The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	最小自乗法と幾何学的な解による直角2方向X線写真に基づく位置決定法
Author(s)	田伏, 勝義; 伊藤, 進; 砂倉, 瑞良 他
Citation	日本医学放射線学会雑誌. 1990, 50(7), p. 846-851
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/18140
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

日本医放会誌：50（7），846—851，1990（平2）

最小自乗法と幾何学的な解による直角2方向X線写真に基づく位置決定法

1）埼玉県立がんセンター放射線部，2）放射線医学総合研究所臨床研究部
3）自宅，4）東京都立医療技術短期大学
田伏　勝義[1)]　伊藤　進[1)]　砂倉　瑞良[1)]　中村　譲[2)]
飯沼　武[2)]　荒居　龍雄[3)]　入船　寅二[4)]

（平成元年11月2日受付）
（平成元年12月19日最終原稿受付）

Determination of the Point Position from two Orthogonal X-ray Photographs Using Least Squares Method and Geometrical Solutions

Katsuyoshi Tabushi[1)], Susumu Itoh[1)], Mizuyoshi Sakura[1)], Yuzuru Kutsutani-Nakamura[2)], Takeshi A. Iinuma[2)], Tatsuo Arai[3)] and Toraji Irifune[4)]
1) Department of Radiology, Saitama Cancer Center
2) Division of Clinical Research, National Institute of Radiological Sciences
3) Medical Consultation
4) Metropolitan College of Allied Medical Sciences

Research Code No. : 200

Key Words : Error propagation, Orthogonal biplane radiography, Least squares method, Geometrical solution sets

Six sets of solutions for caclulating the position of an interest point were obtained geometrically using four measured image coordinates on two X-ray photographs orthogonally projected. When the image coordinates had no error, all the solutions gave the same position without error. When an error occured, the calculated positions differed from each other due to the propagation of the error. Some solutions could not be used for this determination owing to a large propagation of error. Under conditions similar to those of clinical practice, the ratio of maximum error of position calculated by the six geometrical solutions to minimum error was about 426. The least squares method that we proposed gave results with less error. When one of the image coordinates could not be measured for some reason, the least sqares method became automatically equivalent to one of the six geometrical solutions.

1. 緒　言

子宮頚癌の腔内照射の治療計画は，一般に正側2方向のX線写真から体内に挿入された模擬線源の位置を求め，実際の線源配置を決めている．組織内照射では刺入された線源のX線写真から線源位置を計算し，必要な線量を与える刺入時間が決められている．これらの線源の位置をX線写真から求める時，種々の誤差が計算結果に影響を与える．位置決定における誤差の要因の主なものとして撮影時の患者の働きや，X線写真の読み取り時の誤差が考えられる．これらの誤差は実際の位置を計算する時に伝播され，正しい計算式を用

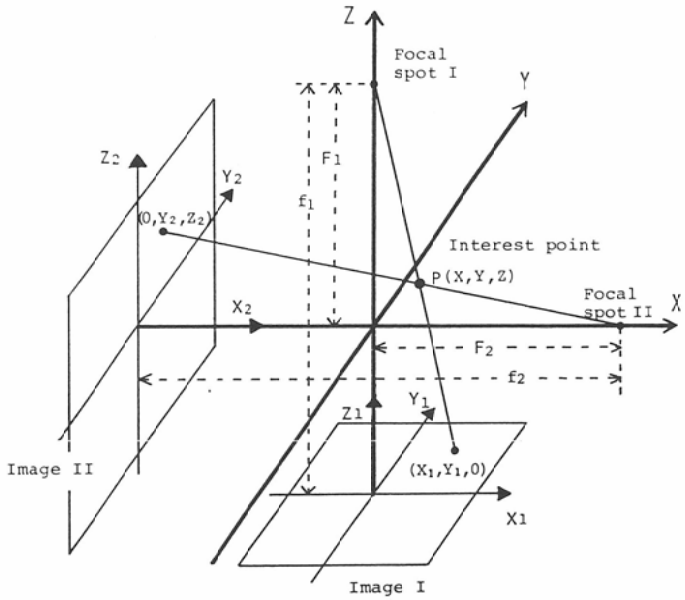

Fig. 1　Two projections with orthogonal orientation and right-handed coordinate systems.
Point P is shown by spatal coordinate (x, y, z). (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2) are image coordinate systems related to images I and II, respectively.

