえ、多胞体ではなく、たんに3次元の部分としての胞の、図形的性質とか図形的操作、などの考察に限るならば、De Stijlや Bauhausの当時からもあった。たとえば、Roweのあげる先述したモダニズム建築の同義語などは、2－1で触れる胞の幾何学的性質を適切に説明している。Kleeや Kandinskyによる Bauhausでの立体の内部の考察などについても同様である。その Bauhausに関係しながら、建築生産の工業化、システム化に意欲を燃やした建築家たち、たとえば W.Gropiusら、にとっては、どのような形態の3次元空間の部分、つまり胞、をどのように連結し組み立てるかが重要課題であったと思われる。

その課題に対する一つの極端な解答が、のちの平面的なモデュール発展のきっかけと

なった Bemisの Cubical Modular Method (1936 。図表2-1-8)である。この場合、すべての建築上の形象を一定の立方体状の部分（胞）に分割することを前提とする。とはいえそうした試案において、高次元幾何学的知識が優先的に要求されたということはない。

（２）今世紀後半に原点を置く理念的諸説

今世紀前半に原点を置く諸説に対して、今世紀中ごろ以降、数学的論理を基礎とする情報処理システムなどが急速に発展するに伴ない、何人かの建築家たちは自らの数学的知識を駆使し、あるいは数学者の協力を得て、建築上の形象に見られる高次元性の幾何学的描写を試み初めている。

１９５０年代末から１９６０年代中ごろにかけて GEAM や GIAP といった、建築の“４次元的”な側面に注目しながら可動建築や変容建築の実現に情熱をそそぎ、工業化建築の普及を図ろうとする建築運動をリードした Friedman の論理には、そうした傾向が端的に現われている。

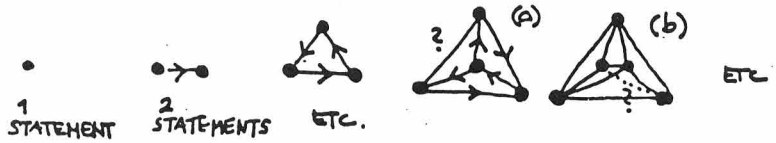
建築やその環境にさえ数学的公理系を設定しようとする Friedman は、まず、ブラックボックスとしての住戸ユニットあるいは居室ユニットを立方体状の胞にアナロジーし、そのあらゆる配列を論理的に列挙する。続いて、そうした連結形態の概要を、個々の胞を１点で代表させる（図表1-5)ことにより、線形ネットワークで表示する[20]。

その場合、居室ユニットが増えるたびに、すべてのユニットを結ぶルートは図表1-6 のように増えて完全グラフを構成していく。ここに現われている各図形は、点の個数ｎに従ってｎ－１次元４面体の２次元平面への射影の稜図形に一致し、ｎ≧５の場合は右端にも見られるように、幾何学的性質上、立体交差（具体的には階段やオーバーブリッジ）の部分が生じる。 Friedman は、この立体交差の個数をｎが任意の場合についても算定している。

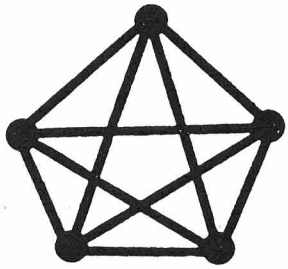
図表1-6 に見られるような完全グラフとしてのネットワークは、動線計画などを検討するときの基本図形であって、建築にしばしば現われる数少ない高次元の多胞体の例となっている。図表1-7 に Alexander(1964)[21] のあげる五つの要素の関係図を示す。この図は４次元４面体の性質を持つ。

Friedman や Alexander同様、建築に数学的骨格を与えようとする建築家たちは、科学技術の進展とともにその後急速に増えて、一部は現在、 Architectural Morphology(建築形態学）といった分野で研究を進めている。

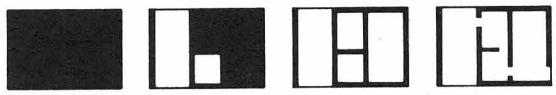
その中の代表者ともいえる Marchら(1971)[22] は建築を基本的に支える図形として、点、線、面、立体（直方体状胞）をあげ、そのうち立体から部分的な立体を取り去ったり、あるいは逆に立体同志を連結させたりして、さまざまな建築的構成を得ようとする。そのあと、立体を、論理的に超立体（４次元直方体）に拡張することを提案するのであ



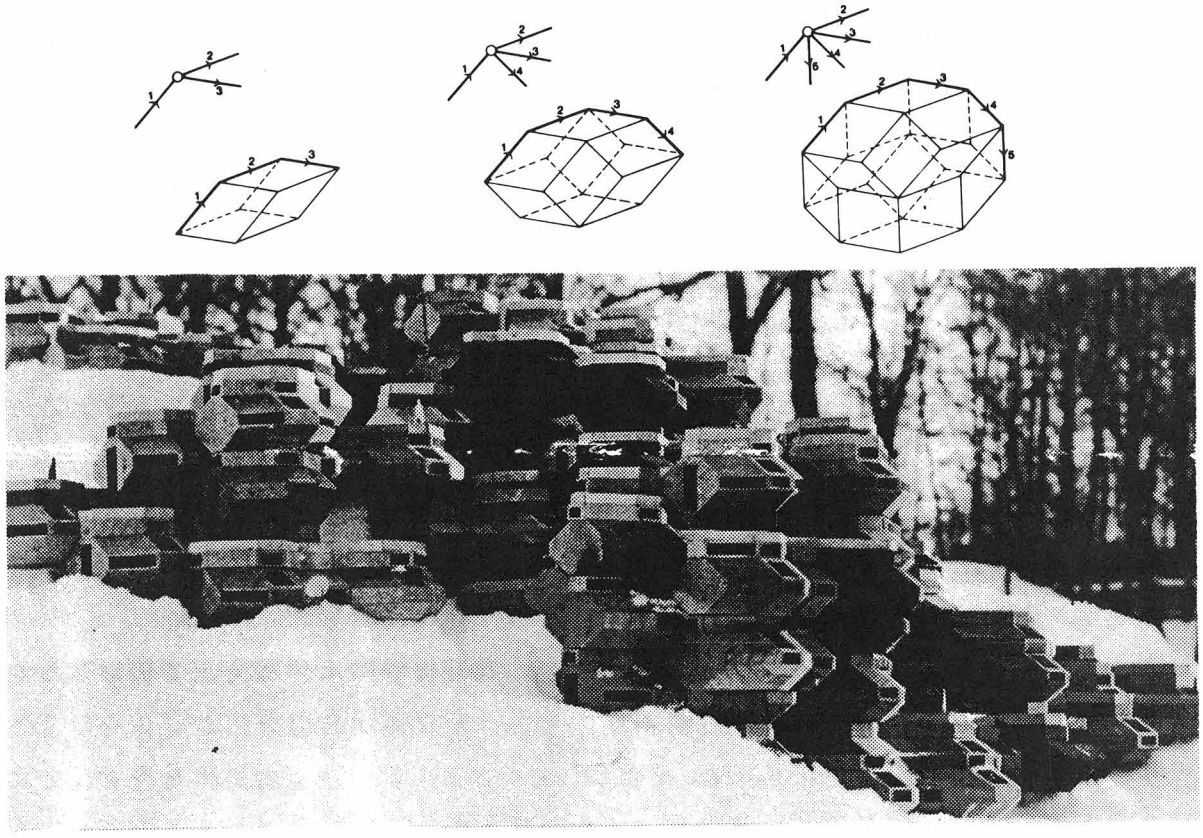
図表 1-6　Y.Friedmanの表示する、左から０～４次元４面体状のネットワーク。
Toward a Scientific Architecture(1975)より。



図表 1-7　C.Alexander の表示する４次元４面体状のネットワーク。
Notes on Synthesis of Form (1964) より。



図表 1-8　L.March による、Corbusier の"Maison Minimum"の分析。
The Geometry of Environment (1971)より。



図表 1-9　７次元立方体の連結図形の応用としてのJ.Baracsらによる "Habitat Polyédrique"。
Structural Topology #2より。

る。図表1-8 にMarch(上掲書) による、 Corbusierの" Maison Minimum" の分析を示す。上述の直方体状胞から部分的な胞が左から右へのように取り去られて壁体と居室が現われることになる。

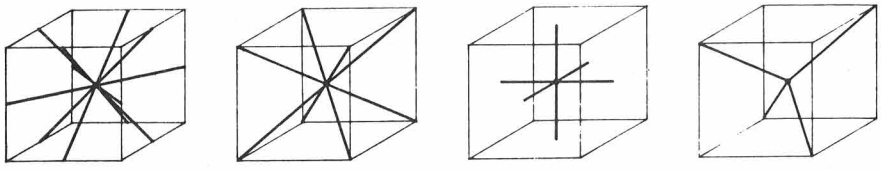
そのほか、March は、Tabor(1970)[23]の、建築における所要室配置問題を線形ネットワークによるのでなく任意次元の空間における点配置という観点から解決することを示唆した論考（ただし表現が困難であるとして、実際は１～３次元の場合のみ収録）なども紹介している。

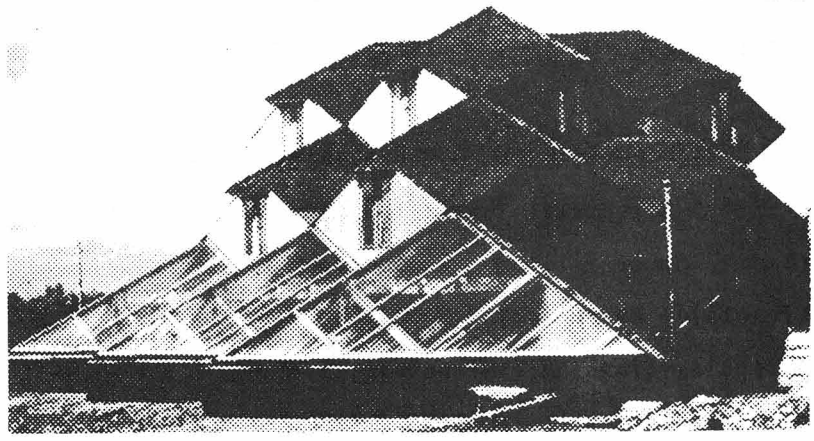
その後 Marchは、高次元幾何学者の B.Grünbaum や建築家 M.Safdie らと協力して、１９７７年にカナダで Structural Topology Groupを結成した。建築家と数学者が協力し合って、 Polyhedra、Space-filling、Static Geometric Rigidity of Structures を３本柱に、 Architectural Morphology を研究しようとするもので、１９７９年以来、機関誌 Structural Topology(Topologie Structurale) を刊行している。

そこで発表される論考の中には、本論文に直接関係するものも多い。

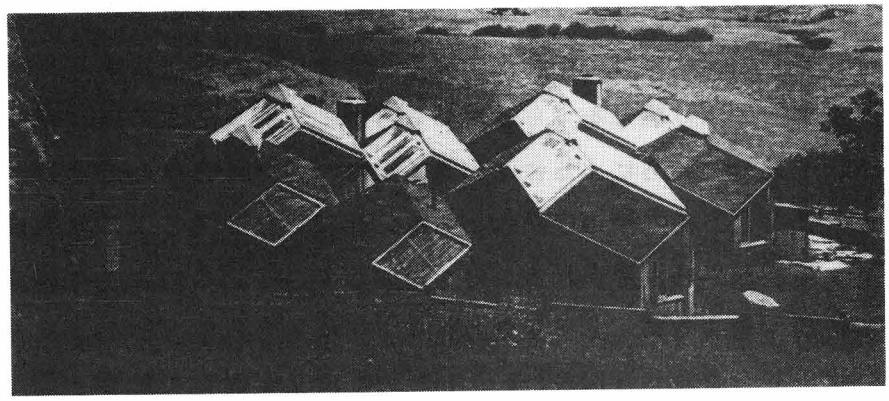
たとえば、Baracsら(1979)[24]、Granche ら(1979)[25]、筆者ら(1980)[26]、Hanegraaf ら(1980)[27]、Haiderら(1980)[28] は空間内の１点にｎ本の直線を集め、その直線に平行な稜のみからなる多面体（ゾーン多面体）を構成して、それらの連結により集合住宅などの基本形を形成しようとする。たとえば図表1-9 下はBaracsらによる集合住宅案で、同図上のような１点に集まるｎ本の座標軸に平行な稜を基準として空間が構成されている。図下の場合は規則的なタイル貼り図形をずらせながら導いた特殊な７本の座標軸に従っている。また、図表1-10下はHaiderらによる住宅の施工例で、立方体の体心と８頂点を結ぶ４直線（同図上左から２番目）を基準の座標軸とする。Haiderらは同じような構成が同図上のようなさまざまな座標軸からも導かれることを指摘している。このような構成は、上記 Baracs らが指摘するように、ｎ次元立方体ならびにその連結図形の３次元空間への射影に一致するのであり、これらは図表1-6 、1-7 のｎ次元４面体の射影と並んで、建築と密接な関係を持っている。

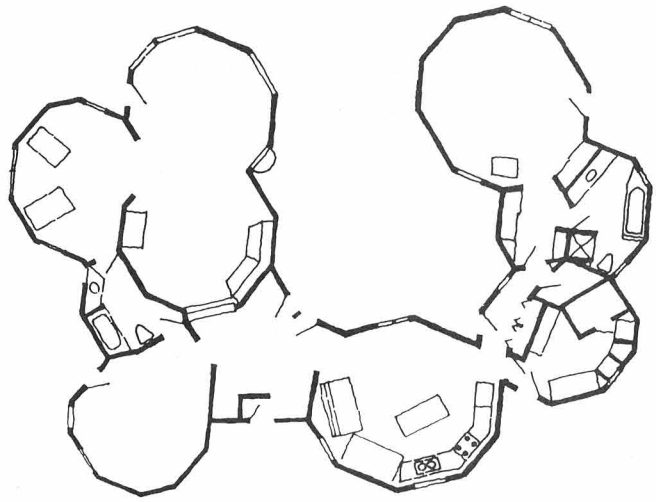
以上の、BaracsやHaiderらによる構成は、いずれもゾーン多面体の周期的な配列（平行移動の周期を持つ配列）に従うものである。それに対して、やはりStructural Topology Group の一人Baerの試みはゾーン多面体の非周期的な配列（平行移動の周期を持たない配列）としてのｎ次元立方体の連結図形を応用しようとしている。つまり、正12面体の体心と12個の面心を結ぶ６本の直線を座標軸として図表1-11のような６ Zone Systemと名付ける一連の住宅を計画し、さらに、正20面体の体心と20個の面心を結ぶ10本の直線を座標軸として図表1-12のような10 Zone Systemも考えて、それらに関する著書(1970)[29] を刊行する一方、ＵＳパテント(3,722,153号,1973)を取得している。これらは後(1984)[30] にさらに一般化され、正12面体（あるいは正20面体）の体心とすべての頂点、稜心、面心、を結ぶ31本の直線を座標軸とする31 Zone Systemに発展させられた。



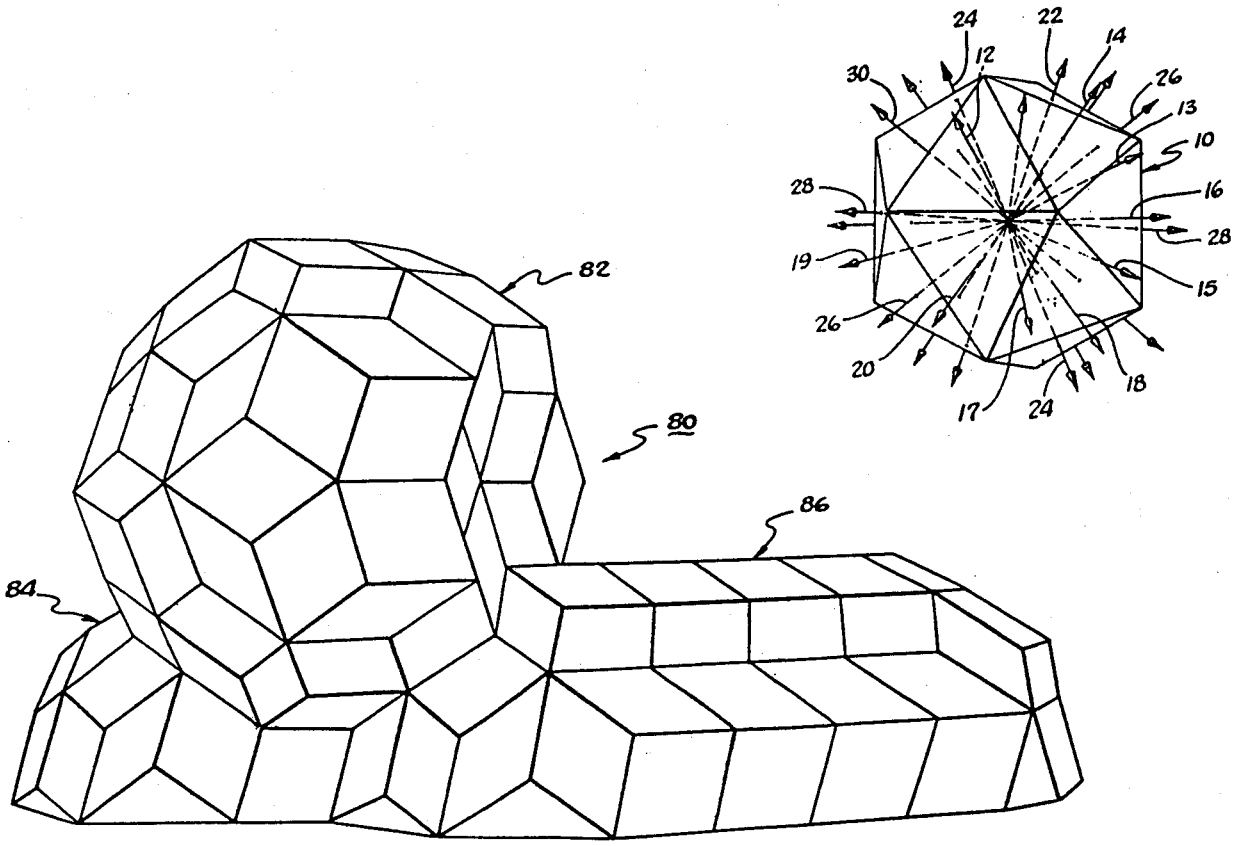


図表 1-10 S.G.Haiderらによる4 次元座標軸に基づく住宅。
上段はさまざまな次元の座標軸の導入を示唆する図。
Structural Topology, #4 より。

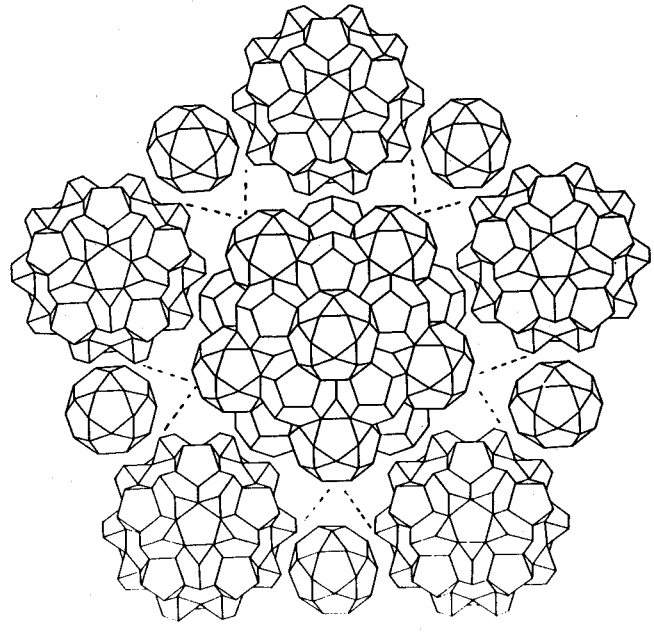




図表 1-11 6 Zone System による"Rancho las Cruces" 。下は平面図。
S.Baer設計。1973。Baer提供写真。



図表 1-12 S.Baerの10 Zone System（ＵＳパテント 3,722,153号）。
右上は座標軸決定の原理。



図表 1-13 D.G.Emmerichの"Hyperpolyhedra"。
Structural Topology #4より。

ただし、Baerはこうしたn Zone Systemとn次元立方体との関連性には言及していない。またこれらに見られる非周期性についてもコメントをさけている。それに対して、前記筆者らの論考はBaerの6 Zone Systemを6次元立方体の非周期的な連結図形との関連性のもとで新たに構成しなおしたものである。

こうしたn次元立方体やn次元4面体は、Crapo(1979)[31)32)] によって Rigidity of Structures とも関係させられた。

以上のような論考は、理念的には、建築の工業化や機械化を目的とする思想や運動、たとえば先述した GEAM や GIAP のほか、Adaptive Architecture[33)]（時間の経過にしたがってユニットを添加していく建築）やわが国でとくに有名になった Metabolic Architecture などとして具体化され、モダニズム建築の中枢を構成してきた。

その一方で、ポストモダニズム建築運動の一翼をになう多元主義(Pluralism) などにおいても、たとえば Mooreが著書"Dimensions"(1976)[34)] の中で触れているように、建築の持つ多重の要素（光や音や色や温度など）は建築の高次元的内容の現われとして理解できるとして、やはり建築における高次元性の探究を要請しているのである。

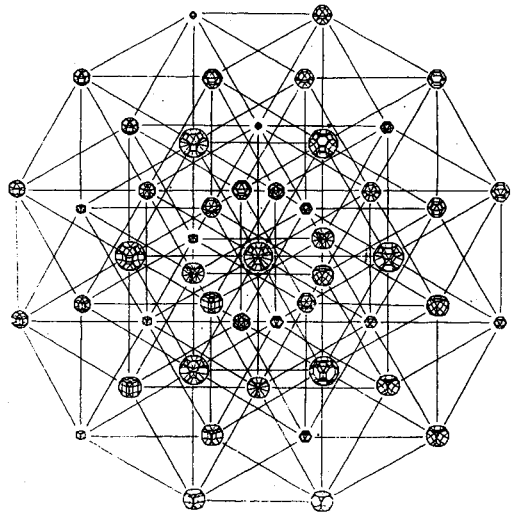
（3） 図形的諸説

以上のような、建築と理念的に関係する諸説とは別に、幾何学上の論理の応用として構成された高次元的な外観を持つ図形も今世紀中ごろ以後4次元幾何学の発展に伴ないさまざまに考案され建築に応用されようとしている。

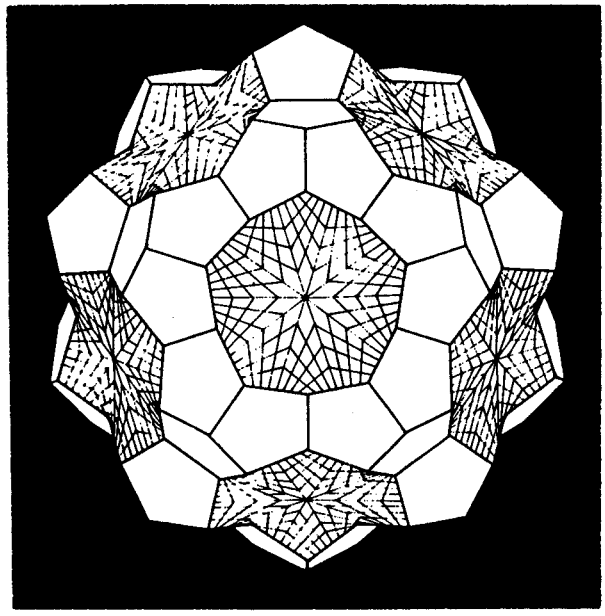
たとえば、高次元建築形態論を研究する Emmerich(1980)[35)]は、さまざまな多面体が空間内の1点から放射状に発散するように連結する造形を考え、Hyperpolyhedraと名付けた（図表1-13）。

さらに Lalvani(1977;[36)] 1982[37)])は、核となる一つの多面体が稜の方向に伸縮しながら変化する造形を考え、 Transpolyhedra （図表1-14）と名付けて建築に応用しようとしている。この多面体の構成経過の中には時間的論理が含まれているほか、成長方向がn次元立方体（図表1-14の場合は6次元立方体）の稜の方向に一致するため、高次元図形とされたのである。したがって、後(1982)[38)] には “Multi-dimensional Periodic Arrangements of Transforming Space Structures” という副題の付けられた著書が出され、本文には、 “Generation of Polyhedra and their Arrangement in Hyper-spaces ” ならびに “Polyhedral Close Packings and their Arrangement in 4-space” という2章が設けられている。ただし、その内容は、独自の造形論を展開しているもので、n次元多胞体への直接の言及を含んでいるのではない。別書(1982)[39)] についても同様である。

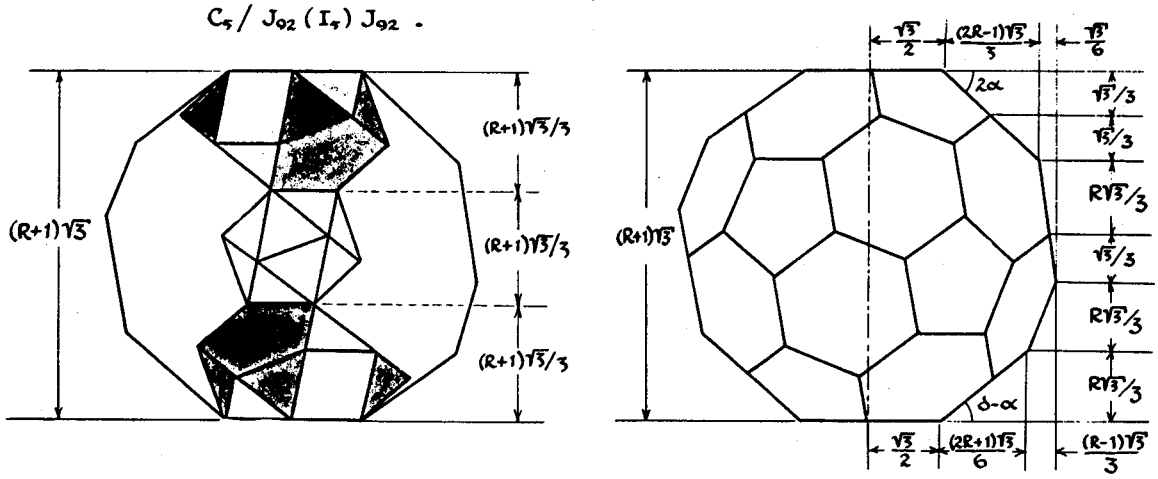
一方、Aubry(1980)[40)]は内部構造を持つMixed Polyhedra(図表1-15) を考案し、Stewart (1970)[41)] は規則的な多面体の積層となった貫通孔を持つToroid（図表1-16）



図表 1-14 H.Lalvani の "Transpolyhedra" の６次元立方体の稜図形を応用した系統図。
Structures on Hyper-structures(1982)より。



図表 1-15 D.Aubry の"Polyédres mixtes"。Structural Topology #4より。



図表 1-16 B.Stewart の"Toroid"。Adventures among the Toroids(1970)より。
左は内部の貫通孔部分、右は外形。

を考案しているが、いずれもその結果は、３－１で触れるような４次元空間における正多胞体（前者は正 120胞体、後者は正 600胞体）の３次元空間への射影に酷似した外形となっている。

以上のほか、考案者自身はｎ次元とか高次元といった名称をつけていなくても、構成内容に高次元的概念を含んでいる多面体、とくに空間充塡型多面体、の提案は、例えば筆者(1979)[42] (1983)[43] に紹介されているようにいくつかある。

いいかえれば、それほど、多面体と高次元空間とは密接な関係にある。

その事実を端的に見せるのが GEAM や GIAP の顧問でもあった R.B.Fuller の論考である。

Fullerの幾何学的思考は、すでに１９１０年代、つまり De Stijl が発刊され初めたころ、に始められていて、Einsteinの影響下、４次元空間には当時から関心を持っていた。１９２７年には、４D Company を設立し、自ら４Dのペンネームでいくつかの評論を書き、また４D Timelock という私家版の書物を出している。一連の４D Dymaxion house（図表1-17）を提案したのも同じころである。

その当時考えていた独自の幾何学は後(1944)[44] に Synergetic-Energetic Geometryとしてまとめられ、そこでは、宇宙の存在すべての基本形としての正４面体が４次元空間と関係させられた。

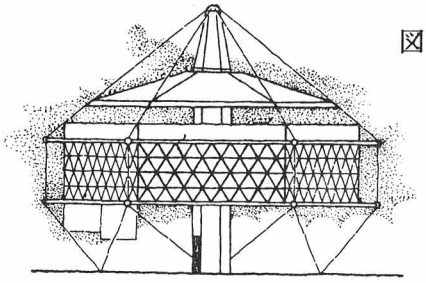
つまり、３次元空間の部分（本論文でいう胞）のもっとも規則的な最小形が正４面体であり、この正４面体の体心と４側面の面心を結ぶ４直線が４次元空間の座標軸になるという。また、立方体と正８面体の中間形としての立方８面体の内部には対角面として４枚の正６角形面を入れることができ（図表1-18）そこにも４次元性あるいは対角面の交線を座標軸と見れば６次元性が見られるという。立方８面体は、そのほかにもいくつかの際立った規則性を持ち、Fuller自身、宇宙の外形に相当するほどの図形という認識を持っていた。　こうした思索が全生涯にわたってまとめられた大著が高次元建築空間論としての“Synergetics ”(1975)および“Synergetics 2 ”(1979)である。

まず、前者冒頭の定義では、Synergetics とは、正３角形と正４面体に見られる６０°をなす座標軸を使う学問体系であって直交座標軸は使わない、したがって３次元の幾何学ではなく正４面体に関係した４次元、あるいはそれを超える高次元、の幾何学である、という[45]。

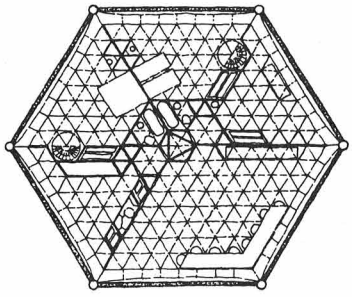
続いて上述の意味での立方８面体から導かれる６本の座標軸が、Fullerの命名になるOctetトラス（または、 Isotropic Vector Matrix。 図表1-19）に一致する、と指摘する[46]。

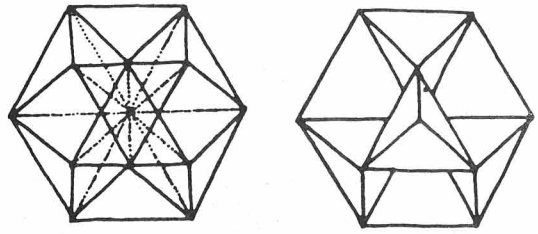
そのあと、この座標軸による、自然界や各種多面体の解析があり、３次元を越える高い次元の空間の認識の重要性を説く。

その中で、立方８面体の双対図形である菱形１２面体に Sphericという名を与え、その

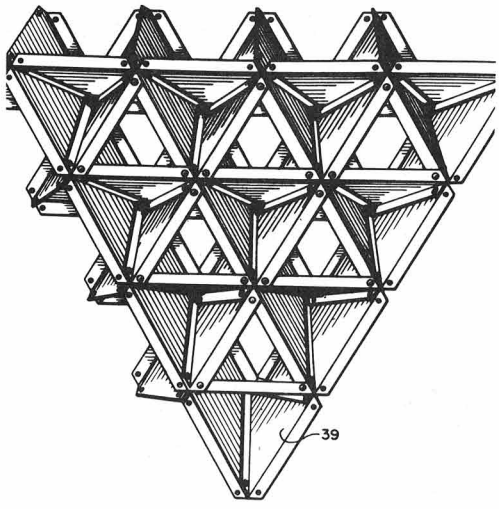


図表 1-17 R.B.Fullerの４D Dymaxion house 計画案。1927。
上は立面図、下は平面図。（筆者によるコピー）

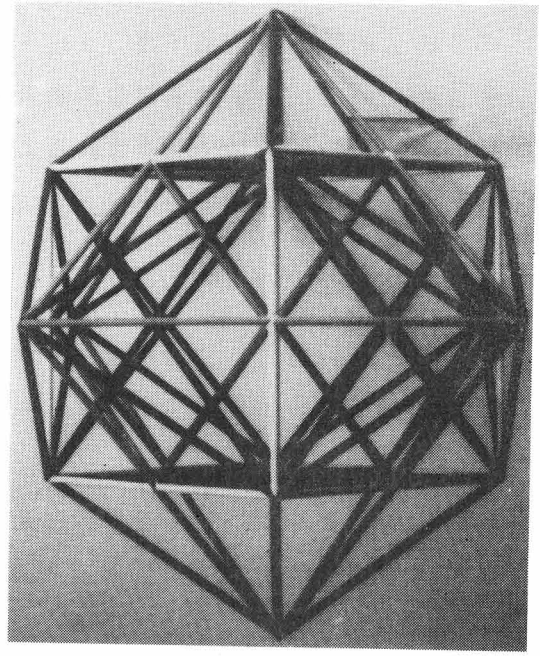




図表 1-18 R.B.Fullerによる立方８面体における
４次元性の概念図。
The Dymaxion World of Buckminster Fuller
（1973）より。



図表 1-19 R.B.Fullerによる Octetトラス
（ＵＳパテント 2,986,241号）



図表 1-20 R.B.Fullerによる菱形12面体内の
４次元座標軸。Fuller提供写真。

4次元性を説明している[47]。この菱形12面体は、本論文での4次元立方体の3次元空間への直射影の外形であって、内部には、正4面体から導かれるのと同じ、互いに約 109° 28′ をなす4直線、つまり4次元直交座標軸の射影、が図表1-20のように埋め込まれている。

以下、自然界や建築界の現象がつぎつぎと独自に解釈され高次元的に説明されていくのである。

その過程で、一般的に知られている幾何学的論理（とくにユークリッド幾何）は批判され、ときには否定されていく。Synergetics は Mathematicsに対抗して生まれた、と断言されるゆえんである。

（4）わが国における既往の諸説

以上のように、海外では、欧米を中心として、今世紀初頭以後、建築に何らかの高次元的内容を与えようとした試みが継続的に行なわれてきた。

それに対してわが国では、本論文で定義する意味での“次元”という単語自体が数学あるいは物理学の世界で1920年ごろに初めて定着したと考えられる* のであり、それの建築界への応用は主として（1）項の引用文献の翻訳などを通じて今世紀後半になって行なわれるようになったようである。

啓蒙的には、当時、“多次元空間”（内田祥哉、佐々木宏、清水達雄ら、1959 [48]）や“多次元的建築空間論序説”（佐々木宏、1962 [49]）といった論説が建築関係の雑誌に発表されている。いずれも初歩的な幾何学的原理の紹介を含むものであったが、その後、Expo'70 前後に数多く発表されるようになった“4次元的”と思われる内容を持った論考や著書では、幾何学的原理よりもむしろ物理的、思想的原理に重点が置かれたことが多い。

たとえば川添(1968)[50] や黒川(1969)[51] の著書は移動の概念を建築に取込んだものである。また樋口[52] は建築雑誌（1969、主集“時間と建築”）の中で建築における時間の意味を考察しているが、明らかに抽象的な意味での4次元空間への導入が前提となっていると思われる。

同様な前提は1970年前後に岡田光正、太田利彦、川崎清らにより集中的に発表されたより数理的な論考にも見られる。つまり、当時、太田(1969)[53] が指摘した建築計画の新しい領域としての、システム・エンジニアリング、情報理論、決定理論、ネットワーク理論、さらにはグラフ理論などの導入、などにおいては、（2）で触れたFriedmanや Alexander にその代表例を見るように、たえず高次元空間への拡張の可能性とその有意性がつきまとっているのである。

建築計画の分野に限らず多方面で応用されている“多次元尺度法”とか“多変量解析”あるいは“多次元座標”といった概念にその具体的な応用例を見ることができる。

ただし、そうした論考は数理科学の必要性が高まっている現在にいたるもきわめて少数で、多くの場合、伊藤(1987)[54]に見られるように“4次元”とか“高次元”といった単語の抽象的、概念的あるいは思想的な内容が強調されている。

この伊藤の論考は先述したDe Stijlにおける宣言に近いもので、3次元空間の図形の建築的な解析をしつくした後での、いわば逆説として生まれたものであるが、現在の多くの建築家が“4次元”という単語に対して抱いている、ある意味での共通概念を代弁していると思われる。

* 本論文で定義する意味での“次元”という単語がいつごろわが国で使われるようになったのかは定かではない。ただし、物理学者寺田寅彦の年を追った剋明な日記風の随筆集によると、大正12年ごろまでは次元のかわりに“元”という言葉を使い、同じころ宮沢賢二は“次”と呼んでいる。それと前後して寮佐吉は“通俗4次元講話”（大正11年）という解説書を残した。したがって、本論文では一応の目安として、1920年代を“次元”の使われ始めた時期とする。

（5）既往の諸説における本論文の位置

結局、海外での今世紀前半に原点を置く諸説は、主として物理的、思想的な高次元空間の概念を用いていわば抽象的に建築を解釈し説明しようとするもので、建築の具体的な創成を高次元的に行なおうとするものではない。

また、海外での今世紀後半に原点を置く諸説は、上記のような概念に、論理性の高い数理的内容を与えて、情報化社会にふさわしい建築の創成を理論的に行なおうとするもので、部分的な高次元図形、たとえば高次元立方体とか高次元正4面体、の具体的な応用は見られるものの、それらの全体的な利用にはいたっていない。

多くを海外から学んでいるわが国での事情が以上のような海外の状態の枠組内にあるのは言をまたない。

そうした現況の中にあって、本論文では、高次元多面体（高次元多胞体）の、具体的な空間構成に資する利点を、たとえ基本的にではあっても、一般的かつ系統的に明らかにし、かつ実際に応用しようとする。また、既設の建築にすでに見られる幾何学的な高次元性を指摘し、それによって従来の建築を新鮮に理解しようとする。

モダニズム建築の出発点で高次元空間の概念が何らかの抽象的な意味を持っていたことは事実であり、それに対応して、本論文での高次元多面体の幾何学的具体化は、今後の建築の創成にとって何らかの具体的な意味を持つと思われる。

1－5　用語の定義

以下の本論文で使用する用語のうち使用頻度の多い主要なものについてはつぎのように定義する。

ア行

I

有限回転群のうちの正２０面体群

R^n

ｎ次元ユークリッド空間

R^n （x_1 x_2 ----x_n）

直交座標軸x_1，x_2，----，x_nの導入されたｎ次元ユークリッド空間

α_n

Simplex Polytopeのこと

位相図

図形の定性的性質を保存した図

Infrastructure

建築や都市に内在する交通網、情報網、設備系統といった構造組織

A_6

Golden Iso-zonohedraのうちのとがった６面体

X_n 図

R^n （x_1 x_2 ----x_n）における正射影を構成するX_1 X_n 座標平面上の図

n次元曲胞

n次元超曲面のこと

n次元空間

位相幾何学上の概念に基づくn次元の広がりを持つ空間を、本論文では一般にn次元空間とよぶ。つまり、「ある連続体（空間あるいは図形）がn次元を持つというのは、それに1個または数個の切断を施したとき、それが何個かの部分に分解できて、かつ、この切断自身が（n－1）次元を持った連続体となっていることを意味する」(Poincaré による）。ただし、誤解のおそれのない限り、本論文ではn次元ユークリッド空間をさすこともある。

n次元図形

（n－1）次元空間の有限部分あるいはその集合体

n次元正多胞体

正多面体に相当するn次元図形。

n＝2のときは無数にある正多辺形。n＝3のときは5種類の正多面体。n＝4のときは6種類の正多胞体。n≧5のときは3種類の、n次元正4面体、n次元立方体、n次元正8面体。

n次元正8面体

Cross Polytope（γ_n）のこと。正8面体に相当するn次元図形。

n次元正4面体

Simplex Polytope（α_n）のこと。正4面体に相当するn次元図形。

n次元多胞体

多面体に相当するn次元図形。

2個以上有限個の（n－1）次元の広がりを持つ図形が2個で1個づつの（n－2）次元の広がりを持つ境界図形を共有し合いながらn次元空間の中で連結した図形。

n次元多面体

n次元多胞体のこと

n次元単純体

n次元球体 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq k^2$ と同相なn次元胞

n次元単純多胞体

単純多面体に相当するn次元図形。

n次元球面 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = k^2$ と同相。

n次元平胞

直線、平面、超平面に相当するn次元の広がりを持つ図形

n次元胞

広義ではn次元空間。狭義ではn次元多胞体状に切り取られたn次元平胞。

本論文では狭義の意味で用いる。

n次元ユークリッド空間（R^n）

実数の距離単位を持ったn本の座標軸X_1，X_2，----，X_nで決定される2点

P（x_1，x_2，----，x_n）とQ（x_1'，x_2'，----，x_n'）のあいだに、距離

$PQ = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots + (x_n - x_n')^2}$

が定義されているn次元空間。誤解のおそれがない限り本論文ではたんにn次元空間と呼ぶこともある。

n次元立方体

Measure Polytope（β_n）のこと。立方体に相当するn次元図形。

F_{20}

Golden Iso-zonohedraのうちの20面体

O

有限回転群のうちの正8面体群

O_6

Golden Iso-zonohedraのうち平たい6面体

Euler の多面体公式

単純多面体の持つ境界図形、つまり頂点、稜、側面、の個数V，E，Fのあいだに成立する公式　V－E＋F＝2

Euler-Poincaréの公式

n次元単純多胞体の持つ境界図形の個数 d_{n-1}（d_0 の場合は頂点、d_1 の場合は稜，d_2 の場合は側面、などの個数）のあいだに成立する公式、

$$d_0 - d_1 + d_2 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

黄金数

$(1+\sqrt{5})/2 \fallingdotseq 1.618$

黄金比

$1 : (1+\sqrt{5})/2 = (-1+\sqrt{5})/2 : 1 = 1 : 1.618$

凹胞

単純胞の一つ。凹多面体状胞。

Octet トラス

Octet ブロックの稜のみからなる図形

Octet ブロック

正４面体と正８面体による３次元空間充塡図形

カ行

外形

各図形の外側を限る境界図形

開多胞体

１個の側胞のみに属する側面と、２個の側胞に共通する側面とがある多胞体

開多面体

１枚の側面のみに属する辺と、２枚の側面に共通する辺とがある多面体

回転対称軸

回転対称性参照

回転対称性

3次元空間において与えられた図形を1本の直線l（回転対称軸）のまわりに回転させるとき、自らと重なる性質。自らと重なる回数（もとの状態へ帰る場合も含める）をNとするとき、与えられた図形はlに関してN回回転対称性を持つという。

回転タイプの多胞体

側胞が1点を中心として回転するような形で集積している多胞体

環状数（G_1）

環状胞あるいは環状多胞体における貫通孔の個数

環状多胞体

G_1 を持つ多胞体

環状胞

G_1 を持つ胞

γ_n

Cross Polytopeのこと

基線（GL）

R^4（XYZU）あるいはR^n（X_1 X_2----X_n）において正射影を作図する場合のX（あるいはX_1）軸

求心タイプの多胞体

側胞が1点に向って求心するような形で集積している多胞体

Cubic トラス

Cubic ブロックの稜のみからなる図形。立方格子。

Cubic ブロック

立方体による3次元空間充塡図形

境界図形

n次元多胞体あるいはn次元胞を構成している0～（n－1）次元の広がりを持つ図形

曲胞

超曲面のこと

位数

有限回転群参照

Cross Polytope（γ_n）

n次元空間において、直交軸上の原点から等距離にあるすべての点を頂点とするn次元正2^n胞体。n次元正8面体のこと。

K_{30}

Golden Iso-zonohedra のうちの30面体

Golden Iso-zonohedra（GI）

GDのみを側面とするゾーン多面体。A_6（とがった6面体）、O_6（平たい6面体）B_{12}（12面体）、F_{20}（20面体）、K_{30}（30面体）の5種類がある。

Golden Diamond（GD）

対角線の長さが黄金比となった菱形

<u>サ行</u>

座標空間

R^n内の3座標軸で決定される3次元空間

座標平面

R^n内の2座標軸で決定される平面

C_n

巡回群のこと

G

示性数のこと

GI

Golden Iso-zonohedraのこと

G_1

環状数のこと

GL

正射影における基線

G_3

中空環状数のこと

GD

Golden Diamondのこと

G_2

中空数のこと

次元公式

n（＝D）次元空間においてA次元空間とB次元空間がI次元空間を共有し合って交わるとき成立する公式　D＝A＋B－I

示性数（G）

閉多面体において、それを2分することなくその側面上にかくことのできる、円周と同相な多辺形のうち、互いに交わらないものの最大数。直観的には閉多面体の持っている貫通孔の数。

射影

n次元空間において、1点Oとそれとは別に与えられた点Pとを直線lで結ぶ操作を、OからPを射影するといい、Oを射影中心、lを射影線という。また、lとm次元空間（$0 \leqq m < n$）との交点QをPのm次元空間への射影という。そのm次元空間において、Qは（m－1）次元空間へ射影され、以下同様により低次元のk次元空間へ射影されるが、それらを本論文ではPのk次元空間への射影とよぶ。

射影線

射影参照

射影中心

射影参照

射影方向

射影線の方向

斜射影

射影する空間に斜交する射影線による射影

周期的図形

部分の平行移動によって導かれる図形

重多角錐

２個の多角錐を底面で連結して得られる図形の外形

充塡図形

無限個のｎ次元多胞体あるいはｎ次元胞を、（ｎ－１）次元の広がりを持つ境界図形を共有させながら連結してｎ次元空間を一重に間隙なく埋め尽す操作をその空間の充塡といい、そのとき得られる図形の全体およびその部分をｎ次元空間充塡図形という

主対角線

ｎ－立方体において、もっとも遠距離にある２頂点を結ぶ線分

Schläfli記号

正多面体ならびに正多胞体の項参照

Schläfliの多胞体公式

単純多胞体の持つ境界図形、つまり頂点、稜、側面、側胞の個数Ｖ，Ｅ，Ｆ，Ｃのあいだに成立する公式Ｖ－Ｅ＋Ｆ－Ｃ＝０

巡回群（C_n）

有限回転群の一つ。正ｎ角錐と同じ回転対称性を持つ。

消点

中心射影された平行線群の交点

Simplex Polytope（α_n）

n次元空間において、等距離にある（n＋1）個の点を頂点とするn次元正（n＋1）胞体。n次元正4面体のこと。

スペース・フレーム

建築的な空間を内在させる大規模な構成を目的とした、主として軸方向力を受けるように配列された線形部材の集合体

正5胞体

正多胞体の一つ。{3，3，3}。

正射影

R^n（X_1 X_2 ----X_n）において、与えられた図形を、X_1 軸（基線）に直交する方向に配置されたX_2,----，X_n 軸で決定される（n－1）枚のX_2，X_3，---，X_n 図で表現する作図法

正12面体

正多面体の一つ。{5，3}。

正16胞体

正多胞体の一つ。{3，3，4}。

正タイル貼り図形

平面上で1種類のみの正多角形を各頂点まわりに一定の状態で集めた平面充塡図形。Schläfli記号に準ずる記号が与えられている。

正多胞体

合同な正多面体{n，m}が、各稜のまわりに1個ずつ集まった4次元多胞体。Schläfli 記号{n，m，l}が与えられている。

正多面体

合同な正n角形が各頂点まわりにm個ずつ集まった凸多面体。Schläfli記号{n，m}が与えられている。正4面体{3，3}，正6面体（立方体）{4，3}，正8面体{3，4}，正12面体{5，3}，正20面体{3，5}の5種類がある。

正多面体群

有限回転群のうち正多面体と同じ回転対称性を持つ正４面体群、正８面体群、正20面体群の総称

正20面体

正多面体の一つ。{３，５}。

正20面体群

正多面体群の一つ

正24胞体

正多胞体の一つ。{３，４，３}。

正８胞体

４－立方体のこと

正８面体

正多面体の一つ。{３，４}。

正８面体群

正多面体群の一つ

正120 胞体

正多胞体の一つ。{５，３，３}。

正４面体

正多面体の一つ。{３，３}。

正４面体角

正４面体の体心と４頂点を結ぶ４半直線が体心で互いになす角，約 109°28′16″。Maraldi の角ともいう。

正４面体群

正多面体群の一つ

正600 胞体

正多胞体の一つ。{３，３，５}。

切頭８面体

半正多面体の一つ。（４，６，６）。

切頭４面体

半正多面体の一つ。（３，６，６）。

Ｚ図

R^4（ＸＹＺＵ）における正射影を構成するＸＺ座標平面上の図

線縮

２次元の広がりを持つ図形を１次元の広がりを持つ線分に射影すること

線心模型

稜が中心となるように３次元空間へ射影された多胞体の模型

双対

０～（ｎ－１）次元の広がりを持つ境界図形を持つ２個の図形において、ｍ次元の広がりを持つ境界図形とｎ－（ｍ＋１）次元の広がりを持つ境界図形を互いに置き換えた形となっているとき、両者は互いに双対であるという

側胞

多胞体を限っている多面体状胞

ゾーン多胞体

すべての側胞がゾーン多面体状胞となっている閉多胞体

ゾーン多面体

すべての側面が平行多角形となっている閉多面体

タ行

体心

回転対称性を持つ多面体の、すべての回転対称軸の交点

多角形

閉多辺形によって切取られた面分

多辺形

偶数個の線分（辺）が2本で1個ずつの頂点を共有し合って連結した1次元の広がりを持つ図形。頂点、辺を持つ。2次元多胞体のこと。

多胞体

複数個の多面体状胞が2個で1枚ずつの側面を共有し合いながら連結した4次元図形。頂点、稜、側面、側胞を持つ。4次元多胞体のこと。

多胞体公式

Schläfliの多胞体公式のこと

多面体

複数個の多角形が2枚で1本ずつの辺を共有し合いながら連結した3次元図形。頂点、稜、側面を持つ。3次元多胞体のこと。

多面体公式

Eulerの多面体公式のこと

多面体状胞

閉多面体状に切取られた胞。本論文ではたんに胞とよぶ。

単射影

与えられた図形を1個の射影で表現する方法

単純体

n次元単純体参照

単純体分割

与えられた図形を単純体に分割する操作

単純多胞体

$G_1 = G_2 = G_3 = 0$の閉多胞体。4次元球面$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = k^2$と同相。

単純多面体

$G = 0$の閉多面体。3次元球面$x^2 + y^2 + z^2 = k^2$と同相。

単純胞

$G_1 = G_2 = G_3 = 0$の胞。3次元球体$x^2 + y^2 + z^2 \leqq k^2$と同相。

中空環状数（G_3）

中空胞あるいは中空多胞体における中空部分の持っている環状数

中空数（G_2）

中空胞あるいは中空多胞体における中空部分の数

中空多胞体

$G_2 > 0$の多胞体

中空胞

$G_2 > 0$の胞

中心射影

射影中心から発散する射影線による射影

超曲面

曲線や曲面に相当する3次元の広がりを持つ図形

超平面

直線や平面に相当する3次元の広がりを持つ図形

長菱形12面体

対角線の長さの比が$1 : \sqrt{2}$の菱形8枚と、4枚の平行6角形からなる平行多面体

直射影

射影する空間に直交する射影線による平行射影

T

有限回転群のうちの正4面体群

D_n

2面体群のこと

定性的性質

各図形の持つ境界図形の個数やその連結状態などの位相幾何学上の質的様相の総称

定量的性質

各図形の持つ境界図形の稜長や側面の面積などの解析幾何学上の量的規模の総称

展開模型

多胞体を適当な側面で切り開き、各側胞を実形のまま側面を共有させて連続的に3次元空間内で並べていった模型

点心模型

頂点が中心となるように3次元空間へ射影された多胞体の模型

Tensegrity構造

引張部材を有効に利用しようとする構造形式

同相

定性的な性質が同じであること

等測軸

3次元空間における直交軸の平面上への直射影のうち、すべての軸上に等しい単位距離が目盛られたもの。2本づつは 120° をなす。3次元等測軸のこと。

等測図

等測軸に従って作図された図

凸多胞体

異なる２側胞上の１点ずつを結ぶ線分がすべて内部にある閉多胞体

凸多面体

異なる２側面上の１点ずつを結ぶ線分がすべて内部にある閉多面体

凸胞

凸多面体状胞

ナ行

内形

中空胞あるいは中空多胞体が内部に独立させて持っている中空部分を限る閉多面体の形状

２面体群（D_n）

有限回転群の一つ。正ｎ角柱と同じ回転対称性を持つ。

ハ行

半正タイル貼り図形

２種類以上の正多角形を各頂点まわりに一定の状態で集めた平面充塡図形

反正多角柱

上下両底面が合同な正多角形で、それ以外のすべての側面が合同な正３角形の半正多面体

半正多胞体

２種類以上の正多面体状胞あるいは任意の半正多面体状胞が、各稜のまわりに一定の状態で集まった閉多胞体

半正多面体

２種類以上の正多角形が各頂点まわりに一定の状態で集まった閉多面体。各頂点まわりに、たとえば、正ａ，ｂ，ｃ角形がその順に集まっているとき、半正多面体記号（ａ，ｂ，ｃ）が与えられている。

半正多面体記号

半正多面体の項参照

β_n

Measure Polytopeのこと

B_{12}

Golden Iso-zonohedraのうちの１２面体

非周期的図形

部分の平行移動によっては導かれない充塡あるいは連結図形

副基線

副射影の作図に用いる基線

複射影

与えられた図形を複数個の射影で表現する方法

副射影

正射影で与えられた図形の、基線と直交あるいは斜交する空間への直射影

フレクェンシー

多面体において側面が細分化される場合の稜の分割数

平行射影

互いに平行な射影線による射影

平行多角形

面心をはさんで相対する２本ずつの辺がすべて互いに平行な多角形

平行多面体

１種類の平行移動だけで側面を共有しながら３次元空間を周期的に充塡することのできるゾーン多面体

並進タイプの多胞体

側胞が平行移動するような形で集積している多胞体

閉多胞体

すべての側面が２個ずつの側胞に共有されている多胞体

閉多面体

すべての稜が２枚ずつの側面に共有されている多面体

平胞

超平面のこと

Penrose パターン

２種類の多角形による、非周期的な配列を強制する平面充填図形

胞

広義では３次元空間のこと。狭義では多面体状平胞のこと。本論文では狭義の意味で用いる。

胞係数

環状数（G_1），中空数（G_2），中空環状数（G_3）の総称

胞心模型

側胞が中心となるように３次元空間へ射影された多胞体の模型

星形化

ｎ次元閉多胞体の（ｎ－１）次元の広がりを持つ境界図形を拡大して新しい星形のｎ次元閉多胞体を導く操作

星形正多胞体

星形化された正多胞体のうち、その正多胞体と同じ対称性を持つもの

星形正多面体

星形化された正多面体のうち、その正多面体と同じ回転対称性を持つもの

マ行

Maraldi の角

正４面体角のこと

Measure Polytope（β_n）

ｎ次元空間において、直交軸に平行で等長な稜のみからなるｎ次元正２ｎ胞体。

ｎ－立方体のこと。

面縮

３次元の広がりを持つ図形を２次元の広がりを持つ面分に射影すること

面心

回転対称性を持つ多角形の、すべての回転対称軸の交点

面心模型

側面が中心となるように３次元空間へ射影された多胞体の模型

面分

平面の部分

ヤ行

ユークリッド空間

ｎ次元ユークリッド空間参照

有限回転群

有限の回転対称性を持つ図形のうち、正ｎ角錐と同じ場合を位数ｎの巡回群（C_n），正ｎ角柱と同じ場合を位数ｎの２面体群（D_n），正４面体と同じ場合を正４面体群（Ｔ），正８面体と同じ場合を正８面体群（Ｏ），正20面体と同じ場合を正20面体群（Ｉ）といい、合わせて有限回転群という

有孔多胞体

$G_1 > 0$ あるいは $G_2 > 0$ の多胞体

有孔多胞体公式

頂点、稜、側面、側胞の個数がＶ，Ｅ，Ｆ，Ｃで、胞係数がG_1，G_2，G_3の有孔多胞体に関する公式$V-E+F-C=1-G_1+G_2-G_3$

有孔胞

$G_1>0$あるいは$G_2>0$の胞

Ｕ図

R^4（ＸＹＺＵ）における正射影を構成するＸＵ座標平面上の図

４次元空間充塡図形

充塡図形の項参照

４次元多角錐

４次元空間内で１点と多面体状胞のすべての頂点とを線分で結んだとき得られる多胞体

４次元多角柱

１個の多面体状胞を４次元空間内で平行移動させたとき得られる多胞体

４次元多胞体

多胞体のこと

４次元多面体

多胞体のこと

４次元等測軸

４次元空間における直交軸の４次元空間内への直射影のうち、すべての軸上に等しい単位目盛が目盛られたもの。２本づつは約 109°28′（正４面体角）をなす。

４－立方体

４次元立方体（超立方体,正８胞体）のこと。｛４，３，３｝。

ラ行

立方体

正多面体の一つ。{４，３}。

立方８面体

半正多面体の一つ。（３，４，３，４）。

菱形30面体

対角線の長さの比が黄金比となった菱形30枚からなるゾーン多面体。

Golden Iso-zonohedraのうちのK_{30}。

菱形12面体

対角線の長さの比が１：$\sqrt{2}$の合同な菱形12枚からなる平行多面体

菱形12面体トラス

菱形12面体による３次元空間充塡図形の稜のみからなる図形

菱形立方８面体

半正多面体の一つ。（３，４，４，４）。

レイヤー

立体トラスあるいはスペース・フレームにおいて線形部材が配置された平面的な層。

１層の場合はシングルレイヤー、２層の場合はダブルレイヤーという。

連結図形

有限個のｎ次元多胞体あるいはｎ次元胞を、任意の境界図形を共有させながら

連結した図形

ワ行

Ｙ図

R^4（ＸＹＺＵ）における正射影を構成するＸＹ座標平面上の図

略記号

a : a′ : a″ ……aをY図、a′をZ図、a″をU図とするR^4（XYZU）における点Aの正射影

$a_y : b_z : c_u$ ……a : a′ : a″と同じ

a ∩ b ……aとbの共通部分（互いに交差）

Cir（a : ab）……中心a、半径abの円

$\{a_1, a_2, ----, a_n\}$ ……Schläfli記号

$(a_1, a_2, ----, a_n)$ ……半正多面体記号

本章での引用文献

1) Cornelis Van de Ven, Space in Architecture (Van Gorcum Assen,1980) p.xi
2) H.S.M.Coxeter, "Polytopes in the Netherlands, " N.A.V.W.(3),XXVI(1978), 116 ～ 141
3) Ven(1980),op.cit.,PP.133～238
4) Marcel Duchamp (浜田明訳), "表象の美学", 牧神社, 1977, PP.130～151
5) Craig E.Adcock, Marcel Duchamp's Notes from the Large Glass— An N-Dimensional Analysis (UMI Research Press,1981),p.41
6) Ulrich Conrads (阿部公正訳), "世界建築宣言文集", 彰国社,1974, PP.96～99
7) Paul Klee (土方定一、菊盛英夫、坂崎乙郎訳), "造形思考（上）", 新潮社, 1973, PP.181～183
8) Wasily Kandisky (西田秀穂訳), "点、線、面", 美術出版社, 1953, p.163
9) Sigfried Giedion, Space, Time, and Architecture(Harvard U.P.,1941), PP.430～439
10) Bruno Zevi(Trans.,Milton Gendel), Architecture as Space(Horizon Press, 1957),PP.166～167
11) ————, The Modern Language of Architecture(University of Washington Press,1978),PP.31 ～37,PP.47～53
12) Colin Rowe, The Mathematics of The Ideal Villa and Other Essays(The MIT Press,1976), P.160
13) Zevi(1957), op.cit., P.22
14) Constantin A.Doxiadis, Architecture in Transition(Hutchinson,1963), P.145
15) Zevi(1957), op.cit., P.59
16) Philippe Boudon(中村貴志訳), "建築空間［尺度について］", 鹿島出版会,1978, P.98
17) Henri Focillon(杉本秀太郎訳), "形の生命", 岩波書店, 1969, pp.50-51
18) Zevi(1957), op.cit., P.28
19) Boudon(1978), op.cit., P.63
20) Yona Friedman, Toward a Scientific Architecture(The MIT Press,1975), P.23
21) Christopher Alexander, Notes on Synthesis of Form (Harvard U.P., 1964), P.122
22) Lionel March, Philip Steadman, The Geometry of Environment(Methuen,1971), PP.174～177
23) Philip Tabor, "Analysing communication patterns", The Architecture of

Form(ed.L.March,Cambridge U.P.,1976),284～378

24) J.Baracs, T.T.Luong, B.Leopold,J.Maurice, “Habitat Polyédrique ” , Structural Topology ,#2,1979, 7 ～52

25) Pierre Granche,Vohe Emmian, “Ville Polyédrique ” , ibid.,#3.1979, 5～57

26) Koji Miyazaki, Ichiro Takada, “Uniform Ant-hills in the World of Golden Isozonohedra” , ibid.,#4,1980,21～30

27) Anton Hanegraaf, ELST(Netherlands), “Twenty Questions on Zonogons、Zonohedra and Zonoids ” , ibid.,#4, 1980, 31～40

28) S.Gulzar Haider, James W.Strutt, "The Form Studies Unit", ibid.,#4, 1980, 47 ～56

29) Steve Baer, Zome Primer(Zomeworks Co., 1970), pp.4～15

30) ————, "The 31-zone structural system", Third Internatinal Conference on Space Structures (1984), 872～875

31) Henry Crapo, “Structural Rigidity ” , Structural Topology,#1, 1979, 26～45

32) ———— , “Mathematical Questions conserning Zonohedral Space-Filling” ibid., #2,1979, 53～69

33) E.Bubner,"Adaptive Architecture:Historical Background", IL,14,1975,42～43

34) Charles Moore et.al.（石井和紘, 安藤正雄訳）,"ディメンジョン",新建築社, 1977, PP.9～18

35) David Georges Emmerich, “Empilements Concentriques ”, ibid.,#4, 1980, 5 ～15

36) Haresh Lalvani, Transpolyhedra(Haresh Lalvani,1977), PP.14～83

37) ————————, “Structures on Hyper-structures” , Structural Topology, #6,1982, 13～16

38) ————————, Structures on Hyper-structures(Haresh Lalvani,1982), PP.45 ～ 106

39) ————————, Patterns in Hyper-spaces(Haresh Lalvani,1982),PP.6～33

40) Didier Aubry, "Polyédres mixtes", Structural Topology,#4, 1980, 16～20

41) B.M.Stewart, Adventure among the Topoids. (B.M.Stewart, 1970), 163～170

42) 宮崎興二、“多面体と建築”、彰国社、1979、PP. 83～192, 227～262

43) ————、“かたちと空間”、朝倉書店、1983、PP. 51～83

44) R.Buckminster Fuller,Robert Marks,The Dymaxion World of Buckminster Fuller (Anchor Press,1973) PP.142～143

45) R.Buckminster Fuller, Synergetics(Macmillan,1975),P.23

46) Ibid., P.30

47) Ibid., P.144
48) 内田祥哉，佐々木宏，清水達男，星新一，三浦朱門，山手国弘，"多次元空間"，国際建築,Vol.26，No.12，1959，12～24
49) 佐々木宏 "多次元的建築空間論序説" 近代建築，Vol.16，No.3，1962，46～56
50) 川添登，"移動空間論"，鹿島出版会，1968
51) 黒川紀章，"ホモ・モーベンス"，中央公論社，1969
52) 樋口清，"建築における時間"，建築雑誌，Vol.84，No.1016，697～700
53) 太田利彦，"建築計画の領域と体系"，建築雑誌，Vol.84，No.1011，377～378
54) 伊藤邦明，"４次元建築に住む"（小川泰，宮崎興二共編 "かたちの科学" 朝倉書店，1987)，131～150

2　多胞体篇

２－１　胞の建築的特性

２－１－１　本章の目的
２－１－２　胞の概念
２－１－３　胞の分類
２－１－４　胞の図形的性質
２－１－５　胞の建築的特性
２－１－６　胞の回転
２－１－７　胞の連結
２－１－８　本章の結論

２－１－１　本章の目的

本章は建築上の諸形象の構成素材としての個々の内部空間および構成部材、あるいはそれらを置く外部空間、を４次元空間（R^4）における胞の３次元空間（R^3）への射影として幾何学的にとらえ、その胞の諸性質に基づいて、建築上の諸形象の構成素材の図形的解析を行なうことを目的とする。

２－１－２　胞の概念

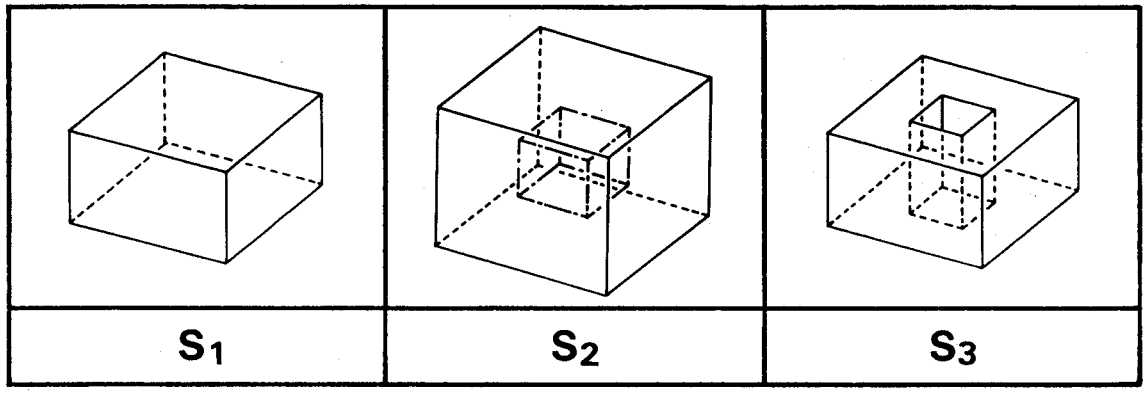
胞（Cell）とは、点、線、面、とともにR^4における諸幾何学を成立させる基礎的な３次元の広がりを持った図形であって、R^4に置かれてその空間から観察されるとき初めて自らの全体像を見せ客観的な図形的操作を受ける。

一般的にいえば、胞には、直線や平面に相当する平胞（超平面）と、曲線や曲面に相当する曲胞（超曲面）があり、また、線や面と同じく原則として無限の広がりを持つが、本章以下では特記しない限り原則として、閉多面体状に切り取られた平胞、つまり多面体状平胞をたんに胞という。その場合、胞は、頂点、稜、側面ならびにR^3の部分、を持つ。さらに、閉多面体としての外形のほか場合によって内部にさまざまな閉多面体状の中空部分（内形）を持つ。

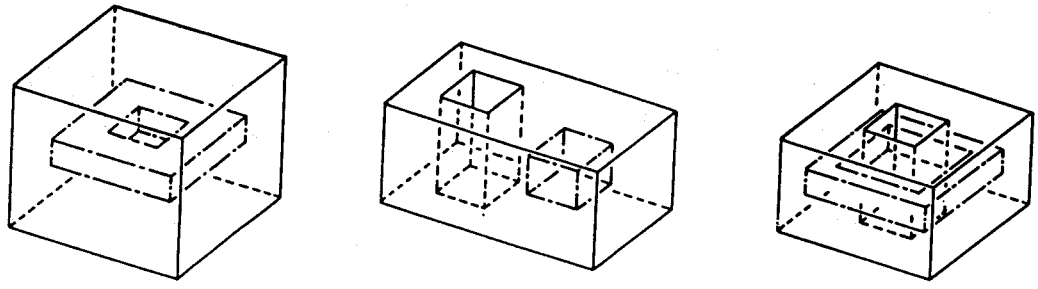
２－１－３　胞の分類

本章では代表的な胞を、定性的な性質（頂点、稜、側面の個数、ならびにそれらの連結状態、など位相幾何学上の性質）に従って、図表2-1-1 の３通りに分類する。

S_1 は、外形の示性数（貫通孔の数）Ｇが０でしかも内形（中空部分）を持たない単純



図表 2-1-1　胞の分類。S_1 は単純胞、S_2 は中空胞、S_3 は環状胞。



図表 2-1-2　さまざまな有孔胞

胞、S_2 は、外形のGが0で任意の内形を持つ中空胞、S_3 は、外形のGが1以上の環状胞である。これらのうち、中空胞と環状胞を総称して有孔胞ということもある。この有孔胞は図表2-1-2 のようにさまざまに変形させられ一般化されて建築上の形象に関係する。

2－1－4　胞の図形的性質

本章では胞の図形的性質を、点、線、面、胞の相互関係に関するつぎの式（2-1-1)によって把握する。

一般に、R^n （n＝D）において、R^a （あるいはその部分としてのａ次元の広がりを持った図形。以下同様）としてのAとR^b としてのBがR^i としてのＩを共有すれば、式

$$D = a + b - i \qquad \text{——— (2-1-1)}$$

が成立する。i≦－１の場合、AとBは交わらない。いいかたを変えれば、Ｉを共有するAとBはD次元空間を決定する。

本式は筆者が図形的な考察によって独自に導いたものであるが、線型代数上は、有限次元の線型空間Ｖの部分空間W_1 とW_2 に関する次元公式[1)]

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1+\dim W_2- \dim(W_1 \cap W_2)$$

と同等の内容を持つ。したがって、以下では次元公式とよぶ。

図表2-1-3 に次元公式から導かれる諸関係のうち代表的なものをまとめる。図表中、$a \cap b = i$ はR^a とR^b がR^i を共有しながら交わることを意味する。

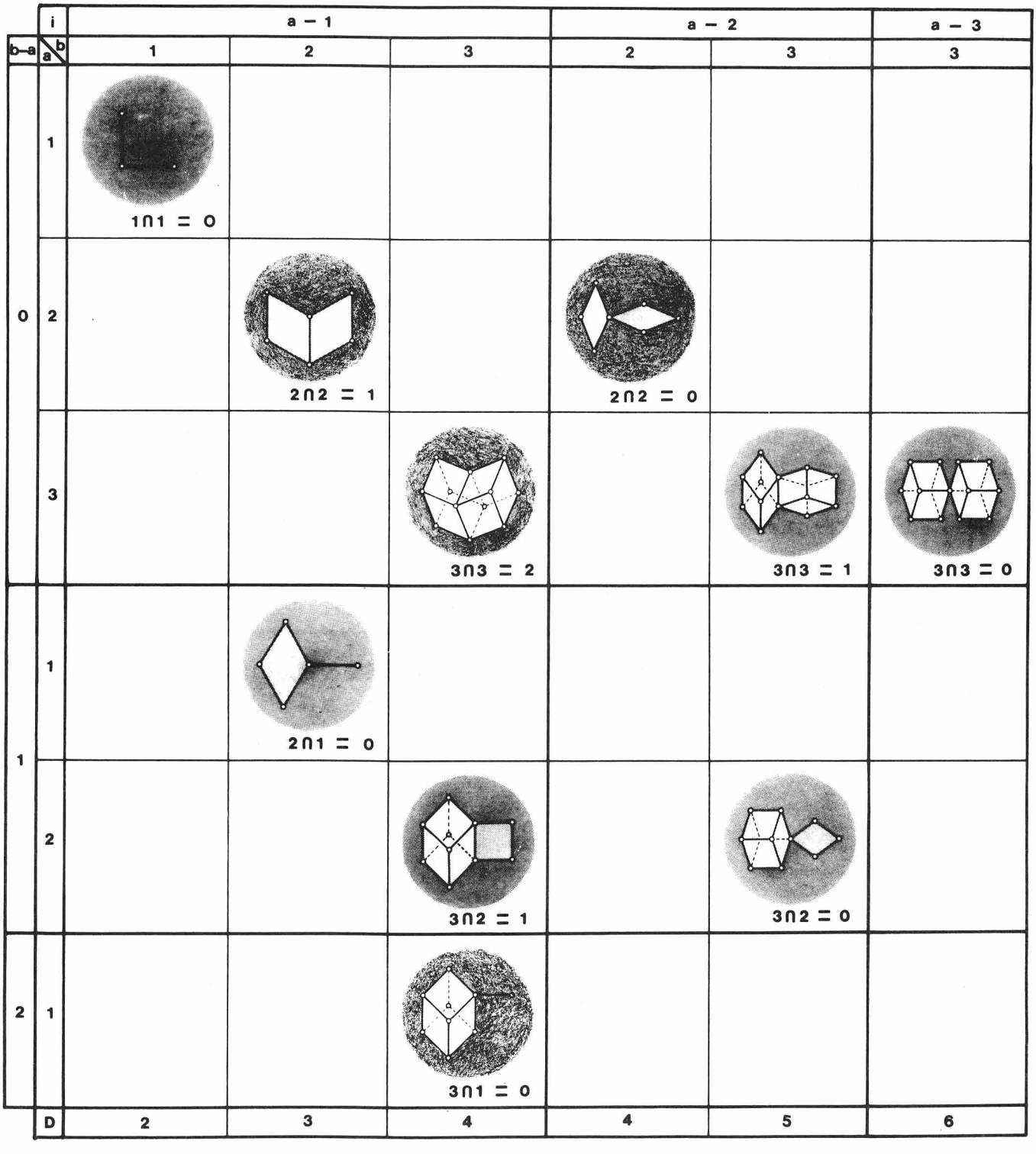
2－1－5　胞の建築的特性

図表2-1-3 のうち、とくに建築上の形象との関係が密接なものを、内部空間としての胞および構成部材としての胞に関係させて表現すれば図表2-1-4 のようになる。

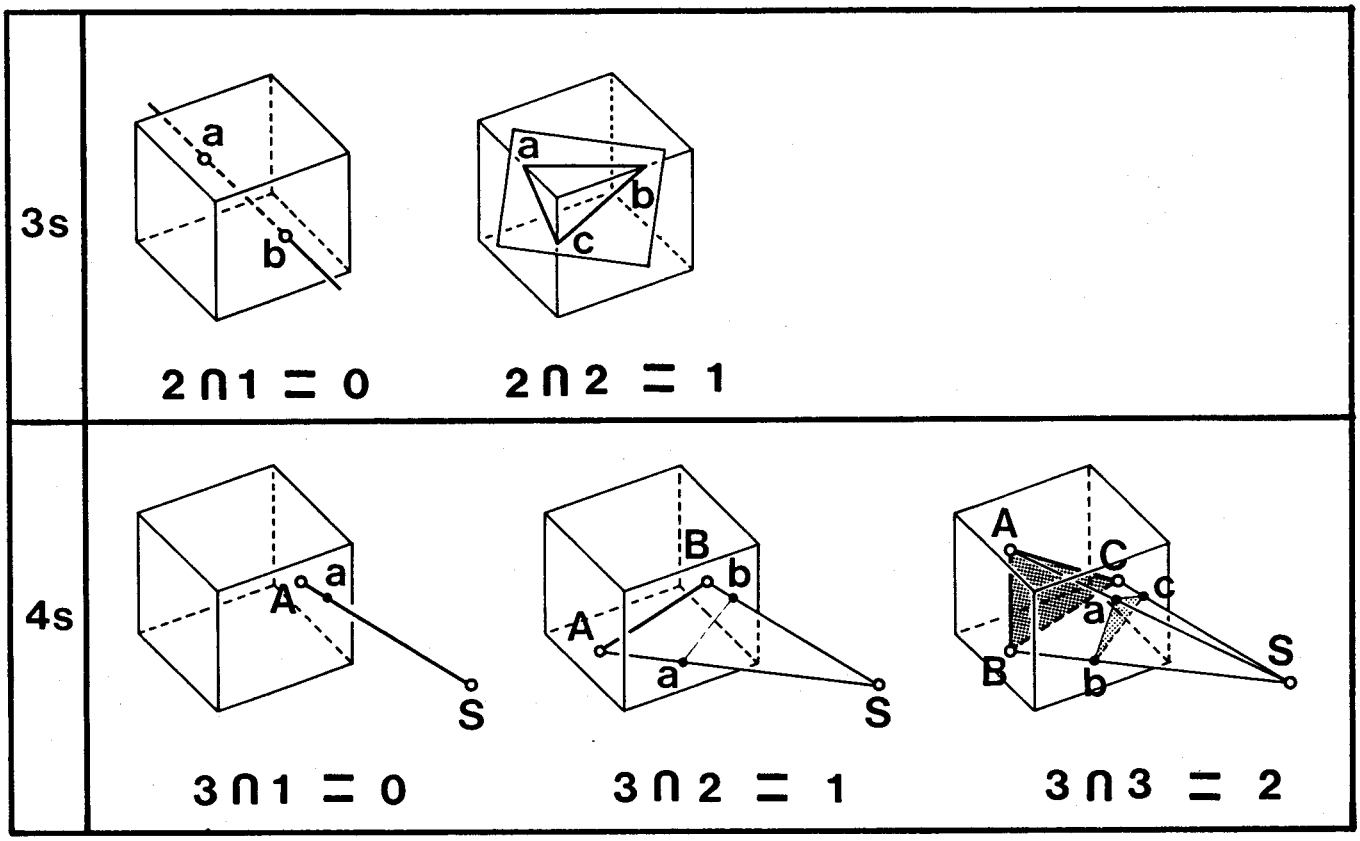
３ｓはR^3 における関係、４ｓはR^4 における関係であって、見方によっては、３ｓでは構成部材（内部に建築的意味のない空間）としての胞の２次元の広がりを持つ表面（立方体）と線分、面分との関係が示され、４ｓでは内部空間（内部に建築的意味のある空間）としての胞の３次元の広がりを持つ内部（立方体状胞）と線分、面分、胞との関係が示されている。

つまり、３ｓにおいて、一般に、与えられた多面体（立方体）と直線ａｂは側面上のａとｂで交わり、与えられた多面体と平面ａｂｃは多面体の側面の断面としての３辺形ａｂｃで交わる。このような関係は建築の構成部材としての、内部に建築的意味のない空間（物体）、の表面に関する幾何学的性質を示している。

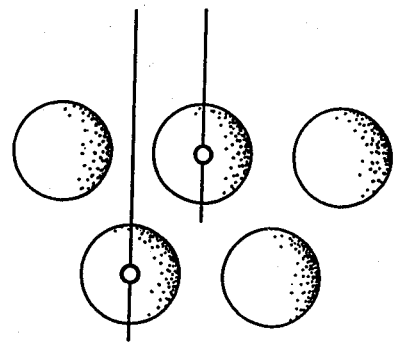
また、４ｓにおいて、一般に、与えられた胞と直線Ｓ－Ａは側面上のａでなく胞内の１点Ａを共有している。この場合の直線Ｓ－Ａは、Friedmanによる図表1-5 と同じく、一つ



図表 2-1-3　次元公式 D=a+b-iに基づく点、線、面、胞の代表的な相互関係。
各図下のa∩b＝iは、R^a と R^b が R^i を共有し合って
交わることを意味する。



図表 2-1-4　点、線、面、胞の代表的な相互関係の建築的内容。
3 s は立方体に関する R^3 における関係、
4 s は立方体状胞に関する R^4 における関係。
a , b , c は側面上の点、A , B , C は胞内の点。



図表 2-1-5　微小な物体の内部の点を通る R^4 内の直線

の内部空間を抽象する１点Ａを通っていて、建築計画上の機能線あるいは動線を表現している。

同じく４ｓにおいて、与えられた胞と平面Ｓ－ＡＢは側面上の線分ａｂでなく胞内の１線分ＡＢを共有している。この場合の平面Ｓ－ＡＢを、Ｓから発する視線の移動の軌跡と考えれば、内部空間内に置かれた１点Ａの運動をＳから認知する状態を示している。

さらに４ｓにおいて、与えられた立方体状胞と４面体状胞Ｓ－ＡＢＣは側面上の面分ａｂｃでなく胞内の１面分ＡＢＣを共有している。この場合の胞Ｓ－ＡＢＣは、たとえば内部空間内の１個の物体などをその表面によってＳから認知する状態を示す。　したがってけっきょく、内部空間は上述の３ｓではなくむしろ４ｓに従って把握すべきであることが理解される。内部に建築的意味のない構成部材についても、たとえば３ｓの２∩１＝０の場合についていえば、部材の表面の微小な部分と直線が、図表2-1-5 のように４ｓにおいて交わっている、とも考えられるのであり、こうした性質にしたがって実際に設計図書の作成が行なわれ、また既往の諸説で触れた1900年前後の建築運動の理論的根拠の一つにしばしば空間の４次元性が加えられる。透明度が高く、側面の限定が困難なガラス質や液状の部材は４次元空間の表現に適している、というようなモダニズム建築の一つの基本的理念（向井,1983[2)]）もある。

２－１－６　胞の回転

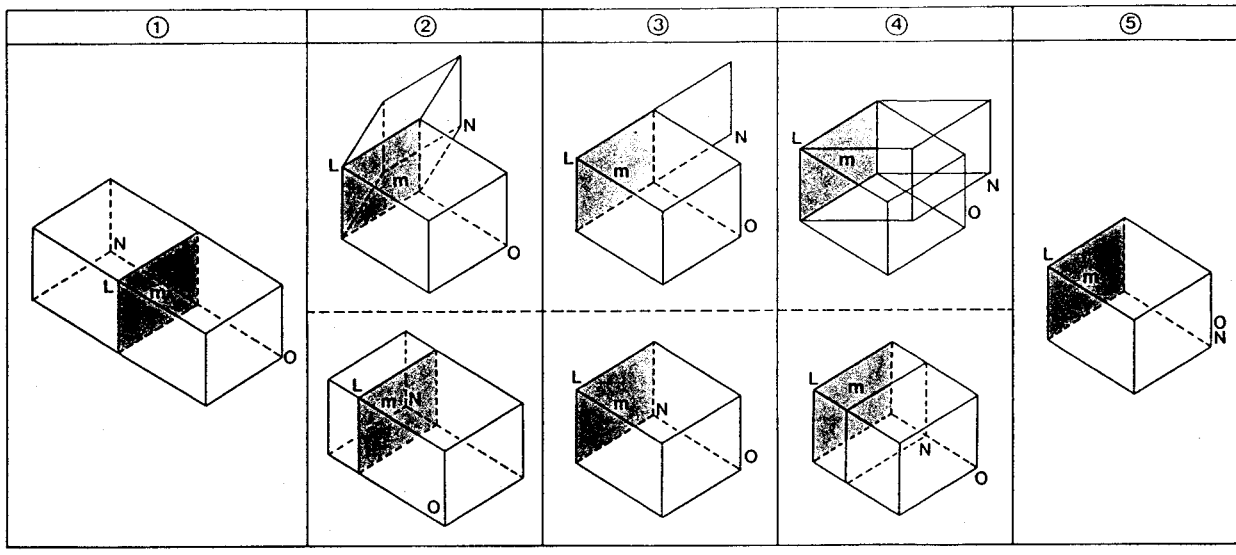
図表2-1-3 によると、胞はR^4 内で側面を共有し合いながら連結する。連結した複数の胞は、稜ではなく側面を回転中心としてR^4 内で回転させることができるが、その様相を、本章ではR^3 内への射影によってつぎのように把握する。

図表2-1-6 に、側面ｍを共有し合う２個の胞ＬＯ，ＬＮのうち、ＬＮがｍを中心として回転する諸相を示す。

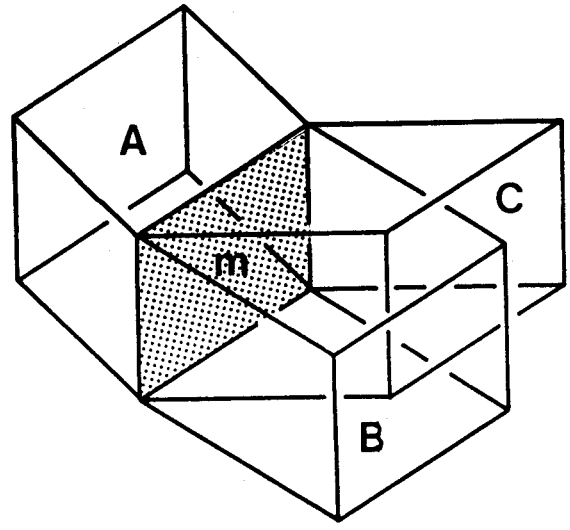
表中、②、③、④各上段では、ＬＮがｍの外を迂回するように表現され、同じく下段では、ＬＮがｍに直交する方向へ伸縮するように表現されている。その場合、R^3 への射影の特徴により、③ではＬＮが１面分に面縮（平面状に射影されること）し、④の上段ではＬＮとＬＯが部分的に相貫している。また、①ではｍの左にあったＮが⑤では右に移動している。つまり、ＬＮの内部が反転している。

３個以上の胞が与えられた場合（図表2-1-7 ）も同様であって、それらが上表⑤のように互いに重複するようにR^3 内へ射影されれば、建築上、多重に使用される内部空間が表現される。

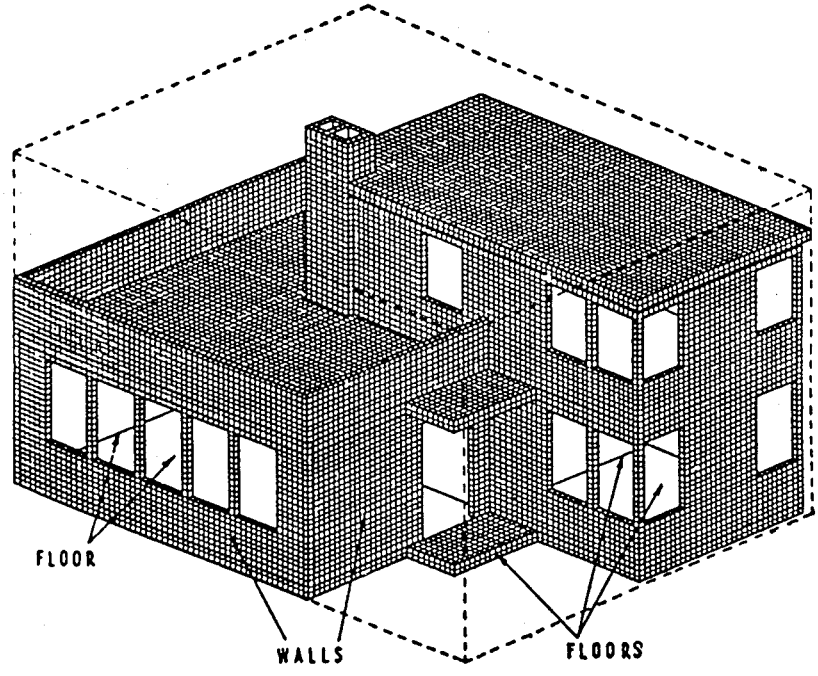
このような、回転（移動）する胞のR^3 への射影の諸相には、建築上の内部空間や構成部材の、時間的経過や利用者の使用状況などに伴なうさまざまな変化の諸相が表現されていると考えられるのであり、そうした変化を含んだ胞の連結図形が、そのまま、次章で触



図表 2-1-6　側面ｍを共有し合う胞ＬＯと胞ＬＮの回転状態



図表 2-1-7　側面ｍを共有し合う３個の胞Ａ，Ｂ，Ｃ



図表 2-1-8　A.F.Bemis によるCubical Modular Method説明図。
The Evolving House Ⅲ (1936) より。

れる多胞体として図形化されることになる。

2－1－7　胞の連結

あらゆる胞、いいかえればあらゆる建築上の形象、は Bemis[3)]が Cubical Moodular Method（図表2-1-8)で試みたように近似的には微小な単純胞としての立方体状胞の側面の共有による連結図形に置き換えることができる。

次元公式ならびに図表2-1-3 によると、そのような連結操作は、幾何学的にはR^4 において可能である。R^5 においては直線を、R^6 においては１点を、それぞれ共有し合うのみであって、R^7 以上の空間においてはもはや一般に交わらない。逆にR^3 以下の空間においては原則として全体が重複する。

実際に図表2-1-9 のような、R^5 における３∩３＝１（２個の内部空間が線分で接する）やR^6 における３∩３＝０（２個の内部空間が１点で接する）などの加わった構成は一般的な意味での建築上の形象にはなっていない。

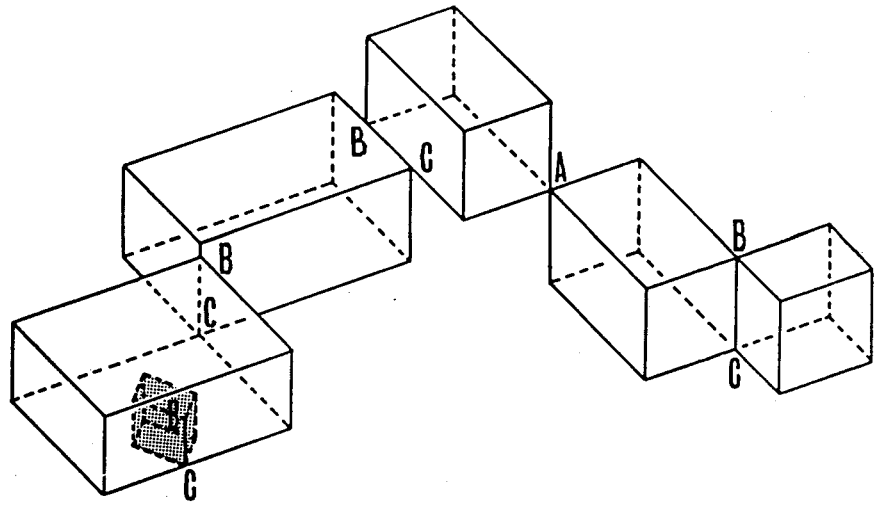
Friedman(1975)[4)]による３個のブラックボックスとしての立方体状胞の居室ユニットの連結形態（図表2-1-10）にも、稜のみを共有し合ってR^5 を示す例が加えられていて、図のままの状態では建築上の具体性を欠いている（Friedman自身は、共有し合う稜を細長い面分に置き換えることを提案している）。

以上のように連結された胞は、図表2-1-6-のようにR^4 内で回転（移動）させられて変化する。

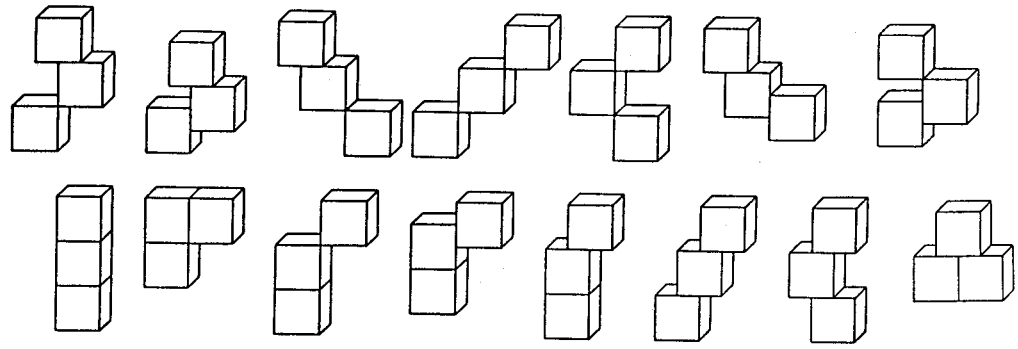
つまり、一般に建築上の形象は、時間的経過や使用状況などに従って変化する外部空間ｃの中で、やはり時間的経過や使用状況などに従って変化する内部空間ｂおよび構成部材ａが、図表 2-1-11 の①のように２個で１枚づつの側面を共有し合いながら連結することによって構成される。巨視的にａとして地球そのものを加えても（同図②）、また逆に微視的に考えて物質の分子や原子の領域を加えても、状態は変らない。内部空間が利用状況に応じて象徴的に区分されるときや、外部空間の中に、構成部材で保護されない形で抽象的な内部空間のみが想定されるときなどは、ｂを区分したり、ｂのみをｃの中で配置したりすることによって表現することができる。

それに対して、２個の胞が、一方の面縮を許しながら、図表2-1-12のように、相貫し合いながら組合わせられているときは、次元公式から判断すると、互いの胞はR^4 内では分離し合っている。このような、相貫し合い重複し合う胞による構成もまた、Zevi(1978)[5)]も言及するように、De Stijlの４次元的考察などを原点として、Roheや Wright らの、変化し変容する内部空間が有機的に相貫し合う建築（図表2-1-13）として具体化されるのである。

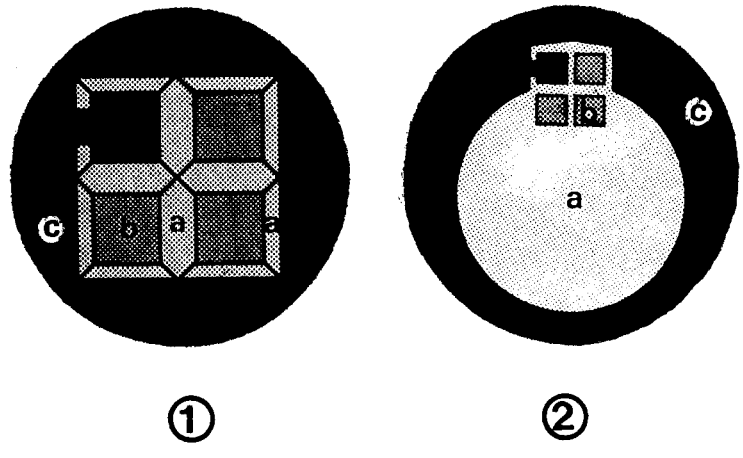
いずれにしても変容や移動の概念をも加味した建築上の形象は、基本的には、R^4 内で



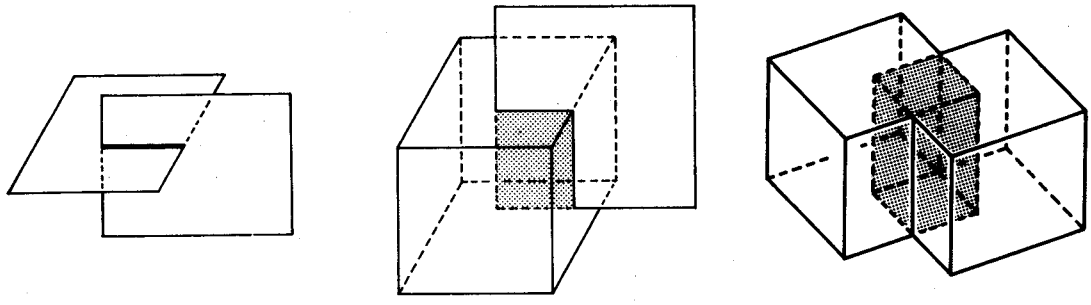
図表 2-1-9　R^5 における $3 \cap 3 = 1$ や R^6 における
$3 \cap 3 = 0$ などの加わった建築的でない構成。点Aや線分BCの
共有は一般的な意味での建築上の形象には現われない。



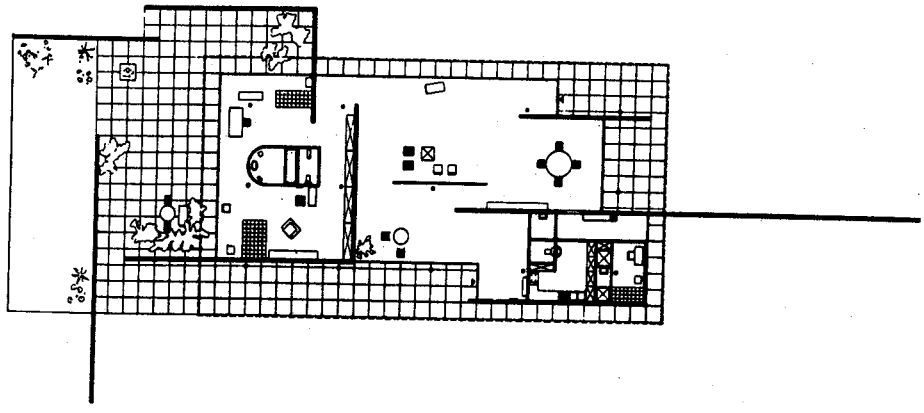
図表 2-1-10　Y.Friedman の数え上げによる
3個の立方体状胞の連結形態



図表 2-1-11 構成部材（a），内部空間（b），外部空間（c）のさまざまな配置



図表 2-1-12 R^4 では交わっていない２個の胞のR^3 における表現。



図表 2-1-13 House at the Building Exhibition, Berlin。
Mies van der Rohe 設計。 1931 。

側面を共有し合って連結する胞群（つまり次章以下で触れる多胞体）、あるいはR^4内で互いに分離し合うように配置された胞群の、R^3内への射影として把握することができる。

2－1－8　本章の結論

さまざまに変容したり移動したりする内部空間と構成部材の側面を共有し合う連結体としての建築上の諸形象は、3次元以下でも5次元以上でもなく、4次元の広がりを持つ空間に置かれて4次元幾何が適用されるとき、もっとも具体的な建築的様相を見せる。

いいかえれば、建築上の形象にとって本質的に重要な図形は、幾何学的仮想上の点、線、面ではなく、モダニズム建築の出発点となったさまざまな建築上の論理にすでに加えられているように、3次元の広がりを持った空間の部分、つまり本章での胞である。しかもそうした前提によって得られる結果は、建築上実際に経験する事象と矛盾しない。むしろ、3次元幾何が適用される場合よりも実際的である。

