飽和特性を持った非線形発振器と位相同期に関する研究

鈴　木　敬　三

昭和46年12月

論文目録

大阪大学

報告番号・乙第1125号　氏名　鈴木敬三

主論文　飽和特性を持った非線形発振器と位相同期に関する研究

（主論文のうち印刷公表したもの）

1. ディジタルICを用いた発振器の一考察　　電子通信学会論文誌 53−A巻1号 昭和45年1月

1. Analysis of an Oscillator Consisting of Digital Integrated Circuits（ディジタル集積回路を用いた発振器の解析）　　IEEE Journal of SSC 5巻4号 昭和45年8月

1. "ディジタルICを用いた発振器の一考察"に対する補遺　　電子通信学会論文誌 53−A巻10号 昭和45年10月

1. Fokker－Planck 方程式による位相同期ループの一考察	電子通信学会論文誌 53－B巻 11号 昭和45年11月
1. Tan^{-1} の入出力特性を持った発振器の一考察	電子通信学会論文誌 54－A巻 4号 昭和46年 4月
1. Tan^{-1} の入出力特性を持った発振器の解析	電子通信学会論文誌 54－A巻 9号 昭和46年 9月
1. Analysis of Modulated Signals in Phase－Locked Loops （位相同期ループの変調信号の解析）	IEEE Trans. COM 19巻 5号 昭和46年10月
1. ディジタルICを使った発振器の実験	電気四学会連合大会予稿集 2083 昭和44年 3月

1、パルス位相同期ループの一考察　電気四学会連合大会予稿集 2090 昭和44年3月

1、位相同期ループを持ったAM復調器についての一考察　電気四学会連合大会予稿集 2691 昭和44年3月

1、ディジタルIC発振器の解析　電子通信学会全国大会予稿集 805 昭和44年10月

1、フォッカプランク方程式を用いた周波数同期ループの解析　電気四学会連合大会予稿集 2411 昭和45年3月

1、振幅が一定でない位相同期ループの解析　電気四学会連合大会予稿集 2414 昭和45年3月

1、カルマンフィルタを用いたPLLシミュレーション　電子通信学会全国大会予稿集 1177 昭和45年8月

1、ディジタルICを用いた発振器の解析　電子通信学会全国大会予稿集 771 昭和45年8月

1、Tan^{-1}の入出力特性を持った発振器の一考察　電子通信学会全国大会予稿集 962 昭和46年4月

（主論文のうち未公表のものなし）

目　　　次

内容梗概

第1章　緒　　論 ……… 1

第2章　tan^{-1} の入出力特性を持った発振器 ……… 8

2.1　緒　　言 ……… 8

2.2　回路解析 ……… 10

2.2.1　基礎方程式の誘導 ……… 10

2.2.2　基礎方程式の一般的性質 ……… 14

2.3　一般化した *Van der Pol* の式の解析 ……… 16

2.3.1　共振回路の Q が大きい発振器 ……… 16

2.3.2　共振回路の Q が小さい発振器 ……… 23

2.4　バイアスを考慮した発振器 ……… 26

2.4.1　シングル増幅器による発振器 ……… 26

2.4.2　*Push-Pull* 増幅器による発振器 ……… 34

2.5　遅延回路を含む発振器 ……… 37

2.6　保存系の振動 ……… 42

2.7　多安定マルチバイブレータ ……… 43

2.7.1　双安定マルチバイブレータ ……… 43

2.7.2　3安定マルチバイブレータ ……… 45

2.8　結　　言 ……… 47

第3章　飽和特性を考慮した2周波発振器 ……… 50

3.1　緒　　言 ……… 50

3．2　2周~~板~~波発振回路の解析 ……………………………… 51

3．3　小振幅動作の解析 ……………………………… 54

3．4　大振幅動作の解析 ……………………………… 57

3．5　結　　言 ……………………………… 61

第4章　位相同期ループによる発振器の同期 ……………………………… 64

4．1　緒　　言 ……………………………… 64

4．2　フォッカ・プランク方程式による一般的な位相同期ループの解析 … 66

4．2．1　基礎方程式の誘導 ……………………………… 66

4．2．2　振幅一定の信号に対するループの振舞 ……………………………… 70

4．2．3　カルマンフィルタによるPLLの計算機シミュレーション …… 81

4．3　振幅変調を受ける信号に対するループの振舞 ……………………………… 84

4．3．1　ループの解析 ……………………………… 84

4．3．2　平均同期時間について ……………………………… 89

4．3．3　振幅復調器の解析 ……………………………… 90

4．4　結　　言 ……………………………… 93

第5章　結　　論 ……………………………… 94

謝　　辞 ……………………………… 97

記　　号 ……………………………… 98

文　　献 ……………………………… 101

付　　録 ……………………………… 112

内　容　梗　概

本論文は，システムの入出力特性を非線形領域にまで広げた自律系の非線形発振器と非自律系の問題については位相同期ループによる同期の問題に関して，筆者が防衛庁技術研究本部オ3研究所に入所以来の研究の成果と，大阪大学院工学研究科（通信工学専攻）在学中（昭和42年4月～44年3月）に行なった研究の成果をまとめたものである。

第1章においては，従来行なわれてきたこの種の研究概要を系統的に記述し，本研究の関連性ならびに意義を述べ，本研究の必要性を明らかにし，位置づけを行なった。

第2章では，真空管，トランジスタ，ディジタル*IC*等の能動素子の入出力特性を逆三角関数 tan^{-1} で近似して，多安定のマルチバイブレータを含む各種の非線形発振器を表現できるところの2階の非線形常微分方程式を求めた。

Q（尖鋭度）の高い発振器では，Q，増幅器の利得，増幅器の入力部にある直流バイアスと増幅器の遅延特性の影響についてボゴリューボフ・ミトロポリスキーの漸近法等を用いて，それ等発振器の自励発振条件，やわらかい発振条件，かたい発振条件，発振振幅，発振角周波数等を求めることによりそれらの振舞を調べ，さらに発振周波数の離調について考察を行なった。漸近法で求めた解については，計算機による*Runge* − *Kutta*数値解析法の結果と比較検討した。

多安定マルチバイブレータについてはおもに双安定，3安定マルチバイブレータの特異点の性質について調べ，ループのパラメータの決定について検討を行なった。計算機による数値解析により位相面において軌跡の振舞を調べた。

第3章では，2周波発振器について考察を行った。 理論的解析はおもに，小振幅動作については摂動法を，大振幅動作については漸近法，近似双記述関数を用い，発振条件，解の振幅の安定性，発振に優先権のあることなどを調べた。小振幅動作の場合は特別の仮定をおけば，フーリエ解析が可能になり，オ1近似解が求まり，その結果，従来から良く知られている*Var der Pol*の結果の一般化であることがわかった。

第4章では，位相同期ループによる発振器の同期を考察した。位相同期ループには種々の問題，種々の解析方法があるが，ここでは信号はランダムプロセスによって振幅，周波数変調されている。そして平均値0の白いガウス形雑音が重畳すると仮定し，システムを一般的に表わすベクトル・マトリックス微分方程式の変数は，マルコフプロセスと仮定でき，その仮定のもとでは，その微分方程式はフオッカ・プランク方程式を用いて解析することができる。定常状態を仮定すると位相同期ループの一番興味ある位相誤差についての確率密度関数が一次のループの場合は厳密にそして高次のループの場合には近似式が求まった。そしてシステムのパラメータと上で述べた位相誤差との関係を調べた。

振幅が一定の信号と重畳雑音との位相同期ループによる同期の問題は，ループのSNRが高いときには近似的にカルマンフィルタの特別な場合となり，リカッチ方程式を満足するときループは最適化される。2次ループの場合について計算機を用いてシミュレーションを行ないフオッカ・プランク方程式で求めた近似式との検討を行なった。

第5章では，本論文の総括的な締め括りであって，本研究によって得られた結論の記述を行なった。

第 1 章　　緒　　論

無線通信の著るしい進歩の中で，宇宙通信はまた一際華やかである。この宇宙通信あるいはテレメータ等の受信機で，位相同期ループを使った復調器（位相同期復調器）が広く使用されるようになって久しい。位相同期ループ（PLL）は従来のリミッタディスクリミネータ方式に比べてスレッシホールドが改善されるという理由のために使用されるようになったのであるが，このPLLはウィーナ理論やカルマンの最適推定の理論によって最適ループの一種に非常に近いということが理論的に示されて，復調器として優れたものの一種であることがわかったことが，PLLが広く使用されるようになった一因であると思われる。無線通信における変復調の問題と最適推定における問題とを併せて考えて見るとき信号源である送信側と信号処理部である受信機は密接な関係がある。PLLをモジュレイショントラッキングで使用するときは，受信信号にはフェージングやドップラがかかっていることや発振器のドリフト等のために信号にスペクトルの広がりを持つことが最終的には受信機の限界である最小受信感度を定めてしまう。とくにマイクロ波の通信では発信器の信号のスペクトルの広がりが問題になり[1]，送信機と受信機の両者の改善によって，トラッキングフィルタを使ったシステムの高性能化が期待される。

以上の観点からこの論文ではおもに発振器とPLLに関する問題について論じる。

非線形振動論では自律系と非自律系に分け，自律系では自励振動系を，非自律系では強制振動を論ずることが多い。この論文では自律系では駆動関数を含まないでできるだけ一般的な場合について，非自律系では従来からの調

ゆる強制振動ではなく，PLL を用いた同期の問題について述べる。

この論文作成に当って行なった研究について，方法論的に述べれば次のようになるであろう。

(1) 与えられた回路，システムの動作，物理現象がある。

(2) 非線形領域まで考慮して，回路，システムの解析可能な非線形微分方程式を立てる。

(3) 非線形方程式を解く。

(4) 解かれた結果から与えられた回路，システムの動作，物理現象をどれだけ説明できたか。

この論文では，（1）については筆者等の実験結果もあるが，先輩諸兄の仕事に負う所が多く，おもに（2）～（4）のサイクルを繰り返し行なった結果によるものが多い。この論文に現われる非線形微分方程式の多くは筆者のオリジナルであり，解き方については多くの数学者によって証明されている結果を用いて式の誘導を行なっている。

１．１　tan^{-1} の入出力特性を持った発振器

非線形振動の研究は，ド・フォレによる１９０６年の三極真空管の発明以前から，例えばレイレイ卿等[(2),(3)] によってすでに研究されている。電子技術を使った反結合の自励振動系の発振器は三極真空管の発明以後だと思われるが，この章で取扱う問題の原点を三極真空管を使った反結合発振器に求めることができるほど古典的でそして重要な問題である。１９２０年 *Van der Pol* は，*Van der Pol* の微分方程式は小振幅動作の時，非常に良く理論と合うことを示している。*Van der Pol* の微分方程式は三極真空管の入出力特性を３次式で近似していることが特徴である。以後多くの非線形振動論に

関する著書(4)〜(14)が出版されたが自励振動系の問題についてはいずれも*Van der Pol*の微分方程式が原点になっている，発振器の問題を非線形問題の立場から論ずる時，大別して物理現象の説明に論点を置く工学的方法(15)〜(33)と与えられた微分方程式を解くという数学的方法，(34)〜(36)の２種類の研究の進め方があるように思える。本研究はおもに前者の進め方をとる。

トンネルダイオード等の負性抵抗素子を除いて，真空管，トランジスタ，ディジタル*IC*等の素子を使った発振器の説明に小振幅動作の場合を除いて，*Van der Pol*の微分方程式だけで説明するのは大変無理がある。新たに定性的にも，定量的にも物理現象を良く示すことのできる微分方程式が作られ，理論的に解析され工学的意味での考察をされることが望まれる。例えば，トランジスタ発振器の非線形について研究した*Hester*(30)の論文で示されている微分方程式は，*Van der Pol*以来の研究につながるものであるが，注目している点が異なるために非常に解きにくい微分方程式になっている。そしてこの方法では共振回路の中心からの離調もほとんど調べられたし，非線形振動論や自動制御理論で得られている定性的な結果とも重なり合わない。

２安定，３安定のマルチバイブレータについては(32)(33)があるが，いずれも１階の微分方程式か２階の線形微分方程式に注目して解いている。したがってトランジスタの*ON*→*OFF*，*OFF*→*ON*の時の過渡特性は調べられない。そして自動制御理論等で良くおこなう，安定，不安定に関する理論も応用しにくい。

筆者は能動素子の入出力特性を逆三角関数 tan^{-1} で近似して種々の発振器を解析したが，この研究で取扱った微分方程式はほとんど筆者の提案したものであるので，発振器の研究のこのような工学的な取扱い方については類

似の研究の例をほとんど他に見ない。しかしその数学的側面について，ボゴリューボフ，ミトロポリスキー，*Bendixson*，*Liapunov* 等の数学者の業績に負うところが多い。

この研究の発端は文献[23]に示すようにディジタル *IC* を使った発振器の実用化にあった。ディジタル *IC* はリニア *IC* に比べて価格は安く，性能も安定している。[37]〜[39] 事実，ディジタル *IC* を用いた水晶発振器で－80℃〜＋80℃まで発振する例[27]が報告されている。

電子回路技術の一つの方向として従来アナログ量で信号処理していた所を，ディジタル化して信号処理をしようとする傾向がある。[38] 筆者等の行なった実験[23]でも発振器の出力として2相のパルス出力が得られ，これらディジタル化の要求にそうものである。

ディジタル *IC* を用いた発振器の実用化に際し，最小限必要と思われる理論的側面については筆者の知り限りにおいてはほとんど知られていなかった。筆者等の研究中とほとんど時を同じくして，*Scott*[15] が筆者等の考えていた微分方程式とまったく同じ微分方程式を発表し，その微分方程式は真空管やトランジスタを使用した発振器の大幅動作の説明に大変便利であることとループの利得が1よりわずかに大きく，そして共振回路の Q が大きい場合について第1近似解を示したにすぎない。同じ微分方程式について *Mulholand*[16] が1つのパラメータで示される限界について考察をした。しかしこれらの発振器の大振幅動作の説明としては，はなはだ不十分なものである。したがって *Scott* も *Mulholand* も大振幅動作については解いていない。

筆者は *Scott* が求めた微分方程式を筆者も同時に独立に求めたのであるが，この微分方程式よりもさらに入力の直流バイアスの影響，能動素子の遅延特性を含む，より一般化した微分方程式を求めている。そしてそれらの微

分方程式の大幅動作の解析の結果，すでに周知の物理現象の理由づけが行なわれ，そしてそれらの回路の設計法についてもかなり明確になった。

この章ではさらに[(37)〜(59)]の文献をおもに参照した。

1．2　位相同期ループによる発振器の同期

発振している発振回路に周期的で十分大きな振幅の外部入力がある場合，その二つの周波数の差が十分小さければその発振器の位相に同期されるであろう。このような現象を同期現象と呼び，このときの周期的外部入力のことを同期信号と呼んでいる。同期の問題は非線形振動論における強制振動（非自律系）の問題の中の重要なテーマの一つである[(60)〜(62)]。

同期している発振器と外部入力との位相誤差に関する微分方程式は文献[(60)]が示すように一次の位相同期ループの位相誤差に関する微分方程式と酷似している。ブロックダイアグラム的に2種類の同期現象を分類すれば，一つは開ループによる方法であり，いま一つは閉ループによる方法である。それぞれ目的，用途に応じて，取捨選択すれば良い。このように同期に関する2つの方法はいずれも重要であるが，高級なシステムに現在使われ，将来も使われるであろう。*PLL* について，この論文では取扱う。

PLL の応用はコヒレント・トランスポンダ，周波数復調器，周波数てい倍と分周器，*PCM* 信号のビット同期等があり，身近には白黒テレビジョンの水平同期，カラーテレビジョンの色復調回路がある[(63)(64)]。文献(65)，(66) に示す筆者の特許等も *PLL* の利用技術の一つである。*PLL* を使用した受信機はほとんどスーパーヘテロダイン方式を用いてより複雑になる傾向があるが，それらのもっとも重要な利用は人工衛星からの非常に弱い信号を受けることにある。*PLL* の宇宙利用は最初のアメリカの人工衛星の打上

げと共に始まり，多くの学者の学問的研究への興味を呼び起こした。 *PLL* についての記述は早や1932年にド・ベルシーズ[67] によって出版されており決して新しい技術ではない，*PLL* は従来のリミッタディスクリミネータ方式に比べてスレシホールドが改善されるという理由のために宇宙通信あるいはテレメータ等で広く使われるようになってから，*PLL* に関する研究論文も急速に数を増した。

PLL の問題を大別すると次のようになろう。

(1) 周波数同期ループとの比較[68]～[73]

(2) 特種なループ [74]～[78]

(3) 同期引込み [79]～[80]

(4) 同期はずれ [81]～[102]

(4)の同期はずれの問題については，ほとんど信号に雑音が重ね合わされる場合について解析されている。そしてそれらの解析方法についても古典的な方法[89]～[91] とベクトル空間を用いマルコフプロセスを仮定した状態変数による解析[93]～[102] と分けることができよう。それ等の論文は通信の問題として重要なスレシホールド附近の信号対雑音比（ *SNR* ）の問題を扱っている。

PLL の解析方法は文献に載げたように多くあるが，本論文ではマルコフプロセスがフォッカ・プランク方程式を満足するというすでに数学的に証明されている事実から出発している。本論文に先立つ関連の文献について述べることによって本研究の意義と位置づけを行なう。

この研究と比較的類似していると思われる論文について言及する。１次と２次のループについて研究を行なった *Viterbi* [84][93] は *F・P* 方程式を用いてループの振舞について詳細に調べた。同様に *Linsey* [100]～[102]

は変調を受けていない一般的な系について同様の手法を用いて解析を行なった。そして実験結果についても非常に良く合致することが確かめられている。そこで筆者はこれらの研究よりもさらに一般化した変調を受けている信号のモデルについて解析を行ない，最適化の問題についてもすでに解かれている*Kalman* (103) の結果等を比較できるように工夫した*Snyder* (104) のモデルで解析を行ない，ループのスレッシホールが何で決まるかについて，そしてスレッシホールド附近の挙動について明らかにした。しかし手法的には条件付期待値の近似法等で，*Viterbi* (93) の方法にどちらかといえば近いように思える。

位相同期ループの問題は最終的には最適化の問題になるであろう。*F*・*P*方程式は事前確率であるためにシンセシスの問題になりにくい。特殊な例（１次ループ）については厳密解が求まるので解ける例もあるが，一般には何ともいえない。しかし，線形と仮定して*Ricatti* 方程式から受信系を設計したときの非線形によるペナルティは*F*・*P*方程式を解くことによって得た近似式でおおよそ見当はつく。

さらに次のような文献（105）～（115）をこの論文作成にあたって参照した。

第２章　　$\tan^{-1}$ の入出力特性を持った発振器

２．１　緒　　言

能動素子（真空管，トランジスタ等）の入出力特性を tan^{-1} で近似したオートノーマスな発振器の解析がさかんに発表されている(15)〜(26)。それは，その関数の微分が容易であることに一因していると思われる。文献(15)では入力電圧対出力電流の入出力特性を，そして(19)〜(26)では入力電圧対出力電圧の入出力特性を tan^{-1} で近似しているが，これは解析するうえに本質的に異なる問題ではない。そしてそれら以外の入出力特性の組合わせでも発振器は作られるであろう。
真空管やトランジスタ等を tan^{-1} で近似する長所は文献(15)でも指摘するように，大振幅動作の解析の便利さにあると思える。それらの文献が解析の困難さを指摘しているが，それは $tan^{-1}x$ の巾級数展開が無限に続くことに一因していると思える。

能動素子の入出力特性を tan^{-1} で近似した発振器から作られる微分方程式が *Van der Pol* を含む(15)からといっても，非常に理想化した式である。文献(24)に *Van der Pol* の微分方程式を一般化した式として，振幅と周波数の第２近似解が示されているが，例えば水晶振動子の Q（尖鋭度）が 10^6 程度あることを考えると(29)，文献(25)で示されているバイアスの影響を考慮しても，周波数の離調項は $1/Q^2$ の次数で利く量であるから，通常の場合ほとんど無視できる量である。したがって発振周波数の自然周波数からの離調を問題にするかぎり更に高次の近似解を求めるよりは，第１近似解で周波数の離調項を含むような，より実際の電子回路に近い一般化したブロックダイアグラムを求めることの方がより現実的であると思える。しか

し非保存系の高調波解析では第2近似解を求めないと高調波の関係が調べられない場合があるが，tan^{-1} で近似した発振器の第2近似解が求まるのは，さきにも指摘した理由のために，例外的にしか存在しないであろう。

無安定，単安定，多安定の3種類のマルチバイブレータはいずれも回路はよく似ている。一つの運動方程式からこの3種類のマルチバイブレータを説明するために入出力特性を tan^{-1} で近似することは解析の上に大変便利である。マルチバイブレータの理論的背景を調べるときは，どうしてもその運動方程式の解析が必要になってくる。しかし，多くの解析が静的であるように，その運動方程式を解くということは大変に困難である。発振器の解析が主にリミットサイクルを求めるのに対し，多安定マルチバイブレータでは不安定領域から安定領域への軌跡を求めることになろう。双安定マルチバイブレータと同様に，プッシュプル増幅器のクロスオーバ歪を利用した三安定のマルチバイブレータを考察している。しかしマルチバイブレータについては効果的な解析方法が比較的少ない。

この章を簡単に要約すると，真空管，トランジスタ，ディジタル IC 等の能動素子の入出力特性を逆三角関数 tan^{-1} で近似して，多安定のマルチバイブレータを含む各種の非線形発振器を表現できるところの2階の非線形常微分方程式を求める。

Q（尖鋭度）の高い発振器では，Q，増幅器の利得，増幅器の入力部にある直流バイアスと増幅器の遅延特性の影響についてボゴリューボフ・ミトロポリスキーの漸近法等を用いて，それ等発振器の自励発振条件，やわらかい発振条件，かたい発振条件，発振振幅，発振角周波数等を求めることによりそれらの振舞を調べ，さらに発振周波数の離調について考察を行なった。漸近法で求めた解については，計算機による $Runge-Kutta$ 数値解析法の結

果と比較検討する。

多安定マルチバイブレータについてはおもに双安定，3安定マルチバイブレータの特異点の性質について調べ，ループのパラメータの決定について検討を行ない，計算機による数値解析により位相面において軌跡の振舞を調べる。

2．2　回路解析

2．2．1　基礎方程式の誘導

この章で取扱う発振器の基本回路を図2．1のように反結合形の集中定数回路と定める。

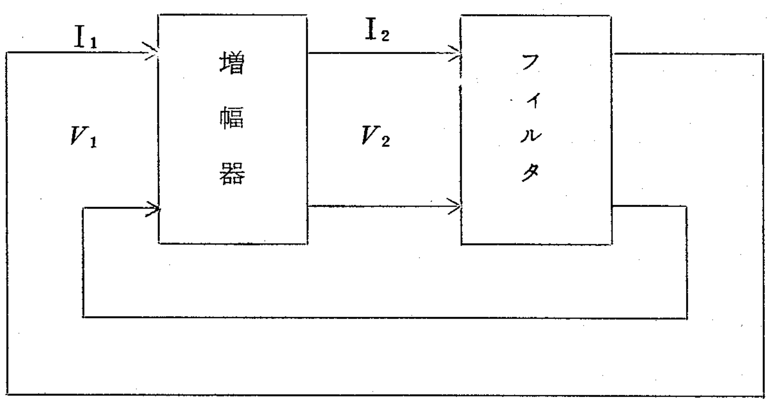


図2．1　一般的な発振回路

図2．1の増幅素子をメモリーレス（増幅器の内部にエネルギー蓄積素子が無い）と仮定し，ハイブリッド・マトリックスで表わすと次のように示すことができよう。

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

増幅素子の入力インピーダンスを無限大出力インピーダンスを0と仮定すると式(2.1)のg_{11}とg_{22}は

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= 0 \\ g_{22} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

となる。そして$g_{12}=0$(一方向性)をさらに仮定すればg_{21}は入出力の電圧増幅率になる。そして電圧増幅率g_{21}を$Kf(\cdot)$で近似する。$f(\cdot)$は入力xの時出力が$f(x)$であることを示す。図2.2に等価ダイアグラムを示

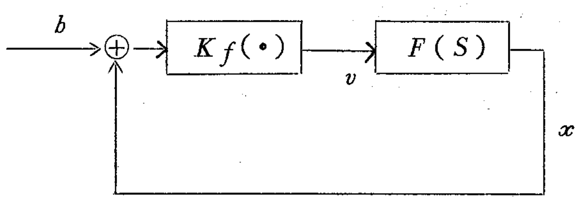


図2.2　発振器の機能図

す。ただしbは入力にある直流バランスである。

帰還回路に入るフィルタを図2.3のように定める。2個の抵抗R_1，R_2と1個のインダクタンスLと1個のキャパシタンスCにより構成されている。マルチバイブレータを最も簡単な2階の非線常微分方程式で表わそうとすれば，このようなフィルタになるであろう。フィルタの伝達関数は図2.3から

