【25】

氏名・(本籍)	盛(もり) 田(た) 健(たけ) 彦(ひこ)
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	第 7633 号
学位授与の日付	昭和62年3月26日
学位授与の要件	理学研究科数学専攻 学位規則第5条第1項該当
学位論文題目	**定常ランダム作用素に関する初期値問題に付随した中心極限定理**
論文審査委員	(主査) 教 授 渡辺 毅 (副査) 教 授 池田 信行　教 授 福島 正俊　助教授 中尾慎太郎

論文内容の要旨

$\{H^P ; P\in R\}$ を実可分Hilbert空間の族で任意の $P\in R$ に対し包含写像 $H^{P+1} \hookrightarrow H^P$ がHilbert－Schmidt作用素となるものとする。ωをランダムパラメーター，εをスモールパラメーターとするとき次の初期値問題(1), (2)を考えそれぞれの解を $u^\varepsilon(\omega,\ t)$, $u^0(t)$で表す。(1) $du(t)/dt = L(\omega, \frac{t}{\varepsilon})u(t),\ u(0)=u_0\in H^P$, (2) $du(t)/dt=Lu(t),\ u(0)=u_0$, ここで $L(\omega,\ t)$ は$H^{-\infty}=\bigcup_p H^p$上の線型作用素に値をとる強混合的定常過程であり，$L$はその平均作用素($t$に無関係)とする。

本論文の目的はすべてのωに対し$L(t)=L(\omega,\ t)$が以下の"適切性"の条件を満たすとき，$u^\varepsilon(\omega,\ t)$ の$u^0(t)$周りのfluctuation (ゆらぎ) $X^\varepsilon(\omega,\ t)=(u^\varepsilon(\omega,\ t)-u^0(t))/\varepsilon^{1/2}$ に対して中心極限定理が成り立つ，すなわち，$\varepsilon\to 0$のとき$X^\varepsilon(\omega,\ t)$がHilbert空間に値をとるGauss過程$X^0$に法則収束することを証明することである。これはKhas'minskiiの結果 (Theory Prob. Appl. 11 (1966) 211-228)を無限次元の特殊な場合に拡張したものとも解釈できる。

適切性の条件とは，正数mと正数の族 $\{C_P\}_{P\in R}$, $\{C_{T,P}\}_{T>0,P\in R}$があって (i) $L(\cdot)\in C([0,T]\to B(H^{P+m}\to H^P))$ かつ$\sup_t \| L(t)\|_{B(H^{P+m}\to H^P)} \leqq C_P$. (ii) 任意の$u_0\in H^{P+m}$に対して初期値問題 $du(t)/dt=L(t)u(t),\ u(0)=u_0$は, $C([0,T]\to H^{P+m})\cap C^1([0,T]\to H^P)$ で唯一つの解を持つ。(iii) (エネルギー評価) $v(\cdot)\in C([0,T]\to H^{P+m})\cap C^1([0,T]\to H^P)$ が$f(\cdot)\in C([0,T]\to H^P)$ に対し $dv(t)/dt=L(t)v(t)+f(t)$を満たすならば，すべての$t\in[0,T]$ に対し，$\|v(t)\|_p^2 \leqq C_{T,P}[\|v(0)\|_p^2+\int_0^t \|f(s)\|_p^2 ds]$ が成立する。(iv) 勝手な$s>0$に対し$L^s(t)=L(st)$で定義される作用素L^sもまた (i)－

(iii) を満たす，の四つが成立することである。例えば，Hilbert空間H^pをうまくとることによって放物型方程式や一階対称双曲系に現れる線型偏微分作用素は上記の条件を満たしており，その場合mは階数と見做せる。