本章での引用文献

1) 伊原信一郎、“線型空間Ⅱ”（岩波講座・基礎数学）、岩波書店、1976、p.140
2) 向井正也、“モダニズムの建築”、ナカニシヤ出版、1983、P.170
3) A.F.Bemis, The Evolving House(The MIT Press,1936), Ⅲ
4) Yona Friedman, Toward a Scientific Architecture(The MIT Press,1975),P.35
5) Bruno Zevi, The Modern Language of Architecture(University of Washington Press,1978),PP.31 ～38

２－２　多胞体の建築的特性

２－２－１　本章の目的
２－２－２　多胞体の概念
２－２－３　多胞体の創成
２－２－４　多胞体の表現
２－２－５　多胞体の図形的性質
２－２－６　多胞体の建築的特性
２－２－７　多胞体の回転
２－２－８　多胞体の連結
２－２－９　本章の結論

２－２－１　本章の目的

本章は、複数個の胞が２個で１枚ずつの側面を共有し合いながら４次元空間（R^4）の中で連結した図形としての多胞体の一般的概念によって、使用状況や時間的経過などによってさまざまに移動し変容する内部空間と構成部材の連結体としての建築上の形象の、幾何学的側面を理解し表現することを目的とする。

２－２－２　多胞体の概念

一般に多胞体（４次元多面体あるいは４次元多胞体。以下ではたんに多胞体と略称する）とは、複数個の多面体状胞が２個で１枚ずつの側面を共有し合いながら同一の３次元空間（R^3）内には横たわらないようにR^4内へ入り組んで連結した図形で、各多面体状胞の持つ頂点、稜、側面のほか、側胞（多面体状胞自身）を持つ。

多胞体のうち、とくに、すべての側面がちょうど２個づつの側胞に共有されているものを閉多胞体、１個の側胞のみに属する側面と２個づつの側胞に共有されている側面の両者があるものを開多胞体という。３個以上の側胞に共有されている側面がある場合は多胞体の連結図形が現われている。

閉多胞体には、胞の場合と同じく中空のもの（中空多胞体）や環状のもの（環状多胞体）も考えられるが、建築との関係上それらは煩雑にすぎる。したがって、本論文ではそうした多胞体以外の多胞体（単純多胞体）のみを扱う。

2－2－3　多胞体の創成

創成過程から判断して、本章では建築上の形象に応用され得る多胞体を、大きくわけて、側胞が1点を中心として球状に回転運動していると解釈されるもの（回転タイプ）、1個の側胞が円柱状に並進移動していると解釈されるもの（並進タイプ）、1個の側胞が1点に向って円錐状に求心変化していると解釈されるもの（求心タイプ）、の3種類、ならびにそれらの中間タイプ（たとえば側胞が1線分に向って錐状面状に求心移動していると解釈されるものなど）に分類する。

その図形的概要を1次元の広がりを持つ図形（n＝1）としての多辺形、2次元の広がりを持つ図形（n＝2）としての多面体と対比させながら図表2-2-1 のn＝3に示す。

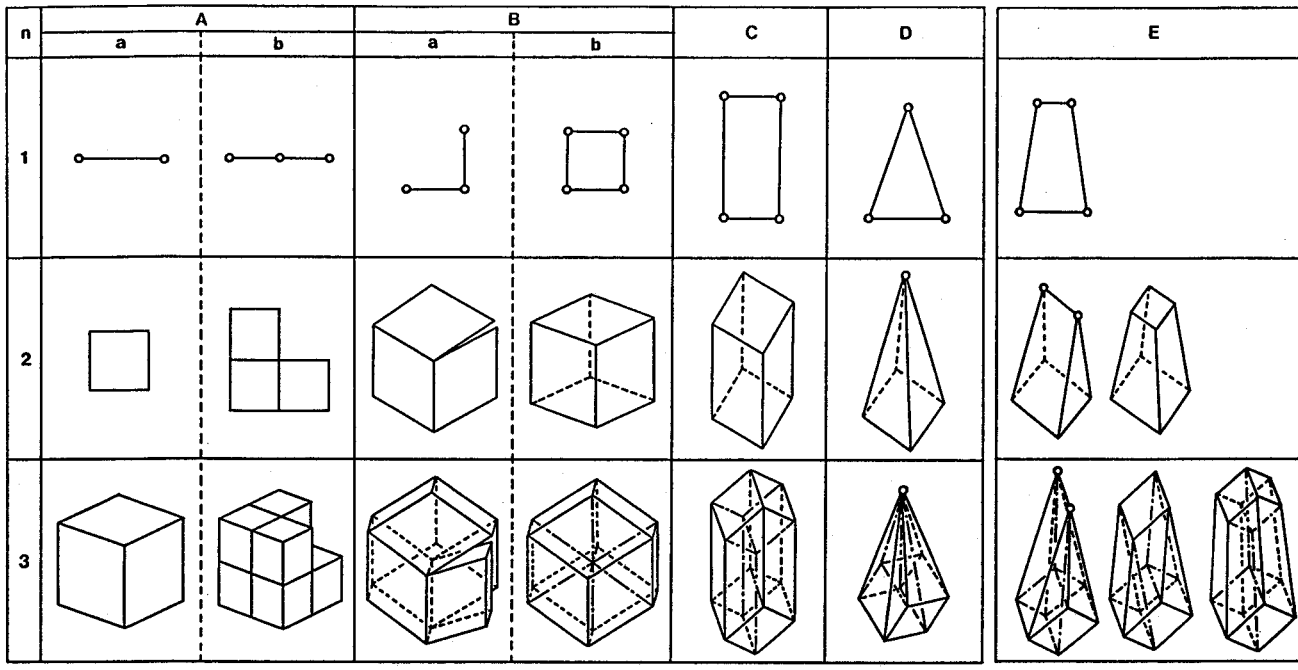
AとBは回転タイプ、Cは並進タイプ、Dは求心タイプ、Eは中間タイプである。ただし、図表中のnに従って、AはR^n内に置かれ、B、C、D、EはR^{n+1}内に置かれる。

A－aは境界図形としての線分（n＝1）、多角形（n＝2）、多面体状胞（n＝3）を示し、A－bはそれらがR^n内で（n－1）次元の広がりを持つ図形を共有し合いながら連結した直線（n＝1）、多角形による2次元平面の充塡図形（n＝2）、多面体状胞による3次元空間の充塡図形（n＝3）を示す。　B－aはA－bのそれぞれがユニットの一部を除外しながらR^{n+1}内へ入り組んだ、開多辺形（n＝1）、開多面体（n＝2）、開多胞体（n＝3）を示し、B－bはそれらがR^{n+1}を切り取るように閉じた、閉多辺形（n＝1）、閉多面体（n＝2）、閉多胞体（n＝3）を示す。このB－bのn＝2の場合、見えがくれ部分の3枚の側面が追加され図では6面体となるのと同じく、n＝3の場合も4次元的な見えがくれ部分の4個の側胞が、すでにある4個と相貫するように追加されて図では8個の立方体状胞が集積する8胞体となる。それに従って、A－a－（n＋1）とB－b－nは、前者が後者を外形としている関係になって、AとB全体が一連の流れを持つ。

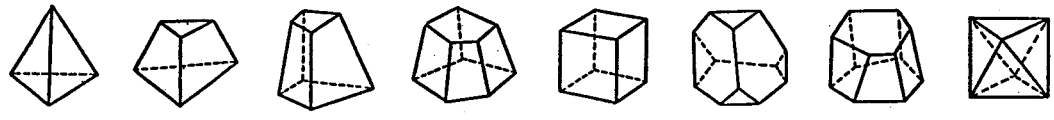
また、A－bのそれぞれは、R^nを直線状や平面状に充塡することを前提としていて、B－bのそれぞれがR^nを円状や球面状に充塡する状態に対応している。いいかえれば、いずれも閉じた図形である。それに対して、A－aとB－aのそれぞれは開いている。

なお、Bは、R^{n+2}以上の広がりを持つ空間においても実現することができる。ただし、その場合、B－b－nからA－a－（n＋1）への流れにおいて曲面や曲胞が生じる場合があり、本論文で定義する意味での多面体や多胞体に一致しない。

このAとBに対して、Cの並進タイプにおいては、B－bを一般化した平行4辺形（n＝1）、多角柱（n＝2）、4次元多角柱（n＝3。胞を底とする4次元的角柱）が示され、またDの求心タイプにおいては、Cをさらに一般化（平行移動の概念を消去）した3



図表 2-2-1　多辺形(n=1),多面体(n=2),多胞体(n=3) の創成。
A は開いた回転タイプ、B は閉じた回転タイプ、C は並進タイプ
D は求心タイプ、E は中間タイプ



図表 2-2-2　4 － 立方体の断面として現れる代表的な閉多面体。
中村ら(1980)による。

辺形（ｎ＝１）、多角錐（ｎ＝２）、４次元多角錐（ｎ＝３。胞を底とする４次元的角錐）が示されている。

これらのうち、とくにｎ＝３の場合を建築的に考えれば、Ａ－ａは空間ユニットを、Ａ－ｂはその空間ユニットのR^3における積層を示す。それに対して、それら以外はR^4における積層を説明していて、Ｂは集積回転する空間の様相を、Ｃは並進移動する空間の様相を、Ｄは求心変化（膨張収縮）する空間の様相を示す。

２－２－４　多胞体の表現

多胞体をR^3内で表現するには、次章で触れるR^3への射影による方法（基礎的な概念についてはたとえば Shoute 1905[1]）と、R^3による断面を列挙する方法（同じくたとえば Coxeter 1973[2]）が代表的に用いられている。

そのうち、後者は、断面としてのさまざまなR^3内の閉多面体を調べるもので、部分の理解には効果的であっても全体像を再現する操作は容易ではない。たとえば、図表2-2-2に中村ら（1980）[3]の数え上げた４次元立方体（４－立方体）*の断面として現われる閉多面体のうち対称性のある代表的なものを示す。これらを総合する作業はきわめて困難である。

したがって、本論文では、図表2-2-1 ですでに見られるようなR^3への射影によって表現する。

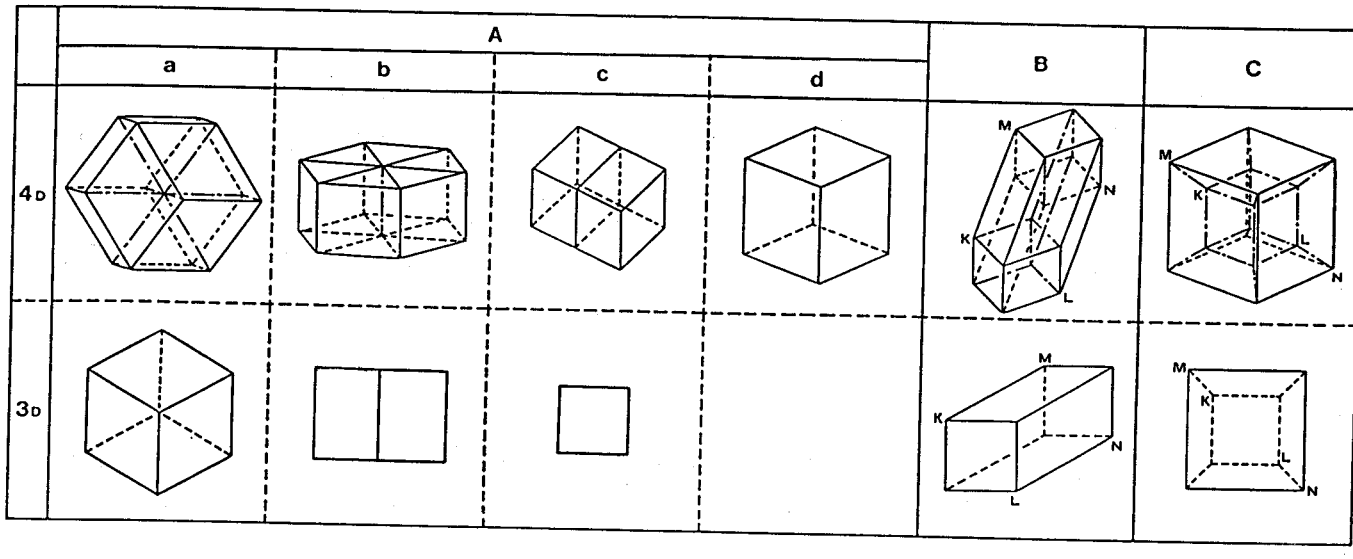
多胞体をR^3内へ射影すると、原則として内部に４次元的なかくれ線（本論文では１点鎖線で示す）を持った多面体状の外形をした図形として現われる。すでに、図表2-2-1 のｎ＝３の場合のＢ－ｂ、Ｃ、Ｄでも見られる通りである。ただし、これらの図は平面上への射影で示されているのであり、その場合には、R^3で用いられている破線で示されるかくれ線も現われ、けっきょく原則として２種類のかくれ線が使われることになる。

そのような前提のもとで４－立方体をさまざまに表現すると図表2-2-3 の4Dのようになる。

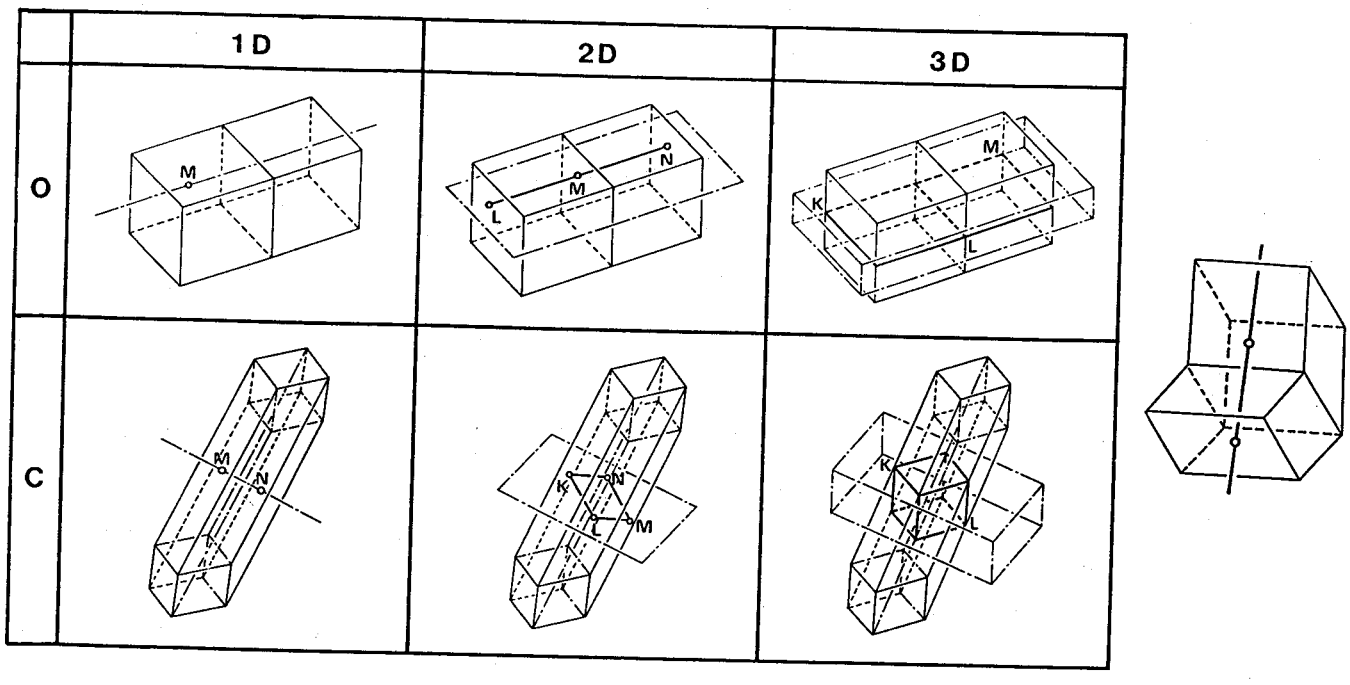
Ａは、R^4内で回転する４－立方体をR^3に直交する平行な射影線で射影したもの（次章で触れる直射影）、Ｂは、R^4内にある４－立方体をR^3に斜交する平行な射影線で射影したもの（同じく斜射影）、Ｃは、１点から発散する射影線で射影したもの（同じく中心射影）である。

いずれにしても、多胞体は、頂点、稜、側面、側胞によって構成されているのであり、Ａのうち、ａ（点心模型）は頂点、ｂ（線心模型）は稜、ｃ（面心模型）は側面、ｄ（胞心模型）は側胞、を中心（４次元的には手前）とするように射影されている。

その結果として、ａでは合同な８個の平行６面体状胞が２個づつ互いに相貫し合いなが



図表 2-2-3　4－立方体（4D）と3－立方体（3D）の各種射影。
Aは直射影（aは点心、bは線心、cは面心、dは胞心）
Bは斜射影、Cは中心射影。



図表 2-2-4　開多胞体（O）と、閉多胞体（C）の、直線（1D）、平面（2D）、胞（3D）との相互関係。欄外の図は開多胞体と直線の関係の特殊例。

ら全体として菱形１２面体状に集まり、ｂでは６個の菱形柱状と２枚の正６角形状（平縮）の胞が全体として正６角柱状に集まり、ｃでは２個の短い直方体状と２個の長い（全体を包む）直方体状および４枚の長方形状（面縮。各長方形は２等分されている）の胞が全体として直方体状に集まり、ｄでは互いに重複し合う２個の立方体状胞とその側面に重複する６枚の正方形状（面縮）の胞が全体としても立方体状に集まる。

なお、図表2-2-3 の3Dは、4Dのそれぞれに相当する、３－立方体の平面上への射影を示しているが、見方によれば、各図とも、それぞれの上段の場合の４－立方体の適当な方角からの射影ともなっている。

＊ ４次元立方体（以下では４－立方体と略称する）とは３次元立方体（以下ではたんに立方体という）に相当する図形であって、１６個の頂点、３２本の稜、２４枚の正方形側面、８個の立方体状胞を持つ。構成過程から見れば、立方体が一定長を１辺とする正方形側面をR^3内でそれに直交する方向へ同じ一定長だけ平行移動させたとき得られる図形であるのに対し、４－立方体は、一定長を１稜とする立方体状側胞をR^4内でそれに直交する方向へ同じ一定長だけ平行移動させたとき得られる図形である。

２－２－５　多胞体の図形的性質

本章では多胞体の図形的性質を、胞の場合と同じく次元公式（式2-1-1)から導く。その結果を図表2-2-4 に図示する。上段Ｏは開多胞体、下段Ｃは閉多胞体の場合であって、１Ｄは直線との、２Ｄは平面との、３Ｄは胞との関係を示す。

Ｏ－１Ｄでは、直線と開多胞体は一般に側胞内部の１点Ｍのみで交わるが、開多胞体の形状がたとえば途中で折れ曲っているような場合は２点で交わることもある（右端図）。

Ｏ－２Ｄでは、平面と開多胞体は一般に側胞内部の折れ線ＬＭＮで交わる。右端図に準じて別々の側胞内にある２線分で交わることもある。

Ｏ－３Ｄでは、直胞と開多胞体は一般に側胞内部の開多面体ＫＬＭで交わる。右端図に準じて別々の側胞内にある２面分で交わることもある。

それらに対して、Ｃ－１Ｄでは、直線と閉多胞体は一般に異なる側胞の内部の２点Ｍ、Ｎで交わる。

Ｃ－２Ｄでは、平面と閉多胞体が交わって、側胞内部で閉多辺形ＫＬＭＮを構成する。

Ｃ－３Ｄでは、胞と閉多胞体が交わって、側胞内部で閉多面体ＫＬを構成する。この状態は多胞体の切断に相当するものであって、図表2-2-2 は、この原理に基づいて導かれている。

２－２－６　多胞体の建築的特性

多胞体は、つぎのような建築的特性を持っている。

つまり図表2-1-11の①のように把握される場合の外部空間ｃをも加えた建築上の形象は、たとえば図表2-2-3 の Cの4Dのように表現されるときの閉多胞体の射影に一致する。その場合、外部空間は、多胞体を全体的に包んでいる胞ＭＮを意味している。外部空間を省略したり、あるいは、内部空間や構成部材のうち不要な部分を無視したりするときは開多胞体となる。外部空間と内部空間が、構成部材の間隙を通して連続したり、内部空間や構成部材が中空胞や環状胞になる場合もある。

それに対して、図表2-1-11の①の外部空間ｃを、無限に広がる胞とは考えず、すべてのａ，ｂを全体的に包括する有限な胞と考えれば、図表2-2-3 に従って、つぎのような把握が可能となる。

まず、求心タイプ（Ｃ）は、中央にある胞としての内部空間ＫＬが、全体を包む胞としての内部空間ＭＮへ膨張あるいは成長する様相を示す。ＭＮがＫＬへ収縮すると見てもよい。このような状態は、空気膜構造などに代表される膨張収縮する建築、あるいは観念的な意味での成長する建築、などに関係している。１－４の（１）で触れた Doesburg のいう反立方体的(Anti-Cubic)な建築つまり、高さ、幅、奥行、の三つの次元のほかに、時間軸を持って４次元空間内へ発展的に拡張される建築、の原理的な構造でもある。より具体的に、 Blackwell(1984)[4]は、ＫＬあるいはＭＮの持つ３次元の広がりに加えて、構成部材の厚さＫＭあるいはＬＮは４次元目の広がりを示すという。

並進タイプ（Ｂ）は、ＫＬがＭＮへ平行移動していて、移動建築あるいは可動建築の原理を示している。

さらに、回転タイプ（Ａ）では、具体的な建築上の形象の代表例である、１点を中心として立体的に集積する空間群（ａ）、１線分を中心として平面的に集積する空間群（ｂ）、１面分を媒介として直線的に連結する空間群（ｃ）、１個の胞に重複する、つまり多重の用途に使用される空間群（ｄ）、のすべての構成が網羅されている。

図表2-2-4 についていえば、膨張（収縮）したり移動したり回転したりする内部空間を、１Ｄでは、一定の視線で把えたり、動線計画や機能グラフにおいて定点によって定位したりする様相が示され、２Ｄでは内部空間の配置から導かれる平面上の区画や区分の様相が示され、３Ｄではさまざまな日常的な物体を、その表面によって内部空間内で把握する様相が示されている。いいかえれば、内部空間や構成部材を１点ＭやＮで代表させる１Ｄは空間あるいは部材の位置を明示するほか、内部空間や構成部材の関係を線分ＬＮや多辺形ＫＬＭＮで代表させる２Ｄは建築の計画段階に、内部空間や構成部材の集積を面分ＫＬＭや多面体ＫＬで表現する３Ｄは設計図書作成段階に、それぞれ関係している。

２－２－７　多胞体の回転

多胞体はR^4内で任意に回転させられ、それに従ってR^3内への射影はさまざまに姿を変える。

たとえば４－立方体の場合、代表的に図表2-2-3 のA の4Dのように姿を変える。

その様相を筆者ら（1986）[5]に従って連続的に示すと図表2-2-5 のようになる。理解の便を図るため、４－立方体を構成する８個の立方体状側胞の内部には、１個から８個までの色彩の異なる球が入れてあり、そのうち、円板に面縮した場合の球と４次元的に隠れた部分とを消去して図としてはたえず４種類以下の球配列だけが現われるようになっている。　まず、右上に４個の球の入った側胞が図表2-2-3 の Aの4D-dに従って、R^3内の立方体状胞として置かれている。

これを回転させると、上側から１個の楕円体を持った扁平な平行６面体状胞が、また、右から３個の楕円体を持った胞、手前に２個の楕円体を持った胞が現われ、それらが次第に立方体や球に近づき、かつ反時計まわりに移動する。

それと同時に２個の球を持った側胞は、下へ移動しながら次第に扁平な平行６面体に面縮し、右から２列目上では面縮して図から消える。

さらに回転が続くと、上から７個の球を持った側胞が現われ、という過程を経て、立方体状胞と球は平行６面体状や楕円体状に姿をかえながら消えたり現われたりする。図で左下と右上は連続するようになっている。

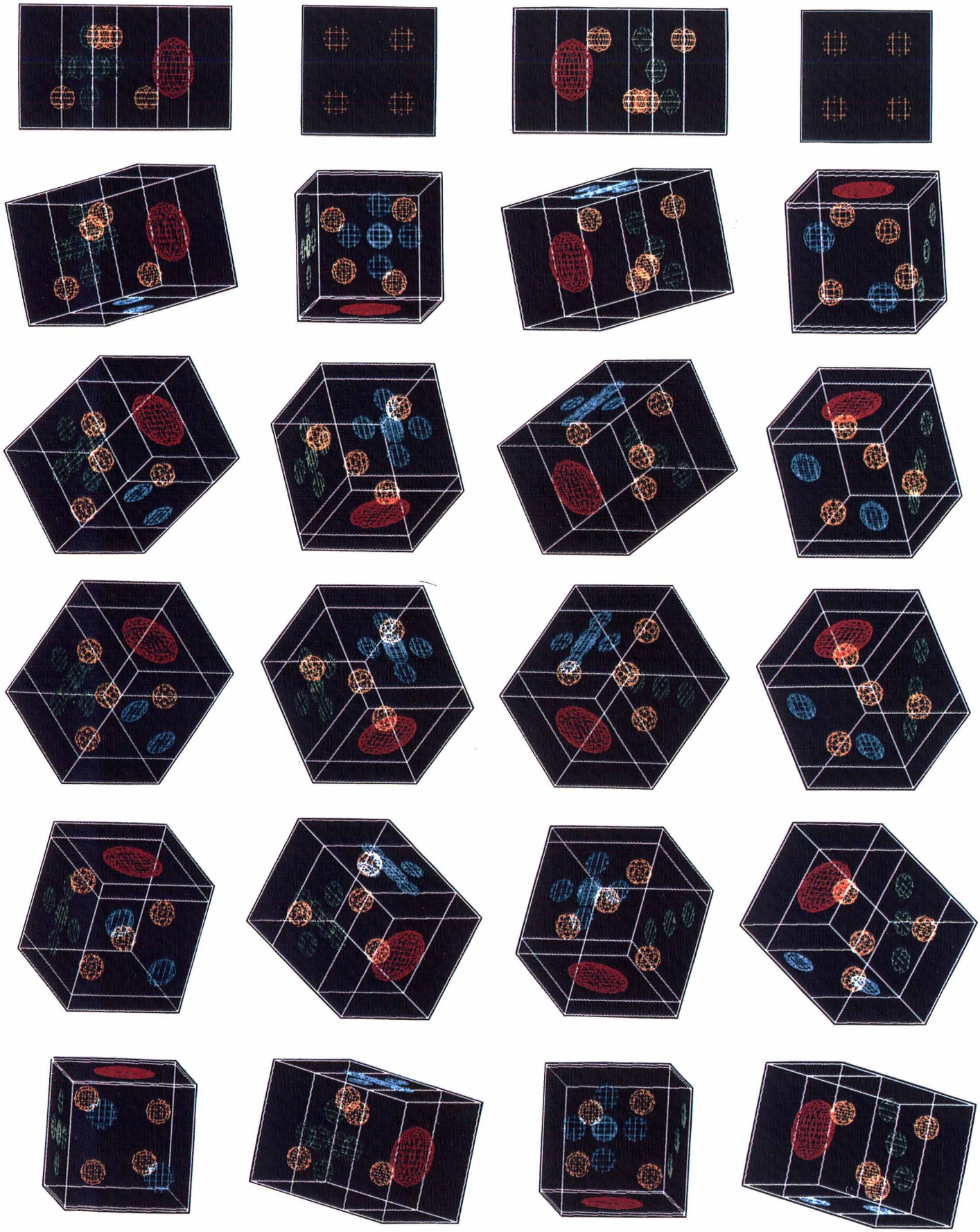
この回転の様相をR^4内で他の角度から見れば、図表2-2-6 のように表現することもでき、この場合は、図表2-2-3 の Aの3Dの状態が現われる。

こうした回転過程には、空間自身の膨張、収縮、移動、変容などが示されている。しかも、その変容は、R^4における視点を変えたとき、図表2-2-6 のようにR^3において通常親しまれている空間形態となる。いいかえると、日常的に知られている図表2-2-6 のような形態の内部に、図表2-2-5 のような４次元的変容が隠されている。

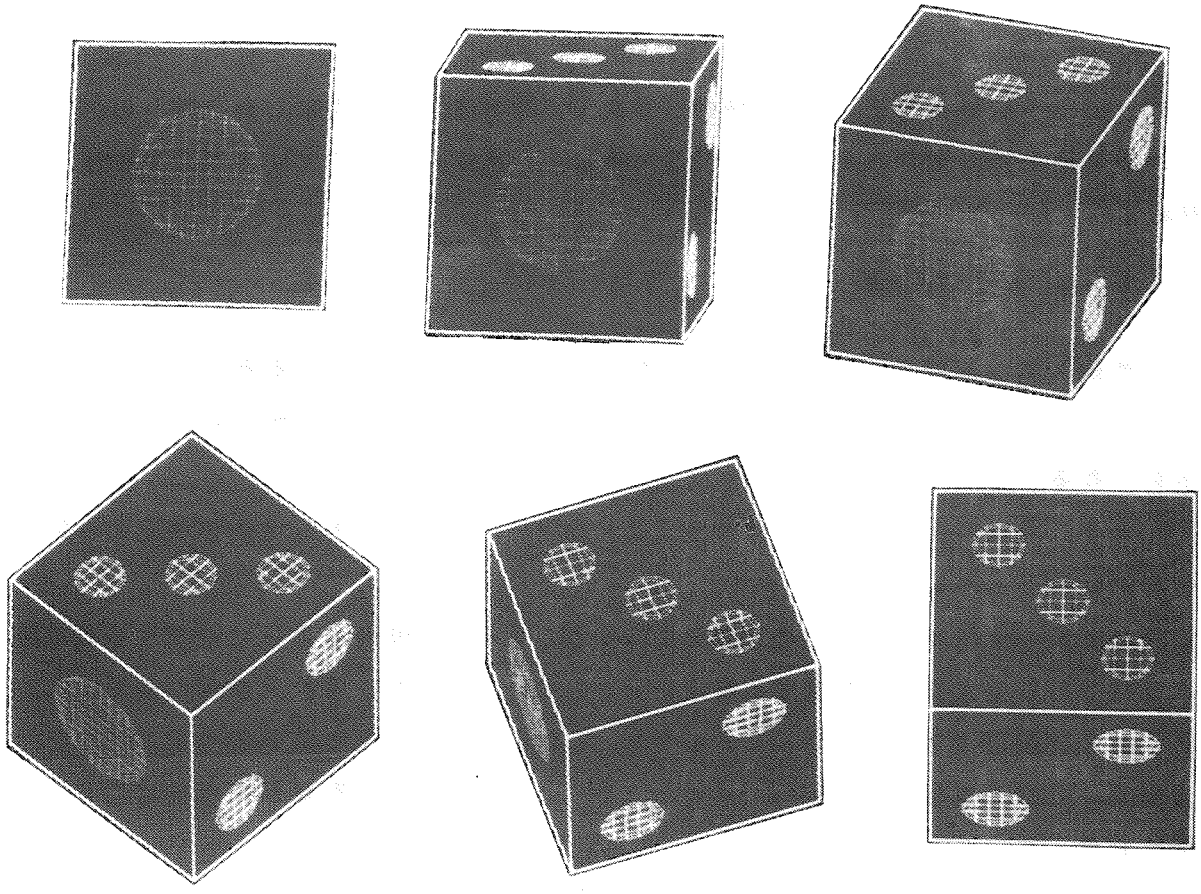
２－２－８　多胞体の連結

複数個の多胞体は、それぞれの持つ頂点、稜、側面、側胞を共有し合いながら、R^4の中で連結することができる（図表2-2-7）。ただし、頂点、稜、側面のみを共有し合うものは、そのR^3への射影がR^3を充塡したりR^3内で互いに相貫し合ったりしていても、R^4を充塡することはない。

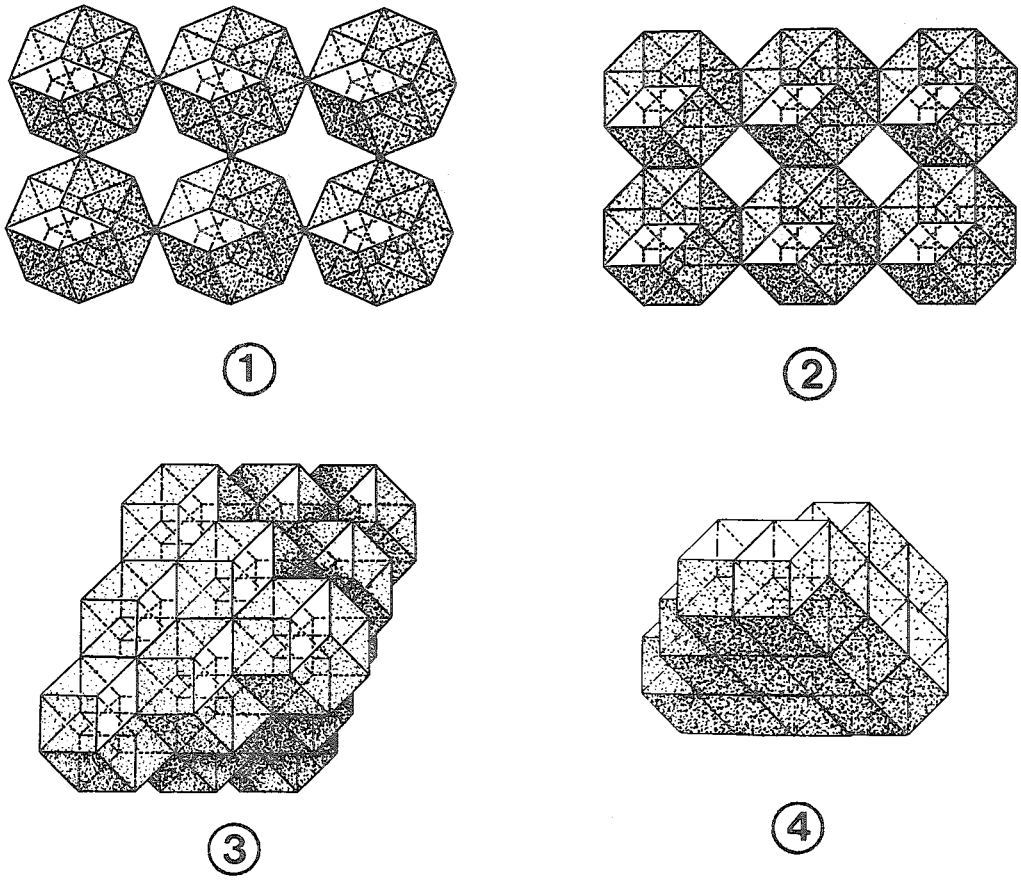
それに対して、側胞を共有し合う場合は、R^4の充塡図形を導くことができ、その操作は図表2-2-1 のA,B に準じてR^5における５次元多胞体に関係する。



図表 2-2-5　各側胞内に球体を持った４－立方体の連続的な回転。
最上段右端→同下段→右から２列目最上段→同最下段…→最下段
左端→最上段右端→…　の順で循環する。
（C.G.：酒井啓）



図表 2-2-6　図表2-2-5 の回転する４－立方体の射影のうち３次元的様相を見せるもの
（C.G.：酒井啓）



図表 2-2-7　４－立方体の、頂点（①）、稜（②）、側面（③）、側胞（④）を
共有し合う連結図形。このうち、④のみがR^4を充塡する。

こうした多胞体の連結、とくに側胞（３次元空間の部分）を共有し合うR^4の充填図形、が建築上持つ意味の大きさはいうまでもなく、具体例については３（正多胞体篇）で触れる。

２－２－９　本章の結論

複数個の胞が側面を共有し合いながらR^4の中で連結していく多胞体をR^3へ射影した場合、さまざまに移動したり変容したりするR^3の部分が側面を共有し合って連結している姿となる。

この姿は移動や変容をたえず行なう３次元空間の部分の集積としての建築上の形象を幾何学的に表現している。

その前提に立って、建築上の形象を多胞体として４次元幾何によって把握するとき得られる結果は建築上実際に経験する事象と矛盾しない。むしろ、３次元幾何が適用される場合よりも実際的であることが多い。しかも、この現象をふまえて具体的な造形活動を行なう場合、３次元幾何からの発想では現われることのない新鮮な形象が系統的に生まれる可能性を持っている。

本章ではその可能性を基礎的に考察した。具体的な応用については３（正多胞体篇）で触れる。

本章での引用文献

1) Pieter Hendrik Schoute, Mehrdimensionale Geometrie Ⅱ (Goschensche Verlagshandlung,1905), PP.136 ～262
2) H.S.M.Coxeter, Regular Polytopes(Dover,1973), PP.118～124
3) 中村義作、佐々木章夫、“４次元の超立方体を切る”、別冊数理科学Ⅴ(1980)、36～42
4) William Blackwell, Geometry in Architecture(John Wiley & Sons,1984),P.74
5) 宮崎興二、酒井啓、“４次元のサイコロ”、数学セミナー、Vol.25, No.03, 1986, 30～35

２－３　多胞体の射影としての建築

２－３－１　本章の目的
２－３－２　４次元空間における射影
２－３－３　４次元空間における正射影
２－３－４　多胞体の正射影
２－３－５　４次元空間における正射影の建築的特性
２－３－６　４次元空間における単射影
２－３－７　多胞体の単射影
２－３－８　４次元空間における単射影の建築的特性
２－３－９　本章の結論

２－３－１　本章の目的

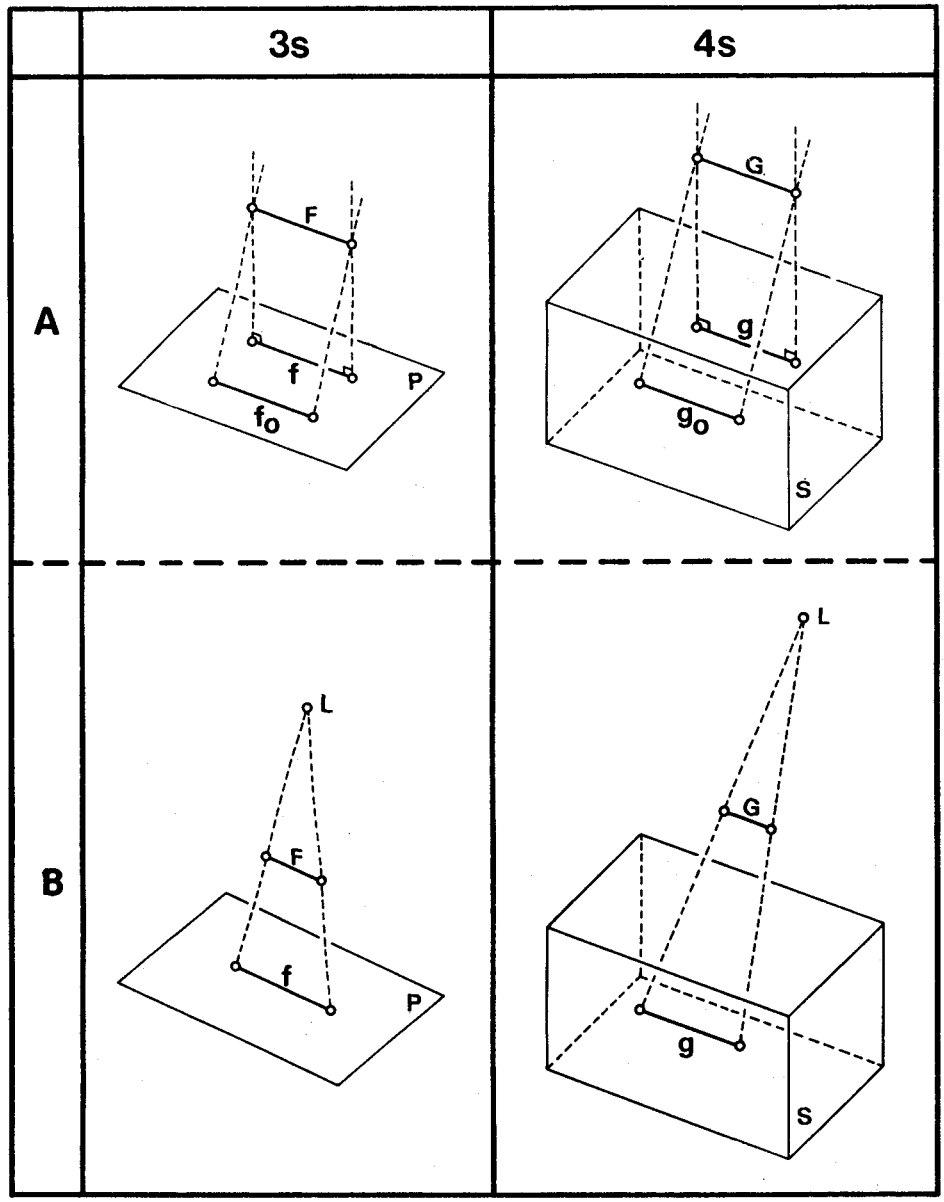
多胞体をはじめとする３次元の広がりを持つ図形は、一般に４次元空間（R^4）内に置かれ、その空間の中の一つの３次元空間（R^3）内への射影によってR^4から観察されたとき、初めて全体的な姿を表わし客観的な操作を受ける。

本章では、このようなR^4内に置かれた３次元の広がりを持つ図形、ならびにより低次元の０～２次元の広がりを持つ図形、のR^3内への射影のうち、とくに定量的な性質（長さや角度や面積など）を保存しやすい、正射影と単射影を取り上げて、それらを媒介としながら、建築上の形象の４次元性を表現し解析することを目的とする。

２－３－２　４次元空間における射影

本章では、R^3内に置かれた０～２次元の広がりを持つ図形Ｆ（原像）上の各点を、Ｆとは別に与えられた２次元空間（R^2）としての平面Ｐ上の図形ｆ、あるいはｆｏ、上の各点に、図表2-3-1 の3sのような互いに平行でＰに直交あるいは斜交する射影線（Ａ）、あるいはすべてが１点（射影中心）Ｌから発散する射影線（Ｂ）、によって１対１に対応させるとき、その操作ならびにｆあるいはｆｏをＦのR^2上への射影と呼ぶ。

その概念を拡張して、R^4内に置かれた０～３次元の広がりを持つ図形Ｇ（原像）上の各点を、Ｇとは別に与えられたR^3としての空間Ｓ内の図形ｇあるいはｇｏ上の各点に、図表2-3-1 の4sのような、互いに平行でＳに直交あるいは斜交する射影線（Ａ）、あるいはすべてが１点（射影中心）Ｌから発散する射影線（Ｂ）、によって１対１に対応させるとき、その操作ならびにｇあるいはｇｏをＧのR^3内への射影という。



図表 2-3-1　代表的な射影の図形的概念。
3 s は R^3 における場合、4 s は R^4 における場合。
A は平行射影（f および g は直射影、f_0 および g_0 は斜射影）
B は中心射影。

以上のような射影には、代表的に、上表Aのような平行射影と、同じくBのような中心射影があり、そのうち、前者には射影線がPあるいはSに直交した直射影（fあるいはg）と、斜交した斜射影（fo あるいはgo）がある。

射影線として、1点Lではなく線分や面分から発散するものや、直線ではなく曲線となっているものも一般的には考えられるが、それらを加えた場合、論理が位相的に飛躍し定量的な性質の保存が困難となる。したがって、具体的な建築との関係を検討する本章では言及しない。

March ら(1971[1])は、建築に関係するMapping * として、Identity、Isometry、Similarity、Affinity、Perspectivity 、Topologyをあげ、それらがこの順に、不変定数としての、位置、長さ、角と比、平行性、複比、近傍性を一つずつなくしていくことを指摘している。

本章では、March らのあげるMapping のうち、 Isometry としての上表4s－Agと、Affinityとしてのgo 、Similarityならびに Perspectivityとしての上表4s－Bgを取り上げることになる。Topologyには上述した理由で言及しない。また Identity は原像そのものを指すのであって取り上げるまでもない。

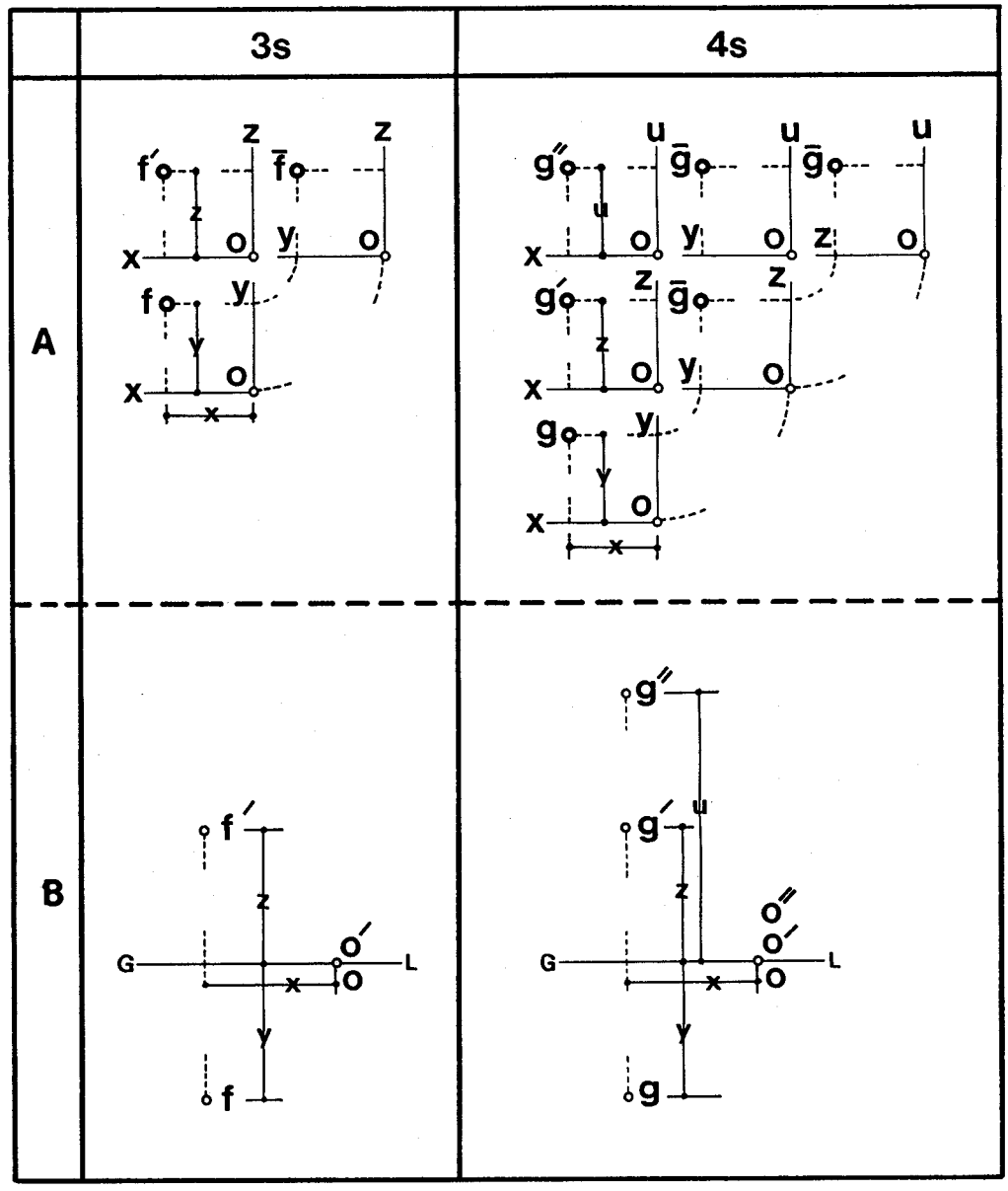
* Mapping(写像）とは集合Sの任意な元に集合S′の一つの元を対応させる操作をさし、本論文で定義する射影もこれに含まれる。ただし、Mapping はきわめて広い概念を持っていてTopology（位相写像）まで含むため、以下ではこの用語を使用しない。

2－3－3　4次元空間における正射影

R^3 において、0～2次元の広がりを持つ図形Fが原像として与えられたとき、Fの定量的性質をR^2 上で厳密かつ簡明に表現する射影が、2枚の直射影を組合わせる正射影（複射影）であり、建築上の設計図書は原則として、このR^3 における正射影に従った平面図と立面図によって作成されている。

R^3 における正射影では、直交座標軸O－XYZの定義された3次元ユークリッド空間R^3(XYZ）において、3座標平面R^2(XY）、（XZ）、（YZ）を想定し、たとえばX軸を基線GLとする場合はR^2(XY）上へのFの直射影fを平面図、R^2(XZ）上への直射影 f’ を立面図、として、f と f’ をGLの下部と上部に図表2-3-2 の3s-Bのように配置する。この場合ff’⊥GLであって、GLより下部にY軸の正の方向が、GLより上部にZ軸の正の方向がとられる。原点Oの位置はGL上任意である。

見方を変えれば、同表3s-Aのような3枚の座標平面R^2(XY）、（XZ）、（YZ）上の直射影のうち、R^2(XY）、（XZ）におけるもののみを平面図、立面図と名付けて採用するのである。残るR^2(YZ）上の直射影fは側面図（後述する副射影）であって、論



図表 2-3-2　正射影の図形的概念。
3 s は R^3 における場合、4 s は R^4 における場合。
A は分解図、B は完成図。

理上の必要性はないが図形の理解の便宜上しばしば利用されている。

以上のようなR^3における正射影に対してR^4における正射影（複射影）を、本章ではつぎのように作図する。*

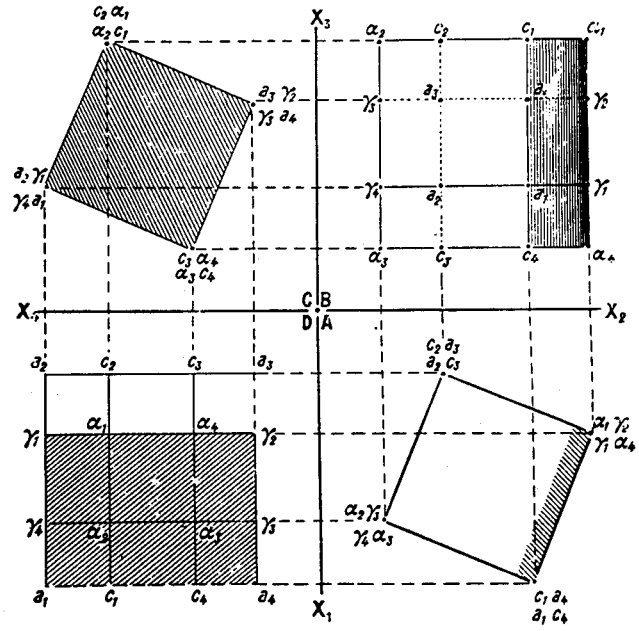
直交座標軸O－XYZUの定義された4次元ユークリッド空間R^4(XYZU)において、4座標空間、R^3(XYZ)、(XYU)、(XZU)、(YZU)を想定し、たとえばX軸を基線GLとする場合は、R^3(XYZ)、(XYU)、(XZU)内へのGの直射影を求め、各R^3においてR^2(XY)、(XZ)、(XU)上への直射影g、g'、g"を求めて、それらをGLの上部と下部に図表2-3-2 の4s-Bのように配置する。この場合、g g' g"⊥GLであって、GLより下部にY軸の正の方向が、GLより上部にZ軸とU軸の正の方向がとられる。原点Oの位置はGL上任意である。

見方を変えれば、同表4s-Aのような6枚の座標平面R^2(XY)、(XZ)、(XU)、(YZ)、(YU)、(ZU)上への直射影のうち、R^2(XY)、(XZ)、(XU)におけるもののみを、Y図、Z図、U図と名付けて採用するのである。残るR^2(YZ)、(YU)、(ZU)上への直射影gは側面図に相当する射影（副射影）であって、R^3内での側面図と同様、論理上の必要性はないが、本章では図形の直接的理解の便宜上利用する。Heiserman(1983[2])は、座標空間R^3(YZU)への射影も加えてR^4における図形表示を行なっているが、この場合も理解の便宜上の工夫となっている。

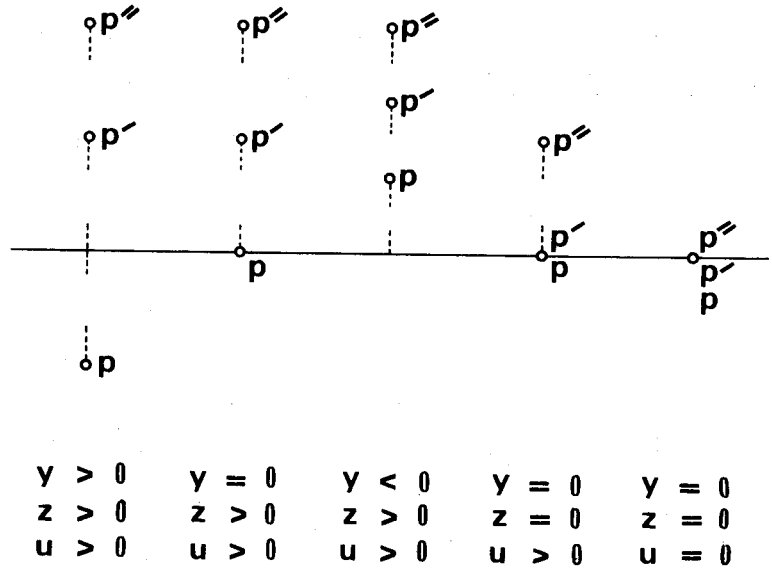
なお、Eckhart(1929[3])やHohenbergら(1971[4])あるいは1－4（既往の諸説）で触れたJouffret(1906[5])は、直交2直線を構成するように配置された4半直線を反時計まわりにX、Y、Z、U軸にあてようとする。たとえば図表2-3-3 にJouffretによる例を示す。また Lindgren ら(1968[6])は、Y軸を基線GLにあてようとする。いずれにもR^4における正射影に対しては効果的であるが一般の高次元空間への拡張が困難なため本章では採用しない。

また、与えられた図形Gの持つ座標、たとえば（g_x、g_y、g_z、g_u）、を利用すると、本章でいうY図は（g_x、g_y、o、o）、Z図は（g_x、o、g_z、o）、U図は（g_x、o、o、g_u）の各座標を持つことになり、それらに連結情報（辺や稜）を加え、図表2-3-2 の4s-Bに従って上下に羅列すればよい。この場合、Y、Z、U図の方向性を統一することができて、作図は簡明になる。ただし、たえず座標を設定しなければならないことは、建築上の形象との関係上問題を残す。また、図形の回転、切断、展開などといった操作を直観的に理解することも困難である。したがって、規則的な図形の自動製図を行なうような場合以外は、本章ではこの方法を採っていない。

* 本章で独自に構成したR^4における正射影の方法は、同様のものが別個に他の研究者たとえば巻末に付す参考文献覧の Lindgren や Bonfiglioli, Maurin, らによっても提案されている。



図表 2-3-3　Jouffretによる４－立方体の正射影。
Mélanges de géométrie à quatre dimensions
(1906)より。



図表2-3-4　R^4（ＸＹＺＵ）における点Ｐ（ｘ，ｙ，ｚ，ｕ）の代表的な正射影

２－３－４　多胞体の正射影

本論文で定義する多胞体は、頂点（点）、稜（線分）、側面（面分）、側胞（胞）を構成要素としている。

そのうち、頂点としての１点Ｐの正射影は、座標の正負に従って代表的に図表2-3-4 のように作図することができる。

線分、面分、胞については、それぞれの持つ端点や頂点を同図表に従って配列すれば、図表2-3-5 のようになる。

図表中、１Ｄは線分、２Ｄは面分（３角形）、３Ｄは胞（４面体状胞）であって、ａは一般の位置に置かれた場合、ｂは１個の座標空間、つまり１ＤではＲ^{3}（ＸＺＵ）、２Ｄと３ＤではＲ^{3}（ＸＹＺ）、に平行な場合、ｃは１枚の座標平面、つまり１ＤではＲ^{2}（ＸＵ）２ＤではＲ^{2}（ＸＹ）、に平行な場合、ｄは基線ＧＬに平行な場合、ｅは基線に垂直な場合ｆは１枚の座標平面Ｒ^{2}（ＸＵ）に垂直な場合、ｇは１個の座標空間Ｒ^{3}（ＸＺＵ）に垂直な場合、をそれぞれ示す。

以上のような線分、面分、胞は、次元公式(2-1-1) に従ってＲ^{4} の中で互いに交わり合うが、そのうち胞の関係するものを正射影で示せば図表2-3-6 のようになる。

表中、①では線と胞との交点Ｐが、②では面と胞との交線ＰＱが、③では２個の胞の交面ＰＱＲＳが、それぞれ求まっている。いずれも理解の便宜上、Ｕ図が２線分となるような状態で作図されていて、その交点が、各交わり部分のＹ図とＺ図を決定する。もし、各Ｕ図において、２線分が直交していれば、前述したような、胞と線、胞と面、胞と胞の直交関係が現われることになる。

線分、面分、胞が、より一般的な位置に置かれた場合については、筆者（1973[7]）により調射影（後述）を用いて変換する方法が提案されている。

一方、２個の胞ＰとＱは側面Ｍを共有し合って連結し、そのうち一方は、図表2-1-6 で示したようにＭを中心として回転させられ多胞体を構成していく。

その様相を正射影で表現すると図表2-3-7 のようになる。

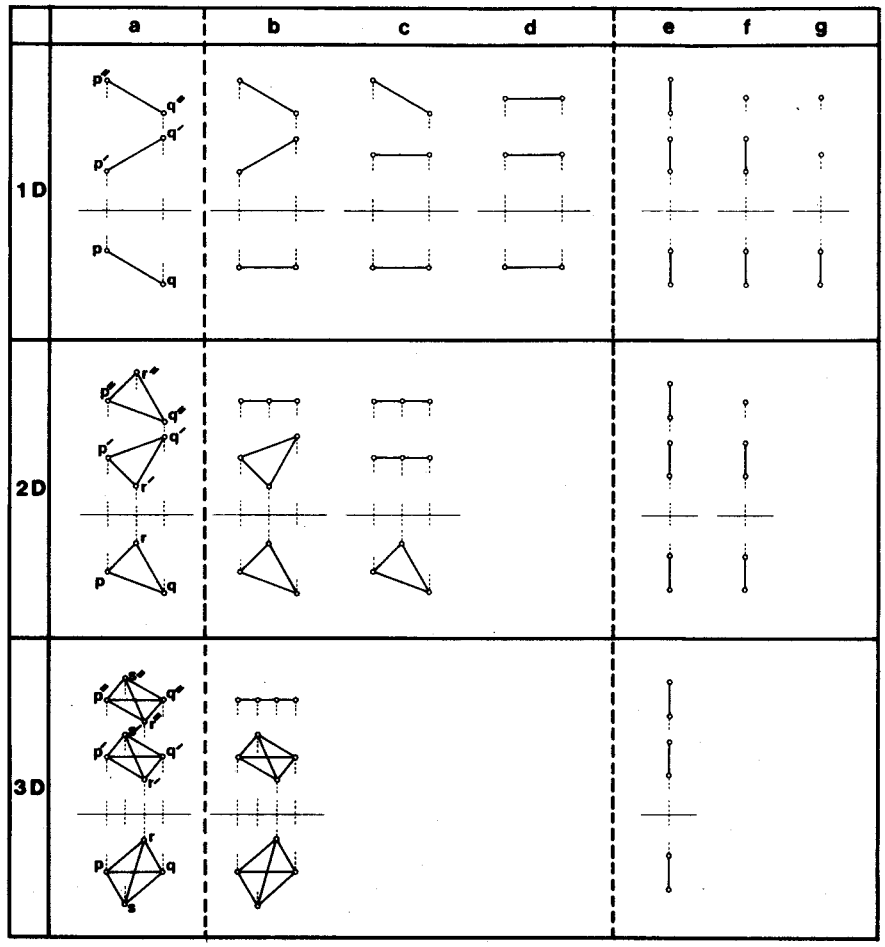
①では、Ｙ図とＺ図に２枚づつの正方形が実形で現われ、Ｕ図にｍ”で連結した２本の線分ｐ”とｑ”が現われる。

このＵ図で、ｍ”を中心としてｐ”を②から④にいたるように回転させ、⑤のようにｑ”と一致させると、それぞれの段階でＹ図とＺ図は図のように変化する。

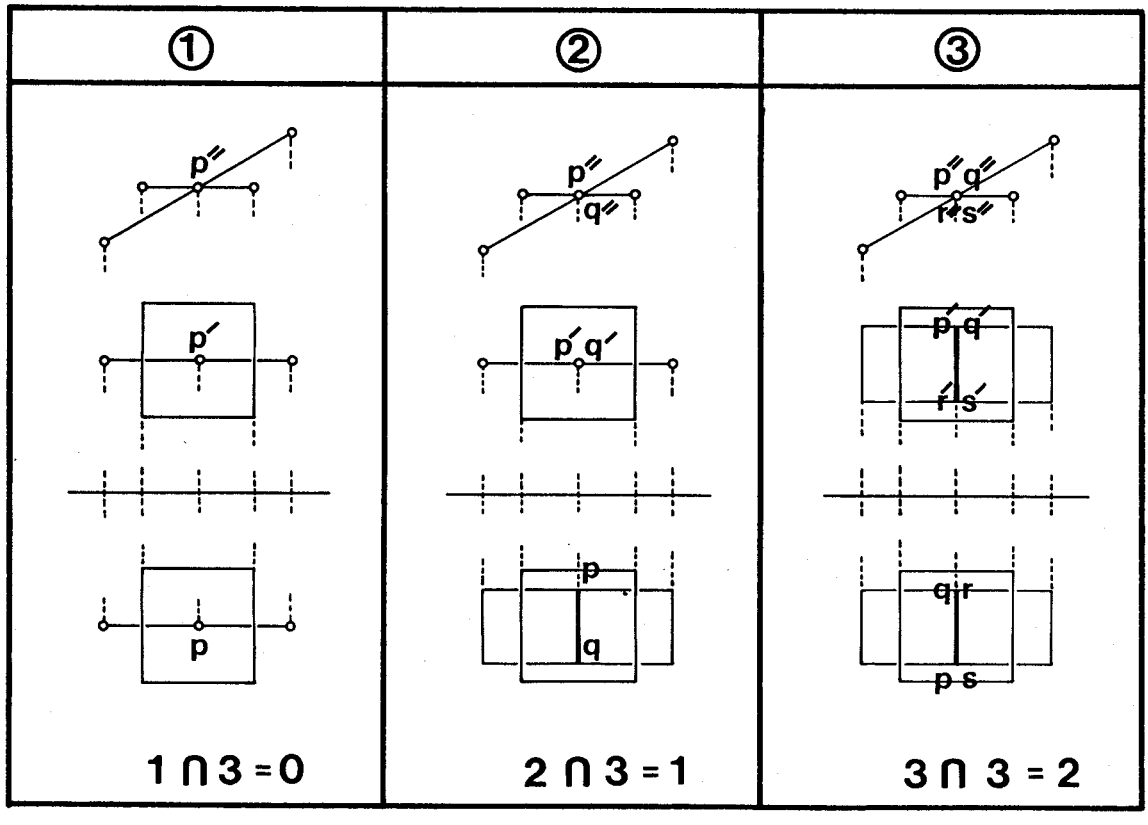
この場合、Ｙ図とＵ図で示されるＲ^{3}（ＸＹＵ）における変化は、図表2-1-6 の②～④の上段の各図に、また、Ｙ図とＺ図で示されるＲ^{3}（ＸＹＺ）における変化は、同じく下段の各図に一致している。

このような回転操作によって、１個の多胞体を展開図から組み立てることができる。

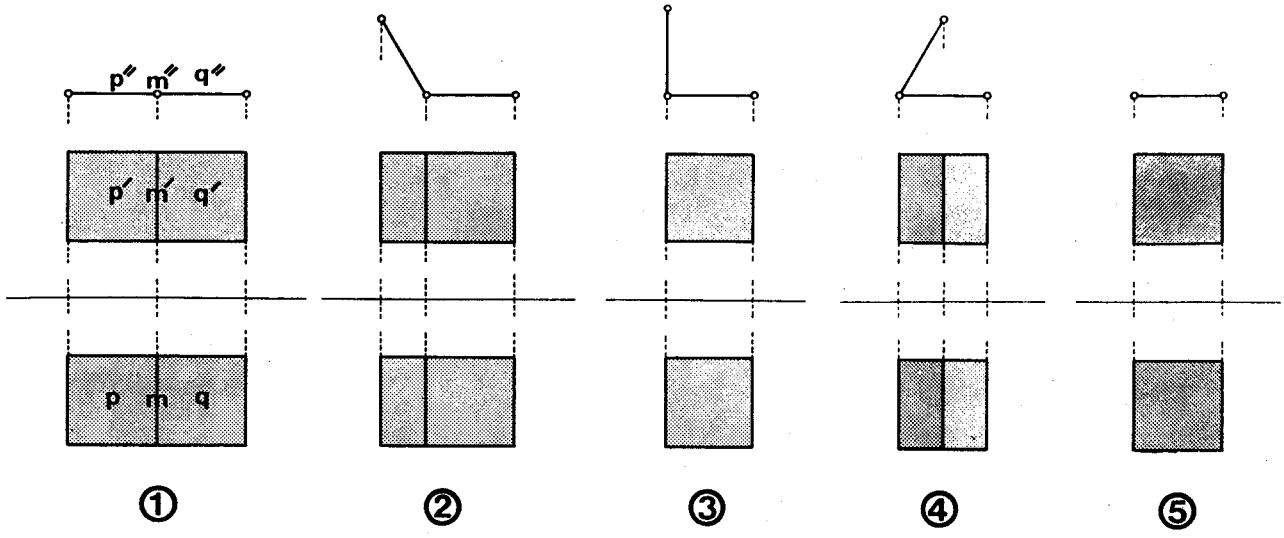
その例として図表2-3-8 に回転タイプの多胞体としての８個の立方体状胞を側胞とする



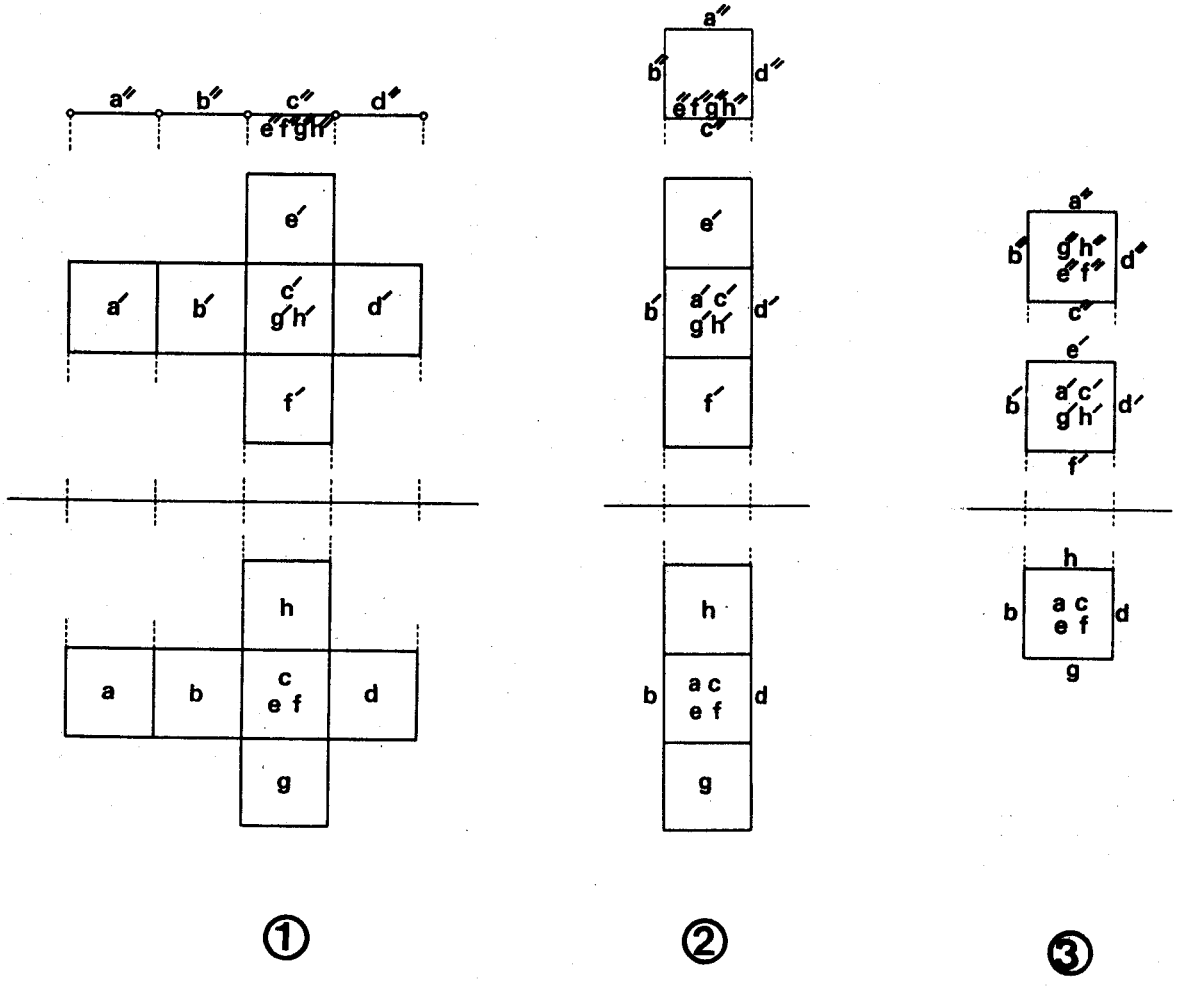
図表 2-3-5　線分（１Ｄ）、３角形（２Ｄ）、４面体状胞（３Ｄ）の代表的な正射影



図表 2-3-6　胞と、線分（①）、面分（②）、胞（③）との交わり部分の正射影



図表 2-3-7　側面Mを中心として胞Qのまわりに回転する胞Pの正射影



図表 2-3-8　4－立方体の展開模型（①）と完成模型（③）の正射影による表現。
②は側胞A，B，Dのみが折りたたまれた場合。

4－立方体の場合を示す。①は展開したときの正射影で、側胞Cが、B、D、E、F、G、Hの6個の側胞に囲まれ、Bにはさらに A が連結させられている。

このとき、C以外を、側面を中心として回転させていって、すべての側胞が2個で1枚づつの側面を共有し合うようにすれば、けっきょく、③のような4－立方体の正射影となる。BとDは、Y、Z、U図ともGLに垂直な線分で示され、GとHはY図が、EとFはZ図が、AとCはU図がそれぞれGLに平行な線分で示されている。

回転タイプの多胞体に対して、並進タイプと求心タイプの多胞体の正射影は図表2-3-9のように作図される。

①の並進タイプは、側胞BがDに平行移動し、②の求心タイプは、側胞Bが1点Pに収れんするように求心変化している。

こうした多胞体の正射影では、原則として、R^3(XYZ)とR^3(XYU)における2種類の多面体状外形が現われるため、かくれ線の一意的な処理は不可能である。したがって原則としては、すべて実線で表現しなければならない。図表2-3-9 のような1点鎖線による表現は、便宜上の工夫にすぎない。ただしR^3 における1個の模型によって説明する場合は、1点鎖線によって内部のかくれ線を示すことができる。

2－3－5　4次元空間における正射影の建築的特性

一般に建築上の設計図書作成に用いられているR^3 における正射影（平面図と立面図）は、建築上の形象の2次元的表面についてのみ有効であって、建築上の形象が本質的に備えている、3次元の広がりを持つ空間あるいは物体そのものには通用しない。

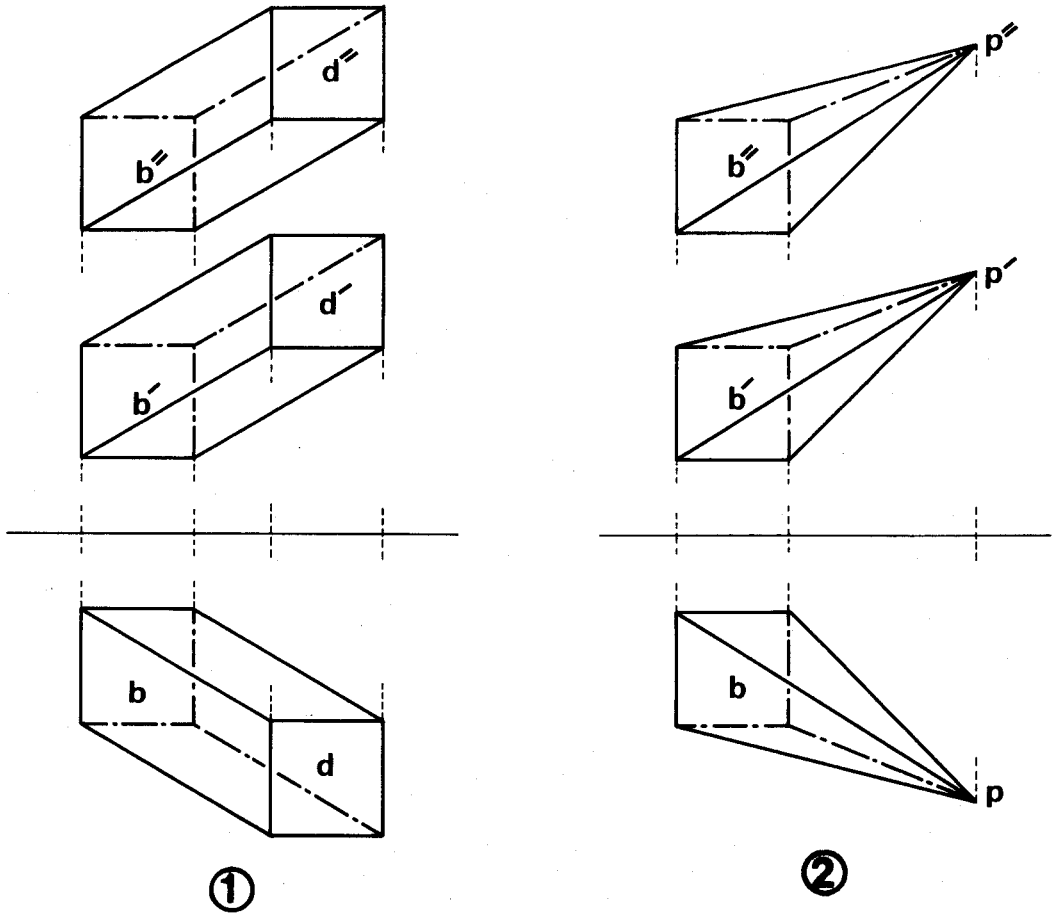
それに対して、本章で定義するR^4 における正射影は、空間あるいは物体そのものを定量的な性質を保存しながら表現することができる。

Perel'man(1966)[8]は、4個以上の座標で表現される多重構造を持った化学上の組織を、図表2-3-2 の4s-Aにならった分解図で表わそうとしているが、同種の多重構造を持っている建築においても、同じような、あるいはより簡潔には図表2-3-4 のような、表示が可能となる。

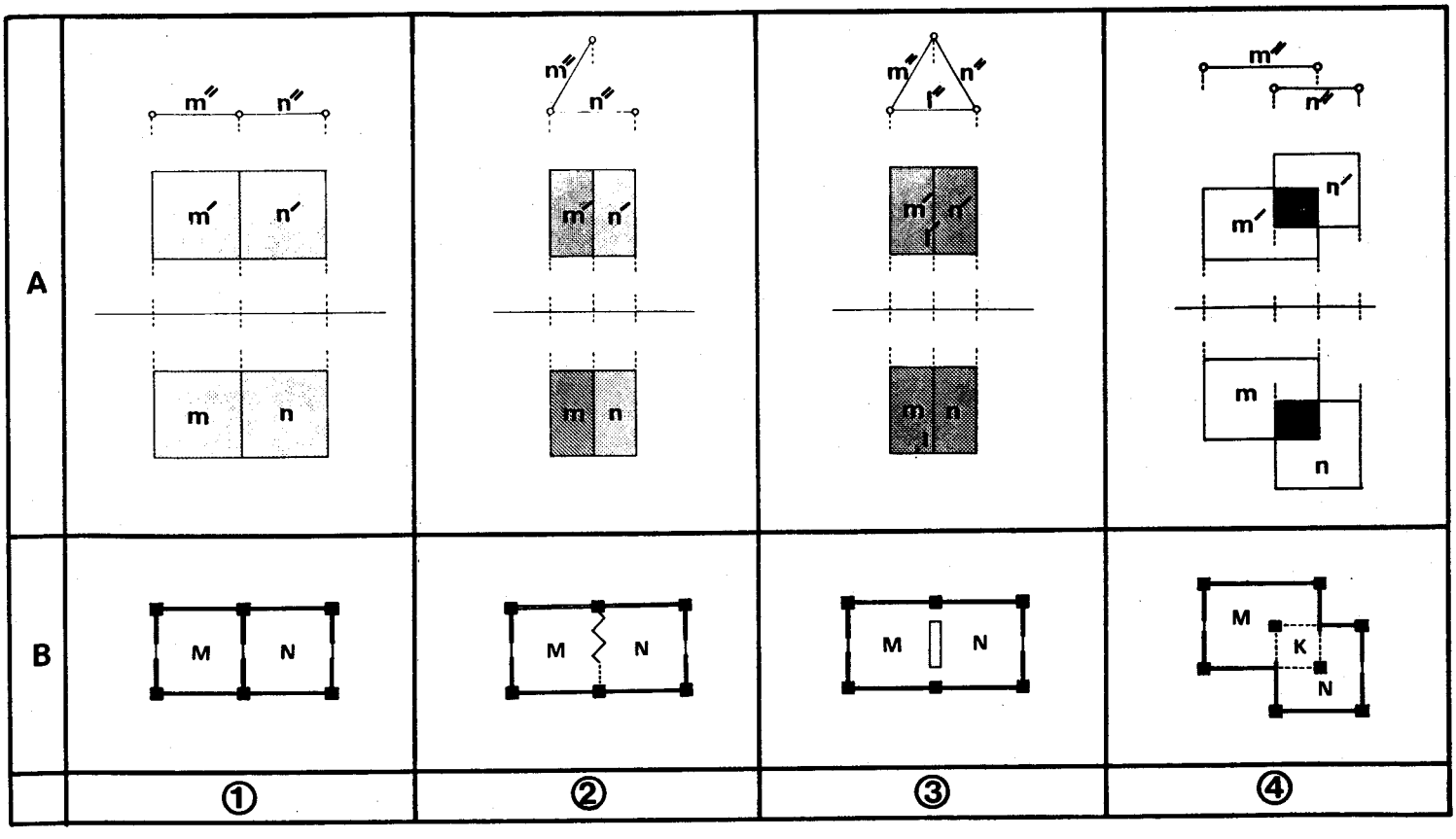
たとえば、室数、床面積、階数、家族数をp_x、p_y、p_z、p_uとする住戸Pが与えられた場合、その住戸は図表2-3-2 の4s-A，あるいは図表2-3-4，のように示すことができる。他の住戸Q、Rについても同様であり、それらの住戸間の室数や床面積の相互関係は住戸数nにしたがって図表2-3-5 の線分（1D）、面分（2D）、胞（3D）などとして示される。

そうした線分、面分、胞は、たとえば他の胞と図表2-3-6 のように交わるが、これは図表2-1-4 における建築上の現象を定量的な性質を加えて正射影で示したものである。

それに対して、胞の連結と回転に関する図表2-3-7 には、2室間の相互関係、あるいは



図表 2-3-9　並進タイプ（①）と求心タイプ（②）の多胞体の正射影



図表 2-3-10　複数個の立方体状胞の相互関係に関する正射影（A）と
それを表現する平面計画（B）

そのうちの１室（たとえばP）の空間的時間的内容の変化の諸相が表わされていると見ることができ、その見方にしたがうと図表2-3-10のような表現が可能となる。

同図表上段（A）は正射影、下段（B）は建築としての平面計画例を示す。

①はU図に表わされているように、たとえば同一時間帯に異なる用途に使用できる２室を表現する。両室は剛体としての間仕切壁で隔離されている。

②は全体としてのN室の中の部分（M）が異なる時間帯に異なる用途に使用され得る状態を表現する。両者は開閉自在な簡易間仕切で区画されている。

③は２室（M、N）が全体として１室（L）を構成する場合で、両者は家具やカウンターなどで形式的に区分される。

④は２室が、Y図とZ図で示されるようにR^3(XYZ）では重複し合っていても、U図で示されるように時間的には分離されている場合を表現する。

こうした胞の連結と回転は、結果として、図表2-3-8 のように、１個の閉多胞体を導くが、この図表2-3-8 には、R^3(XYZ）内で一般に建築的とされる構成（①）が、U軸方向への動き（時間的経過）を加えた段階で、重複し合い相貫し合って、つまり、さまざまな時間帯にさまざまな用途に使用されて、閉多胞体（③）となる様相が現われている。

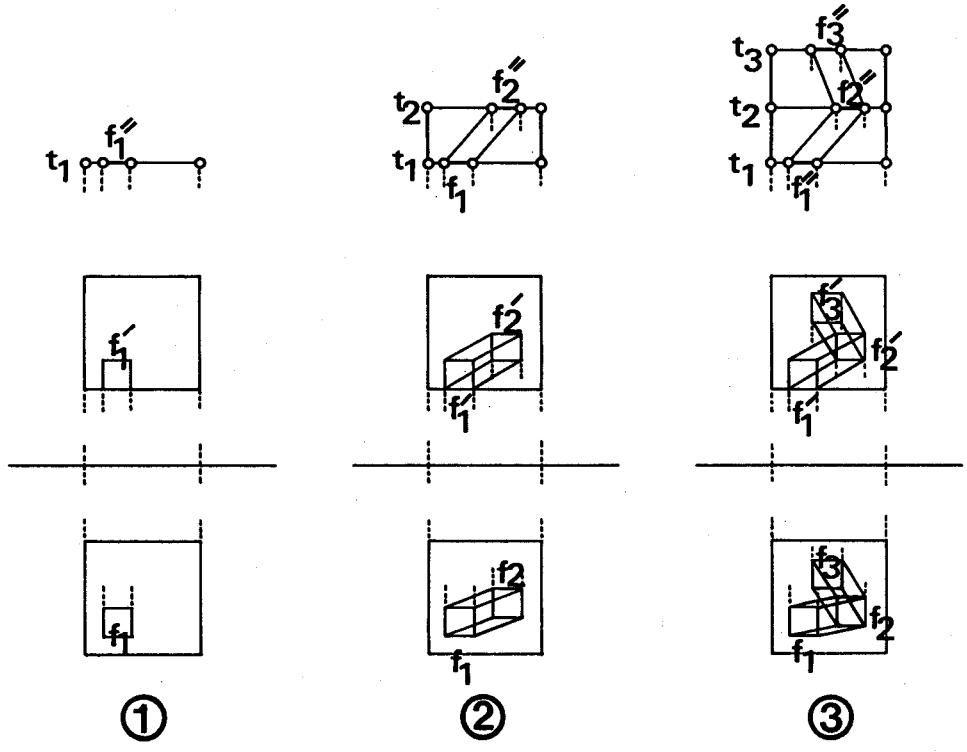
以上のような回転タイプの多胞体に対して、図表2-3-9 に示されている並進タイプと求心タイプの多胞体の正射影は、たとえば図表2-3-11、2-3-12のような建築的内容を持つ。

図表2-3-11は並進タイプに関係する場合で、Y図とZ図で示される内部空間内の物体Fの、U図で示される時刻Tnにおける位置Fn への移動が①、②、③の順で示されている。つまり、ある一定時刻では、①のようにU図は１線分で示される。そうした線分が、U図で t_1 、t_2 、t_3 と積層されていくが、各時刻は連続しているのであり、その連続の状態がf_1"、f_2"、f_3"を結ぶ直線（あるいは曲線）で示され、その結果としてU図が完成して、一つの多胞体の正射影が現われるのである。

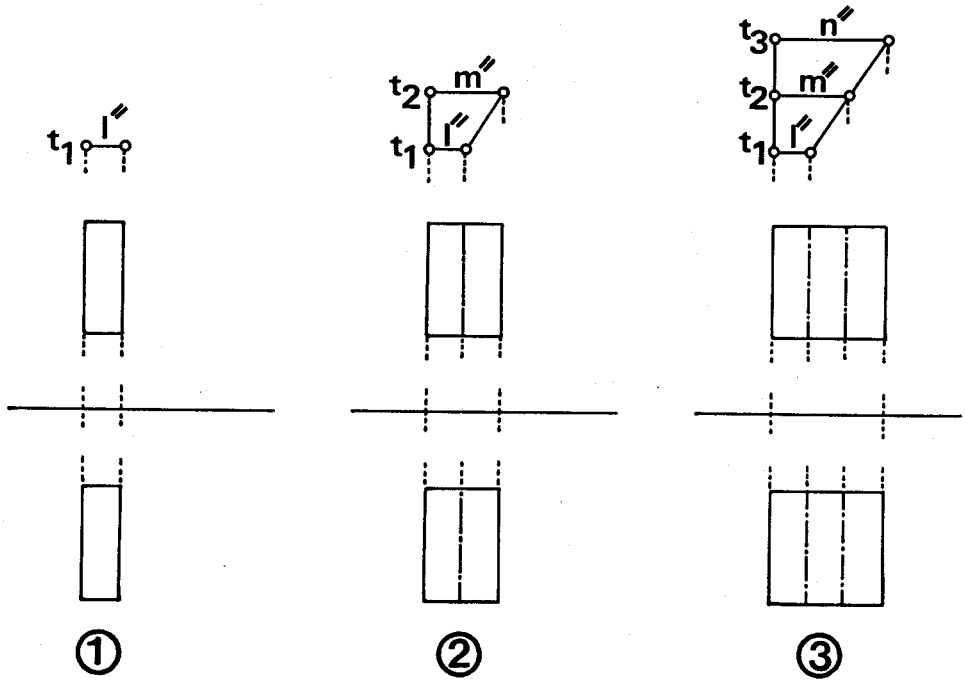
図表2-3-12は求心タイプに関係する場合で、Y図とZ図で示される、たとえば一つの内部空間の、右方向への増殖状態が、U図によって時間的に明示される。つまり、t_1 時に l " であったもの（①）が t_2 時にはm"（②）、t_3時にはn"（③）に増殖したことになり、全体を連続的に表示すれば、③のような多胞体の正射影になる。

２－３－６　４次元空間における単射影

正射影は、与えられた図形の、２枚の座標平面R^2(XY）、（XZ）、（R^3 における正射影の場合）あるいは２個の座標空間R^3(XYZ）、（XYU）、いいかえれば３枚の座標平面R^2(XY）、（XZ）、（XU）、（R^4 における正射影の場合）への直射影を組合わせている。　しかし、与えられた１個の図形について、たえず複数個の射影を必要とすることは、簡便な説明図や正確さを要しない概念図に応用する場合、煩雑に過ぎる。



図表 2-3-11　並進タイプの多胞体の正射影の建築的表現例



図表 2-3-12　求心タイプの多胞体の正射影の建築的表現例

その欠点を補うためもあって本章では単射影を構成する。

R^3 における単射影では、たえず1枚の図のみを用意する。ただし、その図で定量的な内容をも示す場合には、作図された1枚の図自身以外に、正射影でいえばもう1枚の図に相当する、何らかの定量的要素を付記するのが普通である。

それに対して、R^4 における単射影は1個の立体模型と、それに付属する何らかの定量的要素で与えることができるのであり、それを平面上で表示するには、その立体模型の R^3 における正射影もしくは単射影を利用して、それに何らかの定量的要素を付記する。

こうした R^4 における単射影として基本的なものに、図表2-3-1 にまとめた射影の概念から導かれる副射影、斜射影、中心射影、の3種類が考えられる。

副射影とは、基線ＧＬに直交あるいは斜交した R^3 への直射影をさす。たとえば図表2-3-2の4s-Aにおける R^2（ＹＺ）、（ＹＵ）上で求められた R^3（ＹＺＵ）への直射影Ｇ（平面図、立面図ともｇ）は副射影である。

それに対して、斜射影は図表2-3-1 の4s－Ａにおけるｇｏ となり、中心射影は同表4s－Ｂにおけるｇとなる。

より一般的には、この斜射影と中心射影は、図表2-3-13のような射影方向に従って複合させることができる。ＡＡが上述の R^3（ＹＺＵ）への直射影としての副射影を導く射影線、ＢＢがもっとも一般的な斜射影を導く射影線、ＣＣがもっとも一般的な中心射影を導く射影線である。ＡＢとＢＡは整理された斜射影を、それら以外（ＢＣ、ＣＢ、ＣＡ、ＡＣ）は線分や面分から発散する射影線を、それぞれ示し、これらの場合からは位相図が導かれることになる。

図表2-3-14に、線分ＰＱ（ｐｑ： $p'q'$ ：$p''q''$）の副射影 $P_a\ Q_a$（Ｌ）、斜射影 $P_0\ Q_0$（Ｍ）、中心射影 $P_p\ Q_p$（Ｎ）を示す。それぞれの作図はつぎのように行なわれる。

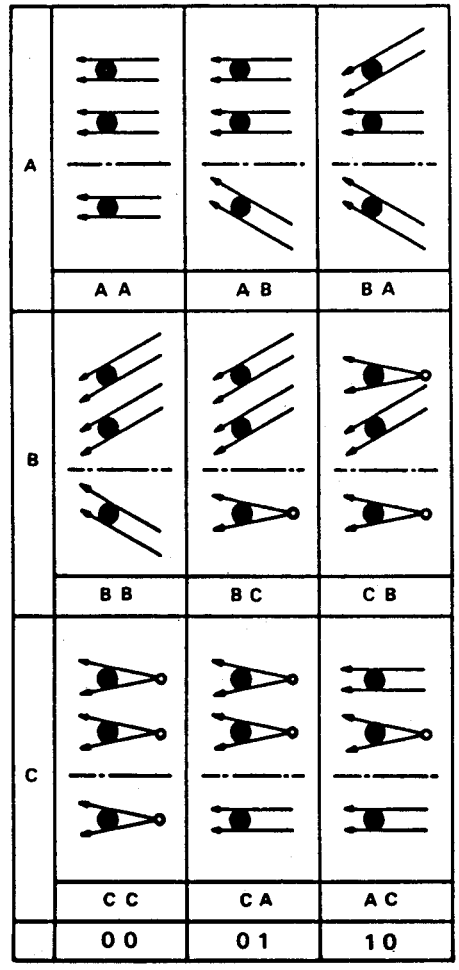
副射影においては、R^4 における射影方向Ｌ（ｌ：l'：l''）が与えられなければならない。

その場合、その射影方向に垂直な R^3 への直射影が、求める副射影となる。

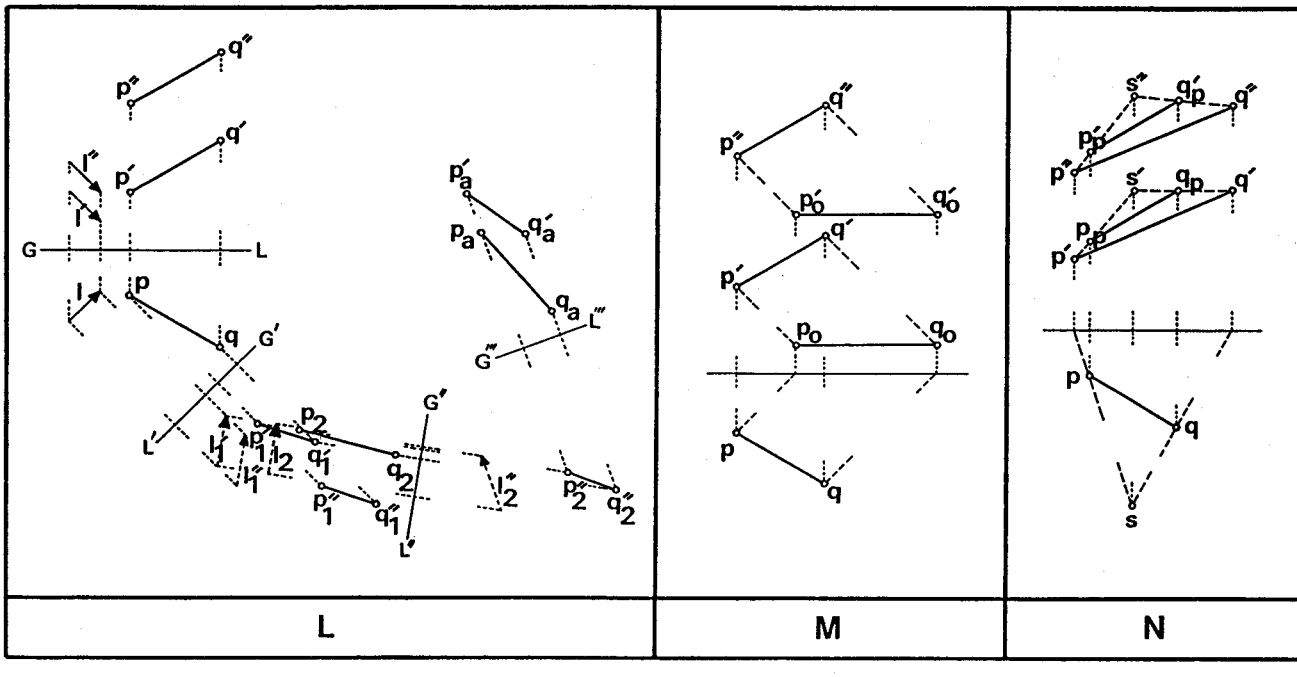
まず、ｌに平行な副基線Ｇ’Ｌ’を適当な位置に与え、ｐ、ｑ、ｌからＧ’Ｌ’に垂線を下す。そのあと、ＧＬから p'、q'、p''、q''、l'、l'' までの距離に等しい距離をＧ’Ｌ’からとって、p_1'、q_1'、p_1''、q_1''、l_1'、l_1'' を求める。

つぎに、l_1' に平行な副基線Ｇ”Ｌ”を適当な位置に考え、p_1'、q_1'、l_1' からＧ”Ｌ”に垂線を下す。そのあと、Ｇ’Ｌ’から p_1''、q_1''、ｐ、ｑ、l_1''、ｌまでの距離に等しい距離をＧ”Ｌ”からとって、p_2''、q_2''、p_2、q_2、l_2''、l_2を求める。

最後に、ｌ”に垂直な副基線Ｇ’’’Ｌ’’’を適当な位置に考え、p_2''、q_2'' からＧ’’’Ｌ’’’に垂線を下して、Ｇ”Ｌ”から p_1'、q_1'、p_2、q_2までの距離に等しい距離をＧ’’’Ｌ’’’からとって、p_a'、q_a'、p_a、q_aを求めれば、R^3 における線分 $P_a\ Q_a$（$p_a\ q_a$：$p_a'q_a'$）が



図表 2-3-13 R^4 における各射影方向の正射影の総括



図表 2-3-14 R^4 における線分PQの副射影Pa Qa (L),
斜射影Po Qo (M), 中心射影Pp Qp (N)

ＰＱの、与えられた射影方向Ｌによる副射影となる。

以上において、Ｌに関する l、l'、l"のうち、１本がＧＬに平行な場合は、Ｇ' Ｌ' を基線とする状態が最初に与えられていることになり、また、l、l'、l"のうち２本がＧＬに平行な場合は、Ｇ" Ｌ" を基線とする状態が最初に与えられていることになり、さらに l、l'、l"のすべてがＧＬに平行な場合は、図表2-3-2 の4s-Aにおける各εを求める問題に置き換えられる。

斜射影においては、射影方向のＹ、Ｚ、Ｕ図がＧＬとなす角α、β、γが与えられなければならない。

その場合、その射影方向によるR^3(ＸＹＵ）への射影が、求める斜射影となる。

まず、ｐ、ｑからＧＬと∠αをなす直線をひきＧＬとの交点からＧＬに垂線を立てる。その垂線と、p'、q' からひいた、ＧＬと∠βをなす直線との交点を p_0 、q_0、同じく、p"、q"からひいた、ＧＬと∠γをなす直線との交点を p_0'、q_0' とすれば、R^3(ＸＺＵ）における線分P_0 Q_0 （p_0q_0: $p_0'q_0'$）が、ＰＱの、与えられた射影方向による斜射影となる。

この斜射影について、Arvesen(1963[9])らは、R^3(ＸＹＺ）において斜射影で表現された図形を、Ｕ軸方向に平行移動させた姿で表現している。この方法は作図の容易さのためしばしば用いられるが、定量的な性質を正確に保存させる方法としては適当でない。

中心射影においては、射影中心Ｓ(s:s':s") が与えられなければならない。

その場合、Ｓから発散する射影線によるR^3(ＸＺＵ）への射影が、求める中心射影となる。

まず、ｓｐ、ｓｑとＧＬとの交点からＧＬに垂線を立てる。その垂線と、s'p'、s'q'との交点を p_p 、q_p、同じく s"p" 、s"q"との交点を p_p'、q_p' 、とすれば、R^3(ＸＺＵ）における線分P_p Q_p （p_pq_p: $p_p'q_p'$）がＰＱの、与えられた射影中心（４次元的視心）による、中心射影となる。

なお、Casas(1984[10])は "Polar Perspective"という４次元図形の中心射影的な表現方法を提案しているが、これは幾何学上の論理とは一線を画す内容を持っている。また、Heiserman(1983[11])は直交４座標軸のうち３本づつの組み合わせによって得られるR^3への４種類の中心射影を別個に作図しているが、この方法の場合、直観的な理解が困難である。