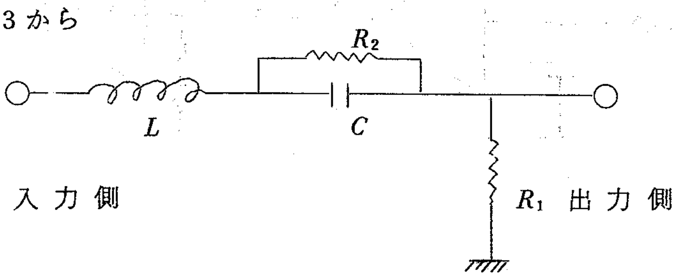


図2.3　フィルタ

$$F(S) = \frac{CR_1 R_2 S + 1}{LCR_2 S^2 + (L + CR_1 R_2) S + R_1 + R_2} \qquad (2.3)$$

図２．２と図２．３から回路の基礎方程式は

$$LCR_2 \ddot{x} + (L + CR_1 R_2 - KCR_1 R_2 f'(x)) \dot{x}$$
$$+ (R_1 + R_2) x - Kf(x) = 0 \qquad (2.4)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \qquad (2.5)$$

式（２．４）は次のように変形できる。

$$\ddot{x} + \varepsilon \left[1 - k_f{}'(x) \right] \dot{x} + x - rf(x) = 0 \qquad (2.6)$$

ただし

$$\omega_0^2 = \frac{LCR_2}{R_1 + R_2}, \qquad r = \frac{K}{R_1 + R_2}$$
$$\varepsilon \omega_0 = \frac{L + CR_1 R_2}{R_1 + R_2}, \qquad k = \frac{KCR_1 R_2}{L + CR_1 R_2} \qquad (2.7)$$

式（２．６）で示される発振回路は図２．４の機能図でも示すことが出来る。

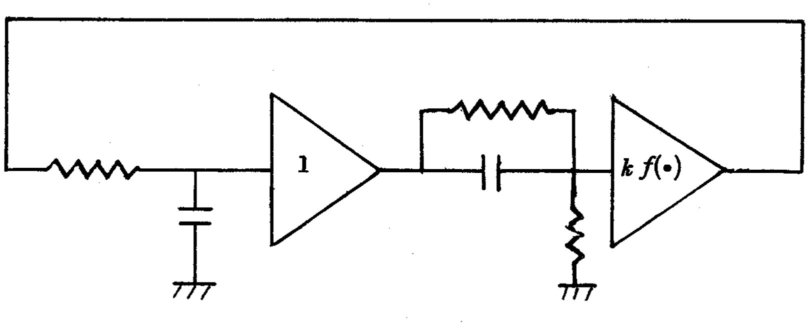


図２．４　　発振器の機能図

能動素子の出力の信号を v とすると図２．２から

$$v = K\tan^{-1}(\ vF(s) + \ b\ ) \tag{2.8}$$

フィルターの伝達関数を

$$F(s) = \frac{\varepsilon S + r}{S^2 + \varepsilon S + 1} \tag{2.9}$$

式（２．８）と（２．９）から

$$K(\varepsilon S + r)v = (S^2 + \varepsilon S + 1)\tan v + (S^2 + \varepsilon S + 1)b \tag{2.10}$$

式（２．１０）を変形とすると

$$\ddot{v} + 2\sin v \cdot \dot{v}^2 + \varepsilon\dot{v} - K\varepsilon\cos^2 v\,\dot{v} - Kv\cos^2 v \cdot v$$
$$+ \sin v\cos v + b\cos^2 v = 0 \tag{2.11}$$

式（２．１１）を解析的に解くことは大変困難である。しかし実際の場合には発振器の出力として入力の波形よりも出力の波形の方が重要である場合もあろう。そこで式（２．１１）を直接解すことはしないで，式（２．６）を解いて次に式（２．８）について考察する。

式（２．１），（２．２）で行なった仮定は理想的な演算増幅器では正当化されるであろう。

多くの発振器では能動素子が１個か２個で構成される場合が多い。この場合でも入出力の関係を４端子パラメータの４個のうちの１つで近似出来るような場合では，その発振器は式（２．６）のような微分方程式で表わされるであろう。トランジスタ等を複雑な等価回路で示し，その等価回路から複雑な微分方程式を導くことは出来るだろう。しかし現在の非線形振動論における研究段階から見て，その行き方は何ら情報を得られず，かえって得策でない。ここでは比較的容易な問題から段々に高級な回路へと高めて

行く。

2.2.2 基礎方程式の一般的性質

非線形微分方程式は一般には厳密解を得られないのでその解を調べるとき，定性的な方法と定量的な方法で調べることが多い。

定性的な方法としては，特異点の性質を特性方程式や *Liapovnoff* の定理によって，安定，不安定を調べる。リミットサイクルの存在については *Bendixson* の定理，*Poincare* の定理(10)，*Levinson*－*Smith*(8) の結果等がある。まずこれらの定理によってその微分方程式の諸性質を十分知る必要がある。多くの非線形微分方程式は厳密解を得られない。近似解ですら困難な場合が多い。このような場合でも工学上の発振条件とか不安定とかいう概念がそれらの定理ではっきりするだけでも設計法の一部をなすこともあろう。

定量的方法としては厳密解を得られる場合を除いては，図式解法，数値解析法，近似的に解析的な方法（摂動法(5)，平均法(6)，漸近法(7)，*Reversion* 法(34)(35)）等がある。この論文ではおもに図式解法については等傾線法を，数値計算法については *Runge*－*Kutta* 法を，近似的に解析的な方法についてはおもに漸近法を用いて解析する。

以下比較的良く出て来る関係式について必要最小限だけ示す。

式（2.6）から $y=\dot{x}$ として，式を変形する。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\varepsilon\left[1-kf'(x)\right]y-x+rf(x)}{y} \qquad (2.12)$$

したがって特異点は

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x - rf(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

の関係から求まる。式(2.13)から求まる特異点の安定，不安定がわかれば，どうゆう種類の発振器か，おおよそ区別することができる。しかし直接法と呼ばれるリアプノフの第2方法等の判別法があるが実際の具体例を解くためには必ずしも容易ではない。微分方程式がリミットサイクルを持たないための判別法(十分条件)として，しばしば *Bendixson* の第1定理が利用される。文献(52)と定義，表記法を同一にとれば，

$$\left.\begin{aligned} Q(x, y) &= -\varepsilon\left[1-kf'(x)\right]y - x + rf(x) \\ P(x, y) &= y \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

したがって判別式 D は

$$D = \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = -\varepsilon\left[1-kf'(x)\right] \tag{2.15}$$

となって，あらゆる x の値に関して式(2.15)が定符号を持てば，式(2.6)はリミットサイクルを持たないことがわかる。

ループの大局的な振舞を知るために，しばしば等傾線法が用いられる。式(2.2)から

$$y = \frac{rf(x) - x}{\dfrac{dy}{dx} + \varepsilon\left[1-kf'(x)\right]} \tag{2.16}$$

となり dy/dx =一定のグラフを xy 位相平面上に画くと等傾線が得られ，図式解法として便利な方法であり，ディジタル計算機の *Runge-Kutta* 法の解の確認にも役立つ。

以下ここで用いられる解析方法の多くは文献(7)で示される漸近的方法

に負うところが多いが，$a\ \cos\ \omega t$の信号に対する非線形能動素子の出力のフーリエ級数に注目して解析しているので，自動制御でよく行なわれる記述関数法と概念的には密接な関係があるだろう。

2．3　一般化した*Van der Pol*の式の解析

2．3．1　共振回路のQが大きい発振器

真空管，トランジスタ，ディジタルIC等の能動素子の入出力特性を$k\ \tan^{-1}$で近似する。文献（23）では筆者等は入出力特性を$2A/\pi\cdot\tan^{-1}(\pi\ kx/2)$と近似したが，$k\ \tan^{-1}$で近似しても一般性は失わない。図2．3で$R_2$を無限大と仮定すると式（2．7）から$r=0$となる。式(2.3)からフィルタの伝達関数は

$$F(S)=\frac{R_1\ CS}{LCS^2+R_1\ CS+1} \tag{2.17}$$

式（2．6）から微分方程式は

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(1-\frac{k}{1+x^2}\right)\dot{x}+x=0 \tag{2.18}$$

ただし

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC} \qquad , \qquad \varepsilon\omega_0=\frac{R_1}{L} \tag{2.19}$$

ω_0は共振周波数とか自然周波数とか呼ばれるものである。式（2．18）で示されるような具体的な発振回路は数多くあるだろう。ディジタルICを使った発振器の1例を図2．5に*Scott*(15)のモデルを図2．6に示す。2．5と図2．6から共振回路のQ（尖鋭度）は

$$Q=\frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.20}$$

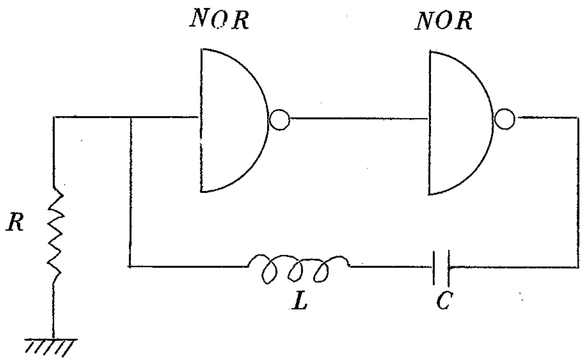


図２．５　　DICを使った発振器

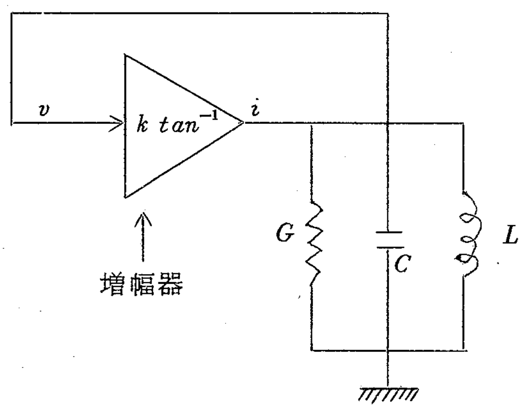


図２．６　　発　振　回　路

であるからQは式（２．１８）のεの逆数である。(45)

$$\varepsilon = \frac{1}{Q} \tag{2.21}$$

発振条件について考察をする。微分方程式（２．１８）の特異点は式（２．１３）から位相平面上の原点（０，０）である。発振を開始するためには特異点は不安定でなければならない。リアプノフ関数（特異点を除いて正定の関数）を次のように定める。(53)

$$V = y^2 + x^2 \tag{2.22}$$

式(2.22)の時間 微分は，式(2.18)の関数を用いると，

$$\dot{V} = -\frac{2\varepsilon y^2}{1+x^2}\left[x^2 - (k-1) \right] \tag{2.23}$$

$k > 1$ ならば原点の近傍で $\dot{V} > 0$ となり，リアプノフの定理により原点は不安定である。$k < 1$ ならば原点の近傍で $\dot{V} < 0$ となり，リアプノフの定理により原点は安定である。したがって自励条件は，

$$k > 1 \tag{2.24}$$

解
この場合附録Ⅱからただ一つの周期能をもつ。

次に発振を仮定してその振幅と周波数について考察する。Qは大きく $\varepsilon \ll 1$ と仮定し，文献(7)の漸近法を用いて解析を行なう。附録 I から $F^{※}(x)$ は

$$F^{※}(x) = k\ tan^{-1} x - x \tag{2.25}$$

附録 I と同様に $x = a\ cos\ \phi$ とおいて式(2.25)に代入してフーリエ級数に展開する。$k\ tan^{-1}(a\ cos\ \phi)$ は図2.2の能動素子の出力である。出力のフーリエ級数展開の可否が漸近法による解析の成否を分けるのであるが，公式集[47]から容易に $tan^{-1}\ a\ cos\ \phi$ のフーリエ級数展開が可能である。

$$tan^{-1}\ a\ cos\ \phi = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^{2n-1} cos(2n-1)\phi \tag{2.26}$$

附録 I から第1近似解を $x = a\ cos\ \phi$ とおくと a と ϕ は次の関係を満足しなければならない。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{\varepsilon}{2}\left[2k\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)-a\right]\\ \frac{d\phi}{dt}&=1\end{aligned}\right\}\tag{2.27}$$

式（２．２７）から過渡解が求まるわけであるが，その積分は非常に困難である。式（２．２７）で $da/dt=\Phi(a)$ とおき，$\Phi(a)$を a で微分する。

$$\Phi'(a)=-2+\frac{2k}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{1}{a}\left(-a^2+2k\sqrt{1+a^2}-2k\right)\tag{2.28}$$

$\Phi(a)=0$ の根を a とすると

$$\left.\begin{aligned}a&=2\sqrt{k(k-1)}\\ a&=0\end{aligned}\right\}\tag{2.29}$$

の２根が得られる。$a=2\sqrt{k(k-1)}$ を式（２．２８）に代入すると

$$\Phi'(a)=\frac{1-k}{k}\tag{2.30}$$

となり式（２．３０）から $k>1$ のときは式（２．３０）は $\Phi'(a)<0$ となり，附録 I から $a=2\sqrt{k(k-1)}$ の振幅は安定である。$a=0$ のときは，

$$\Phi'(a)=k-1\tag{2.31}$$

となり，$k>1$ の時は $\Phi'(a)>0$ となり振幅は不安定である。リミットサイクル（定常解）を仮定すると第１近似解はもとの変数にもどして

$$x=2\sqrt{k(k-1)}\ \cos\omega_0 t\tag{2.32}$$

式（２．３２）の高調波の各成分は附録 I と同一の定義と表記法を用いると

$$\left.\begin{aligned}F_n^{※}(a)&=\frac{(-1)^{n+1}2k}{2n-1}\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^{2n-1}\quad n\geq 2\\ F_1^{※}(a)&=2k\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)-a\end{aligned}\right\}\tag{2.33}$$

第２近似解をつくるために，附録 I から

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\phi)\cos\phi\sin\phi\, d\phi = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(a\cos\phi)\cos^2\phi\, d\phi = \frac{dF_1^{※}(a)}{da}$$

なることを考察すれば，解を次のように仮定することが出来る。

$$x = a\cos\phi + \varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nF_n^{※}(a)\sin n\phi}{n^2-1} \tag{2.34}$$

ここに a と ϕ は次式

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2}F_1^{※}(a) \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1+\varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

で決定される $B_2(a)$ は次の形で示される。

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a}F_1^{※}(a)\frac{dF_1^{※}(a)}{da} - \frac{1}{2a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2F_n^{※2}(a)}{n^2-1} \tag{2.36}$$

第2近似解は附録1から同様にリミットサイクル（定状解）を仮定すると，角周波数，振幅はそれぞれもとの変数にもどして

$$\omega = \omega_0\left[1-\frac{\varepsilon^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{2n}\right] \tag{2.37}$$

$$x = 2\sqrt{k(k-1)}\cos(\omega t+\theta) + \frac{\varepsilon k}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\sin(2n+1)(\omega t+\theta) \tag{2.38}$$

ただし $k>1$，$\varepsilon\ll 1$ である。ω_0 は自然周波数そして θ は定数である。式

(2.18)で $|x| \ll 1$ ($k \fallingdotseq 1$)を仮定すると $1/(1+x^2)$ は容易に級数展開でき，[48] 次のように変形できる。

$$\ddot{x} - \varepsilon(k-1)\left(1-\frac{x^2}{k-1}\right)\dot{x} + x = 0 \qquad (2.39)$$

となりVan der Pol の微分方程式になる。式(2.39)において

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{x}{\sqrt{k-1}} \\ \mu &= \varepsilon(k-1) \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

と変数変換すると式(2.39)はVan der Pol の標準形になる。式(2.40)と $k \fallingdotseq 1$ の条件から角周波数，振幅は式(2.37)，(2.38)，(2.40)から容易に求まる。

$$\omega \fallingdotseq \omega_0\left(1-\frac{\mu^2}{16}\right) \qquad (2.41)$$

$$X \fallingdotseq 2\cos(\omega t+\theta) - \frac{\mu}{4}\sin 3(\omega t+\theta) \qquad (2.42)$$

となり良く知られた結果[4][5] である。$k \gg 1$ のときは式(2.37)，(2.38)はそれぞれ

$$\omega \fallingdotseq \omega_0\left(1-\frac{\varepsilon^2}{8}\right) \qquad (2.43)$$

$$x \fallingdotseq 2k\cos(\omega t+\theta) + \frac{\varepsilon k}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\sin(2n+1)(\omega t+\theta) \qquad (2.44)$$

式(2.43)，(2.44)の等号が成立するときは能動素子の入出力特性がステップ関数のように折線特性をもっているときに相当する。そのとき

振幅に関する微分方程式は

$$\frac{d\,a}{d\,t}=\frac{\varepsilon}{2}(2k-a) \tag{2.45}$$

初期値を a' とすると式(2.45)の一般解は

$$x=\left[2k-(2k-a')e^{-\varepsilon\omega_0 t}\right]cos(\omega_0\ t+\theta) \tag{2.46}$$

式(2.46)は発振の立上りの限界を示している。そして振幅の過度応答は一次の LPF の場合と同じである。したがって振幅の応答の時定数から共振回路の Q を測定することができる。式(2.44)のひずみ率(高調波と基本波の実効値の比)は容易に

$$K_f=\frac{\varepsilon\sqrt{\pi^2-9}}{4\sqrt{3}}$$

$$=0.126\times\varepsilon \tag{2.47}$$

ただし π は円周率である。以上の結果から, *Van der Pol* の微分方程式の第2近似解からは第3高調波しか出てこないが, ここで用いた微分方程式の第2近似の解からは非常に多くの高調波が出て来る。これは文献(23), 写真3の方形波出力からも当然のことであろう。

電子計算機による精度の良い数値計算法として知られている *Runge－Kutta* 法を用いてシミュレーションを行なった結果の周波数特性を図2.7に示す。振幅については図2.8に示す。ただし理論値は式(2.38)の基本波の振幅成分 $2\sqrt{k(k-1)}$ を用いた。図2.9に式(2.38)を用いてループ利得による各高調波成分の変化を, 図2.10にループ利得によるひずみの変化を示す。ループ利得を大きくして行くにしたがって式(2.47)の値に近づく。

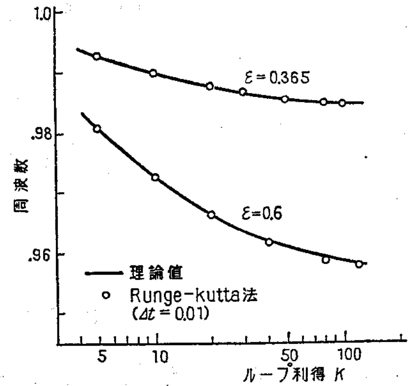


図２．７　ループ利得による周波数の変化

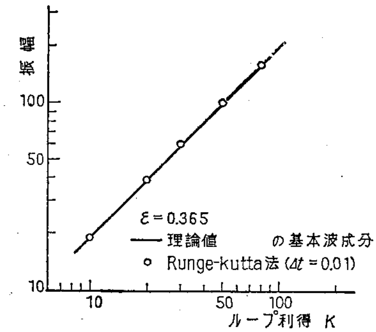


図２．８　ループ利得による振幅の変化

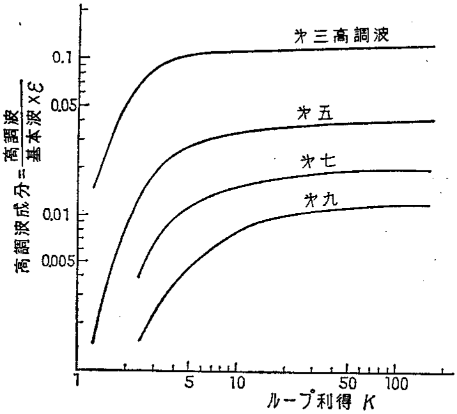


図２．９　ループ利得による高調波の変化

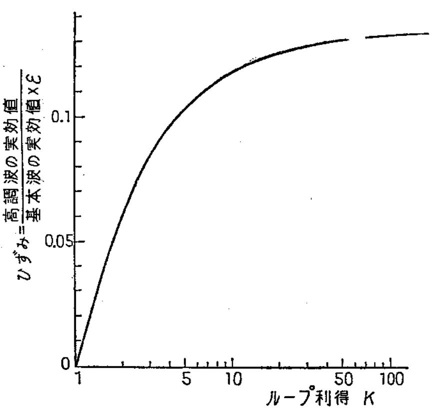


図２.１０　ループ利得による歪の変化

２．３．２　共振回路の Q が小さい発振器

図２．５の共振回路の Q が１に比べて十分小さく，したがって $\varepsilon \gg 1$ のときは通常，弛張発振器と呼ばれている。*Van der Pol* の式に対する *Rayleigh* の式[54]のように $dz/dt = x$ という変換を式（２．１８）にほどこすと微分方程式は

$$\ddot{z} + \varepsilon\,(\dot{z} - k\,\tan^{-1}\,\dot{z}) + z = 0 \qquad (2.48)$$

となる。ここで $z=\varepsilon\eta, \eta t=\varepsilon t$ と変数変換をし，式（2．48）を変形すると，

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d\dot{\eta}}{d\eta}=\frac{-\dot{\eta}+k\ \tan^{-1}\dot{\eta}-\eta}{\dot{\eta}} \tag{2.49}$$

となり $d\dot{\eta}/(\varepsilon^2\ d\eta)\doteqdot 0$ の附近で

$$\eta=-\dot{\eta}+k\ \tan^{-1}\eta \tag{2.50}$$

1例を図2．11に示す。図2．11上で a_1 から a_2 までの定積分を求める。

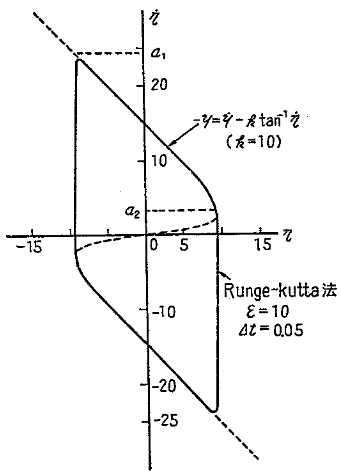


図2．11　マルチバイブレータの位相面軌跡

$$\tau=\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\eta}{\dot{\eta}}=\left|\ log\ \eta-\frac{k}{2}\ \frac{\eta^2}{\eta^2+1}\right|_{a_1}^{a_2} \tag{2.51}$$

式（2．50）は $\varepsilon\to\infty$ で漸近的でありそして誤差の評価としては ε^2 の項を省略しているので第1近似に相当する[(55)]。そして $K\gg 1$ と仮定すると図2．11から近似的に a_1，a_2 はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\doteqdot \pi\ k-\sqrt{k-1} \\ a_2 &\doteqdot \sqrt{k-1} \end{aligned}\right\} \tag{2.52}$$

となり式(2.51)に代入すると

$$\tau \doteqdot \log_e \frac{(\pi k - \sqrt{k-1})}{\sqrt{k-1}}$$

$$- \frac{k}{2} \log_e \frac{k\ (\pi k - \sqrt{k-1})^2}{(k-1)\left[1 + (\pi k - \sqrt{k-1})^2\right]} \tag{2.53}$$

もとの変数に戻して周期Tを求めると

$$T \doteqdot 2\varepsilon\tau \tag{2.54}$$

文献(15)にマルチバイブレータの1例として $\varepsilon = 10$, $k = 10$ の場合が載っておりRunge-Kutta法で解いた結果も同様に図2.12 から約33秒である。式(2.54) に上の条件で式(2.52),(2.53)の関係を使って数値計算をすると約27秒である。これは図2.12のほぼ垂直に跳躍する部分を積分していないから小さな値を示す。そしてさらに大きなε, kに対してはその近似式は一層正確になるであろう。εが大きいときは式(2.53)の中にkを含むために,

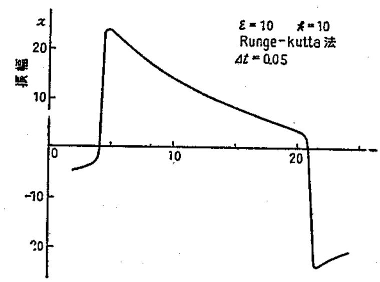


図2.12 マルチバイブレータの発振波形

式(2.53)から定性的にも周波数安定度の良いマルチバイブレータを作ることは難かしいということが理解できる。

2．4　バイアスを考慮した発振器

2．4．1　シングル増幅器による発振器

多くの発振回路では直流バイアスを安定化して，発振周波数の安定をはかっている。直流バイアスの影響の重要さは実際の回路では認められているが理論的には不十分な面が多い。

