



Title	ベローズの強さに関する研究
Author(s)	竹園, 茂男
Citation	大阪大学, 1966, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1811
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

ベローズの強さに関する研究

竹 園 茂 男

まえがき

ベローズはパイプラインの伸縮継手として、またポンプやターボ送風機の吐出し管、ディーゼル主機排気管等の振動防止に、あるいはまた計測制御関係等に広く用いられている機械要素で、その形状も U 形、C 形、 Ω 形等いろいろなものがある。

このようにベローズは用途の広い機械要素であるにもかかわらず、これについての研究は、少数の弾性特性を論じた近似的なものおよびきわめてあらう M. W. Kellogg 社の設計式を除けばほとんどなく、設計技術者は正確で容易な強度計算の方策を強く望んでいる現状である。

そこで筆者はその用途から考えて、まず第 1 編においてどのような用途に対して基礎的で重要な意味をもつ弾性特性について述べ、第 2 編では伸縮継手等で塑性域まで使用する場合について、極限解析によつてその極限軸荷重を求め、最後に第 3 編でベローズの疲れ強さについて論じている。

すなわち第 1 編においてははかく理論を用いて、U 形、C 形および Ω 形ベローズに軸力が作用する場合と、U 形ベローズに内圧が作用する場合の問題を取り扱う。

第 2 編では極限解析によつて、C 形および U 形ベローズに軸力が作用する場合の極限荷重を求めている。第 1 編、第 2 編ともはじめに理論解析を行ない、実験結果および他の研究のあるものはこれと比較検討し、最後に結論を実際の設計に役立つように設計公式または計算図表にまとめている。

第 3 編では振動試験機を利用して、ベローズの疲れ試験機を設計し、実際にベローズの疲れ試験を行なう。そしてこれを試験片の回転曲げ試験の結果と比較し、第 1 編に述べる弾性解析の結果と結びつけることによつて、軸方向の変位とベローズの寿命との関係を明らかにする。また降伏点をこえた塑性領域におけるベローズの疲れ試験を行ない、この結果を実験的に第 1 編の弾性解析の結果と結びつけることによつて、軸方向の変位と塑性領域における寿命との関係を求める。またステンレス鋼製のベローズについては、弾性および塑性の両域にわたつて寿命を算定する公式を導き、これを M. W. Kellogg 社の設計式と比較している。

第1編から第3編にわたって、U形ベローズについて詳しく述べているのは、実際この形状のベローズが最も多く実用されているし、C形はこのU形ベローズの特別の場合と考えられ、またΩ形は用いられることが比較的少ないからである。

目 次

第1編 ベロースの弾性特性

緒 論	1
第1章 円環かくの基礎式および解	4
1.1 基礎微分方程式および解	4
1.2 内力および変位	15
1.2.1 せん断力	15
1.2.2 張 力	15
1.2.3 曲げモーメント	15
1.2.4 変 位	16
第2章 C形ベロース	17
2.1 解 法	17
2.2 応 力	19
2.3 軸方向の伸縮量	22
2.4 最大応力と伸縮量との関係	24
2.5 近似公式	24
2.6 他の研究者の結果との比較	25
2.7 結 論	27
第3章 Ω 形ベロース	29
3.1 解 法	29
3.2 応 力	31
3.3 軸方向の伸縮量	32
3.4 最大応力と伸縮量との関係	33
3.5 近似公式	33
3.6 他の研究者の結果との比較	34
3.7 結 論	35

第4章 U形ベローズ——軸荷重を受ける場合の近似解	36
4.1 円環かく部の関係式	37
4.2 円輪板部の関係式	37
4.3 接続条件	38
4.4 応力	40
4.5 軸方向の伸縮量	41
4.6 近似公式	42
4.7 計算例	44
4.8 考察	45
4.9 結論	45
第5章 U形ベローズ——軸荷重を受ける場合の厳密解	47
5.1 円環かく部の関係式	47
5.2 円輪板部の関係式	48
5.3 接続条件	49
5.4 応力	53
5.5 軸方向の伸縮量	57
5.6 最大応力と伸縮量との関係	61
5.7 近似公式	61
5.8 計算例	63
5.9 実験	65
5.9.1 ベローズの形状寸法	66
5.9.2 実験方法	66
5.9.3 実験値と理論値との比較	66
5.10 考察	71
5.11 結論	72
第6章 U形ベローズ——内圧を受ける場合	74
6.1 円環かく部の関係式	74
6.2 円輪板部の関係式	75
6.3 接続条件	76
6.4 応力	79

6.5 軸方向の伸び	83
6.7 計算例	84
6.8 実験	87
6.7.1 ベローズの形状寸法	87
6.7.2 実験方法	88
6.7.3 実験値と理論値との比較	88
6.8 考察	91
6.9 結論	93

第2編 ベローズの極限解析

結 論	95
第1章 かくの極限解析	97
1.1 かくの場合の極限定理	98
1.2 降伏曲面	98
1.3 かくの平衡方程式	100
1.4 エネルギー散逸率	100
第2章 C形ベローズ — 簡単な変形を考慮した解析	101
2.1 平衡法	101
2.2 仮想変形法	103
2.3 極限荷重に対する検討	106
2.4 極限軸荷重を求める近似公式 (結論)	106
第3章 C形ベローズ — 一般的な変形を考慮した解析	108
3.1 平衡法	108
3.2 仮想変形法	112
3.3 変形に対する検討	116
3.4 結 論	116

第4章 U形ベローズ — 簡単な変形を考慮した解析	118
4.1 平 衡 法	118
4.2 板翅変形法	122
4.3 極限軸荷重を求める近似公式 (結論)	125
第5章 U形ベローズ — 比較的厳密な解析	126
5.1 平 衡 法	126
5.2 板翅変形法	128
5.3 数値計算	129
5.4 実 験	132
5.5 結 論	136

第3編 ベローズの疲れ強さ

緒 論	137
第1章 弾性領域における疲れ強さ	138
1.1 ベローズ疲れ試験機	138
1.2 試験用ベローズ	141
1.3 試験方法	141
1.4 試験結果	142
1.5 考 察	145
1.6 結 論	149
第2章 塑性領域における疲れ強さ	151
2.1 試験方法	151
2.2 試験結果	151
2.3 考 察	153
2.4 結 論	159
結 語 お よ び 謝 辞	160
発 表 文 献	162
参 考 文 献	163

主 要 記 号

本論文に用いるおもな記号は次のとおりである。

$$A : (1 + \lambda \sin \varphi_0) V_0 - \{ P r_1 (2 + \lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 \} / 2$$

A_0 : 定 数

$$A : m r_c A / E h^2$$

B_0 : 定 数

a : 円輪板の外径

b : 円輪板の内径

C_i : 定 数

c_i : 定 数

$$D : E h^3 / m^2$$

D_A : 単位面積当りの内部エネルギー散逸率

d : ベローズの内径 ($d = b - r_1$)

d_i : 定 数

E : 縦弾性係数

e_i : 定 数

G : 横弾性係数

H : 面内力の径方向成分

h : かくの厚さ

M_r : 半径方向の曲げモーメント

M_t : 接線方向の曲げモーメント

M_θ : 円周方向の曲げモーメント

M_φ : 子午線方向の曲げモーメント

$$M_0 : \sigma_0 h^2 / 4$$

$$m : \sqrt{12(1 - \nu^2)}$$

N : 破壊までの繰返し数

N_r : 半径方向の面内力

N_t : 接線方向の面内力

N_θ : 円周方向の面内力

N_φ : 子午線方向の面内力

- N_0 : $\sigma_0 h$
 P : 軸荷重
 P : $(m\gamma_c/Eh^2)(p\gamma_r/2)$
 p : 内圧
 P_0 : 極限軸荷重
 p_0 : $P_0/2\pi\gamma_m\sigma_0 h$
 P_L : 極限軸荷重の下界
 p_L : $P_L/2\pi\gamma_m\sigma_0 h$
 P_U : 極限軸荷重の上界
 p_U : $P_U/2\pi\gamma_m\sigma_0 h$
 Q, Q_r : 円環かく、円輪板のせん断力
 q : $(b^2-d^2)/(a^2-d^2)$
 r : 半径方向の座標
 r_0 : 円輪板の半幅
 r_1 : 波形の半径
 r_c : 円環かくの環の半径
 r_m : ベローズの平均半径
 S, S_0 : 破断時、最初の断面積
 u, u_r : 円環かく、円輪板の半径方向変位
 $\dot{u}$: 円環かくの半径方向の速度成分
 V : 面内力の軸方向成分
 V_0 : $\varphi = \varphi_0$ における V の値
 w, w_r : 円環かく、円輪板の軸方向変位
 $\dot{w}, \dot{w}_r$: 円環かく、円輪板の軸方向の速度成分
 x_1, x_2, x_3, x_4 : $C_3^{(I)}/A, C_3^{(II)}/A, C_4^{(I)}/A, C_4^{(II)}/A$,
 Σ : 軸方向の座標
 α : $\rho/(1+\xi-\nu\xi)$
 $\Delta(u)$: 式 (2.30)
 Δc : 式 (4.15)
 Δp : 式 (4.18)
 ΔE_e : 弾性 ひずみ幅
 ΔE_p : 塑性 ひずみ幅

- $\Delta \varepsilon_t$: 総ひずみ幅
 δ : ベローズ / ピッチ当りの伸縮量
 δ_c, δ_p : 円環かく部、円輪板部の軸方向変位 (/ ピッチ当り)
 δ_t : ベローズの総変位
 $\delta_I, \delta_{II}, \delta_{III}$: 円環かく I, II, III, 円輪板の軸方向変位 (1/2 ピッチ当り)
 δ_o : $2Y_1 P / \pi E Y_m h$
 δ_o' : $m^2 Y_1^3 / 2 Y_m E h^3$
 ε : ひずみ
 ε_f : 破断ひずみ
 ε_p : 塑性ひずみ
 $\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi$: 円周方向、子午線方向のひずみ率
 $\dot{\varepsilon}_{\theta m}, \dot{\varepsilon}_{\varphi m}$: 中央面の 円周方向、子午線方向のひずみ率
 $\dot{\varepsilon}_{\theta n}, \dot{\varepsilon}_{\varphi n}$: 中央面の 円周方向、子午線方向のひずみ率
 η : 円環かくの解の関数
 φ : φ の変化量
 K_r, K_θ, K_φ : 半径方向、円周方向、子午線方向の曲率の変化量
 $\dot{K}_r, \dot{K}_\theta, \dot{K}_\varphi$: 半径方向、円周方向、子午線方向の曲率の変化率
 λ : Y_1 / Y_c
 λ_1 : h / Y_1
 λ_2 : Y_1 / Y_m
 μ : $m Y_1^2 / Y_c h$
 μ_1 : $m Y_1^2 / Y_m h$
 ν : ポアソン比
 Ξ : Y_0 / Y_m
 ρ : Y_0 / Y_1
 σ : 応力
 σ_A : $P / Y_1 Y_m$
 σ_a : 応力振幅
 σ_B : 材料の引張り強さ
 σ_e : 材料の疲れ限度
 σ_o : 材料の降伏点
 σ_{Bo} : $3 Y P / \pi Y_m h^2$

$\sigma_{b\theta}, \sigma_{b\varphi}$: 円周方向、子午線方向の曲げ応力

$\sigma_{z\theta}, \sigma_{z\varphi}$: 円周方向、子午線方向の膜応力

$\sigma_\theta, \sigma_\varphi$: 円周方向、子午線方向の応力

$\sigma_{\theta m}, \sigma_{\varphi m}$: $\sigma_{z\theta}, \sigma_{b\varphi}$ の最大値

φ : かくの位置を示す角

ϕ : 断面収縮率

φ_I, φ_{II} : かく I, II における降伏関断円の生じる位置を示す角

φ_c : かくの回転の中心を示す角

χ : $m r H / E h^2$

χ_φ : $\chi - P(2 + \lambda \sin \varphi) \cos \varphi$

ψ : φ の余角

ψ_I, ψ_{II} : φ_I, φ_{II} の余角

Ω : $m r V / E h^2$

第1編 ベローズの弾性特性

緒 論

本編ではベローズの弾性特性について述べる。ベローズはまえがきにも述べたように、多方面に用いられているが、その弾性特性を知ることは、これを用いる用途に用いる場合にも基礎的でかつ重要である。

ベローズは一般に円環かくと円輪板とから成り、後章においてその解析の際円環かくの諸関係式をしばしば引用するので、まず第1章において太田・浜田らの論文⁽¹⁾に従って、円環かくの基礎微分方程式とその解および内力と変位を表わす諸式を記述する。

第2章では図1(a)に示すようなC形ベローズの問題を取り扱う。C形ベローズの弾性特性についての研究には、R.A. Clark⁽²⁾の漸近解、C.E. Turner & H. Ford⁽³⁾、P.J. Palmer⁽⁴⁾のエネルギー解などがあるが、実用上のベローズは後に述べるパラメータ μ 〔式(1.2)〕の値がそれほど小さくなく、R.A. Clarkの解を適用できない場合が多い。また他の二つの解はともに μ の小さい場合を対象としているが、エネルギー解という点で近似的なものであり、より厳密なかく理論による裏付けが必要である。この章で

は第1章で述べる円環かくの解を用いてC形ベローズの問題を解き、その結果C.E. Turner & H. Fordの結論が妥当であることを示すとともに、 μ の比較的小さい場合に対しては、従来グラフで示されていた結果を簡単な数式で表わしている。

次に第3章では図1(b)に示す Ω 形ベローズを

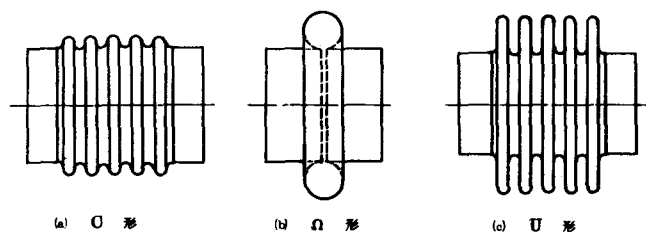


図1 各種ベローズ

考察する。Ω形ベローズ(Ω継手ともいわれる)は円筒かくと円環かくとから成り、これの接続条件に対して後に述べるような仮定を設けると、これもC形ベローズとほとんど同じ手続で解くことができる。このΩ形ベローズに関してR. A. Clarkの漸近解⁽²⁾とN. D. Dahlのエネルギー解⁽⁵⁾とがあるが、この章においてはこれらの解の妥当性を示し、また設計公式を作製している。なお第2章および第3章では内圧は考慮しない。

第4章から第6章まではU形ベローズについて述べたものである。U形ベローズはベローズのうちで最も多く用いられている。しかるに、これについての研究としては、今までにF. Salzmann⁽⁶⁾、A. Samoiloff⁽⁷⁾、A. Laupa & N. A. Weil⁽⁸⁾、П. E. АИппеев⁽⁹⁾、中村⁽¹⁰⁾、宮入⁽¹¹⁾らによる実用性の高い近似解があるのみで、設計者は設計に際し、やむなくM. W. Kellogg社のきわめてあらう近似式⁽¹²⁾を用いており、正確で容易な計算の方法が強く望まれている現状である。

そこで筆者は、これらの章でこのU形ベローズの弾性特性の問題をとりあげ、まず第4章と第5章で軸荷重を受ける場合を、また第6章では内圧を受ける場合を考察する。すなわちU形ベローズの円環かくの部分には第1章で述べる円環かくの解法を用い、円輪板の部分には円板の対称曲げ理論を適用して、応力および伸縮量をできるだけ正確に求めることを試みている。ただし第4章では計算を簡単にするために、応力と変形の状態が円輪板の幅の中心線に関して対称であり、また円輪板の面内変位を無視するなどの仮定を設けている。この結果、応力および伸縮量の値を比較的簡単な計算図と設計公式としてまとめることができる。ベローズの波形の半径および円輪板部の幅が全体の半径に比較して小さい場合には、上述の仮定による誤差はわずかであると予想される。事実第5章で述べるより厳密な解の一部の結果をもつて第4章の近似の妥当性を確認している。

第5章では、第4章の計算を簡単にするための諸仮定を取り除き、できるだけ厳密な解析を行なう。その結果、容易に応力および伸縮量を求めることのできる正確で適用範囲の広い計算図を作製している。またこの計算図から逆に設計公式を導いている。なお実験についてはこの章でくわしく述べている。

最後の第6章では内圧が作用する場合を取り扱う。ベローズを実際に用いる場合には、軸力とともに内圧が作用することが多いからである。内圧が作用する場合まで考慮に入れた研究は、上述の諸研究のうちわずかにA. Laupa &

N. A. Weil の近似解⁽⁸⁾ および宮入ら⁽¹¹⁾ のものがあるにすぎないので、この章においてこの問題を考察する。すなわちこの章では、第5章と同様にかく理論を用いて、内圧を受ける場合のベローズの応力および伸縮量を比較的厳密に求め、これを実験結果および他の研究者の結果と比較検討している。第6章においても第5章と同様、容易に応力および伸縮量を求めることのできる計算図を作っている。この章で求めた解を、第4章および第5章において取り扱った軸力のみが作用する場合の解と組み合わせると、内圧および軸力が作用する一般の場合の解が得られる。

以上はすべて線形理論を用いて解析しているが、計測制御関係等に用いる U 形ベローズのなかには、肉厚が非常に薄く、円輪板部が極端に大きく、きわめて降伏点の高い材料で作られているものがあり、これらは降伏するまでに大きな変形を伴うので、もしこのようなベローズを降伏点附近まで使用する場合には、本編で用いた微小たわみ理論によると、誤差が大きくなることが予想される。これに対しては、変位を変数として入れたいわゆる大たわみ理論（非線形理論）⁽¹²⁾ を用いればよいが、これは解法が複雑で、計算が手間取る上に結論を公式等の形で表わすことが困難であるから、ここでは用いない。これについては今後の研究を待つ。たゞし一般に用いられているベローズに対しては、後に述べるように、微小たわみ理論による解で実用的には十分である。

第1章 円環かくの基礎式および解

1.1 基礎微分方程式および解

円環かくは構造物の基本要素であるから、今までに多くの研究があり、円環かくの基礎微分方程式は次式で与えられる。⁽¹⁾

$$L(\eta) + \left(\frac{\mu}{\lambda} \Phi - \nu \Theta \right) \frac{1}{r} + i T \eta + i \Theta = 0 \quad (1.1)$$

ただし

$$L(\) = \frac{1 + \lambda \sin \varphi}{\lambda \sin \varphi} \frac{d^2}{d\varphi^2}(\) + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi}(\) - \frac{\lambda \cos^2 \varphi}{(1 + \lambda \sin \varphi) \sin \varphi}(\)$$

$$\zeta = i\varphi - \frac{\mu}{T\lambda} \zeta$$

$$\zeta = \chi \varphi + \frac{\nu \lambda}{\mu} \varphi$$

$$T^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \nu^2$$

$$\Phi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \left(1 + \frac{\lambda \sin \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \right) A + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\lambda}{1 + \lambda \sin \varphi} P$$

$$\Theta = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} A$$

$$A = \frac{m \gamma_c A}{E h^2}$$

$$A = (1 + \lambda \sin \varphi_0) V_0 - \frac{1}{2} \left\{ p r_1 (2 + \lambda \sin \varphi_0) \sin \varphi_0 \right\}$$

$$V_0 : \varphi = \varphi_0 \text{ における } V$$

$$\chi \varphi = \chi - P (2 + \lambda \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$\chi = \frac{m \gamma_H}{E h^2}$$

$$P = \frac{m \gamma_c}{E h^2} \frac{p r_1}{2}$$

$$\lambda = r_1 / r_c$$

$$\mu = m r_1^2 / r_c h$$

$$m = \sqrt{12(1 - \nu^2)}$$

H : 面内力の径方向成分

V : 面内力の軸方向成分

p : 内圧

φ : φ の変化量

φ : 円環かくの位置を示す角

(1.2)

E : 縦弾性係数
 ν : ポアソン比
 r_c : 円環かくの環の半径
 r_i : 円環かくの断面円の半径
 h : かくの厚さ

一般には λ は 1 に
 比べて小さいので、
 式(1.1)において
 これの2次の項を省
 略すると次のように
 なる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varphi} \left\{ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{d\eta}{d\varphi} \right\} \\
 & + i\mu \sin \varphi \cdot \eta \\
 & = -i\mu \cos \varphi \cdot A
 \end{aligned}$$

(1.3)

式(1.3)の同次解を

$\eta_1 = \eta_{1R} + i\eta_{1I}$ および $\eta_2 = \eta_{2R} + i\eta_{2I}$ 、特解を $\eta_g = A(\eta_{gR} + i\eta_{gI})$ とすれば

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta &= C_1 \eta_{1R} + C_2 \eta_{1I} + C_3 \eta_{2R} + C_4 \eta_{2I} + A \eta_{gI} \\
 \chi_g &= C_1 \eta_{1I} - C_2 \eta_{1R} + C_3 \eta_{2I} - C_4 \eta_{2R} - A \eta_{gR}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

ここに $C_1 \sim C_4$ は積分定数であり、式(1.3)の解 η_1, η_2, η_g がわかれば、式(1.4)より ϑ と χ_g が得られる。

さて式(1.3)に $\eta = \eta_R + i\eta_I$ を代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{d\varphi} \left\{ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{d\eta_R}{d\varphi} \right\} &= \mu \sin \varphi \cdot \eta_I \\
 \frac{d}{d\varphi} \left\{ (1 + \lambda \sin \varphi) \frac{d\eta_I}{d\varphi} \right\} &= -\mu \sin \varphi \cdot \eta_R - \mu \cos \varphi \cdot A
 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

ここで独立変数として φ の余角

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

を用いると、式(1.5)は

(1.6)

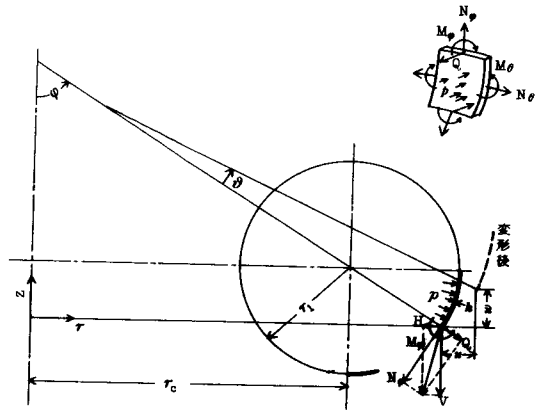


図 1.1 円環かく

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\psi} \left\{ (1+\lambda \cos \psi) \frac{d\eta_R}{d\psi} \right\} &= \mu \cos \psi \cdot \eta_I \\ \frac{d}{d\psi} \left\{ (1+\lambda \cos \psi) \frac{d\eta_I}{d\psi} \right\} &= -\mu \cos \psi \cdot \eta_R - \mu \sin \psi \cdot A \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$\cos \psi$ と $\sin \psi$ を ψ のべき級数に展開すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\psi} \left\{ \left(1 + \lambda \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \psi^n}{n!} \right) \frac{d\eta_R}{d\psi} \right\} &= \mu \cdot \eta_I \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \psi^n}{n!} \\ \frac{d}{d\psi} \left\{ \left(1 + \lambda \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \psi^n}{n!} \right) \frac{d\eta_I}{d\psi} \right\} &= -\mu \eta_R \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \psi^n}{n!} \\ &\quad - \mu A \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \psi^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

式(1.8)の解として次の形を与える。

$$\left. \begin{aligned} \eta_R &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{\ell mn} \psi^n \lambda^m \mu^{2\ell} \\ \eta_I &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{\ell mn} \psi^n \lambda^m \mu^{2\ell+1} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

式(1.9)を式(1.8)に代入して ψ , λ および μ の各次数につき、左右両辺の係数が一致するように $a_{\ell mn}$ と $b_{\ell mn}$ を定める。二つの同次解

$\eta_1 = \eta_{1R} + i\eta_{1I}$, $\eta_2 = \eta_{2R} + i\eta_{2I}$ を求めるために $A=0$ とする。まず a_{00n} は a_{000} と a_{001} を除きすべて零となることがわかる。そして二つの同次解のうち ψ の偶関数 η_1 の各係数はすべて a_{000} に比例し、

ψ の奇関数 η_2 の各係数はすべて a_{001} に比例するから、 $a_{000} = a_{001} = 1$ とし、順次 $a_{\ell mn}$, $b_{\ell mn}$ を求める漸化式を作ると次のようになる。

第1同次解 η_1 (n : 偶数):

$$\left. \begin{aligned} a_{\ell mn} &= (-1)^{\ell+m+\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2\ell+1} \frac{|b_{\ell-1, m, n-2i}|}{(2i-2)! n(n-1)} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2\ell+1} \frac{(n+2-2i) |a_{\ell, m-1, n+2-2i}|}{(2i-2)! n} \right\} \\ b_{\ell mn} &= (-1)^{\ell+m+\frac{n}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2\ell} \frac{|a_{\ell, m, n-2i}|}{(2i-2)! n(n-1)} + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-2\ell} \frac{(n+2-2i) |b_{\ell, m-1, n+2-2i}|}{(2i-2)! n} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

ただし $a_{000}=1$, $a_{0mn}=0$ ($m=n=0$ でないとき)。なお $n < 4\ell$ のとき $a_{\ell mn}=0$, $n < 4\ell+2$ のとき $b_{\ell mn}=0$ となる。

第2同次解 η_2 (n : 奇数):

$$\left. \begin{aligned} a_{\ell mn} &= (-1)^{\ell+m+\frac{n-1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-2\ell} \frac{|b_{\ell-1, m, n-2i}|}{(2i-2)! n(n-1)} + \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-2\ell} \frac{(n+2-2i) |a_{\ell, m-1, n+2-2i}|}{(2i-2)! n} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$b_{emn} = (-1)^{\frac{e+n+\frac{n-1}{2}}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-2\ell} \frac{|a_{e,m,n-2i}|}{(2i-2)!n(n-1)} + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-2\ell} \frac{(n+2-2i)! |b_{e,m-1,n+2-2i}|}{(2i-2)!n} \right\} \quad (1.11)$$

ただし $a_{001} = 1$, $a_{00n} = 0$, ($n \neq 0$). なお $n < 4\ell + 1$ のとき $a_{emn} = 0$, $n < 4\ell + 3$ のとき $b_{emn} = 0$ とする。

次に特別解 $\eta_g = A(\eta_{gR} + i\eta_{gI})$ を上と同様に求めると、漸化式は η_2 と同じ式 (1.11) がそのまま用いられる。ただし $a_{emn} = 0$, $b_{00n} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \times 1$ ($n > 3$). なお $n < 4\ell + 1$ のとき $a_{emn} = 0$, $n < 4\ell + 3$ のとき $b_{emn} = 0$ とする。

上に得られた η_1, η_2 および η_g の各関数は、次の初期条件を満たしていることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} \psi = 0 : \eta_{1R} &= I, \quad \eta_{1I} = \frac{d\eta_{1R}}{d\psi} = \frac{d\eta_{1I}}{d\psi} = 0 \\ \psi = 0 : \frac{d\eta_{2R}}{d\psi} &= 1 - \lambda + \lambda^2 - \dots = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \eta_{2R} = \eta_{2I} = \frac{d\eta_{2I}}{d\psi} = 0 \\ \psi = 0 : \eta_{gR} &= \eta_{gI} = \frac{d\eta_{gR}}{d\psi} = \frac{d\eta_{gI}}{d\psi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

上記の計算を、 $\ell = 0, 1$ に対しては $m = 0, 1, 2$ まで、 $\ell = 2$ に対しては $m = 0, 1$ まで、 $\ell = 3$ に対しては $m = 0$ の各場合に対して、 n に関しては零となる項を除いて 10 項ずつとって計算した。その結果を式 (1.13) ~ (1.18) に示す。

$$\eta_{1R} = I$$

$$\begin{aligned} & + \mu^2 (-4.1666667 \times 10^{-2} \psi^4 + 9.7222223 \times 10^{-3} \psi^6 \\ & \quad - 7.6884921 \times 10^{-4} \psi^8 + 3.4997795 \times 10^{-5} \psi^{10} \\ & \quad - 1.0668023 \times 10^{-6} \psi^{12} + 2.3480616 \times 10^{-8} \psi^{14} \\ & \quad - 3.9148699 \times 10^{-10} \psi^{16} + 5.1179456 \times 10^{-12} \psi^{18} \\ & \quad - 5.3874344 \times 10^{-14} \psi^{20} + 4.6644721 \times 10^{-16} \psi^{22}) \\ & + \mu^2 \lambda (8.3333333 \times 10^{-2} \psi^4 - 3.7500000 \times 10^{-2} \psi^6 \\ & \quad + 7.5396825 \times 10^{-3} \psi^8 - 8.3471120 \times 10^{-4} \psi^{10} \\ & \quad + 5.9511284 \times 10^{-5} \psi^{12} - 3.0011026 \times 10^{-6} \psi^{14} \\ & \quad + 1.1351775 \times 10^{-7} \psi^{16} - 3.3515434 \times 10^{-9} \psi^{18} \\ & \quad + 7.9513318 \times 10^{-11} \psi^{20} - 1.5501268 \times 10^{-12} \psi^{22}) \\ & + \mu^2 \lambda^2 (-1.2500000 \times 10^{-1} \psi^4 + 8.3333334 \times 10^{-2} \psi^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2.7827381 \times 10^{-2} \psi^8 + 5.5985450 \times 10^{-3} \psi^{10} \\
& -7.3504139 \times 10^{-4} \psi^{12} + 6.7764026 \times 10^{-5} \psi^{14} \\
& -4.6429262 \times 10^{-6} \psi^{16} + 2.4656919 \times 10^{-7} \psi^{18} \\
& -1.0473324 \times 10^{-8} \psi^{20} + 3.6450833 \times 10^{-10} \psi^{22} \\
& + \mu^4 (2.4801587 \times 10^{-5} \psi^8 - 1.3778660 \times 10^{-5} \psi^{10} \\
& + 3.1252505 \times 10^{-6} \psi^{12} - 3.9709427 \times 10^{-7} \psi^{14} \\
& + 3.2928161 \times 10^{-8} \psi^{16} - 1.9574106 \times 10^{-9} \psi^{18} \\
& + 8.8800509 \times 10^{-11} \psi^{20} - 3.2102427 \times 10^{-12} \psi^{22} \\
& + 9.5358898 \times 10^{-14} \psi^{24} - 2.3702487 \times 10^{-15} \psi^{26}) \\
& + \mu^4 \lambda (-9.9206349 \times 10^{-5} \psi^8 + 7.4404762 \times 10^{-5} \psi^{10} \\
& - 2.5306805 \times 10^{-5} \psi^{12} + 5.1683738 \times 10^{-6} \psi^{14} \\
& - 7.0942356 \times 10^{-7} \psi^{16} + 7.0138481 \times 10^{-8} \psi^{18} \\
& - 5.2565404 \times 10^{-9} \psi^{20} + 3.1060406 \times 10^{-10} \psi^{22} \\
& - 1.4918845 \times 10^{-11} \psi^{24} + 8.4182268 \times 10^{-13} \psi^{26}) \\
& + \mu^6 (-2.0876757 \times 10^{-9} \psi^{12} + 1.8467900 \times 10^{-9} \psi^{14} \\
& - 7.1395832 \times 10^{-10} \psi^{16} + 1.6241570 \times 10^{-10} \psi^{18} \\
& - 2.4759802 \times 10^{-11} \psi^{20} + 2.7333831 \times 10^{-12} \psi^{22} \\
& - 2.3042181 \times 10^{-13} \psi^{24} + 1.5420866 \times 10^{-14} \psi^{26} \\
& - 8.4405880 \times 10^{-16} \psi^{28} + 3.8678927 \times 10^{-17} \psi^{30})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{II} = & \mu (-5.0000000 \times 10^{-1} \psi^2 + 4.1666667 \times 10^{-2} \psi^4 \\
& - 1.3888889 \times 10^{-3} \psi^6 + 2.4801587 \times 10^{-5} \psi^8 \\
& - 2.7557319 \times 10^{-7} \psi^{10} + 2.0876757 \times 10^{-9} \psi^{12} \\
& - 1.1470746 \times 10^{-11} \psi^{14} + 4.7794773 \times 10^{-14} \psi^{16} \\
& - 1.5619207 \times 10^{-16} \psi^{18} + 4.1103176 \times 10^{-19} \psi^{20}) \\
& + \mu \lambda (5.0000000 \times 10^{-1} \psi^2 - 1.6666667 \times 10^{-1} \psi^4 \\
& + 2.2222222 \times 10^{-2} \psi^6 - 1.5873016 \times 10^{-3} \psi^8 \\
& + 7.0546737 \times 10^{-5} \psi^{10} - 2.1377799 \times 10^{-6} \psi^{12} \\
& + 4.6984174 \times 10^{-8} \psi^{14} - 7.8306957 \times 10^{-10} \psi^{16} \\
& + 1.0236204 \times 10^{-11} \psi^{18} - 1.0774951 \times 10^{-13} \psi^{20}) \\
& + \mu \lambda^2 (-5.0000000 \times 10^{-1} \psi^2 + 2.9166667 \times 10^{-1} \psi^4 \\
& - 8.4722223 \times 10^{-2} \psi^6 + 1.3566468 \times 10^{-2} \psi^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1.3560957 \times 10^{-3} \psi^{10} + 9.2456894 \times 10^{-5} \psi^{12} \\
& - 4.5720213 \times 10^{-6} \psi^{14} + 1.7145070 \times 10^{-7} \psi^{16} \\
& - 5.0426674 \times 10^{-9} \psi^{18} + 1.1943159 \times 10^{-10} \psi^{20}) \\
+ \mu^3 (& 1.3888889 \times 10^{-3} \psi^6 - 5.463492 \times 10^{-4} \psi^8 \\
& + 8.1845238 \times 10^{-5} \psi^{10} - 6.6847376 \times 10^{-6} \psi^{12} \\
& + 3.5789873 \times 10^{-7} \psi^{14} - 1.3898242 \times 10^{-8} \psi^{16} \\
& + 4.1511370 \times 10^{-10} \psi^{18} - 9.8987900 \times 10^{-12} \psi^{20} \\
& + 1.9341610 \times 10^{-13} \psi^{22} - 3.1577472 \times 10^{-15} \psi^{24}) \\
+ \mu^3 \lambda (& - 4.1666667 \times 10^{-3} \psi^6 + 2.4801587 \times 10^{-3} \psi^8 \\
& - 6.6550926 \times 10^{-4} \psi^{10} + 1.0450487 \times 10^{-4} \psi^{12} \\
& - 1.0750257 \times 10^{-5} \psi^{14} + 7.8633796 \times 10^{-7} \psi^{16} \\
& - 4.3387957 \times 10^{-8} \psi^{18} + 1.8840659 \times 10^{-9} \psi^{20} \\
& - 6.6403444 \times 10^{-11} \psi^{22} + 1.9439397 \times 10^{-13} \psi^{24}) \\
+ \mu^3 \lambda^2 (& 8.3333333 \times 10^{-3} \psi^6 - 6.6468254 \times 10^{-3} \psi^8 \\
& + 2.5917659 \times 10^{-3} \psi^{10} - 6.2902713 \times 10^{-4} \psi^{12} \\
& + 1.0380057 \times 10^{-4} \psi^{14} - 1.2319687 \times 10^{-5} \psi^{16} \\
& + 1.1012278 \times 10^{-6} \psi^{18} - 7.6981310 \times 10^{-8} \psi^{20} \\
& + 4.3371285 \times 10^{-9} \psi^{22} - 1.9996040 \times 10^{-10} \psi^{24}) \\
+ \mu^5 (& - 2.7557319 \times 10^{-7} \psi^{10} + 1.9832919 \times 10^{-7} \psi^{12} \\
& - 6.0703186 \times 10^{-8} \psi^{14} + 1.0701154 \times 10^{-8} \psi^{16} \\
& - 1.2465563 \times 10^{-9} \psi^{18} + 1.0435863 \times 10^{-10} \psi^{20} \\
& - 6.6501998 \times 10^{-12} \psi^{22} + 3.3630740 \times 10^{-13} \psi^{24} \\
& - 1.3926016 \times 10^{-14} \psi^{26} + 4.8363806 \times 10^{-16} \psi^{28}) \\
+ \mu^5 \lambda (& 1.3778660 \times 10^{-6} \psi^{10} - 1.2526054 \times 10^{-6} \psi^{12} \\
& + 5.2007214 \times 10^{-7} \psi^{14} - 1.3144480 \times 10^{-7} \psi^{16} \\
& + 2.2712395 \times 10^{-8} \psi^{18} - 2.8661788 \times 10^{-9} \psi^{20} \\
& + 2.7658682 \times 10^{-10} \psi^{22} - 2.1141713 \times 10^{-11} \psi^{24} \\
& + 1.3164364 \times 10^{-12} \psi^{26} - 6.8630771 \times 10^{-14} \psi^{28}) \\
+ \mu^7 (& 1.1470746 \times 10^{-11} \psi^{14} - 1.2044283 \times 10^{-11} \psi^{16} \\
& + 5.6350975 \times 10^{-12} \psi^{18} - 1.5769579 \times 10^{-12} \psi^{20} \\
& + 2.9942138 \times 10^{-13} \psi^{22} - 4.1519189 \times 10^{-14} \psi^{24} \\
& + 4.4193380 \times 10^{-15} \psi^{26} - 3.7452399 \times 10^{-16} \psi^{28})
\end{aligned}$$

$$+ 2.5990939 \times 10^{-17} \psi^{30} - 1.5103200 \times 10^{-18} \psi^{32}) \quad (1.14)$$

$$\eta_{2R} = \psi$$

$$\begin{aligned} & + \lambda (-1.0000000 \psi + 1.6666667 \times 10^{-1} \psi^3 \\ & \quad - 8.3333333 \times 10^{-3} \psi^5 + 1.9841270 \times 10^{-4} \psi^7 \\ & \quad - 2.7557319 \times 10^{-6} \psi^9 + 2.5052108 \times 10^{-8} \psi^{11} \\ & \quad - 1.6059044 \times 10^{-10} \psi^{13} + 7.6471637 \times 10^{-13} \psi^{15} \\ & \quad - 2.8114573 \times 10^{-15} \psi^{17} + 8.2206352 \times 10^{-18} \psi^{19}) \\ & + \lambda^2 (1.0000000 \psi - 3.3333334 \times 10^{-1} \psi^3 \\ & \quad + 6.6666666 \times 10^{-2} \psi^5 - 6.3492063 \times 10^{-3} \mu^7 \\ & \quad + 3.5273369 \times 10^{-4} \mu^9 - 1.2826680 \times 10^{-5} \mu^{11} \\ & \quad + 3.2888922 \times 10^{-7} \psi^{13} - 6.2645565 \times 10^{-9} \psi^{15} \\ & \quad + 9.2125831 \times 10^{-11} \psi^{17} - 1.0774951 \times 10^{-12} \psi^{19}) \\ & + \mu^2 (-8.3333333 \times 10^{-3} \psi^5 + 2.5793651 \times 10^{-3} \psi^7 \\ & \quad - 2.8384039 \times 10^{-4} \psi^9 + 1.6258818 \times 10^{-5} \psi^{11} \\ & \quad - 5.7732263 \times 10^{-7} \psi^{13} + 1.4105194 \times 10^{-8} \psi^{15} \\ & \quad - 2.5338821 \times 10^{-10} \psi^{17} + 3.5019988 \times 10^{-12} \psi^{19} \\ & \quad - 3.8482340 \times 10^{-14} \psi^{21} + 3.4476680 \times 10^{-16} \psi^{23}) \\ & + \mu^2 \lambda (2.5000000 \times 10^{-2} \psi^5 - 1.2103175 \times 10^{-2} \psi^7 \\ & \quad + 2.6482584 \times 10^{-3} \psi^9 - 3.3557299 \times 10^{-4} \psi^{11} \\ & \quad + 2.7298287 \times 10^{-5} \psi^{13} - 1.5393565 \times 10^{-6} \psi^{15} \\ & \quad + 6.3724437 \times 10^{-8} \psi^{17} - 2.0218028 \times 10^{-9} \psi^{19} \\ & \quad + 5.0808524 \times 10^{-11} \psi^{21} - 1.0377015 \times 10^{-12} \psi^{23}) \\ & + \mu^2 \lambda^2 (-5.0000000 \times 10^{-2} \psi^5 + 3.2936508 \times 10^{-2} \psi^7 \\ & \quad - 1.0893468 \times 10^{-2} \psi^9 + 2.2616041 \times 10^{-3} \psi^{11} \\ & \quad - 3.1739592 \times 10^{-4} \psi^{13} + 3.1658378 \times 10^{-5} \psi^{15} \\ & \quad - 2.3434539 \times 10^{-6} \psi^{17} + 1.3350344 \times 10^{-7} \psi^{19} \\ & \quad - 6.0302338 \times 10^{-9} \psi^{21} + 2.2127940 \times 10^{-10} \psi^{23}) \\ & + \mu^4 (2.7557319 \times 10^{-6} \psi^9 - 1.7536476 \times 10^{-6} \psi^{11} \\ & \quad + 4.6523050 \times 10^{-7} \psi^{13} - 6.9939430 \times 10^{-8} \psi^{15} \\ & \quad + 6.8638833 \times 10^{-9} \psi^{17} - 4.7919127 \times 10^{-10} \psi^{19} \\ & \quad + 2.5195697 \times 10^{-11} \psi^{21} - 1.0388199 \times 10^{-12} \psi^{23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3.4608596 \times 10^{-14} \psi^{25} - 9.5357715 \times 10^{-16} \psi^{27} \\
& + \mu^4 \lambda (-1.3778660 \times 10^{-5} \psi^9 + 1.1148188 \times 10^{-5} \psi^{11} \\
& - 4.1005162 \times 10^{-6} \psi^{13} + 9.1491890 \times 10^{-7} \psi^{15} \\
& - 1.3892600 \times 10^{-7} \psi^{17} + 1.5321439 \times 10^{-8} \psi^{19} \\
& - 1.2841751 \times 10^{-9} \psi^{21} + 8.4672528 \times 10^{-11} \psi^{23} \\
& - 4.5130488 \times 10^{-12} \psi^{25} + 1.9875430 \times 10^{-13} \psi^{27}) \\
& + \mu^6 (-1.6059044 \times 10^{-10} \psi^{13} + 1.5523742 \times 10^{-10} \psi^{15} \\
& - 6.6243556 \times 10^{-11} \psi^{17} + 1.6768994 \times 10^{-11} \psi^{19} \\
& - 2.8604911 \times 10^{-12} \psi^{21} + 3.5439207 \times 10^{-13} \psi^{23} \\
& - 3.3550193 \times 10^{-14} \psi^{25} + 2.5186157 \times 10^{-15} \psi^{27} \\
& - 1.5421659 \times 10^{-16} \psi^{29} + 7.8740738 \times 10^{-18} \psi^{31})
\end{aligned}$$

(1.15)

$$\begin{aligned}
\eta_{2I} = & \mu (-1.6666667 \times 10^{-1} \psi^3 + 2.5000000 \times 10^{-2} \psi^5 \\
& - 9.9206349 \times 10^{-4} \psi^7 + 1.9290123 \times 10^{-5} \psi^9 \\
& - 2.2546898 \times 10^{-7} \psi^{11} + 1.7664948 \times 10^{-9} \psi^{13} \\
& - 9.9413128 \times 10^{-12} \psi^{15} + 4.2171859 \times 10^{-14} \psi^{17} \\
& - 1.3975080 \times 10^{-16} \psi^{19} + 3.7188588 \times 10^{-19} \psi^{21}) \\
& + \mu \lambda (3.3333333 \times 10^{-1} \psi^3 - 1.0833333 \times 10^{-1} \psi^5 \\
& + 1.6071429 \times 10^{-2} \psi^7 - 1.2373236 \times 10^{-3} \psi^9 \\
& + 5.7745110 \times 10^{-5} \psi^{11} - 1.8090513 \times 10^{-6} \psi^{13} \\
& + 4.0720382 \times 10^{-8} \psi^{15} - 6.9094655 \times 10^{-10} \psi^{17} \\
& + 9.1587166 \times 10^{-12} \psi^{19} - 9.7487672 \times 10^{-14} \psi^{21}) \\
& + \mu \lambda^2 (-5.0000000 \times 10^{-1} \psi^3 + 2.5000000 \times 10^{-1} \psi^5 \\
& - 6.7261905 \times 10^{-2} \psi^7 + 1.0912698 \times 10^{-2} \psi^9 \\
& - 1.1224597 \times 10^{-3} \psi^{11} + 7.8562448 \times 10^{-5} \psi^{13} \\
& - 3.9686876 \times 10^{-6} \psi^{15} + 1.5137218 \times 10^{-7} \psi^{17} \\
& - 4.5129378 \times 10^{-9} \psi^{19} + 1.0806742 \times 10^{-10} \psi^{21}) \\
& + \mu^3 (1.9841270 \times 10^{-4} \psi^7 - 9.3694885 \times 10^{-5} \psi^9 \\
& + 1.7461320 \times 10^{-5} \psi^{11} - 1.7770938 \times 10^{-6} \psi^{13} \\
& + 1.1582165 \times 10^{-7} \psi^{15} - 5.2967236 \times 10^{-9} \psi^{17} \\
& + 1.8044058 \times 10^{-10} \psi^{19} - 4.7778411 \times 10^{-12} \psi^{21} \\
& + 1.0150086 \times 10^{-13} \psi^{23} - 1.7728001 \times 10^{-15} \psi^{25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^3 \lambda (-7.9365079 \times 10^{-4} \psi^7 + 5.1256614 \times 10^{-4} \psi^9 \\
& \quad - 1.4961119 \times 10^{-4} \psi^{11} + 2.6110078 \times 10^{-5} \psi^{13} \\
& \quad - 3.0372347 \times 10^{-6} \psi^{15} + 2.5185945 \times 10^{-7} \psi^{17} \\
& \quad - 1.5639223 \times 10^{-8} \psi^{19} + 7.5513372 \times 10^{-10} \psi^{21} \\
& \quad - 2.9201943 \times 10^{-11} \psi^{23} + 9.2602271 \times 10^{-13} \psi^{25}) \\
& + \mu^3 \lambda^2 (1.9841270 \times 10^{-3} \psi^7 - 1.6258818 \times 10^{-3} \psi^9 \\
& \quad + 6.4802289 \times 10^{-4} \psi^{11} - 1.6344076 \times 10^{-4} \psi^{13} \\
& \quad + 2.8640690 \times 10^{-5} \psi^{15} - 3.6699935 \times 10^{-6} \psi^{17} \\
& \quad + 3.5705704 \times 10^{-7} \psi^{19} - 2.7200201 \times 10^{-8} \psi^{21} \\
& \quad + 1.1802063 \times 10^{-9} \psi^{23} - 6.87770544 \times 10^{-11} \psi^{25}) \\
& + \mu^5 (-2.5052108 \times 10^{-8} \psi^{11} + 2.0073805 \times 10^{-8} \psi^{13} \\
& \quad - 6.9375069 \times 10^{-9} \psi^{15} + 1.3950395 \times 10^{-9} \psi^{17} \\
& \quad - 1.8632214 \times 10^{-10} \psi^{19} + 1.7894481 \times 10^{-11} \psi^{21} \\
& \quad - 1.3042530 \times 10^{-12} \psi^{23} + 7.4350175 \times 10^{-14} \psi^{25} \\
& \quad - 3.5041065 \times 10^{-15} \psi^{27} + 1.3603904 \times 10^{-16} \psi^{29}) \\
& + \mu^5 \lambda (1.5031265 \times 10^{-7} \psi^{11} - 1.4629789 \times 10^{-7} \psi^{13} \\
& \quad + 6.5205071 \times 10^{-8} \psi^{15} - 1.7797317 \times 10^{-8} \psi^{17} \\
& \quad + 3.3477275 \times 10^{-9} \psi^{19} - 4.6329297 \times 10^{-10} \psi^{21} \\
& \quad + 4.9270171 \times 10^{-11} \psi^{23} - 4.1592225 \times 10^{-12} \psi^{25} \\
& \quad + 2.8590482 \times 10^{-13} \psi^{27} - 1.6328539 \times 10^{-14} \psi^{29}) \\
& + \mu^7 (7.6471637 \times 10^{-13} \psi^{15} - 8.6592884 \times 10^{-13} \psi^{17} \\
& \quad + 4.4021502 \times 10^{-13} \psi^{19} - 1.3471914 \times 10^{-13} \psi^{21} \\
& \quad + 2.8112108 \times 10^{-14} \psi^{23} - 4.2987418 \times 10^{-15} \psi^{25} \\
& \quad + 5.0556935 \times 10^{-16} \psi^{27} - 4.7373684 \times 10^{-17} \psi^{29} \\
& \quad + 3.6337272 \times 10^{-18} \psi^{31} - 2.3308306 \times 10^{-19} \psi^{33})
\end{aligned}$$

(1.16)

$$\begin{aligned}
\eta_{gR} = & \mu^2 (-8.3333333 \times 10^{-3} \psi^5 + 2.1825397 \times 10^{-3} \psi^7 \\
& - 1.5707622 \times 10^{-4} \psi^9 + 6.1878708 \times 10^{-6} \psi^{11} \\
& - 1.6267811 \times 10^{-7} \psi^{13} + 3.1223370 \times 10^{-9} \psi^{15} \\
& - 4.6020744 \times 10^{-11} \psi^{17} + 5.3860780 \times 10^{-13} \psi^{19} \\
& - 5.1305572 \times 10^{-15} \psi^{21} + 4.0559892 \times 10^{-17} \psi^{23}) \\
& + \mu^2 \lambda (1.6666667 \times 10^{-2} \psi^5 - 8.5317460 \times 10^{-3} \psi^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.7857143 \times 10^{-3} \psi^9 - 1.8891795 \times 10^{-4} \psi^{11} \\
& + 1.2415889 \times 10^{-5} \psi^{13} - 5.6888704 \times 10^{-7} \psi^{15} \\
& + 1.9479744 \times 10^{-8} \psi^{17} - 5.2164844 \times 10^{-10} \psi^{19} \\
& + 1.1276950 \times 10^{-11} \psi^{21} - 2.0146036 \times 10^{-13} \psi^{23}) \\
& + \mu^2 \lambda^2 (- 2.5000000 \times 10^{-2} \psi^5 + 1.9047619 \times 10^{-2} \psi^7 \\
& - 6.7542989 \times 10^{-3} \psi^9 + 1.1241367 \times 10^{-3} \psi^{11} \\
& - 1.7503860 \times 10^{-4} \psi^{13} + 1.5298478 \times 10^{-5} \psi^{15} \\
& - 9.8104622 \times 10^{-7} \psi^{17} + 4.8453040 \times 10^{-8} \psi^{19} \\
& - 1.9095482 \times 10^{-9} \psi^{21} + 6.1672566 \times 10^{-11} \psi^{23}) \\
& + \mu^4 (2.7557319 \times 10^{-6} \psi^9 - 1.7035434 \times 10^{-6} \psi^{11} \\
& + 4.2861588 \times 10^{-7} \psi^{13} - 5.9060575 \times 10^{-8} \psi^{15} \\
& + 5.1249970 \times 10^{-9} \psi^{17} - 3.0910131 \times 10^{-10} \psi^{19} \\
& + 1.3894037 \times 10^{-11} \psi^{21} - 4.8912383 \times 10^{-13} \psi^{23} \\
& + 1.3978792 \times 10^{-14} \psi^{25} - 3.3306728 \times 10^{-16} \psi^{27}) \\
& + \mu^4 \lambda (- 1.1022928 \times 10^{-5} \psi^9 + 9.1690717 \times 10^{-6} \psi^{11} \\
& - 3.4196128 \times 10^{-6} \psi^{13} + 7.5367234 \times 10^{-7} \psi^{15} \\
& - 1.0953017 \times 10^{-7} \psi^{17} + 1.1228422 \times 10^{-8} \psi^{19} \\
& - 8.5621218 \times 10^{-10} \psi^{21} + 5.0669009 \times 10^{-11} \psi^{23} \\
& - 2.4064868 \times 10^{-12} \psi^{25} + 9.4200310 \times 10^{-14} \psi^{27}) \\
& + \mu^6 (- 1.6059044 \times 10^{-10} \psi^{13} + 1.5370799 \times 10^{-10} \psi^{15} \\
& - 6.4573550 \times 10^{-11} \psi^{17} + 1.5964359 \times 10^{-11} \psi^{19} \\
& - 2.6323393 \times 10^{-12} \psi^{21} + 3.1148361 \times 10^{-13} \psi^{23} \\
& - 2.7816152 \times 10^{-14} \psi^{25} + 1.9472391 \times 10^{-15} \psi^{27} \\
& - 1.1011513 \times 10^{-16} \psi^{29} + 5.1540434 \times 10^{-18} \psi^{31}) \\
& \quad \quad \quad (1.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathcal{G}I} = & \mu (- 1.6666667 \times 10^{-1} \psi^3 + 8.3333333 \times 10^{-3} \psi^5 \\
& - 1.9841270 \times 10^{-4} \psi^7 + 2.7557319 \times 10^{-6} \psi^9 \\
& - 2.5052108 \times 10^{-8} \psi^{11} + 1.6059044 \times 10^{-10} \psi^{13} \\
& - 7.6471637 \times 10^{-13} \psi^{15} + 2.8114573 \times 10^{-15} \psi^{17} \\
& - 8.2206352 \times 10^{-18} \psi^{19} + 1.9572941 \times 10^{-20} \psi^{21}) \\
& + \mu \lambda (1.6666667 \times 10^{-1} \psi^3 - 5.8333333 \times 10^{-2} \psi^5 \\
& + 6.1507936 \times 10^{-3} \psi^7 - 3.4997795 \times 10^{-4} \psi^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.2801627 \times 10^{-5} \psi'' - 3.2872863 \times 10^{-7} \psi^{(3)} \\
& + 6.2637918 \times 10^{-9} \psi^{(5)} - 9.2123020 \times 10^{-11} \psi^{(7)} \\
& + 1.0774869 \times 10^{-12} \psi^{(9)} - 1.0261839 \times 10^{-14} \psi^{(11)}) \\
+ \mu \lambda^2 & (-1.6666667 \times 10^{-1} \psi^{(3)} + 1.0833333 \times 10^{-1} \psi^{(5)} \\
& - 2.9960317 \times 10^{-2} \psi^{(7)} + 4.1694224 \times 10^{-3} \psi^{(9)} \\
& - 2.9221976 \times 10^{-4} \psi^{(11)} + 2.1007317 \times 10^{-5} \psi^{(13)} \\
& - 9.0813969 \times 10^{-7} \psi^{(15)} + 3.0163880 \times 10^{-8} \psi^{(17)} \\
& - 7.9513314 \times 10^{-10} \psi^{(19)} + 1.7051395 \times 10^{-11} \psi^{(21)}) \\
+ \mu^3 & (1.9841270 \times 10^{-4} \psi^{(7)} - 8.8183422 \times 10^{-5} \psi^{(9)} \\
& + 1.4505171 \times 10^{-5} \psi^{(11)} - 1.2002529 \times 10^{-6} \psi^{(13)} \\
& + 6.2092675 \times 10^{-8} \psi^{(15)} - 2.2679351 \times 10^{-9} \psi^{(17)} \\
& + 6.2848853 \times 10^{-11} \psi^{(19)} - 1.3833223 \times 10^{-12} \psi^{(21)} \\
& + 2.4944249 \times 10^{-14} \psi^{(23)} - 3.7676640 \times 10^{-16} \psi^{(25)}) \\
+ \mu^3 \lambda & (-5.9523809 \times 10^{-4} \psi^{(7)} + 3.9958113 \times 10^{-4} \psi^{(9)} \\
& - 1.1716871 \times 10^{-4} \psi^{(11)} + 1.9390814 \times 10^{-5} \psi^{(13)} \\
& - 2.0228300 \times 10^{-6} \psi^{(15)} + 1.4588871 \times 10^{-7} \psi^{(17)} \\
& - 7.7855128 \times 10^{-9} \psi^{(19)} + 3.2281162 \times 10^{-10} \psi^{(21)} \\
& - 1.0776439 \times 10^{-11} \psi^{(23)} + 2.9746207 \times 10^{-13} \psi^{(25)}) \\
+ \mu^3 \lambda^2 & (1.1904762 \times 10^{-3} \psi^{(7)} - 1.0692240 \times 10^{-3} \psi^{(9)} \\
& + 3.7149290 \times 10^{-4} \psi^{(11)} - 1.1669609 \times 10^{-4} \psi^{(13)} \\
& + 1.9918145 \times 10^{-5} \psi^{(15)} - 2.3914157 \times 10^{-6} \psi^{(17)} \\
& + 2.1239689 \times 10^{-7} \psi^{(19)} - 1.4552884 \times 10^{-8} \psi^{(21)} \\
& + 7.9553421 \times 10^{-10} \psi^{(23)} - 3.5635101 \times 10^{-11} \psi^{(25)}) \\
+ \mu^5 & (-2.5052108 \times 10^{-8} \psi^{(11)} + 1.9752624 \times 10^{-8} \psi^{(13)} \\
& - 6.6438559 \times 10^{-9} \psi^{(15)} + 1.2800621 \times 10^{-9} \psi^{(17)} \\
& - 1.6066859 \times 10^{-10} \psi^{(19)} + 1.4216112 \times 10^{-11} \psi^{(21)} \\
& - 9.3897306 \times 10^{-13} \psi^{(23)} + 4.8366524 \times 10^{-14} \psi^{(25)} \\
& - 2.0100632 \times 10^{-15} \psi^{(27)} + 6.9220086 \times 10^{-17} \psi^{(29)}) \\
+ \mu^5 \lambda & (1.2526054 \times 10^{-7} \psi^{(11)} - 1.2445759 \times 10^{-7} \psi^{(13)} \\
& + 5.6270890 \times 10^{-8} \psi^{(15)} - 1.5380830 \times 10^{-8} \psi^{(17)} \\
& + 2.8477853 \times 10^{-9} \psi^{(19)} - 3.8072763 \times 10^{-10} \psi^{(21)} \\
& + 3.8431877 \times 10^{-11} \psi^{(23)} - 3.0341697 \times 10^{-12} \psi^{(25)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.9284860 \times 10^{-13} \psi^{27} - 1.0106962 \times 10^{-14} \psi^{29}) \\
& + \mu^7 (7.6471637 \times 10^{-13} \psi^{15} - 8.6030592 \times 10^{-13} \psi^{17} \\
& + 4.3309595 \times 10^{-13} \psi^{19} - 1.3066351 \times 10^{-12} \psi^{21} \\
& + 2.6724406 \times 10^{-14} \psi^{23} - 3.9772947 \times 10^{-15} \psi^{25} \\
& + 4.5164630 \times 10^{-16} \psi^{27} - 4.0522026 \times 10^{-17} \psi^{29} \\
& + 2.9518057 \times 10^{-18} \psi^{31} - 1.7847053 \times 10^{-19} \psi^{33})
\end{aligned} \tag{1.18}$$