以上のような単射影のうち、とくに基本的な副射影については、代表的に以下のような二通りの方法で解析的な作図を行なうことができる。

(1)　座標空間の回転による作図

この方法では、いいかえれば、任意の射影方向を考え、その方向による副射影を求める

ことになる。

いま、図表2-3-14のような射影方向Ｌ（l:l':l"）（ＧＬとなす角は、ｌは時計まわりにθ_1,l'とl"は反時計まわりにθ_2とθ_3)が与えられたとする。この　方向で、あらかじめ正射影で与えられた４－立方体を射影する場合、解析的にはつぎのような操作を行なう。

まず、Ｙ図をｌとも$\angle\theta$だけ時計まわりに回転させ、ｌ//ＧＬとする。

そのとき、Ｚ図とＵ図の各点のＧＬからの距離は変らず、l'とＧＬは　$\angle\alpha = \tan^{-1}(\cos\theta_1 \tan\theta_2)$をなす。

続いて、この状態でＺ図をl'とも$\angle\alpha$だけ反時計まわりに回転させ、l'//ＧＬとする。

そのとき、Ｙ図とＵ図の各点のＧＬからの距離は変らず、l"はＧＬに垂直な線に対して

$$\angle\beta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\cos^2\theta_1 \tan^2\theta_2}}{\cos\theta_1 \tan\theta_3}$$

をなす。

最後に、この状態でＵ図をl"とも$\angle\beta$だけ時計まわりに回転させ、l"⊥ＧＬとする。

そのときのＹ図とＺ図が、求める副射影の平面図と立面図となる。

この方法を採用すると、θ_1、θ_2、θ_3が$\frac{\pi}{2}$などのときは別途の計算を必要とするなどの欠点はあるが、与えられた図形を、望む方向から射影することができるといった利点がある。

(2)　図形の回転による作図

この方法では、いいかえれば、座標空間を任意に回転し、それぞれの位置におけるその空間への直射影を求めることになる。

つまり、R^4には６枚の座標平面R^2(ＸＹ)、(ＹＺ)、(ＺＵ)、(ＸＺ)、(ＸＵ)、(ＹＵ)がある。これらの各面の２次元の回転を考え、それらの積をとれば、それがR^4における図形の回転を示すことになる。

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6とθ_1,θ_2,θ_3,θ_4,θ_5,θ_6を、それぞれR^2(ＸＹ),(ＹＺ),(ＺＵ),(ＸＵ),(ＸＺ),(ＹＵ)各平面上の回転マトリックスおよび回転角とすると、

$$T1=\begin{bmatrix} \cos\theta 1 & \sin\theta 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta 1 & \cos\theta 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta 2 & \sin\theta 2 & 0 \\ 0 & -\sin\theta 2 & \cos\theta 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T3=\begin{bmatrix} \cos\theta 3 & 0 & \sin\theta 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta 3 & 0 & \cos\theta 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T4=\begin{bmatrix} \cos\theta 4 & 0 & 0 & \sin\theta 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta 4 & 0 & 0 & \cos\theta 4 \end{bmatrix}$$

$$T5=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta 5 & 0 & \sin\theta 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta 5 & 0 & \cos\theta 5 \end{bmatrix} \quad T6=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta 6 & \sin\theta 6 \\ 0 & 0 & -\sin\theta 6 & \cos\theta 6 \end{bmatrix}$$

となる。

したがって、R^4 の回転マトリックスTは

$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6$

となる。

この方法を採用すると、回転角のいかんにかかわらず図形の連続的な回転が行なわれるといった利点はあるが、与えられた図形を希望した方向から見る、といった操作は困難である。

2－3－7　多胞体の単射影

図表2-3-14に従って、本章では４－立方体の単射影を、図表2-3-15のようにまとめる。

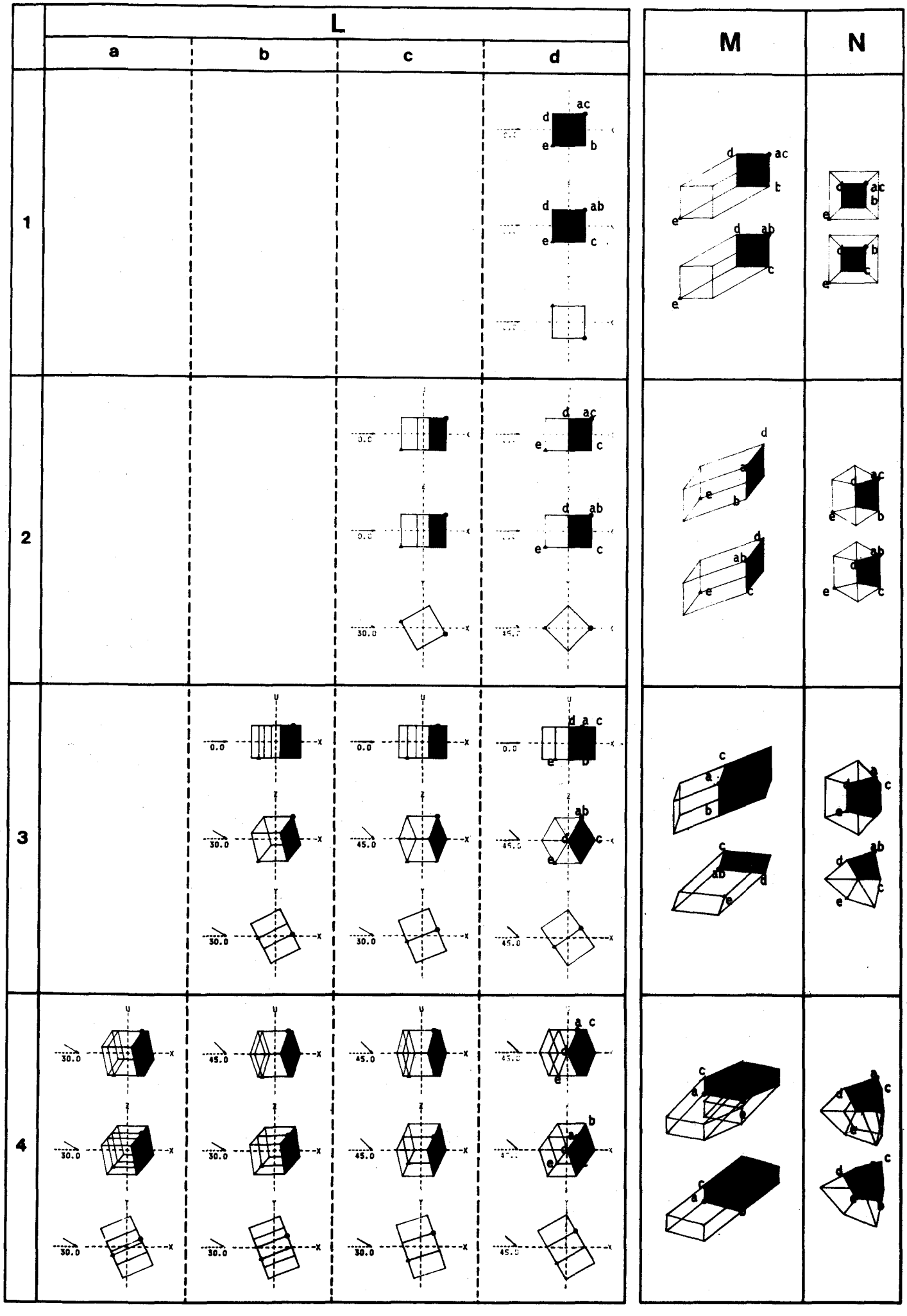
Ｌはそれぞれの左に付記したような射影方向による副射影（Ｙ図を添付）、Ｍは図表2-3-13のＢＢの射影方向による斜射影、Ｎは同表ＣＣの射影中心による中心射影で、そのうち、Ｌは、射影方向のＹ、Ｚ、Ｕ図の中でＧＬと平行なものの数（０のときａ、１のときｂ、２のときｃ、３のときｄ）によって分類されている。

この図表からも明らかなように、副射影は回転タイプの多胞体に、斜射影は並進タイプの多胞体に、中心射影は求心タイプの多胞体に、それぞれ関係した射影を導く。

このＬのうち、もっとも基本となる図はｄである。この場合の４通りのそれぞれのＺ図とＵ図は図表2-2-3 のＡの4Dの ４通りの正射影の平面図と立面図となっていて、
１は胞心模型、２は面心模型、３は線心模型、４は点心模型を示す。

このｄのそれぞれについての斜射影と中心射影が、R^3 における正射影としての平面図と立面図によって、Ｍ、Ｎに示されているが、そのうち、１はいずれも図表2-2-3 のＢ、ＣのR^3 における正射影でもある。

全図にわたって影を施した部分は、側胞としての１個の立方体状胞の、変化の状態を示す。また、頂点ＡとＥには○印と△印が付されていて、Ａに隣接する３頂点をＢ、Ｃ、Ｄ



図表 2-3-15　4－立方体（1は胞心、2は面心、3は線心、4は点心、の直射影を導く配置）の副射影（L），斜射影（M），中心射影（N）（C.G.：高田一郎）

とした場合、1のすべてはＡＢ、ＡＣ、ＡＤに、2のすべてはＡＢ、ＡＣに、3のすべてはＡＢに、それぞれR^4における実長が現われる。

それに対して、4は実長を持たず、一般的な形となっている。ただし、Ｎにおいては、得られる模型の各稜の延長が、1では1点（1消点）で、2では2点（2消点）で、3では3点（3消点）で、4では4点（4消点）で、それぞれ交わる、という顕著な性質がある。

全体としてはＬが回転タイプの多胞体に、Ｍが並進タイプの多胞体に、Ｎが求心タイプの多胞体に、それぞれ関係していることは前述した通りであるが、筆者（1977[12])の指摘するように、それぞれは、射影方向（Ｍの場合）、射影中心（Ｎの場合）のわずかな違いも、Ｌにおけるａ、ｂ、ｃ同様、得られる模型に大きな変化を及ぼす。たとえばＬ、Ｍ、Ｎの代表的な変形を、図表2-3-17～20に示す。図表2-3-16はＬを求めるための代表的な射影方向である。

２－３－８　４次元空間における単射影の建築的特性

本章で図表2-3-15のようにまとめた単射影の諸相は、４－立方体を例として解釈する限り、図表2-3-21のような建築的内容を持つ。

まず、副射影Ｌは、内部空間の集積回転的配置の諸相を示す。

そのうち、Ｌ－１は、すべての原形としての1個の内部空間が、単独で点形に置かれた場合を示す。多目的に使用される内部空間が配置されているともいえる。

Ｌ－２は、複数個の内部空間が、線形に連結させられた場合を示す。側面（壁面）を共有しながら連結するように配置された諸室が示されているともいえる。

Ｌ－３は、複数個の内部空間が、面形に連結させられた場合を示す。稜（柱）を中心として平面的に周回するように配置された諸室が示されているともいえる。

Ｌ－４は、複数個の内部空間が、立体的に連結させられた場合を示す。頂点（偶角部）を中心として立体的に積層するように配置された諸室が示されているともいえる。

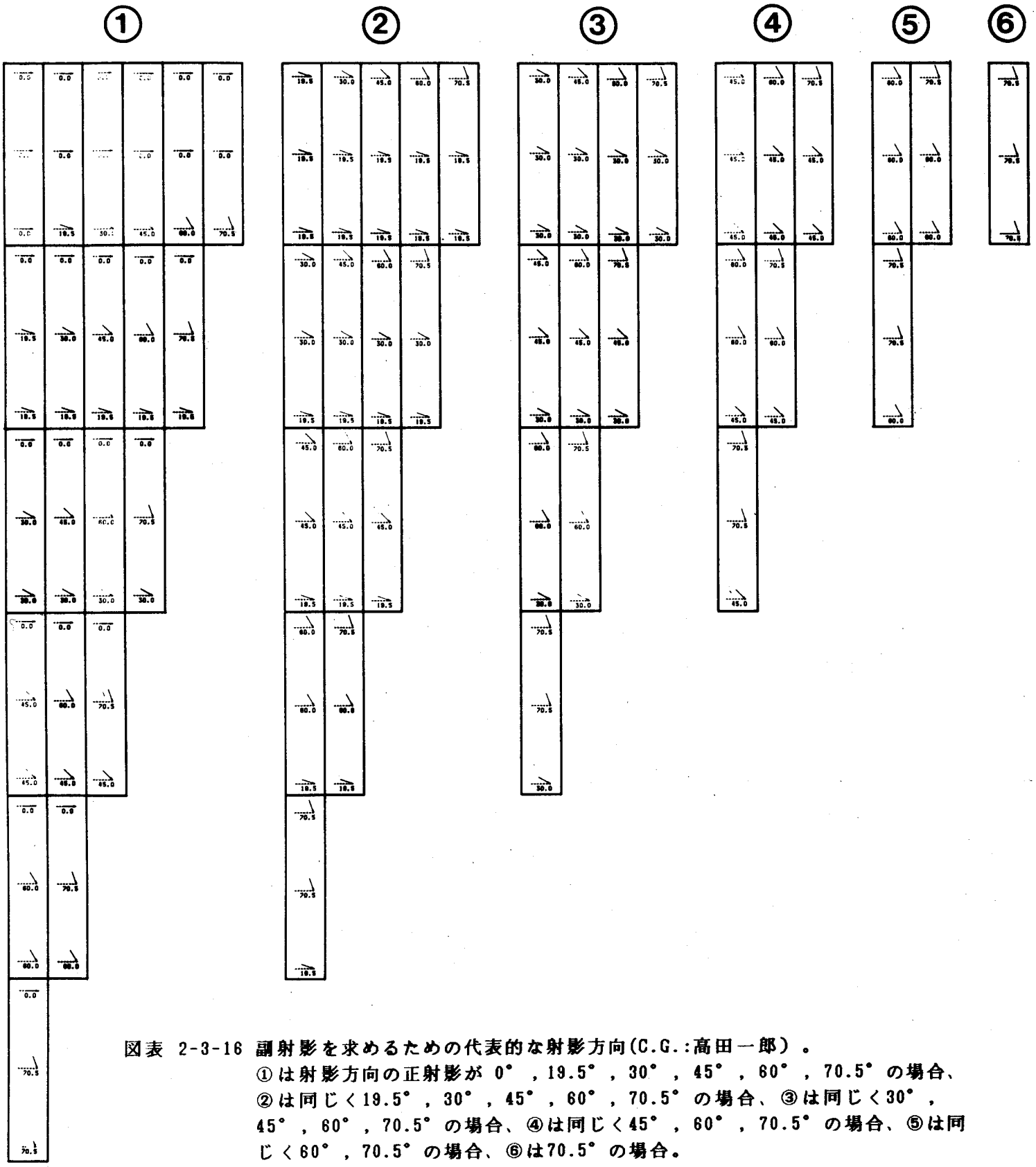
斜射影Ｍは、内部空間の並進移動的配置の様相を示す。

そのうち、Ｍ－１は、並進移動的配置の単位となる1個の内部空間が、点形に配置させられた場合を示す。Ｌ－１が時間的経過の中に置かれている、ともいえる。

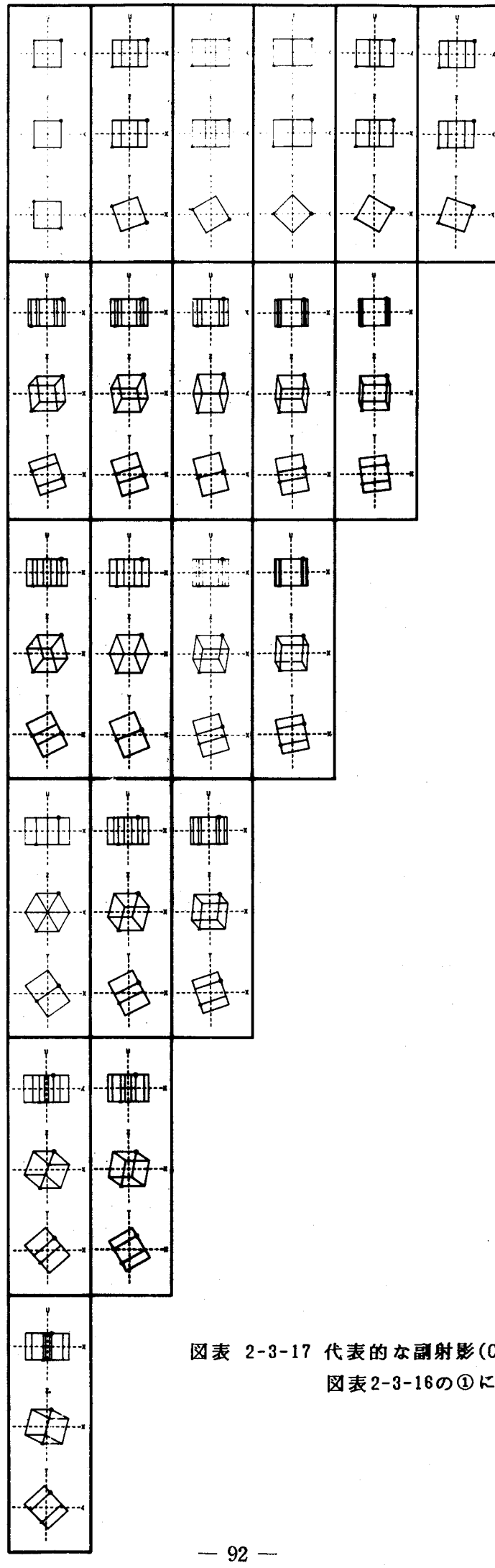
Ｍ－２は、線形の並進移動的配置をさせられた内部空間群を示す。側面を中心とするＬ－２が時間的経過の中に置かれている、ともいえる。

Ｍ－３は、面形の並進移動的配置をさせられた内部空間群を示す。稜を中心とするＬ－３が時間的経過の中に置かれている、ともいえる。

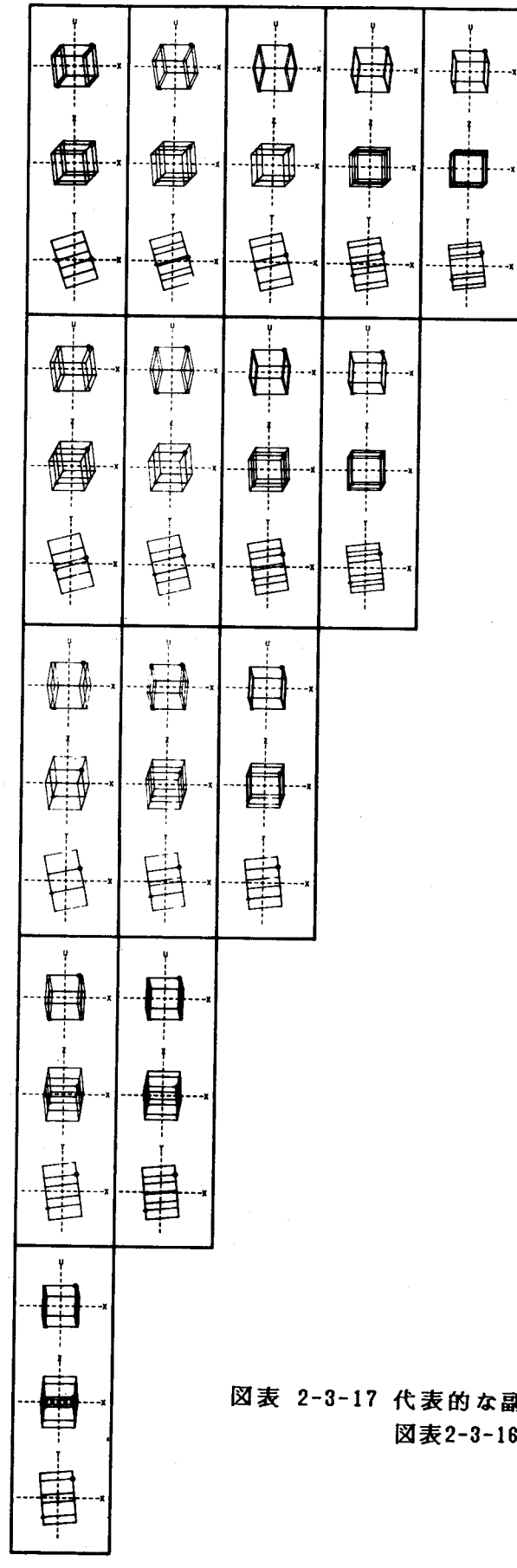
Ｍ－４は、立体的に並進移動的配置をさせられた内部空間群を示す。頂点を中心とするＬ－４が時間的経過の中に置かれている、ともいえる。



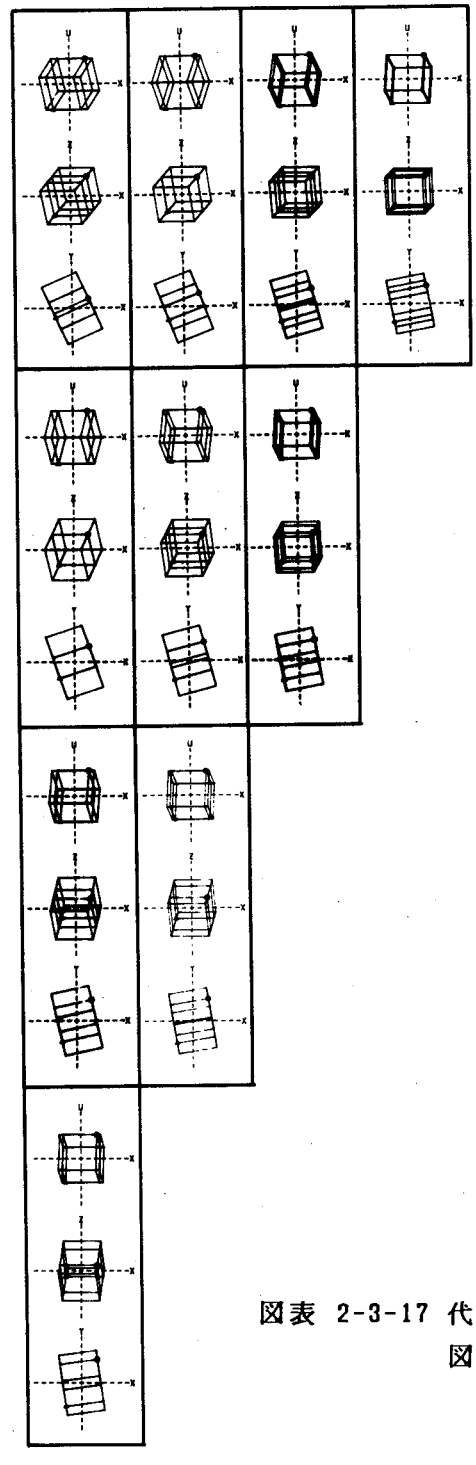
図表 2-3-16 副射影を求めるための代表的な射影方向(C.G.:高田一郎)。
①は射影方向の正射影が 0°，19.5°，30°，45°，60°，70.5° の場合、②は同じく19.5°，30°，45°，60°，70.5° の場合、③は同じく30°，45°，60°，70.5° の場合、④は同じく45°，60°，70.5° の場合、⑤は同じく60°，70.5° の場合、⑥は70.5° の場合。



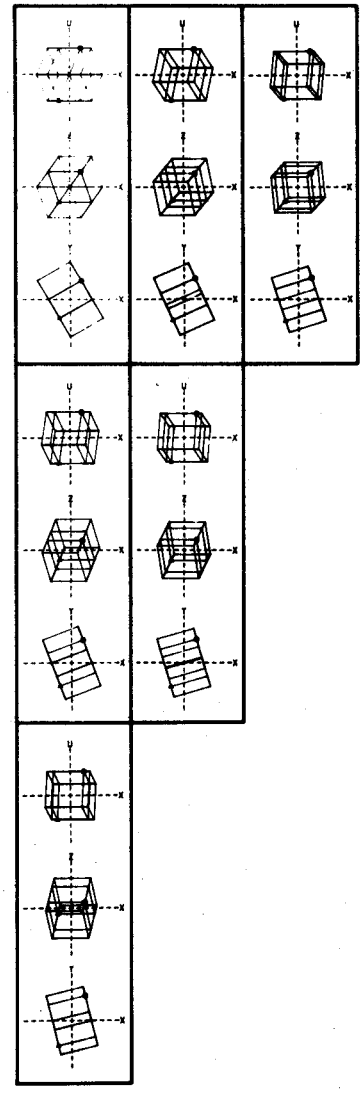
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎)①。
図表2-3-16の①による。



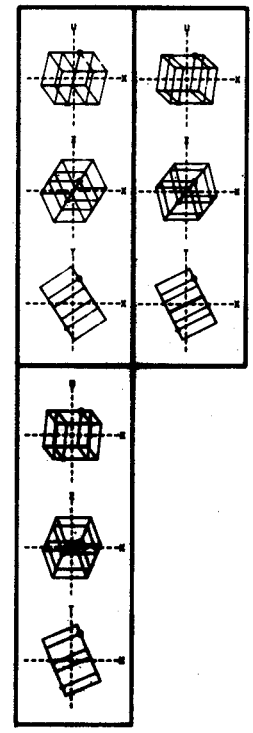
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎) ②。
図表2-3-16の②による。



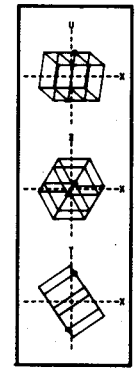
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎) ③。
図表2-3-16の③による。



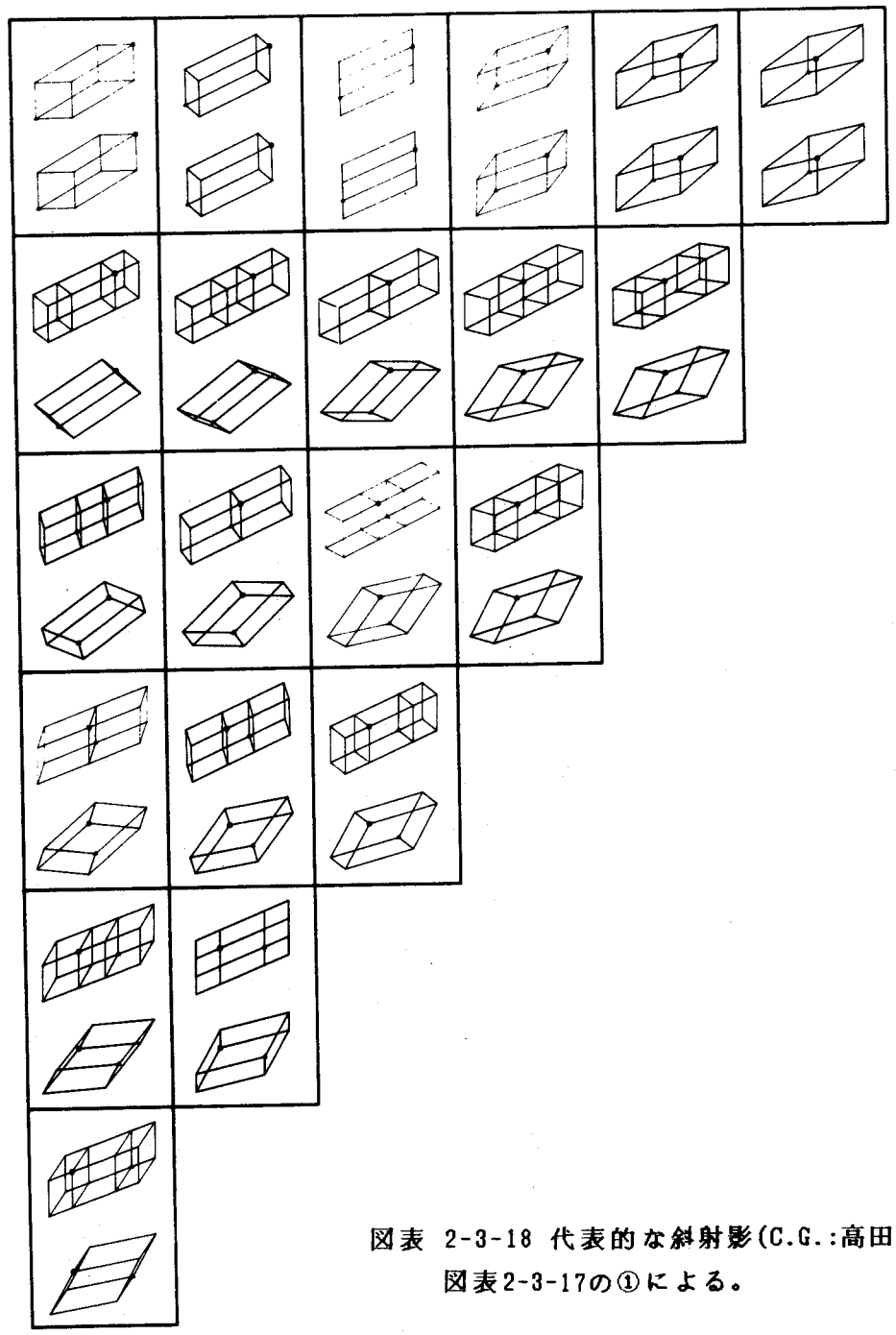
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎) ④。
図表2-3-16の④による。



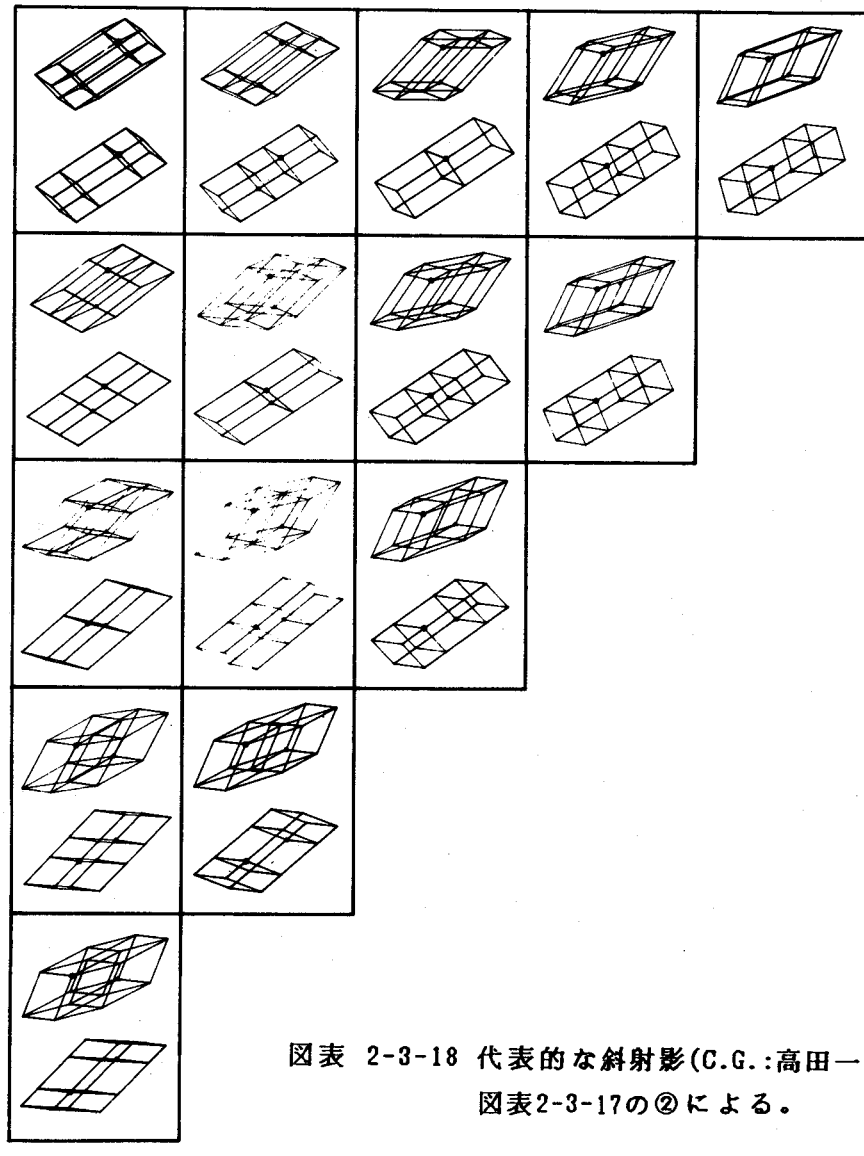
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎) ⑤。
図表2-3-16の⑤による。



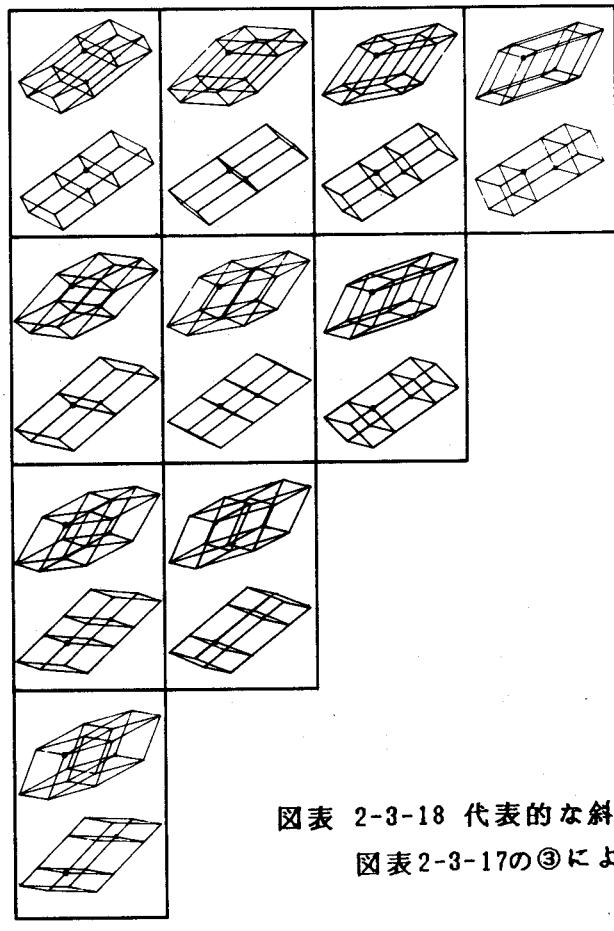
図表 2-3-17 代表的な副射影(C.G.:高田一郎) ⑥。
図表2-3-16の⑥による。



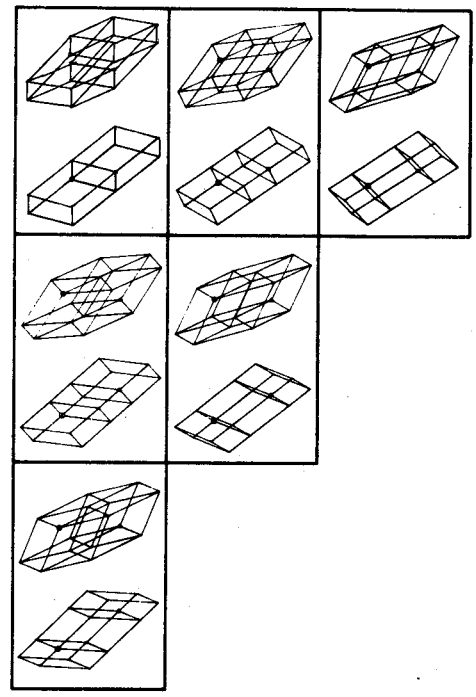
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ①。
図表2-3-17の①による。



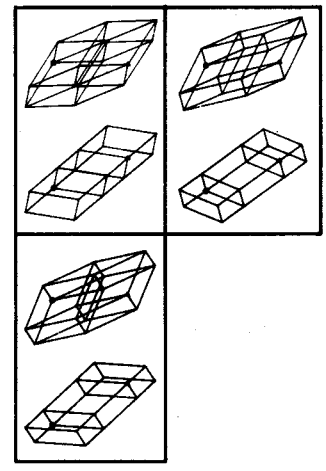
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ②。
図表2-3-17の②による。



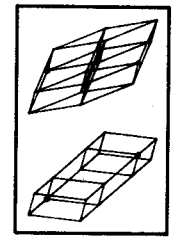
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ③。
図表2-3-17の③による。



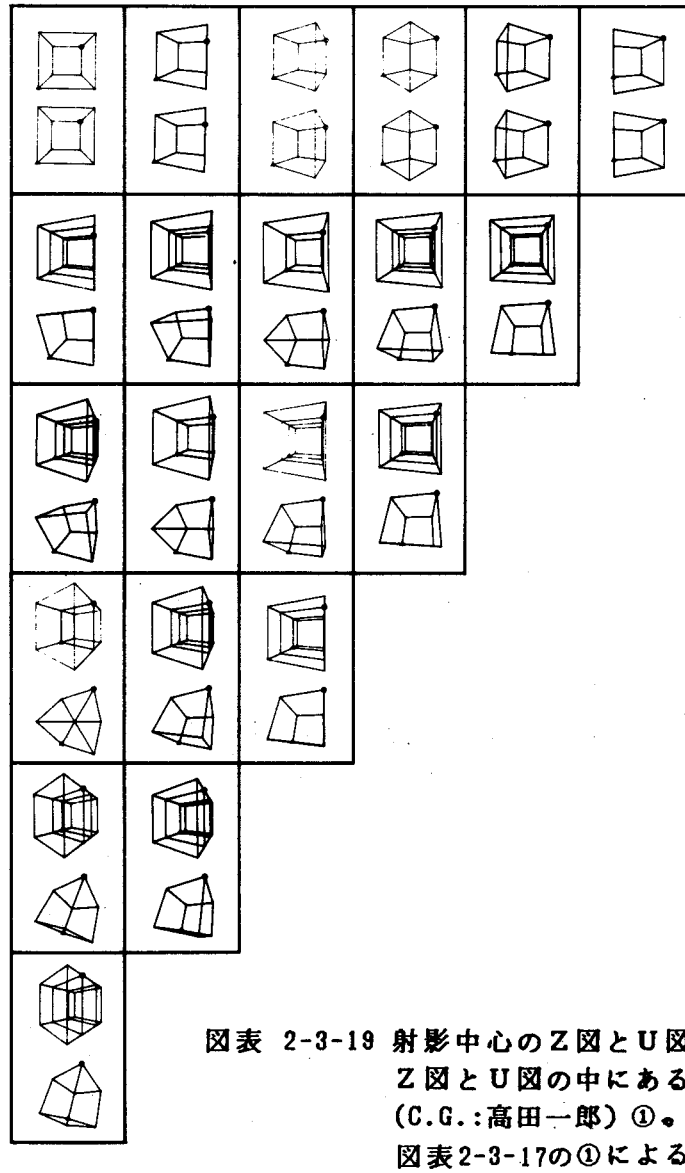
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ④。
図表2-3-17の④による。



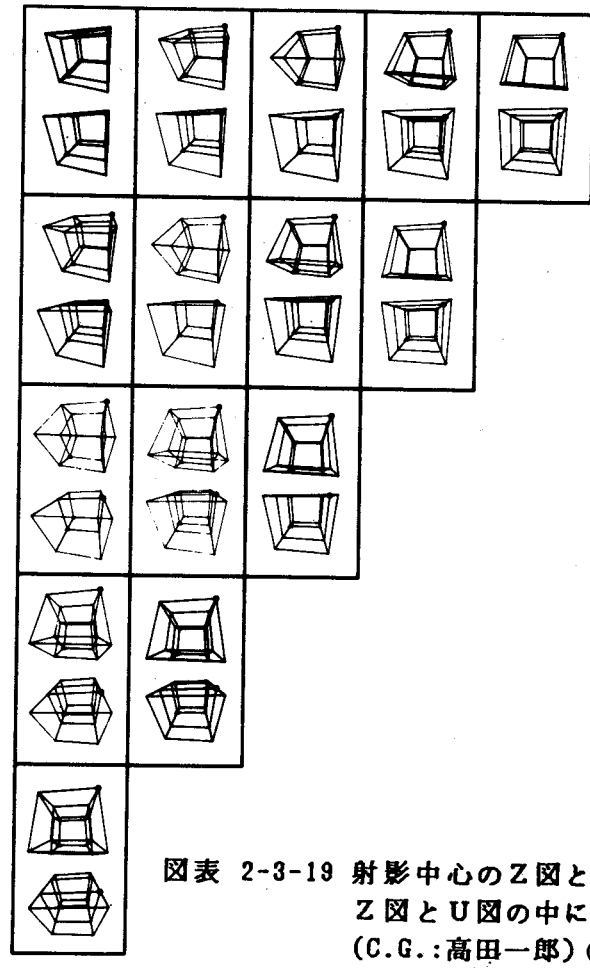
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ⑤。
図表2-3-17の⑤による。



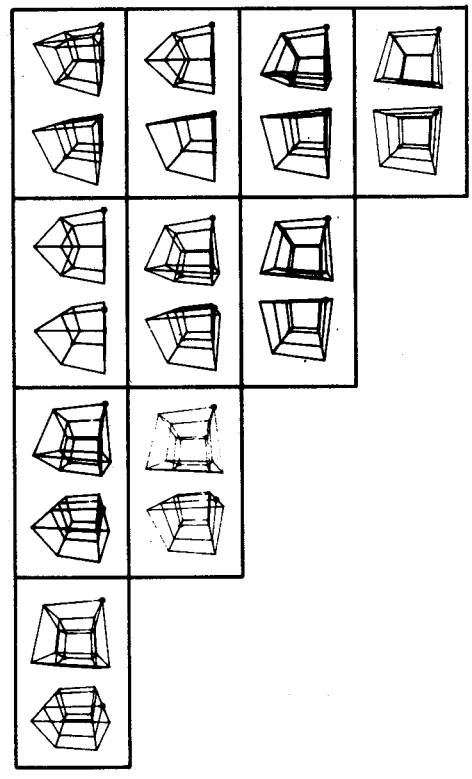
図表 2-3-18 代表的な斜射影(C.G.:高田一郎) ⑥。
図表2-3-17の⑥による。



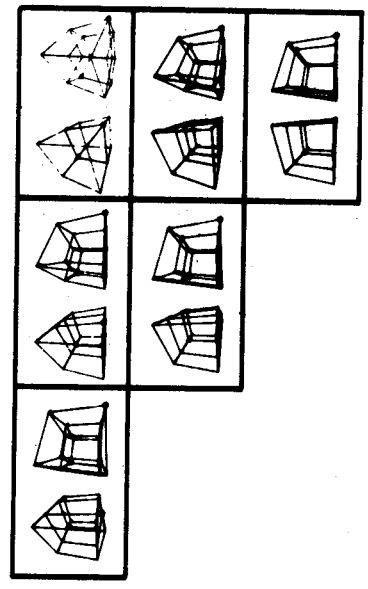
図表 2-3-19 射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ①。
図表2-3-17の①による。



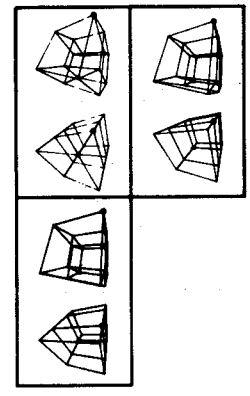
図表 2-3-19 射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ②。
図表2-3-17の②による。



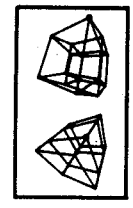
図表 2-3-19 射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ③。
図表2-3-17の③による。



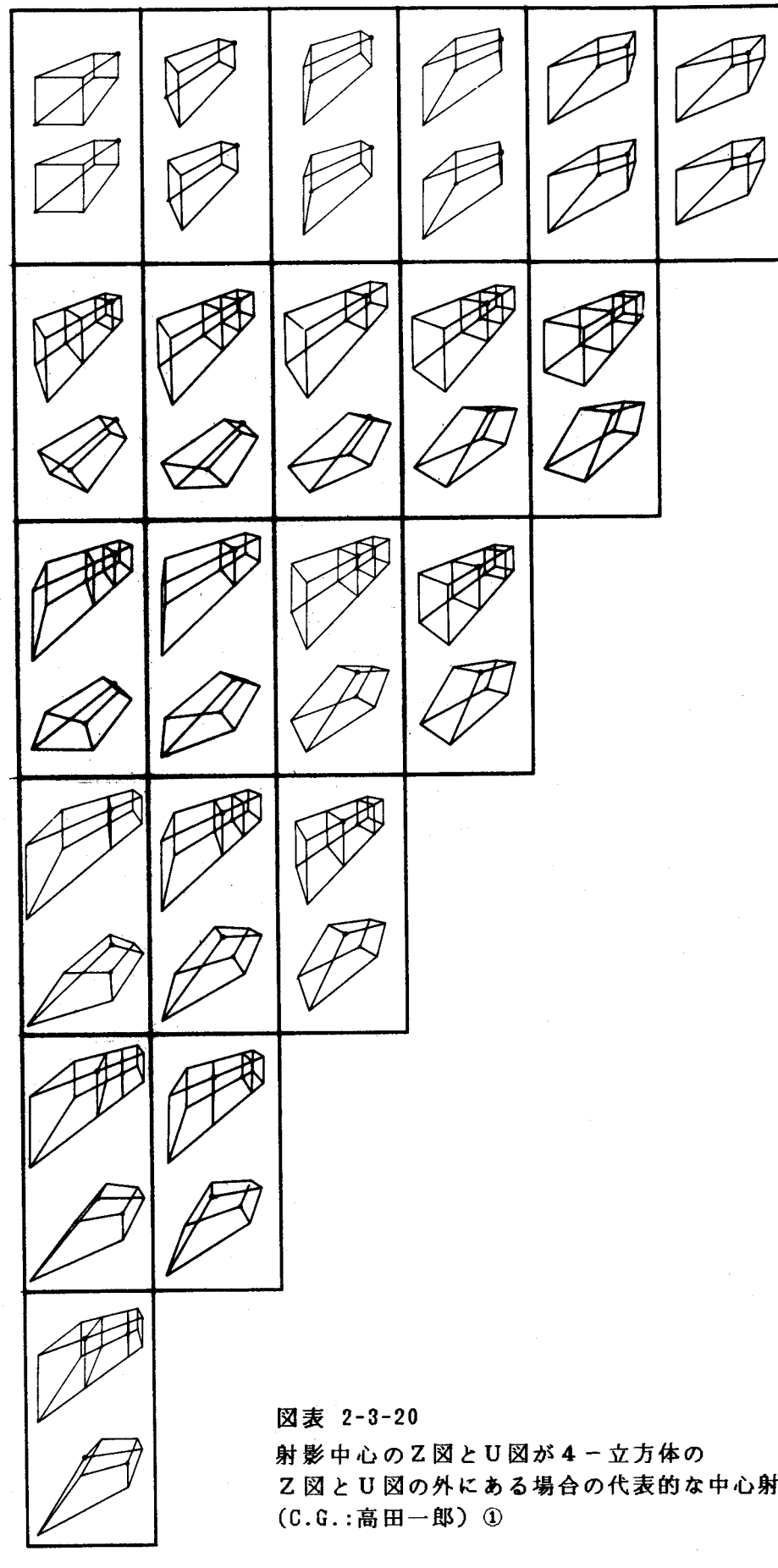
図表 2-3-19 射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎)④。
図表2-3-17の④による。



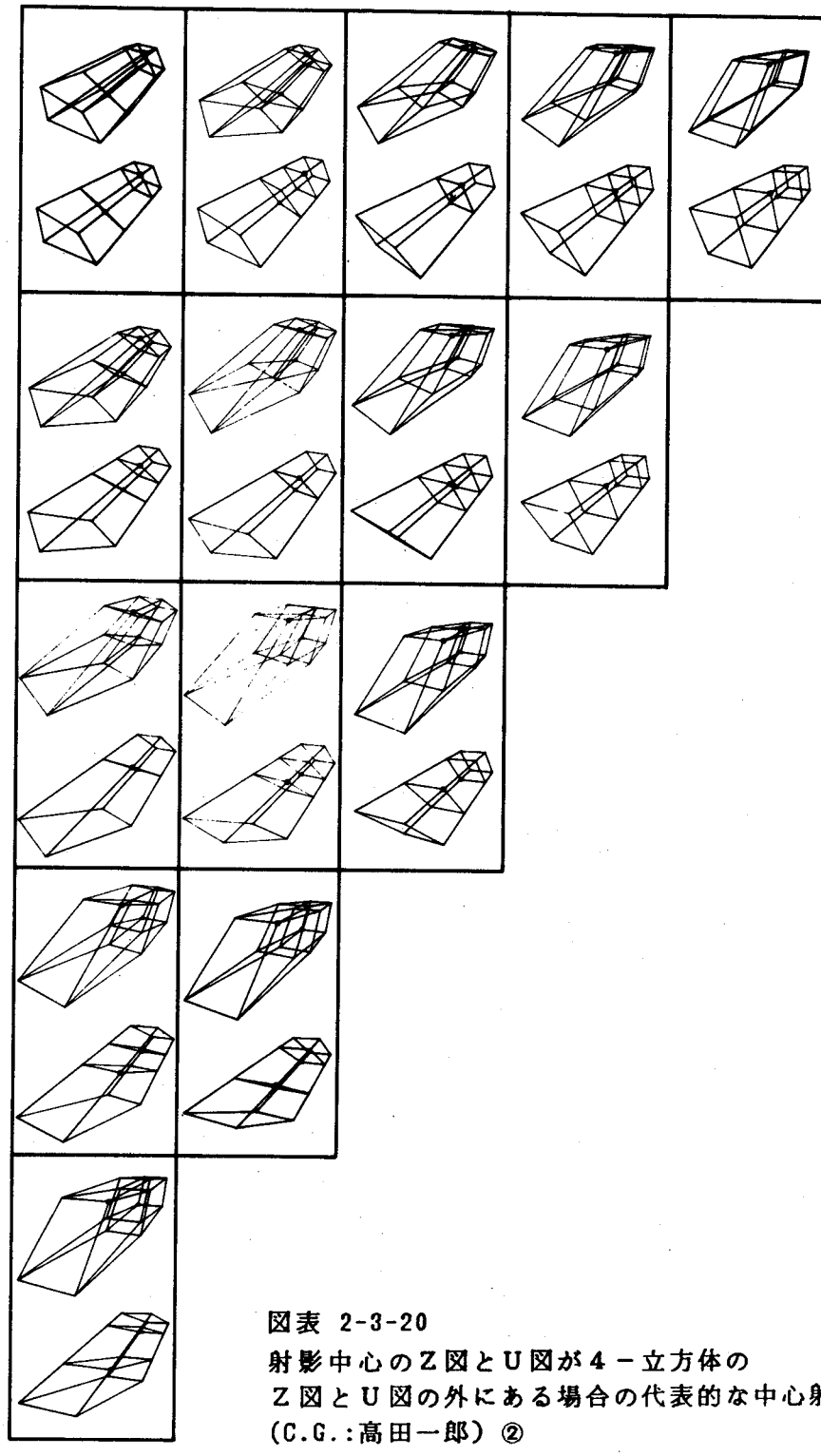
図表 2-3-19 射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ⑤。
図表2-3-17の⑤による。



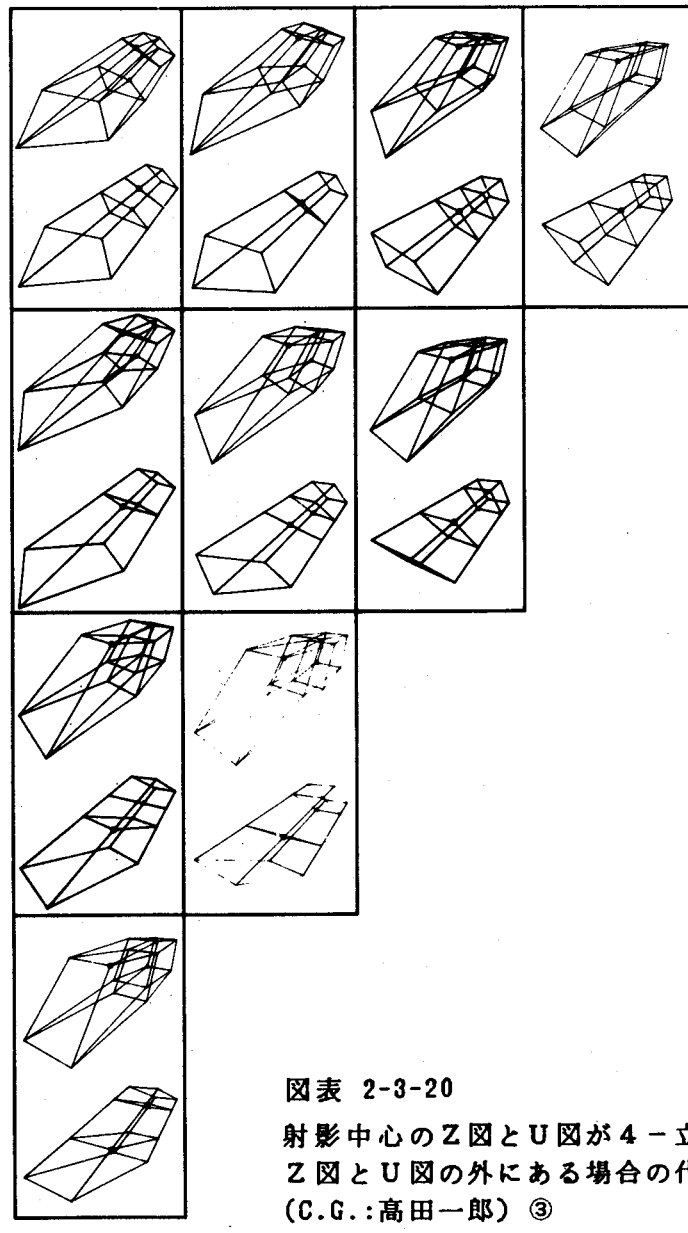
図表 2-3-19 射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の中にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ⑥。
図表2-3-17の⑥による。



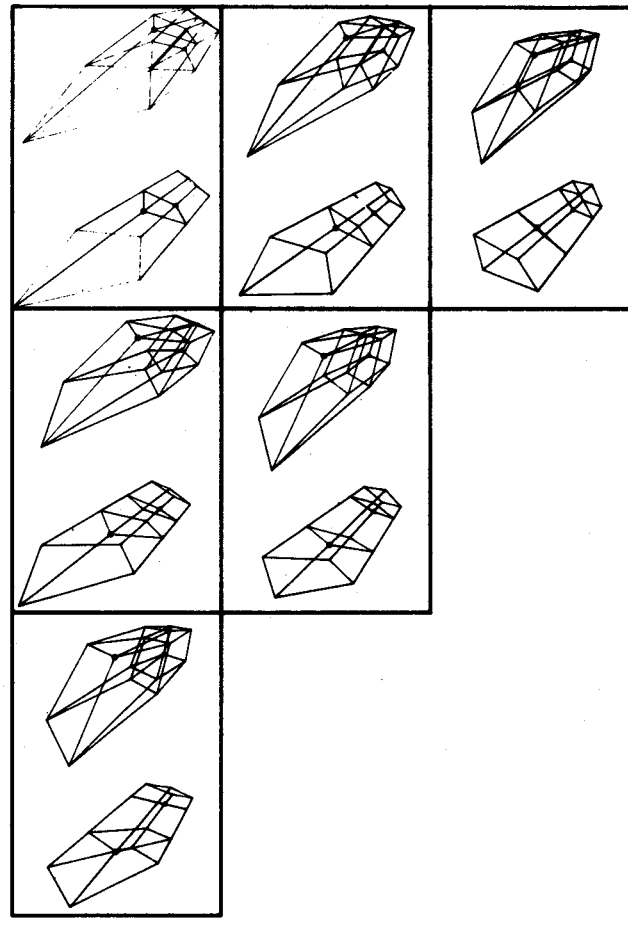
図表 2-3-20
射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ①



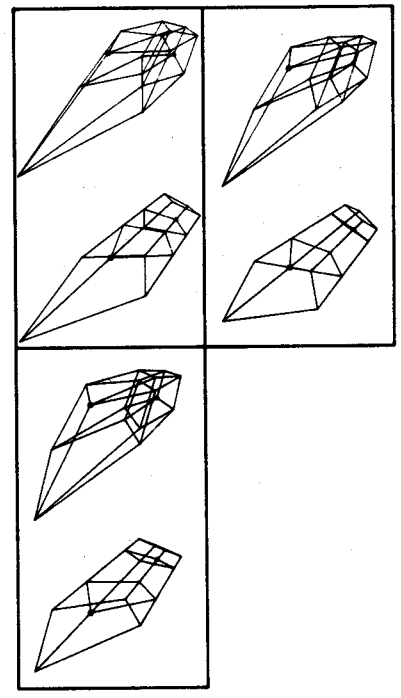
図表 2-3-20
射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ②



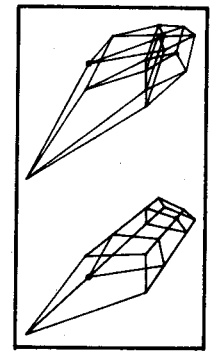
図表 2-3-20
射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ③



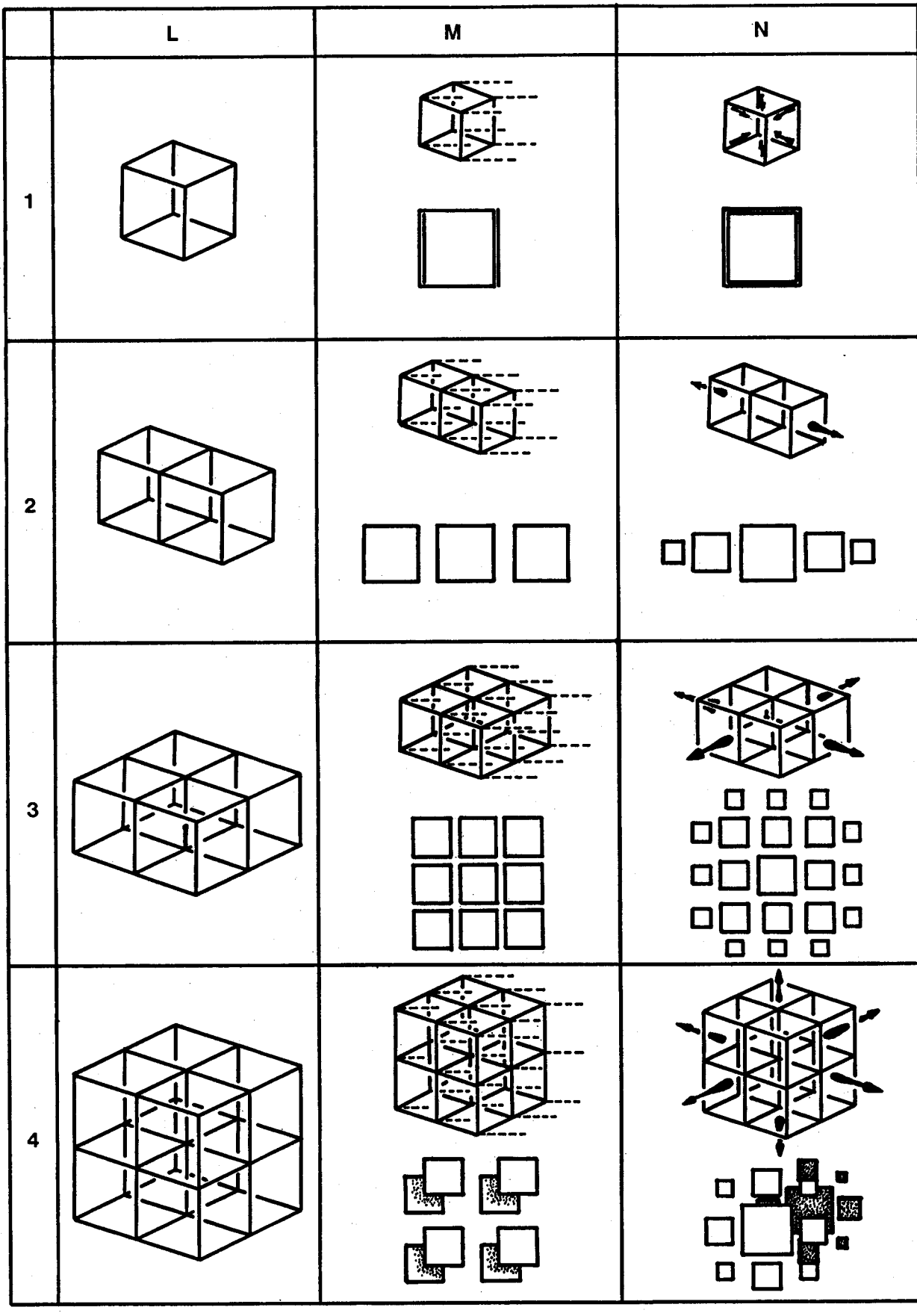
図表 2-3-20
射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ④



図表 2-3-20
射影中心のZ図とU図が4－立方体の
Z図とU図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ⑤



図表 2-3-20
射影中心のＺ図とＵ図が４－立方体の
Ｚ図とＵ図の外にある場合の代表的な中心射影
(C.G.:高田一郎) ⑥



図表 2-3-21 図表2-3-15の建築的表現

具体的には、Ｍ－１は、時間的経過の中の建築などに代表される、点形に静止した内部空間、Ｍ－２は、時間的経過の中の、自動車などに代表される、線形に移動する内部空間、Ｍ－３は、時間的経過の中の、船舶などに代表される、面形に移動する内部空間、Ｍ－４は、時間的経過の中の、航空機などに代表される、胞形（空間的）に移動する内部空間、をそれぞれ象徴する。

中心射影Ｎは、内部空間の求心変化（膨張収縮）的配置の様相を示す。

そのうち、Ｎ－１は、求心変化的配置の単位となる１個の内部空間が、点形に配置させられた場合を示す。Ｌ－１が胞を中心として膨張収縮する、ともいえる。

Ｎ－２は、複数個の内部空間が、線形に求心変化（膨張収縮）する形で配置された状態を示す。Ｌ－２が線形に膨張収縮する、ともいえる。

Ｎ－３は、複数個の内部空間が、面形に求心変化（膨張収縮）する形で配置された状態を示す。Ｌ－３が面形に膨張収縮する、ともいえる。

Ｎ－４は、複数個の内部空間が、立体的に求心変化（膨張収縮）する形で配置された状態を示す。Ｌ－４が立体的に膨張収縮する、ともいえる。

具体的には、Ｎ－１は、単独で１点から発散するように広がろうとする球状の空気膜構造物や小都市などを、Ｎ－２は、線形に連結され、あるいは線形に移動しながら、広がろうとする円柱状の空気膜構造物や線形都市などを、Ｎ－３は、面形に連結され、あるいは面形に移動しながら、広がろうとする円盤状の空気膜構造物や面形都市などを、Ｎ－４は、胞形（立体的）に、成長しようとする空中都市などを、それぞれ象徴する。

こうした図表2-3-15の建築のあり得る姿を全体的に把握する解釈において、内部空間を構成部材に置き換えることも可能であり、また、例としての４－立方体にかえて、他の図形を応用することも可能である。その場合でも、図表2-3-15の総括性が変わることはない。４－立方体にはR^4にとって基本的な直交座標軸が明示されているからである。

２－３－９　本章の結論

従来のR^3におけるR^2への射影が、建築上の形象を仮想的な２次元的広がりを持つ表面のみによって表現していたのに対し、R^4におけるR^3への射影は、建築上の形象が本質的に持っている３次元的広がりを持つ内部を、その変化や変容の様態を含めながら、全体的かつ客観的に表現する。

このR^4における射影の表現形式には、R^3における射影と同様、大別して正射影（複射影）と単射影があって、前者は、建築上の形象を、直交関係に従って明快に表現することができ、その性質は、与えられた形象の持つさまざまな建築的要素の適確で簡明な把握や表現に応用することができる。

それに対して後者は、副射影、斜射影、中心射影に細分されて、集積回転（副射影）し、

並進移動（斜射影）し、求心変化（中心射影）する、時間的、動的な内容をも含めた建築上の形象を、点形、線形、面形、胞形に従って分類することができ、それを媒介として建築上の形象の総合的な把握と、それに基づく系統的な創成が可能となる。

本章での引用文献

1) Lionel March, Philip Steadman, The Geometry of Environment(Methuen, 1971), P.25
2) David L.Heiserman, Experiments in Four Dimensions(TAB Books,1983) PP.246～294
3) Ludwig Eckhart, Four-Dimensional Space(Indiana U.P.,1929), P.40
4) Fritz Hohenberg, Josef Tschupik,"Grundzuge der darstellenden Geometrie", Grundzuge der Mathematik, Vandenhoeck und Ruprecht, 1971,309～319
5) E.Jouffret, Mélanges de géométrie à quatre dimensions (Gauthier-Villars, 1906), P.32
6) C.Ernesto S.Lindgren, Steve M.Slaby, Four-dimensional Descriptive Geometry (McGraw-Hill,1968), P.36
7) 宮崎興二“４次元空間における相貫空間の作図・２”図学研究、第12号（1973）、15～21
8) Fanya Moiseevna Perel'man, Phase Diagrams of Multicomponent Systems-Geometric Methods(Consultants Bureau, 1966), PP.9 ～15
9) Ole P.Arvesen,"The Axonometric Representation of N-Dimensional Figures", The Journal of Engineering Graphics, Vol.27,No.3,1963
10) Fernando R.Casas, "Polar Perspective:A Graphical System for Creating Two-Dimensional Images Representing a World of Four Dimensions", Leonardo, Vol.17,No.3(1984),188-194
11) Heiserman(1983), op.cit., PP.246～294
12) 宮崎興二“４次元空間における投象の総括”、図学研究、第21号（1977）、11～13

２－４　４次元等測軸の建築への導入

２－４－１　本章の目的
２－４－２　４次元直交軸の概念
２－４－３　４次元等測軸の概念
２－４－４　４次元等測軸の図形的性質
２－４－５　４次元等測軸の建築的応用
２－４－６　４次元等測軸の表現
２－４－７　４次元等測軸の建築的特性
２－４－８　本章の結論

２－４－１　本章の目的

多胞体を具体的な建築上の形象に関係させる場合、各多胞体の持つ解析的、定量的な性質、たとえば各頂点の座標、各稜の実長、側面の実形など、が意味を持つ。

本章は、そうした定量的な性質を保存した多胞体の射影としての建築上の形象の持つ４次元性を、４次元空間（R^4）における直交４座標軸の、３次元空間（R^3）内への射影（直射影）としての４次元等測軸によって解析し、表現することを目的とする。

２－４－２　４次元直交軸の概念

３次元射影幾何学上の Pohlke-Schwarz の定理によると、２次元平面（R^2）上に与えられた任意の斜交３直線は、それとは別にR^3（ＸＹＺ）内に与えられた任意な直交３座標軸Ｘ、Ｙ、Ｚの適当な平行射影となる（たとえば Gurevitch、1962[1]）。

この定理を拡張すると、R^3 内に与えられた任意の斜交４直線は、それとは別にR^4（ＸＹＺＵ）内に与えられた任意な直交４座標軸Ｘ、Ｙ、Ｚ、Ｕの適当な平行射影となる（筆者 1975[2]）。

そのとき得られる座標系において、R^4 内の１点Ｐ（p_x、p_y、p_z、p_u）の位置は、図表2-4-1 のように示される。つまり、

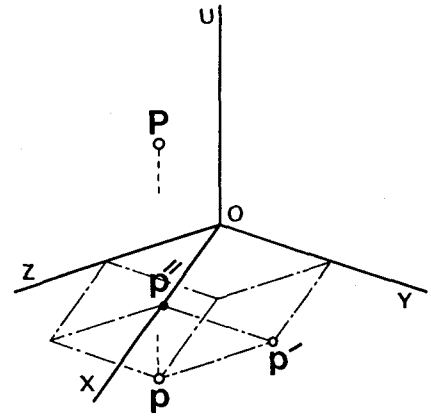
$Pp // UO$、　$Pp \cap R^3(XYZ) = p$、　$pp' // ZO$、

$pp' \cap R^2(XY) = p'$、　$p'p'' // YO$、　$p'p'' \cap XO = p''$、

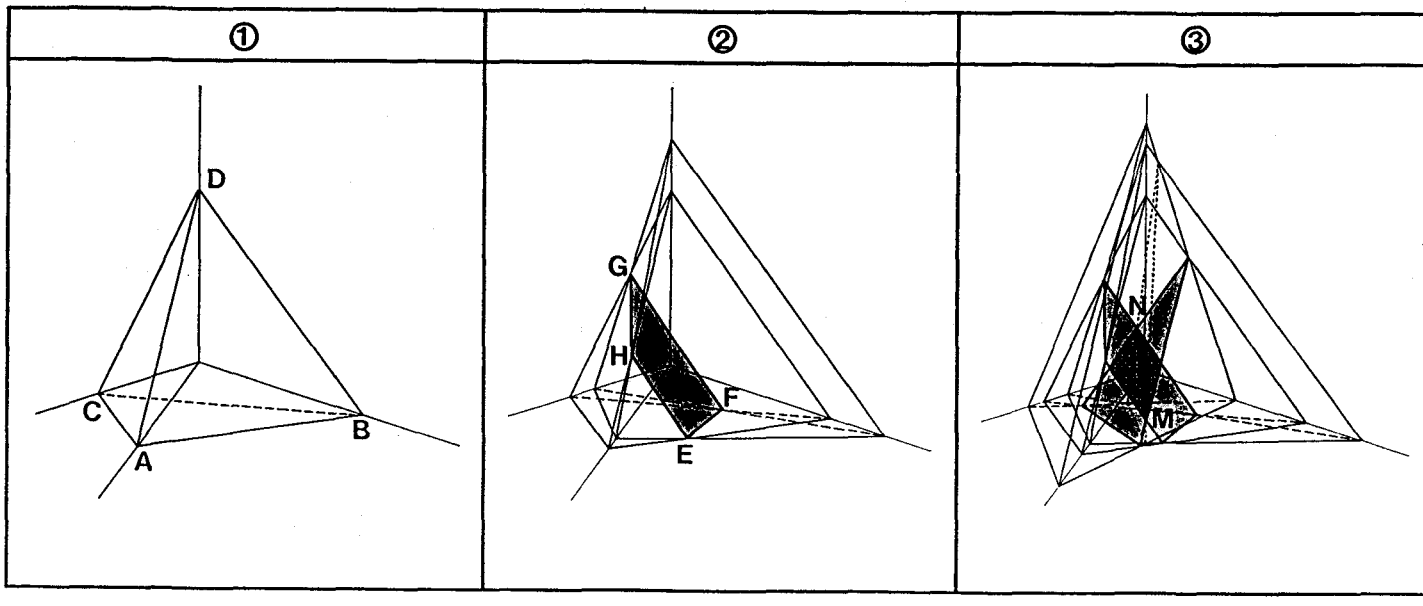
であって、

$p_x = \overline{Op''}$、　$p_y = \overline{p''p'}$、　$p_z = \overline{p'p}$、　$p_u = \overline{pP}$、

となる。



図表 2-4-1　R^4（XYZU）内の1点P（x，y，z，u）の位置の決定。
o p は平行6面体。$\overline{o\,p''} = x$、$\overline{p''\,p'} = y$、$\overline{p'\,p} = z$、$\overline{p\,P} = u$。



図表 2-4-2　R^4 内の胞（4面体状胞）の相互関係。
①は1個の胞を単独に置いた状態、②は2個の胞の交面
EFGH、③は3個の胞の交線MN、をそれぞれ示す。

いいかえれば、点Ｐの位置は、

$\overline{Op''} = p_x$ 、 $\overline{p''p'}$ (//ＯＹ) $= p_y$ 、 $\overline{p'p}$ (//ＯＺ) $= p_z$ 、

$\overline{pP}$ (//ＯＵ) $= p_u$ 、

によって決定される。

この点Ｐの表示を原則として、線分、面分、胞は、それぞれ、少なくとも２点、３点、４点を結ぶことによって表示することができる。

とくに、次元公式（2-1-1）　によると、２個の胞は１平面で交わり、その平面と他の胞（いいかえれば合わせて３個の胞）は１直線で交わる。その様相を、本章では上述の座標系で図表2-4-2 のように示す。

①は、４元１次方程式ａｘ＋ｂｙ＋ｃｚ＋ｄｕ＝ｅで表わされる胞ＡＢＣＤの、各座標とも正となっている４面体状の部分である。

②は、２個の胞の交面ＥＦＧＨを示すもので、Ｅ、Ｆ、Ｇ、Ｈとも、２個の４面体状胞の稜の交点となっている。

③は、３個の胞の交線ＭＮを示すもので、①で示されたような１個の胞と、②で求められたような１枚の交面との交線、あるいは、②で求められるのと同じような交面２枚の交線でもある。２平面はR^4 では一般に１点で交わるが、同一のR^3 に含まれている場合は、R^3 における幾何によって、１線分で交わる。

なお、４個目の胞が与えられた場合は、その胞と線分ＭＮとの交点として１点が得られることになる。つまり、４個の胞は一般に１点を共有し合う。

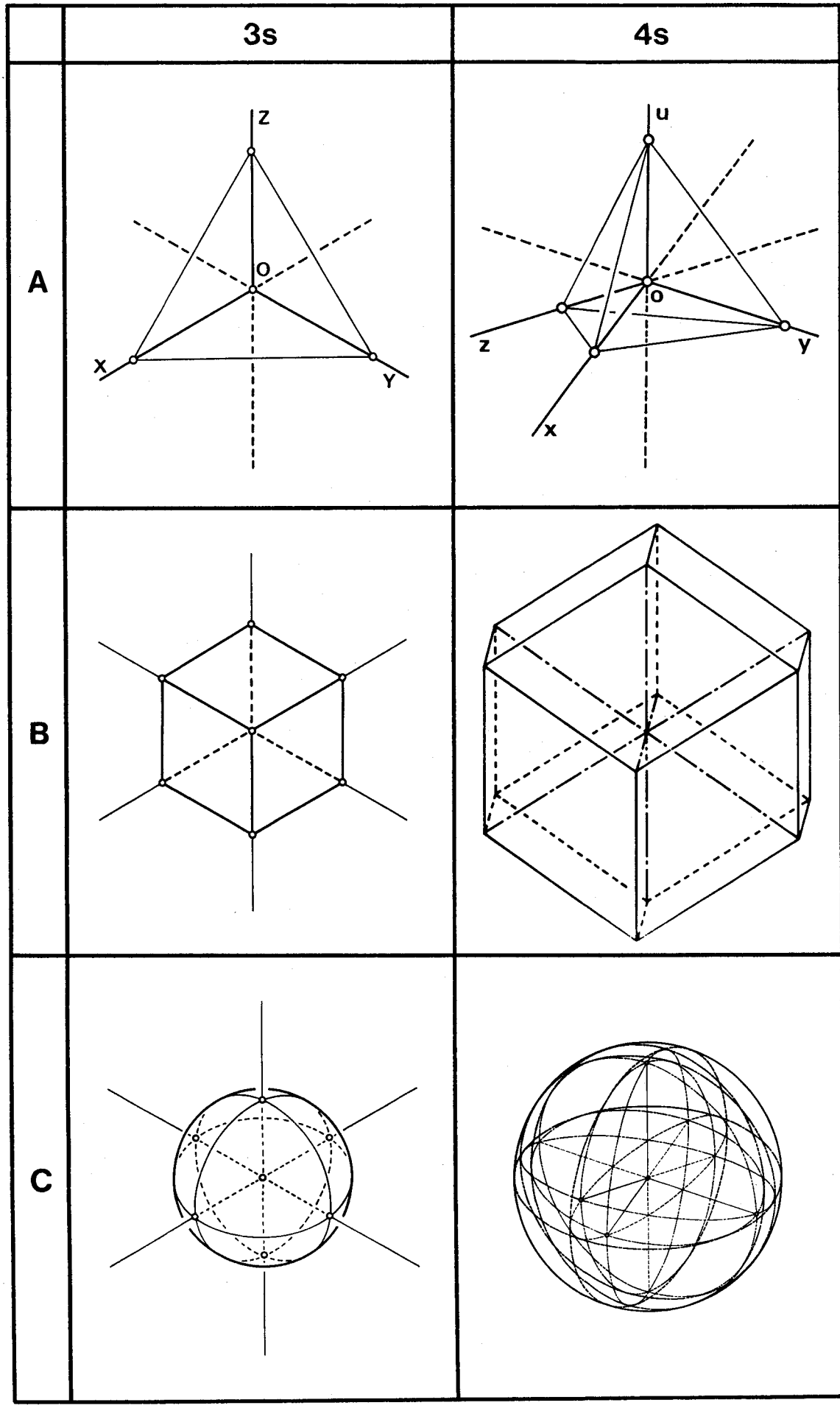
２－４－３　４次元等測軸の概念

R^3 内の３次元直交軸の正の部分（あるいは負の部分）のみは、原点Ｏで互いに 120° をなして交わるR^2 上の３半直線ＯＸ、ＯＹ、ＯＺに射影（直射影）されたとき、等測軸（３次元等測軸）とよばれる（図表2-4-3 の3s-A）。その場合、各軸上の単位距離はすべて等しく、実長の$\sqrt{2}/\sqrt{3}$である。また、直角は、60° かあるいはその補角の 120° に変換されて、立方体は、同表3s-Bのように、また球は3s-Cのように作図される。前者の外形は正６辺形であって、その面心で２個の頂点が重複し、稜長の等しさや側面の合同性は保存される。また後者の外形は完全な円となる。

この等測軸は、けっきょく、正３辺形の重心Ｏと３頂点を結ぶ３半直線となっている。

以上のようなR^3 における等測軸に対して、本章では、同表4s-Aのように、正４面体の体心Ｏと４頂点を結ぶ４半直線ＯＸ、ＯＹ、ＯＺ、ＯＵを４次元等測軸と名付けて、R^4 内の４次元直交軸の正の部分（あるいは負の部分）のみのR^3 内への射影（直射影）を、それによって表現する。

４次元等測軸のうち、２本づつは互いに等しい角（正４面体角）、



図表 2-4-3　３次元等測軸（３ｓ）と４次元等測軸（４ｓ）の対比。
Ａは軸内に組み込まれた正３角形（３ｓ）と正４面体（４ｓ）、
Ｂは同じく３－立方体（３ｓ）と４－立方体（４ｓ）、
Ｃは同じく３次元球（３ｓ）と４次元球（４ｓ）。

$$\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) = 109° 28' 16"$$

をなして交わり、各軸上には、実長の$\sqrt{3}$／２となった、互いに等しい単位距離が目盛られる。

つまり、R^4 における直角は、約109 ° 28' 16" かあるいはその補角約70° 31' 44" に変換されて、４－立方体は同表4s-Bのように、また４次元球は、4s-Cのように作図される。前者の外形は、対角線の長さが１：$\sqrt{2}$の菱形のみからなる菱形１２面体であって、その体心で２個の頂点が重複し、稜長の等しさや、側面および側胞の合同性は保存される。また、後者の外形は完全な球となる。

図表2-4-4 に、３次元等測軸から構成される平面格子（左）と４次元等測軸から構成される立体格子（右）を示す。

なお、４次元等測軸と菱形１２面体との関係については、本章とは別に、図法幾何学者のあいだで検討されている例がある（たとえば、Wunderlich, 1973[3]）。

２－４－４　４次元等測軸の図形的性質

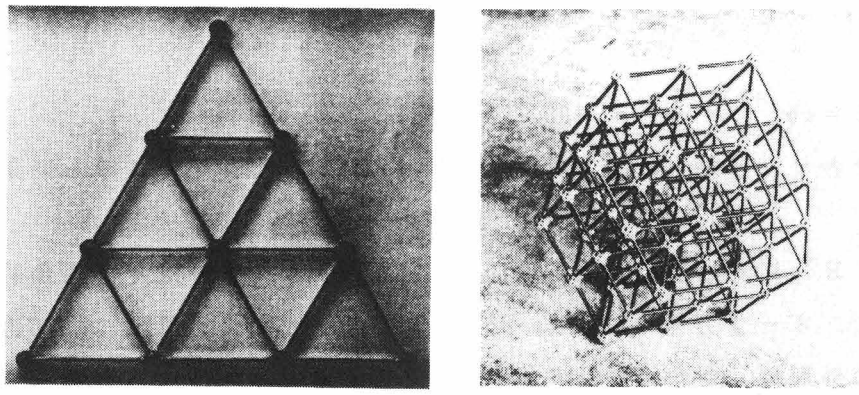
４次元等測軸は、R^3 における自らの持つ規則性のために、R^3 における規則的な図形と密接な関係を持つ。

たとえば、図表2-4-5 に、正多面体の中へ対称的に組込まれた４次元等測軸（太線）の例を示す。細線は３次元直交軸の例を、参考までに示す。図から明らかなように、すべての軸は各胞の頂点あるいは稜心あるいは面心を通っている。したがって、正多面体から導かれるような規則的な図形（たとえば半正多面体）に関する限り、３次元直交軸と４次元等測軸のいずれによっても整理された形で把握される。

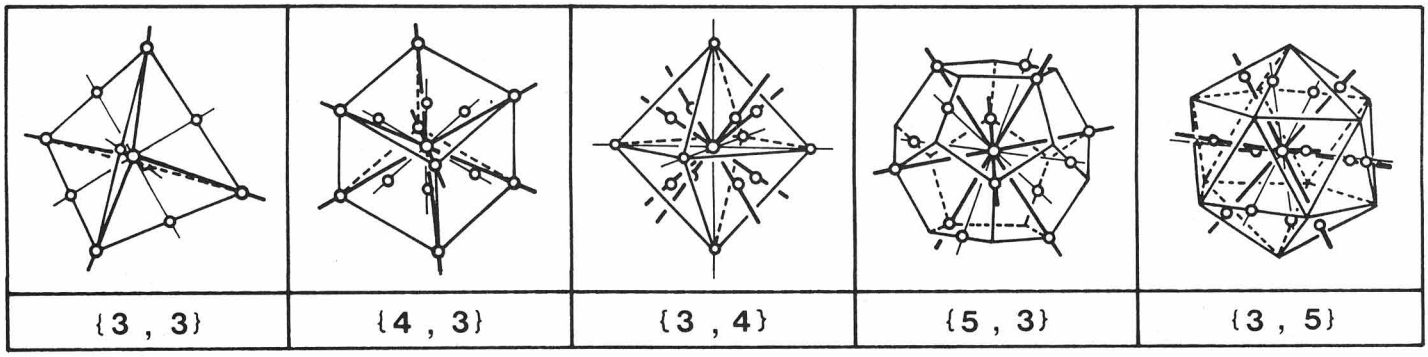
このように３次元直交軸、あるいは４次元等測軸の組込まれた図形は、各軸に従って規則的に連結させることができる。

たとえば、図表2-4-6 に、正多面体ならびに半正多面体による３次元空間充塡図形のうち稜のまわりの状態が一定なことで知られる Andreini のブロック積み図形５種類について、それらに４次元等測軸を導入した例を示す。①（Cubic ブロック）は立方体のみ、②（Octet ブロック）は正４面体と正８面体、③は切頭８面体のみ、④は正８面体と立方８面体、⑤は正４面体と切頭４面体、をそれぞれ使っている。そのうち、①と②（正多面体のみによるもの）では、各軸が各ブロックの頂点を通り、③、④、⑤（半正多面体が加わるもの）では各軸が各ブロックの面心を通っている。

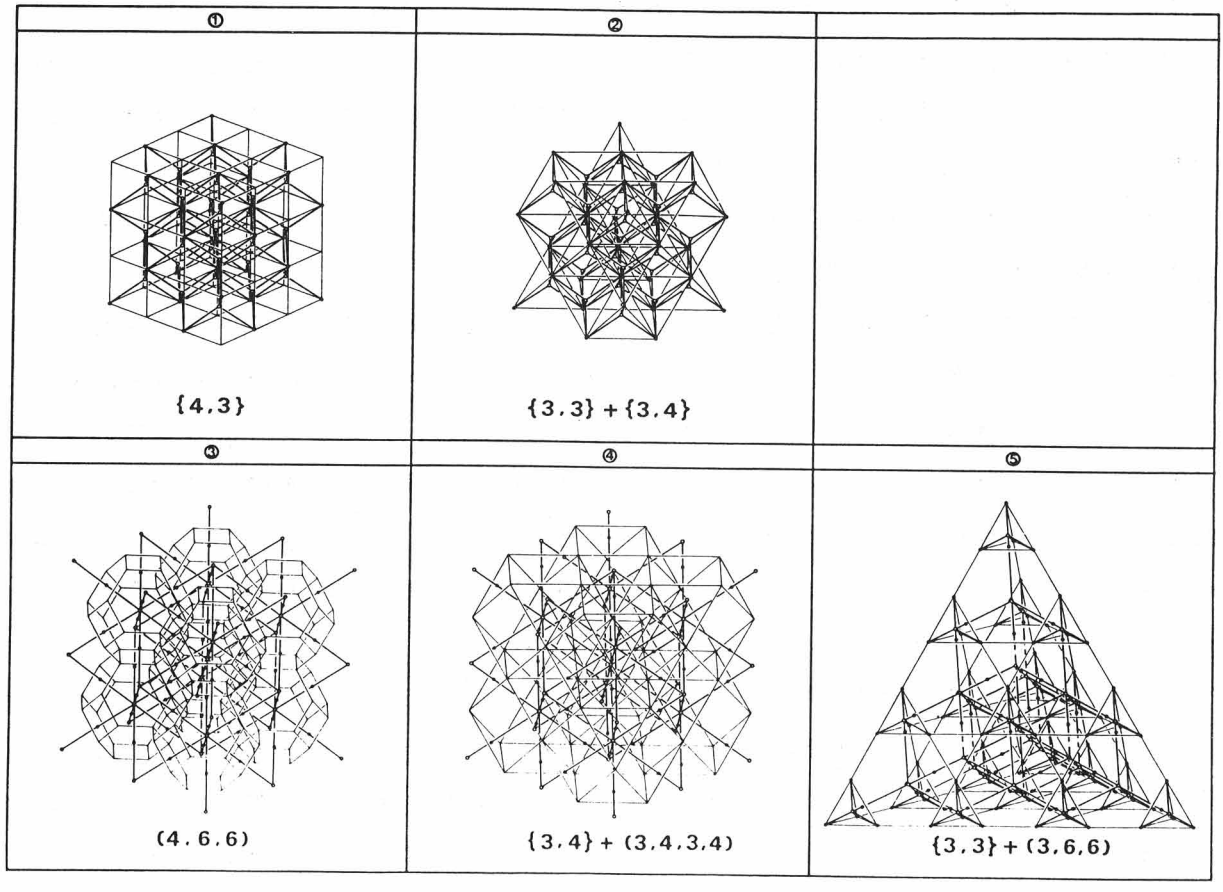
こうした４次元等測軸を支配する角 109° 28' 16" は、１８世紀の天文学者の名にちなんで、Maraldi の角とも呼ばれ、物理的な自然界において３次元空間充塡図形や最密球配置の関係する形態、たとえばさまざまな物質の分子構造や結晶構造、あるいは細胞組織などにしばしば現われることで知られる（たとえば Thompson 1968[4]、筆者 1983[5]）。３次



図表 2-4-4　3次元等測軸から構成される平面格子（左）と
4次元等測軸から構成される立体格子（右）



図表 2-4-5　正多面体における3次元直交軸（細線）と4次元等測軸（太線）



図表 2-4-6　Andreiniのブロック積みにおける4次元等測軸

元空間における 109° 28' が平面上の 120° に相当するという Thywissen(1980)[6]の、膜構造との関係上の指摘もある。

こうした指摘のされる理由の一つは、最密配置された球同志の接点を通る接平面がMaraldi の角をなして交わり、菱形１２面体による３次元空間充塡図形（図表2-4-7 左）を構成するところにある。

しかも、個々の菱形１２面体は、図表2-4-7 右のように、Cubic トラス（Cubic ブロックの稜図形）の中へ、１４頂点のうち８頂点を立方体の８頂点に、残る６頂点をまわりの立方体の体心に、それぞれ一致させる形で入り組むことができる、という特徴を持つ。　さらに、菱形１２面体による３次元空間充塡図形は、互いに平行な稜を伸縮させることにより、図表2-4-8 のような平面形を構成する、という建築的な性質を持つ。図中、暗部はユニットとしての菱形１２面体を示す。

２－４－５　４次元等測軸の建築的応用

以上のようなR^3 における利点に従って、４次元等測軸あるいはそれを決定するMaraldiの角や菱形１２面体は、４－立方体の射影の外形としての４次元的意味とは別に、従来からの３次元的な建築上の空間構成の手段を、しばしば提供し、建築における潜在的な４次元性を暗示している。

たとえば、図表2-4-9 は、独特の４次元的建築概念を持つ伊藤(1972)[7]による某集合住宅計画案であって、Cubic トラスの中に埋め込まれた、互いに Maraldiの角をなして交わる対角線を立体トラスに転用しようとする。

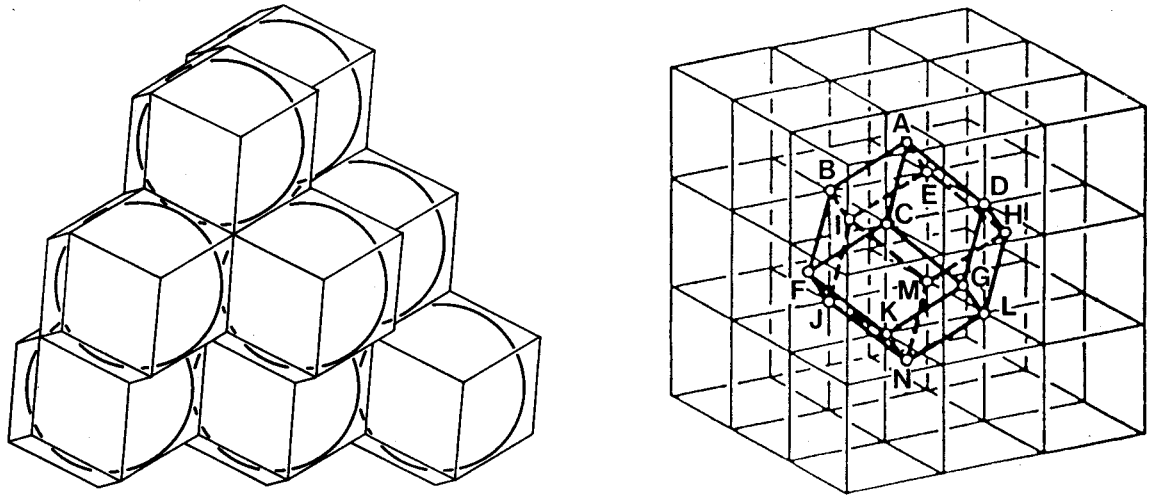
図表2-4-10は Philadelphia City Tower計画案（L.Kahn,1952 ～57）で、図表2-4-4 右の、正負両方向を合わせ持った４次元等測軸が組込まれている。

図表2-4-11は Indian Carry Resort計画案（M.Safdie，計画年代不詳 ）で、菱形１２面体とその側面を２等分した３角形を側面とする８面体が連結されている。

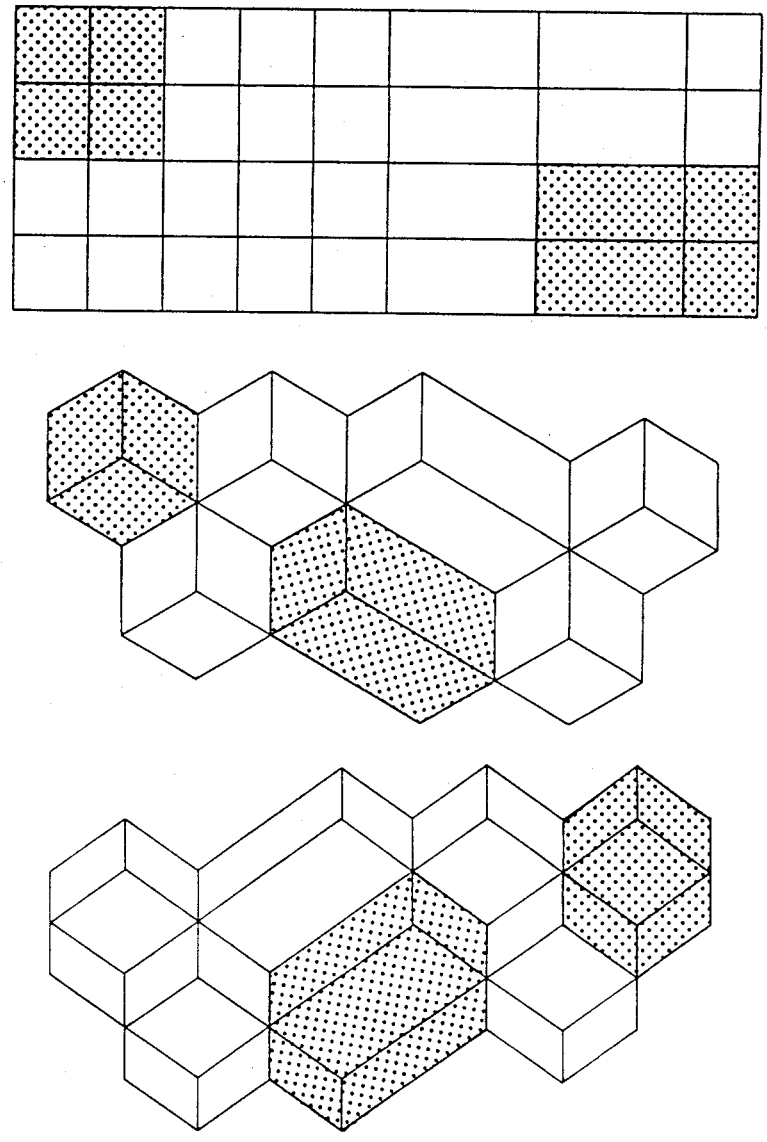
図表2-4-10,11 は、いずれも原案提出者（図表2-4-10は A.G.Tyng)が、Thompsonの前掲書（“On Growth and Form”）からアイディアを得たものである。

とくに、Tyng(1963)[8]には、図表2-4-12のような、各頂点まわりに Maraldiの角が集まるように湾曲された切頭８面体（湾曲されない場合は90° と120 ° が集まる）が、４次元等測軸を組込んだ微小な正４面体をジョイントとしながら連結されていく小博覧会場計画案もあって、このアイディアも、Thompsonの前掲書における最小面積曲面に関する記述から得られた。

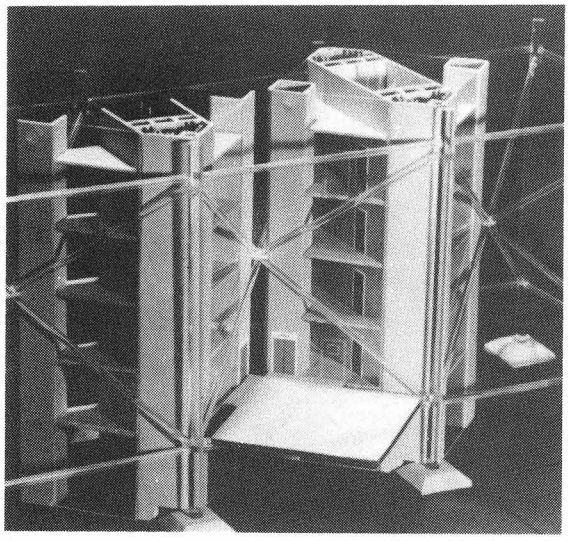
Tyngの計画案のジョイントに見られる、構造体としての４次元等測軸は、たとえば、正４面体に４次元的概念を与えるFullerの Tensegrity Mast（図表2-4-13）を初め、



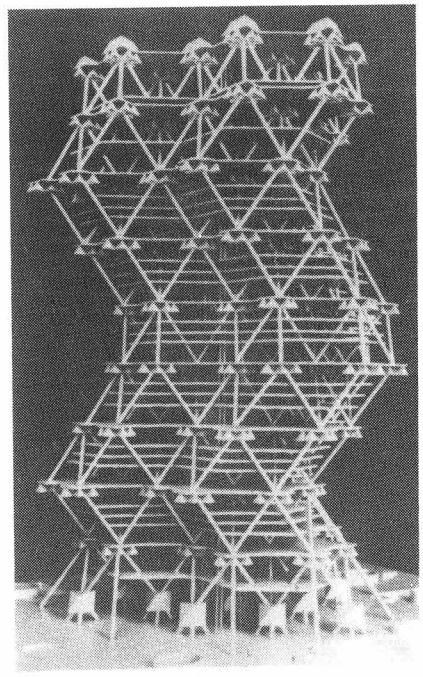
図表 2-4-7　菱形12面体による３次元空間充塡図形の中の最密球配置（左）と
Cubicトラスの中の菱形12面体（右）



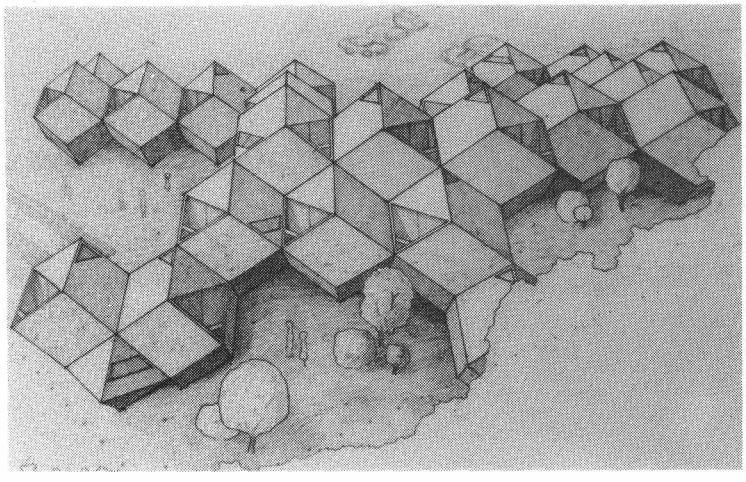
図表 2-4-8　菱形12面体による３次元空間充塡図形の平面上への射影の変形
暗部はユニット。