図2．5の回路で 図2．2 のように入力に直流バイアスがあると回路方程式（2．6）より

$$\ddot{x} + \varepsilon \left[1 - \frac{k}{1+(x+b)^2} \right] \dot{x} + x = 0 \qquad (2.55)$$

式（2．55）は位相平面上の原点（0，0）で特異点である。式（2．55）を状態方程式表示をすれば，

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\left\{ \varepsilon \left[1 - \frac{k}{1+(x+b)^2} \right] y + x \right\} \end{aligned}\right\} \qquad (2.56)$$

と定めるとリアプノフ関数（特異点を除いて正定の関数）をつぎのように定めることができる。

$$V = x^2 + y^2 \qquad (2.57)$$

式（2．57）の時間微分は式（2．56）から

$$\dot{V} = \frac{-2\varepsilon y^2}{1+(x+b)^2} \left\{ (x+b)^2 - (k-1) \right\} \qquad (2.58)$$

式（2．58）より，

$$|b| < \sqrt{k-1} \qquad (2.59)$$

ならば式（2．58）は原点の近傍で正定となり，リアプノフの第2方法により原点の近傍で不安定なることがわかる。 $|b| > \sqrt{k-1}$ のときは原

点の近傍で安定である。

つぎに発振した場合の振幅と角周波数について考察をする。附録 I と定義，表記法を同一にとると

$$F^{※}(a\cos\phi)=a\cos\phi+k\tan^{-1}(a\cos\phi+b) \tag{2.60}$$

漸近法によれば式（2．60）をフーリエ級数に展開しなければならないが，$b=0$ の場合については可能であるが，バイアスを含む一般化された場合についての解析はかなり困難である。そこで式（2．60）の a が $a\gg1$ すなわち発振器のループ利得が非常に大きい場合について考察する。$a\gg1$ の場合には $\tan^{-1}$ の入出力特性はほとんどステップ関係のような折線特性を持った階段関数になり，実験例[19] が示されている。バイアスによって $duty$ が変る矩形波のときは，式（2．60）のフーリエ級数展開は容易にできる。式（2．60）の高調波の各成分は附録 I と同一の定義と表記法を用いると，

$$\left.\begin{aligned}F_n^{※}(a)&=\frac{2k}{n}\sin n\cos^{-1}\frac{b}{a} \qquad n\geq 2\\ F_1^{※}(a)&=2k\sin\cos^{-1}\frac{b}{a}-a\end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

第2近似をつくるために，附録Ⅰから

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(a\cos\phi)\cos\phi\sin\phi d\phi=0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(a\cos\phi)\cos^2\phi d\phi=\frac{dF_1^{※}(a)}{da}$$

なることを考慮すれば，解を次のように仮定することができる。

$$x = a\cos\phi + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nF_n^{※}(a)\sin n\phi}{n^2-1} \qquad (2.62)$$

ここに a と ϕ は次式

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1^{※}(a) \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1 + \varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned}\right\} \qquad (2.63)$$

で決定され $B_2(a)$ は次の形で示される。

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a} F_1^{※}(a) \frac{dF_1^{※}(a)}{da} - \frac{1}{2a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^{※2}(a)}{n^2-1} \qquad (2.64)$$

式(2.63)において，リミットサイクル(定常解)を仮定すると，第2近似解の角周波数，振幅はそれぞれ

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4k^2(1 \pm \sqrt{1-B^2})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^2(a)}{n^2-1} \right] \qquad (2.65)$$

$$\begin{aligned} x &= k\sqrt{2 \pm 2\sqrt{1-B^2}} \cos(\omega t + \theta) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nF_n(a)\sin(\omega t + \theta)}{n^2-1} \end{aligned} \qquad (2.66)$$

ただし

$$\begin{aligned} F_n(a) &= \frac{2k}{n} \sin n \cos^{-1} \frac{B}{\sqrt{2 \pm 2\sqrt{1-B^2}}} \\ B &= b/k \end{aligned} \qquad (2.67)$$

複号同順である。複号の＋は安定なリミットサイクルであり，－は不安定なリミットサイクルである。θ は定数，ω_0 は自然周波数[42]そして $k \gg 1$，$\varepsilon \ll 1$ (共振回路の Q が大きい)である。$B=0$ の場合は式(2.43)，

（2．44）の等号の成立するときである。このときの出力の波形は左右対称の矩形波である。

式（2．65），（2．66）がリミットサイクルとしての意味を持つためには，$|b| \leq k$ でなければならないことが了解される。バイアス b を $k > |b| \geq \sqrt{k-1}$ と定めたときは，リアプノフの第2方法による式（2．59）と併せて考えてみるとき，初期条件によって発振したり，停止したりするものと考えられる。図2．7と図2．8から式（2．65），（2．66）の使える k の範囲がおおよそ判断できる。たとえば図2．7から角周波数の近似式として式（2．65）は $\varepsilon = 0.365$ のときは k が100位ないと近似は悪いだろう。式（2．65），（2．66），（2．67）の不安定なリミットサイクルは次式の安定なりミットサイクルである。

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(1 - \frac{k}{1+(x+b)^2}\right)\dot{x} + x = 0 \tag{2.68}$$

図2．13 に $k=10$ の場合について式（2．66）と比較している。矢印はバイアスを $0 \to \infty$，$\infty \to 0$ と変えたときにヒステリシスを持つことを示している。ただし理論値は，式（2．66）の基本波の振幅成分 $k\sqrt{2+2\sqrt{1-B^2}}$ を使った。

$\varepsilon \ll 1$，$k \gg 1$，$B=1$ のときは式（2．65），（2．66）より角周波数，振幅はそれぞれ

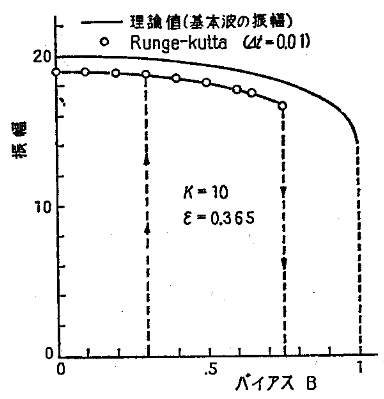


図2．13　バイアスによる振幅の変化

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{sin^2 \frac{\pi}{4} n}{n^2 - 1} \right)$$

$$\fallingdotseq \omega_0 \left(1 - 0.5127 \times \varepsilon^2 \right) \tag{2.69}$$

$$x = \sqrt{2} \cdot k \, cos \, (\omega t + \theta)$$

$$+ 2 \varepsilon k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{sin \frac{\pi}{4} n}{n^2 - 1} \, sin \, n \, (\omega t + \theta) \tag{2.70}$$

図2.14の例が示すように従来の線形理論での発振条件では非常にあいまいになってくる。たとえば，やわらかい発振条件，かたい発振条件というように区別して使うべきであろう。

図2.15に角周波数についての一例を*Runge−Kutta* 法と比較している。理論値は式（2.65）の初めの第100項を電子計算機で計算した結果を用いている。

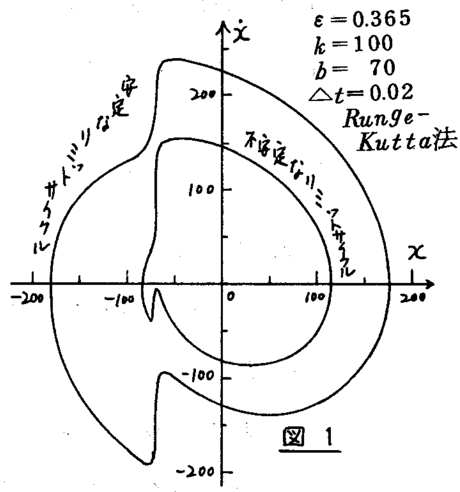


図2.14 リミットサイクルの位相面軌跡

図2.16にバイアス変化に対する各高調波成分の変化を示している。高調波発振器においては必要な高調波を最大になるようにそれぞれバイアスを図から定めればよい。図2.17にバイアスによるひずみの変化を示している。

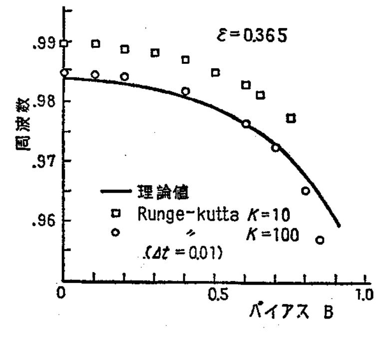


図2．15　バイアスによる周波数の変化

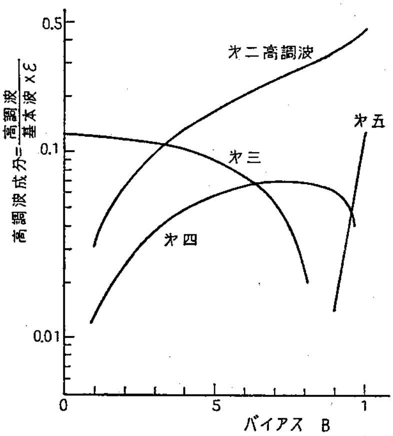


図2．16　バイアスによる高調波の変化
（大振幅動作）

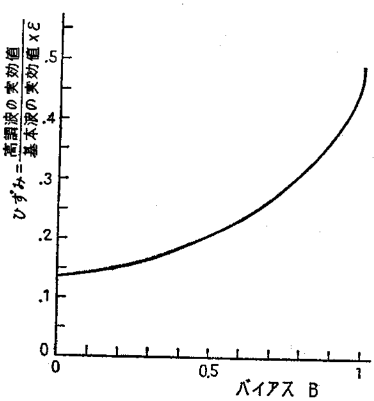


図2．17　バイアスによる歪の変化
（大振幅動作）

次に小振幅動作について考察する。微分方程式（2．55）において，

$|x+b| \ll 1$ を仮定し

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \varepsilon(k-1) \\ X &= \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot x \\ B^1 &= \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot b \end{aligned}\right\} \tag{2.71}$$

と変数変換すると式（２．５５）はバイアス項を含む*Van der Pol*の微分方程式となる。

$$\ddot{X} - \mu\left[1-(X+B^1)^2\right]\dot{X} + X = 0 \tag{2.72}$$

同様に漸近法を用いて角周波数，振幅の第２近似解をそれぞれ求める。附録Ⅰの漸近法を利用する。

$$\left.\begin{aligned} f(X) &= 1-(X+b)^2 \\ F^{※}(X) &= (1-b)^2 X - bX^2 - \frac{X^3}{3} \end{aligned}\right\} \tag{2.73}$$

$$F^{※}(a\cos\phi) = a\left(1-b^2-\frac{a^2}{4}\right)\cos\phi - \frac{b a^2}{2}\sin 2\phi - \frac{a^3}{12}\sin 3\phi \tag{2.74}$$

式（２．７４）より

$$\left.\begin{aligned} F_1^{※}(a) &= a\left(1-b^2-\frac{a^2}{4}\right) \\ F_2^{※}(a) &= -\frac{b a^2}{2} \\ F_3^{※}(a) &= -\frac{a^3}{12} \end{aligned}\right\} \tag{2.75}$$

第２近似解を次のように仮定する。

$$X = a\cos\phi + \varepsilon\sum_{n=2}^{3}\frac{nF_n^{※}(a)\sin n\phi}{n^2-1} \tag{2.76}$$

ここに a と ϕ は次式を満足せねばならない。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{\varepsilon}{2}F_1^{※}(a)\\ \frac{d\phi}{dt}&=1+\varepsilon^2 B_2(a)\end{aligned}\right\}\qquad(2.77)$$

$B_2(a)$は次の形をもっている

$$B_2(a)=-\frac{1}{8a}F_1^{※}(a)\frac{dF_1^{※}(a)}{da}-\frac{1}{2a^2}\sum_{n=2}^{3}\frac{n^2F_n^{※}(a)}{n^2-1}\qquad(2.78)$$

リミットサイクル（定常解）を仮定して振幅と角周波数の第２近似解をそれぞれもとめると，

$$\omega=\omega_0\left[1-\mu^2\frac{(1-B'^2)(29B'^2+3)}{48}\right]\qquad(2.79)$$

$$X=\sqrt{1-B'^2}\cos\omega t+\mu\left[-\frac{4}{3}B'(1-B'^2)\sin 2\omega t\right.$$

$$\left.+\frac{(1-B'^2)^{3/2}}{6}\sin 3\omega t\right]\qquad(2.80)$$

式（2.79），（2.80）で $B'=0$ とおいた式は，式（2.41），（2.42）から容易に求まる。図2.18にバイアス変化に対する角周波数，振幅をそれぞれ示す。図2.19は第２，第３高調波を図2.20はひずみをそれぞれ示している。

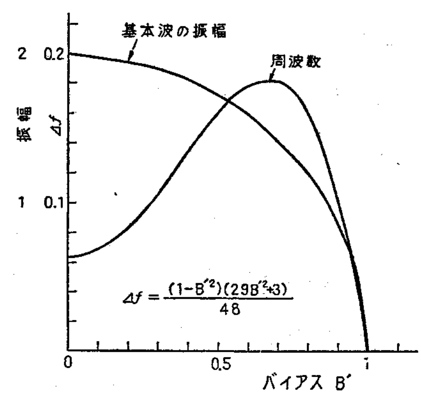


図2.18　バイアスによる振幅と周波数（小振幅動作）

大振幅動作と小振幅動作について解析を行なったが周波数については式（2.65）と

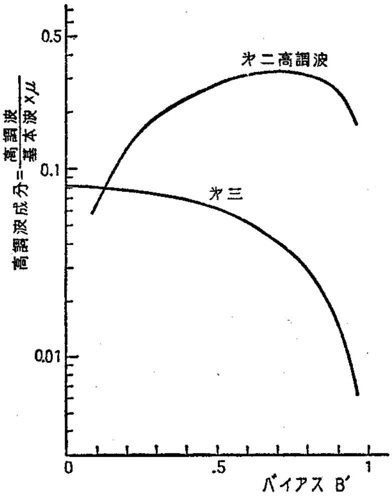


図2.19 バイアスによる高調波の変化
（小振幅動作）

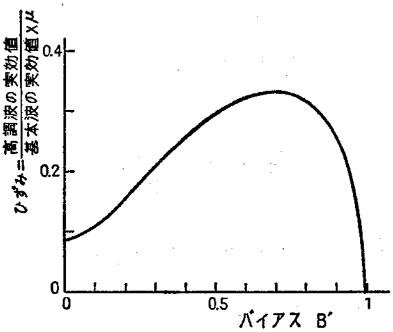


図2.20 バイアスによる歪の変化
（小振幅動作）

（2.79），振幅については式（2.66）と（2.80）のようにその変化のようすは図が示すようにかなり異なったものである。ループゲインの k については発振器の目的（正弦波発振器，高調波発振器など）によって選び方は異なるであろう。偶数高調波が必要ならばバイアスによっても可能である。しかし，$k>|b|\geq\sqrt{k-1}$ にバイアスを選んだときには初期条件によって発振しない場合があるので，実際の回路構成上では，その考慮が必要であろう。

2.4.2 *Push-Pull* 増幅器による発振器

発振器の大振幅，大電力化のためにしばしばプッシュプル形の発振器が作られる。さらに発振器の高能率化のために B 級動作で使われることが多い。この章ではおもにプッシュプル発振器特有のクロスオーバ歪[49] に注目して考察をする。一つの能動素子の入出力特性を $tan^{-1}(\cdot)$で近似する

と，プッシュプル回路の入出力特性を $tan^{-1}(\cdot+b)+tan^{-1}(\cdot-b)$ と近似することができるであろう。この発振器に関する微分方程式は式（2.6）から $r=0$ と仮定すると

$$\ddot{x}+\varepsilon\left[1-\frac{k}{1+(x+b)^2}-\frac{k}{1+(x-b)^2}\right]\dot{x}+x=0 \qquad (2.81)$$

ただし ε は共振回路の Q に逆比例する量であり，k はループ利得でありそして b は直流バイアスでいずれも正数である。

式（2.81）の発振条件を求める。特異点を除いて正定なリアプノフ関数 V を次のように定める。

$$V=y^2+x^2 \qquad (2.82)$$

式（2.82）の時間微分は式（2.81）から

$$\dot{V}=-2\varepsilon\left[1-\frac{k}{1+(x+b)^2}-\frac{k}{1+(x-b)^2}\right]y^2 \qquad (2.83)$$

式（2.83）より

$$k>\frac{1+b^2}{2} \qquad (2.84)$$

ならば特異点（0，0）はその近傍で不安定である。式（2.81）を一般的に解くことは大変困難である。そこで $k\gg1$ と仮定しプッシュプル回路の入出力特性を図2.21 のように，階段状の折線特性を仮定する。図2.21 で示される回路の出力波形は同様に直角の折線特性で表現できる。公式集(47) か

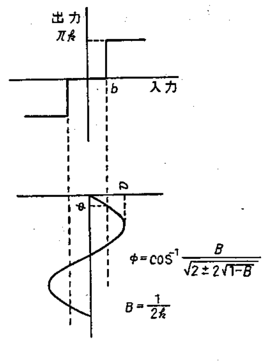


図2.21 プッシュプル発振器の入出力特性

ら入力 $a\cos\omega t$ の出力波形 V のフーリエ級数展開は容易である。

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4k}{n+1}\ F^{※}_{2n+1}\ \cos(2n+1)\omega t \tag{2.85}$$

ただし，

$$F^{※}_{2n+1}=\sin(2n+1)\cos^{-1}\frac{B}{\sqrt{2\pm\sqrt{1-B^2}}}$$

$$B=\frac{b}{2k} \tag{2.86}$$

リミットサイクル（定常解）を仮定して式（2.85），（2.86）から附録Ⅰの漸近法によると，第2近似解の角周波数，振幅はそれぞれ

$$\omega=\omega_0\left[1-\frac{\varepsilon^2}{8(1\pm\sqrt{1-B^2})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{※2}_{2n+1}}{n(n+1)}\right. \tag{2.87}$$

$$x=2k\sqrt{2\pm2\sqrt{1-B^2}}\ \cos(\omega t+\theta)$$

$$+k\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{※}_{2n+1}}{n(n+1)}\ \sin(2n+1)(\omega t+\theta) \tag{2.88}$$

ただし複号同順である。複号の＋は安定なリミットサイクルであり，－は不不安定なリミットサイクルである。そして ω_0 は自然周波数であり，θ は定数である。図2.22に計算機で数値計算を行なった結果の1例を示す。$B=0$ の場合は式（2.81）から微分方程式は

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(1-\frac{2k}{1+x^2}\right)\dot{x}+x=0 \tag{2.89}$$

となり，このプッシュプル増幅

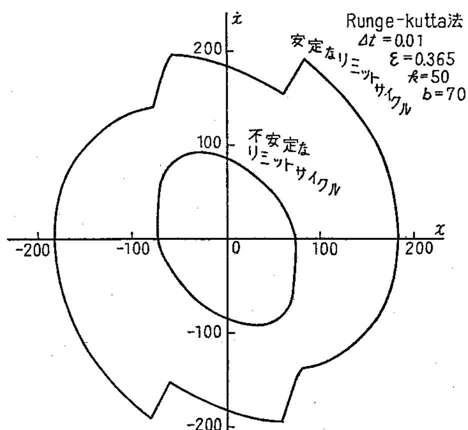


図2.22　安定と不安定のリミットサイクルの軌跡

器はA級動作をしていることに相当する。$B=1$の時の角周波数，振幅は式(2.87)，(2.88)からそれぞれ

$$\omega=\omega_0\,(1-0.4902\times\varepsilon^2) \tag{2.90}$$

$$x=2\sqrt{2}\,k\ \cos(\omega t+\theta)+\varepsilon k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}}{n(n+1)}\ \sin(2n+1)(\omega t+\theta) \tag{2.91}$$

ただし式(2.90)は電子計算機で $n=50$ まで計算したものである。このプッシュプル発振器も2.4で示されているバイアスを含む発振器と同様にバイアスBの方向によって発振の立上がりと発振の停止にヒステリシスをもつ。ただこの発振器の入出力特性は対称であるから偶数高調波を含まない。

能動素子の出力の波形vについて考察する。$B=0$の場合，その出力は方形波である。そして$B=1$の場合は式(2.85)，(2.86) から，$\cos^{-1}(1/\sqrt{2})$ は，主値を取って$\pi/4$であるから振幅πk，0，$-\pi k$ の3値をとる等間隔のパルス波形を示し，決してそれ以上パルス幅は狭くならないことを示している。式(2.88)と(2.85)を比較してみると，式(2.85)の第3高調波以上は $\pi/2$ だけ位相は遅れている。これは図2.5のインダクタンスが影響していることを示し，一般常識とも一致する。式(2.81)で $b=0$ としたときの式(2.85)に相当する実験の1例が文献(23) の写真3に示されている。

2.5 遅延回路を含む発振器

遅延回路を発振器の中に含む一例が文献(11) に示されているが，その解析は必ずしも十分でない。遅延回路は一種のメモリーであるから，非線形要

素と遅延特性を一つの要素と見れば，自動制御で記述関数法として良く行なわれているメモリーを含む非線形要素の解析方法でも，概念的には理解できる。ここで解析しようとするモデルを図２．２３のように更に拡張したブ

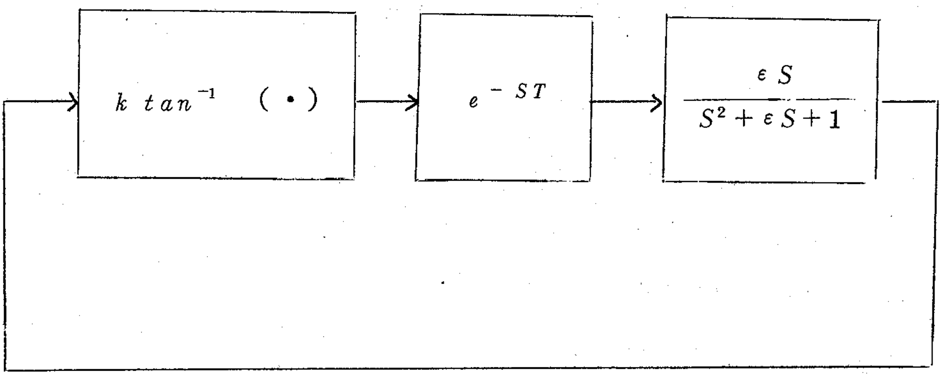


図２．２３　遅延回路を含む発振器

ロックダイアグラムで示す。e^{-ST} は遅延特性を表わし，T は遅延時間である。また図２．２３は非線形の能動素子の入出力特性がヒステリシスを持つと考えても良い。[56]

図２．２３から次のような微分差分方程式になる。

$$\ddot{x}(t)+\varepsilon\left[\dot{x}(t)-k\frac{d}{dt}\tan^{-1}x(t+T)\right]+x(t)=0 \qquad (2.92)$$

$\tan^{-1}$ で近似した能動素子の出力のフーリエ級数展開は公式集[47] から容易にできる。入力の信号 x を $x=a\cos\omega t$ と仮定すると，$\tan^{-1}x(t+T)$ のフーリエ級数展開は

$$\tan^{-1}\left[a\cos(\omega t+\rho)\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^{2n-1}$$

$$\cdot [\cos(2n-1)\rho \cos(2n-1)\omega t - \sin(2n-1)\rho \sin(2n-1)\omega t] \tag{2.93}$$

ただし，$\rho=\omega t$ である。2.3.1で行なった式（2.26）の場合と異なり式（2.93）は正弦項が0とならないために，解析は一層複雑になる。式（2.93）から附録Iの漸近法を容易に利用することができる。第1近似の解を次のように仮定すると，

$$x = a \cos \phi \tag{2.94}$$

a と ϕ は次の関係を満足せねばならない。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2}\left[2k \cos\rho \left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right) - a\right] \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1 - \frac{\varepsilon k}{a}\left(\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right) \sin\rho \end{aligned} \tag{2.95}$$

リミットサイクルの存在を仮定して，振幅と周波数の第1近似解を求めると，

$$x = 2\sqrt{k \cos\rho\,(k \cos\rho - 1)}\,\cos(\omega t + \theta) \tag{2.96}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \tan\rho\right) \tag{2.97}$$

ただし，$\varepsilon \ll 1$ である。

式（2.96）が意味を持つためには，$0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\cos\rho > \frac{1}{k} \tag{2.98}$$

であるからループ利得が大きい方が長い遅延時間で発振することを示している。振幅の変化の1例を図2.24に示す。また式（2.91）から $\rho \ll 1$ のときは

$$\omega \doteqdot \omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon \omega_0 T}{2}\right) \tag{2.99}$$