上に述べた解は μ について $\ell=3$ まで、 λ については $m=2$ までに限っている点で近似解であるから、その精度を検討するため中村の厳密解⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾と比較したところ、だいたい $\mu=10$ 、 $\lambda=0.1$ 程度までは十分よい近似であり、 λ の値が 0.2 になると、数%の誤差を生じてくる。

なお λ の大きい値に対しては、さらに m の高次の項を求めたもの⁽¹⁶⁾を用いればよいが、以下に述べるベローズの場合は λ の値が小さいので、ここで述べた解を採用する。

1.2 内力および変位

各内力および変位成分と φ および x_φ との関係は次のようになる。

1.2.1 せん断力 Q

$$Q = \frac{Eh^2}{m\gamma_c} \left(\frac{-x_\varphi \sin \varphi + A \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \right) \tag{1.19}$$

1.2.2 張力

i) 子午線方向張力 N_φ

$$N_\varphi = \frac{Eh^2}{m\gamma_c} \left\{ \frac{x_\varphi \cos \varphi + A \sin \varphi + P(2 + \lambda \sin \varphi)}{1 + \lambda \sin \varphi} \right\} \tag{1.20}$$

ii) 周方向張力 N_θ

$$N_\theta = \frac{Eh^2}{m\gamma_c} \left(\frac{dx_\varphi}{d\varphi} + \lambda P \right) \tag{1.21}$$

1.2.3 曲げモーメント

i) 子午線方向曲げモーメント M_φ

$$M_\varphi = -\frac{D}{\gamma_c} \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} + \nu \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \varphi \right) \tag{1.22}$$

ここに

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2) = Eh^3/m^2$$

ii) 周方向曲げモーメント M_θ

$$M_\theta = -\frac{D}{r_i} \left(\nu \frac{d\vartheta}{d\varphi} + \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \vartheta \right) \quad (1.23)$$

1.2.4 変位

i) 半径方向変位 u

$$u = \frac{\hbar}{m} \left[\left(\frac{1}{\lambda} + \sin \varphi \right) \frac{d\chi_\theta}{d\varphi} - \nu \chi_\theta \cos \varphi - \nu A \sin \varphi \right. \\ \left. + P \{ 1 - 2\nu + (1 - \nu)\lambda \sin \varphi \} \right] \quad (1.24)$$

ii) 軸方向変位 w

$$\frac{dw}{d\varphi} = r_i \vartheta \cos \varphi \quad (1.25)$$

第2章 C形ベローズ

本章では第1章で述べた解を用いて、図1(a)に示すC形ベローズの問題を解析する。前にも述べたようにC形ベローズの弾性特性に関する研究はいろいろある。R. A. Clark⁽²⁾はかくの基礎方程式を漸近積分の方法で解き、これをパラメータ μ の値が大きなベローズに適用している。また C. E. Turner & H. Ford⁽³⁾、P. J. Palmer⁽⁴⁾のものは μ の小さいものを対象としているが、エネルギー解という点で近似的なものであり、より厳密なかく理論によって検討されなければならない。実際に用いられているベローズは μ の値が比較的小さいものが多いので、ここでは μ の比較的小さい場合に対して第1章で述べた解を用いて問題を解析し、従来の研究結果と比較する。

2.1 解法

図2.1に示すような断面をもち軸荷重 P を受けているベローズを考える。ベローズの端部の近くを除く他の部分の応力と変形の状態は、軸方向に周期的であると考えられるので⁽¹⁷⁾、図2.1のACBの部分について考えれば十分である。さらにACBの部分にACおよびBCに分け、おのおのかくIおよびかくIIとすると、中村⁽¹⁸⁾の論文に示されているように、かくIIについては γ_m を負と考えると、数式上の取扱いは二つのかくに対し全く同様になる。二つのかくの

諸記号に添字(I)および(II)をつけると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i^{(I)} &= \gamma_i^{(II)} \equiv \gamma_i \\ \gamma_m^{(I)} &= -\gamma_m^{(II)} \equiv \gamma_m (= \gamma_c) \\ \lambda^{(I)} &= -\lambda^{(II)} \equiv \lambda (= \lambda_2) \\ \mu^{(I)} &= -\mu^{(II)} \equiv \mu (= \mu_1) \\ A^{(I)} &= -A^{(II)} \equiv A \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし $\lambda_2 = \gamma_i / \gamma_m = \lambda$,

$\mu_1 = m \gamma_i^2 / \gamma_m h = \mu$

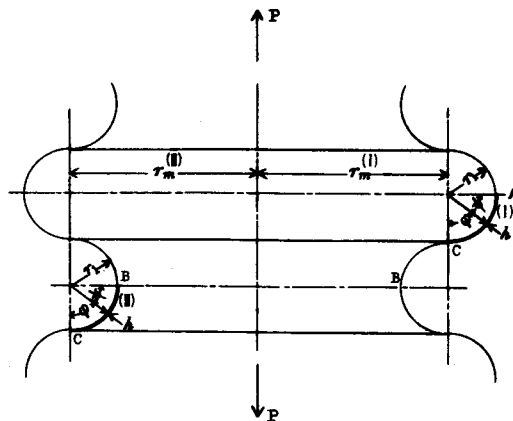


図 2.1 C形ベローズ

であるから、C形ベローズの場合は λ_2 と λ および μ_1 と μ とを区別しない。

かく (I) および (II) に対し、 $\varphi = \pi/2$ すなわち $\psi = 0$ (図21の点A,B) において、対称性により $\varrho = 0$ および $Q = 0$ すなわち $\chi = \chi_\varphi = 0$ 。

また各 η 関数の性質から、これらの点においては

$$\eta_{1R} = 1, \quad \eta_{1I} = \eta_{2R} = \eta_{2I} = \eta_{\varphi R} = \eta_{\varphi I} = 0$$

したがって式(1.4)より

$$C_1 = C_2 = 0$$

ゆえに式(1.4)は

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} + C_4^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} + A^{(I)} \eta_{\varphi I}^{(I)} \\ \chi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} - C_4^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} - A^{(I)} \eta_{\varphi R}^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} + C_4^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} + A^{(II)} \eta_{\varphi I}^{(II)} \\ \chi^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} - C_4^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} - A^{(II)} \eta_{\varphi R}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

また式(1.15) ~ (1.18) において $\lambda = 0$ とおくと、それらの式は μ だけの関数となるから、式(2.1)を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \eta_{2R}^{(I)} &= \eta_{2R}^{(II)} \equiv \eta_{2R}, & \eta_{2I}^{(I)} &= -\eta_{2I}^{(II)} \equiv \eta_{2I} \\ \eta_{\varphi R}^{(I)} &= \eta_{\varphi R}^{(II)} \equiv \eta_{\varphi R}, & \eta_{\varphi I}^{(I)} &= -\eta_{\varphi I}^{(II)} \equiv \eta_{\varphi I} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

したがって式(2.2)、(2.3)は

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2R} + C_4^{(I)} \eta_{2I} + A \eta_{\varphi I} \\ \chi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2I} - C_4^{(I)} \eta_{2R} - A \eta_{\varphi R} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2R} - C_4^{(II)} \eta_{2I} + A \eta_{\varphi I} \\ \chi^{(II)} &= -C_3^{(II)} \eta_{2I} - C_4^{(II)} \eta_{2R} + A \eta_{\varphi R} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

定数 $C_3^{(I)}$, $C_4^{(I)}$, $C_3^{(II)}$, $C_4^{(II)}$ は図21の点Cすなわち $\varphi = 0$ ($\psi = \pi/2$) におけるかくIとかくIIの接続条件を用いることによつて決める。接続条件は次の4個である。

$$\left. \begin{aligned} \varrho^{(I)} &= \varrho^{(II)}, & \mu^{(I)} &= -\mu^{(II)} \\ M_\varphi^{(I)} &= -M_\varphi^{(II)}, & N_\varphi^{(I)} &= N_\varphi^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

式(1.20)、(1.22)、(1.24)を用いると、式(2.7)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= \varphi^{(II)}, & d\chi^{(I)}/d\varphi &= d\chi^{(II)}/d\varphi \\ \chi^{(I)} &= -\chi^{(II)}, & d\varphi^{(I)}/d\varphi &= -d\varphi^{(II)}/d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

式(2.2), (2.3)を式(2.8)に代入すると, $C_3^{(I)}$, $C_4^{(I)}$, $C_3^{(II)}$, $C_4^{(II)}$ に関する4元連立方程式が得られ, これを解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3^{(I)}}{A} &= \frac{\eta'_{gR0} \eta'_{2I0} - \eta'_{gI0} \eta'_{2R0}}{\eta'^2_{2R0} + \eta'^2_{2I0}} = \frac{C_3^{(II)}}{A} \\ \frac{C_4^{(I)}}{A} &= -\frac{\eta'_{gI0} \eta'_{2I0} + \eta'_{gR0} \eta'_{2R0}}{\eta'^2_{2R0} + \eta'^2_{2I0}} = -\frac{C_4^{(II)}}{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

ここで ' は φ に関する微分を示し, η'_{2R0} , η'_{2I0} , η'_{gR0} , η'_{gI0} はそれぞれ η'_{2R} , η'_{2I} , η'_{gR} , η'_{gI} の $\varphi=0$ における値であり, 式(1.15)~(1.18)を φ で微分し, $\varphi=0$ ($\psi=\pi/2$) とおくことにより得られる。

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{2R0} &= -1 + 6.2353 \times 10^{-2} \mu^2 - 6.9165 \times 10^{-5} \mu^4 + 1.1276 \times 10^{-8} \mu^6 \\ \eta'_{2I0} &= 5.7080 \times 10^{-1} \mu - 2.8158 \times 10^{-3} \mu^3 + 1.0664 \times 10^{-6} \mu^5 - 8.6831 \times 10^{-11} \mu^7 \\ \eta'_{gR0} &= 7.0796 \times 10^{-2} \mu^2 - 7.1612 \times 10^{-5} \mu^4 + 1.1463 \times 10^{-8} \mu^6 \\ \eta'_{gI0} &= \mu - 2.9876 \times 10^{-3} \mu^3 + 1.0913 \times 10^{-6} \mu^5 - 8.7906 \times 10^{-11} \mu^7 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

この η 関数の中で $\lambda=0$ としたのは, 多くの実用上のベローズにおいて λ は小さい値であり, また R. A. Clark⁽²⁾, C. E. Turner & H. Ford⁽³⁾, P. J. Palmer⁽⁴⁾ のいずれの研究においても $\lambda=0$ としているからである。 λ が小さい場合には, $\lambda=0$ としてもそれほど影響がないものとする。と予想される。

さて式(2.9)に式(2.10)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3^{(I)}}{A} &= \frac{C_3^{(II)}}{A} = \frac{\mu(1 - 24930 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.6318 \times 10^{-5} \mu^4)}{1 + 20111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-8} \mu^4} \\ \frac{C_4^{(I)}}{A} &= -\frac{C_4^{(II)}}{A} = \frac{-\mu^2(5 \times 10^{-1} - 3.5200 \times 10^{-5} \mu^2 + 7.3993 \times 10^{-7} \mu^4)}{1 + 20111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-8} \mu^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

2.2 応 力

円周方向(θ 方向)の膜応力を $\sigma_{\theta\theta}$ (引張りをもととする)とすれば, 式(1.21)より, $P=0$ (内圧零)として

$$\sigma_{t\theta} = \frac{N_\theta}{h} = \frac{Eh}{m\gamma_1} \frac{d\chi}{d\varphi} = -\frac{Eh}{m\gamma_1} \frac{d\chi}{d\psi} \quad (2.12)$$

式(2.2)₂, (2.3)₂において, 式(2.9)を考慮すれば

$$\frac{d\chi^{(I)}}{d\varphi} = -\frac{d\chi^{(II)}}{d\psi} \quad (2.13)$$

したがって

$$\sigma_{t\theta}^{(I)} = -\sigma_{t\theta}^{(II)} = \frac{Eh}{m\gamma_1} \left(C_3^{(I)} \frac{d\eta_{2I}}{d\varphi} - C_4^{(II)} \frac{d\eta_{2R}}{d\varphi} - A \frac{d\eta_{\varphi R}}{d\varphi} \right) \quad (2.14)$$

式(1.2)において $P=0$, $\varphi_0=0$, $V_0=V/2\pi\gamma_m$ とおくと

$$A = \frac{m\gamma_m}{Eh^2} A = \frac{m\gamma_m}{Eh^2} \frac{P}{2\pi\gamma_m} = \frac{mP}{2\pi Eh^2} \quad (2.15)$$

ゆえに式(2.14)は

$$\begin{aligned} \sigma_{t\theta}^{(I)} &= \frac{P}{2\pi\gamma_1 h} \left(\frac{C_3^{(I)}}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\varphi} - \frac{C_4}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\varphi} - \frac{d\eta_{\varphi R}}{d\varphi} \right) \\ &= -\sigma_{B0} \frac{m}{6\mu} \left(\frac{C_3^{(I)}}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\psi} - \frac{C_4^{(II)}}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\varphi R}}{d\psi} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし $\sigma_{B0} = 3\gamma_1 P / \pi\gamma_m h^2$, $\mu = m\gamma_1^2 / \gamma_m h$ で σ_{B0} は $\lambda \rightarrow 0$ の場合に $\varphi = \pi/2$ の点に生じる曲げ応力である。

次に子午線方向(φ 方向)の曲げ応力を $\sigma_{b\varphi}$ (とつ側圧縮を正とする)とすれば, 式(1.22)より

$$\sigma_{b\varphi} = \frac{6D}{h^2} M_\varphi = -\frac{6D}{\gamma_1 h^2} \frac{d\varphi}{d\varphi} \quad (2.17)$$

式(1.22)において第2項は第1項に比べ微小であるから, これを省略する。式(2.2)₁, (2.3)₁において, 式(2.9)を考えると

$$\frac{d\varphi^{(I)}}{d\varphi} = \frac{d\varphi^{(II)}}{d\psi} \quad (2.18)$$

したがって

$$\sigma_{b\varphi}^{(I)} = \sigma_{b\varphi}^{(II)} = -\frac{6D}{\gamma_1 h^2} \left(C_3^{(I)} \frac{d\eta_{2R}}{d\varphi} + C_4^{(II)} \frac{d\eta_{2I}}{d\varphi} + A \frac{d\eta_{\varphi I}}{d\varphi} \right) \quad (2.19)$$

ただし

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{m^2}$$

ゆえに式(2.19)は

$$\sigma_{b\varphi}^{(I)} = \sigma_{b\varphi}^{(II)} = \frac{\sigma_{B0}}{\mu} \left(\frac{C_3^{(I)}}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\psi} + \frac{C_4^{(II)}}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi I}}{d\psi} \right) \quad (2.20)$$

φ 方向の膜応力は非常に小さく問題とならない。また θ 方向の曲げ応力 $\sigma_{b\theta}$

は式(1.22) および(1.23) から明らかなように、 $\varphi = \pi/2$ の位置では $\sigma_{b\varphi}$ に等しく、またこの位置から多少ずれたところでも、計算の結果この関係はほぼ成り立つので、ここでは $\sigma_{b\theta}$ の計算結果は示さない。

式(2.16) の $\sigma_{b\theta}$ と(2.20) の $\sigma_{b\varphi}$ はいずれも φ の関数であるから、これらの最大値 $\sigma_{\theta m}$ と $\sigma_{\varphi m}$ の値を求めるには、これらが生じる位置を求めなければならない。しかし μ の値が小さい範囲では、 $\sigma_{\theta m}$ と $\sigma_{\varphi m}$ は $\varphi = \pi/2$ において生じることが知られているから⁽²⁾⁽³⁾、式(2.16) および(2.20) において $\varphi = \pi/2$ とすれば次式が得られる。

ただし $\nu = 0.3$ とする。

$$-\frac{\sigma_{\theta m}}{\sigma_{B0}} = -\frac{m}{6\mu} \frac{C_4^{(I)}}{A} = \frac{\mu(27538 \times 10^{-1} - 1.9387 \times 10^{-5} \mu^2 + 4.0752 \times 10^{-7} \mu^4)}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.21)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi m}}{\sigma_{B0}} = \frac{1}{\mu} \frac{C_3^{(I)}}{A} = \frac{1 - 2.4930 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.6318 \times 10^{-5} \mu^4}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.22)$$

これらの結果を図2.2に破線で示す。 μ の値が大きい範囲では、式(2.16)、(2.20)を用いて $\sigma_{\theta m}$ 、 $\sigma_{\varphi m}$ の生じる位置を求め、それから $\sigma_{\theta m}$ 、 $\sigma_{\varphi m}$ の値を求めなければならない。 $\sigma_{\varphi m}$ に対しては $\mu = 2, 4, 6, 10, 20$

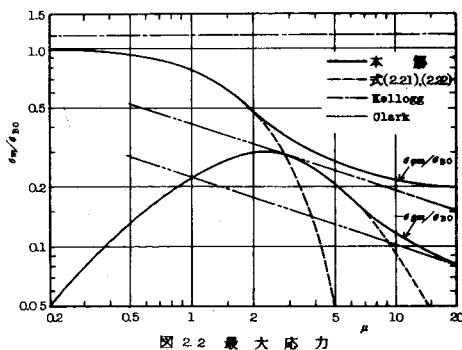


図 2.2 最大応力

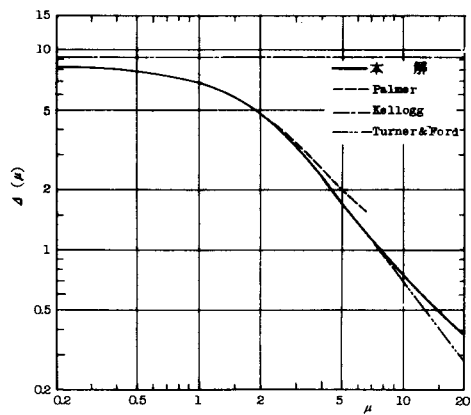


図 2.3 伸 縮 量

σ_{2m} に対しては $\mu = 6, 10, 20$ の各場合について計算を行ない、その結果を図 2.2 に実線で示す。図 2.2 を見ると式 (2.21) は $\mu \leq 7$ 、式 (2.22) は $\mu \leq 2$ に対して用いてよいことがわかる。

2.3 軸方向の伸縮量

次にベローズの軸方向の伸縮量を求める。ベローズの 1 ピッチ当りの伸縮量を δ とすれば、式 (1.25) から

$$\frac{\delta}{4} = \gamma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \cos \varphi d\varphi \quad (2.23)$$

式 (2.5) を代入すると

$$\frac{\delta}{4} = \gamma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi (C_3^{(x)} \eta_{2R} + C_4^{(x)} \eta_{2I} + A \eta_{\varphi I}) d\psi \quad (2.24)$$

式 (2.24) の右辺を項別に積分する。 η_{2R} , η_{2I} , $\eta_{\varphi I}$ に対しては式 (1.15), (1.16), (1.18) において $\lambda = 0$ とした式を用い、また $\sin \psi$ はべき関数に展開して積分する。

$$\begin{aligned} \int \eta_{2R} \sin \psi d\psi &= -\psi \cos \psi + \sin \psi \\ &+ \mu^2 (-1.1904762 \times 10^{-3} \psi^7 + 4.4091711 \times 10^{-4} \psi^9 \\ &- 7.1198092 \times 10^{-5} \psi^{11} + 6.6702844 \times 10^{-6} \psi^{13} \\ &- 4.1248036 \times 10^{-7} \psi^{15} + 1.8202955 \times 10^{-8} \psi^{17} \\ &- 6.0470403 \times 10^{-10} \psi^{19} + 1.5721958 \times 10^{-11} \psi^{21} \\ &- 3.2948734 \times 10^{-13} \psi^{23} + 5.1169109 \times 10^{-15} \psi^{25}) \\ &+ \mu^4 (2.5052108 \times 10^{-7} \psi^{11} - 1.7022586 \times 10^{-7} \psi^{13} \\ &+ 5.2009962 \times 10^{-8} \psi^{15} - 9.5669617 \times 10^{-9} \psi^{17} \\ &+ 1.1975219 \times 10^{-9} \psi^{19} - 1.0967667 \times 10^{-10} \psi^{21} \\ &+ 7.7157927 \times 10^{-12} \psi^{23} - 4.3191672 \times 10^{-13} \psi^{25} \\ &+ 1.9760379 \times 10^{-14} \psi^{27} - 7.5454223 \times 10^{-16} \psi^{29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \eta_{2I} \sin \psi d\psi &= \mu (-3.3333333 \times 10^{-2} \psi^5 + 7.5996825 \times 10^{-3} \psi^7 \\ &- 7.2751323 \times 10^{-4} \psi^9 + 3.8730560 \times 10^{-5} \psi^{11} \\ &- 1.3174840 \times 10^{-6} \psi^{13} + 3.1333489 \times 10^{-8} \psi^{15} \\ &- 5.5279997 \times 10^{-10} \psi^{17} + 7.5426137 \times 10^{-12} \psi^{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8.2095256 \times 10^{-14} \psi^{21} + 7.3010657 \times 10^{-16} \psi^{23}) \\
& + \mu^3 (2.2045855 \times 10^{-5} \psi^9 - 1.1523970 \times 10^{-5} \psi^{11} \\
& \quad + 2.6717428 \times 10^{-6} \psi^{13} - 3.6716480 \times 10^{-7} \psi^{15} \\
& \quad + 3.3920704 \times 10^{-8} \psi^{17} - 2.2703770 \times 10^{-9} \psi^{19} \\
& \quad + 1.1578591 \times 10^{-10} \psi^{21} - 4.6661285 \times 10^{-12} \psi^{23} \\
& \quad + 1.5275945 \times 10^{-13} \psi^{25} - 4.1519846 \times 10^{-15} \psi^{27}) \\
& + \mu^5 (- 1.9270853 \times 10^{-9} \psi^{13} + 1.6166104 \times 10^{-9} \psi^{15} \\
& \quad - 6.1717107 \times 10^{-10} \psi^{17} + 1.4334437 \times 10^{-10} \psi^{19} \\
& \quad - 2.2890153 \times 10^{-11} \psi^{21} + 2.6959102 \times 10^{-12} \psi^{23} \\
& \quad - 2.4543077 \times 10^{-13} \psi^{25} + 1.7870025 \times 10^{-14} \psi^{27} \\
& \quad - 1.0680566 \times 10^{-15} \psi^{29} + 5.3486564 \times 10^{-17} \psi^{31})
\end{aligned}$$

$$\int \eta_{2I} \sin \psi d\psi = \mu \left(\frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin 2\psi + \psi \cos \psi - \sin \psi \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \mu^3 (2.2045855 \times 10^{-5} \psi^9 - 1.1022928 \times 10^{-5} \psi^{11} \\
& \quad + 2.3735267 \times 10^{-6} \psi^{13} - 2.9280072 \times 10^{-7} \psi^{15} \\
& \quad + 2.3591455 \times 10^{-8} \psi^{17} - 1.3549901 \times 10^{-9} \psi^{19} \\
& \quad + 5.8982658 \times 10^{-11} \psi^{21} - 2.0331669 \times 10^{-12} \psi^{23} \\
& \quad + 5.731210 \times 10^{-14} \psi^{25} - 1.3533816 \times 10^{-15} \psi^{27}) \\
& + \mu^5 (- 1.9270853 \times 10^{-9} \psi^{13} + 1.5951984 \times 10^{-9} \psi^{15} \\
& \quad - 5.9674867 \times 10^{-10} \psi^{17} + 1.3457617 \times 10^{-10} \psi^{19} \\
& \quad - 2.0636474 \times 10^{-11} \psi^{21} + 2.3058557 \times 10^{-12} \psi^{23} \\
& \quad - 1.9680072 \times 10^{-13} \psi^{25} + 1.3292795 \times 10^{-14} \psi^{27} \\
& \quad - 7.3077562 \times 10^{-16} \psi^{29} + 3.3451637 \times 10^{-17} \psi^{31})
\end{aligned}$$

(2.25)

したがって

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R} \sin \psi d\psi &= 1.0000 - 1.0608 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.6477 \times 10^{-6} \mu^4 \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I} \sin \psi d\psi &= -1.7810 \times 10^{-1} \mu + 3.1639 \times 10^{-4} \mu^3 - 6.7681 \times 10^{-8} \mu^5 \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I} \sin \psi d\psi &= -2.1460 \times 10^{-1} \mu + 3.2967 \times 10^{-4} \mu^3 - 6.8933 \times 10^{-8} \mu^5
\end{aligned} \right\}$$

(2.26)

式(2.24)に式(2.11)および式(2.26)を代入すると、次式が得られる。

$$\delta = \frac{2P}{\pi E Y_m \lambda^3} \cdot \frac{8.5766 + 1.1667 \times 10^{-1} \mu^2 + 1.5284 \times 10^{-4} \mu^4}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.27)$$

半径 Y_m 、厚さ h 、長さ $4Y_1$ の まっすぐな円筒かくに、引張り荷重 P が作用するときの伸びを δ_0 とすれば

$$\delta_0 = \frac{2Y_1 P}{\pi E Y_m h} \quad (2.28)$$

式(2.27)および式(2.28)から次式が得られる。

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{\lambda^2} \Delta(\mu) \quad (2.29)$$

ただし

$$\Delta(\mu) = \frac{8.5766 + 1.1667 \times 10^{-1} \mu^2 + 1.5284 \times 10^{-4} \mu^4}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.30)$$

$\Delta(\mu) - \mu$ の 関係を図2.3に示す。

2.4 最大応力と伸縮量との関係

式(2.21)、(2.22) および(2.29) から P を消去すると、応力と伸縮量との関係が求まる。ベローズを伸縮継手として用いる場合等には、この形の方が便利なが多い。そこで式(2.21) および(2.29) から P を消去すると

$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\delta} = - \frac{E h}{Y_1^2} \frac{\mu (2.7538 \times 10^{-1} - 1.9387 \times 10^{-5} \mu^2 + 4.0752 \times 10^{-7} \mu^4)}{5.7177 + 7.7780 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.0189 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.31)$$

$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\delta} = \frac{E h}{Y_1^2} \frac{1 - 24.930 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.6718 \times 10^{-5} \mu^4}{5.7177 + 7.7780 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.0189 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (2.32)$$

また μ の 値が大きいところでは 図2.2 と 図2.3 を用いて、応力と伸縮量との関係を数値的に求め、これを図2.4に図示する。これを見ると、一定の伸縮量に対し最大応力が最も小さくなるのは、 $\mu = 2.2$ 附近であることがわかる。

2.5 近似公式

式(2.21)、(2.22)、(2.29)、(2.31)、(2.32) の各式において μ の 値が小さいときは、 μ の 4 次の項が省略でき、各式は次のように

なる。

$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\sigma_{\theta 0}} = \frac{\mu(2.75 \times 10^{-1} - 1.94 \times 10^{-5} \mu^2)}{1 + 2.01 \times 10^{-1} \mu^2} \quad (\mu \leq 2) \quad (2.33)$$

$$\frac{\sigma_{\phi m}}{\sigma_{\phi 0}} = \frac{1 - 2.49 \times 10^{-2} \mu^2}{1 + 2.01 \times 10^{-1} \mu^2} \quad (\mu \leq 2) \quad (2.34)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{8.58 + 1.17 \times 10^{-1} \mu^2}{1 + 2.01 \times 10^{-1} \mu^2} \quad (\mu \leq 2) \quad (2.35)$$

$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\delta} = - \frac{E h \mu}{\gamma^2} (4.82 \times 10^{-2} - 6.59 \times 10^{-4} \mu^2) \quad (\mu \leq 2) \quad (2.36)$$

$$\frac{\sigma_{\phi m}}{\delta} = \frac{E h}{\gamma^2} (1.75 \times 10^{-1} - 6.74 \times 10^{-3} \mu^2) \quad (\mu \leq 2) \quad (2.37)$$

式(2.33) ~ (2.37)において μ の4次の項を省略したことによる誤差は、 $\mu \leq 2$ のとき 1%以下である。したがって $\mu \leq 2$ の場合には、これらの近似式を用いてよい。

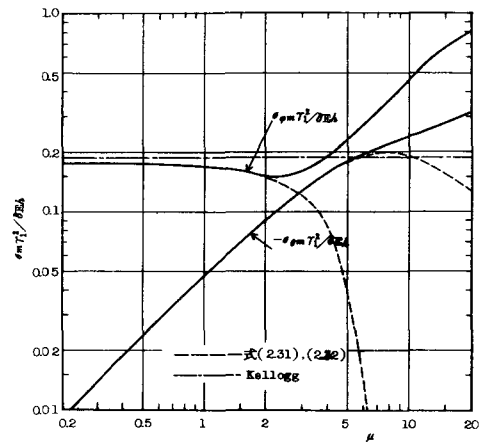


図 2.4 最大応力と伸縮量

2.6 他の研究者の結果との比較

まず最大応力については C. E. Turner & H. Ford⁽³⁾ および R. J. Palmer⁽⁴⁾ の論文中のグラフからいくつかの点の値を読みとり、本解と比較したところ、よく一致しグラフ上では区別できない。また R. A. Clark⁽²⁾ の結果を二点鎖線で示した。これを見ると本解は μ が大きくなるにつれて、Clark の漸近解に近づく様子を示している。 $\sigma_{\phi m}$ の方は $\mu = 10$ のあたりから徐々に精度が落ちていく。なお式(2.21)は $\mu \leq 7$ に対して、また式(2.22)は $\mu \leq 2$ に対して、本解の代りに用いてよいことがわかる。これより大きい μ に対しては、先に述べたように $\sigma_{\theta m}$ および $\sigma_{\phi m}$ の生じる位置をまず求め、それから $\sigma_{\theta m}$ および $\sigma_{\phi m}$ の値を決定しなければならない。

次に伸縮量についても図2.3に Turner & Ford および Palmer の計算結果を併記した。これを見ると、Palmer の解の有効範囲は、 $\mu \leq 2$ であることがわかる。Turner & Ford の計算結果は μ の逆数のパ

ラメータを用いて表わされており、 μ の大きい場合に対しては正確でないが、およそ図2.3のようになる。一方伸びに対する Clark の漸近解はないが、後述の Ω 形ベローズの伸縮量に対する漸近解と同様、直線になるものと考えられる。そうすると図2.3の Turner & Ford の線は正解に近いものとしてよいであろう。したがって式(2.29)の適用範囲は $\mu \leq \pi$ となる。 μ が π より大きくなれば、次第に直線性を失なつていきその模様は図2.2の $\sigma_{\phi m}$ の曲線に類似している。

最後にベローズを伸縮継手として用いる場合に、現在設計者がよく採用している M. W. Kellogg 社の設計式⁽¹²⁾と比較する。Kellogg の式は次に示すものである。

$$\sigma_{max} = \frac{1.5 E \epsilon \Delta}{W^{0.5} H^{1.5} N_d} + \frac{P H^2}{2 \epsilon^2} \quad (2.38)$$

$$P = \frac{8 E Y_m \epsilon^3 \Delta}{3 W^{0.5} H^{2.5} N_d} \cdot \left(\frac{H}{3} \leq W \leq H \right) \quad (2.39)$$

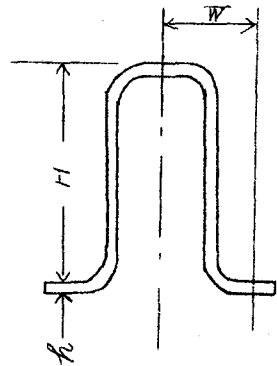


図2.5

ただし

H : 山の高さ

W : 波形の $1/2$ ピッチ

N_d : 半波形の数

Δ : 軸方向変位

σ_{max} : 最大応力

式(2.38)は、変位および内圧と最大応力との関係を示すもので、第1項は長さ $\sqrt{2} \sqrt{W^{0.5} H^{1.5}}$ の片持ちばりの自由端に集中荷重が作用した場合、固定端に発生する最大応力であり、第2項は、両端固定長さ H のばりに一様分布荷重 p が作用した場合の最大応力である。したがって肉厚 ϵ 、山の高さ H 、波形の $1/2$ ピッチ W がわかれば、どんな形状の継手にも応えるというきわめてあらわな近似式である。式(2.39)は軸力と荷重との関係を示すもので、幅 $2\pi Y_m$ 高さ ϵ 、長さ $\sqrt{(3\pi W^{0.5} H^{2.5})/16}$ の片持ちばりの自由端に集中荷重が作用した場合の自由端における変位である。

ここで本解と比較するため記号を書きなおすと、式(2.38)および(2.39)は次のようになる。

$$\frac{\sigma_m Y_m^2}{8 E \epsilon} = 0.1875 \quad (2.40)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 9.42 \quad (2.41)$$

また式(2.40)および(2.41)から δ を消去すると、最大応力と荷重との関係を表わす式として次式が得られる。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{B0}} = 1.18 \quad (2.42)$$

式(2.40)～(2.42)の結果を図2.2～2.4に一点鎖線で示した。これらを見ると、Kellogg社の式は μ に関係なく一定となり、パラメータ μ が1より小さいところでは本解と比較的よく合うが、 μ が大きくなると本解と非常に離れてくることがわかる。

2.7 結 論

本章では第1章に示した解を用いて、軸力を受けるC形ペローズの問題を取り扱った。この問題に対してはすでにClarkの漸近解および他の研究者のエネルギー解が発表されているが、本章においてこれらの解の裏付けを行なうとともに、現在広く用いられているKellogg社の式と比較検討した結果、この式は $\mu > 1$ では本解と非常に離れてくることがわかった。本章で得られた計算図表および設計公式をまとめると、次のようになる。

(1) 最大応力と荷重との関係

$$\sigma_{gm} : \mu \leq 2 \quad \text{式(2.34)}$$

$$2 < \mu \leq 10 \quad \text{図2.2}$$

$$\sigma_{gm} : \mu \leq 2 \quad \text{式(2.33)}$$

$$2 < \mu \leq 7 \quad \text{式(2.21)}$$

$$7 < \mu \quad \text{図2.2}$$

(2) 伸縮量と荷重との関係

$$\mu \leq 2 \quad \text{式(2.35)}$$

$$2 < \mu \leq 7 \quad \text{式(2.29) または 図2.3}$$

(3) 最大応力と伸縮量との関係

$$\sigma_{gm} - \delta : \mu \leq 2 \quad \text{式(2.37)}$$

$$2 < \mu \leq 7 \quad \text{図2.4}$$

$$\sigma_{\theta m} - \delta : \mu \leq 2 \quad \text{式(2.36)}$$

$$2 < \mu \leq 7 \quad \text{図2.4}$$

なお、同一の伸縮量に対し応力が最も小さくなるのは $\mu = 2.2$ 付近である。また周方向 (θ 方向) の応力は子午線方向 (φ 方向) の応力に比べ小さいので、 $\sigma_{\theta m}$ だけ考えて設計すれば十分である。

第3章 Ω 形ベローズ

本章では図1(b)に示すような Ω （オメガ）形ベローズの問題を取り扱う。 Ω 形ベローズは円環かくに細いスリットを付し、これに円筒かくを接着したものである。この Ω 形ベローズの研究には今までにR.A. Clark⁽²⁾、N.D. Dahl⁽⁵⁾らのものがある。R.A. Clark はかくの基礎方程式を漸近積分の方法で解き、これを Ω 形ベローズに適用しているが、その結果はパラメータ μ の値の大きなものにしか用いることができない。またN.D. Dahlの研究はエネルギー法によるものである。そこで本章では μ の値が比較的小さい場合に対し、第1章で述べた円環かくの解を適用し、その結果を従来の研究結果と比較する。また計算結果は計算図表および設計公式としてまとめた。

3.1 解 法

Ω 形ベローズは図3.1に示すように円環かくに細いスリットを付し、これに円筒かくを接着して作られるものであるが、ここでは取扱いを簡単にするため、円環かくと円筒かくの接着部Bにおいて角変位およびせん断力がないものとする。この仮定はClark、Dahlも採用しているが便宜的なものである。なぜならば、円筒かくの部分に完全な剛体であれば、 $\psi=0$ 、径方向変位 $u=0$ とすべきであり、また円筒かくの弾性定数が零であれば、せん断力 $Q=0$ 、曲げモーメント $M_\phi=0$ であるからである。さらに円筒かくの弾性を考慮すれば、取扱いが複雑になるので、本研究においても上の仮定を用いることにする。

円環かくACBをACおよびBCに分け、各々かくI、およびかくIIとする。かくI、IIの平均直径を $r_m^{(I)}$ 、 $r_m^{(II)}$ とし、 $r_m^{(II)}$ の符号を實と考えるのは前章と同じである。

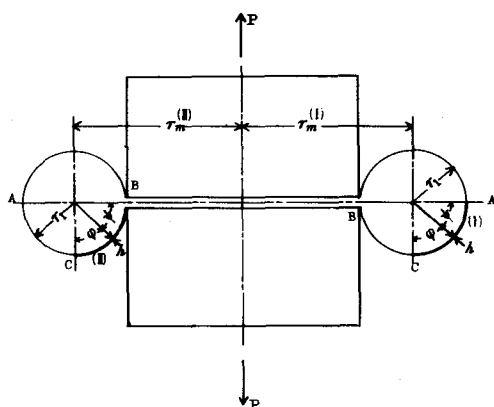


図 3.1 Ω 形ベローズ

上に述べたように $\varphi = \pi/2$ の点における条件として

$$\varphi = 0, \quad Q = 0 \quad (3.1)$$

を用いる。この条件を用いるときは、C形ベローズの場合と同様に、かくIのみならずかくIIにおいても $C_1 = C_2 = 0$ となり、計算が著しく簡単になる。なお第1章の η 関数の中で $\lambda = 0$ とするのは前章と同じである。

さてこの場合もC形ベローズと同様に、かくIIに対しては $\gamma_m < 0$ とする

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^{(I)} &= \gamma_1^{(II)} \equiv \gamma_1 \\ \gamma_m^{(I)} &= -\gamma_m^{(II)} \equiv \gamma_m (= \gamma_c) \\ \lambda^{(I)} &= -\lambda^{(II)} \equiv \lambda (= \lambda_2) \\ \mu^{(I)} &= -\mu^{(II)} \equiv \mu (= \mu_1) \\ A^{(I)} &= A^{(II)} \equiv A \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式(3.2)はAの式だけが式(2.1)と異なるのみであるから、式(2.4)はそのまま成立する。また上に述べたように、かくIおよびIIに対して $C_1 = C_2 = 0$ となる。ゆえに式(3.2)、(2.4)、(1.4)より

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2R} + C_4^{(I)} \eta_{2I} + A \eta_{\varphi I} \\ \chi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2I} - C_4^{(I)} \eta_{2R} - A \eta_{\varphi R} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2R} - C_4^{(II)} \eta_{2I} - A \eta_{\varphi I} \\ \chi^{(II)} &= -C_3^{(II)} \eta_{2I} - C_4^{(II)} \eta_{2R} - A \eta_{\varphi R} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

定数 $C_3^{(I)}$, $C_4^{(I)}$, $C_3^{(II)}$, $C_4^{(II)}$ は、図3.1の点Cすなわち $\varphi = 0$ ($\psi = \pi/2$) におけるかくIとかくIIとの接続条件を用いて決める。接続条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= -\varphi^{(II)}, & u^{(I)} &= -u^{(II)} \\ M_\varphi^{(I)} &= M_\varphi^{(II)}, & N_\varphi^{(I)} &= N_\varphi^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式(1.20) (1.22), (1.24) を用いると、式(3.5)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= -\varphi^{(II)}, & \frac{d\varphi^{(I)}}{d\varphi} &= \frac{d\varphi^{(II)}}{d\varphi} \\ \chi^{(I)} &= -\chi^{(II)}, & \frac{d\chi^{(I)}}{d\varphi} &= \frac{d\chi^{(II)}}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

式(3.3), (3.4) を式(3.6) に代入すると、 $C_3^{(I)}$, $C_4^{(I)}$, $C_3^{(II)}$, $C_4^{(II)}$ に関する4元連立方程式が得られ、これを解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3^{(I)}}{A} &= \frac{\eta_{\phi R0} \eta_{2I0} - \eta_{2R0} \eta_{\phi I0}}{\eta_{2R0} \eta_{2R0} + \eta_{2I0} \eta_{2I0}} = - \frac{C_3^{(II)}}{A} \\ \frac{C_4^{(I)}}{A} &= - \frac{\eta_{\phi R0} \eta_{2R0} + \eta_{2I0} \eta_{\phi I0}}{\eta_{2R0} \eta_{2R0} + \eta_{2I0} \eta_{2I0}} = \frac{C_4^{(II)}}{A} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

上式に式(2.10)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3^{(I)}}{A} &= - \frac{C_3^{(II)}}{A} = \frac{\mu(1 - 1.0866 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.3290 \times 10^{-6} \mu^4)}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \\ \frac{C_4^{(I)}}{A} &= - \frac{C_4^{(II)}}{A} = \frac{\mu^2(24999 \times 10^{-1} - 1.1240 \times 10^{-4} \mu^2 + 1.6147 \times 10^{-7} \mu^4)}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

3.2 応 力

円周方向の膜応力 $\sigma_{\phi\phi}$ および子午線方向の曲げ応力 $\sigma_{\theta\theta}$ を求めるには、式(2.12) および (2.17) を用いればよい。式(3.3)₂、(3.4)₂ において式(3.8)を考慮すれば

$$\frac{d\chi^{(I)}}{d\varphi} = \frac{d\chi^{(II)}}{d\varphi} \quad (3.9)$$

したがって

$$\sigma_{\theta\theta}^{(I)} = \sigma_{\theta\theta}^{(II)} = -\sigma_{\theta\theta} \frac{\eta}{6\mu} \left(\frac{C_3^{(I)}}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\varphi} - \frac{C_4^{(II)}}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\varphi} - \frac{d\eta_{\phi R}}{d\varphi} \right) \quad (3.10)$$

また式(3.3)₁、(3.4)₁ において式(3.8)を考えると

$$\frac{d\psi^{(I)}}{d\varphi} = - \frac{d\psi^{(II)}}{d\varphi} \quad (3.11)$$

したがって

$$\sigma_{\phi\phi}^{(I)} = -\sigma_{\phi\phi}^{(II)} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\mu} \left(\frac{C_3^{(I)}}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\varphi} + \frac{C_4^{(II)}}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\varphi} + \frac{d\eta_{\phi I}}{d\varphi} \right) \quad (3.12)$$

さて $\sigma_{\theta\theta}$ の最大値 $\sigma_{\theta\theta m}$ は、 μ の値のいかんにかかわらず $\varphi = 0$ の点に生じることが知られているので、^{(2),(5)} 式(3.10)において $\varphi = 0$ とおくと次のようになる。

$$- \frac{\sigma_{\theta\theta m}}{\sigma_{\theta\theta}} = \frac{\mu(1.3769 \times 10^{-1} + 8.9410 \times 10^{-4} \mu^2 + 7.1347 \times 10^{-7} \mu^4)}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (3.13)$$

また $\sigma_{\phi\phi}$ の最大値 $\sigma_{\phi\phi m}$ は、 μ の値が小さい場合には $\varphi = \pi/2$ に生じることがわかつているので、^{(2),(5)} 式(3.12)において $\varphi = \pi/2$ とおくと

$$\frac{\sigma_{\phi\phi m}}{\sigma_{\theta\theta}} = \frac{1}{\mu} \frac{C_3^{(I)}}{A} = \frac{1 - 1.0866 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.3290 \times 10^{-6} \mu^4}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (3.14)$$

式(3.13), (3.14)の結果を図3.2に示す。これを見ると式(3.14)は $\mu \leq 2.5$ に対して有効である。 $\mu > 2.5$ に対しては式(3.12)を用いて $\sigma_{\phi m}$ の生じる位置を求めた後、その点における $\sigma_{b\phi}$ として $\sigma_{\phi m}$ の値を求めなければならぬ。

数値計算は $\mu = 4$,

6, 10, 20に対して実施し、その結果を同図に示した。なお計算に際しては $\nu = 0.3$ とした。

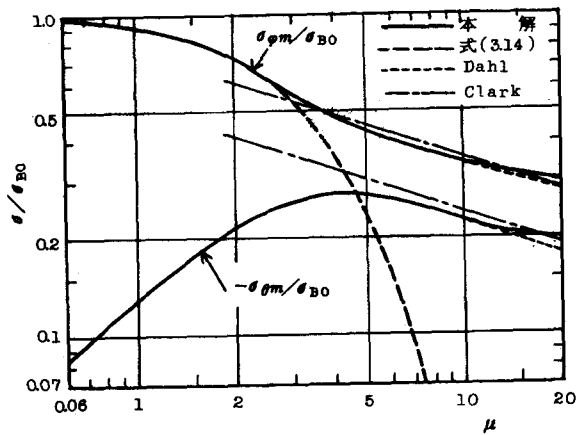


図3.2 最大応力

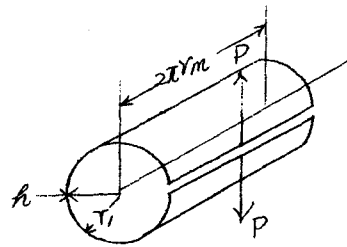


図3.3 スリット付円筒

3.3 軸方向の伸縮量

次に軸方向の伸縮量を求める。ベローズ/ピッチ当りの伸縮量を δ とすれば式(1.25)から

$$\frac{\delta}{2} = r_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \cos \varphi d\varphi \quad (3.15)$$

式(3.3)を代入すると

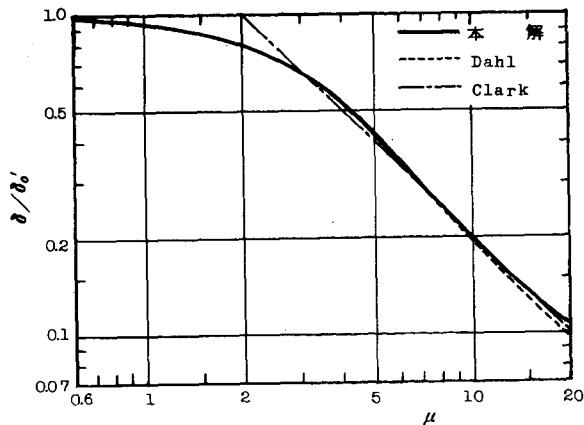


図3.4 伸縮量

$$\frac{\delta}{2} = Y_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi (C_3^{(I)} \eta_{2R} + C_4^{(I)} \eta_{2I} + A \eta_{\phi I}) d\psi \quad (3.16)$$

式(3.16)に式(3.8) および(2.26) を代入すると、次式が得られる。

$$\delta = \frac{2m^2 Y_1^3 P}{\pi E Y_m h^3} \frac{7.8540 \times 10^{-1} + 7.8273 \times 10^{-3} \mu^2 + 8.1313 \times 10^{-6} \mu^4}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (3.17)$$

図3.3のような半径 Y_1 、長さ $2\pi Y_m$ 、厚さ h のまつすぐな、スリットのある円管に荷重 P が作用するときのスリットのひらきを δ_0' とすれば

$$\delta_0' = \frac{m^2 Y_1^3 P}{2 Y_m E h^3} \quad (3.18)$$

であるから、式(3.17) は次のようになる。

$$\frac{\delta}{\delta_0'} = \frac{1.0000 + 9.9660 \times 10^{-3} \mu^2 + 1.0353 \times 10^{-5} \mu^4}{1 + 7.2467 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.9953 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (3.19)$$

式(3.19) を図示すると図3.4のようになる。

3.4 最大応力と伸縮量との関係

(形ベローズの場合と同様、式(3.13)、(3.14)および(3.19)から P を消去すると、

$$\frac{\sigma_{\theta m}^{(I)}}{\delta} = - \frac{E h}{Y_1^2} \frac{\mu (1.3769 \times 10^{-1} + 8.9410 \times 10^{-4} \mu^2 + 7.1347 \times 10^{-7} \mu^4)}{5.7177 + 5.6983 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.9196 \times 10^{-5} \mu^4} \quad (3.20)$$

$$\frac{\sigma_{\phi m}^{(I)}}{\delta} = \frac{E h}{Y_1^2} \frac{1 - 1.0866 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.3290 \times 10^{-6} \mu^4}{5.7177 + 5.6983 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.9196 \times 10^{-5} \mu^4} \quad (3.21)$$

式(3.21) は $\mu \leq 2.5$ の場合にしか用いることができない。 $\mu > 2.5$ の場合には応力と伸縮量との関係を数値的に求めなければならない。図3.5は応力と伸縮量との関係を示したものである。伸縮継手として用いる場合にはこの形に整理した方が便利である。図3.5から一定の伸縮量に対し最大応力の最も小さくなるのは $\mu = 3$ のあたりであることがわかる。

3.5 近似公式

式(3.13)、(3.14)、(3.19)、(3.20)、(3.21)の各式において $\mu \leq 2.5$ のときは、 μ の4次の項が省略でき、各式は次のようになる。

$$-\frac{\sigma_{gm}}{\sigma_{Bo}} = \frac{\mu(1.38 \times 10^{-1} + 8.94 \times 10^{-4} \mu^2)}{1 + 7.25 \times 10^{-2} \mu^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{\sigma_{gm}}{\sigma_{Bo}} = \frac{1 - 1.09 \times 10^{-2} \mu^2}{1 + 7.25 \times 10^{-2} \mu^2} \quad (3.23)$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1 + 9.97 \times 10^{-3} \mu^2}{1 + 7.25 \times 10^{-2} \mu^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{\sigma_{gm}}{\delta} = -\frac{Eh\mu}{Y_1^2} (2.41 \times 10^{-2} - 8.36 \times 10^{-5} \mu^2) \quad (3.25)$$

$$\frac{\sigma_{gm}}{\delta} = \frac{Eh}{Y_1^2} (1.75 \times 10^{-1} - 3.64 \times 10^{-3} \mu^2) \quad (3.26)$$

式(3.22) ~ (3.26)の各式の近似による誤差は1%以内である。

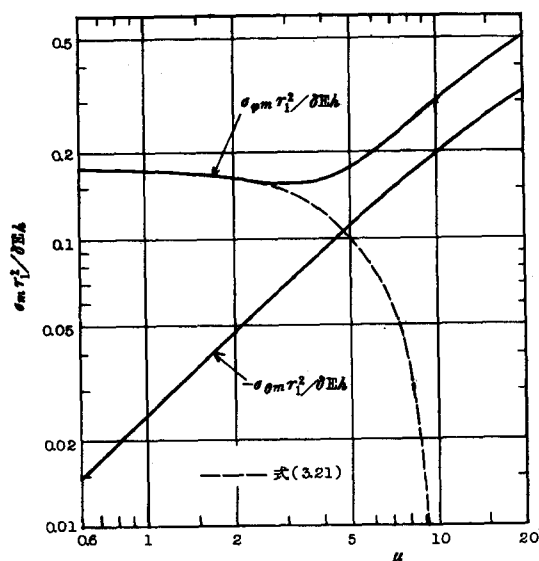


図 3.5 最大応力と伸縮量

3.6 他の研究者の結果との比較

図3.2は最大応力について本解、式(3.14)およびR. A. Clark⁽²⁾、N. D. Dahl⁽⁶⁾の結果をまとめて示したものである。これを見ると式(3.14)は $\mu \leq 2.5$ に対して有効であることがわかる。 $\mu > 2.5$ に対しては、前にも述べたように σ_{gm} の生じる位置を求め、しかる後に σ_{gm} の値を決定しなければならない。このようにして求めた解(本解)はClark, Dahlの解とほぼ一致することがわかる。

次に σ_{Bo} の最大値 σ_{gm} は μ の値のいかんにかかわらず $\varphi = 0$ の点に生じることが知られているから、本解として式(3.13)の結果を示した。これもDahlの解とよく一致している。また本解は $\mu = 10$ をこえると徐々に精度がわるくなる。

伸びについてはDahlおよびClarkの結果を図3.4に併記した。これを見ると本解は $\mu < 15$ に対し有効である。またClarkの解は $\mu > 3$ で有効であることがわかる。

3.7 結 論

本章では第1章に示した解を用いて、軸力を受けるL形ベローズの問題を取り扱い、最大応力および伸縮量を求めた。

その結果を要約すると次の通りである。

(1) 最大応力と荷重との関係

$$\sigma_{\theta m} : \mu \leq 2.5 \quad \text{式 (3.23)}$$

$$2.5 < \mu \leq 10 \quad \text{図 3.2}$$

$$\sigma_{\theta m} : \mu \leq 2.5 \quad \text{式 (3.22)}$$

$$2.5 < \mu \leq 10 \quad \text{式 (3.13)}$$

(2) 伸縮量と荷重との関係

$$\mu \leq 2.5 \quad \text{式 (3.24)}$$

$$2.5 < \mu \leq 15 \quad \text{式 (3.19) または 図 3.4}$$

(3) 最大応力と伸縮量との関係

$$\sigma_{\theta m} - \delta : \mu \leq 2.5 \quad \text{式 (3.26)}$$

$$2.5 < \mu \leq 10 \quad \text{図 3.5}$$

$$\sigma_{\theta m} - \delta \quad \mu \leq 2.5 \quad \text{式 (3.25)}$$

$$2.5 < \mu \leq 10 \quad \text{式 (3.20)}$$

また一定の伸縮量に対し発生する最大応力の最も小さなものは $\mu=3$ 付近にあることがわかった。なお応力は子午線方向 (φ 方向) に比べ周方向 (θ 方向) は小さいので、 $\sigma_{\theta m}$ だけ考えて設計すれば十分である。

第4章 U形ベローズ

—— 軸荷重を受ける場合の近似解 ——

第4章から第6章までは U形ベローズについて述べる。U形ベローズはベローズのうちでもっとも多く使用されているが、その弾性特性に関する研究としては、解析が複雑なために、今まで *N. A. Weil*⁽⁸⁾、*J. E. AHIPeeBa*⁽⁹⁾、*中村*⁽¹⁰⁾、*宮入*⁽¹¹⁾ による近似解および *Kellogg* 社の設計式があるのみである。これらの研究のうちで設計者が実際に用いることができるのは、さわめてあらひ近似解である。*F. Salzmänn*、*A. Samoiloff*、*J. E. AHIPeeBa* のものおよび *Kellogg* 社の設計式のみで、他は二、三の計算例を示したにすぎない。まず、*F. Salzmänn* は μ の小さな範囲について荷重と伸縮量との関係を求めている。*A. Samoiloff*、*A. Laupa*、*宮入* のものはエネルギー法で、*A. Samoiloff* はベローズをその縦断面と同じ形に曲けられた帯板とみなし、応力と伸縮量との関係を求める近似公式を得ている。*A. Laupa*、*宮入* のものは比較的厳密であるが、一例を示したものにすぎない。*J. E. AHIPeeBa* は円輪板部が円環かく部比べて十分大きい場合には、U形ベローズを内外周が固定された円輪板を重ねたものとみなして、応力および伸縮量を求めている。また中村らは近似的なかく理論を用いてこの問題を処理しているが、これも一例を示したにすぎず、実用的な結果を得ていない。以上のように今までの研究には厳密でしかも実用的なものがなく、設計者は正確で容易な強度計算の方法を強く望んでいる現状である。

そこで筆者は以後の章でこの U形ベローズの強さの問題をとりあげ、まず第4章と第5章で軸荷重を受ける場合を、また第6章では内圧を受ける場合を考察する。すなわち U形ベローズは円環かくと円輪板とから成るが、円環かくの部分には第1章で述べた円環かくの解法を用い、円輪板の部分には円板の対称曲が理論を適用して、応力および伸縮量をできるだけ正確に求めることを試みている。