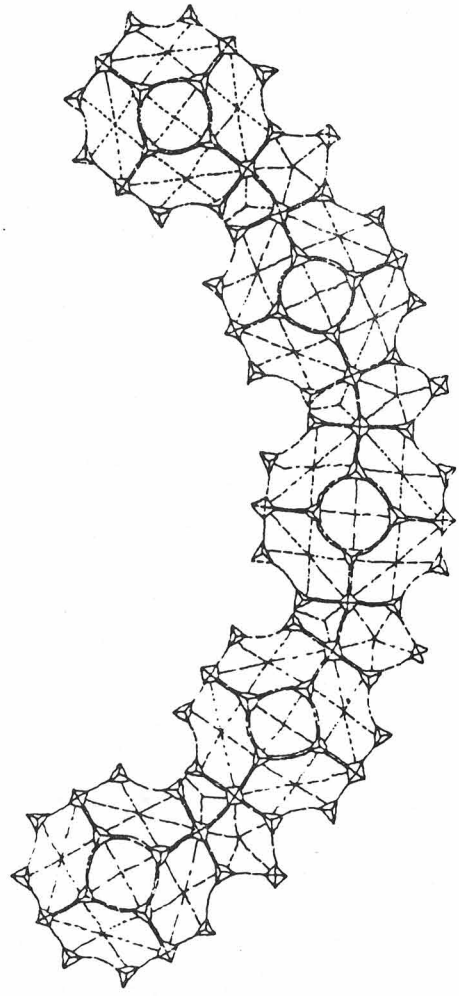
図表 2-4-9　某集合住宅計画案。伊藤邦明計画。1968。



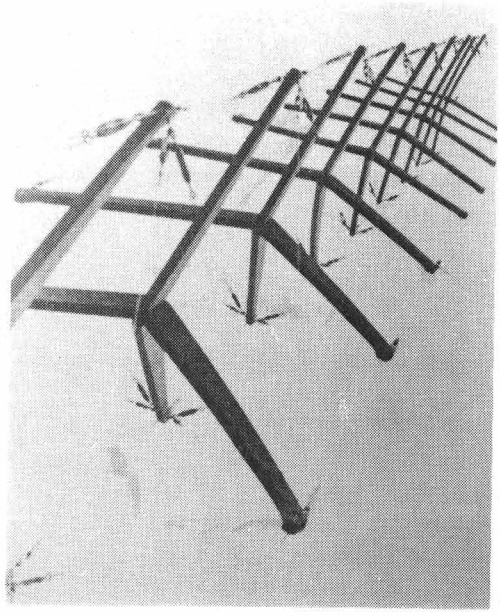
図表 2-4-10　Philadelphia City Tower
計画案。L.Kahn計画。1952～57。



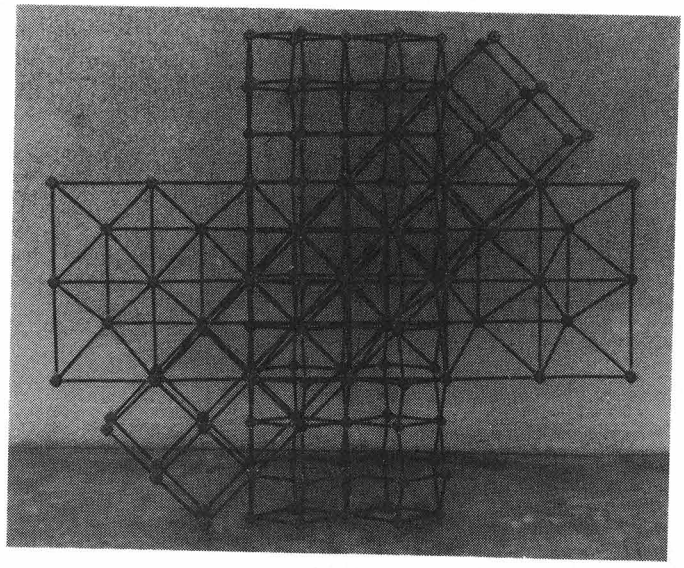
図表 2-4-11　Indian Carry Report計画案。
M.Safdie計画。計画年代不詳。
（筆者によるコピー）



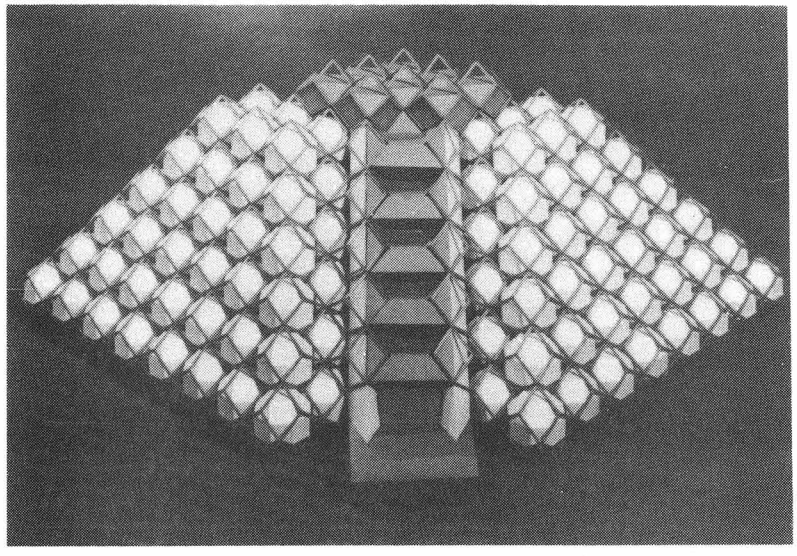
図表 2-4-12 小博覧会場計画案。
A.G.Tyng計画。計画年代不詳。
（筆者によるコピー）



図表 2-4-13 University of Oregon Tensegrity Mast 。
R.B.Fuller、1953。
The Dymaxion World of Buckminster Fuller(1973)より。



図表 2-4-14 Cubicトラスと Octetトラスの合体図形の中へ組み込まれた4次元等測軸



図表 2-4-15 菱形12面体トラスの中に組み込まれた菱形立方8面体群による空間構成案

立体トラスやスペース・フレームの形態決定にしばしば利用されている。

図表2-4-14は、そうした立体トラスとしての特徴を、従来からの構造計画上多用されているCubic トラスならびに、Octet トラス(Octetブロックの稜図形）との関係の中で生かそうとした筆者(1983)[9]の案である。Cubic トラスと Octetトラスの頂点を共有させる合体については、すでに伊藤（上掲書）によって試みられているが、図表2-4-14の場合は、その合体形態にさらに菱形１２面体トラス（菱形１２面体状胞による３次元空間充塡図形の稜図形）を、やはり頂点を共有させながら加えたもので、４次元等測軸と３次元直交軸（Cubic トラス）、ならびに Fuller のいう６次元座標軸（Octet トラス）が一体化させられている。

図表2-4-15は、筆者(1979)[10] による集合住宅計画案で、４次元等測軸としての菱形１２面体トラスの中に、正４面体、立方体、正８面体を初め、さまざまに規則的な多面体（図の場合は菱形立方８面体）が内接させられる性質を利用している。

図表2-4-16は、Chicago Bauhaus での 1950 年代のセムスターで実習課題として出された４次元等測軸の姿を見せる菱形１２面体による構成例[11] である。

そのほか、Critchlow による Pencil Polyhedron（図表2-4-17）[12]やBurtによる Infinite Polyhedron(図表2-4-18)[13]など、建築家による、菱形１２面体や Maraldiの角を用いた造形の提案、ならびにその建築への応用例は数多い。

２－４－６　４次元等測軸の表現

本章で定義する４次元等測軸は、R^3 内の、立体的に広がる４直線として成立している。

このR^3 内の立体は、つぎのような正射影で表現されるとき、自らの持つ定量的な性質を簡明に示すことができる。

まず、図表2-4-19に、稜ＲＳの平面図が基線ＧＬに垂直となるように配置された正１２面体の平面図（左下）と立面図（左上）ならびに$\overrightarrow{KO}$の方向への副射影（右）を示す。
平面図では

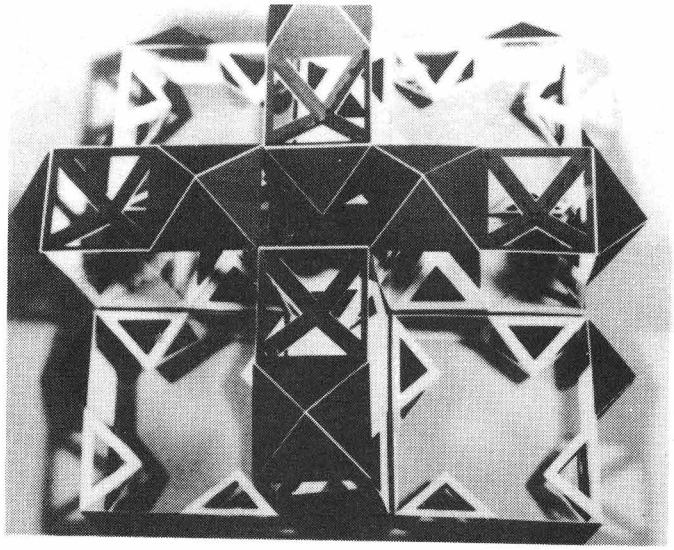
$$sr \perp GL,\quad ftm // GL,\quad os \cap ftm = m$$

であって、ｏを中心とする２円の半径は黄金比１：（１＋$\sqrt{5}$）／２＝１：１．６１８となる。ここで、ｏｓ＝ｖ、ｓｍ＝ｗとおくと、立面図では、ｉ’、ｅ’、ｆ’のＧＬからの高さはｖ、同じくｍ’、ｌ’、ｋ’などのそれはｖ＋ｗ、また、ｒ’、ｔ’、ｐ’などのそれは２ｖ＋ｗとなる。

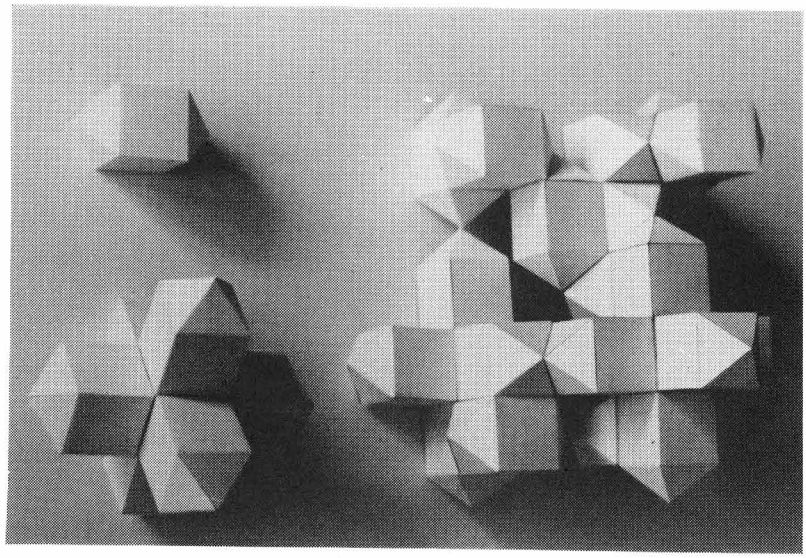
$\overrightarrow{KO}$の方向への副射影は、ｋ”、ｏ”などである。

このようにして作図される正１２面体の体心Ｏと、図のような４頂点Ｒ、Ｅ、Ｈ、Ｋを結べば、４次元等測軸Ｏ－ＸＹＺＵの平面図と立面図ならびに副射影となる。

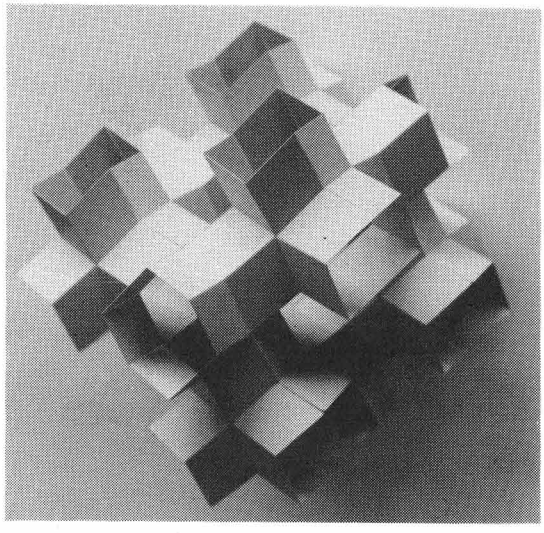
この場合、平面図においては、ｏｘとｏｚは互いに同じ単位距離を持ち、ｏｙとｏｕも



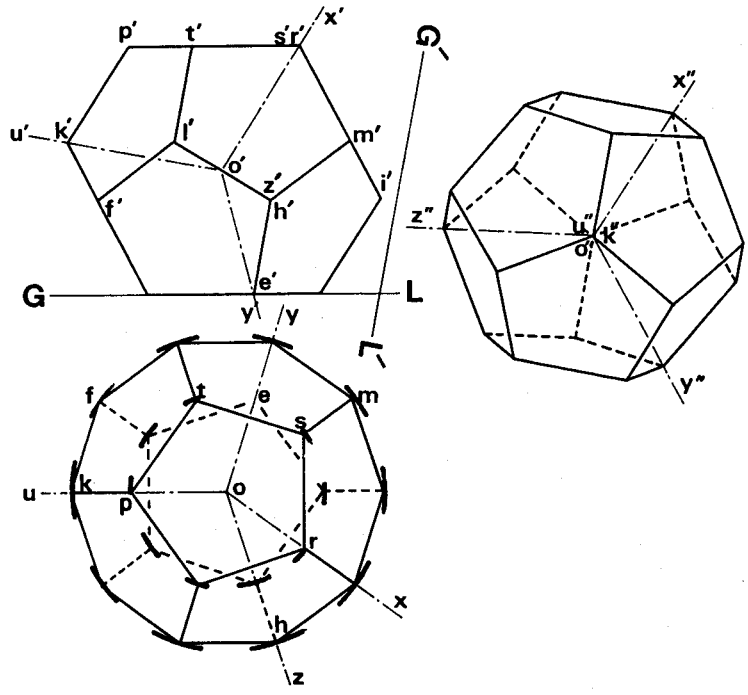
図表 2-4-16　Chicago Bauhausにおける実習課題例。
The Bauhaus (1978)より。



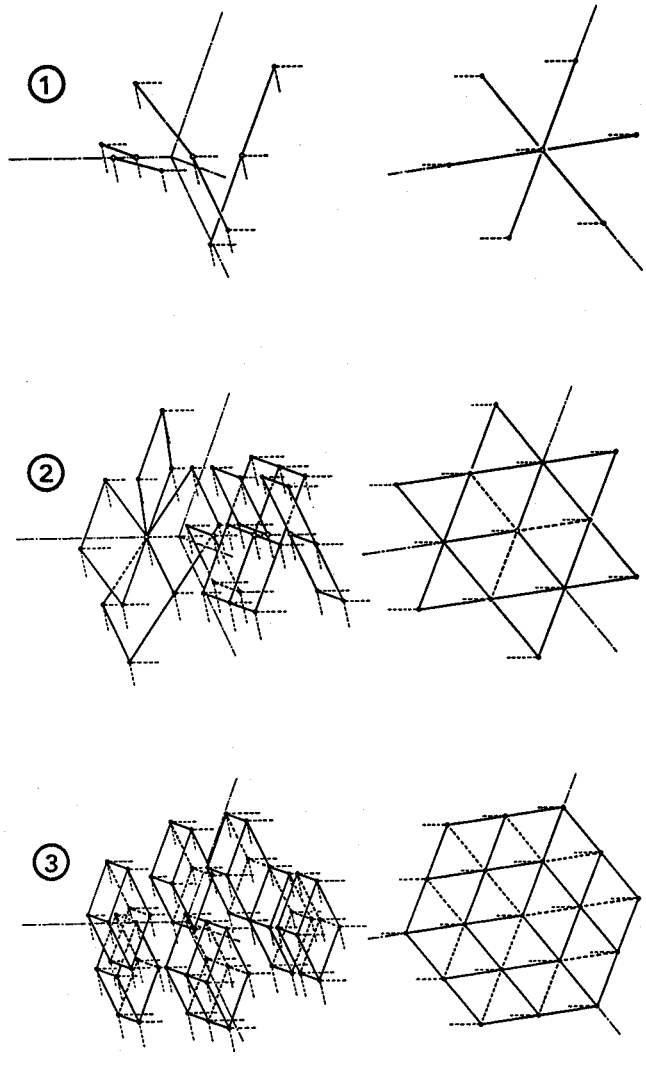
図表 2-4-17　K.Critchlow考案のPencil Polyhedron （左上）とそれによる３次元空間充填図形



図表 2-4-18　M.Burt 考案のInfinite Polyhedron の１例



図表 2-4-19 正12面体の正射影（左）と副射影（右）に基づく
4次元等測軸O－XYZUの表現



図表 2-4-20 4次元等測軸内での図形の連結。
①は線分の連結、②は正方形の連結、③は立方体状胞の連結。

また互いに同じ単位距離を持つ。両単位距離の比は黄金比であり、

$$\angle xoz = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ \ 、\angle xoy = \angle you = \angle zou = 36^\circ \times 3 = 108^\circ$$

となる。

立面図においては、o'u'上に4次元等測軸の実長（R^4 における実長の$\sqrt{3}/2$）が表現され、o'z'、o'y'、o'x'上では、その実長が o'r'／o'k'、o'h'／o'k'、o'e'／o'k'に縮小される。

また、副射影では、U軸が1点u"に射影されて原点o"と重なり、それに従って、X、Y、Zの3軸は 120° ずつをなす3直線x"、y"、u"となって原点o"に集まる。つまり、o"x"、o"y"、o"z"を等測軸とする図（等測図）が現われる。

以上の平面図、立面図、副射影のうち、誤解のおそれがない限り、以下では、立面図によって4次元等測軸を示す。

こうした原則にしたがって、4次元等測軸は、それを組込むことのできる図形について、それらの持つ4次元的内容を、つぎのように明示する。

たとえば、図表2-4-20において、①は、副射影としての等測図では直交3直線となっている立体が、4次元等測軸内では、互いに交わらない直線や折れ線や分割2線分となって散在するように表現できることを示す。直線の曲線への置き換えなども可能である。

②は、等測図では直交3平面となっている立体が、4次元等測軸内では、互いに分離し合ったり、折れ曲ったり、交わったりする面分となって散在するように表現できることを示す。平面の曲面への置き換えや、表裏の反転なども可能である。

③は、等測図では8個の立方体状胞の積層となっている立体が、4次元等測軸内では、胞同志が互いに相貫し合ったり分離し合ったり接し合ったりするように表現できることを示す。立方体状胞の他の外形の胞への置き換えなども可能である。

2－4－7　4次元等測軸の建築的特性

図表2-4-20のような線分群、面分群、胞群の変化は、抽象的に表現した場合の建築上の形象の変化を示している。

たとえば、①には、計画上の動線や交通網、構造上の応力の流れ、設備上の各種エネルギーの流れなどに関する現象が現われていて、Friedman(1975)[14] らの定義する Infra-structure の内的構造を示す。つまり、3次元空間内では等測図のように交差していても、実際的な使用の段階では4次元等測軸による表現のように交差を避けたり、直線ルートを変形させたりする必要性のある様相が現われている。

②には、建築上の各空間を限る面的構成に関する現象が現われている。Zevi(1978)[15]のいう“ The Syntax of four-dimensional decomposition ”を表現しているともいえる。Zeviは、このような造形が、 Mies や Wright らの、面が有機的に相貫し合うと表現され

る構成に生かされている、と指摘する。

③には、建築上の住居ユニットなどとしての各空間の配置に関する現象が現われている。過去の、点形部材（石やレンガ）、線形部材（鉄骨や木造）、面形部材（カーテンウォールや間仕切パネル）による建築生産の工業化を反省し、将来は、むしろ3次元的な広がりを持つ立体そのものを部材とした工業化が望ましいと考える Safdie (1974[16]) の、Habitat '67（図表2-4-21）などに、こうした現象が表現されていると考えられる。より一般的に見ると図表2-4-22では、3次元空間の中では、等測図に見られるように重複して混乱した何種類かの家具類が、4次元等測軸内では、U軸方向の時間差を利用して明確に区別されている。逆に図表2-4-23では、等測図において整理されて表現されている家具類（①）が、4次元等測軸内では、配置が変ったり（②）、開口部とともに散逸して外へ出たり（③）、壁面が4次元的にねじれたり（④）する。

図表2-4-24は、求心タイプの多胞体に関係する表現で、4次元等測軸によって示されているように3期にわたってａ，ｂ，ｃの順に増築された1個の内部空間の全体像が等測図で示されている。この全体像としての等測図が完工後の建築となる。

このように、4次元等測軸は、けっきょく、移動や変化の概念を付加した建築上の形象を、1個の多胞体として全体的に表現するのであり、その多胞体を媒介として、各形象の図形的操作が、本論文の他章で触れるように、可能となる。

2－4－8　本章の結論

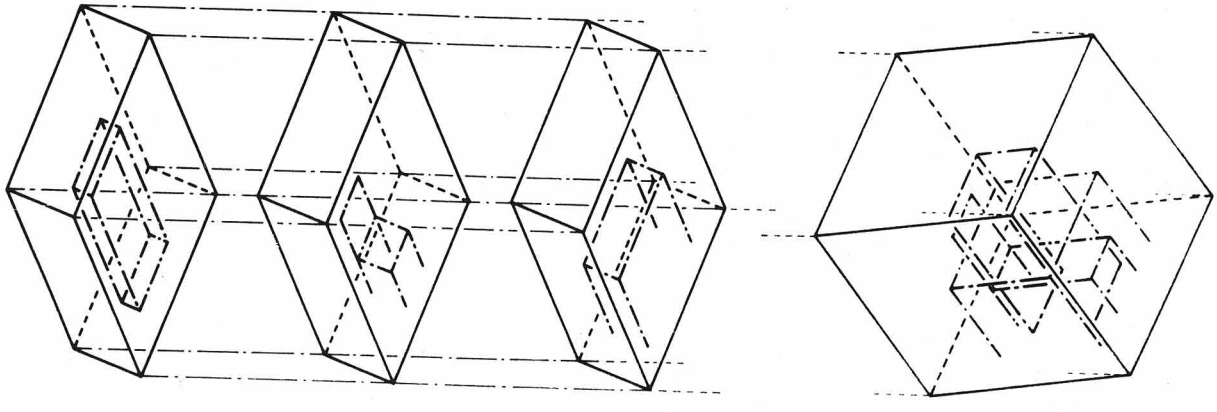
正4面体の体心と4頂点とを結ぶ4半直線としての、互いに等角（約 109° 28'）をなす4次元等測軸は、本章で見たように、自然界や人工界における多くの造形に深く浸透していて、4次元等測軸に従う場合、通常多用されている3次元直交軸に従うよりも、よりバラエティに富んだ造形を行なうことができることを示唆している。

つまり、建築上の形象を含めた現実の世界はこのような意味での図形的4次元性を備えている。

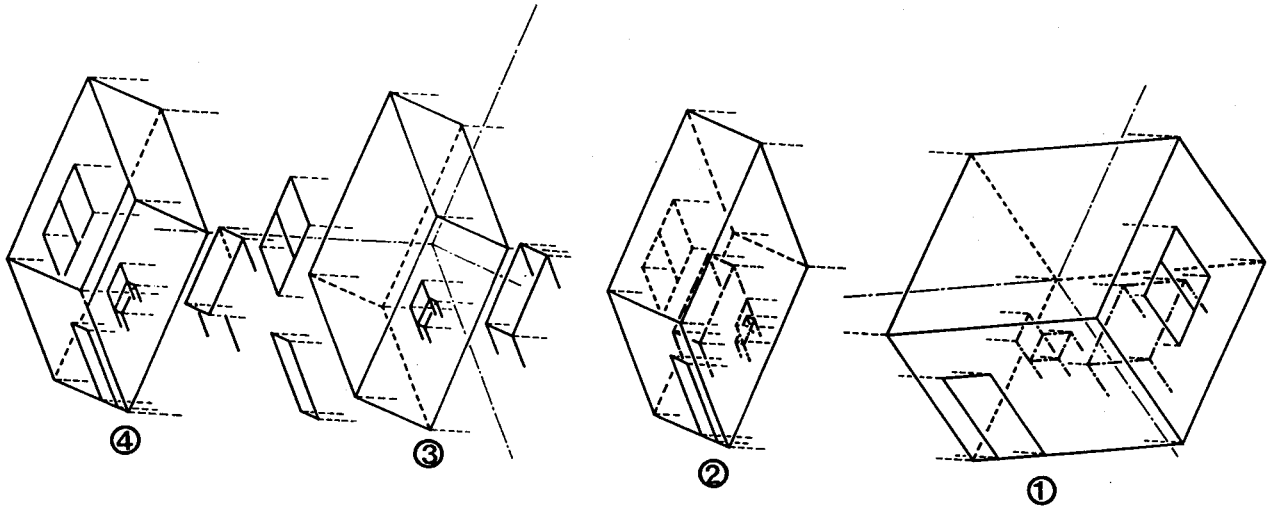
また、正12面体に組込まれて作図される、4次元等測軸の正射影は、副射影として現われる等測図を媒介にしながら、建築上の規則的な諸形象の4次元的要素、たとえば、時間的変化や、空間の移動など、の定量的な性質を保存した多胞体として、明確に表示し、建築の、より精緻な理解と新鮮な造形にとって有意義となる。



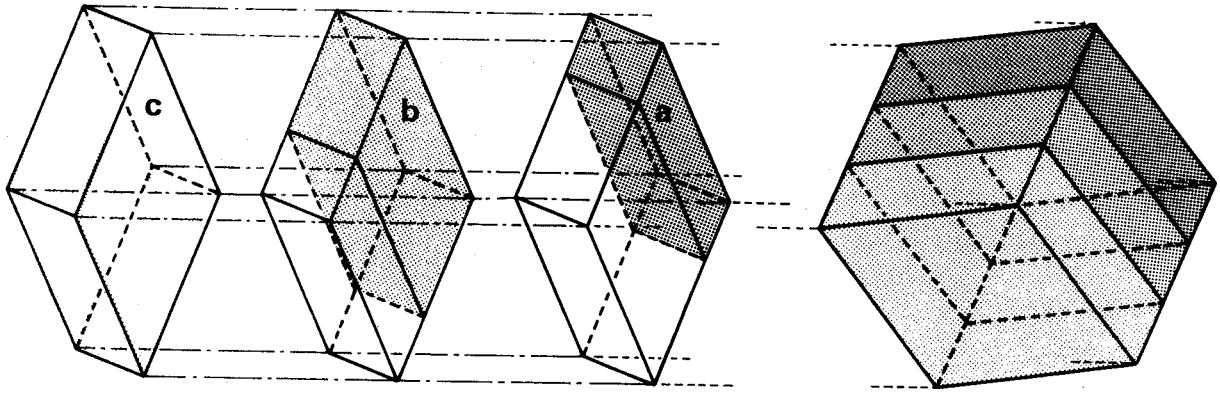
図表2-4-21　Habitat '67, Montreal 。 Moshe Safdie 設計。1967。



図表 2-4-22　3次元空間では混乱して表現された内部空間（右）の
4次元的に整理された表現（左）



図表 2-4-23 3次元空間（右）の4次元的変化（左）



図表 2-4-24 4次元的増築過程（左）と完工後の3次元的建築（右）

本章での引用文献

1) G.B.Gurevitch （山内一次、井関清志訳）、“射影幾何学（下巻）”、東京図書、1962、PP.335～336

2) 宮崎興二、“n次元空間における Pohlke-Schwarz の定理について”、図学研究、第17号(1975)、 5～11

3) Walter Wunderlich, “Zur Normalen Axonometrie des Vierdimensionalen Raumes”, Monatshefte fur Mathematik、 80(1975), 231～240

4) D.A.W. Thompson, On Growth and Form (Cambridge U.P.,1968) , PP.498～499

5) 宮崎興二、“かたちと空間”、（朝倉書店、1983）、 PP.84～86

6) Cornelius Thywissen, “Constructions of Non-Living Nature”, IL, 27,1980, 129～131

7) Kuniaki Itoh, “New Developments in Three-dimensional Truss ”, Proc.1971 IASS Pacific Symposium (1972), 997～1010

8) Anne Griswold Tyng, “Proposed Fair Building”, Zodiac, XIX, 173～174

9) 宮崎（1983）、op.cit., P.79, p.86

10) 宮崎興二、“多面体と建築”（彰国社、1979）、PP.189～190

11) Hans M.Wingler, The Bauhaus (The MIT Press, 1978) , P.603

12) Keith Critchlow, Order in Space (Thames and Hudson, 1969), PP.46～47

13) A.Wachman, M.Burt, M.Kleinmann, Infinite Polyhedra (I.I.T., 1974)

14) Yona Friedman, Toward a Scientific Architecture (The MIT Press,1975), PP.64～68

15) Bruno Zevi, The Modern Language of Architecture(Univ. of Washington, 1978), PP.31～38

16) Moshe Safdie, For Everyone a Garden (The MIT Press, 1974), PP.244～245

２－５　多胞体に関する定性的公式の建築への適用

２－５－１　本章の目的
２－５－２　胞係数
２－５－３　胞係数の一般化
２－５－４　Schläfliの多胞体公式
２－５－５　Schläfliの多胞体公式の建築への適用
２－５－６　有孔多胞体公式
２－５－７　有孔多胞体公式の一般化
２－５－８　有孔多胞体公式の建築への適用
２－５－９　本章の結論

２－５－１　本章の目的

多胞体は、構成要素として、一般に有限個の、頂点、稜、側面、側胞を持つ。

本章では、それらの個数のあいだに定性的に成立するSchläfliの多胞体公式について、それと建築上の形象との関わりを概観したあと、本章で新たに定義する胞係数に従って一般化して、有孔多胞体公式を導き、その建築上の形象への導入を試みて、建築における定性的な意味での４次元性を明確にすることを目的とする。

２－５－２　胞係数

本章では、多胞体の構成要素である、頂点、稜、側面、側胞のすべてをｎ次元単純体に分割あるいは置換することを前提とする。

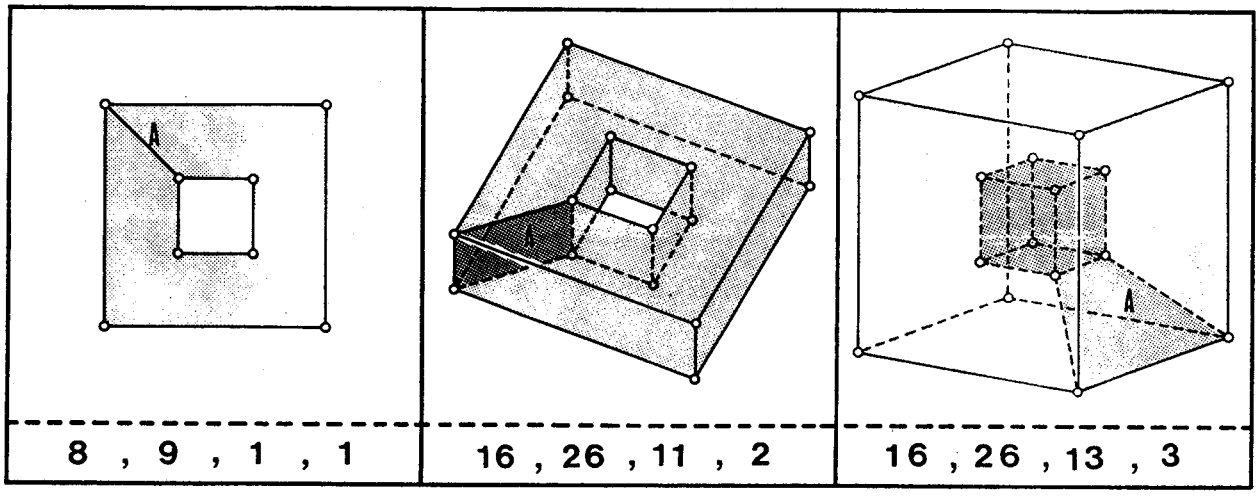
ここでのｎ次元単純体とは、ｎ次元の広がりを持つｎ次元球体S_n（S_1は線分、S_2は円盤、S_3は球体）と同じ定性的性質を持つ図形をさす。

図表2-5-1 に、単純体への分割の基礎的な例をあげる。それぞれは、図表中に示したような補助図形Ａを加えて分割をする。各欄に示した数値は、単純体に分割した場合の、頂点、稜、側面、側胞（それぞれが置かれている場としての空間を含める）の個数を左から右へ示す。

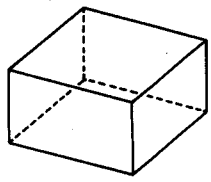
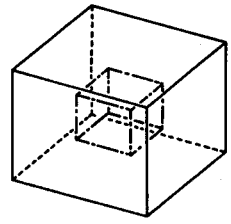
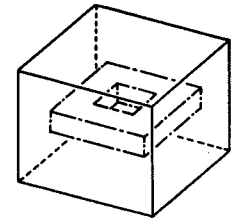
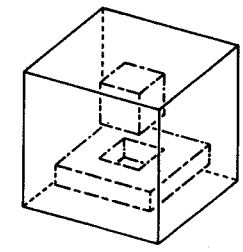
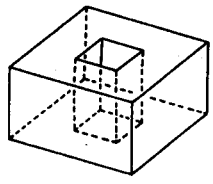
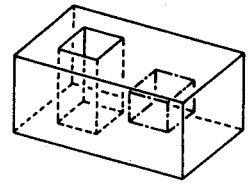
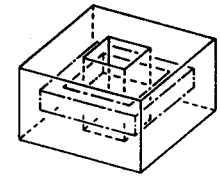
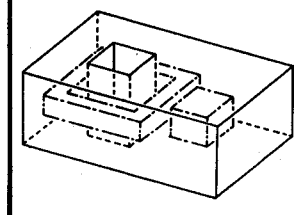
以上の前提のもとで、本章では、３次元空間における閉多面体についての示性数Ｇ（直観的には与えられた多面体の持つ貫通孔の数）にかわる概念を胞について定義し、それを胞係数とよぶ。

胞係数には環状数G_1、中空数G_2、中空環状数G_3がある。

環状数とは、４次元空間Ｓに胞Ｃが置かれているとした場合、ＳがＣを貫通している孔



図表2-5-1　基礎的な単純体分割例。Aは胞係数算定のために必要な補助図形。各欄下段の数字は左から、頂点、稜、側面、側胞（外部空間を含める）の個数。

	X	−A	−B	−A−B
A				
	0 , 0 , 0	0 , 1 , 0	0 , 1 , 1	0 , 2 , 1
B				
	1 , 0 , 0	1 , 1 , 0	1 , 1 , 1	1 , 2 , 1

図表 2-5-2　基本的な胞に関する胞係数。
Aは外形の示性数が0の胞、Bは外形の示性数が1の胞。Xは基準となる胞、−AはXからAを除いた胞。以下同様。各欄下段の数字は左から G_1 、 G_2 、 G_3 。

数をさす。

中空数とは、胞Cが自らの内部に独立させて持っている有限な4次元空間（中空部分）の個数をさす。

中空環状数とは、上記の中空部分が持っている環状数をさす。

たとえば、図表2-5-2 に示す基本的な胞については、各欄下段に左からG_1、G_2、G_3 の順で示す通りである。図表中、A欄のXは単純胞、B欄のXは環状胞、A欄のAは単純胞の内部に単純体としての中空部分がある中空胞、を示す。以下同様にB欄のAは環状胞の内部に単純体としての中空部分があるもの、A欄のBは単純胞の内部に環状の中空部分があるもの、B欄のBは環状胞の内部に環状の中空部分があるもの、A欄のA－Bは単純胞の内部に単純図形ならびに環状の中空部分があるもの、B欄のA－Bは環状胞の内部に単純体ならびに環状の中空部分があるもの、をそれぞれ示す。これらを基本図形として、たとえば、単純胞の内部に複数個の環状の中空部分があるものなどが任意に考えられる。

なお、図表2-5-2 の各図はすべて3次元空間への射影によって示されているのであって、中空部分に浮ぶ図形の位置などは、4次元空間では一定しない。

2－5－3　胞係数の一般化

胞係数に相当する係数は、0～2次元の広がりを持つ図形にも一般的に定義することができる。

つまり、3次元空間Sにおかれたn次元の広がりを持つ図形F（$n \leqq 2$）において、SがFを貫通している孔数を環状数G_1、Fが自らの内部に独立させて持っている有限な中空部分の個数を中空数G_2、その中空部分の形状が持っている環状数を中空環状数G_3とする。

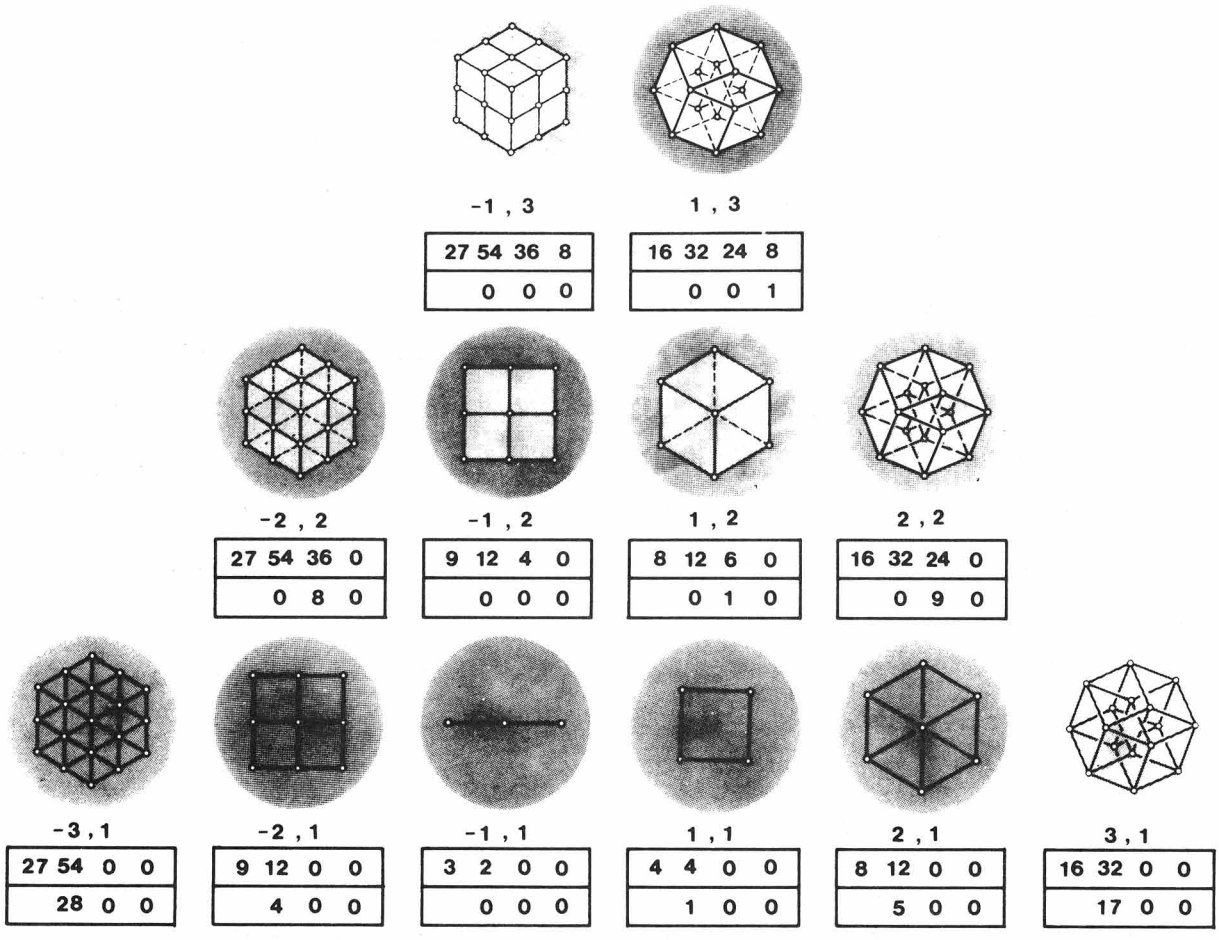
たとえば、正4辺形は$G_1 = 1$、$G_2 = G_3 = 0$、立方体は$G_1 = G_3 = 0$、$G_2 = 1$、となる。

図表2-5-3 に、基本的な図形に関する胞係数その他をまとめる。

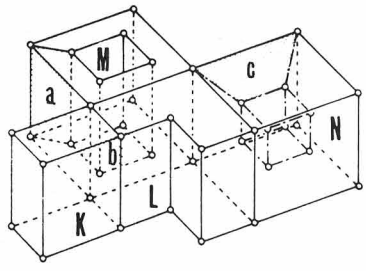
図表中、各欄外の数字は、各図形に与えられた座標記号（x、y）を示す。

$y = n$の場合、n次元の広がりを持つ図形となっていて、（1、1）は正4辺形、（1、2）は立方体、（1、3）は4－立方体、（2、1）は（1、2）の稜図形（稜のみからなる図形）、（2、2）は（1、3）の側面図形（側面のみからなる図形）、（3、1）は（2、2）の稜図形を示す。

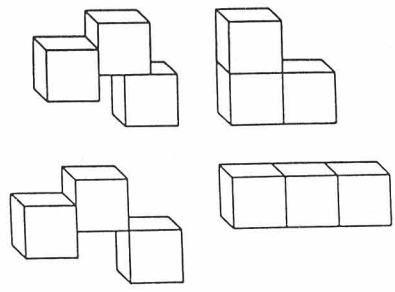
$x < 0$のそれぞれには$x > 0$のそれぞれを開いた形状があって、とくに、（－1、1）は開多辺形、（－1、2）は平面充塡図形、（－1、3）は3次元空間充塡図形、（－2 1）は（－1、2）の稜図形としての平面格子、（－2、2）は（－1、3）の側面図



図表 2-5-3　基本的なｎ次元の広がりを持つ図形に関する胞係数と境界図形数。
各欄内上段の数字は、左から、頂点、稜、側面、
側胞の個数。下段の数字は左から　G_1 、G_2 、G_3 。
欄外の数字は各図に与えられた座標。



図表 2-5-4　Schläfliの公式を応用するための形象



図表 2-5-5　開単純多胞体についての公式
を応用するための形象

形、（－３、１）は（－２、２）の稜図形としての立体格子、をそれぞれ示す。

各欄内の数字のうち、上段は、左から頂点、稜、側面、側胞の個数を、下段は、左から G_1 、G_2 、G_3 の個数を、それぞれ示す。

２－５－４　Schläfliの多胞体公式

２次元の広がりを持つ図形としての閉単純多面体の頂点、稜、側面の個数Ｖ、Ｅ、Ｆのあいだには、位相幾何学上よく知られた Eulerの多面体公式

$$V - E + F = 2 \qquad \text{(2-5-1)}$$

が成立する。

この式でＦを１だけ減ずれば、開単純多面体についての公式

$$V - E + F = 1$$

が導かれる。

それに対して、閉単純多胞体の頂点、稜、側面、側胞の個数Ｖ、Ｅ、Ｆ、Ｃのあいだには Schläfli の多胞体公式

$$V - E + F - C = 0 \qquad \text{(2-5-2)}$$

が成立する。証明はたとえば中村（1986）[1] による。

この式でＣを１だけ減ずれば、開単純多胞体についての公式

$$V - E + F - C = 1 \qquad \text{(2-5-3)}$$

が導かれる。

Euler の多面体公式からはさまざまな多面体に関する幾何学的性質が導かれ（たとえば田中 1964[2]）、それに基づいて建築上の面の組合わせとしての形態がさまざまに決定されるのに対し、Schläfliの多胞体公式から導かれる多胞体の幾何学的性質は、公式の恒等性のため、一松（1983）[3] が指摘するように、ほとんどない。

しかし、Schläfliの公式には、３次元空間の部分としての胞の数が含まれていて、鉱物の結晶構造といった現実的な自然界と関係し（たとえば Thompson 1968[4]）、ひいては本章で検討するように３次元の広がりを持つ図形としての建築上の形象と密接な関係を持つ。

２－５－５　Schläfliの多胞体公式の建築への適用

ここでは外部空間をも含めて単純体分割した建築上の形象を閉単純多胞体にアナロジーさせ、筆者（1979）[5]や Lalvani(1984)[6]に従って、それへの、Schläfliの多胞体公式の適用を試みる。

たとえば、いま、図表2-5-4 のＫのような１個の直方体状胞としての内部空間あるいは

構成部材が外部空間の中に置かれているとしたとき、２個の胞からなる閉多胞体（３次元空間における球面上の２面体に相当する）が現われて、

Ｖ＝８、Ｅ＝１２、Ｆ＝６、Ｃ＝２

となり公式は成立する。

そのＫに、Ｌのような凹胞としての空間を連結すれば、

Ｖ＝８＋８＝１６、Ｅ＝１２＋１４＝２６、Ｆ＝６＋７＝１３、Ｃ＝２＋１＝３

となってやはり公式は成立する。

さらに、Ｍのような環状胞としての空間を連結するときは、外部空間も含めてすべてを単純体に分割しなければならないため、Ｍの内部の補助平面ａと、貫通孔の底面の補助平面ｂを加えれば、

Ｖ＝１６＋１２＝２８、Ｅ＝２６＋２２＝４８、Ｆ＝１３＋１１＝２４

Ｃ＝３＋１＝４

となる。

その上、Ｎのような中空胞としての空間を加えるときは、Ｎの内部に補助平面ｃを考えると、

Ｖ＝２８＋１２＝４０、Ｅ＝４８＋２２＝７０、Ｆ＝２４＋１２＝３６

Ｃ＝４＋２＝６

となって、いずれにしても公式は成立する。

けっきょく、内部空間あるいは構成部材としての胞がどのように加わっても、外部空間としての胞を含めてすべてが単純体に分割されている限り、Schläfliの多胞体公式は成立している。

それに対して、外部空間の中で互いに連結せず分離させられて置かれた、ｎ個の単純体分割された内部空間や構成部材が与えられた場合は、外部空間を除外している式(2-5-3)から導かれる式

Ｖ－Ｅ＋Ｆ－Ｃ＝ｎ　　――― (2-5-4)

が成立する。

たとえば、図表2-5-5 のような立方体状胞の配列（Friedmanの図表2-1-10による）が与えられたとすると、Ｖ＝７８、Ｅ＝１３３、Ｆ＝７１、Ｃ＝１２で式は成立する。

２－５－６　有孔多胞体公式

Schläfliの多胞体公式は閉単純多胞体に固有のものであり、この公式の適用に当っては、前述のように建築上本質的でない外部空間をたえず加え、その外部空間としての胞まで含めてすべてを単純体分割するという煩雑な操作が必要となっている。いいかえれば、有孔胞の加わることの多い建築上の形象に簡便に適用させることは困難である。

したがって、以下ではその欠点を補うため、環状数G_1、中空数G_2、中空環状数G_3を含み、かつ外部空間としての胞を除外した、原則として有孔胞の連結体としての開多胞体に関する公式（有孔多胞体公式）、

$$V-E+F-C=1-G_1+G_2-G_3 \quad \text{——} \quad (2\text{-}5\text{-}5)$$

を導く。

この公式は、図形的には、つぎのように略証される。

まず、$G_1=G_2=G_3=0$（図表2-5-6 の①上段）の場合、つまり開単純多胞体が与えられた場合、は式(2-5-3) と一致して、1個の立方体状胞Aで考えれば、

$$V=8、E=12、F=6、C=1$$

となって式は成立する。

つぎに、$G_1=1$、$G_2=G_3=0$（図表2-5-6 の①下段）の場合は、同上の胞Aに、他の単純胞Bが、2枚の側面aとbを共有し合いながら連結すると考えると

$$V=8+0=8、E=12+4=16、F=6+4=10、C=1+1=2$$

となって、式(2-5-5) は成立する。

ここで、もし、1枚の側面aを取り去れば、

$$V=8、E=16、F=10-1=9、C=2-1=1$$

となって式は成立するが、側面bをも取り去った場合は単純体分割されず、

$$V=8、E=16、F=9-2=7、C=1-1=0$$

となって式は成立しない。

同様の操作を繰り返せば、けっきょく、$G_1>0$、$G_2=G_3=0$の場合については、単純体分割されたときに限って、式(2-5-5) が成立する。

$G_1=G_3=0$、$G_2=1$（図表2-5-6 の②上段）の場合は、1個の単純胞A（$V=16$、$E=28$、$F=14$、$C=1$）に、他の単純胞Bが、4枚の側面a、b、c、dを共有し合いながら連結すると考えると、

$$V=16+0=16、E=28+0=28、F=14+2=16$$
$$C=1+1=2$$

となって、式(2-5-5) は成立する。

ここで、もし、3枚の側面a、b、cを取り去れば、

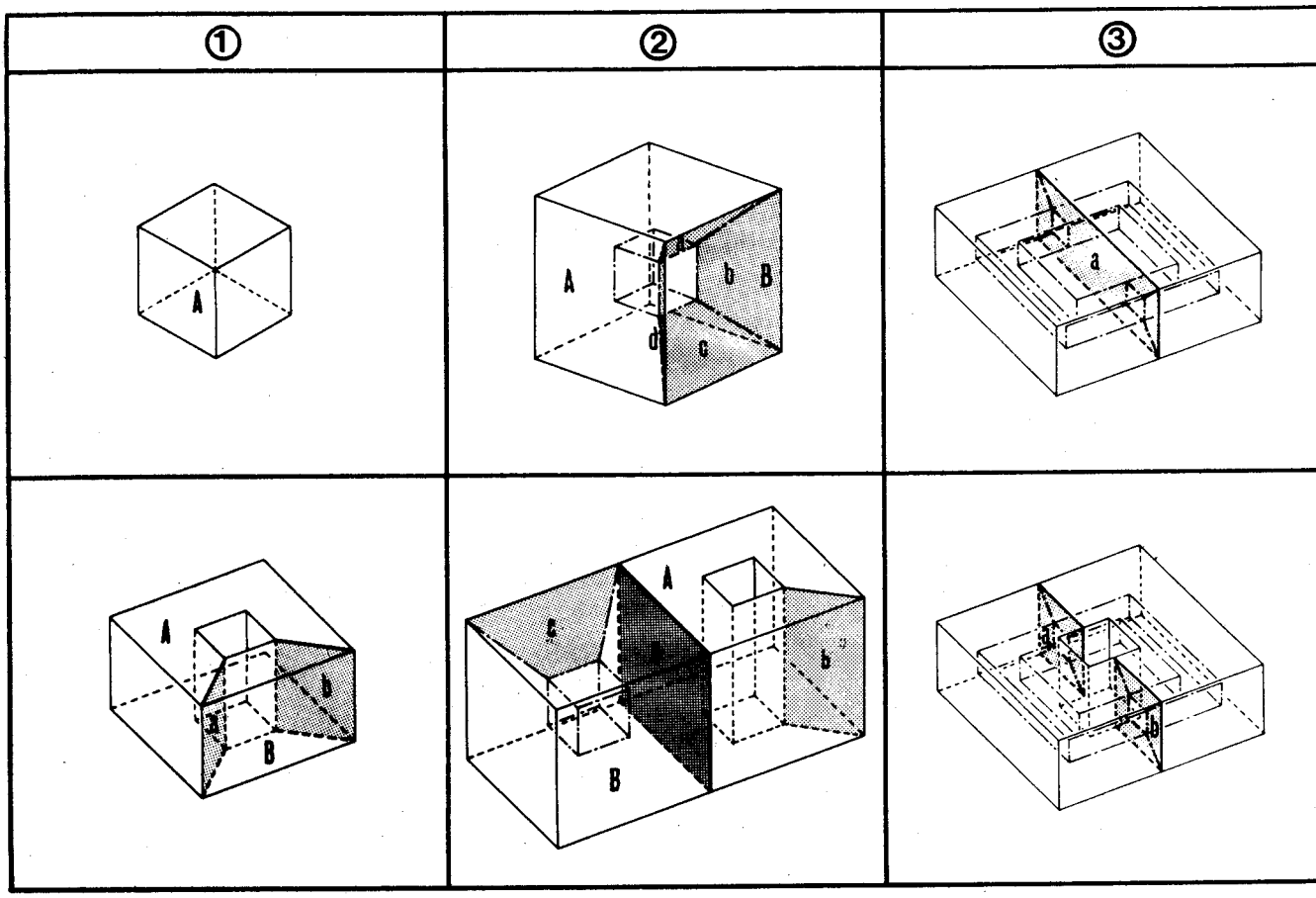
$$V=16+0=16、E=28-2=26、F=16-3=13$$
$$C=2-1=1$$

となって式は成立するが、側面dをも取り去った場合は、単純体分割されず、

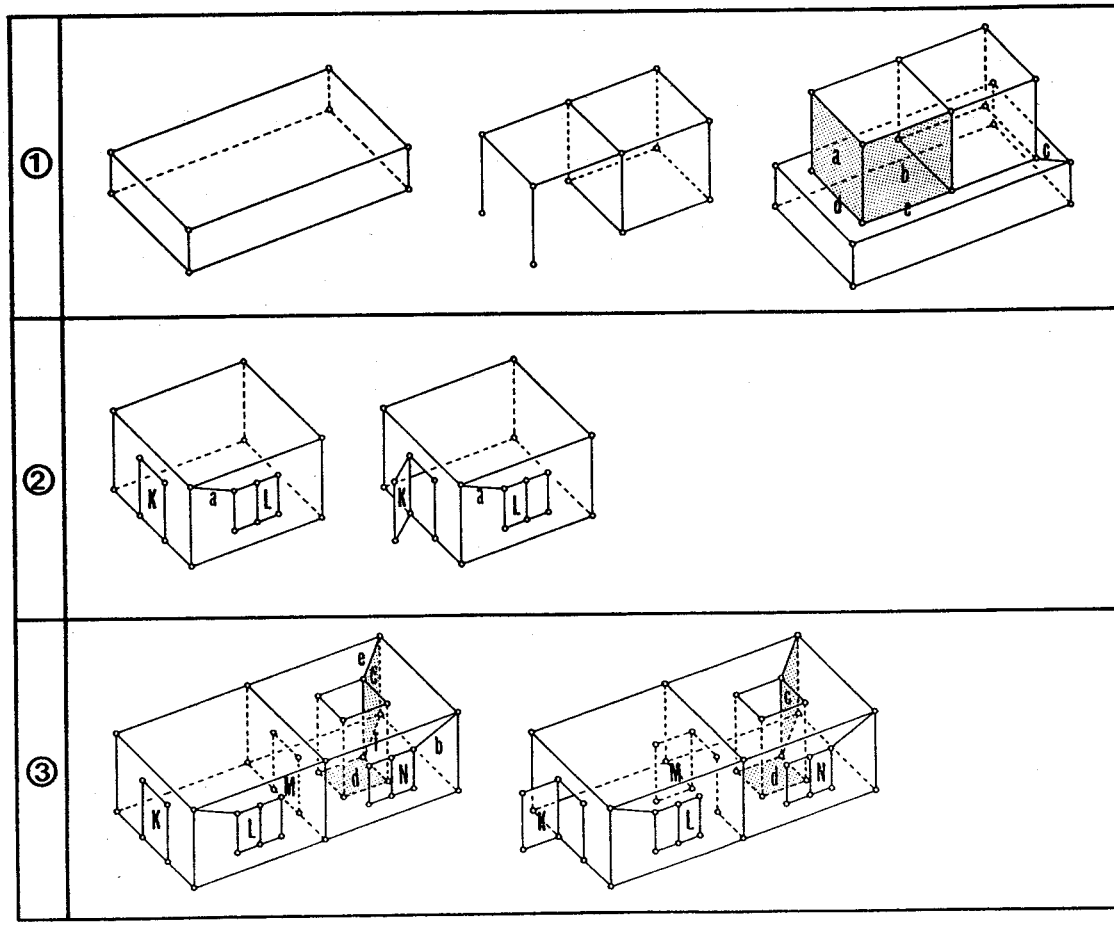
$$V=16+0=16、E=26-2=24、F=13-1=12$$
$$C=1-0=1$$

となって式は成立しない。

同様の操作を繰り返せば、けっきょく、$G_1=0$、$G_2>0$、$G_3=0$の場合について



図表 2-5-6　有孔多胞体公式の略証のための形象。①は図表2-5-2 のX列、
②は同図表の－A列、③は同図表の－B列にそれぞれ関係する。



図表 2-5-7　有孔多胞体公式を応用するための建築的形象。①は基本的な形象、
②は開口部のある場合、③は増築された場合。

は、単純体分割されたときに限って、式(2-5-5) が成立する。

$G_1 = G_2 = 1$、$G_3 = 0$（図表2-5-6 の②下段）の場合は、補助平面ｂによって単純体分割された環状胞Ａ（$G_1 = 1$、$G_2 = G_3 = 0$）と、補助平面ｃによって単純体分割された中空胞Ｂ（$G_1 = G_3 = 0$、$G_2 = 1$）とを、側面ａで連結させたのちａを取り去ると考えると、同表①下段と②上段を加えたものに対して

$$V = E = 4、\ F = C = 1$$

だけ減少し、他は変らない。したがって式(2-5-5) は成立する。

同様の操作を繰り返せば、けっきょく、$G_1 > 0$、$G_2 > 0$、$G_3 = 0$の場合については、単純体分割されたときに限って、式(2-5-5) が成立する。

$G_1 = 0$、$G_2 = G_3 = 1$（図表2-5-6 の③上段）の場合は、単純体分割された環状胞（$G_1 = 1$、$G_2 = G_3 = 0$）２個を、$G_1 = 0$となるように１枚の側面ａ（単純体分割されている）で連結させると、①下段を２個加えたものに対して、

$$V = 12、\ E = 16、\ F = 3、\ G_1 = 1$$

だけ減少し、

$$G_2 = G_3 = 1$$

だけ増加して、他は変らない。したがって式(2-5-5) は成立する。ただし、ａによって単純体分割しておく必要がある。

同様の操作を繰り返せば、けっきょく、$G_1 = 0$、$G_2 > 0$、$G_3 > 0$の場合については、単純体分割されたときに限って、式(2-5-5) が成立する。

最後に、$G_1 = G_2 = G_3 = 1$（図表2-5-6 の③下段）の場合は、単純体分割された環状胞（$G_1 = 1$、$G_2 = G_3 = 0$）２個を、$G_1 > 0$となるように２枚の側面ａとｂ（いずれも単純体分割されている）で連結させると、①下段を２個加えたものに対して、

$$V = 16、\ E = 24、\ F = 8$$

だけ減少し、

$$G_2 = G_3 = 1$$

だけ増加して、他は変らない。したがって式(2-5-5) は成立する。ただし、ａあるいはｂによって単純体分割しておく必要がある。

同様の操作を繰り返せば、けっきょく、$G_1 > 0$、$G_2 > 0$、$G_3 > 0$の場合については、単純体分割されたときに限って、式(2-5-5) が成立する。

以上により、任意のG_1、G_2、G_3を持つ有孔胞の連結体について、すべて単純体分割された場合に限り、たえず式(2-5-5) が成立する。

なお、G_3のみが０となることはない。

２－５－７　有孔多胞体公式の一般化

本章で導いた有孔多胞体公式は、多胞体を対象とするが、建築上の諸形象に細部にわたって適用するには煩雑に過ぎる場合がある。そのため誤解のおそれがない範囲で、ここでは、点、線分、面分、胞による多胞体の抽象表現を行なう。つまり、１個の胞を１点で、直線的に連結する胞群を線分で、平面的に連結する胞群を面分で、立体的に集積する胞群を胞で、それぞれ抽象化する。

抽象化された建築上の形象には、2-5-3 で触れた一般化された胞係数が導入され、それに従って、Schläfliの多胞体公式や有孔多胞体公式は、そのままの形で成立する。

たとえば、図表2-5-3 の欄内の数値（上段左からＶ、Ｅ、Ｆ、Ｃ、下段左からG_1、G_2 G_3）は、すべて、この一般化された有孔多胞体公式を満足している。

２－５－８　有孔多胞体公式の建築への適用

単純体分割された閉単純多胞体のみに適用される Schläfli の多胞体公式(2-5-2) や、同じく開単純多胞体のみに適用される公式(2-5-3) に対して、有孔多胞体公式(2-5-5) は、単純体分割の必要性はあるものの、任意の有孔多胞体に適用されるため、複雑な有孔胞の連結体として把えられることの多い建築上の形象と密接に関係する。

たとえば、図表2-5-4 については、有孔多胞体公式との関係上、つぎのように解釈しなおすことができる。

つまり、Ｋは凸胞、Ｌは凹みのある単純胞、Ｍは環状胞、Ｎは中空胞、であって、それらすべてを単純体分割するための補助平面ａとｃを入れると、全体として、

$$V = 40,\ E = 70,\ F = 35,\ C = 4,\ G_1 = G_2 = 1,\ G_3 = 0$$

となって式(2-5-5) は成立する。この場合、外部空間としての胞と、Ｎの内部にある空間としての胞は加えられていない。

以上に対して、一般化された有孔多胞体公式は、点、線分、面分、胞で抽象表現された建築上の形象に、つぎのような形で応用することができる。

まず、Schläfliの公式を、図表2-5-7 のように抽象表現された形象に適用してみる。

いま、①左端のように、直方体状胞で表現された地盤（地球）があるとする。

この場合、胞は、地盤自身とそれを取囲む外部空間の２個であって、

$$V = 8,\ E = 12,\ F = 6,\ C = 2$$

となり公式は成立する。

それとは別に、線分と面分で抽象表現された①中央のような建築があるとすれば、胞は、外部空間と立方体の内部の内部空間との２個であって、

Ｖ＝１２、Ｅ＝１７、Ｆ＝７、Ｃ＝２

となり公式は成立する。

この後者のような建築が前者のような地盤の上に、①右端のように置かれたとすれば、すべてを単純体分割するため、補助平面ａ、ｂと補助線ｃを考える必要があり、全体は、左端と中央を加えたものよりも、Ｅ＝３、Ｆ＝２だけ増加、Ｃ＝１だけ減少することになって公式は成立する。

ここで、①右端に加えられいる閉じた立方体部分のみを取り出し、建築上の装置としての②左のような開口部分（ドアＫ、窓Ｌ）を考える。この場合、外壁を単純体分割するための補助線ａが必要である。

いま、開口部分が建具によって閉じられているとすれば、

Ｖ＝１８、Ｅ＝２５、Ｆ＝９、Ｃ＝２

となって公式は成立する。

もし、ドアのみが②右のように開放されれば、Ｖ＝２、Ｅ＝３だけ増加、Ｃ＝１だけ減少して、やはり式は成立する。

その状態で、さらに窓も引違い式に半開されるとする。この場合、外的空間は単純体にならないから、開放された窓に補助平面を加えると、左とまったく同じ状態になり公式は成立する。

続いて、この建築に、③左のような、窓Ｎを持つ環状の空間を増築し、内部の間仕切壁にドアＭを取り付けたとする。この場合は、外壁に補助線ｂを、また増築した空間の内部に補助平面ｃと貫通孔の底面の補助平面ｄを加えなければならない。

そうすれば、開口部がすべて閉鎖されているときは、②左よりも、Ｖ＝２２、Ｅ＝３５Ｆ＝１４、Ｃ＝１だけ増加することになって公式は成立する。

また、③右のように、二つあるドアＫとＭのみが開放される場合、ドアＭの部分に杳ずりがないとすれば、③左よりも、Ｖ＝４、Ｅ＝５だけ増加して、Ｆ＝１、Ｃ＝２だけ減少し、また杳ずりがあるとすれば、さらに、Ｅ＝１、Ｆ＝１だけ増加して、いずれにしても式は成立する。

以下、同様の操作を繰り返せば、けっきょく、Schläfliの多胞体公式は、点、線、面、胞によって抽象表現された建築上の形象に、細部にわたって適用されていく。

前述した Lalvaniの試みも、こうした抽象表現を前提としたものである。つまり、建築上の形象を、点形Ｖ、線形Ｅ、面形Ｆ、胞形Ｃの各抽象形の１６通りの組み合わせに従って分類（たとえば、立体トラスはＶＥ建築、組積造はＣ建築、折版構造はＦ建築、ある種の膜構造はＶＥＦ建築など）したあと、それぞれに Schläfli の公式を適用させようとする。

以上に対して、有孔多胞体公式もまた、Schläfliの公式より以上に簡潔な状態で、図表 2-5-7 のそれぞれに適用される。

まず、①左端についていえば、

$V=8$、$E=12$、$F=6$、$C=1$

$G_1=G_2=G_3=0$

であり、中央については、

$V=12$、$E=17$、$F=7$、$C=0$

$G_1=0$、$G_2=1$、$G_3=0$

であって、いずれも式は成立する。

右端の場合も、補助線c、d、e（補助面a、bは不要）だけを追加すれば、

$V=20$、$E=32$、$F=13$、$C=1$

$G_1=2$、$G_2=1$、$G_3=1$

となって式は成立する。

②図のように開口部が閉じられているときは、

$V=18$、$E=25$、$F=9$、$C=0$

$G_1=0$、$G_2=1$、$G_3=0$

となり、右のように、開口部が、K、Mとも開いているときは、

$V=20$、$E=28$、$F=8$、$C=0$

$G_1=0$、$G_2=G_3=0$

となって、いずれも式は成立する。

③左では、補助平面cとdは、2辺e、fだけを残してすべて省略することができて、

$V=40$、$E=60$、$F=21$、$C=0$

$G_1=1$、$G_2=2$、$G_3=1$

となり、式は成立する。

また、右では、上述と同じ状態でcとdは省略することができて、ドアMに香ずりがないとすれば、

$V=44$、$E=65$、$F=20$、$C=0$

$G_1=1$、$G_2=G_3=0$

となり、ドアMに香ずりがあるとすれば、$E=1$、$F=1$だけ増加することになって、いずれも式は成立する。

以下、同様の操作を繰り返せば、けっきょく、有孔多胞体公式もまた、点、線分、面分、胞によって抽象表現された建築上の形象に、細部にわたって適用されていく。

2－5－9　本章の結論

多胞体は、頂点、稜、側面、側胞を構成要素としていて、それらの個数のあいだには、Schläfliの多胞体公式を初め、いくつかの定性的な公式が成立している。

その諸式は、胞の連結形としての具体的な建築上の形象に直接適用されるのみならず、点、線分、面分、胞で抽象的に表現された建築上の形象にも、細部にわたって適用されていく。

とくに、本章で導いた有孔多胞体公式は、単純多胞体のみならずより一般的な有孔多胞体（開多胞体）に普遍的に適用されるものであって、有孔胞を初め複雑な形状の胞が交錯し合って構成されている建築上の形象に密接に関係する。場合によっては、間仕切壁や開口部の有無、その開閉状態、家具などの移動状態など、建築上の形象の時間的経過さえも含めることができるのである。

こうした公式の導入は、建築上の形象の４次元性を定性的に明確に表現し、建築の自動設計などに当って有用な、形象の完成度の明示手段などとして有益となる。

本章での引用文献

1) 中村義作、“４次元の幾何学”、講談社、1986、PP.174～180

2) 田中太三郎、“ステレオグラフ・立体幾何”、科学新興社、1964、P.35、P.97

3) 一松信、“高次元の正多面体”、日本評論社、1983、p.i

4) D.A.M.Thompson, On Gowth and Form(Cambridge U.P.,1968), P.733

5) 宮崎興二、“多面体と建築”、彰国社、1979、PP.267～268

6) Harash Lalvani, “Generative Morphology of Transforming Space Structure ”, Third International Conference on Space Structures(1984), 134

3　正多胞体篇

３－１　正多胞体の建築的特性

３－１－１　本章の目的
３－１－２　正多胞体の概念
３－１－３　正多胞体の概形
３－１－４　正多胞体における４次元等測軸と頂点の座標
３－１－５　正多胞体の正射影の作図
３－１－６　正多胞体の正射影の実形
３－１－７　正多胞体の展開模型
３－１－８　正多胞体の回転
３－１－９　正多胞体の変形
３－１－10　正多胞体と半正多胞体の連結
３－１－11　本章の結論

３－１－１　本章の目的

建築上の形象の根底には、設計者や使用者が意識するとしないとにかかわらず、正多角形や正多面体といった高度の対称性（回転対称性）と簡明な定量的性質を持つ図形が直接的あるいは間接的に応用されている場合が多い。

たとえば、平面計画や空間計画における基本図形としての正方形や立方体、あるいは、構造計画上の基本図形としての正３角形や正４面体、はいずれも正多角形や正多面体に加えられている。一般性のある秩序と具体性のある定量的性質を要求する建築上の形象にとって、これらは、基本的に重要な内容を持っているのである。

この現象をふまえて、本章では、正多角形ならびに正多面体の概念を４次元空間（R^4）において拡張した４次元正多胞体（本章ではたんに正多胞体とよぶ）、ならびに正多胞体から派生する規則的な図形としての半正多胞体と星形正多胞体、を考察の対象とし、前章までに一般的な概念のもとで検討してきた多胞体の建築上の形象との関連性に具体性を与えることを目的とする。

３－１－２　正多胞体の概念

正多胞体とは、１種類のみの正多面体｛ｎ，ｍ｝状胞が、R^4 において各稜のまわりに一定個（ｌ）づつ一定の状態で集まる凸多胞体で、Schlafli 記号｛ｎ，ｍ，ｌ｝が与えられている。

すべてで図表3-1-1 に示す６種類がある。左から、正５胞体（正４面体に相当）、正８

A	The 5-cell	The 8-cell	The 16-cell	The 24-cell	The 120-cell	The 600-cell
B	{3,3,3}	{4,3,3}	{3,3,4}	{3,4,3}	{5,3,3}	{3,3,5}
C	3-gon	4-gon	3-gon	3-gon	5-gon	3-gon
D	4-hedron	6-hedron	4-hedron	8-hedron	12-hedron	4-hedron
E	5	16	8	24	600	120
F	10	32	24	96	1200	720
G	10	24	32	96	720	1200
H	5	8	16	24	120	600

図表　3-1-1　正多胞体の概要。左列より、正５胞体、４－立方体、正16胞体、正24胞体、正 120胞体、正 600胞体。Ａは名称、ＢはSchläfli記号、Ｃは含まれる正多角形、Ｄは含まれる正多面体状胞、Ｅは頂点数、Ｆは稜数、Ｇは側面数、Ｈは側胞数。

胞体（４－立方体。立方体に相当）、正１６胞体（正８面体に相当）、正２４胞体（菱形１２面体あるいは立方８面体に相当。相当する正多面体はない）、正１２０胞体（正１２面体に相当）、正６００胞体（正２０面体に相当）である。本図表以外の諸元については本論文では使用しないが、たとえば Coxeter(1973)[1] に詳しい。

図表3-1-1 の各数値から判断されるように、４－立方体と正１６胞体、正１２０胞体と正６００胞体は、それぞれ、頂点と側胞、稜と側面、を入れかえた形となっていて、互いに双対な関係にある。正５胞体と正２４胞体は、それぞれ自己双対である。互いに双対な多胞体は、互いに双対な多面体同様、たとえば射影幾何学上同一の性質を持つ。

３－１－３　正多胞体の概形

ここでは正多胞体の概形を、３次元空間（R^3）への射影によって図形的に把握する。

その射影として直射影（作図法は後述）を採用すれば、各正多胞体について、図表2-2-3 の4D-Aに準じた、点心模型、線心模型、面心模型、胞心模型を図表3-1-2 のように導くことができる。

Ａは正５胞体、Ｂは４－立方体、Ｃは正１６胞体、Ｄは正２４胞体、Ｅは正１２０胞体、Ｆは正６００胞体であり、図中、影を施した部分で示すように①は点心模型、②は線心模型、③は面心模型、④は胞心模型、となっている。

各図は、R^3 における立体模型として実現された場合の単射影（Ａ～Ｄ）あるいはその単射影の R^3 における正射影（Ｅ～Ｆ）であって、それぞれは、各図右下に付記したような、有限回転群に属する対称性を持つ。Ｔは正４面体群（正４面体と同じ回転対称性を持つ）、Ｏは正８面体群（正８面体と同じ回転対称性を持つ）、Ｉは正２０面体群（正２０面体と同じ回転対称性を持つ）、Ｄｎは位数ｎの２面体群（正ｎ角柱と同じ回転対称性を持つ）、である。

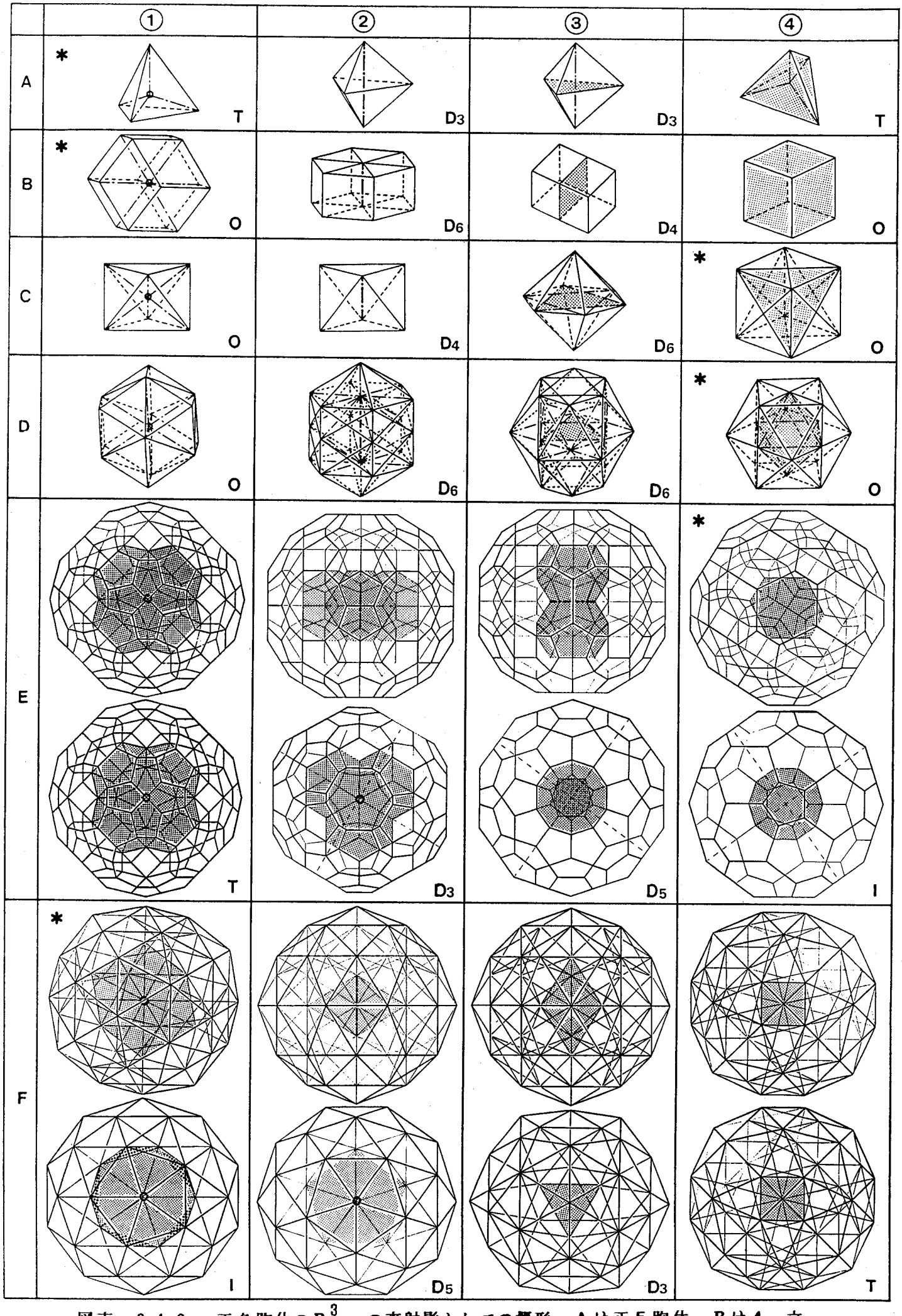
３－１－４　正多胞体における４次元等測軸と頂点の座標

図表3-1-2 の各模型において、①（点心模型）と④（胞心模型）の＊印のものについては、図表3-1-3 に R^3 における正射影と副射影を示すように、４次元等測軸を組込むことができる。

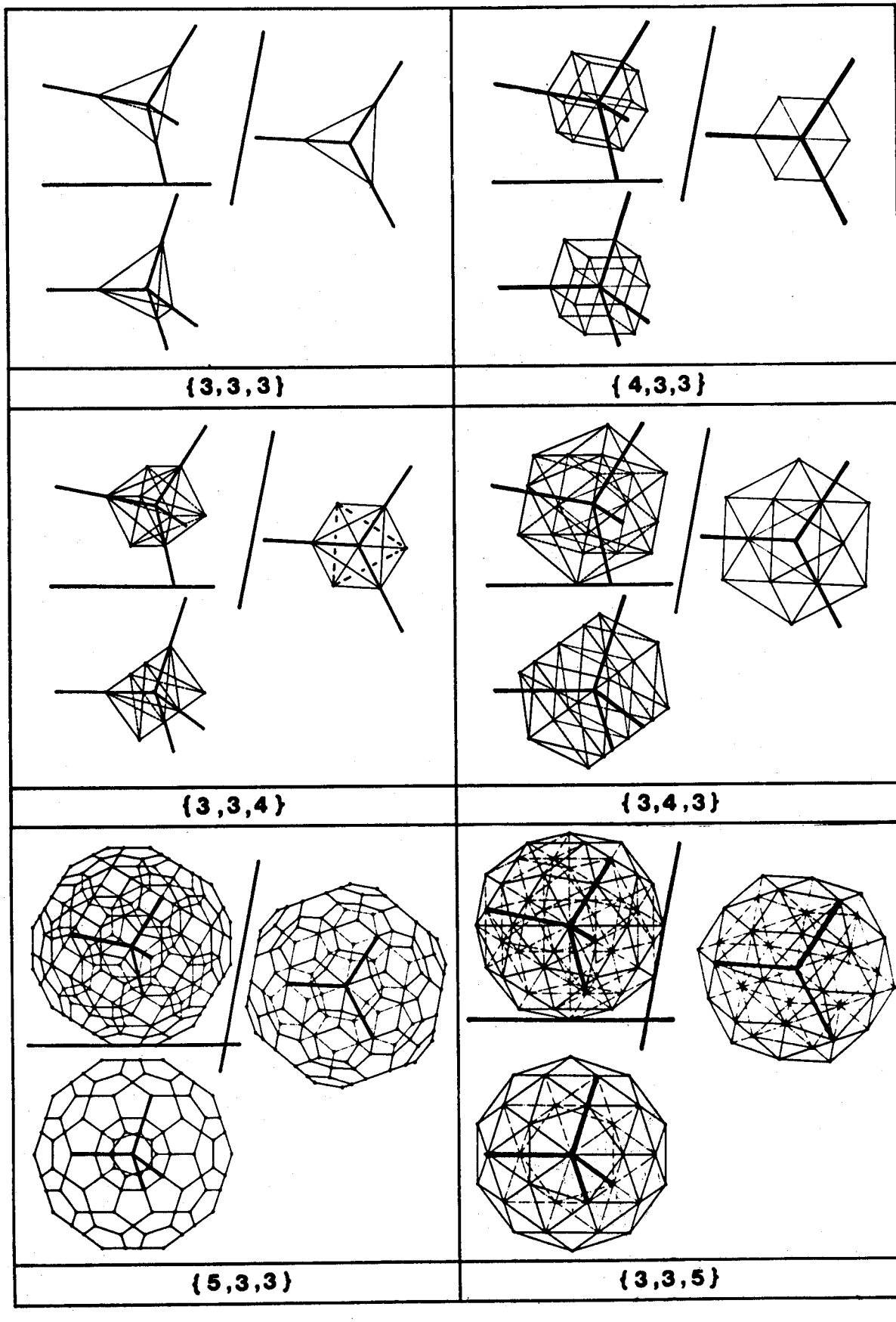
つまり、各正多胞体の頂点は、一松(1983)[2] らによると、R^4 における直交座標軸に関して次のような座標を持つ。いずれの場合も原点は各正多胞体の中心にある。

正５胞体の５頂点は、１稜の長さを $2\sqrt{2}$、$e=\sqrt{5}$、とした場合、

$$\left(-1,\ 1,\ 1,\ -\frac{1}{5}e\right)$$



図表　3-1-2　正多胞体のR^3への直射影としての概形。Aは正5胞体、Bは4－立方体、Cは正16胞体、Dは正24胞体、Eは 120胞体、Fは正 600胞体。①は点心模型、②は線心模型、③は面心模型、④は胞心模型。



図表　3-1-3　　図表3-1-2 の＊印の模型に組込まれた４次元等測軸。
各軸はおもな頂点あるいは面心を通る。

（1、－1、1、$-\frac{1}{5}$e）

（1、1、－1、$-\frac{1}{5}$e）

（－1、－1、－1、$-\frac{1}{5}$e）

（0、0、0、$\frac{4}{5}$e）

となる。

4－立方体の16頂点は、1稜の長さを2とした場合、

（±1、±1、±1、±1）の置換

となる。

正16胞体の8頂点は、1稜の長さを$\sqrt{2}$とした場合、

（±1、0、0、0）の置換

（0、±1、0、0）の置換

（0、0、±1、0）の置換

（0、0、0、±1）の置換

となる。

正24胞体の24頂点は、1稜の長さを2とした場合、

（±1、±1、±1、±1）の置換

（±2、0、0、0）の置換

（0、±2、0、0）の置換

（0、0、±2、0）の置換

（0、0、0、±2）の置換

となる。

正120胞体の600頂点は、1稜の長さを$2/T^2$、$T=(1+\sqrt{5})/2$（黄金数）、とした場合、

（±2、±2、0、0）の置換

（$\pm\sqrt{5}$、±1、±1、±1）の置換

（±T、±T、±T、$\pm T^{-2}$）の置換

（$\pm T^2$、$\pm T^{-1}$、$\pm T^{-1}$、$\pm T^{-1}$）の置換

（$\pm T^2$、$\pm T^{-2}$、±1、0）の偶置換

（$\pm\sqrt{5}$、$\pm T^{-1}$、±T、0）の偶置換

（±2、±1、±T、$\pm T^{-1}$）の偶置換

となる。

正600胞体の120頂点は、1稜の長さを$2/T$、Tは黄金数、とした場合、

（±T、±1、$\pm T^{-1}$、0）の置換

（±1、±1、±1、±1）の置換

（±２、０、０、０）の置換

（０、±２、０、０）の置換

（０、０、±２、０）の置換

（０、０、０、±２）の置換

となる（置換では±の符号を１回ずつ入れかえ　、偶置換では２回入れかえる）。

３－１－５　正多胞体の正射影の作図

本章では、正多胞体の正射影を、図表3-1-4 ～3-1-9 のように作図する。

図表3-1-4 は正５胞体であって、R^3（ＸＹＺ）に平行に置かれた正４面体状胞　ＡＢＣE_1 ($a_yb_yc_ye_{1y}$:$a_zb_zc_ze_{1z}$:$a_ub_uc_ue_{1u}$) とＢＣＤE_2 ($b_yc_yd_ye_{2y}$:$b_zc_zd_ze_{2z}$:$b_uc_ud_ue_{2u}$) をR^4 内で立ち上げていって正５胞体ＡＢＣＤＥ($a_yb_yc_yd_ye_y$: $a_zb_zc_zd_ze_z$: $a_ub_uc_ud_ue_u$) を作図する。*

図表3-1-5 は４－立方体であって、R^3（ＸＹＺ）に平行に置かれた立方体状胞ＡN_1(a_yn_{1y}:a_zn_{1z}: a_un_{1u}) とＢO_2(b_yo_{2y}: b_zo_{2z}: b_uo_{2u}) をR^4 内で立ち上げていって４－立方体ＡＯ(a_yo_y: a_zo_z: a_uo_u)を作図する。**

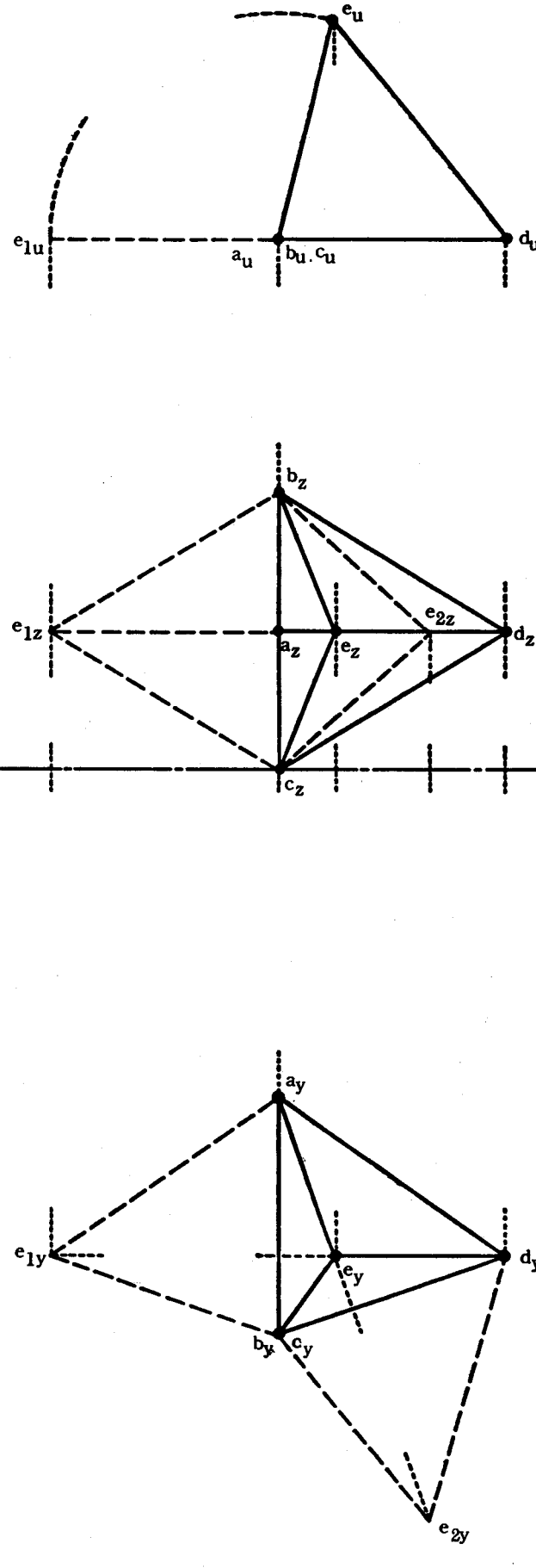
図表3-1-6 は正１６胞体であって、R^3（ＸＹＺ）に平行に置かれた正４面体状胞ＡＢＥA_1($a_yb_ye_ya_{1y}$: $a_zb_ze_za_{1z}$: $a_ub_ue_ua_{1u}$)、A_2 ＢＤ($a_{2y}b_yd_y$: $a_{2z}b_zd_z$: $a_{2u}b_ud_u$)、ＥＦ$_1$ ＧＨ$_1$ ($e_yf_{1y}g_yh_{1y}$: $e_zf_{1z}g_zh_{1z}$: $e_uf_{1u}g_uh_{1u}$)、をR^4 内で立ち上げていって正１６胞体ＡＣＧＥ($a_yc_yg_ye_y$: $a_zc_zg_ze_z$: $a_uc_ug_ue_u$)を作図する。***

図表3-1-7 は正２４胞体であって、R^3（ＸＹＺ）に平行に置かれた正８面体状胞ＡL_1 (a_yl_{1y}: a_zl_{1z}: a_ul_{1u}) とＦL_2(f_yl_{2y}: f_zl_{2z}: f_ul_{2u})をR^4 内で立ち上げていって正２４胞体ＬＮ(l_yn_y: l_zn_z: l_un_u)を作図する。****

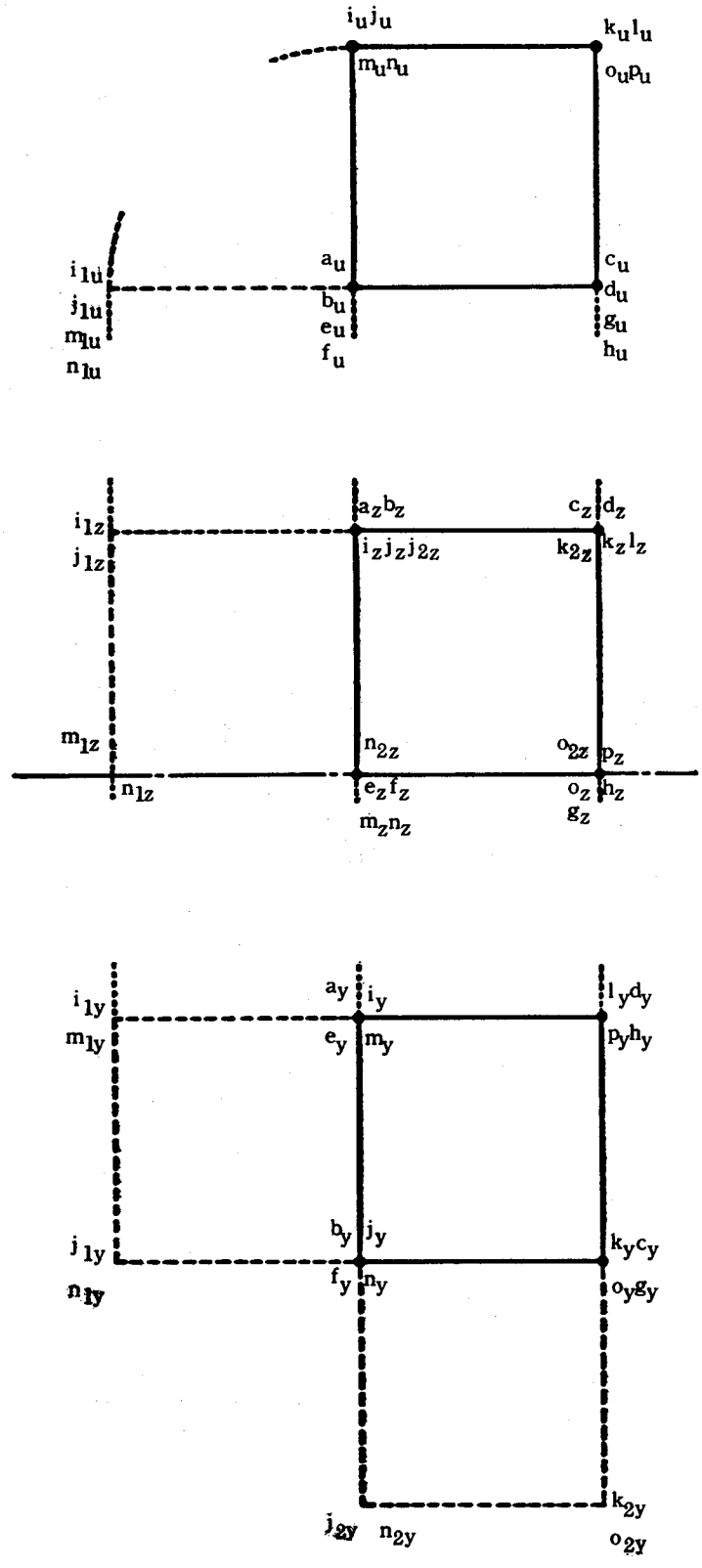
図表3-1-8 は正１２０胞体であって、それの持つ対称性を利用してあらかじめＹ図p_ys_y（各頂点は正１２面体状胞のＹ図 a_yb_y に現われる稜線あるいは適当な頂点を結ぶ線分、の延長上などの整理された位置にある）を作図したのち、そのＹ図を成立させるように、正１２面体状胞P_1 Q_1(Ｚ図のみを $p_{1z}q_{1y}$ として示す）などをR^4 内で立ち上げていって正１２０胞体$\overline{A}$Ｂ ($\overline{a_y}b_y$: $\overline{a_z}b_z$: $\overline{a_u}b_u$) を作図する。*****

図表3-1-9 は正６００胞体であって、それの持つ対称性を利用してあらかじめＹ図$p_y\overline{q_y}$（各頂点は正２０面体状胞のＹ図 a_yb_y に現われる稜線あるいは適当な頂点を結ぶ線分、の延長上などの整理された位置にある）を作図したのち、そのＹ図を成立させるように、正４面体状胞J_1 K_1 Ｇ（Ｚ図のみを $j_{1z}k_{1z}g_z$ として示す）やＪ$_2$ ＩＧ（Ｚ図のみを $j_{2z}i_zg_z$ として示す）などをR^4 内で立ち上げていって正６００胞体Ｑ$\overline{Q}$ ($q_y\overline{q_y}$: $q_z\overline{q_z}$: $q_u\overline{q_u}$) を作図する。******

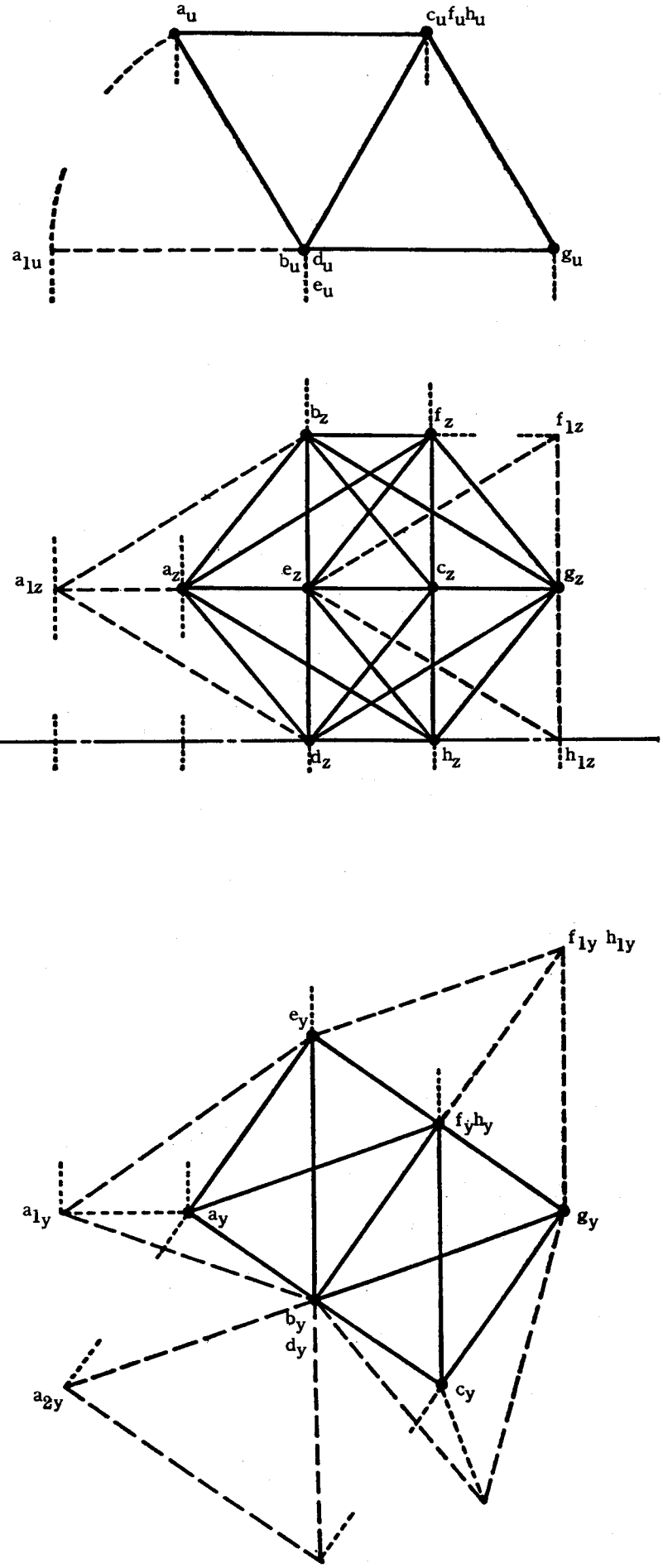
以上のような正射影から、図表3-1-2 の各概形が導かれ、さらには、図表2-3-14に準じて、副射影、斜射影、中心射影が導かれる。



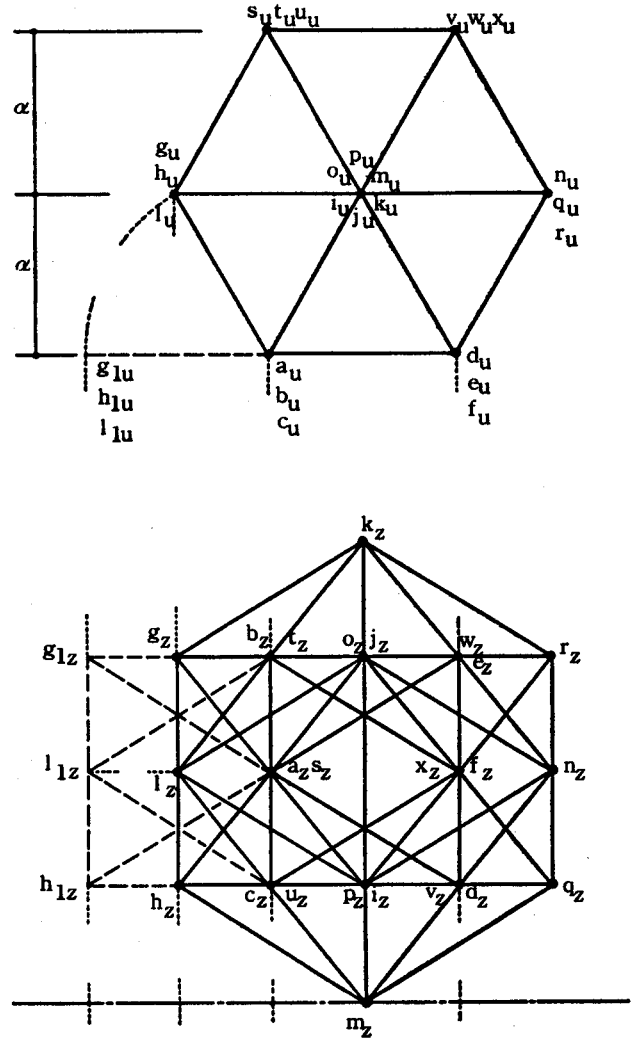
図表　3-1-4　　正５胞体の正射影



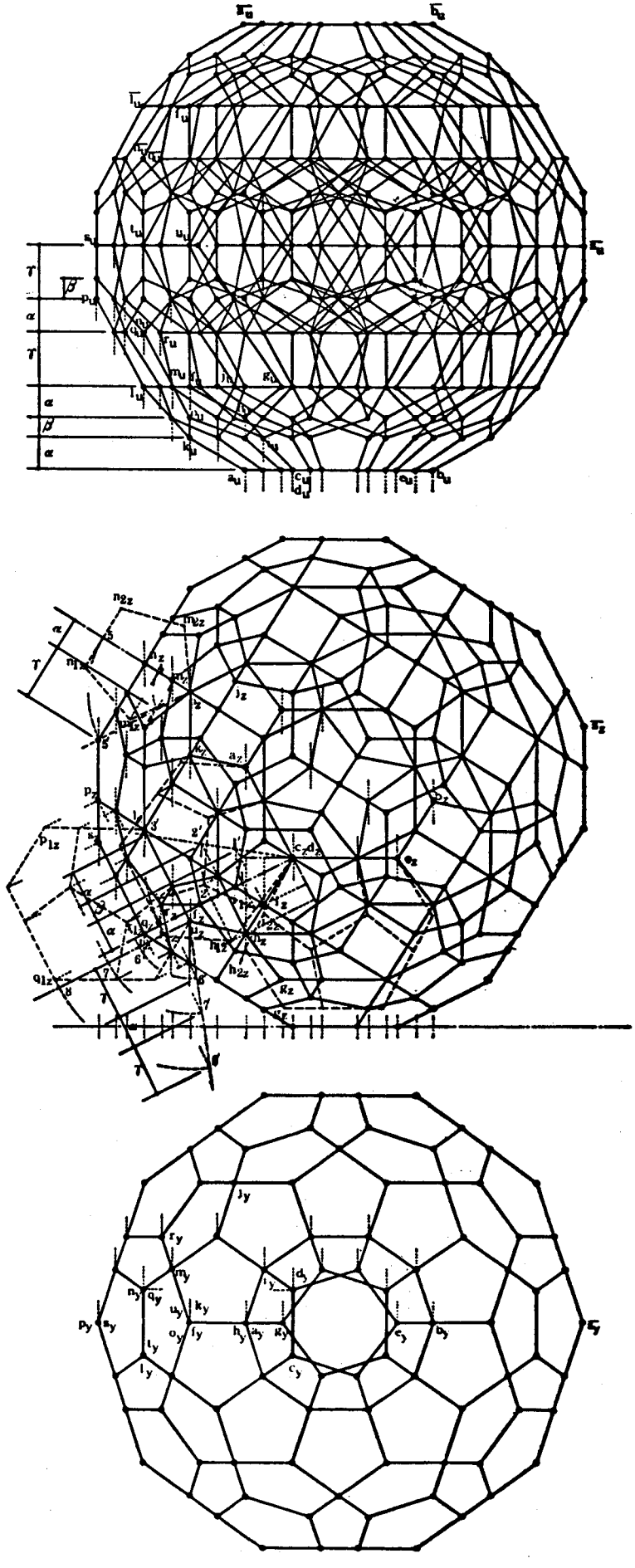
図表　3-1-5　　4 － 立方体の正射影



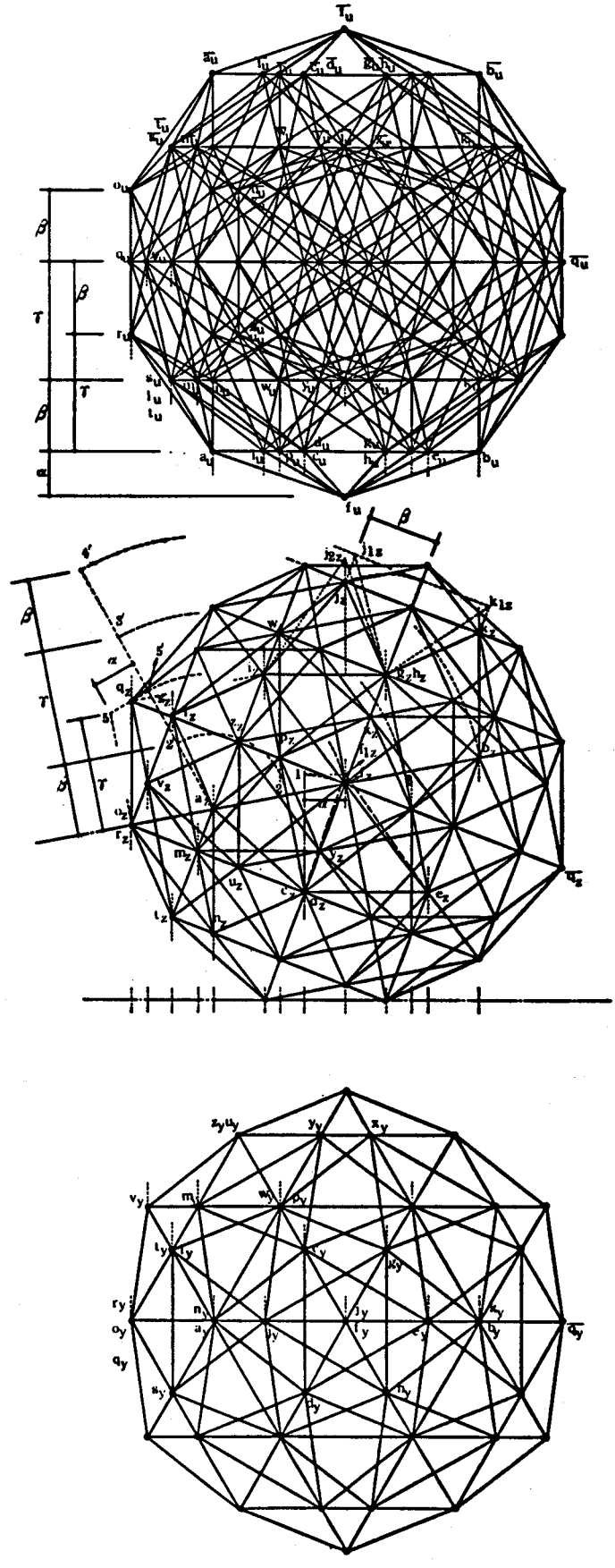
図表　3-1-6　　正16胞体の正射影



図表　3-1-7　　正24胞体の正射影



図表　3-1-8　　正 120胞体の正射影



図表　3-1-9　　正 600胞体の正射影

*

$a_y\ b_y \perp GL$, $b_z\ c_z \perp GL$, $a_u\ d_u\ //GL$, $a_u\ e_{1u}//GL$,

$e_{1y}e_y(\perp a_y\ b_y) \cap e_{2y}e_y(\perp b_y\ d_y) = e_u$,

$e_{1z}a_z(//GL) \cap e_y\ e_z = e_z$, $Cir(a_u : a_u\ e_{1u}) \cap e_y\ e_u = e_u$.