となり，あらかじめ ω_0 ，ε がわかっていればこの方法で逆に T を測定することもできる。とくに式（2.99）の第1近似はループ利得の k に関係しないので，あらかじめ ω_0 ，ε がわかっていれば，この測定原理を応用して，ユニバサルカウンタと組合せれば非常に簡単な方法で，ディレイライン等の遅延時間の測定が考えられる。

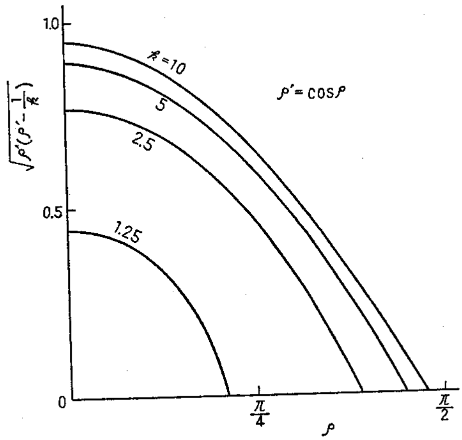


図 2.24　位相遅れ対振幅特性

小振幅動作について考察する。小振幅動作の時は，*Van der Pol* の微分差分方程式になる。

$$\ddot{x}(t)+\varepsilon\left\{\dot{x}(t)-k\frac{d}{dt}\left[x(t+T)-\frac{1}{3}x^3(t+T)\right]\right\}+x(t)=0 \tag{2.100}$$

第1近似の解を次のように仮定すると

$$x=a\cos\phi \tag{2.101}$$

a と ϕ は次の関係を満足せねばならない。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(k-\frac{ka^2}{4}\right)\cos\rho-1\right\}\\ \frac{d\phi}{dt}&=-\frac{k\cos\rho}{2}\left\{1-\frac{1}{4}\left(\frac{k\cos\rho-1}{k\cos\rho}\right)\right\}\sin\rho\end{aligned}\right\} \tag{2.102}$$

式（2.96），（2.97）で行なったと同様にリミットサイクルの存在を仮定して式（2.100）の第1近似解を求める。振幅，角周波数はそれぞれ

$$x = 2\sqrt{\frac{k\cos\rho - 1}{k\cos\rho}}\ \cos(\omega t + \theta) \qquad (2.103)$$

$$\omega = \omega_0\left[1 - \frac{\varepsilon}{8}(3k\cos\rho + 1)\sin\rho\right] \qquad (2.104)$$

となり，式(2.96)，(2.97)とはやや異なった結果を得るが，$k \doteqdot 1$ とすると式(2.96)，(2.103) そして式(2.97)と(2.104) は同じになる。式(2.103)が物理的意味を持つためには $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\cos\rho > \frac{1}{k} \qquad (2.105)$$

式(2.98)と式(2.105)は一致し，そしてその両式は文献(57) から自励条件(発振条件)である。そしてその両式は式(2.18) の発振条件が 2.3.1の式(2.24)で示されているように，$k > 1$ を含むのでこの両式は拡張された発振条件である。なお式(2.96)，(2.97)は *Scott*[15] が初めて求めた第1近似式 $x = 2\sqrt{k(k-1)}\cos(\omega t + \theta)$ の，2.3.1で示されている第2近似解の *Van der Pol* の第2近似解を含む大振幅動作への拡張とは異なった方向への拡張である。

増幅器に半導体能動素子を用いた場合は固有のキャリア蓄積時間があり，その蓄積時間は使用条件によって一定ではない。[50][51] また能動素子の遮断周波数附近で発振させるときは，能動素子自身の位相遅れも考えられる。そしてその位相遅れも動作状態によって一定ではない。式(2.97) から半導体のキャリア蓄積時間(e^{-ST} とは少し違う)や遮断周波数附近の位相遅れは ε の一次の項に利いてくるであろうから，安定な周波数を望む発振器では，できるだけキャリア蓄積時間の短い，そして遮断周波数の高い能動素子を使うことが望ましい。

2．6　保存系の振動

いままでの自励振動系はいずれも非保存系について考察を行なってきた。ここでは $\varepsilon=0$ の保存系について考察をする。図2．3の R_2 は積極的に利用して特異点の数を複数にする場合もあろう。また R_2 を使用しなくともコンデンサの絶縁抵抗が問題になる場合もある。しかし，その時は図2．3からコンデンサの絶縁抵抗 R_2 が十分高ければ，$r\ll 1$ を仮定できるであろう。能動素子の入出力特性を tan^{-1} で近似し，$\varepsilon=0$ を仮定すると，式(2．6)から微分方程式は，

$$\ddot{x}+x-r\ tan^{-1}x=0 \tag{2.106}$$

文献(58)で示されている漸近的方法と式(2．26)を参照して，振動が持続していると仮定して，第1近似解を求めると振幅，角周波数はそれぞれ

$$x=a\ cos(\omega t+\theta)-r\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_{2n-1}^{※}(a)\,cos(2n-1)(\omega t+\theta)}{4n(n-1)} \tag{2.107}$$

$$\omega=\omega_0\left[1-r\frac{f_1^{※}(a)}{a}\right] \tag{2.108}$$

ただし，

$$f_{2n-1}^{※}(a)=\frac{(-1)^{n+1}\left(\dfrac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}\right)^{2n-1}}{2n-1} \tag{2.109}$$

a は初期値によって定まる定数であり，$r\ll 1$ である。式(2．108)から $a\to 0$ の時(振幅0)は離調項は r であり，$a\to\infty$ の時(振幅無限)は離調項は0である。したがって式(2．108)では振幅が大きくなるにしたがって離調項は小さくなるが，式(2．37)では逆である。式(2．106)では $\varepsilon=0$ を仮定して考察したが，$\varepsilon\neq 0$ の場合は一層複雑な振舞をするであろう。そして一般的には第1近似の項に離調項を含むであろうから，安定な周波数を

望む発振器では，できるだけrを小さく，例えば図２．３のフィルタの回路図ではR_2をコンデンサの絶縁抵抗と考えればできるだけR_2の大きいコンデンサを選ぶことが望ましい。

２．７　多安定マルチバイブレータ

２．７．１　双安定マルチバイブレータ

図２．２と式（２．６）から次の微分方程式について考察する。

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(1-\frac{k}{1+x^2}\right)\dot{x}+x-r\ \tan^{-1}x=0 \tag{2.110}$$

双安定マルチバイブレータの性質からいって，三つの特異点を持つだろう。三つの特異点の性質をそれぞれ調べれば，目的の回路の性質のあらましを知ることができる。三つの特異点を持つためには，式（２．１３）から$r>1$である。そしてバイアスを０と仮定する。式（２．１１０）から特異点（０,０）について調べるが，二次以上の高次の項を省略して安定，不安定を調べることができるので[59]，式（２．１１０）は$|x|\ll 1$を仮定して

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\varepsilon\left[1-k\left(1-x^2\cdots\cdots\right)\right]y-x+r\left(x-\dfrac{x^2}{3}\cdots\cdots\right)}{y} \tag{2.111}$$

式（２．１１０）からその特異点附近の特性方程式は

$$S^2+\varepsilon(1-k)S+(1-r)=0 \tag{2.112}$$

式（２．１１２）から$r>1$の仮定のもとではεの正負にかかわらず，常に原点（０，０）は不安定であることがわかる。これらの非線形システムにおける安定，不安定の判別に関する定理（十分条件）はいくつかあるが，式（２．１１０）に適用するには必ずしも容易というわけではない。三つの特異点を持つ発振器で一番興味のある回路は，双安定マルチバイブレータで

あることを考えると，たとえば， *Bendixson* の第1定理が利用できる。式（2.15）から

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-\varepsilon\left(1-\frac{k}{1+x^2}\right) \qquad (2.113)$$

となり，$K<1$ では式（2.113）は一定符号を持つので閉軌道（リミットサイクル）を持たないことがわかる。式（2.110）において $r>1$ の仮定のもとでは *Bendixson* の第1定理は双安定マルチバイブレータのための十分条件であることがわかる。

式（2.112）で行なったと同様に，$x-r\ tan^{-1}x=0$ の根 x_0（$x_0\neq 0$）が $x_0^2\gg k-1$ の仮定のもとでは，特異点（x_0，0）の近傍で特性方程式は，

$$S^2+\varepsilon S+1=0 \qquad (2.114)$$

となり，その特異点の近傍では常に安定である。したがって，双安定マルチバイブレータのためには $r>1$ と $x_0^2\gg k-1$（$k<1$ を含む）を満足するように回路の各定数を定めればよい。図2.25に位相面上で不安点から安定点への軌跡の1例を示す。位相面上の *Separatrix* はどちらの安定点へ転移するかという境界になっているので，安定点から *Separatrix* までの距離が転移の容易さになるだろう。

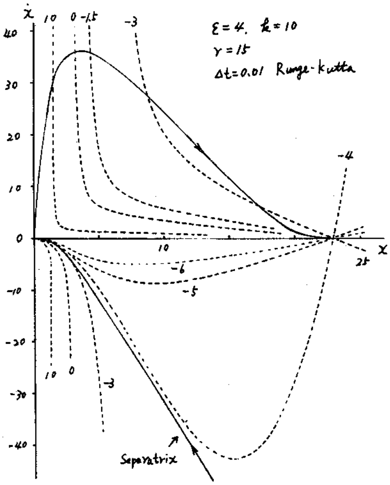


図2.25 双安定 MV の位相面軌跡

図2.26に3つの安定点をもつ発振器の1例を示す。こ

のように微分方程式上からも回路上からも，その回路がどの種類に属するかということは微分方程式を解かなくてはわからない。

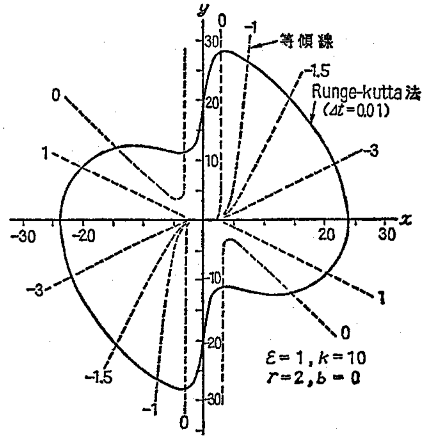


図 2.26　リミットサイクルの軌跡

2，7．2　3安定マルチバイブレータ

双安定マルチバイブレータを考察したと同様に，この場合に適用すれば，微分方程式は次のように示すことができる。

$$\ddot{x} + \varepsilon \left\{ 1 - \frac{k}{1+(x-b)^2} - \frac{k}{1+(x+b)^2} \right\} \dot{x}$$

$$+ x - r \tan^{-1}(x-b) - r \tan^{-1}(x+b) = 0 \qquad (2.115)$$

式(2.115)は，$r > 1$ で最高5個の特異点を持つ。しかし(0，0)を除く他の4つの特異点を解析的に求めることは困難である。特異点の性質を調べる。$b \gg 1$ とすると，特異点(0，0)の近傍で特性方程式は次のように近似できる。

$$\ddot{x} + \varepsilon \left(1 - \frac{2k}{1+b^2} \right) \dot{x} + x = 0 \qquad (2.116)$$

したがって

$$k < \frac{1+b^2}{2} \qquad (2.117)$$

のとき，特異点（0，0）はその近傍で安定である。一番外側の特異点（x_0，0）での特性方程式は同様に $|x_0|-b\gg 1$ を仮定すると

$$\ddot{x}+\varepsilon\left[1-\frac{k}{1+(x_0-b)^2}-\frac{k}{1+(x_0+b)^2}\right]\dot{x}+x=0 \tag{2.118}$$

となり，式（2.118）から

$$|x_0|>\sqrt{2k-1}+b \tag{2.119}$$

となり，式（2.117）と（2.119）を満足するように b，k，r，をそれぞれ選べば，特異点（x_0，0）はその近傍で安定である。$r>1$，$b\gg 1$ と式（2.117），（2.119）から3つの安定点を持つマルチバイブレータを作ることができる。さらにリミットサイクルを持たないためには（十分条件），*Bendixson* の第1定理が利用できる。

判別式 D は式（2.15）から

$$D=-\varepsilon\left[1-\frac{k}{1+(x-b)^2}-\frac{k}{1+(x+b)^2}\right] \tag{2.120}$$

となり，式（2.120）が定符号を持てばリミットサイクルを持たないから，少なくとも $k<0.5$ と選べば式（2.115）はリミットサイクルを持たない。しかし *Bendixson* の第1定理で k を定めると，例えば図2.27に示すように不安定領域から安定領域への移行の時，パルスの立上り速度が遅すぎてあまり実際的でない。図2.28に位相面

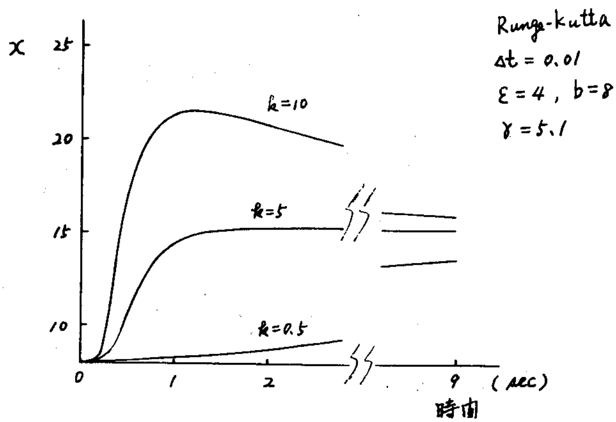


図2.27　3安定マルチバイブレータの出力波形

における振舞の1例を計算機を用いて数値計算した結果を示している。位相面上の$Separatrix$は初期値によってどの安定点に移るかを示す重要な特殊解である。安定点から$Separatrix$までの距離は，安定点の安定度を示す尺度になるであろう。

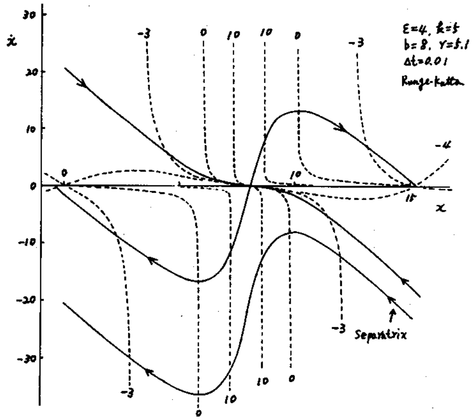


図 2.28　3安定マルチバイブレータの位相面軌跡

3値のマルチバイブレータの入出力特性を階段に例えれば，2段である。階段の数をmとすると特異点の最大数は$2m+1$となる。 この階段を増やして行けば，さらに多値のマルチバイブレータができるであろう。

2.8　結　　言

一つの微分方程式で多安定マルチバイブレータを含む各種の発振器の考察を行なってきた。双安定，三安定マルチバイブレータについては，実際にはトリガパルスが入るので，微分方程式の右辺に駆動関数を付加して非自律系の問題として処理しなければならない。そして，解析は一層困難になるであろう。3値のマルチバイブレータの作り方の1例を示したが，さらに多値のマルチバイブレータは，原理的にはこの方法により，入出力特性を多段の階段状にすれば良いからといって，トランジスタ，ダイオード，抵抗，コンデンサ等の回路部品が2値の場合に比べて少なくてすむということは大変疑問である。

プッシュプル形の発振器を含むバイアスを考慮した発振器では，おもにQの大きい場合を仮定して漸近法を用いて解析を行なった。これらのバイアスを含む発振器は硬い発振の例として良く知られていたが，理論的にもやはり安定なリミットサイクルと不安定なリミットサイクルが見つかり，硬い発振の１例であることがわかった。これ以外にもまだ硬い発振器の例はあろう。

最近の電子計算機の発達にともなって，微分方程式も数値解析法を用いて簡単に解けるようになったが，たとえば図２．７のグラフを作成するのに*Runge−Kutta*法と式（２.３７）を電子計算機で計算する場合，その計算時間の比は数十倍も有利である。ここで得られた結果は大振幅動作で解析されているので，当然*Van der Pol*の小振幅動作の，良く知られた結果を含んでいる。バイアスの積極的な利用として高調波発振器の偶数調波の利用についてかなりはっきりしてきた。*Runge−Kutta* 法の解をフーリエ級数展開する複雑さに比べたら，大分すっきりしている。特に，第４高調波以上については，*Vcn der Pol*形の微分方程式の第２近似解でも出てこない。

高い周波数で能動素子を使用したときに問題となる素子自身の位相遅れ，あるいは遅延（メモリー）を考慮したより拡張したモデルを解析することによって，第１近似解の中に離調項を含む１例が見つかった。自動制御においてメモリーを含む非線形要素の解析として記述関数法があるが，ここで用いた解析結果も結局第１近似解しか求まらない。第１近似解を求めるのなら，記述関数法で多く示されている出力のフーリエ級数展開の基本波成分に関する表は２．５で行なった解析方法にそのまま使える。

安定な周波数を望む発振器では，εの一次の項に離調項が含まれる発振器はできるだけ避けるべきである。発振器の周波数変動を$\varepsilon \ll 1$と仮定してεの巾乗にしたがって考察すると，第０次近似解からは自然周波数ω_0，第１

近似解からは能動素子の位相遅れとコンデンサの絶縁抵抗，第２近似解からは直流バイアスと増幅度が，それぞれ出てくる。定性的ではあるが，発振器の周波数変動はこの順序で原因になっていると思われる。そしてそれは周波数安定への補償についても示唆している。

細部にわたっては必ずしも解析が十分というわけではないが，たとえば，マルチバイブレータの計算機シミュレーションに式（２．６）の微分方程式を使うのは大変に便利である。その他，ここには書かなかったが，位相面による摂動法，*Reversion* 法，あるいはその他の定理の利用などいろいろ試みてみたが，効果的方法は少なかった。以上 tan^{-1} の入出力特性を持った発振器を明らかにしてきたが，なお，式（２．６）で表わされる微分方程式の解析については今後とも話題になると思われる。

第 3 章　飽和特性を考慮した 2 周波発振器

3．1　緒　　言

真空管，トランジスタ，ディジタル IC 等の入出力の非線形飽和特性を tan^{-1} の逆三角関数で近似したオートノーマスな発振器が盛んに発表されている。(15)～(26) それらの研究はいずれも $Van\ der\ Pol$ の微分方程式を一般化しようとする試みと受けとることができる。しかし，それらの研究のいずれもが 1 周波発振器（1 自由度の発振器）についてであった。それらの研究はおもにフーリエ解析が基礎になっている。文献 (22) も指適するようにフーリエ解析は大変困難がともなう。そこで普通フーリエ解析のできる非線形関数を見つけて近似的に解くということが一般に行なわれている。非線形振動論で良く行なわれている自律系の解析手段の一つである漸近法 (7) の第 1 近似に注目するかぎり，自動制御の問題で記述関数 (56) として良く行なわれ，すでに多く表になっている例は，そのまま非線形発振器の解析に用いられる。

2 周波発振器の解析に自動制御で行なわれている結果を利用しようとすれば，調和関係にある二つの正弦波に対する双記述関数と周波数が相当隔たっている二つの正弦波に対する近似双入力記述関数 (56) が利用できるであろう。文献 (56) も指摘するように，それらの解析の基礎となるフーリエ解析は一周波の場合に比べて，二周波の場合は格段に困難である。2 周波発振器については，ボゴリューボフ・ミトロポリスキー (7) や志村 (11) の研究があるが，2 周波発振器の積極的利用という立場からの研究ではない。LC 発振器の寄生振動 (118) として研究された結果はこの論文と比較的関係があると思われるが，この論文ではフーリエ解析を重点におき，非線形特性を高次

近似で解析している。２周波発振の積極的な利用については，比較的研究が少ないように思える。

２周波発振器の解析のきっかけはQの高い共振回路を用いて，出来るだけたくさんの高調波を得たいという二つの相反する事柄の一つの実現方法として，２周波発振器を研究したのであるがその目的を十分達する応用面があるものと思う。この２周波発振器は１周波の場合と同様に同期作用もあるので，色々の応用面が考えられる。

この論文の理論的側面としては，やはり*Van der Pol*の微分方程式の一般化とその式を近似的に求めることである。ここで用いた解析は非線形振動論で用いられる摂動法，漸近法を２周波発振器の場合に一般化して用いている。その他，自動制御で用いられる近似双記述関数とも接点を持たせた。

３．２　２周波発振回路の解析

発振回路に用いる能動素子の入出力特性を電圧対電圧，電圧対電流等の区別はあるが，ここではそれらの入出力の飽和特性を tan^{-1} の逆三角関数で近似する。２周波発振器の能動素子としては，おもに真空管，トランジスタ，ディジタル*IC*等が大きな働きをするわけであるが，ここでは一応理想的（入力インピーダンス無限大，出力インピーダンス０）な差動形の入出力平衡演算増幅器を用いてその発振器を作るとすれば，例えば図３．１のような構成で作られるであろう。フィルタは図３．２の(*a*)，(*b*)どちらでも良い。実際の回路では理想的ではないのでQが高くなるように選ばれる。図３．１の増幅器の入出力特性を２つの周波数で利得が異なることも考慮すれば，$k_i\ tan^{-1}\ \alpha_i(\quad)$ とおくのが適当であろう。図３．２(*a*)，(*b*)の共振回路はいずれも伝達関係数$G_i(S)$は次のように書ける。[23]

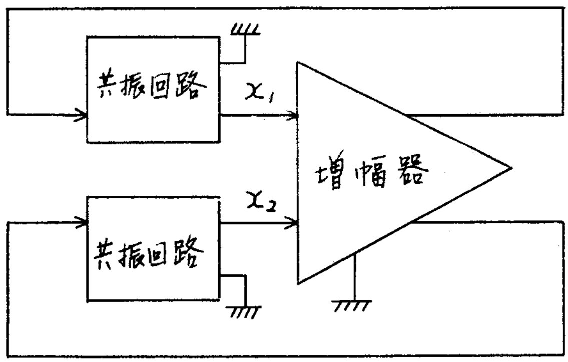


図３．１　　２周波発振回路

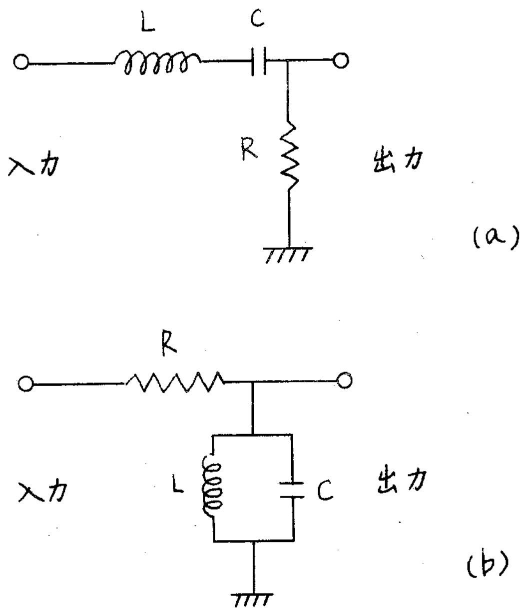


図３．２　　共　振　回　路

$$G_i(S) = \frac{\varepsilon_i \omega_i S}{S^2 + \varepsilon_i \omega_i S + \omega_i^2} \qquad (3.1)$$

ただし，ε_i は共振回路 Q の逆数，ω_i はその中心周波数，S はヘビイサイドの演算子である。図３．１の構成図から増幅器の２つの入力信号 x_1，x_2 についての微分方程式は次のように書くことができる。(23)

$$\ddot{x}_i + \varepsilon_i \omega_i \left[\dot{x}_i - \frac{\alpha_i k_i (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{1 + \alpha_i^2 (x_1 + x_2)^2} \right] + \omega_i^2 x_i = 0$$

$$i = 1, 2 \qquad (3.2)$$

式（３．２）はまた次のように変数変換（$\dot{x}_i = z_i$）することができる。(26)

$$\ddot{z}_i + \varepsilon_i \omega_i \left[\dot{z}_i - k_i \tan^{-1} \alpha_i (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \right] + \omega_i z_i = 0 \qquad (3.3)$$

式（３．２）は文献(15),(23)で述べられている微分方程式の２周波発振器への一般化である。さらに式（３．２)は，n 周波発振器（n 自由度の発振器）へ一般化することは容易である。$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ と仮定すると式（３．２）の０次近似解は

$$x_i = a_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \qquad (3.4)$$

$$i = 1, 2$$

となる。式（３．４）の a_i を定めるために第１近似解として式(３．４)を採用するのが適当であろう。一般に非線形要素に２つの余弦波が入った時の出力のフーリエ解析は，２つの信号の間に調和関係があるときにのみ正確に計算できる(56)。式（３．２）で示される２階の連立微分方程式の性質からいって，式(３．４)の a_i は多くの値を取るであろう。そのとき当然式（３．４）の振幅 a_i の安定，不安定が問題になる。そのときは漸近法(17)で行なわれるような方法を一般化して，振幅の安定，不安定を調べなければならない。