たゞし本章では計算を簡単にするため、応力と変形の状態が円輪板の幅の中心線に関して対称であり、また円輪板の面内変位を無視するなどの仮定を設けている。この結果応力および伸縮量の値を簡単な計算図と設計公式としてまとめることができた。これは U形ベローズの設計に有用であると考えられる。現在伸縮

継手として使用されている多くのベローズにおいては、ベローズの波形の半径および円輪板部の幅が全体の平均半径に比較して小さいが、このような場合には、上述の仮定による誤差はわずかであると予想される。またこれらの仮定をはずした、より厳密な解については第5章で述べる。

4.1 円環かく部の関係式

ベローズの端部の近くを除いた他の大部分においては、応力と変形の状態は軸方向に周期的であると考えられるので⁽¹⁷⁾、図4.1のACMDBの部分について検討する。さらに前述のようにACMとBDMの応力と変形の状態は、パラメータ λ_2 および μ の値が小さい場合には、点Mに関して対称であると仮定し、ACMの部分について解析を行なう。ただしこの仮定による誤差をできるだけ小さくするため、円環かく部分については、第1章の解の関数（ η 関数）の中の μ および λ の代りに $\mu_1 (=m\gamma^2/\gamma_m h)$ および $\lambda_2 (=r/r_m)$ を用いることにする。こうすることによって、応力についてはかくI(AC) およびかくII(BD) の中間の値が得られ、伸縮量ではかくIおよびかくIIの差が消されることになり、厳密解に少しでも近い値が得られることが期待できる。なお、ここではACMの部分のみを考えるので、第2章のC形ベローズのようにかくI、IIの区別は必要でない。

さて式(1.3)の定数 $C_1 \sim C_4$ は次のようにして定める。図4.1の点A($\varphi = \pi/2$, $\psi = 0$)において問題の対称性により、 $\psi = 0$ および $Q = 0$ 、これより $\chi = \chi_\varphi = 0$ 。また η 関数の性質から、この点においては、

$\eta_{1R} = 1$, $\eta_{1I} = \eta_{2R} = \eta_{2I} = \eta_{3R} = \eta_{3I} = 0$
ゆえに $C_1 = C_2 = 0$ となり、式(1.4)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= C_3 \eta_{2R} + C_4 \eta_{2I} + A \eta_{3I} \\ \chi &= C_3 \eta_{2I} - C_4 \eta_{2R} - A \eta_{3R} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

C_3 と C_4 は円環かくと円輪板の接続条件により定める。なおその他各内力成分および各変位成分は第1章に示した通りである。

4.2 円輪板部の関係式⁽¹⁸⁾

円輪板の部分の3方向変位 u_r は次式で表わされる。

$$w_r = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2 \log r + C_4 \log r \quad (4.2)$$

これを書きかえて

$$w_r = e_1 \log \left(\frac{r}{e_2} \right) + e_3 r^2 \log \left(\frac{r}{e_4} \right) \quad (4.2')$$

ここに $e_1 \sim e_4$ は定数である。このうち e_2 は w_r の基準点のとり方で定まる。また曲げモーメント M_r とせん断力 Q_r 次式によって w_r と関係づけられる。

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) \quad (4.3)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial r} \right) \quad (4.4)$$

なお円輪板の面内変位は近似的に零であると考える。

4.3 接続条件

円環かく部と円輪板部の接続条件として次の各条件を考え

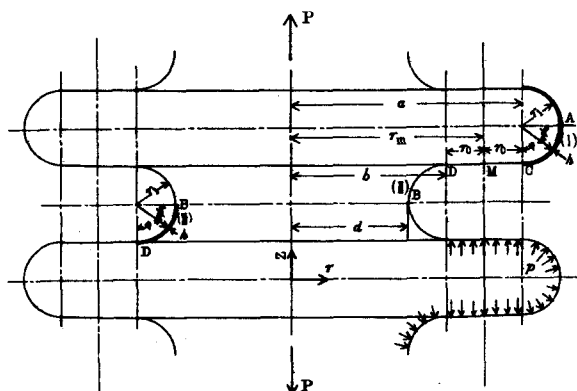


図 4.1 U形ベローズ

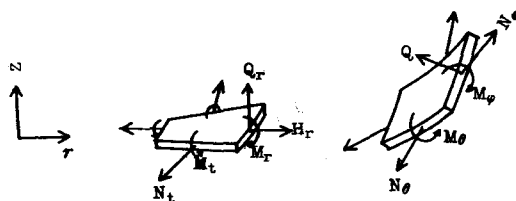


図 4.2 記号

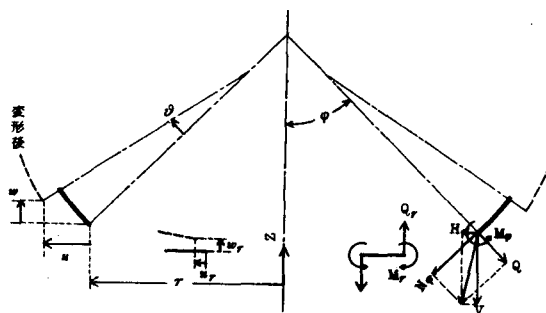


図 4.3 記号

る。すなわち点C ($\varphi=0$, $r=a$)において

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad (M\varphi)_{\varphi=0} &= (Mr)_{r=a} \\ (b) \quad (Q)_{\varphi=0} &= (Qr)_{r=a} = P/2\pi a \\ (c) \quad (\varphi)_{\varphi=0} &= (\partial w_r / \partial r)_{r=a} \\ (d) \quad (u)_{\varphi=0} & \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

また円輪板部の変形は点M ($r=r_m$)に関して対称であると考えているから

$$(e) \quad (Mr)_{r=r_m} = 0 \quad (4.6)$$

以上の5個の条件により未定定数 C_3 , C_4 , e_1 , e_3 , e_4 を定める。すなわち式(4.1), (1.19), (1.22), (1.24), (4.2'), (4.3) および (4.4) の各式を式(4.5), (4.6) に代入して、5個の未定定数の連立方程式を作り、これを解くと次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3}{A} &= \frac{\eta'_{2IO} \eta'_{\varphi RO} - \eta'_{2RO} \eta'_{\varphi IO} - \mu \alpha \eta'_{2RO}}{(\eta'_{2RO})^2 + (\eta'_{2IO})^2} \\ \frac{C_4}{A} &= - \frac{\eta'_{2RO} \eta'_{\varphi RO} + \eta'_{2IO} \eta'_{\varphi IO} + \mu \alpha \eta'_{2IO}}{(\eta'_{2RO})^2 + (\eta'_{2IO})^2} \\ e_1 &= \frac{a(1+\nu)}{2} \varphi_0 - \frac{a^2}{2Y_1} \varphi'_0 - \frac{a^2 P}{8\pi D} \\ e_3 &= - \frac{P}{8\pi D} \\ \log e_4 &= 1 + \log a + \frac{2\pi D}{P} \left\{ \frac{1}{Y_1} \varphi'_0 + (1-\nu) \frac{\varphi_0}{a} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

ここに'は φ に関する微分を示し、また $P = Y_0/r_1$, $\xi = Y_0/r_m$, $\alpha = P/(1+\xi-\nu\xi)$ 。さらに η'_{2RO} , η'_{2IO} , $\eta'_{\varphi RO}$, $\eta'_{\varphi IO}$ および φ_0 , φ'_0 はそれぞれ η'_{2R} , η'_{2I} , $\eta'_{\varphi R}$, $\eta'_{\varphi I}$ および φ , φ' の $\varphi=0$ における値で式(2.10)に示されている。式(2.10)を式(4.7), (4.7)₂ に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_3}{A} &= \frac{\mu_1 \{ 1 - 2.4570 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.6318 \times 10^{-5} \mu^4 + \alpha (1 - 6.2353 \times 10^{-2} \mu^2 + 6.9164 \times 10^{-5} \mu^4) \}}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \\ \frac{C_4}{A} &= - \frac{\mu^2 \{ 5 \times 10^{-1} - 3.5200 \times 10^{-5} \mu^2 + 7.3993 \times 10^{-7} \mu^4 + \alpha (5.7080 \times 10^{-1} - 2.8158 \times 10^{-5} \mu^2 + 1.0664 \times 10^{-6} \mu^4) \}}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

4.4 応 力

θ 方向の膜応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{B0} \frac{\mu}{6\mu} \left(\frac{C_3}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\psi} - \frac{C_4}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\theta R}}{d\psi} \right) \quad (4.9)$$

ただし

$$\sigma_{B0} = 3Y_r P / \pi r_m h^2$$

次に φ 方向の曲げ応力 $\sigma_{\varphi\varphi}$ は、式 (2.17) および (4.1) より

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{B0}}{\mu} \left(\frac{C_3}{A} \frac{d\eta_{2R}}{d\psi} + \frac{C_4}{A} \frac{d\eta_{2I}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi I}}{d\psi} \right) \quad (4.10)$$

φ 方向の膜応力は非常に小さく問題とならない。また θ 方向の曲げ応力は第2章でも述べたように $\varphi = \pi/2$ の付近ではほぼ $\sigma_{\varphi\varphi}$ に等しく、また $\sigma_{\theta\theta}$ と合成しても $\sigma_{\varphi\varphi}$ より小さいのでこれらの計算結果は示さない。

式 (4.9) の $\sigma_{\theta\theta}$ および (4.10) の $\sigma_{\varphi\varphi}$ はいずれも α, μ および ψ の関数であるから、 μ と α の

値を与えれば ψ のみの関数

となる。そこで ψ を 10° ごと

とによって電子計算機により

$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}$ の値を計算し、

σ - ψ 曲線を描くと、図上で

これらの最大値 $\sigma_{\theta m}, \sigma_{\varphi m}$ お

よびその値に対する ψ の値

を求めることができる。この

ようにして求めた $\sigma_{\theta m}, \sigma_{\varphi m}$

の値を図4.4に実線を示した。

すなわち同図においては

$\sigma_{\varphi m}/\sigma_{B0}$ および $-\sigma_{\theta m}/\sigma_{B0}$

を α をパラメータとして μ_1

に対して図示した。このとき $\nu = 0.3$ としている。

α の一定の値に対して μ_1 がある値より小さい場合には、 $\sigma_{\theta m}, \sigma_{\varphi m}$ は

$\varphi = \pi/2$ の点 (図4.1の点A) に生じることが計算の結果わかったので、

式 (4.9)、(4.10) において $\varphi = \pi/2$ ($\psi = 0$) とおけば、次式が得

られる。

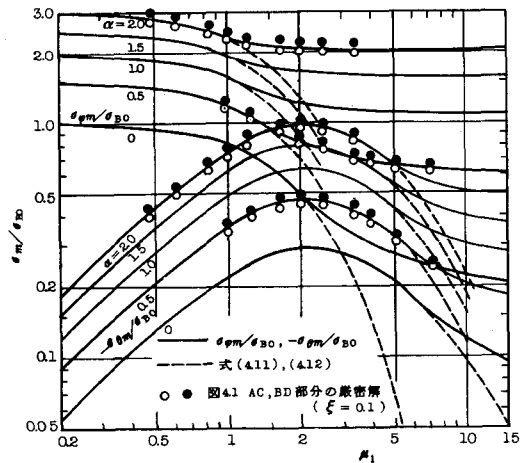


図 4.4 最大応力

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \varphi_m}{\partial B_0} &= \frac{m}{6\mu_1} \left(\frac{-C_4}{A} \right) \\
&= \frac{\mu_1 \{ 2.7538 \times 10^{-1} - 1.9387 \times 10^{-5} \mu^2 + 4.0752 \times 10^{-7} \mu^4 + \alpha (2.1437 \times 10^{-1} - 1.5508 \times 10^{-3} \mu^2 + 5.8730 \times 10^{-7} \mu^4) \}}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_m}{\partial B_0} &= \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{C_3}{A} \right) \\
&= \frac{1 - 2.4930 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.6318 \times 10^{-5} \mu^4 + \alpha (1 - 6.2353 \times 10^{-2} \mu^2 + 6.9164 \times 10^{-5} \mu^4)}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

これらを図4.4に破線を示した。図において実線と破線が分かれる点より μ_1 の小さい範囲に対しては、式(4.11)と(4.12)を適用することができる。

4.5 軸方向の伸縮量

また円環かく部について考える。ベローズ/ピッチに対する円環かく部の軸方向の伸縮量 δc は式(4.25)から

$$\frac{1}{4} \delta c = r_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos \varphi d\varphi$$

これに式(4.1), (4.2)を代入すると

$$\frac{1}{4} \delta c = r_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi (C_3 \eta_{2R} + C_4 \eta_{2I} + A \eta_{\varphi I}) d\psi \quad (4.13)$$

式(4.13)に式(2.26)および(4.8)を代入すると、次式が得られる。

$$\delta c = \frac{2m^2 P}{\pi E \gamma_m \lambda_f^3} \Delta c(\mu_1, p, \xi) \quad (4.14)$$

ただし

$$\begin{aligned}
&\Delta c(\mu_1, p, \xi) \\
&= \frac{7.8540 \times 10^{-1} + 1.0684 \times 10^{-2} \mu^2 + 1.3996 \times 10^{-5} \mu^4 + \alpha (1 + 2.8699 \times 10^{-2} \mu^2 + 5.4164 \times 10^{-5} \mu^4)}{1 + 2.0111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

次に円輪板部の軸方向変位を考える。ベローズ/ピッチに対する円輪板の変位 δp は式(4.2')によって求められる。すなわち

$$\frac{1}{4} \delta p = (W_r)_{r=a} - (W_r)_{r=r_m} = e_1 \log \frac{a}{r_m} + e_3 \left(d \log \frac{a}{e_4} - r_m^2 \log \frac{r_m}{e_4} \right) \quad (4.16)$$

e_1, e_3 および e_4 は式 (4.7)₃, (4.7)₄ および (4.7)₅ で与えられる。ゆえに

$$\delta p = \frac{P r_1^2 \xi}{2 \pi D} \Delta p (\mu, \rho, \xi) \quad (4.17)$$

ここに

$$\Delta p (\mu, \rho, \xi) = 2(2 + \nu \xi) \left\{ \frac{1 + 28690 \times 10^{-2} \mu^2 + 54185 \times 10^{-5} \mu^4 + \alpha (15908 + 1.1983 \times 10^{-1} \mu^2 + 3.1311 \times 10^{-4} \mu^4)}{1 + 20111 \times 10^{-1} \mu^2 + 8.1171 \times 10^{-4} \mu^4} \right\} \\ + 2 \left(1 + \frac{\xi}{3} \right) \alpha \rho - \frac{2 - \xi}{3} \rho^2 \quad (4.18)$$

さて以上によりベローズ 1 ピッチ 当りの伸縮量 δ は δ_c と δ_p との和として与えられるから、式 (4.14), (4.17) の結果を用いると、

$$\frac{\pi E Y_1}{m P} \delta = \frac{\pi E Y_1}{m P} (\delta_c + \delta_p) = \frac{m}{\lambda^3} \left(2 \lambda_2 \Delta c + \frac{\xi \Delta p}{2} \right) \quad (4.19)$$

ただし $\lambda_1 = R/r_1$, $\lambda_2 = r_1/r_m$, $\xi = Y_0/r_m$ また Δc および Δp は式 (4.15) および (4.18) によつて与えられる。式 (4.19) において、 ξ の 3 個の値、 λ_2 の 6 個の値および λ_1 の 9 個の値に対して計算した結果を図 4.5 に実線を示す。

4.6 近似公式

(1) 最大応力と荷重との関係

式 (4.12) において μ_1 が小さい ($\mu_1 \leq 1$) ときには、 μ_1 の 4 次の項を省略して

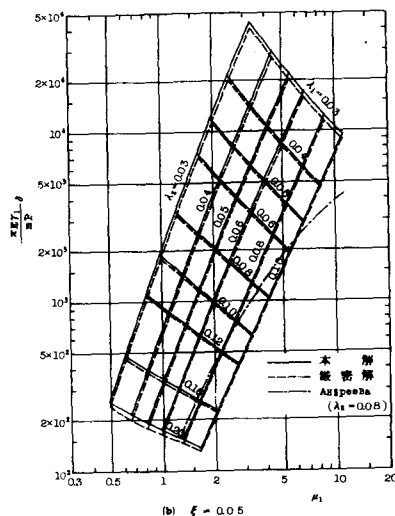
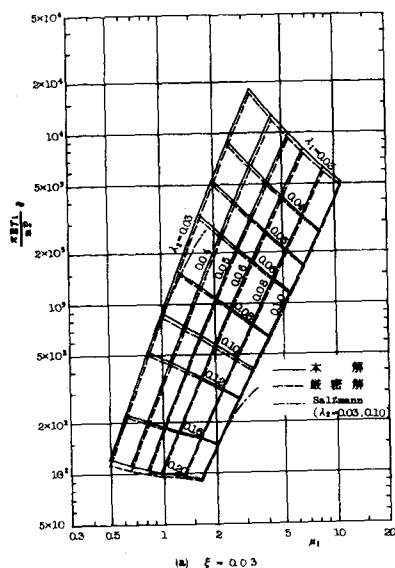
$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\sigma_{B0}} = 1 - 0.225 \mu_1^2 + \alpha (1 - 0.264 \mu_1^2) \quad (\mu_1 \leq 1) \quad (4.20)$$

また $1 \leq \mu_1 \leq 3$ のときは、図 4.4 のグラフからこれを直線とみなし次式を得る。

$$\frac{\sigma_{\theta m}}{\sigma_{B0}} = 0.8 (1 + \alpha) \mu_1^c \quad (4.21)$$

ただし

$$c = -0.13 (\alpha - 2)^2 - 0.07$$



(2) 伸縮量と荷重との関係

式 (4.19) において μ の 4 次の項を省略すると

$$\frac{EY_1 \delta}{P} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^3 (1 + 0.2 \mu^2)} \times \left\{ 5.44 + 14.3\alpha + 11.5\alpha^2 + 2.65\alpha^3 + \mu^2 (0.0742 + 0.409\alpha + 0.836\alpha^2 + 0.538\alpha^3) \right\} \quad (4.22)$$

$(\mu \leq 3)$

(3) 最大応力と伸縮量との関係

$\mu_1 \leq 1$ のときは式 (4.20)

および (4.22) から P を消去し、さらに μ^2 の項は小さいので省略してもよいが、誤差をできるだけ小さくするために、使用範囲の中間の値として $\mu_1 = 0.08$ を代入すると、次式が得られる。

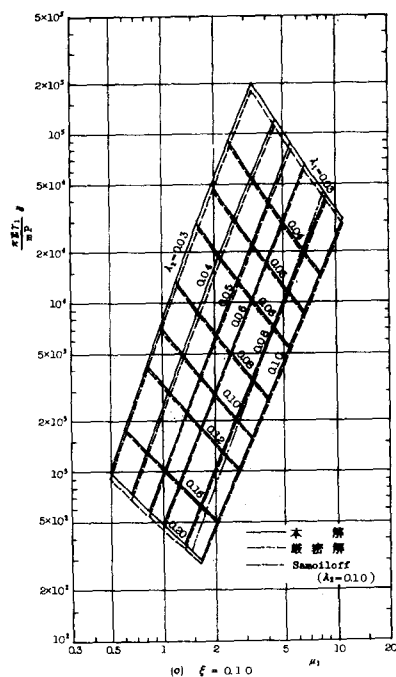


図 4.5 1 ピッチ当りの伸縮量

$$\frac{\sigma_{gm}}{\delta} = \frac{E\lambda_1}{\gamma_m\lambda_2} \frac{0.923 + 0.895\alpha}{5.49 + 14.5\alpha + 12.1\alpha^2 + 2.99\alpha^3} \quad (4.23)$$

$1 \leq \mu \leq 3$ では式 (4.21) および (4.22) から P を消去すると、

$$\frac{\sigma_{gm}}{\delta} = \frac{E\lambda_1}{\gamma_m\lambda_2} \frac{(1+\alpha)(0.764 + 0.153\mu^2)\mu^5}{\left\{ 5.44 + 14.3\alpha + 11.5\alpha^2 + 2.65\alpha^3 \right.} \quad (4.24)$$

$$\left. + \mu^2(0.0742 + 0.409\alpha + 0.839\alpha^2 + 0.538\alpha^3) \right\}$$

なお式 (4.20) ~ (4.24) の各式の近似による誤差は、式 (4.21) および (4.24) において安全側 6% 程度、他の式では 1% 以内である。

4.7 計 算 例

$\gamma_m = 100 \text{ mm}$, $\gamma_i = 5 \text{ mm}$, $\gamma_o = 10 \text{ mm}$, $h = 0.5 \text{ mm}$ の U 形ベローズを軸方向に 1 ピッチ当り 1.5 mm だけ伸ばす場合の最大応力を図 4.4 と図 4.5 とを用いて求める。

まず諸パラメータの値を計算すると $\xi = \gamma_o/\gamma_m = 0.10$, $\lambda_2 = \gamma_i/\gamma_m = 0.05$, $\lambda_1 = h/\gamma_i = 0.10$, $\beta = \gamma_o/\gamma_i = 2$ となるから、図 4.5(c) より

$$\frac{\pi E \gamma_i \delta}{m P} = 3.5 \times 10^3$$

ここで

$$E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu = 0.3, \quad m = \sqrt{12(1-\nu^2)} = 3.30$$

とすると

$$P/\delta = 28.5 \text{ kg/mm}$$

$\delta = 1.5 \text{ mm}$ であるから

$$P = 42.8 \text{ kg}$$

次に図 4.4 を用いて最大応力値を求める。

$$\alpha = \beta/(1+0.7\xi) = 1.87, \quad \mu = m\lambda_2/\lambda_1 = 1.65$$

ゆえに

$$\sigma_{gm}/\sigma_{Bo} = 2.1, \quad \sigma_{em}/\sigma_{Bo} = 0.92$$

ここに

$$\sigma_{Bo} = 3\gamma_i P/\pi\gamma_m h^2 = 8.17$$

であるから

$$\sigma_{gm} = 17.2 \text{ kg/mm}^2, \quad \sigma_{em} = 7.52 \text{ kg/mm}^2$$

となる。

またもし式(4.24)を用いれば、 $C = 0.0722$ となり

$$\sigma_{gm} = 18.1 \text{ kg/mm}^2$$

なる結果が得られる。

4.8 考 察

前述のように本解析には次の三つの近似がある。

- (a) 円輪板の面内変位を無視する。
- (b) 応力と変形の状態が図4.1の点Mに関して対称である
と考える。
- (c) 円環かく部の解の関数である η 関数において、パラメータ λ を零とする。

現在実際に用いられている大部分のベローズではパラメータ λ_2, λ_1 は 1 に比較して小さいために、上記の近似はいずれも妥当なものであると考えられる。これらの仮定を設けたために比較的簡明な結果が得られたのであるが、またそのためその解の精度を検討しなければならない。それには上記の三つの仮定を取り除いたより厳密な解法による結果と比較すればよい。この厳密な解法については第5章で詳しく述べるが、その結果の一部をちつて本解法の結果の精度を検討したものを図4.4と4.5に示してある。すなわち図4.4の白点および黒点は、図4.1のかくI (AC) の部分およびかくII (BD) の部分における最大応力値を示し、図4.5の破線は伸縮量の値を示している。いずれも本解法の結果が実用的に十分な精度内にあることを示している。

次に他の研究者の結果と比較する。従来の研究は数少ないが、伸縮量と荷重との関係については二、三の結果が発表されているので、それらによる計算結果の一例を図4.5に一点鎖線で示した。これを見ると従来の諸結果は本解法の結果とだいたい一致するが、精度が悪いかまたは適用範囲が狭いものと考えられる。なお軸荷重としては引張りの場合を考慮したが、圧縮軸荷重の場合も単に諸量の符号が変わるだけで、本解法の結果はそのまま適用できる。

4.9 結 論

本章では軸力を受ける U 形 ベローズの強さを解析するために、円環かくと円輪板の理論式を用いて応力と伸縮量を求め、その結果を計算図と設計公

式として表わした。それらを整理すると次のようになる。

(1) 最大応力と荷重との関係

$$\sigma_{gm}: \mu_1 \leq 1 \quad \text{式(4.20)}$$

$$1 < \mu_1 \leq 3 \quad \text{式(4.21) または 図4.4}$$

$$3 < \mu_1 \leq 10 \quad \text{図4.4}$$

$$\sigma_{gm}: \mu_1 \leq 5 \quad \text{式(4.11)}$$

$$5 < \mu_1 \leq 10 \quad \text{図4.4}$$

(2) 伸縮量と荷重との関係

$$\mu_1 \leq 3 \quad \text{式(4.22)}$$

$$3 < \mu_1 \leq 10 \quad \text{式(4.19)}$$

(3) 最大応力と伸縮量との関係

$$\sigma_{gm} - \delta \quad \mu_1 \leq \quad \text{式(4.23)}$$

$$1 < \mu_1 \leq 3 \quad \text{式(4.24)}$$

第5章 U形ベローズ

—— 軸荷重を受ける場合の厳密解 ——

U形ベローズが軸荷重を受ける場合については、第4章において近似解による設計公式を示したが、本章では前章の仮定を取り除き、形状パラメーターの広い範囲にわたって解を求める。すなわち前章においては計算を簡単にするため、次の仮定を設けている。

- (a) 円輪板の面内変位を無視する。
- (b) 応力と変形の状態が円輪板の幅の中心線に関して、対称であると仮定する。
- (c) 円環かく部の解の関数である γ 関数において、パラメータ λ を零とする。

本章ではこれらの仮定をすべて取り除き、できるだけ厳密な解析を行う。その結果前章に示したような設計公式は得られなかったが、容易に応力および伸縮量を求めることのできる正確で適用範囲の広い計算図を作製することができた。またこの計算図を公式化することを試みている。なお実験については本章において詳しく述べることにする。

5.1 円環かく部の関係式

第4章においてはパラメータ λ_2 および ξ の値が小さい場合には、 ACM と BDM の部分の応力および変位の状態が点 M に関して対称であると仮定し、 ACM の部分についてのみ考えたが、本章ではこの仮定をとりおき、 $ACMDB$ 全部について考察する。まず円環かくの軸対称問題に対する基礎微分方程式およびその解は式(1.3)および(1.4)で与えられる。図4/1に示すように、円環かくのうち外側に出る部分 AC をかくI、内側にはいる部分 DB をかくIIとすると、かくIIについてはベローズの中心軸からかくに至る距離を負と考えれば、数式上の取り扱いはかくI、IIともまったく同様になる。⁽¹⁸⁾ 二つのかくの諸記号に添字(I)および(II)をつけると、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i^{(I)} &= \gamma_i^{(II)} \equiv \gamma_i \\ A^{(I)} &= -A^{(II)} \equiv A \\ \lambda^{(I)} &= \gamma_i/a = \lambda_2/(1+\xi) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(II)} &= -\gamma_1/b = -\lambda_2/(1-\xi) \\ \mu^{(I)} &= \mu_1/(1+\xi) \\ \mu^{(II)} &= -\mu_1/(1-\xi) \end{aligned} \right\}$$

かく I および II に対し、 $\varphi = \pi/2$ すなわち $\psi = 0$ (図 4.1 の点 A と B) において対称性により、 $\varphi = 0$ および $Q = 0$ すなわち $\chi = \chi_\varphi = 0$ 。また η 関数の性質から、これらの点においては

$$\eta_{1R} = 1, \quad \eta_{1I} = \eta_{2R} = \eta_{2I} = \eta_{\varphi R} = \eta_{\varphi I} = 0$$

したがって式 (1.4) より

$$C_1 = C_2 = 0$$

ゆえに式 (1.4) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} + C_4^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} + A^{(I)} \eta_{\varphi I}^{(I)} \\ \chi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} - C_4^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} - A^{(I)} \eta_{\varphi R}^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} + C_4^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} + A^{(II)} \eta_{\varphi I}^{(II)} \\ \chi^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} - C_4^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} - A^{(II)} \eta_{\varphi R}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

定数 $C_3^{(I)}$, $C_4^{(I)}$, $C_3^{(II)}$, $C_4^{(II)}$ は円環かくと円輪板の接続条件によって定められる。なお各内力成分 Q , N_φ , N_θ , M_φ , M_θ (すべて単位長さ当り) および各変位成分 u , w は式 (1.19) ~ (1.25) により与えられる。

5.2 円輪板部の関係式 (20)

前章では円輪板の面内変位および面内力を考えなかったが、ここではこれらをすべて考慮する。円輪板の部分の半径方向および円周方向の面内変位を u_r および v とすると、

$$2G u_r = -2A_0 \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) r - \frac{B_0}{r} \quad (5.4)$$

$$2G v = 0 \quad (5.5)$$

ここに A_0 , B_0 および G はそれぞれ定数および横弾性係数である。半径方向および接線方向の面内力を N_r および N_θ とすると

$$N_r = 2A_0 h + \frac{B_0 h}{r^2} \quad (5.6)$$

$$N_\theta = 2A_0 h - \frac{B_0 h}{r^2} \quad (5.7)$$

また円周方向変位 w_r は式 (4.2) で与えられる。これから

$$\frac{\partial w_r}{\partial r} = \frac{C_4}{r} + (2C_2 + C_3)r + 2C_3 r \log r$$

二二で

$$C_4 = d_1, \quad 2C_2 + C_3 = d_2, \quad 2C_3 = d_3 \quad (5.8)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_r}{\partial r} &= \frac{d_1}{r} + d_2 r + d_3 r \log r \\ \frac{\partial^2 w_r}{\partial r^2} &= d_2 + d_3 - \frac{d_1}{r^2} + d_3 \log r \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

なお 曲げモーメント M_r およびせん断力 Q_r は式 (4.3) および (4.4) で与えられる。

5.3 接 続 条 件

円環かく部と円輪板部の接続条件は次のようになる。

すなわち点 C ($\varphi=0, r=a$) および点 D ($\varphi=0, r=b$) において

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad (N_r)_{r=a} &= (N_{\varphi^{(I)}})_{\varphi=0}, \quad (N_r)_{r=b} = (N_{\varphi^{(II)}})_{\varphi=0} \\ (b) \quad (U_r)_{r=a} &= (U^{(I)})_{\varphi=0}, \quad (U_r)_{r=b} = -(U^{(II)})_{\varphi=0} \\ (c) \quad (M_r)_{r=a} &= (M_{\varphi^{(I)}})_{\varphi=0}, \quad (M_r)_{r=b} = -(M_{\varphi^{(II)}})_{\varphi=0} \\ (d) \quad (Q_r)_{r=a} &= (Q^{(I)})_{\varphi=0}, \quad (Q_r)_{r=b} = (Q^{(II)})_{\varphi=0} \\ (e) \quad (\partial w_r / \partial r)_{r=a} &= (v^{(I)})_{\varphi=0}, \quad (\partial w_r / \partial r)_{r=b} = (v^{(II)})_{\varphi=0} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

これらのうち、(d) の二つの条件は同一のことを意味していることがわかる。上の9個の条件により未定定数 $C_2^{(I)}, C_4^{(I)}, C_3^{(II)}, C_5^{(II)}$ および A_0, B_0, d_1, d_2, d_3 を定める。すなわち上の接続条件の式 (5.10) に前述の円環かくおよび円輪板についての諸関係式を用いると、次の9元連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2A_0 h + \frac{B_0 h}{a^2} &= \frac{E h^2}{m a} (\chi^{(I)})_0 \\ 2A_0 h + \frac{B_0 h}{b^2} &= -\frac{E h^2}{m b} (\chi^{(II)})_0 \\ -\frac{1}{2G} \left\{ 2A_0 \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) a + \frac{B_0}{a} \right\} &= \frac{h}{m} \left\{ -\nu (\chi^{(I)})_0 + \frac{(\chi^{(I)})'_0}{\lambda^{(I)}} \right\} \\ -\frac{1}{2G} \left\{ 2A_0 \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) b + \frac{B_0}{b} \right\} &= \frac{h}{m} \left\{ -\nu (\chi^{(II)})_0 + \frac{(\chi^{(II)})'_0}{\lambda^{(II)}} \right\} \\ -D \{ d_2 + d_3 + d_2 \nu - (1-\nu) \frac{d_1}{a^2} + d_3 (1+\nu) \log a \} &= -\frac{D}{r} \{ (v^{(I)})_0 + \nu \lambda^{(I)} (v^{(I)})_0 \} \\ -D \{ d_2 + d_3 + d_2 \nu - (1-\nu) \frac{d_1}{b^2} + d_3 (1+\nu) \log b \} &= \frac{D}{r} \{ (v^{(II)})_0 + \nu \lambda^{(II)} (v^{(II)})_0 \} \\ -D \frac{2d_3}{a} = \frac{P}{2\pi a}, \quad -D \frac{2d_3}{b} = \frac{P}{2\pi b} \\ \frac{d_1}{a} + d_2 a + d_3 a \log a &= (v^{(I)})_0 \\ \frac{d_1}{b} + d_2 b + d_3 b \log b &= (v^{(II)})_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

上式を变形すると、式(5.12)および(5.13)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{(1+\nu)\hbar}{4\pi b} (2G\nu - E)(\chi^{(w)})_0 - \frac{1+\nu}{2b} \frac{G\hbar}{m\lambda^{(w)}} (\chi^{(w)'})_0 \\ B_0 &= -\frac{(1+\nu)b\hbar}{2\pi} \left\{ -E\left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) + 2G\nu \right\} (\chi^{(w)})_0 + \frac{G\hbar(1+\nu)b}{m\lambda^{(w)}} (\chi^{(w)'})_0 \\ d_1 &= \frac{b}{2} (\varphi^{(w)})_0 + \frac{b^2}{2Y_1} (\varphi^{(w)'})_0 - \frac{mb^2}{4a} \frac{A}{\lambda, \lambda^{(w)}} \\ d_2 &= \frac{1}{2b} (\varphi^{(w)})_0 - \frac{1}{2Y_1} (\varphi^{(w)'})_0 + \frac{m(1+2\log b)}{4a} \frac{A}{\lambda, \lambda^{(w)}} \\ d_3 &= -\frac{P}{4\pi D} = -\frac{mA}{2\lambda, \lambda^{(w)}a} \end{aligned} \right\} (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{G}(\chi^{(w)})_0 - (1+\nu) \left\{ \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \nu + \frac{E}{2G} \left\{ -\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \right\} \right\} (\chi^{(w)})_0 \\ + \frac{1+\nu}{\lambda^{(w)}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\chi^{(w)'})_0 = 0 \\ \nu(\chi^{(x)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(w)}} (\chi^{(w)'})_0 - (1+\nu) \left\{ \frac{\nu}{2} \left\{ \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right\} - \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{E}{4G} \right\} (\chi^{(w)})_0 \\ + \frac{1+\nu}{2\lambda^{(w)}} \left\{ \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right\} (\chi^{(w)'})_0 = 0 \\ \nu\lambda^{(x)}(\varphi^{(w)})_0 + (\varphi^{(w)})_0 + \frac{Y_1}{2} \left\{ \frac{b(1-\nu)}{a^2} - \frac{1+\nu}{b} \right\} (\varphi^{(w)})_0 + \frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{b^2}{a^2} + (1+\nu) \right\} (\varphi^{(w)'})_0 \\ - \left\{ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + (1+\nu) \log \frac{b}{a} \right\} \frac{mY_1}{2\lambda, \lambda^{(w)}a} A = 0 \\ (\varphi^{(x)})_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (\varphi^{(w)})_0 - \frac{1}{2\lambda^{(w)}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\varphi^{(w)'})_0 + \frac{m\lambda}{2\lambda, \lambda^{(w)}} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 - 2 \log \frac{b}{a} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

すなわち式(5.12)は A_0, B_0, d_1, d_2, d_3 を $C_3^{(x)}, C_4^{(x)}, C_3^{(w)}, C_4^{(w)}$ に
より表わす関係式であり、式(5.13)はこれらの4個の定数 $C_3^{(x)}, C_4^{(x)}, C_3^{(w)},$
 $C_4^{(w)}$ に関する四元連立方程式である。式(5.13)に式(5.2)および
(5.3)を代入すると、次の $C_3^{(x)}/A = X_1, C_3^{(w)}/A = X_2, C_4^{(x)}/A = X_3,$
 $C_4^{(w)}/A = X_4$ に関する四元連立方程式を得る、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 &= b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 &= b_2 \\ a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 &= b_3 \\ a_{41} X_1 + a_{42} X_2 + a_{43} X_3 + a_{44} X_4 &= b_4 \end{aligned} \right\} (5.14)$$

ただし

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\eta_{2I}^{(x)})_0 \\ a_{12} &= -(\eta_{2R}^{(x)})_0 \\ a_{13} &= d(\eta_{2I}^{(w)})_0 - K(\eta_{2I}^{(w)'})_0 \\ a_{14} &= -d(\eta_{2R}^{(w)})_0 + K(\eta_{2R}^{(w)'})_0 \end{aligned}$$

$$b_1 = (\eta_{gR}^{(I)})_0 - \alpha (\eta_{gR}^{(II)})_0 + K (\eta_{gR}^{(II)'})_0$$

$$a_{21} = \nu (\eta_{2I}^{(I)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(I)}} (\eta_{2I}^{(I)'})_0$$

$$a_{22} = -\nu (\eta_{2R}^{(I)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(I)}} (\eta_{2R}^{(I)'})_0$$

$$a_{23} = C (\eta_{2I}^{(II)})_0 + F (\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$a_{24} = -C (\eta_{2R}^{(II)})_0 - F (\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$b_2 = \nu (\eta_{gR}^{(I)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(II)}} (\eta_{gR}^{(I)'})_0 - C (\eta_{gR}^{(II)})_0 - F (\eta_{gR}^{(II)'})_0$$

$$a_{31} = \nu (\eta_{2R}^{(II)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(I)}} (\eta_{2R}^{(I)'})_0$$

$$a_{32} = \nu (\eta_{2I}^{(I)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(II)}} (\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$a_{33} = M (\eta_{2R}^{(II)})_0 + I (\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$a_{34} = M (\eta_{2I}^{(II)})_0 + I (\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$b_3 = -\nu (\eta_{gI}^{(I)})_0 - \frac{(\eta_{gI}^{(I)'})_0}{\lambda^{(I)}} + M (\eta_{gI}^{(II)})_0 + I (\eta_{gI}^{(II)'})_0 - J$$

$$a_{41} = (\eta_{2R}^{(I)})_0$$

$$a_{42} = (\eta_{2I}^{(I)})_0$$

$$a_{43} = -\alpha (\eta_{2R}^{(II)})_0 + K (\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$a_{44} = -\alpha (\eta_{2I}^{(II)})_0 + K (\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$b_4 = -(\eta_{gI}^{(I)})_0 - \alpha (\eta_{gI}^{(II)})_0 + K (\eta_{gI}^{(II)'})_0 - L$$

222

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = \frac{2\xi}{1 - \xi^2}$$

$$\gamma = \log \frac{a}{b} = \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi}$$

$$C = \alpha \nu - \beta$$

$$F = \frac{1}{\lambda^{(II)}} (\nu \beta - \alpha)$$

$$M = -(\beta + \nu \alpha)$$

$$I = -\frac{1}{\lambda^{(II)}} (\alpha + \nu \beta)$$

$$J = \frac{m}{2\lambda_1} \left(-\frac{1-\nu}{\lambda^{(II)}} \beta + \frac{1+\nu}{\lambda^{(II)}} \gamma \right)$$

$$K = -\frac{\beta}{\lambda^{(II)}}$$

$$L = \frac{m}{2\lambda_1} \left(\frac{\beta}{\lambda^{(W)}} + \frac{\gamma}{\lambda^{(I)}} \right).$$

また $(\eta_{2R}^{(W)})_0$, $(\eta_{2R}^{(I)})_0$ 等は $\eta_{2R}^{(W)}$, $d\eta_{2R}^{(W)}/d\varphi$ 等の $\varphi=0$ における値を次式で表わされる。

$$\begin{aligned} (\eta_{2R})_0 = & 1.5708 - 1.0000\lambda + 7.8540 \times 10^{-1}\lambda^2 - 3.3212 \times 10^{-2}\mu^2 \\ & + 6.7925 \times 10^{-2}\mu^2\lambda - 1.0002 \times 10^{-1}\mu^2\lambda^2 + 2.4817 \times 10^{-5}\mu^4 \\ & - 8.6633 \times 10^{-5}\mu^4\lambda - 3.1626 \times 10^{-9}\mu^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{2R}')_0 = & -1.0000 + 1.5040 \times 10^{-8}\lambda - 1.1206 \times 10^{-8}\lambda^2 + 6.2353 \times 10^{-2}\mu^2 \\ & - 1.0323 \times 10^{-1}\mu^2\lambda + 1.3556 \times 10^{-1}\mu^2\lambda^2 - 6.9165 \times 10^{-5}\mu^4 \\ & + 2.1721 \times 10^{-4}\mu^4\lambda + 1.1276 \times 10^{-8}\mu^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{2I})_0 = & -4.2920 \times 10^{-1}\mu + 5.7080 \times 10^{-1}\mu\lambda - 6.3523 \times 10^{-1}\mu\lambda^2 \\ & + 1.1960 \times 10^{-3}\mu^3 - 3.2934 \times 10^{-3}\mu^3\lambda + 5.9464 \times 10^{-3}\mu^3\lambda^2 \\ & - 3.3449 \times 10^{-7}\mu^5 + 1.4109 \times 10^{-6}\mu^5\lambda + 2.2130 \times 10^{-11}\mu^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{2I}')_0 = & 5.7080 \times 10^{-1}\mu - 5.0000 \times 10^{-1}\mu\lambda + 4.5000 \times 10^{-1}\mu\lambda^2 \\ & - 2.8158 \times 10^{-3}\mu^3 + 6.6035 \times 10^{-3}\mu^3\lambda - 1.0268 \times 10^{-2}\mu^3\lambda^2 \\ & + 1.0664 \times 10^{-6}\mu^5 - 4.1394 \times 10^{-6}\mu^5\lambda - 8.6831 \times 10^{-11}\mu^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{gR})_0 = & -3.6505 \times 10^{-2}\mu^2 + 3.8840 \times 10^{-2}\mu^2\lambda - 3.6121 \times 10^{-2}\mu^2\lambda^2 \\ & + 2.5572 \times 10^{-5}\mu^4 - 6.3889 \times 10^{-5}\mu^4\lambda - 3.2094 \times 10^{-9}\mu^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{gR}')_0 = & 7.0796 \times 10^{-2}\mu^2 - 4.7975 \times 10^{-2}\mu^2\lambda + 3.5398 \times 10^{-2}\mu^2\lambda^2 \\ & - 7.1612 \times 10^{-5}\mu^4 + 1.5401 \times 10^{-4}\mu^4\lambda + 1.1463 \times 10^{-8}\mu^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{gI})_0 = & -5.7080 \times 10^{-1}\mu + 2.1460 \times 10^{-1}\mu\lambda - 1.1873 \times 10^{-1}\mu\lambda^2 \\ & + 1.2557 \times 10^{-3}\mu^3 - 2.2318 \times 10^{-3}\mu^3\lambda + 2.8987 \times 10^{-3}\mu^3\lambda^2 \\ & - 3.4139 \times 10^{-7}\mu^5 + 1.1002 \times 10^{-6}\mu^5\lambda + 2.2380 \times 10^{-11}\mu^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_{gI}')_0 = & 1.0000\mu - 2.5692 \times 10^{-9}\mu\lambda + 7.7790 \times 10^{-9}\mu\lambda^2 \\ & - 2.9876 \times 10^{-3}\mu^3 + 4.2215 \times 10^{-3}\mu^3\lambda - 4.7266 \times 10^{-3}\mu^3\lambda^2 \\ & + 1.0913 \times 10^{-6}\mu^5 - 3.1506 \times 10^{-6}\mu^5\lambda - 8.7906 \times 10^{-11}\mu^7 \end{aligned}$$

(5.15)

上記の式 (5.14) を電子計算機を用いて、数値的に解くと $X_1 \sim X_4$ が求まる。

5.4 応 力

子午線方向 (φ 方向) の膜応力 $\sigma_{t\varphi}$ は式 (1.20) より

$$\sigma_{t\varphi} = \frac{N_{\varphi}}{h} = \frac{E h^2}{m \gamma_c h (1 + \lambda \sin \varphi)} (\chi \cos \varphi + A \sin \varphi) \quad (5.16)$$

かく I、II における $\sigma_{t\varphi}$ を $\sigma_{t\varphi}^{(I)}$, $\sigma_{t\varphi}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{t\varphi}^{(I)}}{P} = \frac{1}{2\pi \lambda_1 (1 + \xi + \lambda_2 \cos \varphi)} \left(\frac{\chi^{(I)}}{A} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \quad (5.17)$$

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{t\varphi}^{(II)}}{P} = \frac{-1}{2\pi \lambda_1 (1 - \xi - \lambda_2 \cos \varphi)} \left(\frac{\chi^{(II)}}{A} \sin \varphi - \cos \varphi \right) \quad (5.18)$$

円周方向 (θ 方向) の膜応力 $\sigma_{t\theta}$ は式 (1.21) から

$$\sigma_{t\theta} = \frac{N_{\theta}}{h} = \frac{E h}{m \gamma_I} \frac{d\chi}{d\varphi} \quad (5.19)$$

かく I、II における $\sigma_{t\theta}$ を $\sigma_{t\theta}^{(I)}$, $\sigma_{t\theta}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{t\theta}^{(I)}}{P} = - \frac{1}{2\pi \lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{A} \frac{d\chi^{(I)}}{d\varphi} \quad (5.20)$$

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{t\theta}^{(II)}}{P} = - \frac{1}{2\pi \lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{A} \frac{d\chi^{(II)}}{d\varphi} \quad (5.21)$$

φ 方向の曲げ応力 $\sigma_{b\varphi}$ は式 (1.22) から

$$\sigma_{b\varphi} = \frac{6 M_{\varphi}}{h^2} = - \frac{6 D}{\gamma_I h^2} \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} + \nu \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \vartheta \right) \quad (5.22)$$

括弧内第2項は第1項に比べ微小なので、これを省略する。

かく I、II における $\sigma_{b\varphi}$ を $\sigma_{b\varphi}^{(I)}$, $\sigma_{b\varphi}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{b\varphi}^{(I)}}{P} = \frac{3}{m \pi \lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{A} \frac{d\vartheta^{(I)}}{d\varphi} \quad (\text{とつ側圧縮を正とする}) \quad (5.23)$$

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{b\varphi}^{(II)}}{P} = \frac{3}{m \pi \lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{A} \frac{d\vartheta^{(II)}}{d\varphi} \quad (\text{とつ側圧縮を正とする}) \quad (5.24)$$

θ 方向の曲げ応力 $\sigma_{b\theta}$ は式 (1.23) から

$$\sigma_{b\theta} = \frac{6 M_{\theta}}{h^2} = - \frac{6 D}{\gamma_I h^2} \left(\nu \frac{d\vartheta}{d\varphi} + \frac{\lambda \cos \varphi}{1 + \lambda \sin \varphi} \vartheta \right) \quad (5.25)$$

かく I、II における $\sigma_{b\theta}$ を $\sigma_{b\theta}^{(I)}$, $\sigma_{b\theta}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{b\theta}^{(I)}}{P} = \frac{3}{m \pi \lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\nu}{A} \frac{d\vartheta^{(I)}}{d\varphi} - \frac{\lambda_2 \sin \varphi}{1 + \xi + \lambda_2 \cos \varphi} \frac{\vartheta^{(I)}}{A} \right) \quad (5.26)$$

$$\frac{\gamma_I \gamma_m \sigma_{b\theta}^{(II)}}{P} = \frac{3}{m \pi \lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\nu}{A} \frac{d\vartheta^{(II)}}{d\varphi} + \frac{\lambda_2 \sin \varphi}{1 - \xi - \lambda_2 \cos \varphi} \frac{\vartheta^{(II)}}{A} \right) \quad (5.27)$$

二二に

$$\frac{\chi^{(I)}}{A} = \chi_1 \eta_{2I}^{(I)} - \chi_2 \eta_{2R}^{(I)} - \eta_{\varphi R}^{(I)}$$

$$\frac{\chi^{(II)}}{A} = \chi_3 \eta_{2I}^{(II)} - \chi_4 \eta_{2R}^{(II)} + \eta_{\varphi R}^{(II)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \frac{dX^{(I)}}{d\psi} &= X_1 \frac{d\eta_{2I}^{(I)}}{d\psi} - X_2 \frac{d\eta_{2R}^{(I)}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\varphi R}^{(I)}}{d\psi} \\
\frac{1}{A} \frac{dX^{(II)}}{d\psi} &= X_3 \frac{d\eta_{2I}^{(II)}}{d\psi} - X_4 \frac{d\eta_{2R}^{(II)}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi R}^{(II)}}{d\psi} \\
\frac{\psi^{(I)}}{A} &= X_1 \eta_{2R}^{(I)} + X_2 \eta_{2I}^{(I)} + \eta_{\varphi I}^{(I)} \\
\frac{\psi^{(II)}}{A} &= X_3 \eta_{2R}^{(II)} + X_4 \eta_{2I}^{(II)} - \eta_{\varphi I}^{(II)} \\
\frac{1}{A} \frac{d\psi^{(I)}}{d\psi} &= X_1 \frac{d\eta_{2R}^{(I)}}{d\psi} + X_2 \frac{d\eta_{2I}^{(I)}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi I}^{(I)}}{d\psi} \\
\frac{1}{A} \frac{d\psi^{(II)}}{d\psi} &= X_3 \frac{d\eta_{2R}^{(II)}}{d\psi} + X_4 \frac{d\eta_{2I}^{(II)}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\varphi I}^{(II)}}{d\psi}
\end{aligned}$$

円輪板の半径方向 (Y 方向) の曲げモーメント M_r は、式 (4.3) から

$$-\frac{M_r}{D} = d_2(1+\nu) - (1-\nu) \frac{d_1}{Y^2} + d_3 + d_3(1+\nu) \log Y \quad (5.28)$$

ただし

$$C_4 = d_1, \quad 2C_2 + C_3 = d_2, \quad 2C_3 = d_3$$

式 (5.28) に式 (5.12) を代入すると

$$\begin{aligned}
-\frac{Y_1 M_r}{D} &= (\psi^{(I)})_0 + \nu \lambda^{(I)} (\psi^{(II)})_0 - R \left\{ (\psi^{(II)})_0 + (\psi^{(III)})_0 + \nu \left[\lambda^{(I)} (\psi^{(I)})_0 + \lambda^{(II)} (\psi^{(II)})_0 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{Y_1 P (1+\nu)}{4\pi D} \left(\log \frac{a}{Y} - R \log \frac{a}{b} \right) \quad (5.29)
\end{aligned}$$

ここに

$$R = \frac{\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left\{ \left(\frac{a}{Y}\right)^2 - 1 \right\}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad \frac{a}{Y} = \frac{1+\xi}{1+n\xi}, \quad n = \frac{Y_m - Y}{Y_0} \quad (|n| \leq 1)$$

式 (5.29) において $\nu \lambda^{(I)} (\psi^{(II)})_0$ および $\nu \lambda^{(II)} (\psi^{(II)})_0$ は微小と考え、これを省略すると Y 方向の曲げモーメント σ_{br} は

$$\frac{Y_1 Y_m \sigma_{br}}{P} = \frac{-3}{n\pi\lambda_1 \xi} \left\{ \frac{(\psi^{(II)})_0}{A} - R \left\{ \frac{(\psi^{(I)})_0}{A} + \frac{(\psi^{(III)})_0}{A} \right\} + \frac{(H\nu)m}{2\lambda_1} \left(\log \frac{a}{Y} - R \log \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (5.30)$$

ここに $\psi' = d\psi/d\varphi = -d/d\varphi$

以上の諸関係式を用いて応力の計算を行なった結果、4種類の応力 $\sigma_{b\varphi}$, $\sigma_{c\varphi}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ のうち設計上問題となるのは $\sigma_{b\varphi}$ だけであることがわかった。かく I および II における $\sigma_{b\varphi}$ の最大値 σ_{gm} を求めて図 5.11 に示した。なお計算は $\nu = 0.3$ として行なった。図において破線および実線はそれぞれ I および II に対応する。

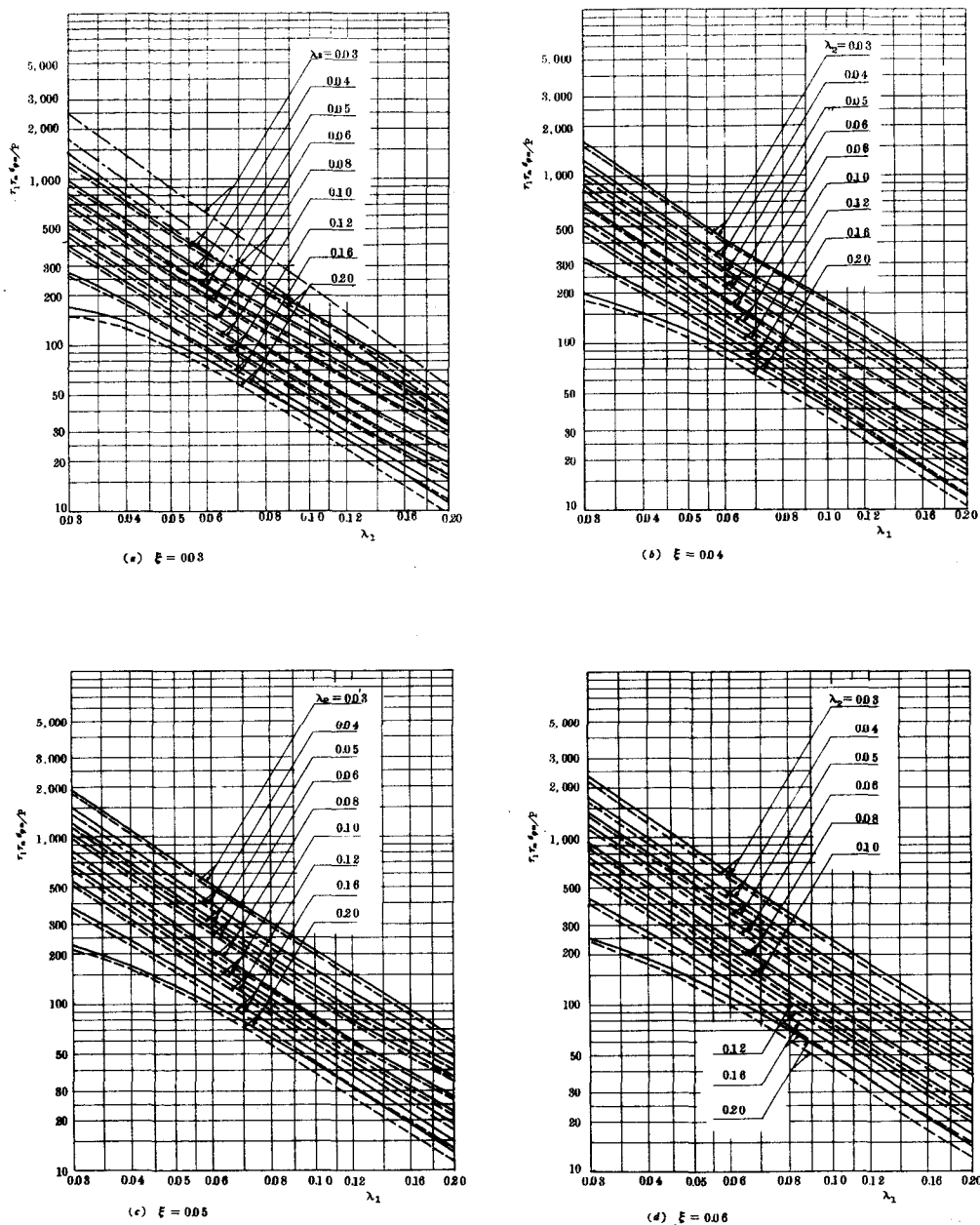


図 5.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\phi m}$ の計算図 (その 1)

また $\sigma_{\phi \phi}$ は計算の結果によると、図 5.2 にそれらの分布を示すように、 λ_2 / λ_1 の値が 0.2 より小さいときには、点 A、B ($\phi = 0$) の位置で最大