いても非常に大きな誤差に拡大される場合が生じる．フイルム読み取り時の誤差はデジタイザーを使用するか，あるいはシャーカステン上で定規などで行なうかで多少異なる．

本報告では，2つのことを主に述べる．最初は直角2方向から撮影された場合の全く等価な6組の位置座標の理論的に正しい計算式を示す．なかには，誤差の受け方が計算式によって大きく異なり，誤差の伝播が大きすぎて実用にならないものもある．2番目として2枚のX線写真から得られる4つの独立な測定値をもとに，それらの6組の計算式よりも誤差の伝播が少ない最小自乗法で座標を求める方法を報告する．

2．幾何学的な関係式と種々の解

正側X線写真はFig. 1の様に投影Iとそれを90度回転させた投影IIで撮影される．空間座標系(X，Y，Z)は右手系を用いた．子宮頚癌の腔内照射を想定して，X軸は右手から左手側，Y軸は足から頭側，Z軸は背中から腹側に向いているとする．投影像上での座標系はフイルムI上で(X_1，Y_1，Z_1)，フイルムII上で(X_2，Y_2，Z_2)とする．点Pのフイルム I上での座標(x_1，y_1，O)は点Pの空間座標(x，y，z)により次の如く表わされる．

$$x_1=\frac{xf_1}{F_1-z} \qquad (1)$$

$$y_1=\frac{yf_1}{F_1-z} \qquad (2)$$

同様に投影IIによるフイルム2上での点Pの座標（O，y_2，z_2）は

$$y_2=\frac{yf_2}{F_2-x} \qquad (3)$$

$$z_2=\frac{zf_2}{F_2-x} \qquad (4)$$

ただし，f_1とf_2は焦点と各フイムルまでの距離，F_1とF_2はビーム中心軸の交点と各焦点までの距離を示す．点Pの座標(x，y，z)はフイルム像上での座標x_1，y_1，y_2，z_2から計算する．x，y，zの計算式を求めるための式の組み合せとして

(1)（2）(3)，(1)（2）(4)

(1)（3）(4)，(2)（3）(4)

と，さらに（1）式を（2）式で，（3）式を（4）式で除したものも取り入れて

(1)（2）{(3)/（4)}

{(1)/（2)}（3）(4)

の6組がある．

Table 1 Six sets of geometrical solutions

Combinations of geometrical equations	Geometrical solutions for each coordinate based on combinations		
(1), (2), (4)	$X^{(1)}=\frac{X_1(F_1f_2-Z_2F_2)}{f_1f_2-X_1Z_2}$	$Y^{(1)}=\frac{Y_1(F_1f_2-Z_2F_2)}{f_1f_2-X_1Z_2}$	$Z^{(1)}=\frac{Z_2(F_2f_1-X_1F_1)}{f_1f_2-X_1Z_2}$
(1), (3), (4)	$X^{(2)}=X^{(1)}$	$Y^{(2)}=\frac{Y_2(F_2f_1-X_1F_1)}{f_1f_2-X_1Z_2}$	$Z^{(2)}=Z^{(1)}$
{(1)/(2)}, (3), (4)	$X^{(3)}=\frac{X_1Y_2F_2}{X_1Y_2+Y_1f_2}$	$Y^{(3)}=\frac{Y_1Y_2F_2}{X_1Y_2+Y_1f_2}$	$Z^{(3)}=\frac{Y_1Z_2F_2}{X_1Y_2+Y_1f_2}$
(1), (2), (3)	$X^{(4)}=X^{(3)}$	$Y^{(4)}=Y^{(3)}$	$Z^{(4)}=F_1-\frac{Y_2f_1F_2}{X_1Y_2+Y_1f_2}$
(1), (2), {(3)/(4)}	$X^{(5)}=\frac{X_1Y_2F_1}{Y_1Z_2+Y_2f_1}$	$Y^{(5)}=\frac{Y_1Y_2F_1}{Y_1Z_2+Y_2f_1}$	$Z^{(5)}=\frac{Y_1Z_2F_1}{Y_1Z_2+Y_2f_1}$
(2), (3), (4)	$X^{(6)}=F_2-\frac{Y_1F_1F_2}{Y_1Z_2+Y_2f_1}$	$Y^{(6)}=Y^{(5)}$	$Z^{(6)}=Z^{(5)}$