式（３．２）で示される微分方程式の振舞いを大局的に知るために，リアプ

ノフの第2方法による特異点（ $x_1 = \dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$ ）の附近での安定，不安定を調べるにしても，文献（23）で行なわれたようなうまい関数を見つけるのは困難である。その他，よく等傾線法が用いられるが，2周波の発振器の場合には応用しにくい。

式（3．2）で $x_i \doteqdot 0$ 附近での全体の利得 $\alpha_i k_i$ が $\alpha_i k_i > 1$ であれば少なくとも一つは発振するだろう。2周波発振についてのそれほど明確な定義があるわけではないと思われるので，ここでは一応，2つの発振が間欠発振以上（連続発振を含むの意）であるときに2周波発振と呼び，この論文ではおもにその意味での2周波発振について考察を進めて行く。

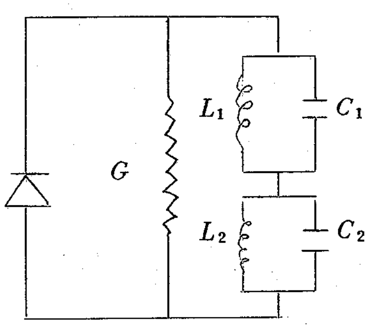
3．3　小振幅動作の解析

式（3．2）から $\alpha_i | x_1 + x_2 | \ll 1$ を仮定すれば，分母を級数展開して初めの2項を採用すると

$$\ddot{x}_i + \varepsilon_i \omega_i \{ \dot{x}_i - \alpha_i k_i (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 [1 - \alpha_i (x_1 + x_2)^2] \} + \omega_i^2 x_i = 0 \qquad (3.5)$$

$$i = 1,\ 2$$

式（3．5）は図3．3のような負性抵抗を用いた回路でも構成することがで



$$Z_i(j\omega) = j\omega L_i \,/\!/\, \frac{1}{j\omega C_i}$$

$$| Z_1 (j\omega_1) | \gg | Z_2 (j\omega_1) |$$

$$| Z_2 (j\omega_2) | \gg | Z_1 (j\omega_2) |$$

図3．3　　2周波発振回路の等価回路

き，文献（11）で述べられている２周波発振器の特別な場合に相当する。

いま式（３．５）の特別な場合について $\varepsilon_i \ll 1$ を仮定して摂動法を用いて第１近似について解析してみる。次のような仮定をおく

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \\ &\omega_2 \gg \omega_1 \equiv 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

式（３．５）の第１近似解を次のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = a_1 \cos t \\ &x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

ただし，a_i, θ は定数である。式（３．５）で $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$（０次近似）とおくと，式（３．７）は式（３．５）を満足するので第１近似として式（３．７）のように仮定しても良いだろう。式（３．７）を t について微分すれば

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -a_1 \sin t \\ &\dot{x}_2 = -a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

式（３．５）に式（３．７），（３．８）を代入して式（３．６）の仮定のもとで基本波と高調波の振幅の項をそれぞれ０とすると，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} &A_1'(a_1, a_2) = -a_1(1-k_1) - k_1\left(\frac{a^3}{4} + \frac{a_1 a_2{}^2}{2}\right) = 0 \\ &A_2'(a_1, a_2) = \omega_2\left[-a_2(1-k_2) - k_2\left(\frac{a_2{}^3}{4} + \frac{a_2 a_1{}^2}{2}\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$(3.9)$$

となり式（３．９）からさらに $k_1 = k_2$ を仮定すると

1） $a_1 = 0$，$a_2 = 0$ （３．10）

2） $a_1 = 0$，$a_2 = \pm 2\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}$ （３．11）

3） $a_1 = \pm 2\sqrt{\dfrac{k-1}{k}}$，$a_2 = 0$ （３．12）

$$4)\quad a_1 = \pm\sqrt{\frac{4(k-1)}{3k}}\ ,\quad a_2 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\ \frac{(k-1)}{k}} \tag{3.13}$$

という4つの解が得られる。1)〜3)は*Van der Pol*の第1近似解とまったく同じである。そして解の振幅の安定性について $A_1'(a_1, a_2)$ を考察すると，*Van der Pol* の解の振幅の安定問題として良く調べられている。(7)
可能であれば応用的にも興味ある式(3.13)について調べる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\delta a_1}{dt} &= -\frac{2}{3}(k-1)\delta a_1 - \frac{4}{3}(k-1)\delta a_2\\ \frac{d\delta a_2}{dt} &= -\frac{2}{3}\omega_2(k-1)\delta a_2 - \frac{4}{3}\omega_2(k-1)\delta a_1\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

式(3.14)をラプラス変換して δa_i について解くと

$$H(S) = S^2 + \beta S + r = 0 \tag{3.15}$$

ただし，

$$\beta = \frac{2}{3}(\omega_2 + 1)(k-1)$$

$$r = -\frac{4}{3}\omega_2(k-1)^2 \tag{3.16}$$

式(3.15)で判別式Dを取ると$D>0$(2実根)となり，さらに$H(0)<0$となるので極を右側に一つ持ち，式(3.13)の振幅は不安定になる。

このように2周波の振幅が接近したときは一周波しか存在しないことを示している。例えば，文献(11),(119)で発振の困難さを述べているが，ここの解析でも発振の立上りの過渡解を含む一般的な場合について解かれているわけではない。実際の回路では2周波の発振には多少の工夫が必要だろう。

これまでの解析は $\omega_2 \gg \omega_1$ の場合を仮定し，ω_1 の振幅の高調波は ω_2 に影響を与えないという場合について解析を行なって来た。例えば，具体的に $\omega_2 = 2\omega_1$ ，$\omega_2 = 3\omega_1$ というような場合には，これまでの方法で解析でき

るわけであるが，そのときには，基本波の振幅の正弦，余弦項が0でなければならないことより，式(3.7)のθは零になって自由に位相が選べるということはなくなる。そしてその時は，みかけ上その2つの周波数は逓倍，逓降のように同期関係が保たれて観測される。

式(3.11)，(3.12)で示した安定なリミットサイクルのうち，どちらが実際に存在するかという問題は$t=0$における発振の立上りの早さによってきまるだろう。*Van der Pol* の微分方程式の第1近似の振幅の過渡解はすでに求まっている。(7)

3.4 大振幅動作の解析

1自由度の発振器の解析でも摂動法，漸近法のように，フーリエ解析を基礎としているものは，任意の非線形性に対してフーリエ解析が可能というわけではないので，その解析が可能な非線形関数を探すという研究傾向が一般的である。例えば，自動制御系では記述関数としてたくさんのフーリエ解析の結果が表になっている。2周波の場合についても，双記述関数法，擬双記述関数法(56)として即に研究されている。それらの解析で示されているフーリエ解析の結果も，真空管やトランジスタの入出力特性との対応ができれば，第1近似解についてのみ注目するときには利用できる。

一般にtan^{-1}の非線形関数の2周波のフーリエ級数展開は大変に困難である。

$$h(x)=k\ tan^{-1}(a_1\ cos\ \omega_1\ t+a_2\ cos\ \omega_2\ t) \qquad (3.17)$$

近似双入力記述関数法(56)と同様に$\omega_2 \gg \omega_1$を仮定すると任意の高い周波数の1サイクルの間，低い方の周波数の変化があってもその誤差は非常に小さいと考えられる。そこで入力信号を次のように直流分＋高い周波数と仮定

すると

$$e_i = A_i + a_2 \cos \omega_2 t \tag{3.18}$$

出力の信号は基本波のみに注目するので，次のように仮定できる。

$$e_0 = A_0 + a_2' \cos \omega_2 t \tag{3.19}$$

入力信号を式（３．１８）のような形にしても式（３．１７）のフーリエ級数展開は困難である。そこで文献(22) で行なわれたように入出力特性を折線による理想リミッタと仮定すると，式（３．１７）で表わせるフーリエ級数展開を直流分と基本波のみについて考えれば [22],[56]

$$h(x) = k \sin^{-1} \frac{A_i}{a_2} + 2k \sin \cos^{-1} \frac{A_i}{a_2} \cos \omega_2 t \tag{3.20}$$

となる。そしてその時の安定なリミットサイクルの第１近似解は [22]

$$x_2 = k\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - B^2}} \cos \omega_2 t \tag{3.21}$$

ただし，

$$B = A_i / k \tag{3.22}$$

式（３．２０）から等価利得 [56] は

$$K_{eq} = \frac{k}{A_i} \sin \frac{A_i}{a_2} \tag{3.23}$$

$A_i / a_2 \ll 1$ ならば式（３．２３）から

$$K_{eq} = \frac{k}{a_2} \tag{3.24}$$

いま高い方の周波数の振幅 a_2 が k で，低い周波数の振幅が同様に k のときは，

$$x_1 = k \cos \omega_1 t \tag{3.25}$$

上式の x_1 は式（３．２２）の A_i であるから，低い周波数の振幅が k のときは式（３．２２）の $B = 1$ より式（３．２１）の振幅は０となる瞬間があり，

間欠発振と連続発振の限界になる。また式（３．２４）から等価利得は１にな り，低い周波数の発振限界になる。したがって $k_2 > k_1$ のときには式（３．２４）の等価利得は１より小さくなり，高い周波数によるリミッタ効果により，低い周波数は抑圧され，ついには高い周波数だけの連続発振になる。したがって２周波発振の場合には

$$k_1 > k_2 \qquad (3.26)$$

でなければならない。高い周波数と低い周波数が等しく k のときには理想的な場合を考えているので，図３．４のような出力になるであろう。逆に図３．４

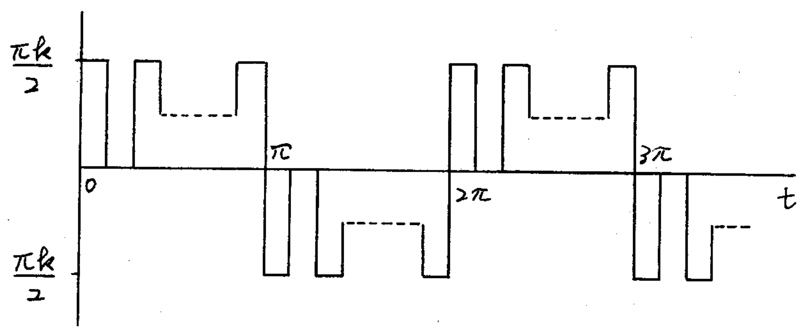


図３．４　　理想的な発振出力

のような出力のときは x_1 と x_2 の２つの周波数の振幅は漸近法により振幅は k になる (23)。

発振回路に電源スイッチを入れた瞬間の２つの発振の立上りについての過渡解について考えるために，式（３．２）で示された微分方程式の特別な場合である次の方程式について考える。

$$\ddot{x} + \varepsilon\omega_0 \left(1 - \frac{k}{1+x_2}\right)\dot{x} + \omega_0{}^2\ x = 0 \qquad (3.27)$$

式(3.27)の第1近似を求めるときの振幅に関する変数分離の一次の微分方程式から過渡解を求めることは，その積分の困難さから解析的には無理であるので，式(3.20)で行なったように入出力特性を理想リミッタと仮定すると，振幅についての過渡解 $g(t)$ は $g(0)=0$ を仮定すると

$$g(t) = 2k\left(1 - e^{-\varepsilon\omega_0 t}\right) \qquad (3.28)$$

式(3.28)から発振の立上りの勾配は，t について微分すればよいので

$$\dot{g}(t) = 2k\varepsilon\omega_0 e^{-\varepsilon\omega_0 t} \qquad (3.29)$$

2周波の場合にも $g(t) \approx 0$ のときには近似的にお互いに独立に立上りを比較してもよいから式(3.2)にもどって考察する。

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad \alpha_1 k_1 \varepsilon_1 \omega_1 > \alpha_2 k_2 \varepsilon_2 \omega_2 \\ \qquad k_1 > k_2 \gg 1 \end{array}\right\} \qquad (3.30)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\quad \alpha_1 k_1 \varepsilon_1 \omega_1 < \alpha_2 k_2 \varepsilon_2 \omega_2 \\ \qquad k_1 > k_2 \gg 1 \end{array}\right\} \qquad (3.31)$$

1）の場合は2周波存在するが，低い周波数の方が立上りが早いので，高い周波数の成分は非常に少いであろう。2)の場合はスイッチを入れた瞬間には高い周波数成分しか存在しないが，初期条件によって高い周波数だけ存在する場合と，式(3.26)を満足しているので2周波存在する場合がある。1)と2)の場合は式(3.21)から振幅の根号の中が負になる場合があるので，この発振で2周波が観測されても，それは間欠発振と見るべきである。

次に2周波が発振したときの能動素子の平均出力について考察する。式(3.17)で入力信号を $a\ cos\ t$ とすると，出力の平均は容易にフーリエ級数に展開できて，その積分はできる

$$V_0 = \lim_{\substack{a\to\infty \\ n\to\infty}} \int_0^{\pi} k \tan^{-1}(a \cos t)\,dt$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi} \sin(2n-1)\,t\,dt$$

$$= \frac{\pi k}{2} \qquad (3.32)$$

図３．４で示されている場合は，式（３．３２）に比べて，$3/4$ 小さくなる。そのときの入力信号 x_i について考える。$\omega_1 \ll \omega_2$ を仮定するとそれぞれの出力のフーリエ級数の基本波成分は計算され，第１近似について注目すると，

$$x_1 = k \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = k \cos \omega_2 t \qquad (3.33)$$

となり，電力の単位で１周波数発振の場合と比べると $1/2$ だけ小さくなる。このように２周波にしたために出力の電圧が多くなるということはないので大出力のためには，このような発振器は不向きである。

３．５　結　　言

２周波発振器について解析と理論的考察を行なった。理論面についてはフーリエ解析が困難なために，近似度の高い解析はなかなか難かしい。式（３．２）で示される微分方程式を n 周波の場合に一般化することは容易にできるが，その解析は一層困難になる。また，そのような回路の応用面の実現方法も興味がある。

２周波発振の場合の非線形による共振周波数からの離調は，調和関係が保たれている場合には第１近似に関するかぎりは０である。実験を行なっても２つの周波数を完全に調和関係に保たせるのは，それほど簡単ではない。低

い周波数と高い周波数を高調波同期（分数調波同期）の関係を保たせるときには非線形による共振周波数からの離調よりも，２つの共振周波数のずれの方が問題になる。

この２周波発振器は強制同期信号の注入による逓倍，あるいは分周回路としての応用もあるだろう。この２つの共振回路を持っている性質を利用して高い周波数だけ発振させて，低い周波数を注入同期信号として使う方法もあろう。[119] ２周波発振と２共振回路による一周波発振との同期の容易さを考えると，２周波発振の方が小さな同期信号ですむという利点がある反面，小さな出力しか得られないという欠点がある。目的，要求によってこの２つの回路の選択は決まるだろう。それらの理論的な側面を調べるにはどうしても式(3.2)の右辺に駆動関数をつけて解析しなければならない。しかしその解析は一層困難になるであろう。式(3.27)で示されるような1自由度の発振器で調べられてきた，かたい発振[22]，やわらかい発振，そして発振条件も２周波の発振についてそれらの言葉だけで説明するのは大変無理である。式(3.36)で示したような初期条件によって１周波の発振と２周波の発振が見られる例も，いわゆるかたい発振とは異なる現象である。この論文では仮に優先権のある発振と呼んだが，解析，実験がさらに進むにつれて色々の現象が解明されるものと思う。

式（３．２７）で示した振幅の過渡解は，１次の低域フィルタのステップ応答と同じである。時定数は式（２．２８）から $1/\varepsilon\omega_0$ である。この式は水晶のような Q（$=1/\varepsilon$）の高い共振回路の測定に利用できる。振幅が非常に小さい時の過渡解についてはすでに示されている。[7]

以上２周波発振器の解析と理論結果について考察してきた。共振回路１つの１自由度の発振に比べて解析の困難は一層ます。応用面としては，水晶振

動子を２個並べた２周波発振器や２つの周波数間の同期関係を保たせることにより安定な高調波をたくさん含む性質を利用した高調波発振器や逓倍器逓降器として利用できるであろう。

第 4 章　　位相同期ループによる発振器の同期

4．1　緒　　言

位相同期ループの問題を簡単にいえば，位相制御系による位相制御発振器の同期の問題である。位相情報の再生という意味ではもっと簡単な方法として古くから知られているロックドオッシレータによる方法もある(60)(61)。それは非線形振動論において強制同期の問題として非自律系の中の重要な問題である。それを第2章で行なった微分方程式で書けば

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon\left(1 - \frac{k}{1 + x^2}\right)\dot{x} + \mu \ \sin \nu t \tag{4.1}$$

のようになるであろう。ただし$\nu \fallingdotseq 1$，$\varepsilon \ll 1$である。式（4．1）の平均法による第1近似を考えると位相と振幅に関する変数分離の1次の微分方程式になる。解を次のように仮定する。(11)

$$x = \mu' \sin \ (\nu t + \phi) \tag{4.2}$$

位相に関する第1近似解は

$$\frac{d\phi}{dt} = 1 - \nu - \frac{\mu}{2\mu'} \sin\phi \tag{4.3}$$

となりこの式は*Adler*(62)の式として知られているものである。この式をさらに別の立場から見れば，この式は位相同期ループの1次の場合と同じである。このようにロックドオッシレータ方式でも*SNR*の改善に役立つ場合もあろう。(60)しかし実際のシステムでは2次以上の高次ループで作られる場合が多いので，その時はロックドオッシレータ方式は不向きである。送信信号の性質が与えられたとき設計に比較的自由度のある位相同期ループの

方が一般にはすぐれている。以下位相同期ループについて述べる。

位相同期ループの解析の困難性はループの中に非線形要素を含むことと雑音を含むためである。そのために解析はかなり困難であり，またスレッショールド附近の解析は不十分である。*PLL* が広く各方面に使用されるようになって久しくなるが，*PLL* と同じような構成図で書けるループは，たとえばレーダトラッキング，航法システムそして同期通信システムなどがあるが，厳密にはいずれも非線形特性を持ちそして雑音が重ね合わされる。この論文では主に *PLL* について記述するが，相互相関によって生じる位相の項の非線形特性を別の関数で置き換えれば他のシステムにも応用できる。[74]，[75]

PLL に関する解析方法は種々あるが，本論文ではシステムがマルコフプロセスであることを仮定し，フォッカ・プランク方程式（*F*・*P*方程式）を用いて解析を行なっている。この*F*・*P*方程式を使って大きな成果を上げた *Viterbi*[93] は２次ループについて卓抜な方法で条件付期待値を近似的に決定している。一般的なループについてはリンゼイ[100][101][102]が考察を行なっているが，その解析は入力信号の無変調の場合についてである。筆者らは先に[99]，[109]入力信号がガウス形雑音によって変調されている場合の一般的な場合について，リンゼイとは異なった方法で確率密度関数に関する微分方程式を求め，条件付期待値に関する近似法を提案した。振幅一定の信号に対して，高い *SNR* のときのシステムの各パラメータはカルマンフィルタの特別な場合として定められるであろう。
ここで求めた解析結果はすでに線形を仮定して求めた最適推定の *Ricatti* 方程式が求められているので，非線形によるペナルティも近似的に求まる。

他の *PLL* に関する論文も含めてそれらの解析はいずれも入力信号の振幅

が一定であることを暗々裡のうちに行なっていた。本論文では振幅が広帯域ガウス形雑音によって振幅変調を受けている場合について，システムをより一般化して考察を行なっている。ここで取扱うモデルは最も一般化した時変システムである，*PLL*[92] はもちろん，周波数同期ループ（*FLL*）[73] などにおいて，あらゆる状態について常に振幅を一定することは，たとえば，*AGC* ループ，リミッタ等があるが，必ずしも容易なことではない。時変システムを解析することによって，従来の結果との比較をおこないそしてループへの入力信号の振幅変化の影響について調べた。積極的に振幅変調をしているものはもちろん，*CW*レーダのエコー（ *echo* ）のように強いフェージングを受けている受信信号を受けるシステムではスレシホールド附近の問題を論ずるときには従来の理論では十分ではない。時変系のモデルを*F*・*P*方程式を用いて解析した例を他に見ない。

4.2　フォッカ・プランク方程式による一般的な位相同期ループの解析

4.2.1　基礎方程式の誘導

無線通信システムの最も重要なそしてさけられない防害は熱雑音である。その雑音のスペクトル密度は受信機の周波数範囲にわたってほとんど平坦である平均0の広帯域ガウス形プロセスである。したがって実際問題としては白いとして取扱われる。白い雑音の表現のためによく使われるパラメータはフィルタのバンド巾によって正規化された帯域通過フィルタを通った電力の量である。$2No$ *Watts*／*Hz* で示される量を一般に片側雑音スペクトル密度と呼ばれる。$No=KT$ でKはボルツマン定数そしてTはシステムの温度で絶対温度である。それと対称して両側スペクトル密度と呼ばれる実際のスペクトル密度は正負の周波数で帯域通過フィルタによって

正規化された雑音電力を表わしているので No $Watts/Hz$ である。簡単にするために白い雑音が中心周波数 ω_0 でそして $2\omega_0$ rad/sec 以下の周波数のみを通過させるような平坦な通過帯域を持った対称広帯域帯域ろ波器を通ったものと仮定する。今 $\beta < \omega_0$ とすると充分広い周波数範囲 2β にわたって雑音のスペクトル密度を No と考える。$|\omega| > 2\omega_0$ では密度は省略できるとして $\omega > 0$ ではそれは $\omega - \omega_0$ の偶関数であり $\omega < 0$ では $\omega + \omega_0$ の偶関数である。平均値0でそして上で述べたようなスペクトル密度を持った狭帯域定常ガウス形プロセス $n(t)$ は次のように表わせる。

$$n(t) = \sqrt{2}\,[\,n_1(t)\sin\omega_0 t + n_2(t)\cos\omega_0 t\,] \qquad (4.4)$$

ただし $n_1(t)$ と $n_2(t)$ は平均値0そして同一スペクトル密度の独立ガウス形プロセスである，そして $n(t)$ のスペクトル密度と同一である。しかし中心周波数0に変換されている。したがって $n_1(t)$ と $n_2(t)$ は ω の偶関数であるスペクトル密度をもつそしてその振巾は $\beta < \omega_0$ とすると周波数 $|\omega| \leq \beta$ の充分広い範囲で N_0 である。加えられる白いガウス形雑音がいかに PLL の動作に影響するか調べるために受信信号を次のようにする。

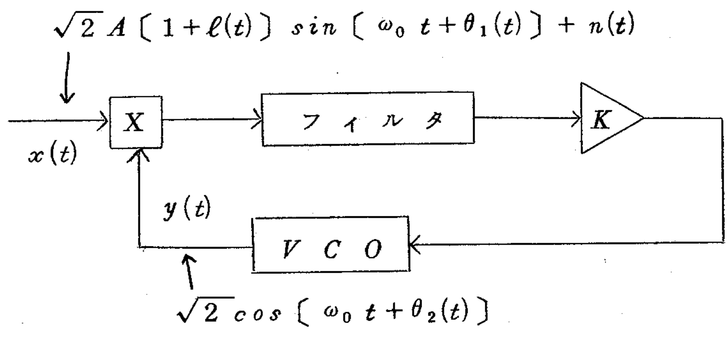


図 4．1(a)　位相同期ループ

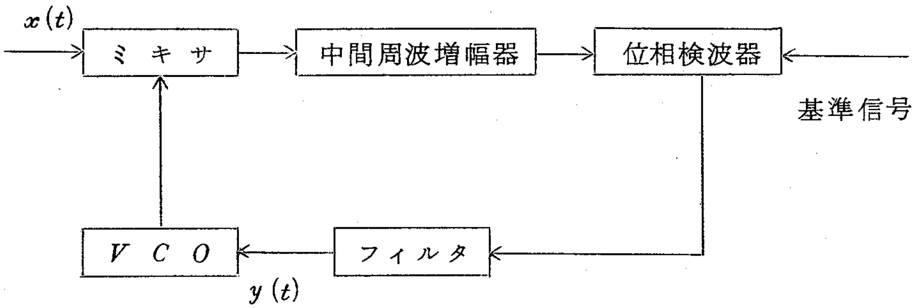


図4．1(b)　位相同期ループ

$$\sqrt{2}A\left[1+\ell(t)\right]\sin\theta(t)+n(t)=\sqrt{2}\left\{A\left[1+\ell(t)\right]\sin\left[\omega_0 t+\theta_1(t)\right]\right.$$
$$\left.+n_1(t)\sin\omega_0 t+n_2(t)\cos\omega_0 t\right\} \qquad (4.5)$$