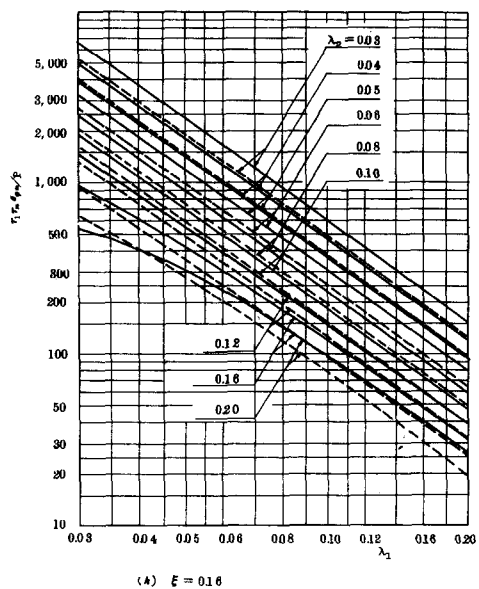
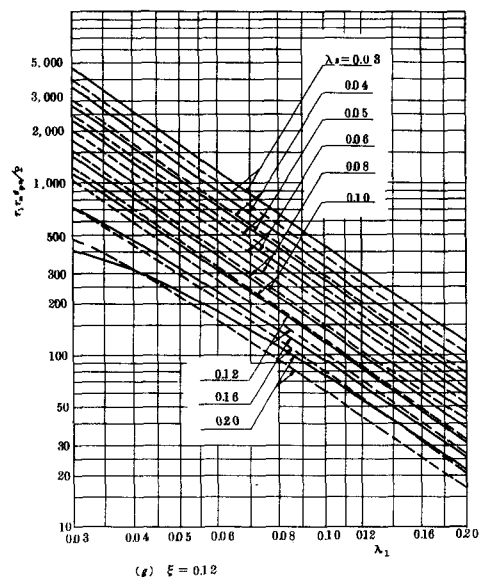
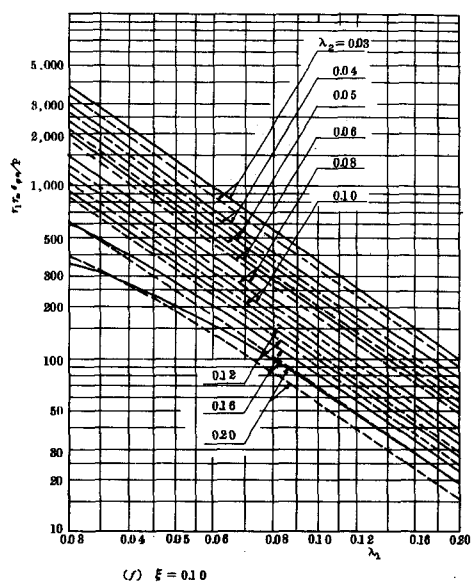
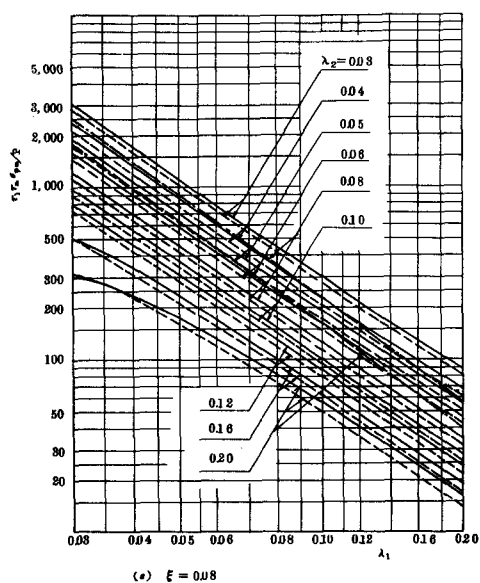


図 5.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\varphi m}$ の計算図 (その 2)

となり、 λ_2/λ_1 の値がこれより大きくなると、最大となる位置は徐々に点 C、D の方向 (ψ の増す方向) に何かうことがわかる。なお通常のベロ

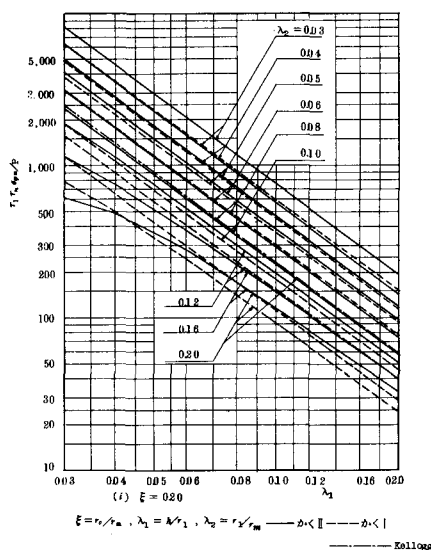


図 5.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\varphi m}$ の計算図 (その 3)

ースは一樣な肉厚を有するので、各応力の最大値だけがわかれば十分であると考え、各応力が最大になる位置を示すグラフは載せない。

5.5 軸方向の伸縮量

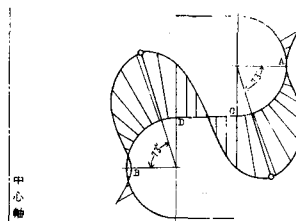
円環かく I, II および円輪板部分の軸方向変位を各々 δ_I , δ_{II} , および δ_{III} とすると、ベローズノピッチ当りの伸縮量 δ は

$$\delta = 2(\delta_I + \delta_{II} + \delta_{III}) \quad (5.31)$$

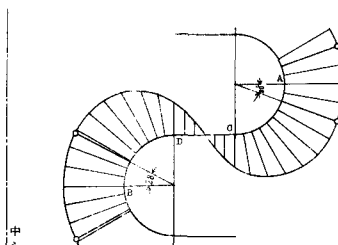
またかく I, II の軸方向変位 δ_I ,

δ_{II} は式 (4.25) より

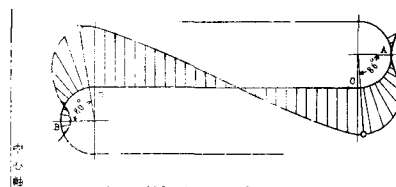
$$\frac{\delta_I}{A_{YI}} = X_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R}^{(I)} \sin \psi d\psi + X_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I}^{(I)} \sin \psi d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{gI}^{(I)} \sin \psi d\psi \quad (5.32)$$



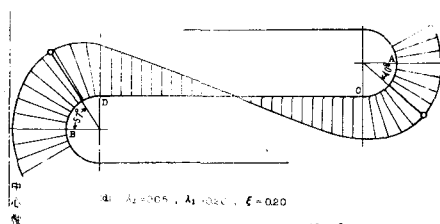
(a) $\lambda_2 = 0.05$, $\lambda_1 = 0.03$, $\xi = 0.01$



(b) $\lambda_2 = 0.06$, $\lambda_1 = 0.12$, $\xi = 0.03$



(c) $\lambda_2 = 0.07$, $\lambda_1 = 0.13$, $\xi = 0.020$



(d) $\lambda_2 = 0.05$, $\lambda_1 = 0.20$, $\xi = 0.020$

図 5.2 応力 $\sigma_{b\varphi}$ の分布 (○印は最大値を示す)

$$\frac{\delta_{II}}{A r_i} = \chi_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R}^{(II)} \sin \psi d\psi + \chi_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I}^{(II)} \sin \psi d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{gI}^{(II)} \sin \psi d\psi \quad (5.33)$$

ただし η_{2R} , η_{2I} および η_{gI} に対しては式 (1.15), (1.16) および (1.18) を用い、また $\sin \psi$ はべき級数に展開して積分する。その結果

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R} \sin \psi d\psi &= 1.0000 - 7.8540 \times 10^{-1} \lambda + 6.6667 \times 10^{-1} \lambda^2 \\ &\quad - 1.0608 \times 10^{-2} \mu^2 + 2.3843 \times 10^{-2} \mu^2 \lambda - 3.7337 \times 10^{-2} \mu^2 \lambda^2 \\ &\quad + 5.6477 \times 10^{-6} \mu^4 - 2.1007 \times 10^{-5} \mu^4 \lambda - 5.7705 \times 10^{-10} \mu^6 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I} \sin \psi d\psi &= -1.7810 \times 10^{-1} \mu + 2.7016 \times 10^{-1} \mu \lambda - 3.2536 \times 10^{-1} \mu \lambda^2 \\ &\quad + 3.1645 \times 10^{-4} \mu^3 - 9.4226 \times 10^{-4} \mu^3 \lambda + 1.8163 \times 10^{-3} \mu^3 \lambda^2 \\ &\quad - 6.7681 \times 10^{-8} \mu^5 + 2.9984 \times 10^{-7} \mu^5 \lambda - 1.5300 \times 10^{-10} \mu^7 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{gI} \sin \psi d\psi &= -2.1460 \times 10^{-1} \mu + 1.1873 \times 10^{-1} \mu \lambda - 7.6416 \times 10^{-2} \mu \lambda^2 \\ &\quad + 3.2967 \times 10^{-4} \mu^3 - 6.5503 \times 10^{-4} \mu^3 \lambda - 6.0953 \times 10^{-4} \mu^3 \lambda^2 \\ &\quad + 6.8933 \times 10^{-8} \mu^5 + 2.3692 \times 10^{-7} \mu^5 \lambda + 3.7063 \times 10^{-12} \mu^7 \end{aligned} \quad (5.34)$$

次に円輪板部の軸方向変位 δ_{III} は式 (4.2) および (5.8) より

$$\begin{aligned} \delta_{III} &= (w_r)_{r=a} - (w_r)_{r=b} \\ &= \frac{1}{2} (d_2 - \frac{d_3}{2}) (a^2 - b^2) \\ &\quad + \frac{d_3}{2} (a^2 \log a - b^2 \log b) + d_4 \log \frac{a}{b} \end{aligned}$$

これに、式 (5.12) の $d_1 \sim d_3$ を代入し、 $(\varrho^{(I)})_0$, $(\varrho^{(II)})_0$, $(\varrho^{(I')})_0$, $(\varrho^{(II')})_0$ について整理する

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{III}}{A r_i} &= \nu \lambda^{(I)} N \frac{(\varrho^{(I)})_0}{A} \\ &\quad + \nu \lambda^{(II)} O \frac{(\varrho^{(II)})_0}{A} + N \frac{(\varrho^{(II')})_0}{A} \\ &\quad + O \frac{(\varrho^{(I')})_0}{A} + U \end{aligned} \quad (5.35)$$

二に

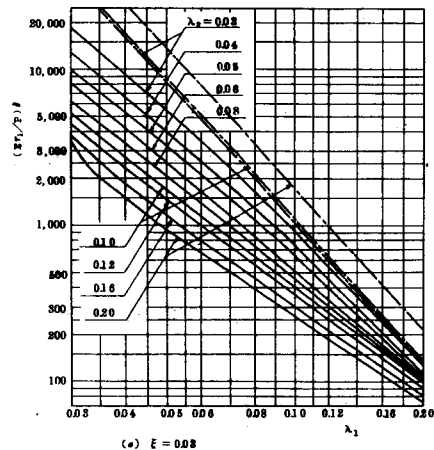


図 5.3 1 ピッチ当りの伸縮量 δ (その1)

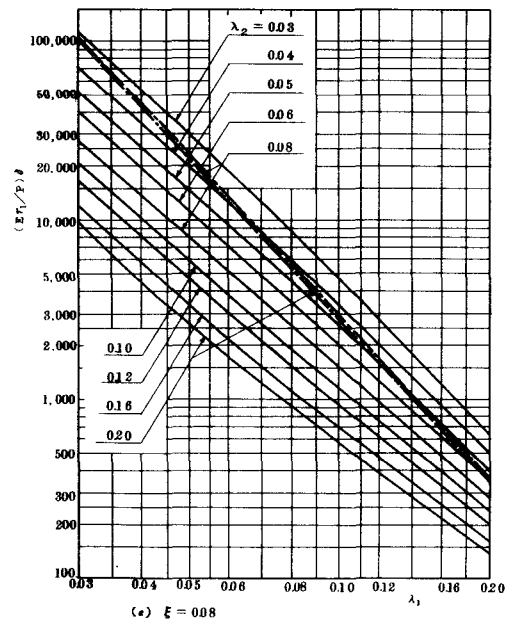
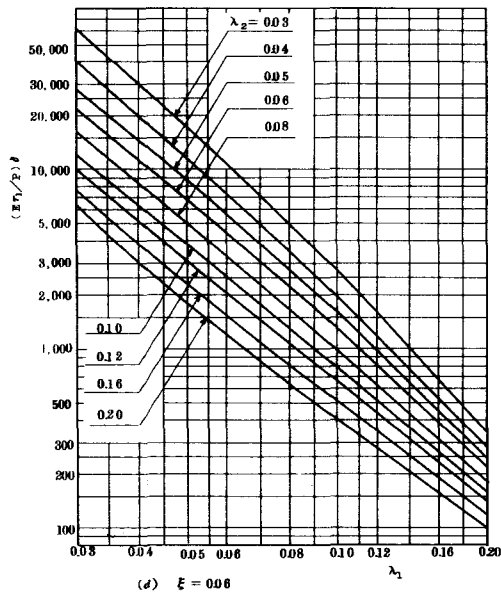
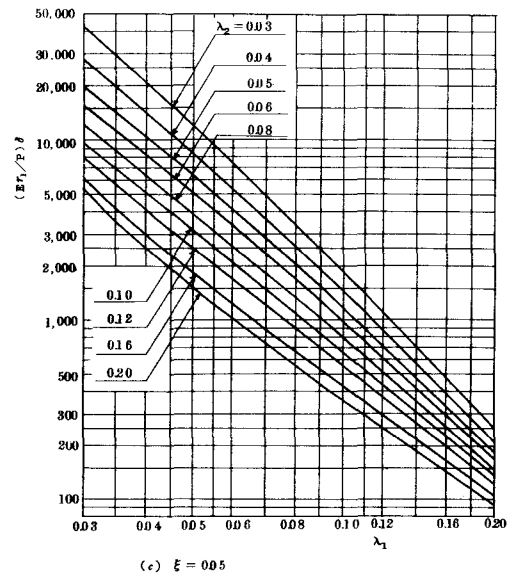
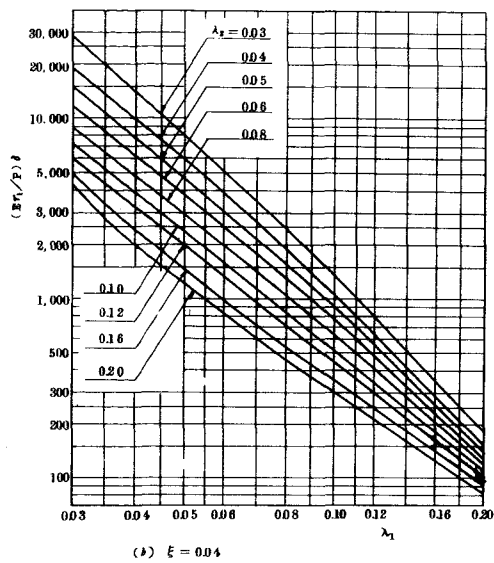


図 5.3 1 ピッチ当りの伸縮量 δ (その 2)

$$N = S + T, \quad O = S \left(\frac{b}{a} \right)^2 + T, \quad S = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{\lambda^{(a)}} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{1}{\lambda^{(w)}} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \log \frac{a}{b}$$

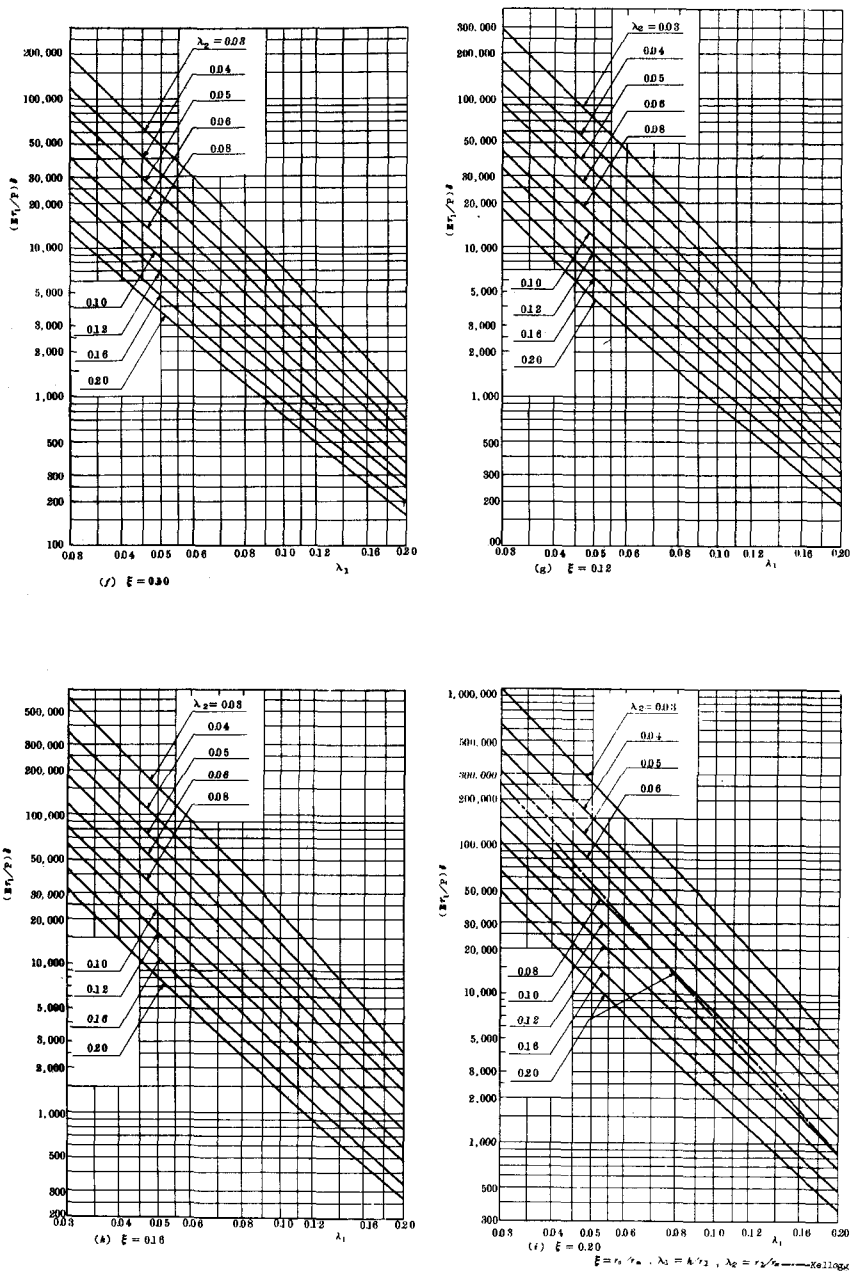


図 5.3 1 ピッチ当りの伸縮量 δ (その 3)

$$U = \frac{m}{4\lambda_1 Q(x)^2} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right\} \left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{2 \left(\frac{b}{a} \right)^2}{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} (\log \frac{a}{b})^2 \right]$$

$$\nu = d/a\phi$$

式(5.31)に式(5.32)~(5.34)を代入すれば、ベローズノピッチ当りの伸縮量 δ が求められる。これを各パラメータについて計算したものを図5.3に示す。なお $\lambda_2 = 0.20$ とする。

5.6. 最大応力と伸縮量との関係

ベローズを伸縮継手として用いる場合等には、応力と伸縮量とを直接結びつけた形の方が便利である。そのため図5.1と5.3とから P を消去すると、次の図5.4が得られる。図5.4を用いれば、直ちに応力と伸縮量との関係がわかる。

5.7 近似公式

図5.1, 5.3, 5.4を公式化することを考える。図5.1および5.3を $0.05 \leq \lambda_1 \leq 0.20$ の範囲で直線と考えると、これを公式化すると次のようになる。

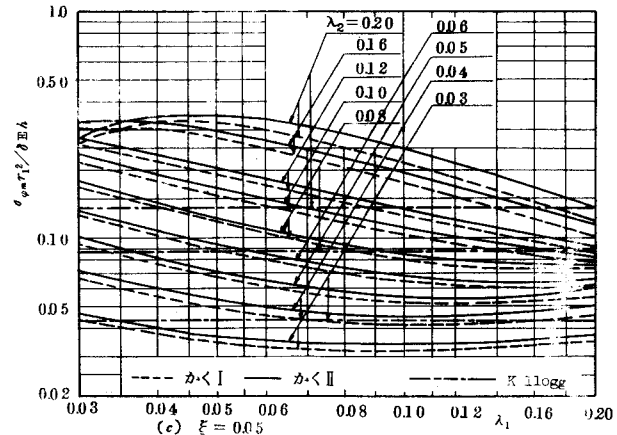
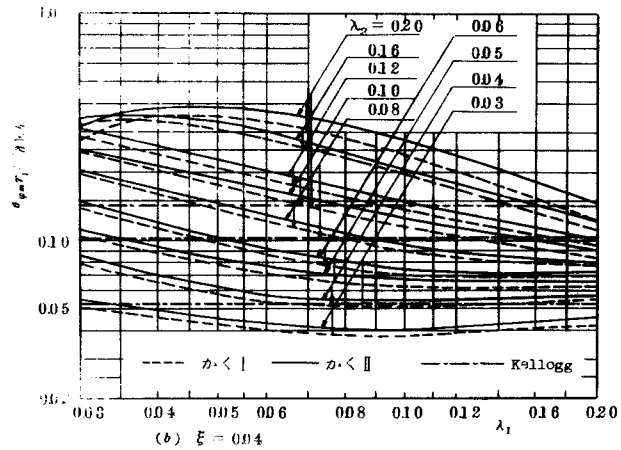
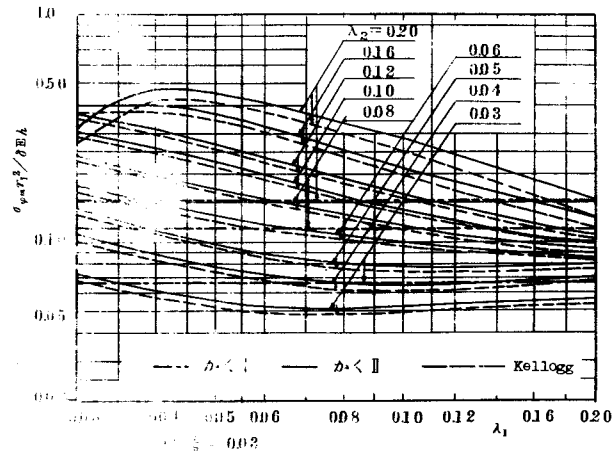


図 5.4 最大応力と伸縮量との関係
(その1)

- (1) 最大応力と軸荷重との関係

$$\frac{\gamma_1 \gamma_m \sigma_{gm}}{P} = A \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^B \quad (5.36)$$

ただし A, B は図 5.5 (a), (b) にグラフで示されている。

- (2) 伸縮量と軸荷重との関係

$$\frac{E \gamma_1 \delta}{P} = C \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^D \quad (5.37)$$

ただし C, D は図 5.5 (c), (d) にグラフで示されている。

- (3) 最大応力と伸縮量との関係

式 (5.36) および (5.37) から P を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\sigma_{gm} \gamma_m}{E \delta} = \frac{A}{C} \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^{D-B} \quad (5.38)$$

式 (5.36) ~ (5.38)

の使用範囲は

$$0.05 \leq \lambda_1 \leq 0.20,$$

$$0.03 \leq \xi, \lambda_2 \leq 0.20$$

でこの範囲での最大誤差は土 5% 程度である。

なお σ_{gm} は σ_{II} の最大応力である。また

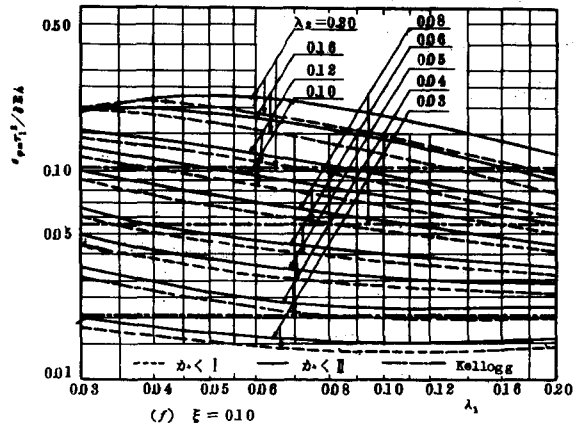
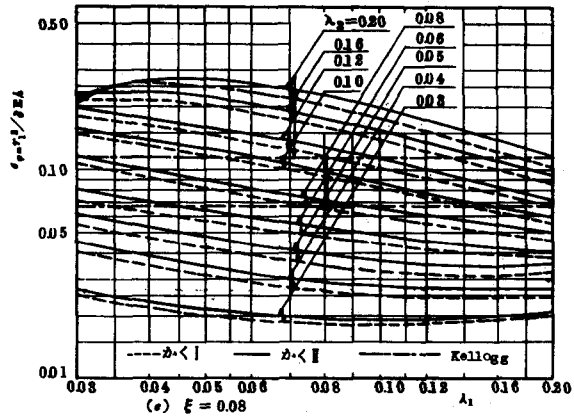
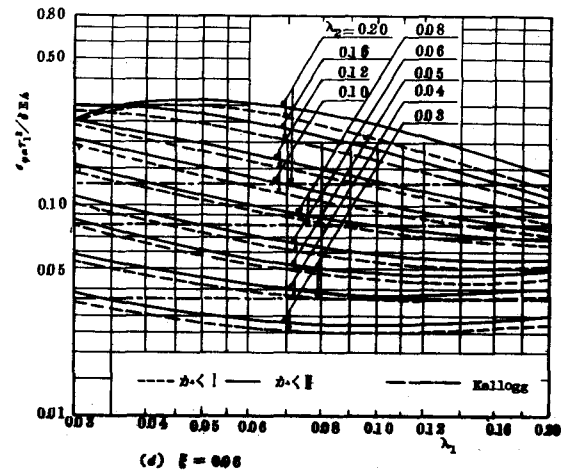


図 5.4 最大応力と伸縮量との関係 (その 2)

場合によつては前章に示した近似式(4.20)～(4.24)を用いた方が計算が簡単で便利なことがある。このときは前章の式を用いてもよい。

5.8 計算例

$r_m = 100 \text{ mm}$,
 $r_1 = 6 \text{ mm}$, $r_0 = 6 \text{ mm}$,
 $h = 0.6 \text{ mm}$ のベローズを考える。まず諸パラメータの値を計算すると

$$\xi = r_0/r_m, \lambda_1 = h/r_1, \lambda_2 = r_1/r_m$$

h = かくの厚さ

r_0 = 円輪板の半幅

r_1 = 波形の半径

r_m = ベローズの平均半径

E = 縦弾性係数

$\sigma_{\theta m}$ = 子午線方向の最大応力

δ = 1ピッチ当りの伸縮量

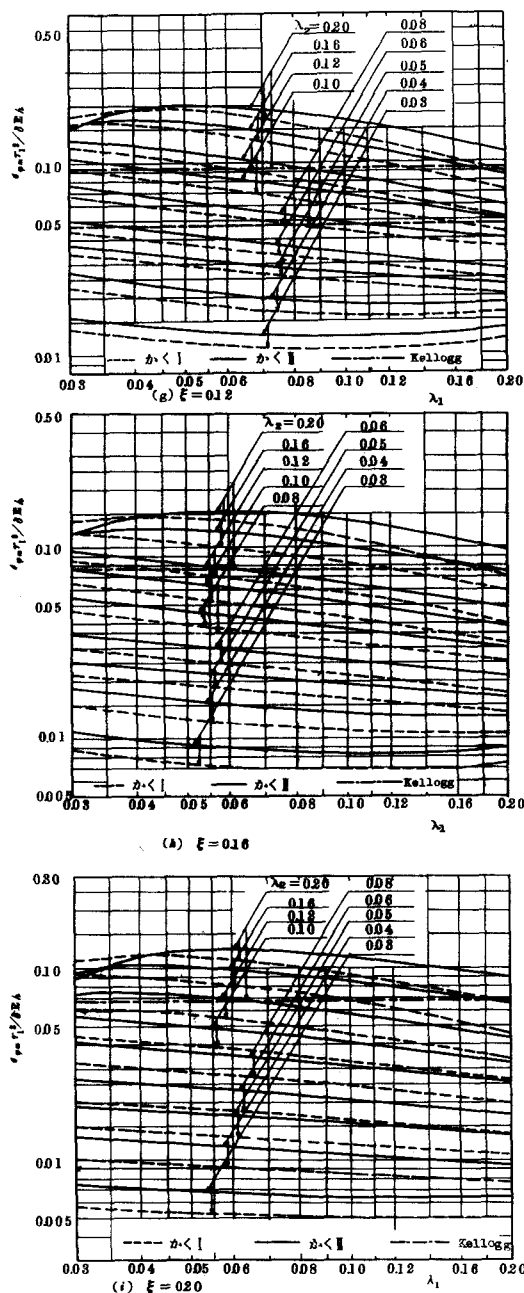
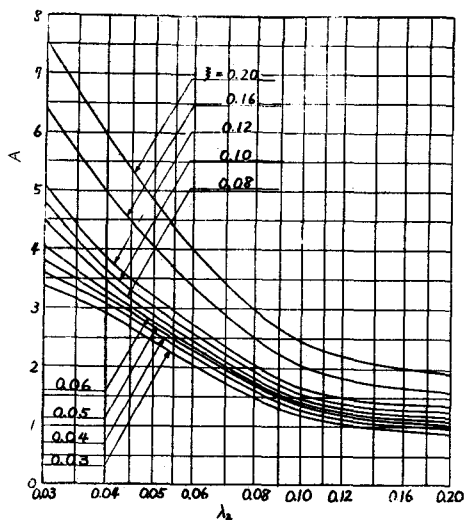
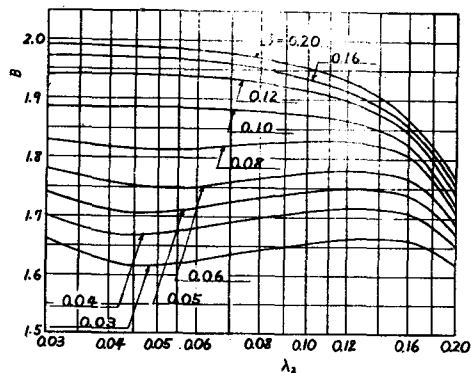


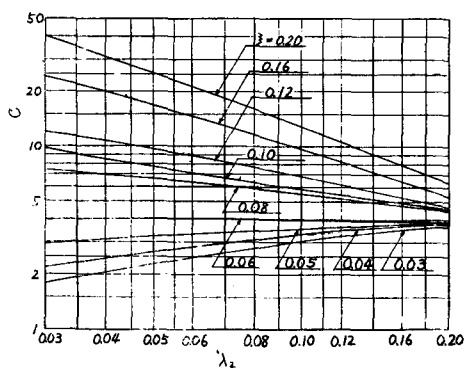
図 5.4 最大応力と伸縮量との関係
(その 3)



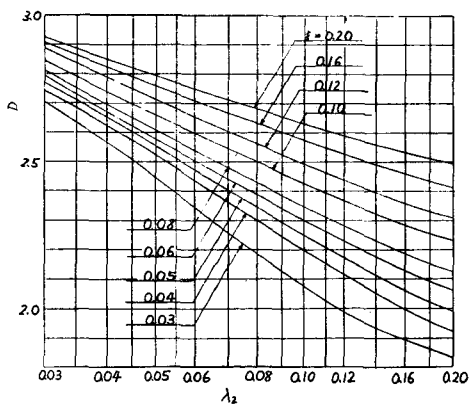
(a) A



(b) B



(c) C



(d) D

5.5 A, B, C, D

5.9.1 ベローズの形状寸法

実験に用いられたベローズは、次の表 5.1 に示す 7 種で、N0.1 ~ 3 は 4 山の端管付、N0.4 ~ 7 は 5 山の端管無しのものである。

表 5.1 実験用ベローズの形状寸法 (図 4.1 参照)

N0.1 ~ 3 : 4 山端管付、N0.4 ~ 7 : 5 山端管無し

N0	外 径 mm	内 径 mm	h mm	r_m mm	r_0 mm	r_1 mm	λ_2 ($=r_1/r_m$)	λ_1 ($=h'/r_1$)	ξ ($=r_0/r_m$)
1	135.87	104.86	0.630	60.18	3.23	4.21	0.0699	0.150	0.0537
2	233.65	183.45	0.720	104.28	6.48	5.71	0.0548	0.126	0.0621
3	320.90	262.08	0.768	145.75	7.03	7.29	0.0500	0.105	0.0482
4	232.22	183.93	0.704	104.04	6.03	5.69	0.0547	0.124	0.0580
5	253.14	203.83	0.773	114.24	5.70	6.24	0.0558	0.124	0.0499
6	255.22	203.29	0.779	114.63	6.47	6.13	0.0534	0.127	0.0564
7	320.74	260.75	0.789	145.37	7.19	7.41	0.0510	0.106	0.0495

5.9.2 実験方法

表 5.1 に示したベローズを基準製作所製の万能試験機で圧縮 (N0.1 ~ 3 は引張りも)、山部頂上外側のひずみをひずみゲージで、また 1 ピッチ当りの伸縮量をカメラで測定した。

(a) ひずみの測定

図 5.7 に示すように、ひずみゲージ (ゲージ長さ 3 mm) を中央 2 山頂上に、 θ 方向、 ϕ 方向に各々 4 枚ずつ計 16 枚添付した。

(b) 伸縮量の測定

1 ピッチ当りの伸縮量は、ベローズの山の頂上部にきわめて細い印をつけカメラで接写し、そのネガフィルム上の 2 印間の距離を投影機で読みとって求めた。なおカメラはベローズの中心軸に対し、対称の位置に 2 台置き、おのおののネガフィルム上の 2 印間の距離の平均値を、その荷重時のベローズの 2 印間の距離とした。なお終変位は、ダイヤルゲージで測定した。

5.9.3 実験値と理論値との比較

以上のようにして求めたひずみおよび伸縮量の実験値を図 5.10 に示

す。図中の理論値は次のようにして求めたものである。

(a) ゲージに現われるひずみおよび伸縮量の理論値

ベローズのような肉厚の薄い構造物では、添付したゲージの厚さの影響を考慮しなければならない。図5.7に示すように、か

くの肉厚 h 、かくの表面からゲージワイヤの中心線までの距離を Δh とすると、曲げの場合ゲージに出るひずみ ε' とかくの表面のひずみ ε との間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \alpha \varepsilon \\ \alpha &= 1 + \frac{2\Delta h}{h} \end{aligned} \right\} (5.39)$$

なお引張り（圧縮）の場合には、このような修正は不要である。

ベローズの山部外側表面のひずみを ε_θ 、 ε_g とすると

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu \frac{\sigma_g}{E} \\ &= \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\phi}}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\phi}}{E} \right) \end{aligned}$$

ここで曲げによるひずみ $\sigma_{\theta\theta}/E$ お

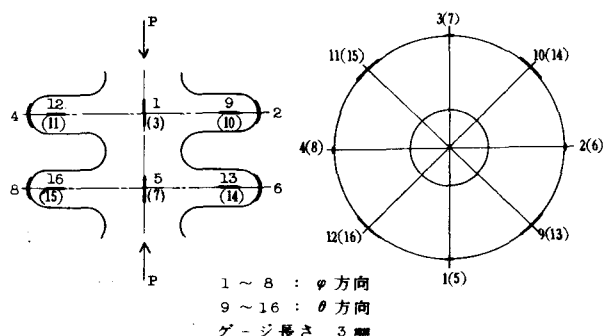


図 5.7 ひずみゲージ添付位置

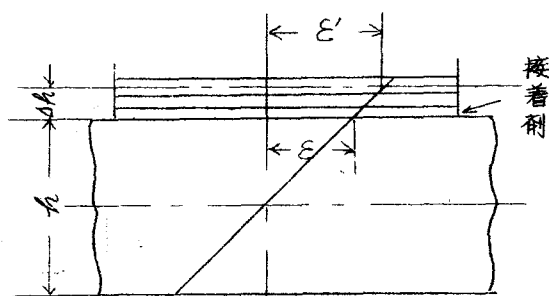


図 5.8 ひずみゲージの厚さによる修正

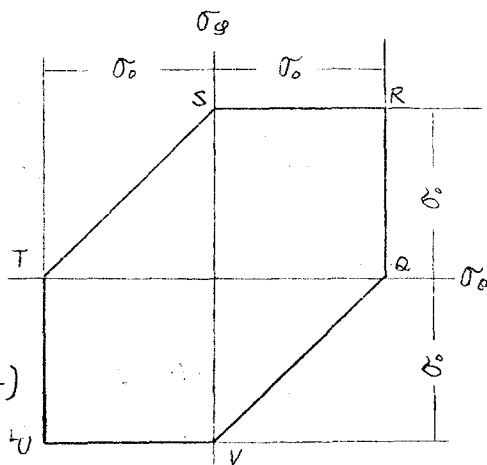


図 5.9 Tresca の降伏条件

よび σ_{bg}/E に修正係数 α を乗じて修正すると、ゲージに現われるひずみ ε_{θ}' は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta}' &= \frac{1}{E} \{ \sigma_{t\theta} + \alpha \sigma_{b\theta} - \nu (\sigma_{tg} + \alpha \sigma_{bg}) \} \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta}' - \nu \sigma_{g}')$$

同様に

$$\varepsilon_{g}' = \frac{1}{E} (\sigma_{g}' - \nu \sigma_{\theta}')$$

ただし

$$\sigma_{\theta}' = \sigma_{t\theta} + \alpha \sigma_{b\theta}, \quad \sigma_{g}' = \sigma_{tg} + \alpha \sigma_{bg}$$

本実験で使用したゲージの厚さは 0.04 mm 、接着剤の厚さはほぼ 0.01 mm であるから、 $\Delta h = 0.03 \text{ mm}$ である。表 5.2 はゲージに現われるひずみの理論値および 1 ピッチ当りの伸縮量の理論値である。表中 $\sigma_{b\theta}$ および σ_{tg} の値は計算図には示さなかったが、実験に用いた形状のものについて電子計算機で別に計算した。

表 5.2 ひずみおよび伸縮量 (理論値)

* 外側圧縮正

N0	1	2	3	4	5	6	7
h (肉厚)	0.630	0.720	0.768	0.704	0.773	0.779	0.789
α	1.095	1.083	1.078	1.085	1.078	1.077	1.076
$\sigma_{t\theta}/P$	-0.08125	-0.05796	-0.04487	-0.05882	-0.04635	-0.04609	-0.04345
$\sigma_{b\theta}/P^*$	0.05402	0.04121	0.02857	0.04102	0.03166	0.03398	0.02747
σ_{tg}/P	0.003735	0.001899	0.001295	0.001957	0.001671	0.001610	0.001263
σ_{bg}/P^*	0.1771	0.1351	0.09368	0.1345	0.1038	0.1114	0.09005
σ_{θ}'/P	-0.14040	-0.10259	-0.07567	-0.10333	-0.080470	-0.082686	-0.073008
σ_{g}'/P	-0.19019	-0.14441	-0.099892	-0.1440	-0.1102	-0.1184	-0.09563
$10^6 \varepsilon_{\theta}'/P$	-3.961	-2.815	-2.176	-2.856	-2.253	-2.239	-2.108
$10^6 \varepsilon_{g}'/P$	-7.085	-5.438	-3.683	-5.408	-4.118	-4.480	-3.527
$10^3 \delta/P$	4.16	6.97	6.56	6.64	4.87	5.66	6.40

(b) ベローズが降伏するときの荷重および伸縮量

ベローズが降伏するときの荷重は次のようにして求める。まず降伏は Tresca の降伏条件にしたがって起こるものとする。図 4.1 のかく I、

かくⅡの内側、外側で応力 σ_0 および σ_g の大きさと符号を考えると、かくⅠの外側には図 5.9 の辺 UV が、内側には辺 ST が、かくⅡの外側には辺 RS が、内側には辺 QV が対応する。これらのうち最も早く降伏するのはかくⅡの外側である。

したがって

$$\sigma_g^{(II)} = \sigma_{tg}^{(II)} + \sigma_{bg}^{(II)} = \sigma_0$$

のとき降伏する。さらに

$$\sigma_{tg}^{(II)} \ll \sigma_{bg}^{(II)}$$

であるから

$$\sigma_{bg}^{(II)} = \sigma_0$$

のときベローズは降伏すると考えてよい。

表 5.3 降伏するときの荷重および伸縮量

N.O.	1	2	3	4	5	6	7
荷重 Kg	177	228	325	230	309	283	336
伸縮量 mm	0.736	1.59	2.13	1.53	1.51	1.60	2.15

このようにして求めた理論値を図 5.10 に実験で示した。

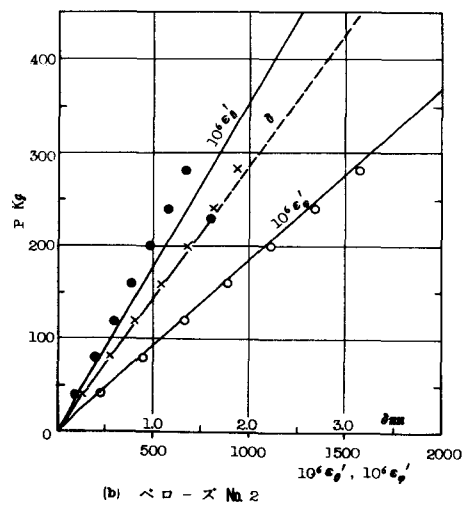
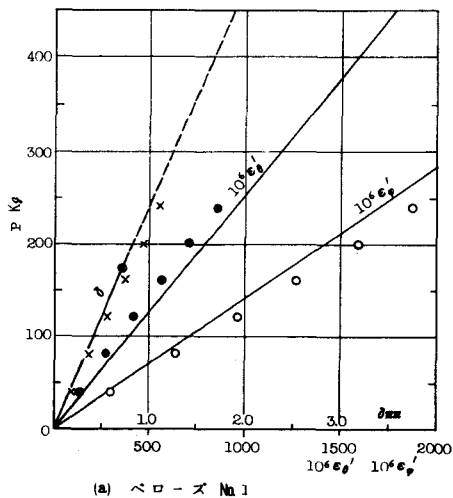
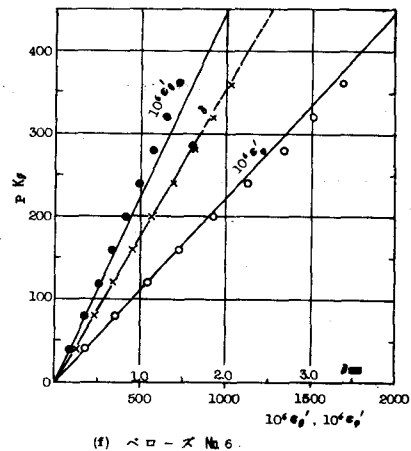
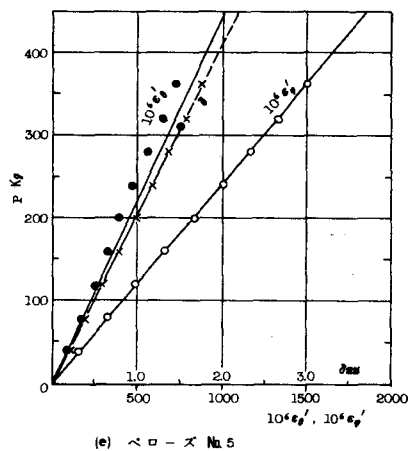
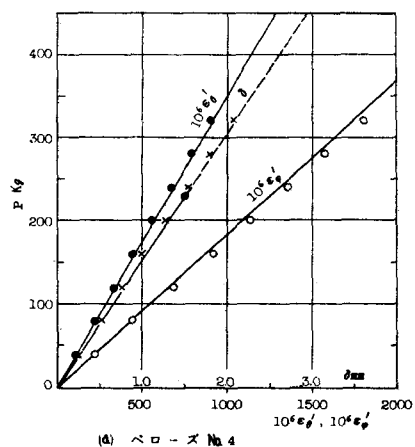
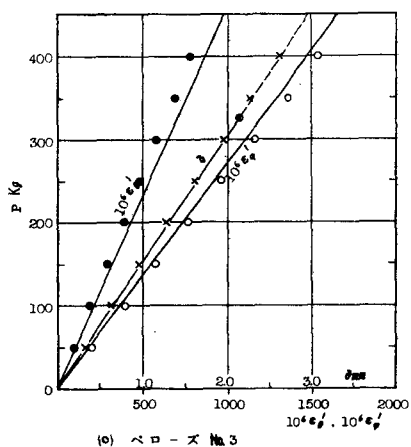
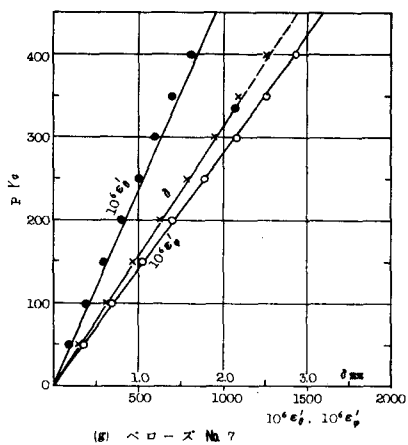


図 5.10 実験値と理論値との比較 (その 1)



(その2)



- $10^6 \epsilon_{\theta}'$ 実験値
- $10^6 \epsilon_{\phi}'$ 実験値
- × δ 実験値
- 理論値
- $\epsilon_{\theta}', \epsilon_{\phi}'$ ゲージに現われるひずみ
- P 軸荷重
- 降伏点

図5.10 実験値と理論値との比較

5.10. 考 察

初めに述べたように第4章では三つの仮定を設けて解析を行なったが、本章ではこれらの仮定を取り除き、できるだけ正確に応力および伸縮量を求めた。本章では設計者の便宜を考えパラメータのとり方を変更しているが、二つの解は図44および45に見るようにはほぼ一致している。

次に他の研究者との比較であるが、前章ですでに F. Salzmann, J. E. Hill, P. E. A. Samoiloff の結果と比較したので、本章では比較的厳密な A. Laura⁽⁸⁾ によるエネルギー解および Kellogg 社の式と比較する。A. Laura らは子午線方向の膜ひずみ $E_{\theta n}$ を省略してひずみエネルギーを算出し、また角変位 ψ の解を5項の級数で近似している。A. Laura らは次の表5.4に示す一例について数値計算を行なっているのので、この場合に対する本解をこれと比較すると表5.4のようになる。

表5.4 本解と A. Laura らによる、エネルギー解との比較

形状: $V_1 = 0.54 \text{ in}$, $a = 13.74 \text{ in}$, $b = 12.53 \text{ in}$
 $R = 0.05 \text{ in}$ ($\xi = 0.04607$, $\lambda = 0.04111$,
 $\lambda_1 = 0.09259$)

() 内は A. Laura らによる解、 $P: \text{lb}$, $\delta: \text{in}$, $\sigma: \text{lb/in}^2$

(a) 応 力

位置	A	C	B	D
$\sigma_{\theta\theta} / \delta$	2.18×10^5 (2.17×10^5)	1.85×10^5 (1.79×10^5)	2.23×10^5 (2.20×10^5)	1.89×10^5 (1.87×10^5)
$\sigma_{\theta\theta} / \delta$	6.67×10^4 (6.51×10^4)	4.21×10^4 (4.11×10^4)	6.82×10^4 (6.61×10^4)	4.36×10^4 (4.21×10^4)
$\sigma_{\theta\theta} / \delta$	2.36×10^3 (2.32×10^3)	3.40×10^3 (3.34×10^3)	2.57×10^3 (2.77×10^3)	3.84×10^3 (3.79×10^3)
$\sigma_{\theta\theta} / \delta$	-9.80×10^4 (-1.01×10^5)	-2.16×10^3 (-2.10×10^3)	1.14×10^5 (1.09×10^5)	-2.83×10^3 (-2.70×10^3)

(b) 伸 び

P / δ	δ_I / δ	δ_{II} / δ	δ_{III} / δ
1.05×10^4 (1.04×10^4)	7.99×10^{-2} (8.00×10^{-2})	8.28×10^{-2} (8.26×10^{-2})	3.37×10^{-1} (3.37×10^{-1})

これを見ると両者はかなりよく一致していると言える。

また Kellogg 社の式 (2.38) および (2.39) を書きなおすと、U 形ベローズに対しては次のようになる。

$$\frac{\sigma_m Y_1^2}{\delta E h} = 0.1875 \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_2}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (5.42)$$

$$\frac{E Y_1 \delta}{P} = \frac{6 \lambda_2}{\lambda_1^3} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_2}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad (0 \leq \xi \leq 2 \lambda_2) \quad (5.43)$$

これらの式から δ を消去すると、最大応力と荷重との関係を表わす式が得られる。

$$\frac{Y_1 Y_m \sigma}{P} = \frac{1.125}{\lambda_1^2} \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_2}\right) \quad (5.44)$$

式 (5.42) は $\xi/\lambda_2 (= Y_0/Y_1)$ が一定ならば最大応力は Y_m に関係なく一定になるというきわめてありな近似式であり、この結果を図 5.4 に一点鎖線で示した。また変位と荷重との関係を示す式 (5.43) および最大応力と荷重との関係を示す式 (5.44) を図示すると図 5.3 および図 5.1 の一点鎖線のようになる。これらを見るといずれも Kellogg 社の式はパラメータのせまい範囲を除き本解と全く合わないことがわかる。またとくに図 5.4 は、ベローズの形状によつては、Kellogg 社の式は同一の伸縮量に対し、応力が数倍も危険側に出ることを示している。

図 5.10 は理論値と実験値とを比較したものである。試験片の種類によつては理論値と実験値とがやや異なるものもあるが、かく試験片を理想的な形状に製作することはきわめて困難であるから、この程度の相違はやむを得ない。またベローズの中央部のノピッチの伸縮量と全体の伸縮量とを比較すると、端部に溶接されている両端部のノ山はおよそ 0.65 ピッチの割合しか果していないことがわかる。

5.11 結 論

本章では U 形ベローズにかゝる理論を用いて、比較的厳密に応力および伸縮量を求め、実験結果および他の研究者の結果と比較検討し、本理論の妥当性を確認した。ここではベローズの形状がわかれば、直ちに最大応力の値および伸縮量を求めることのできる比較的正確で適用範囲の広い設計図表および設計式を製作した。これらを整理すると次のようになる。

(1) 最大応力と軸荷重との関係

図 5.1 または 式 (5.36) ($0.05 \leq \lambda_1 \leq 0.20$)

(2) 伸縮量と軸荷重との関係

図 5.3 または 式 (5.37) ($0.05 \leq \lambda_1 \leq 0.20$)

(3) 最大応力と伸縮量との関係

図 5.4 または 式 (5.38) ($0.05 \leq \lambda_1 \leq 0.20$)

なお最大応力の計算図にはかく I, II の両方の値を示したが、設計に際しては大きい方の値をとって設計すればよい。また場合によっては前章で述べた近似式 (4.20) ~ (4.24) を用いてもよい。

最後に現在設計者がよく用いている Kellogg 社の設計式は、パラメータのせまり範囲を除き、本解と全く合わないことがわかった。

第6章 U形ベローズ

—— 内圧を受ける場合 ——

U形ベローズに軸荷重が作用する場合については、第4章および第5章で述べたが、内圧が作用する場合の研究には *A. Laupa & N. A. Weil* ⁽⁸⁾ の近似解および宮入ら ⁽¹¹⁾ のもの以外にはないようであるから、本章においてこの問題を取り扱う。すなわちここでは前章と同様にかく理論を用いて、内圧を受けるU形ベローズの応力および伸縮量を比較的厳密に求め、これを実験結果および他の研究者の結果と比較検討し、本理論の妥当性を確認する。本章では第4章に示したような設計公式は得られないうが、容易に応力および伸縮量を求めることのできる正確で適用範囲の広い計算図を作製する。本章で求めた解を第4章および第5章において述べた軸力のみが作用する場合の解と組み合わせると、内圧および軸力が作用する一般の場合の解が得られる。

6.1 円環かく部の関係式

ベローズの端部から離れた部分では、応力および変形の状態は軸方向に周期的であるから、その一要素と考えられる図4.1の $ACMDB$ について考察する。まず円環かくの軸対称問題に対する基礎微分方程式およびその解は式(1.3)および(1.4)で与えられる。図4.1に示す円環かくのうち、外側に出る部分 AC をかく I 、内側にはいる部分 DB をかく II とし、二つのかくを示すために諸記号の右肩に添字 (I) および (II) をつけると

$$\left. \begin{aligned} \Delta^{(I)} &= -g \Delta^{(II)} \equiv A \\ g &= (b^2 - d^2) / (a^2 - d^2) \\ P^{(I)} &= (ma / Eh^2) (pr/2) \\ P^{(II)} &= (mb / Eh^2) (pr/2) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$\gamma_1^{(I)}$, $\gamma_1^{(II)}$, $\lambda^{(I)}$, $\lambda^{(II)}$, $\mu^{(I)}$ および $\mu^{(II)}$ は式(2.1)にすでに示されているので、ここでは省略する。

かく I および II に対し、 $\varphi = \pi/2$ すなわち $\psi = 0$ (図4.1の点 A および B) において、対称性により $\varphi = 0$ および $Q = 0$ (すなわち $\varepsilon_\varphi = 0$)。

また η 関数はこの点において

$\eta_{1R} = 1, \quad \eta_{1I} = \eta_{2R} = \eta_{2I} = \eta_{\theta R} = \eta_{\theta I} = 0$
したがって式(1.4)より

$$C_1 = C_2 = 0$$

ゆえに式(1.4)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} + C_4^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} + A^{(I)} \eta_{\theta I}^{(I)} \\ \chi_{\varphi}^{(I)} &= C_3^{(I)} \eta_{2I}^{(I)} - C_4^{(I)} \eta_{2R}^{(I)} - A^{(I)} \eta_{\theta R}^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} + C_4^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} + A^{(II)} \eta_{\theta I}^{(II)} \\ \chi_{\varphi}^{(II)} &= C_3^{(II)} \eta_{2I}^{(II)} - C_4^{(II)} \eta_{2R}^{(II)} - A^{(II)} \eta_{\theta R}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

定数 $C_3^{(I)}, C_4^{(I)}, C_3^{(II)}, C_4^{(II)}$ は円環かくと円輪板との接続条件によって定められる。なお各内力成分(すべて単位長さ当り)および各変位成分は式(1.19) ~ (1.25)によって与えられる。

6.2 円輪板部の関係式⁽²⁾

円輪板の部分の r 方向変位 w_r は次式で与えられる。

$$w_r = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^2 \log r + C_4 \log r - \frac{P}{D} \frac{r^4}{64} \quad (6.4)$$

ここで

$$C_4 = d_1, \quad 2C_2 + C_3 = d_2, \quad 2C_3 = d_3$$

とおくと

$$\frac{dw_r}{dr} = \frac{d_1}{r} + d_2 r + d_3 r \log r - \frac{P}{D} \frac{r^3}{16} \quad (6.5)$$

$$\frac{d^2 w_r}{dr^2} = d_2 + d_3 - \frac{d_1}{r^2} + d_3 \log r - \frac{3Pr^2}{16D} \quad (6.6)$$

曲げモーメント M_r およびせん断力 Q_r は式(4.3) および(4.4) で与えられる。これに式(6.5), (6.6) を代入すると、次のようになる。

$$-\frac{M_r}{D} = d_2(1+\nu) + d_3 \left\{ 1 + (1+\nu) \log r \right\} - (1-\nu) \frac{d_1}{r^2} - \frac{(\nu+3)Pr^2}{16D} \quad (6.7)$$

$$-\frac{Q_r}{D} = \frac{2d_3}{r} - \frac{Pr}{2D} \quad (6.8)$$

なお半径方向および円周方向の面内変位は式(5.4) および(5.5) で、また面内力は式(5.6) および(5.7) で与えられる。

6.3 接 続 条 件

円環かく部と円輪板部の接続条件は式(5.10)と同様である。この式(5.10)に前述の円環かくおよび円輪板についての諸関係式を用いると、次の9元連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 2A_0 h + \frac{B_0 h}{a^2} &= \frac{E h^2}{m a} \{ (\chi_g^{(I)})_0 + 2P^{(I)} \} \\
 2A_0 h + \frac{B_0 h}{b^2} &= -\frac{E h^2}{m b} \{ (\chi_g^{(II)})_0 + 2P^{(II)} \} \\
 -\frac{1}{2G} \left\{ 2A_0 \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) a + \frac{B_0}{a} \right\} &= \frac{h}{m} \left\{ -\nu (\chi_g^{(I)})_0 + \frac{(\chi_g^{(I)'})_0}{\lambda^{(I)}} + P^{(I)} (1-2\nu) \right\} \\
 -\frac{1}{2G} \left\{ 2A_0 \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) b + \frac{B_0}{b} \right\} &= \frac{h}{m} \left\{ -\nu (\chi_g^{(II)})_0 + \frac{(\chi_g^{(II)'})_0}{\lambda^{(II)}} + P^{(II)} (1-2\nu) \right\} \\
 -D \left\{ d_2 (1+\nu) + d_3 \{ 1 + (1+\nu) \log a \} - (1-\nu) \frac{d_1}{a^2} - (\nu+3) \frac{P a^2}{16D} \right\} \\
 &= -\frac{D}{\gamma_1} \{ (\varrho^{(I)'})_0 + \nu \lambda^{(I)} (\varrho^{(I)})_0 \} \\
 -D \left\{ d_2 (1+\nu) + d_3 \{ 1 + (1+\nu) \log b \} - (1-\nu) \frac{d_1}{b^2} - (\nu+3) \frac{P b^2}{16D} \right\} \\
 &= \frac{D}{\gamma_1} \{ (\varrho^{(II)'})_0 + \nu \lambda^{(II)} (\varrho^{(II)})_0 \} \\
 -D \frac{2d_3}{a} + \frac{P a}{2} &= \frac{\pi(a^2 - d^2)P}{2\pi a} \\
 -D \frac{2d_3}{b} + \frac{P b}{2} &= \frac{\pi(b^2 - d^2)P}{2\pi b} \\
 \frac{d_1}{a} + d_2 a + d_3 a \log a - \frac{P a^3}{16D} &= (\varrho^{(I)})_0 \\
 \frac{d_1}{b} + d_2 b + d_3 b \log b - \frac{P b^3}{16D} &= (\varrho^{(II)})_0
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

