



Title	遠心羽根車後方の流れに関する研究
Author(s)	三宅, 裕
Citation	大阪大学, 1966, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/182
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

遠心羽根車後方の 流れに関する研究

昭和41年10月

三 宅 裕

目 次

第 1 章	序 論	1
第 1 節	遠心羽根車の従来の研究と本研究の目的	1
第 2 節	各 論	5
2・1	二次元ポテンシャル流れ理論と羽根車後方の 流れの測定	5
2・2	羽根車流路間に生ずる二次流れ	7
2・3	リングディフューザの壁面境界層	10
第 2 章	遠心羽根車の流れの二次元ポテンシ ヤル流れ理論による計算	12
第 1 節	速度関数法による羽根車の流れの計算法	12
1・1	遠心羽根車の流れの計算の基本的な考え方	12
1・2	写像	15
1・3	速度関数	16
1・4	翼面上の流れの計算法	19
第 2 節	羽根面外の点の流れの計算法	21
2・1	複素ポテンシャル	22
2・2	羽根面外の任意の点の流速	23
2・3	羽根面外の任意の点のいろいろな水頭	31
2・4	流線	32
2・5	数値計算例	33
2・6	計算結果に対する考察	34
2・7	対数らせんに近い羽根の場合	41
第 3 節	羽根車入口前方の流れに予回転がある場合	43
3・1	揚程曲線	44
3・2	羽根面外の点の流れ	46

第4節	結 論	47
第3章	羽根車後方の流れの測定	49
第1節	三孔ピトー管の特性に関する予備的考察	49
1・1	三孔ピトー管の構造	49
1・2	三孔ピトー管の測定原理	50
1・3	ピトー管の検定	51
1・4	ピトー管が回転することのピトー係数に対する影響	52
第2節	羽根車後方の流れの測定	55
2・1	実験装置	55
2・1・1	実験装置の構成	55
2・1・2	羽根車	57
2・1・3	吸込管	59
2・1・4	回転マノメータ	59
2・1・5	水 槽	59
2・1・6	駆動機	60
2・2	実験方法および実験結果の整理方法	60
2・2・1	測定位置	60
2・2・2	回転マノメータの指示値の修正と流れ の計算法	61
2・2・3	実験方法	62
2・3	実験結果	63
2・4	実験結果に対する考察	71
2・4・1	総水頭係数	71
2・4・2	流れの向き	76
2・4・3	相対速度水頭	78
2・4・4	流れの分布の径方向の変化	78
2・4・5	損失分布	79

第3節	結 論	82
第4章	遠心羽根車流路間の二次流れ	83
第1節	ベクトル解析により解析	83
1・1	基礎式	83
1・2	遠心羽根車に対する簡易式	88
第2節	うず糸追跡法による方法	92
第3節	翼端二次うず	100
第4節	境界層理論によるシュラウド境界層二次流れ の解析	105
4・1	計算に用いる仮定	106
4・2	座標系	106
4・3	運動方程式および連続の式	107
4・3・1	運動方程式	107
4・3・2	連続の式	113
4・3・3	境界層近似	113
4・4	積分条件式	118
4・5	計算式	123
4・5・1	境界層内の速度分布	123
4・5・2	連続の条件	125
4・5・3	壁面摩擦力	126
4・5・4	計算式	126
4・5・5	初期値	127
4・6	計算結果および計算結果に対する考察	130
第5節	実 験	141
5・1	従来の実験結果	141
5・2	筆者の実験結果	143
5・2・1	実験装置	143

5・2・2	実験結果	143
5・3	むすび	152
第6節	結 論	153
第5章	リングディフューザの流れ	155
第1節	理論計算	155
1・1	計算に用いる仮定	155
1・2	基礎式	156
1・3	速度分布の仮定	158
1・4	計算式	161
1・5	初期値	162
1・6	数値計算結果	165
1・7	壁面摩擦力の方向の修正の試み	170
1・8	二次流れ	173
第2節	実 験	174
2・1	実験装置	175
2・2	実験結果および考察	176
第3節	結 論	179
第6章	結 論	180
謝	辞	183
文	献	184

第 1 章 序 論

第 1 節 遠心羽根車の従来の研究と本研究の目的

遠心ポンプが今日の形を整えたのは 1680 年頃であるといわれる¹。そして遠心ポンプに対する最初の理論的考察を行つたのは *L. Euler*²である。

Euler のいわゆる運動量理論は 1757 年に提出され、その後長くうけつがれ、1920 年の後半に二次元ポテンシャル流れ理論が発表されるまで遠心羽根車の理論には大きな進歩はなかつた。運動量理論は羽根車の機能についてのきわめて本質的な考察であるため、あらい近似理論であるにもかかわらず実用上は非常に有効であり現在においてもなおいろいろな補正係数を用いて設計計算には最も広く利用されているようである。一次元軸対称理論を基礎にして種々の補正方法、補正係数を取り入れる方法は *B. Eck*³, *B. Eckert*⁴, *C. Pfleiderer*⁵ らによってほぼ集大成された。

この段階における遠心羽根車の研究はその揚程曲線を予知し、あるいは所要の揚程曲線に対する羽根車の設計法を確立することが目的で、水力効率を改善するための流体力学的考察については成果がなかつたといつてよい。すなわち一次元軸対称理論は羽根車の流路内の解析に対しては全く無用であつた。

長い間遠心羽根車の研究が一次元軸対称理論から進展しなかつた理由は、羽根車内の流れを一次元軸対称でない流れとして扱うための数学的方法が見い出せなかつたことと、ポンプが常に付属部品であつてその効率の改善が全体の効率の改善に大きくは寄与しなかつたことにあると考えられる。

羽根枚数が有限であることの影響を解析する研究は、実験的には流路内の流れを観察する方法から始められた。1923 年、*H. Örtli*⁶ ははじめて流路内の相対流を撮影し、その後 *A. Carrard*⁷, *K. Fischer*⁸, *E. Grünagel*⁹ らによって同様の試みがなされたが理論的な裏付けはなく、設計計算に利用しうる系統的にまとめられた結果は得られなかつた。

一方、理論的方法では1919年、*W. Kucharski*¹⁰がはじめて、羽根枚数が有限であることによる流路間の流れの非軸対称性についての流路うずの概念を与えた。そしてこの数学的解析は二次元ポテンシャル流れ理論によつてなされた。この最初の解法を示したのは*W. Spanhuake*¹¹であり、対数らせん羽根に対する厳密解を与えたのは*A. Busemann*¹²である。二次元ポテンシャル流れ理論の当初の目的はやはり揚程曲線の予知であり、羽根車出口における流れの向きが円周方向に急に傾くこと、いわゆる"すべり"の大きさを求めることであつた。この理論は一次元軸対称理論と実際のポンプで得られる値との差をよく説明した。

羽根面上の流れは、二次元ポテンシャル流れ理論の発達によつて計算が可能となり多くの研究者によつて実測されたが、理論と実際の羽根車の性能との間にはなおくい違いがあつた。そしてそれ以上の羽根車の性能の向上には羽根面ばかりでなく羽根車流路間の流れの解析が必要となつた。

1940年代に入つて遠心圧縮機が単段で高い圧縮比を得られることからガスタービン用圧縮機として採用されるに至つて遠心圧縮機の羽根車内流路間の流れを解析する研究が集中的に行なわれた。これと平行して、大容量の揚水式発電所が数多く設置されるようになり、ポンプにおいても羽根車内流路間の流れが解析されるようになった。

これらの研究では羽根車に相対的な流れを測定して損失の分布を調べることに重点がおかれ、それと関連して定性的に二次流れが考察された。

遠心羽根車流路間の流れは、損失が全くない場合はポテンシャル流れとなる。したがつて最も基本的にはポテンシャル流れ理論によつて計算することができる。実際の流れは三次元流れであるが、三次元ポテンシャル流れとしての計算はきわめて困難であり、また純ふく流型の遠心羽根車の場合には二次元流れによつて十分近似できると考えられるので、基礎流れとしては二次元ポテンシャル流れが適当である。

流体が非粘性流体であれば羽根車流路内の流れは三次元流れでも、二次元流

れでもエネルギー式としてベルヌーイの式が成り立ち、相対全水頭はいたるところ一定である。羽根車流路間の流れの測定においては流路間の各点の相対全水頭を求め、回転座標系に対するベルヌーイの式から求められる値との差を損失と評価しており、この損失の分布から二次流れを推定する。

損失の評価はベルヌーイの式のみを用いて可能であるが、損失の発生原因を考察するためには羽根車流路間のポテンシャル流れの場合の流れの分布を知らなければならない。ところが現在のところ、流路間の流れをポテンシャル流れとして計算する実用的な方法はない。したがって流路間の流れの測定結果は理論計算の結果と比較することができず、実験結果を系統的に整理することができない。

損失は流体の粘性のために生ずるのであるが、その最も大きい部分は二次流れによるものと考えられている。しかし遠心羽根車の二次流れについての知識は現在のところ定性的知識に限られており、流路間損失の解明には、二次流れの定量的な評価を可能ならしむる理論が必要である。損失の分布から二次流れを推定することは、二次流れの発生機構からいえば順序が逆である。

さて、羽根車流路間の流れの測定は、これまですべて相対流として測定されてきたが、この種の実験は多くの困難をともなうため、実験データはまだ十分でない。また測定のためには特殊な実験装置を要するため、実際のポンプの設計にはそのままでは応用できない。

相対流測定の困難を避けるため、近年、羽根車出口直後の流れを変動流として測定し、その結果から羽根車流路間の流れを推定する方法が試みられている¹³。この方法は現在のポンプ設計法として用いられる、モデルポンプによる性能修正の方法に合理的根拠を与えうることになり、実用上きわめて有効な方法である。この方法を実用化するためには、変動流測定用プローブの特性を改善し、羽根車後方の流れの特性を知ることが必要である。

変動流測定用プローブの動特性については多くの問題点が残されているものの、研究は大幅に進展している。しかし羽根車後方の流れの特性については、

この種の測定に必要なデータは全くない。

羽根車後方の流れもまた二次元ポテンシャル流れを基礎とすべきであるが、この計算法には実用的な方法がない。したがって測定せられた結果が、どのような性質の流れであるかを判定できない。さらに二次元ポテンシャル流れ理論が羽根車後方の流れの計算法として有効であるかどうかはわかっていない。これらの点が確められれば、羽根車後方の流れの計算と、変動流測定プローブによる実測の繰り返しを、系統的、かつ合理的に行うことができ、羽根車の設計法を改善することができる。

ところで、遠心ポンプの全体的性能を研究する段階では、遠心ポンプは、吸込部、羽根車、吐出部のすべてを備えた装置を用いて研究されたが、各部分の流路内の流れを解析する研究が始められて以来、おのおのの部分を取り離し、他の部分の条件を理想的な条件に整えたりして、所定の部分について実験する方法がとられるようになった。この目的のために羽根車に対してはフリーインペラ型実験装置が採用された。

羽根車後方の流れは二次元ポテンシャル流れと二次流れの組み合わせで近似できると考えられるが、羽根車の性能は羽根車後方の案内装置または圧力回復装置の影響を受ける。しかし、これらの羽根車後方の装置のすべてについて解析することは不可能である。

吐出部の性能は、羽根車で与えられたエネルギーをどれほど有効に回収しうるかという流体力学的問題のほかに、うず巻ケーシングの受ける径方向推力の大きさなど、機械的強度に関連した問題があるが、流体力学的問題に関する研究は、羽根のないリングディフューザ、羽根のある平板ディフューザの流れの解析、うず巻ケーシングの流れの解析などにわけられる。これらのうち最も取り扱いが簡単で、かつ三次元境界層と関連して、流体力学的に最も興味あるのは羽根のないリングディフューザの場合であり、その流れについては最終的な結論は得られていない。

上述のような残された問題の解決に寄与すべく、本論文では次の四つのテー

マをとり上げて考察する。

1. 羽根車の羽根面外の点の流れを計算する。簡単で精度の高い近似的方法を見い出す。

2. 羽根車流路間の流れについて二次元ポテンシャル流れ理論がどの範囲まで有効であるかを確かめる。

3. 遠心羽根車の二次流れについての理論を組み立て、定量的な解析を行なう。

4. リングディフューザにおける三次元境界層を計算する。

本研究では羽根車後方の流れを一つ一つの構成因子に分解して解析する方法をとった。したがって実験装置にはフリーインペラ型実験装置を用いた。

本論文の本論は4章から成り、上記の四つのテーマを1から4まで順に第2章から第5章まで述べる。

第2節 各 論

次におのおののテーマについて、これまでに行われた研究と、本論文における研究の意義を述べる。

2.1 二次元ポテンシャル流れ理論と羽根車後方の流れの測定

遠心羽根車の流路間の相対流れの測定は内丸¹⁴によつて始められ、*W. C. Osborne & D. A. Morelli*¹⁵、*A. J. Acosta*¹⁶、*J. F. Hamrick*¹⁷、神元¹⁸、藤江¹⁹、*U. Domm*²⁰らの結果が発表された。これらのうち、*Osborne* ら、*Acosta*、神元らの実験はフリーインペラを用いている。

Osborne らの実験は *Thoma & Fischer*²¹ の流線撮影法を発展させたものであるが、羽根面外の流れの定量的な測定としては最初のデータである。しかしその結果の理論的考察はなく、*A. J. Acosta* がその結果に対して流れ関数の微分方程式の緩和法による解法によって考察が可能であろうと注釈を加えたの

みである。

内丸の測定はシユラウド面に配置した取圧孔からシユラウド面における流路間の圧力分布を測定し、さらに羽根面圧力分布を測定したものであるが、やはり理論的考察はない。

二次元ポテンシャル流れ理論による羽根車性能の厳密解は、先述のとおり、*Busemann*によって与えられたが、*Acosta*はこの結果を用いて羽根面圧力分布を計算し、神元らは独自の方法によって同じ計算を行い、それぞれ実験結果と比較した。また内丸の実験に対しては鬼頭²²が同様の計算を行って比較した。それらの結果から、*Acosta*が示したように正確には合わないが、二次元ポテンシャル流れ理論の計算値と実験値はほぼ合うと考えてよいことがわかった。

羽根面外の二次元ポテンシャル流れの計算法は *J. D. Stanitz*⁴⁷ の流れ函数の偏微分方程式を緩和法で解く方法が唯一の解である。最近大宮司⁴⁷はこの方法に改良を加えているが基本的には変らない。この方法は任意の形状の羽根の羽根車に対して応用できるが、おのおのの流量状態に対して一つ一つ別個に解を求めねばならず、その計算には非常に手数を要し、実用的ではない。

藤江は直線放射状羽根および対数らせん羽根の羽根車の遠心送風機を用いて羽根車の流路間の流れを測定し、理論計算の結果と比較した。直線放射状羽根車の場合には流路間の流れをポテンシャル流れとして解を求めることが可能であり、藤江は *Stanitz* の解²³と比較し、実験値と理論値の間には大きな差があると指摘した。対数らせん羽根の羽根車に対する理論値として藤江が用いた解は流線を軸対称とする近似的二次元流れでポテンシャル流れではない。

Hamrick, Acosta, Domm は主として流路間の損失分布を測定したが、いずれも定性的説明を与えているのみである。

以上のとおり、羽根面上の流れについては二次元ポテンシャル流れ理論が有効であることがわかったが、羽根面外の点の流れについては明らかでない。

本論文では第2章で速度関数法を応用して、絶対流が二次元ポテンシャル流

れである場合の、羽根面外の任意の点の流れを計算する近似的方法を示す。この方法によれば羽根面上の相対速度の分布を求めなくとも計算できるが、無衝突流入流量の場合の羽根面相対流速分布をあらかじめ求めておけば、より良い精度で他の任意の流量状態における流れが計算できる。しかも羽根面相対流速分布の計算は速度関数法による近似計算法を用いれば、羽根角が小さく、かつ羽根ピッチが小さい場合でもきわめて精度よく簡単に計算できるので、羽根面外の点の流れを系統的に計算することができる。

また実験装置は羽根車のみの性能を求める目的でフリーインペラ型装置を用い、流入部はなるべく予回転が生じないよう考慮し、吐出部は、羽根車とともに回転するリングディフューザを設けて軸対称性が保たれるよう配慮した。羽根車後方の相対流れの測定結果では、無衝突流入流量付近の、流路内にはがれがないと考えられる場合には、ある補正のもとに二次元ポテンシャル流れ理論による計算値とよく合い、*Acosta* が羽根面圧力分布の実験と理論計算の比較から得た結果とはやや異なった結果になった。

2.2 羽根車流路間に生ずる二次流れ

曲り流路においては、流入する流れが平面流れであっても、流れ面に垂直な方向に全水頭のこう配がある場合には、曲り流路の出口での流れは必然的に三次元流れとなる。また流入する流れが完全に一様な流れであっても流れ面に平行な壁面での境界層内では主流に直交する断面内での速度成分をもつようになる。流れを一様な二次元流れをする基礎流れと、それに直交する断面内での微少なうず流れに分解し、後者を二次流れという。

二次流れは本来曲り流路の三次元的性質に起因するのであるから、境界層問題としての取り扱いが自然であろう。*H. B. Squire & K. G. Winter*²⁴ は境界層内の速度こう配をうずでおきかえ、境界層内での粘性の効果を考えないで、同じ現象を完全な非粘性流体の流れとして解析しうることを示した。この方法は *L. W. Hawthorne*²⁵ の研究によって著しく進展し、以後二次流れの研究はこ

の非粘性流体のせん断流れとしての取扱いが大部分である。しかしこれらの研究の大部分は、静止曲り流路および、軸流翼列または直線翼列の翼間流れに生ずる二次流れを扱ったもので、回転流路、とくに遠心羽根車の流路内に生ずる二次流れを解析したものはほとんどない。

非粘性流体のせん断流れとしての取扱いでは境界層内部の全水頭の勾配でなくとも、流れ面に垂直な全水頭の勾配がありさえすればよい。遠心羽根車においては羽根車入口部での羽根車幅方向の損失の分布が一様でないため、羽根車幅方向に相対全水頭の勾配が生ずるのが普通であり、これによって生ずる二次流れの解析には、非粘性流体のせん断流れとしての取扱いが有効である。そしてシュラウド面に発達する境界層による二次流れは境界層理論として扱う方が有用な結果が得られる。この考えに基いた遠心羽根車の流路間の二次流れの解析は従来にない。

非粘性流体のせん断流れによる方法で、遠心羽根車の流路間二次流れを解析した報告には *A. G. Smith*²⁶, *G. O. Ellis*²⁷ の報告がある。*Smith* は相対流れの運動方程式と連続の式から、回転する曲り流路に生ずる流線方向のうず度の成分をベクトル解析によって求め、その一般式をベクトル形式で示したがこの式には修正の余地がある。また遠心羽根車については定性的な考察を試みたにすぎない。*Ellis* はベクトル方程式をテンソル形式になおし、テンソル演算によって二次うず度の強さを求めたが、演算の途中で近似を行うので、得られた結果は一般式になっていない。したがって二次流れの発生機構についての物理的説明が困難である。

本論文では回転する流路の流路間二次うずを表示する一般式をベクトル解析によって導きなおし、この結果から基礎流れを一次元軸対称流と仮定して、遠心羽根車に対するうず度の計算式を導いた。この結果は、*Ellis* が求めた羽根車幅一定の場合を含み、羽根車幅が半径方向に変化する場合も取扱いうる。

二次流れの非粘性流体としての扱い方にはこのベクトル解析による方法のほか、より簡単な方法として、うず糸追跡法による取扱いがある。この方法は

*J. T. Preston*²⁸ が、角のある曲り流路、円弧曲り流路、円弧直線翼列など、特殊な場合に応用した。*Hawthorne*²⁹ は更に一般的な方法で一般の翼列の場合をとり扱ったが、*S. Soundranayagam*³⁰ は *Preston* と同様な簡単な方法でも任意の翼列に適用しうることを示した。

本論文ではこの方法を遠心羽根車に応用し、ベクトル解析で求められた結果をより実用的な形で示し、ベクトル解析の結果の補正を試みた。

一方三次元境界層として二次流れを考える場合、二次流れの発生原因は次のように説明される。静圧は境界層内でも主流と同じと近似できるので、境界層内の速度は主流のそれよりも小さいから、力の釣合いのためには、静止流路では流線の曲率が境界層内で大きくななければならない。したがって境界層内の流線と主流の流線とはくい違い、主流流線に直交する断面内で境界層内の速度成分が生ずる。この考えに基く二次流れの解析は、はじめ、*E. Gruschwitz*³ によって静止曲り流路について考察された。*Gruschwitz* は境界層の積分条件式と実験結果とを示したが、*A. Mager*²² はこれを回転する曲り流路にも適用できるよう一般化し、積分条件式の一近似解を与えた。この基礎式は主流がポテンシャル流れをする場合で、遠心羽根車流路間のポテンシャル流れを求めること自身きわめて困難である上、それらの結果から更に連立偏微分方程式を解くことは事実上不可能といってよい。また *Mager* が与えた近似解は回転流路に対する実験的裏付けはなく、途中で用いた近似が適当であるかどうか不明でない。そしてこの基礎式から遠心羽根車に対する結果は得られていない。

Mager の方法の上述の難点を避けるため本論文では羽根車流路内の流れを軸対称とし、主流部分では流線が対数らせんであるとし、質量力を分布させて新たにシュラウド面境界層に対する積分条件式を導き、境界層内速度分布として三次元速度分布を与え、二次流量を計算した。

これらの理論計算の結果を実験的に確かめるため、羽根車後方の相対流速分布を測定し、二次流速分布を求めた。この分布を相対全水頭の勾配による二次流れと、シュラウド面境界層による二次流れとに分け、前者の結果と二次うず度

の理論計算値を，また後者と二次流量の理論値とを比較した．

2.3 リングディフューザの壁面境界層

リングディフューザは最も簡単な圧力回復装置である．

流体が非粘性であるとすれば流線は対数らせんの軸対称流となって簡単に解ける．したがってこの問題は壁面の境界層の発達を考慮した場合にのみ，流体力学的問題が残される．本論文ではこのようなリングディフューザ壁面に沿って発達する軸対称境界層を積分条件式による近似計算法で扱った．

三次元境界層は先述のとおり *Gruschwitz* が最初に解析した．*Gruschwitz* の方法では座標系として，主流面内で主流方向とそれに直交する方向に選ぶような直交座標系を用い，これらの座標系での境界層の積分条件式を二つの偏微分方程式で表現する．そして境界層内の二つの座標軸の方向の速度成分の分布を仮定し，主流と壁面摩擦力とのなす角 ϵ ，および境界層厚さ δ を未知量として選ぶ．*L. Prandtl*³³、*A. Mager*³² はこの方法を継承し，*Prandtl* は速度分布の形として適当と考えられる形を提案した．*Prandtl* が提案した速度分布の形状は *Mager*³²、*R. W. Moore & D. L. Richardson*³⁴ らによって検討され，*E. Gruschwitz*、*A. M. Kuethe*³⁵、*J. P. Johnston*³⁶ らによって実験データが提出された．しかし *Prandtl* の考え方に基礎を置く三次元境界層内の速度分布の表現は必ずしも最適とはいえず，*E. S. Taylor*³⁷、*Johnston* らは，*Polar Plot*の方法による表現法を提案した．しかし *Polar Plot*法も層流底層内の精確な実験データが不足しているため十分信頼のおける方法とは断定できない．

リングディフューザ壁面の境界層は明らかに三次元境界層であるが，これを三次元境界層として解析した報告は少く，*W. Jansen*³⁸、古屋および川口³⁹の報告があるのみである．いずれの場合も境界層内の速度分布はあらかじめ仮定しており，*Jansen* は *Polar Plot*の考え方により境界層助走区間を解析し，古屋らは *Mager*の速度分布を用いて助走区間後の流れを解析している．

本論文では助走区間の部分を扱う。

Jansen の解では、境界層内の速度分布をあらかじめ仮定するので未知数の数より方程式の数の方が一つ多くなり、残された一つの式は必ずしも満足されるとは限らない。三次元境界層の速度分布は先述のとおり不明な点が多いのであるから最初から速度分布を仮定してしまわないで、残された一つの方程式を利用して決定できるよう、速度分布の中に一つの未知量を含ませておけば、方程式はすべて満足され、かつ速度分布を仮定によらないで決めうるという二つの効果が期待できる。もちろん速度分布は一つの未知量だけで決定できるものではないから、このようにして求めた速度分布が厳密に正しいとはいえない。しかし積分条件式による計算では、速度分布の細かな形状が重要であるのではなく、その積分量が重要であり、この積分量については正しい解が得られる。

本論文ではこの点に着目して、リングディフューザの壁面境界層を、はじめから乱流であるとして、近似的に解析した。

第 2 章 遠心羽根車の流れの二次元 ポテンシャル流れ理論によ る計算

本章では絶対流がポテンシャル流れをする場合の主として対数らせん羽根をもつ羽根車の二次元流れの羽根面外の点の流れの計算法を述べる。

第 1 節 速度関数法による遠心羽根車の流れの計算法

1. 1 遠心羽根車の流れの計算の基本的な考え方

無限に広がる流体中を物体が運動するとき、その物体の運動によって生ずるまわりの流体の運動はうずなし流れであり、流れはポテンシャルをもつ。遠心羽根車の羽根車内の流れの二次元流れとしての解析においては、流れは平面内にこう束され、流体は無限の領域まで広がっていると考える。したがって遠心羽根の羽根のまわりの流れはポテンシャル流れである。このポテンシャル流れを解く方法には、流れ関数の偏微分方程式を差分方程式になおし、緩和法によつて数值的に解く方法、羽根をうずおよび吹き出しでおきかえる方法、等角写像による方法がある。緩和法による方法では、流量が変わるたびに数値計算を全面的にやり直さねばならず、系統的な計算には適さない。また特異点法ではうず分布を決定する方程式が積分方程式となり、やはり計算には非常な手数を要する。