**

$a_y\ b_y \perp GL$, $a_z\ e_z \perp GL$, $a_u\ c_u\ //GL$, $a_u\ i_{1u}//GL$,

$j_{1y}j_y(\perp a_y\ b_y) \cap j_{2y}j_y(\perp b_y\ c_y) = j_y$,

$j_{1z}j_z(//GL) \cap a_y\ e_z(\perp GL) = j_z$, $Cir(a_u : a_u\ j_{1u}) \cap j_y\ j_u = j_u$.

***

$b_y\ e_y \perp GL$, $b_z\ d_z \perp GL$, $b_u\ g_u\ //GL$, $a_{1u}b_u\ //GL$,

$\angle a_{2y}b_y\ e_y = \angle c_{2y}b_y\ g_y$, $a_{2y}a_y = f_{1y}f_y$,

$a_{1y}a_y(\perp b_y\ e_y) \cap a_{2y}a_y(\perp a_y\ c_y) = a_y$,

$a_{1z}a_z(//GL) \cap a_y\ a_z = a_z$, $Cir(b_u : b_u\ a_{1u}) \cap a_y\ a_u = a_u$.

****

$a_y\ b_y \perp GL$, $b_z\ c_z \perp GL$, $a_u\ b_u\ //GL$, $a_u\ g_{1u}//GL$,

$l_{2y}k_{3y}(//l_y\ n_y) \cap f_y\ k_{3y}(//q_y\ e_y) = k_{3y}$,

$l_{1y}l_y(\perp g_y\ l_y) \cap l_{2y}l_y(\perp l_y\ o_y) = l_y$, $l_{1z}l_z(//GL) \cap l_y\ l_z = l_z$,

$Cir(a_u : a_u\ l_{1u}) \cap l_y\ l_u = l_u$, $k_{3y}k_y(\perp b_y\ d_y) \cap b_y\ d_y = k_y$,

$l_z\ b_z \cap k_y\ k_z = k_z$, $g_u\ k_u(//GL) \cap k_y\ k_u = k_u$.

*****

$c_y\ d_y \perp GL$, $c_z\ e_z\ //GL$, $a_u\ b_u\ //GL$,

$h_{1z}h_z\ (\perp a_z\ c_z) \cap h_{2z}h_z(\perp e_z\ c_z) = h_z$, $g_y\ a_y \cap h_z\ h_y = h_y$,

$h_{1z}2\ (\perp c_z\ 3) \cap c_z\ 3 = 2$,

$Cir(c_z : c_z\ 3) \cap h_z\ 2'\ (\perp c_z\ 3) = 2'$,

$\overline{2' \cdot c_z\ 3} = \alpha + \beta = \overline{GL \cdot h_u}$, $f_{1z}3 \cap c_z\ 3 = 3$,

$Cir(c_z : c_z\ 3) \cap c_z\ 2' = 3'$,

$f_{1z}f_z(\perp a_z\ c_z) \cap 3'\ f_z(\perp c_z\ 3) = f_z$,

$m_{1z}m_{2z}(\perp o_z\ 5) \cap o_z\ 5 = 4$, $n_{1z}n_{2z}(\perp o_z\ 5) \cap o_z\ 5 = 5$,

$Cir(o_z : o_z\ 4) \cap m_z\ 4'\ (\perp o_z\ 5) = 4'$,

$Cir(o_z:o_z\ 5) \cap o_z\ 4' = 5'$, $5'\ n_z(\perp o_z\ 5) \cap o_z\ 5 = n_z$,
$n_z\ n_y \cap d_y\ n_y = n_y$, $\overline{5' \cdot o_z\ 5} = \alpha + \gamma = \overline{o_u\ h_u(//GL) \cdot n_u}$,
$r_{1z}6\ (\perp f_z\ 8) \cap f_z\ 8 = 6$, $q_{1z}8\ (\perp f_z\ 8) \cap f_z\ 8 = 8$,
$Cir(f_z:f_z\ 6) \cap r_z\ 6'\ (\perp f_z\ 8) = 6'$,
$Cir(f_z:f_z\ 8) \cap f_z\ 6' = 8'$,
$q_{1z}q_z(\perp l_z\ f_z) \cap 8'\ q_z(\perp f_z\ 8) = q_z$, $q_z\ q_z \cap d_y\ q_y = q_y$,
$\overline{8' \cdot f_z\ 8} = \alpha + 2\gamma = \overline{f_u\ l_u(//GL) \cdot q_u}$

******

$c_y\ d_y \perp GL$, $c_z\ e_z\ //GL$, $a_u\ b_u\ //GL$,
$f_{1z}1\ (\perp c_1\ 1) \cap c_z\ 1 = 1$,
$Cir(c_z:c_z\ 1) \cap f_{1z}f_z(//c_z\ 1) = f_z$,
$\overline{f_z \cdot c_z\ 1} = \alpha = \overline{a_u\ b_u(//GL) \cdot f_u}$, $j_{1z}k_{1z} \perp c_z\ g_z$,
$j_{1z}j_z(//c_z\ g_z) \cap j_{2z}j_z(\perp g_z\ i_z) = j_z$, $j_z\ j_y \cap a_y\ b_y = j_y$,
$\overline{j_z \cdot c_z\ g_z} = \beta = \overline{a_u\ b_u \cdot j_u}$, $c_z\ i_z(\perp a_z\ b_z) \cap a_z\ b_z = 2$,
$Cir(a_z:a_z\ 2) \cap l_z\ n_z = 2'$, $e_z\ g_z(\perp a_z\ b_z) \cap a_z\ b_z = 3$,
$Cir(a_z:a_z\ 3) \cap a_z\ 2' = 3'$,
$3'\ q_z(\perp a_z\ b_z) \cap i_z\ q_z(//a_z\ b_z) = q_z$, $q_z\ q_y \cap b_y\ a_y = q_y$,
$\overline{3' \cdot a_z\ b_z} = \beta + \gamma = \overline{a_u\ b_u \cdot q_u}$, $Cir(a_z:a_z\ b_z) \cap a_z\ 2' = 4'$,
$4'\ o_z(\perp a_z\ b_z) \cap a_z\ b_z = o_z$,
$\overline{4' \cdot a_z\ b_z} = 2\beta + \gamma = \overline{a_u\ b_u \cdot o_u}$, $Cir(a_z:a_z\ f_z) \cap a_z\ 4' = 5'$,
$5'\ 5 \perp a_z\ 4'$, $\overline{5 \cdot a_z\ 4'} = \alpha$, $5\ r_z(\perp a_z\ b_z) \cap a_z\ b_z = r_z$,
$\overline{6 \cdot a_z\ b_z} = \gamma = \overline{a_u\ b_u \cdot r_u}$.

3－1－6　正多胞体の正射影の実形

3－1－5で導かれる正多胞体の正射影を具体的な建築上の形象に応用する場合、側面の実形が必要であるが、それらを図表3-1-10と11にまとめる。

表中、各正多胞体の1稜の実長は1である。

左端列には、各正多胞体の Schläfli 記号と点心（V）、線心（E）、面心（F）、胞心（C）の各模型の区別を示す。A～Wは使用する多角形の種類、a～eはその多角形の辺長、j～nはその多角形の内角、をそれぞれ図表3-1-12にしたがって示す。これらの実形で4面体、6面体（平行6面体）、8面体、12面体を図表3-1-13に示した個数（括弧内には各正多面体を構成する側面の稜数と個数を示す）だけ作り、同じ側面同志を連結する。表中実線アンダーライン部分はR^3における多面体として実現されるもの、破線アン

ダーライン部分は平面多角形に面縮しているものをそれぞれ示す。その他のものは、R^4でのかくれ線に相当する。つまりR^3では実現されない。

模型製作に必要な2面角はつぎの公式により求める。つまり、α、β、γの面角が集まる3面角がある場合、γに対する稜角xは

$$\cos x = \frac{\cos\gamma - \sin(\alpha-90)\cdot \sin(\beta-90)}{\cos(\alpha-90)\cdot\cos(\beta-90)}$$

となる。

以上のような側面の実形によると、筆者(1983)[3]がすでに正120胞体の胞心模型について検討しているように、大半は図表3-1-14に示すような回転する正多面体の適当なR^3における正射影に現われる多角形すべてに一致する、という顕著な性質があって、正多胞体と正多面体の密接な関係を暗示している。

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
3,3,3 V	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	40	1	0.612372	b			109.471290	35.264332	k		
E	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	32	1	0.763763	b			81.786739	49.106630	k		
F	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	32	1	0.763763	b			81.786739	49.106630	k		
C	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	40	1	0.612372	b			109.471290	35.264332	k		
4,3,3 V	A		0.866025	a				109.471220	70.528780			
E	A	6	1	a				90	j			
	B	5	1	a				120	60			
F	A	6	1	a				90	j			
	B	4	1	0.707107				90	j			
C	A	6	1	a				90	j			
3,3,4 V	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	3	1	0.707107	b			90	45	k		
E	A	1	1	0.866025	b			70.528780	54.735610	k		
F	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B		1	0.912871	b			66.421816	56.789092	k		
	C		0.577350	0.912871	b			36.869877	71.565062	k		
	D	2	1	0.577350	b			120	30	k		
C	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	3	1	0.707107	b			90	45	k		

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
3,4,3 V	A	1	1	0.866025	b			70.528780	54.735610	k		
E	A	8	1	0.957427	b			62.964316	58.517842	k		
	B		0.816497	0.957427	b			50.478837	64.760581	k		
	C	9	0.957427	0.816497	0.5			90	31.482158	58.517904		
F	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B		1	0.912871	b			66.421816	56.789092	k		
	C		0.577350	0.912871	b			36.869877	71.565062	k		
	D	2	1	0.577350	b			120	30	k		
C	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	3	1	0.707107	b			90	45	k		
5,3,3 V	A	17	1	0.975835	0.990839	c	b	109.471290	106.802776	108.461543	l	k
	B		1	0.935414	0.975835	c	b	112.002755	104.708449	109.290189	l	k
	C		1	0.820211	0.935414	c	b	119.737069	97.998840	112.132628	l	k
	D	20	1	0.378467	0.820211	c	b	161.046359	44.741105	144.735721	l	k
	E		0.707107	0.975835	0.820211	c	b	88.446604	122.837347	102.939354	l	k
	F	18	0.990839	0.707107	0.820211	0.935414	0.612372	131.788187	92.952941	109.471356	125.264389	80.523166
	G	19	0.975835	0.612372	0.707107	0.935414	0.378467	147.688385	87.047082	106.802867	143.726089	54.735616

図表　3-1-10　図表3-1-2 の各模型の側面の実形 ①

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
5,3,3 E	A	23	1	0.983956	0.993902	c	b	108.973391	107.209538	108.302.69	1	k
	B		1	0.957427	0.983956	c	b	110.612979	105.863728	108.829785	1	k
	C		1	0.884212	0.957427	c	b	115.341899	101.873392	110.455662	1	k
	D	12	1	0.816497	0.934172	c	b	120	97.761311	112.238653	1	k
	E	24	1	0.654847	0.884212	c	b	132.399577	85.643011	118.157081	1	k
	F	13	1	0.356822	0.816497	c	b	164.477087	37.761137	150	1	k
	G		0.934172	0.993902	0.957427	c	b	104.252743	110.988923	106.884709	1	k
	H		0.356822	0.957427	0.654847	c	b	52.313479	147.230030	96.613235	1	k
	I		0.993902	0.816497	0.884212	0.957427	0.763763	121.620847	99.657977	108.259375	117.337775	93.124032
	J		0.983956	0.763763	0.816497	0.957427	0.654847	127.480827	98.331563	105.683655	124.363273	84.140689
	K	25	0.983956	0.654847	0.763763	0.934172	0.5	139.106591	90	108.303918	133.538951	69.050544
	L	26	0.993902	0.5	0.763763	0.884212	0.356822	154.693158	66.199788	125.513702	144.486833	49.106541
F	A	21	1	a	a	a	a	108	j	j	j	j
	B		1	0.964832	0.986715	c	b	110.151470	106.244366	108.679901	1	k
	C	14	1	0.905040	0.964832	c	b	113.965291	103.052766	109.964591	1	k
	D		1	0.725530	0.905040	c	b	126.735465	91.423552	115.208719	1	k
	E	22	1	0.525731	0.850651	c	b	144	72	126	1	k
	F		0.850651	0.986715	0.905040	c	b	98.998695	115.050302	105.450353	1	k
	G		0.525731	0.964832	0.725530	c	b	71.779447	134.416402	99.693878	1	k
	H	15	0.964832	0.850651	0.809017	0.986715	0.725530	120.446304	105.990634	100.545618	123.017400	90
	I	16	0.986715	0.525731	0.725530	0.905040	0.309017	156.401579	70.035425	120.446589	149.553445	43.562972
C	A	21	1	a	a	a	a	108	j	j	j	j
	B	10	1	0.866025	0.951057	c	b	116.564958	100.812255	110.905327	1	k
	C	11	1	0.587785	0.866025	c	b	138.189827	79.187674	121.717420	1	k

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
3,3,5 V	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B	27	1	0.951057	b			63.434913	58.282544	k		
	C	1	1	0.866025	b			70.528817	54.735591	k		
	D	29	1	0.587785	b			116.565131	31.717435	k		
	E	28	0.951057	0.587785	0.866025			79.187783	37.377342	63.434875		
E	A		1	0.986715	b			60.892779	59.553610	k		
	B	42	1	0.964832	b			62.426518	58.786741	k		
	C		1	0.905040	b			67.072130	56.463935	k		
	D	35	1	0.850651	b			72	54	k		
	E	45	1	0.725530	b			87.125941	46.437029	k		
	F	36	1	0.525731	b			144	18	k		
	G		0.850651	0.964832	b			52.313517	63.843242	k		
	H		0.525731	0.905040	b			33.769352	73.115324	k		
	I		0.986715	0.905040	0.964832			63.604741	55.245611	61.149648		
	J	43	0.986715	0.809017	0.905040			70.035384	50.396180	59.5[illegible]3586		
	K		0.964832	0.725530	0.905040			71.597295	45.522062	62.880643		
	L		0.986715	0.725530	0.850651			77.060634	45.776732	57.162634		
	M	44	0.964832	0.525731	0.809017			90	33.017408	56.982646		
	N		0.986715	0.525731	0.725530			102.939255	31.283987	45.776758		
	O	46	0.905040	0.309017	0.850651			90	19.964641	70.035493		
	P	47	0.964832	0.309017	0.725530			133.562706	13.419675	33.017619		

図表　3-1-10　図表3-1-2 の各模型の側面の実形 ②

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
3,3,5 F	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B		1	0.993902	b			60.406332	59.796834	k		
	C	48	1	0.957427	b			62.964316	58.517842	k		
	D		1	0.816497	b			75.522442	52.238779	k		
	E	32	1	0.763763	b			81.786739	49.106630	k		
	F		1	0.654847	b			99.554048	40.222976	k		
	G		0.934172	0.983956	b			56.679914	61.660043	k		
	H		0.816497	0.957427	b			50.478837	64.760581	k		
	I		0.356822	0.884212	b			23.281435	78.359283	k		
	J		0.993902	0.957427	0.983956			61.570409	57.900849	60.528742		
	K		0.983956	0.884212	0.957427			64.446986	54.167468	61.3[illegible]546		
	L	30	0.993902	0.884212	0.934172			66.199801	54.486703	59.313496		
	M		0.957427	0.763763	0.934172			67.792343	47.607992	64.599665		
	N		0.993902	0.816497	0.884212			71.395496	51.130503	57.474000		
	O	31	0.983956	0.763763	0.884212			72.906755	47.896025	59.197220		
	P		0.957427	0.654847	0.884212			75.293589	41.423554	63.287584		
	Q		0.983956	0.654847	0.816497			83.161908	41.360190	55.477903		
	R		0.993902	0.654847	0.763763			88.606995	41.198521	50.194484		
	S		0.957427	0.5	0.816497			90	31.482158	58.517842		
	T	49	0.934172	0.356822	0.816497			97.761114	22.238766	60		
	U	33	0.993902	0.5	0.654847			118.157134	26.329521	35.513345		
	V		0.957427	0.356822	0.763763			112.207566	20.184402	47.608033		
	W	34	0.983956	0.356822	0.654847			151.842949	9.853310	18.303741		

			a	b	c	d	e	j	k	l	m	n
3,3,5 C	A	7	1	a	a			60	j	j		
	B		1	0.975835	b			61.645209	59.177396	k		
	C	37	1	0.935414	b			64.623093	57.688453	k		
	D		1	0.816497	b			75.522442	52.238779	k		
	E	3	1	0.707107	b			90	45	k		
	F	40	1	0.612372	b			109.471336	35.264332	k		
	G		0.934172	0.990839	b			56.251014	61.874493	k		
	H		0.707107	0.934172	b			44.477545	67.761228	k		
	I		0.975835	0.816497	0.934172			67.365445	50.558256	62.076298		
	J	38	0.975835	0.820211	0.935414			67.165202	50.773175	62.061622		
	K	39	0.990839	0.707107	0.820211			80.523194	44.741158	54.735648		
	L		0.990839	0.612372	0.816497			86.565646	38.091846	55.342509		
	M		0.934172	0.378467	0.816497			95.829488	23.768435	60.402077		
	N	41	0.975835	0.378467	0.707107			125.264293	18.461642	36.274065		

図表　3-1-10　図表3-1-2 の各模型の側面の実形 ③

$0.309017 = \frac{\tau-1}{2}$

$0.356822 = \frac{(\tau-1)\sqrt{3}}{3}$

$0.378467 = \frac{\sqrt{6(2-\tau)}}{4}$

$0.525731 = \frac{\sqrt{11\tau+7}}{4\tau+3}$

$0.577350 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$0.587785 = \frac{\sqrt{3}-\tau}{2}$

$0.612372 = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$0.654847 = \frac{\sqrt{3(10-3\tau)}}{6}$

$0.707107 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0.725530 = \frac{\sqrt{84\tau+53}}{2(4\tau+3)}$

$0.763763 = \frac{\sqrt{21}}{6}$

$0.809017 = \frac{\tau}{2}$

$0.816497 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$0.820211 = \frac{\sqrt{2(7-\tau)}}{4}$

$0.850651 = \frac{\sqrt{3-\tau}}{3-\tau}$

$0.866025 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0.884212 = \frac{\sqrt{3(11-\tau)}}{6}$

$0.905040 = \frac{\sqrt{131\tau+82}}{2(4\tau+3)}$

$0.912871 = \frac{\sqrt{30}}{6}$

$0.934172 = \frac{\tau\sqrt{3}}{3}$

$0.935414 = \frac{\sqrt{28}}{4}$

$0.951057 = \frac{\sqrt{2+\tau}}{2}$

$0.957427 = \frac{\sqrt{33}}{6}$

$0.964832 = \frac{\sqrt{149\tau+93}}{2(4\tau+3)}$

$0.975835 = \frac{\sqrt{2(\tau+6)}}{4}$

$0.983956 = \frac{\sqrt{3(\tau+10)}}{6}$

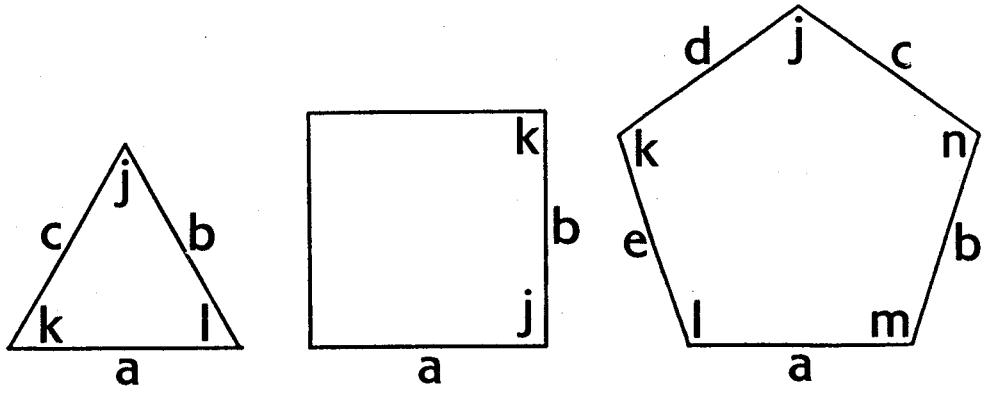
$0.986715 = \frac{\sqrt{156\tau+97}}{2(4\tau+3)}$

$0.990839 = \frac{\tau\sqrt{6}}{4}$

$0.993902 = \frac{\sqrt{3(3\tau+7)}}{6}$

** $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034$

図表　3-1-11　図表3-1-10の数値の原型



図表　3-1-12　図表3-1-10のａ～ｅおよびｊ～ｎの配置

3,3,3 V 4(1A+3B) + 1(4A)

E 3(4B) + 2(1A+3B)

F 3(4B) + 2(1A+3B)

C 4(1A+3B) + 1(4A)

3,3,4 V 8(1A+3B) + 8(1A+3B)

E 4(4A) + 8(1A) + 4(4A)

F 2(1A +3B) + 6(1B+2C+1D) + 6(1B+2C+1D) + 2(1A+3B)

C 1(4A) + 4(1A+3B) + 6(2B) + 4(1A+3B) + 1(4A)

4,3,3 V 4(6A) + 4(6A)

E 3(4A+2B) + 2(3B) + 3(4A+2B)

F 2(2A+4B) + 4(2B) + 2(2A+4B)

C 1(6A) + 6(1A) + 1(6A)

3,4,3 V 6(8A) + 12(2A) + 6(8A)

E 3(4A+4B) + 6(4B+4C) + 6(1A+2C) + 6(4B+4C) + 3(4A+4B)

F 2(2A+6B) + 3(4B+4C) + 6(2B+4C+2D) + 2(1A+3D) + 6(2B+4C+2D) + 3(4B+4C) + 2(2A+6B)

C 1(8A) + 8(2A+6B) + 6(4B) + 8(2A+6B) + 1(8A)

5,3,3 V 4(6A+6B) + 4(6B+6C) + 6(4B+4C+4E) + 12(2A+2C+4E+4F) + 12(2B+2C+4F+4G) + 12(2B+2D+4E+4G)
+ 4(6C+6D) + 12(1A+1D+2F+2G) + 4(6C+6D) + 12(2B+2D+4E+4G) + 12(2B+2C+4F+4G)
+ 12(2A+2C+4E+4F) + 6(4B+4C+4E) + 4(6B+6C) + 4(6A+6B)

E 3(4A+4B+4G) + 2(6B+6C) + 6(2C+2D+4G+4I) + 6(2A+2E+4I+4J) + 3(4C+4E+4H)
+ 12(2G+2H+2I+2J+2K+2L) + 6(2C+ 2F+4I+4L) + 6(2B+2D+4J+4K) + 6(2B+2F+4H+4J)
+ 6(2B+2C+4I+4J) + 2(3D+3F) + 6(1A+1E+2K+2L) + 6(2B+2C+4I+4J) + 6(2B+2F+4H+4J)
+ 6(2B+2D+4J+4K) + 6(2C+2F+4I+4L) + 12(2G+2H+2I+2J+2K+2L) + 3(4C+4E+4H) + 6(2A+2E+4I+4J)
+ 6(2C+2D+4G+4I) + 2(6B+6C) + 3(4A+4B+4G)

F 2(2A+10B) + 5(4B+4C+4F) + 10(2B+2D+4F+4H) + 5(4C+4D+4G) + 10(2B+2E+4G+4H)
+ 10(2B+2D+4G+4I) + 10(2D+2E+4F+4I) + 2(2A+10D) + 2(1A+5E) + 10(1C+2H+2I) + 2(2A+10D)
+ 10(2D+2E+4 F+4I) + 10(2B+2D+4G+4I) + 10(2B+2E+4H+4G) + 5(4C+4D+4G) + 10(2B+2D+4F+4H)
+ 5(4B+4C+4F) + 2(2A+10B)

C 1(12A) + 12(2A+10B) + 20(6B+6C) + 12(2A+10C) + 30(2B+2C) + 12(2A+10C) + 20(6B+6C)
+ 12(2A+10B) + 1(12A)

図表 3-1-13 ① 図表3-1-2 の各模型を構成する互いに異なる正多面体状胞の個数ｘと各胞を構成する側面ｙ、ｚなどの枚数ｍ，ｎをｘ（ｍｙ＋ｎｚ）の形式で示す。実線アンダーラインは R^3 における模型として実現されるもの、破線アンダーラインは平縮して模型の外殻となるもの。

3,3,5 V 20(1A+3B) + 20(1A+3C) + 30(4C) + 60(1B+1C+2E) + 60(1B+1D+2E) + 60(1C+1D+2E)
+ 20(1A+3D) + 60(5C) + 20(1A+3D) + 60(1C+1D+2E) + 60(1B+1D+2E) + 60(1B+1C+2E)
+ 30(4C) + 20(1A+3C) + 20(1A+3B)

E 5(4A) + 10(1A+1B+2I) + 10(1B+1C+2I) + 10(1A+1C+2J) + 10(1A+1E+2L) + 10(1D+1E+2L)
+ 10(1C+1D+2O) + 10(1C+1F+2H) + 10(1B+1F+2M) + 10(1B+1C+2K) + 20(1J+1K+1L+1M)
+ 10(1A+1G+2L) + 20(1H+1I+1J+1M) + 20(1G+1I+1K+1L) + 10(1A+1E+2L) + 10(1B+1D+2G)
+ 5(4E) + 20(1A+1I+1L+1O) + 10(1A+1F+2N) + 20(1G+1K+1O+1P) + 10(1B+1E+2P)
+ 10(1C+1E+2K) + 20(1H+1I+1K+1L) + 10(1A+1E+2L) + 20(1L+1N) + 10(1A+1E+2L)
+ 20(1H+1I+1K+1L) + 10(1C+1E+2K) + 10(1B+1E+2P) + 20(1G+1K+1O+1P) + 10(1A+1F+2N)
+ 20(1A+1I+1L+1O) + 5(4E) + 10(1B+1D+2G) + 10(1A+1E+2L) + 20(1G+1I+1K+1L)
+ 20(1H+1I+1J+1M) + 10(1A+1G+2L) + 20(1J+1K+1L+1M) + 10(1B+1C+2K) + 10(1B+1F+2M)
+ 10(1C+1F+2H) + 10(1C+1D+2O) + 10(1D+1E+2L) + 10(1A+1E+2L) + 10(1A+1C+2J)
+ 10(1B+1C+2I) + 10(1A+1B+2I) + 5(4A)

3,3,5 F 2(1A+3B) + 6(1B+1C+2J) + 3(4C) + 6(2C+2H) + 12(1H+1J+1K+1N) + 6(1B+1C+2N)
+ 12(1G+1J+1K+1L) + 6(1C+1E+2M) + 12(1J+1N+1P+1Q) + 6(1B+2R+1S) + 12(1N+1O+1Q+1R)
+ 12(1G+1K+1M+1O) + 6(1C+1E+2M) + 3(4E) + 12(1H+1K+1P+1Q) + 6(1C+1F+2P)
+ 12(1L+1M+1P+1R) + 6(1B+1F+2R) + 2(1A+3E) + 6(1C+1E+2V) + 12(1C+1I+1L+1N)
+ 12(1I+1K+1O+1V) + 6(1C+2S+1D) + 12(2H+2S) + 12(1J+1Q+1S+1U) + 2(1A+3F)
+ 6(1F+2Q+1D) + 6(1C+1E+2V) + 12(1H+1M+1T+1V) + 12(1G+1Q+1T+1W) + 6(1E+1F+2R)
+ 6(1B+1F+2U) + 12(1N+1P+1S+1U) + 12(1J+1R+1V+1W) + 12(1I+1K+1P+1W) + 12(2S)
+ 12(1M+1V) + 12(1I+1K+1P+1W) + 12(1J+1R+1V+1W) + 12(1N+1P+1S+1U) + 6(1B+1F+2U)
+ 6(1E+1F+2R) + 12(1G+1Q+1T+1W) + 12(1H+1M+1T+1V) + ¥(1C+1E+2V) + 6(1F+2Q+1D)
+ 2(1A+3F) + 12(1J+1Q+1S+1U) + 12(2H+2S) + 6(1C+2S+1D) + 12(1I+1K+1O+1V)
+ 12(1C+1I+1L+1N) + 6(1C+1E+2V) + 2(1A+3E) + 6(1B+1F+2R) + 12(1L+1M+1P+1R)
+ 6(1C+1F+2P) + 12(1H+1K+1P+1Q) + 3(4E) + 6(1C+1E+2M) + 12(1G+1K+1M+1O)
+ 12(1N+1O+1Q+1R) + 6(1B+2R+1S) + 12(1J+1N+1P+1Q) + 6(1C+1E+2M) + 12(1G+1J+1K+1L)
+ 6(1B+1C+2N) + 12(1H+1J+1K+1N) + 6(2C+2H) + 3(4C) + 6(1B+1C+2J) + 2(1A+3B)

図表 3-1-13 ② 図表3-1-2 の各模型を構成する互いに異なる正多面体状胞の個数ｘと各胞を構成する側面ｙ、ｚなどの枚数ｍ，ｎをｘ（ｍｙ＋ｎｚ）の形式で示す。実線アンダーラインは R^3 における模型として実現されるもの、破線アンダーラインは平縮して模型の外殻となるもの。

3,3,5 C 1(4A) + 4(1A+3B) + 12(1B+1C+2G) + 24(2G+2J) + 12(1B+1D+2J) + 4(1A+3D)
+ 24(1G+1H+1J+1K) + 12(1C+1E+2H) + 8(1A+3E) + 12(1B+1D+2L) + 24(2J+2L)
+ 12(1B+1F+2L) + 12(1D+1E+2K) + 4(1A+3F) + 12(1B+1E+2N) + 12(1C+1D+2M)
+ 24(1I+1J+2M) + 24(1G+1K+1M+1N) + 12(1D+1F+2L) + 24(1H+1I+1M+1N) + 6(2E)
+ 24(1L+1M) + 24(1G) + 24(1H+1I+1M+1N) + 12(1D+1F+2L) + 24(1G+1K+1M+1N)
+ 24(1I+1J+2M) + 12(1C+1D+2M) + 12(1B+1E+2N) + 4(1A+3F) + 12(1D+1E+2K)
+ 12(1B+1F+2L) + 24(2J+2L) + 12(1B+1D+2L) + 8(1A+3E) + 12(1C+1E+2H)
+ 24(1G+1H+1J+1K) + 4(1A+3D) +12(1B+1D+2J) + 24(2G+2J) + 12(1B+1C+2G)
+ 4(1A+3B) + 1(4A)

図表 3-1-13 ③ 図表3-1-2 の各模型を構成する互いに異なる正多面体状胞の個数ｘと各胞を構成する側面ｙ、ｚなどの枚数ｍ，ｎをｘ（ｍｙ＋ｎｚ）の形式で示す。実線アンダーラインは R^3 における模型として実現されるもの、破線アンダーラインは平縮して模型の外殻となるもの。

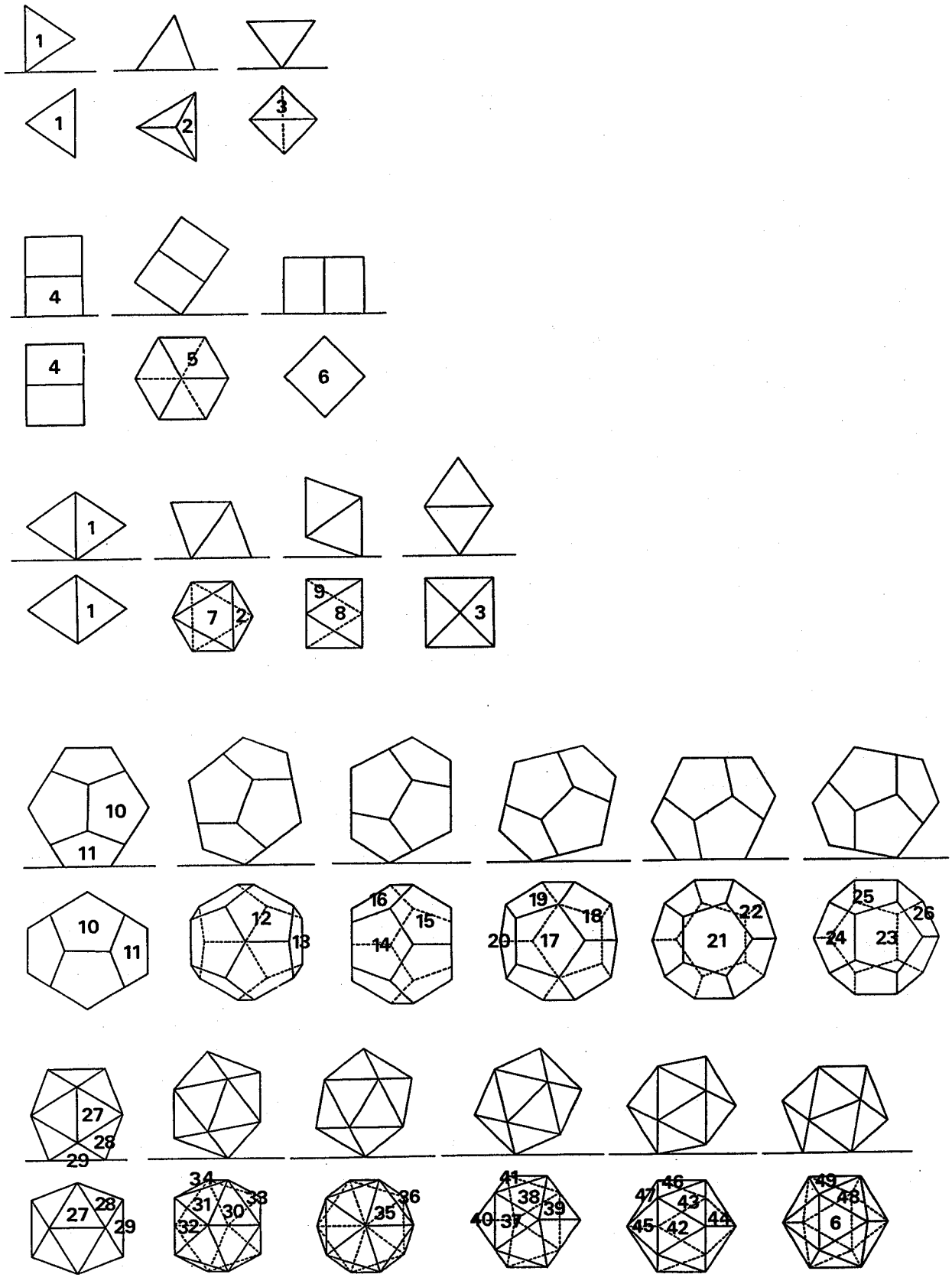


図 6-2　R^3 内で回転する正多面体の代表的な正射影。上段から、正４面体、立方体、正８面体、正12面体、正20面体。数字はそれぞれの正射影に現われる異なる多角形を示し図表3-1-10の左から２列目の欄に転記されている。

3－1－7　正多胞体の展開模型

正射影によって把握する場合、各正多胞体を構成している正多面体状胞は場合によっては面縮する。その時点で、正多面体の持つ高度の対称性や定量的な性質上の明快さは損なわれ、かわって、胞の集積全体としての対称性や定量性が現われる。

それに対して、R^3 への展開模型によると、すべての正多面体状胞を実形のままの対称性や定量性のもとに表現することができる。

図表3-1-15に、互いに側胞形の異なる正５胞体（①）、４－立方体（②）、正２４胞体（③）、正１２０胞体（④）の展開例を示す。図表3-1-16の４－立方体の例のように、各展開例には何通りかづつの異形があって、それらすべてはまだ数え上げられていない。したがって、図には、各正多胞体について、可能な限りコンパクトでかつ全体として対称性が多い場合のみを示す。正１２０胞体については上から下へ完成していく（筆者、1983[4]）。

得られた展開模型をR^4においてすべての側面が２個の胞で共有されるように図表2-3-8にならって組み立てていけばそれぞれの正多胞体となるが、もともとの展開模型は、得られる結果がそのまま、たとえばDahinden(1972[5])がCellular Aggregateとして分類するような空間ユニット（住戸ユニット）が側面を共有し合いながら積層する日常的な建築の構成にそのまま関係している。

3－1－8　正多胞体の回転

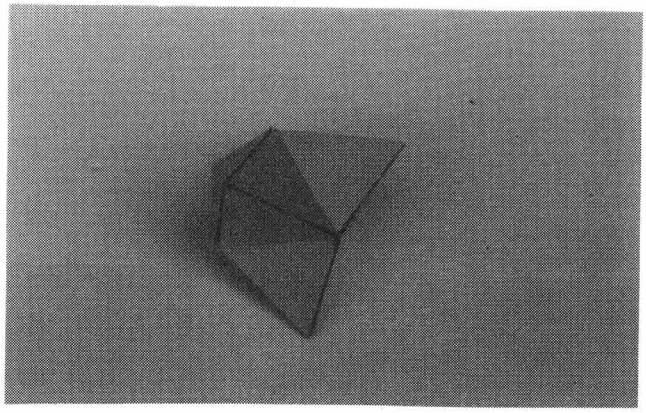
図表3-1-2 は、R^4 において正多胞体を回転させた場合の代表的な位置における直射影を点心、線心、面心、胞心の各模型として不連続的に示している。

それに対して、図表3-1-17～3-1-22に、各正多胞体の連続的な回転の様相を示す。４－立方体* 以外は中心射影となっているが、とくに、正１２０胞体と正６００胞体については、連続的な回転とともにR^4において視点を移動させ、一度内部を貫通させるために生じる拡大縮小の様相も示す。

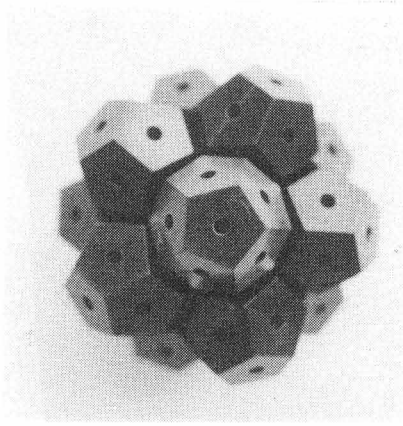
その場合の図から明らかなように、視点の接近と離脱に伴なって各側胞は拡大縮小されさらに多胞体の回転によって、各胞は規模や外形を変えながら内部から外部へ、あるいは外部から内部へと移動する。原則として内部の胞ほど体積は大きい（図表3-1-23）。

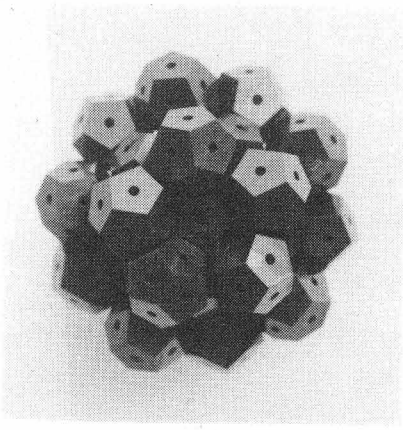
以上のような、中心射影による回転の様相について、Heiserman(1983)[6] は４次元４角錐を例にとって自動製図をしているが、計算過程と表示テクニックは本章によるものと基本的に異なっている。

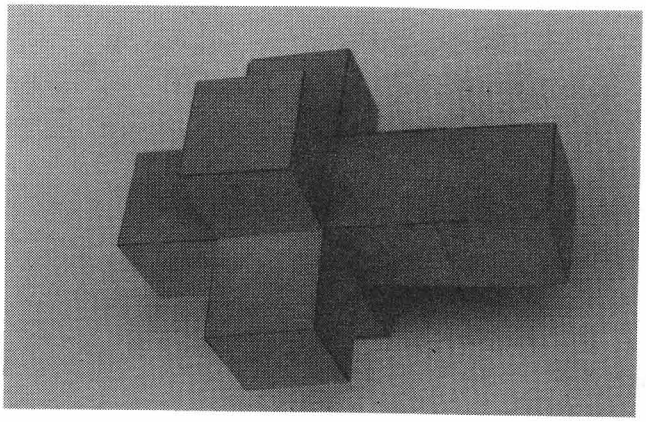
＊ ４－立方体については図表2-2-5 および図表2-3-17～20などで回転の様相を詳細に示してあるため、本章ではとくに建築上の形象に関係すると思われる直射影で示す。



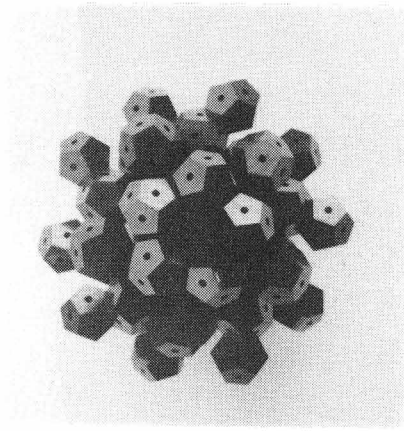
①

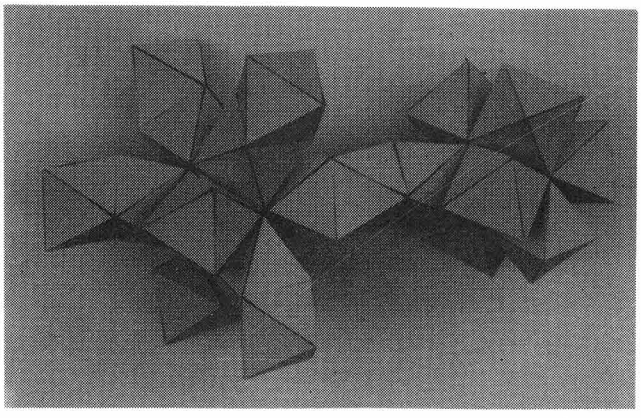




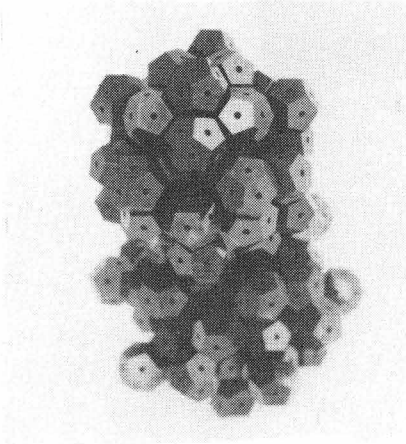


②



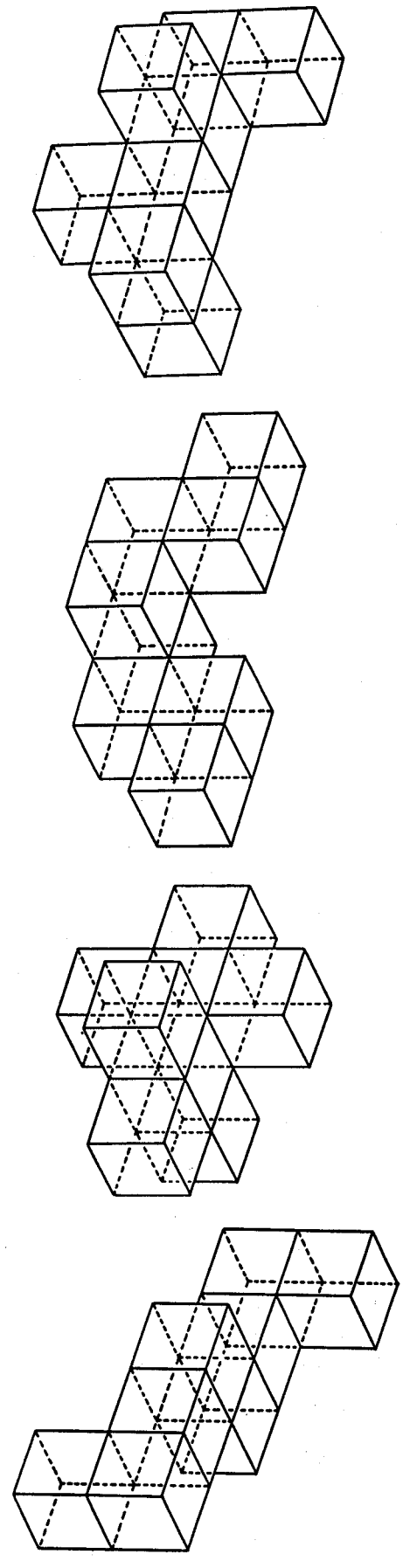


③

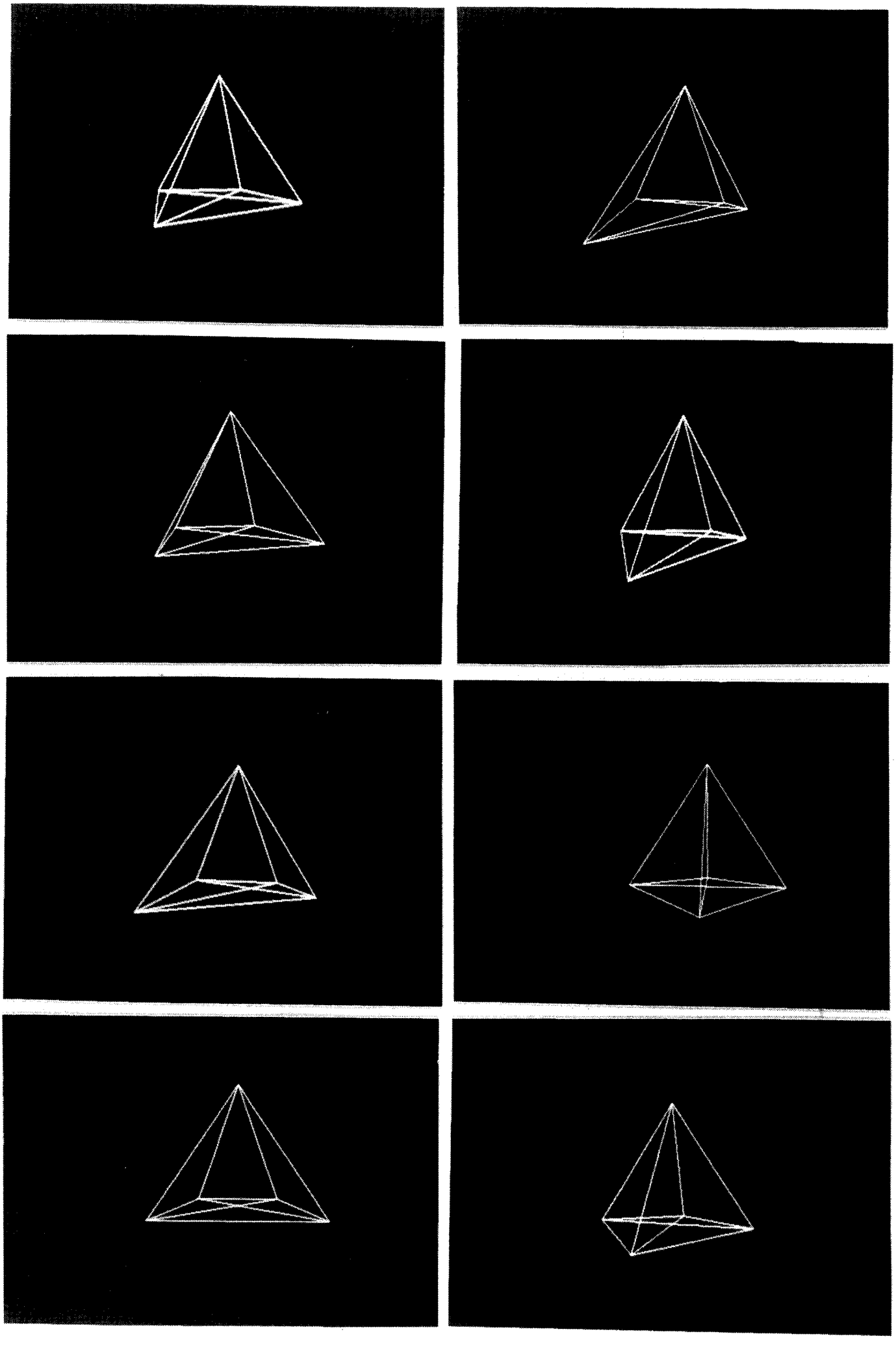


④

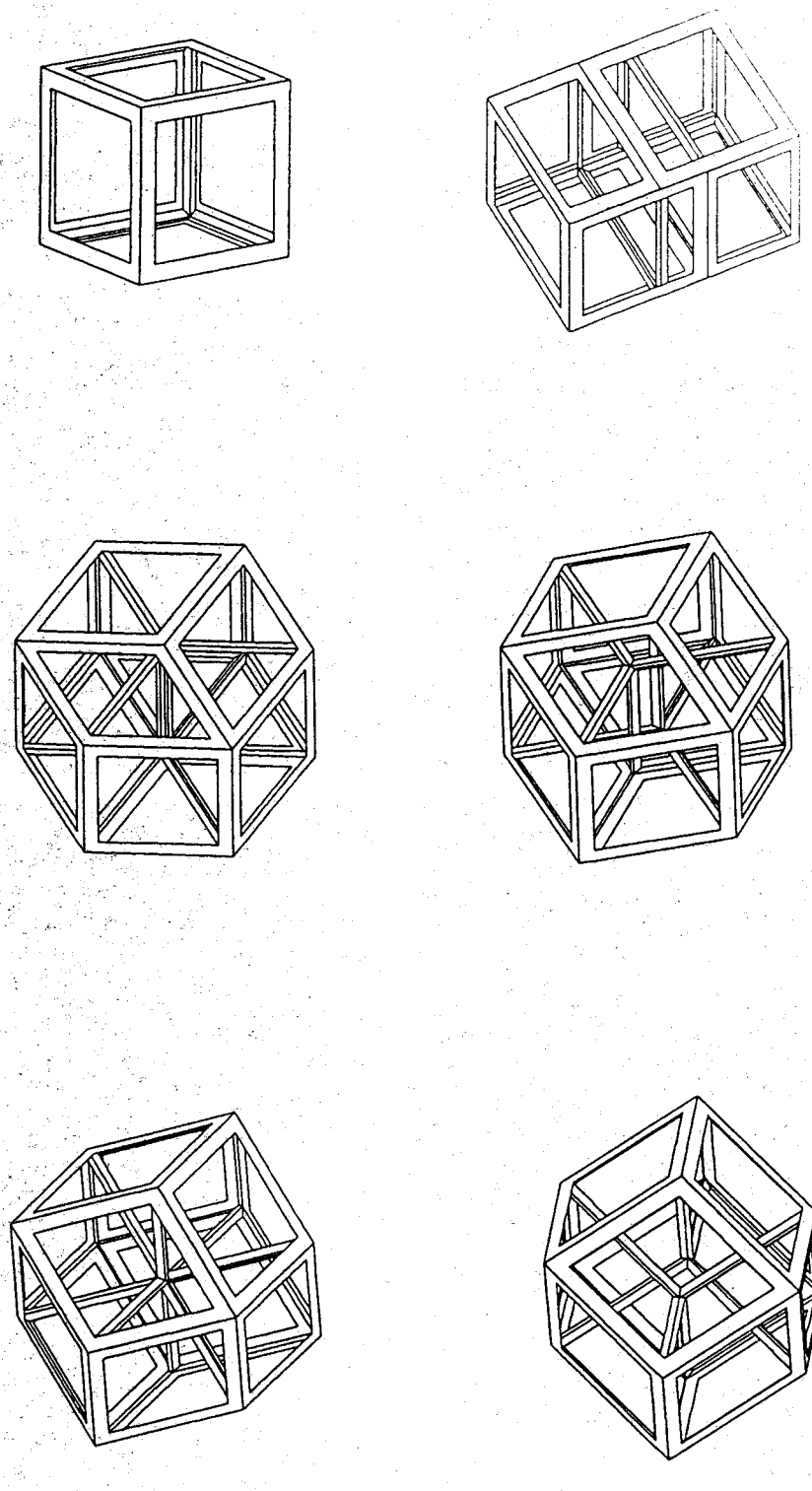
図表　3-1-15　正多胞体の展開模型。
①は正５胞体、②は４－立方体、③は正24胞体、
④は正 120胞体（上から下へ完成していく）。



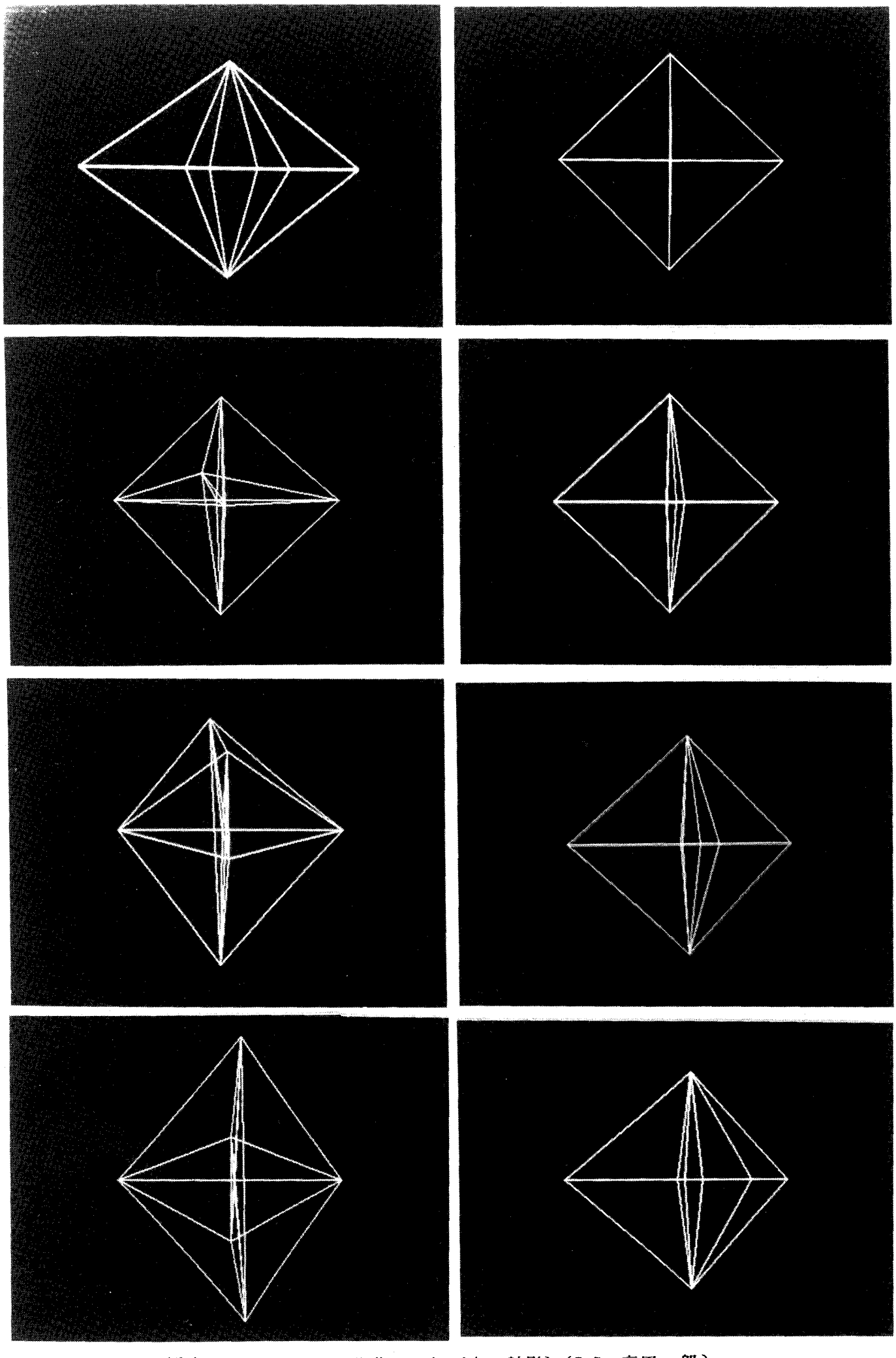
図表　3-1-16　4－立方体の代表的な展開模型



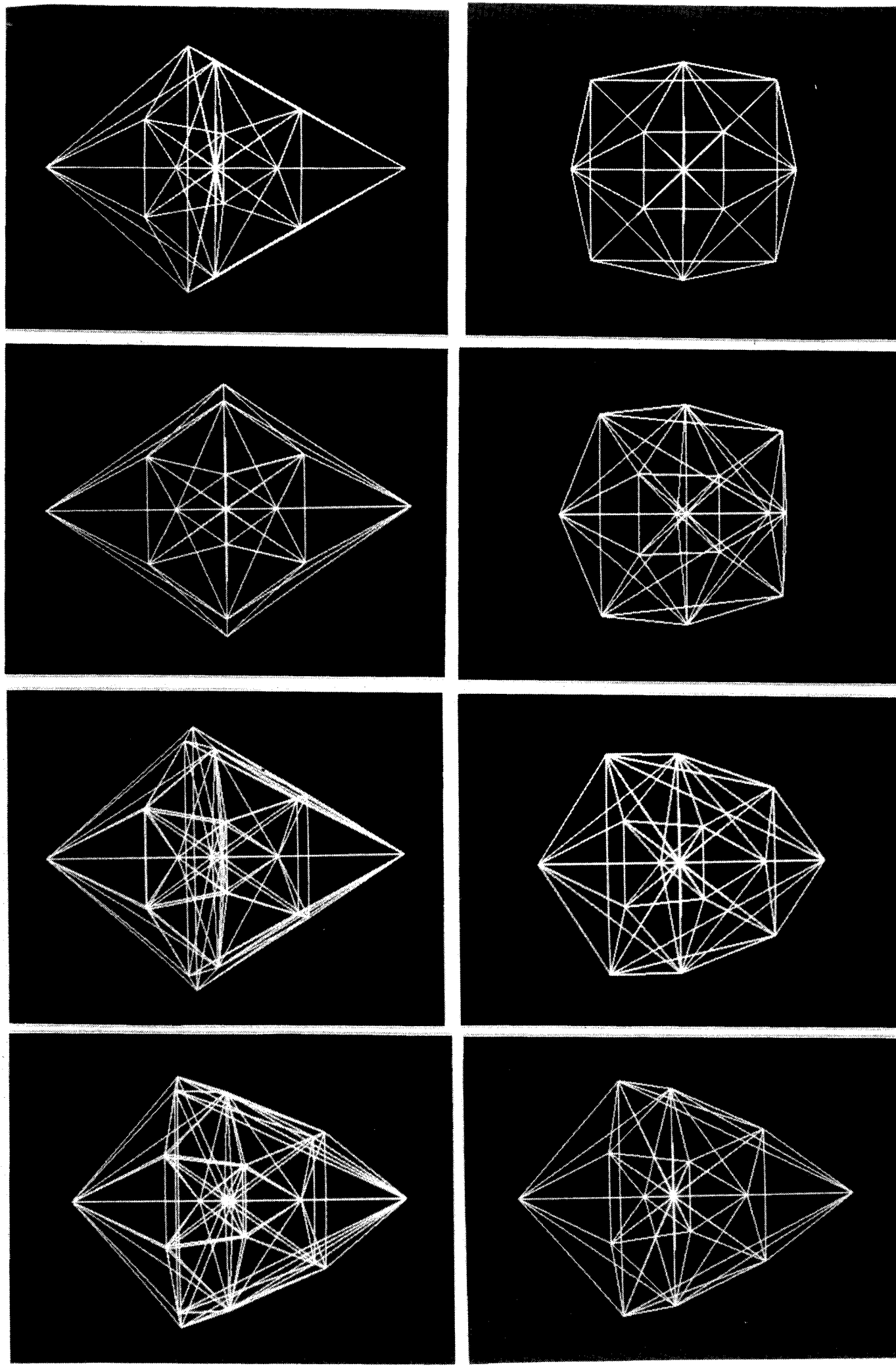
図表　3-1-17　正５胞体の回転（中心射影）（C.G.:高田一郎）



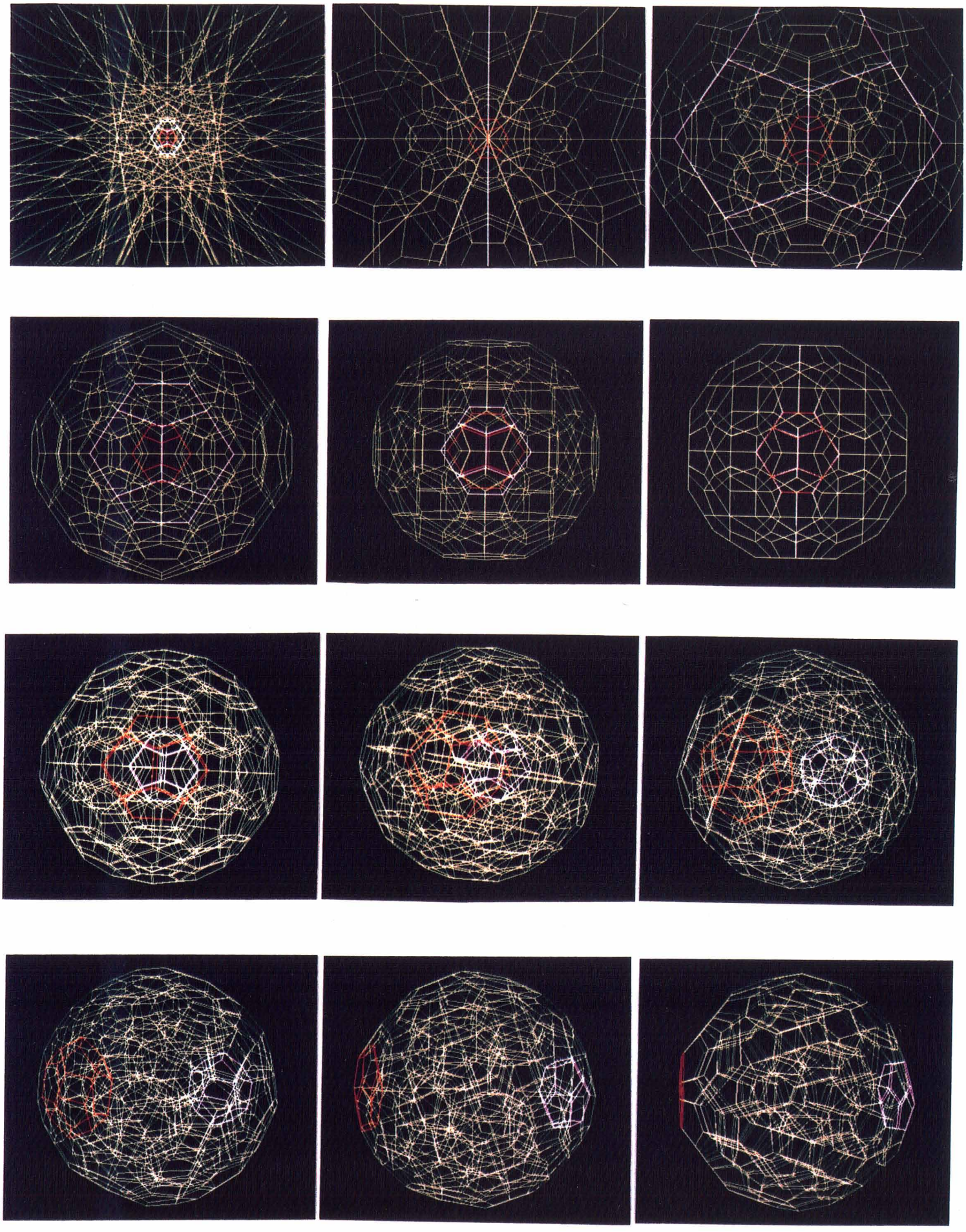
図表　3-1-18　4－立方体の回転(C.G.:守川穣)



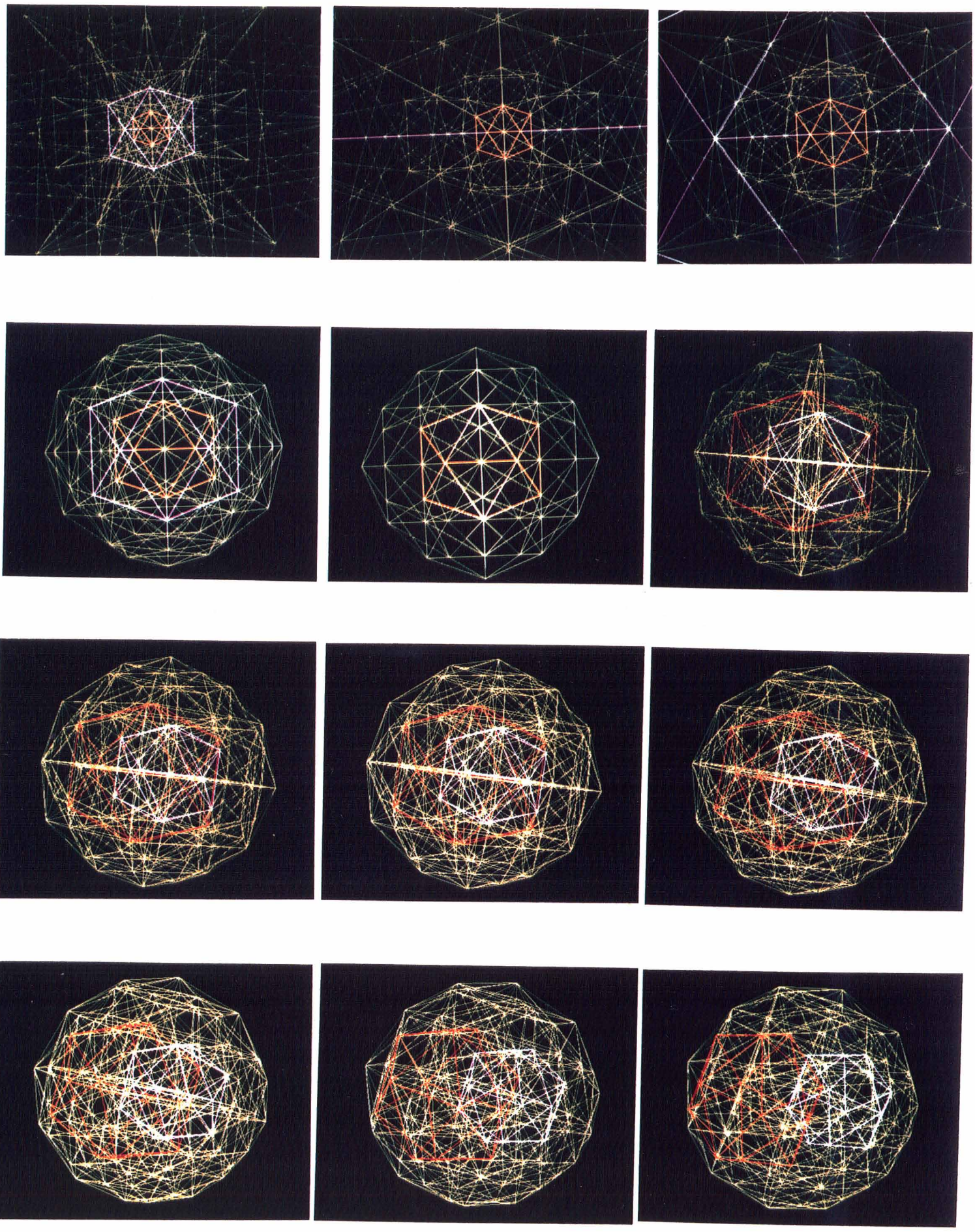
図表　3-1-19　正16胞体の回転（中心射影）（C.G.：高田一郎）



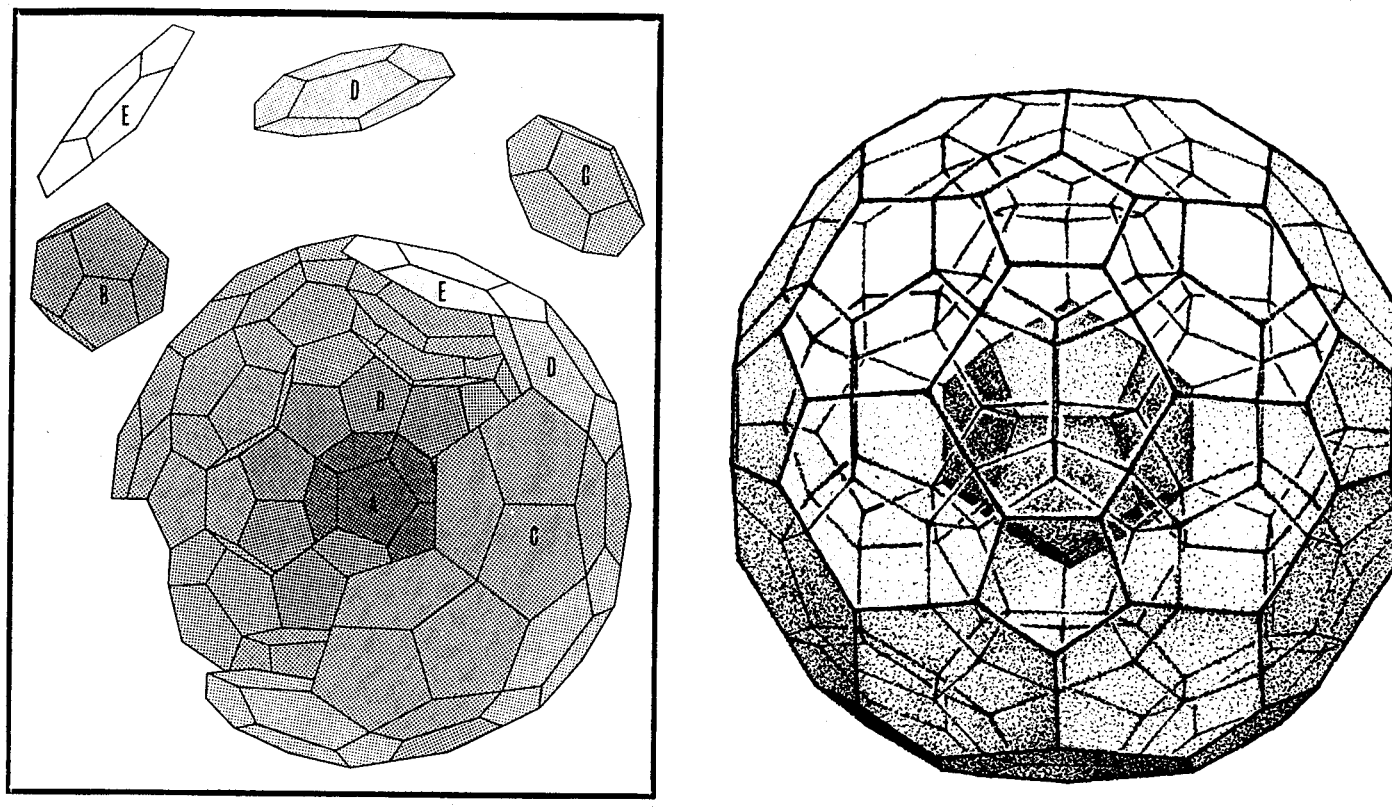
図表　3-1-20　正24胞体の回転（中心射影）（C.G.:高田一郎）



図表　3-1-21　正 120胞体の内部構造と回転（中心射影）（C.G.:高田一郎）



図表　3-1-22　正 600胞体の内部構造と回転（中心射影）（C.G.:高田一郎）



図表　3-1-23　正120 胞体の内部構造。
左は分解模型、右は稜のみによる表現。

3－1－9　正多胞体の変形

正多胞体は、胞（超平面）による、頂点まわり、稜まわり、あるいは側面まわり、の適当な切断によって代表的な半正多胞体に置き換えることができる。半正多胞体とは、任意の半正多面体状胞のみ、あるいは、２種類以上の正多面体状胞と半正多面体状胞、が各稜のまわりに同じ状態で集まった凸多胞体であって、すべての数え上げはまだ行なわれていない。

そのうち、本章では、建築上の形象への応用を目的として、稜を、１／２より小さく分断する場合（１／３タイプ）、１／２に分断する場合（１／２タイプ）、１／２より大きく分断する場合（２／３タイプ）について、その構成の概要を検討する。

図表3-1-24に、６種類の正多胞体のそれぞれから得られる上記３通りの半正多胞体の諸元を示す。

Ｒ．Ｐ．に原型としての正多胞体が配置され、上記各タイプの半正多胞体が、各欄に示されている。上段は、１本の稜のまわりの正多面体｛ｎ，ｍ｝状胞あるいは半正多面体（ａ、ｂ、---）状胞の周回状況を、また中段は、その場合の正多面体状胞あるいは半正多面体状胞の個数を、さらに下段は頂点、稜、側面、側胞の個数を、それぞれ示す。

互いに双対な多胞体（４－立方体と正１６胞体、ならびに正１２０胞体と正６００胞体）の２／３タイプは一致している。つまり、その場合の半正多胞体を媒介にして、互いに双対な多胞体は移り変り合う。

また、正１６胞体から導かれる１／２タイプは正２４胞体に一致している。

図表3-1-25に、それぞれの概形を示す。模型の製作に必要な側面の実形は、正多胞体の場合に用いた実形（図表3-1-10）に一致するか、もしくはその応用形となる（たとえば、６角形は決められた３角形を６枚集める。また８角形は決められた４角形を切断する）。

半正多胞体には、以上のほか、より一般的には、たとえば、R^3 における正多角柱や反正多角柱に相当するものなど数多くある（たとえば Coxeter, 1985[7]）。

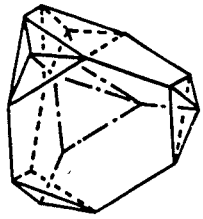
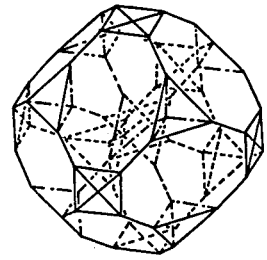
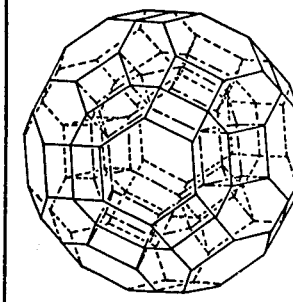
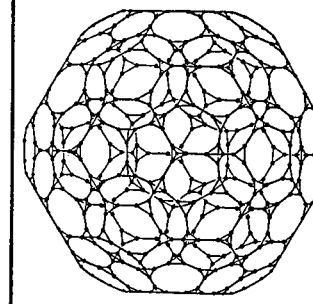
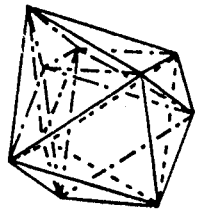
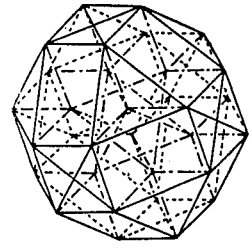
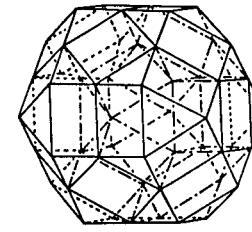
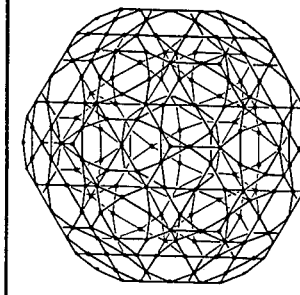
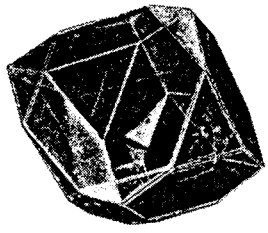
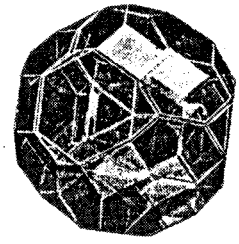
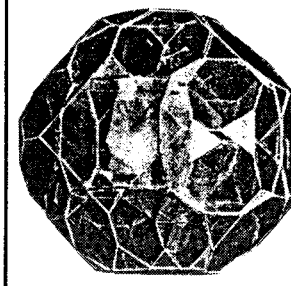
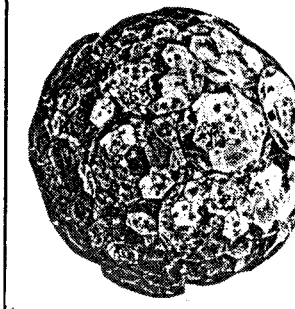
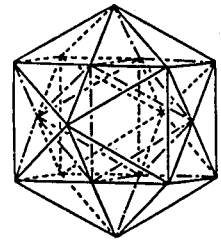
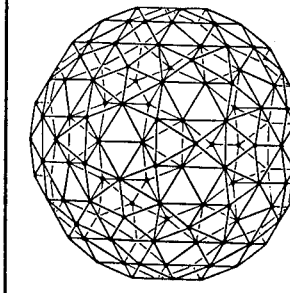
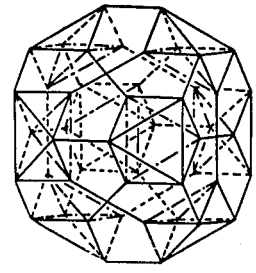
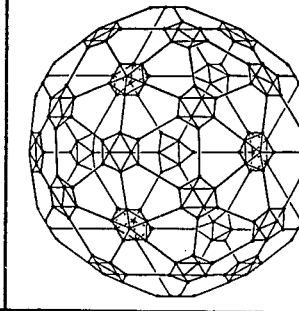
それに対して、逆に側胞を拡大することによって導かれる規則的な多胞体が星形正多胞体である。

正多胞体の側胞を拡大していって他の側胞と面分で交わらせたとき得られる、もとの正多胞体と同じ対称性を持つ多胞体（ただし、複数個の正多胞体に分離できないと考えられるもの）を星形正多胞体という。

星形正多胞体にはすべてで１０種類あることが知られていて、R^3 における星形正多面

R.P.	{3,3,3}	{4,3,3}	{3,4,3}	{5,3,3}
$\frac{1}{3}$	$\{3,3\}(3,6,6)^2$ 5 5 20,40,30,10	$\{3,3\}(3,8,8)^2$ 16 8 64,128,88,24	$\{4,3\}(4,6,6)^2$ 24 24 192,384,240,48	$\{3,3\}(3,10,10)^2$ 600 120 2400,4800,3120,720
$\frac{1}{2}$	$\{3,3\}\{3,4\}^2$ 5 5 10,30,30,10	$\{3,3\}(3,4,3,4)^2$ 16 8 32,96,88,24	$\{4,3\}(3,4,3,4)^2$ 24 24 96,288,240,48	$\{3,3\}(3,5,3,5)^2$ 600 120 1200,3600,3120,720
$\frac{2}{3}$	$(3,6,6)^3$ 10 30,60, 40,10	$(3,6,6)(4,6,6)^2$ 16 8 96,192,120,24	$(3,8,8)^3$ 48 288,576,336,48	$(3,6,6)(5,6,6)^2$ 600 120 3600,7200,4320,720
$\frac{1}{2}$		$\{3,4\}^3$ 24 24,96,96,24		$\{3,4\}\{3,5\}^2$ 600 120 720,3600,3600,720
$\frac{1}{3}$		$(3,6,6)\{3,4\}^2$ 16 8 48,120,96,24		$(3,6,6)\{3,5\}^2$ 600 120 1440,4320,3600,720
R.P.		{3,3,4}		{3,3,5}

図表　3-1-24　代表的な半正多胞体の概要。
R.P.はそれぞれを導く正多胞体。各欄中、上段は1本の稜の回りに集まる正多面体状胞あるいは半正多面体状胞の種類、中段はその個数、下段は左から頂点、稜、側面、側胞の個数。

R.P.	{3,3,3}	{4,3,3}	{3,4,3}	{5,3,3}
1/3				
1/2				
2/3				
1/2				
1/3				
R.P.		{3,3,4}		{3,3,5}

図表　3-1-25　図表3-1-24に示す半正多胞体の概形

体がすべて正１２面体あるいは正２０面体のいずれかから導かれるのと同じく、すべて正１２０胞体あるいは正６００胞体のいずれかから導かれる（一松、1983)[8]。

図表3-1-26に各星形正多胞体の諸元のうち模型制作に必要なものを Coxeter(1973)[9]に従って示す。図表3-1-27は、そのうちの、{5/2，５，３}、{５，5/2,３}、{5/2,３，３}についての、それぞれの胞心模型の代表例の創成過程である。右列、中央列、左列の順に上記の３種類が示されている。いずれにおいても、もっとも中心（図表では最上段）にくるべき３種類の星形正多面体（右から{5/2,５}、{５，5/2}、{5/2,３}）は省略されているが、この３種類の星形正多面体状胞が、規模や外形を変え互いに相貫し合いながら集まって全体として正１２０胞体あるいは正６００胞体の持つ対称性に従った多胞体となっている。側面の実形については筆者(1983)[10]によるが、いずれも、半正多胞体の場合同様、正多胞体の側面の実形から容易に導かれる。

なお、Chilton(1980)[11]は$\{3,5,\frac{5}{2}\}$，$\{5,3,\frac{5}{2}\}$，$\{5,\frac{5}{2},5\}$，$\{\frac{5}{2},3,5\}$，$\{\frac{5}{2},5,\frac{5}{2}\}$の各模型を導いているが、それぞれの側面の実形の決定過程は明らかでない。

３－１－10　正多胞体と半正多胞体の連結

すでに４－立方体について例を示した（図表2-2-7)ように正多胞体は適当な頂点、稜、側面、側胞を共有し合いながらR^4内で連結し、場合によってはR^4を充塡する。

そのうち、頂点、稜、側面を共有し合う場合については、それらのR^3への射影が側面を共有し合ってR^3を充塡していてもR^4では空隙を残している。

それに対して、側胞を共有する場合にはR^4を充塡することもでき、とくに規則的なものとして１種類のみの正多胞体（４－立方体、正１６胞体、正２４胞体）による４次元空間充塡図形３種類が知られている（図表3-1-28）。図表中、正１６胞体の点心模型と胞心模型による場合は結果として一致している。正２４胞体の面心模型を連結する場合は、異種（中間的な状態）の模型が加わっている。また、正１６胞体の線心模型による場合は４－立方体の点心模型による場合を外形とする形姿となる。

R^4において空隙を残すことを認める場合は、さらにさまざまな胞を媒介とする連結図形が得られる。

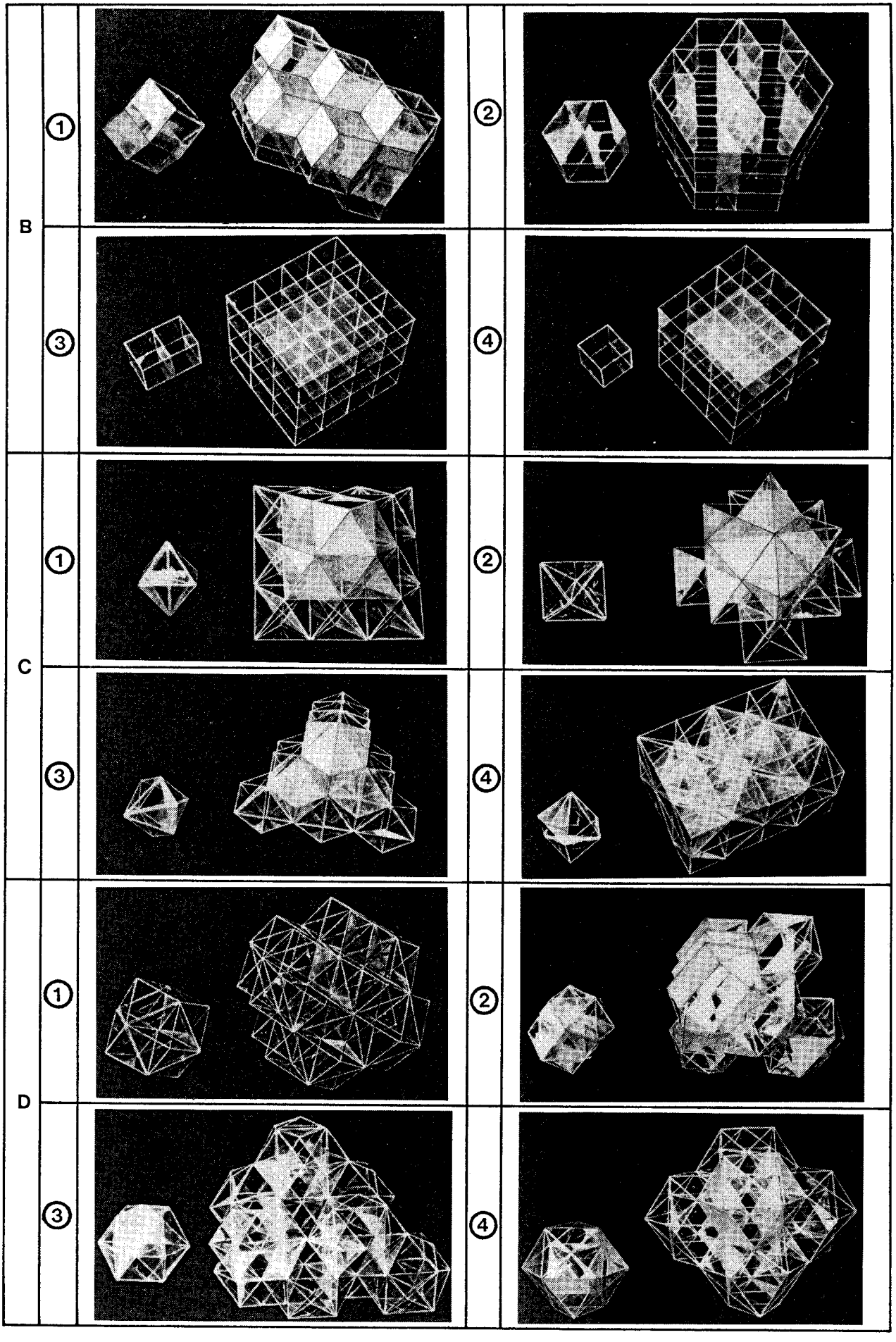
例えば、正１２０胞体は、図表3-1-29上段の①（点心模型）と②（線心模型）のように周期的にも、また同図③（面心模型）と④（胞心模型）のように非周期的にも連結させられていく。いずれも正１２面体状胞を共有し合っている。とくに非周期的な場合は、各正１２０胞体の中心は、図中の全線で示すように、２種類の平行６面体によるR^3の非周期的充塡図形（３－３で触れる）の頂点にくる。

	V	E	F	C
5/2, 5, 3	120	1200	720	120
3, 5, 5/2	120	720	1200	120
5, 5/2, 5	120	720	720	120
5/2, 3, 5	120	720	720	120
5, 3, 5/2	120	720	720	120
5/2, 5, 5/2	120	720	720	120
3, 5/2, 5	120	720	1200	120
5, 5/2, 3	120	1200	720	120
5/2, 3, 3	600	1200	720	120
3, 3, 5/2	120	720	1200	600

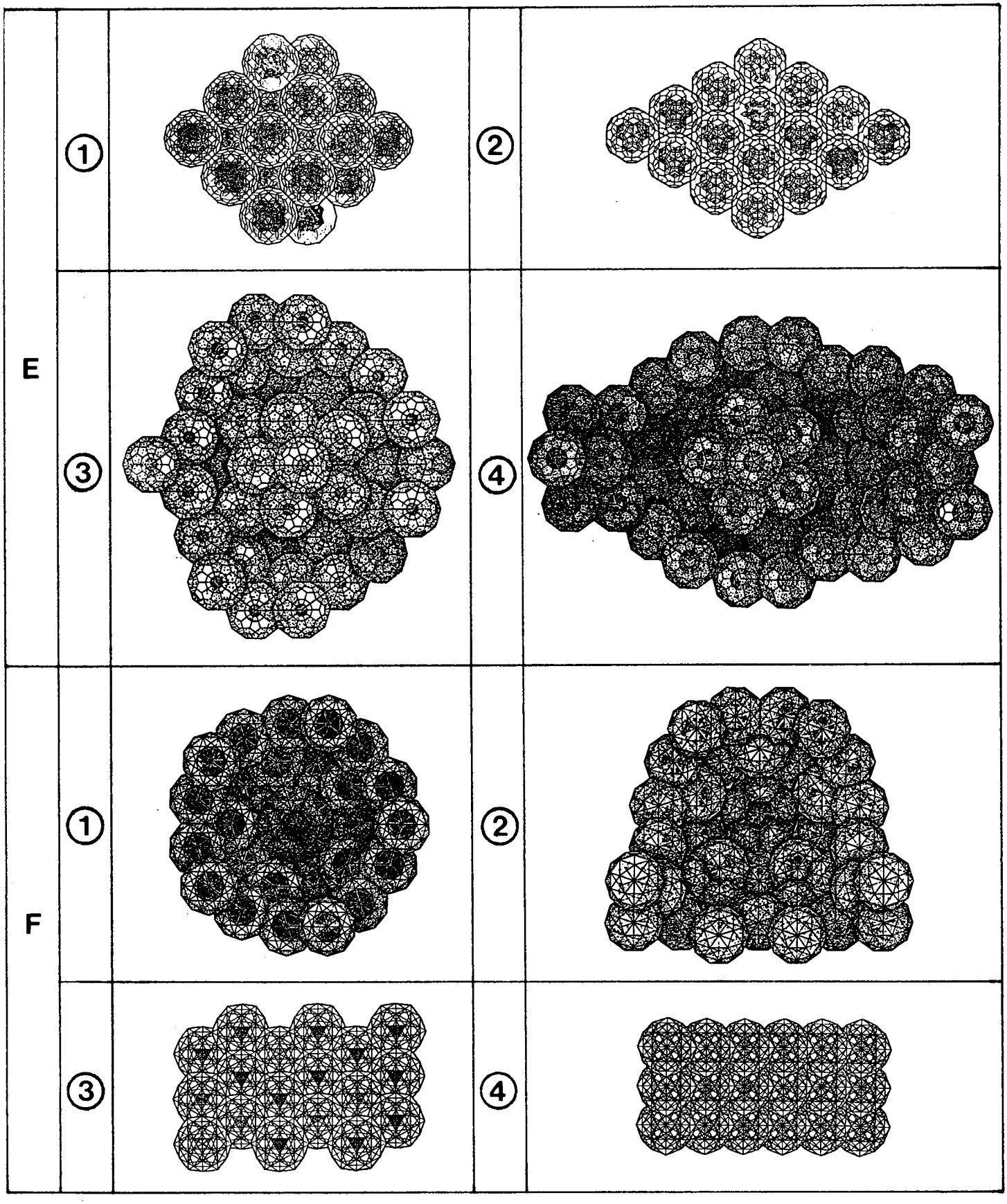
図表　3-1-26　左端列にSchläfli記号で示す星形正多胞体の頂点(V)、稜(E)、側面(F)、側胞(C)の個数



図表　3-1-27　代表的な星形正多胞体の構成過程。上から下へ完成していく。
右列は｛5/2 ，５，３｝、中央列は｛５，5/2 ，３｝、左列は｛5/2 ，３，３｝。



図表　3-1-28　図表3-1-2 に従って各欄左に示した正多胞体による４次元空間充塡図形。Ｂは４－立方体、Ｃは正16胞体、Ｄは正24胞体。①は点心模型、②は線心模型、③は面心模型、④は胞心模型



図表　3-1-29　図表3-1-2 に従って示した正120 胞体（E）と正600 胞体（F）の4次元空間における側胞を共有し合う連結図形の例。
①は点心模型、②は線心模型、③は面心模型、④は胞心模型。

同様の試みは正６００胞体についても、同図表の③（面心模型）と④（胞心模型）のように周期的にも、①（点心模型）と②（線心模型）のように非周期的にも行なうことができ、この場合は、重５角錐状の部分を共有し合う。

一方、半正多胞体を考慮に加えると、つぎのような側胞を媒介とする連結あるいは充塡形態を導くことができる。

図表3-1-30は図表3-1-25のそれぞれに正多胞体を加えた場合の４次元空間充塡図形である。各欄上段に記すような規則的な多胞体をユニットとしている。いいかえれば、各欄下段に記すような規則的な多面体状胞（射影されているため外形はさまざまに変化）をユニットとしている。そのうち、とくに、｛３，４，３｝（正２４胞体）から導かれるものは、１種類のみの半正多胞体による４次元空間充塡図形であって、空隙は残らない。また｛３，３，４｝（正１６胞体）の１／２タイプによるものは正２４胞体の胞心模型による４次元空間充塡図形（図表3-1-28のD-④）に一致している。

図表3-1-31は図表3-1-25の正120 胞体と正６００胞体の１／２タイプ（７２０胞体）のみを用いた連結図形であって、図表3-1-29同様、R^4 において空隙は残すものの、周期的（図示）にも非周期的にも連結していく。共有しているのは、いくつかの胞の集積部分であって、先述した頂点の座標からも決定されるように、相貫線ならびに接地面は平面多角形となっている。

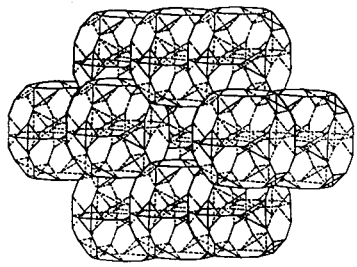
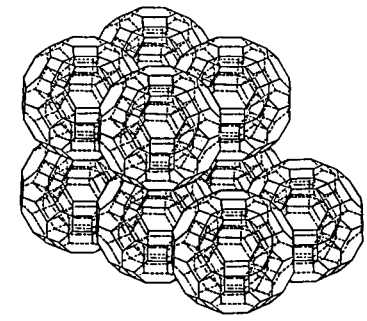
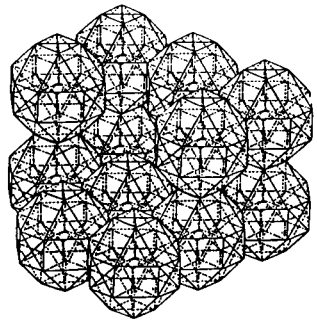
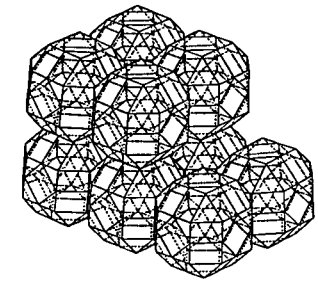
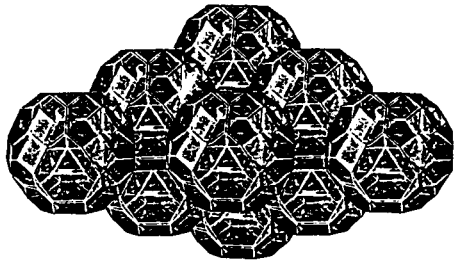
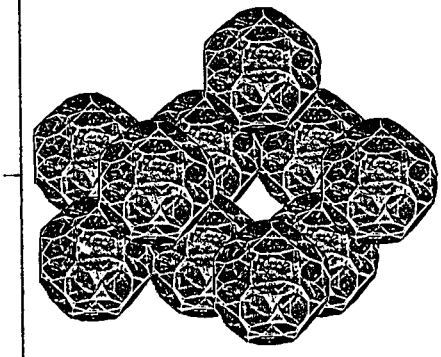
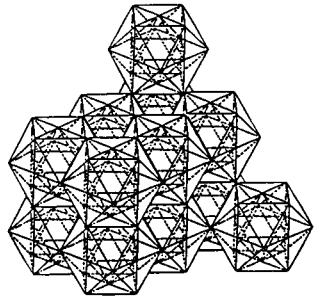
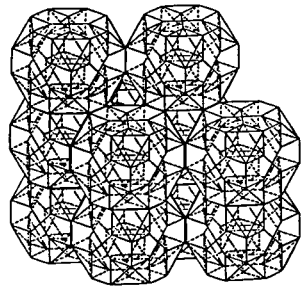
同様な構成は、正６００胞体と上述の７２０胞体とのあいだなどでも可能であり、こうした操作を繰り返していけば、正120 胞体および正６００胞体とそれから導かれるさまざまな半正多胞体とを周期的あるいは非周期的に連結させたさまざまな空間構成が、一定の秩序に基づいて系統的に生まれることになる。

３－１－１１　本章の結論

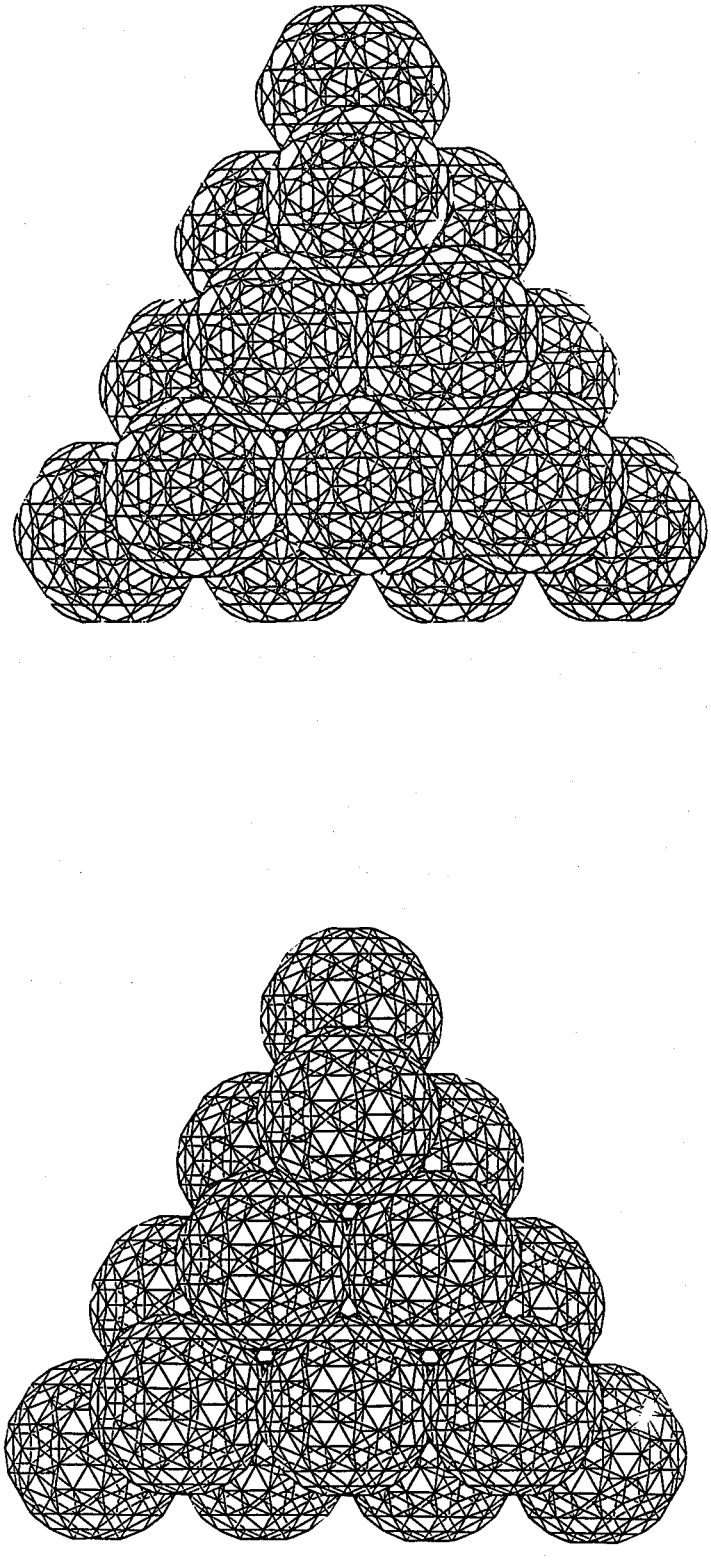
前章までに検討してきた多胞体の持つ一般的基礎的な意味での建築的性質やその建築への実際的な応用の可能性は、本章で考察したように、正多胞体ならびにそれの変形としての半正多胞体や星形正多胞体を媒介として、系統的に、かつ一定の秩序のもとに、具体化される。

つまり、正多胞体の持つ高度の規則性、対称性、と明快な定量的性質が、抽象性の高い一般的な多胞体、ひいては３次元の広がりを持つ図形あるいは４次元空間、の持つ不明瞭さを克服して、新しい空間形成手段を系統的に提供するのである。

とくに、正多胞体の代表的な射影を示す図表3-1-2 ならびにその半正多胞体化としての図表3-1-25、さらに充塡図形や連結図形としての図表3-1-28～31などはいずれも直接建築上の形象に結び付く内容を持っている。しかも、各形態の側面の実形は原則として図表3-

R.P.	{4,3,3}		{3,4,3}	
$\frac{1}{3}$		{3.3.3} $\frac{1}{3}${4.3.3} {3.3} (3.8.8)		$\frac{1}{3}${3.4.3} {4.3} (3.8.8)
$\frac{1}{2}$		{3.3.3} $\frac{1}{2}${4.3.3} {3.3} (3.4.3.4)		$\frac{1}{2}${3.4.3} {4.3} (3.4.3.4)
$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}${3.3.3} $\frac{2}{3}${4.3.3} (3.6.6) (4.6.6)		$\frac{2}{3}${3.4.3} (3.8.8)
$\frac{1}{2}$		{3.4.3} {3.4}		
$\frac{1}{3}$		{3.4.3} $\frac{1}{3}${3.3.4} {3.4} (3.6.6)		
R.P.	{3,3,4}			

図表　3-1-30　図表3-1-25に従って示した代表的な半正多胞体と正多胞体による4次元空間充塡図形。各欄上段にユニットとしての多胞体名を同じく下段にユニットとしての多面体状胞名を示す。



図表　3-1-31　正120 胞体の 1/2タイプ（上）と正 600胞体の1/2 タイプ（下）の
半正多胞体の連結図形

つまり、正多胞体は、従来の正多面体を基礎にする面的な造形を、建築計画上の空間そのものの新鮮な造形へと系統的に発展させる原理を具体的かつ実用的に持っている。

本章での引用文献

1) H.S.M.Coxeter, Regular Polytopes (Dover, 1973), p.14

2) 一松信、"高次元の正多面体"、日本評論社、1983、 PP.97～98

3) Koji Miyazaki, "A Model of the 120-cell and Some Spatial Arrangements Derived from Four Kinds of Pentagons", Structural Topology,#7(1983),3～12

4) Ibid.