$\ell(t)$は $n(t)$ と同じような統計的性質をもち，その片側スペクトル密度を $2L_0$ とする。VCO の出力信号は，

$$\sqrt{2}k_1\cos\theta'(t)=\sqrt{2}k_1\cos\left[\omega_0 t+\theta_2(t)\right] \qquad (4.6)$$

この場合勿論 $\theta'(t)$ は変調信号 $\theta(t)$ばかりでなく雑音の関数である。掛算器の出力は，

$$x(t)=A\left[1+\ell(t)\right]k_1\sin\left[\theta_1(t)-\theta_2(t)\right]-k_1 n_1(t)\sin\theta_2(t)$$
$$+k_1 n_2(t)\cos\theta_2(t)+A\left[1+\ell(t)\right]k_1\sin\left[2\omega_0 t+\theta_1(t)+\theta_2(t)\right]$$
$$+k_1 n_1(t)\sin\left[2\omega_0 t+\theta_2(t)\right]+k_1 n_2(t)\cos\left[2\omega_0 t+\theta_2(t)\right] \qquad (4.7)$$

信号の項のスペクトルは比較的狭く $n_1(t)$ と $n_2(t)$ の項は $|\omega|>\omega_0$ で省略できる。一方 VCO の中心周波数 ω_0 はループコンポーネント周波数範囲よりはるかに高いので，周波数 $2\omega_0$ rad/sec に中心をもつ全ての項は省略される。したがってろ波された掛算器の出力である VCO への入力信号を次のように書くことができる。

$$e(t)=k_1\int_0^t\left\{A\left[1+\ell(u)\right]\sin\phi(u)-n_1(u)\sin\theta_2(u)\right.$$
$$\left.+n_2(u)\,con\,\theta_2(u)\right\}f(t-u)\,du \qquad (4.8)$$

ただし，

$$\phi=\theta_1(t)-\theta_2(t)$$
$$K=k_1\,k_2$$

$$n'(t)=-n_1(t)\sin\theta_2(t)+n_2(t)\cos\theta_2(t) \qquad (4\cdot9)$$

とすると式 (4.8) からループの方程式は

$$\frac{d\phi(t)}{d\,t}=\frac{d\,\theta_1(t)}{d\,t}-k\int_0^t\left\{A\left[1+\ell(u)\right]\sin\phi(u)+n'(u)\right\}f(t-u)\,du \qquad (4.10)$$

この方程式は図 4．2のブロックダイアグラムによって表わせる。

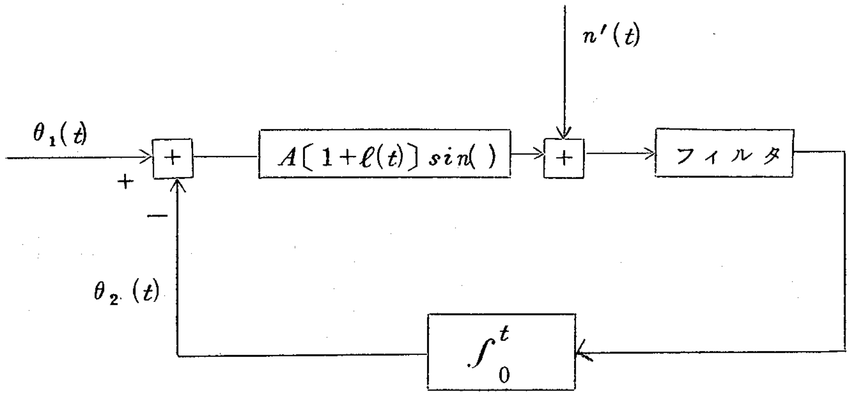
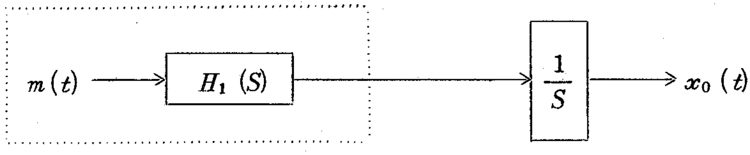
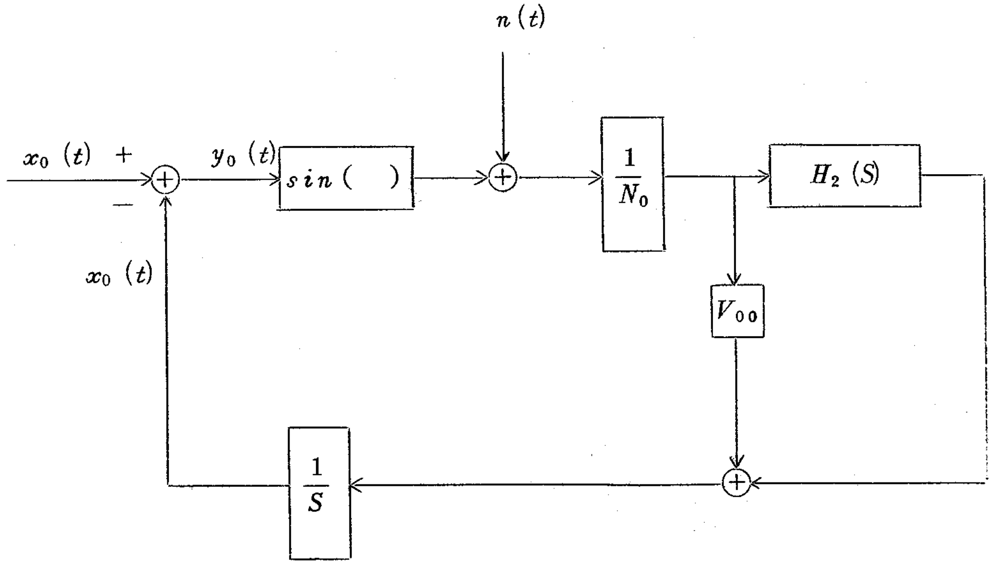


図 4．2　リミッタの無い位相同期ループ

4．2．2　振幅一定の信号に対するループの振舞



アナログ信号源



(*b*)

図 4 . 3　(*a*) 積分された定常ガウス形信号
(*b*) 白い雑音の加わった積分された定常ガウス形信号の推定のための位相同期ループ

ここで解析しようとするベースバンドの位相同期ループを図4 . 3のように振幅一定と仮定する。図 4・1からループ中に含む中間周波増幅器がループの等価雑音帯域幅と周波数変調信号の実効変調度に比べて十分広ければ，図 4 . 3のような正規化したループを近似的に仮定することができ，近似的にマルコフプロセスを仮定できるであろう。図4 . 3で信号側の $^1/_S$ は周波数変調器を示し，$x_0(t)$は定常ガウス形プロセスである。受信側の $^1/_S$ は電圧制御発振器を示す。$m(t)$ と $n(t)$ の相関関数はそれぞれ，$M_0\,\delta(t-u)$ と $N_0\,\delta(t-u)$ である平均値0の白いガウス形雑音である。そして$m(t)$ と $n(t)$ は無相関である。$H_1(s)$，$H_2(s)$，$H(s)$を次のように仮定する。

$$H_1(s) = \frac{\lambda_1 S^{m-1} + \lambda_2 S^{m-2} + \cdots + \lambda m}{S^m + \Psi_1 S^{m-1} + \cdots\cdots\cdots + \Psi m} \qquad (4.11)$$

$$H_2(s) = \frac{V_{01} S^{m-1} + V_{02} S^{m-2} + \cdots\cdots V_0 m}{S^m + \Psi_1 S^{m-1} + \cdots\cdots\cdots + \Psi m} \qquad (4.12)$$

$$H(s) = \frac{H_2(s) + V_{00}}{N_0 \; s + H_2(s) + V_{00}} \qquad (4.13)$$

$H(s)$は図 4．3 で $sin\ x_0 \doteqdot x_0$ と仮定したときの入力 $x_0(t)$に対する出力 $\hat{x}_0(t)$ のラプラス変換をした入出力比であるから，ループの伝達関数である。 Sをヘビサイドの演算子と考える。

図 4．3 と式（4．11）からベクトル $\mathbf{X}(t)$を次のように仮定する。

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

図 4．3 と式（4．11）と（4．14）から信号系に関する状態ベクトルは次の関係を満足する（104）

$$\mathring{\mathbf{X}}(t) = F\,\mathbf{X}(t) + G\;m(t) \qquad (4.15)$$

ただし，

$$
\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & \Psi_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -\Psi_1 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -\Psi_2 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 0 & -\Psi_m & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \tag{4.16}
$$

ここに

$$
\lambda_0 = 0, \quad \Psi_0 = -1 \tag{4.17}
$$

ループのプロセスに関する方程式は図４．３と式（４．１２）から(104)

$$
\dot{\hat{\mathbf{X}}}(t)=\boldsymbol{F}\hat{\mathbf{X}}(t)+\frac{1}{N_0}\boldsymbol{V}\left[n(t)+\sin\ y_0(t)\right] \tag{4.18}
$$

ただし

$$
y_0(t)=x_0(t)-\hat{x}_0(t)
$$

$$
\hat{\mathbf{X}}_0(t)=\begin{bmatrix} \hat{x}_0(t) \\ \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_m(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} V_{00} \\ V_{01} \\ V_{02} \\ \\ V_{0m} \end{bmatrix} \tag{4.19}
$$

$y_0(t)$は図４．１の中間周波増幅器を出たキャリアと基準信号との位相誤差である図４．３でループのSNRが十分高い場合には位相検波器の動作はほとんど直線と見なすことができ，$\sin\ y_0(t) \doteqdot y_0(t)$ を仮定できるであろう。その時式（４．１８）は定常状態において，次の関係を満足するときループは最適化される。(104)

$$\dot{V} = F V + V F^T + M_0 G G^T - \frac{1}{N_0} V \qquad (4.20)$$

ただしVは（ $m+1$ ）×（ $m+1$ ）の対称マトリックスでその（ i ， k ）番目のエレメントはV_{oi} V_{ok}である。式（4.20）は連続系のカルマンフィルタの特別の場合でありリカッチ方程式と呼ばれている。$sin\ yo(t)$の非線形項が無視できない場合には式（4.20）は最適という保証はないが非常に参考になるであろう。そこでさらに位相誤差に注目して考察する。式（4.15）と（4.18）から信号系を受信系それぞれの状態変数の誤差のプロセスに関する方程式は

$$\dot{Y}(t) = F Y(t) + G m(t) - \frac{1}{N_0} V \left[n(t) + sin\ \ yo(t) \right] \qquad (4.21)$$

ただし

$$Y(t) = X(t) - \hat{X}(t) \qquad (4.22)$$

式（4.21）を *Fokker − planck* 方程式を用いてその振舞を考察する。式（4.21）から文献[93]により１次のモーメントA_kと２次のモーメントA_{ik}を求める。１次のモーメントA_kは

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = FY - \frac{1}{N_0} V\ \ sin\ \ y_0 \qquad (4.23)$$

より１次のモーメントは式（4.23）から次のように書くこともできる。

$$A_k = -\Psi_k\, y_1 + y_{k+1} - \frac{V_{0k}}{N_0}\ \ sin\ y_0 \qquad (4.24)$$

ただし　　$k = 0, 1 \cdots\cdots\cdots m$

また同様に

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots\cdots\cdots & A_{1m} \\ A_{21} & \cdots\cdots\cdots & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ A_{m1} & & A_{mm} \end{bmatrix} = M_0 GG^T + \frac{1}{N_0} VV^T \qquad (4.25)$$

より2次のモーメントは

$$A_{ik} = M_0 \lambda_i \lambda_k + \frac{1}{N_0} V_{0i} V_{0k} \qquad (4.26)$$

ただし，　$i, k = 0, 1, \cdots\cdots\cdots m$

式(4.21),(4.24),(4.26)より *Fokker − Planck* 方程式は

$$\frac{\partial P(Y, t)}{\partial t} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial V_{0k} \sin y_0 P(Y, t)}{\partial y_k}$$

$$- \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial y_{k+1} P(Y, t)}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Psi_k y_1 P(Y, t)}{\partial y_k}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} \left[\lambda_i \lambda_k M_0 + \frac{V_{0i} V_{0k}}{N_0} \right] P(Y, t) \qquad (4.27)$$

初期条件は　$P(Y, o) = \prod_{k=0}^{m} \delta \left[y_k - y_k(0) \right]$　(4.28)

式(4.27)を$-\infty$から$+\infty$までy_1，y_2，$y_3 \cdots\cdots\cdots y_m$

に関して積分する。文献[93][102]の直交原理を用いると次の関係が成立する。

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}P(Y,t)\,dy_1\cdots\cdots dy_m=P(y_0,t)\\&\frac{\partial}{\partial y_k}y_0P(y_0,t)=0\qquad(k\neq0)\\&\frac{\partial}{\partial y_k}y_{k+1}P(y_0,t)=0\qquad(k\neq0)\end{aligned}\right\}\qquad(4.29)$$

さらに結合確率と条件付期待値の関係から

$$\int_{-\infty}^{\infty}y_1P(y_0,y_1,t)\,dy_1=E(y_1,t\mid y_0)P(y_0)\qquad(4.30)$$

式(4.29)と(4.30)の関係から式(4.27)の$P(Y,t)$に関する偏微分方程式は積分によって，次のような$P(y_0,t)$に関する偏微分方程式になる。

$$\frac{\partial P(y_0,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y_0}\left[\frac{V_{00}}{N_0}\sin y_0-E(y_1,t\mid y_0)\right]P(y_0,t)+\frac{{V_{00}}^2}{2N_0}\frac{\partial^2P(y_0,t)}{\partial {y_0}^2}\qquad(4.31)$$

ただし$E(y_1\mid y_0)$はy_0が与えられた時のy_1の条件付期待値である。以下定常状態で$(\partial P(y_0,t)/\partial t=0)$を仮定して考察する。式(4.21)の$y_1(t)$に関する式は

$$\dot{y}_1(t)=-\Psi_1y_1(t)+y_2(t)+\lambda_1m(t)-\frac{V_{01}}{N_0}[n(t)+\sin y_0(t)]\qquad(4.32)$$

式(4.22)の両辺をtからt_0まで積分する

$$y_1(t_0)-y_1(t) = -\Psi_1\int_t^{t_0} y_1(u)\,du+\int_t^{t_0} y_2(u)\,du$$

$$-\frac{V_{00}}{N_0}\int_t^{t_0} \sin y_0(u)\,du \tag{4.33}$$

$t_0 \to \infty$ としたときの式（4．33）の左辺第1項の $y_0(t)$ を与えたときの条件付期待値は

$$E\left[\,y_1(\infty) \mid y_0(t)\,\right] = 0 \tag{4.34}$$

同様に式（4．33）の右辺の第1項，第2項は直交原理から

$$\left.\begin{aligned}\int_t^{\infty} E\left[\,y_1(u) \mid y_0(t)\,\right]du=0\\ \int_t^{\infty} E\left[\,y_2(u) \mid y_0(t)\,\right]du=0\end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

式（4．34），（4．35）の関係を使うと式（4．33）は

$$E\left[\,y_1(t) \mid y_0(t)\,\right]=\frac{V_{01}}{N_0}\int_t^{\infty} E\left[\,\sin y_0(u) \mid y_0(t)\right]du$$

$$=\frac{V_{01}}{N_0}\int_0^{\infty} E\left[\,\sin y_0(t+\tau) \mid y_0(t)\right]d\tau \tag{4.36}$$

式（4．36）より

$$\frac{d}{dy_0}\left[\frac{V_{00}}{N_0}\sin y_0-E(y_1 \mid y_0)\right]P(y_0)+\frac{{V_{00}}^2}{2N_0}\,\frac{d^2P(y_0)}{d{y_0}^2}=0 \tag{4.37}$$

位相誤差 $y_0(t)$ が非常に小さいとき，$\sin y_0(t)$ もガウス形雑音になるであろう。そのときは式（4．36）の条件付期待値は

$$\int_0^{\infty} E\left[\,\sin y_0(t+\tau) \mid y_0(t)\right]d\tau \fallingdotseq \sin y_0(t)\int_0^{\infty}\rho_{y_0}(\tau)\,d\tau \tag{4.38}$$

ただし$\rho_{y_0}(\tau)$はy_0に関する自己相関関数である。$\sin y_0(t) \fallingdotseq y_0(t)$ のときは

$$\int_0^\infty \rho_{y_0}(\tau)\,d\tau = \frac{S_{y_0}(0)}{2\sigma_{y_0}{}^2} \tag{4.39}$$

$$S_{y_0}(0) = N_0 \mid H(0) \mid^2 + M_0 \left| \frac{N_0\ H_1(0)}{H_2(0)+V_{00}} \right|^2 \tag{4.40}$$

$$\sigma_{y_0}{}^2 = \frac{N_0}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H(S) \right|^2 ds$$

$$+ \frac{M_0}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \left[1-H(S) \right] \cdot \frac{H_1(S)}{S} \right|^2 ds \tag{4.41}$$

式（4．39）は正規化した自己相関関数で *parseval* の定理から求まる。式（4．40）は$\omega=0$でのパワースペクトル密度である。式（4．41）を形式的に次のように書く。

$$\sigma_{y_0}{}^2 = N_0\ B_{L1} + M_0\ B_{L2} \tag{4.42}$$

式（4．41）と（4．42）の関係からB_Lは等価雑音帯域幅と呼ばれているものである。周波数変調信号が小さくそして重ね合わされる雑音が小さいときは，$y_0 \ll 1$の関係が成立するだろう。そのときは式（4．37）は位相y_0をモジュロ2πで正規化し，境界条件，$P(-\pi)=P(\pi)$と仮定すると

$$P(y_0) \fallingdotseq \frac{exp(\alpha\ cos\ y_0)}{2\pi\ \ I_0(\alpha)} \qquad |y_0| \leq \pi \tag{4.43}$$

ただし

$$\alpha = \frac{2}{V_{00}{}^2} \left[V_{00} - \frac{V_{01}\ S_{y_0}(0)}{2\sigma_{y_0}{}^2} \right] \tag{4.44}$$

$I_0(\alpha)$は0次の変形ベッセル関数である。

αはループの実効的なSNRと見直すことができる。式(4.43)はViterbi(93), Linsey(102)が求めた式と同じであるがさらに一般化されている。式(4.37)から1次の場合には条件付期待値を含まないから式(4.43)は厳密解である。しかしそれ以外の場合でもSNRの高い所では十分成立する関係式である。さらにスレッシホールド附近まで良い近似が成立するものと考えられる。実際のループではループの中に中間周波増幅器を含むなど，その動作はかなり複雑である。その場合でもこの式を使えばSNRの良い所で等価雑音帯域幅を測定しておけば，SNRの悪くなった所でのループの動作を予想することができる。

ふたたび一次系のループについて考察する

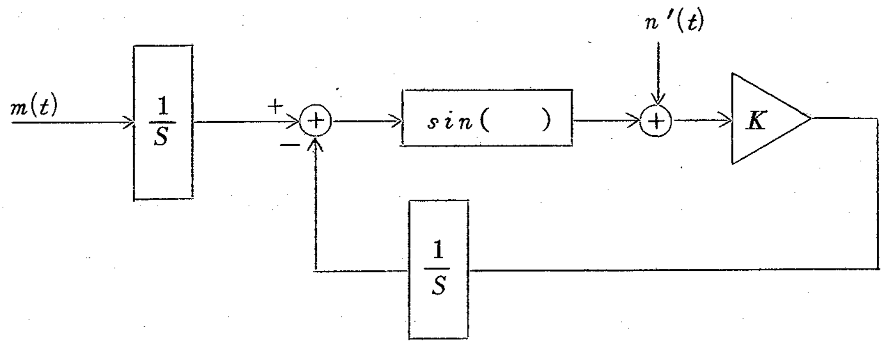


図4.4　一次の位相同期ループ

図4.4に示すようなモデルでは受信側の調整パラメータはKだけであり，図4.4のように与えられた信号系に対してKだけで最適化しようとした場合には，図4.4から実効SNRは式(4.44)を用いて

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{K}+KN_0\right) \qquad (4.45)$$

となり位相誤差の分散σ^2は

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} y_0{}^2 \, P(y_0)\, dy_0 \tag{4.46}$$

より式(4.46)は文献[93]が示すようにαが大きくなるとσ^2は小さくなる単調減少の関数であるから，図4.4の最適化は式(4.45)を最大にすれば良いから式(4.45)を最大にするKは

$$K = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \tag{4.47}$$

図4.4で$\sin y_0(t) = y_0(t)$として式(4.20)の$Ricatti$方程式を解くと

$$\frac{M_0}{K} - KN_0 = 0 \tag{4.48}$$

となり式(4.47)は式(4.48)と一致する。したがって図4.4で近似できるモデルの最適化は線形の場合と同じように$Ricatti$方程式からパラメータを定めることができる。高次のループについて若干考察すると式(4.21)からy_0に関する式は

$$\dot{y}_0(t) = y_1(t) - \frac{V_{00}}{N_0}\left[\, n(t) + \sin y_0(t) \,\right] \tag{4.49}$$

となり条件付期待値を求めると

$$E(y_1 \mid y_0) = E(\dot{y}_0 \mid y_0) + \frac{V_{00}}{N_0} \sin y_0 \tag{4.50}$$

ただし条件付期待値の定義から

$$E(\sin y_0 \mid y_0) = \sin y_0$$

式(4.37)，(4.50)から

$$\frac{d}{dy_0} E(\dot{y}_0 \mid y_0) + \frac{V_{00}{}^2}{2N_0} \frac{d^2 P(y_0)}{dy_0{}^2} = 0 \tag{4.51}$$

となりさらに式(4.51)を解くと

$$P(y_0) = exp\left(-\frac{2N_0}{V_{00}^2}\int E(\dot{y}_0 \mid y_0)\,dy_0\right)$$

$$\times\left[\int D_0\, exp\left(\frac{2N_0}{V_{00}^2}\int E(\dot{y}_0 \mid y_0)\,dy_0\right)dy_0 + C_0\right] \qquad (4.52)$$

ここにD_0とC_0は定数である。計算機によるシミュレーションで$E(\dot{y}_0 \mid y_0)$を調べることは出来る。例えば$E(\dot{y}_0 \mid y_0) \propto sin\, y_0$とすると，$E(\dot{y}_0 \mid y_0)$を最大にしたときループは2乗平均誤差を最小にするという意味で最適化される。しかも$m+1$個の状態変数のうち$\dot{y}_0$とy_0の2個の状態変数に注目すれば良いということは大変興味深い。

4.2.3 カルマンフィルタによるPLLの計算機シミュレーション

振幅変調を受けていないシステムでは具体的にパラメータを定める際には当然，最適化の問題が起こる。SNRの高い所では Kalman-Bucy の式で各パラメータは定められる(103)。しかしスレシホールド付近の問題についてはなんら保障はないが，システムの形としてはカルマンフィルタが，そのまま使われるであろう。図4.5にディジタル電子計算機を用いて，シ

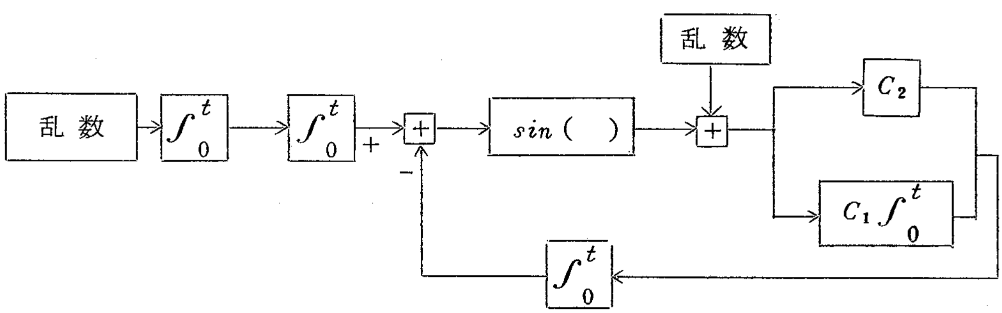


図4.5 ディジタル計算機のシミュレーションモデル

ミュレーションを行なった機能図を示す。通報系を $1/S^2$ と仮定した。通報系を定めると $Kalman-Bucy$ の理論 (103) によりループの構成が定まり，さらに $Ricatti$ 方程式を解くことにより最適なループの各係数が定まる。習慣にしたがい通報系雑音と重ね合わせ雑音の共分散をそれぞれ M_0，N_0 とすると定常状態での図 4.5 のループの各係数 C_1，C_2 は $Ricatti$ 方程式 (4.20) を解いて