定理. 初期条件が$u_0 \in H^{p+3m+1}$のときεに依らない正数Cがあって，$\sup_{0\le t\le T} E\| u^\varepsilon(t)-u^0(t)\|_p^2 \le C\varepsilon$が成立する。更に$\varepsilon\to 0$のとき，$X^\varepsilon(\omega, t)=(u^\varepsilon(\omega, t)-u^0(u^0(t)))/\varepsilon^{1/2}$は$C([0, T]\to H^p)$－値確率変数として次の積分方程式で特徴付けられる$C([0, T]\to H^p)$-値確率変数$X^0(\omega, t)$に法則収束する。

$$X^0(\omega, t)=W^0(\omega, t)+\int_0^t LX^0(\omega, s)\,ds,\ X^0(\omega, 0)=0.$$

ここで，$W^0(\omega, t)$はH^{p+2m}に値をとり連続な道を持つ独立増分過程であり，次の量で完全に決定される。

$$E[(W^0(t), v)_{p+2m})]=0,$$

$$E[(W^0(t), v)_{p+2m}(W^0(s), w)_{p+2m}]=\int_0^{t\wedge s}\langle v, w\rangle(u^0(r))\,dr,$$

但し$\langle v, w\rangle(u)$は

$$\langle v, w\rangle(u)=\int_0^\infty E[((L(t)-L)u, v)_{p+2m}((L(0)-L)u, w)_{p+2m} +((L(0)-L)u, v)_{p+2m}((L(t)-L)u, w)_{p+2m}]dt$$

で定義される。

論文の審査結果の要旨

εを小さいパラメータとし，R^dのランダムな力学系

(1) $x(t)=F(\omega, t/\varepsilon, x(t)]$

を考える。Khas'minskii (1966) は，Fに関する適当な条件の下で，$\varepsilon\to 0$のとき(1)の解$x^\varepsilon(\omega, t)$に対して大数の法則 (averaging principle) および中心極限定理 (fluctuation theorem) が成り立つことを証明した。本論文において盛田君は，上と同様な問題を無限次元空間における線型な力学系の場合に考察し，無限次元空間上の確率過程に対する興味ある極限定理を導いた。

$\{H^p ; p\in R\}$を可分なHilbert空間の族で，各pに対し包含写像$H^{p+1}\hookrightarrow H^p$はHilbert－Schmidt作用素であるとする。$L(\omega, t)$は確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上で定義され，$H^{-\infty}=\bigcup_p H^p$上の線型作用素に値を取る強混合的定常過程，その平均作用素をLと書く。初期値問題

(2) $\dfrac{du}{dt}=L(\omega, \dfrac{t}{\varepsilon})u,\ u(0)=u_0$

(3) $\dfrac{du}{dt}=Lu,\qquad u(0)=u_0$

の解をそれぞれ$u^\varepsilon(\omega, t)$, $u^0(t)$とし，$u^0(\omega, t)$の$u^0(t)$の周りのゆらぎを

$X^\varepsilon(\omega, t)=\dfrac{u^\varepsilon(\omega, t)-u^0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}$と表す。さらに$L(\omega, t)$に対しては，(2), (3)の可解性，解の一意味を保証する“適切性”(well posedness) の条件を仮定する。

このとき，初期条件$u_0\in H^p$に対して，ある$q<p$が存在してH^qにおいて以下の結果が成り立つ。

（i）　$u^{\varepsilon}(\omega, t)$ は $L^{2}(\Omega ; H^{q})$ において $u^{0}(t)$ に収束する。

（ii）　$X^{\varepsilon}(\omega, t)$ は H^{q} 上の確率過程として法則収束し，極限過程 $X^{0}(w, t)$ は次の積分方程式の解である：

$$X^{0}(\omega, t) = W^{0}(\omega, t) + \int_{0}^{t} L X^{0}(\omega, s)\, ds,$$

ここで $W^{0}(\omega, t)$ は H^{q} 上の Wiener 過程で，その共分散汎関数が具体的に計算できる。

さらに盛田君は，上記の抽象的な設定が不自然なものでないことを，2階放物型方程式および1階双曲系について例証している。

以上盛田君の研究は，確率過程論とくに無限次元のランダムな力学系の研究に寄与する所が大きく，理学博士の学位論文として十分価値あるものと認める。