遠心羽根車の流れを等角写像によつて解く場合、一般には流れを二つ以上の成分ポテンシャルの流れに分解する。本論文に用いた方法では次の三つに分解する。

- (I) 羽根車が静止して、円形翼列中心に吹き出し（羽根車入口で予回転がある場合はうずおよび吹き出し）がある流れ（通り抜け流れ）
- (II) 羽根が無限に広い流体中で回転する場合の流れ（押しのけ流れ）

(Ⅳ) 羽根が循環をもつために生ずる羽根車入口での流れの乱れを補正する流れ (循環流れ)

これらのおのおの流れに対して、羽根循環を決定するための条件として、*Kutta-Joukowski* の条件を用いる。

上の三つの流れに対する羽根面上の境界条件を考える。

絶対速度を c 、羽根車に相対的な速度を w とし、それらの径方向成分、周方向成分、羽根面に直角な方向の成分にそれぞれ r, θ, n の添字を付す。また通り抜け流れ、押し除け流れ、循環流れに対しそれぞれ第 2 の添字 t, d, c を付す。

通り抜け流れでは

$$c_{nt} = w_{nt} = 0 \quad \dots \dots (2.1)$$

である。

押し除け流れでは次のようになる。

羽根車とともに回転する座標系を考え、この座標系に相対的な流速ベクトルを $\vec{w}$ 、静止座標系に対する流速ベクトルを $\vec{c}$ 、考える点の回転周速度ベクトルを $\vec{u}$ 、羽根車の回転角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とすると

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}, \quad \dots \dots (2.2)$$

両辺の *rotation* をとり $rot \vec{c} = \vec{\Omega}'$ 、 $rot \vec{w} = \vec{\Omega}$ とおくと、

$rot \vec{u} = 2\vec{\omega}$ であるから

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega} + 2\vec{\omega} \quad \dots \dots (2.3)$$

となる。 $\vec{\Omega}$ 、 $\vec{\Omega}'$ はそれぞれ相対うず度ベクトル、絶対うず度ベクトルであり絶対流がポテンシャル流れであるとするれば $\vec{\Omega}' = 0$ である。したがって

$$\vec{\Omega} = -2\vec{\omega} \quad \dots \dots (2.4)$$

すなわち相対流れの場合は一様うず度 2ω のうず流れ場である。

このことは相対速度 w_r, w_θ と、

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad w_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \dots \dots (2.5)$$

なる関係で結ばれる流れ関数 Ψ が、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -2\omega \quad \dots\dots (2.6)$$

なる *Poisson* の微分方程式を満足すべきであることを意味する。したがって
 相対流れはそのままでは等角写像することはできない。(2.6式)は

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega r^2 + \psi' \quad \dots\dots (2.7)$$

とおけば一般解 ψ' は *Laplace* の方程式を満足し、等角写像が可能となる。 ψ'
 は絶対流れをあらわし、相対流速 w_r, w_θ と絶対流速 c_r, c_θ の間には、(2.5)
 (2.7) の関係を用いて、次の関係があることになる。

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} = c_r \quad \dots\dots (2.8)$$

$$w_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega r - \frac{\partial \psi'}{\partial r} = \omega r + c_\theta \quad \dots\dots (2.9)$$

さて羽根面に垂直な速度 w_{nd} は図 2.1 より

$$\begin{aligned} w_{nd} &= -w_{rd} \sin \gamma + w_{\theta d} \cos \gamma \\ &= -c_{rd} \sin \gamma + c_{\theta d} \cos \gamma + \omega r \cos \gamma \\ &= c_{nd} + \omega r \cos \gamma \end{aligned}$$

羽根面は流線でなければならないから

$$w_{nd} = 0, \quad \text{したがって}$$

$$c_{nd} = \omega r \cos \gamma \quad \dots\dots (2.10)$$

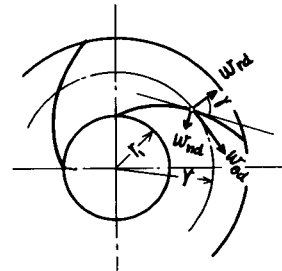


図 2.1

となる。

羽根が対数らせん羽根でない場合、 γ は半径 r の関数であるが、対数らせんの
 場合は一定で、くい違い角である。(2.10)式は押し除け流れに対する羽根
 面上の境界条件であるが、(2.2)～(2.9)式の関係は合成された流れに対
 してそのまま成り立つ。

循環流れは羽根車中心にうずのある流れであるから通り抜け流れと同様、羽
 根面上の境界条件は

$$c_{nc} = w_{nc} = 0 \quad \dots\dots (2.11)$$

である。

1. 2 写 像

図 2.2 (a) に示す円形翼列 (z' 面) は写像関数

$$z' = \sqrt{r_1 r_2} \exp \left\{ i\gamma \frac{\log(r_2/r_1)}{2 \cos \gamma} \cdot z \right\} \quad \dots \dots (2.12)$$

によって (b) の無限平板直線翼列に写像される。ただし r_1, r_2 はそれぞれ羽根車入口, 出口半径, γ はくい違い角である。羽根は z 面では長さ 2 の直線になり, z' 面の羽根車中心は z 面では $z = -\infty$ の点に写像される。

羽根枚数を N とすると無限平板直線翼列の節弦比 t は

$$t = \frac{\pi}{N} \cdot \frac{2 \cos \gamma}{\log(r_2/r_1)} \quad \dots \dots (2.13)$$

となる。

(2.12) 式の写像関数によって羽根面上の点の z 面と z' 面との対応は次式で与えられる。

$$r = \sqrt{r_1 r_2} \exp \left\{ \frac{\log(r_2/r_1)}{2} x \right\} \quad \dots \dots (2.14)$$

また羽根面外の点については $z' = r e^{i\theta}$ とし, この点に対応する z 面上の点の座標を $z_1 = x_1 + i y_1$ とすると

$$\log r = \frac{1}{2} \log(r_1 r_2) + \frac{\log(r_2/r_1)}{2 \cos \gamma} (x_1 \cos \gamma - y_1 \sin \gamma) \quad \dots (2.15)$$

$$\theta = \frac{\log(r_2/r_1)}{2 \cos \gamma} (x \sin \gamma + y \cos \gamma) \quad \dots \dots (2.16)$$

となる。すなわち z' 面の羽根車中心を原点とする同心円群は, z 面では, PQ に平行な直線群となり, z' 面上の $\theta =$ 一定の放射状直線群は, z 面では, PQ に直交する直線群となる。

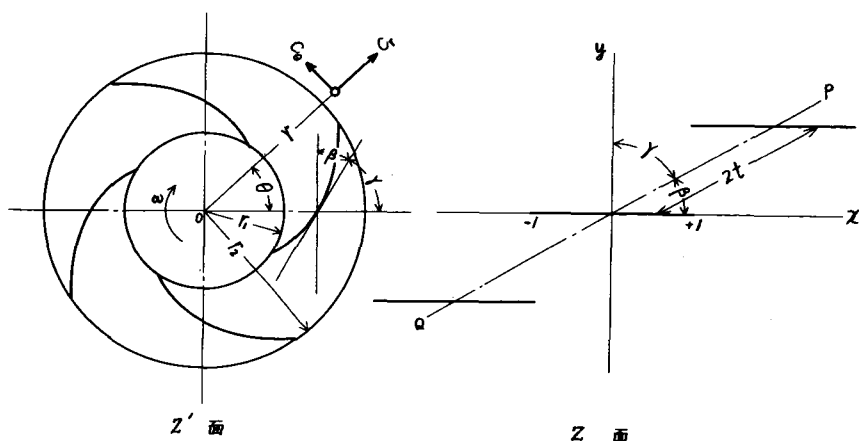


図 2.2 円形翼列から直線翼列への写像

この写像によって z' 面上の流れは z 面上での流れとして考えることができる。
 z' 面の羽根車中心におかれた吹き出しは z 面では翼列中心線 PQ に垂直な一よう流れとなり、点うずは PQ に平行な一よう流れとなる。

z 面の翼面上の速度の x , y 軸方向成分をそれぞれ u_x, v_y とすると (2.1) (2.10), (2.11) 式の羽根面上の境界条件はそれぞれ次のようになる。

$$v_{yt} = 0 \quad \dots \dots (2.17)$$

$$v_{yd} = \left| \frac{dz'}{dz} \right| c'_n = -K \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^x \quad \dots \dots (2.18)$$

$$v_{yc} = 0 \quad \dots \dots (2.19)$$

となる。ただし、

$$K = \frac{1}{2} \omega r_1 r_2 \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad \dots \dots (2.20)$$

である。

1.3 速度関数

z 面上での x, y 軸方向速度をそれぞれ u, v とし、 $\chi = v + i u$ なる複素関数 χ を複素速度関数 (または単に速度関数) という。速度関数法においては、次の三つの条件を満足する速度関数 χ を見出し、それらを組み合わせて (2.17)

～(2.20)式の翼面上の境界条件を満足するよう、おのこの速度関数の線型和の係数を定め、三つに分解した流れを合成する。

(I) 翼面上での、翼面に垂直な速度 $v_y(x)$ が、与えられた関数 $f(x)$ になる。

(II) $z = \pm\infty$ での χ の値を $\chi_{+\infty}$ とすれば $\chi_{+\infty} + \chi_{-\infty} = 0$

(III) 後縁 ($x=1$) で速度が有限になる (Kutta-Joukowski の仮設)。

このような速度関数は G. Kligemann,⁴⁰ H. Krüger⁴¹ らによって発展させられたが、村田教授によって $f(x)$ が x の高次の多項式である場合まで拡張せられ、計算が簡単で、かつきわめて精度の高い方法に改良された。⁴²

上述の三つの条件で満足する速度関数を求めるため、図1の z 面の幅 $2t$ の無限帯状領域は、写像関数

$$z = \frac{t}{\pi} \left\{ e^{-i\gamma} \log \left(\frac{e^{\psi_0} - \zeta}{e^{\psi_0} + \zeta} \right) + e^{i\gamma} \log \left(\frac{\zeta + e^{-\psi_0}}{\zeta - e^{-\psi_0}} \right) \right\} \dots (2.21)$$

によって ζ 面の単位円の外側の全平面に写像される (図2.3)

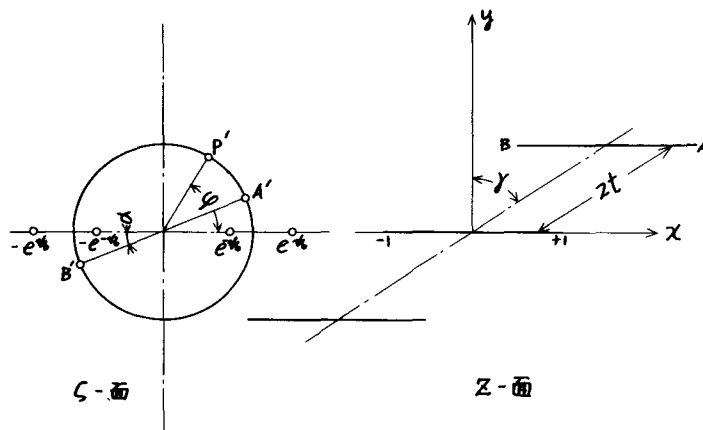


図2.3 直線翼列から単位円への写像

α, ψ_0 は写像定数で、次の二式から定まる。

$$\tan \alpha = \tan \gamma \cdot \tanh \psi_0 \dots (2.22)$$

$$\frac{\pi}{2t} = \cos \gamma \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\cosh \psi_0} \right) + \sin \gamma \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sinh \psi_0} \right) \dots (2.23)$$

$f(x) = 0, 1, x$ の場合の速度関数 χ_c, χ_0, χ_1 は解析的に求められており、それぞれの場合の翼面上の x 軸方向速度 u_{cx}, u_{0x}, u_{1x} , および一枚の翼のまわりの循環 $4tU\gamma_c, 4tU\gamma_0, 4tU\gamma_1$ は次のようになる。

$$u_{cx} = \operatorname{cosec}(\varphi - \alpha) \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

$$u_{0x} = \frac{\sin 2\alpha}{\sinh 2\psi_0} - \frac{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\alpha}{\sinh 2\psi_0} \tan \frac{1}{2}(\varphi - \alpha) \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

$$u_{1x} = \frac{2t}{\pi} \left\{ \sin \gamma \cdot \tanh^{-1} \left(\frac{\cos \varphi}{\cosh \psi_0} \right) - \cos \gamma \tan^{-1} \left(\frac{\sin \varphi}{\sinh \psi_0} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

$$U\gamma_c = - \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \sinh \psi_0} \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$U\gamma_0 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma \cdot \cosh \psi_0} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

$$U\gamma_1 = \frac{2t}{\pi} \log(\coth \psi_0) \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

$f_n(x) = x^n$ ($n \geq 2$) の場合には解析的には χ_n は求まらないが、 χ_n の成分の翼面上の値、 v_{ny}, u_{nx} には

$$\frac{dv_{ny}}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{du_{nx}}{dx} = n \left\{ u_{n-1,x}(x) - \frac{U\gamma(n-1)}{U\gamma_c} u_{cx}(x) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

の漸化関係があるので、 $u_{n-1,x}(x)$ を知れば u_{nx} は数値的に求めることができる。

$f_2(x) = x^2 \beta$ のとき

$$v_{2y} = x^2 \beta \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

$$\begin{aligned} u_{2x} &= 2 \int_{\alpha}^{\varphi} u_{1x} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi - \frac{2U\gamma_1}{U\gamma_c} \int_{\alpha}^{\varphi} u_{cx} \frac{dx}{d\varphi} \cdot d\varphi + c \\ &= u_{2x}^* + c \quad \dots\dots\dots (2.33) \end{aligned}$$

$$c = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{2x}^* \frac{\sinh 2\psi_0}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} d\varphi \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\sinh 2\psi_0}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} d\varphi \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

$$U_{\gamma 2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

となる。また $f_3(x) = x^3 - 3\beta x$ のときは

$$v_{3y} = x^3 - 3\beta x \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

$$u_{3x} = 3 \int_0^\varphi u_{2x} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi + D_2 = u_{3x}^* + D_2 \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

$$D_2 = -\frac{3}{2} \int_0^\pi u_{2x} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

$$U_{\gamma 3} = \frac{1}{4t} \int_0^{2\pi} u_{3x} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

となる。ただし $dx/d\varphi$ は (2.71) 式から

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{4t}{\pi} \frac{\cos \gamma \cdot \cosh \psi_0}{\cos \alpha} \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

となる。

1.4 翼面上の流れの計算法

流れを三つの成分ポテンシャル流れにわけるとは先に述べた。

通り抜け流れは、図2.2の平板直線翼列面で、 PQ に垂直な一様速度 V_1 の流れがあるとき、境界条件 (2.17) を満足するように、速度関数を組み合わせればよい。そして V_1 は (2.12) 式の写像関数を用いて

$$V_1 = \frac{Q}{2\pi r} \left[\frac{dz}{dz'} \right] = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

と表わされる。ただし、 Q は羽根車の単位幅あたりの流量である。

押しのけ流れは、 $z = \pm \infty$ で速度が0であるとき、(2.18)の境界条件を満足するように速度関数を組み合わせればよい。(2.18)式は

$$\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^x = k_1 + k_1 x + k_2 (x^2 - \beta) + k_3 (x^3 - 3\beta x) = \sum_{n=0}^3 k_n u_{ny}(x) \quad (2.43)$$

のように (2.18) 式の右辺を級数に展開し、3次の多項式で近似する。この

近似の精度はきわめて高い。上式の係数 k_i ($i=0\sim3$) は (2.43) 式の両辺が翼面上 ($-1 \leq x \leq 1$) の任意の 4 点で一致するように決めることができる。

一枚の翼のまわりの循環を $4\Gamma U_\Gamma$ とすれば、 $z = -\infty$ で $-U_\Gamma e^{i\gamma}$ の流れを生ずることになるから、これを補正するため PQ に平行な大きさ U_Γ の一様速度を重ね合わせる。これが循環流れであり、そのような一様流れの翼面上の境界条件は (2.16) 式である。そして U_Γ は次式で与えられる。

$$U_\Gamma = \frac{V_1 U_{\Gamma 0} \sin \gamma - K \sum_{n=0}^3 k_n U_{\Gamma n}}{1 + U_{\Gamma 0} \cos \gamma} \quad \dots \dots (2.44)$$

以上の三つの流れを合成すると翼面上の速度 $u_x(x)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{u_x(x)}{K} = & \left(\frac{V_1}{K} \cos \gamma + \frac{U_\Gamma}{K} \sin \gamma \right) + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^x \tan \gamma + \left(\frac{V_1}{K} \sin \gamma - \frac{U_\Gamma}{K} \cos \gamma \right) u_{ox}(x) \\ & - \sum_{n=0}^3 k_n u_{nx}(x) \quad \dots \dots (2.45) \end{aligned}$$

また物理面 (z' 面) の羽根に沿う流速は

$$\frac{w}{u_2} = \frac{u_x(x)}{K} \frac{r_1}{r_2} \frac{\cos \gamma}{(r_1/r_2)} \quad \dots \dots (2.46)$$

となる。

(2.46) 式による計算結果の一例を図 2.4 に示す。無衝突流入の場合は、 $w/u_2 - r/r_2$ 曲線は閉じた曲線となるが、無衝突流入点以外では前縁 ($x = -1$ or $r = r_1$) で相対速度は無限大となる。無衝突流入流量より大きい流量では岐点は羽根負圧面外に、また小さい流量では岐点は羽根圧力面側に移り、前縁では角をまわる流れが生じて、理論計算で仮定される非粘性流体では、速度は無限大となる。

羽根車の性能、すなわち揚程係数 ψ と流量係数 ϕ は次のようになる。羽根車外周速度を u_2 ，羽根車出口円周上の平均径方向流速を c_{r2} ，羽根車の揚程を H とすると

$$\phi = \frac{c_{r2}}{u_2} = \frac{V_1}{K} \frac{r_1}{r_2} \cos \gamma \quad \dots \dots (2.47)$$

$$\psi = \frac{H}{u_2/g} = -\frac{U_\gamma}{K} \cdot 2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \cos \gamma \quad \dots \dots (2.48)$$

無衝突流入流量の場合の流量係数を ϕ_0 とすれば

$$\phi_0 = \frac{r_2}{r_1} \cos \gamma \cdot \frac{k_0 - \cos \gamma \cdot \sum_{n=0}^3 k_n U_{\gamma n}}{\sin \gamma} \quad \dots \dots (2.49)$$

となる。

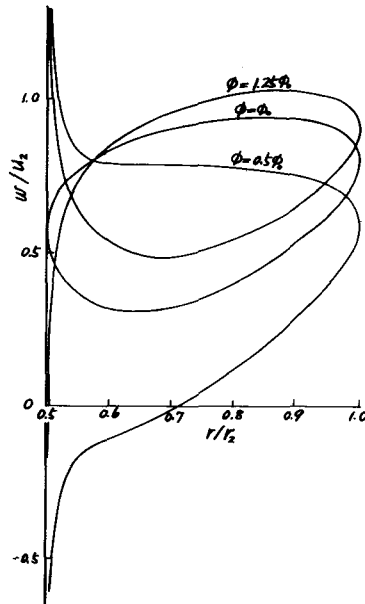


図 2.4 羽根面上の相対流速分布
($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$ の羽根車)

第 2 節 羽根面外の点の流れの計算法

図 2.4 に示したように羽根面の圧力面上と負圧面上では相対流速が異なる。羽根はいま厚さのない薄翼と仮定しているので、羽根は一本の線うずでおきかえることができる。

羽根を線うずでおきかえる方法はいわゆる特異点法であるが、本節に述べる羽根の線うずによるおきかえは特異点法と本質的に異なる。特異点法はうず分

布を積分方程式から決定するのを基本的な特徴としているが、本節の方法ではうず分布は(2.45)式で求められる羽根面上の速度を用いて決定する。

2.1 複素ポテンシャル

はじめに羽根をおきかえた線うずのみによる複素ポテンシャル W' を求める。

図2.2(b)の無限平板直線翼列面(z 面)で考えると、羽根列は等間隔で配置された無限の線うず列となる。

図2.5に示す無限の点うず列による流れの面上の任意の一点、 $z_1 = x_1 + iy_1$ における複素ポテンシャル W' は、

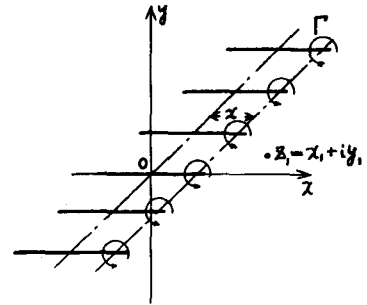


図 2.5

$$W' = \frac{i\Gamma(x)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \log(z_1 - x - 2ntie^{-i\gamma})$$

$$= \frac{i\Gamma(x)}{2\pi} \left[\log \frac{\pi}{n=1} \{ (z_1 - x)^2 + 4n^2 t^2 e^{-2i\gamma} \} + \log(z_1 - x) \right]$$

である。ところが

$$\sin(iz) = iz \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

の関係があるので

$$W' = -\frac{i\Gamma(x)}{2\pi} \cdot \log \left\{ -\frac{2te^{-i\gamma}}{i} \sin \frac{\pi(z_1 - x)}{2t(\sin\gamma + i\cos\gamma)} \right\}$$

となる。

複素ポテンシャルの定数は省いてよいから

$$W' = -\frac{i\Gamma(x)}{2\pi} \log \sin \left\{ \frac{\pi(z_1 - x)}{2t(\sin\gamma + i\cos\gamma)} \right\} \quad \dots \dots (2.50)$$

翼上面の速度を $u_{ux}(x)$ 翼下面の流速を $u_{lx}(x)$ とすると

$$\Gamma(x) = u_{lx}(x) - u_{ux}(x) \quad \dots \dots (2.51)$$

であるから、 $-1 \leq x \leq 1$ の間に分布する線うずによる複素ポテンシャル W' は次のようになる。

$$W' = -\frac{i}{2\pi} \oint u(x) \log \sin \frac{\pi(z_1 - x)}{2t(\sin \gamma + i \cos \gamma)} dx \quad \dots (2.52)$$

ただし、積分の径路は (2.51) 式のうず度の定義によつて、翼上面にそつて $x = 1$ から -1 まで、次に翼下面にそつて $x = -1$ から $+1$ までの順になる。

通り抜け流れの一樣流による複素ポテンシャル W'_t は

$$W'_t = V_1 e^{i\gamma} z_1 \quad \dots (2.53)$$

であり、循環流れの一樣流による複素ポテンシャル W'_c は

$$W'_c = -iU_\gamma e^{i\gamma} z_1 \quad \dots (2.54)$$

である、したがつて羽根車のまわりの絶対流の複素ポテンシャルは

$$W = \frac{i}{2\pi} \oint u(x) \log \sin \frac{\pi(z_1 - x)}{2t(\sin \gamma + i \cos \gamma)} dx + V_1 e^{i\gamma} z_1 - iU_\gamma e^{i\gamma} z_1 \quad \dots (2.55)$$

となる。

2.2 羽根面外の任意の点の流速

羽根面外の任意の一点 $z_1 = x_1 + iy_1$ における流速の x , y 軸方向成をそれぞれ u , v とすると、 u , v は (2.55) 式の複素ポテンシャルから

$$\frac{dW}{dz_1} = u - iv \quad \dots (2.56)$$

によつて得られる。

いま

$$\frac{\pi}{2t} \{ (x_1 - x) \sin \gamma + y_1 \cos \gamma \} = X \quad \dots (2.57)$$

$$\frac{\pi}{2t} \{ -(x_1 - x) \cos \gamma + y_1 \sin \gamma \} = Y$$

とおくと

$$\frac{\pi(z_1 - x)}{2t(\sin \gamma + i \cos \gamma)} = X + iY$$

となり,

$$\tan(X+iY) = \frac{\sin 2X + i \sinh 2Y}{\cosh 2Y + \cos 2X}$$

の関係を用いると

$$u = -\frac{\sin \gamma}{4t} \phi^2 u_x(x) \frac{\sinh 2Y + \cot \gamma \sin 2X}{\cosh 2Y - \cos 2X} dx + (V_1 \cos \gamma + U_\gamma \sin \gamma) \dots \dots (2.58)$$

$$v = -\frac{\cos \gamma}{4t} \phi^2 u_x(x) \frac{\sinh 2Y - \tan \gamma \sin 2X}{\cosh 2Y - \cos 2Y} dx - (V_1 \sin \gamma - U_\gamma \cos \gamma) \dots \dots (2.59)$$

となる.