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \\ C_2 &= \sqrt{2}\ \sqrt[4]{\frac{M_0}{N_0}} \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

式 (4.41) からループの SNR の逆数は

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{M_0}{2C_1C_2} + \frac{(C_1 + C_2{}^2)N_0}{2C_2} = \frac{2M_0}{C_1C_2} \tag{4.54}$$

式 (4.54) は一つのパラメータで表わされることがわかる。図 4.5 の乱数は北川の表 (112) (正規乱数，3,750 個) を用いた。サンプル間隔は $1/20 \cdot \omega_n$ ($\omega_n = \sqrt[4]{M_0/N_0}$) に選んだ。それぞれ雑音電力密度 (共分散) は乱数の分散とサンプル間隔の積に等しいと仮定した。図 4.6 と図 4.7 にシミュレーションの結果の一例を示す。ループの SNR は式 (4.54) から，確率密度関数は式 (4.43) を，分散は式 (4.41) を用いた。理論式とシミュレーションの結果が良く合致することがわかった。

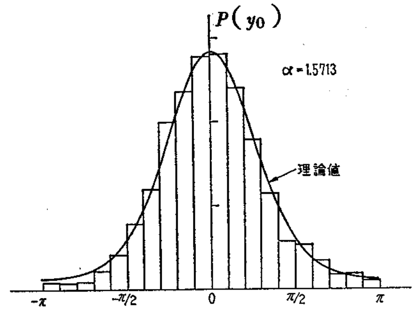


図 4 . 6　*Kalman-filter* による計算機シミュレーション

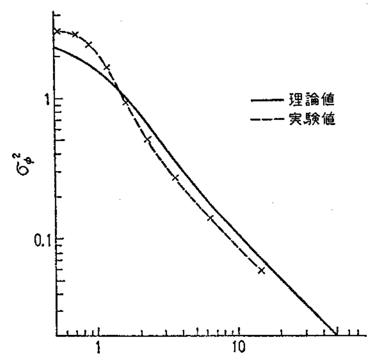


図 4 . 7　*Kalman-filter* による計算機シミュレーション

4．3　振幅変調を受ける信号に対するループの振舞

4．3．1　ループの解析

これまでの位相同期ループに関する解析はいずれも入力信号の振幅が一定であることを暗々裡のうちに行なっていた。この節では振幅が広帯域ガウス形雑音によって振幅変調を受けている場合について，システムをより一般化して考察を行なっている。ここで取扱うモデルはこれまでに解析されたなかで最も一般化した時変システムである。*PLL* はもちろん，周波数同期ループ（*FLL*）などにおいて，あらゆる状態について常に振幅を一定にすることは，たとえば，*AGC* ループ，リミッタ等があるが，必ずしも容易なことではない。積極的に振幅変調を受けているものはもちろん，*CW* レーダのエコー（*echo*）のように強いフェージングを受けている受信信号を受けるシステムではスレシホールド付近の問題を論ずるときには従来の理論だけでは十分ではない。時変システムを解析することによって，従来の結果との比較をおこないそしてループへの入力信号の振幅変化の影響について調べる。

ここで解析しようとするモデルを図 4．2のように定める。4．2．2 で行なったと同様の信号系モデルを仮定し信号系は

$$\sin y_0 \rightarrow [1+\ell(t)] \sin y_0 \qquad (4.55)$$

と変数変換すれば良い。式（4．18）に相当するループのプロセスに関する方程式は

$$\dot{X}(t) = FX(t) + \frac{1}{N_0} V \{ n(t) + [1+\ell(t)] \sin y_0(t) \} \qquad (4.56)$$

となりその他は 4．2．2 で定義したものと同じである。ここで同様に*F—P* 方程式で解析する。1次のモーメントは式（4．24）と同じである。2次の

モーメントは

$$A_{ik}=M_0\,\lambda_i\,\lambda_k+\frac{1}{N_0}V_{0i}V_{0k}\left(1+\frac{L_0}{N_0}\sin^2 y_0\right) \tag{4.57}$$

ただし　$i\,.\,k=0\,,1\,,\cdots\cdots\cdots\cdots m$

以下式の誘導は 4.2.2 と同じであるから最後の結果だけを書く。式(4.37)に相当する式は

$$\frac{d}{dy_0}\left[\frac{V_{00}}{N_0}\sin y_0-E(y_1\mid y_0)\right]P(y_0)+\frac{V_{00}{}^2}{2N_0}\frac{d^2}{dy_0{}^2}$$

$$\times\left(1+\frac{L_0}{N_0}\sin^2 y_0\right)P(y_0)=0 \tag{4.58}$$

式(4.58)を解くことは出来ない。そこで式(4.58)の条件付期待値はループの SNR が高いときにはほぼガウス形に近くなるであろう。そこで次のような関係を仮定する。

$$E(y_1\mid y_0)\propto \sin y_0 \tag{4.59}$$

そのとき式(4.58)は次のように変形できるのであろう。

$$\frac{d}{dy_0}\alpha\sin y_0\,P(y_0)+\frac{d^2}{dy_0{}^2}\left(1+\alpha\beta\sin^2 y_0\right)P(y_0)=0 \tag{4.60}$$

ここに α は 4.2.2 で行なったように式(4.41)で定める。β は

$$\alpha\beta = L_0/N_0 \tag{4.61}$$

位相 y_0 をモジュロ 2π で正規化し，境界条件，$P(-\pi)=P(\pi)$ と $y_0\ll 1$ を仮定すると，y_0 に関する確率密度関数は

$$P(y_0)=C\exp\left(\frac{1}{\beta\cdot\gamma}\log\frac{\gamma+\cos y_0}{\gamma-\cos y_0}\right) \tag{4.62}$$

$$|\,y_0\,|\leq\pi$$

ただし，

$$C=\frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} exp\left(\frac{1}{\beta\cdot\gamma}\,log\frac{\gamma+cos\ y_0}{\gamma-cos\ y_0}\right)d\,y_0} \qquad (4.63)$$

$$\gamma=\sqrt{1+\frac{1}{\alpha\cdot\beta}}$$

式(4．62)で$\beta=0$とすると，そのときは式(4.43)と一致する。確率密度関係$P(y_0)$の１例を図4．8に示す。

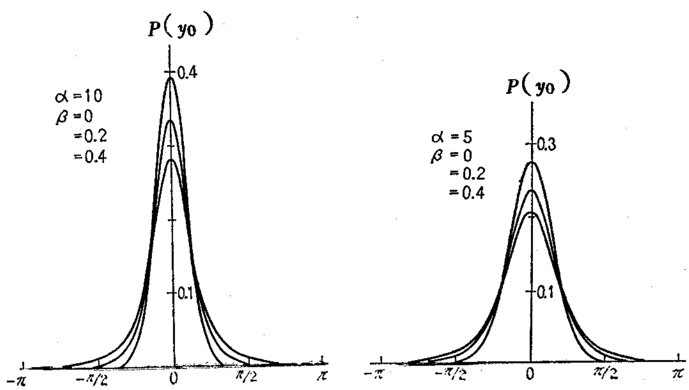


図４．８　確率密度関数

位相誤差の分散は

$$\sigma\,{y_0}^2=\int_{-\pi}^{\pi} {y_0}^2\,P(y_0)\,d\,y_0 \qquad (4.64)$$

図４．９に計算機による数値積分の一例を示す。

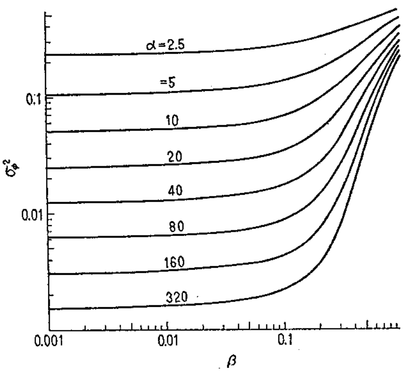


図４．９　位相誤差の分散

次に一次ループについて考察する。式（4．45）と同様にループ利得をKとするとこのときは条件付期待値を含まないので式（4．62）は厳密解である。

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\left(\frac{M_0}{K} + KN_0\right)\\ \alpha\cdot\beta &= \frac{L_0}{N_0}\end{aligned}\right\} \qquad (4.65)$$

ここで$M_0 = 0$と仮定すると式（4．65）は次のように変形できる。

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{B_L N_0}\\ \beta &= B_L L_0\end{aligned}\right\} \qquad (4.66)$$

B_L は等価雑音帯域幅である。

N_0 は入力信号のキャリアの電力で正規化されているので，α は SNR である。そして β はループに落ちこむ実効雑音電力である。

このように $M_0 = 0$ と近似できるようなループでは，ループのスレッシホールドはループの実効的 SNR と実効変調電力とによって決まる。実効変調電力はループの実効帯域幅と雑音電力密度の積になっているので，PLL（他の同期ループを含めて）はループの実効帯域幅内の振幅変調雑音はループに落ち込むがそれ以上の周波数の雑音はループに影響を与えない。したがって PLL，FLL 等のループを設計するとき，図４．１０のモデルで AGC ループの帯域幅をループの帯域幅に比べて十分広く選んで

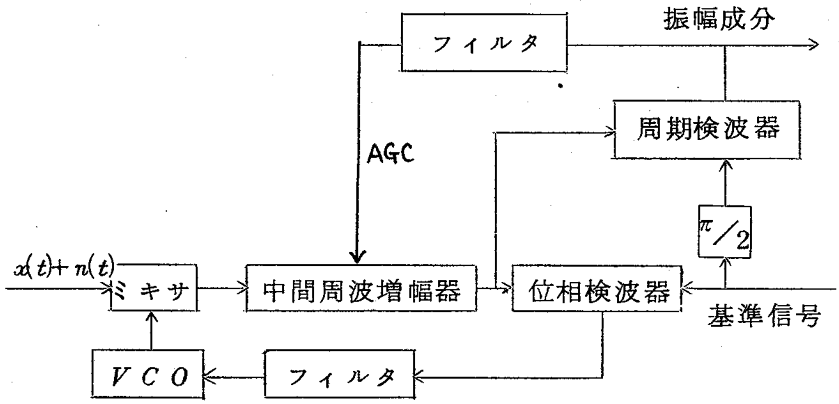


図４．１０　　AGC ループを持った位相同期ループ

おけば帯域幅の関係で AGC ループよりもリミッタの方が先にスレシホールドを持つために，図４．１０のようにリミッタを使用しないループの方が望ましいことが式（４．６６）からわかる。そのうえ，AGC のループの方がリミッタの帯域幅よりも狭いので雑音による信号の抑圧も少ないという利点もある。

4.3.2　平均同期時間について

$F \cdot P$ 方程式から平均同期時間の求め方については，文献[93][102]に詳細に述べられている。しかし条件付期待値を含まない場合はともかく，それらを含む場合には，やはりなんらかの方法で条件付期待値を定めなければならないという問題がある。

式(4.58)から，初めループは同期しており初期位相 $y_0 = 0$ を仮定し，密度関数 $P(y_0, t)$ を $q(y_0, t)$ で書き換えると

$$\frac{\partial q(y_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y_0}\left[K \sin y_0 q(y_0, t)\right] + \frac{K^2}{4}\left(L_0 \sin^2 y_0 + N_0\right)\frac{\partial^2 q(y_0, t)}{\partial y_0^2} \tag{4.67}$$

$|y_0| < y_{0l}$ において初期条件を

$$q(y_0, 0) = \delta(y_0) \tag{4.68}$$

さらに境界条件として

$$q(y_{0l}, t) = q(-y_{0l}, t) = 0 \tag{4.69}$$

式(4.67)から平均同期時間は

$$T = \frac{1}{\gamma}\int_0^{y_{0l}} d\phi \int_{y_0}^{y_{0l}} \frac{1}{\alpha\beta \sin 2x + 1} \exp\left[\frac{1}{\beta\gamma} \cdot \log \frac{(\gamma - \cos x)}{(\gamma + \cos x)} \frac{(\gamma + \cos\phi)}{(\gamma - \cos\phi)}\right] dx \tag{4.70}$$

ただし，α，β と γ はすでに式(4.63)で定義されている。

さらに高次のループについては，4.2.2 で行なったと同様の方法を用いれば平均同期時間に対する近似式は同様に求まる。

4.3.3　振幅復調器の解析

位相同期ループを持つということは，別ないい方をすると，コヒレントな信号を作るということである。この節では VCO で作られるコヒレントな信号を利用して入力信号の振幅成分を取り出そうとする同期検波回路の解析である。

4.2.2と4.3.1 で求めた確率密度関数から同期検波器の解析を行なう。PLL は実際にはアンテナ追尾レーダ等と組合わせて使用されることが多い。入力信号の振幅成分が同期指示，コヒレント AGC ，アンテナ追尾誤差信号等になりシステム全体ではこの AM 信号が全システムの限界を定めることもあるのでシステム設計の際には重要なパラメータである。同期検波回路を図 4.11 に示す。

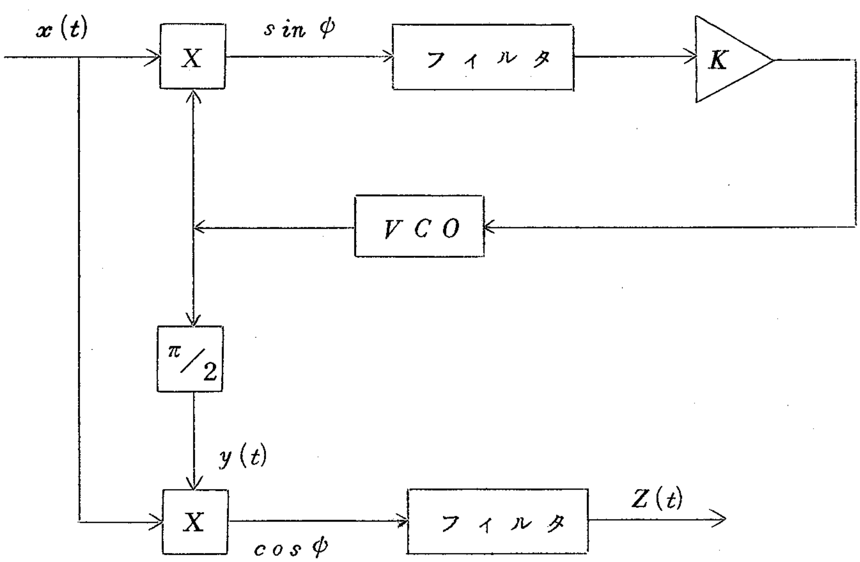


図 4.11　振 幅 復 調 器

入力信号と同期検波器への信号をそれぞれ $x'(t)$ と $y'(t)$ とする。

$$x'(t)=\sqrt{2}A\,[1+l(t)]\cos[\omega_0 t+\theta_1(t)]+n(t) \qquad (4.71)$$

$$y'(t)=\sqrt{2}\cos[\omega_0 t+\theta_2(t)] \qquad (4.72)$$

$x'(t)$ と $y'(t)$ の積で作られる出力信号の2倍の ω_0 の項はフィルタによって除かれるから

$$Z(t)=A[1+l(t)]\cos\phi(t)-n_1(t)\sin\theta_2(t)+n_2(t)\cos\theta_2(t)$$

$$=A[1+l(t)]\cos\phi(t)+n_a(t) \qquad (4.73)$$

ただし,

$$n_a(t)=-n_1(t)\sin\theta_2(t)+n_2(t)\cos\theta_2(t) \qquad (4.74)$$

出力信号の直流分は

$$E[Z(t)]=AE[\cos\phi(t)] \qquad (4.75)$$

$E[n_a(t)]$ は0であるから，すでに求まっている確率密度関数から

$$E[Z(t)]=A\int_{-\pi}^{\pi}\cos\phi P(\phi)\,d\phi \qquad (4.76)$$

$Z(t)$ の分散 σ^2 は同様に

$$\sigma^2=A^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\phi P(\phi)\,d\phi-E^2[Z(t)] \qquad (4.77)$$

確率密度関数が式(4・62)で与えられたときの同相直流出力は

$$E[Z(t)]=A\frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} \qquad (4.78)$$

ただし $I_1(\alpha)$ は1次の変形ベッセル関数である。

つぎに分散を求める。$\cos\phi(t)$ と $n_a(t)$ との間には相関がないと仮定し $E[n_a{}^2(t)]$ を σ_n^2 とすると

$$\sigma^2=A^2\left[\frac{I_2(\alpha)}{2I_0(\alpha)}+\frac{1}{2}-\frac{I_1{}^2(\alpha)}{I_0{}^2(\alpha)}\right]+\sigma_n^2 \qquad (4.79)$$

ただし

$$I_2(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} exp(\alpha\cos\theta)\cdot\cos 2\theta\, d\theta$$

それらの計算機による結果を図4.12と図4.13に示す。

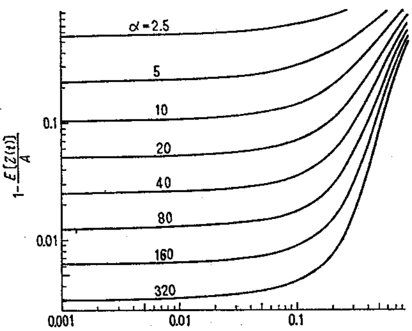


図 4.12　　AM検波器の直流出力

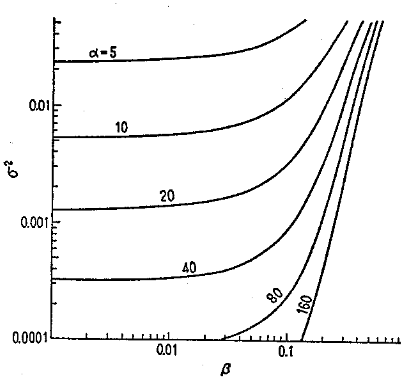


図 4.13　　AM検波器の位相誤差の分散

4．4　結　　言

位相同期ループについて E。P 方程式を用いて解析を行なった。リミッタの無い（きかない）一般的な同期ループのここで求めた確率密度関数と平均同期時間は，振幅変調の実効変調電力とループの実効 SNR によって決まる。このことはループのスレッシホールドがループの帯域幅によって定まることを示している。この論文で取扱ったモデルは従来 F 。P 方程式を用いて解析されたうちで最も一般化されている例である。これらの解析は主に変復調システムあるいはトラッキングループとして考えたが，ビット同期の問題としても応用できるであろう。

非線形の２次以上のループでは微分方程式の係数に条件付期待値を含み，係数の定まらない微分方程式となり，結局近似式しか求まらない。しかし，１次ループは厳密解となって位相の分散も正確に計算されるので，分散を最小にするループのパラメータも定まる。これらの同期ループを実際に構成するときはカルマンフィルタが，線形問題であるとはいえ応用されるであろう。実際問題として変調雑音の相関関数を常に正しく求めるということは困難である。非線形ループの F・P 方程式による表現は便利であるが最適化の問題は今後の問題である。

第5章　結　　論

本研究は tan^{-1} の入出力特性を持った発振器と位相制御発振器の位相同期ループによる同期に関して解析と考察を行なったものである。この研究により得られた成果は次のようなものである。2章関係については

(1)　大振幅動作を含む $Van\ der\ Pol$ の微分方程式を拡張した，共振回路の Q とループ利得の2つの定数を含む微分方程式を Q の大きい場合について発振振幅と角周波数の才2近似解を得た。ここで得た解は今まで良く知られていた $Van\ der\ Pol$ の才2近似解を含む一般化した解であることがわかった。水晶発振器において水晶振動子の Q が約 10^6 程度あることを考へると，非線形による共振回路の中心周波数の離調は $1/Q^2$ のオーダで利くのでほとんど無視できる。この微分方程式で表わされるような発振回路でループ利得を非常に大きくしておくと，発振開始の過渡応答から共振回路の Q が測定できる。

(2)　Q の小さなマルチバイブレータについて漸近的に発振周波数を求めた。この結果周波数の安定したマルチバイブレータは難かしいことがわかった。

(3)　バイアスを含むさらに一般化した微分方程式を Q が大きく，ループ利得が大きい場合について振幅と角周波数の才2近似解を得た。発振停止寸前までバイアスを深くするとバイアス0の場合に比べて，離調項で約4．1倍大きく，振幅で約 $3dB$ 小さくなる。そしてバイアスの方向により発振の開始と停止にヒステリシスを持つ。さらにこの発振はかたい発振である。

(4)　プッシュプル形の発振器のクロスオーバ歪に注目して，Q が大きく，ループ利得が大きい場合について振幅と角周波数の才2近似解を得た。この場合もやはりバイアスの方向によって発振の開始と停止にヒステリシスをもつ。この発振もかたい発振である。

(5) 高い周波数で発振したとき問題になる半導体素子の位相遅れや遅延について注目し，式をさらに一般化した微分差分方程を Q が大きい場合について振幅と角周波数の才1近似解を求めた。周波数の離調は $1/Q$ のオーダで利くので安定な発振周波数を望む発振器では出来るだけしゃ断周波数の高い，キャリア蓄積時間の少ない能動素子を使うことが望ましい。

(6) 2安定と3安定のマルチバイブレータについて2階の非線形微分方程式の特異点の性質を調べることによって，目的の回路の各定数の決め方について考察した。この微分方程式を位相平面上で解くことはほとんど出来ず，不安定点から安定点へそして *Separatrix* を等傾線法と計算機による *Runge-Kutta* 法によって1例について考察を行った。

才3章関係については(7) 2周波発振器の小振幅動作については，物理的には負性低抗素子を使った発振器に相当する。摂動法を用いて才1近似解を求めると，たくさんの解がある。そこで解の振幅の安定性を調べることによって，安定なリミットサイクルと不安定なリミットサイクルの判定をする。1例として具体的に計算した結果，解の中に *Van der Pol* の解の才1近似解を含むことがわかり，*Van der Pol* の微分方程式の一般化であることがわかった。

(8) 大振幅動作についてはおもに近似双記述関数法を用いて安定なリミットサイクルの存在の限界について調べた。さらに発振の立上りの過渡解から発振の立上りに優先権があることがわかった。そのときは初期条件によって2周波存在したり，1周波しか存在しないような場合がある。この2周波発振器は低い周波数と高い周波数の間に同期関係が保たれるときと非同期の場合があり，同期関係が保たれるときには逓振器や逓降器にこの2周波発振器は利用できることがわかった。

才4章関係については

(9) 入力信号がランダム雑音によって周波数変調を受けているそしてその信号に白い雑音が重ね合わされる。そのような位相同期ループのモデルについてベクトルマルコフプロセスを仮定して，送信係と受信係の誤差に関するプロセスの状態方程式から，フオッカ，プランク方程式を用いて解析した。その結果一次ループについては条件付期待値を含まないので誤差の確率密度関数と平均同期時間は厳密解である。2次以上のループについては条件付期待値を含むので近似式しか求まらない。ここで求めた近似式は*Viterbi*の方法に近いものであるが，ここで求めた結果は，*Viterbi*や*Linsey*などの結果をさらに一般化している。特別な場合として2次系についてループのパラメータを*Ricatti* 方程式から求めた場合について，計算機によるシミュレーションを行ったがここで求めた近似式はループのスレッショールド附近までよく近似することがわかった。

(10) モデルをさらに一般化してキャリアが広帯域雑音で振幅変調を受けている場合について同様に*F*・*P*方程式を用いて解析を行った。一次ループについては同様に厳密解が求まるのであるが，この場合振幅変調雑音はループの帯域幅内にしか落ちこまないことがわかった。この結果を利用してループの中にリミッタを使用しないで*AGC*ループを用いたスレッショールドの低い位相同期ループを提案した。ここで求めた確率密度関数は*Viterbi* や*Linsey*等が求めた確率密度関数を一般化している。

(11) 位相同期ループと組合せて良く使用される同期検波器についてここで求めた確率密度関数から出力の*DC*出力とゆらぎを計算した。

謝　　　辞

本研究は防衛庁技術研究本部，研究所へ入所以来の研究成果と大阪大学大学院工学研究科修士課程での研究成果をまとめたものである。大学院における研究テーマとして位相同期ループの研究を快よく許していただいた。今は退官された大阪大学名誉教授青柳健次博士と滑川敏彦教授に，そしてその研究テーマはこの論文の才４章を構成することになったのであるが，その間滑川敏彦教授はもとより，終始変らぬ御指導御鞭達をいただいた同研究室の大阪大学助手平井宏博士，同助手森永規彦博士そして今は姫路工業大学へ赴任された山内健次博士に深く感謝します。

才２章，才３章関係の tan^{-1} 近似の非線形発振器の研究は大学院在学中，滑川敏彦教授より御教示されたものであるが，直接研究され学位を取られて今は大阪大学助手の村田正博士より引き継いで行った成果であり，その間色々御指導たまわった同博士に深く感謝します。