5) Justus Dahinden, Urban Structures for the Future (Praeger Publishers,1972), PP.42～65

6) David L.Heiserman,Experiments in Four Dimensions (TAB Book,1983),321～336

7) H.S.M.Coxeter, "Regular and Semi-Regular Polytopes. II", Mathematishe Zeitschrift, 188 (1985), 559～591

8) 一松(1983)、op. cit., P.143

9) Coxeter(1973), op. cit., pp.294～295

10) Koji Miyazaki, "Models of some Stellated 4-Polytopes" ,Structural Topology, #8(1983), 15～22

11) B.L.Chilton, "Principal Shadow of the 12 Pentagonal Regular 4-Dimensional Objects(Polytopes)", Leonardo, Vol.13(1980), 288～294

３－２　正多胞体の建築的応用

３－２－１　本章の目的
３－２－２　正５胞体の応用
３－２－３　４－立方体の応用
３－２－４　正１６胞体の応用
３－２－５　正２４胞体の応用
３－２－６　正１２０胞体の応用
３－２－７　正６００胞体の応用
３－２－８　半正多胞体と星形正多胞体の応用
３－２－９　本章の結論

３－２－１　本章の目的

正多胞体は、正多面体の対称性ならびにそれに付随する簡明な定量的性質を、正多面体より精緻な状態で動的に保有する能力を持つ。それとともに、従来の正多面体を基礎にする面的な建築上の造形を、３次元の広がりを持つ内部空間と構成部材の複合体としての建築の空間的な造形へと系統的に発展させる原理を具体的に持っている。

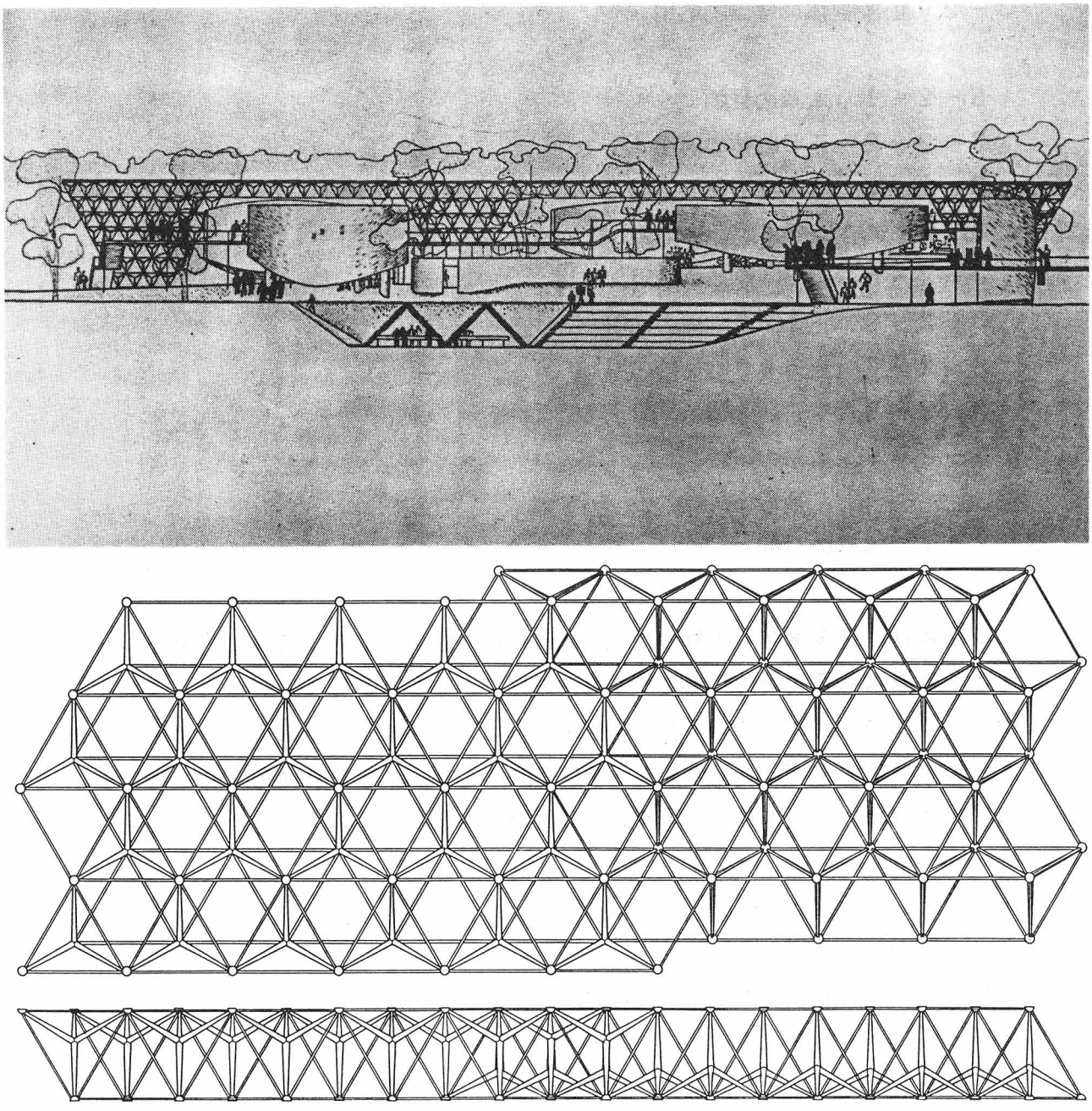
本章では、そのような原理の実際的な応用を試みる。

３－２－２　正５胞体の応用

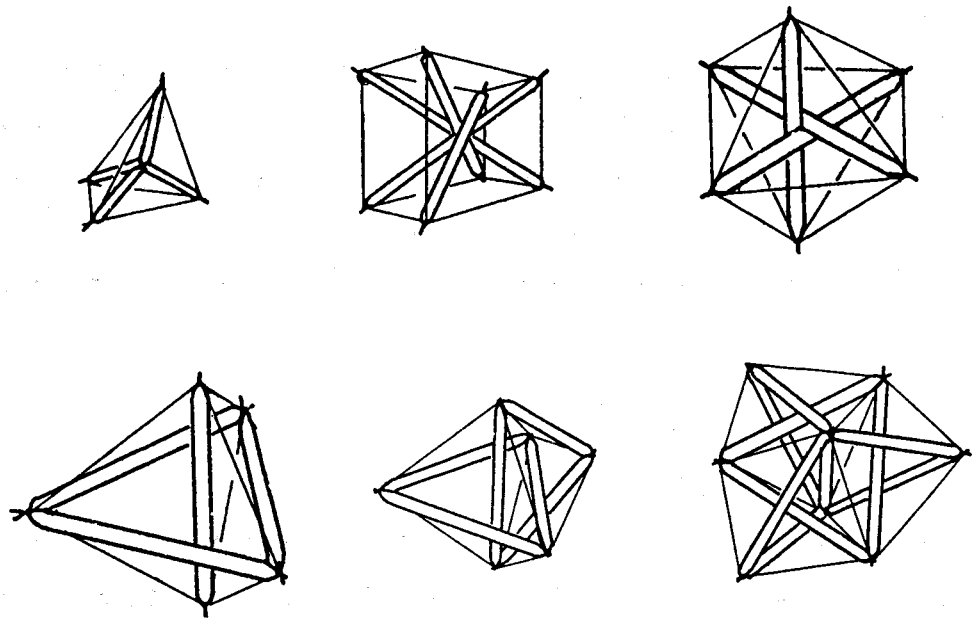
正５胞体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のＡ行の４通りにR^3 へ直射影される。

この図表3-1-2 において、①（点心模型）と④（胞心模型）の外形は正４面体に一致していて、内部には本論文で定義した４次元等測軸を持つ。この４次元等測軸の建築上の形象との関連性については２－４で見た通りである。つまり、この二通りの模型を中心として見る限り、正５胞体は正４面体以上に構造計画上の基本図形としての位置を持つ。図表2-4-13のFullerによるTensegrity Mast を初め、図表3-2-1 に示すような立体トラスの造形は、この場合の正5 胞体の射影による造形として把握することができる。

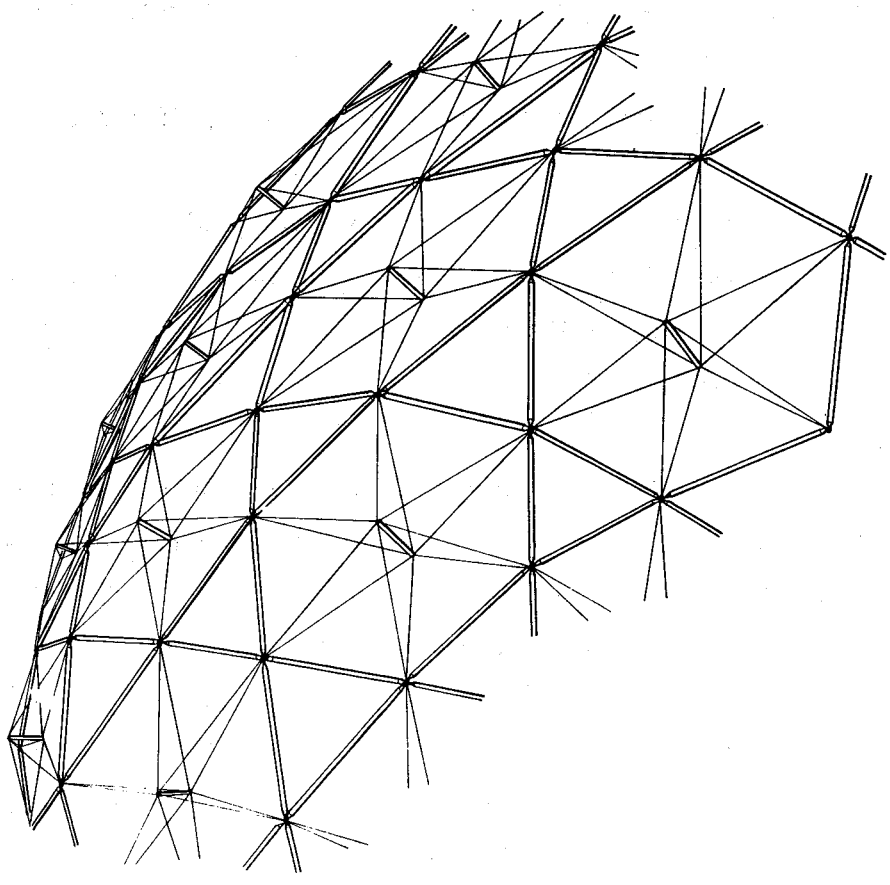
Tensegrityという単語はFullerの造語になるもので材料力学上経済的な張力(Tension) を総合的に応用した構造形式を意味する。その場合、力学上の制約により、図表3-2-2 のように、引張部材は凸多面体の稜を構成するように外部に配され、その内部に圧縮部材が配されるのがふつうであって、結局、部分的な形態は多胞体の



図表　3-2-1　正 5胞体の点心（あるいは胞心）模型を組込んだ立体トラス。
BX-58グリッドの基本構成（上）とそれによる空間計画例（下）。J.W.Soltan計画。
John Borrego, Space Grid Structures (1968)より。



図表　3-2-2　Tensegrity構造の基本図形。
Anthony Pugh, An Introduction to Tensegrity (1976)より。



図表　3-2-3　某Geodesicドーム計画案（部分）。Edward Popko案。
Edward Popko, Geodesics (1968)より。

射影と一致するのである。上述のTensegrity Mast にしても正５胞体の点心あるいは胞心模型状のユニットが連結されている。

このTensegrity構造の原理について、Pugh(1976[1])は図表3-2-2 下段のように重３角錐の結合から説明している。図表3-2-3 のGeodesicドームはこの原理の応用である。このようにPughによってTensegrity構造の原点に置かれる重３角錐状のユニットは正５胞体の線心模型と面心模型（図表3-1-2 ）に一致する。

なお、正５胞体の平面上への射影は図表1-6,7 ですでに見たように建築計画上の機能線や動線の基本図形ともなっている。

３－２－３　４－立方体の応用

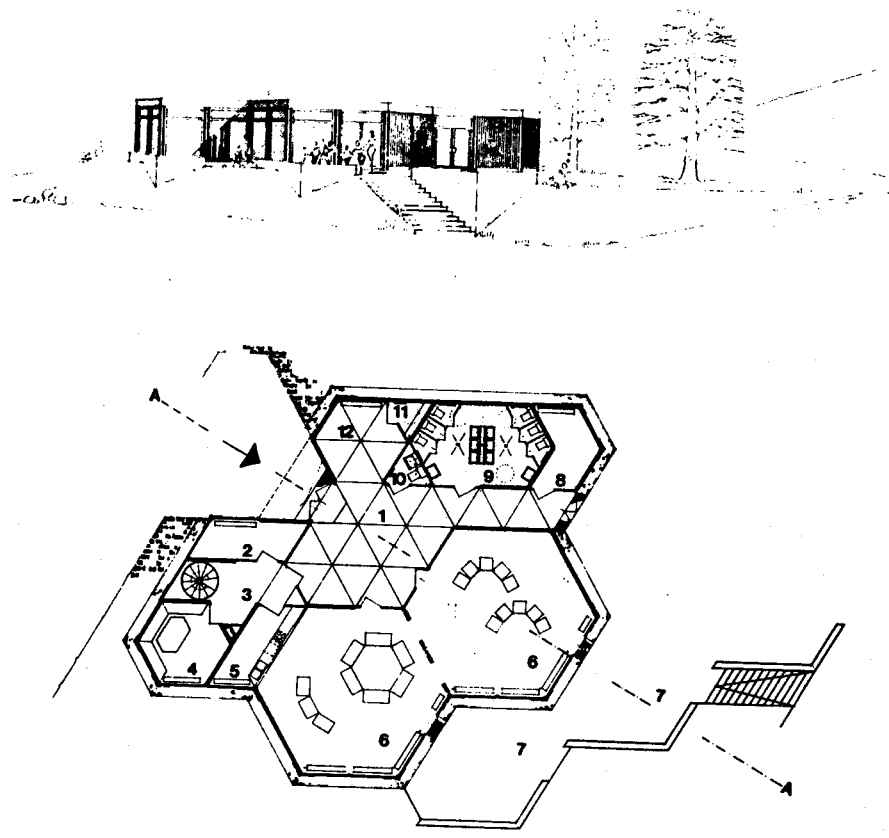
４－立方体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のＢ行の４通りにR^3 へ直射影される。正１６胞体の双対図形であって、図表3-1-28のＢ行のように側胞を共有し合ってR^4 を周期的に充塡する。

そのうち、①（点心模型）の外形は菱形１２面体であり、内部には正負両方向の４次元等測軸を持つ。菱形１２面体は側面を共有し合いながらR^3 を充塡する図形であり、かつ、４－立方体の射影としては側胞（平行６面体状胞）を共有し合いながら図表3-1-28のようにR^4 を充塡する図形であって、その図形的特徴は、建築上の造形において図表2-4-10や図表2-4-11のように応用されている。

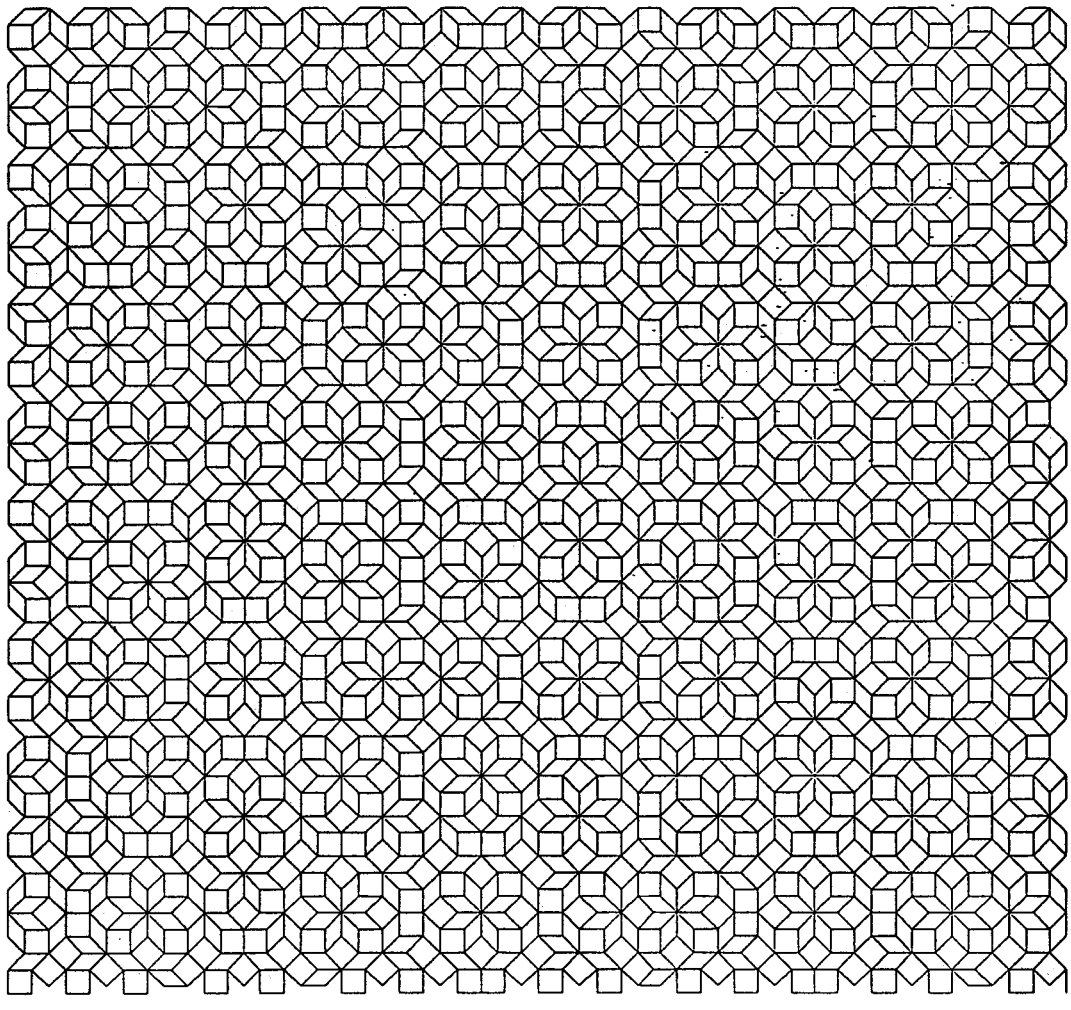
それに対して、②（線心模型）の外形は正６角柱であり、内部にはたがいに相貫し合った３個の菱形柱（６個の正３角柱の状態で示されている）が入る。正６角柱は菱形１２面体と同じく側面を共有し合いながらR^3 を充塡する図形であり、かつ４－立方体の射影としては側胞（菱形柱）を共有し合いながら図表3-1-28のようにR^4 を充塡する図形であって、その図形的特徴は、筆者(1979)[2]がすでに指摘したように、しばしば建築上の形象を決定してきている。図表3-2-4 に、顕著な例としての計画案を示す。

さらに、③（面心模型）は２個の直方体を連結させた直方体状、④（胞心模型）は単独の立方体状、の空間部分を示しているが、これらが建築上持つ基本的な役割についてはもはや指摘するまでもなく、とくに図表3-1-28のように連結させられた場合は、もっとも通常に見られる建築上の形象の基本形となる。

以上のような立体図形としての建築的特徴に加え、４－立方体によるR^4 の充塡図形の平面上における直射影は、たとえば図表3-2-5 に一例を示すような平行４角形による平面充塡図形を導くが、これは従来の正方格子に代わる建築計画上の新鮮な基本パターンとなりうると思われる。正方格子自身、図表3-2-5 の一つの変形である。



図表　3-2-4　Goslar幼稚園。E.Vatter 計画。1968。E＋P，8，より。



図表　3-2-5　4－立方体による4次元空間充塡図形の直射影としての平面格子の例
(C.G.:石原慶一)

3－2－4　正16胞体の応用

正16胞体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のC行の4通りにR^3 へ直射影される。4－立方体の双対図形であって図表3-1-28のように側胞を共有し合ってR^4 を周期的に充塡することができる。

そのうち、①（点心模型）は正3角形と直角2等辺3角形の2種類の3角形のみで構成され、その外形は正8面体となって、内部には3次元直交座標軸を持つ。したがって、それ自身としても建築的な内容を持つとともに図表3-2-2 の上段右端のようにTensegrity構造を構成する。また、図表3-1-28のようにR^4 を充塡するときは、伊藤(1972)[3]の提案する空間計画上の基本図形としてのCubicトラスと構造計画上の基本図形としてのOctetトラスとの合体図形（図表3-2-6)や，Borrego (1968)[4] のあげる立体トラスの基本形4種類（図表3-2-7)のうちのDirect Grid(同図表①）の中に組み込まれる形態となる。また、この形態は、図表3-2-8 左のような立方体と正8面体の合体図形の連結図形と見ることもでき、その場合は、たとえば同図表右のような計画案[5]への応用が可能であろう。

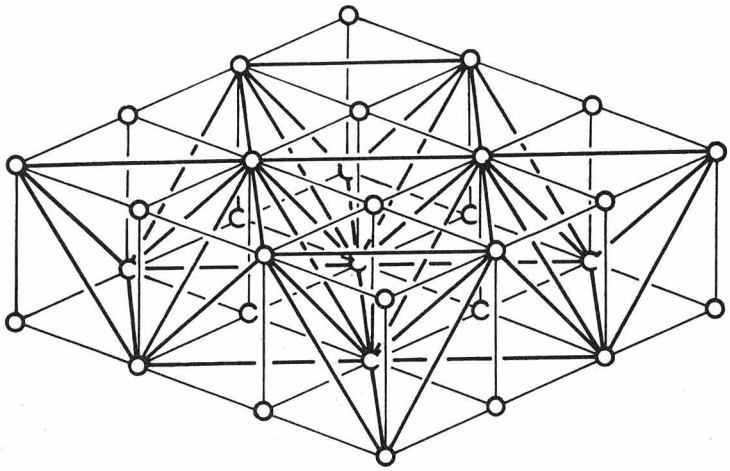
それに対して、②（線心模型）は4次元等測軸を構成する正4面体角 109°28′の補角である70°32′を頂角とする1 種類のみの二等辺三角形から構成され、図表3-1-28のようにR^4 を充塡するときは、すでに2－4で触れた図表2-4-10などの立体トラスに現われている造形となる。

③（面心模型）は正6角錐と正3角錐の合体図形であってそのままでの建築的応用は考えにくい。しかし、図表3-1-28のようにR^4 を充塡するときはその中に上述したBorregoによる図表3-2-7 の③(Differential Gerid)を生む。この立体トラスはStephane Du Chateau の考案したPyramitec System[6]の応用例としても知られている。

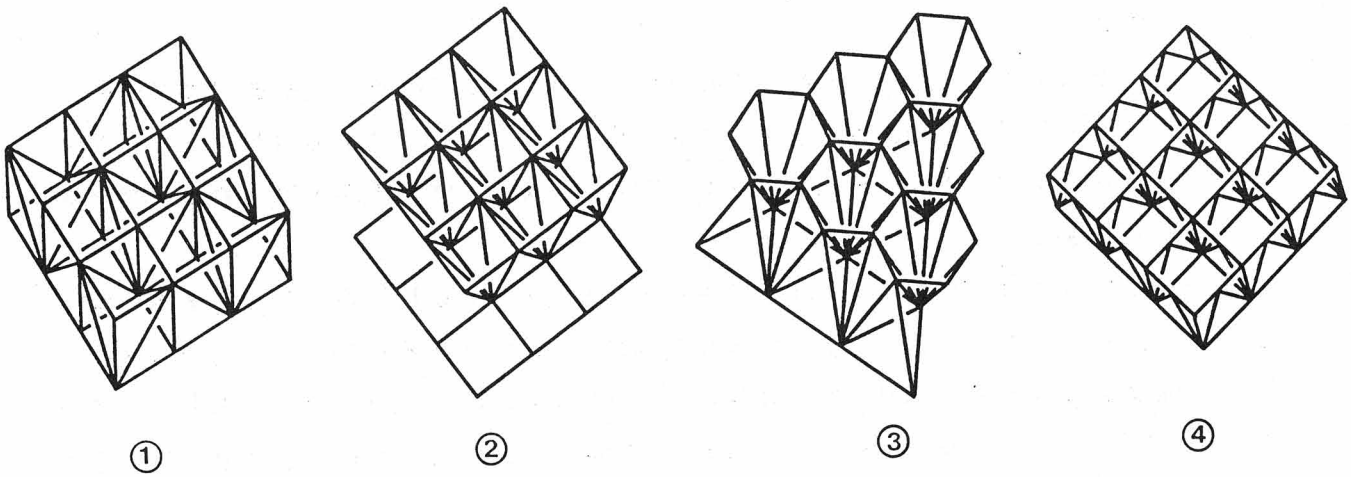
④（胞心模型）は①の点心模型と同じ2種類の3角形のみで構成される。ただし、点心模型がたえず正8面体を基礎としてR^4 を充塡していくのに対し、この胞心模型は立方体を基礎としてR^4 を充塡していくため、点心模型より以上に直接的に図表3-2-6 の伊藤の提案や図表3-2-7 のDirect Gridの造形を導くといえる。

3－2－5　正24胞体の応用

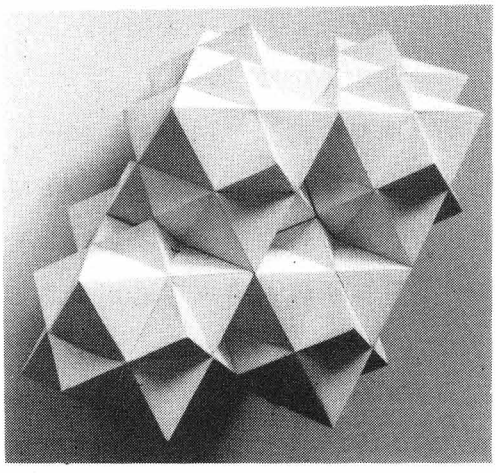
正24胞体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のD行の4通りにR^3 へ直射影される。6種類の正多胞体のうち、ただ一つR^3 における正多面体に相当する図形にはなっていない。自己双対図形であって、4－立方体、正16胞体同様、図表3-1-28のように側胞を共有し合ってR^4 を周期的に充塡する。

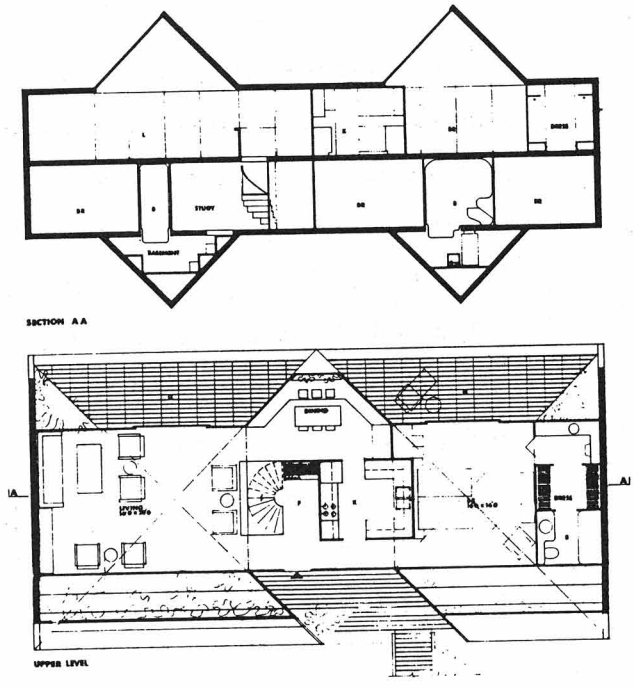


図表　3-2-6　伊藤邦明考案の Cubicトラスと Octetトラスの合体図形



図表　3-2-7　J.Borrego のあげる立体トラスの基本形。
①はDirect Grid 、②はOffset Grid 、③はDifferential Grid 、
④はLattice Grid。





図表　3-2-8　立方体と正8 面体の合体図形（左）とNew York Habitat－ I 計画案
M. Safdie 計画。 1967 。For Everyone A Garden (1974)より。

そのうち、①（点心模型）は正１６胞体の場合の線心模型と同じ１種類の２等辺３角形のみで構成されて、正１６胞体の線心模型を簡略化した模型となっている。つまり正１６胞体があくまでも４面体状胞の集積となっているのに対し、正２４胞体は８面体状胞の集積であって、２－４で触れた図表2-4-10,11 などの計画案にそのまま現われ、また図表2-4-16のような造形案も支配している。

②（線心模型）は正６角柱を２個の正６角錐で底面を共有させながら上下からはさんだ外形となっていて、６角形による平面格子を持つ建築上の形象にしばしば現われる。たとえば図表3-2-9 にDahindenの設計による例を示す。屋根に使われている２等辺３角形は、形状が簡明に決定される正２４胞体の線心模型に現われる６角錐を構成する２等辺３角形（図表3-1-10の正２４胞体の線心模型に使われる３角形のうちB）と正確に一致している。

③（面心模型）は、一見複雑な形状のため応用例は見ないが、線心模型と同様に正６角柱の連結図形を組込むことができる点や図表3-2-10のような平面格子（正８面体と立方８面体によるR^3 の充塡図形の直射影と一致）を持つ断面が得られる点で今後の応用範囲は広い。

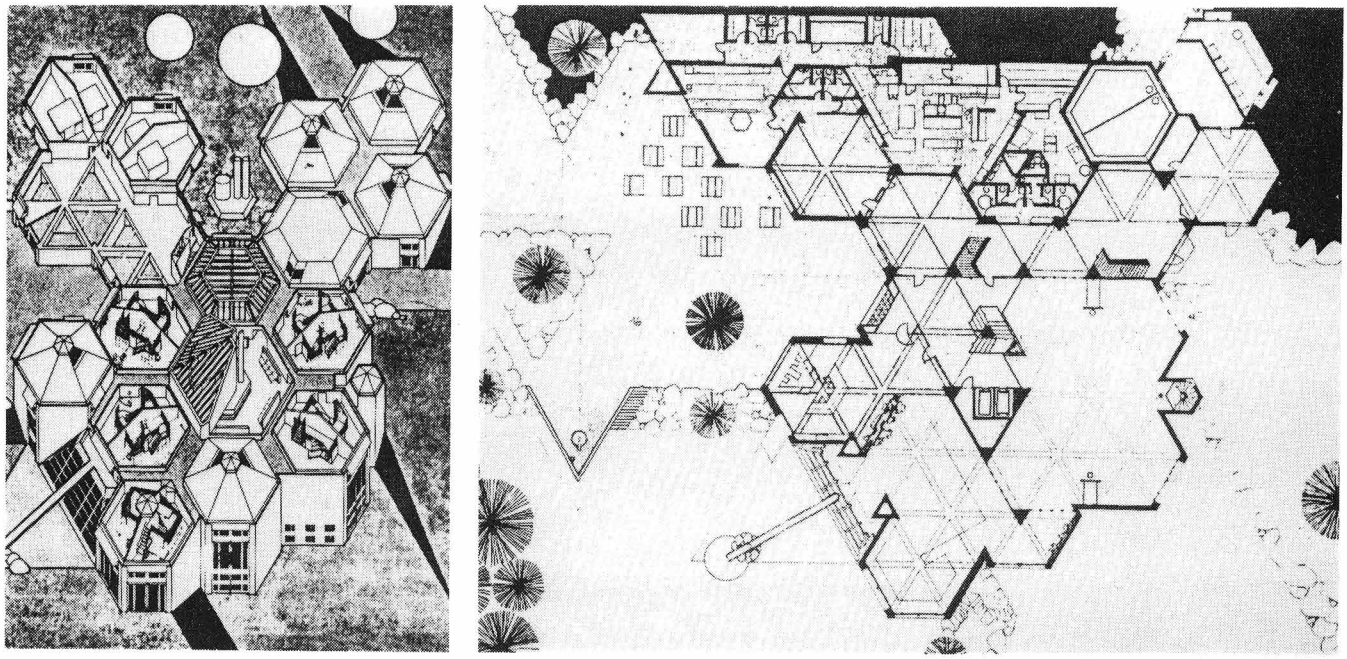
④（胞心模型）は、上述の正８面体と立方８面体によるR^3 の充塡図形を内部に持っている。つまり建築上の造形に利用されることの多い形態となっていて Friedman の提案する都市の目に見えない構造としての Infra-structure の中のＴＲタイプ(図表3-2-11）や、Borrego による図表3-2-7 の④(Lattice Grid)としての立体トラスなどと関係する。

３－２－６　正１２０胞体の応用

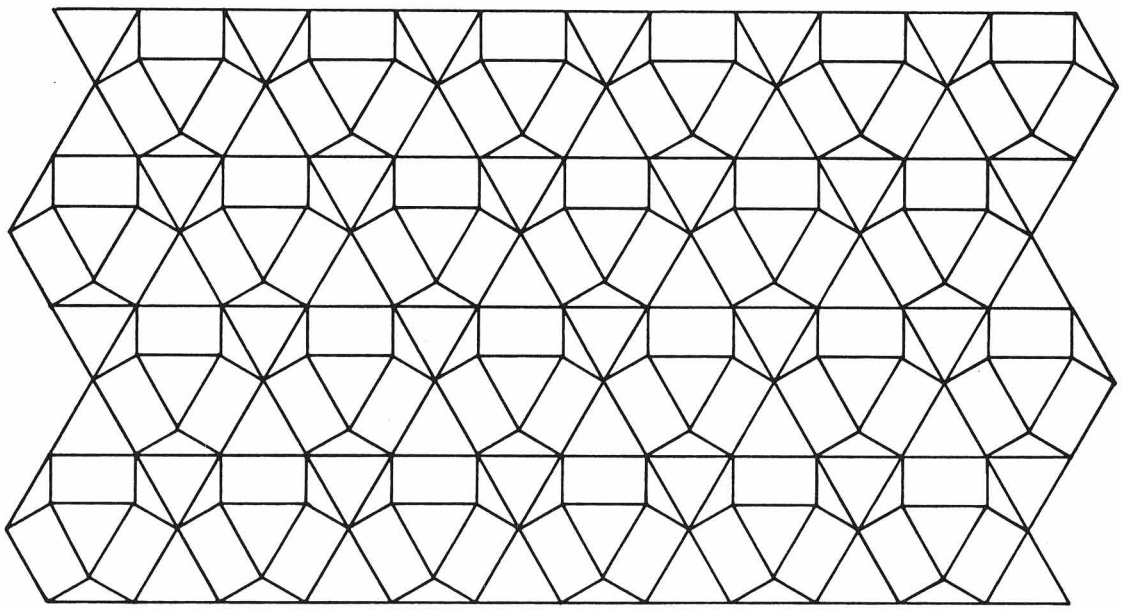
正１２０胞体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のＥ行の４通りにR^3 へ直射影される。R^3 における正１２面体に相当する図形で、正６００胞体と互いに双対である。

単独としての正１２０胞体の直射影は、すでに胞心模型に関して図表3-1-23でも見たように、内部への求心性、外部へ近づくほど扁平になる正１２面体状胞群の集積、正１２面体の正射影に現われる定量的な性質の明快な５角形の連結、などといった、複雑である反面整理された形象によって、実用的で新鮮な空間の構成に応用することができる。

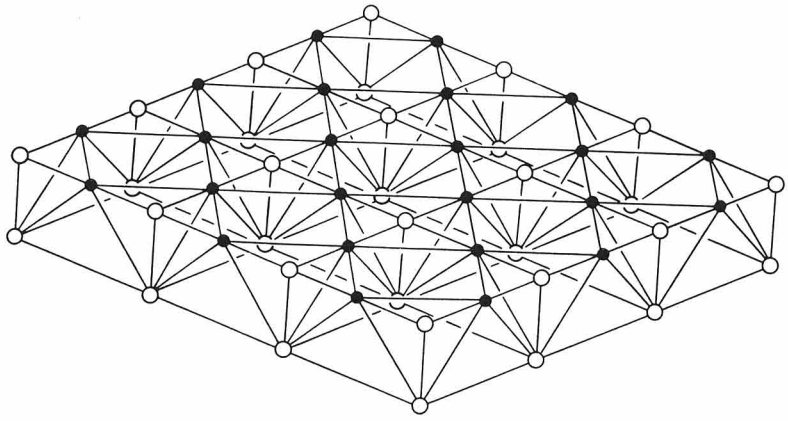
たとえば、図表3-2-12に胞心模型を応用したモニュメント案を示す。もっとも体積の大きい中央の正１２面体状胞に主要施設を収納し扁平な外殻へ近づくほど簡略化された装置を備えるようになっている。さらに、図表3-1-2 に現われている各模型に関



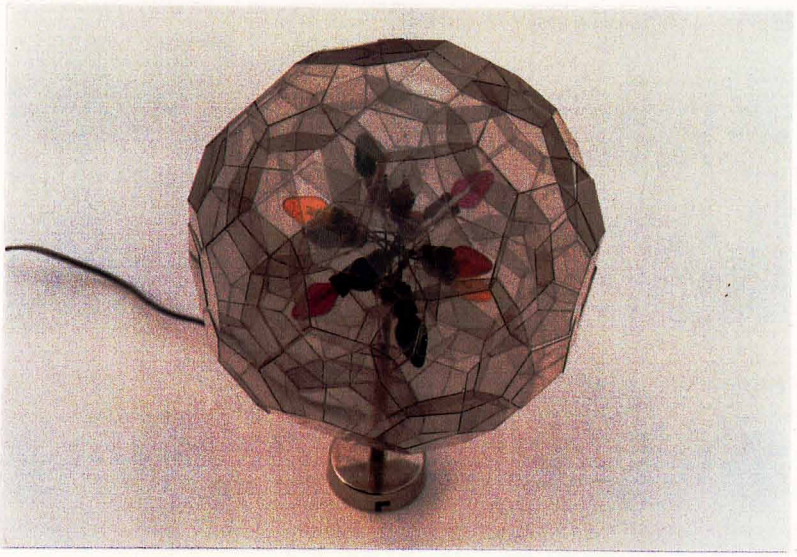
図表　3-2-9　　Village de Vacances。Justus Dahinden 設計。1980。
Architecture Contemporaine　81-82 より。

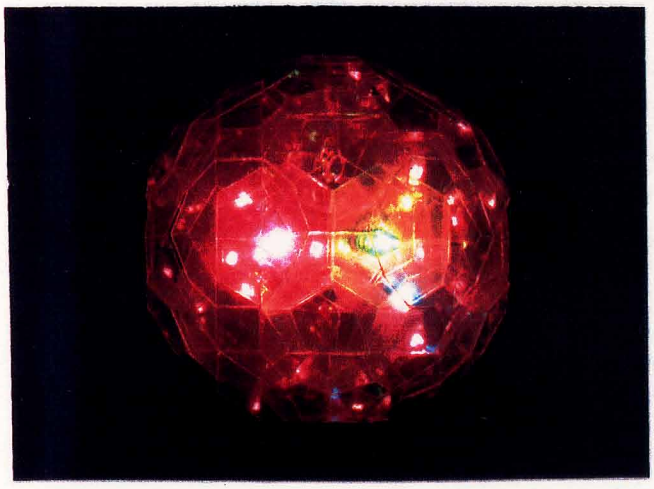


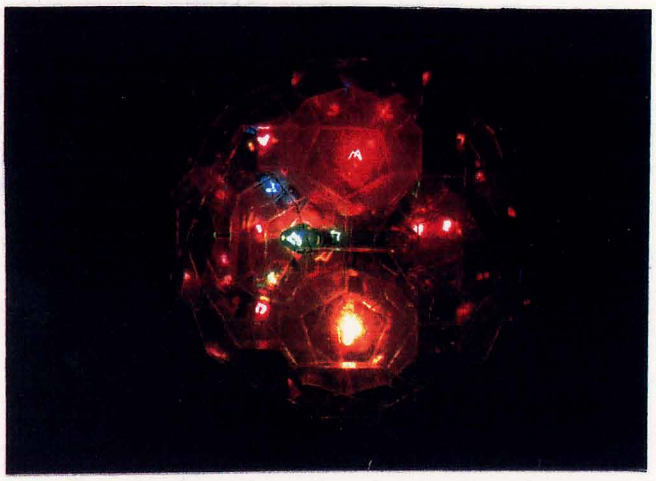
図表　3-2-10　正24胞体の面心模型の一つの断面

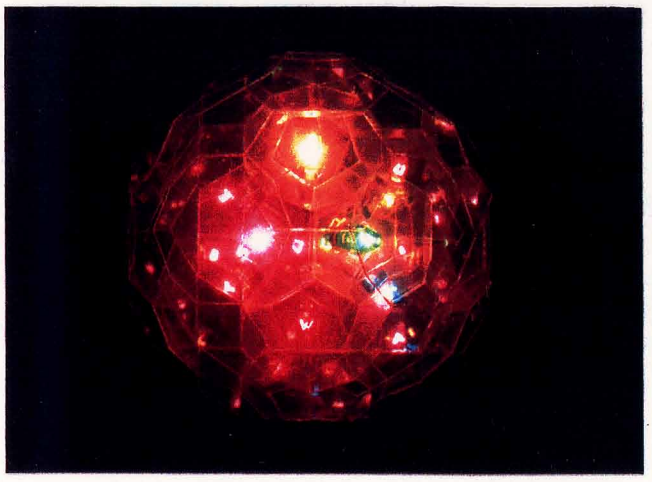


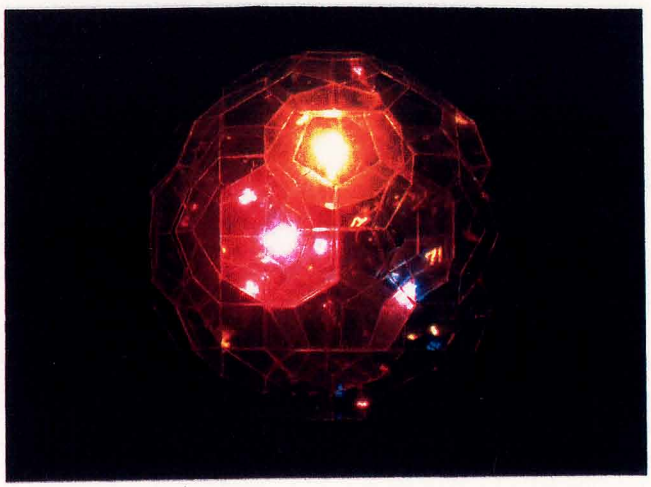
図表　3-2-11　Y.Friedman考案のInfra-structure TR











図表　3-2-12　正 120胞体（胞心模型）を応用したモニュメント案

する限り、それぞれは、稜線で決定される断面としての平面多角形をさまざまに持っていて、その平面多角形を接地面として、図表3-2-13左列に示すような球状ドーム案を可能にする。各側面の実形は図表3-1-10に示す通りである。

それに対して複数個を平面多角形の断面を共有させながら連結した場合の正１２０胞体の直射影は、図表3-1-29のＥにも現われているような新鮮な造形を、簡明な定量性のもとで可能にする。たとえば、図表3-2-14に胞心模型の周期的ならびに非周期的連結図形による空間構成案を示す。非周期的な場合は図表3-1-29にも示したように、各正１２０胞体の中心は、次章で触れる２種類の平行６面体（ＧＩ）によるR^3の非周期的充塡図形の頂点に位置することになっている。

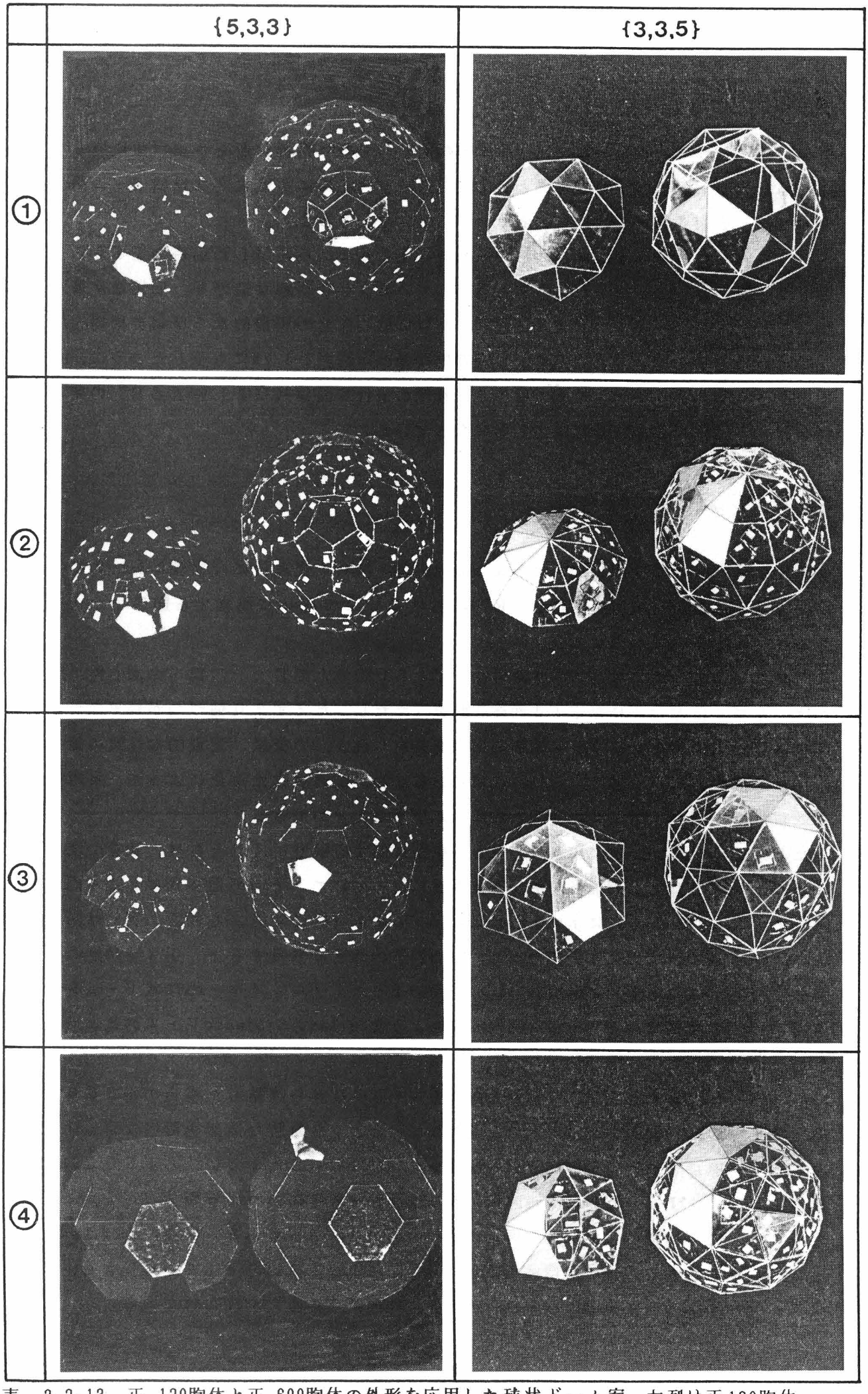
３－２－７　正６００胞体の応用

正６００胞体は図表3-1-1 のような一般的内容を持ち、代表的には図表3-1-2 のＦ行の４通りにR^3へ直射影される。R^3における正２０面体に相当する図形で、正１２０胞体と互いに双対である。

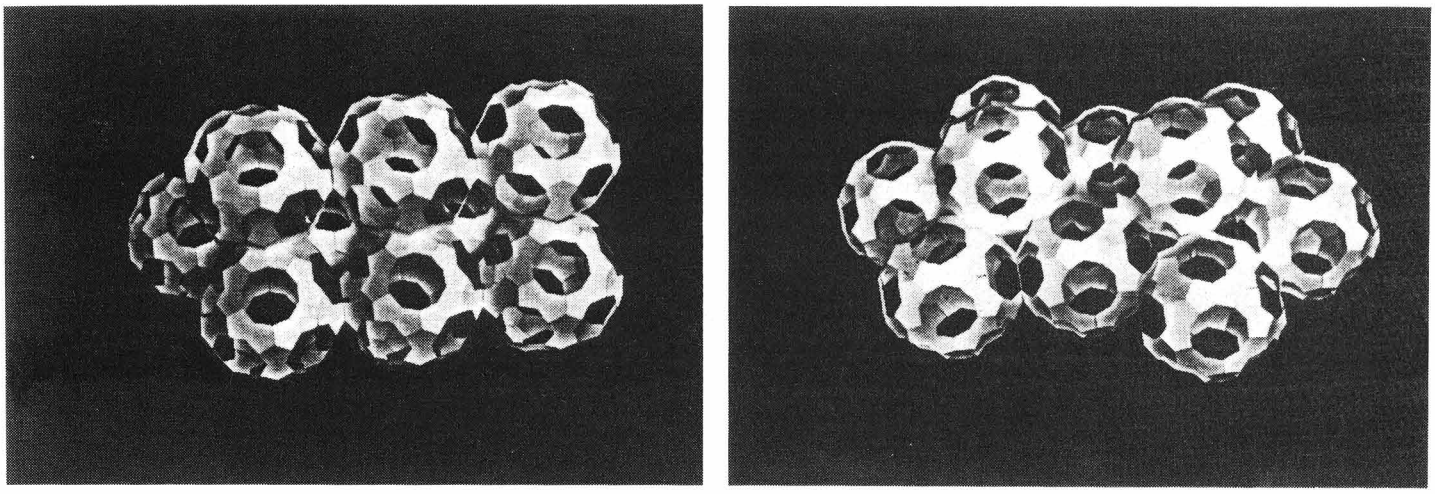
単独としての正６００胞体の直射影は、正１２０胞体と同じく、内部への求心性、外部へ近づくほど扁平になる正４面体状胞群（ただし、たえず２０個づつが扁平な正２０面体状の集積となるように１個の頂点を共有し合う）の集積、定量的な性質の簡明な３角形の連結、などといった、複雑である反面、整理された形象によって、実用的で新鮮な空間の、とくに構造的な構成に応用することができる。

たとえば、図表3-1-2 に現われている各模型に関する限り、それぞれは、稜線で決定される断面としての平面多角形をさまざまに持っていて、その平面多角形を接地面として、図表3-2-13右列に示すような球状ドーム案を可能にする。各側面の実形は図表3-1-10に示す通りである。そのうち、点心模型の外殻に注目すると、正１０角形の断面で切半することができ図表3-2-15の上段のようなダブルレイヤーの球状ドームを導くが、この形態は、そのまま、同図下段のようなFullerのGeodesicドームの基本形となる。

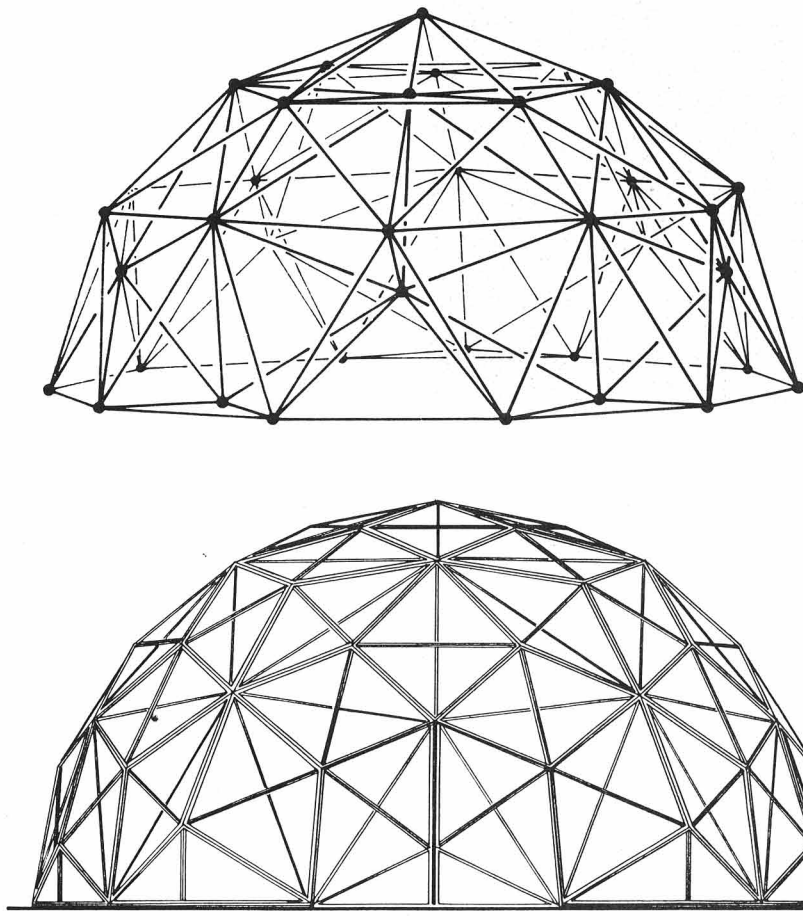
それに対して複数個を平面多角形の断面を共有させながら連結した場合の正６００胞体の正射影は、図表3-1-29のＦにも現われているような新鮮な造形を簡明な定量性のもとで可能にする。非周期的な場合は図表3-1-29にも示したように、各正６００胞体の中心は、正１２０胞体の場合同様、次章で触れる２種類の平行６面体（ＧＩ）によるR^3内の非周期的充塡図形の頂点に位置することになっている。図表3-2-16は、そのうち点心模型の場合の応用例であって、平面図には２種類の平行４辺形による非周期的パターンとして有名なPenrose パターン（次章で詳述）が現われている。



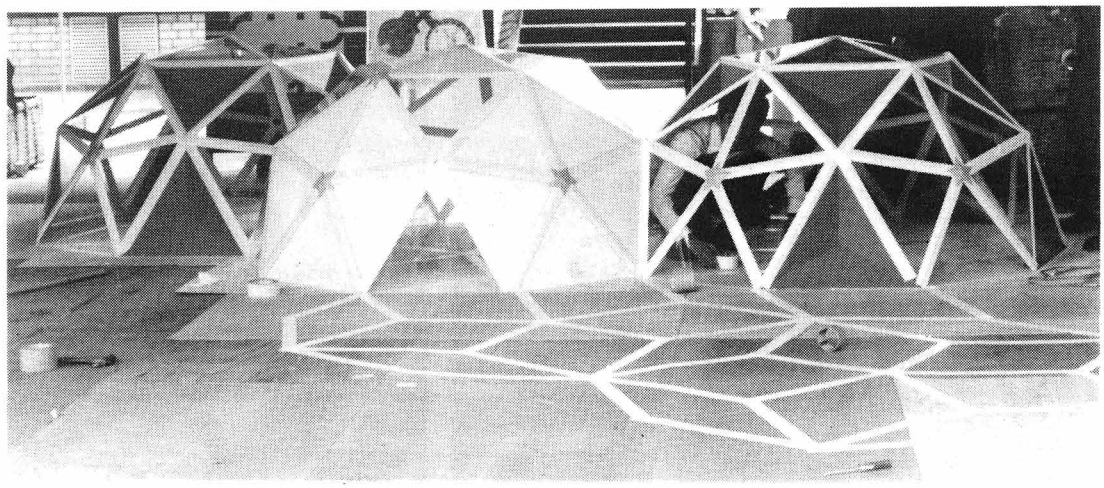
図表　3-2-13　正 120胞体と正 600胞体の外形を応用した球状ドーム案。左列は正120胞体、右列は正 600胞体の、上から、点心、線心、面心、胞心の各模型の応用。



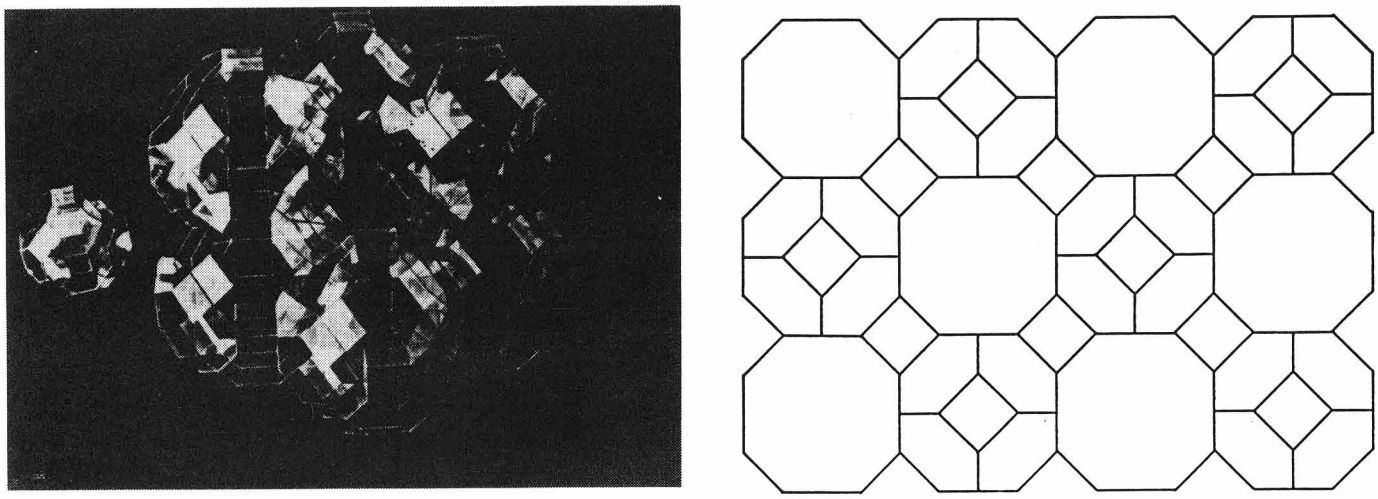
図表　3-2-14　正 120胞体（胞心模型）の周期的（左）ならびに
非周期的（右）連結による空間構成



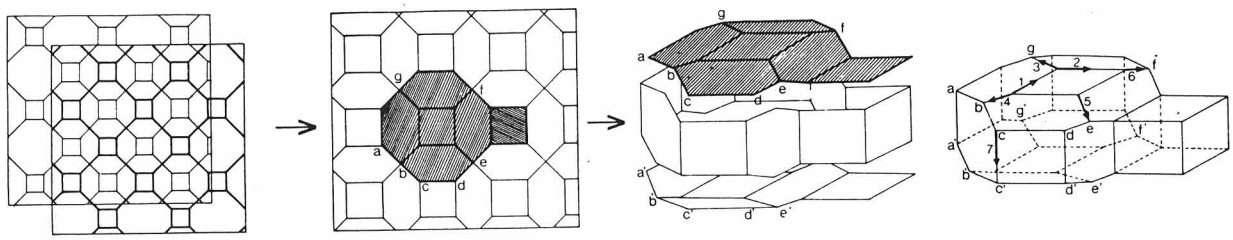
図表　3-2-15　正 600胞体（点心模型）の外殻（上）とR.B.Fullerのダブルレイヤーの Geodesic ドーム（下。 Shelter for the Marine Corps Aviation ）



図表　3-2-16　正 600胞体（点心模型）の連結図形の外形を応用した球状ドーム。筆者考案。



図表　3-2-17　正16胞体の1/3 タイプの半正多胞体（胞心模型）による R^4 の充塡図形（左）とその断面の一つ（右）



図表　3-2-18　集合住宅計画案。J. Baracs 計画。
Structural Topology, #1, より。

３－２－８　半正多胞体と星形正多胞体の応用

正多胞体の頂点まわりを胞（超平面）で規則的に切断していったとき導かれる図形が図表3-1-24,25 に示した代表的な半正胞体であり、また、正多胞体の持つ各側胞を延長していって互いに面分で交わらせたとき導かれる図形が図表3-1-26,27 に示した代表的な星形正多胞体である。いいかえれば、これらは、正多胞体の持つ建築的な特徴を場合によっては正多胞体をより発展させた状態で見せる。

たとえば、図表3-1-30に示した正１６胞体｛３，３，４｝の1/3 タイプの半正多胞体（４８胞体）によるR^4 の充塡図形（図表3-2-17左）の平行な平面による断面群の一つは、同図表右のような２種類の平面格子を交互に積層しているのであり、このような空間構成はJ. Baracs (1979)[7]による図表3-2-18のような集合住宅計画案の素案を、Baracsとは異なる立場で導く。つまり、Baracsは次章で触れるような高次元（図表の場合は７次元）立方体の射影として把握している。

それに対して、４－立方体｛４，３，３｝の1/2 タイプの半正多胞体の連結図形は、 Safdieによる某大学学生会館原案の素案[8]（図表3-2-19）などに関係する。

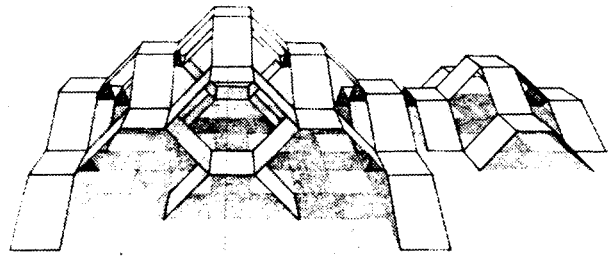
以上のような、小規模でかつ周期的なパターンを基本とする造形を導く半正多胞体に対して、正１２０胞体ならびに正６００胞体から得られる、大規模でかつ非周期的なパターンを基本とする造形を導く半正多胞体は、つぎのように建築と関係する。

たとえば、図表3-1-24,25 に加えられているような正１２０胞体あるいは正６００胞体から導かれる半正多胞体の外殻部分は、より一般化して考察すれば、けっきょく、さまざまに規則的で扁平な胞が、全体として規則的な多胞体を構成するように求心的に連結している形象となって、それはそのまま球状ドームの、原則としてフレクェンシーの多いダブルレイヤーの造形に関係する。

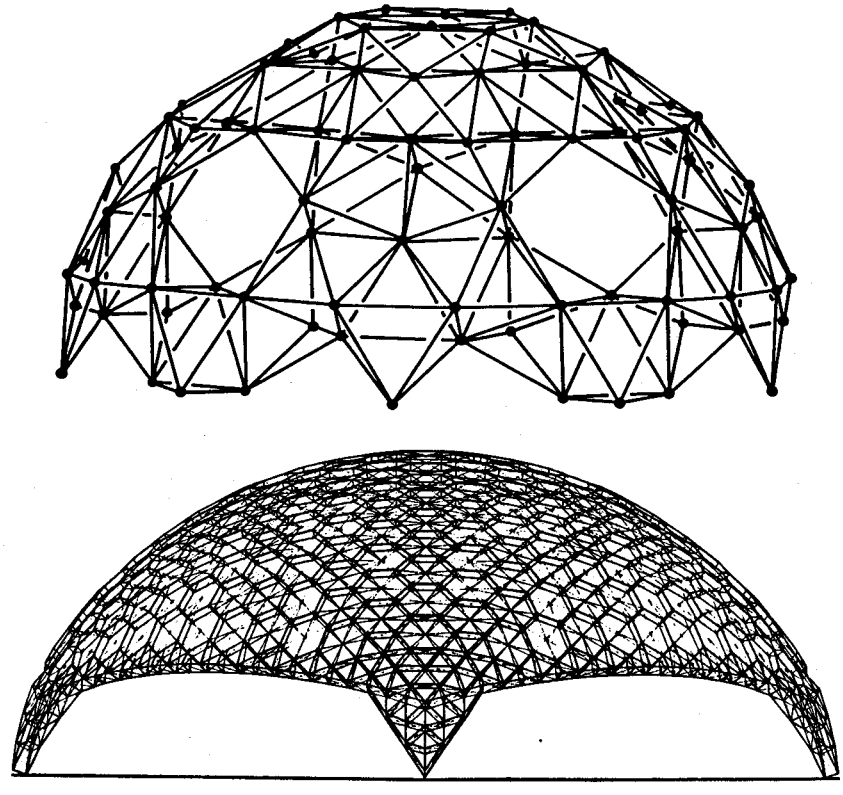
たとえば図表3-2-20に、正６００胞体の1/2 タイプの半正７２０胞体の外殻部分（図表上）と、Fullerの Geodesic ドーム（図表下）の構成の原理を示す。５個あるいは８個の扁平な８面体状胞の集積を基本として、ダブル・レイヤーの球状ドームを構成している。　つまり、側面ならびに側胞が、多くの場合ダブルレイヤーのまま細分割されてフレクェンシーが増加するとともに、先述したように、稜線による平面多角形が随所に現われて、球状ドームへの応用が容易となる。

図表3-2-21は、その原則が端的に現われている、正６００胞体の点心模型の１／２タイプの７２０胞体を応用した稜頂上型の小ドームであって扁平な８面体状と２０面体状の胞が全体としては正２０面体群の対称性を持ちながら集まって、そのままダブルレイヤーの球状ドームを構成し、内部空間を保護している。

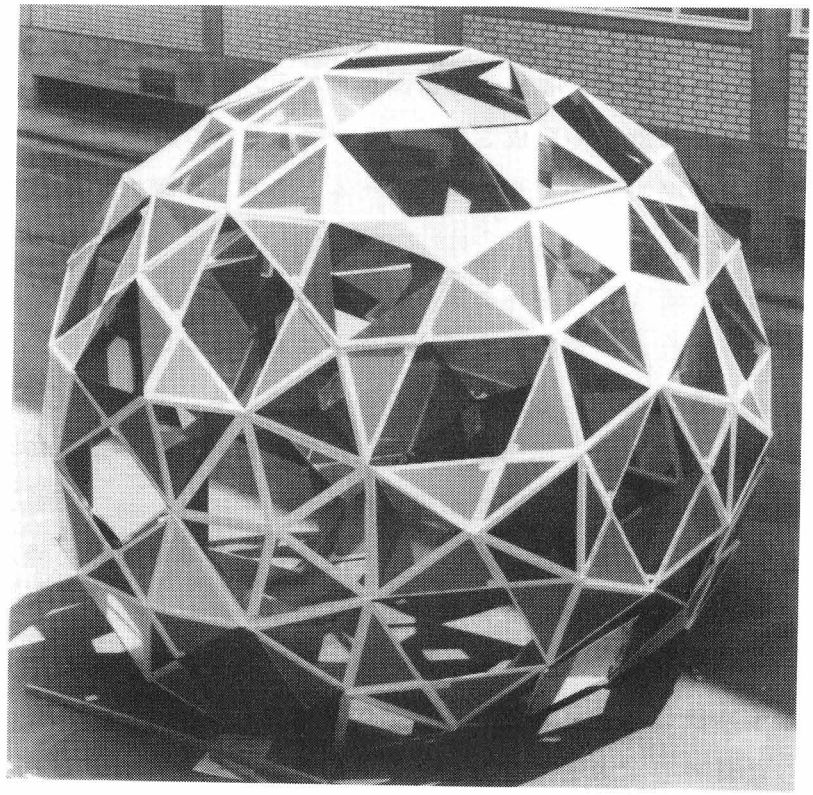
さらに、図表3-2-22左に、正６００胞体の点心模型の１／３タイプの７２０胞体を応用したシングルレイヤーの球状ドーム案を示す。正５角形、正６角形、２種類の平



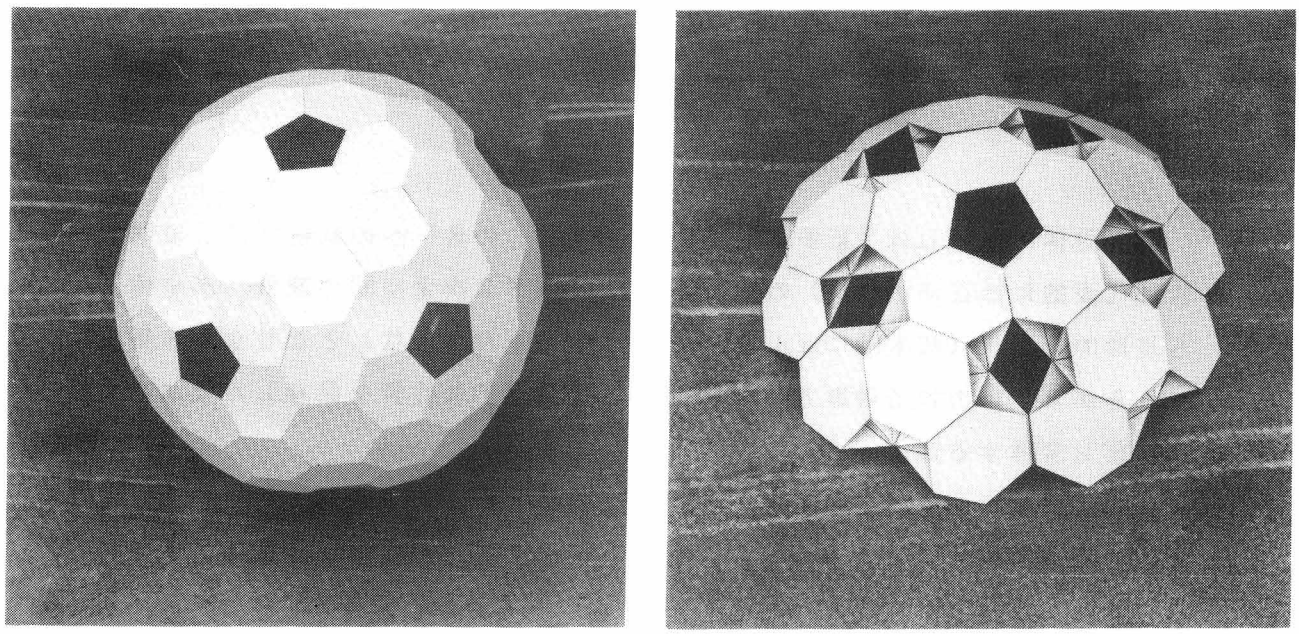
図表　3-2-19　サンフランシスコ州立大学学生会館計画案。M. Safdie 計画（筆者によるコピー）。



図表　3-2-20　正 600胞体の1/2 タイプの 720胞体（胞心模型）の外殻（上）とR.B.Fullerのダブルレイヤーのgeodesic dome （下。American Society for Metals dome)



図表　3-2-21　正 600胞体の 1/2タイプの 720胞体（胞心模型）の外殻を応用した球状ドーム。筆者考案。



図表　3-2-22　正 600胞体の 1/3タイプの 720胞体（胞心模型）の外殻を応用した球状ドーム案。
左はシングル・レイヤーの場合、右はダブル・レイヤーの場合。

応用したシングルレイヤーの球状ドーム案を示す。正５角形、正６角形、２種類の平行６角形、の合わせて４種類の側面からなる。外殻は、もともと平扁な切頭４面体状と２０面体状の胞から構成されているのであり、これらの胞をそのまま残せば同図表右のようなダブルレイヤーの球状ドームともなる。接地面は稜線からなる平面多角形となっている。

こうした、正１２０胞体と正６００胞体から導かれる半正多胞体を基礎とした空間構成は、いずれも、側胞あるいは側面を共有させ合いながら、図表3-2-23のように、周期的にも非周期的にも連結させることができる。そのうち、非周期的な場合（下２段。頂点頂上型）、平面図は部分的に巡回群C_5を持つようになり、稜頂上型にすれば逆に上２段のような周期性が現われる。

図表3-2-24に示す例は、この７２０胞体に正６００胞体の点心模型を連結した空間構成である。相貫線は正５角形となっている。

以上のような構成は、点心や胞心模型に限らず、R^4における射影方向を変更することにより線心や面心模型へも容易に適用される。

さらに特殊な試みとしては正１２０胞体と正６００胞体から導かれる星形正多胞体の応用も考えられる。この場合は、図表3-2-25の胞心模型（左は｛5/2,５，３｝、右は｛５，5/2,３｝）にも現われているように、極度に構造的な外観を持たせることが可能なうえ、星形化の過程に現われる形象（図表3-2-26）は、特殊な造形が要求される場合に応用することができる。

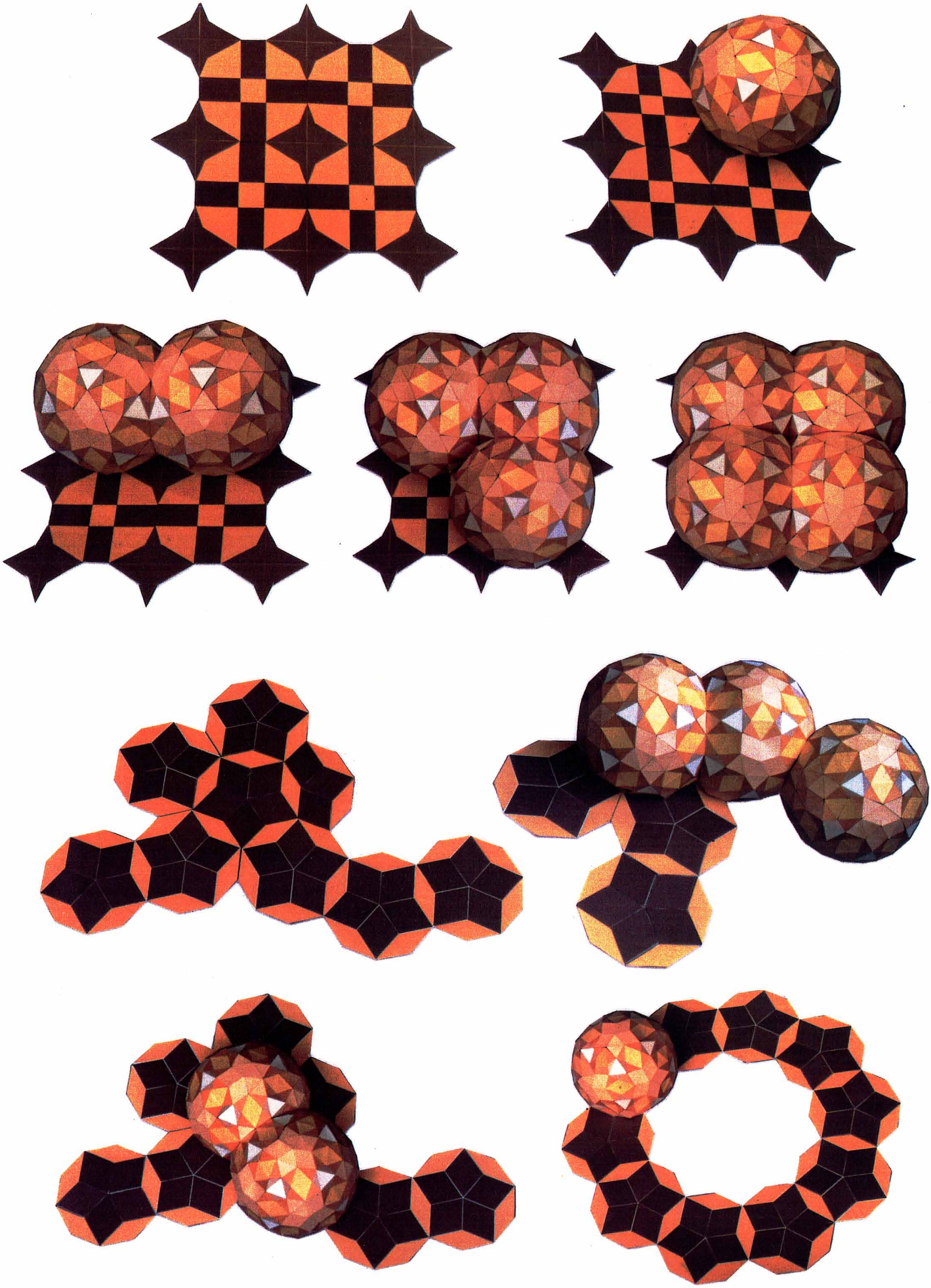
なお、以上のような各形態の側面の実形は、原則として、すべて、図表3-1-10に示されている数値から容易に導かれる。

３－２－９　本章の結論

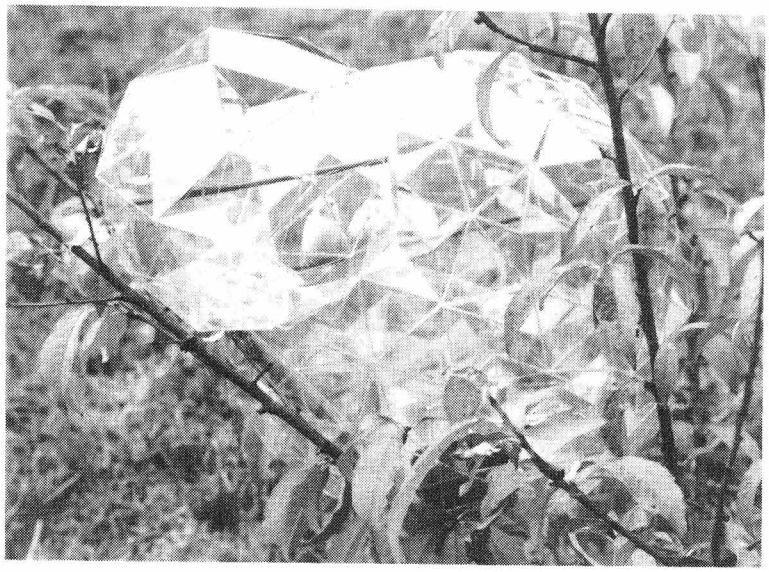
正多胞体、ないしは半正多胞体や星形正多胞体、のR^3への直射影は、規則的な形状（代表的には正多面体状）の複数個の胞、つまり３次元空間の部分、が全体としても規則的な形状（代表的には正多面体群の対称性を持つ形状）となりながら集積し、それらがR^4における射影方向の違いにより、定量的な性質を保存したままさまざまに変化し変容する。

このような形状は、３次元の広がりを持つ内部空間と構成部材の複合体としての建築上の造形に資するところが多い。その事実は、たとえば、正５胞体や４－立方体の、R^3への代表的な直射影が従来の建築上の形象をとくに構造的な面で基礎的に支えているところに現われている。

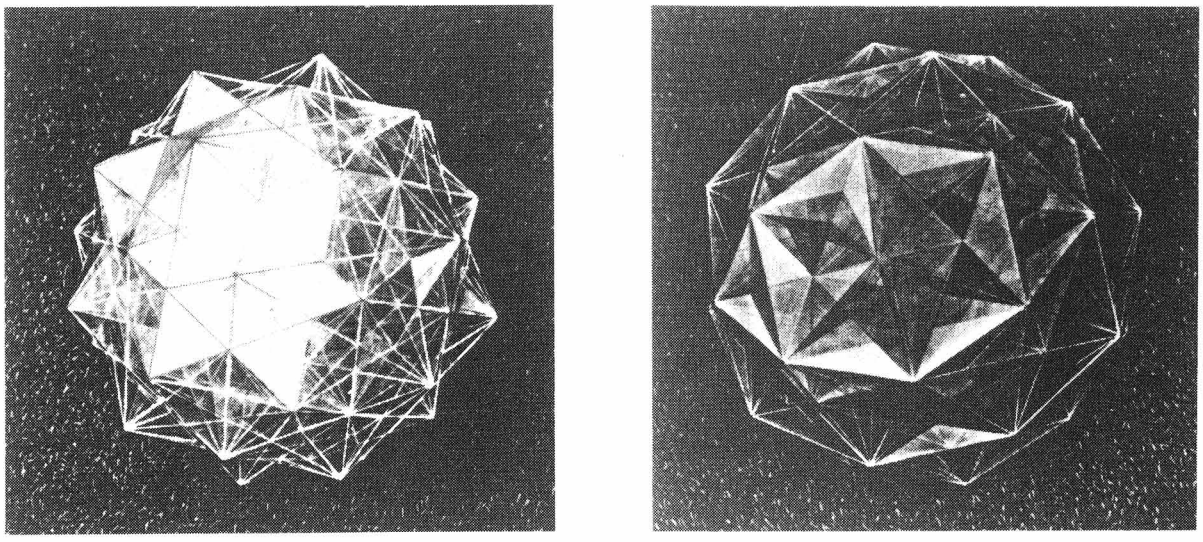
また、正１６胞体や正２４胞体は正５胞体や４－立方体に見られる建築的性質をより精緻に持っていて、その射影は、部分的にはすでに建築上も実際に応用されてきて



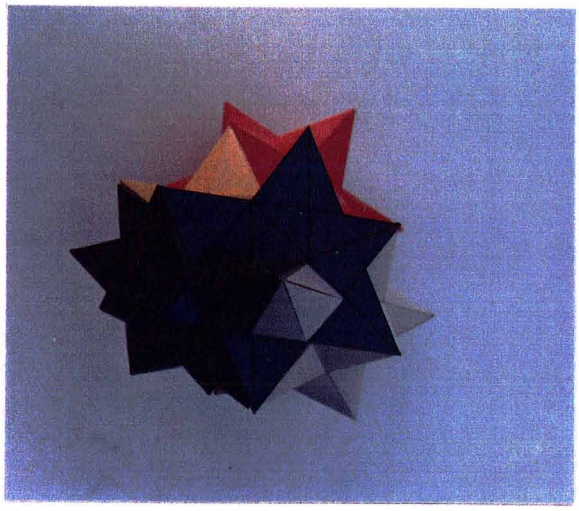
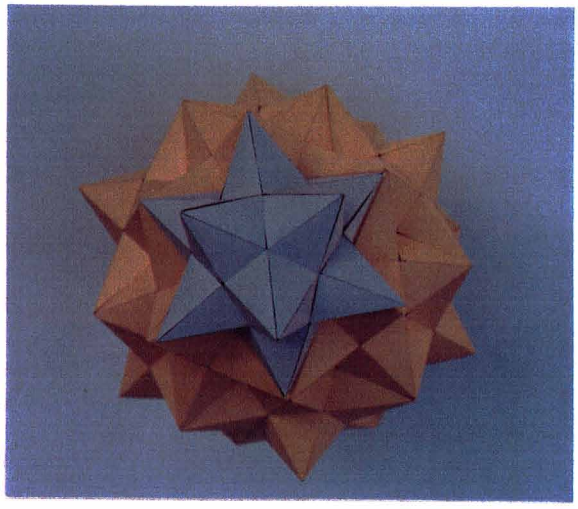
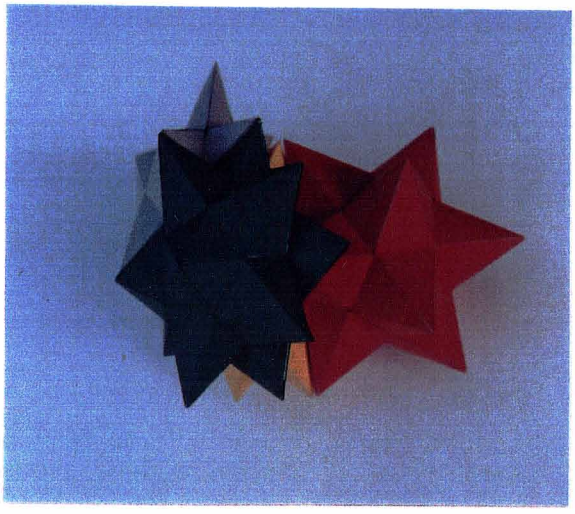
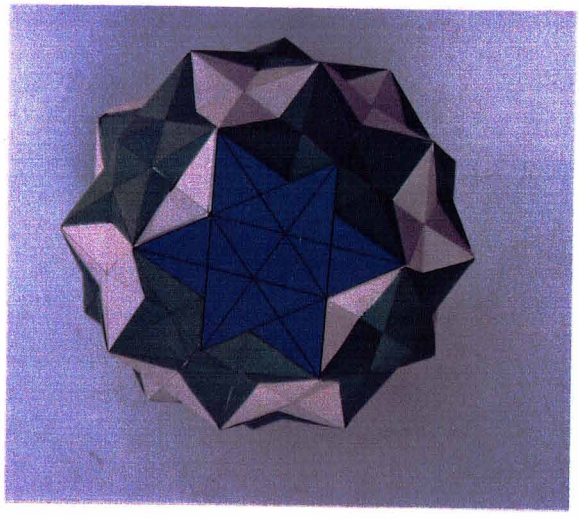
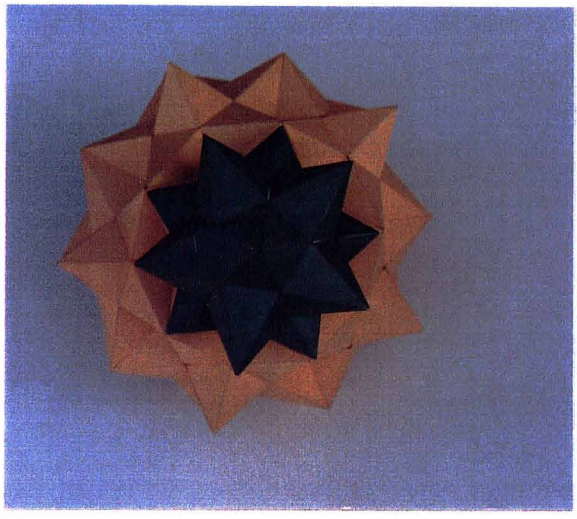
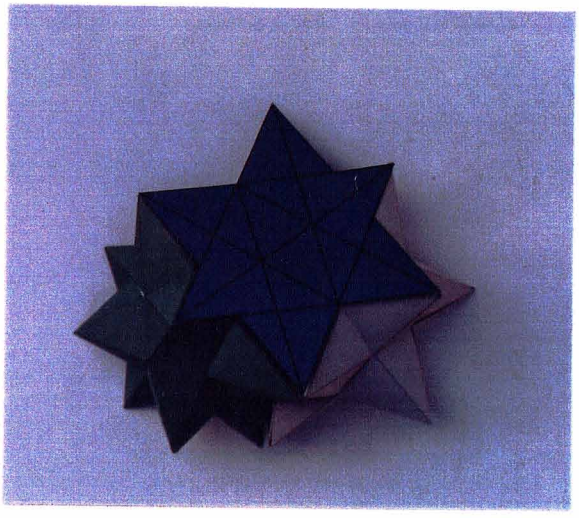
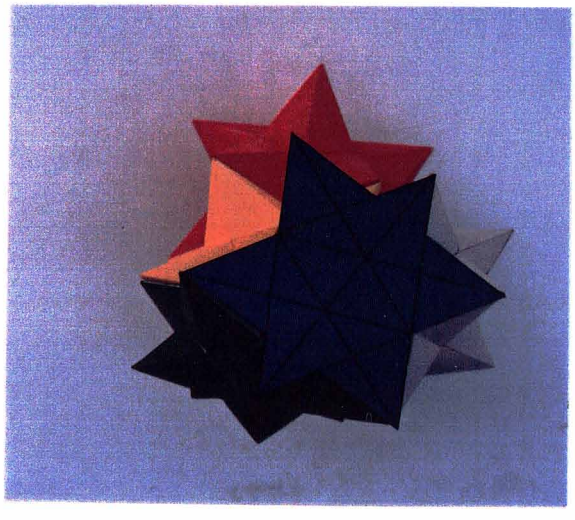
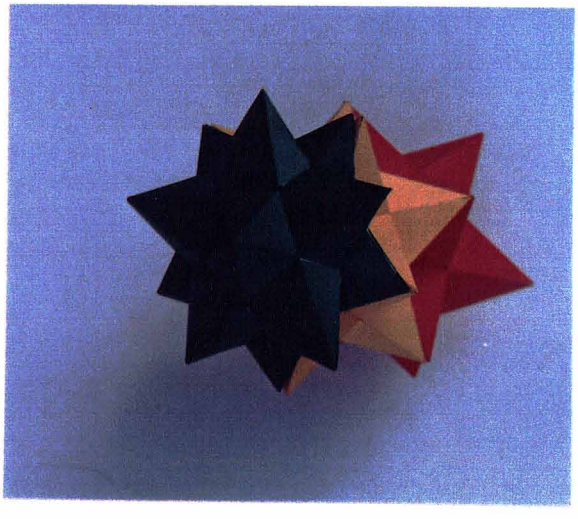
図表　3-2-23　正 600胞体の1/2 タイプの 720胞体（胞心模型）の連結。上2段は周期的なパターン、下2段は非周期的なパターン。