式(6.9)を変形すると、次の式(6.10)および(6.11)のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{(1+\nu)h}{4\pi b} (2G\nu - E) (\chi^{(II)})_0 - \frac{1+\nu}{2b} \frac{Gh}{m\lambda^{(II)}} (\chi^{(II)'})_0 \\
 B_0 &= -\frac{(1+\nu)h}{2\pi} \left\{ -E \left(1 - \frac{2}{1+\nu}\right) + 2G\nu \right\} (\chi^{(II)})_0 + \frac{Gh(1+\nu)b}{m\lambda^{(II)}} (\chi^{(II)'})_0 \\
 d_1 &= \frac{b}{2} (\varrho^{(II)})_0 + \frac{b^2}{2\gamma_1} (\varrho^{(II)'})_0 + \frac{b^2}{2} d_3 - \frac{P b^4}{16D} \\
 d_2 &= \frac{1}{2b} (\varrho^{(II)})_0 - \frac{1}{2\gamma_1} (\varrho^{(II)'})_0 - \frac{d_3}{2} (1+2\log b) + \frac{P b^2}{8D} \\
 d_3 &= -\frac{P d^2}{4D}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

ただし

$$(\chi^{(II)})_0 = (\chi_g^{(II)})_0 + 2P^{(II)}, \quad (\chi^{(II)'})_0 = (\chi_g^{(II)'})_0 + \lambda P^{(II)}, \quad ' = d/dg$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E}{g}(\chi^{(I)})_0 - (1+\nu) \left\{ \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \nu + \frac{E}{2g} \left\{ -\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \right\} \right\} (\chi^{(II)})_0 \\
& \quad + \frac{1+\nu}{\lambda^{(II)}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\chi^{(II)})'_0 = 0 \\
& \nu(\chi^{(II)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(II)}} (\chi^{(II)})'_0 - (1+\nu) \left[\frac{\nu}{2} \left\{ \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right\} - \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \frac{E}{4g} \right] (\chi^{(II)})_0 \\
& \quad + \frac{1+\nu}{2\lambda^{(II)}} \left\{ \left(1 - \frac{2}{1+\nu} \right) \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right\} (\chi^{(II)})'_0 = 0 \\
& 2\lambda^{(I)}(\varrho^{(II)})_0 + (\varrho^{(II)})_0 + \frac{\gamma_1}{2} \left\{ \frac{b(1-\nu)}{a^2} - \frac{1+\nu}{b} \right\} (\varrho^{(II)})_0 + \frac{1}{2} \left\{ (1-\nu) \frac{b^2}{a^2} + (1+\nu) \right\} (\varrho^{(II)})'_0 \\
& \quad + \left\{ \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + (1+\nu) \log \frac{b}{a} \right\} \gamma_1 d_3 - \frac{p b^2 \gamma_1}{16D} \left\{ 2(1+\nu) + \frac{b^2}{a^2} (1-\nu) - \frac{a^2}{b^2} (3+\nu) \right\} = 0 \\
& (\varrho^{(II)})_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (\varrho^{(II)})_0 - \frac{1}{2\lambda^{(II)}} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) (\varrho^{(II)})'_0 \\
& \quad - \frac{a d_3}{2} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 - 2 \log \frac{b}{a} \right\} + \frac{p b^2 a}{16D} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

二に式(6.10)は A_0, B_0, d_1, d_2, d_3 を $C_3^{(I)}, C_4^{(II)}, C_3^{(II)}, C_4^{(II)}$ により表わす関係式であり、式(6.11)はこれら4個の定数 $C_3^{(I)}, C_4^{(II)}, C_3^{(II)}, C_4^{(II)}$ に関する4元連立方程式である。式(6.11)に式(6.2)および(6.3)を代入すると、次の $C_3^{(I)}/A = X_1, C_3^{(II)}/A = X_2, C_4^{(II)}/A = X_3, C_4^{(II)}/A = X_4$ に関する4元連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 &= b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 &= b_2 \\
a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 &= b_3 \\
a_{41} X_1 + a_{42} X_2 + a_{43} X_3 + a_{44} X_4 &= b_4
\end{aligned} \right\} \tag{6.12}$$

ただし

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\eta_{2I}^{(I)})_0 \\
a_{12} &= -(\eta_{2R}^{(II)})_0 \\
a_{13} &= \alpha(\eta_{2I}^{(II)})_0 - K(\eta_{2I}^{(II)})'_0 \\
a_{14} &= -\alpha(\eta_{2R}^{(II)})_0 + K(\eta_{2R}^{(II)})'_0 \\
b_1 &= (\eta_{gR}^{(I)})_0 - g \left\{ \alpha(\eta_{gR}^{(I)})_0 - K(\eta_{gR}^{(I)})'_0 \right\} - N \\
a_{21} &= \nu(\eta_{2I}^{(I)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(I)}} (\eta_{2I}^{(I)})'_0 \\
a_{22} &= -\nu(\eta_{2R}^{(I)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(I)}} (\eta_{2R}^{(I)})'_0
\end{aligned}$$

$$a_{23} = C(\eta_{2I}^{(II)})_0 + F(\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$a_{24} = -C(\eta_{2R}^{(II)})_0 - F(\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$b_2 = \nu(\eta_{gR}^{(I)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(II)}}(\eta_{gR}^{(II)})_0 - g \{ C(\eta_{gR}^{(II)})_0 + F(\eta_{gR}^{(II)'})_0 \} - 0$$

$$a_{31} = \nu(\eta_{2R}^{(I)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(I)}}(\eta_{2R}^{(I)'})_0$$

$$a_{32} = \nu(\eta_{2I}^{(I)})_0 + \frac{1}{\lambda^{(I)}}(\eta_{2I}^{(I)'})_0$$

$$a_{33} = M(\eta_{2R}^{(II)})_0 + I(\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$a_{34} = M(\eta_{2I}^{(II)})_0 + I(\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$b_3 = -\nu(\eta_{gI}^{(I)})_0 - \frac{1}{\lambda^{(II)}}(\eta_{gI}^{(II)})_0 + g \{ M(\eta_{gI}^{(II)})_0 + I(\eta_{gI}^{(II)'})_0 \} - J$$

$$a_{41} = (\eta_{2R}^{(I)})_0$$

$$a_{42} = (\eta_{2I}^{(I)})_0$$

$$a_{43} = -\alpha(\eta_{2R}^{(II)})_0 + K(\eta_{2R}^{(II)'})_0$$

$$a_{44} = -\alpha(\eta_{2I}^{(II)})_0 + K(\eta_{2I}^{(II)'})_0$$

$$b_4 = -(\eta_{gI}^{(I)})_0 - g \{ \alpha(\eta_{gI}^{(II)})_0 - K(\eta_{gI}^{(II)'})_0 \} - L$$

ここに

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = \frac{2\xi}{1 - \xi^2}$$

$$\gamma = \log \frac{a}{b} = \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi}$$

$$C = \alpha \nu - \beta$$

$$F = \frac{1}{\lambda^{(II)}} (\nu \beta - \alpha)$$

$$M = -(\beta + \nu \alpha)$$

$$I = -\frac{1}{\lambda^{(II)}} (\alpha + \nu \beta)$$

$$K = -\frac{\beta}{\lambda^{(II)}}$$

$$N = \frac{2P^{(II)} + (2\alpha + \beta)P^{(I)}}{A}$$

$$O = \frac{(2\nu - 1)P^{(I)} - (2C + \lambda^{(II)}F)P^{(II)}}{A}$$

$$J = \frac{S}{Y}$$

$$L = \frac{T}{Y}$$

$$Y = \frac{8\hbar}{\pi a} \left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{d^2}{b^2} \right)$$

$$S = \frac{4d^2}{b^2} R + W$$

$$R = \frac{1-U}{2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + (1+U) \log \frac{b}{a}$$

$$W = 4\beta \{ (1+U)\beta + 2\alpha \}$$

$$T = \frac{4d^2}{b^2} Z + U$$

$$Z = -\frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 - 2 \log \frac{b}{a} \right)$$

$$U = 4\beta^2$$

また $(\eta_{2R}^{(I)})_0$, $(\eta_{2R}^{(II)})_0$ 等は $\eta_{2R}^{(I)}$, $d\eta_{2R}^{(I)}/d\varphi$ 等の $\varphi=0$ における値で、式(5.15)によって μ と λ のべき級数で表わされている。上記の式(6.12)を電子計算機を用いて、数値的に解くと $X_1 \sim X_4$ が求まる。なお計算に際しては $U=0.3$ とする。

6.4 応 力

子午線方向 (φ 方向) の膜応力 $\sigma_{t\varphi}$ は、式(1.20)より

$$\sigma_{t\varphi} = \frac{N_\varphi}{h} = \frac{E\hbar}{m\gamma_c(1+\lambda \sin \varphi)} \{ \chi_\varphi \cos \varphi + A \sin \varphi + P(2+\lambda \sin \varphi) \} \quad (6.13)$$

かく I, II における $\sigma_{t\varphi}$ を $\sigma_{t\varphi}^{(I)}$, $\sigma_{t\varphi}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\sigma_{t\varphi}^{(I)}}{\rho} = \frac{K' \lambda^{(I)}}{(1+\lambda^{(I)} \cos \varphi)} \left\{ \frac{\chi_\varphi^{(I)}}{A} \sin \varphi + \cos \varphi + (2+\lambda^{(I)} \cos \varphi) \frac{P^{(I)}}{A} \right\} \quad (6.14)$$

$$\frac{\sigma_{t\varphi}^{(II)}}{\rho} = \frac{K' \lambda^{(II)}}{(1+\lambda^{(II)} \cos \varphi)} \left\{ \frac{\chi_\varphi^{(II)}}{A} \sin \varphi - \cos \varphi + (2+\lambda^{(II)} \cos \varphi) \frac{P^{(II)}}{A} \right\} \quad (6.15)$$

円周方向 (θ 方向) の膜応力 $\sigma_{t\theta}$ は、式(1.21)より

$$\sigma_{t\theta} = \frac{N_\theta}{h} = \frac{E\hbar}{m\gamma_c} \left(\frac{d\chi_\varphi}{d\varphi} + \lambda P \right) \quad (6.16)$$

かく I, II における $\sigma_{t\theta}$ を $\sigma_{t\theta}^{(I)}$, $\sigma_{t\theta}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\sigma_{t\theta}^{(I)}}{\rho} = -K' \left(\frac{1}{A} \frac{d\chi_\varphi^{(I)}}{d\varphi} - \frac{\lambda^{(I)} P^{(I)}}{A} \right) \quad (6.17)$$

$$\frac{\sigma_{t\theta}^{(II)}}{\rho} = -K' \left(\frac{1}{A} \frac{d\chi_\varphi^{(II)}}{d\varphi} - \frac{\lambda^{(II)} P^{(II)}}{A} \right) \quad (6.18)$$

φ 方向の曲げ応力 $\sigma_{b\varphi}$ は、式(1.22)から

$$\sigma_{b\varphi} = \frac{6M_\varphi}{h^2} = -\frac{6D}{r_1 h^2} \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} + U \frac{\lambda \cos \varphi}{1+\lambda \sin \varphi} \varphi \right) \quad (6.19)$$

括弧内第2項は第1項に比べ微小なのでこれを省略する。かくI, IIにおける $\sigma_{\theta\varphi}$ を $\sigma_{\theta\varphi}^{(I)}$, $\sigma_{\theta\varphi}^{(II)}$ とすると

$$\frac{\sigma_{\theta\varphi}^{(I)}}{P} = \frac{3K'}{\pi} \frac{1}{A} \frac{d\varrho^{(I)}}{d\psi} \quad (\text{右側圧縮を正とする}) \quad (6.20)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\varphi}^{(II)}}{P} = \frac{3K'}{\pi} \frac{1}{A} \frac{d\varrho^{(II)}}{d\psi} \quad (\text{右側圧縮を正とする}) \quad (6.21)$$

θ 方向の曲げ応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は、式(1.23)から

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{6}{R^2} M_\theta = -\frac{D}{r_1} \frac{6}{R^2} \left(\nu \frac{d\varrho}{d\psi} + \frac{\lambda \cos\psi}{1+\lambda \sin\psi} \varrho \right) \quad (6.22)$$

かくI, IIにおける $\sigma_{\theta\theta}$ を $\sigma_{\theta\theta}^{(I)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(II)}$ とすると、

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(I)}}{P} = \frac{3K'}{\pi} \left(\frac{\nu}{A} \frac{d\varrho^{(I)}}{d\psi} - \frac{\lambda^{(I)} \sin\psi}{1+\lambda^{(I)} \cos\psi} \frac{\varrho^{(I)}}{A} \right) \quad (\text{右側圧縮を正とする}) \quad (6.23)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(II)}}{P} = \frac{3K'}{\pi} \left(\frac{\nu}{A} \frac{d\varrho^{(II)}}{d\psi} - \frac{\lambda^{(II)} \sin\psi}{1+\lambda^{(II)} \cos\psi} \frac{\varrho^{(II)}}{A} \right) \quad (\text{右側圧縮を正とする}) \quad (6.24)$$

二二に

$$K' = \frac{(2-\lambda_2)(2\xi+\lambda_2)}{2\lambda_1 \lambda_2^2}$$

$$P^{(I)} = \frac{\lambda^{(I)2}}{\lambda^{(I)}} \frac{b^2}{a^2-d^2} A$$

$$P^{(II)} = -\lambda^{(II)} \frac{b^2}{a^2-d^2} A$$

$$\frac{\chi_\varphi^{(I)}}{A} = x_1 \eta_{2I} - x_2 \eta_{2R} - \eta_{\varphi R}^{(I)}$$

$$\frac{\chi_\varphi^{(II)}}{A} = x_3 \eta_{2I}^{(II)} - x_4 \eta_{2R}^{(II)} + \eta_{\varphi R}^{(II)}$$

$$\frac{1}{A} \frac{d\chi_\varphi^{(I)}}{d\psi} = x_1 \frac{d\eta_{2I}^{(I)}}{d\psi} - x_2 \frac{d\eta_{2R}^{(I)}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\varphi R}^{(I)}}{d\psi}$$

$$\frac{1}{A} \frac{d\chi_\varphi^{(II)}}{d\psi} = x_3 \frac{d\eta_{2I}^{(II)}}{d\psi} - x_4 \frac{d\eta_{2R}^{(II)}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi R}^{(II)}}{d\psi}$$

$$\frac{\varrho^{(I)}}{A} = x_1 \eta_{2R}^{(I)} + x_2 \eta_{2I}^{(I)} + \eta_{\varphi I}^{(I)}$$

$$\frac{\varrho^{(II)}}{A} = x_3 \eta_{2R}^{(II)} + x_4 \eta_{2I}^{(II)} - \eta_{\varphi I}^{(II)}$$

$$\frac{1}{A} \frac{d\varrho^{(I)}}{d\psi} = x_1 \frac{d\eta_{2R}^{(I)}}{d\psi} + x_2 \frac{d\eta_{2I}^{(I)}}{d\psi} + \frac{d\eta_{\varphi I}^{(I)}}{d\psi}$$

$$\frac{1}{A} \frac{d\varrho^{(II)}}{d\psi} = x_3 \frac{d\eta_{2R}^{(II)}}{d\psi} + x_4 \frac{d\eta_{2I}^{(II)}}{d\psi} - \frac{d\eta_{\varphi I}^{(II)}}{d\psi}$$

円輪板の半径方向(r 方向)の曲げモーメント M_r は式(6.7)に式(6.10)を代入すると

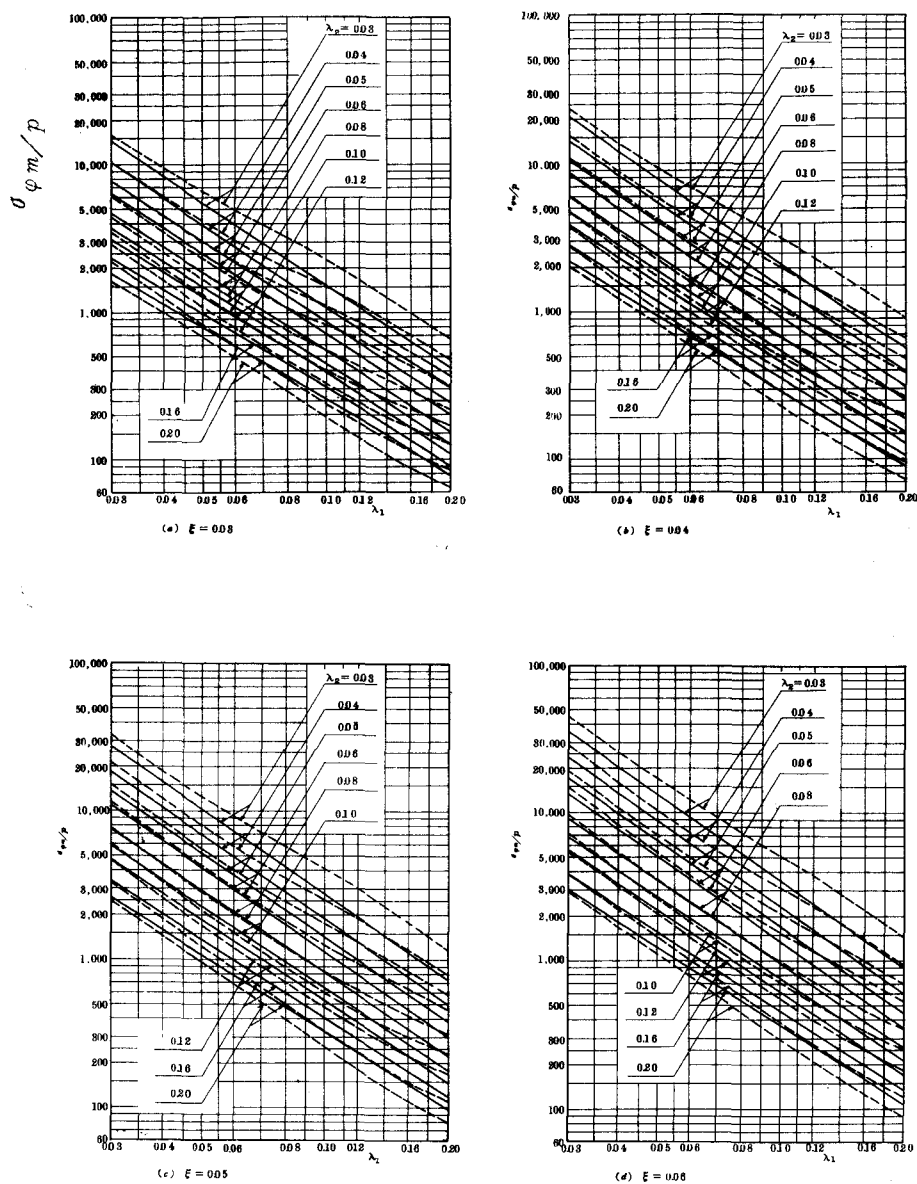


図 6.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\varphi m}$ の計算図 (その 1)

$$\begin{aligned}
 -\frac{M\gamma r_1}{D} = & -\frac{\lambda^{(II)}}{2} \left\{ (1+\nu) - \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) \right\} (2\mathcal{Q}^{(II)})_0 - \frac{1}{2} \left\{ (1+\nu) + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) \right\} (2\mathcal{Q}^{(II)})_0 \\
 & + \lambda^{(II)} \left\{ 2(1+\nu) + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) - \frac{r^2}{b^2} (\nu+3) - \frac{2d^2}{b^2} \left\{ (1+\nu)(1+2\log b) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) - 2 - 2(1+\nu)\log r \right\} \right\} \frac{Pb^2 r_1}{16D} \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

- 81 -

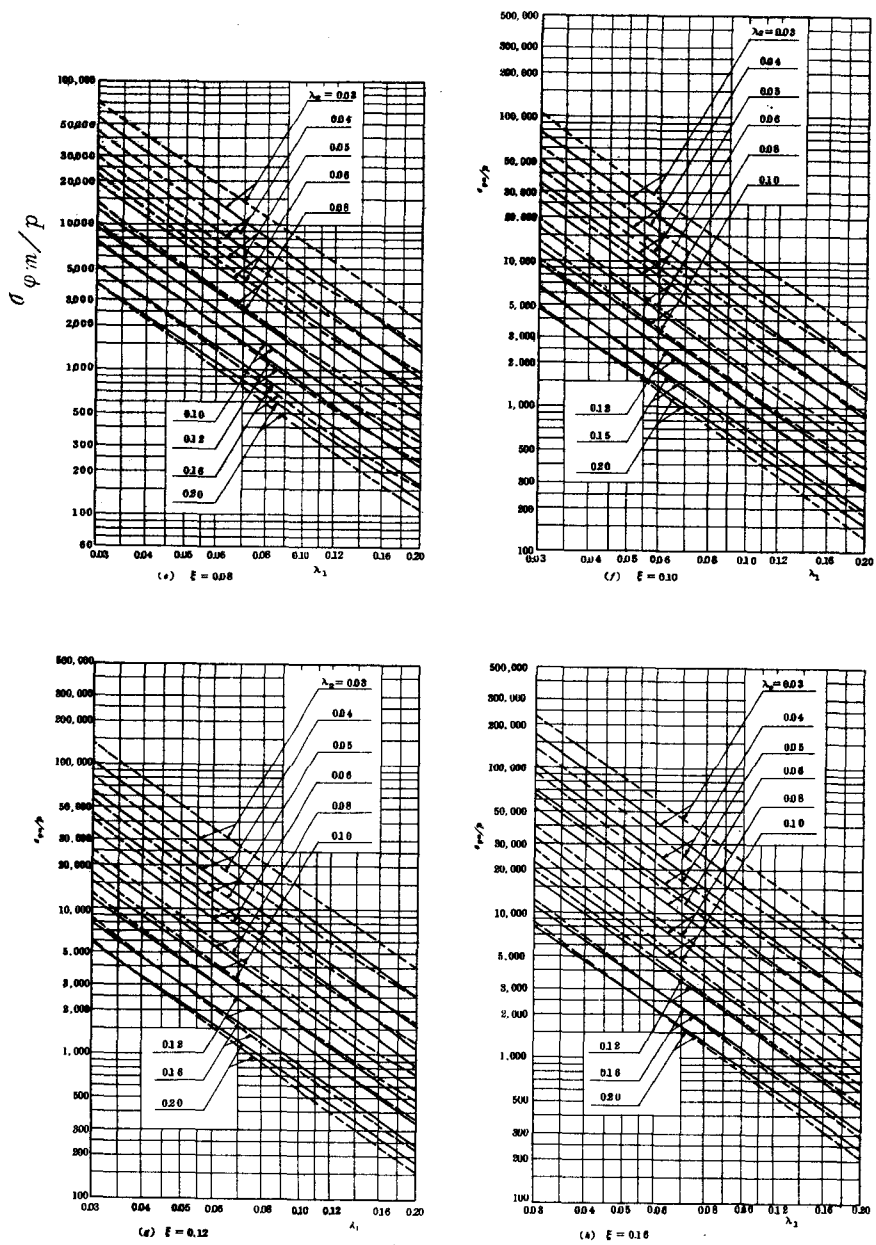


図 6.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\varphi m}$ の計算図 (その 2)

これより r 方向の曲げモーメント σ_{br} は

$$\frac{\sigma_{br}}{p} = \frac{3K'}{m} \left\{ F \frac{(\varphi_{\theta\theta})_0}{A} + G \frac{(\varphi_{\theta\theta'})_0}{A} + H' \right\} \quad (\sigma_{br} \text{ は下層圧縮を正とする}) \quad (6.26)$$

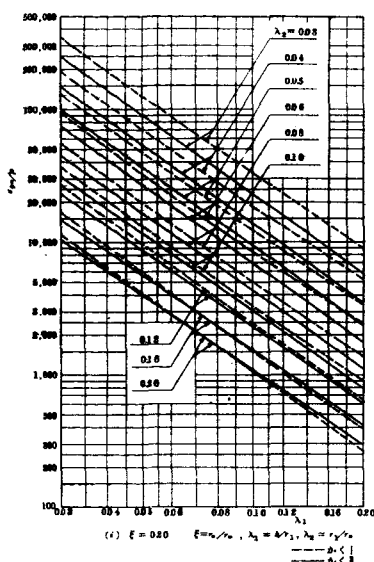


図 6.1 子午線方向最大応力値 $\sigma_{\varphi m}$ の計算図 (その 3)

二二に

$$F' = \frac{\lambda^{(II)}}{2} \left\{ (1+\nu) - \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) \right\}$$

$$G' = \frac{1}{2} \left\{ (1+\nu) + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) \right\}$$

$$H' = -\lambda^{(II)} \left[2(1+\nu) + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) - \frac{r^2}{b^2} (1-\nu) \right. \\ \left. - \frac{2d^2}{b^2} \left\{ (1-\nu)(1+2\log b) + \frac{b^2}{r^2} (1-\nu) \right. \right. \\ \left. \left. - 2-2(1+\nu)\log r \right\} \right] \frac{m}{8\lambda} \frac{b^2}{a^2-d^2}$$

以上の諸関係式を用いて応力の計算を行なった結果、上の諸応力のうち設計上問題となるのは $\sigma_{b\varphi}$ だけであるから、かく I およびかく II におけるこの最大値 $\sigma_{\varphi m}$ を求めて、図 6.1 に示した。ここで $\nu = 0.3$ としている。図において破線および実線は、

それぞれ かく I およびかく II に対応する。なお最大値の生じる位置は後に述べるように、第 4、5 章の軸力のみが作用する場合のそれとほぼ一致する。

6.5 軸方向の伸び

円環かく I、II および円輪板部分の軸方向変位をおのおの δ_I , δ_{II} および δ_{III} とすると、ベローズ 1 ピッチ当りの伸び δ は

$$\delta = 2(\delta_I + \delta_{II} + \delta_{III}) \quad (6.27)$$

まずかく I、II の軸方向変位 δ_I , δ_{II} は式 (1.25) より

$$\frac{\delta_I E}{r, p} = L' \left(X_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R}^{(I)} \sin \psi d\psi + X_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I}^{(I)} \sin \psi d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{gI}^{(I)} \sin \psi d\psi \right) \quad (6.28)$$

$$\frac{\delta_{II} E}{r, p} = L' \left(X_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2R}^{(II)} \sin \psi d\psi + X_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{2I}^{(II)} \sin \psi d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_{gI}^{(II)} \sin \psi d\psi \right) \quad (6.29)$$

ただし

$$L' = \frac{m(2-\lambda_2)(2\xi-\lambda_2)}{2\lambda_2^2} = K'm\lambda,$$

次に円輪板の軸方向変位 δ_{III} は、式 (6.4) より

$$\delta_{III} = (W_r)_{r=a} - (W_r)_{r=b} \\ = \frac{1}{2} \left(d_2 - \frac{d_3}{2} \right) (a^2 - b^2) + \frac{d_3}{2} (a^2 \log a - b^2 \log b) + d_1 \log \frac{a}{b} + \frac{p(b^4 - a^4)}{64D}$$

これに式(6.10)の $d_1 \sim d_3$ を代入し、 $(\varphi^{(IV)})_0, (\varphi^{(IV)'})_0$ について整理する

$$\frac{\delta_{III} E}{\gamma_1 P} = L' \left\{ O' \frac{(\varphi^{(IV)})_0}{A} + P' \frac{(\varphi^{(IV)'})_0}{A} + Q' \right\} \quad (6.30)$$

ここに

$$O' = \frac{1}{4\lambda^{(IV)}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} - 2 \log \frac{a}{b} \right)$$

$$P' = \frac{1}{4\lambda^{(IV)2}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} + 2 \log \frac{a}{b} \right)$$

$$Q' = \frac{1}{\gamma \lambda^{(IV)}} \left[1 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \gamma - \alpha \beta + 2 \frac{d^2}{b^2} \left\{ \frac{b^2}{a^2} - 1 + \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \gamma \right\} \right]$$

また $(\varphi^{(IV)})_0$ および $(\varphi^{(IV)'})_0$ は $\varphi = 0$ における $\varphi^{(IV)}$ の値および $d\varphi^{(IV)}/d\varphi$ の値を意味する。

式(6.27)に式(6.28)～(6.30)を代入すれば、ベローズ1ピッチ当りの伸び δ が求められる。これらを各パラメータについて計算したものを図6.2に示す。ただし $\gamma = 0.3$ とする。

6.6 計 算 例

本章に示した図6.1および6.2と第5章に示した軸力のみを受ける場合の図5.1および5.3とを併用すれば、任意の圧力および伸縮量が与えられたと

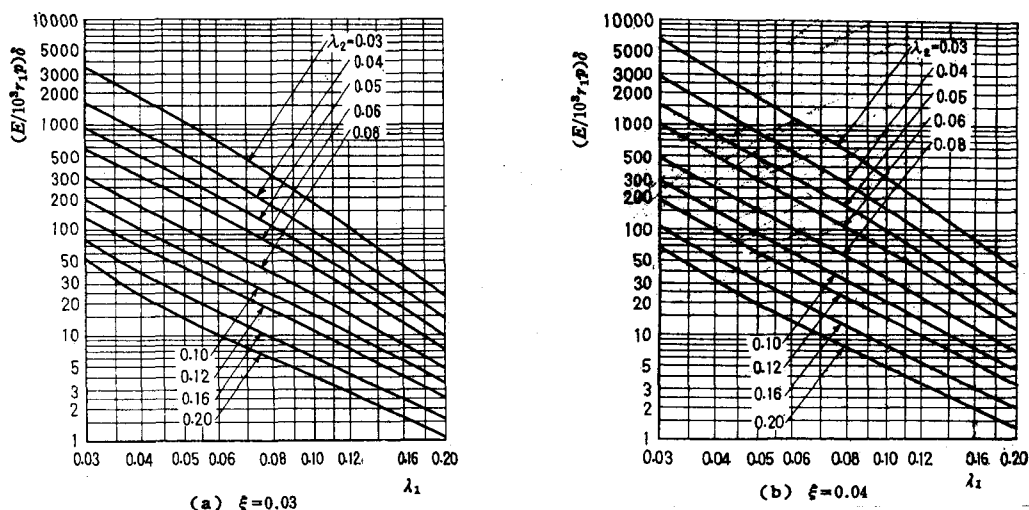


図 6.2 1 ピッチ当りの伸び δ (その1)

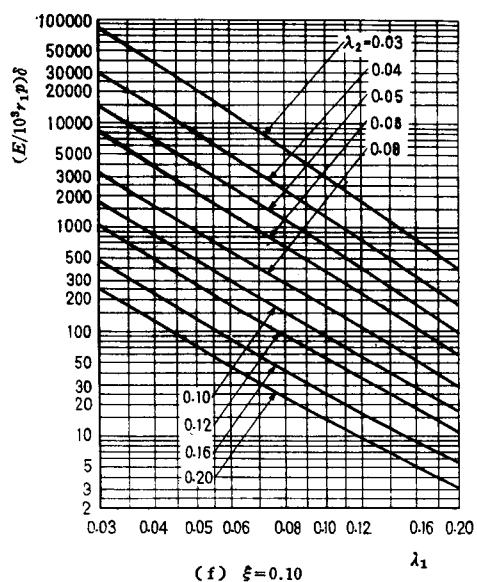
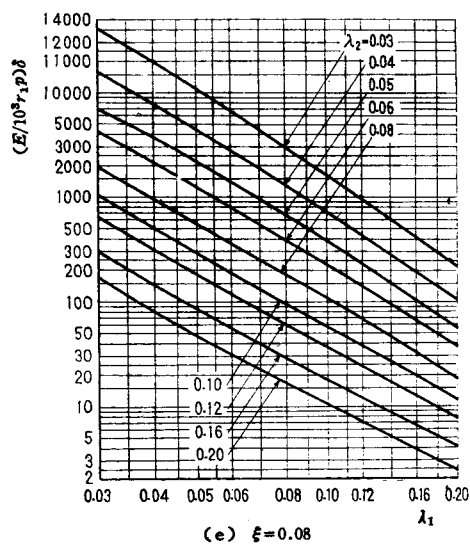
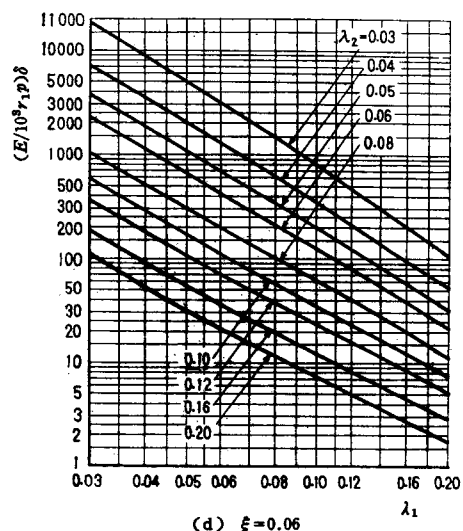
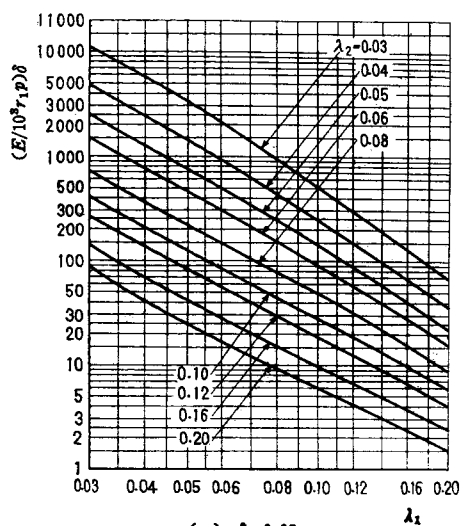
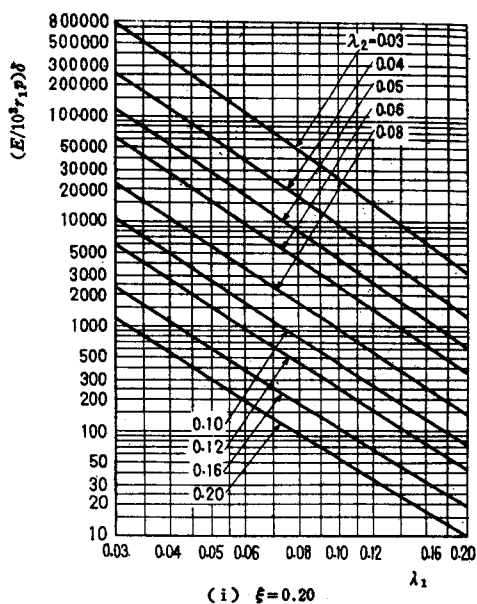
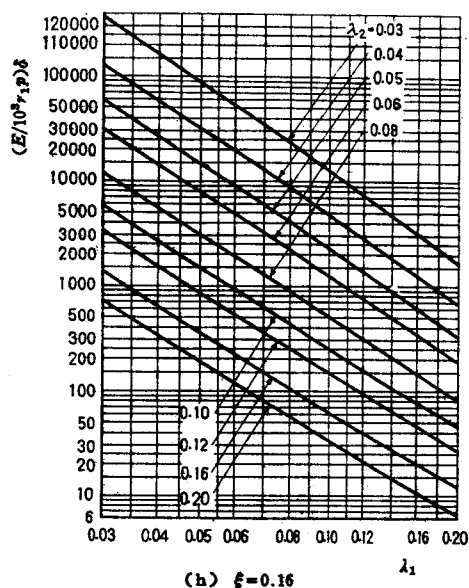
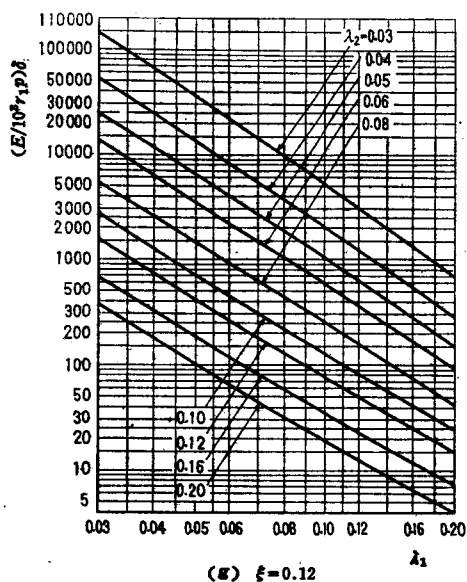


図 6.2 1 ピッチ当りの伸び δ (その 2)

きの応力を容易に求めることができる。

二では一例として $r_m = 100 \text{ mm}$ 、 $r_i = 6 \text{ mm}$ 、 $r_o = 6 \text{ mm}$ 、 $h = 0.6 \text{ mm}$ のベローズを内圧 2 Kg/cm^2 で使用し、使用中軸方向に 1 ピ



$$\xi = r_0 / r_m, \quad \lambda_1 = h / r_1, \quad \lambda_2 = r_1 / r_m$$

図 6.2 1 ピッチ当りの伸び δ
(その 3)

添字 α, p および t を付けておのおの軸力のみによるもの、内圧のみによるものおよびそれらが同時に作用する場合のものを表わす。

ツチ当り最大 0.9 mm 伸びる場合の最大応力を求めよう。

諸パラメータの値を計算すると

$$\lambda_2 = 0.06, \quad \lambda_1 = 0.10, \quad \xi = 0.06$$

まず内圧のみによる応力および伸びを求める。図 6.1 および 6.2 より

$$\sigma_{gmp}^{(a)} / p = 1560$$

(とつ側圧縮正)

$$\sigma_{gmp}^{(b)} / p = 1350$$

(とつ側圧縮正)

$$E \delta p / 10^3 r_1 p = 127$$

(6.31)

ここに添字 p を付けたのは内圧のみによるものであることを示すためである。以下同様に必要に応じて、

さて $E = 2.1 \times 10^4 \text{ Kg/mm}^2$ とすると、 $Y_1 = 6 \text{ mm}$ 、 $P = 2 \times 10^{-2} \text{ Kg/mm}^2$ であるから、式(6.31)は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{gmp}^{(I)} &= 31.2 \text{ Kg/mm}^2, & \sigma_{gmp}^{(II)} &= 270 \text{ Kg/mm}^2 \\ \delta p &= 0.727 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

次に所定の伸び量 δt を得るために必要な軸力による応力を求める。軸力による伸び量 δa は

$$\delta a + \delta p = 0.9 \quad (6.33)$$

より

$$\delta a = 0.9 - 0.727 = 0.173 \text{ mm}$$

したがって図5.3より

$$EY_1 \delta a / P = 1.30 \times 10^3$$

であるから

$$P = 16.8 \text{ Kg}$$

すなわちさらに 16.8 Kg の力で引張れば、伸びは 0.9 mm になる。ゆえにこれによる応力は、図5.1より

$$Y_1 Y_m \sigma_{gma}^{(I)} / P = 1.19 \times 10^2, \quad Y_1 Y_m \sigma_{gma}^{(II)} / P = 1.25 \times 10^2 \quad (6.34)$$

であるから

$$\sigma_{gma}^{(I)} = 3.33 \text{ Kg/mm}^2, \quad \sigma_{gma}^{(II)} = 3.50 \text{ Kg/mm}^2 \quad (6.35)$$

式(6.32)と(6.35)とを合成すれば

$$\sigma_{gmt}^{(I)} = 34.5 \text{ Kg/mm}^2, \quad \sigma_{gmt}^{(II)} = 30.5 \text{ Kg/mm}^2 \quad (6.36)$$

これらのうち大きな値を示すのは $\sigma_{gmt}^{(I)}$ である。なお図5.4を用いれば、軸力による伸び量 $\delta a = 0.173$ から直ちに式(6.35)の $\sigma_{gma}^{(I)}$ 、 $\sigma_{gma}^{(II)}$ を求めることができる。

6.7 実 験

本理論の妥当性を確認するため、次の実験を行い理論値と比較する。

6.7.1 ベローズの形状寸法

実験に用いたベローズは次の3種類である。

表 6.1 実験用ベローズの形状寸法 (図 4.1 参照)

N ₀	外径 mm	内径 mm	h mm	γ_m mm	γ_0 mm	γ_1 mm	λ_2 ($=\gamma_1/\gamma_m$)	λ_1 ($=h/\gamma_1$)	ξ ($=\gamma_0/\gamma_m$)
1	135.87	104.86	0.630	60.18	3.23	4.21	0.0699	0.150	0.0537
2	233.65	183.45	0.720	104.28	6.48	5.71	0.0548	0.126	0.0621
3	320.90	262.08	0.768	145.75	7.03	7.29	0.0500	0.105	0.0482

6.7.2 実験方法

表 6.1 に示した 3 種類のベローズに端管を取り付け、これに十分厚い端板を溶接してベローズをめぐらし、図 6.3 に示すようにベローズの上部は拘束せず自由に軸方向に伸びるようにして、永圧ポンプで水圧をかけひずみおよび伸びを測定した。

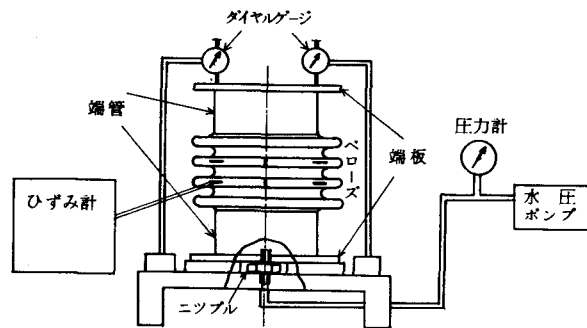


図 6.3 ベローズ内圧実験装置

6.7.3 実験値と理論値との比較

以上のようにして求めたひずみおよび伸びの実験値を図 6.4 に示す。図中の理論値は次のようにして求めたものである。

(a) ひずみゲージに現われる理論値

この場合の理論値は、内圧のみが作用した場合のものと軸力 ($\pi d^2 p / 4$) が作用した場合のものとを合成すればよい。なおゲージの厚さの影響を考慮するのは前章と同様である。

表 6.2 2. 3. 2 (理論値)

 σ_b : 外側圧縮正

No		1	2	3
内圧Pのみ作用した場合	σ_{top}/p	- 207.86	- 462.39	- 587.64
	σ_{bot}/p	- 183.69	- 403.76	- 467.30
	σ_{top}/p	20.98	30.32	34.06
	σ_{bot}/p	- 602.28	- 1323.8	- 1532.1
	$\delta p/p$	5.43	25.8	40.7
軸力Pのみ作用した場合	σ_{toa}/P	- 0.08125	- 0.05796	- 0.04487
	σ_{boa}/P	- 0.05402	- 0.04121	- 0.02857
	σ_{tga}/P	0.003735	0.001899	0.001295
	σ_{bga}/P	- 0.1771	- 0.1351	- 0.09368
	$\delta a/P$	0.00416	0.00697	0.00656
P: Kg P: Kg/mm ²	$P(=\pi d^2 P/4)$	8636 P	26418 P	53946 P
	$\delta a/p$	35.9	184	354
	σ_{toa}/P	- 701.7	- 1531.2	- 2420.6
	σ_{boa}/P	- 466.5	- 1089	- 1541.2
	σ_{tga}/P	32.26	50.17	69.86
自由に伸ばした場合 (実験状態)	σ_{to}/p	- 909.6	- 1994	- 3008
	σ_{bo}/p	- 650.2	- 1493	- 2009
	σ_{tg}/p	53.24	80.5	103.9
	σ_{bg}/p	- 2131.3	- 4893	- 6586
	$\sigma_{\theta'}/P$	- 1622	- 3611	- 5174
XP: Kg/cm ²	$\sigma_{\phi'}/P$	- 2281	- 5219	- 6996
	$\epsilon_{\theta'}/P$	- 4.45×10^{-2}	- 9.71×10^{-2}	- 1.46×10^{-1}
	$\epsilon_{\phi'}/P$	- 8.59×10^{-2}	- 1.98×10^{-1}	- 2.60×10^{-1}
	$10^6 \epsilon_{\theta'}/P^*$	- 4.45×10^2	- 9.71×10^2	- 1.46×10^3
	$10^6 \epsilon_{\phi'}/P^*$	- 8.59×10^2	- 1.98×10^3	- 2.60×10^3

(b) 伸縮量

内圧のみが作用した場合の伸びと軸力のみが作用した場合の伸びを合成する。

表 6.3 伸 縮 量

* P : Kg/cm²

N.O.	1	2	3
δ_p / p	5.43	25.8	40.7
δ_a / p	0.00416	0.00697	0.00656
$P (= \pi d^2 p / 2)$	8636 P	26418 P	53946 P
δ_a / p	35.9	184	354
$\delta / p (= \delta_p / p + \delta_a / p)$	41.3	210	395
$4 \delta / p *$	165	840	158

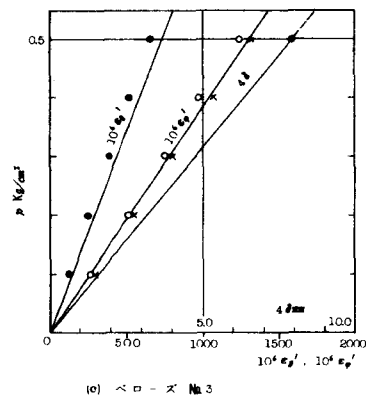
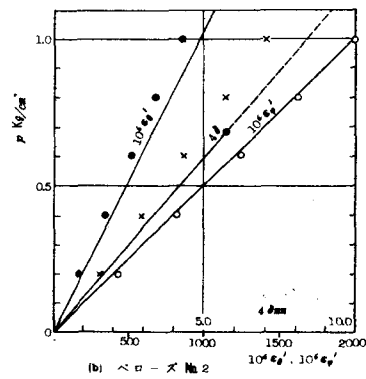
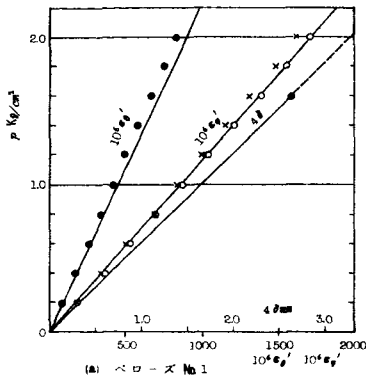
(c) ベローズが降伏するときの内圧

第5章と同様に $\sigma_{bp} = \sigma_0$ (35 Kg/mm²) になったとき降伏するものと考え、そのときの内圧は次の表 6.5 のようになる。

表 6.5 降伏するときの内圧

N.O.	1	2	3
$\gamma_i \gamma_m \sigma_{bp}^{(1)} / p$	47.091	85.559	108.39
$\gamma_i \gamma_m \sigma_{bp}^{(2)} / p$	50.147	91.554	114.42
P	8636 P	26418 P	53946 P
$\sigma_{bp}^{(1)} / p$	1605.1	3796.0	5503.2
$\sigma_{bp}^{(2)} / p$	1709.3	4062.0	5809.1
$\sigma_{bp}^{(1)} / p$	602.28	1326.0	1540.4
$\sigma_{bp}^{(2)} / p$	471.73	1025.3	1228.6
$\sigma_{bp}^{(1)} / p$	2207.4	5122.0	7043.6
$\sigma_{bp}^{(2)} / p$	2181.0	5087.3	7037.7
降伏内圧 (Kg/cm ²)	1.59	0.683	0.497

このようにして求めた理論値を図 6.4 に実線で示した。図 6.4 を見ると、いずれも ひずみ (応力) については理論値と実験値とはよく一致しているが、伸びについては理論値を 4 ピッチとして計算すると実験値の方がやや下に出る。これはベローズの両端部は端管に溶接されているため、拘束されているからである。前章の実験で両端部の 1 山は 0.65 ピッチの役割しか果たしていないことがわかったが、この内圧が作用する場合にも、全体



- $10^6 \varepsilon'$ 実験値
- $10^6 \varepsilon_\phi$ 実験値
- × 伸び 実験値
- 理論値

$\varepsilon'_0, \varepsilon'_\phi$ ゲージに現われるひずみ
 p 内圧
 δ 1ピッチ当りの伸び
 ◎ ベローズが降伏する点

図 6.4 理論値と実験値との比較

を 3.3 ピッチとして計算すると、実験値と理論値とはよく一致する。

6.8 考 察

軸力のみが作用する場合と内圧のみが作用する場合とにおいて、それらの応力の最大値が生じる位置を検討するため、一つの代表的なベローズを例にとつて、その応力分布を図 6.5 に示す。すなわち図 6.5 は $\sigma_{b\phi p}$, $\sigma_{b\phi a}$ および $\sigma_{b\phi r}$ の分布を示したものである。これを見ると、 $\sigma_{b\phi p}$ と $\sigma_{b\phi a}$ の最大値の位置は接近しており、かつその付近では応力値の変化は小さいから

σ_{bgp} と σ_{bga} との最大値どうしの和は、ほぼ σ_{bgt} の最大値を与えるものと考えてよい。
 ただし σ_{bgp} と σ_{bga} との符号が反対で絶対値がほぼ等しい場合には、両者の最大値どうしの和は σ_{bgt} の最大値とかなり異なることになり、必ずしも上記のようなことは言えない。
 しかしこのような場合には、 σ_{bgt} の最大値そのものが小さいので、実際には問題にならない。その他の形状のものについても種々検討した結果、実用的には σ_{bgp} と σ_{bga} との最大値どうしの和を σ_{bgt} の最大値としてよいことがわかった。

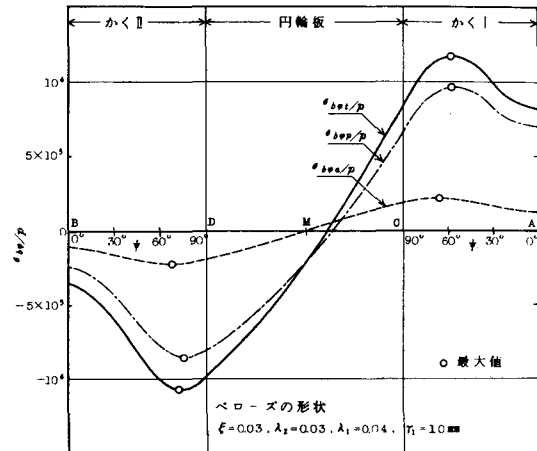


図 6.5 応力分布 ($\sigma_a/\sigma_p = 1/2$ の場合)

次に他の研究者との比較であるが、内圧を考慮に入れたものはほとんどなく、わずかに A. Laupa⁽⁸⁾らのエネルギー解等があるにすぎない。A. Laupaらは子午線方向の膜ひずみ ϵ_{gm} を省略してひずみエネルギーを算出し、また角変位 ψ の解を5項の級数で近似している。A. Laupaらは表 6.6 に示す一例しか数値計算を行なっていないが、これと本解とを比較すると同表のようになり、かなりよく一致している。

表6.6 本解と A Laupa によるエネルギー解との比較

形状 : $V_1 = 0.54 \text{ in}$, $a = 13.74 \text{ in}$, $b = 12.53 \text{ in}$, $h = 0.05 \text{ in}$

$\xi = 0.04607$, $\lambda_2 = 0.04111$, $\lambda_1 = 0.09259$

() 内は A, Laupa による解

(a) 応力

応力 / 位置	A	C	B	D
$\sigma_{\theta\theta} / p$	-2.44×10^3 (-2.46×10^3)	-1.43×10^3 (-1.39×10^3)	1.30×10^3 (1.32×10^3)	1.77×10^3 (1.80×10^3)
$\sigma_{\theta z} / p$	-7.44×10^2 (-7.38×10^2)	-2.98×10^2 (-2.92×10^2)	3.96×10^2 (3.95×10^2)	6.49×10^2 (4.36×10^2)
σ_{zz} / p	4.21×10 (4.21×10)	3.60×10 (3.69×10)	0 (0)	2.61×10 (2.57×10)
$\sigma_{z\theta} / p$	-8.92×10^2 (-9.42×10^2)	1.32×10^2 (1.37×10^2)	8.88×10^2 (8.71×10^2)	1.43×10^2 (1.52×10^2)

曲げ応力は外側引張りを正、膜応力は引張りを正とする。

(b) 伸び

$\delta p / p$	$\delta I / p$	$\delta II / p$	$\delta III / p$
8.52×10^{-3} (8.62×10^{-3})	8.33×10^{-4} (8.47×10^{-4})	5.49×10^{-4} (5.58×10^{-4})	2.88×10^{-3} (2.90×10^{-3})

6.9 結 論

本章では U 形ベローズに内圧が作用する場合について、久く理論を用いて比較的厳密に応力および伸縮量を求め、これを実験結果および他の研究者の結果と比較検討し、本理論の妥当性を確認した。

ここでは結論を設計公式の形で表わすことはできなかったが、ベローズの形状がわかれば、直ちに応力および伸縮量を求めることができる比較的正確で、適用範囲の広い計算図表を作製した。本章に示した解と第5章に示した軸力のみが作用する場合の解とを併用すれば、任意の軸力および内圧が作用する一般の場合の解が得られる。また通常ベローズは両端部が溶接されているが、この場合には内圧が作用するときにも前章の軸力が作用するときと同様、

両端部のノ山はほぼ0.65ピッチと考えると伸縮量を計算すればよい。

(1) 最大応力と内圧との関係

図 6.1

(2) 伸縮量と内圧との関係

図 6.2

第2編 ベローズの極限解析

緒 論

本編ではベローズの極限解析について述べる。第1編においては、ベローズをどのような用途に用いても、基礎的で重要な意味をもつ弾性特性について述べてきたが、ベローズをパイプラインの伸縮継手等に用いる場合には、弾性特性の研究だけでは不十分である。なぜならベローズをこのような用途に用いる場合には、一般にその伸縮回数はきわめて少なく、比較的使用回数の多い場合で1日2回(たとえば暖房用の朝夕の蒸気供給)、少ない場合はガスパイプラインや送油管あるいはまた化学工場の100日以上連続運転の場合等を年2、3回程度である。そのため伸縮によって生じる応力は相当高い値になつても十分実用でき、特殊な場合を除いては、多くは材料の塑性域まで使用されているからである。また計測制御関係等に用いる場合には弾性範囲で使用するが、この場合にもあらかじめベローズの耐え得る荷重の極限値を知っておくことは大切である。したがつてベローズの極限解析はきわめて重要である。しかるにベローズを塑性学的に研究した例は、筆者の知る限りでは今までに全くない。そこで筆者は本編において、軸荷重を受けるベローズの極限解析の問題を取り扱う。

ベローズは一般に円環かくと円輪板とから成るが、この円環かくの極限解析に関する論文がこれまた少なく、わずかに E. T. Onat & W. Prager⁽²²⁾、D. C. Drucker & R. T. Shield⁽²³⁾らのものがあるにすぎない。D. C. Drucker & R. T. Shieldは応力変数の一つの影響を無視した近似降伏面を考え、これを用いて圧力容器の屈曲部の問題を解析している。

ここでは、まず第1章で D. C. Drucker & R. T. Shieldの論文にしたがつてかくの極限解析の一般的な事柄らにふれ、第2章および第3章においてC形ベローズの極限解析について述べる。このうち第2章では計算をできるだけ簡単にするため、種々の仮定を設けているが、第3章ではこの仮定を取り去り一般的な変形を考慮する。また第4章および第5章においては、最も

広く実用されている U 形 ベローズについて、極限解析を行なっている。ここでも C 形 ベローズと同様、第 4 章で簡単な解法を示し、第 5 章で一般的な変形を考慮した複雑な計算を行なっている。計算には電子計算機 (NEAC 2203) を用いている。C 形、U 形 ベローズとも軸力のみが作用する場合を考え、極限解析における下界定理に基づく平衡法および上界定理に基づく仮想変形法によって極限軸荷重の下界および上界を求め、これらが一致することを確かめている。そしてこの結果を計算図表として、また一部は公式として表わしている。さらに第 5 章では実験結果と比較検討している。

なお降伏条件としては、ベローズの円環状の部分には D. C. Drucker & R. T. Shield によって提案された近似降伏面を、また円輪板の部分には曲げに対する Tresca の降伏条件を用いる。D. C. Drucker らによって提案された近似降伏面というのは、材料は完全塑性体で Tresca の降伏条件を満たすものと仮定し、周方向の曲げモーメントの影響および子午線方向の曲げモーメントと膜内力との関連を無視したものである。この近似については批判もあるが⁽²⁴⁾ ベローズのような中心軸から離れたところにあるかくに對しては、精度のよい近似であると考えられる。事実後述のように銅製ベローズによる実験結果は、この近似の妥当性をほぼ証明している。

第1章 かくの極限解析

結論でも述べたように、かくの極限解析に関する論文はまだ非常に少ない。

D. C. Drucker⁽²⁴⁾は軸力のない場合の対称荷重を受けている円筒かくについて研究を始め、E. T. Onat⁽²⁵⁾と P. G. Hodge⁽²⁶⁾とはこれを軸力を含むものへと発展させた。さらに一般の回転かくについて考察を行なったのは E. T. Onat & W. Prager⁽²²⁾ および D. C. Drucker & R. T. Shield⁽²⁷⁾である。E. T. Onat & W. Pragerは回転かくに対する降伏曲面として、Trescaの降伏条件(最大せん断応力説)を満足させる4個の応力変数(N_θ , N_φ , M_θ , M_φ)で表わされる次の式(1.1)を得ている(図1.1および1.2参照)。

$$f(N_\theta, N_\varphi, M_\theta, M_\varphi) = C^2 \quad (C: \text{定数}) \quad (1.1)$$