$u_x(x)$ は (2.45) 式で与えられるから (2.58), (2.59) 式によつて羽根面外の任意の点の速度を求めることができる. しかしこの数値積分は (x_1, y_1) が与えられるたびごとに, また流量状態が変化するたびに行わねばならず, これは非常な手数を要する. また無衝突流入流量以外は図 2.4 に示したように羽根前縁で流速が無限大となり, (2.58), (2.59) 式の数値積分はきわめて困難となる.

この困難を避けるため (2.58), (2.59) 式の被積分項を次式のように近似する.

$$P_1 \equiv \frac{\sinh 2Y + \cot \gamma \sin 2X}{\cosh 2Y - \cos 2X} \div \sum_{m=0}^5 C_{m1} x^m \dots \dots (2.60)$$

$$P_2 \equiv \frac{\sinh 2Y - \tan \gamma \sin 2X}{\cosh 2Y - \cos 2X} \div \sum_{m=0}^5 C_{m2} x^m \dots \dots (2.61)$$

上式の係数 C_{m1}, C_{m2} ($m=0 \sim 5$) は, (2.60), (2.61) 式の両辺が $-1 \leq x \leq 1$ の任意の 6 点で一致するように決定することができる. 本論文では $x = \pm 1, \pm 0.6, \pm 0.2$ の 6 点で (2.60), (2.61) 式の両辺が一致するよう, 係数 C_{m1}, C_{m2} を決定した. 近似曲線と厳密値の比較の一例を図 2.6 に示す. z_1 が羽根に非常に近い場合は P_1, P_2 は 5 次曲線で近似しにくくなり, 精度が落ちる.

翼面上の速度 $u_x(x)$ のうち羽根を一まわりする積分の際には、(2.45) 式の右辺のうち x に無関係な項、および翼の両面で等しい値をとる項は必要でない。したがって (2.58) (2.59) 式の積分に必要な (2.45) 式は

$$\frac{u_x(x)}{K} = \sum_{n=0}^3 k_n^* u_{nx}(x) \dots (2.61)$$

とおくことができる。ただし

$$k_0^* = -k_0 + \frac{V_1}{K} \sin \gamma - \frac{U_\gamma}{K} \cos \gamma$$

$$k_1^* = k_1, \quad k_2^* = k_2, \quad k_3^* = k_3$$

$$\dots (2.62)$$

で、無衝突流入の場合には $k_0^* = 0$ となる。

(2.58), (2.59) 式の積分による項、

すなわち、羽根をおきかえた線うずのみによる流速を U', V' とする。

(2.60), (2.61) 式を (2.58), (2.59) 式に代入すると

$$u' = -\frac{\sin \gamma}{4t} \oint u_x(x) \cdot P_1(x) dx = -\frac{\sin \gamma}{4t} \oint \left(\sum_{n=0}^3 k_n^* u_{nx}(x) \right) \times \left(\sum_{m=0}^5 C_{n1} x^m \right) dx \dots (2.63)$$

$$v' = -\frac{\cos \gamma}{4t} \oint u_x(x) \cdot P_2(x) dx = -\frac{\cos \gamma}{4t} \oint \left(\sum_{n=0}^3 k_n^* u_{nx}(x) \right) \times \left(\sum_{m=0}^5 C_{n2} x^m \right) dx \dots (2.64)$$

となる。

上の積分のうち $\oint u_{nx}(x) \cdot x^m dx$ ($n=0 \sim 3, m=0 \sim 5$) は翼列配置にのみ関係ししかも次のようにして数値積分によらずとも求めることができる。

$$\oint x^2 u_{cx} dx = \oint x^2 u_{cx} \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = -\frac{4t}{\pi} \frac{\cos \gamma \cdot \cosh \psi_0}{\cos \alpha} \oint \frac{x^2 d\varphi}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} = 4t \beta U_\gamma c \dots (2.65)$$

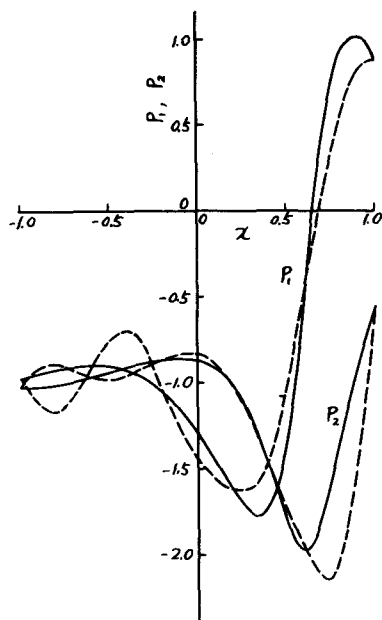


図 2.6 P_1, P_2 の近似曲線
($r/r_2=1.05$ の円周上の点の一例)

$$\oint x^4 u_{cx} dx = \oint u_{cx} x^4 \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = -\frac{4t}{\pi} \frac{\cos \gamma \cdot \cosh \psi_0}{\cos \alpha} \oint \frac{x^4 d\varphi}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} = 4t\beta' U_{\gamma c} \dots \dots (2.66)$$

$$\oint x^3 u_{xx} dx = 4t \Gamma_3'' \dots \dots (2.67)$$

$$\oint x^5 u_{2x} dx = 4t \Gamma_5'' \dots \dots (2.68)$$

とおき, (2.28) 式の速度関数間の漸化関係, および

$$\begin{aligned} x(\varphi + \pi) &= -x(\varphi), \quad u_{1x}(\varphi + \pi) = -u_{1x}(\varphi) \\ u_{2x}(\varphi + \pi) &= u_{2x}(\varphi), \quad u_{3x}(\varphi + \pi) = -u_{3x}(\varphi) \end{aligned} \dots \dots (2.69)$$

(φ は図 2.3 の単位円上の点の偏角)

の関係をいるとそれぞれの速度関数について次の諸関係式が成立つ.

$u_{0x}(x)$ については

$$\begin{aligned} \oint u_{0x} dx &= 4t U_{\gamma 0}, \quad \oint x u_{0x} dx = -4t U_{\gamma 1}, \quad \oint x^2 u_{0x} dx = 4t \beta U_{\gamma 0} \\ \oint x^3 u_{0x} dx &= -4t U_{\gamma 3} - 12t \beta U_{\gamma 1}, \quad \oint x^4 u_{0x} dx = 4t \beta' U_{\gamma 0} \\ \oint x^5 u_{0x} dx &= -20t (\beta' U_{\gamma 1} - 2 \Gamma_3'') \end{aligned} \quad (2.70)$$

$u_{1x}(x)$ については,

$$\begin{aligned} \oint x u_{1x} dx &= \oint x^3 u_{1x} dx = \oint x^5 u_{1x} dx = 0, \quad \oint u_{1x} dx = 4t U_{\gamma 1} \\ \oint x^2 u_{1x} dx &= 4t \left(\frac{U_{\gamma 3}}{3} + \beta U_{\gamma 1} \right), \quad \oint x^4 u_{1x} dx = 4t (U_{\gamma 1} \beta' - 2 \Gamma_3'') \end{aligned} \quad (2.71)$$

$u_{2x}(x)$ については,

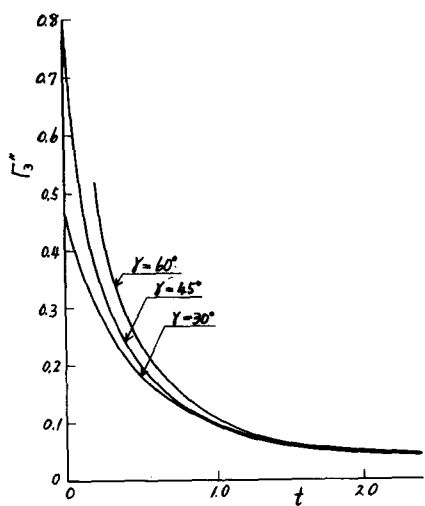
$$\begin{aligned} \oint u_{2x} dx &= \oint x^2 u_{2x} dx = \oint x^4 u_{2x} dx = 0, \quad \oint x u_{2x} dx = -\frac{4t}{3} U_{\gamma 3} \\ \oint x^3 u_{2x} dx &= 4t \Gamma_3'', \quad \oint x^5 u_{2x} dx = 4t \Gamma_5'' \end{aligned} \quad (2.72)$$

$u_{3x}(x)$ については,

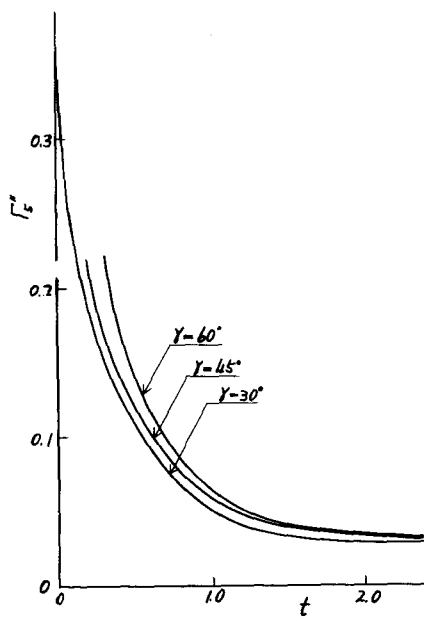
$$\begin{aligned} \oint x u_{3x} dx &= \oint x^3 u_{3x} dx = \oint x^5 u_{3x} dx = 0, \quad \oint u_{3x} dx = 4t U_{\gamma 3}'' \\ \oint x^2 u_{3x} dx &= -4t \Gamma_3'', \quad \oint x^4 u_{3x} dx = -\frac{3}{5} \cdot 4t \Gamma_5'' \end{aligned} \quad (2.73)$$

これらの積分のうち $U_{\gamma 0}$, $U_{\gamma 1}$ は (2.28), (2.29) 式によって解析的に与えられるが, $U_{\gamma 3}$, β , β' , Γ_3'' , Γ_5'' は数値積分によって求めなければならない. これらの値を図 2.7(a)~(e) に示す.

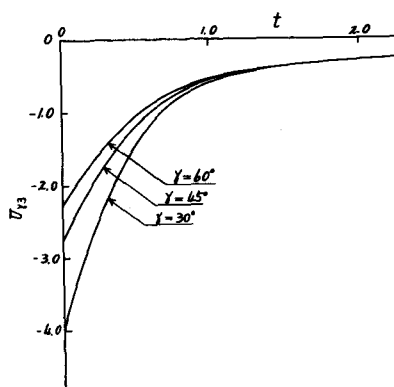
$U_{\gamma 0}$, $U_{\gamma 1}$, $U_{\gamma 3}$, β の $t \rightarrow 0$ および $t \rightarrow \infty$ の場合の極限值はすでに村田教授によって求められており, その結果は次のようになる.



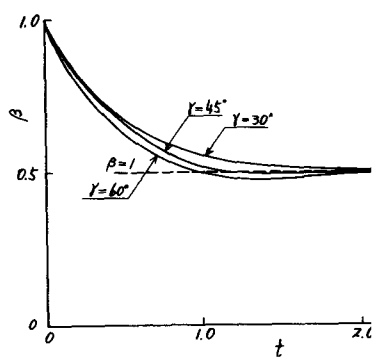
(a) Γ_3''



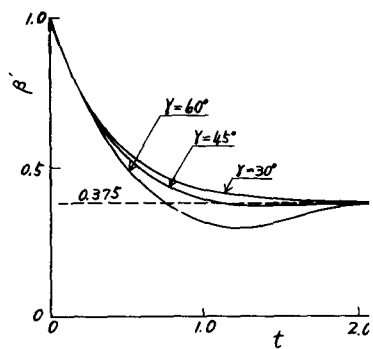
(c) Γ_5''



(b) U_{γ_3}



(d) β



(e) β'

図 2.7 U_{γ_3} , β , β' , Γ_3'' および Γ_5''

$t = 0$ のとき

$$U_{r0} = U_{r1} = \sec \gamma \quad U_{r3} = -2 \sec \gamma, \quad \beta = 1$$

$t = \infty$ のとき

$$U_{r0} = \frac{2\pi}{4t}, \quad U_{r1} = \frac{\pi}{4t}, \quad U_{r3} = -\frac{\pi}{16t}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

β' , Γ_3'' , Γ_5'' は次のようになる。

$t = 0$ のとき $\psi_0 = 0$ となるから

$$\beta' = 1.0 \quad \Gamma_3'' = \frac{4}{5} \tan \gamma \quad \Gamma_5'' = \frac{2}{3} \tan \gamma$$

$t = \infty$ のとき

$$x = \cos(\gamma - \varphi), \quad \frac{\sinh 2\psi_0}{\cosh 2\psi_0 - \cos 2\varphi} = 1$$

であるから

$$\beta' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^4(\gamma - \varphi) d\varphi = \frac{3}{8}$$

Γ_3'' , Γ_5'' については,

$$u_2 = -\frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \gamma), \quad \frac{dx}{d\varphi} = -\sin(\varphi - \gamma)$$

であるから,

$$\begin{aligned} 4t \Gamma_3'' &= 2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi - \gamma) \cos^4(\varphi - \gamma) d\varphi \\ &= 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{5}{2})}{2\Gamma(4)} = \frac{\pi}{8} = 0.39265 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4t \Gamma_5'' &= \int_0^{2\pi} \sin 2(\varphi - \gamma) \cos^5(\varphi - \gamma) \sin(\varphi - \gamma) d\varphi \\ &= 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{7}{2})}{2\Gamma(5)} = \frac{10\pi}{128} = 0.2454 \end{aligned}$$

となる。

さて上の諸関係式を用いると (2.63), (2.64) 式は次のようになる。

$$u' = -\sin \gamma \left[C_{01} (k_0^* U_{r0} + k_1^* U_{r1} + k_3^* U_{r3}) + C_{11} (-k_0^* U_{r1} - \frac{1}{3} k_3^* U_{r3}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +C_{21} \left\{ k_0^* \beta U_{r0} + k_1^* \left(\frac{U_{r3}}{3} + \beta U_{r1} \right) - k_3^* \Gamma_3^* \right\} + C_{31} \left\{ -k_0^* (U_{r3} + 3\beta U_{r1}) + k_2^* \Gamma_3^* \right\} \\
& +C_{41} \left\{ k_0^* \beta' U_{r0} + k_1^* (U_{r1} \beta' - 2\Gamma_3^*) - \frac{3}{5} k_3^* \Gamma_5^* \right\} + C_{51} \left\{ 5k_0^* (2\Gamma_3^* - \beta' U_{r1}) \right. \\
& \quad \left. + k_2^* \Gamma_5^* \right\}] \\
& \dots\dots (2.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v' = & -\cos\gamma \left[C_{02} (k_0^* U_{r0} + k_1^* U_{r1} + k_3^* U_{r3}) + C_{12} (-k_0^* U_{r1} - \frac{1}{3} k_3^* U_{r3}) \right. \\
& +C_{22} \left\{ k_0^* \beta U_{r0} + k_1^* \left(\frac{U_{r3}}{3} + \beta U_{r1} \right) - k_3^* \Gamma_3^* \right\} + C_{32} \left\{ -k_0^* (U_{r3} + 3\beta U_{r1}) + k_2^* \Gamma_3^* \right\} \\
& +C_{42} \left\{ k_0^* \beta' U_{r0} + k_1^* (U_{r1} \beta' - 2\Gamma_3^*) - k_3^* \frac{3}{5} \Gamma_5^* \right\} + C_{52} \left\{ 5k_0^* (2\Gamma_3^* - \beta' U_{r1}) \right. \\
& \quad \left. + k_2^* \Gamma_5^* \right\}] \\
& \dots\dots (2.70)
\end{aligned}$$

(2.58), (2.59) 式より, 平板直線翼列面上の任意の一点 $z_1 = x_1 + iy_1$ における速度は次のようになる。

$$\begin{aligned}
u &= u' + V_1 \cos\gamma + U_{r1} \cos\gamma \\
v &= v' + U_{r1} \cos\gamma - V_1 \sin\gamma
\end{aligned}
\quad \dots\dots (2.71)$$

この方法によれば $\beta, \beta', U_{r0}, \dots\dots$ などの数値がわかっているならば, 羽根車の形状, 寸法によって定まる常数 $k_n (n=0\sim3), C_m (m=0\sim5)$ を決定しさえすれば数値積分によらなくても計算できる。また流量状態が変化した場合は, k_0, V_1, U_{r1} のみを計算し直せばよい。

さて(2.69), (2.70) 式から u', v' を求めるときは図2.6に示したように, 計算しようとする点が羽根に非常に近い場合は精度が落ちる。この難点を避けるためには計算はやや面倒であるが次のようにすればよい。

図2.4に示したように無衝突流量の場合は羽根面流速は閉じた曲線になるので, (2.58), (2.59) 式の第1項の数値積分は容易である。(2.62) 式により k_1^*, k_2^*, k_3^* は流量に無関係に一つの羽根車については一定であり, k_0^* は流量によって変化するが無衝突流量の場合は0である。したがって無衝突流入流量の場合に対して行なわれた(2.58), (2.59) 式の第1項の数値積

分の値 u'^* , v'^* は (2.69), (2.70) 式の係数 k_0 を 0 とおいた場合の値に等しい。したがって u' , v' が求まれば, 他の任意の流量状態に対する値は次式によって計算できる。

$$u' = u'^* + k_0 \sin \gamma \left\{ C_{01} U_{r0} - C_{11} U_{r1} + C_{21} \beta U_{r0} - C_{31} (U_{r3} + 3\beta U_{r1}) + C_{41} \beta U_{r0} - 5C_{51} (2\Gamma_3'' - \beta U_{r1}) \right\} \dots\dots (2.72)$$

$$v' = v' - k_0 \cos \gamma \left\{ C_{02} U_{r0} - C_{12} U_{r1} + C_{22} \beta U_{r0} - C_{32} (U_{r3} + 3\beta U_{r1}) + C_{42} \beta U_{r0} - 5C_{52} (2\Gamma_3'' - \beta U_{r1}) \right\} \dots\dots (2.73)$$

(2.72), (2.73) 式において u'^* , v'^* に比べ残りの項の値は小さいので (2.72), (2.73) 式の計算値は (2.69) 式, (2.70) 式の計算値よりも精度はよい。

以上の結果は平板直線翼列面上の流れであるが, これを物理面の速度になおすには, 図 2.8 より明らかなように,

$$c_r = (u \cos \gamma - v \sin \gamma) \left| \frac{dz}{dz'} \right| \dots\dots (2.74)$$

$$c_\theta = (u \sin \gamma + v \cos \gamma) \left| \frac{dz}{dz'} \right| \dots\dots (2.75)$$

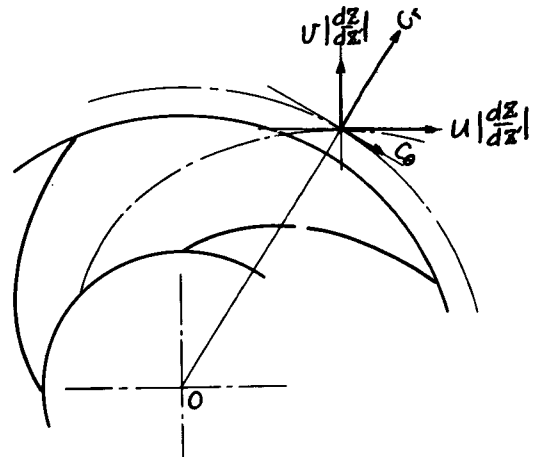


図 2.8 速度の物理面への変換

の關係を用いればよい。また相対速度の半径方向成分, 周方向成分 w_r , w_θ は, (2.8), (2.9) 式より,

$$w_r = c_r \dots\dots (2.76)$$

$$w_\theta = c_\theta + \omega r \dots\dots (2.77)$$

である。ただし, w_θ , c_θ の正方向は羽根車の回転方向と逆の方向となる。

2.3 羽根面外の任意の点のいろいろな水頭

絶対速度 c は

$$c = \sqrt{c_r^2 + c_\theta^2} \quad \dots\dots\dots (2.78)$$

絶対流れの円周に対する傾き角を A とすると

$$A = \tan^{-1}(c_r/c_\theta) \quad \dots\dots\dots (2.79)$$

羽根車の外周速度を u_2 とし、水頭を u_2^2/g で除した無次元量で表わす。また考える点 P の半径を r とし、羽根車外半径を r_2 とし、 $r/r_2 = R^*$ と無次元する。

速度水頭係数 ψ_v :

$$\psi_v = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{u_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{c_r^2 + c_\theta^2}{u_2^2} \quad \dots\dots\dots (2.80)$$

相対速度水頭係数 ψ_{wv} : 速度三角形より

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2cu \cos A$$

であるから、

$$\psi_{wv} = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{u_2} \right)^2 = \psi_v + \frac{1}{2} R^{*2} - \left(\frac{c}{u_2} \right) R^* \cos A \quad \dots\dots\dots (2.81)$$

静圧水頭係数 ψ_p : 静圧 p_s' は回転座標系に対するベルヌーイの式

$$\frac{p_s'}{\gamma} + \frac{w^2 - u^2}{2g} = \text{一定} \quad \dots\dots\dots (2.82)$$

より求まる。いま上式の右辺の一定値を羽根車入口での相対全水頭 P_1 とし、静圧 p_s をあらためて次のように定義する。

$$(p_s'/\gamma) - P_1 = p_s \quad \dots\dots\dots (2.83)$$

このとき

$$\psi_p = \frac{p_s/\gamma}{u_2^2/g} = \left(\frac{c}{u_2} \right) R^* \cos A - \psi_v \quad \dots\dots\dots (2.84)$$

全水頭係数 Ψ : 羽根車の揚程を H とすれば

$$\Psi = \frac{H}{u_2^2/g} = \psi_p + \psi_v = \left(\frac{c}{u_1} \right) R^* \cos A$$

速度ポテンシャルを Φ ，流れ関数を Ψ とすれば

$$W = \Phi + i\Psi \quad \dots\dots (2.85)$$

(2.55)式の右辺第1項は

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{\pi(z_1 - z)}{2t(\sin\gamma + i\cos\gamma)} &= \log \sin(X + iY) \\ &= \frac{1}{2} \log (\cosh 2Y - \cos 2X) + i \tan^{-1} (\cot X \cdot \tanh Y) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2\pi} \oint u(x) \tan^{-1} (\cot X \cdot \tanh Y) dx \\ &\quad + V_1(x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma) + U_1(x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma) \quad \dots\dots (2.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{-1}{4\pi} \oint u(x) \log (\cosh 2Y - \cos 2X) dx \\ &\quad + V_1(x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma) - U_1(x_1 \sin\gamma + y_1 \cos\gamma) \quad \dots\dots (2.87) \end{aligned}$$

となる。

(x_1, y_1) を与えれば(2.87)式によつてその点の流れ関数の値が計算される。また、 (x_1, y_1) に対応する物理面上の点 (r, θ) は(2.15)，(2.16)式で求まる。したがつて物理面上の点の Ψ の値が求まり， Ψ =一定の点を結べば流線が得られる。

(2.87)式の右辺第1項は解析的には積分できないから，速度を求めた方法と同じ方法を用い，

$$\log (\cosh 2Y - \cos 2X) \doteq \sum_{m=0}^5 \sigma_m x^m \quad \dots\dots (2.88)$$

で近似すれば(2.69)式または(2.70)式の係数， C_{m1} または C_{m2} を $\sigma_m (m=0\sim5)$ に変更するだけで，まったく同様に計算できる。

図2.9は(2.88)式の近似の一例で，

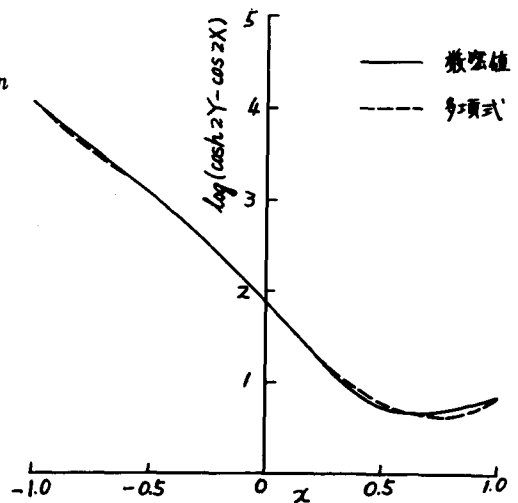


図2.9 流れ関数の計算の精度

係数 σ_m は (2.88) 式の両辺が $x = \pm 1.0, \pm 0.6, \pm 0.2$ の6点で一致するように決定した場合である。図で明らかなようにこの近似は羽根に近い点で非常に精度がよい。これは流れ関数が速度の積分値であるためである。

しかし流線を知ることは羽根車内の流れの定性的性質を知るには有効であるが、定量的知識は得にくい。したがって流線を求めることの実用的意義は少

2.5 数値計算例

本研究の目的は羽根車後方の流れを計算し、これを実験と比較することであるから、理論計算は羽根車後方の円周上の分布について行う。計算結果は図 2.10 に示す T 線と D 線の間に含まれる羽根一ピッチ間について示す。 T 線、 D 線はとなりあう羽根曲線をそのまま対数らせんとして延長した曲線である。

図 2.11 ~ 図 2.16 の右側は D 線側、すなわち羽根圧力面側で、図の左側は T 線側、すなわち羽根負圧面側である。

図 2.11 は羽根枚数 $N = 6$, $\gamma = 60^\circ$ の羽根車の無衝突流入流量の場合の近似度を羽根一ピッチ間の全圧分布について示したものである。図の実線は羽根をおきかえたりすによる流速を (2.69) , (2.70) 式より求めた近似値であり、破線は、

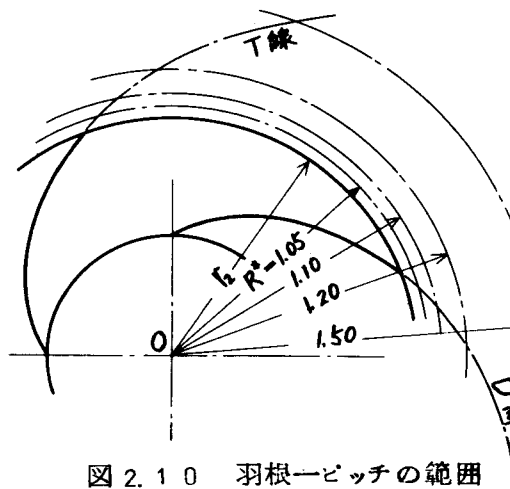


図 2.10 羽根一ピッチの範囲

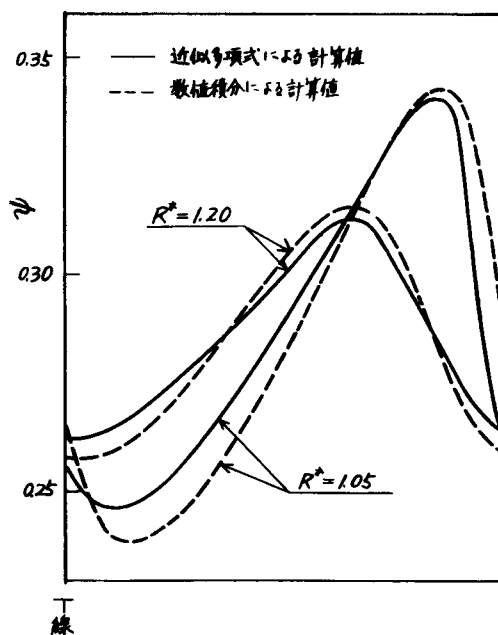


図 2.11 近似式の精度
($N=6$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$ の羽根車の場合)

(2.58), (2.59) 式より直接, 数値積分によつて求めたものである. 羽根面上の流速は実用的な羽根車, とくに $N=6$, $\gamma=60^\circ$ 程度の節弦比の羽根車ではほぼ厳密解とみなしうる程度に精度よく求まるので, 図 2.11 の破線は厳密解と考えてよい. 流れを求めようとする点が羽根に非常に近い点である場合は, 精度はそれほどよくない. また, 羽根ピッチ t が大なるほど計算の精度は高い.

