【24】

氏名・(本籍)	森(もり) 本(もと) 芳(よし) 則(のり)
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 7496 号
学位授与の日付	昭和 61 年 12 月 15 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**無限次で退化する楕円型作用素に対する準楕円性について**
論文審査委員	(主査) 教 授 井川 満 (副査) 教 授 田邊 廣城 教 授 池田 信行 助教授 小松 玄

論 文 内 容 の 要 旨

最近，楠岡－Strook両氏によって退化楕円型作用素の準楕円性に関して次のような興味深い結果が与えられた。

Lを2階偏微分作用素 $\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\sigma(x_1)^2\partial_y^2$ とする。但し，$\sigma\in C^\infty$, $\sigma(0)=0$, $\sigma(x_1)>0\ (x_1\neq 0)$, $\sigma(x_1)=\sigma(-x_1)$ かつ σ は R^+ で非減少関数とする。このときLが R^n で準楕円型（hypoelliptic）である為には条件

$$(*)\qquad \lim_{x_1\downarrow 0}|x_1\log\sigma(x_1)|=0$$

が必要十分である。条件(*)は σ が $x_1=0$ で無限次で退化することを許容する。例えば $\sigma(x_1)=\exp(-1/|x_1|^\delta)$, $\delta>0$ のとき，(*)は $\delta<1$ を意味する。

楠岡－Strook両氏は上の結果をMalliavin calculusと呼ばれる確率微分方程式論の一理論を使って得た。本論文の主目的は(*)の十分性を偏微分方程式論的手法で別証明することにある。(*)の必要性については，すでにMalliavin calculusを用いない簡単な証明が著者によって与えられた。

十分性の証明のideaを説明する為に $\sigma(x_1)=\exp(-1/|x_1|^\delta)$ の単純な場合を考えることにする。この場合Lは無限次で退化し，有限次退化の2段楕円型作用素に対してHörmanderが与えた十分条件（Lie brackets条件）は適用できない。無限次で退化するLの準楕円性を示す際の技術的困難さは，有限次退化の場合と異なり，Lがどんな $\kappa>0$ に対してもsubelliptic評価式

$$\|u\|_\kappa\leq \text{Const.}\ (\|Lu\|_0+\|u\|_0),\quad u\in C_0^\infty(R^3)$$

を満たさない点にある。ここで $\|\cdot\|_s$ は実数sに対するSobolev空間 H_s のノルムを表す。しかしながら，Poincaréの不等式を注意深く用いることにより対数型reqularity up評価式

$$\|(\log\langle D_y\rangle)^{2/\delta}u\|_0 \leqq \text{Const.}\ (\|Lu\|_0+\|u\|_0),\quad u\in C_0^\infty(R^3)$$

を得る。但し $\langle D_y\rangle=\sqrt{1+|D_y|^2}$ である。証明の主要なideaは $0<\sigma<1$ のとき対数型reqularity up評価式を繰り返し使うことにより多項式orderのreqularity up評価式を導くことにある。

本論文の主定理はLを少し一般化した次の形をした2階偏微分作用素Pに対して述べられる。

$$P=a\,(x,y,D_x)+g\,(x')\,b\,(x,y,D_y)\quad \text{in}\ R^n=R_x^{n_1}\times R_y^{n_2}$$

とする。但し $x=(x',x'')$ で次を仮定する。

i）$a\,(x,y,D_x)$ と $b\,(x,y,D_y)$ は C^∞ 係数の2階偏微分作用素でそれぞれxとyについて強楕円型とする。すなわち

$$\begin{cases} \text{Re}\ a\,(x,y,\xi)\geqq c_1|\xi|^2 & \text{for large}\ |\xi|,\quad c_1>0 \\ \text{Re}\ b\,(x,y,\eta)\geqq c_2|\eta|^2 & \text{for large}\ |\eta|,\quad c_2>0 \end{cases}$$

ii）$g\,(x')\in C^\infty$，$g(0)=0$ かつ $g\,(x')>0\ \ (x'\neq 0)$。

定　理　$g\,(x')$ が

$$\lim_{x'\to 0}\ |x'|\ |\log g\,(x')|=0$$

を満たすならばPは R^n で準楕円型である。すなわち，任意の $u\in\mathcal{D}'(R^n)$ と任意の開集合 $\Omega\subset R^n$ に対して，$Pu\in C^\infty(\Omega)$ から $u\in C^\infty(\Omega)$ が従う。

論 文 の 審 査 結 果 の 要 旨

本論文は二階偏微分作用素の準楕円性について考察し，特に無限次の退化をもつ作用素のあるクラスに対して退化の度合いによる準楕円性の特徴づけを与えたものである。準楕円性の研究については，定数係数の場合及び表象の退化が有限次である場合が良く調べられているが，表象が無限次の退化をもつ場合はほとんど研究がなかった。

森本君は当大学院在学中に無限次の退化をもつ作用素の準備円性について新しい結果を示した。一方，近年において確率論のMalliavin calculus理論が発展し，Kusuoka-Strookはその理論の一つの成果として無限次の退化をもつ作用素の新しいクラスに対して準楕円性を示した。森本君はこれらの準楕円性をもつ作用素の構造の解明をめざして，次の形の $\{(x,y);\ x=(x',x'')\in R^{n_1}\times R^{n_2},\ y\in R^m\}$ における作用素を考察した：

$$P = a(x, y, D_x) + g(x')\, b(x, y, D_y),$$

ここでa，bはそれぞれD_x，D_yに関して２階の強楕円型作用素で，gは$g(x') > 0$ $(x' \neq 0)$，$g(0) = 0$を満たす関数である。そして“Ｐが準楕円型であるための必要十分条件は

$$\lim_{|x'| \to 0} |x'|\,|\log g(x')| = 0$$

である”との特徴づけを与えた。

森本君はこの結果を示すために，微分作用素に対する準楕円性の新しい判定方法をつくり出した。これは偏微分方程式論の極めて精密な論議を用いており，特に擬微分作用素の運用について新しい工夫がなされており興味深いものである。この考察から，森本君は準楕円性の判定についてlogarithmic orderの滑かさの上昇という方法を生み出した。この判定方法はより広いクラスの作用素に適用され，その有効性が示されている。この結果は偏微分方程式の準楕円性の研究に新たな展開を与えるものであり，これからの発展に示唆を与えている。

以上より本論分は新しい結果と独創性を多く含んだものであり，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。