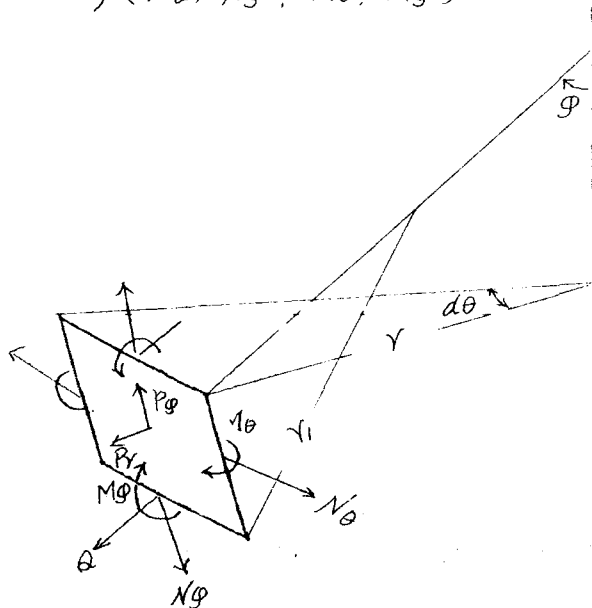


図1.1 回転かく

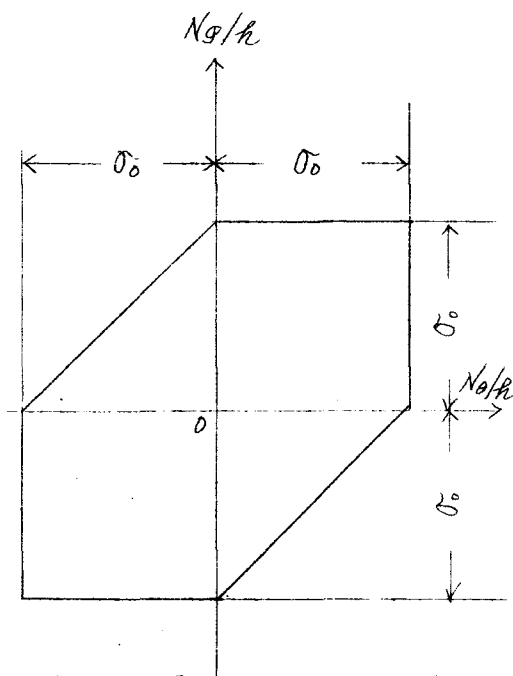


図1.2 Trescaの降伏条件

また、D. C. Drucker & R. T. Shieldは応力変数の一つ M_θ の影響を無視して、基礎理論に対する近似解を考え、これをもとに圧力容器の屈曲部の問題を解いている。上に述べた諸研究においては、材料はいずれも完全塑性材料であると考えられている。

1.1 かくの場合の極限定理

一般に極限荷重を正確に決定することは困難であるが、D. C. Drucker, W. Prager & H. J. Greenberg⁽²⁷⁾らの極限定理を使用すれば、その限界を求めることができ、その精度は実用上十分である。さてここで問題にしているかくに対し、極限定理は次のように言い表わすことができる。

(1) 下界定理

もし加えられた荷重が平衡方程式を満たしかつかくのいかなる所においても降伏内力以下の内力（力、モーメント）とつり合っている（すなわち平衡条件と塑性条件とを満たす）ならば、その荷重は極限荷重かまたはそれ以下である。

(2) 上界定理

可能な変形機構に対し、もし外力によつてなされる仕事率が内部エネルギー散逸率に等しいならば、その荷重は極限荷重かまたはそれ以上である。

(3) 系

真の降伏面に外接する降伏面に基く荷重は、正しい値に等しいかまたはそれより大きい極限荷重を与え、また内接する降伏面に基くものは、正しい値に等しいかまたはそれより小さい極限荷重を与える。

1.2 降伏曲面⁽²³⁾

かくの厚さ h が非常に小さく膜として取り扱えるときには、 N_θ , N_ϕ のみが重要になり、降伏条件は主応力 σ_1 , σ_2 を N_ϕ/h , N_θ/h で置き代えた図1.2のような六角形となる。軸力のない場合で対称荷重を受けている円筒かくに対しては、重要な変数は N_θ , M_ϕ であり、降伏曲線は図1.3(a)のようになる。 M_θ の大きさは塑性状態で $|M_\phi|/2$ に等しいが、ここでは重要な変数ではない。微いたわみ理論の使える構造物では、 M_θ は平衡方程式に現われなければかりか、かくの変形中仕事をしない。回転かくに軸力が加えられた場合降伏曲面は

$$F(N_\phi, N_\theta, M_\phi) = C^2 \quad (C: \text{定数}) \quad (1.2)$$

となり、図1.4に示すようになる。ここでまた M_θ は問題の解に役割を演じることなく、また M_θ は N_ϕ , N_θ , M_ϕ が降伏面面上にあるときに

は、十分決定できるものであり 平衡方程式にも現われて二ない。
 $N_a = 0$ の場合には 図 1.3 (b) のようになる。

さて、図 1.4 の降伏曲面を次のように近似する。まず図 1.5 は放物柱と4接面とから成

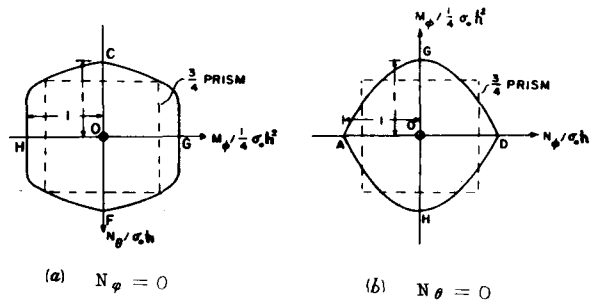


図 1.3 降伏曲線

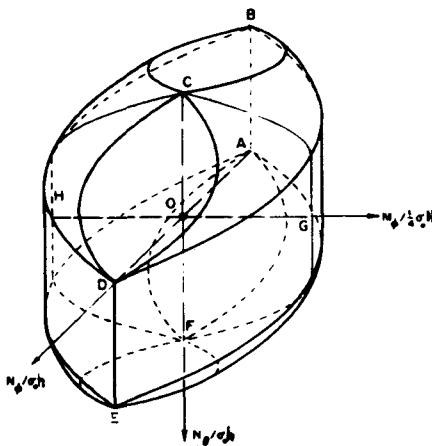


図 1.4 降伏曲面

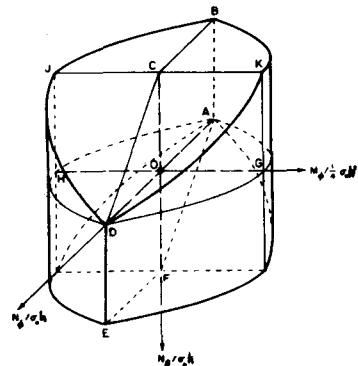


図 1.5 外接降伏面

る降伏面である。さらにこれを図 1.6 の六角柱に単純化する。これに $(\sqrt{5}-1)/2 (=0.618)$ を乗ざると、内接する六角柱が得る。外接する六角柱に基づく上界と内接するものによって計算される下界とは工業上の目的に対し、あまりにもかけ離れているので、 $3/4$ prism をとると、これは

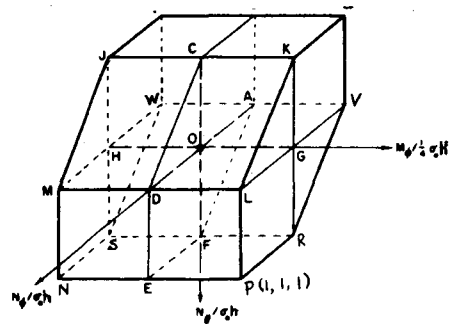


図 1.6 単純化外接降伏面

圧力容器の設計に際し、必要な範囲において真の降伏面（図1.4）の内側に存在する。このことは図1.3に示した $3/4$ prism の断面図からわかる。外接する六角柱から計算した極限荷重の上界を P_U で表わすと、真の極限荷重 P_0 は $3/4 P_U \sim P_U$ の間にある。実際にはほとんどの場合 $P_0 = 7/8 P_U$ としてよい。

1.3 かくの平衡方程式

かくの平衡方程式は次のようになる（図1.1参照）。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(N_g r) - N_a r_i \cos \varphi - Q r + p_g r r_i \\ = r \frac{dN_g}{d\varphi} + (N_g - N_a) r_i \cos \varphi - Q r + p_g r r_i = 0 \\ N_g r + N_a r_i \sin \varphi + \frac{d}{d\varphi}(Q r) - p_n r r_i = 0 \\ \frac{d}{d\varphi}(M_g r) - M_a r_i \cos \varphi - Q r_i r \\ = r \frac{dM_g}{d\varphi} + (M_g - M_a) r_i \cos \varphi - Q r_i r = 0 \end{aligned} \right\} (1.3)$$

式(1.3)₃において右辺第2項は他の項に比べて小さいので、式(1.3)₃は

$$\frac{dM_g}{d\varphi} - Q r_i = 0 \quad (1.4)$$

またある種の形状に対しては、 M_a のみを省略した次式の方が式(1.4)よりも便利なることもある。

$$\frac{d}{d\varphi}(M_g r) - Q r_i r = 0 \quad (1.5)$$

かくの厚さが小さくない場合でも軸の近くを除けば、 M_a は平衡式において無視できる。式(1.3)₃の代りに式(1.4)または(1.5)を使用しても、極限荷重の下界にはほとんど影響を与えない。

1.4 エネルギー散逸率

内部エネルギーの散逸率は曲率の変化率 $\dot{K}_g$ 、膜ひずみ $\dot{\epsilon}_a$ 、 $\dot{\epsilon}_g$ とから計算できる。単位面積当りの散逸率 DA は

$$DA = M_g \dot{K}_g + N_a \dot{\epsilon}_a + N_g \dot{\epsilon}_g \quad (1.6)$$

第2章 C形ベローズ

— 簡単な変形を考慮した解析 —

第2章および3章においては、C形ベローズの極限解析の問題を取り扱うが、本章では計算をできるだけ簡単にするため、種々の仮定を設けている。すなわち、ベローズに軸荷重が加わった際、図2/1の点Cは径方向に移動せず、また荷重が極限值に達したとき、点Aおよび点Bに降伏関節円が生じるものと仮定する。降伏面としては図1/6の外接六角柱を用いて極限值を求め、これを $7/8$ 倍したものを極限軸荷重とする。なお以下の考察においては軸力は引張りであると仮定しているが、その結果は軸力が圧縮の場合にも同様に用いることができる。

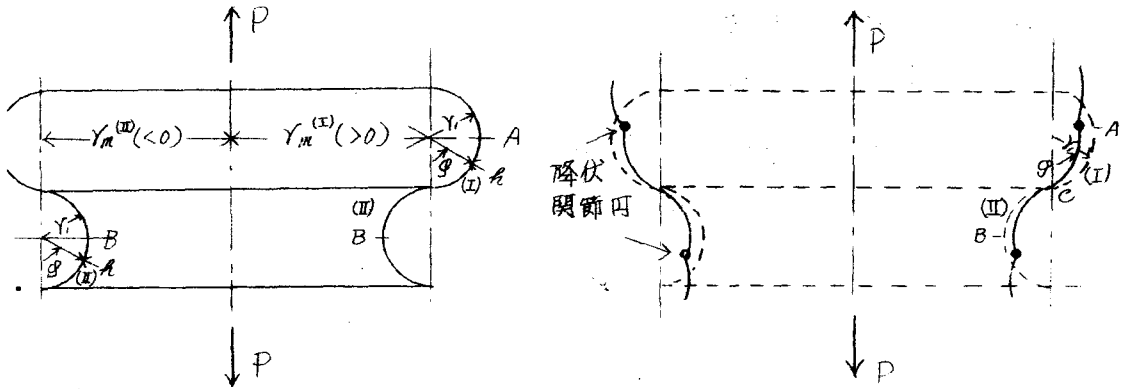


図2/1 C形ベローズ

2/ 平衡法

まず下界定理に基づく平衡法によって極限軸荷重の下界を求める。一般にかくの平衡式は式(1.3)で与えられ、この式で $P_\theta = P_n = 0$ とすると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_\theta \sin \varphi + Q \cos \varphi &= V \\ \frac{d}{d\varphi} (N_\theta r) - N_\theta r_i \cos \varphi - Q r &= r \frac{dN_\theta}{d\varphi} + (N_\theta - N_\theta) r_i \cos \varphi - Q r = 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (M_\theta r) - M_\theta r_i \cos \varphi - Q r r_i &= r \frac{dM_\theta}{d\varphi} + (M_\theta - M_\theta) r_i \cos \varphi - Q r r_i = 0 \end{aligned} \right\} (2.1)$$

ここで(2.1)₁は(1.3)₂の代りに用いたものである。

次に塑性条件であるが、かくIでは周方向の面内力 N_θ は圧縮であり、子

午線方向の面内力 N_φ は引張りである。このことからすべての応力点は図1.6の斜面 JKLM 上に存在するものと考えられる。したがって塑性条件を式で表わすと、次の式 (2.2) のようになる。

$$N_\varphi^{(I)} - N_0^{(I)} = N_0 \quad (2.2)$$

ここに添字 (I) はかく I を示す。また $N_0 = \sigma_0 h$ で σ_0 は材料の降伏点であり、材料は通常の極限解析におけるように完全塑性体とする。式 (2.2) を (2.1) に代入すると、式 (2.3) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi^{(I)} \sin \varphi + Q^{(I)} \cos \varphi &= T^{(I)} \\ \frac{dN_\varphi^{(I)}}{d\varphi} + \sigma_0 h \frac{Y_1}{Y^{(I)}} \cos \varphi - Q^{(I)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_1} \frac{dM_\varphi^{(I)}}{d\varphi} - Q^{(I)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式 (2.3) を解くと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi^{(I)} &= \frac{P}{2\pi Y_m^{(I)}} (\sin \varphi - \lambda^{(I)}) - \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos \varphi) \cos \varphi + A^{(I)} \cos \varphi \\ Q^{(I)} &= \frac{P}{2\pi Y_m^{(I)}} \cos \varphi + \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos \varphi) \sin \varphi - A^{(I)} \sin \varphi \\ \frac{M_\varphi^{(I)}}{Y_1} &= \frac{P}{2\pi Y_m^{(I)}} \sin \varphi + \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{2} \sin^2 \varphi) + A^{(I)} \cos \varphi + B^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

ここに $A^{(I)}$ 、 $B^{(I)}$ は 積分定数であり、また積分に際しては $\lambda^{(I)} (= Y_1/Y_m^{(I)})$ の 2 次以上の項は省略してある。

次にかく II においては、周方向の面内力 N_θ および子午線方向の面内力 N_φ はともに引張りである。したがってすべての応力点は図1.6の NPRS 上にあるものと考えられる (もし MLPN 上にあるものと考ええると矛盾を生じる。) このことから塑性条件として次式が得られる。

$$N_\theta^{(II)} = N_0 \quad (2.5)$$

ここに添字 (II) はかく II を表わす。したがって式 (2.1) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi^{(II)} \sin \varphi + Q^{(II)} \cos \varphi &= T^{(II)} \\ \frac{dN_\varphi^{(II)}}{d\varphi} + (N_\varphi^{(II)} - \sigma_0 h) \frac{Y_1}{Y^{(II)}} - Q^{(II)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_1} \frac{dM_\varphi^{(II)}}{d\varphi} - Q^{(II)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式 (2.6) を解くと

$$N_\varphi^{(II)} = (1 - \lambda^{(II)} \sin \varphi) \left(-\frac{P}{2\pi Y_m^{(II)}} \sin \varphi + \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \cos \varphi + A^{(II)} \cos \varphi \right) \quad |$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q^{(II)} &= (1 - \lambda^{(II)} \sin \varphi) \left(-\frac{P}{2\pi r_m^{(II)}} \cos \varphi - \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \sin \varphi - A^{(II)} \sin \varphi \right) \\
 \frac{M_\varphi^{(II)}}{r_1} &= -\frac{P}{2\pi r_m^{(II)}} \sin \varphi \left(1 - \frac{\lambda^{(II)}}{2} \sin \varphi \right) - \sigma_0 h \lambda^{(II)} \left\{ \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda^{(II)}}{4} \left\{ \sin \varphi (\sin \varphi - 2\varphi \cos \varphi) + \varphi^2 \right\} \right\} + A^{(II)} \left\{ \cos \varphi + \frac{\lambda^{(II)}}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right\} \\
 &\quad + B^{(II)}
 \end{aligned} \right\}$$

ここに $A^{(II)}$, $B^{(II)}$ は積分定数で、積分に際しては $\lambda^{(II)} (= r_1/r_m^{(II)})$ の2次以上の項は省略してある。

さて積分定数 $A^{(I)}$, $A^{(II)}$, $B^{(I)}$, $B^{(II)}$ および 極限軸荷重 P_0 の下界 P_L は、図2.1の点A, B, Cにおける境界条件から求める。

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点A)} : dM_\varphi^{(I)}/d\varphi = 0, \quad M_\varphi^{(I)} &= M_0 (= \sigma_0 h^2/4) \\
 (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点B)} : dM_\varphi^{(II)}/d\varphi = 0, \quad M_\varphi^{(II)} &= M_0 \\
 (c) \quad \varphi = 0 \text{ (点C)} : M_\varphi^{(I)} &= -M_\varphi^{(II)}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

ただし M_φ はとつ側圧縮を正とする。また点C ($\varphi = 0$) で $Q^{(I)} = Q^{(II)}$ は自然に成立し、 $N_g^{(I)} = N_g^{(II)}$ も近似的に成立つ。

式(2.4)および(2.7)を式(2.8)に代入すると、5元連立方程式が得られ、これを解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 A^{(I)} &= \frac{1}{2} \pi \sigma_0 h \lambda^{(I)} \\
 A^{(II)} &= -\frac{1}{2} \pi \sigma_0 h \lambda^{(II)} \\
 B^{(I)} &= -\left\{ -\frac{\sigma_0 h}{4} \lambda_1 + \frac{P}{2\pi r_m^{(I)}} + \sigma_0 h \lambda^{(I)} \left(1 + \frac{\lambda^{(I)}}{2} \right) \right\} \\
 B^{(II)} &= \frac{P}{2\pi r_m^{(II)}} \left(1 - \frac{\lambda^{(II)}}{2} \right) + \sigma_0 h \lambda^{(II)} \left\{ 1 - \frac{\lambda^{(II)}}{4} \left(1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \right\} + \frac{\sigma_0 h}{4} \lambda_1
 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\frac{P}{2\pi r_m \sigma_0 h} = \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\pi - 2}{2} \lambda - \left(1 + \pi - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda \lambda_1}{16} \quad (2.10)$$

式(2.10)は降伏面として図1.6の外接六角柱を用いたときの極限軸荷重の下界である。

2.2 板殻変形法

次に極限軸荷重の上界を板殻変形法によつて求める。ベローズのような薄いかくに対する変形機構は、かくの中央面の変形速度がわかれば決めることができる。かくの中央面の変形速度の径方向外向きの成分を $\dot{u}$ 、垂直方向上

何きの成分を u とすると、二つのひずみ率 $\dot{E}_{gm}$ および $\dot{E}_{am}$ 、また二つの曲率の変化率 $\dot{\kappa}_g$ および $\dot{\kappa}_a$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{gm} &= \frac{1}{Y_1} \left(\frac{d\dot{u}}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{d\dot{w}}{d\varphi} \sin \varphi \right) \\ \dot{E}_{am} &= \frac{\dot{u}}{Y} \\ \dot{\kappa}_g &= -\frac{1}{Y_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\dot{u}}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{Y_1} - \frac{d\dot{w}}{d\varphi} \frac{\cos \varphi}{Y_1} \right) \\ \dot{\kappa}_a &= -\frac{\cos \varphi}{Y_1 Y} \left(\frac{d\dot{u}}{d\varphi} \sin \varphi - \frac{d\dot{w}}{d\varphi} \cos \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

ベローズに対する応力場およびモーメント場は図1.6に示した直交降伏面に基くものとする。このような応力場とモーメント場とをもつ場合のかくの変形速度は、塑性学における流れ法則により、かくIおよびかくIIにおいては、図1.6の面JKLMおよび面NPRSに垂直である。したがってまずかくIにおいては

$$-\dot{E}_{am}^{(I)} = \dot{E}_{gm}^{(I)}, \quad \dot{\kappa}_g^{(I)} = 0 \quad (2.12)$$

式(2.12)に式(2.11)を代入して

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\dot{u}^{(I)}}{Y^{(I)}} &= \frac{1}{Y_1} \left(\frac{d\dot{u}^{(I)}}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{d\dot{w}^{(I)}}{d\varphi} \sin \varphi \right) \\ -\frac{1}{Y_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\dot{u}^{(I)}}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{Y_1} - \frac{d\dot{w}^{(I)}}{d\varphi} \frac{\cos \varphi}{Y_1} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

ここに添字 (I) はかくIを示す。式(2.13)を解いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}^{(I)}}{Y_1} &= \frac{1}{1+\lambda^{(I)} \sin \varphi} \left[C^{(I)} \left\{ \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{4} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi) \right\} + D^{(I)} \right] \\ \frac{\dot{w}^{(I)}}{Y_1} &= C^{(I)} \left[\sin \varphi - \lambda^{(I)} \int_0^\varphi \left\{ \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{4} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi) \right\} \frac{\sin \varphi d\varphi}{(1+\lambda^{(I)} \sin \varphi)^2} \right] \\ &\quad - D^{(I)} \lambda^{(I)} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{(1+\lambda^{(I)} \sin \varphi)^2} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ただし $C^{(I)}$ 、 $D^{(I)}$ は積分定数である。

次にかくIIにおいては

$$\dot{E}_{gm}^{(II)} = 0, \quad \dot{\kappa}_g^{(II)} = 0 \quad (2.15)$$

式(2.15)に式(2.11)を代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Y_1} \left(\frac{d\dot{u}^{(II)}}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{d\dot{w}^{(II)}}{d\varphi} \sin \varphi \right) &= 0 \\ -\frac{1}{Y_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\dot{u}^{(II)}}{d\varphi} \frac{\sin \varphi}{Y_1} - \frac{d\dot{w}^{(II)}}{d\varphi} \frac{\cos \varphi}{Y_1} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

ここに添字 (II) はかく II を示す。式 (2.16) を解いて

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}^{(II)} &= C^{(II)} \gamma_1 \cos \varphi + D^{(II)} \\ \dot{w}^{(II)} &= C^{(II)} \gamma_1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

ただし $C^{(II)}$, $D^{(II)}$ は積分定数である。また $C^{(I)}$, $C^{(II)}$ はかく I, II の角速度 (反時計針方向を正とする) を意味していることが証明できる。

今考えている変形は、図 2.1 に示すようにかく I および II は点 C を中心に回転し、この点で径方向の移動はないものとする。また点 C は軸方向にも移動しないものと考えてもさしつかえないから、結局次の境界条件が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ (点 C)}; & C^{(I)} &= C^{(II)} \\ \dot{u}^{(I)} &= -\dot{u}^{(II)} = 0 \\ \dot{w}^{(I)} &= -\dot{w}^{(II)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

このうち (2.18)₃ の条件は式 (2.14), (2.17) を導く際にすでに使用している。式 (2.18) に式 (2.14) および (2.17) を代入して、積分定数を決めると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D^{(I)} &= -C^{(I)} \left(1 + \frac{\pi}{4} \lambda^{(I)} \right) \\ D^{(II)} &= -C^{(II)} \gamma_1 = -C^{(I)} \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

したがって $\dot{u}^{(I)}$, $\dot{u}^{(II)}$, $\dot{w}^{(I)}$, $\dot{w}^{(II)}$ は式 (2.20) のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}^{(I)} &= \frac{\gamma_1 C^{(I)}}{1 + \lambda^{(I)} \sin \varphi} \left\{ \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{4} (-2\varphi + \sin 2\varphi) - 1 \right\} \\ \dot{u}^{(II)} &= C^{(I)} \gamma_1 (\cos \varphi - 1) \\ \dot{w}^{(I)} &= \gamma_1 C^{(I)} \left\{ \sin \varphi + \lambda^{(I)} \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) \right\} \\ \dot{w}^{(II)} &= C^{(I)} \gamma_1 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

ただし積分に際し $\lambda^{(I)}$ の 2 次以上の項は省略している。

以上でかく I, II の中央面の速度がわかったので、外力の存す仕事率と内部エネルギー散逸率とが等しいとおくことによつて、極限軸荷重の上界 P_0 を決めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} P_0 \left\{ (\dot{w}^{(I)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (\dot{w}^{(II)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \right\} &= 2\pi \gamma^{(I)} M_0 C^{(I)} + 2\pi (-\gamma^{(II)}) M_0 C^{(II)} \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \gamma^{(I)} \left(-N_0 \frac{\dot{u}^{(I)}}{\gamma^{(I)}} \right) \gamma_1 d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (-\gamma^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{u}^{(II)}}{\gamma^{(II)}} \right) \gamma_1 d\varphi \end{aligned} \quad (2.21)$$

これを計算すると

$$\frac{P_0}{2\pi \gamma_m \delta_0 h} = \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\pi-2}{2} \lambda - \left(1 + \pi - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda \lambda_1}{16} \quad (2.22)$$

上式の右辺は、式(2.10)のそれに全く等しい。

2.3 極限荷重に対する検討

2.1で極限荷重の下界を求めたが、これがはたして塑性条件を満足しているか否か。すなわちベローズのすべての部分で応力点が降伏面の外に出ないかどうかを確かめる必要がある。それには式(2.4)および(2.7)を用いて、各内力の分布を調べればよい。その結果 N_θ , N_φ は常に $N_0 (= \sigma_0 h)$ より小となり問題はないが、 M_φ については図2.2にその一例を示すように

λ の値が大きくなると M_0

($= \sigma_0 h^2/4$) よりも大きくなり、塑性条件を満たさなくなる。他の形状パラメータのものについても、同様の考察をほどこすと、 λ/λ_1 が 0.7 より小さければ、 $M_\varphi \leq M_0$ となることがわかった。したがって式(2.22)の適用範囲は $\lambda/\lambda_1 \leq 0.7$ の場合であり、それ以上の場合には降伏関節円が A, B 2点から移動するものとして解析しなければならない。なお上の解析は点 C が半径方向に移動しないことを前提としているが、実際には点 C は多少移動する。しかしこの移動を考慮した場合でも、解析の結果、軸荷重は式(2.10)の結果とほとんど異ならないことがわかった。

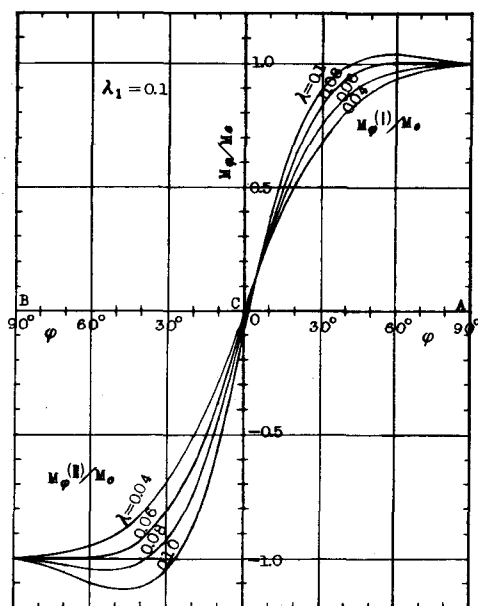


図 2.2 モーメント分布

2.4 極限軸荷重を求める近似公式(結論)

前述のように λ/λ_1 がほぼ 0.7 より小さければ、極限軸荷重は式(2.10)で求められることがわかった。ところがこの極限軸荷重の値は、真の降伏面に外接する降伏面に基くものであり、これを $7/8$ 倍すれば、真の極限軸荷重の値に十分近い値が得られるから、ベローズの極限軸荷重 P_0 の算定式とし

て、式(2.10)に $7/8$ を乗じた次式が得られる。

$$P_0/2\pi r_m \sigma_0 h = 0.219\lambda_1 + 0.499\lambda - 0.183\lambda^2 - 0.0547\lambda\lambda_1, \quad (2.23)$$

ただし $\lambda = r_i/r_m$, $\lambda_1 = h/r_i$ で
適用範囲は $\lambda/\lambda_1 \leq 0.7$ である。

式(2.23)を図示すると図2.3
および2.4のようになる。図2.3
は λ をパラメータとして、また
図2.4は λ_1 をパラメータとして
表わしたものである。なお以上は
軸荷重が引張りの場合について述
べたが、圧縮の場合も全く同様で
ある。すなわち圧縮の場合には図
1.6の降伏面のSRVW, JKUT
がかくI, IIに対応し、上と同様
の考察を行なうと式(2.23)が
得られる。また λ/λ_1 が0.7より
大きい場合には、降伏関節円が
2点A, Bから移動したところに
できるものとして、解析しなけれ
ばならない。これについては後の
章で述べる。

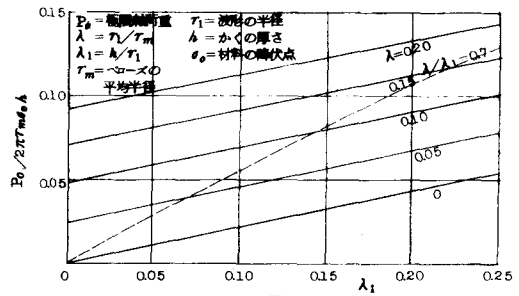


図 2.3 極限軸荷重

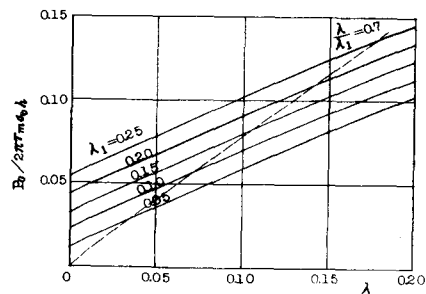


図 2.4 極限軸荷重

第3章 C形ベローズ

— 一般的な変形を考慮した解析 —

筆者は、先に第2章でC形ベローズの極限解析について述べたが、その解析は次の二つの仮定の下に行なわれた。すなわち、

- (a) 降伏関節円は点AおよびBにできる。
- (b) 点Cを中心にかくIおよびIIが回転する。

したがって、ベローズの極限軸荷重の算定式(2.23)の適用範囲にもおのずから制限があり、その制限を越えると図2.3にも示したように塑性条件を破ることになる。そこで本章ではこれらの仮定を取り除きできるだけ一般的な変形を考慮する。すなわち図3.1に示すように降伏関節円の生じる位置および回転の中心となる位置は未知であるとして、これらも境界条件から求めるようにする。なお使用する降伏面は第2章と同様である。

3.1 平衡法

図3.1に示すようにベローズ1/2ピッチ(AB)をAC、BDおよびCDの3つの部分に分け、おのおのかくI、II、およびIIIとする。かくの平衡式は式(2.1)で与えられる。塑性条件は、かくIでは N_ϕ は圧縮で N_ϕ は引張りである。したがってすべての応力点は図1.6のJKLM上にある、ゆえにこれを式で表わすと

$$N_g^{(I)} - N_\phi^{(I)} = N_\phi \quad (3.1)$$

式(3.1)を式(2.1)に代入して

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(I)} \sin \varphi + Q^{(I)} \cos \varphi &= V^{(I)} \\ \frac{dN_g^{(I)}}{d\varphi} + \sigma_0 h \frac{Y_1}{Y_0} \cos \varphi - Q^{(I)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_1} \frac{dM_g^{(I)}}{d\varphi} - Q^{(I)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

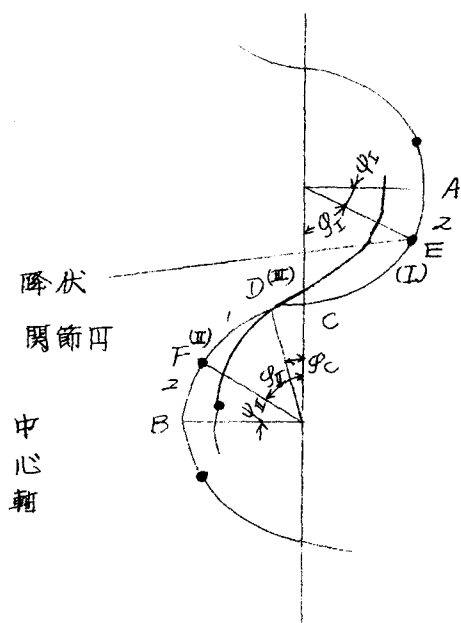


図3.1 C形ベローズの変形機構

これを解いて

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(I)} &= \frac{P}{2\pi\gamma_m^{(I)}} (\sin\varphi - \lambda^{(I)}) - \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos\varphi) \cos\varphi + A^{(I)} \cos\varphi \\ Q^{(I)} &= \frac{P}{2\pi\gamma_m^{(I)}} \cos\varphi + \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos\varphi) \sin\varphi - A^{(I)} \sin\varphi \\ \frac{M_g^{(I)}}{\gamma_i} &= \frac{P}{2\pi\gamma_m^{(I)}} \sin\varphi + \sigma_0 h \lambda^{(I)} (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{2} \sin^2\varphi) \\ &\quad + A^{(I)} \cos\varphi + B^{(I)} \end{aligned} \right\} (3.3)$$

ここに $A^{(I)}$, $B^{(I)}$ は積分定数であり、また式 (3.2) を解く際 $\lambda^{(I)}$ の 2 次以上の項は省略している。

次にかく II においては N_θ , N_g とともに引張りである。ゆえにすべての応力点は図 1.6 の NPRS 上にある。したがって

$$N_\theta^{(II)} = N_0 \quad (3.4)$$

式 (3.4) を式 (2.1) に代入して

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} \sin\varphi + Q^{(II)} \cos\varphi &= V^{(II)} \\ \frac{dN_g^{(II)}}{d\varphi} + (N_g^{(II)} - \sigma_0 h) \frac{\gamma_i}{\gamma^{(II)}} \cos\varphi - Q^{(II)} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma_i} \frac{dM_g^{(II)}}{d\varphi} - Q^{(II)} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.5)$$

これを解いて

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} &= (1 - \lambda^{(II)} \sin\varphi) \left(-\frac{P}{2\pi\gamma_m^{(II)}} \sin\varphi + \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \cos\varphi + A^{(II)} \cos\varphi \right) \\ Q^{(II)} &= (1 - \lambda^{(II)} \sin\varphi) \left(-\frac{P}{2\pi\gamma_m^{(II)}} \cos\varphi - \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \sin\varphi - A^{(II)} \sin\varphi \right) \\ \frac{M_g^{(II)}}{\gamma_i} &= -\frac{P}{2\pi\gamma_m^{(II)}} \sin\varphi \left(1 - \frac{\lambda^{(II)}}{2} \sin\varphi \right) - \sigma_0 h \lambda^{(II)} \left[\sin\varphi - \varphi \cos\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda^{(II)}}{4} \{ \sin\varphi (\sin\varphi - 2\varphi \cos\varphi) + \varphi^2 \} \right] \\ &\quad + A^{(II)} \left\{ \cos\varphi + \frac{\lambda^{(II)}}{2} (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi) \right\} + B^{(II)} \end{aligned} \right\} (3.6)$$

ここに $A^{(II)}$, $B^{(II)}$ は積分定数で、積分に際しては $\lambda^{(II)}$ の 2 次以上の項は省略してある。

最後にかく III (CD) においては、 N_θ は圧縮で N_g は引張りであるから、すべての応力点は図 1.6 の面 JKLM 上にあり、これを式で表わすと、

$$N_g^{(III)} - N_\theta^{(III)} = N_0 \quad (3.7)$$

式 (3.7) を式 (2.1) に代入して

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} \sin \varphi + Q^{(II)} \cos \varphi &= V^{(II)} \\ \frac{dN_g^{(II)}}{d\varphi} + \sigma_0 \hbar \frac{Y_i}{Y^{(II)}} \cos \varphi - Q^{(II)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_i} \frac{dM_g^{(II)}}{d\varphi} - Q^{(II)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式(3.8)を解くと

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} &= \frac{-P}{2\pi Y_m^{(II)}} (\sin \varphi - \lambda^{(II)}) - \sigma_0 \hbar \lambda^{(II)} (\varphi + \lambda^{(II)} \cos \varphi) \cos \varphi + A^{(II)} \cos \varphi \\ Q^{(II)} &= \frac{-P}{2\pi Y_m^{(II)}} \cos \varphi + \sigma_0 \hbar \lambda^{(II)} (\varphi + \lambda^{(II)} \cos \varphi) \sin \varphi - A^{(II)} \sin \varphi \\ \frac{M_g^{(II)}}{Y_i} &= \frac{-P}{2\pi Y_m^{(II)}} \sin \varphi + \sigma_0 \hbar \lambda^{(II)} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^{(II)}}{2} \sin^2 \varphi) + A^{(II)} \cos \varphi + B^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

式(3.3)、(3.6)および(3.9)において

$$\left. \begin{aligned} Y_m^{(I)} &= -Y_m^{(II)} = -Y_m^{(III)} \equiv Y_m \\ \lambda^{(I)} &= -\lambda^{(II)} = -\lambda^{(III)} \equiv \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

とおくと、式(3.3)、(3.6)および(3.9)は次の式(3.11)、(3.12)

および(3.13)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(I)} &= \frac{P}{2\pi Y_m} (\sin \varphi - \lambda) - \sigma_0 \hbar \lambda (\varphi + \lambda \cos \varphi) \cos \varphi + A^{(I)} \cos \varphi \\ Q^{(I)} &= \frac{P}{2\pi Y_m} \cos \varphi + \sigma_0 \hbar \lambda (\varphi + \lambda \cos \varphi) \sin \varphi - A^{(I)} \sin \varphi \\ \frac{M_g^{(I)}}{Y_i} &= \frac{P}{2\pi Y_m} \sin \varphi + \sigma_0 \hbar \lambda (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi) + A^{(I)} \cos \varphi + B^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} &= (1 + \lambda \sin \varphi) \left(\frac{P}{2\pi Y_m} \sin \varphi - \sigma_0 \hbar \lambda \varphi \cos \varphi + A^{(II)} \cos \varphi \right) \\ Q^{(II)} &= (1 + \lambda \sin \varphi) \left(\frac{P}{2\pi Y_m} \cos \varphi + \sigma_0 \hbar \lambda \varphi \sin \varphi - A^{(II)} \sin \varphi \right) \\ \frac{M_g^{(II)}}{Y_i} &= \frac{P}{2\pi Y_m} \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda}{2} \sin \varphi \right) \\ &\quad + \sigma_0 \hbar \lambda \left[\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda}{2} \{ \sin \varphi (\sin \varphi - 2\varphi \cos \varphi) + \varphi^2 \} \right] \\ &\quad + A^{(II)} \left\{ \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right\} + B^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(III)} &= \frac{P}{2\pi Y_m} (\sin \varphi + \lambda) + \sigma_0 \hbar \lambda (\varphi - \lambda \cos \varphi) \cos \varphi + A^{(III)} \cos \varphi \\ Q^{(III)} &= \frac{P}{2\pi Y_m} \cos \varphi - \sigma_0 \hbar \lambda (\varphi - \lambda \cos \varphi) \sin \varphi - A^{(III)} \sin \varphi \\ \frac{M_g^{(III)}}{Y_i} &= \frac{P}{2\pi Y_m} \sin \varphi - \sigma_0 \hbar \lambda (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi) + A^{(III)} \cos \varphi + B^{(III)} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここで積分定数 $A^{(i)}, B^{(i)}$ ($i = I, II, III$)、降伏関数曲線の生じる位置 φ_I, φ_{II} 、回転の中心 D の位置 φ_0 および極限軸荷重 P_0 は次の 10 個の境界条件から決める。

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点 } A) : \quad \rho^{(I)} &= 0 \\ (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点 } B) : \quad \rho^{(III)} &= 0 \\ (c) \quad \varphi = \varphi_I \text{ (点 } E) : \quad \partial M_{\varphi}^{(I)} / \partial \varphi &= 0, \quad M_{\varphi}^{(I)} = M_0 \\ (d) \quad \varphi = \varphi_{II} \text{ (点 } F) : \quad \partial M_{\varphi}^{(III)} / \partial \varphi &= 0, \quad M_{\varphi}^{(III)} = M_0 \\ (e) \quad \varphi = 0 \text{ (点 } C) : \quad N_{\varphi}^{(I)} = N_{\varphi}^{(III)}, \quad M_{\varphi}^{(I)} &= -M_{\varphi}^{(III)} \\ (f) \quad \varphi = \varphi_0 \text{ (点 } D) : \quad N_{\varphi}^{(III)} = N_{\varphi}^{(II)}, \quad M_{\varphi}^{(III)} &= M_{\varphi}^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

式 (3.14) に式 (3.11) ~ (3.13) を代入すると、10 元連立超越方程式が得られ、これから $A^{(i)}, B^{(i)}$ ($i = I, II, III$) を消去すると、次の 4 元連立超越方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} P \sin \psi_I - \lambda \cos \psi_I (\psi_I - \lambda \sin \psi_I) &= 0 \\ P \sin \psi_{II} - \lambda \psi_{II} \cos \psi_{II} &= 0 \\ P(2 - \cos \varphi_0) &= 2\varphi_0 + \lambda(\varphi_0 \sin \varphi_0 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0) \\ P \left\{ \cos \psi_I + \cos \psi_{II} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \cos \psi_{II}\right) + \lambda \left(2 - 2 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_0\right) \right\} \\ &= \frac{\lambda}{2} + \lambda \left[\pi - \cos \psi_I - \cos \psi_{II} - \psi_I \sin \psi_I - \psi_{II} \sin \psi_{II} + 2 \sin \varphi_0 - 2 \varphi_0 \cos \varphi_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4} \left\{ 2 \cos^2 \varphi_I + \cos^2 \varphi_{II} + 2 \psi_{II} \cos \psi_{II} \sin \psi_{II} + \psi_{II}^2 - \frac{\pi^2}{4} + \sin^2 \varphi_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2\varphi_0 - \pi) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + (\pi - \varphi_0) \varphi_0 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

ここに

$$\psi_I = \frac{\pi}{2} - \varphi_I, \quad \psi_{II} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{II}, \quad P = \frac{P}{2\pi\gamma_m\sigma_0 h}$$

式 (3.15) は解析的には解けないが、数値的に解くと、 $P, \psi_I, \psi_{II}, \varphi_0$ が得られる。すなわち式 (3.15)₁, (3.15)₂ から P を消去して、

$$\psi_{II} \sin \psi_I \cos \psi_{II} - (\psi_I - \lambda \sin \psi_I) \sin \psi_{II} \cos \psi_I = 0 \quad (3.16)$$

式 (3.15)₂, (3.15)₃ から P を消去し、さらに $\sin \varphi_0, \cos \varphi_0$ を展開すると

$$\frac{\lambda}{2}(3\sin\psi_{II}-\psi_{II}\cos\psi_{II})\mathcal{P}_c^2 + (2\sin\psi_{II}-\frac{\pi}{2}\lambda\sin\psi_{II})\mathcal{P}_c - \lambda(\sin\psi_{II}+\psi_{II}\cos\psi_{II})=0 \quad (3.17)$$

式(3.15)₂, (3.15)₄ から p を消去して

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & 2\lambda \frac{\psi_{II}\cos\psi_{II}}{\sin\psi_{II}} \left[\cos\psi_I + \cos\psi_{II} \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos\psi_{II}\right) + \lambda \left\{ 2(1-\cos\mathcal{P}_c) - \frac{\sin^2\mathcal{P}_c}{2} \right. \right. \\ & - 2\lambda \left[\pi - \cos\psi_I - \cos\psi_{II} - \psi_I\sin\psi_I - \psi_{II}\sin\psi_{II} + 2\sin\mathcal{P}_c - 2\mathcal{P}_c\cos\mathcal{P}_c \right. \\ & - \frac{\lambda}{4} \left\{ 2\cos^2\psi_I + \cos^2\psi_{II} + 2\psi_{II}\cos\psi_{II}\sin\psi_{II} + \psi_{II} + \psi_{II}^2 - \frac{\pi^2}{4} + \sin^2\mathcal{P}_c \right. \\ & \left. \left. + (2\mathcal{P}_c - \pi)\sin\mathcal{P}_c\cos\mathcal{P}_c + (\pi - \mathcal{P}_c)\mathcal{P}_c \right\} \right] \quad (3.18) \end{aligned}$$

まず式(3.16)において、 λ, ψ_I を仮定しこれに対する ψ_{II} を求める。次にこの ψ_{II} を式(3.17)に代入してこれを解き、 $\mathcal{P}_c$ を求める。このようにして求めた $\lambda, \psi_I, \psi_{II}, \mathcal{P}_c$ の値を式(3.18)に代入して計算すると λ_1 が得られ、これらの値を用いて最後に p を求める。かくして一連の $\psi_I, \psi_{II}, \mathcal{P}_c, p$ の値が計算できる。このようにして求めた極限軸荷重の値は、後に述べる仮想変形法から求めたそれと一致する。ただしこの値は図1.6に示す外接降伏面に基くものであるから、これに $7/8$ を乗じたものは真の極限軸荷重に十分近い値であると考えられる。図3.2および3.3はこれを図示したものである。図中、破線は近似式(2.23)の値である。また図3.4は各パラメータについて $\psi_I, \psi_{II}, \mathcal{P}_c$ の値を示したものである。

3.2 仮想変形法

まず速度成分とひずみ率および曲率の変化率との関係は式(2.11)で与えられる。ベローズに対する応力場およびモーメント場は、前章と同様に図1.6に示した近似降伏面に基くものとする。このような応力場とモーメント場とをもつ場合のかくの变形速度は、塑性学における流れ法則により、かくIおよびIIにおいては図1.6の面JKLMに垂直であり、かくIIでは面NPRSに垂直である。したがって

$$\left. \begin{aligned} -\dot{\epsilon}_{\theta n}^{(I)} &= \dot{\epsilon}_{\phi n}^{(I)}, & \dot{\kappa}_{\phi}^{(I)} &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{\phi n}^{(II)} &= 0, & \dot{\kappa}_{\phi}^{(II)} &= 0 \\ -\dot{\epsilon}_{\theta n}^{(III)} &= \dot{\epsilon}_{\phi n}^{(III)}, & \dot{\kappa}_{\phi}^{(III)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

式(3.19)に式(2.11)を代入すると、 $\dot{u}$ 、 $\dot{w}$ に関する連立微分方程式が得られ、これを解くと、かくI、IIおよびIIIの速度成分は次のようになる。まずかくIでは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}^{(I)}}{\gamma_I} &= \frac{1}{1+\lambda \sin \varphi} (C^{(I)} a(\varphi) + D^{(I)}) \\ \frac{\dot{w}^{(I)}}{\gamma_I} &= C^{(I)} b(\varphi) + D^{(I)} \lambda g(\varphi) + E^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

ただし

$$a(\varphi) = \cos \varphi + \frac{\pi}{2} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$b(\varphi) = \sin \varphi - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi$$

$$g(\varphi) = \cos \varphi + \lambda (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\lambda = \gamma_I / \gamma_m, \quad C^{(I)}, D^{(I)}, E^{(I)} \text{ は積分定数}$$

かくIIでは

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}^{(II)} &= C^{(II)} \gamma_I \cos \varphi + D^{(II)} \\ \dot{w}^{(II)} &= C^{(II)} \gamma_I \sin \varphi + E^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ただし $C^{(II)}, D^{(II)}, E^{(II)}$ は積分定数である。

かくIIIでは

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}^{(III)}}{\gamma_I} &= \frac{1}{1-\lambda \sin \varphi} (C^{(III)} h(\varphi) + D^{(III)}) \\ \frac{\dot{w}^{(III)}}{\gamma_I} &= C^{(III)} j(\varphi) - D^{(III)} \lambda \ell(\varphi) + E^{(III)} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

ただし

$$h(\varphi) = \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$j(\varphi) = \sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin^2 \varphi$$

$$\ell(\varphi) = \cos \varphi - \lambda (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$C^{(III)}, D^{(III)}, E^{(III)} \text{ は積分定数}$$

積分に際しては、いずれも λ の2次以上の項は省略している。上の式(3.20)～(3.22)に含まれている積分定数 $C^{(n)}, D^{(n)}, E^{(n)}$ は以下に述べる境界条件によって定まる。なお $C^{(n)}$ は前章の場合と同様、かく(n)の回転速度を表わす。

ここでは図3.1に示すように φ_I, φ_{II} の位置に降伏関節四が生じ、降伏関

節四にはさまれたかく(EF)は点Dを中心に回転するものとする。なお回転の中心になる点Dの位置は未知であるとして、その位置を表わすために未知数 φ_0 をあらたに加える。そうすると境界条件は次の14個になる。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点A)}: & \quad d\dot{u}_2^{(I)}/d\varphi = 0 \\
 (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点B)}: & \quad d\dot{u}_2^{(II)}/d\varphi = 0 \\
 (c) \quad \varphi = 0 \text{ (点C)}: & \quad C_1^{(I)} = C_1^{(II)}, \quad \dot{u}_1^{(I)} = -\dot{u}_1^{(II)}, \quad \dot{w}_1^{(I)} = -\dot{w}_1^{(II)} \\
 (d) \quad \varphi = \varphi_c \text{ (点D)}: & \quad C_1^{(II)} = C_1^{(III)}, \quad \dot{u}_1^{(II)} = \dot{u}_1^{(III)}, \quad \dot{w}_1^{(II)} = \dot{w}_1^{(III)} = 0 \\
 (e) \quad \varphi = \varphi_I \text{ (点E)}: & \quad \dot{u}_1^{(I)} = \dot{u}_2^{(II)}, \quad \dot{w}_1^{(I)} = \dot{w}_2^{(II)} \\
 (f) \quad \varphi = \varphi_{II} \text{ (点F)}: & \quad \dot{u}_1^{(II)} = \dot{u}_2^{(III)}, \quad \dot{w}_1^{(II)} = \dot{w}_2^{(III)}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \\ (f) \end{aligned}} \right\} (3.23)$$

ここに添字1, 2は図3.1に示すように、降伏関節四の両側を意味する。すなわちかくIではCE, AEを1, 2で表わし、かくIIではDF, BFを1, 2で表わす。境界条件の式(3.23)に式(3.20) ~ (3.22)の一般解を代入すると、各積分定数は一つの定数を含んで決定される。

$$\begin{aligned}
 C_1^{(II)} &= C_1^{(I)} \\
 C_2^{(I)} &= 0 \\
 C_2^{(II)} &= 0 \\
 C_1^{(III)} &= C_1^{(I)} \\
 D_1^{(I)} &= C_1^{(I)} \{ h(\varphi_c) - 2 \} \\
 D_2^{(I)} &= C_1^{(I)} \{ a(\varphi_I) + h(\varphi_c) - 2 \} \\
 D_1^{(II)} &= -C_1^{(I)} \gamma_1 \cos \varphi \\
 D_2^{(II)} &= -C_1^{(I)} h(\varphi_c) \\
 D_2^{(III)} &= C_1^{(I)} \gamma_1 (\cos \varphi_{II} - \cos \varphi_c) \\
 E_1^{(I)} &= C_1^{(I)} \{ \lambda h(\varphi_c) l(\varphi_c) + j(\varphi_c) - 2\lambda h(\varphi_c) + 2\lambda \} \\
 E_2^{(I)} &= C_1^{(I)} \{ b(\varphi_I) + \lambda h(\varphi_c) l(\varphi_c) + j(\varphi_c) - 2\lambda h(\varphi_c) + 2\lambda \\
 &\quad - a(\varphi_I) \lambda g(\varphi_I) \} \\
 E_1^{(II)} &= -C_1^{(I)} \gamma_1 \sin \varphi_c \\
 E_2^{(II)} &= C_1^{(I)} \gamma_1 (\sin \varphi_{II} - \sin \varphi_c) \\
 E^{(III)} &= -C_1^{(I)} \{ \lambda h(\varphi_c) l(\varphi_c) + j(\varphi_c) \}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} C_1^{(II)} \\ C_2^{(I)} \\ C_2^{(II)} \\ C_1^{(III)} \\ D_1^{(I)} \\ D_2^{(I)} \\ D_1^{(II)} \\ D_2^{(II)} \\ D_2^{(III)} \\ E_1^{(I)} \\ E_2^{(I)} \\ E_1^{(II)} \\ E_2^{(II)} \\ E^{(III)} \end{aligned}} \right\} (3.24)$$

式(3.24)を式(3.20) ~ (3.22)に代入すると、かくの各部の速度

が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{u}_1^{(I)}}{\gamma_I} &= \frac{C_1^{(I)}}{1+\lambda \sin \varphi} \{a(\varphi) + h(\varphi_c) - 2\} \\
 \frac{\dot{u}_2^{(I)}}{\gamma_I} &= \frac{C_1^{(I)}}{1+\lambda \sin \varphi} \{a(\varphi_I) + h(\varphi_c) - 2\} \\
 \frac{\dot{w}_1^{(I)}}{\gamma_I} &= C_1^{(I)} \{b(\varphi) + j(\varphi_c) + \lambda \{h(\varphi_c)(g(\varphi) + l(\varphi_c) - 2) + 2 - 2g(\varphi)\}\} \\
 \frac{\dot{w}_2^{(I)}}{\gamma_I} &= C_1^{(I)} \{b(\varphi_I) + j(\varphi_c) + \lambda \{h(\varphi_c)(g(\varphi) + l(\varphi_c) - 2) + 2 - 2g(\varphi) \\
 &\quad + a(\varphi_I)(g(\varphi) - g(\varphi_I))\}\} \\
 \dot{u}_1^{(II)} &= C_1^{(II)} \gamma_I (\cos \varphi - \cos \varphi_c) \\
 \dot{u}_2^{(II)} &= C_1^{(II)} \gamma_I (\cos \varphi_I - \cos \varphi_c) \\
 \dot{w}_1^{(II)} &= C_1^{(II)} \gamma_I (\sin \varphi - \sin \varphi_c) \\
 \dot{w}_2^{(II)} &= C_1^{(II)} \gamma_I (\sin \varphi_I - \sin \varphi_c) \\
 \frac{\dot{u}^{(III)}}{\gamma_I} &= \frac{C_1^{(III)}}{1-\lambda \sin \varphi} \{h(\varphi) - h(\varphi_c)\} \\
 \frac{\dot{w}^{(III)}}{\gamma_I} &= C_1^{(III)} \{j(\varphi) - j(\varphi_c) + \lambda h(\varphi_c) \{l(\varphi) - l(\varphi_c)\}\}
 \end{aligned}$$

(3.25)

以上でかくの各部分の速度がわかったので 外力のなす仕事率と内部エネルギー散逸率とか等しいとおくと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 P \left\{ (\dot{w}_2^{(I)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (\dot{w}_2^{(II)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \right\} &= 2\pi (\gamma_m + \gamma_I \sin \varphi_I) M_0 C_1^{(I)} \\
 &+ 2\pi (\gamma_m - \gamma_I \sin \varphi_I) M_0 C_1^{(II)} + \int_0^{\varphi_I} 2\pi \gamma_I \left(-N_0 \frac{\dot{u}_1^{(I)}}{\gamma^{(I)}} \right) \gamma_I d\varphi \\
 &+ \int_{\varphi_I}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \gamma^{(I)} \left(-N_0 \frac{\dot{u}_2^{(I)}}{\gamma^{(I)}} \right) \gamma_I d\varphi + \int_{\varphi_c}^{\varphi_{II}} 2\pi (-\gamma^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{u}_1^{(II)}}{\gamma^{(II)}} \right) \gamma_I d\varphi \\
 &+ \int_{\varphi_{II}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (-\gamma^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{u}_2^{(II)}}{\gamma^{(II)}} \right) \gamma_I d\varphi + \int_0^{\varphi_c} 2\pi (-\gamma^{(III)}) \left(-N_0 \frac{\dot{u}^{(III)}}{\gamma^{(III)}} \right) \gamma_I d\varphi \\
 &+ \int_{\varphi_c}^{\varphi_{II}} 2\pi (-\gamma^{(III)}) \left(-N_0 \frac{\dot{w}^{(III)}}{\gamma^{(III)}} \right) \gamma_I d\varphi
 \end{aligned}$$

(3.26)

式(3.26)を整理すると、次のようになる

$$\begin{aligned}
 P \left\{ \cos \varphi_{II} + \cos \varphi_I \left(1 + \frac{\lambda}{2} \cos \varphi_I \right) + \lambda \left(2 - 2 \cos \varphi_c - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_c \right) \right\} \\
 = \frac{\lambda_I}{4} \left\{ 2 + \lambda (\cos \varphi_I - \cos \varphi_{II}) \right\} \\
 + \lambda \left\{ \pi - \cos \varphi_I - \cos \varphi_{II} - \varphi_I \sin \varphi_I - \varphi_{II} \sin \varphi_{II} + 2 \sin \varphi_c - 2 \varphi_c \cos \varphi_c \right. \\
 \left. - \frac{\lambda}{4} \left\{ \varphi_I^2 - \frac{\pi^2}{4} + 2 \varphi_I \sin \varphi_I \cos \varphi_I - \cos^2 \varphi_I - 4 \sin^2 \varphi_I + 8 + \pi \varphi \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\pi \sin \varphi_c \cos \varphi_c - \sin^2 \varphi_c - 4 \cos^2 \varphi_c + \varphi_c^2 - 2 \varphi_c \sin \varphi_c \cos \varphi_c \} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