なお図 2.11~2.16 の計算値では, 係数 $k_n (n=0\sim3)$ は (2.40) 式の両辺が $x=\pm 1, \pm \frac{1}{3}$ の 4 点で一致するように定め, また係数 $C_{1m}, C_{2m} (m=0\sim5)$ は, (2.60), (2.61) 式の両辺が $x=\pm 1, \pm 0.6, \pm 0.2$ の 6 点で一致するように決定している.

図 2.12~図 2.16 に羽根一ピッチ間の全水頭係数 ψ , 圧力水頭係数 ψ_p , 流れの円周に対する傾き角, 径方向流速分布を示す. なお, これらの計算はすべて (2.72), (2.73) 式によっている.

図 2.12 は $N=4$, $\gamma=60^\circ$, $\phi=\phi_0$. ($=0.2407$, 無衝突流入) の場合の全水頭係数, 圧力水頭係数, 速度水頭係数の分布である.

図 2.13 は $N=4$, $\gamma=60^\circ$, $\phi=\frac{1}{2}\phi_0$ の場合の全水頭係数, 圧力水頭係数, 速度水頭係数の分布である.

図 2.14 は $N=4$, $\gamma=60^\circ$, $\phi=1.25\phi_0$, $\phi=0.75\phi_0$ の場合の全水頭係数の分布である.

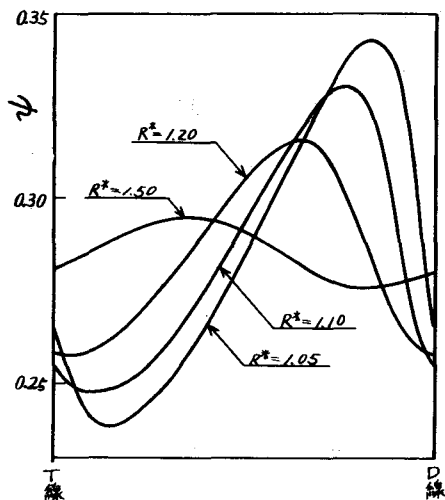
図 2.15 は $N=6$, $\gamma=60^\circ$, $\phi=\phi_0$. ($=0.2043$) の場合の全水頭係数, 圧力水頭係数, 速度水頭係数の分布である.

図 2.16 は $N=4$, $\gamma=60^\circ$, $R^*=1.05$ の場合の絶対流れ角 α , 相対流れ角 β , 径方向流速 c_r/u_2 の分布である.

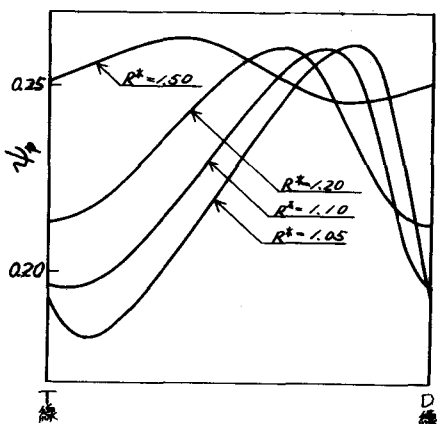
2.6 計算結果に対する考察

図 2.12, 図 2.13, 図 2.15 から明らかなように, 羽根車後方の円周上の流れの分布は, 羽根の節弦比, 流量係数にはほとんど無関係に類似の分布をす

る。ポテンシャル流れにおいては絶対全水頭はいたるところ一定であるが，絶対全水頭，すなわち流体粒子のもつエネルギーは羽根圧力面側に高く，負圧面側で低い。すなわち羽根作用は羽根圧力面側で大きい。羽根循環は羽根圧力面での相対流速を減じ，羽根負圧面での相対流速を増大させる作用をするが，相対



全圧分布 ($\psi = H / \frac{u_2^2}{g}$)

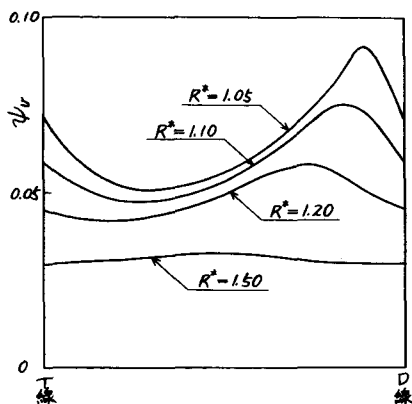


静圧分布 ($\psi_p = \frac{P_s}{\gamma} / \frac{u_2^2}{g}$)

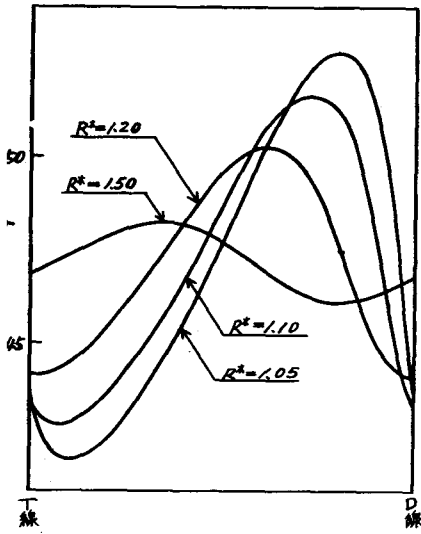
図 2.12 羽根車後方の流れの分布

$N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$

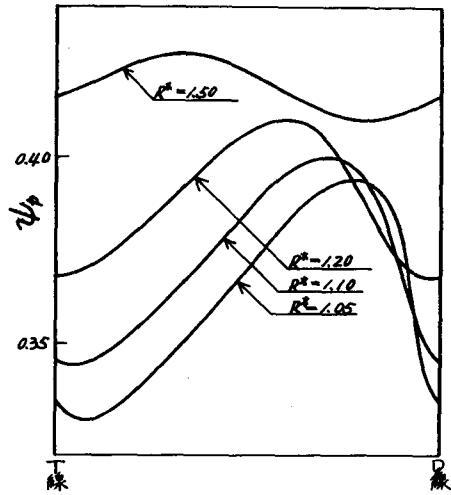
$\phi=\phi_0$ (無衝流入流量=0.241)



速度分頭分布 ($\psi_v = \frac{1}{2} (\frac{c}{u_2})^2$)

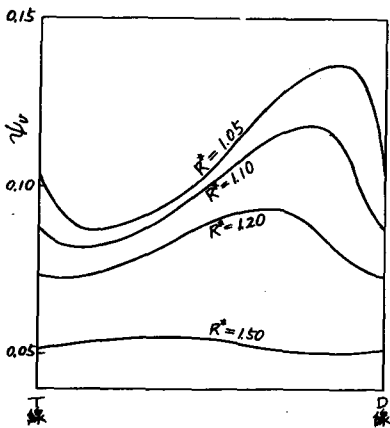


全水頭分布
 $(\psi = H / \frac{u_2^2}{g})$



静圧水頭分布
 $(\psi_p = \frac{P_s}{\gamma} / \frac{u_2^2}{g})$

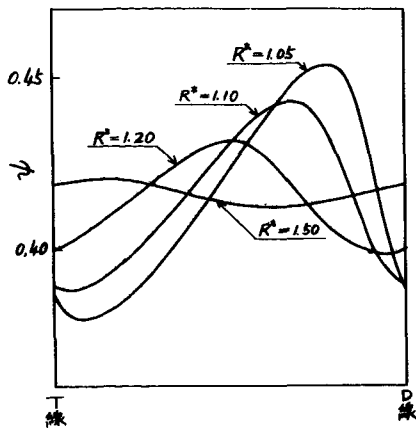
図 2.13 羽根車後方の流れの分布



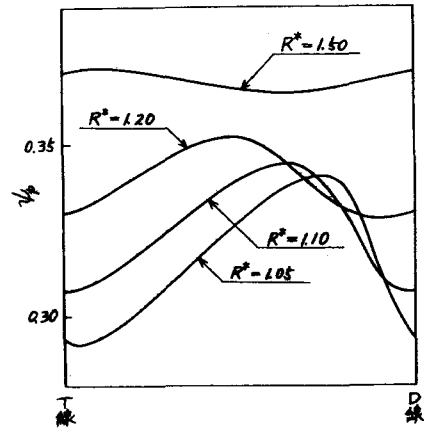
速度水頭分布
 $(\psi_v = \frac{1}{2} (\frac{c}{u_2})^2)$

$$N=4, \gamma=60^\circ, r_2/r_1=2$$

$$\phi = \frac{1}{2} \phi_0 \text{ (無衝突流入流量の半分の流量} = 0.120 \text{)}$$

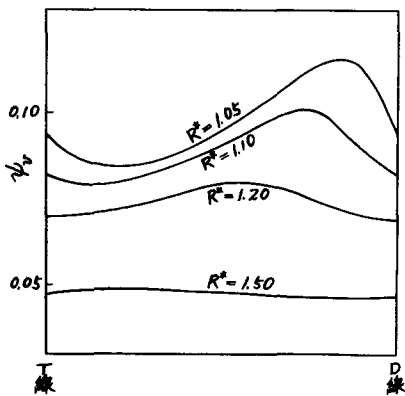


全水頭分布
 $(\psi = H / \frac{u_2^2}{g})$



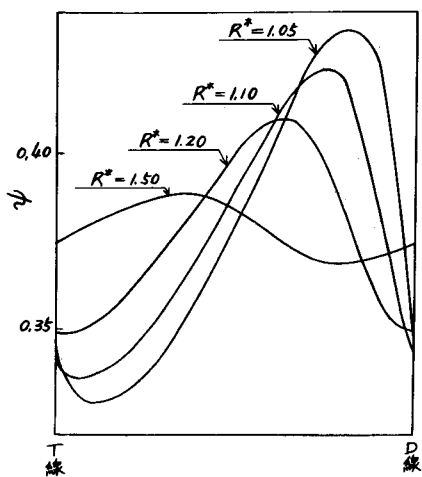
静圧水頭分布
 $(\psi_p = \frac{p_s}{\gamma} / \frac{u_2^2}{g})$

図 2.14 羽根車後方の流れの分布



速度水頭分布
 $(\psi_v = \frac{1}{2} (\frac{c}{u_2})^2)$

$N=6, \gamma=60^\circ, r_2/r_1=2$
 $\phi=\phi_0$ (無衝突流入流量
 $=0.204$)



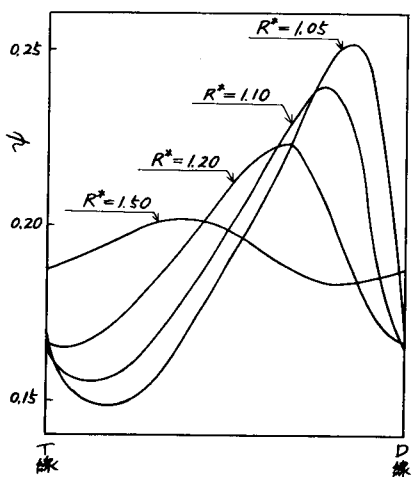
(a) $\phi = 0.75 \phi_0$

図 2.15 羽根車後方の全圧分布

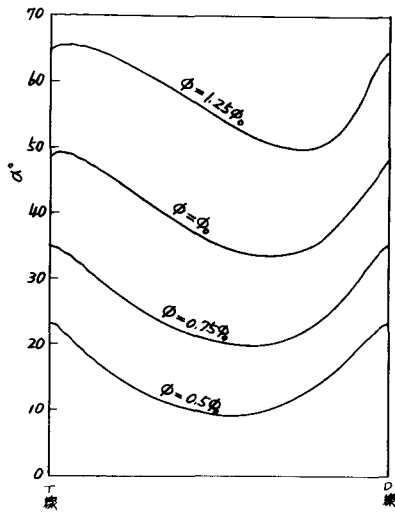
$$N=4, \gamma=60^\circ, r_2/r_1=2$$

$$\phi = 0.75 \phi_0 \text{ および } 1.25 \phi_0$$

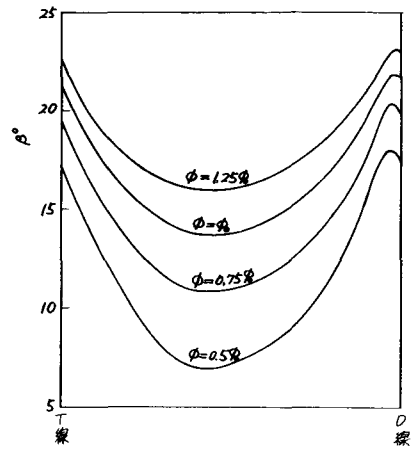
の場合



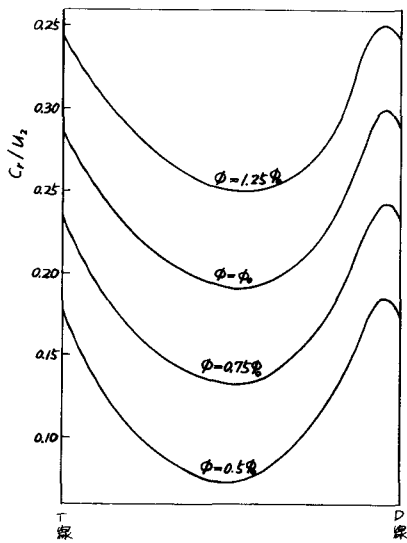
(b) $\phi = 1.25 \phi_0$



(a) 絶対流れ角分布



(b) 相対流れ角分布



(c) 径方向流速分布

図 2.16 羽根車後方の流れの分布

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$)

流速の減少は、回転座標系に対するベルヌーイの式より明らかなように圧力を増す。絶対速度水頭の羽根一ピッチ間の分布は羽根近傍で大きい、この変動は静圧水頭の変動ほどに大きくはない。したがって圧力水頭が大きくなる羽根圧力面側での羽根作用が強くなる。

羽根車後方の流れの変動の振幅は、一つの羽根車では流量係数にほとんど無関係であるが、節弦比については、節弦比が小さいほど羽根の案内作用が強いので変動は小さい。また変動の振幅はそのときの平均水頭に対する割合が一定になるのではなく、その絶対値が流量係数にほとんど無関係になる。

一次元流理論や羽根面上の流れを求めるポテンシャル流れ理論では羽根車が与える全水頭の圧力水頭と速度水頭の配分は計算できない。図 2.17 は羽根枚数 4 枚および 6 枚の場合の速度水頭、圧力水頭を示す。図に明らかなように羽根車から与えられるエネルギーの大部分は圧力水頭になつている。また速度水頭は流量係数 ϕ によってあまり変化しない。

羽根車後方の全水頭の分布が流量係数によってあまり変化しないことは、流量係数の変化によって流線は非常に変化するのであるから、羽根車から遠ざかる過程において、ある特定の流体粒子に着目して考えれば、エネルギーは変動を繰り返していることを意味している。

静圧の半径方向の変化は $1/R^*$ に比例するが、流量が少ないときは、羽根車出口での平均圧力が高いため、 R^* の増加にともなう静圧上昇は流量が大きいときよりも大きい。しかし変動の振幅は羽根車直後と同様、流量によってほとんど変化しない。

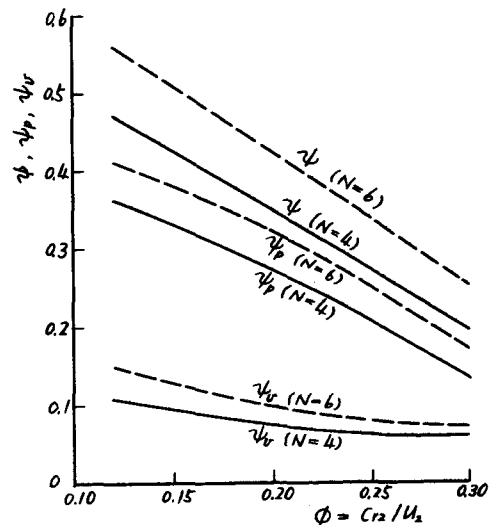


図 2.17 流量の変化にともなう諸水頭の変化

$$(r_2/r_1 = 2, \gamma = 60^\circ)$$

羽根車出口における相対流れ角は流量の大小によってそれほど変化しないが、絶対流れ角は流量によって大きく変化する。したがって案内羽根のあるディフューザを羽根車後方に設けようとするときは設計流量以外では案内羽根入口で大きな損失が生じることが予想される。また羽根車出口での羽根車の吐き出し量の分布が羽根近傍に大きく、羽根間流路中央部に少いことは興味深い。

2.7 対数らせんに近い羽根の場合

本節では対数らせん羽根に近い羽根をもった、二次元ポンプ羽根車の場合を考える。(2.12)式の写像関数を用いれば図2.18の物理面(z 面)の羽根は直線翼列面のわずかにそりのある翼に写像される。

等角写像の性質から、入口および出口の羽根角について次式が成立つ。

$$\theta_1 = \gamma_1 - \gamma = \beta_1 - \beta, \quad \theta_2 = \gamma - \gamma_2 = \beta - \beta_2 \quad \dots \dots (2.89)$$

また、翼面上 z 面の $x=0$ の点が $y=y_0$ とすれば、 z' 面の羽根面上、 $r=\sqrt{r_1 r_2}$ の点では

$$h_0 = \left| \frac{dz'}{dz} \right| y_0 = \sqrt{r_1 r_2} \frac{y_0}{\cos \gamma} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad \dots \dots (2.90)$$

となる。対数らせんに近い羽根を(2.89)、(2.90)式の三つの条件で規定する。

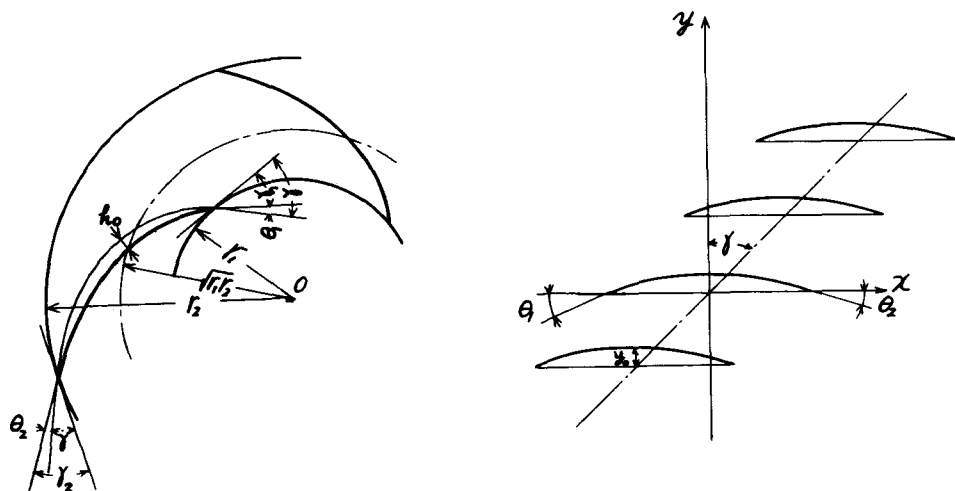


図 2.18. 対数らせんに近い羽根の写像

前節までに述べた対数らせん羽根の場合の流れに，羽根面に垂直に

$$K v(x) = m_0 + m_1 x + m_2 (x^2 - \beta) + m_3 (x^3 - 3\beta x) \quad \dots (2.91)$$

の速度をもつ流れを加えて，翼面が流線になるようにする。

その結果翼面に沿う流速は

$$\begin{aligned} \frac{u_x(x)}{K} = & \left(\frac{V_1}{K} \cos \gamma + \frac{U_Y}{K} \sin \gamma \right) + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^x \tan \gamma - \sum_{n=0}^3 (k_n - m_n) u_{nx}(x) \\ & + \left(\frac{V_1}{K} \sin \gamma - \frac{U_Y}{K} \cos \gamma \right) u_{ox}(x) \quad \dots (2.92) \end{aligned}$$

となる。また一枚の羽根のまわりの循環 $4tU_Y$ は次のようになる。

$$\frac{U_Y}{K} = \frac{1}{1 + U_Y \cos \gamma} \left\{ \frac{V_1}{K} U_Y \sin \gamma - \sum_{n=0}^3 (k_n - m_n) U_Y n \right\} \quad \dots (2.93)$$

通り抜け流れの一樣速度 V_1 は (2.42) 式と同じである。

(2.91) 式の係数 m_n は次のようにして決定できる。

翼が流線となる条件は，連続の条件から

$$K \int_{-1}^x v_y(x) dx = y \cdot \bar{u}_x(x) \quad \dots (2.94)$$

となる。ただし， $\bar{u}_x(x)$ は $u_x(x)$ の上面および下面の値の平均値であり， x ， y は翼面上の点の z 面上の複素座標である。

さて $x = -1$ ， 0 ， 1 において (2.94) 式が成立するためには次の四式が満足されなければならない。

$$\left. \begin{aligned} v_y(-1) &= \bar{u}_x(-1) \tan \theta_1 \\ v_y(1) &= -\bar{u}_x(1) \tan \theta_2 \\ \int_{-1}^1 v_y(x) dx &= 0, \quad \int_{-1}^0 v_y(x) dx = \bar{u}_x(0) y_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.95)$$

ところで，速度関数には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{ox}(1) &= \bar{u}_{ox}(-1) = \frac{\sin 2\alpha}{\sinh 2\phi} \\ \bar{u}_{1x}(-1) &= \bar{u}_{1x}(1), \quad \bar{u}_{1x}(0) = 0 \\ \bar{u}_{2x}(1) &= \bar{u}_{2x}(-1), \quad \bar{u}_{2x}(0) = \bar{u}_{2x}(0) \\ \bar{u}_{3x}(1) &= -\bar{u}_{3x}(-1), \quad \bar{u}_{3x}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.96)$$

この関係を用いれば (2.92) 式によつて $\bar{u}_x(-1)$, $\bar{u}_x(1)$, $\bar{u}_x(0)$ を計算することができ, (2.91) 式を (2.95) 式に代入すれば m_n ($n = 0 \sim 3$) についての四元連立一次方程式が得られる. これを解いて m_n を決定することができる. (2.91) 式の流れを付加することは, 対数らせん羽根の場合の押しのけ流れを修正することと等価である. したがって第2節に述べた羽根面外の点の流れの計算式は k_n 米を (k_n 米 $- m_n$ 米) に変更するだけですべて成立する.

一般に使用される比較回転度の低いポンプでは羽根車入口の羽根角は比較的大きく, 羽根車出口角は入口角よりも小さい.

しかし羽根車入口の羽根角と出口の羽根角の差は $5 \sim 10^\circ$ の範囲であり, 本章の方法を用いれば羽根角の差が $6 \sim 7^\circ$ までは十分に精度よく求まる. したがって本章の方法は基本的には対数らせん羽根を対象とするものであるが, 実用される遠心羽根車に対しても十分利用できるものである.