図表　3-2-24　正 600胞体（点心模型）とその 1/2タイプの 720
胞体（胞心模型）の側胞を共有し合う連結図形の応用



図表　3-2-25　星形正多胞体を応用した空間構成案。
左は｛ 5/2，5 ，3｝、右は｛5 ， 5/2，3｝による。

図表　3-2-26　星形正多胞体｛ 5/2，5 ，3｝の構成過程で得られる造形

さらに規模の大きい正１２０胞体と正６００胞体の射影についても、それらの連結図形に見られる非周期的な意表をつく造形にもかかわらず、ダブル・レイヤーの球状ドームの外形の造形などに応用される可能性がある。

とはいえ、こうした正多胞体、ないしは半正多胞体や星形正多胞体、の建築的な側面の全体的かつ系統的な応用は今後に待たれるのであり、それに向けての基礎的な考察を本章では行なった。

本章での引用文献

1) Anthony Pugh, An Introduction to Tensegrity (University of California Press,1976), PP.6 ～14
2) 宮崎興二、“多面体と建築”、彰国社、1979、PP.193～225
3) Kuniaki Itoh, “New Developments in Three-dimensional Truss ”, Proc. 1971 IASS Pacific Symposium(1972), 997 ～1010
4) John Borrego, Space Grid Structures(The MIT Press, 1968), PP.133～135
5) Moshe Safdie, For Everyone A Garden (The MIT Press, 1974), pp.88～99
6) Stephane de Chateau, “Structures Spatiales”,Cahiers du Centre D'Etudes Architecturale, 2, 16
7) Jonas Baracs, “Juxtapositions”, Structural Topology, #1, 1979, 59～72
8) Safdie, op. cit., pp.272～285

3－3　n（≧5）次元正多胞体の建築的特性

3－3－1　本章の目的
3－3－2　n次元多胞体の概念
3－3－3　n次元多胞体公式
3－3－4　n次元直交軸の表現
3－3－5　n次元空間における射影の概念
3－3－6　n次元正多胞体の概念
3－3－7　n次元正多胞体の概形
3－3－8　n次元正多胞体の正射影
3－3－9　n次元正多胞体の変形
3－3－10　n次元正多胞体とn次元半正多胞体の連結
3－3－11　本章の結論

3－3－1　本章の目的

本論文での建築上の諸形象は、3次元の広がりを持つ内部空間と構成部材が、同じく3次元の広がりを持つ外部空間の中で側面を共有し合いながら連結する図形、として把握されている。

したがって、その全体像は、4次元空間における多胞体として観察されたときすでに客観的な様相を現わしているのであって、一般的なn（≧5）次元空間からの考察は、本論文において本質的な意味を持たない。

しかし、前章までに検討してきた、2～4次元空間における多角形、多面体、多胞体に関する諸概念諸性質の、n（≧5）次元空間における一般化は、前章までの論理を全体的に整理し矛盾の有無を吟味する意味を持つとともに、多重で煩雑な構成内容を持つ建築上の形象の、より適確で密度の高い理解と創成に資するところがある。

したがって、本章では、すべてを図形的に総括する意味を含めて、これまでの4次元空間からの図形的な観察検討結果を、n（≧5）次元空間とくにn次元ユークリッド空間$(R)^n$において一般化してn次元正多胞体の建築的特性を知ることを目的とする。

3－3－2　n次元多胞体の概念

本章ではn次元の広がりを持って、R^m（m≧n＋1）から全体的に把握され操作される幾何学的な空間をn次元胞という。

n次元胞は、n次元平胞（n次元超平面）と、それ以外のn次元曲胞（n次元超曲面）

に分類することができるが、本章でたんにｎ次元胞といえば、ｎ次元平胞

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 1$$

をさす。

ｎ次元胞は無限の広がりを持っている。それを図形的に表現する場合、本章では、（ｎ－１）次元胞で切取って、狭義でたんにｎ次元胞という。

ｎ次元胞は、一般にR^D（Ｄ＞ｎ）の中に置かれて幾何学上の操作を受けるが、その場合、ａ次元胞（Ａ）とｂ次元胞（Ｂ）がｉ次元胞（Ｉ）を共有して交われば、２－１－４で触れた次元公式（2-1-1)が成立する。

そのような前提のもとで、複数個の（ｎ－１）次元胞が、境界図形としての（ｎ－２）次元胞を２個で１個づつ共有し合いながら、一般にR^nの中で、同一のR^{n-1}上にはないように、いわば折れ曲りながら連結した図形をｎ次元多胞体（多辺形は２次元多胞体、多面体は３次元多胞体、前章までの多胞体は４次元多胞体）という。同一のR^{n-1}内にある場合は、その空間の充塡図形となる。

ｎ次元多胞体のうち、すべての（ｎ－２）次元胞が、必ず２個づつの（ｎ－１）次元胞に共有されているものをｎ次元閉多胞体、（ｎ－２）次元胞のうち２個および１個の（ｎ－１）次元胞に属しているものがあるものをｎ次元開多胞体という。３個以上の（ｎ－１）次元胞に属しているものがある場合は、ｎ次元多胞体の（ｎ－１）次元胞を共有し合う連結図形が現われている。

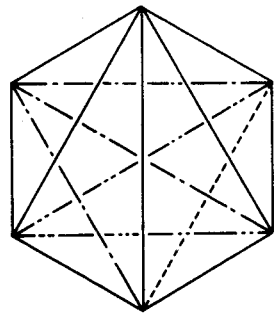
ｎ次元閉多胞体のうち、自らの持つ異なる２個の（ｎ－１）次元胞内の１点づつを結ぶすべての線分が、それらとは別の（ｎ－１）次元胞と交わらないものをｎ次元凸多胞体、あるいは、たんにｎ次元多胞体という。

ｎ次元多胞体は、R^{n-1}へ射影されたとき（ｎ－１）次元の広がりを持つｎ次元図形として、ｎ次元的な視覚上具体的に表現されるのであって、R^m（$m \leqq n-2$）における射影では、その定量的な性質を失う。

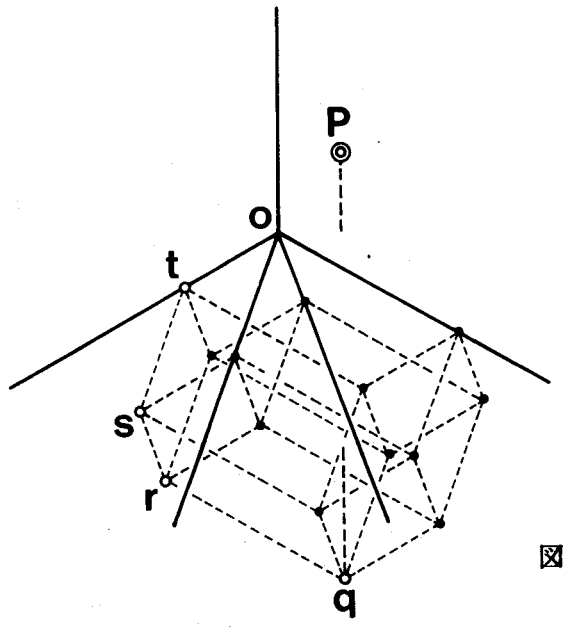
その前提のもとで、平面上では多くて（ｎ－２）種類、３次元空間内では多くて（ｎ－３）種類の、基本的に異なるかくれ線が内部に示される。たとえば図表3-3-1 に、５次元正４面体を平面上で表現した場合を示す。かくれ線として、１点鎖線、２点鎖線、破線、の３種類が使われているが、３次元空間内で模型として作れば、そのうちの１点鎖線と２点鎖線部分が内部に入る。

３－３－３　ｎ次元多胞体公式

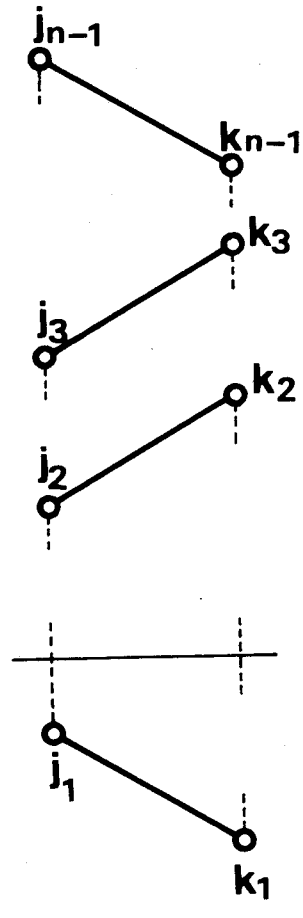
ｎ次元多胞体の持つ境界図形（構成要素）の個数d_{n-1}（d_0の場合は点、d_1の場合は線分、d_2の場合は面分、などの個数）のあいだには、Euler の多面体公式ならびにSchlafliの多胞体公式（2-5-2)を拡張したEuler-Poincaréの公式



図表　3-3-1　　5－正4面体の位相図



図表　3-3-2　　R^5 における点Pの位置



図表　3-3-3　　R^5 における線分ＪＫの正射影

$$d_0 - d_1 + d_2 - \text{----} + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1} \quad \text{——— (3-3-1)}$$

が成立する。証明は、たとえば Sommerville(1958)[1]による。

式(3-3-1) は閉じていない場合

$$d_0 - d_1 + d_2 - \text{----} + (-1)^{n-1} d_{n-1} = 1$$

となる。

3－3－4　n次元直交軸の表現

R^n におけるn次元直交軸X_1、X_2、----、X_nは、R^{n-1} 内へ、互いに、角

$$\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{n-1})$$

をなすように射影され*、そのときに限って、各軸上に、互いに等しい単位距離が、実長1に対して、

$$\mu = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad \text{——— (3-3-2)}$$

の長さで定められる。**

2－4で触れたように、n＝3の場合は、

$$\theta = 120^\circ \text{、} \mu = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{、}$$

n＝4の場合は、

$$\theta \fallingdotseq 109^\circ 28' \text{、} \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

そのような前提に基づいて、たとえば、座標（x_1、x_2、----、x_5）を持つ点Pの位置はR^5では図表3-3-2 のように決定される。

図で、Osは平行4辺形、Orは平行6面体、Oqは平行12面体であり、

$$\overline{Ot} = x_1 \text{、} \overline{ts} = x_2 \text{、} \overline{sr} = x_3 \text{、} \overline{rq} = x_4 \text{、} \overline{qP} = x_5$$

となる。簡単には、s、r、q、Pの順に各座標軸に平行線を引いていく。

*

この内容は次のようにいいかえることができる。つまり、R^n 内の単位球面

$$S^{n-1}: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

の上に n + 1 個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を互いに等距離になるようにとる。

このとき、Oを原点として、

$$\theta = \angle P_i O P_j \quad (i \neq j)$$

とすれば、$\cos\theta = -\frac{1}{n}$ である。ただし、たとえば1点P をS^{n-1} 上に指定すれば、このような $P_0, \cdots, P_n$ がただ1組だけとれること、角 $\theta = \angle P_i O P_j$ $(i \neq j)$ が i , j に無関係であることは幾何学的に承認する。

証明は次のようにされる。

各点の位置ベクトルを、

$$a_i = OP_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

として、それらの内積のつくる次のような n + 1 次行列（その行列式はいわゆる Gramian である）を考える：

$$A = \begin{bmatrix} (a_0, a_0) & (a_0, a_1) \cdots (a_0, a_n) \\ (a_1, a_0) & (a_1, a_1) \cdots (a_1, a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_n, a_0) & (a_n, a_2) \cdots (a_n, a_n) \end{bmatrix} = [(a_i, a_j)] \quad \begin{matrix} 0 \leqq i \leqq n \\ 0 \leqq j \leqq n \end{matrix}$$

このとき、R^n における n + 1 個のベクトル $a_0, a_1, \cdots, a_n$ は一次従属であるから、その Gramianは 0 （ Gramianの性質）：

$$|A| = 0$$

このことは次のように考えてもわかる。すなわち、上の n + 1 次行列は二つの行列の積

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} \cdots a_{n0} \\ a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

（n + 1）× n 行列　　n ×（n + 1）行列

であるから、行列式の性質から、$|A| = 0$　（一般に、$m > n$のとき、Bが$m \times n$行列，Cが$n \times m$行列なら、積の$m \times n$行列BCの行列式は0である：$|BC| = 0$）

さて仮定から、　$(a_i, a_j) = \|a_i\|^2 = L$　　$(i = j)$

$\|a_i\| \|a_j\| \cos\theta = \cos\theta$　　$(i \neq j)$

であるから、$\lambda = \cos\theta$とおいて、

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda \\ \lambda & \cdots & \lambda & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^n (1 + n\lambda)$$

一般に、

$$\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & y \\ y & \cdots & y & x \end{vmatrix} = (x-y)^n (x + xy)$$

（n + 1次）

したがって　$\lambda = 1$または　$\lambda = -\frac{1}{n}$となるが、$\lambda = 1$（i.e. $\cos\theta = 0$）は起こりえないから、

$$\lambda = \cos\theta = -\frac{1}{n}$$

を得る（証明：広森勝久）。

**

n－立方体の主対角線長を実長と考えたとき、各軸上の単位目盛は（n－1）－立方体の側胞の対角線長となる。しかも、1稜の長さを1としたとき、n－立方体の主対角線長は$\sqrt{n}$である。したがって、式(3-3-2)が成立する。

3－3－5　n次元空間における射影の概念

R^n における射影には、大きくわけて正射影（複射影）と単射影がある。

正射影とは、２個の直交する R^{n-1} への直射影によって表現される射影で、それぞれの直射影は、さらに２個づつの R^{n-2} へ直射影される。同様の操作を繰返していって重複する射影を省略すれば、けっきょく R^n における正射影はｎ枚の R^2 上の図で表現されることになる。

たとえば、R^n における点Ｊの正射影は、Ｊの図表3-3-2 に従って得られる平面上への直射影 j_1、j_2、----、j_{n-1}（それぞれ X_2、X_3、----、X_n 図とよぶ）を、図表3-3-3 のように、x_1 軸を基線として、その垂線上に、与えられた正負に従って配列する。本論文では、基線 x_1 の下部に x_2 の正の方向を、上部に x_3 以下のすべての軸の正の方向をとっている。点Ｋについても同様である。

以上のような作図に従うため、R^n における正射影ではｎ－１枚の図が必要になるという不便はあっても、各頂点のすべての座標を明示することができるため、定量的な性質を保存させることは容易である。

その性質に基づいて、図表3-3-4 に、単位距離の明示されたｎ次元直交軸（左から、ｎ＝２～６）の正射影を示す。基線より上部は、（ｎ－２）枚の図によって３次元ならびに４次元等測軸の一般化としてのｎ次元等測軸を示している。

以上のような複数個の R^{n-i} への直射影によって表現される正射影に対して、１個の R^{n-1} への射影による表現を単射影という。

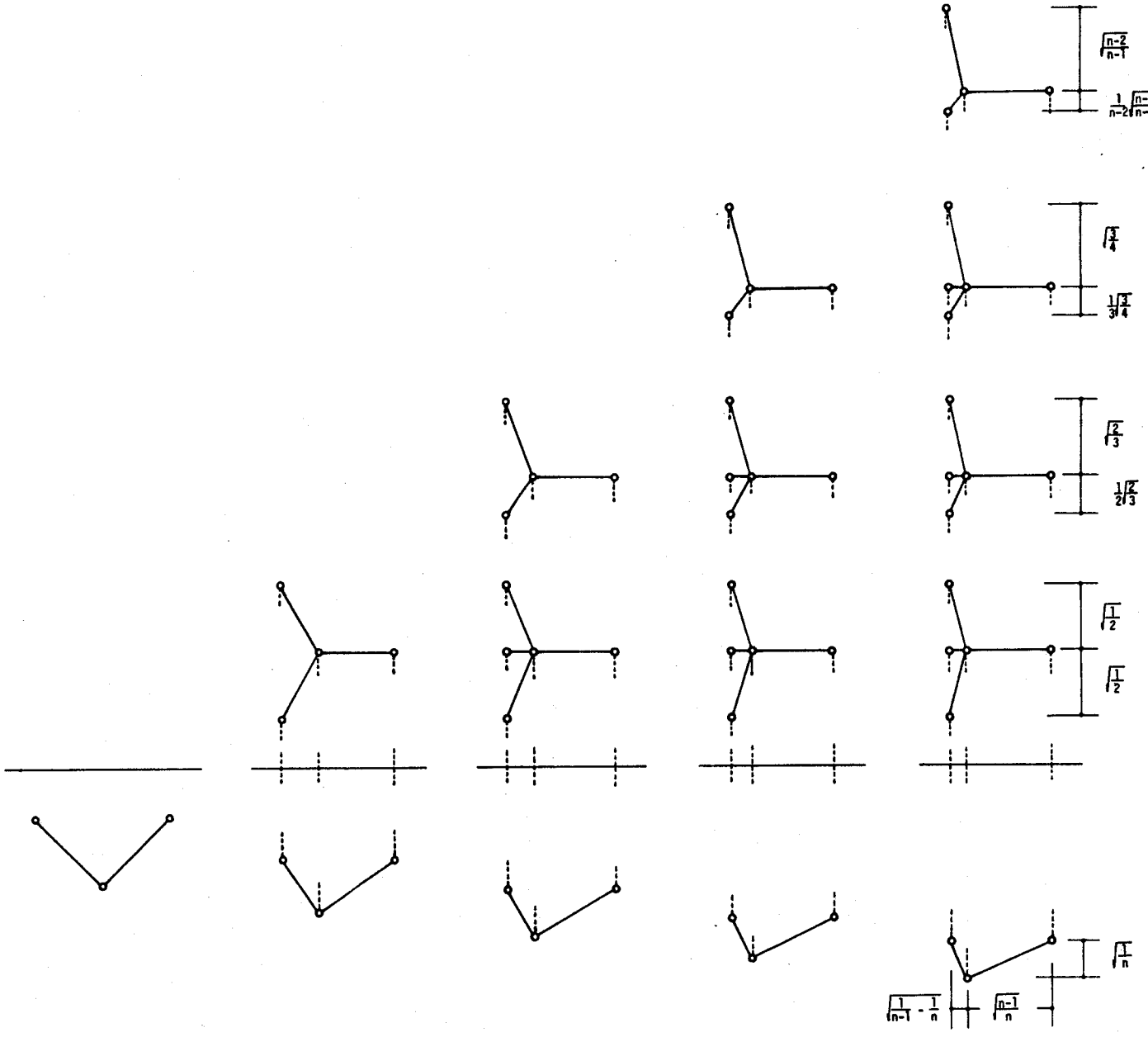
単射影とはいっても、それ自身は R^{n-1} にある模型なのであって、具体的にそれを表示するには、R^2 あるいは R^3 への何らかの射影を用いなければならない。その射影として理解が容易なのは正射影である。

したがって、R^n における単射影はｎ－２枚の R^2 上への射影で表現されることになる。

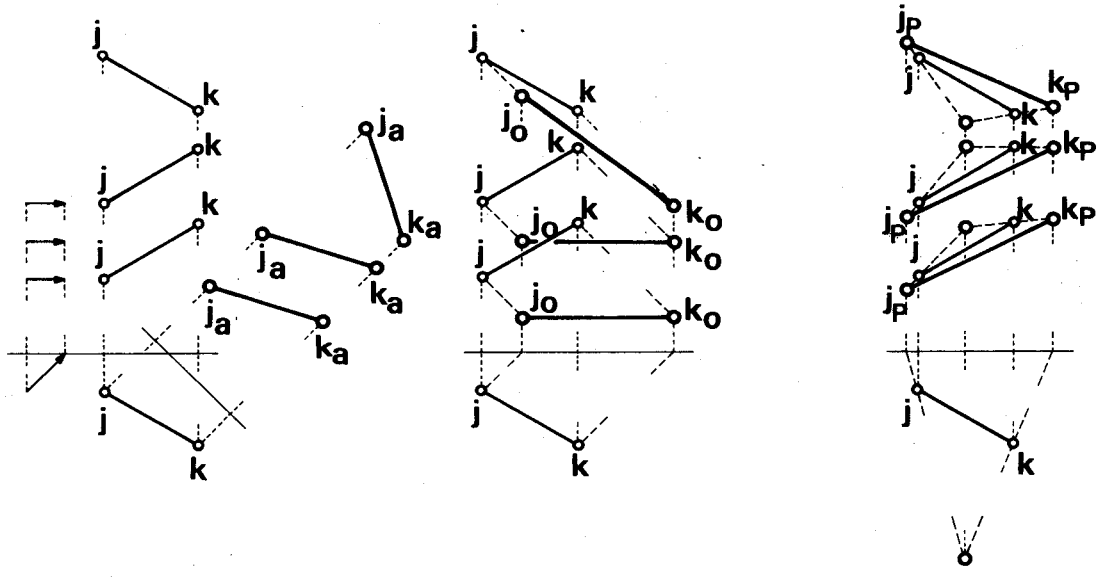
このような単射影には、代表的なものとして、基線に斜交する R^{n-1} への直射影としての副射影、R^{n-1} への斜射影、R^{n-1} への中心射影がある。

図表3-3-5 に、正射影では図表3-3-3 のように表現される線分ＪＫの副射影 J_a K_a、斜射影 J_o K_o、中心射影 J_p K_p の例を、左から右へ示す。

より一般的には、射影方向の違うそれぞれの副射影に対して、３（ｎ－１）通りの射影線に基づく単射影が図表2-3-13に準じて合わせて ｎ（n^2-1）３／２通り作図される。図表3-3-5 は、そのうち、平行な射影線のみによる斜射影と、中心を持つ射影線のみによる中心射影を示している。



図表　3-3-4　単位距離を持ったｎ次元直交軸の正射影。
左から、ｎ＝２，３，４，５，６。



図表　3-3-5　R^5 における線分ＪＫの副射影 JaKa(左端)、斜射影 JoKo(中央)、
中心射影 JpKp(右端)

以上のような各射影において、１枚の図が解釈のしかたによっては、より低次元の図形の射影となったり高次元の図形の射影となったりする性質がある。たとえば、平面上の１枚の正方形は３－立方体を含む任意のｎ－立方体の射影である。

３－３－６　ｎ次元正多胞体の概念

合同な（ｎ－１）次元正多胞体状胞（ｎ≧２。ｎ＝２のときは線分、ｎ＝３のときは正多角形、ｎ＝４のときは正多面体状胞）が、それぞれの持つ（ｎ－２）次元正多胞体状胞を２個で１個づつ共有し合いながら、（ｎ－３）次元正多胞体状胞（ｎ＝２のときは点の重合を意味する）のまわりに同じ数づつ同じ状態で集まったｎ次元凸多胞体を、ｎ次元正多胞体という。

ｎ＝１の場合は点、ｎ＝２の場合は無数にある正多辺形、ｎ＝３の場合は５種類の正多面体、ｎ＝４の場合は６種類の正多胞体であり、ｎ≧５の場合は、一定して、Coxeter (1973)[2]のあげる Simplex Polytope(α_n)*、Measure Polytope（β_n）、Cross Polytope（γ_n）の３種類がある。

Simplex Polytopeとは、R^n において一般の位置にあるｎ＋１個の互いに等距離にある点を２個づつすべて結んだ稜を持つｎ次元正（ｎ＋１）胞体で、正３辺形（α_2）、正４面体（α_3）、正５胞体（α_4）に相当し、Schläfli記号｛3^{n-1}｝が与えられている。したがって、以下ではこれらをｎ次元正４面体（ｎ－正４面体）とよぶ。正多角錐の拡張形でもある。

持っているｍ次元境界図形（０≦ｍ≦ｎ－１）の数S_mは、

$$S_m = {}_{n+1}C_{m+1} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} \qquad \text{(3-3-3)}$$

となる。

これを、平面上の位相図で表現すれば、正（ｎ＋１）辺形の中にすべての対角線を加えた、いわゆるダイヤモンド図形（図表3-3-6 のA)となる。

Measure Polytopeとは、すべての稜がR^n におけるｎ次元直交軸に平行でかつ等長なｎ次元正２ｎ胞体で、正４辺形（β_2）、立方体（β_3）、４－立方体（β_4）に相当し、Schläfli記号｛４、3^{n-2}｝が与えられている。したがって、以下ではこれらをｎ次元立方体（ｎ－立方体）とよぶ。正多角柱の拡張形でもある。

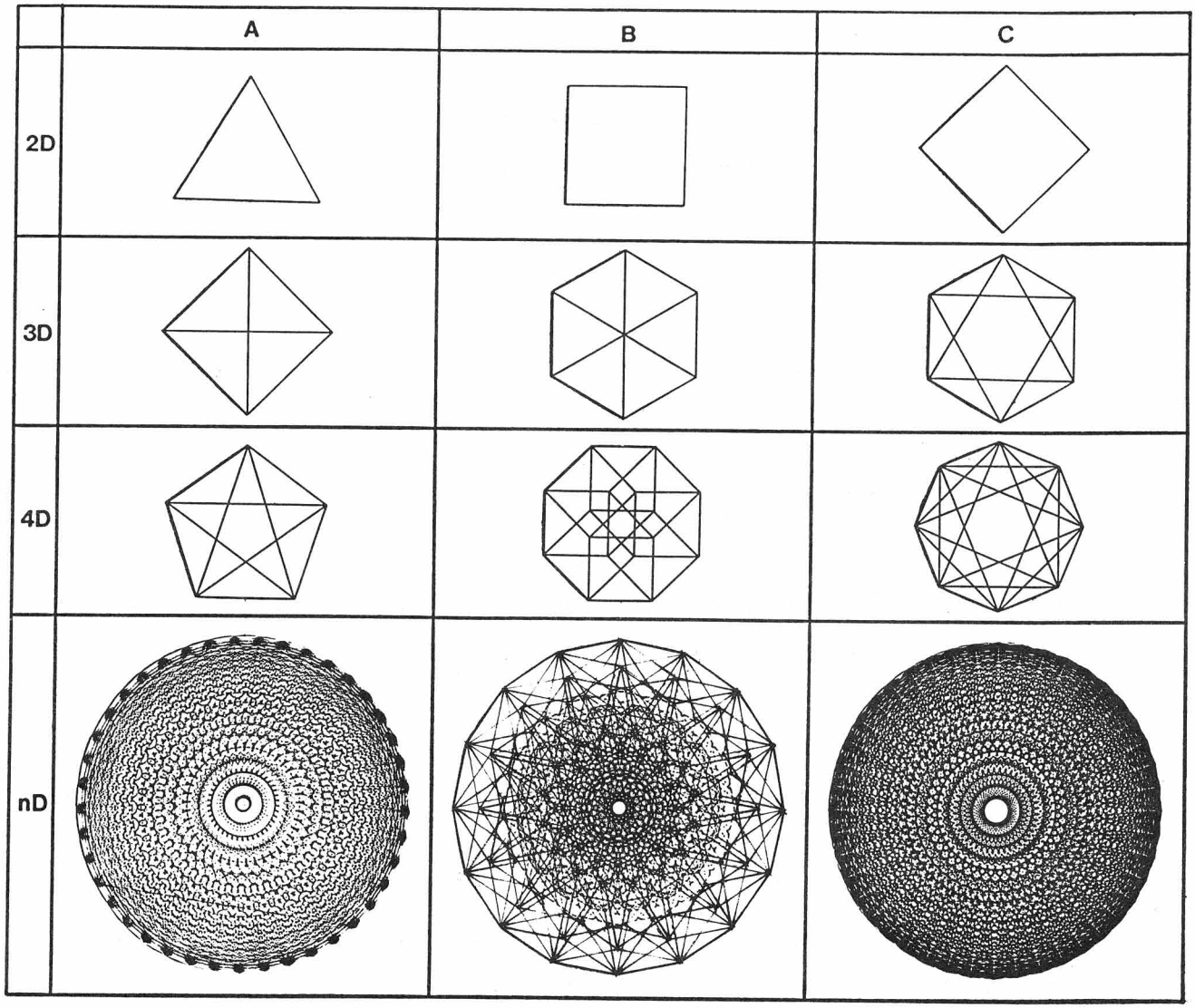
持っているｍ次元境界図形の数M_mは、１≦ｍ≦ｎ－１のとき、

$$M_m = 2^{n-m}\,{}_nC_m = \frac{2^{n-m}\,n!}{m!\,(n-m)!} \qquad \text{(3-3-4)}$$

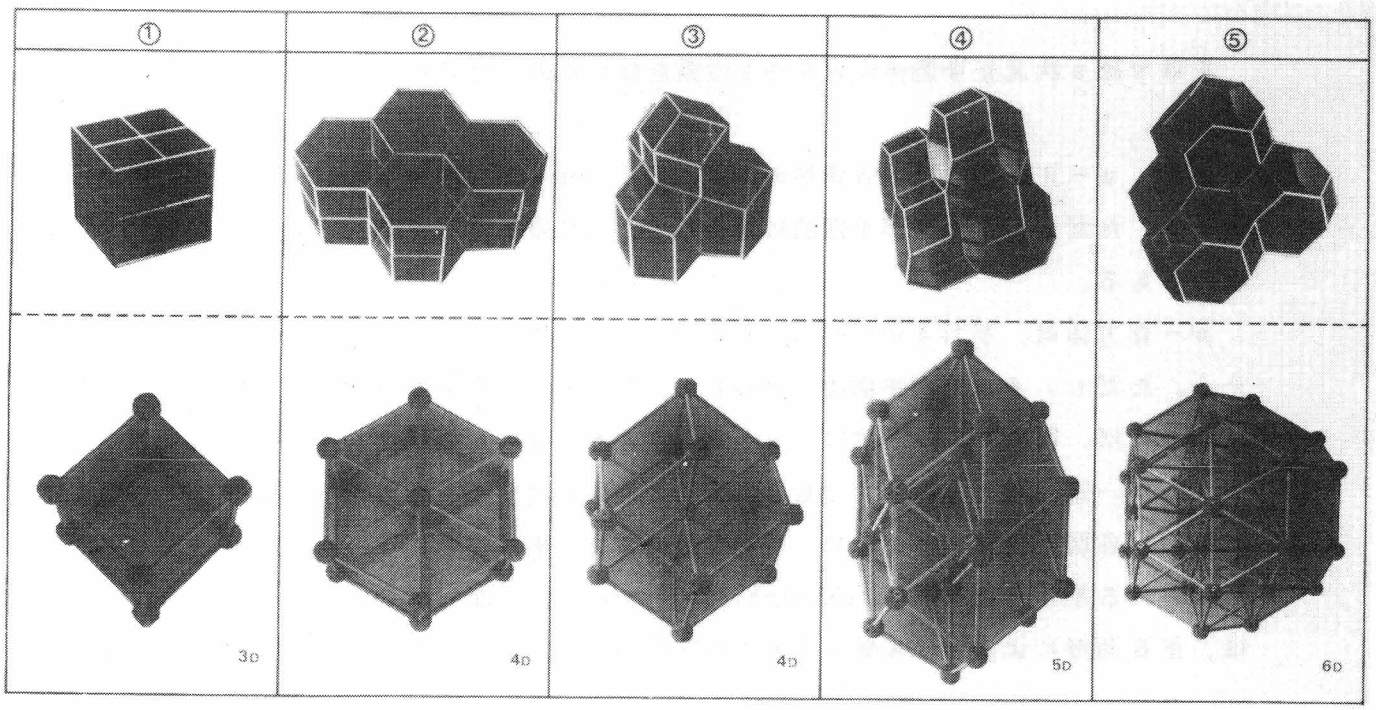
また、ｍ＝０のとき（つまり頂点の個数）は、

$$M_m = 2^{n-m}\,{}_nC_0 = 2^n$$

となる。主対角線の長さは$\sqrt{n}$である。



図表　3-3-6　R^n（nD）におけるn－正4面体(A)，n－立方体(B)，n－正8面体(C)
(C.G.:高田一郎)



図表　3-3-7　平行多面体（上段）に関係するn－立方体（nD）の射影の模型（下段）

これを、平面上へ射影（位相図でなく直射影に基づいて射影）すれば、正２ｎ辺形の中に、すべての辺に平行で等長な線分を加えた図（図表3-3-6 のB)となる。

Cross Polytopeとは、すべての頂点がｎ次元直交軸上の絶対値の等しい位置にあるｎ次元正2^n胞体で、正４辺形（γ_2）（β_2と同じ）、正８面体（γ_3）、正１６胞体（γ_4）に相当し、Schläfli記号｛3^{n-2}、４｝が与えられている。したがって、以下ではこれらをｎ次元正８面体（ｎ－正８面体）とよぶ。重正多角錐の拡張形でもある。

持っているｍ次元の広がりを持つ境界図形（０≦ｍ≦ｎ－１）の数C_mは、

$$C_m = 2^{m+1}{}_nC_{m+1} = \frac{2^{m+1}\ n!}{(m+1)!\ (n-m-1)!} \qquad \text{——(3-3-5)}$$

となる。

これを、平面上の位相図で表現すれば、正２ｎ辺形の中に、中心をはさんで相対する頂点どうし以外を結ぶすべての対角線を加えた図（図表3-3-6 のC)となる。

以上の３種類のうち、ｎ－正４面体は自己双対、ｎ－立方体とｎ－正８面体は互いに双対、である。R^nにおいて２個のｎ次元多胞体が互いに双対であるとは、一方が持っているｍ次元の広がりを持つ境界図形を他方の（ｎ－ｍ－１）次元の広がりを持つ境界図形に置き換えた形となっていることを意味する。

＊ Coxeter は論理上の重要性にかんがみ、たんにSimplex と呼んでいるが、多胞体としての具体性を重視する本章ではSimplex Polytopeとよぶ。

３－３－７　ｎ次元正多胞体の概形

本章ではｎ次元正多胞体の定性的な性質を備えた模型を３次元空間内でつぎのように作成する。

まず、ｎ－正4 面体は、３角形のみによる２（ｎ－１）面体の中に、すべての対角線を加える。ただし、３角形が平面的に複合して、対角線を持った他の多角形を構成している場合もある。

ｎ－立方体は、平行４角形のみによる（n-1)ｎ面体の中に、すべての稜に平行な稜を加える。ただし、４角形が平面的に複合して、他の平行多角形を構成している場合もある。

たとえば、図表3-3-7 下段に、ｎ＝３、４、４、５、６の場合のｎ－立方体の模型を示す（ｎが一定、たとえば４、でも射影方向の違いにより異なる外形を持つ）。この５種類の外形は各図上段に示すように、合同な形のまま、平行移動によってR^3を充填することで知られる平行多面体（Parallelohedra）のすべてとなっている（ただし、③については、正６角形によるタイル貼り図形との関係の説明上、下部にある３個のユニットを伸長

させて途中で切断してある）。平行多面体は、Fedorov がｎ次元の広がりを持った図形との関係の中で見つけ出したゾーン多面体、つまりすべての側面が平行多角形となった多面体、である（Senechal, Galiulin, 1984[3]）。したがって、本質的にｎ次元の広がりを持った図形としての性格を持っている。つまり、一般にｎ－立方体は、平行性を保存するようにR^3 に平行射影された場合、平行多面体を含むゾーン多面体とも一致する外形になり、R^4 におけるゾーン多胞体（すべての側胞がゾーン多面体状胞となっている４次元多胞体）の特徴を見せる。それを超えた平行多面体の高次元化は Ryskov と Baranovskii (1978)[4]によって試みられている。

ｎ－正８面体は、３角形のみによる４（ｎ－１）面体の中に、体心をはさんで相対する頂点どうし以外を結ぶすべての対角線を加える。ただし、この場合も、３角形が平面的に複合して、対角線を持った他の多角形を構成している場合がある。

以上において、つねにｎ≧３で、内部に加えられた稜は（ｎ－３）種類のR^n におけるかくれ線を意味している。

３－３－８　ｎ次元正多胞体の正射影

図表3-3-6 に示す各図は、ｎ－立方体以外は、ｎ次元正多胞体の位相図を示していて、境界図形の個数やその配置形態はある程度厳密に表現されていても、稜長や面角などの計量的な性質は保存されていない。しかも、各図から斜射影や中心射影を導くといった発展性は少なく、具体性のある応用範囲は狭い。

それに対して、本章で定義する正射影は、その不備を解消することができる。

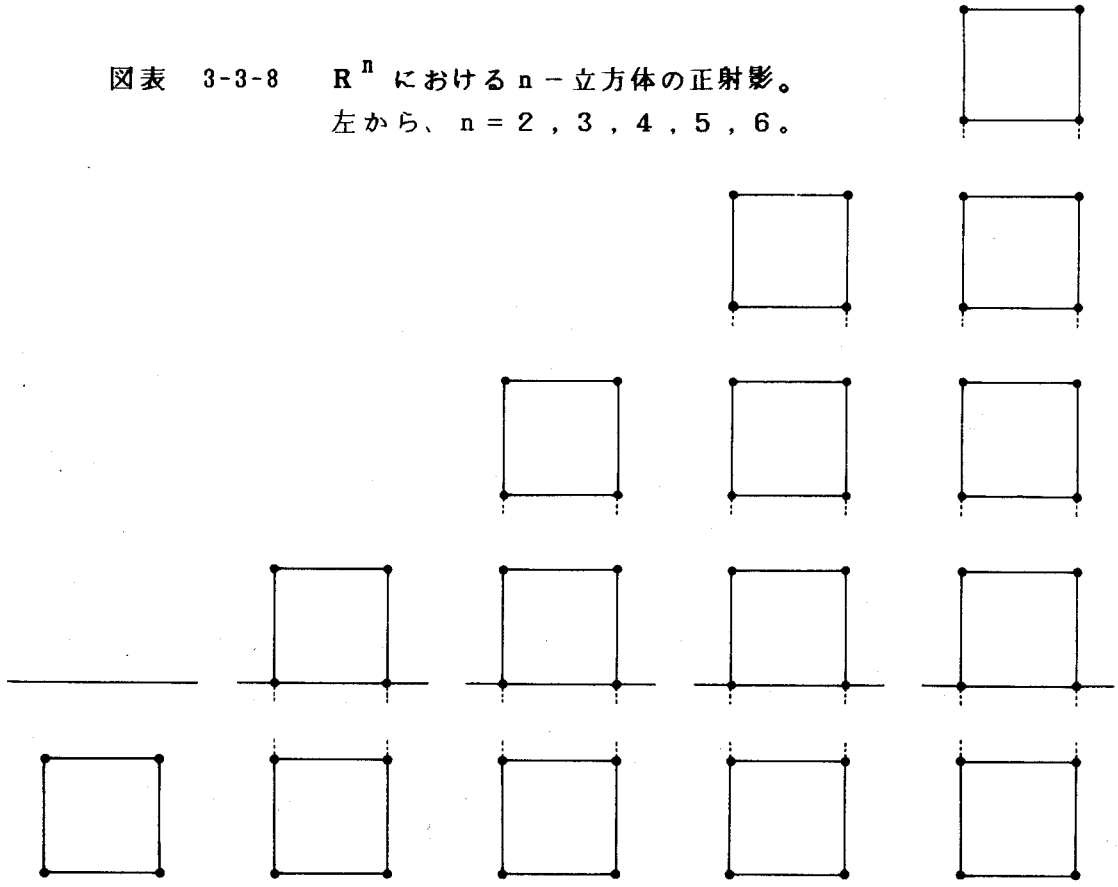
図表3-3-8 に、ｎ－立方体（ｎ＝２～６）の、もっとも基本的な正射影を示す。４－立方体の正射影を拡張して、実長に等しい長さの辺を持つ（ｎ－１）枚の正方形を、すべての辺が基線と垂直あるいは平行になるように配列すればよい。

図表3-3-9 は、図表3-3-8 においてすべての視方向が基線と４５°をなす場合の副射影を基線より上部のX_n 図で示す。基線より下部のX_2 図も加える場合は、もっとも一般的な位置にあるｎ－立方体の正射影となる。図表3-3-10は図表3-3-8 と3-3-9 の中間的な状態にある副射影である。

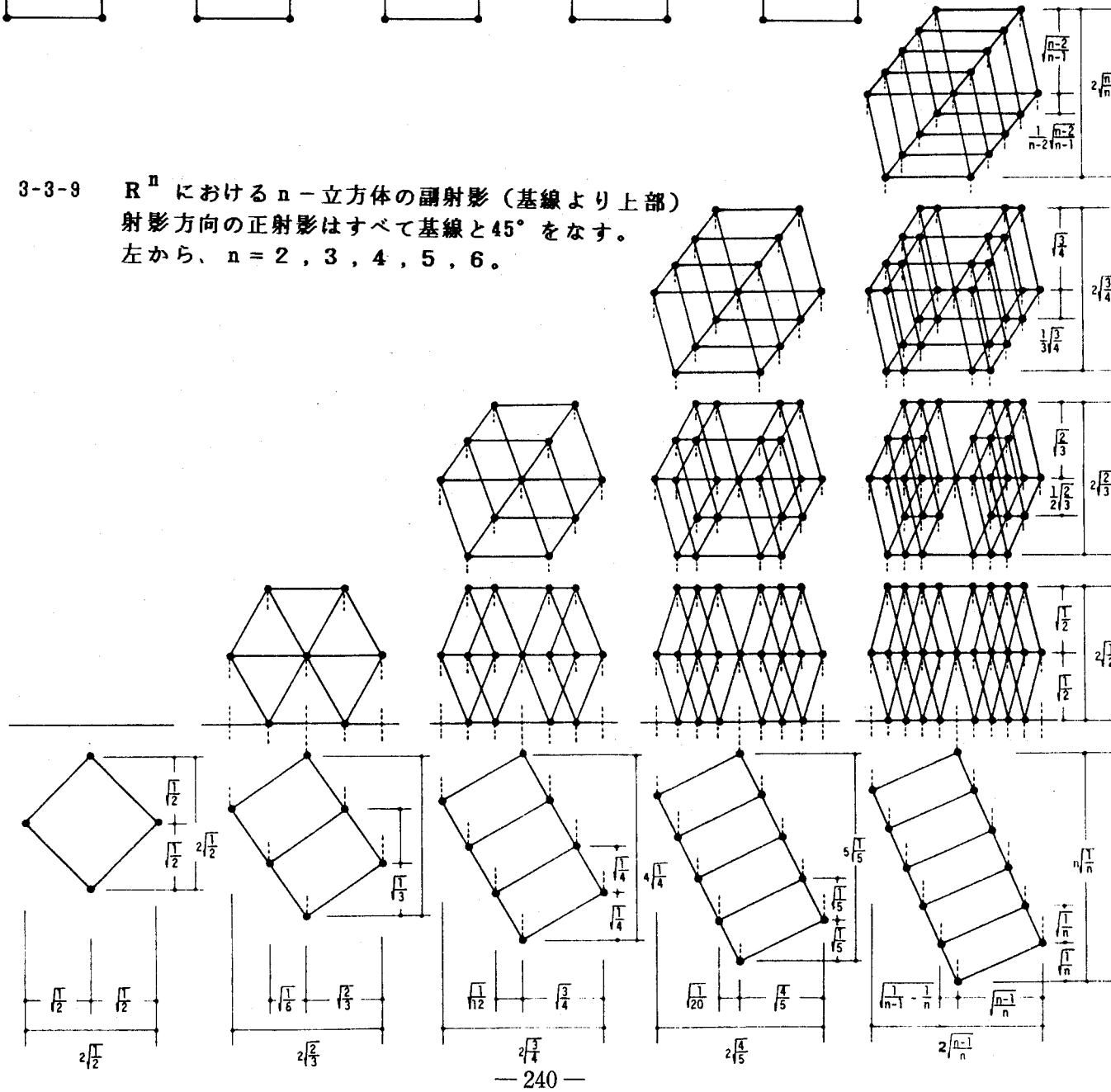
図表3-3-11は、ｎ－正４面体の正射影を、また、図表3-3-12は、双対性に従ってｎ－立方体の（ｎ－１）次元の広がりを持つ境界図形の中心に頂点を置く形のｎ－正８面体の正射影（上段は図表3-3-8 より、下段は図表3-3-9 より導かれる）を、それぞれ示す。いずれにおいても破線は直交軸を示す。

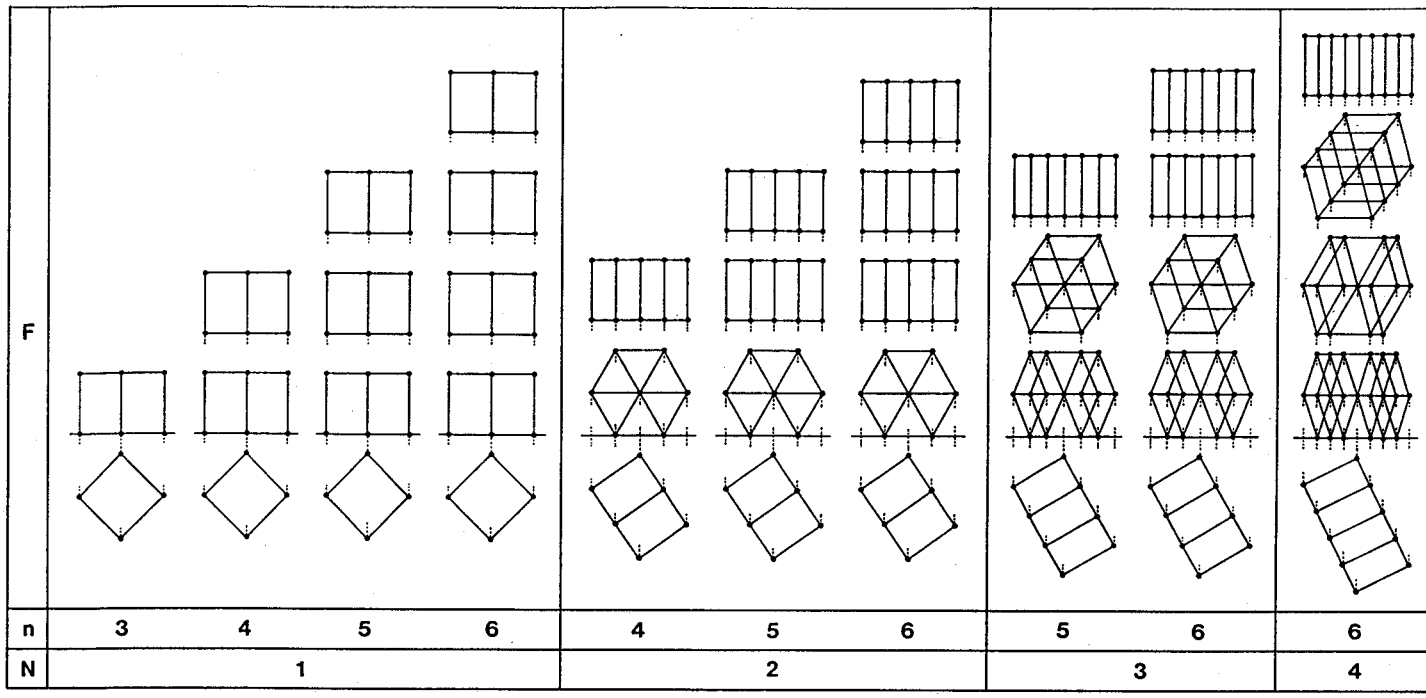
こうした正射影を基礎として、斜射影や中心射影を図表3-3-5 に準じて導くことができる。

図表　3-3-8　R^n におけるｎ－立方体の正射影。
左から、ｎ＝２，３，４，５，６。



図表　3-3-9　R^n におけるｎ－立方体の調射影（基線より上部）
射影方向の正射影はすべて基線と45°をなす。
左から、ｎ＝２，３，４，５，６。

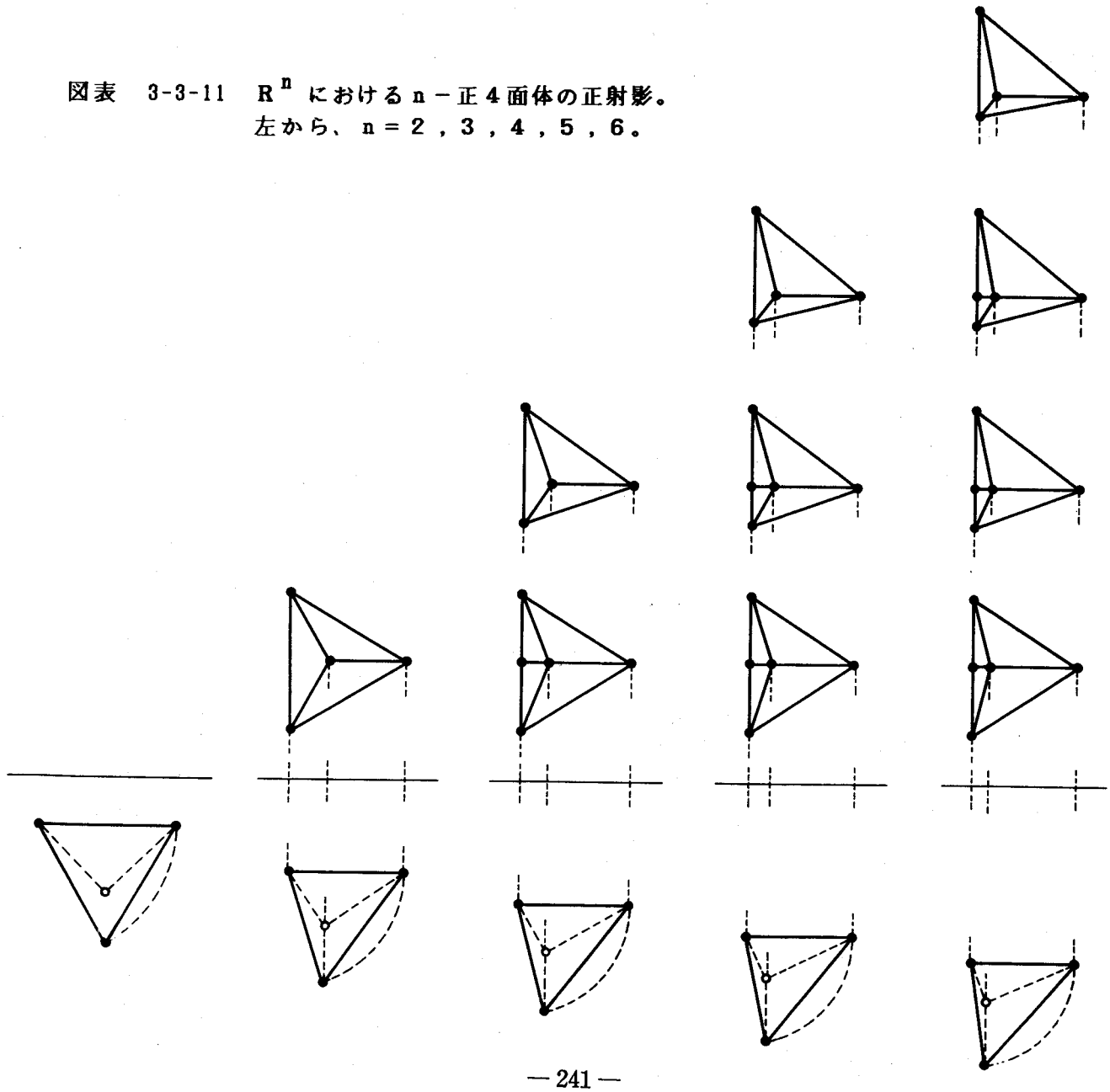




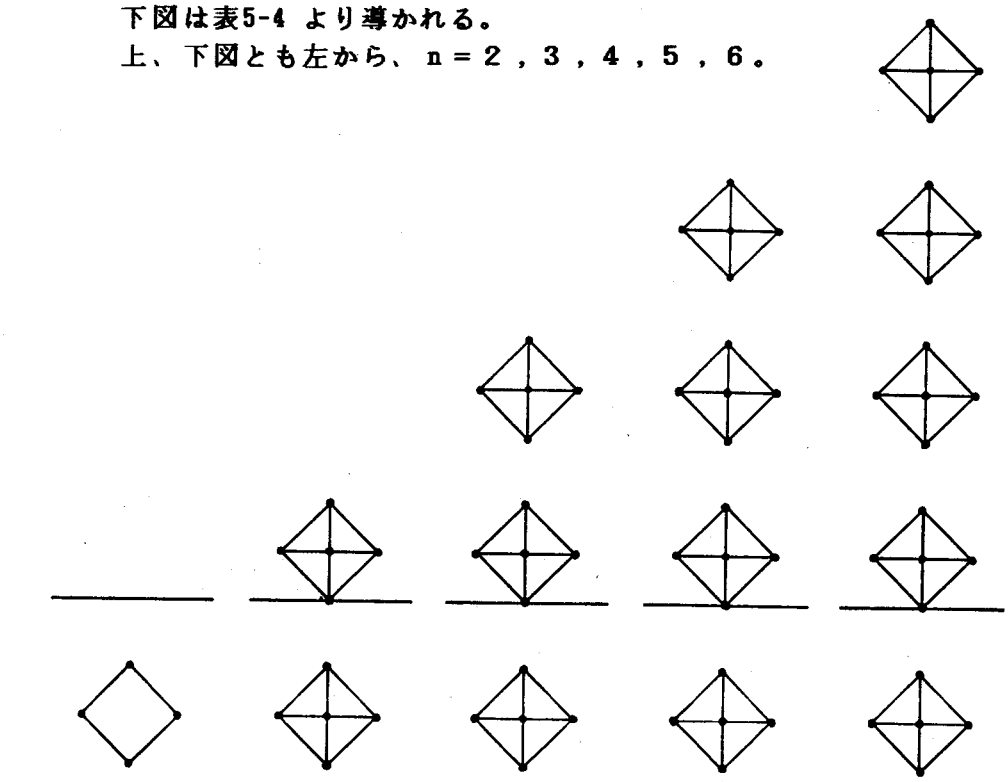
n	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
N	1				2			3		4

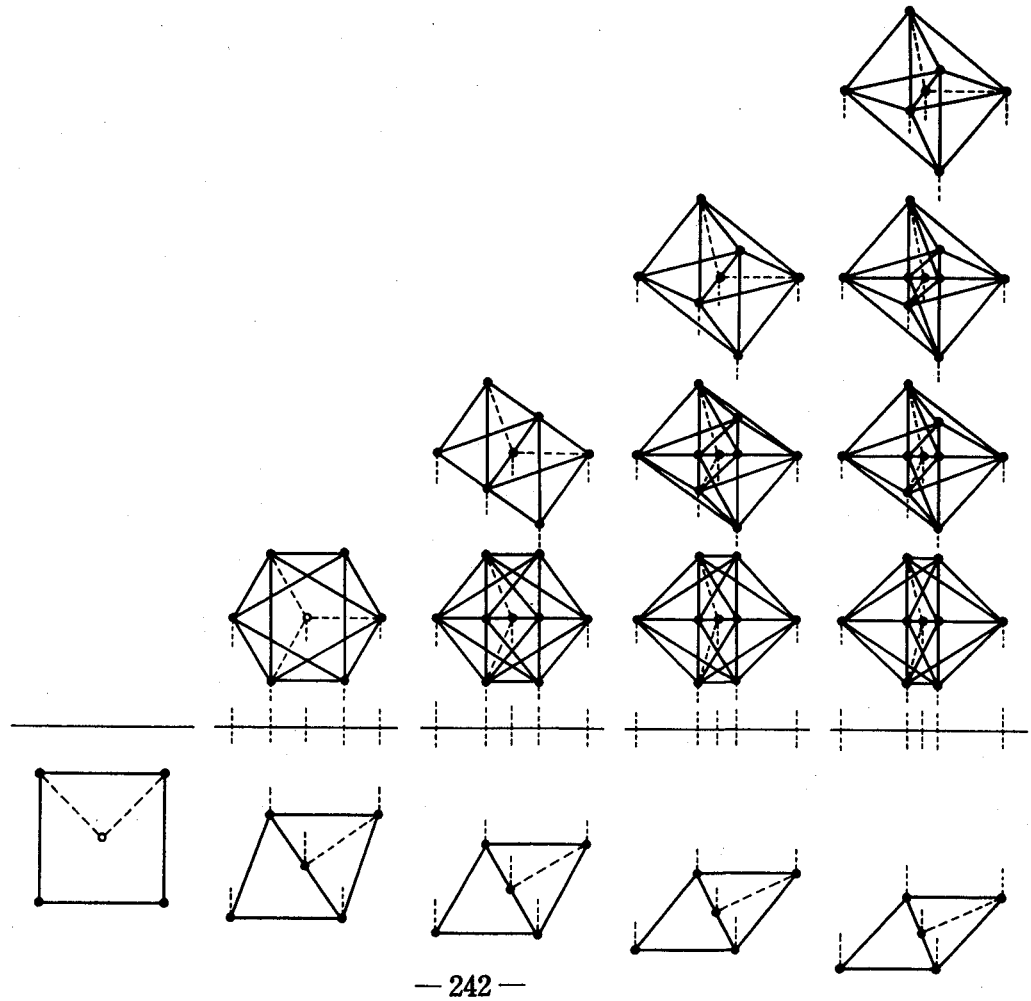
図表　3-3-10　ｎ－立方体の副射影の特殊例。Ｎは、基線と４５°をなす射影方向の数。

図表　3-3-11　R^n におけるｎ－正４面体の正射影。
左から、ｎ＝２，３，４，５，６。



図表　3-3-12　R^n におけるｎ－正８面体の正射影。
双対関係を利用することにより、上図は表5-3 より、
下図は表5-4 より導かれる。
上、下図とも左から、ｎ＝２，３，４，５，６。





３－３－９　ｎ次元正多胞体の変形

ｎ次元正多胞体は、ｎ－１次元胞（ｎ－１次元超平面）による、境界図形まわりの切断により、４次元半正多胞体に準じたｎ次元半正多胞体に変形することができる。そのうち、各稜を４次元正多胞体の場合にならって 1/3タイプに切断するものを、５次元正多胞体の位相図について、図表3-3-13に示す。影を施した部分が代表的な断面で、Ｃに示すように①と②では４－正４面体、③では４－立方体、が現われている。各稜を 1/2タイプや 2/3タイプに切断する場合も、図表3-1-24ならびに25にならって容易に作図することができる。

図表3-3-14は、図表3-3-8,11,12 を基礎とする正射影によって５次元正多胞体を変形する場合であり①は５－正４面体より、②は５－立方体より、③は５－正８面体より、それぞれ導かれる。

ｎ次元半正多胞体がさまざまに構成されるのに対し、ｎ（≧５）次元星形正多胞体は存在しない（一松1983[5]）。星形正多面体と４次元星形正多胞体が正１２面体と正２０面体、および、正１２０胞体と正６００胞体、をそれぞれ母体とするのに対し、その母体に相当するｎ次元正多胞体が存在しないためである。

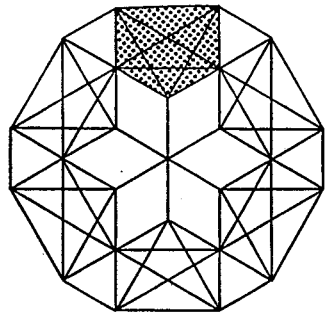
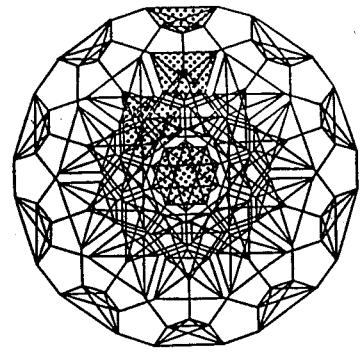
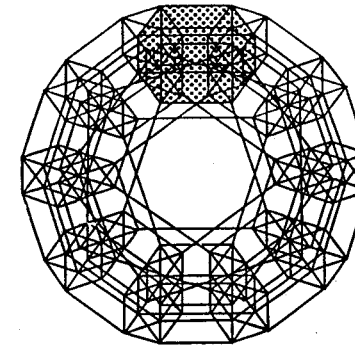
３－３－１０　ｎ次元正多胞体とｎ次元半正多胞体の連結

ｎ－正４面体、ｎ－立方体、ｎ－正８面体は、０～（ｎ－１）次元正多胞体状胞のすべてを境界図形としていて、それらのうち、任意のものを共有し合いながら、R^n 内で連結し、あるいは R^n を充塡する。

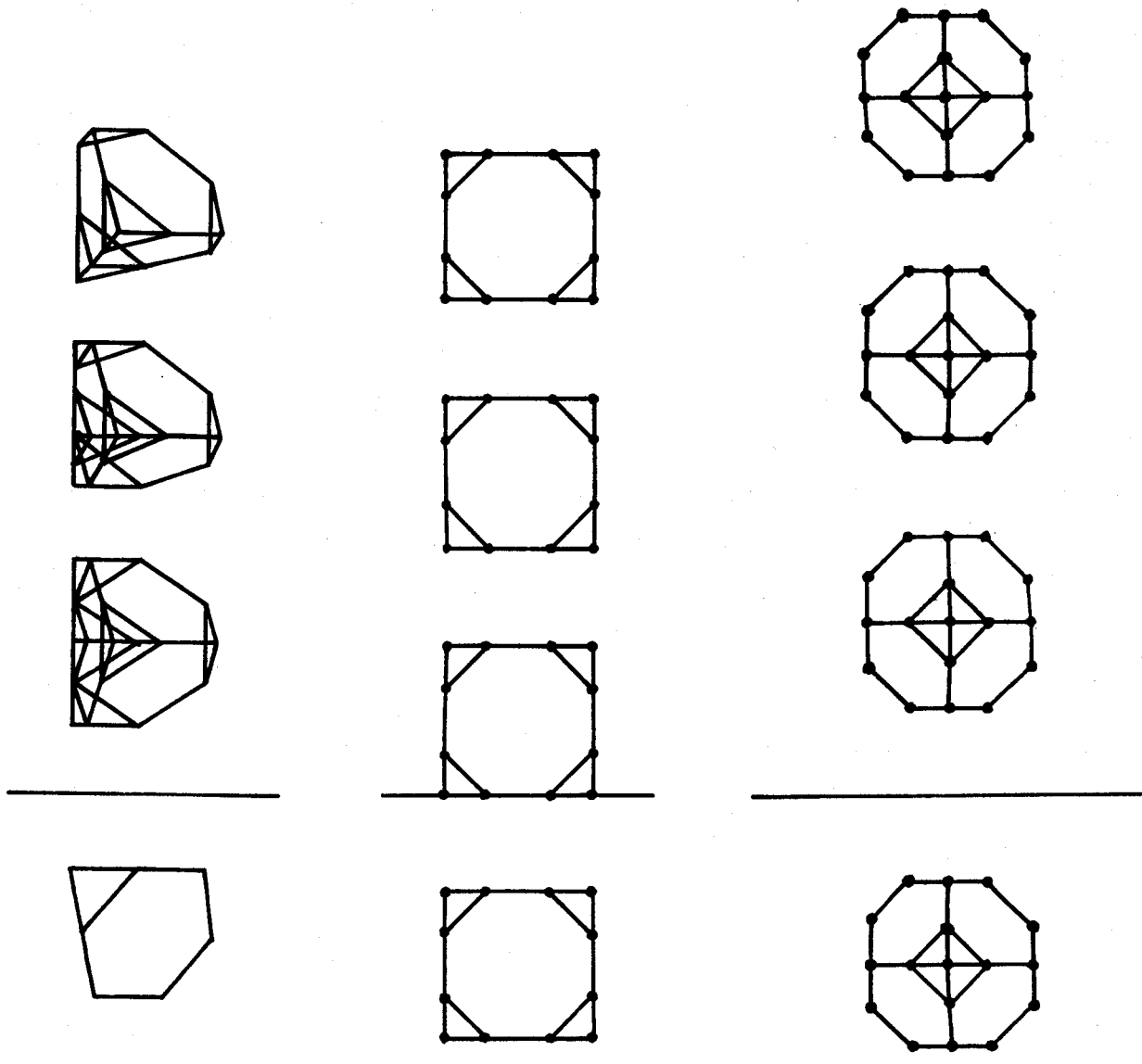
そのうち、充塡操作は、（ｎ－１）次元正多胞体状胞を共有し合うときに限って可能である。とくに、１種類のみのｎ次元正多胞体を使う場合には、次のようなものがある。諸元は Coxeter(1973)[6]による。

まず、１次元線分を使う図形には、Pythagorasの正タイル貼り図形の名で知られる、正３辺形、正４辺形、正６辺形による３種類、２次元面分を使う図形には、立方体のみによるもの１種類、さらに、３次元胞を使う図形には、図表3-1-28の、４－立方体、正１６胞体、正２４胞体による３種類が、それぞれある。それらに対して、４次元以上の広がりを持つ図形を使う場合には、ｎ－立方体によるもの１種類のみがある。

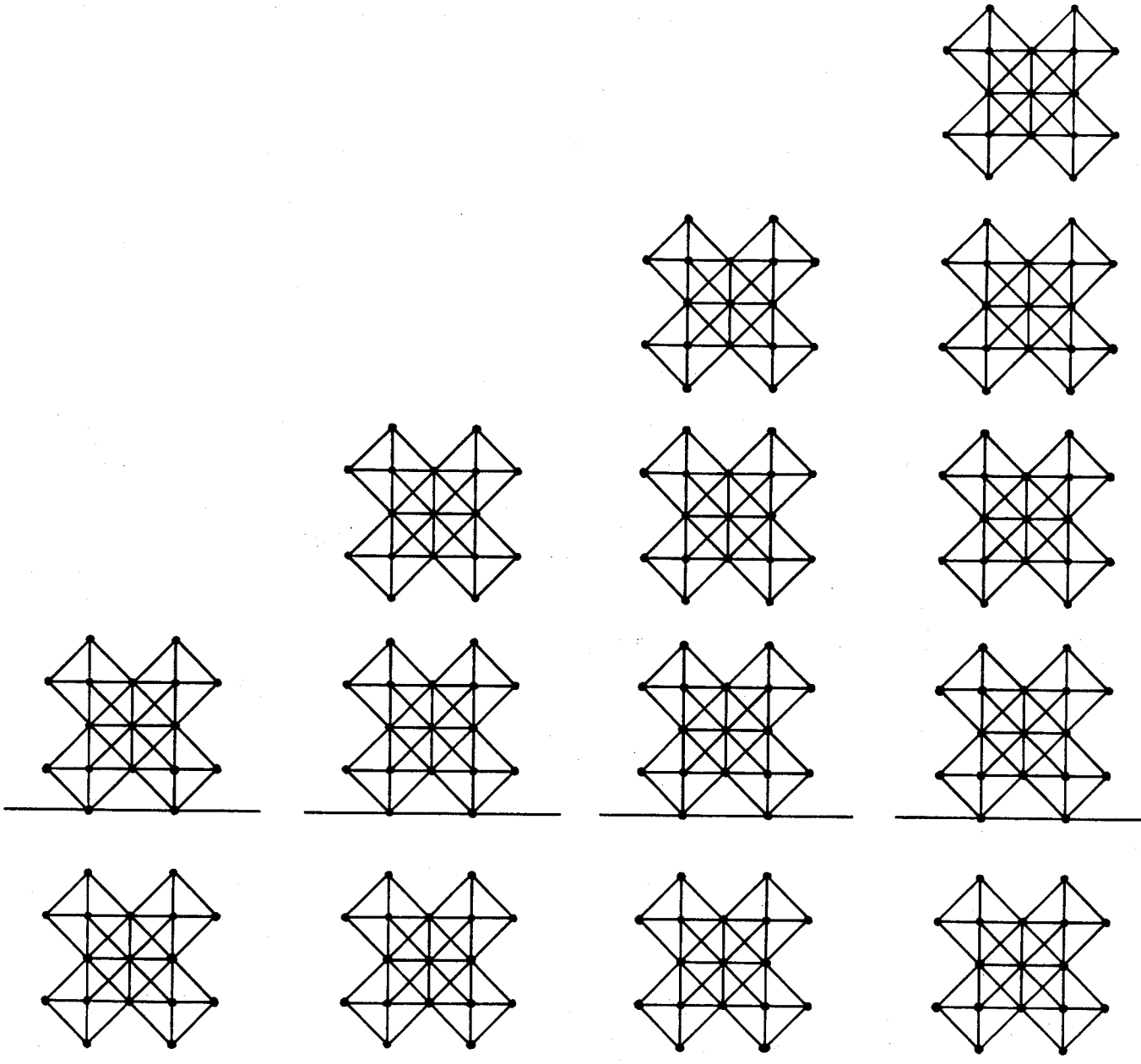
一方、２種類のユニットを使うもののうち、１次元線分を使う図形には、Archimedesの半正タイル貼り図形の名で知られる８種類、２次元面分を使う図形には、 Octetブロックの名で知られる正４面体と正８面体を交互に連結していくもの１種類が、それぞれある。Cubic ブロックに対するこの Octetブロックの拡張として、図表3-3-15にｎ－正８面体（ｎ≧３）の頂点を共有する連結図形を図表3-3-12を基礎とする正射影によって示す。こ

A			
B	$\frac{1}{3}\{3^{n-1}\}$	$\frac{1}{3}\{4,3^{n-2}\}$	$\frac{1}{3}\{3^{n-2},4\}$
C	$\{3^{n-2}\}$	$\{3^{n-2}\}$	$\{4,3^{n-3}\}$

図表　3-3-13　代表的な５次元半正多胞体の位相図。Ａは外形、Ｂは名称、Ｃは断面の種類。



図表　3-3-14　図表3-3-13のｎ次元半正多胞体の正射影



図表　3-3-15　n－正８面体の頂点を共有する連結図形の正射影。左からｎ＝３，４，５，６。

の場合、空隙部分には正３角形を側面とするさまざまなｎ次元多胞体（ｎ＝３のときは頂点数４の正４面体、ｎ＝４のときは頂点数８の正16胞体、一般には頂点数４（ｎ－２）個の多胞体）が入る。

３－３－11　本章の結論

４次元以下の空間における各種図形あるいはそれらの幾何学的性質は、多胞体の概念、多胞体公式、直交軸、各種射影、など、多くの場合、５次元以上の空間で一般的に拡張することができる。

その中で、３次元空間における５種類の正多面体と４次元空間における６種類の正多胞体はｎ（≧５）次元空間における３種類のｎ次元正多胞体として一般的に拡張される。このｎ次元正多胞体は適当な射影により、２次元平面上では３角形のみ（ｎ－正４面体とｎ－正８面体の場合）あるいは４角形のみ（ｎ－立方体の場合）の連結図形で表現され、また３次元空間内では４面体のみ（ｎ－正４面体とｎ－正８面体の場合）あるいは４角形からなる６面体のみ（ｎ－立方体の場合）の連結図形で表現される。いずれにしても建築上の形象に基本的に見られる図形で表現されるのである。

つまりｎ（≧５）次元正多胞体は建築上の形象の原像としての意味を持ち、その幾何学的内容は建築の一般的な把握と創成に基本的に関わる重要性を持っている。

本章での引用文献

1) D.M.Y.Sommerville, An Introduction to the Geometry of N Dimensions (Dover, 1958), PP.157～159
2) H.S.M.Coxeter, Regular Polytopes (Dover, 1973), PP.120～124
3) Marjorie Senechal, R.V.Galiulin, "An Introduction to the Theory of Figures ; the Geometry of E.S.Fedorov ", Structural Topology, #10(1984), 5～22
4) S.S.Ryskov, E.P.Baranovskii, "C-types of n-dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelohedra", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 4, 1987, 57 ～85
5) 一松信、"高次元の正多面体"、日本評論社、1983、PP.153～156
6) Coxeter(1973), op. cit., P.296

3－4　n（≧5）次元正多胞体の建築的応用

3－4－1　本章の目的
3－4－2　n次元正4面体の応用
3－4－3　n次元正8面体の応用
3－4－4　n次元立方体の建築的特性
3－4－5　n次元立方体の建築的連結
3－4－6　n次元立方体の応用
3－4－7　本章の結論

3－4－1　本章の目的

n（≧5）次元正多胞体にはn次元正4面体（n－正4面体）、n次元立方体（n－立方体）、n次元正8面体（n－正8面体）の3種類があって、それらは3角形と4角形のみ、いいかえれば建築上の形象を基本的に構成している多角形のみ、からなる。その3角形と4角形がn次元正多胞体の射影のしかたに従って、2次元平面上や3次元空間内にさまざまな形状で現われ具体的な建築の図形的側面を形成していると考えられる。

本章では、このようなn次元正多胞体に内在する建築的な性質を、とくにn－立方体の連結図形を媒介として具体的に応用することを目的とする。

3－4－2　n次元正4面体の応用

n－正4面体とはn次元正（n＋1）胞体、つまりα_n、のことであって、式3-3-3で導かれるような定性的な性質を持ち、R^n 内で図表3-3-11のように正射影される。

R^4 内で持っている側面はすべて正3角形、側胞としてのR^3 部分はすべて正4面体状である。

これを位相図によって2次元平面上で表現すれば、図表3-3-6 のAのように、正（n＋1）角形の中にすべての対角線を加えた図となる。

このような図は、すでに図表1-6 や1-7 で示したように、機能グラフや動線図の基本図形として、建築の企画や計画段階で原理的に検討することができる。

Friedman(1975)[1] は完全グラフのうち平面上では頂点を4個持つもの（正4面体の射影）は辺を交差させずに実現可能であっても、5個持つもの（4－正4面体の射影）は必然的に交差するとして、後者のような機能グラフを持つ建築は、辺の交差部分に階段やオーバブリッジを設置しなければならないという（図表1-6）。さらに進んで[2]、一般にn個の頂点を持つ完全グラフ（（n－1）－正4面体の射影）を平面上で表現するときは、

nが奇数のときＣＫ　＝（ｎ－１）^{2}（ｎ－３）^{3}／６４、ｎが偶数のときＣＫ　＝ｎ（ｎ－２）^{2}（ｎ－４）／６４の交差部分が生ずることも指摘する。

こうした考察は機能グラフや動線図に関して一般的に適用されるもので、その根底には、ｎ次元の広がりを持つ図形は（２ｎ＋１）次元空間においてのみ部分を交差させることなく実現できる、という位相幾何学上の実現定理がある。つまり、線形図形（ｎ－正４面体の稜の射影）は、平面上ではなくR^{3}空間においてたえず実現可能なのであって、３次元の広がりを持つ空間内では、どのような機能グラフや動線図も交差しない形で成立する。

一方、Tabor(1976)[3]は、こうした機能グラフに距離概念を導入した高次元性を与えることを提案している。ここに見られる距離概念を明示するためには、本論文で定義する直射影、とくに正射影、の応用が有効となる。たとえば、R^{n}において距離の与えられた２点Ｊ，Ｋは、正射影で図表3-3-3 のように表示される。

以上のような平面上での図に対して、３次元の広がりを持つ空間内では（ｎ＋１）個の頂点からなって、すべての頂点を結ぶ対角線を持つ立体模型によって定性的な性質を保存しながら表現されるが、その場合は、球状ドームや立体トラスのデザインを導くことになる。　たとえば、図表3-2-15や3-2-20のGeodesicドームのような３角形分割された外形を持つ球状ドームは、見方をかえれば、層（レイヤー）の数にかかわらずｎ－正４面体のR^{3}への射影（あるいはその部分）が現われていると解釈することができる。Emde(1984)[4]も、Geodesicドームの幾何学的構成原理をSimplex Figureと名付けるｎ－正４面体から出発することによって解析している。

３－４－３　ｎ次元正８面体の応用

ｎ－正８面体とはｎ次元正2^{n}胞体、つまりγ_{n}、のことであって式3-3-5 で導かれるような定性的な性質を持ち、R^{n}内で図表3-3-12のように正射影される。

ｎ－正４面体と同じく、R^{n}内では、持っている側面はすべて正３角形、側胞としてのR^{3}部分はすべて正４面体状である。

これを位相図によって平面上で表現すれば、図表3-3-6 のC のように、正２ｎ角形の中に、中心を通るもの以外のすべての対角線を加えた図となる。また３次元空間内で位相的に表現すれば、偶数個の頂点からなって、各頂点から（２ｎ－２）本の稜がでるように３角形分割された球状ドームの内部に、上述の対角線に相当する対角線を加えた図となる。いずれにしてもｎ－正４面体と同等の建築的意味を持っている。

その上、ｎ－正８面体は次節以下で触れるｎ－立方体の双対図形として、ｎ－立方体による構成に構造的な斜材を付加することになる。その具体的な様相は図表3-3-15で示したｎ－正８面体の頂点を共有し合う連結図形の正射影からも知ることができる。これはｎ－

立方体の連結図形の双対図形を示していて、これから判断すると、３次元空間内で知られるOctetトラスは、結局、ｎ－正８面体の連結図形の直射影から導かれる。

３－４－４　ｎ次元立方体の建築的特性

ｎ次元正多胞体のうち、もっとも建築計画上の応用性に富んでいるのはｎ－立方体であり、そのR^3への射影は、建築上の形象との関係上つぎのような特性を持っている。

いま、R^3内の原点Ｏで任意の角度をなして交わるｎ本の直線（座標軸）を考え、その上に等長の単位距離ａをとる。

このとき、２本づつの座標軸はそれらに平行な辺からなる１辺ａの菱形を、３本づつの座標軸はそれらに平行な稜からなる１稜ａの等稜平行６面体を、以下同様に、一般に、ｍ本づつの座標軸は１稜ａの等稜平行（ｍ－１）ｍ面体を、ｍ－立方体の外形として導く。

図表3-4-1 にｍ＝３～６（図の場合はｍ＝ｎ）の場合を左から右へ示す。その各（ｍ－１）ｍ面体内では、式（3-3-4)で与えられる平行６面体状胞から平行（ｍ－２）（ｍ－１）面体状胞までが、それぞれの持つ境界図形を共有し合って、図表3-3-7 下段のように、互いに相貫し合いながら、さまざまに連結している。

その特徴を明示し、かつ具体的に応用するためには、胞が互いに相貫するような模型（すべてのかくれ線が現われる模型）は煩雑に過ぎる。むしろ、実用上は、図表3-4-2 のように内部の各胞がR^3において互いに相貫せず、側面のみを共有し合う状態に整理する方が望ましい。

いいかえると、任意のｎ－立方体を、かくれ線の処理されたR^4におけるゾーン多胞体の状態でR^3内で表示すべきである。

その場合、上記平行（ｍ－１）ｍ面体は、互いに相貫することなく側面のみを共有し合う側胞としての平行６面体状胞から（ｍ－２）（ｍ－１）面体状胞までを、ｋ（＜ｍ）次元図形について、最大

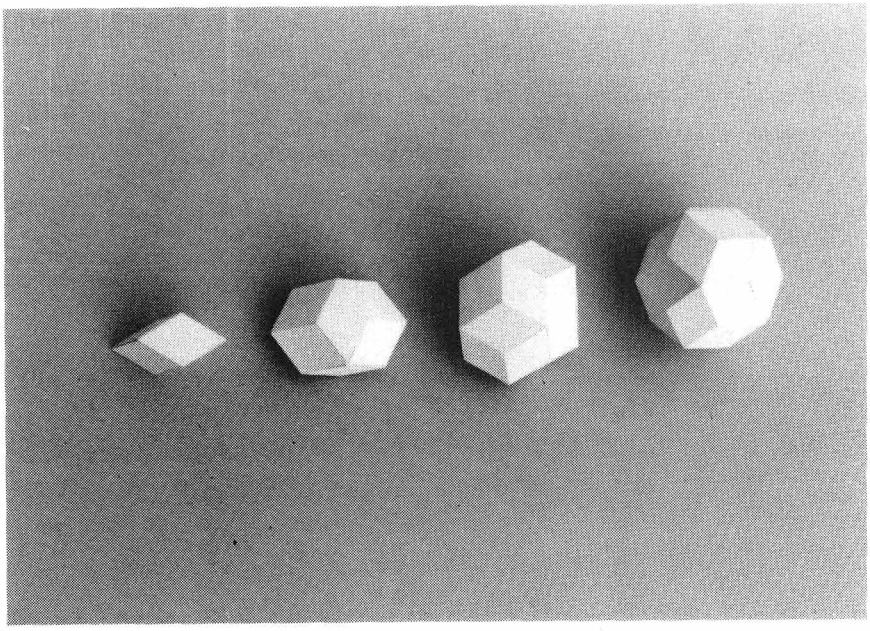
$$k = {}_mC_r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}$$

種類づつ内部に持つ。

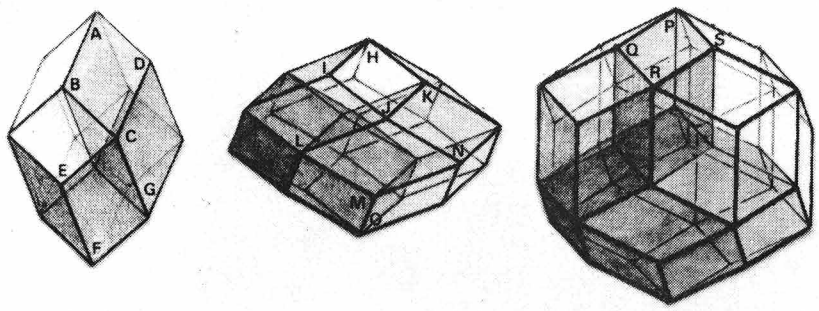
こうした構成は任意の座標軸から導かれるが、正多面体の中に組込まれる回転対称軸を座標軸として利用すると、とくに整理された様相を持つようになる。

図表3-4-3 に、正多面体の持つすべての回転対称軸を示す。上段から、正４面体、立方体、正８面体、正１２面体、正２０面体の場合であり、左列は面心を結ぶ軸、中央列は稜心を結ぶ軸、右列は頂点を結ぶ軸を示す。

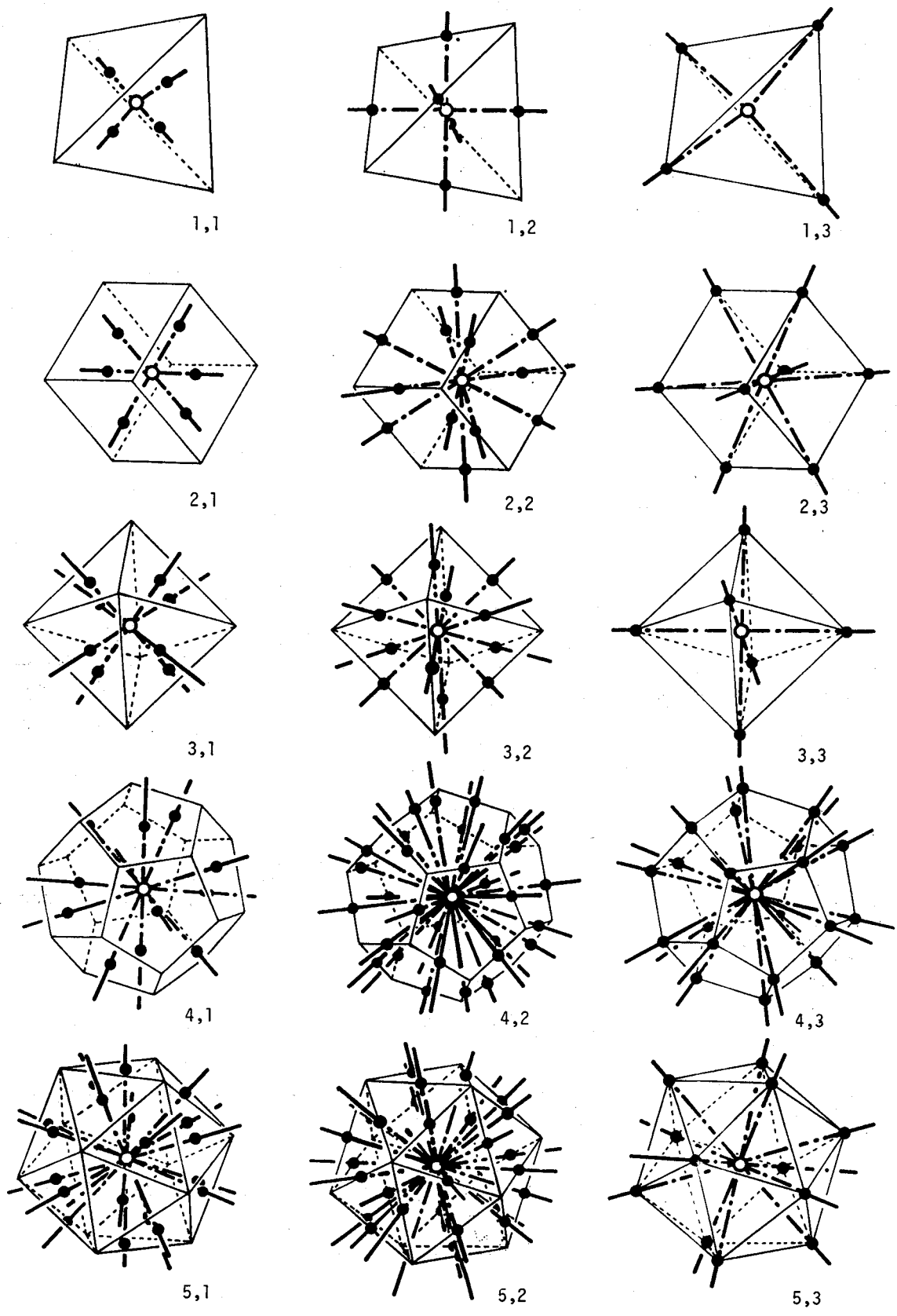
図表3-4-4 に、図表3-4-3 の各軸によって構成されるすべての菱形の内角をまとめる。互いに双対な関係にある図形どうしは、まったく同じ内容を持っている。



図表　3-4-1　　n－立方体の外形としての等稜平行（n－1）n面体



図表　3-4-2　　かくれ線の処理されたR^4におけるゾーン多胞体としてのn－立方体。
左からn＝4，5，6。



図表　3-4-3　正多面体の持つすべての回転対称軸。

最上段から、正４面体、立方体、正８面体、正12面体、正20面体。

左端列から、面心を通る場合、稜心を通る場合、頂点を通る場合。

70.528780 + 109.471220 1,1 4	90 + 90 1,2 3	70.528780 + 109.471220 1,3 4
90 + 90 2,1 3	60 + 120 90 + 90 2,2 6	70.528780 + 109.471220 2,3 4
70.528780 + 109.471220 3,1 4	60 + 120 90 + 90 3,2 6	90 + 90 3,3 3
63.434948 + 116.565051 4,1 6	36 + 144 60 + 120 72 + 108 90 + 90 4,2 15	20.905157 + 159.094842 70.528780 + 109.471220 4,3 10
20.905157 + 159.094842 70.528780 + 109.471220 5,1 10	36 + 144 60 + 120 72 + 108 90 + 90 5,2 15	63.434948 + 116.565051 5,3 6

図表 3-4-4 図表3-4-3 の各軸によって構成される菱形の内角（各欄上段）と同表のそれぞれの回転対称軸の本数（各欄右下）

この図表3-4-4 から導かれる菱形によって得られる最大のゾーン（ｍ－１）ｍ面体がｎ－立方体の外形となるのであって、各欄右下に付記するように（１、２）、（２、１）、（３、３）は３次元直交軸に関係する３－立方体を、（１、１）、（１、３）、（２、３）、（３、１）は４次元等測軸に関係する４－立方体を生む。また、（２、２）、（３、２）、（４、１）は、射影の異なる６－立方体を、（４、３）は10－立方体を、（４、２）は15－立方体をそれぞれ生む。双対関係により（５、３）は（４、１）と、（５、１）は（４、３）と、（５、２）は（４、２）と、それぞれ同じである。 以上のうち、（４、１）または（５、３）には、つぎのような特異な性質がある（筆者 1979 [5],1980 [6],1983[7]）。

つまり、正１２面体の体心と各側面の面心を結ぶ６直線を座標軸とすると、そのうち２本づつでは図表3-4-5 の２Ｄの、対角線の長さの比が黄金比１：$(1+\sqrt{5})/2 \fallingdotseq 1:1.618$ となった菱形（Golden Diamond, ＧＤ）、見かたによれば２－立方体の射影、が１種類だけ生まれ、以下同表左列のように、３本づつではＧＤのみを側面とする３－立方体としての２種類の平行６面体A_6 とO_6 が、４本づつではA_6 とO_6 ２個づつからなる４－立方体の外形の射影としての Bilinsky(1960)[8] の発見になる平行１２面体B_{12}^{*}が、５本づつでは１個のB_{12}と３個づつのA_6 とO_6、つまりA_6 とO_6 ５個づつ、からなる５－立方体としての平行２０面体F_{20}が、６本づつでは１個のF_{20}と５個づつのA_6 とO_6、つまりA_6 とO_6 １０個づつ、からなる６－立方体としての平行３０面体K_{30}が、それぞれ生まれる。しかも同表右列のように、A_6 あるいはO_6 を１本の座標軸の方向に平行移動させればB_{12}となり、同様に、B_{12}からはF_{20}が、F_{20}からはK_{30}が導かれる。以上の特殊性により、筆者（上掲書）はCoxeter の指示に従って合わせて５種類を Golden Iso-zonohedra(ＧＩ）と名付けた。[**]

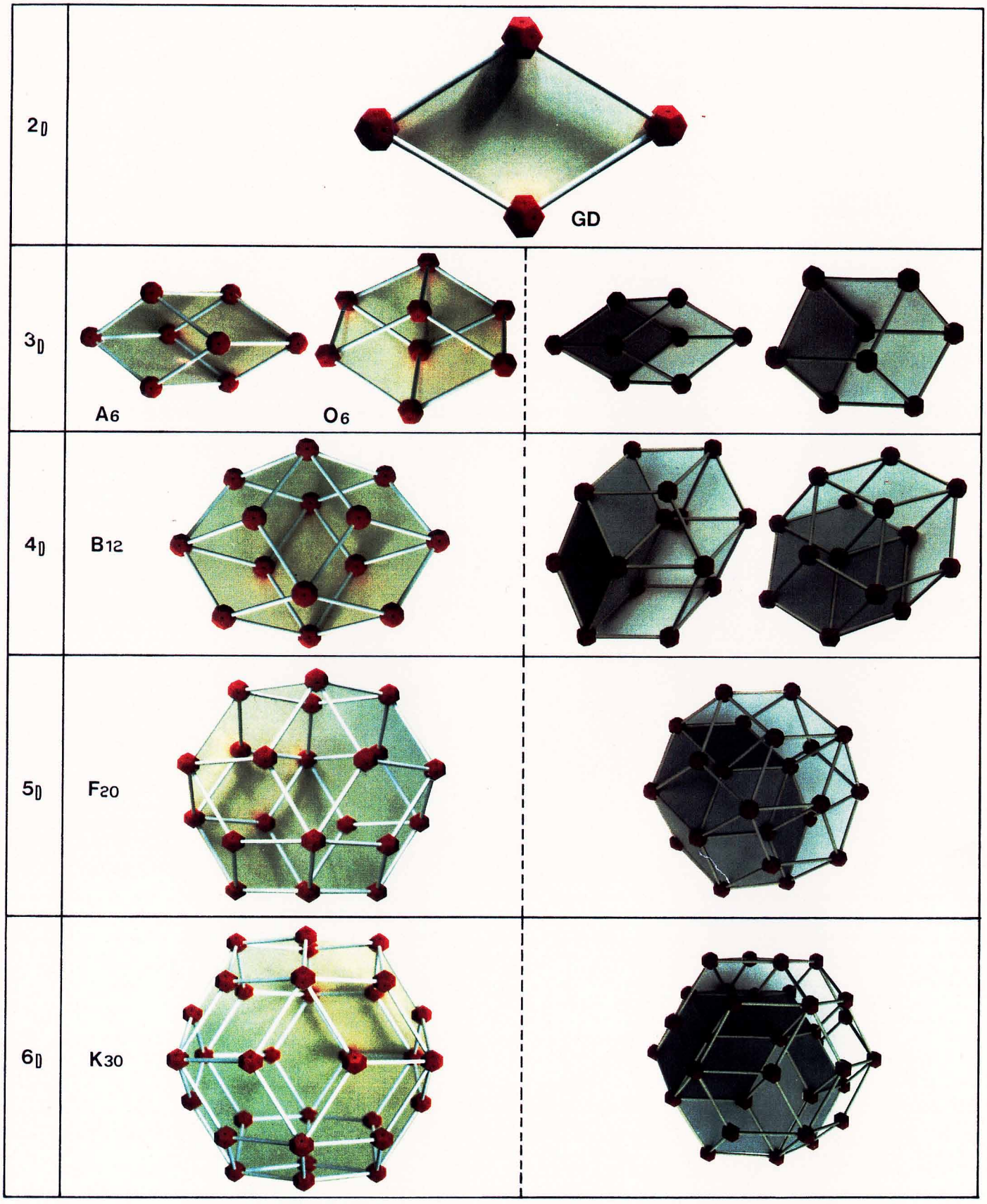
同様に、正２０面体の体心と各側面の面心を結ぶ１０直線を座標軸とすると、そのうち２本づつでは、図表3-4-6 のような対角線の長さの比が１：$\sqrt{2}$ および１：$(3+\sqrt{5})/2 \fallingdotseq 1:1.618$ となった２種類の菱形が得られ、それらによって、すべての３面角が３本づつの座標軸のなす３面角のどれかと等しくなるような図表3-4-7 右下の３－立方体（平行６面体）から、同表左上の10－立方体（平行９０面体）までの外形が表にあげた数づつできる。

*

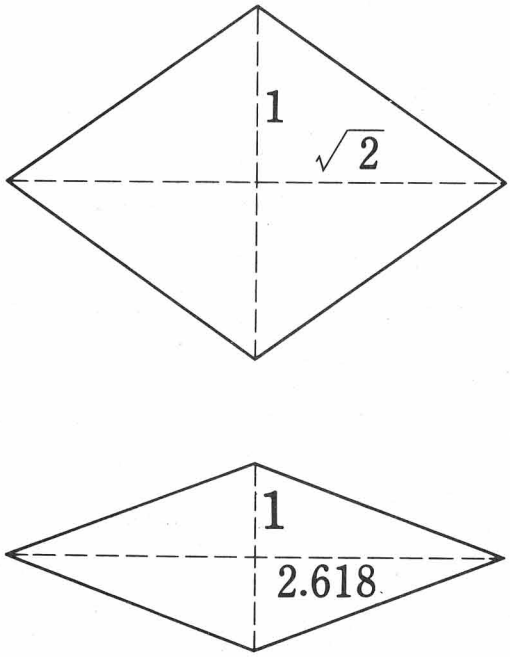
この平行12面体は、菱形12面体（対角線の長さが１：$\sqrt{2}$ の菱形よりなる）と同じく１種類の菱形のみからなるため、 Coxeterは、”第２タイプの菱形12面体”と名付けている。