これらから得たx, y, zを求める6組の式をTable 1に示した．これらの解のうち，直角2方向という条件のために，x, y, zの表示式はそれぞれ4種類となっている．$x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$は尾内ら[1]の報告に，$x^{(3)}$, $y^{(3)}$, $y^{(5)}$, $z^{(5)}$はVickeryら[2]，尾内ら[3]，速水[4]の文献に，$x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $z^{(1)}$が高橋，佐方[5]の誤差解析に見られる．$x^{(5)}$, $x^{(6)}$, $z^{(3)}$, $z^{(4)}$は使用されていないのかあるいは今迄報告されていないと思われる．

尚，ビーム中心軸の交点と焦点までの距離F_1, F_2は，尾内，入船[3]によると

$$F_1=\frac{f_1}{M_1}+\frac{z_{2'}}{M_2},\quad F_2=\frac{f_2}{M_2}+\frac{x_{1'}}{M_1}$$

で求まる．ただし，ある点(あるいはオーリング)が拡大率M_1, M_2で投影され，その点の座標（あるいはオーリングの中心座標）がフイルムI上で($x_{1'}$, $y_{1'}$, O)，フイルムII上で(O, $y_{2'}$, $z_{2'}$)であるとしている．

3. 誤差の伝播

測定値に誤差が含まれない場合には，Table 1に示した6組の解は全く同じ空間座標(x, y, z)をもたらす．しかし，測定値に何らかの誤差が伴う場合，得られる座標はそれぞれ異なる．誤差の影響の受け方を具体的な値を代入して調べる．子宮頚癌の腔内照射におけるオボイド線源の位置を想定して，$x^{(1)}$, $x^{(3)}$, $x^{(5)}$, $x^{(6)}$の誤差を比較する．フイルム上での読み取り値は

$x_1=2\text{cm}$,

$y_1=y_2=-0.3\text{cm}$,

$z_2=0\text{cm}$

として標準的な場合よりオボイドが外子宮口に近い場合を想定している．基本になるフイルム上での読み取り誤差は

$\delta x_1=\delta y_1=\delta y_2=\delta z_2=K$

とする．ビーム中心軸の交点と焦点までの距離とその誤差は

$F_1=F_2=60\text{cm}$

$\delta F_1=\delta F_2=AK$

とし，フイルム読み取り誤差のA倍とする．同様に焦点とフイルムの距離については

$f_1=f_2=90\text{cm}$

$\delta f_1=\delta f_2=BK$

と仮定した．

各式で得られるX座標の誤差の自乗は誤差の伝播則により

$$\{\delta x^{(1)}\}^2\fallingdotseq 0.44K^2(1+0.001A^2+0.0005B^2)$$

$$\{\delta x^{(3)}\}^2\fallingdotseq 36.6K^2(1+0.00001A^2+0.000006B^2)$$

$$\{\delta x^{(5)}\}^2\fallingdotseq 0.44K^2(1+0.001A^2+0.0005B^2)$$

$$\{\delta x^{(6)}\}^2\fallingdotseq 80000K^2(1+0.00003A^2+0.00001B^2)$$

となる．またこの例ではF_1, F_2, f_1, f_2の誤差は読

み取り誤差よりも相対的にあまり影響していないので無視すると，誤差が最も大きい $\delta x^{(6)}$は，最も小さな $\delta x^{(1)}$や $\delta x^{(5)}$の約426倍となる．大きさの比較は

$$\delta x^{(6)} > \delta x^{(3)} > \delta x^{(5)} \fallingdotseq \delta x^{(1)}$$