第3節 羽根車入口前方の流れに予回転がある場合

前節までの計算では羽根車無限前方の絶対流れは半径方向であると仮定してきた.

羽根に循環が生ずると, 入口前方の流れは必ずしも半径方向にはならない. 羽根循環によって誘起される羽根入口無限前方の流れの予回転は, 本論文では循環流れを重ね合わせることによって修正し, 最終的な羽根車入口無限前方の絶対流れが半径方向を向く場合を直角流入と定義してきた. このような予回転の発生は必然的な現象であるから, 修正の必要はないと考える考え方もある. しかし予回転は, 流体の粘性のために羽根車の回転によってその回転方向に流れがひきずられることによって生じ, また, 吸込部形状が予回転の発生の原因になることもある. すなわち予回転を羽根循環によって誘起されるものと, 他の原因によって生ずるものとに分離することは困難であり, 実験的に予回転の強さが求めうる場合は, 本論文のように直角流入を定義する方が, 計算には

便利である。羽根循環によって誘起される予回転を修正するかしないかは定義の違いであって、どちらに定義しても計算は可能である。

本節では羽根車入口前方の流れに予回転がある場合の羽根車性能および羽根面外の流れの計算法を述べる。

なお、ここに述べる羽根車無限前方とは図 2.1 の直線翼列面上、 $z = -\infty$ の点で、この点は物理面 (z' 面) では羽根車中心に対応する。

3.1 揚程曲線

羽根車の回転と同方向に生ずる予回転を正とし、物理面上の羽根車入口前方での円周方向速度を

$$c_p = \frac{c^*}{r} \quad \dots\dots (2.97)$$

とする。これを直線翼列面に写像すると PQ に平行に

$$V_p = \frac{c^*}{r} \left| \frac{dz'}{dz} \right| = \frac{c^* \log(r_2/r_1)}{2 \cos \gamma} \quad \dots\dots (2.98)$$

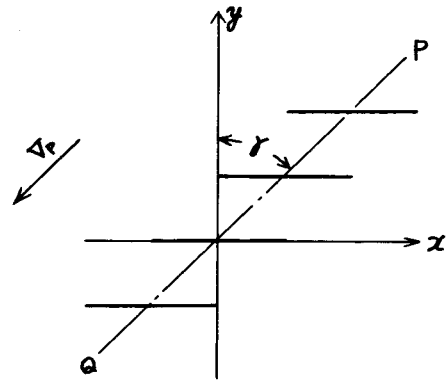


図 2.1.9 予回転の流れ

なる一様速度となる。この流れを直角流入の場合の流れに付加すればよい。このことは循環流れの一様速度 U_γ が $(U_\gamma - V_p)$ に変化することと等価である。したがって一枚の羽根のまわりの循環 $4tU_\gamma$ は

$$4tU_\gamma = 4t \frac{(V_p \cos \gamma + V_1 \sin \gamma) U_{\gamma 0} - K \sum_{n=0}^3 k_n U_{\gamma n}}{1 + U_{\gamma 0} \cos \gamma} \quad \dots\dots (2.99)$$

となる。また z 面の翼に沿う速度 $u_x(x)$ は

$$\begin{aligned} \frac{u_x(x)}{K} = & \frac{V_1}{K} \cos \gamma + \frac{U_\gamma - V_p}{K} \sin \gamma + \left(\frac{V_1}{K} \sin \gamma - \frac{U_\gamma - V_p}{K} \cos \gamma \right) u_{0x}(x) \\ & - \sum_{n=0}^3 K_u u_{nx}(x) \quad \dots\dots (2.100) \end{aligned}$$

となる。

無衝突流入の条件は $u_x(-1) \approx \infty$ であるが、(2.100) 式のうち

$u_{1x}(x), u_{2x}(x), u_{3x}(x)$ はいずれも $-1 \leq x \leq 1$ で有限となり, $u_{0x}(-1)$ のみが $\pm\infty$ となるので, $u_{0x}(x)$ の係数が 0 となることが無衝突流入の条件式となる.
すなわち

$$\frac{V_1}{K} - \frac{U_T - V_p}{K} \cos \gamma = 0 \quad \dots\dots (2.101)$$

(2.99), (2.101) 式より無衝突流入の場合の $(V_1/K)_{po}, (U_T/K)_{po}$ が求められ, その結果は次のようになる.

$$\left(\frac{V_1}{K}\right)_{po} = \frac{k_0 - \cos \gamma \sum_{n=0}^3 k_n U_{Tn}}{\sin \gamma + \cos \gamma} \quad \dots\dots (2.102)$$

$$\left(\frac{U_T}{K}\right)_{po} = - \sum_{n=0}^3 k_n U_{Tn} \quad \dots\dots (2.103)$$

また流量係数 ϕ_{po} , 揚程係数 ψ_{po} は次のようになる.

$$\phi_{po} = \left(\frac{V_1}{K}\right)_{po} \frac{r_1}{r_2} \cos \gamma \quad \dots\dots (2.104)$$

$$\psi_{po} = -2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \left(\frac{U_T}{K}\right)_{po} \cos \gamma \quad \dots\dots (2.105)$$

ただし, α は予回転の強さをあらわすパラメータで,

$$\alpha = \frac{V_{p0}/K}{V_1/K} = \frac{V_p}{V_1} = \frac{c}{c_r}^* \quad \dots\dots (2.106)$$

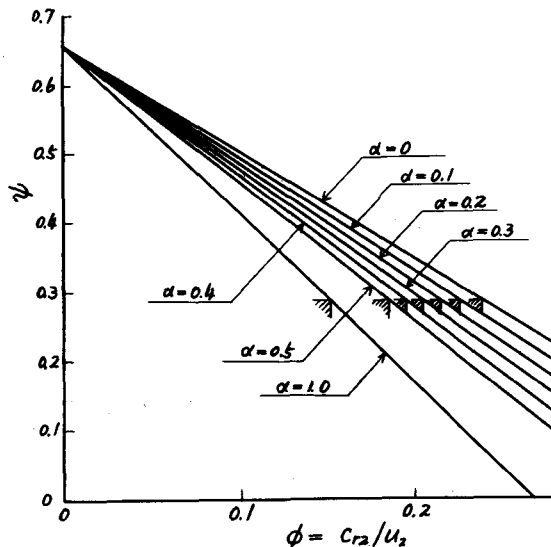


図 2.20
予回転がある場合の
揚程曲線
($N=4, \gamma=60^\circ, r_1/r_2=2$)

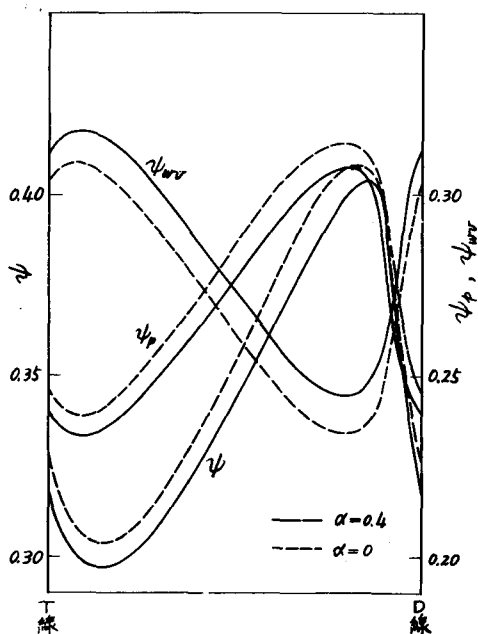
である。すなわち α は羽根車入口前方の流れが、半径方向となす角の正接である。

図 2.20 はいろいろな強さの予回転に対する羽根車の揚程曲線である。揚程曲線は予回転のない場合と同様、直線となる。図に明かなように正方向に予回転がある場合は羽根車の与える揚程は減少する。

また (2.103) 式から明かなように無衝突流入の場合の揚程係数は予回転の有無には無関係である。しかし、無衝突流入の流量係数は正方向の予回転が増加するにつれて減少する。

3.2 羽根面外の点の流れ

予回転による流れは、予回転がある場合の循環流れの複素ポテンシャル $U\gamma e^{i\gamma}$ を $(U\gamma - Vp)e^{i\gamma}$ におきかえることであらわされるから、前節の諸式は $U\gamma$ を $(U\gamma - Vp)$ におきかえるだけですべて成立する。すなわち流れの変動分のみについて考えれば、予回転がある場合に V_1^* なる z 面上の一樣通りぬけ速度をもつ流量状態の流れの変動は、予回転がない場合の $V_1^*(1 + \alpha \cot \gamma)$ なる z 面上の一樣通りぬけ速度をもつ流量状態のそれと等しい。図 2.21 は $\alpha = 0.4$ の強さの



予回転がある場合の無衝突流入流量時 ($\phi = 0.196$) の $R^* = 1.05$ における流れの変動を、同じ流量係数の予回転がない場合のそれと比較したものである。

図 2.21 予回転がある場合とない場合の羽根車後方の流れの分布

($N = 4$, $\gamma = 60^\circ$, $r_2/r_1 = 2$, $R^* = 1.05$)

$\phi = 0.196$ ($\alpha = 0.4$ の場合の無衝突流入流量)

図に示されるとおり羽根一ピッチ間の全水頭分布はほぼその平均値の差だけ平行移動した分布となる。相対速度は正方向の予回転の発生によって大きくなる。回転座標系に対するベルヌーイの定理から相対全水頭の増加分だけ圧力水頭は減少する。そして全水頭の減少は大部分が圧力水頭の減少によって生じており、速度水頭にはほとんど影響が出ない。しかし相対速度が増加したことに見合うだけ相対流れの向きは円周方向に傾く。すなわち正方向の予回転の発生はすべりに等しい効果を生ずる。

第 4 節 結 論

羽根面外の点の二次元ポテンシャル流れを計算する方法はこれまでになかった。本章では対数らせん羽根の羽根車の場合を中心に、速度関数法を応用し、速度関数の漸化関係を用いて、任意の点の流れを、任意の流量状態について比較的簡単に計算する近似的方法を見出した。

計算に必要なパラメータは羽根形状によって定まり、それらのパラメータに対する計算上の諸数値は図表で与えた。したがってこれらの図表を用いれば流れは簡単な加減乗除の組み合わせで計算することができる。

羽根は対数らせん羽根と非常にことなる場合は計算できないが、実用される遠心羽根車の場合には多くの場合対数らせん羽根に近い羽根と近似できるので、本章の方法は有効である。

また羽根車前方の流れに予回転がある場合の計算法についても述べた。

これらの計算結果を要約すると次のとおりである。

1. 羽根車後方の流れの分布は、同一の羽根車については流量の大小にはほとんど無関係に類似の分布をする。
2. 全水頭は羽根圧力面側に高く、負圧面側で低い。また流れの向きは羽根近傍で径方向に傾き、流路中央部では周方向に傾く。
3. 絶対流れの向きは流量によつて大幅に変化するが、相対流れの向きは、流量による変化は小さい。

4. 羽根車前方の予回転はすべりに等しい効果を与える。

第 3 章 羽根車後方の流れの測定

本章ではフリーインペラ実験装置を用いた羽根車後方の相対流れの実験結果を述べ、前節に述べたポテンシャル流れ理論による計算結果と比較する。

第 1 節 三孔ピトー管の特性に関する予備的考察

1. 1 三孔ピトー管の構造

本章に述べる実験では流れの測定のために円筒型三孔ピトー管を用いる。流れを測定する方法には電気的方法、機械的方法ともにまったく多様な方法があるが、水の流れの速度、静圧、流れの向きを知るためにはピトー管が最も簡単で、かつ精度が高い。流れを三次元的に測定するためには五孔ピトー管または特殊な先端部形状の三孔ピトー管を用いればよいが、本実験は羽根車後方の流れの測定であり、二次流れによる三次元流れが生じうるけれども、羽根の幅方向の速度は無視しうるほど小さく、二次元流れとして扱って十分である。二次元流れとしての測定のためには単孔ピトー管を用いることも可能であるが、実験に要する手数に難がある。

本実験に用いた三孔ピトー管の形状寸法および構造は図 3. 1 に示すとおりである。三孔ピトー管の形状は円筒形で、外径は 5ϕ であるが、この外径は、従来の同種の実験に用いられた三孔ピトー管としては最も小さい。ピトー管外径が小さいことは流れに乱れを与えないという点で望ましい条件である。

図 3. 1 に示したとおり、実験に用いた三孔ピトー管は、 5ϕ の黄銅管の中に内径 0.8ϕ のステンレス注射針 3 本を組み込み、外殻円筒面の同一円周上に、三つの受圧部が約 45° の間隔でほぼ等間隔に配置されるよう孔を明け、これらの点での円筒面圧力を注射針を通して、回転マノメータに続く導圧管に導く。

ピトー管外殻円筒部の上端にはピトー管の向きを知るための矢印が取り付けられてあり、この矢印の向きの羽根車に対する相対角を測定して流れの向きを求める。

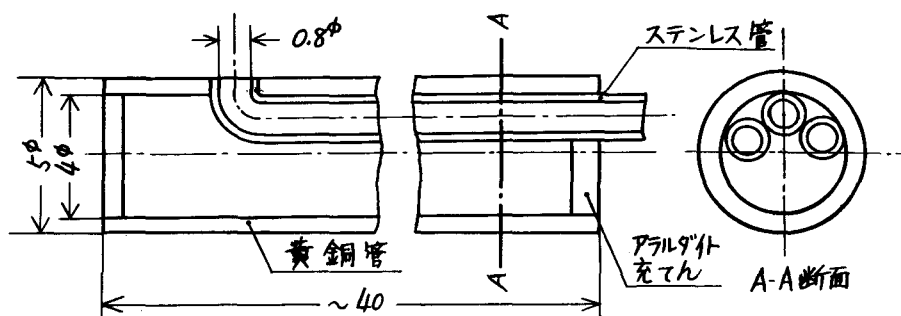


図 3.1 三孔ピトー管の形状、寸法および構造

1.2 三孔ピトー管の測定原理

三孔ピトー管の使用方法は測定者によって種々な方法がとられるようであるが、本実験では次の原理に従った。

ピトー管を上端（矢印を取り付けた側）から見て、三つの孔に反時計方向に 1, 2, 3 の番号を付す。また矢印の向きをピトー管基準方向と名付ける。図 3.2 に示すようにピトー管基準方向と流れの向きのなす角を θ とする。円筒表面の圧力を p とし、孔 1, 2, 3 の指示値に添字 1, 2, 3 を付す。また流れの動圧を p_v 、静圧を p_s とする。このとき、方向係数 $f(\theta)$ 、動圧係数 $g(\theta)$ 、静圧係数 $k(\theta)$ を次のように定義する。

$$f(\theta) = \frac{p_1 - p_3}{p_1 - p_2} \quad \dots \dots (1.1)$$

$$g(\theta) = \frac{p_v}{p_1 - p_2} \quad \dots \dots (1.2)$$

$$k(\theta) = \frac{p_2 - p_3}{p_v} \quad \dots \dots (1.3)$$

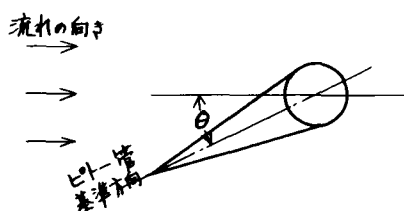


図 3.2 ピトー管基準方向と
流れの向き

$f(\theta)$ は $p_1 = p_2$ で不連続となるが、 $p_1 > p_2$ または $p_1 < p_2$ の範囲では θ に関する一価の関数であるから、測定によって p_1 , p_2 , p_3 を知れば $f(\theta)$ の値を求めることができる。そして $f(\theta)$, $g(\theta)$, $k(\theta)$ は

検定によつてあらかじめ求めることができるから測定に際して得られた $f(\theta)$ の値から θ を知ることができる。また検定曲線から θ に対する $g(\theta)$, $k(\theta)$ の値を求められるから P_s , P_v を計算することができる。

1.3 ピトー管の検定

本実験で測定するのは水の流れてあるからピトー係数の検定も水で行うことが望ましいが、水の流れて用いた検定装置の製作は容易でないので風洞を用いた。検定に用いた流れは風洞ノズル出口直後の十分に整流した一様な空気流である。

検定結果は図 3.3 に示すとおりである。

この検定結果を用いて実際の流れを測定する場合には次の諸点が問題となる。

(1) 空気流のレイノルズ数は、風速を十分大きくとれないので、水の流れよりも一般には小さいから、レイノルズ数によるピトー係数の変化が予想されること。

(2) 検定に用いた流れはきわめて一ように整流された流れであるのに反し、測定しようとする流れは速度こう配のある流れであること。

(3) 測定しようとする流れの流路は上下に固

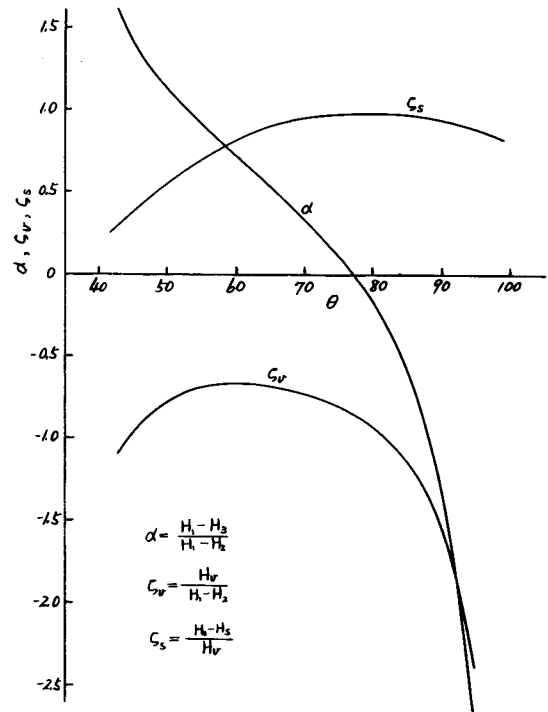


図 3.3 三孔ピトー管の検定曲線
(α : 方向係数, ζ_v : 速度水頭係数
 ζ_s : 静圧係数)

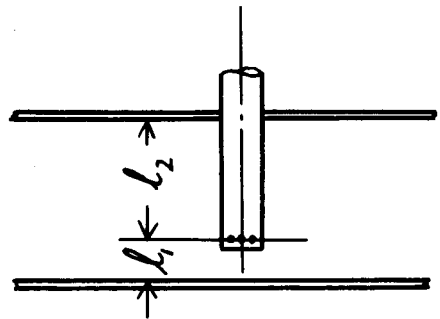


図 3.4

定壁のある，幅有限の流路であり，図 3.4 に示すように l_1 ， l_2 の影響が予想されること．

(4) 検定においてはピトー管は静止しているが，測定においてはピトー管は羽根車とともに角速度 ω で回転していること．

上述の四つの問題点のうち(1)は沼知⁴³によって検討され，流速が 2 m/s の程度である場合にはレイノルズ数の影響は無視できることがわかっている．筆者は風速を 10 m/s ， 20 m/s ， 25 m/s の三種類について検定したが，その結果ではピトー係数のレイノルズ数による変化は認められなかった．

(2)の点については今日，理論的にも，実験的にもほとんどわかっていない．この問題点は有効な検討方法がないので無視する．

(3)は測定流路と同様の流路を作って検定した結果，壁面の影響は無視してよいことがわかった．

(4)については 1.4 で述べる．

1.4 ピトー管が回転することの，ピトー係数に対する影響

本章で述べる実験では羽根車に相対的な流れを測定するため，ピトー管は羽根車とともに角速度 ω で回転する．したがって，ピトー管円筒表面の圧力分布は一様な流れの中に静止させた場合のそれとは異なることが予想される．この影響は実験的には検討できないので，流体を非粘性流体として理論的に考察する．

図 3.5 に示すように原点に強さ Q の吹き出しがあり，円筒が原点 O のまわりに角速度 ω で回転するものとする．実際には流れは円周方向速度成分があるので原点にうずがあることになるが，うずを無視しても一般性は失われない．簡単のためうずは無視する．

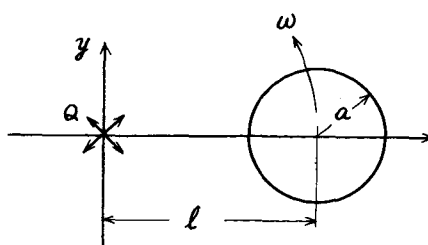


図 3.5

円筒とともに回転する回転座標系での流れ関数を ψ とし、回転座標系に相対的な流れの速度の、円周方向成分、半径方向成分をそれぞれ w_θ , w_r .とすると

$$w_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad , \quad w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \dots \dots (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 2\omega \quad \dots \dots (1.5)$$

となる.

(1.5) 式は *Laplace* の式を満足する一般解 ψ' と特解 $\frac{1}{2} r^2 \omega$ の和となる.
すなわち

$$\psi = \psi' + \frac{1}{2} r \omega^2 \quad \dots \dots (1.6)$$

(1) 原点の吹き出しによる流れ

図 3.6 のように符号を定めると円筒が流線となるような流れの複素ポテンシャル W_1

$$W_1 = \frac{Q}{2\pi} \{ \log z + \log(z - l + \frac{a^2}{l}) - \log(z - l) \} \quad \dots \dots (1.7)$$

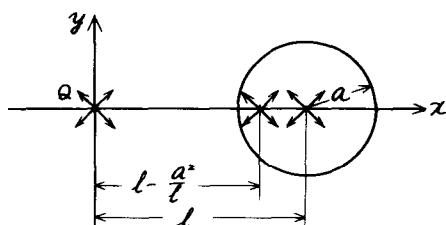


図 3.6 吹き出しの配置

となる. ただし z は考える点の複素座標で

ある. したがってこの流れによる流れ関数 ψ'_1 は次のようになる.

$$\psi'_1 = \frac{Q}{2} (\theta + \alpha - \varphi) \quad \dots \dots (1.8)$$

(2) ピトー管の回転による流れ (押しわけ流れ)

特解 $\frac{1}{2} r^2 \omega$ によって ψ' の流れの境界条件は変化する. すなわち円筒面上の境界条件は図 3.7 に示す記号を用いて

$$\begin{aligned} v_p &= v_{r2} \cos(\varphi - \theta) + v_{\theta 2} \sin(\varphi - \theta) \\ &= \omega l \sin \varphi \quad \dots \dots (1.9) \end{aligned}$$

この境界条件を満足させるため、円筒中心に 90° だけ傾いた高次の二重吹き出しを

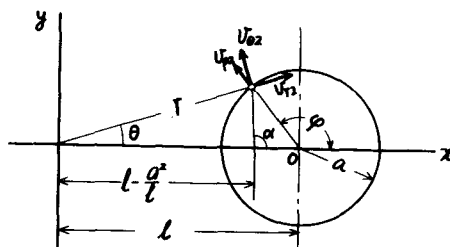


図 3.7

おく。すなわち、押しのけ流れの複素ポテンシャル W_2 を

$$W_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i C_n}{(z-l)^n} \quad \dots\dots (1.10)$$

とおく。(1.9)の境界条件を満足させるよう(1.10)式の係数 C_n を決めると

$$n=1 \text{ のとき } C_1 = a^2 \omega l, \quad n \neq 1 \text{ のとき } C_n = 0$$

となる。すなわち

$$W_2 = \frac{a^2 \omega l}{(z-l)} \quad \text{or} \quad \psi'_2 = \frac{a^2 \omega l}{\rho} \cos \varphi \quad \dots\dots (1.11)$$

である。(1.8), (1.11)式を加えると絶対流れの流れ関数 ψ' が求まり、(1.6)式より相対流れの流れ関数 ψ が定まる。すなわち

$$\psi = \frac{a^2 \omega l}{\rho} \cos \varphi + \frac{Q}{2} (\theta + \alpha - \varphi) + \frac{1}{2} r \omega^2 \quad \dots\dots (1.12)$$

となる。ピトー管表面の速度はピトー管円周に沿う流速のみであるが、この速度 w_φ は(1.12)式より

$$w_\varphi = -\omega l (\lambda + 2 \cos \varphi + \frac{2Q'}{\omega l^2} \frac{\sin \varphi}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \varphi}) \quad \dots\dots (1.13)$$

となる。ただし、 $Q' = Q/2\pi$, $\lambda = a/l$ で a はピトー管半径、 l はピトー管中心の回転中心からの距離である。

$l \gg a$ のとき $\lambda \doteq 0$ となり(1.13)式は

$$w_\varphi = -\omega l (2 \cos \varphi + \frac{2Q'}{\omega l^2} \sin \varphi) \quad \dots\dots (1.14)$$

となる。(1.14)式は吹き出しによる半径方向の流速 Q'/l と、回転による周方向流速 ωl の合速度による一様流れの中にピトー管がおかれた場合を示し、一様流中の円筒表面の速度分布を表わしている。 λ が大きくなるにつれて回転することの影響が強くなる。

円筒面上の圧力 p は、流体の比重を γ とすると

$$\frac{p/\gamma}{(\omega l)^2/2g} = \left(\frac{r}{l}\right)^2 - \left(\frac{w_\varphi}{\omega l}\right)^2 \quad \dots\dots (1.15)$$