ただし $p = P/2\pi\gamma_m\sigma_0 h_0$ 。ここで p が最小になるように $\psi_I, \psi_{II}, \varphi_c$ を定める。またその p の最小値が極限軸荷重の上界 p_0 である。式(3.27)を ψ_I, ψ_{II} および φ_c で微分し、 $\partial p/\partial \psi_I = 0, \partial p/\partial \psi_{II} = 0$ および $\partial p/\partial \varphi_c = 0$ とおくと、式(3.28)が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} & p \sin \psi_I (1 + \lambda \cos \psi_I) - \frac{\lambda \lambda'}{4} \sin \psi_I \\ & \quad - \lambda \{ \psi_I \cos \psi_I + \lambda (\psi_I \cos^2 \psi_I - \sin \psi_I \cos \psi_I) \} = 0 \\ & p \sin \psi_{II} + \frac{\lambda \lambda'}{4} \sin \psi_{II} - \lambda \psi_{II} \cos \psi_{II} = 0 \\ & p(2 - \cos \varphi_c) - 2 \varphi_c + \lambda \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_c \right) \sin \varphi_c + \cos \varphi_c \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

式(3.27)および(3.28)を $\psi_I, \psi_{II}, \varphi, p$ の四元連立方程式として数値的に解けば、その結果は平衡法の場合と等しくなることがわかる。またこのことは平衡法によつて求めた $\psi_I, \psi_{II}, \varphi_c, p$ の値を式(3.27)および(3.28)に代入することによつても確かめることができる。

3.3 変形に対する検討

本章では図3.1に示すような変形を考えたが、図3.5に示すように回転の中心 D がかく AC の方に移ることも一応考えられる。実際このような変形を仮定し計算を行なってみると、点 D は AC の部分にないことがわかる。したがつて図3.5に示すような変形は存在しない。

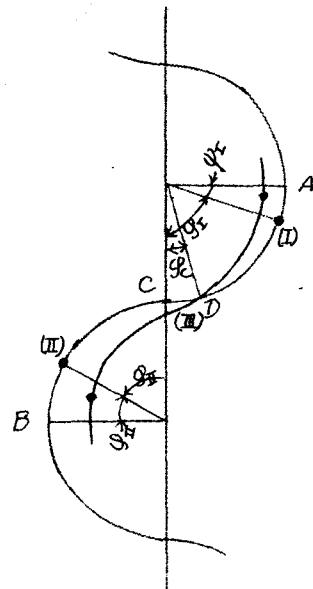


図 3.5

3.4 結 論

図3.2 ~ 3.4に数値計算の結果をグラフで示す。図中、破線は近似公式(2.23)による値である。図3.2を見ると、第2章でも述べたように $\sqrt{\lambda}$ が0.7より大きくなると、実線と破線とは離れてくる。また図3.4は降伏

関節円の生じる位置および回転の中心が形状によってどのように変わるかを示したものであるが、これを見ると λ/λ_1 の値が 0.7 までは降伏関節円は点 A および B にできるが、 λ/λ_1 の値がほぼ 0.7 より大きくなると、そこから移動する様子がわかる。図 3.2 ~ 3.4 を用いれば、直ちに極限軸荷重の値および降伏関節円の生じる位置が得られる。図 3.2 ~ 3.4 が本章の結論である。

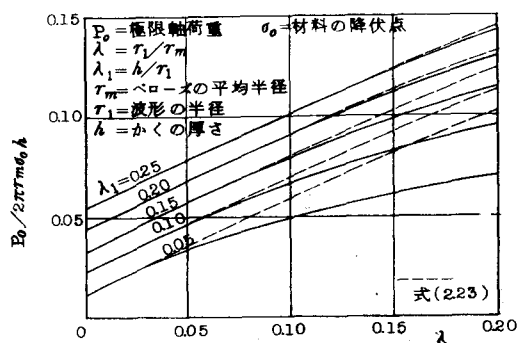


図 3.2 C形ベローズの極限軸荷重

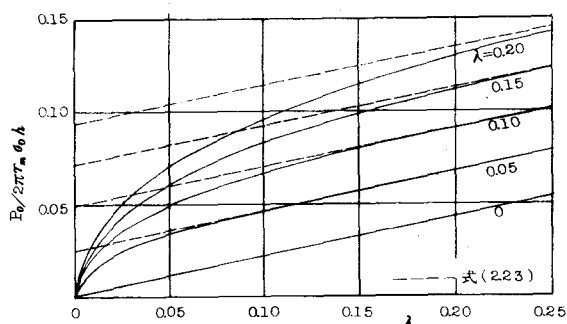


図 3.3 C形ベローズの極限軸荷重

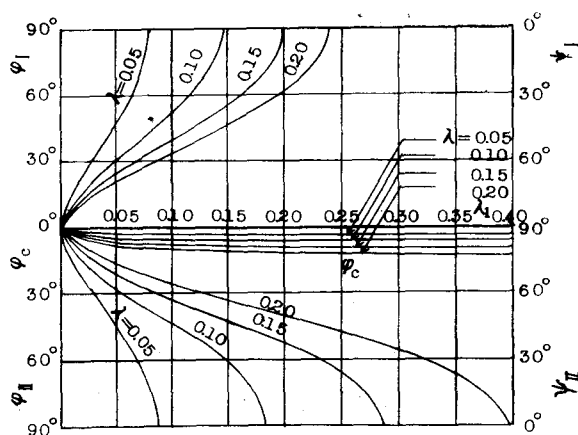


図 3.4 C形ベローズの降伏関節円および回転の中心の位置

第4章 U形ベローズ

—— 簡単な変形を考慮した解析 ——

第4章および第5章においては、U形ベローズの極限解析の問題を取り扱う。U形ベローズは円環かくと円輪板とから成るが、円環かくの部分にはC形ベローズに用いた図1.6の近似降伏面を用い、円輪板部分には円板に対するTrescaの降伏条件を用いる。

なお本章では計算をできるだけ簡単にし、結論を公式の形にまとめることを考えているので、次の仮定を設けている。すなわち

- (a) 円輪板の面内力および面内変位は無視する。
- (b) 降伏関節円は点AおよびBに生じる。

4.1 平 衡 法

まず平衡法によって極限軸荷重の下界を求めよう。ベローズの $1/2$ ピッチを図4.1に示すように、次の4つの部分に分けて考える。

- I：円環かく
AC
 - II：円環かく
BD
 - III：円輪板CE
 - IV：円輪板DE
- ここに点Eは半径方向の曲げモーメント M_r が零になる点である。以下の考察においては軸力は引張りであると仮定するが、

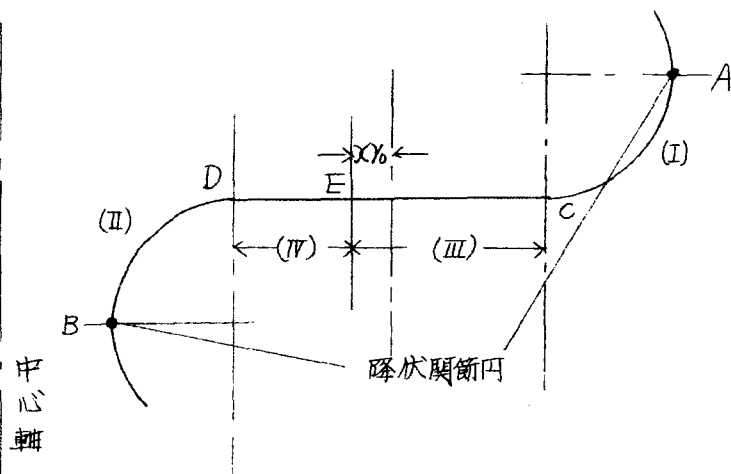


図4.1 U形ベローズ

その結果は軸力が圧縮の場合にも、同様に用いることができる。さて円環かくの部分の平衡式は式(2.1)で与えられる。

次に塑性条件は、Iの部分では周方向の面内力 N_θ は圧縮であり、子午線

方向の面内力 N_g は引張りである。このことからすべての応力点は図 1.6 の斜面 JKLM 上に存在するものと考えられる。したがって塑性条件を式で表わすと、次の式 (4.1) のようになる。

$$N_g^{(I)} - N_o^{(I)} = \frac{7}{8} N_o \quad (4.1)$$

ここに添字 (I) は I の部分を示し、また σ_o は材料の降伏点であり、材料は通常の極限解析におけるように、完全塑性体とする。なお N_o に $7/8$ を乗じたのは、図 1.6 に示した外接降伏面の各稜をあらかじめ $7/8$ 倍したからである。

式 (4.1) を式 (2.1) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(I)} \sin \varphi + Q^{(I)} \cos \varphi &= V^{(I)} \\ \frac{dN_g^{(I)}}{d\varphi} + \sigma_o h \frac{Y_1}{Y^{(I)}} \cos \varphi - Q^{(I)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_1} \frac{dM_g^{(I)}}{d\varphi} - Q^{(I)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

式 (4.2) を解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(I)} &= \frac{P}{2\pi a} (\sin \varphi - \lambda^{(I)}) - \frac{7}{8} \sigma_o h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos \varphi) \cos \varphi + A^{(I)} \cos \varphi \\ Q^{(I)} &= \frac{P}{2\pi a} \cos \varphi + \frac{7}{8} \sigma_o h \lambda^{(I)} (\varphi + \lambda^{(I)} \cos \varphi) \sin \varphi - A^{(I)} \sin \varphi \\ \frac{M_g^{(I)}}{Y_1} &= \frac{P}{2\pi a} \sin \varphi + \frac{7}{8} \sigma_o h \lambda^{(I)} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{2} \sin^2 \varphi) \\ &\quad + A^{(I)} \cos \varphi + B^{(I)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに $A^{(I)}$ 、 $B^{(I)}$ は積分定数であり、 $\lambda^{(I)}$ の 2 次以上の項は省略する。

次に II の部分においては周方向の面内力 N_o および子午線方向の面内力 N_g はともに引張りである。したがって応力点は図 1.6 の NPRS 上にあるものと考えられる (もし MLPN 上にあるものと考えると矛盾を生じる)。

これから塑性条件として次式が得られる。

$$N_o^{(II)} = \frac{7}{8} N_o \quad (4.4)$$

式 (4.4) を式 (2.1) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} N_g^{(II)} \sin \varphi + Q^{(II)} \cos \varphi &= V^{(II)} = -\frac{P}{2\pi Y^{(II)}} \\ \frac{dN_g^{(II)}}{d\varphi} + (N_g^{(II)} - N_o) \frac{Y_1}{Y^{(II)}} \cos \varphi - Q^{(II)} &= 0 \\ \frac{1}{Y_1} \frac{dM_g^{(II)}}{d\varphi} - Q^{(II)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式 (4.5) を解くと

$$\left. \begin{aligned}
 N_{\varphi}^{(II)} &= (1 - \lambda^{(II)} \sin \varphi) \left(-\frac{P}{2\pi b} \sin \varphi + \frac{7}{8} \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \cos \varphi + A^{(II)} \cos \varphi \right) \\
 Q^{(II)} &= (1 - \lambda^{(II)} \sin \varphi) \left(-\frac{P}{2\pi b} \cos \varphi - \frac{7}{8} \sigma_0 h \lambda^{(II)} \varphi \sin \varphi - A^{(II)} \sin \varphi \right) \\
 \frac{M_{\varphi}^{(II)}}{Y_1} &= \frac{P}{2\pi b} \sin \varphi \left(1 - \frac{\lambda^{(II)}}{2} \sin \varphi \right) - \frac{7}{8} \sigma_0 h \lambda^{(II)} \left[\sin \varphi - \varphi \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda^{(II)}}{4} \left\{ \sin \varphi (\sin \varphi - 2\varphi \cos \varphi) + \varphi^2 \right\} \right] + A^{(II)} \left\{ \cos \varphi + \frac{\lambda^{(II)}}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \right\} \\
 &\quad + B^{(II)}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ここに $A^{(II)}$, $B^{(II)}$ は積分定数で、積分に際しては $\lambda^{(II)}$ の 2 次以上の項は省略している。

一方円輪板の部分の平衡式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dr} (r M_r) - M_t - r Q_r &= 0 \\
 Q_r &= \frac{P}{2\pi r}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

III の部分 (円輪板 CE) においては、接線方向の曲げモーメント M_t は負であるが、径方向の曲げモーメント M_r は正である。したがってすべての応力点は図 4.2 の DE の部分にあり、降伏条件として次式を得る。

$$M_r^{(III)} - M_t^{(III)} = M_0 \quad (4.8)$$

式 (4.8) を式 (4.7) に代入すると、次のようになる。

$$r \frac{dM_r^{(III)}}{dr} + \frac{1}{4} \sigma_0 h^2 - \frac{P}{2\pi} = 0 \quad (4.9)$$

これを解いて

$$\begin{aligned}
 M_r^{(III)} &= \left(\frac{P}{2\pi} - \frac{\sigma_0 h^2}{4} \right) \log r \\
 &\quad + A^{(III)}
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

IV の部分 (円輪板 DE) においては、 M_t も M_r も負であり、 M_r は M_0 に比べ小さいので、応力点は図 4.2 の

EF 上にあることがわかる。ゆえに

$$M_t^{(IV)} = -M_0 \quad (4.11)$$

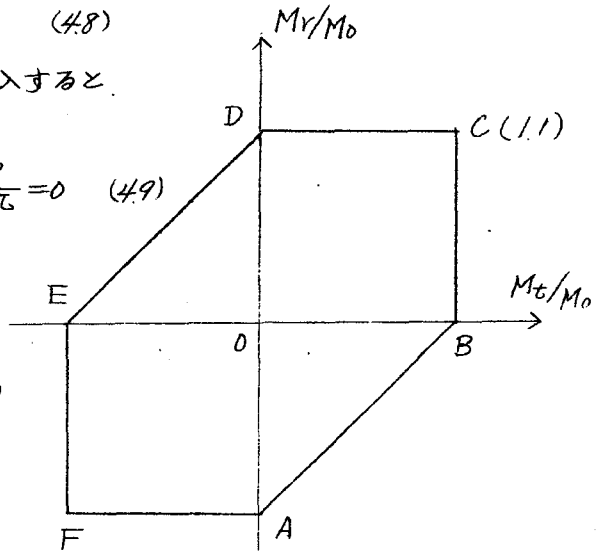


図 4.2 Tresca の降伏条件

したがって式(4.7)は

$$\frac{d}{dY}(YM_Y^{(IV)}) + \frac{1}{4}\sigma_0 h^2 - \frac{P}{2\pi} = 0 \quad (4.12)$$

これを解いて

$$M_Y^{(IV)} = \frac{P}{2\pi} - \frac{\sigma_0 h^2}{4} + \frac{A^{(IV)}}{Y} \quad (4.13)$$

さて上の6個の積分定数 $A^{(I)} \sim A^{(IV)}$, $B^{(I)}$, $B^{(IV)}$, 未定量 X および軸力 P の極限値の下界 P_L は、図4.1の点 A, B, C, D, E における8個の境界条件を用いることによって決定される。

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点A)} : Q^{(I)} &= 0, \quad M_\varphi^{(I)} = \frac{7}{8} M_0 \\ (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点B)} : Q^{(IV)} &= 0, \quad M_\varphi^{(IV)} = \frac{7}{8} M_0 \\ (c) \quad \varphi = 0 \text{ (点C)} : M_\varphi^{(I)} &= M_Y^{(IV)} \\ (d) \quad \varphi = 0 \text{ (点D)} : M_\varphi^{(IV)} &= -M_Y^{(IV)} \\ (e) \quad Y = Y_m - XY_0 \text{ (点E)} : M_Y^{(IV)} &= M_Y^{(IV)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

式(4.3), (4.6), (4.10) および(4.13)を境界条件の式(4.14)に代入すると、8元連立方程式が得られ、これを解けば極限軸荷重 P_0 の下界 P_L は次のようになる。

$$P_L = \frac{P_L}{2\pi Y_m \sigma_0 h} = \frac{B}{A} + \frac{C}{B} \quad (4.15)$$

ただし

$$A = 2 - 0.5\lambda + \frac{\xi}{\lambda}(2 + \xi - \lambda_2)$$

$$B = 0.5\lambda_2(2 - \xi) + \lambda_1(0.438 + 0.781\xi + 0.0625\lambda_2) - \lambda_2^2(1.12 - 1.52\xi)$$

$$C = \lambda_2^3 \left\{ 0.25 - \lambda_2(0.0582 - 0.379\xi) - 0.0312 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - 4\xi) \right. \\ \left. + \lambda_1(0.00364 + 0.0328\xi) - 0.00879(0.875 + \xi) \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \right\}$$

式(4.15)を用いたとき、ベローズのすべての個所で応力点が降伏曲面の外に出ないかどうかを確かめた結果、 N_φ , N_θ については問題なく、 M_φ については λ_2/λ がほぼ0.25より小さければ、 $M_\varphi \leq M_0$ となることがわかった。すなわち式(4.15)の適用範囲は $\lambda_2/\lambda \leq 0.25$ のときであり、それ以上の場合は降伏関数面が点 A, B から移動するものとして解析しなければならぬ。これについては次の第5章で述べる。

4.2 仮想変形法

次に極

限軸荷重
の上界を
仮想変形
法によつ
て求める。
ここでは
図4.3の
ように点
Aおよび
Bで降伏

中心
軸

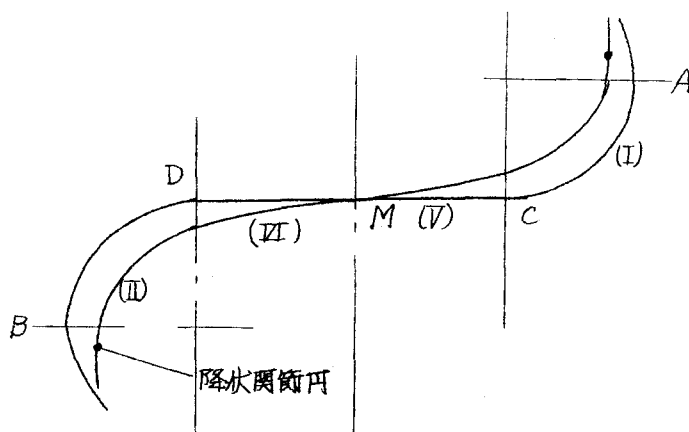


図4.3 U形ベローズの変形機構

関節円ができ、点Mを中心に回転するものと仮定する。ベローズのような薄
いかくに対する変形機構は、かくの中央面の変形速度がわかれば、決めるこ
とができる。

円環かくの中央面の速度とひずみ率および曲率の変化率との関係は、式
(2.11) によって与えられる。

ベローズの円環かく部に対する応力場およびモーメント場は、前節と同様
に図1.6に示した近似降伏面に基くものとする。このような応力場とモー
メント場とをもつ場合のかくの変形速度は、塑性学における流れ法則により、
IおよびIIの部分においては図1.6の面JKLMおよびNPRSに垂直であ
る。したがって

$$\left. \begin{aligned} -\dot{\epsilon}_{\theta n}^{(I)} &= \dot{\epsilon}_{\theta n}^{(II)}, & \dot{\kappa}_\theta^{(I)} &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{\theta n}^{(III)} &= 0, & \dot{\kappa}_\theta^{(III)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

式(4.16.)に式(2.11)を代入すると、 $\dot{u}$, $\dot{w}$ に関する連立微分方程
式が得られ、これを解くとIおよびIIの部分の速度成分の一般解は次のよ
うになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{u}^{(I)}}{r_i} &= \frac{C^{(II)} \ell(\varphi) + D^{(II)}}{1 + \lambda^{(II)} \sin \varphi} \\ \frac{\dot{w}^{(I)}}{r_i} &= C^{(I)} \ell(\varphi) + D^{(II)} \lambda^{(II)} n(\varphi) + E^{(I)} \\ \dot{u}^{(II)} &= C^{(III)} r_i \cos \varphi + D^{(II)} \\ \dot{w}^{(II)} &= C^{(II)} r_i \sin \varphi + E^{(II)} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

ここに

$$k(\varphi) = \cos \varphi + \frac{\lambda^{(I)}}{4} (\pi - 2\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$l(\varphi) = \sin \varphi - \frac{\lambda^{(II)}}{2} \sin 2\varphi$$

$$n(\varphi) = \cos \varphi + \lambda^{(I)} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

$C^{(n)}$, $D^{(n)}$ および $E^{(n)}$ ($n = I, II$) は積分定数であり, $\lambda^{(I)}$ の二次以上の項は省略している。また $C^{(n)}$ は積分定数であるとともにかくの角速度を意味していることがわかる。

一方円輪板における r 方向および φ 方向の曲率の変化率 $\dot{K}_r$ および $\dot{K}_\varphi$ は

$$\dot{K}_r = \frac{d^2 \dot{w}_r}{dr^2}, \quad \dot{K}_\varphi = \left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{d \dot{w}_r}{dr}\right) \quad (4.18)$$

ここに $\dot{w}_r$ は円輪板の軸方向上向きの変位である, 簡単のために ここでは径方向のモーメント M_r は, 図 4.3 の点 M において近似的に零であると仮定する (図 4.1 のような点 E を考えた変形を仮定するとき極めて複雑になる), そして円輪板を次の二つの部分にわけると

V : 円輪板 CM

VI : 円輪板 DM

すると V および VI の部分の曲率の変化率のベクトルは, 弾性学における流れ法則によって, 図 4.2 の直 DE および EF に垂直である。したがって

$$-\dot{K}_\varphi^{(V)} = \dot{K}_r^{(V)}, \quad \dot{K}_r^{(VI)} = 0 \quad (4.19)$$

式 (4.18) を式 (4.19) に代入してこれを解くと, 円輪板の部分に対する次の一般解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_r^{(V)} &= A^{(V)} \log r + B^{(V)} \\ \dot{w}_r^{(VI)} &= A^{(VI)} r + B^{(VI)} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

ここに $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ ($n = V, VI$) は積分定数である。式 (4.17) および (4.20) における積分定数は, 次の境界条件によって一つの定数を含んで決定される。

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \varphi = 0 \text{ (点C)} : C^{(II)} &= d\dot{w}_r^{(II)}/dr, \dot{u}^{(II)} = 0, \dot{w}^{(I)} = \dot{w}_r^{(V)} \\ (b) \quad \varphi = 0 \text{ (点D)} : C^{(III)} &= d\dot{w}_r^{(III)}/dr, \dot{u}^{(III)} = \dot{w}^{(III)} = \dot{w}_r^{(VI)} = 0 \\ (c) \quad r = r_m \text{ (点M)} : \dot{w}_r^{(V)} &= \dot{w}_r^{(VI)}, d\dot{w}_r^{(V)}/dr = d\dot{w}_r^{(VI)}/dr \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

境界条件の式(4.21)に式(4.17)および(4.20)の一般解を代入すると、9元連立方程式が得られ、これを解くと積分定数は一つの定数 $C^{(I)}$ を全て決定される。

$$\begin{aligned}
 A^{(I)} &= -a C^{(I)} \\
 B^{(I)} &= a C^{(I)} \left(\log r_m - 1 + \frac{b}{r_m} \right) \\
 A^{(II)} &= -\frac{a}{r_m} C^{(I)} \\
 B^{(II)} &= \frac{ab}{r_m} C^{(I)} \\
 D^{(I)} &= -C^{(I)} \left(1 + \frac{\pi}{4} \lambda^{(I)} \right) \\
 E^{(I)} &= C^{(I)} \left\{ \frac{a}{r_1} \left(\log \frac{a}{r_m} + 1 - \frac{b}{r_m} \right) + \left(1 + \frac{\pi}{4} \lambda^{(I)} \right) \lambda^{(I)} \right\} \\
 C^{(II)} &= \frac{a}{r_m} C^{(I)} \\
 D^{(II)} &= -\frac{ar_1}{r_m} C^{(I)} \\
 E^{(II)} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

したがって $\dot{u}^{(I)}, \dot{u}^{(II)}, \dot{w}^{(I)}, \dot{w}^{(II)}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \dot{u}^{(I)} &= \frac{r_1 C^{(I)}}{1 + \lambda^{(I)} \sin \varphi} \left\{ \cos \varphi - 1 + \frac{\lambda^{(I)}}{4} (-2\varphi + \sin 2\varphi) \right\} \\
 \dot{u}^{(II)} &= \frac{ar_1}{r_m} C^{(I)} (\cos \varphi - 1) \\
 \dot{w}^{(I)} &= r_1 C^{(I)} \left\{ \sin \varphi + \lambda^{(I)} \left(1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right) + \frac{a}{r_1} \left(\log \frac{a}{r_m} + 1 - \frac{b}{r_m} \right) \right\} \\
 \dot{w}^{(II)} &= \frac{a}{r_m} C^{(I)} r_1 \sin \varphi \\
 \dot{w}_r^{(I)} &= a C^{(I)} \left(\log \frac{r}{r_m} + 1 - \frac{b}{r_m} \right) \\
 \dot{w}_r^{(II)} &= \frac{a}{r_m} C^{(I)} (r - b)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ただし積分に際し、 $\lambda^{(I)}$ の2次以上の項は省略してある。

以上でベローズの中央面の速度がわかったので、外力のなす仕事率と内部エネルギー散逸率とが等しいとおくと、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}
 P_0 \left\{ (\dot{w}^{(I)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (\dot{w}^{(II)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \right\} \\
 = \frac{\pi}{8} \left\{ 2\pi (a + r_1 \sin \varphi_I) M_0 C^{(I)} + 2\pi (b - r_1 \sin \varphi_{II}) M_0 \frac{a}{r_m} C^{(I)} \right. \\
 \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^{(I)} \left(-N_0 \frac{\dot{u}^{(I)}}{r^{(I)}} \right) r_1 d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (-r^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{w}^{(II)}}{r^{(II)}} \right) r_1 d\varphi \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{Y_m}^{Y_m+Y_0} 2\pi Y M_0 \frac{aC^{(2)}}{Y^2} dY + \int_{Y_m-Y_0}^{Y_m} 2\pi Y M_0 \frac{aC^{(2)}}{Y Y_m} dY \quad (4.24)$$

式(4.24)に式(4.23)を代入して計算すると

$$p_0 = \frac{P_0}{2\pi Y_m \sigma_0 h} = \frac{\lambda_1(3.5+9.25\xi) + 4\lambda_2(2+3\xi) - 0.932\lambda_2^2}{8(2+3\xi) + 4\lambda_2 + \frac{4\xi}{\lambda_2}(4+7\xi)} \quad (4.25)$$

4.3 極限軸荷重を求める近似公式(結論)

実際に数値計算を行なつて式(4.15)と(4.25)とを比較すると、ほぼ一致することがわかる。したがつて、 $\lambda_2/\lambda_1 \leq 0.25$ のときには、U形ベローズの極限軸荷重の算定式として式(4.15)よりも形の簡単な式(4.25)を用いてよい。

$$p_0 = \frac{P_0}{2\pi Y_m \sigma_0 h} = \frac{\lambda_1(3.5+9.25\xi) + 4\lambda_2(2+3\xi) - 0.932\lambda_2^2}{8(2+3\xi) + 4\lambda_2 + \frac{4\xi}{\lambda_2}(4+7\xi)} \quad (4.26)$$

なお前節でも述べたように、 $\lambda_2/\lambda_1 > 0.25$ のときには、最初の仮定(b)が成り立たなくなり、仮定(b)を取り除いて解析しなければならぬ。しかしながらこの仮定(b)を除くと、解析はきわめて複雑となり、結果を式の形で表わすことはできない。

第5章 U形ベローズ

— 比較的激しい解析 —

筆者は先に第4章において、U形ベローズの極限解析について述べたが、その解析は次の2つの仮定の下に行われた。

(a) 円輪板の面内力および面内変位は無視する。

(b) 降伏関節円は点AおよびBに生じる。

したがってベローズの極限軸荷重の算定式(4.26)の使用範囲にもおのずから制限があり、それを越えると塑性条件を破ることになる。

そこで本章では(b)の仮定を取り除き、できるだけ一般的な変形を考慮する。なお円輪板の部分の面内力および面内変位を無視するのは前章と同じである。

5.1 平 衡 法

ベローズの1/2ピッチを図5.1に示すように、次の4つの部分に分けて考える。

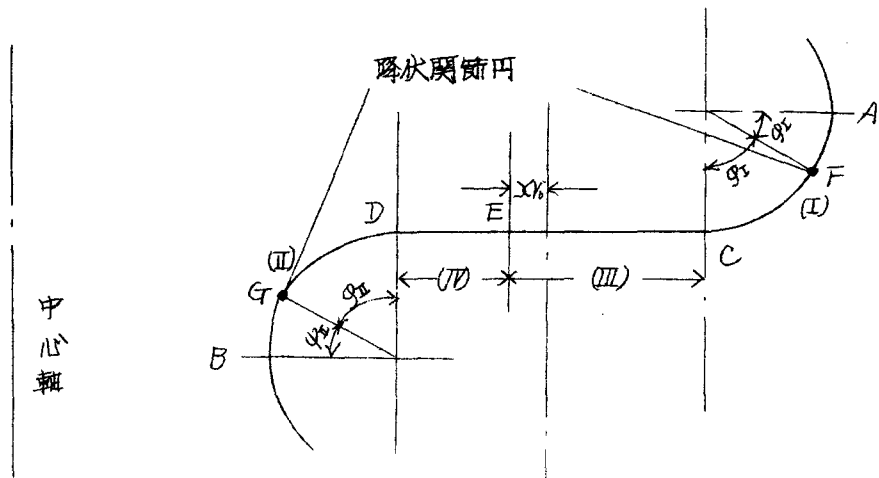


図5.1 U形ベローズ

I : 円環 AC

II : 円環 BD

III : 円輪板 CE

IV : 円輪板 DE

ここに点Eは半径方向の曲げモーメント M_r が零になる点である。また図5.1

の点 F, G は降伏関節円の生じる位置である。ここで前章と異なるのは、この降伏関節円の生じる位置を未知として入れたことだけであるから、平衡条件および塑性条件は前章と全く同様になり、境界条件だけが前節と異なる。すなわち 6 個の積分定数 $A^{(I)} \sim A^{(IV)}$, $B^{(I)} \sim B^{(IV)}$, 3 個の未定量 $\varphi_I, \varphi_{II}, X$ および軸力 P の極限値の下界 P_L は図 5.1 の点 A, B, C, D, E, F, G における次の 10 個の境界条件によって決定される。なお φ_I, φ_{II} は降伏関節円の生じる位置を示す。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点 A)}: Q^{(I)} &= 0 \\
 (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点 B)}: Q^{(IV)} &= 0 \\
 (c) \quad \varphi = \varphi_I \text{ (点 F)}: \partial M_\varphi^{(I)} / \partial \varphi &= 0, \quad M_\varphi^{(I)} = \frac{7}{8} M_0 \\
 (d) \quad \varphi = \varphi_{II} \text{ (点 G)}: \partial M_\varphi^{(IV)} / \partial \varphi &= 0, \quad M_\varphi^{(IV)} = \frac{7}{8} M_0 \\
 (e) \quad \varphi = 0 \text{ (点 C)}: M_\varphi^{(I)} &= M_Y^{(III)} \\
 (f) \quad \varphi = 0 \text{ (点 D)}: M_\varphi^{(IV)} &= -M_Y^{(IV)} \\
 (g) \quad Y = Y_m - X Y_0 \text{ (点 E)}: M_Y^{(IV)} &= M_Y^{(IV)} = 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

式 (4.3), (4.6), (4.10) および (4.13) を境界条件の式 (5.1) に代入すると、10 元連立方程式が得られ、これから $A^{(I)} \sim A^{(IV)}$, $B^{(I)} \sim B^{(IV)}$ および X を消去すると、次の 3 元連立超越方程式が導かれる。

$$\begin{aligned}
 & P \sin \psi_I - \frac{7}{8} \lambda_2 \cos \psi_I \left(\psi_I - \frac{\lambda_2}{1+\xi} \sin \psi_I \right) = 0 \\
 & P \sin \psi_{II} - \frac{7}{8} \lambda_2 \psi_{II} \cos \psi_{II} = 0 \\
 & \left(e f + \frac{1}{1-\xi} \frac{1}{\lambda_2^2} \right) P^2 \left(e j + g f - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\xi} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) P + g j + \frac{1}{1-\xi} \frac{\lambda_2^2}{16} = 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \psi_I &= \frac{\pi}{2} - \varphi_I, \quad \psi_{II} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{II}, \quad P = \frac{P}{2\pi Y_m \sigma_0 h} \\
 e &= \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\cos \psi_{II}}{1-\xi} \left(1 + \frac{\lambda_2}{2} \frac{\cos \psi_{II}}{1-\xi} \right) \\
 f &= \frac{1}{\lambda_2} \left(\xi - 1 + \frac{\lambda}{1+\xi} \cos \psi_I \right) \\
 g &= -\frac{7}{8} \frac{\lambda_2}{1-\xi} \left\{ \cos \psi_{II} - \frac{\pi}{2} + \psi_{II} \sin \psi_{II} + \frac{1}{4} \frac{\lambda_2}{1-\xi} (\cos^2 \psi_{II} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \psi_{II} \sin \psi_{II} \cos \psi_{II} + \psi_{II}^2 - \frac{\pi^2}{4}) \right\} - \frac{\lambda_1}{32} \\
 j &= \frac{\lambda_1}{4} \left(\frac{1}{8} - \xi \right) + \frac{7}{8} \frac{\lambda_2}{1+\xi} \left(\cos \psi_I - \frac{\pi}{2} + \psi_I \sin \psi_I + \frac{\lambda_2}{2} \frac{\cos^2 \psi_I}{1+\xi} \right)
 \end{aligned}$$

この式 (5.2) を電子計算機を用いて数値的に解くと、極限軸荷重の下界に
および降伏関節円の生じる位置 φ_I , φ_{II} の値が得られる。

5.2 仮想変形法

ここでは図 5.2 に示すような変形を仮定する。すなわち点 F および G に
降伏関節円ができ、点 M を中心に回転するものとする。ここで前章と異なる
のは 降伏関節円の生じる位置を未知としたことだけであるから、各部分

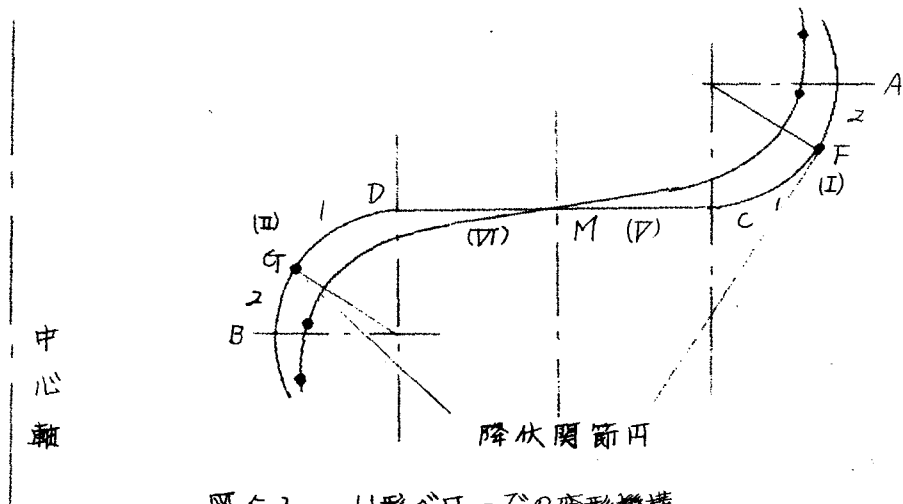


図 5.2 U形ベローズの変形機構

の速度成分の一般解は前章と同様である。このような変形を仮定したときの
境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点A)}: d\dot{u}_2^{(I)}/d\varphi = 0 \\
 (b) \quad \varphi = \pi/2 \text{ (点B)}: d\dot{u}_2^{(II)}/d\varphi = 0 \\
 (c) \quad \varphi = 0 \text{ (点C)}: C_1^{(I)} = d\dot{w}_r^{(I)}/dr, \quad \dot{u}_1^{(I)} = 0, \quad \dot{w}_1^{(I)} = \dot{w}_r^{(I)} \\
 (d) \quad \varphi = 0 \text{ (点D)}: C_1^{(II)} = d\dot{w}_r^{(II)}/dr, \quad \dot{u}_1^{(II)} = \dot{w}_1^{(II)} = \dot{w}_r^{(II)} = 0 \\
 (e) \quad r = r_m \text{ (点M)}: \dot{w}_r^{(VI)} = \dot{w}_r^{(VII)}, \quad d\dot{w}_r^{(VI)}/dr = d\dot{w}_r^{(VII)}/dr \\
 (f) \quad \varphi = \varphi_I \text{ (点F)}: \dot{u}_1^{(I)} = \dot{u}_2^{(I)}, \quad \dot{w}_1^{(I)} = \dot{w}_2^{(I)} \\
 (g) \quad \varphi = \varphi_{II} \text{ (点G)}: \dot{u}_1^{(II)} = \dot{u}_2^{(II)}, \quad \dot{w}_1^{(II)} = \dot{w}_2^{(II)}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

ここに添字 I, II は 図 5.2 に示すように、降伏関節円の両側を意味する。境
界条件の式 (5.3) に式 (4.17) および (4.20) を代入すると、各積分

足数が得られ、かこの中央面の速度が決定される。

そこで外力のなす仕事率と内部エネルギー散逸率とが等しいとおくと、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}
 P & \left\{ (\dot{w}_z^{(I)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (\dot{w}_z^{(II)})_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \right\} \\
 &= \frac{7}{8} \left\{ 2\pi(a+r, \sin \varphi_I) M_0 C_1^{(I)} + 2\pi(b-r, \sin \varphi_{II}) M_0 \frac{a}{r_{n1}} C_1^{(I)} \right. \\
 &+ \int_0^{\varphi_I} 2\pi r^{(I)} \left(-N_0 \frac{\dot{w}_z^{(I)}}{r^{(I)}} \right) r_1 d\varphi + \int_{\varphi_I}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^{(II)} \left(-N_0 \frac{\dot{w}_z^{(I)}}{r^{(II)}} \right) r_1 d\varphi \\
 &+ \int_0^{\varphi_{II}} 2\pi (-r^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{w}_z^{(II)}}{r^{(II)}} \right) + \int_{\varphi_{II}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi (-r^{(II)}) \left(N_0 \frac{\dot{w}_z^{(II)}}{r^{(II)}} \right) r_1 d\varphi \left. \right\} \\
 &+ \int_{r_{n1}}^{r_n+r_0} 2\pi r M_0 \frac{a C_1^{(I)}}{r^2} dr + \int_{r_{n1}-r_0}^{r_{n1}} 2\pi r M_0 \frac{a C_1^{(I)}}{r r_n} dr
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

式(5.4)を変形すると次の式(5.5)のようになる。

$$\begin{aligned}
 P & \left\{ \cos \psi_I + (1+\xi) \cos \psi_{II} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{1+\xi} \cos^2 \psi_I + \frac{\xi}{\lambda_2} \left(2 + \frac{3}{2} \xi \right) \right\} \\
 &= \frac{7}{8} \frac{\lambda_1}{4} \left\{ 2 + \frac{23}{7} \xi + \lambda_2 (\cos \psi_I - \cos \psi_{II}) \right\} \\
 &+ \frac{7}{8} \lambda_2 \left\{ (1+\xi) \left(\frac{\pi}{2} - \cos \psi_{II} - \psi_{II} \sin \psi_{II} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos \psi_I - \psi_I \sin \psi_I \right) \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{\lambda_2}{1+\xi} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \psi_I \right)^2 - 3 \cos^2 \psi_I + 2 \left(\frac{\pi}{2} - \psi_I - \sin \psi_I \cos \psi_I \right) \psi_I \right\} \left. \right\}
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで ψ_I および ψ_{II} は軸力 P の値を最小にするように決める。そこで式(5.5)を ψ_I および ψ_{II} で微分し、 $\partial P / \partial \psi_I = 0$ および $\partial P / \partial \psi_{II} = 0$ とおくと、次の式(5.6)が導かれる。

$$\begin{aligned}
 P \sin \psi_I \left(1 + \frac{\lambda_2}{1+\xi} \cos \psi_I \right) - \frac{7}{8} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4} \sin \psi_I \\
 - \frac{7}{8} \lambda \cos \psi_I \left\{ \psi_I - \frac{\lambda_2}{1+\xi} (\sin \psi_I - \psi_I \cos \psi_I) \right\} = 0 \\
 P (1+\xi) \sin \psi_{II} + \frac{7}{8} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4} \sin \psi_{II} - \frac{7}{8} \lambda_2 (1+\xi) \psi_{II} \cos \psi_{II} = 0
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

ψ_I , ψ_{II} および極限軸荷重の上界 P_0 は、式(5.5)および(5.6)を連立方程式として数値的に解けば得られる。

5.3 数値計算

数値計算は式(5.2)について電子計算機を用いて行ない、その結果が式

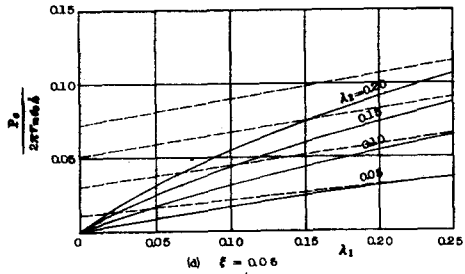
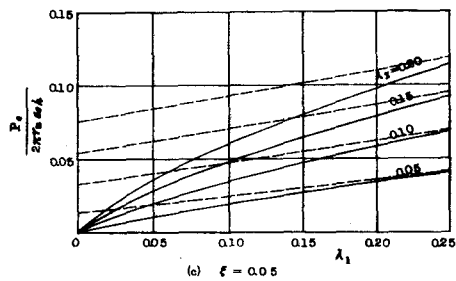
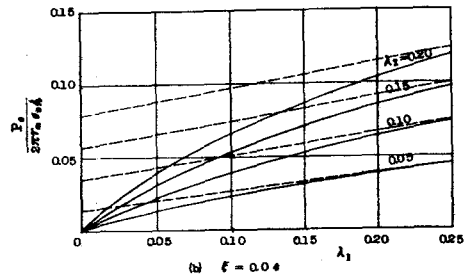
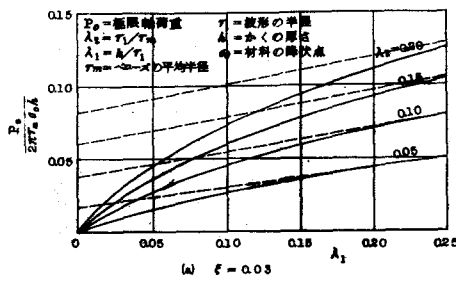


図 5.3 極限軸荷重 (破線は式 (4.26) による値) (その 1)

(5.5) および (5.6) を近似的に満足することを確かめた。式 (5.2)。(5.5) および (5.6) を導くに際し、 λ_1, λ_2 の 2 次以上の項は省略し、また仮想変形法においては図 5.2 の点 M で M_r が零になると仮定しているた

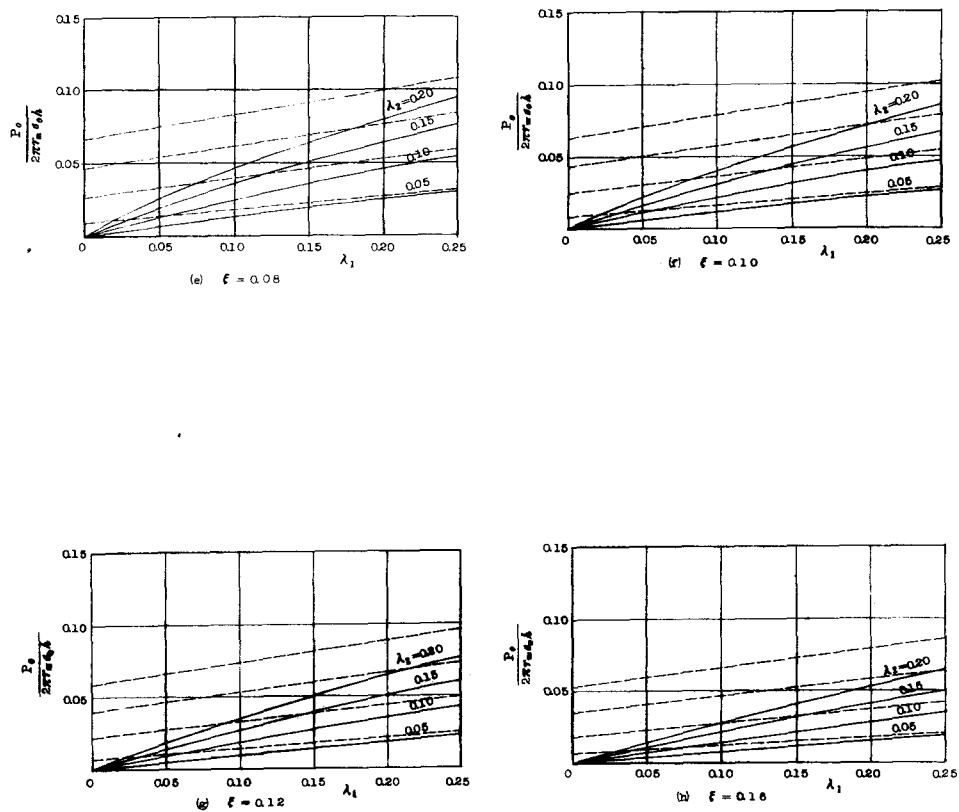


図 5.3 極限軸荷重 (破線は式 (4.26) による値) (その2)

め、平衡法による結果と板型変形法によるそれとは完全には一致しない。しかしながらその差は数値的にわずかで、図上で区別できないほどである。したがって極限軸荷重としてどちらを採用してもさしつかえなし。図 5.3 は式

(5.2) について計算したものを
極限軸荷重の計算図表として表わ
したものである。

なお λ/λ_1 の値が小さいときには、降伏明断円は $\psi=0$ の位置に
生じるので、式 (5.5) において
 $\psi_E = \psi_H = 0$ とおくと式 (4.26)
が得られる。図 5.3 における破線
は式 (4.26) によつて計算され
た結果である。またさらに式 (4.26)
において $\chi=0$ とおくと、平板
部のない C 形ベローズに対する
式 (2.23) が得られる。

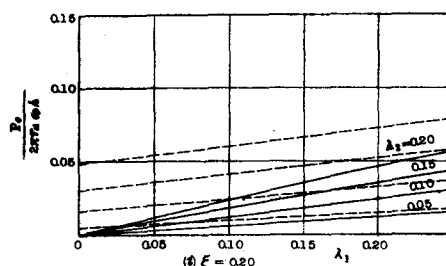


図 5.3 極限軸荷重 (破線は式 (4.26)
による値 (その 3))

5.4 実 験

実際のベローズは主として銅およびステンレス鋼でできているので、銅お
よびステンレス鋼製の U 形ベローズについて実験を行なった。実験に用い
られたベローズの材質、形状寸法は表 5.1 に示す通りである。

表 5.1 ベローズの形状寸法

(その 1)

No	材 質	外 径	内 径	肉 厚	ピ ッ チ	山 数	個 数
1	CuP	130.0 ^{mm}	102.5 ^{mm}	1.150 ^{mm}	17.7 ^{mm}	4	3
2	CuP	184.6	150.1	1.200	19.4	4	2
3	CuP	71.5	53.4	0.480	8.4	4	3
4	SUS 27	232.2	183.9	0.704	22.8	5	1
5	SUS 27	253.1	203.8	0.773	25.0	5	1
6	SUS 27	320.7	260.8	0.789	29.6	5	1
7	SUS 27	230.0	181.7	0.540	27.2	4	1
8	SUS 27	255.8	204.6	0.547	27.6	4	1
9	SUS 27	321.9	260.1	0.785	32.0	4	1
10	SUS 27	112.6	86.4	0.600	14.6	4	1

(その2)

NO	γ_m	γ_0	γ_1	ξ	λ_2	λ_1
1	58.1	1.90	4.42	0.0327	0.0761	0.260
2	83.7	3.19	4.84	0.0381	0.0578	0.248
3	31.2	2.18	2.10	0.0698	0.0673	0.228
4	104.0	6.03	5.69	0.0580	0.0547	0.124
5	114.2	5.70	6.24	0.0499	0.0558	0.124
6	145.4	7.19	7.41	0.0495	0.0510	0.106
7	102.9	5.00	6.80	0.0486	0.0661	0.0790
8	115.1	5.65	6.91	0.0491	0.0599	0.0793
9	145.5	7.07	8.00	0.0486	0.0550	0.0981
10	49.8	2.60	3.65	0.0523	0.0734	0.164

かくの極限解析による結果と実験結果とを比較した前例はほとんどなく、実験値と理論値とを比較する場合、問題になるのは実際の材料の降伏点のとり方である。この降伏点は弾性学で言う降伏点とはやや意味を異にするものである。まず銅銀ベローズの場合には、その材料の応力-ひずみ線図は図5.4のようになる。これは実際にベローズの加工前の炭管から軸方向および周方向におのおの3個ずつ計6個のJIS 5号試験片をとり出し、これらを引張って試験したものである。

これを見
ると銅は
ある程度
ひずむと、
加工硬化
が少なく
なり、
完全塑性
体の条件
をほぼ満たして
いる材料で
あると言える。

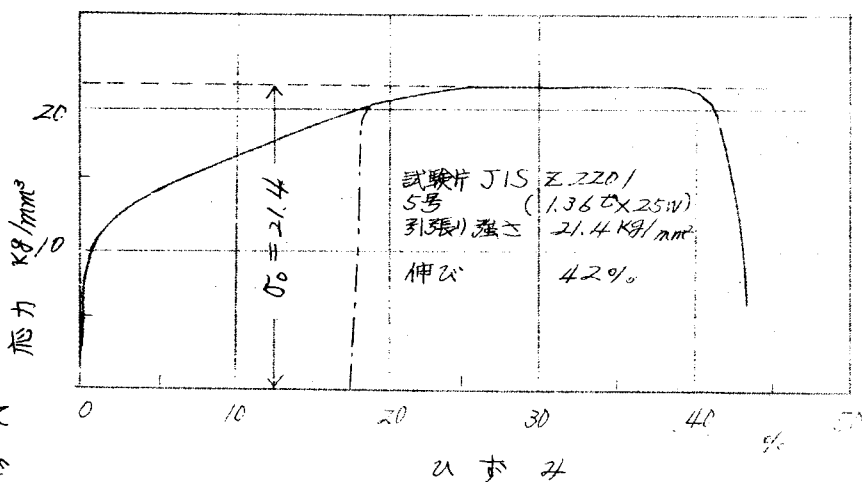


図5.4 銅(Cu) 応力-ひずみ線図

また引張り強さの平均値は 21.4 kg/mm^2 (ばらつきは 1% 以下) である。なお実際のベローズは加工されているので、定性的には一点鋸線のようになる。表 5.2 はベローズの極限軸荷重の実験値と理論値とを比較したものであるが、この理論値は $\sigma_0 = 21.4 \text{ kg/mm}^2$ として計算したものである。

表 5.2 実験値と理論値との比較 (材質 CuP)

() 内は平均値

N0	実 験 値 (kg)	理 論 値 (kg)
1	612, 605, 613 (610)	598
2	660, 688 (674)	684
3	81, 83, 79 (81)	85

図 5.5 は実験によって求めた銅製ベローズの荷重-たわみ曲線の一例である。表 5.2 を見れば、実験値と引張り強さを σ_0

とする理論値とはよ

く一致していると言

えよう。上に述べた

ように、かくの極限

解析の結果を実験結

果と比較した例はあ

まりないが、銅のよ

うにある程度ひずむ

と、加工硬化が少な

くなり、平坦部の

現われる材料は、こ

れを引張り強さを

σ_0 とする完全塑性体と見なすと、実験値と理論値との間に大体的対応がつくようである。

次にステンレス鋼製のベローズの場合であるが、ステンレス鋼の応力-ひずみ線図は図 5.6 のようになり、本理論で仮定しているような完全塑性体とは言えない。したがって本理論の結果をそのままステンレス鋼製のベローズに適用することはできない。しかしレグ型のベローズを用いて実験した結果から、次の推論が得られる。すなわちステンレス鋼製のベローズの荷重とたわみとの関係は図 5.7 のようになり、たわみが大きくなつても銅製のように平坦部が現われないので、極限軸荷重は得られないが、こころみに直線 OA

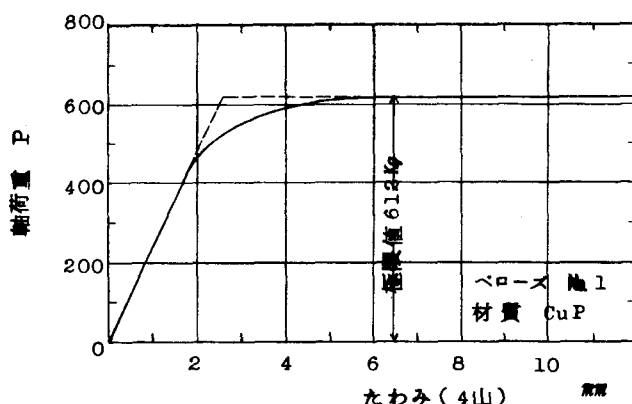


図 5.5 銅製ベローズの荷重-たわみ曲線

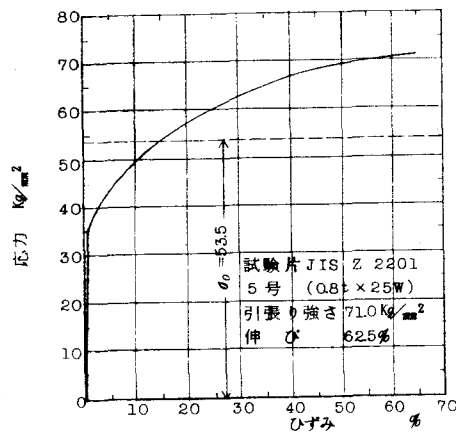


図 5.6 ステンレス鋼(SUS27)応力-ひずみ線図

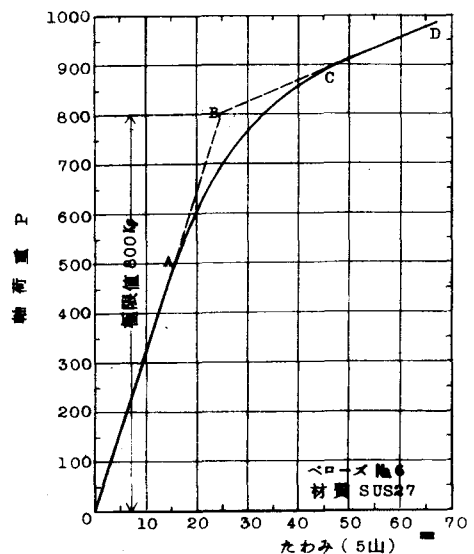


図 5.7 ステンレス鋼製ペローズの荷重-たわみ曲線

とC.Dの交点Bの荷重を極限軸荷重と考える。このようにして求めた値が表5.3の極限軸荷重の実験値である。この実験値から本理論を用いて逆に σ_0 を計算すると、表5.3のようになり、これを平均すると53.9 kg/mm²となる。

表 5.3 実験値と理論値との比較 (材質 SUS 27)

理論値は $\sigma_0 = 53.9 \text{ kg/mm}^2$ として計算したもの

N0	実験値 (kg)	σ_0 (kg/mm ²)	理論値 (kg)
4	530	51.3	55.7
5	780	54.2	777
6	800	54.5	789
7	380	53.3	395
8	440	59.8	397
9	780	51.3	820
10	390	52.7	400
平均		53.9	

る。この値は材料の実際の降伏点 (35 kg/mm²) と3張り強さ (71 kg/mm²)

とのほぼ平均値 (53.0 kg/mm^2) になっている。したがって本理論の結果をステンレス鋼製のベローズに適用する場合には、 σ_0 として降伏点と引張り強さとの平均値を用いると、上に定義した意味での極限軸荷重の大体の見当がつけられることになると思われる。むろんこの方法が、本実験に用いたベローズと大きさが著しく異なるもの、あるいは他の構造物の場合にも適用できるかどうかは不明である。

5.5 結 論

本章では軸荷重を受ける U 形ベローズの極限解析について述べた。ベローズは一般に円環かくと円輪板とから成るが、円環かくの部分には D. C. Ducker らによつて提案された近似降伏面を用い、円輪板の部分には板の断片に対する Tresca の降伏条件を用いた。また円輪板の径方向の変位は省略した。これを考えに入れると、理論が著しく複雑になり解析がほとんど不可能である。本理論はこれらの板仮定をもつが、その精度は実用上十分であることが実験によつて確かめられた。

結論は計算図表の形で図 5.3 に示した。また λ_2/λ_1 の値が小さい場合には、近似公式として式 (4.26) を用いることができる。すなわち

$$\frac{P_0}{2\pi Y_m D_0 h} = \frac{\lambda_1 (3.5 + 9.25 \bar{\epsilon}) + 4\lambda_2 (2 + 3 \bar{\epsilon}) - 0.972 \lambda_2^2}{8(2 + 3 \bar{\epsilon}) + 4\lambda_2 + \frac{4 \bar{\epsilon}}{\lambda_2} (4 + 7 \bar{\epsilon})}$$