この研究をまとめるにあたって発表した一連の電子通信学会論文誌と *IEEE* 関係論文誌に掲載された論文は２年間の修士課程での講義と滑川研究室の色々な意味での力なくしては決して発表されなかっただろうことを思うと，その間御指導御鞭達下さった関係各位にも深く感謝します。

主 な 記 号

才2， 3章関係

g_{ik} ：能動素子のハイブリッドマトリックスの要素

x ：能動素子の入力信号

C ：コンデンサ

L ：インダクタンス

R ：抵抗

$F(s)$ ：フィルタの伝達関数

ω_0 ：共振回路の自然周波数

ε ：Qの逆数

k ：ループ利得

v ：能動素子の出力信号

y ：dx/dt

D ：リミットサイクルの判別式

Q ：共振回路の尖鋭度

V ：リアプノフ関数

$F^{※}(x)$ ：xの関数

a ：余弦波の振幅

Φ ：位相

n ：正の整数

ω ：角周波数

Kf ：ひずみ率

θ ：定数

Z ：xの積分

b　：直流バイアス

B　：正規化した直流バイアス

T　：遅延時間

ρ　：ωとTの積

x_0　：特異点のx軸の座標

才4章関係

A　：信号の振幅

$\ell(t)$, $m(t)$, $n(t)$　：白いガラス形雑音

K　：ループの利得

$H_1(s)$　：信号モデル

$H_2(s)$　：ループフィルタ

$H(s)$　：ループの伝達関数

$X(t)$, $\hat{X}(t)$, $Y(t)$：ベクトル

$\boldsymbol{F}$, G, $\boldsymbol{V}$：マトリックス

A_i　：一次のモーメント

A_{ik}　：二次のモーメント

$P(Y, t)$：確率密度関数

L_0, M_0, N_0：白い雑音の共分散

$\rho(\tau)$　：自己相関関数

σ^2　：分散

B_L　：等価雑音帯域幅

α　：ループの実効 SNR

$E(\cdot|\cdot)$：条件付期待値

C_0, D_0：積分定数

ω_n　：自然周波数

β　：実効雑音電力

T　：平均同期時間

$Z(t)$　：振幅復調器の出力

$Ii(\ )$：変形ベッセル関数

文　　献

(1) *R.S. Ravan "Requirements on Mastdr Oscillators for Coherent Radar" Proc. IEEE Vol* 54, *No*.2, *Feb*. 1966, *PP*237-244

(2) *J.W.S. Rayleigh "The Theory of Sound VoL* 1 *" Dover* 1945

(3) *J.W.S. Rayleigh "The Theory of Sound VoL* II*" Dover* 1945

(4) *J. Groszkowski "Frequency of Self-Oscillation" Purn-Polish Scientific Pub. Warszawa* 1964

(5) *J.L. Stoker "Nonlinear Vibration" Interscience* 1966

(6) *C. Hayashi "Nonlinear oscillations in Physical Systems" Mc Graw - Hill, New York* 1964

(7) ボゴリューボフ，ミトロポリスキ“非線形振動論”　益子訳　共立出版　昭36

(8) 清水　“非線形振動論”　培風館　昭40

(9) 杉山　“非線形振動”　広川書店　昭41

(10) 前沢　“非線形常微分方程式”　ダイアモンド社　昭44

(11) 志村　“非線形回路理論”　昭晃堂　昭44

(12) 佐藤　“非線形振動論”　朝倉書店　昭45

(13) サンソネ　“微分方程式”　広川書店　昭41

(14) *N.W. McLachlan "Ordinary Non-linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences" Oxford* 1954

(15) *P.R. Scott, Jr* "*Large amplitude Operation of the Nonlinear Oscillator*" *Proc IEEE Lettess, P* 2182 (*Dec.*1968)

(16) *R.J.Mulholland* "*One-Parameter Independent Bound for a two-Parameter Oscillator*" *PProc. IEEE letters P.* 1296 *July,* 1969

(17) *R.J. Mulholland* "*Private Communication on Two-Parameter Oscillator*" *Oct.*1969

(18) *R.J. Mulholland* "*Private Communication on Bounds for a Two-Parameter Nonlinear Oscillator*" *Dec,* 1970

(19) 太田, 鈴木, 村田, 滑川 "ディジタル*IC*を使った発振器の実験" 昭44 連大 2083

(20) 村田, 太田, 鈴木, 滑川 "リミットサイクルを用いた非線形発振器の解析に関する一考察" 東海支部連大 39−*B*−7 昭44

(21) 鈴木, 他 "ディジタル*IC*を用いた発振器の解析―漸近的方法について―" 昭45 信学全大 771

(22) 村田, 滑川, 鈴木 "tan^{-1}の入出力特性を持った発振器の一考察" 信学全大 962 和46

(23) 村田, 太田, 鈴木, 滑川 "ディジタル*IC*を用いた発振器の一考察" 信学論(*A*) 53−*A*, 1, *P*24 (昭45−01)

(24) 鈴木, 滑川 "「ディジタル*IC*を用いた発振器の一考察」に対する補遺" 信学論*A*, *VOL*53−*A*−10, *P*567 (昭45−10) (技術談話室)

(25) 鈴木, 滑川 "tan^{-1}の入出力特性を持った発振器の一考察" 信学論(*A*), 54−*A*, 4, *P*.218 (昭46−04)

(26) 鈴木, 滑川 "tan^{-1}の入出力特性を持った発振器の解析" 信学論(*A*),

54－*A*, 4, *P*. 943 （昭46－09）
(27) 堀口, 坂井, 山崎 “ディジタル*IC*発振器” 信学全大954 昭46
(28) 志村 “*LC*発振回路における寄生振動の解析” 信学論（*A*）53－*A*, 11,（昭45－11）
(29) 大畑 “発振領域から見た水晶発振器の発振周波数について” 信学論（*A*）, 51－*A*, 10,（昭43－10）
(30) *D. L. Hester* “*The Nonlinear Theory of a Class of Transistors Oscillators*” *IEEE Trans. CT, Vol*. 15, *No*. 2, *June*, 1968 *PP*111～118
(31) 三宅 “トランジスタ水晶発振器” 信学誌（解説） （昭45－06）
(32) 金子 “大振幅パルス駆動フリップフロップ回路の解析” 信学論（*C*）, 52－*C*, 11, *P* 683,（昭44－11）
(33) 田中, 田原 “三安定回路の位相面解析” 信学論（*C*）, 52－*C*, 11, *P*667,（昭44－11）
(34) *L. A. Pipes* “*The Reversion Method for Solving Non-linear Differential Eqations*” *J.A.P, Vol*23, *No*. 2, *Feb*. 1952
(35) *G. I. Cohn* “*Solution of Nonlinear Differential Equations by Reversion Method*” *J.A.P. Vol* 24, *Feb*. 1953
(36) *A.T. Murgan* “*A General Stability Criterion of the Oscillations in Nonlinear Systems*” *PROC. IEEE* (*Letters*) *Jan*. 1971
(37) *Murata, Ohta, Suzuki, Namekawa* “*Analysis of on Oscillator Consisting of Digital Integrated Circuits*” *IEEE J.S.S.C* (*Correpondence*), *SC*－5, 4, *Aug*. 1970

(38) 村田 “受信装置への集積回路導入に関する研究” 大阪大学学位論文 昭44年12月

(39) 滑川 “リンアICの現状とその動向”エレクトロニクス，昭43年11月

(40) *J.E. Gibson* “非線形自動制御” 堀井訳 コロナ社 昭43

(41) 椹木，砂原 “自動制御理論” オーム社 昭42年

(42) 高橋 “自動制御の数字” オーム社 昭37年

(43) 増淵 “最適制御理論” オーム社 昭41年

(44) 川上 “真空管を含む線形回路網の理論” 共立出版 昭30年

(45) 岡村，菅野，角田 “電子回路原論 オ一巻” 内田老鶴圃 昭33

(46) 岡村，菅野，角田 “電子回路原論 オ二巻” 内田老鶴圃 昭35

(47) 森口，他 “数学公式集 Ⅱ” 岩波書店 *P*252 昭32

(48) 森口，他 “数学公式集 Ⅰ” 岩波書店 昭32

(49) *J.P. Oehmichen* “*Les Transistors Complémentaires et Les Associations NPN − PNP*” *L'onde électrique No.*466 *Jan.* 1966

(50) *W.D. Roehr* “*Switching Transistor Handbook*” *Motorola*, 1963

(51) 川又 “パルス基礎回路” 日刊工業 *P*80 昭37

(52) 文献(40) *P*318

(53) 文献(40) *P*334

(54) 文献(10) *P*125

(55) 文献(7) *PP.*158−160

(56) 文献(40) *PP.*405〜471

(57) 文献(7) *P*82

(58) 文献（ 7 ） P96

(59) 文献（40） P259

(60) 斎藤，高木，真野 “ランダム雑音に対する同期引込み発振器の応答” 信学論（A），51−A，1，（昭43−01）

(61) M. Michaelicles, I.M. Stephenson "Injection Locking of Microwave Solid-State Oscillators" Proc. IEEE (Letters) P 319, Feb. 1971

(62) R. Adler "A stndy of Locking Phenomena in Oscill-ators" Proc. IRE June, 1946, PP351−357

(63) K.R. Wendt, G.L. Fredendall "Automatic Frequency and Phase Control of Synchronization in Television Receivers" Proc. IRE Jan. 1943 PP7−15

(64) D. Richman "Color - Carrier Refference Phase Synchro-nization Accuracy in NTSC Color Television" Proc. IRE Jan. 1954 PP106−132

(65) 鈴木，中井 “飛しょう体誘導方式” 特許452043，昭40年7月

(66) 鈴木 “振幅変調復調方式” 特許第598248 昭46年2月

(67) F.M. Gardner "Phaselock Techniques "John Wiley & Sons, Inc. 1966

(68) K.K. Clarke, D.T. Hess "Frequency Locked Loop FM Demodulator" IEEE Trans. COM Vol. COM−15, No.4 Aug. 1967, PP518−524

(69) D.L. Schilling, J.Billig "On the Threshold Exten-sion Capability of the PLL and FDMFB" Proc. IEEE, May, 1964, PP621−622

(70) J.H. Roberts "Frequency – feedback receiver as a low – thveshold demodulator in f.m.f.d.m. satellite systems" Proc. IEE Vol. 115, No, 11, Nov. 1968

(71) H.Heinemann, etal "Multiple – Loop Frequency-Compressive Feedback for Angle-Modulation Detection" RCA review, June, 1968, PP252–269

(72) J.A. Camp "A Comparison of the Threshold Extension Capabilities of FMFB and Phase-Locked Loop Demodulators Employed in FDM-FM Communication Systems" IEEE, Trans. COM, Vol.COM–18, No.3, June, 1970

(73) 柴田，鈴木，他 "フォッカ・プランク方程式を用いた周波数同期ループの解析" 昭45，連大

(74) 有馬，鈴木，滑川 "パルス位相同期ループの一考察" 昭44 連大 2690

(75) 有馬 "大阪大学卒業論文（通信工学科）" 昭44

(76) S.C. Gupta "Status of Digital Phase-Locked Loops" AD702617 Mar. 1970

(77) C.J. Byrne "Properties and Design of the Phase-Controlled Oscillator with a Sawtooth Comparator" BSTJ, March, 1962, PP 559–601

(78) W.C.Linsey "A Theory for the Design of One-Way and Two-way Phase-Coherent Communication Systems" TR 32–986, July, 15, 1969

(79) J.L. Willems "Acquisition conditions of Phase-locked loops" Int.J.Elec. 1969, Vol.26, No.2, PP137–144

(80) *B.R. Eisemberg "Approximation to the Pull-In Frequency of High Order Linear and Nonlinear Loops" IEEE Trans. AES Vol.*5, *No.*5, *Sept.* 1969

(81) *W.J. Gruen "Theory of AFC Synchronization" Proc. IRE, Aug.* 1953 *PP*1043−1048

(82) *R. Jaffe, E. Rechzin "Design and Performance of Phase-Locked Giruits Capable of Near-Optimum Performance Over a Wide Range of Input Signal and Noise Levels" IRE Trans. IT. March,* 1955, *PP* 66−76

(83) *C.E. Gilchriest "Application of the Phase-Locked Loop to Telemetry as a Discriminator or Tracking Filter" IRE Trans. TRC. June,* 1958 *PP*20−35

(84) *A.J. Viterbi "Phase-locked Loop Dynamics in the Presence of Noise by Fokker-Planck Techniques" Proc. IEEE, Vol.*51, *No.*12, *PP*1737−1753, *Dec.*1963

(85) *T.J. Rey "Automatic Phase Control: Theory and Designe" Proc. IRE Oct.* 1960, *PP*1760−1771

(86) *J. Dupraz "Principles Fondamentaux des Stations de Télémesure IRIS" L'onde électrique No.*467, *fév.* 1965

(87) *R.C. Tausworthe "A Method for Calculating Phase-Locked Loop Performance Near Threshold" IEEE Trans. COM. Vol. COM*−15, *No.*4, *Aug.* 1967

(88) *S.C. Gupta, D.R. Hummels "Threshold Investigation of Phase-Locked Discriminators" IEEE Trans. AES Vol. AES*−4, *No.*6, *Nov.* 1968

(89) D.T.Hess "Cycle Slipping in a First-Order Phase-Locked Loop" IEEE trans, COM. Vol. COM−16, No.2, April, 1968

(90) J.J. Uhran, etal "Experimental Results for Phase-Locked Loop Systems Having a Modified nth-Order Tanlock Phase Detector" IEEE Trans. COM Vol. COM-16, No.6, Dec. 1968

(91) A.G. Lindgren "Noise dynamics of the phase-locked loop with signal clipping" IEEE Trans. AES−5, No.1, Jan. 1967

(92) 鈴木，他 "振幅が一定でない位相同期ループの解析" 昭44連大

(93) A.J.Viterbi "Principle of Coherent Communication" Mc Graw-Hill (1966)

(94) 鈴木，滑川 "Fokker-Planck 方程式による位相同期ループの一考察" 信学論(B) 53−B, 11, P656, (昭45−11)

(95) J.R. Rowbotham, R.W. Sanneman "Random Characteristics of the Type II Phase-Locked Loop" IEEE Trans. COM, Vol. AES−3, No.4, July, 1967

(96) R.W. Sanneman, J.R. Rowbotham "Unlock Characteristics of the Optimum Type II Phase-Locked Loop" IEEE Trans. ANE March, 1964, PP15−24

(97) R. Harrison "Analysis of the statistics and threshold of the phase-locked loop" Proc. IEE Vol.116, No.1, Jan. 1969

(98) *J.K. Holmes "On a Solution to the Second-Order Phase-Locked Loop" IEEE Trans. COM Vol COM-18, No.2, April,* 1970 *PP*119〜129

(99) 鈴木 "位相同期復調器の研究 大阪大学修士論文" 昭44

(100) *F. J. Charles, W. C. Linsey "Some Analytical and Experimental Phase-Locked Loop Results for Low Signal-to Noise Ratios" Proc. IEEE Vol.*54, *No.*9, *Sept.* 1966 *PP*1152−1166

(101) *W.C Linsey "Nonlinear analysis of generalized tracking systems" Proc. IEEE Vol.*57, *No.*10, *Oct.* 1969, *PP*1705−1722

(102) *W.C. Linsey "Nonlinear analyris and Synthesis of Generalyzed Tracking Systems" AD*−682317, *Dec.* 1968

(103) *R.E. Kalman and R.C. Bucy "New results in linear filtering and prediction theory" Trans. ASME, J. Basic Engrg,* 83 *March,* 1961

(104) *D.L. Snyder "The state-variable approach to Continuous estimation" MIT press* 1969

(105) *E.A. Bozzoni etal "An Extensition of Viterbi's Analysis of the Cycle Slipping in a First-Order Phase-Locked Loop" IEEE Trans AES Vol.*6, *No.*4, *July* 1970, *PP*484−489

(106) F. Carrasa, F. Rocca "Advances in Phase-Locked Demodulation" IEEE Trans. COM, Vol.18, No.3, June, 1970

(107) W.L. Nelson "Phase-Locked Loop Design for Coherent Angle-Error Detection in the Telstar Satellite Tracking System" BSTJ Sept. 1963 PP1941−1975

(108) A.B. Grebene, H.R. Camenzind "Frequency-Selective Integrated Circuits Using Phase-Locked Techniques" IEEE J. SC−4, 4, (Aug. 1969)

(109) 鈴木，滑川 "位相同期ループを持ったAM復調器についての一考察" 昭44 連大 2691

(110) W.B. Davenport, W.L. Root "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise" McGraw-Hill 1958

(111) D. Middleton "An introduction to statistical Communication theory" McGraw-Hill 1960

(112) 統計科学研究会編 "新編統計数値表" 河出書房，昭27

(113) A.Papoulis "Probability, Random Variables and Stochastic Processes" McGraw-Hill, 1965

(114) 森口，他 "数学公式Ⅲ" 岩波書店 昭32

(115) H.L.Van Tree "Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I", John Wily & Sons, 1967

(116) K. Suzuki, T.Namekawa "Analysis of Modulated Signals in Phase-Locked Loop" IEEE Trans.COM, Oct. 1971

(*correspondence*)

(117) *K.Suzuki, T.Namekawa "Dynamics of the phase-Loched Loop without Limiter" IEEE Trans. AES* 1971
(採録決定)

(118) 志村 " *L C* 発振回路における寄生振動の解析 " , 信学論 (*A*) , 53−*A*, 11 , *P*. 597 (昭 45−11)

(119) *H.G. Oltman, C.H. Nonnemaker "Subharmonically in-jection Phase-Locking Gunn Oscillator Experiments" IEEE Trans. MTT, P.* 728 (*Sept.*1969)

附 録 I

Bogoliuboff-Mitropolsky の漸近法 (7)

次の形の微分方程式を考える

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\varepsilon f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right) \tag{I・1}$$

式 (I ・ 1) の一般解を次の展開式で求める

$$x=a\ \cos\phi+\varepsilon u_1\ a\ ,\phi\ )+\varepsilon^2\ u_2\ (a,\phi\ )+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{I・2}$$

量 a , ϕ は時間の関数として次の微分方程式によって決定される。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2\ A_2\ (a)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d\phi}{dt}&=\varepsilon+\varepsilon B_1\ (a)+\varepsilon^2\ B_2\ (a)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{I・3}$$

関数 f (a , ϕ) に対するフーリエ展開を考へる。

$$f(a,\phi)=g_0(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\{g_n(a)\ \cos n\phi+h_n(a)\sin\ n\phi\} \tag{I・4}$$

第 1 近似を考へる。オ 1 近似として次のような解をとる。

$$x=a\ \cos\phi \tag{I・5}$$

ここに a と ϕ とは次式で定められる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1\ (a)\\ \frac{a\phi}{dt}&=\omega+\varepsilon B_1\ (a)\end{aligned}\right\} \tag{I・6}$$

A_1 (a) , B_1 (a) は次式で定める。

$$\left.\begin{aligned} g_1(a)+2\omega aB_1 &= 0 \\ h_1(a)+2\omega A_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}\cdot 7)$$

全く同様に才2近似として次の式を取る。

$$x = a\cos\phi + \varepsilon u_1(a,\phi) \qquad (\mathrm{I}\cdot 8)$$

ここに時間の関数 a ，ϕ は次式で定められる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}\cdot 9)$$

ここに A_2 ，B_2 ，$u_1(a,\phi)$ は次式で定められる。

$$u_1(a,\phi) = \frac{g_0(a)}{\omega^2} - \frac{1}{w^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(a)\cos n\phi + h_n(a)\sin n\phi}{n^2-1}$$

$$h_1^{(1)}(a) + 2\omega A_2 = 0$$

$$g_1^{(1)}(a) + 2\omega a B_2 = 0 \qquad (\mathrm{I}\cdot 10)$$

次の形の方程式を考へる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(x)\frac{dx}{dt} \qquad (\mathrm{I}\cdot 11)$$

次のような関数を定義する。

$$F^{※}(a\ \cos\ \phi)=\Sigma F_n^{※}(a)\cos\ n\phi \qquad (\mathrm{I}\cdot 21)$$

式（Ⅰ・12）をϕについて微分すると

$$f(a\ \cos\ \phi)a\omega\ \sin\ \phi=\Sigma\ wn\ F^{※}(a)\ \sin\ n\phi \qquad (\mathrm{I}\cdot 13)$$

才1近似を次のように定める。

$$x=a\ \cos\ \phi \qquad (\mathrm{I}\cdot 14)$$

aとϕは次の式を満足せねばならない。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\frac{\varepsilon}{2}\ F_1^{※}(a)\\ \frac{d\phi}{dt}&=\omega\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}\cdot 15)$$

才2近似を作るために

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(a\ \cos\ \phi)\cos^2\ \phi=\frac{dF_1^{※}(a)}{da} \qquad (\mathrm{I}\cdot 16)$$

なることを考慮すれば，次のように書くことができる。

$$x=a\ \cos\ \phi+\frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\,F_n^{※}(a)\ \sin\ n\ \phi}{n^2-1} \qquad (\mathrm{I}\cdot 17)$$

ここにaとϕは次式

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{At} &= \frac{\varepsilon}{2}F_1^{※}(a)\\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega+\varepsilon^2 B_2(a)\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I}\cdot 18)$$

で決定され，$B_2(a)$は次の形をもっている。

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a\omega}F_1^{※}(a)\frac{dF_1^{※}(a)}{da} - \frac{1}{2\omega a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2 F_n^{※2}(a)}{n^2-1} \qquad (\mathrm{I}\cdot 19)$$

次に振幅の安定性について調べる。任意の n 次近似に対して得られた式は次の形である。

$$\frac{da}{dt} = \varPhi(a) \qquad (\mathrm{I}\cdot 20)$$

ここに

$$\varPhi(a) = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots\cdots\cdots + \varepsilon^n A_n(a) \qquad (\mathrm{I}\cdot 21)$$

定常的な値 a_0 に対して

$$\varPhi(a_0) = 0 \qquad (\mathrm{I}\cdot 22)$$

が成立するとき，振幅値は

$$\varPhi'(a_0) < 0 \qquad (\mathrm{I}\cdot 23)$$

なら安定である。そして

$$\varPhi'(a_0) > 0 \qquad (\mathrm{I}\cdot 24)$$

なら不安定である。

附　　録 II (8)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\ \frac{dx}{dk}+g(x)=0 \qquad (\text{II}\cdot 1)$$

ここで次のようにおくとき

$$\int_0^x f(x)\,dx=F(x)$$

$$\int_0^x g(x)\,dx=G(x)$$

(a)　$f(x)$，　$g(x)$ はすべての x につき連続で $g(x)$ は $Lipshitz$ の条件を満足する。

(b)　$f(x)$ は x の偶関数である。

(c)　$g(x)$ は x の奇関数であって，かつ $x>0$ にて $g(x)>0$。

(d)　$0<x<x_0$ にて $F(x)<0$，$x>x_0$ にて $F(x)$ は単調増加で $x\to\infty$ にて $F(x)\to\infty$。

仮定(a)，(b)，(c)，(d)のもとに方程式(1)はただ一つの周期解（定数でない）をもつ。

附　　録 III (93),(111)

ベクトルプロセスの $m+1$ 個の成分

$$Y(t)=y_0(t).,\ \ y_1(t),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_m(t) \qquad (\text{III}\cdot 1)$$

が $m+1$ 個の一次の線形微分方程式の解とする。各成分のプロセスの瞬時増分が他の成分の現在の値だけに依存しそして駆動関数が白い雑音の時はそのベクトルプロセスはマルコフである。

そのプロセスは次の$m+1$次の$F \cdot P$方程式を満足する。

$$\frac{\partial p(Y,t)}{\partial t} = -\sum_{k=0}^{m} \frac{\partial}{\partial y_k}\left[A_k(Y)\ P\ (Y,t)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y_k\,\partial y_i}\left[A_{ki}(\boldsymbol{Y},t)\right] \qquad (\text{III}\cdot 2)$$

初期条件は

$$P(\boldsymbol{Y},O) = \prod_{k=0}^{m} \delta\left[y_k - y_k(o)\right] \qquad (\text{III}\cdot 3)$$

$A_k(Y)$ と $A_{ki}(Y)$ は各成分のプロセスの正規化したモーメントと相互モーメントの極限値として定義される。

$$\left.\begin{aligned} A_k(Y) &= \lim_{\triangle t \to o} \frac{E(\triangle y_k \triangle y_i \mid Y)}{\triangle t} \\ A_{kl}(Y) &= \lim_{\triangle t \to o} \frac{E(\triangle y_k \triangle y_i \mid Y)}{\triangle t} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{III}\cdot 4)$$

$\triangle t$が0に近づくとき，$\triangle t$より早く近づけばさらに高次のモーメントは0になって除かれる。