となる．ただし r は円筒表面上の点の原点 O からの距離で

$$r^2 = l^2 + a^2 + 2la \cos \varphi \quad \dots \dots (1.16)$$

である．

図 3.8 は (1.13)，(1.15) 式から求めた円筒表面上の圧力分布の一例である．ただし縦軸は岐点圧 p_t との差で示してある．すなわち

$$\frac{(p/r) - (p_t/r)}{(\omega l)^2 / 2g}$$

である．

図 3.8 は $l = 100 \text{ mm}$ ， $a = 5 \text{ mm}$
 $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$ ， $Q = 10 \text{ l/s}$ の場合の回
 転円筒の円筒面上の圧力分布を，一様静
 止流のそれと比較したものである．

図に示すとおり，ピトー管が回転する
 ことによって表面圧力は静止している場
 合よりも低下する．そして岐点位置より
 も内側，すなわち回転中心からの距離が
 小さい側では静止した場合とほとんど差
 がないが，岐点位置より外側では差が大

きい．図 3.8 に示した例では一様静止流中の検定結果に対して約 5 % の最大誤
 差を見込まなければならない．しかし筆者が測定に用いた際には $l = 105 \text{ mm}$ ，
 $a = 2.5 \text{ mm}$ ， $\omega = 6.7 \text{ rad/s}$ であり，この場合には差は 1 % 以内となるので回転
 による影響は無視できる．

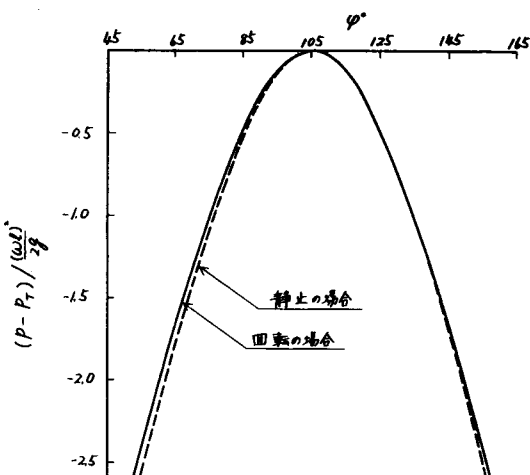


図 3.8 回転するピトー管の圧力
 分布の一例

($l = 100 \text{ mm}$ ， $a = 5 \text{ mm}$ ， $\omega = 20\pi$
 rad/s ， $Q = 10 \text{ l/s}$)

第 2 節 羽根車後方の流れの測定

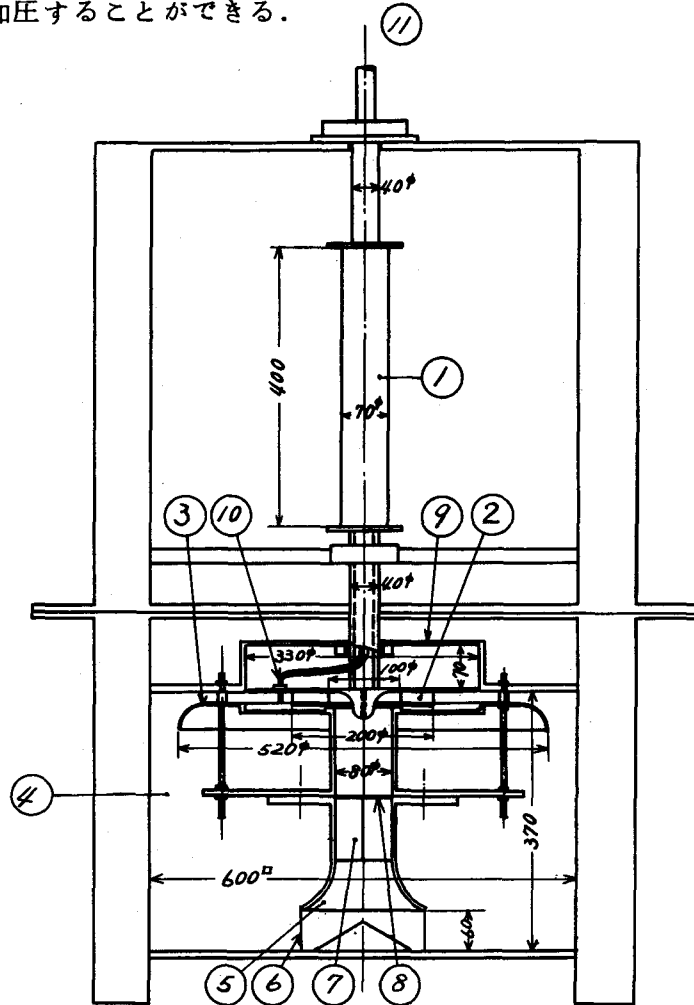
2.1 実験装置

2.1.1 実験装置の構成

図 3.9 は実験装置の概略を示す．実験装置の主要部分は水槽，測定部．回転

マノメータを兼ねる車軸，駆動機より成り，これらは立型に組みたてられる。

装置上方約 1 m の位置に加圧水槽があり，この加圧水槽から実験装置水槽に配管して加圧することができる。



- | | |
|----------------|-------------|
| 1 : 回転マノメータ兼車軸 | 7 : 仕切板 |
| 2 : 羽根車 | 8 : 流量制御用金網 |
| 3 : ディフューザ | 9 : 観測窓 |
| 4 : 水槽 | 10 : 三孔ピトー管 |
| 5 : ベルマウス | 11 : 直流電動機 |
| 6 : 整流金網 | |

図 3.9 実験装置略図

各部分の詳細は次のとおりである。

2.1.2 羽 根 車

羽根車は上、下シュラウド、羽根、上下回転リング・ディフューザより構成される。

羽根車の形状寸法は図 3.10 に示すとおりである。

羽根車外径は 200ϕ 、内径は 100ϕ 、幅は半径方向に一定で、 15mm である。羽根の内側円周は直径 100ϕ であるが、吸込口直径は 80ϕ である。

羽根枚数は 4, 6, 8 枚にとりかえることができる。

また、羽根は対数らせん羽根で、羽根角は 30° および 22.5° の 2 種類あるが、実験は主として、羽根角 30° 、羽根枚数 4 枚のものをを用いた。

羽根厚さは 3mm である。

羽根は ABS 樹脂でできており、その表面はきわめて滑らかに仕上げてある。

シュラウド、羽根、回転リングディフューザは、羽根を貫通するボルトで位

置決めされ、組みたてられる。

図 3.11(a) はすべてを組み
たてた羽根車の外観を示し、

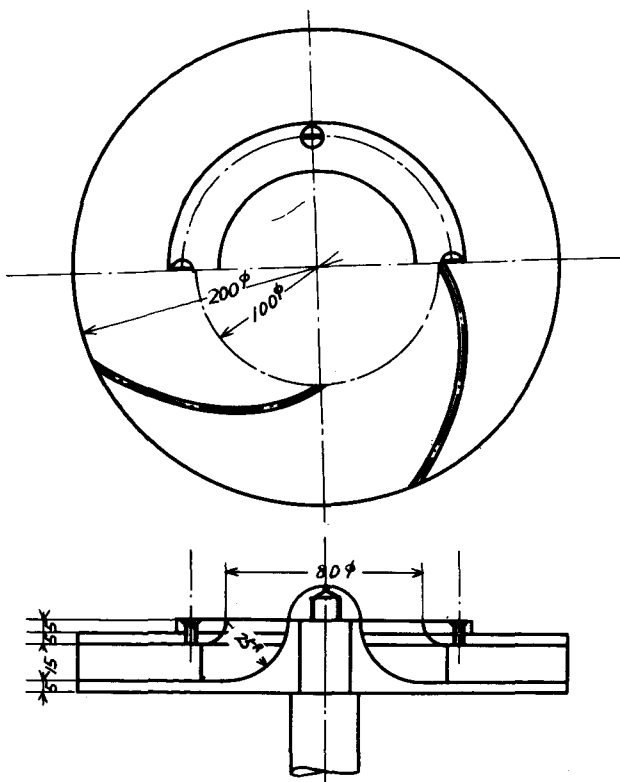
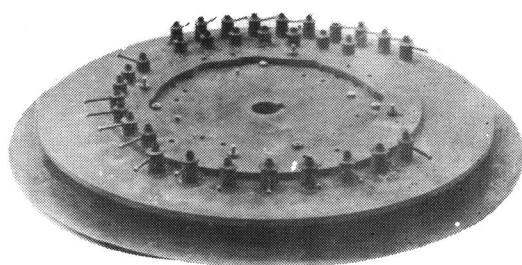
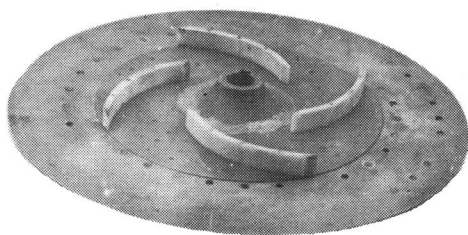


図 3.10 羽根車寸法



(a)



(b)

図 3.1.1 羽根車の外観

(b)は一方のシュラウドをとりはずした場合である。

羽根車と車軸のとり付けには羽根車吸込目玉中心部のキャップナットを用いるが、キャップナット中心軸には径 2ϕ の孔があけてあり、この孔に差し込まれた導圧管は車軸を貫通して回転マノメータに通じる。そしてキャップ先端は羽根車入口流れの岐点位置と考えてよいので、この点の圧力指示値を羽根車入口全圧と定義した。

測定部の詳細な構造は図 3.1.2 に示すとおりである。測定用ピトー管はバックシュラウド側の回転リングディフューザに取り付けられる。ピトー管の指示圧力は車軸を貫通する導圧管によって回転マノメータに導びかれる。

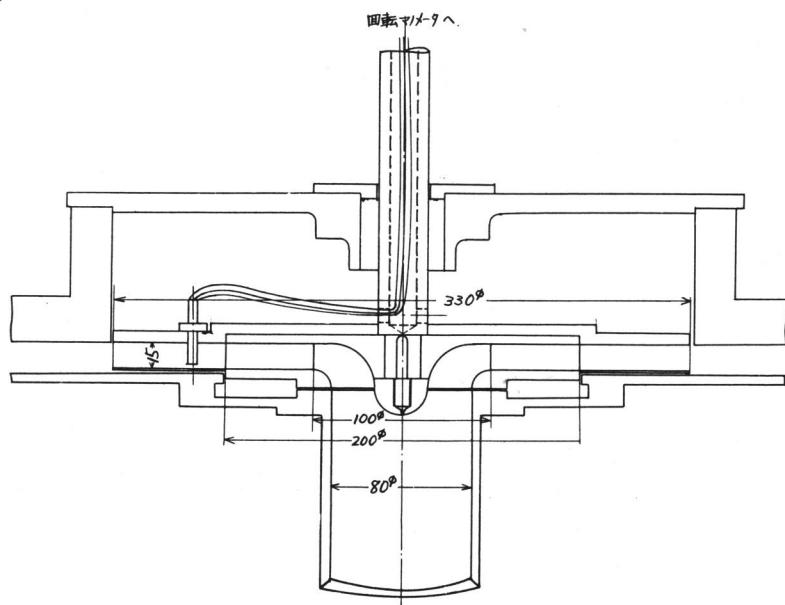


図 3.1.2 測定部詳細図

2.1.3 吸 込 管

吸込管はフロントシュラウド後方の固定平板ディフューザと一体に構成されている。

吸込管直径は 80ϕ であるが、最下端はベルマウスとなっており、吸込部でできるだけ滑らかに流入するよう考慮してある。またベルマウス下端と水槽底面の距離は 60mm で、ベルマウス下端円周にそって水槽底面まで伸びる整流用金網を取りつけてある。ベルマウス内部は軸方向の四枚の仕切板が取りつけてあり、これによって流れの旋回成分をとる。

羽根車フロントシュラウド下方約 130mm の位置に目の粗さの異なる三種類の金網をそう入し、これによって流量制御を行った。この金網は同時に羽根車に流入する流れの整流にも役立つ。本実験ではこのように流量制御のために吸込管内の固定抵抗を用いているので連続的な流量変化はできない。

2.1.4 回転マノメータ

ピトー管圧力の指示のために車軸と共に回転するマノメータを用いる。回転マノメータは車軸を兼ねており、その内部は中空で導圧管を通してある。

回転マノメータは直径 70ϕ 、長さ 400mm で、その外周上に10本のガラス管を並べて取りつける。ガラス管直径は外径 3ϕ で、内径は約 1.6ϕ である。マノメータ内径は太すぎる場合は回転のために液面が傾斜するので測定精度が落ち、また細すぎる場合は表面張力のために管内の水柱が切れる。

マノメータ下端は中空車軸と内部を経るピトー管導圧管の先端に連絡する。すなわちマノメータはU字管ではない。

マノメータの指示値は車軸回転数に同期して発光するネオン管およびクセノン管ストロボライトによって読みとったが、この方法による読みとりはたかだか 600rpm までである。

2.1.5 水 槽

水は 600mm 、高さ 370mm の直方体タンク内に封じ込んであり、水は吸込管から入って羽根車を経てディフューザを通り、ディフューザ外周端より再び水

槽内に帰る。すなわち水はタンク内を循環する。水槽は直方体であるが、流れをできるだけ軸対称とするため、高さ 360 mm のブロックを四隅にとりつけ、水の満たされる空間はほぼ円筒型になっている。また羽根車からの流出側の抵抗を軸対称にするため、固定リングディフューザの外側円周に金網をとりつけてある。

2.1.6. 駆 動 機

本実験では回転数を一定に保つので、駆動機は直流電動機を用いた。モータは立型直結で軸との*off-set*はない。モータ出力は 1.5 KW で、磁励方式は他励式で常に一定電圧を加える。回転数は $200\sim800\text{ rpm}$ 連続可変で、一定トルクを与える。回転数の制御は電機子電圧の加減によって微調整でき、回転数を一定に保つことは容易である。

2.2 実験方法および実験結果の整理方法

2.2.1 測 定 位 置

羽根枚数4枚および6枚、羽根角 30° の場合の測定位置を図3.13に示す。(a)は周方向の(b)は羽根車幅方向の測定位置を示す。周方向の測定点1は羽根中心を対数らせんとして延長した線上にあるので測定点1は羽根伴流内である。

4枚羽根の場合には測定点は円周方向に1～7の各位置で、幅方向にI～Vの5点あるから一つの羽根車の一つの流量状態に対して35回の繰返し測定が必要である。

幅方向の位置ぎめには $3.5.7.10\text{ mm}$ のスペーサを用い(図3.14), 順次とりかえる。

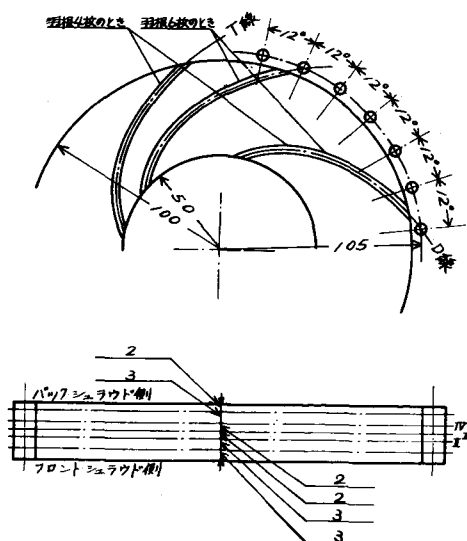


図 3.13 測定点の配置

6枚羽根の場合は円周方向には1～5の五つの位置で測定した。

ピトー管の外径は5φであるから流れの測定値は厳密には一点の値を示してはいないが、この測定値を、ピトー管中心位置における流れとみなす。

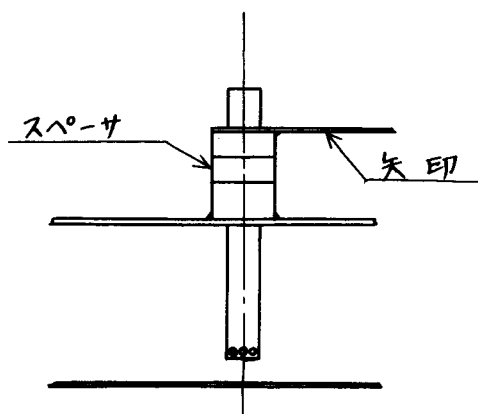


図 3. 1 4

2. 2. 2 回転マノメータの指示値と

流れの計算法

三孔ピトー管の三つの孔の受圧部での圧力をそれぞれ p_1, p_2, p_3 ，吸込全圧を p_{st} とし，それぞれのマノメータ上の指示値を H_1, H_2, H_3, H_{st} (mmH_2O) とする．また大気圧を p_a とする．

回転座標系に対するマノメータ内の水の回転系に対する相対速度は0であるから，ベルヌーイの定理により

$$\frac{p_i}{\gamma} - \frac{r_i^2 \omega^2}{2g} = H_i + \frac{p_a}{\gamma} - \frac{r_m^2 \omega^2}{2g}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

となる．ただし， r_i は受圧部の回転中心からの距離， ω は回転角速度， r_m はマノメータ中心の回転中心からの距離である．上式より

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = (H_1 - H_2) + \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2)$$

$$\frac{p_1 - p_3}{\gamma} = (H_1 - H_3) + \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_3^2)$$

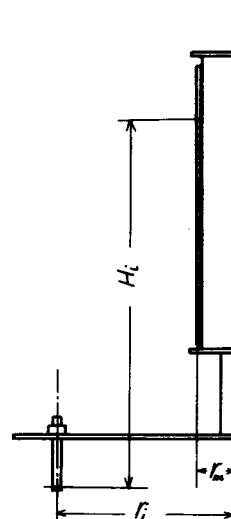


図 3. 1 5

$$\frac{p_2 - p_{st}}{\gamma} = (H_1 - H_{st}) + \frac{\omega^2}{2g} (r_2^2 - r_m^2)$$

が得られる。

本実験では回転数 200 rpm , また $r_1 \doteq 106 \text{ mm}$, $r_2 \doteq 105 \text{ mm}$, $r_3 = 104 \text{ mm}$, $r_m \doteq 35.5 \text{ mm}$ であるから

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - p_2) / \gamma &= (H_1 - H_2) + 5 \text{ mm } H_2O \\ (p_1 - p_3) / \gamma &= (H_1 - H_3) + 10 \text{ mm } H_2O \\ (p_2 - p_{st}) / \gamma &= (H_1 - H_{st}) + 244 \text{ mm } H_2O \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.1)$$

である。測定値 H_1, H_2, H_3, H_{st} を知れば検定曲線を用いて流れの方向、相対速度、静圧が求められる。なおピトー管基準方向の羽根車に対する向きは分度器で測定した。角度の測定はこの種の実験ではきわめて困難であるが、本実験で角度の測定の誤は $\pm 0.5^\circ$ 以内と考えてよい。

2.2.3 実験方法

測定個所にピトー管を設置した後、マノメータ上端のほかはすべて密閉し、上方加圧タンクから装置水槽部に水圧をかけて水槽上面の空気抜き孔を開いて水槽内部の空気を完全に抜く。空気を抜いた後、再び密閉し、加圧タンクからの導水管を閉じる。この状態でポンプを回転させ、マノメータの指示値がすべて 400 mm 以内に入つて読み取り可能となるまでタンク内圧力を減圧する。ピトー管の流れに対する向きが不良でマノメータ指示値が 400 mm 以内に入らないときは再びタンク上面のふたを開いてピトー管取付け角を修正する。

ポンプ回転開始後、回転数は約 30 秒の後に静定するが、マノメータ指示値の静定までは更に 7 ～ 8 分の待ち時間を要する。

羽根車回転数はデジタル・カウンタによつて計り、常に 200 rpm を保つよう電機子電圧によって調整した。

またマノメータ指示値の読みとりにはストロボライトを用いたが、この方法による相対流の測定の羽根車回転数の上限は、ストロボランプの発光時間、回

転マノメータの長さによって決まり，本実験装置の場合は約 200 rpm が可能な最高回転数であった．

2.3 実験結果

実験結果を次の無次元量で整理する．

$$(1) \text{ 全水頭係数 } \quad \psi = \frac{\Delta H}{u_2^2/g} \quad \dots\dots (2.2)$$

ただし， ΔH はポンプ入口と羽根車出口後方の測定点の間で増加した水頭である．ポンプ入口の全水頭は羽根車吸込目玉中心の岐点圧 p_{st} を用いる．羽根車出口後方の全圧は静圧 p_s' と水度水頭 $\gamma \frac{c^2}{2g}$ の和で計算する．

$$(2) \text{ 静圧水頭係数 } \quad \phi_p = \frac{p_s/\gamma}{u_2^2/g} \quad \dots\dots (2.3)$$

ただし，本論文では静圧増分 p_s/γ は，測定点での静圧 p_s'/γ と上述の入口岐点圧 p_{st}/γ の差として定義する． p_s/γ の定義により，損失水頭 ΔI はすべて静圧水頭の減少として計算されることになる．

$$(3) \text{ 損失水頭係数 } \quad I^*$$

シュラウド面の摩擦力は流体に対し羽根作用に等しい効果を及ぼすので，厳密には回転座標系に対するベルヌーイ定数（相対全水頭）の羽根車入口，出口間の差

$$\Delta I = \left(\frac{p_s'}{\gamma} + \frac{w^2 - u^2}{2g} \right)_1 - \left(\frac{p_s'}{\gamma} + \frac{w^2 - u^2}{2g} \right)_2 \quad \dots\dots (2.4)$$

（ p_s' は静圧， w は相対速度， u は考える点の回転周速度， γ は流体の比重量）は損失ではない．しかしシュラウド面摩擦の羽根作用が羽根の羽根作用に比べて十分に小さいときには（2.3）式の ΔI は損失と定義できる．本論文では（2.3）式を羽根車損失と定義する．ただし羽根車出口における相対全水頭は羽根車後方の測定円周上の相対全水頭で近似する．また羽根車入口での値は，羽根車入口目玉中心での岐点圧 p_{st} を用いた．

損失水頭係数 I^* を次式で定義する。

$$I^* = \frac{\Delta I}{u_p^2 / 2g} \quad \dots \dots (2.5)$$

ここに、 u_p は測定点の回転周速度である。

(4) 総水頭係数 ψ_t

損失水頭 I と羽根車から得られた流体の全水頭 H の和は羽根が流体に与えた全エネルギーを表わす。これを総水頭と呼ぶ。

総水頭係数 ψ_t を次式で定義する。

$$\psi_t = \frac{\Delta H + \Delta I}{u_2^2 / g} \quad \dots \dots (2.6)$$

(5) 相対速度水頭係数 ψ_{wv}

羽根車に対する相対速度を w とし、相対速度水頭を次式で定義する。

$$\psi_{wv} = \frac{1}{2} \left(\frac{w}{u_2} \right)^2 \quad \dots \dots (2.7)$$

(6) 相対流れの向き、 β

相対流れの円周に対する傾き角を β [度] で表わす。

羽根車後方の流れの測定値の基本的なデータとして羽根枚数 4 枚、羽根角 30° の羽根車の $R^* = r/r_2 = 1.05$ (r は測定円周半径) の円周上の相対流れの測定値を示す。

流量の大きさは四種類に変えてあり流量係数を $\phi = c_{r2}/u_2$ (c_{r2} は羽根車出口での平均半径方向速度) とすると、以下に示す図 3.17 ~ 図 3.21 の図で、(a) は $\phi = 0.231$, (b) は $\phi = 0.210$, (c) は $\phi = 0.131$, (d) は $\phi = 0.050$ である。

図 3.16 は羽根枚数 4 枚、羽根角 30° の羽根車の揚程曲線および総水頭曲線である。図の直線は二次元ポテンシャル流れ理論による予回転 0 の場合の計算値であり、ハッチした点は無衝突流入点である。

図 3.17 は測定円周を展開した面内での損失水頭係数分布である。図中の数字は (2.4) 式に従う。

図 3. 1 8 は総水頭係数 ψ_t の羽根一ピッチ間の分布である。

図 3. 1 9 は相対速度水頭係数 ψ_{wv} の羽根一ピッチ間の分布である。

図 3. 2 0 は流れの向き β の羽根一ピッチ間の分布である。

図 3. 2 1 は圧力係数 ψ_p の羽根一ピッチ間の分布である。

これらの図の実線は二次元ポテンシャル流れ理論による計算値で、この理論値は $\phi = 0.050$ のほかはすべて後述の補正がしてある。また図 3. 2 0 の流れ角 β の図の破線は二次元ポテンシャル流れ理論による補正をしない場合の計算値である。

図で一ピッチのはん囲は第 2 章の理論計算結果の図と同じである。図の右側は羽根圧力面側であり、左側は羽根圧力面側である。

また図の実験値のうち $\circ$ 、 $\times$ 、 $\bullet$ 印はそれぞれ図 3. 1 3 (b) の高さ II、III、IV に対応する実験値である。

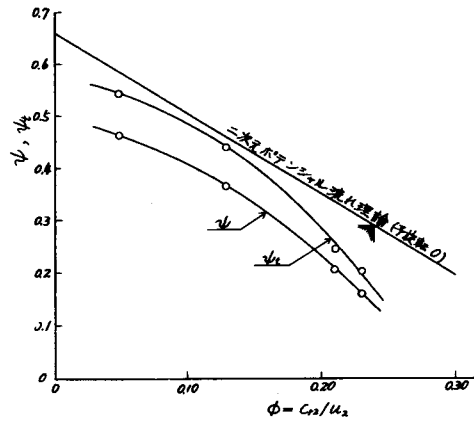


図 3.16 全水頭および総水頭曲線

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$)