である．

y座標についても F_1, F_2, f_1, f_2の誤差の影響は相対的に小さく，無視すると，最も大きい誤差をもつのは $(\delta y^{(1)})^2$と $(\delta y^{(5)})^2$の$0.44K^2$，その次は $(\delta y^{(2)})^2$の$0.42K^2$，最も小さいのは$(\delta y^{(3)})^2$の$0.41K^2$となり，x座標の場合とは異なり，どの計算式を用いてもほぼ同じ誤差になった．

4. 最小自乗法による基本関係式

x_1, y_1, y_2, z_2の測定値 x_{1m}, y_{1m}, y_{2m}, z_{2m}には誤差が一般に含まれ，x, y, zの6組の解にそれが伝播されている．ここでは4つの全ての測定値を用いて，誤差の影響を小さくできる最小自乗法でx, y, zを求める．

$$\delta x_1 = x_1(x, y, z) - x_{1m}$$
$$\delta y_1 = y_1(x, y, z) - y_{1m}$$
$$\delta y_2 = y_2(x, y, z) - y_{2m}$$
$$\delta z_2 = z_2(x, y, z) - z_{2m}$$

とし，フィルム上の座標読み取りの重みをそれぞれ W_1, W_2, W_3, W_4として

$$\delta^2 = W_1(\delta x_1)^2 + W_2(\delta y_1)^2 + W_3(\delta y_2)^2 + W_4(\delta z_2)^2$$

を最小にするx, y, zは次の3つの式を満足する．

$$W_1\left(\frac{xf_1}{F_1-z} - x_{1m}\right)\frac{f_1}{F_1-z} + W_3\left(\frac{yf_2}{F_2-x} - y_{2m}\right)\cdot\frac{yf_2}{(F_2-x)^2} + W_4\left(\frac{zf_2}{F_2-x} - Z_{2m}\right)\frac{zf_2}{(F_2-x)^2} = 0 \quad (5)$$

$$W_2\left(\frac{yf_1}{F_1-z} - y_{1m}\right)\frac{f_1}{F_1-z} + W_3\left(\frac{yf_2}{F_2-x} - y_{2m}\right)\frac{f_2}{F_2-x} = 0 \quad (6)$$

$$W_1\left(\frac{xf_1}{F_1-z} - x_{1m}\right)\frac{xf_1}{(F_1-z)^2} + W_2\left(\frac{yf_1}{F_1-z} - y_{1m}\right)\cdot\frac{yf_1}{(F_1-z)^2} + W_4\left(\frac{zf_2}{F_2-x} - Z_{2m}\right)\frac{f_2}{F_2-x} = 0 \quad (7)$$

この非線形の連立方程式から点Pの空間座標（x, y, z）は，初期値を（x_p, y_p, z_p）として逐次近似で容易に求められる．初期値が真値からかなり違っていても収束性は良いが，$x^{(1)}$, $x^{(5)}$, $y^{(3)}$, $y^{(5)}$, $z^{(1)}$, $z^{(3)}$から採用するのが好ましい．

5. 計算値による解の比較

幾何学的な関係式（1）－（4）に基づいた6組の解による計算値と最小自乗法に基づく関係式（5）－（7）から $W_1 = W_2 = W_3 = W_4$として得た計算値を比較する．ここでは $F_1 = F_2 = 65$cm, $f_1 = f_2 = 90$cmとする．x, y, zへの影響を比較するために同じ座標を与える．