**

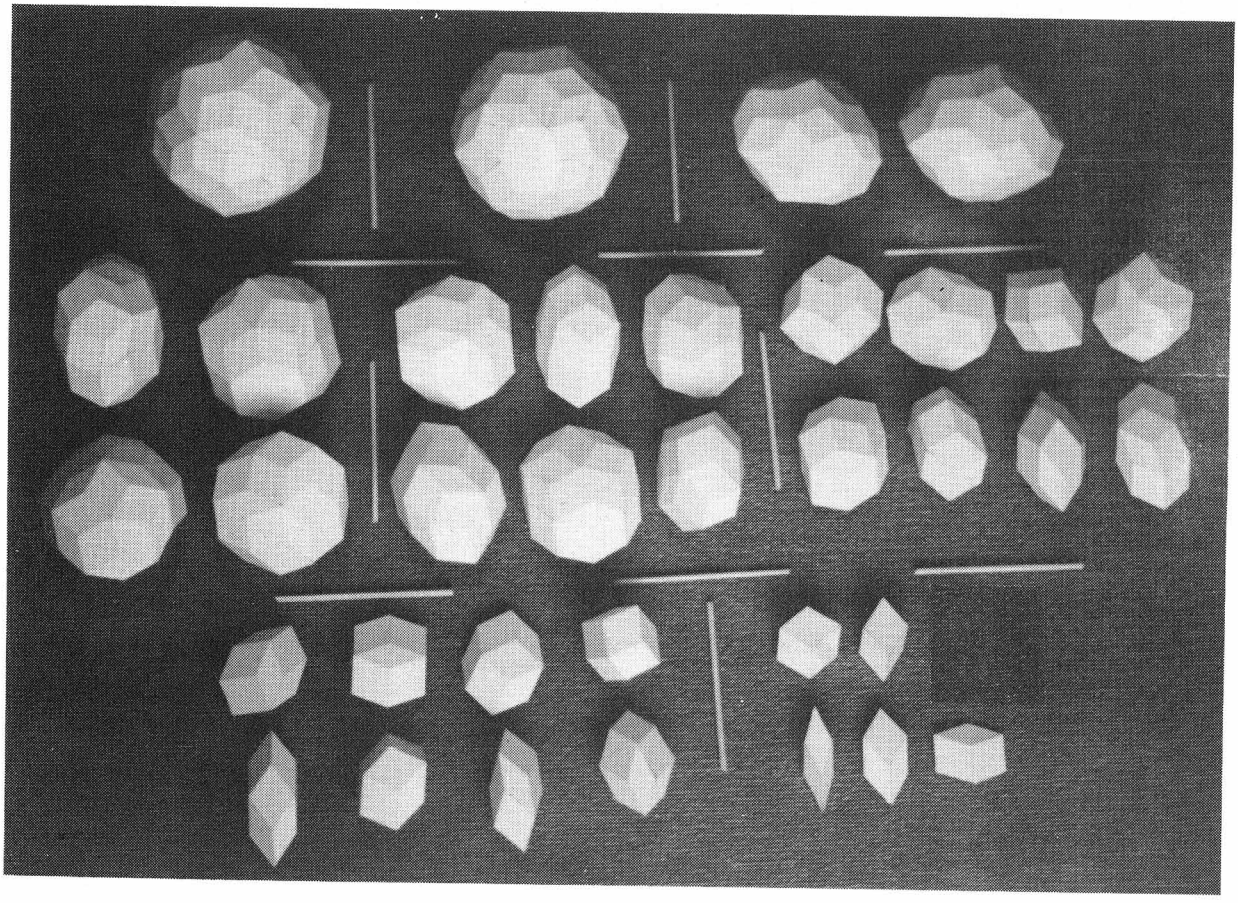
発見者の名にちなんでB_{12}のＢはBilinsky，F_{20}のＦはFedorov，K_{30}のＫはKeplerを意味する。



図表　3-4-5　Golden Iso-zonohedra(GI)の構成。
2DはGolden Diamond、3D～6Dの左側は外形。同じく
右側は低次元のGIの平行移動によって導かれる状態。



図表　3-4-6　　図表3-4-7 の10－立方体を導く
2種類の菱形



図表　3-4-7　　図表3-4-3 の（4,3)あるいは（5,1)の10本の回転対称軸より
導かれる10－立方体の外形（左上）とその中に埋め込まれる
3～9立方体

3－4－5　n次元立方体の建築的連結

以下では、R^n における、n次元正多胞体の、m（$m \leqq n-1$）次元正多胞体状胞を共有し合う連結図形を、n－立方体の場合を例として考察する。いずれも、R^n を充塡することはないがR^3 に射影されたときはそのR^3 を充塡する例に限定するものとする。具体的な応用を目的とするためである。その場合、3－3－7で触れたように、R^4 におけるかくれ線の処理されたゾーン多胞体の側胞を共有し合う連結図形が現われる、という特徴がある。

いま、R^4 で考えると、線分、正方形、立方体状胞は、たとえば図表3-4-8 のように、頂点と辺を共有し合って連結する。

この操作を、図表3-4-5 に関してR^6 内で拡張すれば図表3-4-9 となる。この場合、3－立方体と4－立方体は2－立方体（正方形）を、4－立方体と5－立方体は3－立方体を、5－立方体と6－立方体は4－立方体を、それぞれ共有し合っている。

このような見方からすると、図表3-3-7 の上段は、下段に示す各n－立方体の、①と③では側面、②、④、⑤では側面と側胞（各6角形状側面は側胞が面縮している）を共有している。

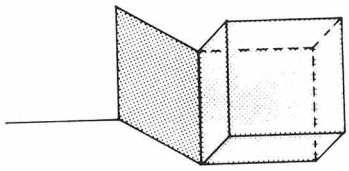
図表3-4-5 で得られる各GIについては、図表3-4-10のような構成が可能である。

つまり、A_6 とO_6 以外の各GIは自らより小規模のGI（最終的にはA_6 とO_6）を内部に持っていて、それらを図表3-4-9 のように共有し合いながら射影されて、つぎのようにR^3 を充塡していく。

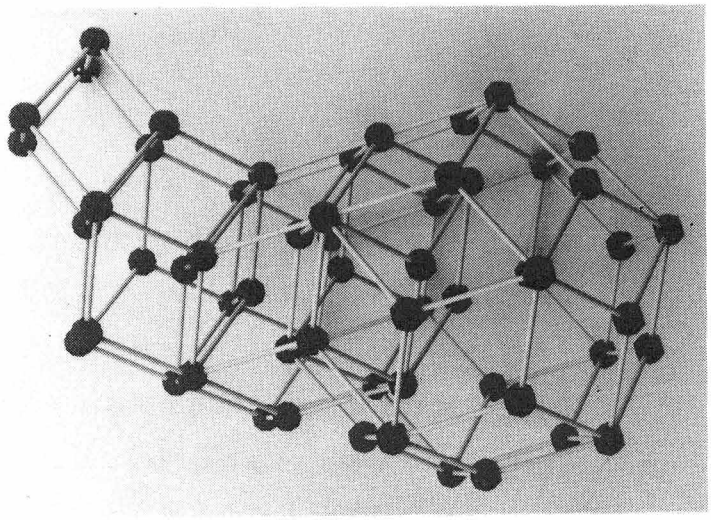
A_6 とO_6 は、側面のGDを共有し合いながら、bの形で連結され Cubicブロックの一般形を構成する。この場合、R^3 は周期的に充塡されていく。ところが、aのように、巡回群C_5（正5角錐と同じ回転対称性）を持って全体としては非周期的にもR^3 を充塡することができるのである。

B_{12}についても同様で、GDを共有し合う場合、よく知られたbや特異なcの形でR^3 を周期的に充塡する一方、aの形で非周期的にも充塡する。ただし、aの場合、多層に積層していく段階でB_{12}内のA_6 あるいはO_6 を共有させることが必要である。

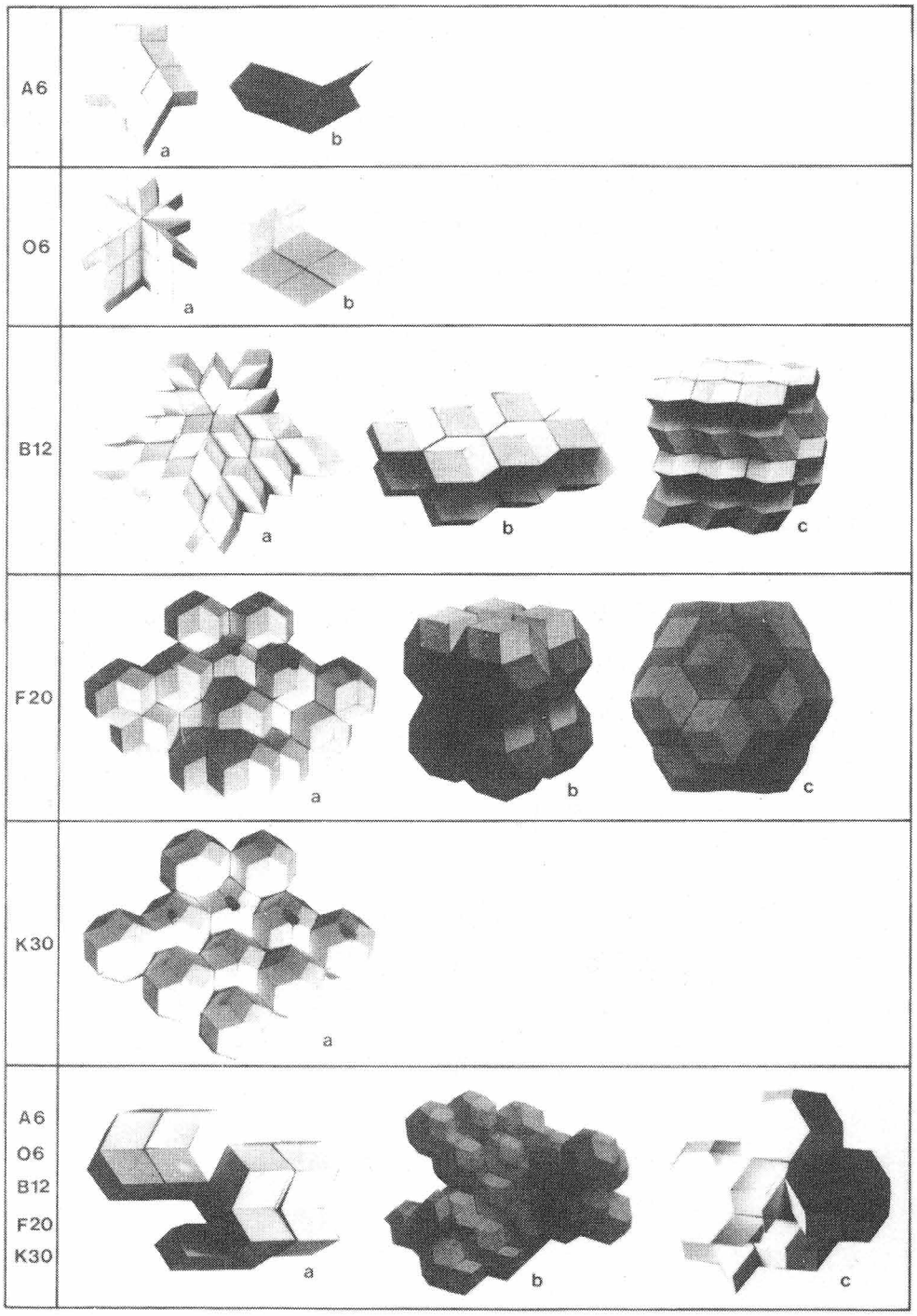
F_{20}については、内部のO_6 を共有し合うbのような周期的なR^4 における連結図形がまず考えられる。この場合、間隙にはA_6 とO_6 が入って、R^3 における充塡図形ともな



図表　3-4-8　　n－立方体（n＝1～3）の連結



図表　3-4-9　　n－立方体（n＝3～6）の連結



図表　3-4-10　ＧＩの連結

る。ｃは、側面としてのＧＤを共有させて、１２個のF_{20}を、全体として正２０面体群の対称性を持つように球状に連結したもので、内部に空洞がある。この内部の空洞や、外部の凹部にはA_6かO_6が任意に入って、結果としてR^3を無限にしかも非周期的に充塡する。ａは、自らの持つO_6部分と側面ＧＤを共有しながら、巡回群C_5のもとで非周期的にR^3を充塡しあるいはR^4内で連結する様相を示す。

K_{30}についても、F_{20}のａと同様である。

以上は単一種類のＧＩによる構成例であるが、複数種類を使うことを前提とすれば、さらにさまざまな造形が、最下段のように生まれる。ａは、連結された各ＧＩを１本の稜の方向に伸長させようとする試み、ｂは大規模なＧＩと小規模なＧＩを対比させて組合わせる試み、ｃはすべてのＧＩを混用して、極端な非周期性を見せる造形を得ようとする試みである。

以上のような、場合によってはきわめて複雑な造形も、結局は、１種類のみのＧＤを組み合わせるだけであり、しかも得られた造形に含まれるすべての稜は、正１２面体の体心と面心を結ぶ６本の軸に平行になっている、という規則性の中にある。

同じような、特徴のあるR^nにおけるｎ－立方体の連結図形、ならびにその射影としてのR^3の充塡図形は、図表3-4-7からも豊富に導かれる。たとえば、図表3-4-11に、同図表に現われているすべてのユニットを用いたR^3の充塡図形を示す。

それらの結果として得られる、ｎ－立方体によるｎ次元空間充塡図形のR^2への射影は、たとえば、図表3-4-12のような、さまざまな平行４角形をユニットとするタイル貼り図形を導く。ただし、次元は一定（たとえば７）でも、射影方向の違いにより異なるパターンが得られている。

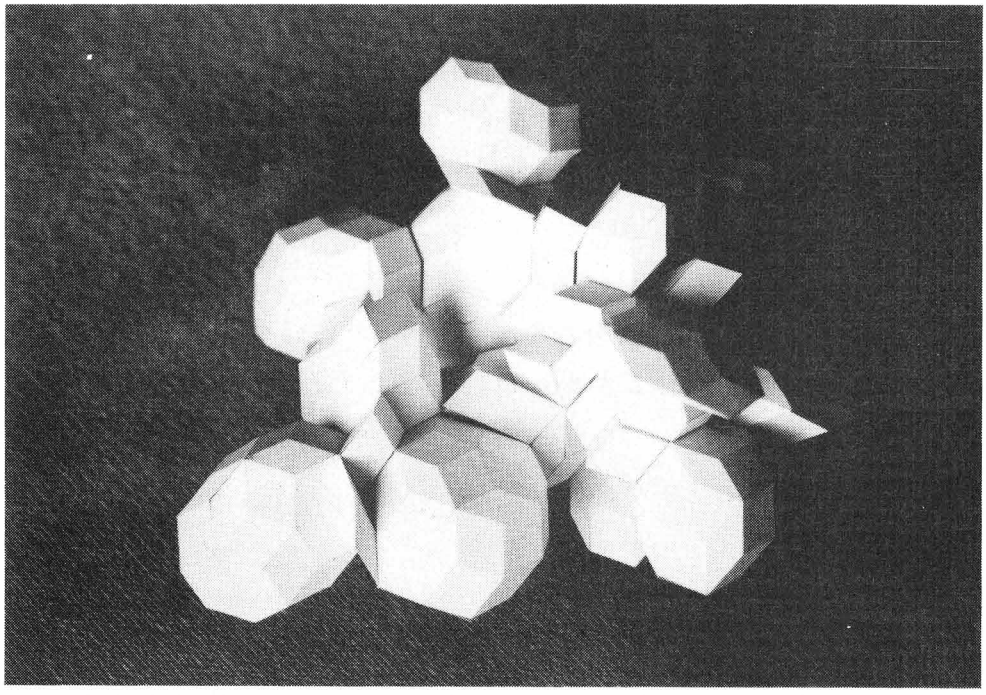
こうしたｎ－立方体の連結図形は、R^nにおけるｎ本の座標軸を現わしているため、多重の要素の積層としての建築の、解析的な表現に応用することができる。

たとえば、図表3-3-2において、敷地面積ａ、建築面積ｂ、床面積ｃ、階高ｄ、棟高ｅである棟は、$\overline{Ot}$＝ａ、$\overline{ts}$＝ｂ、$\overline{sr}$＝ｃ、$\overline{rq}$＝ｄ、$\overline{qP}$＝ｅ、となる点Ｐで示されるが、この場合に現われる座標軸に平行な直線群は、結果としてｎ－立方体を構成していく。

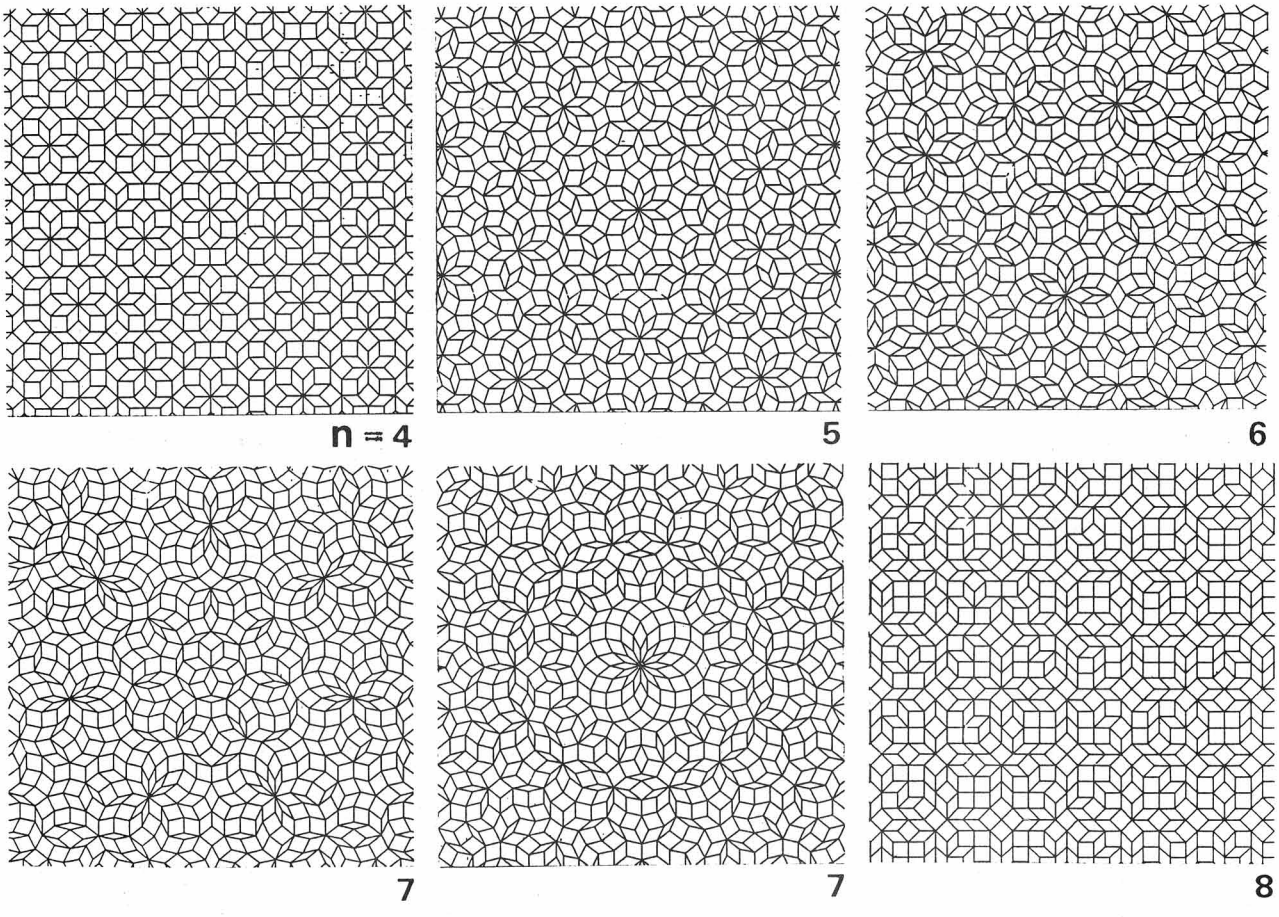
図表1-14で触れた Lalvaniも Transpolyhedra を、ｎ－立方体の稜の方向に伸縮する多面体として把え、その稜の通る頂点に各 Transpolyhedra を配列することにより全体像を把握しようとする。

一方、与えられた任意のｎ本の座標軸から導かれる造形の上限をｎ－立方体が示す、という意味も持つ。

つまり、ｎ方向に接手を持つジョイントが与えられた場合、ｎ方向のうちのｍ方向の接手から導かれるゾーン（ｍ－１）ｍ面体の、側面を共有し合う連結図形が、得られる造形のすべてとなる。



図表　3-4-11　図表3-4-7 の 3～10－立方体の非周期的連結



図表　3-4-12　n－立方体によるn次元空間充塡図形の平面上への射影

(C.G.:石原慶一)

たとえば、よく知られた Mero-systemの標準タイプでは、立方体の６側面の面心と１２本の稜の稜心方向の、合計１８方向に接手を持ったジョイントを使用するが、このジョイントからは図表3-4-13のようなゾーン多面体が得られ、これらの側面による連結図形が、得られる造形のすべてとなる。図表3-4-14に、Mero-system を使った場合の１フレクェンシーの球状ドーム案を示す。内部には図表3-4-13の多面体のいくつかの連結図形が配されている。

この考え方を応用すれば、菱形分割を特徴とする Lamellaドーム（図表3-4-15下段）や、面数の多いゾーン多面体による構成（同図表上段）などは、閉じた場合の面数を算定することによって、いずれもｎ－立方体（図表3-4-15上段の場合はｎ＝12のときの外形）の応用であると判定することができる。

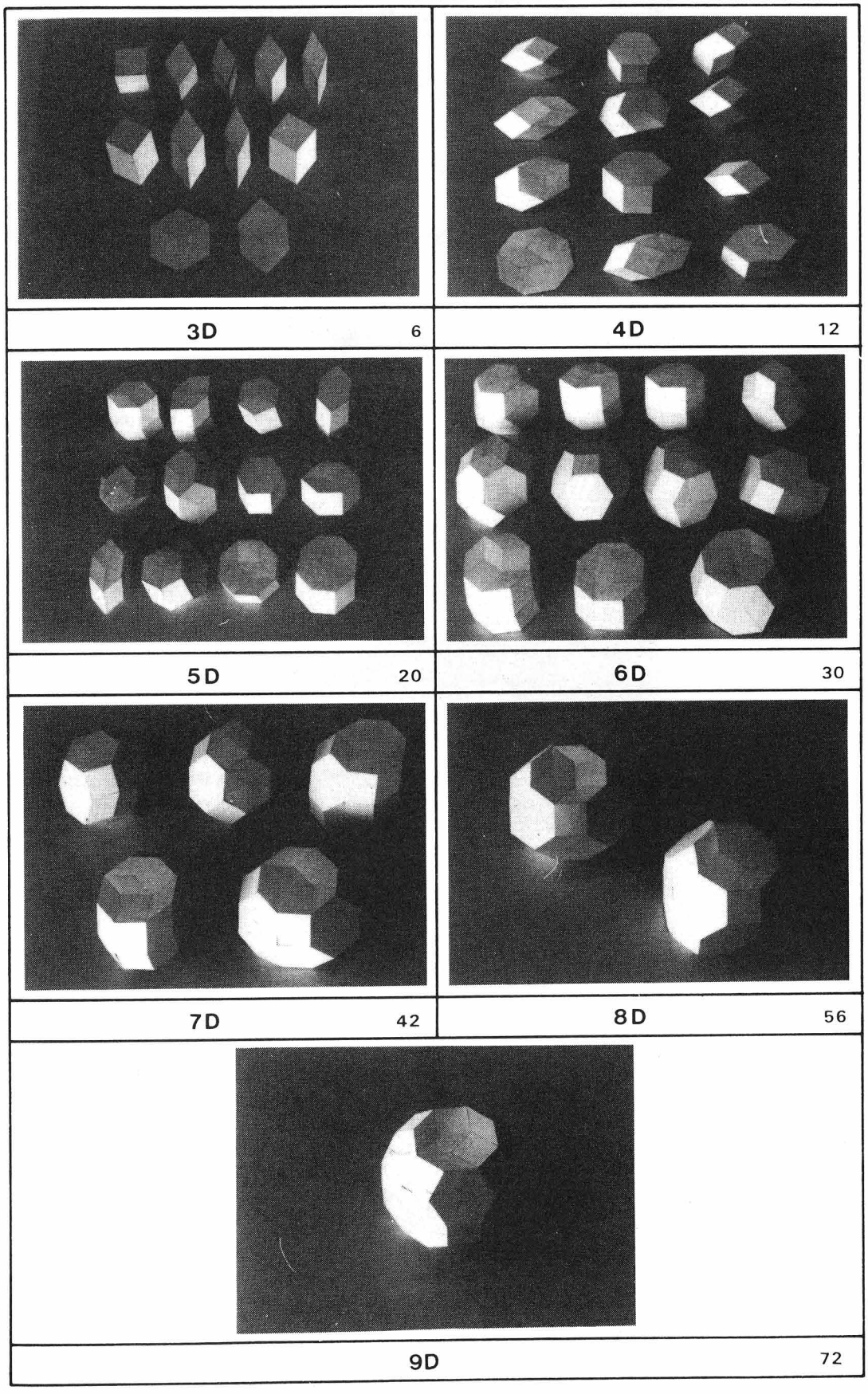
３－４－６　ｎ次元立方体の応用

ｎ－立方体ならびにその連結図形は、つぎのように建築的に応用される。

たとえば図表3-4-16に、図表3-3-7 の平行多面体のそれぞれから導かれる空間計画例を示すが、これらには建築上の形象がそれぞれの持つ高次元性を意識することによってより豊かに造形される様相が現われている。

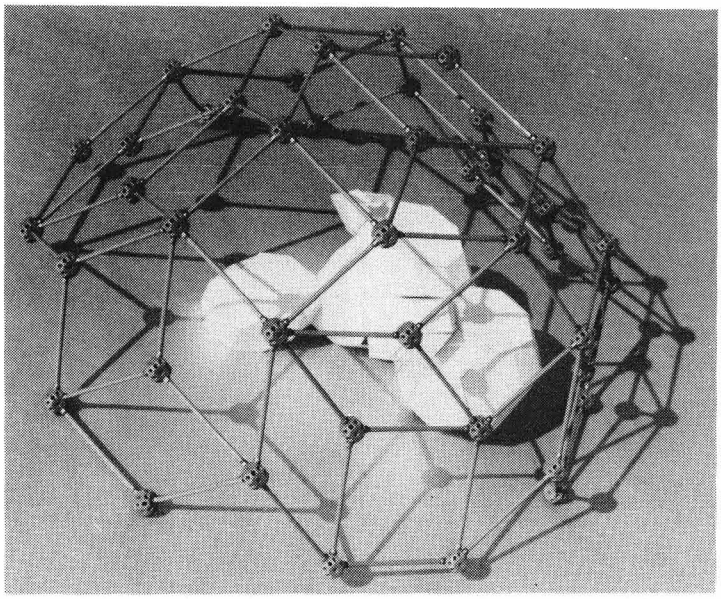
こうした平行多面体は、けっきょく、立方体の各頂点、各稜心、各面心を通る座標軸に平行な稜のみを持つｎ－立方体となっていて、周期的な造形を生む。この場合のｎ－立方体を導く過程をより一般化すると、稜長が一定なときはたとえば図表3-4-17のような Cubicトラス（下段。立方体の面心を通る場合）、 Octetトラス（中央。立方体の稜心を通る場合）、菱形12面体トラス（上段。立方体の頂点を通る場合）、が得られ、また稜長が不等のときは図表3-4-18のような立体トラスの造形が得られる。同図表の場合、上段右の立方体の構成から導かれた１：$\sqrt{2}$：$\sqrt{3}$の長さの比を原則とする３種類の線形部材（上段左）が使われている。Pearce[9]の Min-a-Max Building Systemは、この図表3-4-18の特殊例の応用ともいえるもので、正４面体の４頂点ならびに面心を体心とそれぞれ結ぶ線分を使って、さまざまな周期性を持った建築的構成を導こうとしている。図表1-10で触れた、Haider, Strutt(1979)による住宅の施工例は、３－立方体の体心と８頂点を結ぶ４直線がそのまま４－立方体の連結としての住宅の外形を決定しているもので、Haiderらはさらに３－立方体の稜心や面心を結ぶ直線の利用も考えている。結果としては図表3-4-13（９－立方体）やそれを超える13－立方体（頂点を結ぶ４座標軸を加える）への応用の可能性を示唆している。

さらに、より任意なゾーン多面体の稜方向に平行な座標軸に基づく図表1-9 の Baracs (1979)による集合住宅案は、正方形と正８角形による半正タイル貼り図形を２枚ずらせて重ね合わせたものを平面パターンとすることから出発している。　結果は７－立方体まで

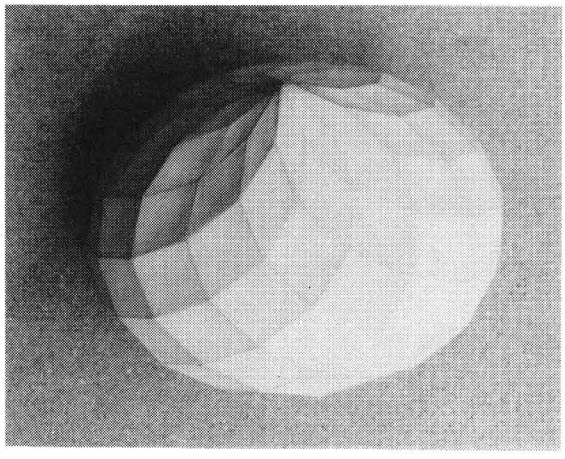


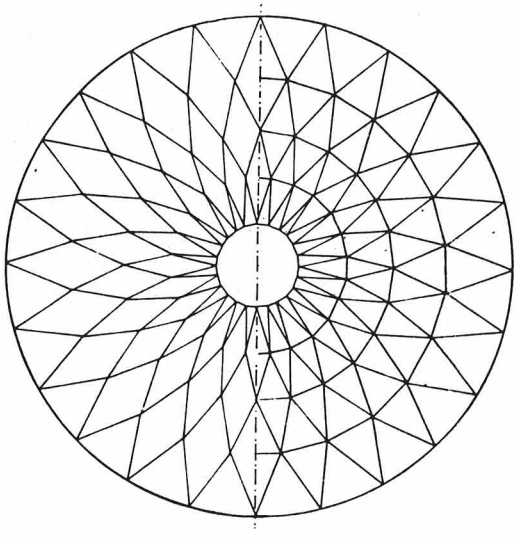
図表　3-4-13　Mero-systemから導かれる 3～9 －立方体。

各欄右下に側面数を示す。

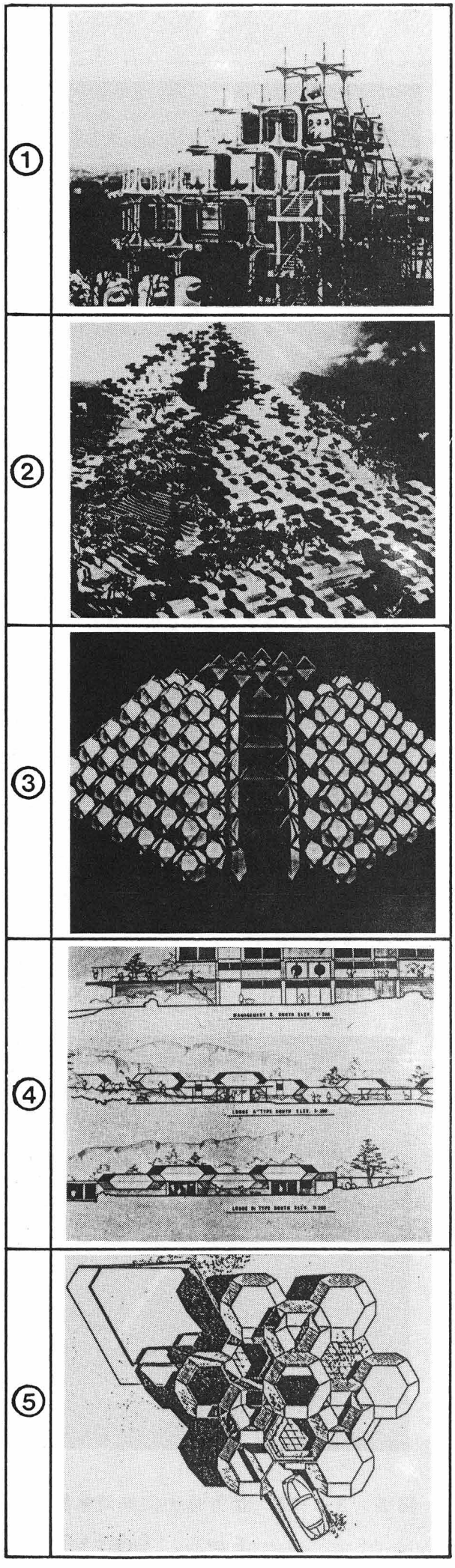


図表　3-4-14　Mero-systemによる1フレクェンシーの球状ドーム案





図表　3-4-15　Lamellaドーム（下）とゾーン 132面体



図表　3-4-16

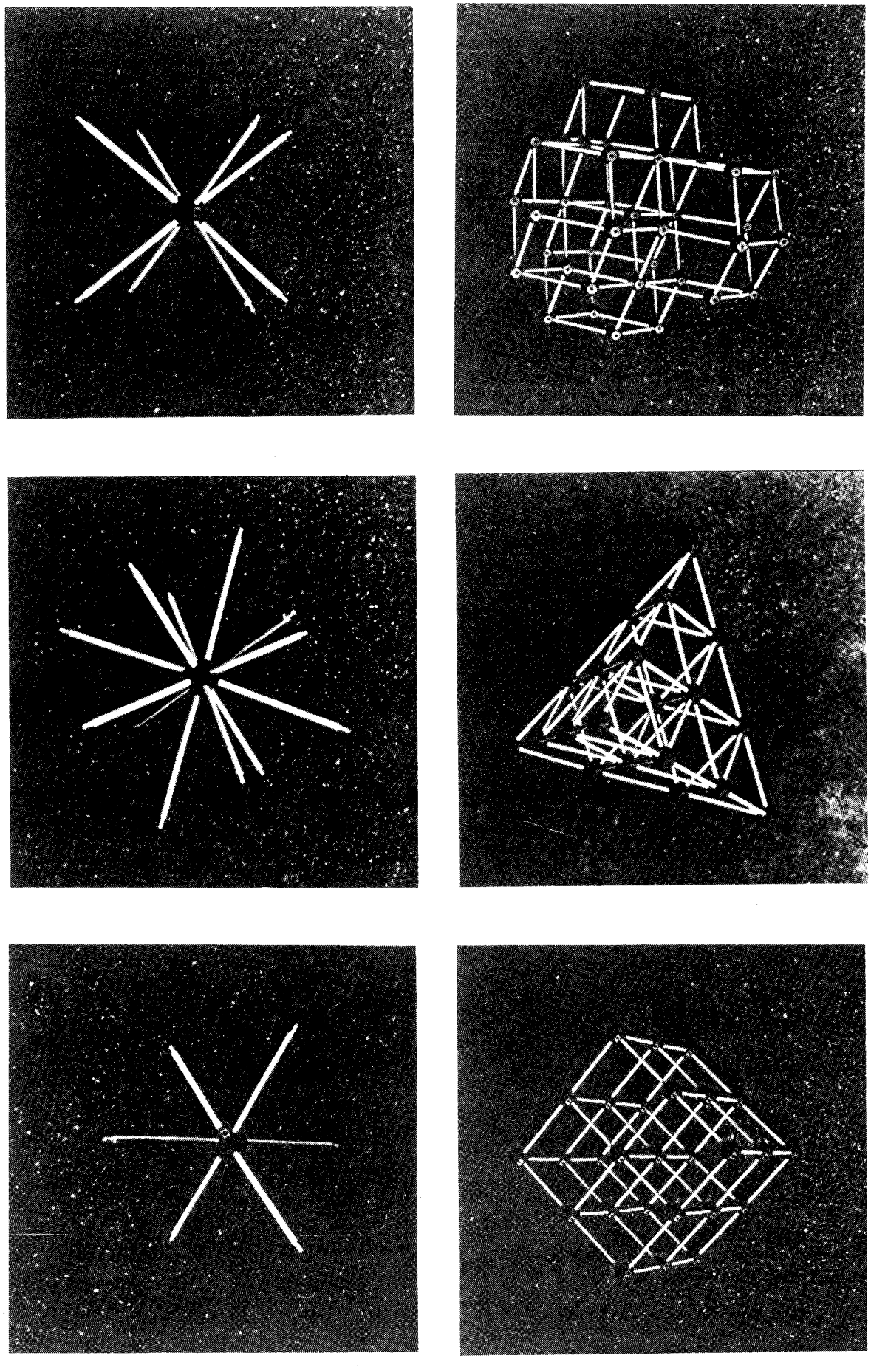
平行多面体を応用した空間構成例

①黒川紀章設計の Expo'70タカラビューティリオン

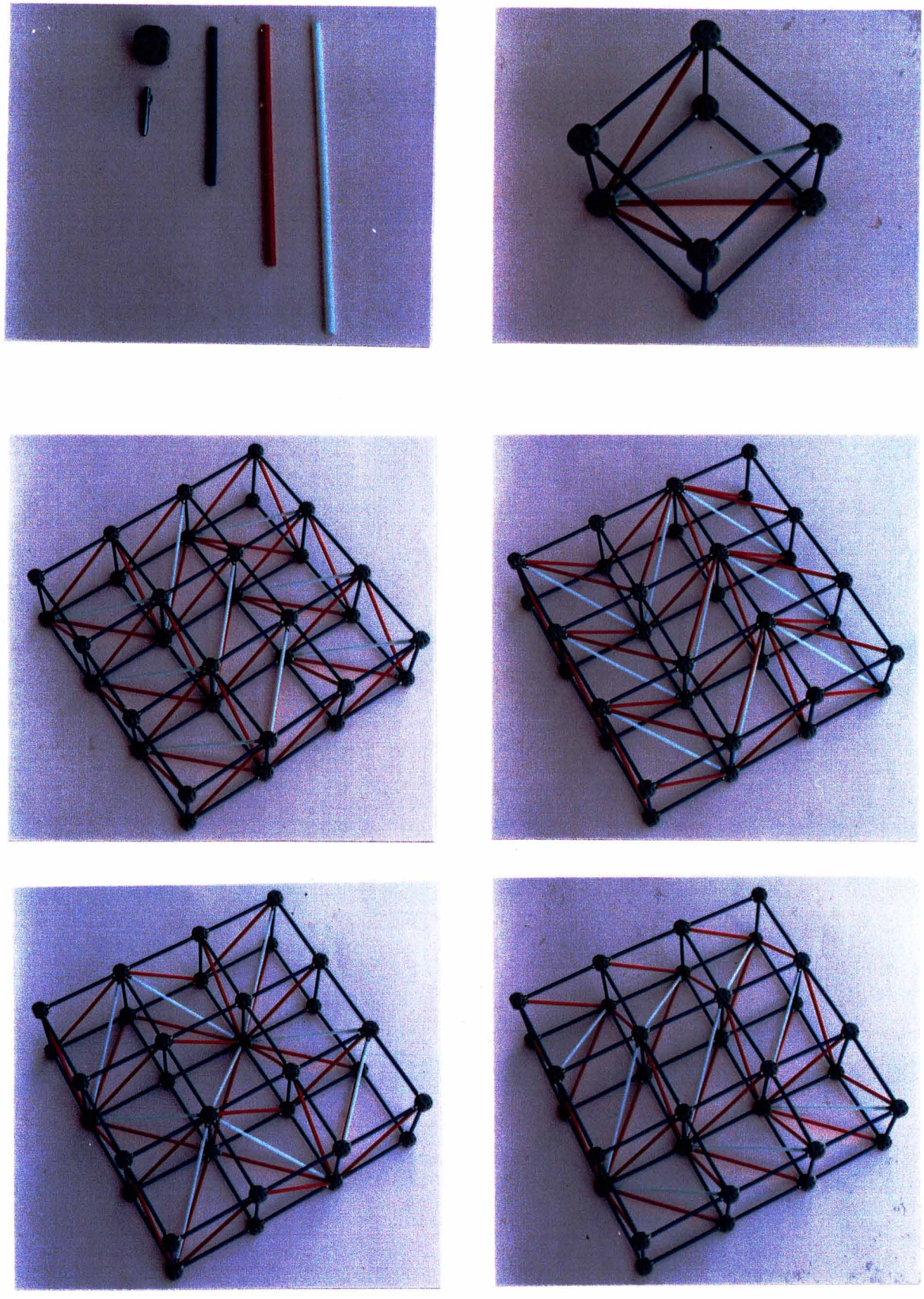
②M.Safdie計画のPuerto Rico Habitat 計画案

③および④筆者らによる集合住宅案

⑤Z.HeckerによるDissentchick House計画案



図表　3-4-17　立方体の回転対称軸に平行で等長の線材によって構成される立体トラス。
下から、 Cubicトラス、 Octetトラス、菱形12面体トラス。



図表　3-4-18　立方体の回転対称軸に平行で長さの異なる線材（最上段）によって構成される立体トラスの造形案

のいくつかのｎ－立方体が連結されている。

以上は、いずれも、正８面体群の対称性を持った多面体を発想の手がかりにするものであり、そこには自ら平行移動の周期を持った周期的形象が現われている。

それに対して正２０面体群の対称性に従うと、図表3-4-5 を基礎にする図表3-4-10のような形象が得られ、その中の多くは、従来の建築上の形象には現われにくかった巡回群C_5 を持った非周期的な様相を持っている。

たとえば、　図表3-4-19に図表3-4-10の特徴を生かした建築的な造形案を示す。左上はF_{20}とK_{30}の、O_6 を共有し合う連結図形の応用、右上はK_{30}のみの、O_6 を共有し合う連結図形の応用、下段は、対角線のみで表現されたＧＤの連結図形の応用である。

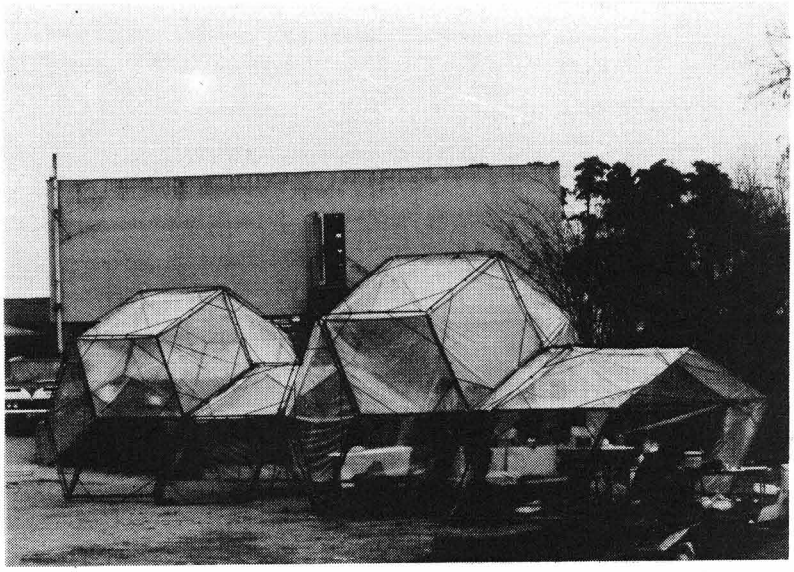
１－４で触れた図表1-11は S. Baerによるもの（下は平面図）で、F_{20}を原則としてO_6(部分的にはＧＤ）を共有させながら連結したソーラー・ハウスとなっている。 BaerはStructural Topology Group に加わる一方で、自ら、“Zome”(Zone+Dome) の名を冠した会社組織を作り、ｎ－立方体、とくに６－立方体と10－立方体、の建築的特徴を具体化する努力をしている(Baer,1970)[10]。

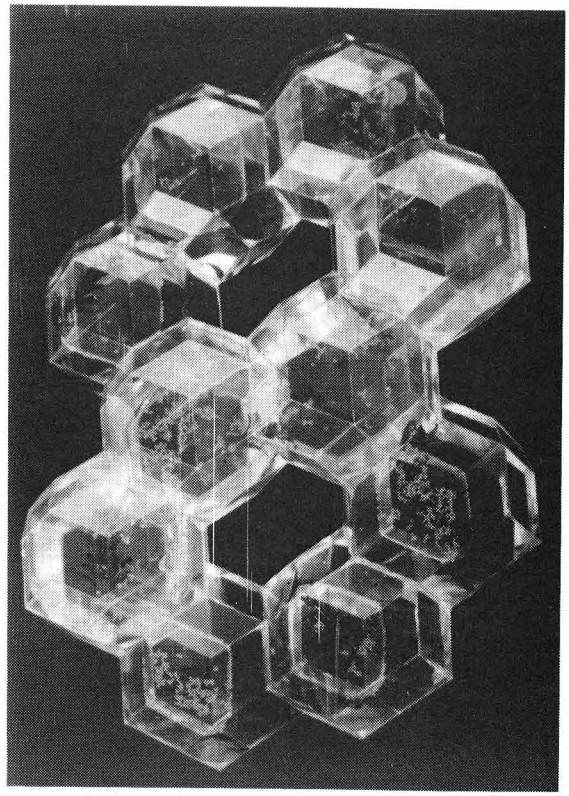
Bearはまず、正２０面体の面心あるいは正１２面体の頂点を結ぶ１０本の座標軸を考えそれに平行な稜を持つ各種多面体を構成する。ただし、各側面（菱形）には対角線が１本づつ加えられて構造上の強度が発揮されるように工夫されている。

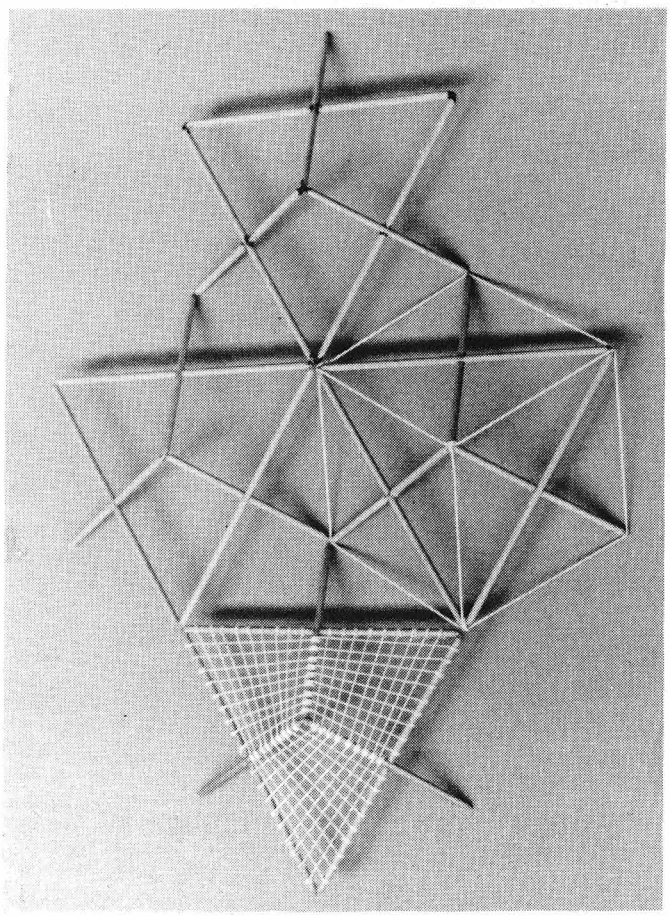
Baer はこのような構成に１０次元という単語は使わず、１０-Zone Systemと名付けているが、明らかに本章での10－立方体の応用となっている。

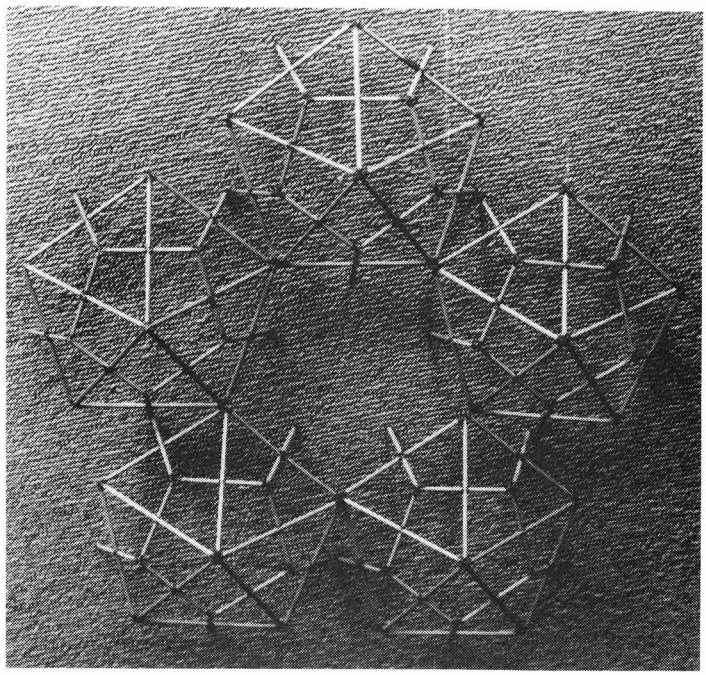
さらに(1984)[11] 、３１-Zone Systemも提案している。これは、図表3-4-3,4 における正１２面体（または正２０面体）のすべての頂点、稜心、面心を通る座標軸を使うものでいいかえれば31－立方体の応用となっている。

それに対して、それらを統一的に把握する目的で図表3-4-20に、10－立方体の外形としてのゾーン９０面体を５－立方体の部分を共有させながら周期的に連結した筆者による空間構成案を示す。もちろん非周期的な造形も可能である。この構造のユニットとしての10－立方体の射影は図表3-3-6 に従って図表3-4-21となり、群としての全体の２次元平面への射影は図表3-4-12に従って図表3-4-22となる。ここに見られる図表3-4-20～22は、高度に整理された２～３次元像を示しているのであり、射影方向や射影形式のわずかの変更も像の現われ方に大きな変化をもたらす。その変化の過程では、無限に近い異像がR^2 やR^3 内で立方体の発展として得られ、その中から、より要求に合致した新鮮な建築的形象を抽出し応用することが可能となる。望むならば、図表3-4-23のような平行４辺形で多面化された任意の曲面状の構成さえ導くことができるのである。逆にいえば、通常親しまれている建築上の形象のほとんどは、基本的にはｎ－立方体あるいはその連結図形の２ないしは３次元空間への射影として把握することができる、と考えられるのであり、ここには建築をｎ次元多胞体の射影として見ることの有意性と現実性が示されている。

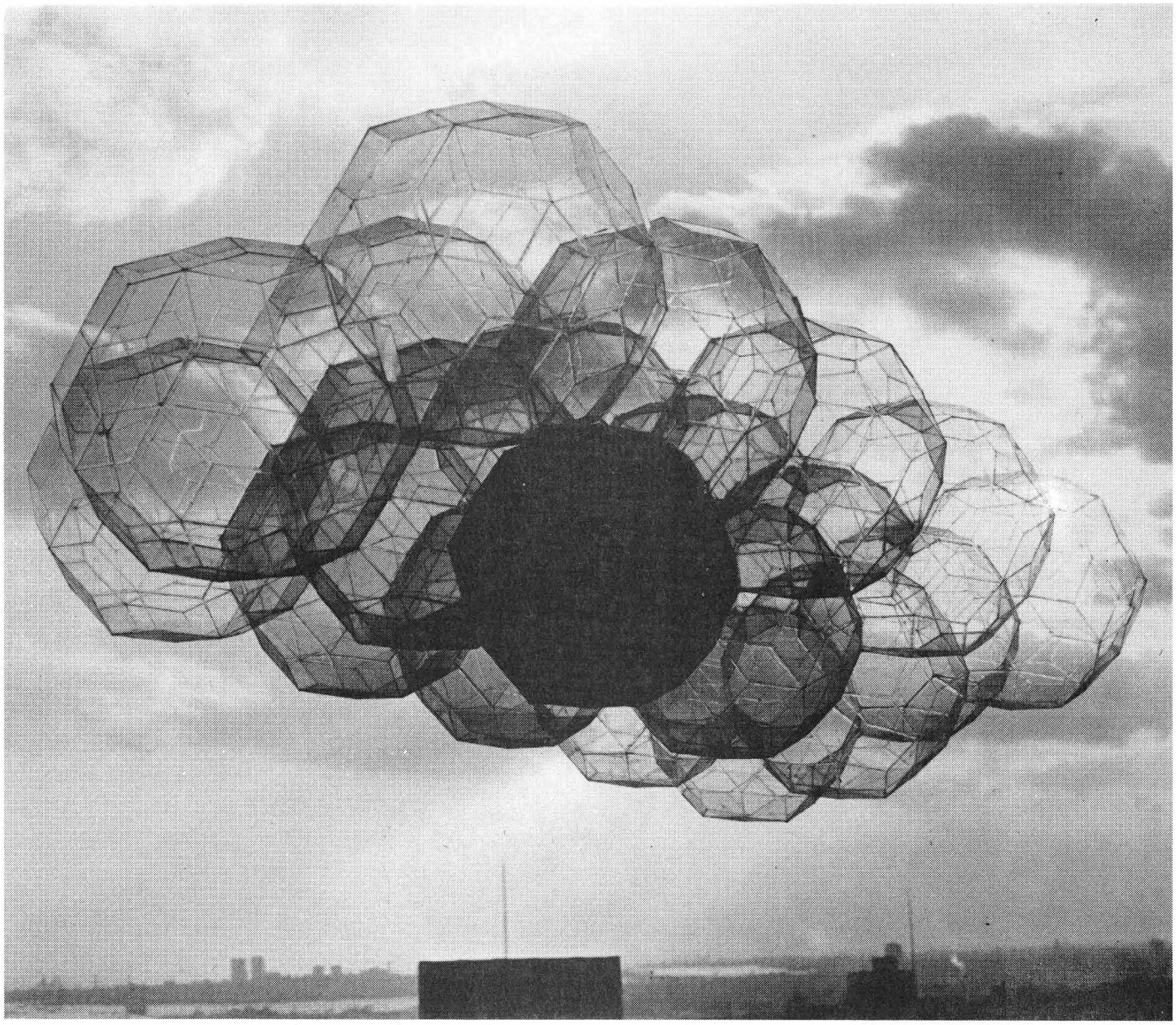




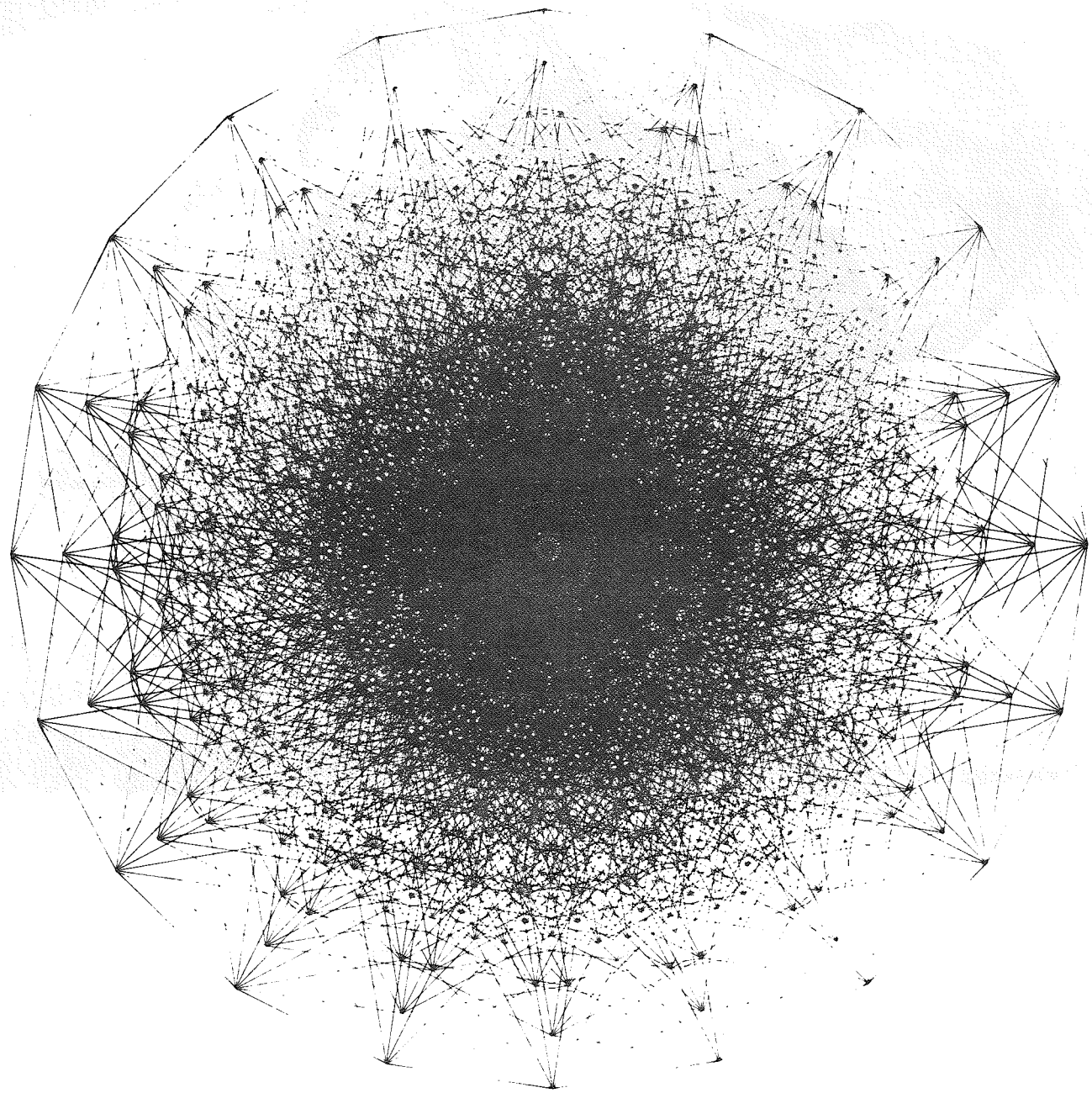




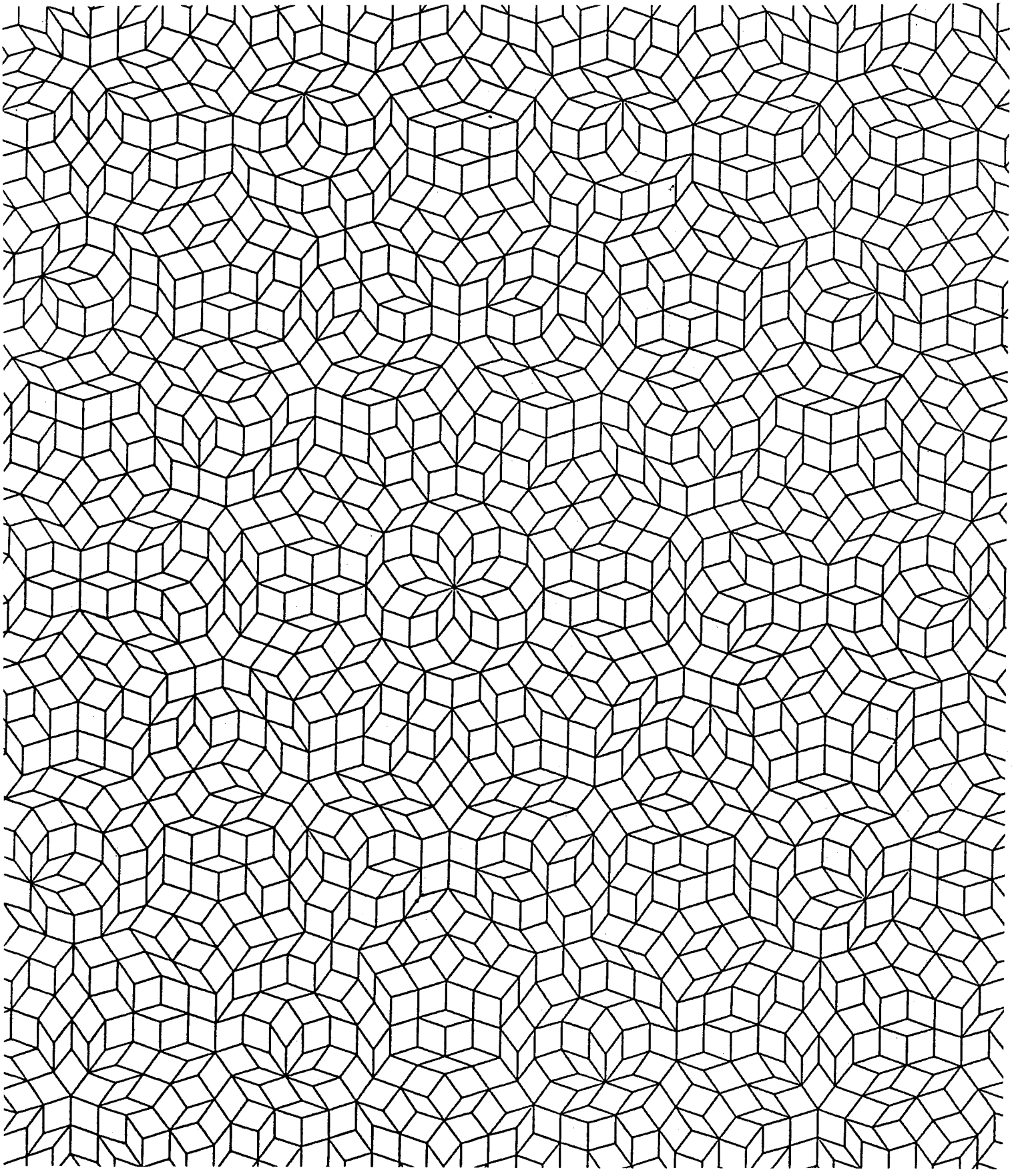
図表　3-4-19　図表3-4-10の特徴を生かした建築的な形象



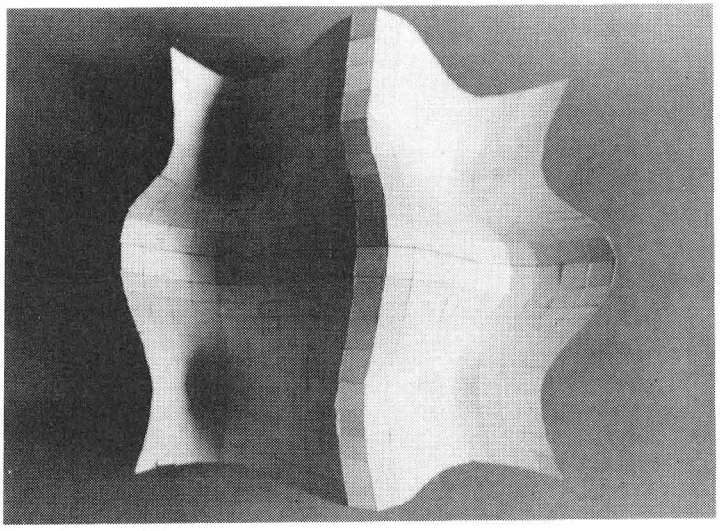
図表　3-4-20　10－立方体の外形としてのゾーン90面体
の周期的な連結による空間構成案

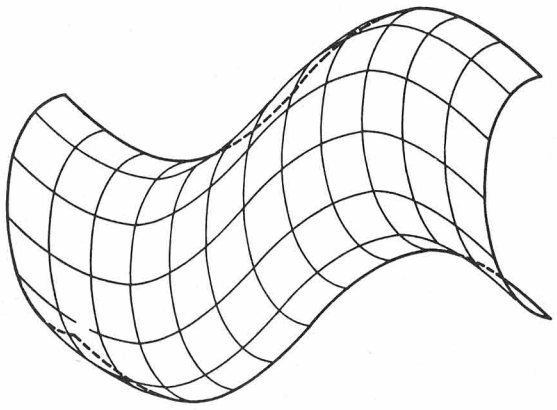


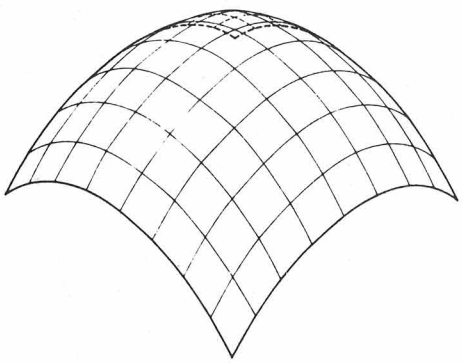
図表　3-4-21　10－立方体の射影(C.G.:高田一郎)

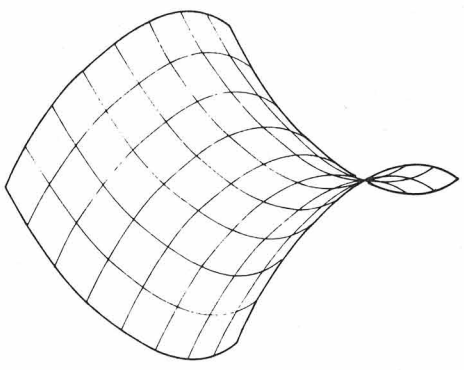


図表　3-4-22　10－立方体の連結図形の直射影(C.G.:石原慶一)









図表　3-4-23　単一辺長を持つ平行4辺形で多面化されたさまざまな曲面

3－4－7　本章の結論

4次元多胞体に関する図形的論理を、n（≧5）次元多胞体において一般化する操作は、建築上の形象を統一的に把握し整理する意味を持つ。しかも、得られる結果は、建築上の具体的な造形に直接影響を与え、あるいは与える可能性が多い。

基礎的には、建築の企画の段階では機能グラフや動線図としてn－正4面体やn－正8面体が、また平面計画や空間計画の段階ではn－立方体に基づくパターンがそれぞれ応用され、具体的にも3角形分割を特徴とする立体トラスや球状ドームなどの構造的な構成はn－正4面体あるいはn－正8面体ならびにそれらの連結図形の応用、4角形分割を特徴とする集合住宅などの空間的な構成はn－立方体ならびにそれらの連結図形の応用となっている。

とくに、n－立方体については、図表3-4-20～22のような建築的な特徴を持つ平面上への射影が付随していることや、巡回群C_5を持つ非周期的な構成が4角形の連結という空間計画上有利な原則のもとで容易であること、など特異で新鮮な性質を持ち、従来の、3次元空間における立方体や直方体を中心とする建築上の諸形象を変革させる可能性を持っている。　繰り返すならば、3角形を基礎にするあらゆる造形はn－正4面体あるいはn－正8面体の各種射影に関係し、4角形を初めとする平行多角形（6角形や8角形）を基礎にするあらゆるは造形はn－立方体の各種射影に関係するのであって、建築上の形象に一般的に見られる図形は基本的には何らかの射影の下での変化し変容するn次元正多胞体で代表される。

以上のような内容を総合すると、建築の、より新鮮で精緻な理解と創造を一定の秩序のもとで系統的に図るために、本論文での建築上の形象の多胞体的高次元性の考察は、多方面で有意義である。

本章での引用文献

1) Yona Friedman, Toward a Scientific Architecture(MIT Press, 1975), P.23

2) Ibid., P.63

3) Philip Tabor, "Analysing communication patterns", The Architecture of Form (ed. L.March, Cambridge U.P., 1976), 284 ～378

4) Helmut Emde, "On the Geometry of 3-Dimensional Structures", IL, 28, 1984, 224 ～242

5) 宮崎興二、"多面体と建築" 彰国社、1979、PP.172～176

6) Koji Miyazaki, Ichiro Takada, "Uniform Art-hill in the World of Golden Isozonohedra" Structural Topology, #4(1980), 21～30

7) ————、"かたちと空間". 朝倉書店、1983、 PP.76～83

8) Stanko Bilinsky, "Uber die Rhombenisoeder", Glasnik Mat., No.4, 1960, 251 ～262

9) Peter Pearce, Structure in Nature Is a Strategy for Design (The MIT Press, 1978), PP.184～223

10) Steve Baer, Zome Primer (Zomeworks Co., 1970), PP.4～15

11) Steve Baer, "The 31-zone structural system", Third International Conference on Space Structures (1984), 872～875

4　結論

本論文では、多辺形（２次元多胞体）、多面体（３次元多胞体）、多胞体（４次元多胞体）、と拡張されていく一連のｎ次元多胞体のうち、とくに４次元多胞体、の距離空間における表現やそれに基づく各種の図形的操作が基本的に建築上の形象と関係する現象を示すとともに、その現象を応用して主として４次元空間において、建築上の形象を解析し、創成した。その過程で得られた研究成果のうち主要なものは、つぎのように要約される。

(1) 次元公式(2-1-1) で示される、４次元空間における、点、線、面、胞の幾何学的相互関係は、建築上実際に経験する事象と矛盾しない。むしろ、３次元空間における点、線、面の相互関係よりも実際的であることが多い。

(2) ３次元空間内へ，代表的には図表2-2-3 のように、また連続的には図表2-2-5 のように射影される４次元空間内で回転する多胞体の概念には、建築的に変容する３次元空間が具体的に表現されている。

(3) ４次元空間における正射影から導かれる代表的な３種類の単射影（副射影、斜射影、中心射影）は代表的な建築上の３種類の動的様態（集積回転、並進移動、求心変化）に図表2-3-15，21のように対応する。

(4) ４次元空間における直交４座標軸は、互いに正４面体角（約 109° 28′）をなして１点で交わる４直線として３次元空間に射影することができ、この４直線は、すでに建築上の形象の中に、図表2-4-9 ～13のように、次元とは関係しない状態で、多用されている。

(5) Schläfliの多胞体公式(2-5-2) と本論文で新たに導いた有孔多胞体公式(2-5-5) は、建築上の諸形象を構成する、点、線、面、胞、の個数のあいだに、移動や変容の様態をも包含しながら原型のまま成立する。

(6) 図表3-1-2 のようにまとめられる正多胞体の３次元空間への射影の点心、線心、面心、胞心の各模型は、回転する正多面体の正射影（図表3-1-14）に現われる多角形を直接利用して図表3-1-10～13のように求められるという側面の実形の簡明さ、構成内容の空間的特徴、対称性の豊富さ、図形としての完結性、などによって、空間計画上あるい

は構造計画上、応用可能な内容を持っている。正多胞体の関連図形（図表3-1-24～27）やそれらの連結図形（図表3-1-28～31）についても同様である。

(7) 建築上の、３角形を基礎とするさまざまな、とくに構造的な、形象はｎ次元正４面体あるいはｎ次元正８面体の各種射影に関係し、４角形を初めとする平行多角形を基礎とするさまざまな、とくに空間的な、形象は残る一つのｎ次元正多胞体としてのｎ次元立方体の各種射影に関係する。つまり、建築上一般的に応用される図形は、基本的には、すべて３種類のｎ次元正多胞体の各種射影の中に見つけることができる。その代表例は図表3-4-20～22に示された１０次元立方体の各種射影に示されている通りである。

以上をまとめると、３次元空間の部分（本論文での胞）の側面を共有し合う連結図形としての４次元多胞体、ならびにそれの拡張としての高次元多胞体、をさまざまに３次元空間内ないしは２次元平面上へ射影し図形的に操作することは、建築上の形象の、移動や変容の概念を含む精緻な空間的解析とその全体的な総括、ならびにより新鮮で適正な一定の秩序のもとでの系統的創成、に有意義である、と結論される。

その結論に関係させて具体的にいえば、本論文冒頭でも指摘したように、表象可能な物的実体としての建築は、一般に、有限な３次元の広がりを持つ内部空間とそれを限るやはり有限な３次元の広がりを持つ構成部材が、移動や変容をくり返しながら、無限な３次元の広がりを持つ外部空間の中で互いに側面を共有し合って間隙なく連結した図形的構造を持つ、のである。

また、より具体的な例をあげれば、実際に建築を計画し設計しようとするとき基本的に用いられる正方形とか正３角形、あるいは立方体とか正４面体、さらにはそれらを連結させた平面格子や空間格子、などといったさまざまな幾何学的秩序を持った図形は原則として４次元あるいはそれを越える高次元の多胞体、とくに正多胞体ないしはその連結図形、の何らかの射影として統一的に把握しかつ発展させ変形させることが可能である。その場合得られる形象には３次元空間からの発想では生まれにくいものが多い。ここには、建築を、たんなる多胞体の射影としてではなく、本論文で繰り返し指摘したように、むしろ定量的な性質を持った正多胞体の射影として理解することの有意性が示されている。

参考文献

著者関係分は巻末に別添。引用個所は各章末に付記。

- Edwin A.Abbott,Flatland(Dover,1952)
  (高木茂男訳,"二次元の世界",講談社,1977)
- Christopher Alexander,Notes on Synthesis of Form(Harvard U.P.,1964)
  (稲葉武司訳,"形の合成に関するノート",鹿島出版会、1978)
- Ole P.Arvesen,"The Axometric Representation of N-Dimensional Figures",
  The Journal of Engineering Graphics, Vol.27,No.3,1963

- Steve Baer,Zome Primer(Zomeworks Co.,1970)
- ————,"The 31-zone structural system",
  Third International Conferance on Space Structures
  (Elsevier Applied Science Publishers,1984)
- Jenny A.Baglivo,Jack E.Graver,
  Incidence and Symmetry in Design and Archtecture(Cambridge U.P.,1983)
- H.F.Baker,Principle of Geometry(Cambridge U.P.,1925)
- Michael Batty,Urban Modelling(Cambridge U.P.,1976)
- Janos Baracs,"Juxtapositions",Structural Topology,*1,1979
- J.Baracs,T.T.Luong,B.Leopold,J.Maucice,"Habitat Polyédrique ",
  Structural Topology,*2,1979
- Col.r.s.Beard,Patterns in Space(Creative Publications,1973)
- Anatole Beck,Michael N.Bleicher,Donald W.Crowe,
  Excursion into Mathematics(Worth Publishers,1969)
- Russell V.Benson,Euclidean Geometry and Convexity(McGraw-Hill,1966)
- Stanko Bilinsky,"Über die Rhombenisoeder",Glasnik Mat.,No4,1960
- William Blackwell,Geometry in Architecture(John Woley,1984)
- Luisa Bonfiglioli,"Parallel Projection for Euclidean Geometry of Four
  Dimensions", Engineering Graphics Seminar,Princeton Univ,1965
- ————,"Fundamental Theorems of the Geometry of Four Dimensions",
  The Journal of Engeneering Graphics,Vol.30,No3,1966
- John Borrego,Space Grid Structures(The MIT Press,1968)
- Karol Borsuk,Multidimensional Analytic Geometry

(Polish Scientific Publishers,1969)

- Philippe Boudon,Sur L'Espace Architecturale (Dunod,1971)
  (中村貴志訳,"建築空間 [尺度について]", 鹿島出版会,1978)
- David W.Brisson,Hyper-Horoptoral Space(David W.Brisson,1973)
- ————,A New Reality－A Theory of Dimensionality(David W.Brisson,1976)
- ————,The Hyper-Schwarz-Surface(David W.Brisson,1976)
- ————,Hypergraphics(Westview Press,1978)
- ————,"Visually Scanning 4-Dimensional Objects with the Aid of Hyper-stereograms in Color",Leonardo,Vol.,13,1980
- ————,"A Definition of Distance and Method of Making Space-Time Measurements",Speculations in Science and Technology,Vol.3,No.3,1980
- Arne Brondsted,An Introduction to Convex Polytopes(Springer,1983)
- E.Budner,"Adaptive Architecture", IL, 14,1975
- James H.Bunn, The Dimensionality of Signs, Tools, and Models(Indiana U.P., 1981)
- Michael Burt,Spatial Arrangement and Polyhedra with Curved Surfaces and their Architectural Applications(Techion,1966)
- ————,"Saddle Polyhedra and Closepacking",Zodiac, 22

- Fernando R.Casas,"Polar Perspective:A Graphical System for Creating Two-Dimentional Images Representing a World of Four Dimensions",Leonardo, Vol.17,No.3,1984
- Stephane du Chateau,"Structures Spatiales", Cahiers du Centre D'Etudes Architecturales,2
- B.L.Chilton,"Principal Shadows of the 12 Pentagonal Regular 4-Dimensional Objects(Polytopes)",Leonardo,Vol.13,1980
- Ulrich Conrads,Programme und Manifeste zur Architektur des 20.Jahrhunderts (Verlag Ullstein,1964)
  (阿部公正訳,"世界建築宣言文集",彰国社, 1974)
- H.S.M.Coxeter,Introduction to Geometry(John Wiley,1965)
  (銀林浩訳,"幾何学入門",明治図書,1965)
- ————,Twelve Geometric Essays(Southern Illinois U.P.,1968)
- ————,Regular Polytopes(Dover,1973)
- ————,Regular Complex Polytopes(Cambridge U.P.,1974)
- ————,"Polytopes in the Netherlands",N.A.V.W.(3),XXVI,1978

- ————,"My Graph",Proc. London Math.Soc.(3),46,1983
- ————,"Regular and Semi-Regular PolytopesⅡ", Math.Zeitschrift,188,1985
- Henry Crapo,"Structural Rigidity",Structural Topology,#1,1979
- ————,"Mathematical Questions concerning Zonohedral Space-Filling", Structural Topology,#2,1979
- Keith Critchlow,Order in Space(Thames and Hudson,1969)
- ————,"Toward a New Philosophy of Structure",Zodiac, 22
- ————,"Polyhedral Structures Conform to 2-3-4 Fold Symmetry or 2-4 Fold Symmetry",Zodiac , 22
- H.Martin, Cundy,A.P.Rollett,Mathematical Models(Oxford U.P.,1961)

- Justus Dahinden,Urban Structures for the Future(Praeger Publishers,1972)
- Chandler Davis,Branko Grünbaum,F.A.Sherk, The Geometric Vein－The Coxeter Festshrift(Springer,1981)
- Hans Eberhardt Dehlinger,Access to Instrumental Knowledge in Architecthral Design(Univ. of California,1977)
- Constantinos A.Doxiadis,Architecture in Transition(Hutchinson,1963)
  (長島考一訳,"現代建築の哲学",彰国社,1979)
- Virgil Dragomir,Adrian Gheorghiu,"Representation Geometrique des Structures Spatiales",Cahiers du Centre D'Etudes Architecturales,12-13
- Marcel Duchamp,Duchamp de Signe(Flammarion,1975)
  (浜田明訳,"表象の美学",牧神社,1977)

- Ludwig Eckhart,Four-Dimensional Space(Indiana U.P.,1929)
- Luther Pfahler Eisenhart,Coordinate Geometry(Dover,1960)
- Helmut Emde,"On the Geometry of 3-Dimentional,Structures",IL, 28,1984
- David Georges Emmerich,"Empilements Concentriques", Structural Topology,#4,1980
- Heinrich Engel,Structure Systems(Deutsche Verlags-Anstalt,1967)
  (加藤渉，寺崎恒正訳,"建築空間と構造デザイン",鹿島出版会、1972)

- Schulze-Fielitz, "Urban Systems Ⅰ", Project,10, 1971
- ———————— , "Urban Systems Ⅱ", Project,13, 1973

- Henri Focillon,Vie des Formes(Presses Universitaires de France,1955)
  (杉本芳太郎訳,"形の生命",岩波書店,1969)
- A.R.Forsyth,Geometry of Four Dimensions(Cambridge U.P.,1930)
- Mildred Friedman,De Stijl:1917-1931 -Visions of Utopia(Phaidon,1982)
- Yona Friedman,Toward a Scientific Architecture(The MIT Press,1975)
- ————,"L'Architecture Mobile",
  Cahiers de Centre D'Etudes Architecturales,3-1
- ————,"Les Mecanismes Urbains",
  Cahiers de Centre D'Etudes Architecturales,3-2
- ————,"La Planification Urbaine",
  Cahiers de Centre D'Etudes Architecturales,6
- R.Buckminster Fuller,4D Time Lock(Lama Foundation,1972)
- ————,Synergetics(Macmilan,1975)
- ————,Synergetics 2(Macmilan,1979)
- ————,Inventions(St.Martin's Press,1983)
- R.Buckminster Fuller,Robert Marks,
  The Dymaxion World of Buckminster Fuller(Anchor Press,1973)
  (木島安史，梅沢忠雄訳,"バックミンスター・フラーのダイマキシオンの世界",
  鹿島出版会,1978)

- I.M.Gelfand, E.G.Glagoleva, A.A.Kirillov, The Coordinate Method (Gordon and Breach, 1968)
- Adrian Gheorghiu,Virgil Dragomir,Geometry of Structural Forms
  (Applied Science,1978)
- Matila C.Ghyka,Estetique des Proportions dans la Nature et dans les Arts
  (Gallimard,1927)
- Sigfried Giedion,Space,Time and Architecture(Harvard U.P.,1941)
  (太田実訳,"空間時間建築",丸善,1969)
- Pierre Granche,Vohe Emmian,"Villa Polyédrique",Structural Topology,#3,1979
- Branko Grunbaum,Convex Polytopes(John Wiley,1967)

- Gulzar Haider,James W.Strutt,"The Form Studies Unit",
  Structural Topology,#4,1980
- Anton Hanegraaf,ELST(Netherlands),"Twenty Questions on Zonogons,Zonohedra

and Zonoids",Structural Topology,#4,1980

- Frank Harary,Graph Theory(Addison-Wesley,1969)
  (池田貞雄訳,"グラフ理論",共立出版,1981)
- Herbert E.Hawkes,William A.Luby,Frank C.Touton,
  Solid Geometry(Ginn and Co.,1922)
- David L.Heiserman,Experiments in Four Dimensions(Tab Books,1983)
- David Hilbert, Cohn Vossen, Anshauliche Geometrie (Julius Springer, 1932)
  (芹沢正三訳,"直観幾何学",みすず書房、1968)
- C.Howard Hinton,The Fourth Dimension(Swan Sonnenschein,1904)
- 一松信,"正多面体を解く",東海大学出版会,1983
- ――――,"高次元の正多面体",日本評論社,1983
- Fritz Hohenberg,Josef Tschupik,"Grundzuge der darstellenden Geometrie",
  Grundzuge der Mathematik,1971
- Alan Holden,Shapes,Space,and Symmetry(Columbia U.P.,1971)

- Kuniaki Itoh,"New Developments in Three-dimen nsional Truss",
  Proc.1971 IASS Pacific Symposium,1972

- Max Jammer,Concepts of Spaces,The History and Theories of Space in Physics
  (Harvard U.P.,1954)
  (高橋毅，大槻義彦訳,"空間の概念",講談社,1980)
- Luc Joly,Structure(Editions Idea Suisse,1973)

- Wasily Kandinsky,Punkt und Linie zu Flache(Langen,1926)
  (西田秀穂訳,"点、線、面",美術出版社,1953)
- 川添登,"移動空間論",鹿島出版会,1968
- Paul Klee,Das bildnerische Denken(Benno Schwabe,1956)
  (土方定一，菊盛英史，坂崎乙郎訳,"造形思考",新潮社,1973)
- 黒川紀章,"ホモ・ルーベンス",中央公論社,1969
- ――――,"現代建築の創造",彰国社,1971

- Haresh Lalvani,Transpolyhedra(Haresh Lalvani,1977)
- ――――,Stractures on Hyper-structures(Haresh Lalvani,1982)
- ――――,"Generative Morphology of Transforming Space Structure",
  Third International Conference on Space Structures,1984

- ————,"Non-periodic Space Structures ",Space Structures, Vol.2, No.2, 1986/87
- C.Ernesto S.Lindgren,"Descriptive Geometry of Four Dimension",The Journal of Engineering Graphics,Vol.27,No.3,1963
- C.Ernesto S.Lindgren,Steve M. Slaby,Four-dimensional Descriptive Geometry (McGraw-Hill,1968)
- L.Lines,Solid Geometry(Dover,1965)
- Arthur L.Loeb,Space Structure(Addison-Wesley,1976)
- L.A.Lysternick,Convex Figures and Polyhedra(Dover,1963)
  (筒井孝胤，北村辰雄訳,"凸図形と凸多面体",東京図書,1969)

- David Beveridge Mair,Fourfold Geometry(Methuen,1926)
- Z.S.Makowski,Steel Space Structures(Michael Joseph,1965)
- ————,Analysis,Design and Construction of Braced Domes(Granada,1984)
- Henry Parker Manning,Geometry of Four Dimensions(Dover,1956)
- ————,The Fourth Dimension Simply Explained(Dover,1960)
- Lionel March,The Architecture of Form(Cambridge U.P.,1976)
- Lionel March,Philip Steadman,The Geometry of Environment(Methuen,1971)
- George E.Martin,Transformation Geometry(Springer,1982)
- Leslie Martin,Lionel March,Urban Space and Structures(Cambridge U.P.,1972)
- Horst Martini,"Zur Bestimmung Konvex Polytope Durch die Inhalte Ihrer Projektioner",Beitrage zur Algebra und Geometrie,18,1984
- J.Maurin,Geometrie Descriptive —— à Quatre Dimensions(Gauthier-Villars Imprimeur,1948)
- P.McMullen,G.C.Shephard,Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture (Cambridge U.P.,1971)
- Marc Mimram,Structures et Formes(Dunod,1983)
- Asghar Talaye Minai,Art,Science,and Architecture (Univ.of Pennsylvania,1969)
- Charles Moore,et al.,Dimensions-Space,Shape and Scale in Architecture (Architectural Record,1976)
  (石井和紘，安藤正雄訳,"ディメンション——空間，形，スケールについての考察",新建築社,1978)
- 森田紀一,"次元論",岩波書店,1950
- 向井正也,"モダニズム建築"，ナカニシヤ出版,1983

- 中村義作,"4次元の幾何学",講談社,1986
- 中村幸四郎,"多面体論"(岩波講座数学10),岩波書店,1933
- Alfred Neumann,"Morphologic Architecture",Zodiac, 16
- 日本建築学近畿支部,"大スパン構造",日本建築学会,1970
- 日本建築家協会,"モデュール",彰国社,1963
- 西原清之,"空間のシステムデザイン",彰国社,1976
- H.Nooshin,Third International Conference on Space Structures (Elsevier Applied Science Publishers,1984)

- Peter Pearce, Structure in Nature Is a Strategy for Design (The MIT Press,1978)
- Peter Pearce, Susan Pearce,Polyhedra Primer(Van Nostrand Reinhold,1978)
- Roger Penrose,"The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research",Bull.Inst.Maths.and its Applns.10,No.7/8,1974
- Fanya Moiseevna Perel'man,Phase Diagrams of Multicomponent Systems-Geometric Methods(Consultants Bureau,1966)
- Henri Poincare,Science et Methode(Flammarion,1908)
  (吉田洋一訳,"科学と方法",岩波書店,1926)
- ————,Dernieres Pensees(Flammarion,1913)
  (河野伊三郎訳,"晩年の思想",岩波書店,1939)
- Anthony Pugh,Polyhedra——a visual approach(Univ.of California,1976)

- Rebert Le Ricolais,"Survey of Works,Structural Reseach 1935-1971", Zodiac,22
- Stewart A.Robertson, Polytopes and Symmetry(Cambridge U.P.,1984)
- Joe Rosen,Symmetry discovered(Cambridge U.P.,1975)
- Colin Rowe,The Mathematics of The Ideal Villa and Other Essays (The MIT Press,1976)
- Rudolf V.B.Rucker,Geometry,Relativity and The Fouth Dimension(Dover,1977)
  (金子務訳,"かくれた世界——幾何学, 4次元, 相対性",白揚社,1981)
- S.S.Ryskov, E.P.Baranovskii," C-types of n-dimensional lattices and 5-dimensional primitive parallelohedra", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 4, 1978

- 佐々木宏,"多次元的建築空間論序説",近代建築,Vol.16,No.3,1962

- Moshe Safdie,For Everyone a Garden(The MIT Press,1974)
- ————,"Now Environmental Requirements for Urban Building",Zodiac, 19

- Pieter Hendrik Schoute,Mehrdimensionale Geometrie Ⅰ, Ⅱ
  (Goschensche Verlagshandlung,1902,1905)
- Marjorie Senechal George Fleck,Pattern of Symmetry(Loren Eiseley,1972)
- Marjorie Senechal,R.V.Galiulin,"An Introduction to the Theory of Figures; the Geometry of E.S.Fedorov",Structural Topology,#10,1984
- Roger N.Shepard,A.Kimball Romney,Sara Beth Nerlove,Multidimensional Scaling,Vol.1(Seminar Press,1972)
  (岡本彬訓, 渡辺恵子訳,"多次元尺度構成法Ⅰ",共立出版,1976)
- A.V.Shubnikov,V.A.Koptsik,Symmetry in Science and Art(Plenum Press,1974)
- 清水達雄,"数と形の探索" 日本評論社,1966
- 清水達雄他,"空間と時間"(人間・建築・環境六書２),彰国社,1975
- D.M.Y.Sommerville,An Introduction to the Geometry of N Dimensions
  (Dover,1958)
- Philip Steadman,The Evolution of Designs(Cambridge U.P.,1979)
- ————, Architectural Morphology(Pion,1983)
- B.M.Stewart,Adventures among the Toroids(B.M.Stewart,1970)
- David A.Stone, Stratified Polyhedra(Springer, 1972)
- Duncan R.Stuart," A.Method for Generating Some Periodic and Quasiperiodic Space Lattices" , Space Structures, Vol.2, No.1, 1986/87
- Patrick Suppes,Space,Time and Geometry(D.Reidel Publishing,1973)

- 田中太三郎,"ステレオグラフ・立体幾何",科学新興社,1964
- D.A.W.Thompson,Growth and Form(Cambridge U.P.,1968)
- Cornelius Thywissen,"Constructions of Non-Living Nature",IL, 27,1980
- 戸村浩,"次元の中の形たち",日本評論社,1982
- L.Fejes Tóth,Regular Figures(Pergamon Press,1964)
- Anne Griswold Tyng,"Geometric Extensions of Consciousness",Zodiac,19

- 内田祥哉他,"多次元空間",国際建築,Vol.27,No.12,1959

- Jussi Vaisala,Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings
  (Springer,1971)

- Cornelis Van de Ven,Space in Architecture(Van Gorcum Assen,1980)

- A.Wachman,M.Burt,M.Kleinmann,Infinite Polyhedra(Technion,1974)
- Roland W.Weitzenbock,Der Vierdimensionale Raum(Birkhauser Verlag,1956)
- A.F.Wells,Three-Dimensional Nets and Polyhedra(John Wiley,1977)
- Hermann Weyl,Symmetry(Princeton U.P.,1952)
  (遠山啓訳,"シンメトリー",紀伊國屋書店,1970)
- Robert Williams,Natural Structure(Eudaemon Press,1972)
- Hans M.Wingler,The Bauhaus(The MIT Press,1978)
- K.Lothar Wolf,Robert Wolff,Symmetrie(Bohlau-Verlag,1956)
- Donald G.Wood,Space Enclosure Systems(The Ohio State Univ.,1967)
- Waltar Wunderlich,"Zur normalen Axonometrie des vierdimensionalen Raumes", Monatshefte für Mathematik,80,1975

- Paul B.Yale,Geometry and Symmetry(Holden-Day,1968)
- 矢野健太郎,"解析幾何学",朝倉書店,1961
- V.A.Yemelichev,M.M.Kovalev,M.K.Kravtsov,Polytopes,Graphs and Optimisation (Cambridge U.P.,1984)
- Yoshitsura Yokoo,et al.,IASS Tension Structures and Space Frames (Architectural Institute of Japan,1972)

- Bruno Zevi,Architecture as Space(Horizon Press,1957)
  (栗田勇訳,"空間としての建築",鹿島出版会,1977
- ————,Architettura e Storiografia(Giulio Einaudi,1974)
  (鈴木美治訳,"建築の史的原型を探る",鹿島出版,1976)
- ————,The Modern Language of Architecture (Univ.of Washington Press,1978)

本研究に関連して発表した論文著書目録

A．論文

1．“菱形面による閉じた凸多面体”、図学研究、第５号、1969
2．“Design Analysis of Translational Surfaces used in Architectural Structures”（山田幸一と共著）、関西大学工学研究報告、第１１号、1969
3．“マイナスｎ次元空間の図形的考察”、図学研究、第９号、1971
4．“On Packing of a Space by Convex Polyhedra ”、Proc.1971 IASS Pacific Symposium PartⅡ、1972
5．“４次元空間における相貫空間の作図　－１－”、図学研究、第１０号、1972
6．“４次元空間における相貫空間の作図　－２－”、図学研究、第１２号、1973
7．“４次元空間における相貫空間の作図　－３－”、図学研究、第１３号、1973
8．“ｎ次元空間における Pohlke-Schwarz の定理について”、図学研究、第１７号 1975
9．“４次元空間における投象の総括”、図学研究、第２１号、1977
10．“Uniform Ant-hill in the World of Golden Isozonohedra”（高田一郎と共著）、Structural Topology,#4、1981
11．“A Model of the 120-cell and Some Spatial Arrangements derived from Four Kinds of Pentagons ”、Structural Topology,#7、1982
12．“Modeles de Quelques 4-Polytopes Etoiles ”、Structural Topology,#8、1983
13．“L'Hexagone Regulier Quadridimensionnel”、Structural Topology,#10 1984

B．参考論文

1．“単一正３角形面によって構成される立体とその応用”、日本建築学会昭和４４年度近畿支部研究報告集、1969
2．“単一辺長を持つ菱形面によって構成される立体とその応用”、日本建築学会昭和４４年度大会学術講演梗概集、1969
3．“４次元空間における基礎的な作図問題”、日本図学会1970年度大会研究発表会資料集、1970
4．“凸多面体による空間の充塡”、近代建築、Vol.24、DEC.,1970
5．“仮想球配置を媒介とする空間構成”、日本建築学会昭和４５年度近畿支部研究報告集、1970
6．“４次元空間における２次超曲面の作図”、日本図学会1971年度大会研究発表会資料集、1971

7. “４次元空間における２次超曲面の、胞体による切断”、日本図学会1972年度大会研究発表会資料集、1972
8. “４次元空間における透視投象とその陰影について”、日本図学会1973年度大会研究発表会資料集、1973
9. “ｎ次元空間における平行２ｎ胞体の相似分割”、日本建築学会昭和４８年度近畿支部研究報告集、1973
10. “４次元幾何学の公理系に関する図形的モデルについて”、日本図学会1974年度大会研究発表会資料集、1974
11. “斜方１２面体と４次元空間”、日本建築学会昭和４９年度近畿支部研究報告集、1974
12. “建築的空間における Schlafli の４次元公式について”、日本建築学会昭和４９年度大会学術講演梗概集、1974
13. “正１２０胞体と正６００胞体の作図”、日本図学会1976年度大会研究発表会資料集、1976
14. “Golden Polytopesについて”、日本図学会1977年度大会研究発表会資料集、1977
15. “正８胞体の射像から見た建築的な空間の形象”、日本建築学会昭和５２年度大会学術講演梗概集、1977
16. “Variable Skeleton による多胞体の創成”（近藤邦雄、斎藤克巳、田嶋太郎と共著）、日本図学会1979年度大会研究発表会資料集、1979
17. “正１２０胞体の神秘”、数学セミナー、Vol.20, No.08 、1981
18. “４次元のサイコロ”（酒井啓と共著）、数学セミナー、Vol.25, No.03 、1986

Ｃ．著書

1. “多面体と建築”、彰国社、1979
2. “図形と投象”（前川道郎と共著、“正投象”、“図形概説”担当）、朝倉書店1979
3. “図形科学ハンドブック”（分担執筆、“４次元図学”担当）、森北出版、1980
4. “かたちと空間”、朝倉書店、1983
5. An Adventure in Multidimensional Space,John Wiley,1986
6. Polyeder und Kosmos,Vieweg,1987

Ｄ．参考著書

1. “しゃぼんだま建築”、彰国社、1985
2. “かたちの秘密”（分担執筆、“４次元の風景”担当）、彰国社、1986
3. “かたちの科学”（編著、“４次元の目”担当）、朝倉書店、1987

謝辞

本論文をまとめるにあたり、研究の端緒を開いていただくとともにつねにご指導ご鞭撻いただいた大阪大学教授岡田光正先生に心からの謝意を表する。

研究内容の細部については、建築計画上の内容に関して関西大学荒木兵一郎教授、伊藤邦明都市・建築研究所伊藤邦明博士、フランスのH. Crapo博士ならびにStractural Topology Group会員諸氏ほかのご援助をいただいた。図学ならびに数学上の内容に関しては、故川口毅博士ほか日本図学会会員諸氏ならびに京都大学一松信教授、信州大学中村義作教授、カナダToronto 大学名誉教授H. S. M. Coxeter博士ほかのご指導をいただき、さらにコンピュター・グラフィクスに関しては京都大学助手石原慶一博士、神戸大学大学院理学研究科研究生高田一郎博士、日本アイ・ビー・エム株式会社社員酒井啓氏ほかのお手をわずらわせた。記して深謝の意を表する。

それとともに本論文作成中、筆者の勤務との関係上、公私にわたってご指導いただいた神戸大学図学教室竹山和彦教授、同村上晋一教授、同大野隆造助教授はじめ、関西大学山田幸一教授、九州大学前川道郎教授、京都大学田中喬助教授、同伊従勉助教授に深甚の謝意を表する。

さらに、本論文の浄書にあたり神戸大学図学教室福永正美女史、同白阪ゆかり女史のご協力を得た。記して感謝する。

宮崎興二