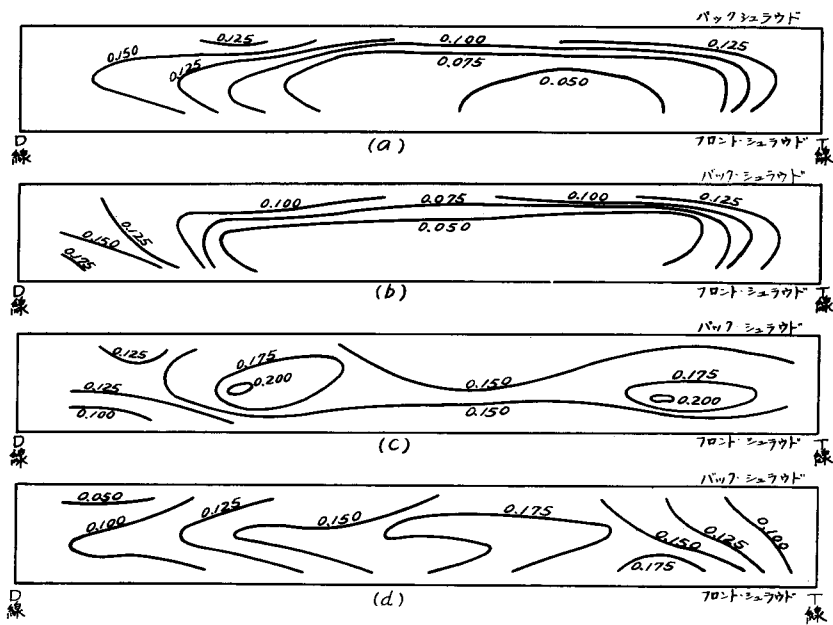
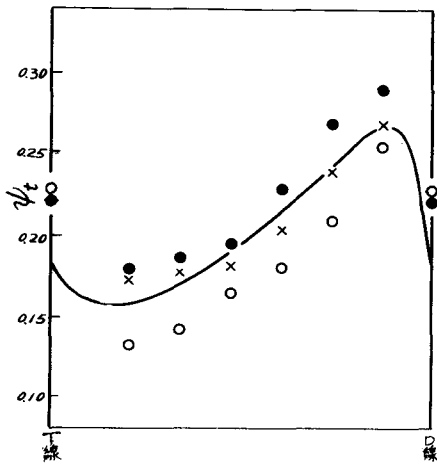


図 3.17 損失水頭分布

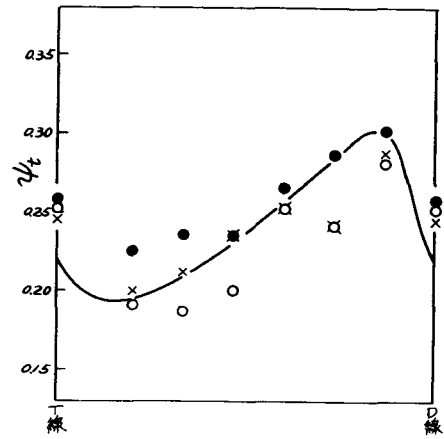
((a): $\phi=0.231$ (b): $\phi=0.210$ (c): $\phi=0.131$)

(d): $\phi=0.050$)

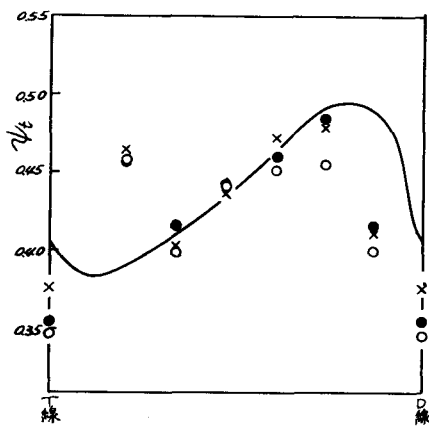
($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$, $R^*=1.05$)



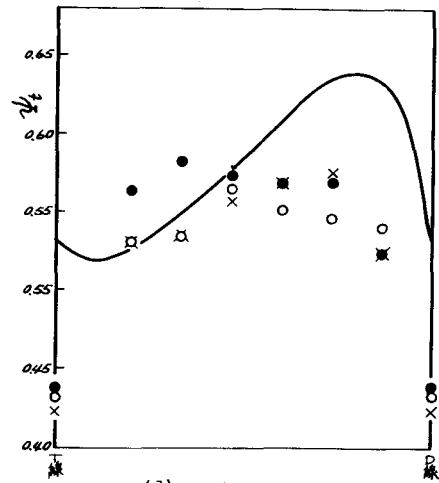
(a) $\phi = 0.2 \ 3 \ 1$



(b) $\phi = 0.2 \ 1 \ 0$



(c) $\phi = 0.1 \ 3 \ 1$

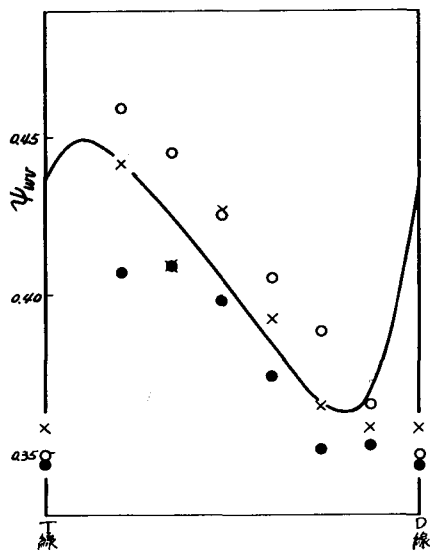


(d) $\phi = 0.0 \ 5 \ 0$

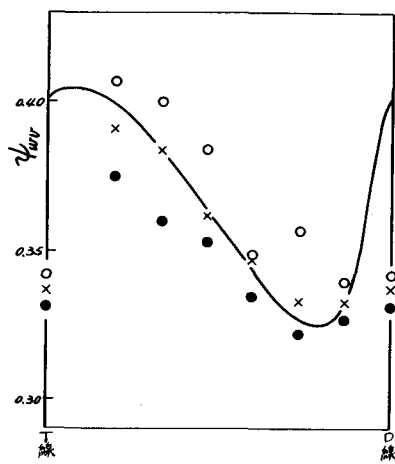
図 3.1 8 羽根一ピッチ間の総水頭係数分布

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$, $n=200 \text{ rpm}$
 $R^*=1.05$)

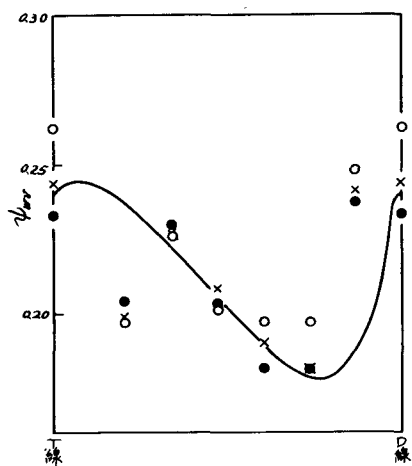
●...Ⅳ ×...Ⅲ ○...Ⅱ



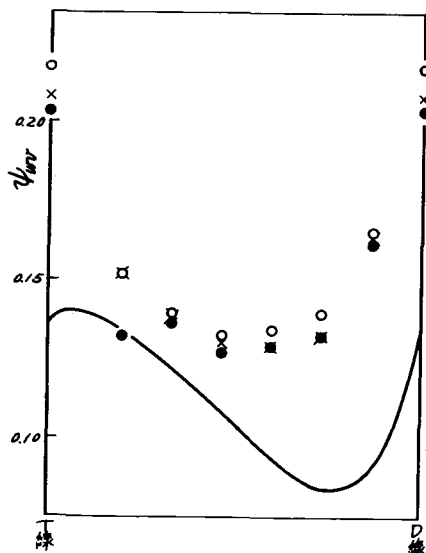
(a) $\phi = 0.2 \ 3 \ 1$



(b) $\phi = 0.2 \ 1 \ 0$



(c) $\phi = 0.1 \ 3 \ 1$

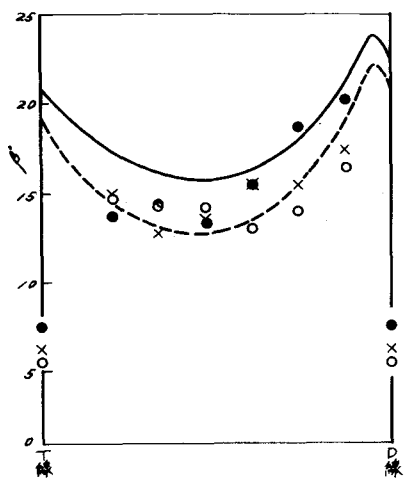


(d) $\phi = 0.0 \ 5 \ 0$

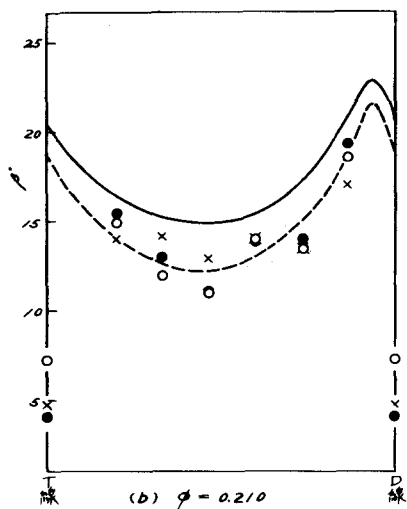
図 3.19 羽根一ピッチ間の相対速度水頭分布

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$, $n=200 \text{ rpm}$, $R^*=1.05$)

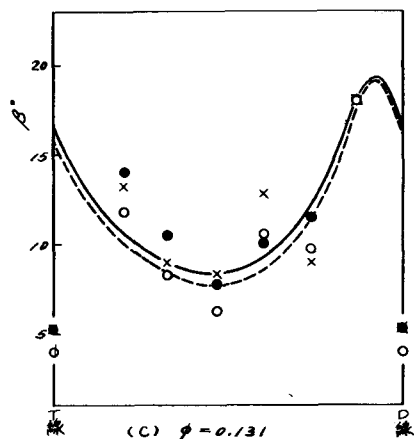
○...Ⅱ ×...Ⅲ ●...Ⅳ



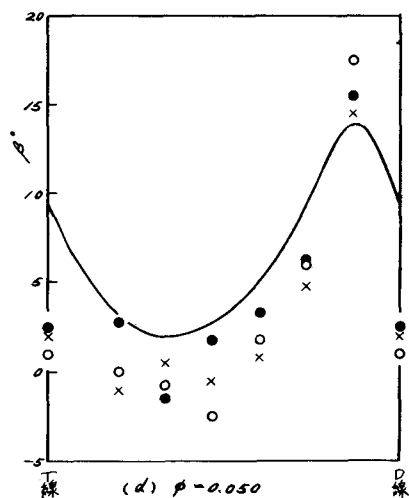
(a) $\phi = 0.231$



(b) $\phi = 0.210$



(c) $\phi = 0.131$



(d) $\phi = 0.050$

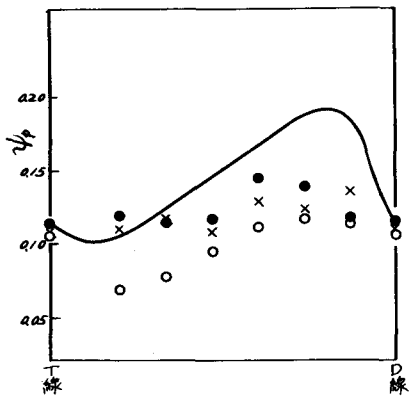
図 3.20 羽根一ピッチ間の相対流れ角分布

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$, $n=200\text{ rpm}$, $R^*=1.05$)

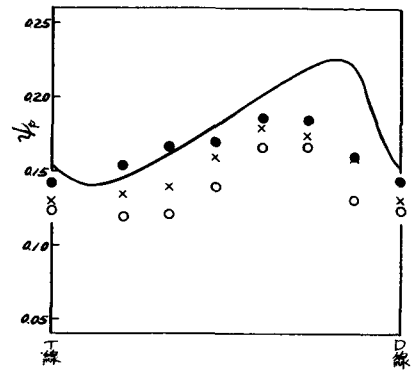
○...Ⅱ

×...Ⅲ

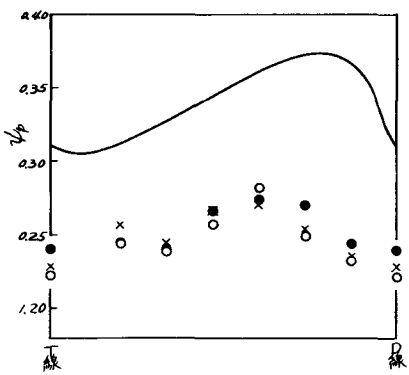
●...Ⅳ



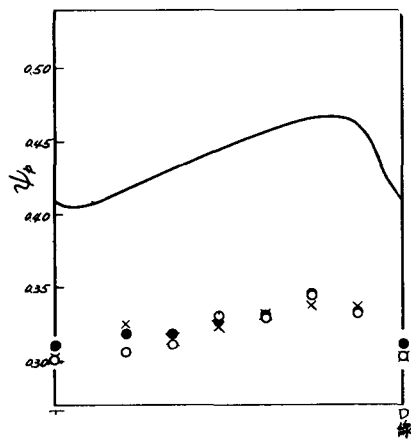
(a) $\phi = 0.231$



(b) $\phi = 0.210$



(c) $\phi = 0.131$



(d) $\phi = 0.050$

図 3.2 1 羽根一ピッチ間の静圧水頭分布

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$, $n=200\text{ rpm}$, $R^*=1.05$)
 $\circ \dots \text{II}$ $\times \dots \text{III}$ $\bullet \dots \text{IV}$

2・4 実験結果に対する考察

2.4.1 総水頭係数

総水頭は図 3.16 より明らかなように、二次元ポテンシャル流れ理論による計算値になお及ばない。その差が最も小さいのは無衝突流入点ではなくて、無衝突流入流量の約半分の流量においてであり、総水頭係数曲線もまた一般の羽根車の揚程曲線と同様の傾向で流量の増大とともに急激に減少する。したがって無衝突流入流量以外では衝突損失が大きいから揚程曲線がオイラーの一次元理論または二次元ポテンシャル流れ理論に示されるような直線にならないという説明は当らない。

二次元ポテンシャル流れ理論の計算値と実験値とを比較しうるのは実験結果に示したように、流量係数が非常に小さくはない場合で、 $\phi = 0.05$ の場合は実験結果は二次元ポテンシャル流れの場合とは定性的にも異なっているので、二次元ポテンシャル流れ理論を基礎として、それに簡単な補正を加えることによって説明するという方法は困難である。すなわち、二次元ポテンシャル流れ理論を基礎とする流れの考察は、羽根車流路内にはくり領域がなく、流路間を一樣に水が流れている場合にのみ可能であり、その限界は無衝突流入流量のほぼ半分以上の大きい流量範囲である。ここでは理論と実験値とを比較しうる程度に流量が多い場合を対象に考察する。

$Acosta^{16}$ は筆者と同様のフリーインペラ型実験装置を用いて羽根面圧力分布を測定し、羽根圧力面と負圧面の圧力差から羽根に加わるトルクを求め、このトルクによる羽根車の吸収動力を算出して、筆者が(2.6)式に定義した総水頭と等価な水頭係数 ϕ_t を計算している。この結果は図 3.22 に示すとおりであるが、図で○印は ϕ_t の実験値であり、直線は二次元ポテンシャル流れ理論から計算した全水頭係数である。

図に明らかなように $Acosta$ の実験結果も筆者の実験結果と同様、二次元ポテンシャル流れ理論による総水頭の計算値は流量が大きいところで実験値より

も大きくなり、無衝突流入点のほぼ半分の流量以上で差は流量の増大とともに大きくなっている。図 3.22 によれば、実験的に得られる総水頭の方が二次元ポテンシャル流れ理論による計算値よりも大きくなる場合があるが羽根面境界層の発達に羽根循環を小さくするのが普通であり、筆者の実験結果の方が自然である。

二次元ポテンシャル流れ理論と実験結果のくい違いについて考察する。

第 2 章第 3 節に述べたように、羽根車入口前方で回転方向と同方向の予回転が生ずる場合には、同じ流量係数に対し、予回転がない場合に比べて全水頭は減少する。また相対速度水頭は増大する。総水頭の実験値と二次元ポテンシャル流れ理論による無衝突流入の場合の理論揚程の差から予回転の強さを決定することができ、この強さの予回転を仮定して、二次元ポテンシャル流れ理論を用いて流れを計算すれば、総水頭の羽根一ピッチ間の分布については理論と実験はよく一致する。しかし相対速度水頭係数についてはその平均値が理論と実験とは一致せず、予回転のみで実験結果のすべてを合理的に説明することはできない。

総水頭の減少は羽根循環の減少を意味しており、この羽根循環の減少の原因を羽根車へ流入する流れの予回転以外に求めるとすれば、理論的に循環減少量を定量的に算出することはきわめて困難である。しかし定性的には次のような説明が可能である。

はじめに軸流翼の場合を考える。翼面境界層の発達にともなって排除厚さが増加し、翼はその厚さだけ等価的に厚さが増したと考えることができる。ところが、翼面境界層の発達は流れの方向の圧力こう配が最も大きく作用し、翼上

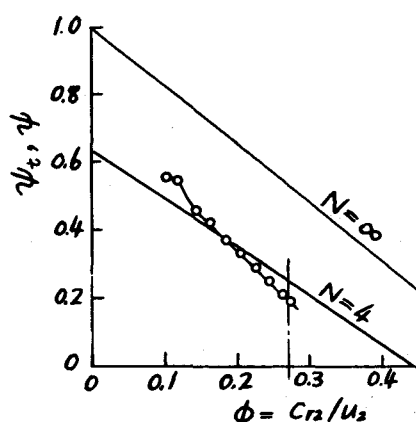


図 3.22 Acosta の実験結果¹⁶

($N=4$, $\gamma=60^\circ$, $r_2/r_1=2$)

○ ... 実験値

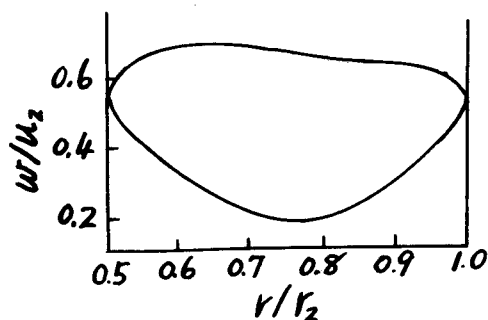
— ... 二次元ポテンシャル流れ理論による計算値)

面では最大速度の位置は前縁に非常に近い点にあるので、翼上面の大部分の領域で流れに向つて正の圧力こう配のある流れとなる。一方負圧面側では翼にそう圧力こう配はほとんどない。したがって、翼上面に発達する境界層は、翼下面に発達する境界層より厚く、翼のそりが等価的に小さくなり、また迎え角も小さくなるので循環が小さくなる。

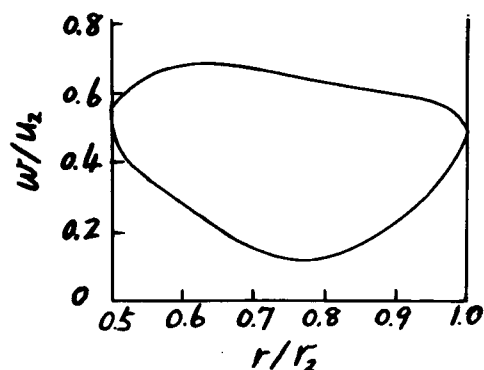
また翼境界層の発達は翼後縁の速度が有限になるという *Kutta-Joukowski* の条件を乱し、岐点位置が翼上面に移動するという説明も可能である。

遠心羽根車の羽根面境界層は理論的に解かれてはいないが、一般に負圧面の発達の方が、圧力面での発達よりも速いと考えられており、この場合は羽根の中心そり線が等価的に大きくすることになる。すなわち羽根出口角が小さくなる。この場合は図 3.23 に示すように羽根循環は減少する。図 3.23 はその傾向を示すもので、(a) は対数らせん羽根の場合、(b) は入口角が小さく、出口角が大きくなった場合、(c) は入口角が大きく、出口角が小さくなった場合である。(c) は (a) より循環は小さくなっている。

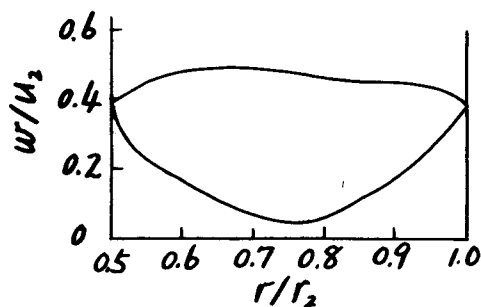
このような定性的説明は可能ではあるが、羽根中心線の変化の大きさ、岐点移動の量を算定することは困難である。



(a) $N=8$, $\gamma=65^\circ$, $r_2/r_1=2$



(b) $N=8$, 入口角 22.5° , 出口角 27.5° , $r_2/r_1=2$



(c) $N=8$, 入口角 27.5° , 出口角 22.5° , $r_2/r_1=2$

図 3.23 羽根角の変化による
羽根面速度分布の変化

また理論計算では羽根は厚さのない薄翼と仮定しているが、実際には羽根厚さは0ではない（Acostaの実験では $1/8''$ ）。この影響も、本論文のような簡単な解法では計算できない。

理論から定量的に羽根循環を補正することは上述のとおり困難であるが、次のような近似によって補正をすれば、羽根車後方の流れの分布は二次元ポテンシャル流れ理論の計算値とよく一致する。

図 3.2 4 に示すように二次元ポテンシャル流れ理論の、予回転0の場合の揚程曲線上で、実験で得られる総水頭係数 ψ_t を与えるような流量係数 ϕ^* を求め、この ϕ^* の流量に対して、羽根車後方の流れを予回転0の二次元ポテンシャル流れ理論から計算する。

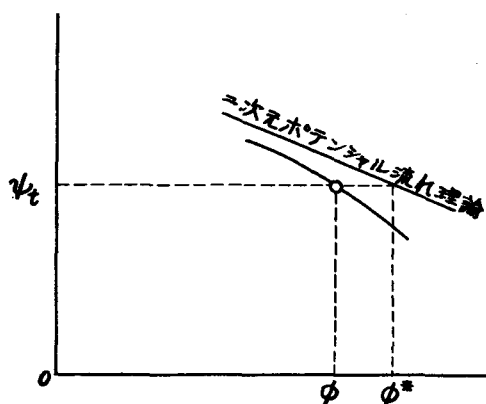


図 3.2 4 理論計算の補正方法

図 3.1 8～図 3.2 1 の理論曲線は $\phi = 0.05$ 以外はすべてこの補正を行った後計算した。

図 3.2 0 の相対流れ角 β については上述の補正を行わない場合の理論曲線を破線で示した。 β については補正を行わない方がよく一致する。これは補正によって流量が増加することになるからである。

図 3.2 1 の圧力係数の分布は実験値は理論値と一致しないが、これは静圧水頭係数の定義により静圧水頭 P_s/γ が損失水頭 ΔI だけ小さくなっているからであり、実験値を

$$\psi_p = \frac{P_s/\gamma + \Delta I}{u_2^2/g}$$

のように、損失水頭も加えてプロットすればよく一致する。

この方法の補正を行った結果は $\phi = 0.231$ 、 $\phi = 0.210$ の場合、すなわち無衝突流入流量近傍ではとくによく一致するが、 $\phi = 0.131$ の場合は羽根近傍では一致しない。これは二次元ポテンシャル流れ理論を適用しうる流量の大きさ

の下限が、無衝突流入流量の約半分付近であることを示している。このことは図 3.22 に示したように *Acosta* の場合も同様である。

この補正方法を用いて羽根面圧力分布を計算し、*Acosta* が得た実験結果と比較すると図 3.25 のようになる。図に明らかなように負圧面についてはこの補正によって実験値を説明できるが、圧力面では一致しない。

この補正は羽根のまわりの循環量を一致させているので図 3.25 の実験値を結んで得られる曲線によつて囲まれる面積と、理論曲線によつて囲まれる面積とは一致しなければならない。羽根圧力面側の理論値と実験値のくい違いは、理論値における羽根前縁での圧力差の逆転によって埋め合わされる。

図 3.25 のデータから、この補正方法は羽根に沿う循環の分布まで合わせうるものではないことがわかる。それにもかかわらず、この補正によって流れが定量的に算出できることは興味深い。

図 3.26 は $N=6$ 、 $\gamma=60^\circ$ 、 $r_2/r_1=2$ の羽根車の $\phi=0.205$ の場合の $R^*=1.05$ の円周上での相対速度水頭係数の分布を比較したもので、同じように補正してあ