ただし

P_0 : 極限軸荷重

Y_m : ベローズの平均半径

σ_0 : 鋼の場合は引張り強さ、ステンレス鋼の場合は降伏点と引張り強さの平均値

h : かくの厚さ

λ_2 : Y_1/Y_m

λ_1 : R/Y_1

$\bar{\epsilon}$: Y_0/Y_m

また上式で $\bar{\epsilon} = 0$ とおくと C 形ベローズの場合の近似公式が得られることがわかる。

これらの公式または計算図表を用いれば、容易にベローズの極限軸荷重を求めることができる。

第3編 ベローズの疲れ強さ

緒 論

第1編および第2編において、ベローズの弾性特性および極限解析について述べたが、いずれも荷重は静荷重とし繰返し荷重の場合は考慮しなかった。ところが実際のベローズはその用途から考えても、繰返し荷重を受ける場合がさきわめて多く、ベローズの疲れ強さの問題が非常に重要になってくる。それにもかかわらず、ベローズの疲れ強さに関する研究はほとんどなく、わずかにベローズを管継手として用いる場合の M. W. Kellogg 社の式があるのみである。またかく構造物の疲れ強さに関する実験もあまりないようである。

そこで本編では実際にベローズの疲れ試験を行ない、これと試験片の結果とを比較するとともに、ベローズの伸縮量と寿命との関係を考察している。

すなわちまず第1章では、振動試験機を利用してベローズの疲れ試験機を設計し、ほぼ弾性領域でベローズの疲れ試験を行なう、そしてこれを試験片の回転曲げ試験の結果と比較検討し、第1編に述べた弾性解析と結びつけることによつて、軸方向変位と寿命との関係を求める。

第2章では降伏点を越えた塑性領域でベローズの疲れ試験を行ない、この結果を第1編の弾性解析の結果と結びつけることを試みている。そしてステンレス鋼製のベローズについては、伸縮量と寿命との関係を表わす公式を作製し、これを Kellogg 社の設計式と比較検討している。また塑性ひずみと破壊までの繰返し数との関係を求め、試験片の結果と比較するため、静的試験によつてベローズの変位と塑性ひずみとの関係を実験的に求めている。なお疲れ試験は定ひずみで行なわれる。

第1章 弾性領域における疲れ強さ

1.1 ベローズ疲れ試験機

通常の疲れ試験機は一定寸法の試験片に繰返し荷重を加えるものが多く、ベローズ全体を引張り圧縮して、疲れ強さを求める適当な形式の試験機が手近になかったので、筆者は振動試験機を利用して、次のようなベローズの疲れ試験機を設計した。

ベローズ疲れ試験機は次の装置を具備しなければならない。

- (a) 荷重繰返し装置
- (b) ベローズ取付け装置
- (c) 荷重繰返し数計測装置
- (d) 破壊時の自動停止装置

(a) 荷重繰返し装置

上下式振動試験機に4本の支柱をもつ枠組 ① をかぶせ、上部ベローズ取付台 ③ と振動試験機の振動台 ⑬ との間にベローズを固定する。また荷重は振動試験機の偏心によって（変位—定形）与えられ、変位の振幅は偏心盤 ⑫ の偏心を与えるシクネスゲージによって0～10mmまで調節できる。動力電動装置は1PS三相誘導電動機 ⑮ から、無段変速機 ⑰ を経てアベルトで中間軸プーリ ⑬ に伝え、さらにクラッチを経てアベルトにより振動台 ⑬ に伝える。回転数の調整は無段変速機 ⑰ の速度調整用プーリおよび中間軸プーリ ⑬（大、小）と偏心軸プーリ ⑫（小、大）との間で、アベルトをかけかえることにより80～1200 Y. P. /minまで調整できる。

(b) ベローズ取付け装置

ベローズは径の大小または山数等により全長が異なるので、ベローズ取付台と振動台との間の取付距離が調節できなければならない。この取付距離は枠組 ① と枠組トップ ② とを結合するボルトによって大きく変え、調節ナット ④ で微小調節を行なう。このボルト穴間の距離は調節ナットの調節範囲よりも小さいので、無段に91～290mmまで調節できる。

またベローズの径が異なれば、フランジのボルト穴の中心円の径も異な

次に荷重状態にも両振り、片振り、部分両振り、部分片振り等があるが、これらも調節ナット ④ によつて種々変えることができる。すなわち偏心盤を中立の位置に置き、取付距離をベローズの自然長に合わせれば、両振りが得られ、それよりも引張りまたは圧縮して取付ければ、片振り、部分両振り、部分片振り等が得られる。

(c) 荷重繰返し数計測装置

偏心盤 ⑫ の裏側にある小形プーリからアベルトで等しい大きさの回転計用のプーリに回転を伝え、これに7桁の積算回転計 ⑥ を取付けて、繰返し数の計測を行なう。

(d) 破壊時の自動停止装置

ベローズの破壊の確認および自動停止は次のようにして行なう。まずベローズ ⑪ に内圧がかけられるように、上下フランジ部の気密を完全にし、上部の取付台 ③ の中央部のパイプにキャップ ⑤ をかかせ、これから銅管 ⑨ で自動停止装置 ⑦ に圧力を導く。内圧は弁 ⑧ を開いてコンプレッサ ⑩ でかける。このようにして微小な内圧をかけた状態で試験を継続し、破壊がおこると内圧が下がるので自動停止装置 ⑦ が作用し、モータ

の電流をしゃ断する。したがつて本試験機を疲れ試験を行なつた場合、破壊とは中の空気が多少もれる程度のき裂が生じたことを言うことになる。また電流しゃ断後も慣性によつて多少モータは回転するが、それは繰返し数に比べればきわめて少ない。

なお自動停止装置 ⑦ (図1.3) は概略次のようなものである。まずコンプレッサであらかじめセットした圧力よりも圧力を高くすると、ベローズ ⑫ が軸方向に伸びて、デコ ⑭ をまわし、押ピン (push pin) ⑮ を押す。その結果接点

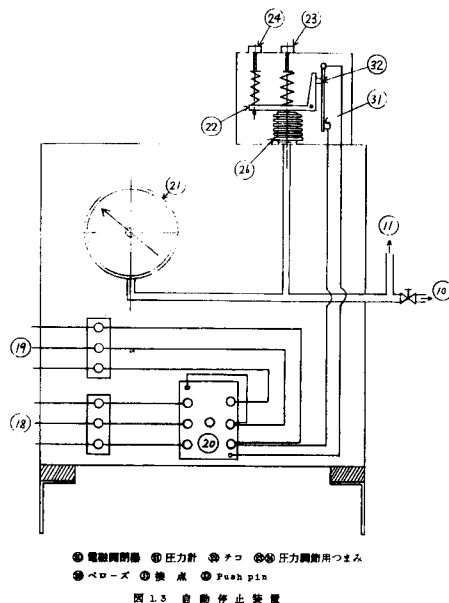


図 1.3 自動停止装置

③① が閉じて、電磁開閉機 ②① の電磁石に電流が流れ、開閉機を閉じる状態になる。こゝでスイッチ ①⑨ を押してモータを起動させる。この状態で試験を継続し、試験用ベローズにき裂が入り、中の空気がもれてあらかじめセットしておいた圧力よりも下がると、ベローズ ②⑥ が軸方向に縮み push pin ③② を押さなくなるので、接点 ③① は離れ電磁開閉機 ②① を開き、モータへの電流をしゃ断することになる。なお起動および停止の圧力はつまみ ②③ および ②④ を調節することによって起動圧力は $0 \sim 3.5 \text{ kg/cm}^2$ まで停止圧力は $0 \sim 3.5 \text{ kg/cm}^2$ まで変えることができる。

本試験では、内圧の影響を無視できる程度に小さくするため、クラッチを切つて数回予備試験を行ない、この圧カスイッチの性能の範囲で、できるだけ低圧で試験できるように調節した。すなわち内圧 0.1 kg/cm^2 程度で起動させ、およそ 0.02 kg/cm^2 まで下がると電磁開閉機が開くようにした。

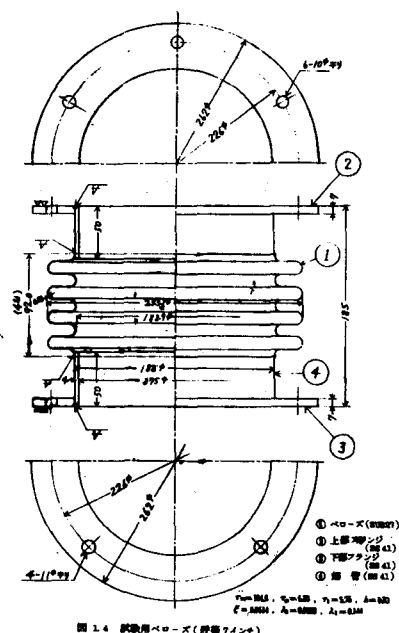
1.2 試験用ベローズ

試験に用いたベローズの形状寸法は図 1/4 に示す通りである。ベローズ ① の両端に 端管 ④ を溶接し、さらにフランジ ② を取り付ける。ベローズと端管との継目は、図のようにベローズの谷の部分で端管に溶接する。ベローズは板をまるめて管状にした原管を絞つて成形され、成形後熱処理^{*}されたものとされないものがある。フランジ部はワッシャ入りパッキン(図 1/5)を介して、振れ試験機に固定される。パッキンにワッシャを入れるのは、パッキンの厚さが一定の厚さ(ワッシャの厚さ)よりも減少しないようにするためである。こうすることによって気密を保ちつつ、かつ偏心盤によって与えられる変位がそのままベローズ部に伝わることになる。

1.3 試験方法

試験機の試験速度は $80 \sim 1200 \text{ r.p.m}$ まで変えられるが、この試験は $150 \sim 500 \text{ r.p.m}$ で行なう。振幅を大きくとるときは回転数を下げ、振幅を小さくとるときには回転数を上げる。振幅は偏心盤のシツクネスゲージによって与えるが、試験機の変形を考え、試験用のベローズを試験機にとりつけ数回回転させた後、ダイヤルゲージを用いてベローズのフランジ間の

^{*} 熱処理は重油炉で 1100°C に加熱後水冷して行なつた。



の弾性式で計算した称呼応力である。き裂は図 1.6 にその例を示すように、中央部の谷 (かくⅡ) の $\psi = 0 \sim 50^\circ$ の位置に多く発生した。き裂は肉眼ではほとんど見えないので、石けん水を用いて検出した。

表 1.1 ベローズの疲れ試験結果

※ 溶接部不良のもの

* 次節参照のこと

No.	変位振幅		破壊までの繰返し数 N	回転数 R.P.M	備 考	応力計* 算値	σ_a/σ_B *
	バース	フランジ間 δt					
1	8.0	7.46	1.29×10^4	150		58.3	0.821
2	8.0	7.46	1.27×10^4	150		58.3	0.821
3	8.0	7.46	1.29×10^4	150		58.3	0.821
4	7.0	6.48	1.71×10^4	150	※	50.6	0.713
5	7.0	6.48	2.24×10^4	150		50.6	0.713
6	7.0	6.48	1.02×10^4	150	※	50.6	0.713
7	7.0	6.48	3.59×10^4	150	熱処理	50.6	0.713
8	6.0	5.49	3.30×10^4	150		42.9	0.604
9	6.0	5.49	7.34×10^4	150	熱処理	42.9	0.604
10	6.0	5.49	4.00×10^4	150		42.9	0.604
11	5.0	4.50	8.81×10^4	200	※	35.1	0.494
12	5.0	4.50	9.59×10^4	200	※	35.1	0.494
13	5.0	4.50	1.52×10^5	200	熱処理	35.1	0.494
14	4.5	4.00	8.85×10^4	300	※	31.2	0.439
15	4.5	4.00	1.73×10^5	300	※	31.2	0.439
16	4.5	4.00	3.33×10^5	300	熱処理	31.2	0.439
17	4.2	3.71	1.35×10^5	400	※	29.0	0.408
18	4.2	3.71	3.54×10^5	400	※ 熱処理	29.0	0.408
19	4.0	3.51	(7.00×10^6)	500	破壊せず	27.4	0.386
20	4.0	3.51	7.10×10^5	500		27.4	0.386

ベローズのかくの微小部分をとりて考えると、これに働く応力は σ_0 および σ_g で、これは二軸応力状態である。この二軸応力状態の疲れ破壊もしくは耐久限度の応力条件が引張り応力あるいはせん断応力のみによるのか、または両者の共同作用によるものかを決定するためにいろいろの実験がある。まず西原、河本⁽²⁸⁾の実験によると、真鍮は最大せん断応力のみによって決まり、鋳鉄では最大引張り応力の条件に近く、炭素鋼、特殊鋼では最大せん断応力と最大引張り応力条件の中間すなわちせん断ひずみエネルギー条件に近く、炭素鋼では炭素含有量の増すにしたがって最大引張り応力条件に近づくことを示している。

H. J. Gough & H. V. Pollard⁽²⁹⁾の実験も、鋳鉄に対しては同様な傾向を示しており、やわらかい鉄や熱処理鋼は、最大せん断応力もしくはせん断ひずみエネルギー一定の条件にしたがうようである。

A. F. Maier⁽³⁰⁾は、中空円筒に内圧を加え、さらに軸方向に繰返し応力を作用させ、中間応力の影響がないという実験結果から、鋳鉄や鋼の疲れ破壊は最大引張り応力によると結論し、G. K. Morikawa & L. Griffith⁽³¹⁾も低炭素鋼についての実験から同様の結果を得ている。

以上のように組み合わせ応力の疲れ破壊については諸研究がある。ここではせん断ひずみエネルギー条件、最大せん断応力条件および最大引張り応力条件の三者について計算を行ない、その結果の一例を表1.2~1.5に示した。表1.2は、第1編の弾性理論によって求めた各応力の分布の一例である。かくの内側および外側を表わすのに添字 i および o をつけ各応力の符号を考えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta i}^{(I)} &= \sigma_{\theta o}^{(I)} + \sigma_{\theta g}^{(I)} \\ \sigma_{g i}^{(I)} &= \sigma_{t g}^{(I)} + \sigma_{b g}^{(I)} \\ \sigma_{\theta o}^{(I)} &= \sigma_{\theta o}^{(I)} - \sigma_{\theta g}^{(I)} \\ \sigma_{g o}^{(I)} &= \sigma_{t g}^{(I)} - \sigma_{b g}^{(I)} \\ \sigma_{\theta i}^{(II)} &= \sigma_{\theta o}^{(II)} - \sigma_{\theta g}^{(II)} \\ \sigma_{g i}^{(II)} &= \sigma_{t g}^{(II)} - \sigma_{b g}^{(II)} \\ \sigma_{\theta o}^{(II)} &= \sigma_{\theta o}^{(II)} + \sigma_{\theta g}^{(II)} \\ \sigma_{g o}^{(II)} &= \sigma_{t g}^{(II)} + \sigma_{b g}^{(II)} \end{aligned} \right\} (1.1)$$

表 1.2 円環かく部分の応力分布 (曲内応力はとつ側圧修正)

($\lambda_2 = 0.0553$, $\lambda_1 = 0.125$, $\xi = 0.0614$, $\sigma_A = P/\gamma r_m$)

* 最大値)

ψ°	$\sigma_{\psi\psi}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\theta}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\psi}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\theta}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\psi}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\theta}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\psi}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\theta}^{(x)}/\sigma_A$
0	1.1401	1.4414	-34.936	42.581	79.859	82.202	24.357	25.071
10	1.1757	1.4981	-34.092	41.412	80.301	83.045	24.383	25.470
20	1.2751	1.6550	-31.624	38.001	81.485	85.321	24.420	26.585
30	1.4178	1.8747	-27.720	32.642	83.001	88.324	24.355	28.181
40	1.5733	2.1049	-22.702	25.829	84.248	91.048	24.025	29.917
50	1.7093	2.2894	-17.037	18.252	84.534	92.393*	23.260	31.396
60	1.7878	2.3817	-11.328	10.765	83.195	91.384	21.909	32.232
70	1.7923	2.3552	-6.2926	4.3171	79.712	87.364	19.890	32.119
80	1.7137	2.2099	-2.7127	-0.14396	73.784	80.077	17.197	30.863
90	1.5610	1.9690	-1.3684	-1.7790	65.357	69.652	13.905	28.395

表 1.3 かくの内側および外側の応力分布

($\lambda_2 = 0.0553$, $\lambda_1 = 0.125$, $\xi = 0.0614$, ** 最大値)

ψ°	$\sigma_{\psi\psi}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\theta}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\psi}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\theta}^{(x)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\psi}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\psi\theta}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\psi}^{(w)}/\sigma_A$	$\sigma_{\theta\theta}^{(w)}/\sigma_A$
0	-10.579	80.999	-59.283	-78.719	17.509	-80.761	67.652	83.644
10	-9.7099	81.477	-58.476	-79.126	15.941	-81.547	66.882	84.543
20	-7.2046	82.760	-56.044	-80.209	11.416	-83.666	64.586	86.776
30	-3.3651	84.419	-52.075	-81.583	4.4606	-86.449	60.824	90.199
40	1.3234	85.821	-46.728	-82.674	-4.0883	-88.943	55.747	93.153
50	6.2229	86.242	-40.297	-82.827	-13.143	-90.104	49.648	94.683**
60	10.581	84.983	-33.238	-81.408	-21.467	-89.003	42.998	93.766
70	13.597	81.504	-26.182	-79.919	-27.802	-85.009	36.436	89.719
80	14.484	75.498	-19.909	-72.070	-31.007	-77.867	30.719	82.287
90	12.586	66.918	-15.223	-63.996	-30.174	-67.683	26.616	71.621

これらの応力分布を計算したのが表 1.3 である。またせん断ひずみエネルギー条件および最大せん断応力条件を用いて、各部の相当応力の分布を計算したのが表 1.4 および 1.5 である。

表 1.4 せん断ひずみエネルギー条件による相当応力の分布

($\lambda_2 = 0.0553$, $\lambda_1 = 0.125$, $\xi = 0.0614$, ** 最大値)

ψ°	$\sigma_i^{(E)}/\sigma_A$ *	$\sigma_o^{(E)}/\sigma_A$	$\sigma_i^{(W)}/\sigma_A$	$\sigma_o^{(W)}/\sigma_A$
0°	86.774	71.027	90.791**	76.905
10	86.741	71.087	90.576	77.242
20	86.587	71.269	89.919	78.222
30	86.150	71.548	88.764	79.682
40	85.167	71.801	86.971	81.192
50	83.305	71.739	84.304	82.030
60	80.218	70.895	80.447	81.297
70	75.628	68.679	75.073	78.154
80	69.399	64.464	67.899	72.021
90	61.614	57.696	58.730	62.704

$$* \quad \sigma_i^{(E)} = \sqrt{(\sigma_{\theta i}^{(E)})^2 - (\sigma_{\theta i}^{(E)})(\sigma_{g i}^{(E)}) + (\sigma_{g i}^{(E)})^2}$$

表 1.5 最大せん断応力条件による相当応力の分布

($\lambda_2 = 0.0553$, $\lambda_1 = 0.125$, $\xi = 0.0614$, *** 最大値)

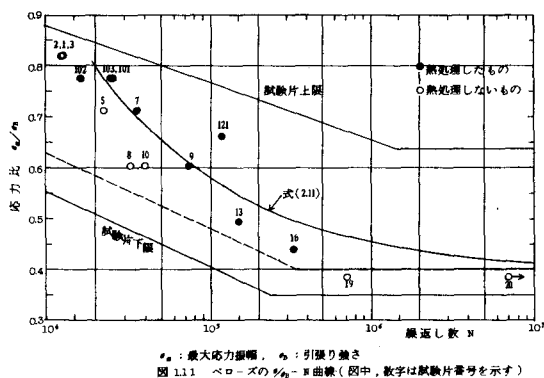
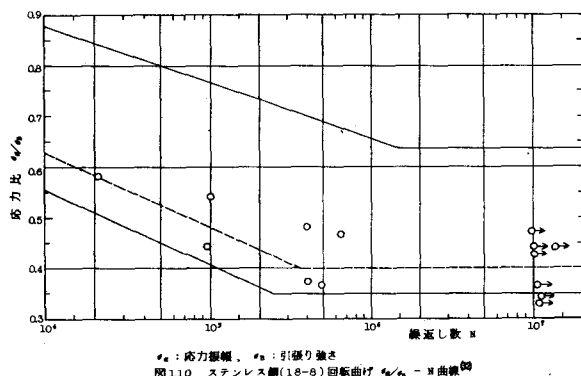
ψ°	$\sigma_i^{(E)}/\sigma_A$	$\sigma_o^{(E)}/\sigma_A$	$\sigma_i^{(W)}/\sigma_A$	$\sigma_o^{(W)}/\sigma_A$
0	91.578	-78.719	-98.270***	83.644
10	91.187	-79.126	-97.488	84.543
20	89.965	-80.209	-95.082	86.976
30	87.784	-81.583	-90.910	90.199
40	85.821	-82.674	-88.943	93.153
50	83.242	-82.827	-90.104	94.683
60	84.983	-81.408	-89.003	93.766
70	81.504	-77.919	-85.009	89.719
80	75.498	-72.070	-77.867	82.287
90	66.918	-63.796	-67.683	71.621

さてこのベローズの材質のステンレス鋼 (18-8) の疲れ破壊が、せん断ひずみエネルギー条件にしたがうものと考えると、表 1.4 に見るようにかく

Ⅱの内側 $\psi = 0^\circ$ の点で最大となり、最大値は $\sigma_L^{(II)} / \sigma_A = 91$ である。またもし最大引張り応力条件にしたがうものとするれば、表 1.3 に見るようにかくⅡの外側 $\psi = 50^\circ$ 付近で最大となり、最大値は、 $\sigma_{g0}^{(II)} / \sigma_A = 95$ となる。実際、実験結果によると、かくⅡの $\psi = 0 \sim 50^\circ$ の位置にき裂を生じるものが多い。いづれにしても最大応力値にはあまり差はないので、簡単のために疲れ破壊は最大引張り応力条件にしたがうものとし、さらに $\sigma_{eg}^{(II)}$ は $\sigma_{bg}^{(II)}$ に比べ非常に小さいので、このベローズの疲れ破壊は $\sigma_{bg}^{(II)}$ のみによって起こるものと考えても大差はない。この場合表 1.2 からわかるようにかくⅡの $\psi = 50^\circ$ 付近で最大となり、最大値は $\sigma_{bg}^{(II)} / \sigma_A = 92$ である。したがっ

てせん断ひずみエネルギー条件を用いて求めた相当応力の最大値より 1% 程度大きくなるだけである。この差は他の形状パラメータのものについて種々検討した結果最も異なるものでたかだか 5% 程度である。よってベローズの疲れ破壊を考える際、第 1 編の計算図表から求めた $\sigma_{bg}^{(II)}$ の最大応力値を用いてさしつかえないことがわかる。

次に 18-8 ステンレス鋼の回転曲げ $\sigma_a / \sigma_B - N$ 曲線は図 1.10 に示す通りである。(32) 図中破線は試験片の曲線として、試験点のほぼ中間をねらって筆者が引いたものである。本実験に用いたベローズのステンレス鋼



(SUS 27) の引張り強さは、実験の結果 $\sigma_B = 7 / \text{Kg/mm}^2$ であるから、ベローズに種々の変位振幅を与えたときの最大応力値を第1編の計算図表を用いて計算すると、応力比 σ_a / σ_B が求められる。ここで総変位から1ピッチ当りの変位を求めるとき問題になるのはベローズの両端の山である。通常ベローズの両端の山はフランジに密着されているので全長の変位は1山の変位に山数を乗じたものより小さく、全長の変位と1山の変位とを測定した実験結果によると、両端の1山はほぼ2.65山の役割しか果たしていないことがわかる。したがってこの実験に用いたベローズは4山であるから、有効山数は3となる。1山(ピッチ)当りの変位を S とすると、第1編の計算図表から最大応力 $\sigma_{gm}^{(I)}$ は

$$\sigma_{gm}^{(I)} = 260 S \quad (1.2)$$

となる。有効山数を3とすると、最大応力と総変位 S_t との関係は、次のようになる。

$$\sigma_{gm}^{(II)} = 7.8 / S_t \quad (1.3)$$

図1.11は縦軸にこのようにして出した応力比をとり、横軸に破壊までの繰返し数 N としたものである。図中破線は上に述べた試験片の $\sigma_a / \sigma_B - N$ 曲線であり、実線は後に述べる塑性疲れ試験の結果から導いたベローズの寿命を算定する式を、弾性領域まで延長したものである。また試験点の上の数字は試験片の番号を示し、1, 2桁のものは呼径4イン치의ベローズ(図1.4)の結果であり、3桁のものは呼径4.4イン치의ベローズ(図2.1)の結果である。この図を見ると、ベローズの試験結果はいずれも試験片の結果の上、下限の間に入っていることがわかる。また図中黒円と白円はベローズの成形後、熱処理したものとそうでないものとを示すが、両者の結果にはあまり差はないようである。

1.6 結 論

本章では、筆者の設計した疲れ試験機を用いて、ベローズの疲れ試験を行ない、ほぼ弾性領域におけるベローズの疲れ強さについて考察した。ベローズの応力状態は二軸であり、二軸応力状態の疲れ破壊の条件には諸説あるが、ここでは疲れ破壊は、ひずみエネルギー条件にしたがうものとし、さらにひずみエネルギー条件による相当応力と主軸方向の曲げ応力とがほぼ等しいこと

から、ベローズの疲れ破壊は子午線方向の最大曲げ応力によるものと考えた。試験結果は第 1 篇に述べた弾性解析の結果を用いて最大応力を算出し、試験片の回転曲げ試験の結果と比較した。それによるとベローズの試験結果は、いずれも試験片の σ - N 曲線の上、下限の間に入る事がわかった。したがって試験片の σ - N 曲線の下限の線を用いてベローズを設計すれば、十分な安全な設計ができることになる。

第2章 塑性領域における疲れ強さ

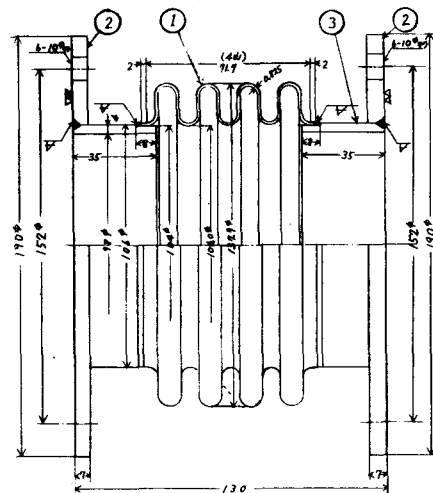
2.1 試験方法

この試験は塑性領域の疲れ強さを調べるために行なうもので、使用試験機は第1章に述べたものを使用するが、ベローズのひずみ振幅を大きくするために、図2.1に示すような小形（口径4インチ）のものを用いる。試験に用いたベローズは、図2.1に示すように、ベローズ①の両端に端管③を溶接し、さらにフランジ②をとりつけたものである。ベローズと端管との継目は、図のようにベローズの谷の部分で端管の外側に溶接される。ベローズは板をまるめて管状にした原管を絞って成形され、成形後熱処理されたものというでないものがある。

試験機の試験速度は80～1200 Y.P.M.まで変えられるが、この試験は150～300 Y.P.M.で行なう。試験は22個のベローズについて行ない、同一の振幅で1～4個ずつ行なった。振幅25mmの試験は、この試験機の振幅が10mmであるから、動力を絞って行なうことができず、図1.2の偏心板②を固定しベローズ取付台③の間にベローズをはさんで、入力によって調節用ナット④を上下に動かして行なった。

2.2 試験結果

試験結果を次の表2.1に示す。表中の各欄の説明は第1章で述べたので省略する。き裂は図2.2にその例を示すように、中央部の2山の谷部（かくⅠ）の $\psi=0\sim60^\circ$ の位置に多く発生した。き裂の幅は前章で述べた弾性領域における試験の場合よりも大きく、ようやく肉眼に見える程度で長さは10～30mmのものが最も多い。中には同時に2個所に発生したものもある。試験に用いたベローズの



①ベローズ (B2827) ②フランジ (B841) ③端管 (B841)
 $P_m=63.1$, $P_c=4.0$, $P_t=4.0$, $A=0.025$
 $\phi=0.006$, $A_2=0.040$, $A_1=0.04$
 図 2.1 塑性疲れ試験用ベローズ

うち、4個は熱処理せず、絞ったままの状態を試験を行なったが寿命には特に変わった点は見られなかった。

表2/ ベローズの疲れ試験結果

※ 溶接部不良のもの

* 次節 参照のこじ ($\sigma = 15.7 \text{ St}$)

No	変位振幅		破壊までの 繰返し数N	回転数 Y.P.M	備 考	応力計 [*] 算備 σ	* 0-28.1
	ゲージ	レンジ 間 St					
101	4	3.51	2.53×10^4	300		55.1	270
102	4	3.51	1.64×10^4	200		55.1	270
103	4	3.51	2.49×10^4	200	熱処理せず	55.1	270
104	5	4.50	1.05×10^4	200		70.7	426
105	5	4.50	1.14×10^4	200		70.7	426
106	5	4.50	1.09×10^4	200		70.7	426
107	6	5.48	5.23×10^3	200		86.0	579
108	6	5.48	4.90×10^3	200		86.0	579
109	6	5.48	7.52×10^3	200	熱処理せず	86.0	579
110	7	6.47	3.51×10^3	200		101.6	735
111	7	6.47	2.22×10^3	200	※	101.6	735
112	7	6.47	4.64×10^3	200		101.6	735
113	9	8.45	1.56×10^3	150		132.7	1046
114	9	8.45	1.98×10^3	150		132.7	1046
115	9	8.45	1.50×10^3	150		132.7	1046
116	10	9.45	1.13×10^3	150		148.4	1203
117	10	9.45	1.02×10^3	150		148.4	1203
118	10	9.45	5.36×10^2	150	※ 熱処理せず	148.4	1203
119	10	9.45	9.84×10^2	150	熱処理せず	148.4	1203
120	3	2.51	1.25×10^4	200		47.1	190
121	3	2.51	1.18×10^5	300		47.1	190
122	25	24.43	9.8×10	(10 Y.P.M) (休止時あり)	手 動	383.6	355.5

2.3 考 察

塑性ひずみ幅 $\Delta \varepsilon_p$
 (塑性ひずみ振幅 $\times 2$)
 と破壊までの繰返し数
 N との積、すなわち破
 壊までに履歴する総塑
 性ひずみ $\Delta \varepsilon_p N$ と N
 との間には、両対数で
 直線関係が成立するこ
 とが知られている。

S. S. Manson⁽³³⁾ は
 この関係を

$$\Delta \varepsilon_p \cdot N^m = C \quad (2.1)$$

と表わしている。

L. F. Coffin⁽³⁴⁾⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾ は
 いろいろの研究者の
 実験結果を彙録し、ま
 た自身、種々の材料を
 用いて両振り定ひずみ
 引張り圧縮塑性疲れ試
 験を行なつて、多くの
 材料において式 (2.1)

の m の値が $1/2$ になることを示している。すなわち式 (2.1) は

$$N^{1/2} \Delta \varepsilon_p = C \quad (2.2)$$

図 2.3 は Coffin らの行なつた 347 ステンレス鋼 (18-8) の結果
 で、横軸に $\log N$ を 縦軸に $\log (\Delta \varepsilon_p)$ をとると実験点は $-1/2$ の
 こう配の直線上にのる。式 (2.2) の定数 C は材料および試験条件によつて
 異なるが、静引張り試験における破断ひずみ ε_f によつてほぼ推定できる。
 Coffin らは 静引張り試験を $N=1/4$ に対応するとして、式 (2.2) で
 $\Delta \varepsilon_p = \varepsilon_f$, $N=1/4$ とおくと

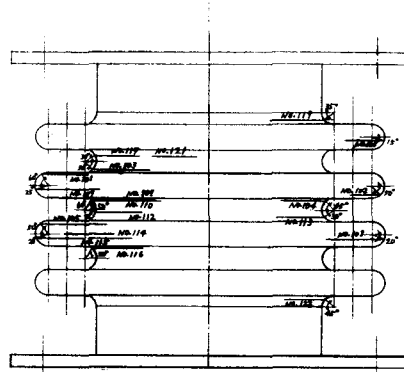


図 2.2 ペローズのき裂発生位置 (母寸 4 インチ)

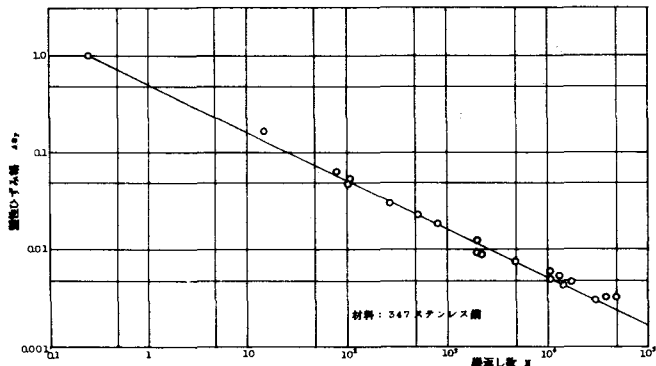


図 2.3 塑性ひずみ幅 - 破壊までの繰返し数線図 (Coffin & Taverne)

$$C = \left(\frac{1}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_f = \frac{\epsilon_f}{2} \quad (2.3)$$

となる。試験片が断面収縮を起こして破断する場合には、断面収縮率 $\phi\%$ を用いて ϵ_f は次のように求められる。すなわち

$$\phi = \frac{S_0 - S}{S_0} \times 100$$

したがって

$$\log \frac{100 - \phi}{100} = \log \frac{S}{S_0} = -\epsilon_f \quad (2.4)$$

ここに

ϕ : 断面収縮率

S_0 : 最初の断面積

S : 破断時の断面積

ϵ_f : 破断ひずみ

式(2.3)および(2.4)より C は

$$C = -\frac{1}{2} \log \frac{100 - \phi}{100} \quad (2.5)$$

一方塑性疲れ試験の結果を実際の設計に應用する方法として、B. F. Langer は次式を提案している。⁽²⁷⁾

$$\sigma = \frac{E}{4\sqrt{N}} \log \frac{100}{100 - \phi} + \sigma_e \quad (2.6)$$

式(2.6)は図2.4に示すような定ひずみ疲れ試験において、測定される定常ひずみサイクルに、式(2.5)で示される Coffin の考え方を應用して、導かれたものである。すなわち総ひずみ幅および弾性ひずみ幅をそれぞれ $\Delta \epsilon_t$ および $\Delta \epsilon_e$ とすると

$$\Delta \epsilon_t = \Delta \epsilon_e + \Delta \epsilon_p \quad (2.7)$$

ここで図2.4から明らかなように

$$\Delta \epsilon_t - \Delta \epsilon_p \cong \frac{2\sigma_0}{E} \quad (2.8)$$

式(2.2)および(2.8)から $\Delta \epsilon_p$ を消去すると

$$\Delta \epsilon_t = \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}} + \frac{2\sigma_0}{E}$$

これから

$$\frac{E \Delta \epsilon_t}{2} = \frac{EC}{2N^{\frac{1}{2}}} + \sigma_0 \quad (2.9)$$

式(2.9)で左辺を σ と置き、右辺第1項の C に式(2.5)を用い、かつ

すぐ後に述べるように右辺第2項
 の σ_0 を疲れ限度の σ_e に置きか
 えれば、式(2.6)が得られる。
 式(2.6)の寿命 N に対応する左
 辺の応力振幅 σ は、全ひずみ振幅
 $\Delta \varepsilon_0/2$ に縦弾性係数 E を乗じた
 値で、相当応力振幅とも言うべき
 ものである。右辺第1項は塑性ひ
 ずみ振幅を左辺と同様に相当応力
 振幅に換算した値であり、第2項
 は弾性ひずみ振幅に相当する応力
 で、 $N = \infty$ において左辺の相当
 応力振幅が材料の疲れ限度に一致
 すべきであると考え、図24の

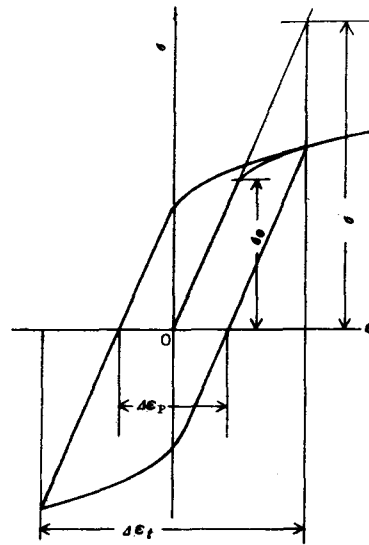


図24 塑性ひずみサイクル

σ_0 を疲れ限度 σ_e に置きかえたものである。J. E. Taverne¹⁸ &
 L. F. Coffin Jr. は式(2.6)を従来の実験結果と比較し、式(2.6)が
 設計上十分有効であることを示した。⁽³⁸⁾ 図25はこれらの一例を示したもの
 である。図中実線は式(2.6)に、ペローズの材質 SUS 27 の σ_e , ϕ , E
 の値⁽³⁸⁾を代入して得られる次式の結果である。

$$N = \frac{2.65 \times 10^7}{(\sigma - 281)^2} \quad (2.10)$$

ただし

$$\sigma_e = 28.1 \text{ KG/MM}^2$$

$$\phi = 62.5 \%$$

$$E = 2.1 \times 10^4 \text{ KG/MM}^2$$

図26は実験のペロ
 ーズの応力振幅と破壊
 までの繰返し数を示し
 たもので、縦軸の σ は
 第1項の弾性式によっ
 て計算した最大応力で

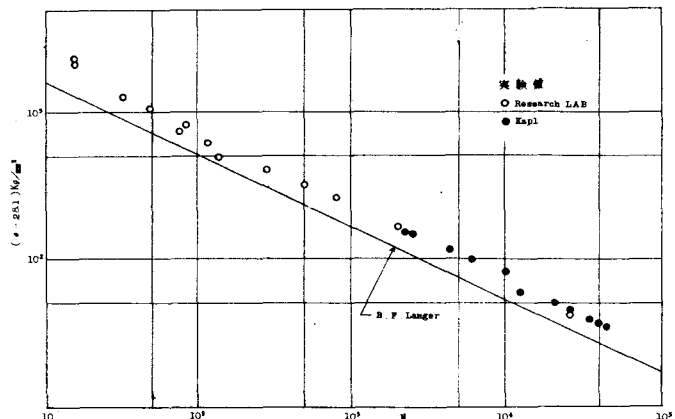


図25 実験値とB.F. Langerの式との比較 (347 Stainless steel)⁽³⁸⁾

ある。図26の結果を式で表わすと、次の式(2.11)のようになる。

$$N = \frac{1.68 \times 10^7}{(\sigma - 28.1)^2} \quad (2.11)$$

この図を見ると、ベローズの応力と寿命との関係は両対数グラフで試験片の結果を下に平行移動した状態になっている。

これはベローズのひずみの分布は試験片のように様でないこと、またすき効果、表面仕上げの影響等によるものであると考えられる。なお破線は、後に述べる Kellogg 社の設計式(2.12)で応力と伸縮量との関係が第1編に述べた本解と一致するような形状のベローズに対する結果である。

次にベローズの塑性ひずみを実験的に求め、図27の Coffin らの試験片の結果と比較する。

実験はベローズの中央の山部頂上に、塑性ひずみ(6%)まで測定できるひずみゲージを、周方何および子午線方向にそれぞれ4枚ずつ計16枚はり、ベローズを取付台の間に固定して、所定の変位を与えた後、荷重を取り除きひずみを測定した。こうすることによって図27からわかるように、所定の変位を与えたときの塑性ひずみが近似的に測定される。このようにして求めた軸方向変位と塑性ひずみとの関係を図示すると図28のようになる。ただしこの塑

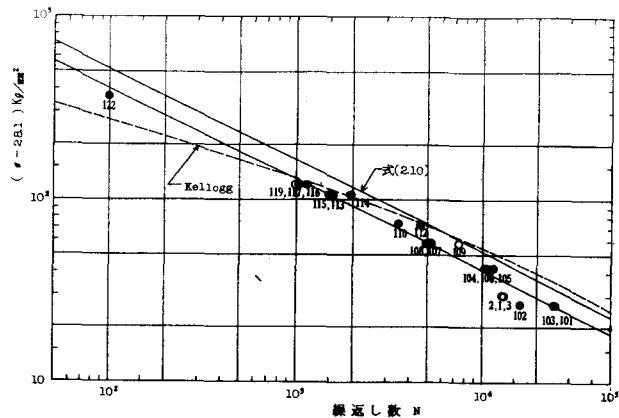


図 2.6 ベローズの応力振幅と破断までの繰返し数

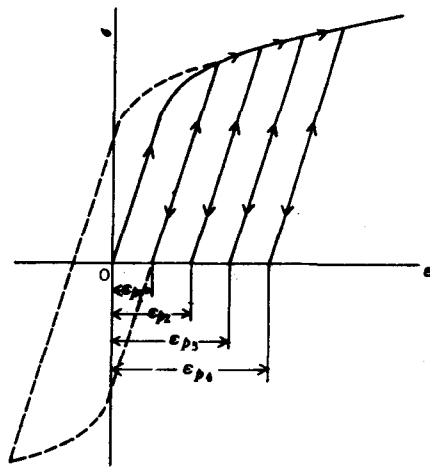


図 2.7 応力とひずみとの関係

性ひずみは荷重を零にしたときの塑性ひずみであるから、多少残留応力があるので実際の塑性ひずみはこれよりやや大きいはずである。図2.9は図2.8の塑性ひずみ ϵ_{pp} を縦軸に、繰返し数 N を横軸にとつて、塑性ひずみと繰返し数との関係を示したものである。図2.9を見ると、やはりベローズの試験結果は、試験片による結果を平行移動させた形になつてゐることがわかる。

さてベローズを塑性領域で使用する場合の寿命を算定する式(2.11)

を、縦軸に相当応力 σ をとり、横軸に对数で繰返し数 N をとつて示すと、図2.10のようになる。これを見ると、式(2.11)は塑性領域から弾性領域

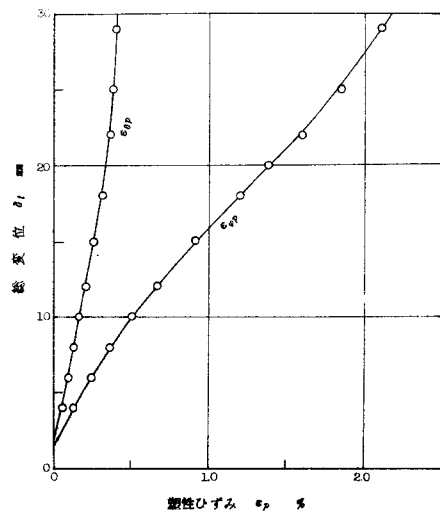


図 2.8 軸方向変位と塑性ひずみとの関係

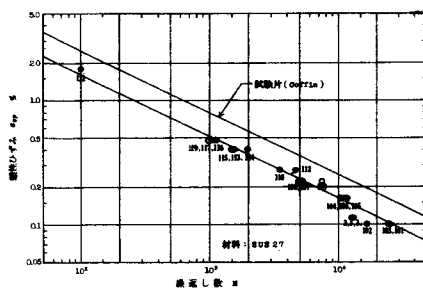


図 2.9 ベローズの塑性ひずみと繰返し数との関係

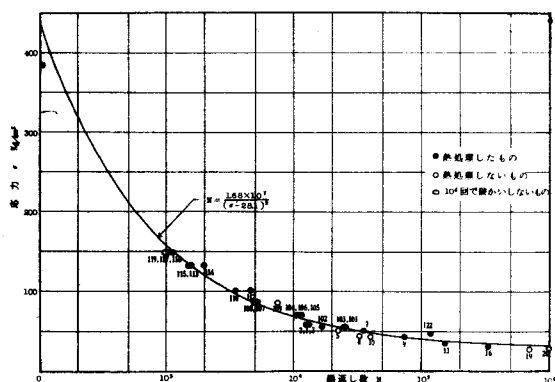
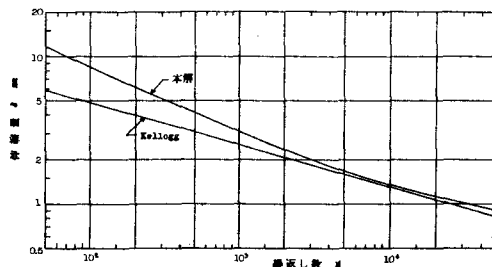
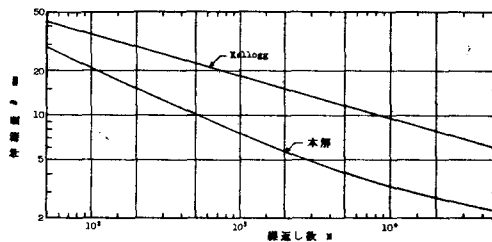


図 2.10 相等応力と繰返し数との関係



(a) ペローズ形状: $\xi = 0.066$, $A_2 = 0.0745$, $A_1 = 0.184$, $r_m = 60.1mm$



(b) ペローズ形状: $\xi = 0.05$, $A_2 = 0.20$, $A_1 = 0.05$, $r_m = 100mm$

図 2.1.1 伸縮量と繰返し数との関係

域までよく実験値と一致した式であると言える。したがってステンレス鋼製のペローズの寿命を算定する式として式(2.11)を用いてよい、

最後に M. W. Kellogg 社の次の設計式と比較する。

$$N = \left(\frac{1125}{\sigma} \right)^{3.5} \quad (2.12)^{(12)}$$

ここに σ は第1編式(2.38)から求めた応力である。図2.11は縦軸に1ピッチ当りの伸縮量 δ をとり、横軸に破壊までの繰返し数 N をとったものである。同図(a)は本実験に用いた4インチペローズの場合で、

$N = 10^4$ 付近で筆者の式と Kellogg 社の式とは比較的良好一致するが $N \leq 10^3$ ではかなり異なり、等しい変位に対し繰返し数では数倍のへだたりがあるところもある。また他の形状パラメータのものについても伸縮量と繰返し数との関係を種々検討した結果、形状によつては図2.11(b)に示すように、本解と非常に離れ、危険側に出るものもある。このことは次のように考えても明らかである。式(2.11)と(2.12)は、もし両者の応力 σ が等しければ、図2.6に見るようになりによく一致する。ところが応力 σ と軸方向の伸縮量 δ との関係は、第1編の図5.4に示したように、形状が

ラメータのごくせまい範囲を除き全く合わず、Kellogg社の式は場合によつては数倍も危険側に出てくる。したがつて伸縮量と寿命との関係もパラメータのごくせまい範囲を除き、Kellogg社の式と筆者の式とは全く合わず、ベローズの形状によつてはKellogg社の式は非常に危険側に出てくることになる。

2.4 結 論

本章では、塑性疲れ試験の結果を実際の設計に活用する方法として、B. F. Langerによつて提案された式と筆者の実験結果とから、ベローズの塑性領域における寿命を算定する方法を考察した。実験は、2種類のステンレス鋼製のベローズについで、定ひずみ両振りで行ない、従来の試験片の結果と比較検討するとともに、弾性領域から塑性領域までの広範囲で用いることのできるベローズの寿命を算定する次の式を導いた。

$$N = \frac{1.68 \times 10^7}{(\sigma - 28.1)^2}$$

ただし

N : 繰返し数

σ : 第1編の弾性解析で求めた最大応力 (σ_{bg} の最大値)

またこれをKellogg社の式と比較したところ、ベローズの形状によつてはKellogg社の式は数倍も危険側に出ることがわかつた。

なお試験用ベローズは、成形後熱処理したものとそうでないものを使用したが、両者の間にはあまり差はないようである。

次に、ベローズの試験結果も試験片のそれと比較したところ、試験片の $(\sigma - \sigma_e) - N$ 曲線 (両対数) を平行移動したものが、ベローズの $(\sigma - \sigma_e) - N$ 曲線となることがわかつた。したがつて本実験に用いたベローズと若しく形状寸法の異なるベローズの寿命を算定する場合には、あらかじめある変位で試験を行ない、グラフ上で一点を求めて上の式に平行線をひき、これを寿命を算定する線図としてよいことがわかつた。また他の材質から成るベローズの場合にも、その材質の疲れ限度がわかれば、上と同様の方法で応力と寿命との関係が求められるものと考えられる。

結語および謝辞

本論文はベローズの強さについて述べたものである。ベローズはパイプラインの伸縮継手として、またポンプやターボ送風機の吐出管、ディーゼル主機排気管等の振動防止に、あるいはまた計測制御関係等に広く用いられており、その形状も U 形、C 形、 Ω 形等いろいろなものがある。このようにベローズは広範囲に用いられている機械要素であるにもかかわらず、これについての研究は非常に少なく、むしろその弾性特性を論じた近似的なものおよびさわめてあらい M. W. Kellogg 社の設計式があるにすぎなかった。

そこで筆者はこの研究に着手し、その用途から考えてまず第 1 編において、どのような用途に対しても基礎的で重要な意味をもつ弾性特性について述べ、第 2 編では極限解析によってその極限軸荷重を求め、最後に第 3 編でベローズの疲れ強さについて論じた。

すなわち第 1 編においてはかく理論を用いて、U 形、C 形および Ω 形ベローズに軸力が作用する場合と U 形ベローズに内圧が作用する場合の問題を解析して、応力および伸縮量を求め、これを他の研究者の結果および実験結果と比較するとともに結論を実際の設計に役立つように計算図表または設計公式にまとめた。第 1 編では線形理論を用いて問題を解析したが、計測制御関係等に用いる

U 形ベローズのなかには、肉厚が非常に小さく、ベローズの平均半径に比べ山の高さが非常に大きく、さわめて降伏点の高い材料で作られているものがあるが、これらは降伏するまでに大きな変形を伴うので、もしこれを降伏点付近まで使用する場合には、ここで用いた微小たわみ理論によると誤差が大きくなることと考えられる。これに対しては変位を変数として入れた、いわゆる大たわみ理論を用いればよいが、これは解法が複雑で計算が手間どる上に、結論を公式等の形で表わすことが困難であるから、ここでは用いなかった。これについては今後の研究に期待する。ただし、一般に用いられているベローズに対しては微小たわみ理論による解で実用的には十分である。また現在広く用いられている M. W. Kellogg 社の計算式は、ベローズの形状によっては、数倍も危険側に出ることがわかった。

次にベローズをパイプラインの伸縮継手等を使用する場合には、その材料の塑性域まで用いる場合が多く、また計測制御関係等に用いる場合には、弾性範囲で使用するが、このときにもあらかじめベローズの耐え得る荷重の極限値を知って

おくことは重要である。そこで第2篇では極限解析によつてC形およびり形ベローズに軸力が作用する場合の極限值を求め、これを実験結果と比較検討した。また結論は設計公式または計算図表で示した。

第3篇では振動試験機を利用してベローズの疲れ試験機を設計し、ベローズの疲れ試験を行なつた。そしてこれを試験片の結果と比較し、第1篇に述べた弾性解析の結果と結びつけることによつて、ベローズの軸方向の変位と寿命との関係を観察した。そしてステンレス鋼製のものについては公式を作製するとともに、これを Kellogg 社の式と比較した。

なお各章の結論はその章の終りに述べたので、ここでは省略する。また形状パラメータを入れれば、直ちに応力および伸縮量が得られる設計プログラムを作製したが、計算機がなければ、実際に用いることができないので、割愛した。

おわりにのぞみ終始懇篤なる指導と校閲の労をとられた大阪大学工学部浜田実教授に対し心から拝謝する。また種々御指導助言を賜わつた大阪大学工学部、太田友弥名誉教授、菊川真教授、大路清嗣助教授および電子計算機使用の便宜を与えられた城 惠三教授と牧之内三郎助教授に厚く感謝する。また実験に際し、種々援助を与えられた大阪大学工学部井上豊助手ならびに当時工学部学生として本研究に協力された岡本淳、西尾義、岡本健三、平石東博、松本健一、鹿島紀雄、有田貞一の各君に対し、心から御礼申し上げる。さらに実験用ベローズを提供された大阪ラセン管工業株式会社に対し、深く謝意を表するものである。なお本研究には文部省科学研究費の補助を受けたことを付記する。

発 表 文 献

本論文のうち、第1編および第2編はすでに機械学会または応用力学連合会の論文集等に発表したので、これを次に記す。

第 1 編

- 第2,3章 機械学会論文集, 29-197 (昭38-1), 142.
第4章 機械学会論文集, 31-223 (昭40-3), 389.
Bulletin of JSME, 8-32 (1965), 519.
第5章 機械学会論文集, 31-231 (昭40-11), 1592.
第6章 機械学会論文集, 31-231 (昭40-11), 1605.

第 2 編

- 第2,3章 *Proc. 12th. Jap. Nat. Congr. Appl. Mech.*,
(1962), 9.
第4,5章 *Proc. 14th. Jap. Nat. Congr. Appl. Mech.*
(1964).
機械学会論文集 (投稿中)

第 3 編 未 発 表

参 考 文 献

- (1) 太田・栗田ほか2名, 機械学会論文集, 29-197 (昭38-1), 142.
- (2) R.A. Clark, J. Math. Phys., 29, (1950), 146.
- (3) C.E. Turner & H. Ford., Proc. Inst. Mech. Engr., 171-15 (1957), 526.
- (4) P.J. Palmer, Proc. Inst. Mech. Engr., 174-20 (1960), 635.
- (5) N.D. Dahl, J. Appl. Mech., 20-4 (1953-12), 497.
- (6) F. Salzmann, Schweiz. Bauzeitg., 127-11 (1946), 127.
- (7) A. Samoiloff, Power, 105 (1961-1), 57.
- (8) A. Laupa & N.A. Weil, Trans. ASME, Ser. E, 29-1 (1962), 115.
- (9) Л. Е. АНДРЕЕВА, Упругие Элементы Приборов, (1962), 324, Машгиз.
- (10) 中村・ほか2名, 機械学会第41期通常総会講演会前刷集, No. 105 (昭39-4), 45.
- (11) 宮入・ほか2名, 機械学会第41期通常総会講演会前刷集, No. 105 (昭39-4), 49.
- (12) M.W. Kellogg社, Design of Piping Systems, (1964), 221.
- (13) E. Reissner, Proc. of Symposia in Appl. Mathematics Vol III (1950), 27.
- (14) K. Nakamura, Bull. Faculty of Engr. Yokohama National Univ., 6 (1957), 103.
- (15) K. Nakamura, Bull. Faculty of Engr. Yokohama National Univ., 10 (1961), 25.
- (16) 太田・栗田ほか2名, 機械学会論文集, 30-209 (昭39-1), 187.
- (17) W.K. Sepestoski & others, Trans. ASME, Ser. E, 29-4 (1962), 655.

- (18) 中村, 機械学会論文集, 19-83 (昭28), 48.
- (19) S.P. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, (1959), 51, McGraw-Hill.
- (20) 倉西, 応用弾性学, (昭32), 122. 共立出版.
- (21) 倉西, 応用弾性学, (昭32), 85. 共立出版.
- (22) E.T. Onat & W. Prager, *Proc. Roy. Netherlands Acad. Sci. B* 57 (1954), 534.
- (23) D.C. Drucker & R.T. Shield, *J. Appl. Mech.*, 26 (1959), 61.
- (24) D.C. Drucker, *Proc. of the 1st Midwest Conference on Solid Mechanics*, (1953), 158.
- (25) E.T. Onat, *Quarterly of Appl. Math.*, 13 (1955), 63.
- (26) R.G. Hodge, Jr., *J. Appl. Mech.*, 21, *Trans. ASME*, 76 (1954), 336.
- (27) D.C. Drucker, W. Prager & H.J. Greenberg, *Quarterly of Appl. Math.*, 9 (1952), 381.
- (28) 西原: 河本, 機械学会論文集 7-29 (昭16) I-85.
- (29) H.J. Gough & H.V. Pollard, *Inst. Mech. Engrs.*, 131 (1935) 3.
- (30) A.F. Maier, *Stahl und Eisen*, 54 (1934), 1289.
- (31) G.K. Morikawa & L. Griffis, *Welding J. Res. Suppl.*, 24 (1945), 167.
- (32) 金属材料疲れ強さの設計資料, (昭36), 63, 機械学会.
- (33) S.S. Manson, *NASA Tech. Note No. 2933* (1953).
- (34) L.F. Coffin & J.E. Tavernelli, *G.E. Research Lab. Rep.*, 58 (1958), RL-2100.
- (35) J.E. Tavernelli & L.F. Coffin, *Trans. ASM*, 51 (1959), 438.
- (36) E.E. Baldwin, G.J. Sokol & L.F. Coffin, *Proc. ASTM*, 57 (1957), 567.
- (37) B.F. Langer, *Trans. ASME, Ser. D*, (1962-9), 389.
- (38) J.F. Tavernelli & L.F. Coffin, *Trans. ASME, Ser. D*, 84-4 (1962-12), 53.