点Pの空間座標（x, y, z）＝（2, 2, 2）に対して投影像上での座標はそれぞれ

$(x_1, y_1) = (2.857, 2.857)$

$(y_2, z_2) = (2.857, 2.857)$

となる．読み取り時の誤差として1mmを想定し，過大に読んだ時2.957cm，過小に読んだ時2.757cmとした．Table 2の上段に投影像上の座標を与え，誤差を与えたものには＊印が示してあり，5通りの場合についてその影響を検討した．xとzは対称的な立場にあるので，zに誤差を与えた結果は省略した．Table 2の上から2段目は最小自乗法，それ以下の段は幾何学的な解についての誤差の影響を示し，3段目はx座標，4段目はy座標，最下段はz座標の結果である．

x_1のみが1mmの誤差をもつ時，拡大率から単純に考えて計算から得るx座標の誤差は約0.7mmとなり，最小自乗法のxや $x^{(1)}$, $x^{(3)}$, $x^{(5)}$がそれを反映した値を示している．y座標の計算式のすべてが x_1の誤差の影響をあまり受けていないのに対して，z座標は $z^{(4)}$のみが約0.7mmの影響を受けている．

y_1のみが1mmの誤差をもつと，y_1と y_2が平均的に寄与すると考えられるので，yの計算値に約0.35mmの影響を与える．これを満足するのは最小自乗法によるyの値だけである．y_1の誤差のxとz座標への影響は，$x^{(6)}$と $z^{(4)}$に対して特に大きく，約2cmの誤差をもたらす．次に大きいのは $x^{(3)}$と $z^{(5)}$に対してで約0.7mmの誤差になる．最小自乗法のxとz, $x^{(1)}$, $x^{(5)}$, $z^{(1)}$, $z^{(3)}$にはあまり影響

Table 2 Spatial coordinates of point calculated by various equations in simulation

			I	II	III	IV	V
Image coordinates with errors (*)		x_1	2.957*	2.757*	2.857	2.857	2.857
		y_1	2.857	2.857	2.957*	2.757*	2.957*
		y_2	2.857	2.857	2.857	2.857	2.757*
		z_2	2.857	2.857	2.857	2.857	2.857
Spatial coordinates calculated from image coordinates	Least squares method	x	2.070	1.930	1.999	2.001	1.998
		y	1.999	2.001	2.035	1.965	2.000
		z	1.998	2.002	2.001	1.999	2.002
	Geometrical solutions	$x^{(1)}=x^{(2)}$	2.070	1.930	2.000	2.000	2.000
		$x^{(3)}=x^{(4)}$	2.070	1.932	1.934	2.070	1.869
		$x^{(5)}$	2.070	1.930	1.998	2.002	1.995
		$x^{(6)}$	2.000	2.000	−0.135	4.139	−2.420
		$y^{(1)}$	2.000	2.000	2.070	1.930	2.070
		$y^{(2)}$	1.998	2.002	2.000	2.000	1.930
		$y^{(3)}=y^{(4)}$	1.998	2.002	2.002	1.998	1.934
		$y^{(5)}=y^{(6)}$	2.000	2.000	2.068	1.932	2.065
		$z^{(1)}=z^{(2)}$	1.998	2.002	2.000	2.000	2.000
		$z^{(3)}$	1.998	2.002	2.002	1.998	2.004
		$z^{(4)}$	2.068	1.932	4.067	−0.212	6.138
		$z^{(5)}=z^{(6)}$	2.000	2.000	2.068	1.932	2.140

していない．

δy_1が＋1mmでさらにδy_2が−1mmの時，最小自乗法でyの値は2cmと平均化されているのに対して$y^{(1)}$，$y^{(5)}$は約2.07cmとなり，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$は約1.93cmとなる．$y^{(1)}$と$y^{(2)}$の間には約1.4mmの差が生じる．幾何学的に求めた解によるyの結果はどの式でも似た影響を受けている．y_1のみが大きく寄与するか，あるいはy_2のみが大きく寄与して，y_1とy_2の寄与が平均されていない．xとzの計算値にy_1とy_2の誤差が大きく影響する場合があり，特に$x^{(6)}$と$z^{(4)}$の計算式は顕著で，約4cmの誤差を受ける．さらに$x^{(3)}$が約1.3mm，$z^{(5)}$が約1.4mmの誤差を受けるが，$x^{(1)}$，$x^{(5)}$，$z^{(1)}$，$z^{(3)}$はあまり影響を受けていない．

Table 2全体から考慮すると，x座標では$x^{(6)}$が最も誤差の影響を受ける．その次が$x^{(3)}$であることが，列III，IV，Vの値からわかる．影響が最小のものは最小自乗法，$x^{(1)}$，$x^{(5)}$である．y座標では，最小自乗法が最も小さな影響を受けるが，幾何学的な解はすべて同程度の誤差を受ける．z座標はx座標と同様の影響を受けている．

6. 考　察

位置決定に従来用いられてきた計算式は種々あるが，これらの計算式を統一的に論じた報告は見当たらない．幾何学的な関係式をもとに，代数的に考えうる解を全て書き出した．直角2方向という，臨床に直接用いられている特殊条件についてだけ今回報告したので，6組の解のうち，x，y，zそれぞれの表示式は4種類となった．しかし，一般の場合について検討すると6組の解が全て異なっている．これは改めて報告したい．4種類の表示式のうち，子宮頸癌の腔内照射の場合を想定すると，最も誤差が小さいのは今回報告した$x^{(5)}$，$z^{(3)}$と尾内らと高橋らの報告に見られる$x^{(1)}$，$z^{(1)}$とである．yについては，各表示式によってそれ程差は見られない．式として正しくても実用にならないものとして$x^{(6)}$，$z^{(4)}$がある．実際の治療計画時に誤差を見落としやすいのが中程度の誤差をもたらす$x^{(3)}$，$z^{(5)}$であり，3節やTable 2からもわかる．子宮頸癌の腔内照射の治療計画時にこれらの式による誤差が大きくなることに気付き，この仕事をするきっかけとなった．

幾何学的な関係式から位置を決定する方法はい

ずれにしても，4つあるデータを有効に利用していない．今回報告した最小自乗法では，この4つの測定値から誤差のより少ない位置計算が出来る．そのうえ，最小自乗法での4つの重みを1つだけ0にして，残りを等しくすると，幾何学的な計算式のどれかと等価になる．これは最小自乗法と幾何学的な計算式がどこかで繋っていることを示す．X線写真上の像の重なり等により，4つの座標のうち1つだけ読み取れない時は，最小自乗法が自動的に幾何学的な計算式に変わり，実用上非常に便利である．しかしこの場合には，その幾何学的な計算式に伴う誤差は避けられない．

任意の方向から撮影された2枚のX線写真の予備知識なしで，3次元再構成がMetzら[6]により8点アルゴリズム[7]を用いて，最近報告されている．この種の問題は他の問題との関連から，今も注目されており，古くて新しい問題と言える．

日頃御協力頂きました埼玉県立がんセンターの放射線部横山俊　副技師長，佐藤狭二，川村耕治両主任技師に深く感謝いたします．

本研究の要旨は，第58回日医放物理部会大会（群馬）にて報告した．

文　献

1) Onai Y, Irifune T, Tomaru T: Calculation of dose distribution in radiation therapy by a digital computer. II. Computation of dose distribution in radium therapy. Nippon Acta Radiol 28: 1629—2636, 1969

2) Vickery BL, Redpath AT: The reconstruction and dose-rate calculation of radium needle implants. Brit J Radiol 50: 280—285, 1977

3) 尾内能夫，入船寅二：線源位置の同定法．放射線医学大系，34巻，放射線物理学．田坂　晧編，中山書店，1984, p235—237

4) 速水昭宗：線量計算法．密封小線源治療—腔内・組織内照射法の実際．重松　康編，篠原出版，1980, p109—152

5) 高橋賢一，佐方周防：シュミレータによる線源位置取得の際の誤差の解析．JARSモノグラフ．No. 1. RALSの線量計算基準—子宮頚癌治療を中心として．佐方周防，川島勝弘編，放射線治療システム研究会，1987, p35—38

6) Metz CE, Fencil LE: Determination of three-dimensional structure in biplane radiography without prior knowledge of the relationship between the two views. Theory Med Phys 16: 45—51, 1989

7) Longuet-Higgins HC: A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. Nature 293: 133—135, 1981