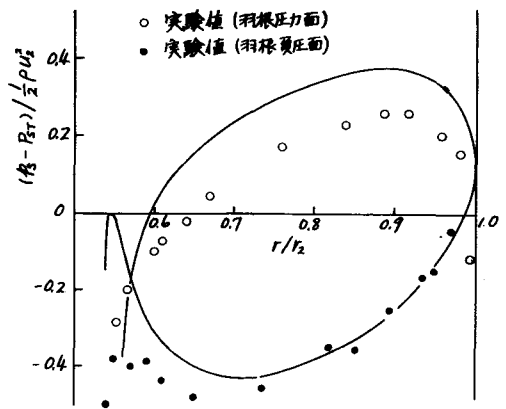


図 3.25 筆者の補正方法を羽根面圧力分布に適用した場合の実験値と理論値の比較
(実験結果は *Acosta*¹⁶ による)

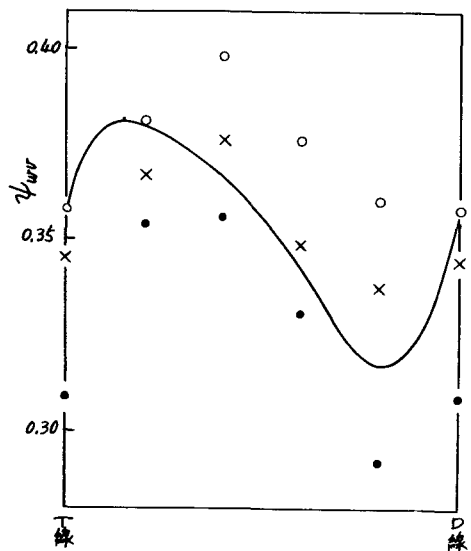


図 3.26 羽根枚数 6 枚の場合の相対速度水頭係数についての比較
($\gamma=60^\circ$ $r_2/r_1=2$ $R^*=1.05$)

る。実験値は羽根車幅方向のばらつきが大きいが、理論値と実験値はほぼ一致している。

Acosta は次のような補正方法を述べている。

シュラウド面境界層の発達によつて主流部分の流速は吐出量から算出される境界層 0 の場合のそれよりも大きくなっている。羽根循環の理論計算は主流部分の速度について行ふべきであるから流量係数は等価的に大きく見積るべきであるという。

しかし、この説明に従えば筆者の実験では $\phi = 0.231$ の場合約 22% の流量係数の増加を見込まなければならず、これをシュラウド面境界層の発達のみで説明するのは困難である。

2.4.2 流れの向き

羽根車出口における相対流れの向きの羽根一ピッチ間の分布は *Osborne & Morelli* が既に測定している¹⁵。その結果は図 3.2.7 に示すとおりである。この実験に用いられた羽根車は純粋な流羽根車ではなく、フランス羽根であるが羽根出口角は 24° 、羽根枚数は 6 枚、また流量係数は $\phi = 0.147$ である。これは最高効率点よりかなり大きい流量である。

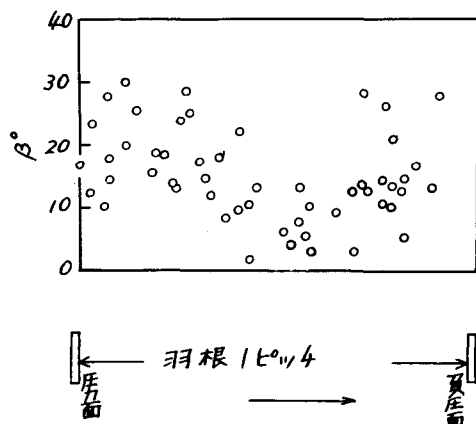


図 3.2.7 *Osborne & Morelli*¹⁵ の相対流れ角の実験結果

図に示すとおり流れの向きの定性的傾向は羽根形状、比較回転度が異なるにもかかわらず筆者の実験結果とよく一致している。なお、この測定結果に対して実験者自身は全く理論的考察を行っておらず、*Acosta* が流れ関数の差分法による解法が可能であることを示唆したのみである。

図 3.2.0 において、両端は羽根伴流内であるが、羽根伴流内の流れの向きは

ほとんど円周方向である。すなわち羽根伴流内では羽根圧力面から負圧面にまわり込む流れが存在していることがわかる。

図 3.20 (d) は流量係数が非常に小さい場合であるが、この場合は流路の羽根負圧面側の半分以上の領域では水の吐き出しはほとんどなく、羽根圧力面側の狭い領域でのみ羽根は有効に作用していることがわかる。このことは図 3.28 に示すとおり羽根枚数 4 枚、羽根角 22.5° の羽根車の流量係数 $\phi = 0.05$ の場合についても同様であった。

$\phi = 0.05$ の場合については、図 3.17, 図 3.18 に示したように、総水頭および相対速度水頭の分布が二次元ポテンシャル流れの場合と定性的に異なるにもかかわらず、流れの向きは実験値と理論値は定性的に一致することは興味深い。しかし、理論計算では羽根に沿って流れはなめらかに流れるとするので羽

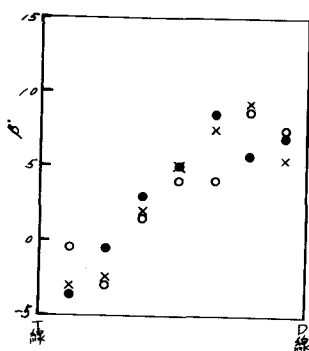


図 3.28 相対流れ角分布
($N=4$, $\gamma=67.5^\circ$, $r_2/r_1=2$
 $R^*=1.05$, $\phi=0.050$)

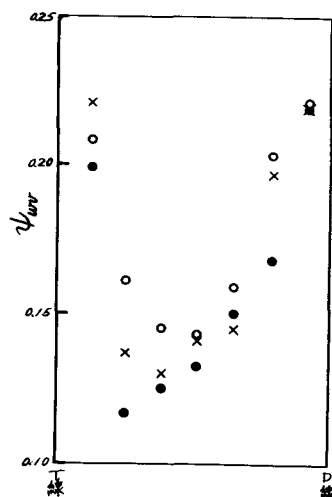


図 3.29 相対速度水頭分布
($N=4$, $\gamma=67.5^\circ$, $r_2/r_1=2$
 $R^*=1.05$, $\phi=0.050$)

根負圧面近傍で吐出量は多くなるが、実際の流れは羽根負圧面側ははくりによるうず流れの領域であると推測され、この点は理論と異なる。

さて、一次元流れ理論による揚程の計算値と実際の羽根車の揚程との差は損

失も含めて、羽根車後方での相対流れの向きが円周方向に急に傾くための絶対速度の周方向成分の減少によるものと説明され、これをすべりと呼んでいる。一次元流れ理論と二次元ポテンシャル流れ理論の理論場程の差はすべりによる説明が成り立ち、*Busemann*は羽根角、羽根枚数、羽根車内外径比をパラメータとしてすべりを詳細に計算している。

図 3.20 によれば、流れの向きについては、3.4.1 に述べたような補正を行わない方が理論値と実験値はよく一致する。しかし、この実験結果の整理の際には、羽根伴流内の径方向速度を他の点のそれらと同じ重さで平均しているが、羽根伴流内の測定値を除いて平均すれば、流量は、さらに大きく評価することになり、この場合は相対流れ角は理論値より小さくなる。したがって、総水頭の、二次元ポテンシャル流れからの減少は、いわゆるすべりと同じ現象と考えるべきである。総水頭の減少のメカニズムについていえば、総水頭の減少は相対速度の増加は抵抗損失の増加を誘起することにもなる。

2.4.3 相対速度水頭

図 3.19(d) に示したように流量が非常に小さいときは、相対速度水頭の羽根一ピッチ間の分布は二次元ポテンシャル流れの場合と定性的に異なり、流路中央部に小さく羽根近傍で大きい。流量が非常に小さいときの相対速度の羽根一ピッチ間の分布のこの特徴は羽根枚数 4、羽根角 22.5° 、羽根車の $\phi = 0.05$ の場合も同様であった。(図 3.29)

羽根伴流内の相対速度は流路間と同様、流量の減少とともに小さくなるが、流路間の相対速度の低下ほどには速く低下しない。そして流量が非常に小さいときは伴流内の相対速度は流路間のそれよりはるかに大きい。一方伴流内の流れの向きはほとんど円周方向に向いているので、流量の減少とともに羽根圧力面から負圧面にまわり込む流れの割合が多くなることがわかる。

2.4.4 流れの分布の径方向の変化

本実験では、リングディフューザは上下とも回転しているので、羽根車から

離れた点の流れはディフューザ壁面境界層の影響を受けて非粘性流体としての計算が適用できなくなると考えられる。

図 3.30 は $N=4$, $r=60^\circ$, $\phi=0.210$ の場合の $R^*=1.10$ の円周上における羽根-ピッチ間の相対速度水頭の分布を示す。また図 3.31 は $R^*=1.40$ の場合である。

$R^*=1.10$ ではなお二次元ポテンシャル流れ理論による計算値と実験値はほぼ一致するといえる。

$R^*=1.40$ では幅方向の流れの違いが目立つが、流れの周期的な変動は認められなかった。すなわち羽根の作用による流れの分布は $R^*=1.40$ の速さまでは及ばない。

葛西, 高松¹³らは羽根車後方の絶対流れを, 約 $5kc$ の高い周波数の変動まで追隨できる変動流測定用ピックアップを用いて流れの変動を測定し, $R^*=1.13$ の測定点で既に周期的な流れの変動は消えると報告している。筆者の実験における $R^*=1.10$ の流れの分布のポテンシャル流れからのへだたりは, この葛西らの実験結果を裏付けている。

2.4.5 損失分布

羽根車流路間の流れを測定した多くの研究者が損失分布の測定に重点をおいている。損失の発生の機構を知り, それを設計計算に用い得る系統的な知識にまとめることが最終的な目標になるからである。

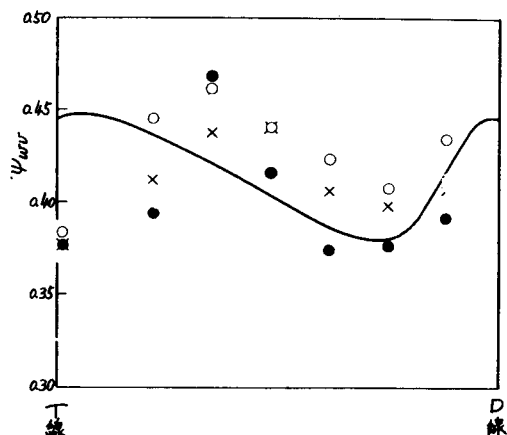


図 3.30 $R^*=1.10$
($N=4$, $r=60^\circ$, $r_2/r_1=2$
 $\phi=0.210$)

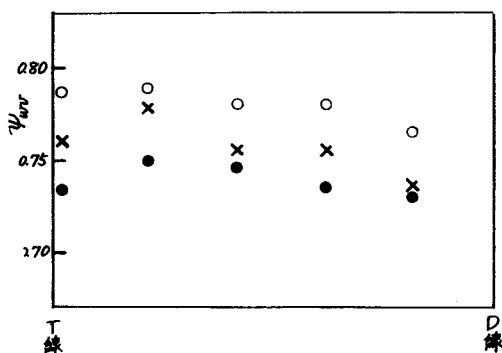


図 3.31 $R^*=1.40$
($N=4$, $r=60^\circ$, $r_2/r_1=2$
 $\phi=0.210$)

*Hamrick*¹⁵, *Acosta*¹⁶, *Ellis*^{2,7}, *Domm*^{2,0} らはそれぞれ羽根車流路間の損失分布を測定しているが、それらの結果からはまだ一般的で系統的な結論は得られていない。羽根車入口部における損失の分布、したがって相対全水頭のこう配によつて二次流れが誘起されることが知られている。二次流れの解析は第4章に述べるようにある程度可能であるが、二次流れが羽根車流路内の損失を理論的に取り扱うる唯一の可能性であつて、これは羽根車入口部の損失については何らの知識を与えない。つまり、羽根車流路内の損失については、現在のところ、実験的資料を集積する段階にとどまっている。

本実験では相対全水頭の分布については羽根車後方 $R^* = 1.05$ の円周上でのみ測定したが、第4章に述べる二次流れの解析においては羽根車入口部での相対全水頭の分布を知らなければならないので、これまでの他の研究者の実験結果をまとめて、羽根車出口の相対全水頭の分布と羽根車入口のそれとの関係を考察してみる。

羽根車周方向の損失分布

Hamrick は前向き羽根斜流羽根車の送風機を用いて羽根車流路間の損失分布を測定したが、流量の大きさには関係なく羽根圧力面側に小さく羽根負圧面側に大きいという統一的な結果を得ている。

Domm は対数らせんでない後向き羽根の、流路幅が半径方向に狭くなる羽根車のポンプを用いて実験し、*Hamrick* と同様な結論を得た。

一方 *Acosta* は筆者と同様の実験装置を用いて羽根車入口および出口円周上の損失の分布を測定し、流量が多い場合 ($\phi = 0.238$) は羽根圧力面側に大きく、流量が小さい場合 ($\phi = 0.178$ および $\phi = 0.140$) は負圧面側に大きいという結果を得ている。

筆者の実験では流量が多い場合は羽根近傍で圧力面側、負圧面側ともに同じように損失が生ずるが、流量の減少とともに損失は流路間に一様に平均化される。

以上の結果を総合すれば、損失の周方向分布については羽根形状、吸込部形

状，流量状態の影響が大きいので一般的な結論は下し得ないと思われる。

しかし *Hamrick, Domm, Acosta* の実験結果によれば羽根車出口円周上の損失分布はほぼ，羽根車入口円周上の損失分布と対応している。たとえば *Acosta* の実験では，羽根車出口で損失の大きい羽根面は，羽根車入口での損失の大きい羽根面と一致している。

また *Hamrick, Domm*，筆者の実験では，損失を全く受けない部分は流路中央のごく狭い領域であるが，*Acosta* の実験では損失を受ける部分が羽根近傍のごく狭い領域に限られている。

羽根車幅方向の損失分布

Hamrick, Ellis の実験では羽根車はフロントシュラウドを設けていないので筆者の実験結果と対応させることはできない。しかし羽根車入口部の損失についてはフロントシュラウドの有無には無関係に定性的説明が可能である。

Ellis によれば羽根車入口部では流線の曲率がフロントシュラウド側に大きいから流速が大きく損失も大きいという。そして *Ellis* の実験結果はこの説明を裏付けている。しかし *Ellis* が実験に用いた羽根車は斜流羽根車で羽根車入口部における，流れの軸方向から径方向への転向はそれほど急ではない。

Acosta の実験においてもやはり羽根車入口部でフロントシュラウド側で損失が大きく，同時に羽根車出口においてもフロントシュラウド側に大きい。すなわち損失の幅方向の分布についても羽根車入口と出口では対応していると考えてよい。

ところで，藤江の半径流送風機を用いた実験によれば羽根車入口部では，流れの軸方向から半径方向への転向が急で，流体慣性のために，流速はバックシュラウド側に大きい。この場合は損失はバックシュラウド側に大きくなるものと考えべきである。*Domm* の実験によれば，幅方向の損失は，羽根車半径方向にいたるところ，ほぼ羽根車幅中心線に対称である。これは *Ellis, Acosta* の実験結果と対立し，藤江の実験結果を支持する。

筆者の実験では図 3.17 に示したとおり，羽根車出口部での損失は，幅方向

には羽根車バックシュラウド側で大きい。

以上の考察から筆者の実験に用いた羽根車では羽根車入口部でもバックシュラウド側の相対全水頭が小さいものと考えてよい。

第3節 結 論

本章では前章で解析した二次元ポテンシャル流れ理論の有用さを確かめるためにフリーインペラ実験装置を用いて羽根車後方の流れを測定した。

その結果を要約すると

1. 流量が無衝突流入流量のほぼ半分以上の流量では簡単な補正のもとに二次元ポテンシャル流れは実際の流れをよく近似しうる。
2. 流量が非常に小さい部分では羽根車後方の流れは定性的にも二次元ポテンシャル流れは実際の流れを近似しえない。
3. 流量が多い場合、羽根のまわりの循環は二次元ポテンシャル流れ理論による計算値よりも小さくなる。
4. 羽根循環の減少は羽根車後方の流れの全水頭の減少となるが、この減少は主として相対速度水頭の増加にともなう静圧の低下によつて生じており、実際の遠心羽根車後方の流れは、二次元ポテンシャル流れ理論による流れに、さらにすべりが加わると考えなければならない。

第4章 遠心羽根車の流路間の二次流れ

本章では遠心羽根車の流路間二次流れを解析する。

解析には三つの方法を用いる。また羽根後縁の翼端二次うずについても簡単に述べる。

前章までに羽根車流路間の流れの最も基礎的な流れとして、二次元ポテンシャル流れ理論とその有用さについて検討した。流れの二次元ポテンシャル流れ理論からの隔たりは、それに重ね合わされる二次流れによって説明するのが最も適当である。

遠心羽根車流路間の二次流れは序論に述べたように二つの原因によって生ずる。一つは羽根車入口へ流入する流れが羽根車幅方向に一様でないことによって生じ、他はシュラウド面にそって発達する境界層によって生ずる。遠心羽根車流路間二次うずを扱った文献はきわめて少ないが、発生原因を分類してそれぞれについて解析した結果は全くない。

本章では流入する流れが一様でないことによる二次流れは軸流翼列間流路や、静止曲り流路に広く応用されている非粘性せん断流の扱いによって解析する。またシュラウド面境界層による二次流れは三次元境界層として解析する。

第1節 ベクトル解析による解析

1・1 基礎式

本節の解析では流れはうず度をもつとする。そして流体は非粘性、非圧縮性流体であるとする。ただしうず度は小さいとする。

運動方程式をベクトル形式で表示し、連続の式と連立させて流線方向のうず度の変化を表わす基礎式を導く。

羽根車に対する相対速度ベクトルを $\vec{W}$ 、相対うず度ベクトルを $\vec{\Omega}$ 、絶対うず度ベクトルを $\vec{\Omega}'$ 、羽根車の回転角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ 、羽根車幅を $2h$ とすると、連

続の式，運動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\operatorname{div}(\rho \vec{W}) = 0 \quad \dots\dots (4.1)$$

$$\vec{W} \times \vec{\Omega} = \operatorname{grad}(I/\rho) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} \quad \dots\dots (4.2)$$

ただし， $I = p_s + \frac{1}{2}\rho(W^2 - r^2\omega^2)$ で p_s は静圧， ρ は流体の密度， r は考える点の羽根車中心からの距離， ω は角速度， W は相対速度の大きさである。

すなわち I は相対全水頭である。

うず度については

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{W} \quad \dots\dots (4.3)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}' - 2\vec{\omega} \quad \dots\dots (4.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{\Omega} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{\Omega}' = 0 \quad \dots\dots (4.5)$$

の関係がある。(4.4)式を(4.2)式に代入すると

$$\vec{W} \times \vec{\Omega}' = \operatorname{grad}(I/\rho) \quad \dots\dots (4.6)$$

となる。(4.6)式の両辺に $\vec{W}$ をスカラ的に乗ずると

$$\vec{W}(\vec{W} \times \vec{\Omega}') = \vec{W} \cdot \operatorname{grad}(I/\rho) \quad \dots\dots (4.7)$$

左辺は $\vec{W} \perp (\vec{W} \times \vec{\Omega}')$ であるから 0 である。したがって相対全水頭は流線にそって一定である。

A. G. Smith²⁶ は絶対うず度の流線方向成分を求めているが，いま考察しようとするのは羽根車に相対的な流れであるから相対うず度の相対流線方向の変化を求めるべきである。

(4.5)式のいずれの式から計算をはじめても可能であるが，計算の便のため $\operatorname{div} \vec{\Omega}' = 0$ から計算をはじめると Hawthorne が示したように，絶対うず度の相対

流線方向成分は $\frac{(\vec{\Omega}' \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W}$ であり，相対流線に直交する方向の成分は

$\frac{(\vec{W} \times \vec{\Omega}') \times \vec{W}}{(\vec{W} \cdot \vec{W})}$ である。これを $\operatorname{div} \vec{\Omega}' = 0$ に代入すると

$$\operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} + \operatorname{div} \frac{(\vec{W} \times \vec{\Omega}) \times \vec{W}}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} = 0 \quad \dots\dots (4.8)$$

(4.4) 式を用いると

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} &= \operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} + 2\vec{\omega})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} \\ &= \operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} + 2 \operatorname{div} \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} \quad \dots\dots (4.9) \end{aligned}$$

(4.1) 式より

$$-\operatorname{div} \vec{W} = \frac{1}{h} \vec{W} \cdot \operatorname{grad} h$$

であるから

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} &= \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} + \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \operatorname{div} \vec{W} \\ &= h \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega_W}{hW} \right) \quad \dots\dots (4.10) \end{aligned}$$

ただし、 Ω は $\vec{\Omega}$ の大きさ、添字 W は相対流線方向の成分であることを示す。

同様にして

$$\operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} \vec{W} = h \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\omega_W}{hW} \right) \quad \dots\dots (4.11)$$

(4.10), (4.11) 式より (4.8) 式の左辺第 1 項は次のようになる。

$$\operatorname{div} \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{W})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} = h \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\Omega_W}{hW} \right) + h \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\omega_W}{hW} \right) \quad \dots\dots (4.12)$$

次に (4.8) 式の左辺第 2 項を変形する。(4.6) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \frac{\vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{\Omega})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} &= \operatorname{div} \frac{\vec{W} \cdot \operatorname{grad}(I/\rho)}{W^2} \\
 &= \frac{1}{W^2} \operatorname{div} \left\{ \vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{W^2} \right) \cdot \left\{ \vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} \\
 &\dots\dots\dots (4.13)
 \end{aligned}$$

$\operatorname{rot} \vec{W} = \vec{\Omega}$, $\operatorname{rot} \left\{ \operatorname{grad}(I/\rho) \right\} = 0$, $\vec{W} \cdot \operatorname{grad}(I/\rho) = 0$ および (4.4) 式を用いると

$$\frac{1}{W^2} \operatorname{div} \left\{ \vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} = - \frac{2\vec{\omega}}{W^2} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \dots\dots\dots (4.14)$$

また

$$\frac{1}{W^2} \operatorname{div} \left\{ \vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} = - \frac{2\vec{\omega}}{W^2} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right),$$

$$[\vec{A} \times \vec{B}] \cdot [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

であるから

$$(\vec{W} \times \vec{\Omega}) \cdot \left\{ \vec{W} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} = 2W^2 \left\{ \vec{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} = -4\vec{\omega} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} \left(\frac{1}{W^2} \right) \cdot \left\{ \vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} &= - \frac{1}{W^4} \left\{ 2\vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} \cdot (\vec{W} \cdot \operatorname{grad}) \vec{W} \\
 &\quad + \frac{4\vec{\omega}}{W^2} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \dots\dots\dots (4.15)
 \end{aligned}$$

となる。(4.13), (4.14), (4.15) 式より

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \frac{\vec{W} \times (\vec{W} \times \vec{\Omega})}{(\vec{W} \cdot \vec{W})} &= - \frac{2}{W^4} \left\{ 2\vec{W} \times \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \right\} \cdot (\vec{W} \cdot \operatorname{grad}) \vec{W} \\
 &\quad + \frac{2\vec{\omega}}{W^2} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \dots\dots\dots (4.16)
 \end{aligned}$$

(4.12), (4.16) 式を (4.8) 式に代入すると

$$h\vec{W} \cdot \text{grad} \frac{\Omega_W}{hW} = - \frac{2}{W^2} \{ \vec{W} \times \text{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \} (\vec{W} \cdot \text{grad}) \vec{W} \\ + \frac{2\vec{\omega}}{W^2} \cdot \text{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) - \vec{W} \cdot \text{grad} \frac{\omega_W}{hW} \dots (4.17)$$

(4.17) 式の左辺は流路間二次うず度の相対流線方向の成分の変化で、これは右辺の各項から成る。右辺第1項は流路の曲りによる二次うずで、*Hawthorne*²⁵ が静止曲り流路に対して導いた項である。静止した曲り流路ではこの二次うずのみが生ずる。第2項は羽根車の回転によって、うずベクトルが羽根車に対して相対的に回転するために生ずる二次うずである。この項は *Smith* によって導入された項である。第3項は回転角速度ベクトルの相対流線方向成分の変化によって生ずる二次うずである。そしてこの項は相対うず度の相対流線方向成分を二次うずとしたために生じた項であり、従来導入されていなかった項である。

一般に軸流動翼の翼列は静止翼列によって実験されるが、この第3項は静止翼列実験の際には全く発生しない二次うずであるから、軸流動翼の翼列二次流れに関しては静止翼列の実験結果はそのまま適用することはできない。

流路の回転に起因する流路間二次うずは (4.17) 式の第2項と第3項であるが、第2項は $\vec{\omega} \perp \text{grad} (I/\rho)$ のときは0となり、第3項は $\vec{\omega} \perp \vec{W}$ のとき0となる。軸流動翼の場合にはケーシングまたはボス壁面に発達する境界層では、流路の曲りがあまり大きくないときは近似的に $\vec{\omega} \perp \text{grad} (I/\rho)$ となるので第2項は無視できる。したがって、軸流動翼では、回転の影響は第3項のみとなるが、境界層の速度こう配によってできるうず度は回転角速度 ω より十分大きいのがふつうであるから第3項の影響は小さいであろう。*J. H. Horlock*⁴⁴ は軸流動翼で (4.17) 式の第2項、第3項を無視して静止流路と同じ二次うずを仮定して、実験し、ほぼ満足な結果が得られたと報告している。しかし、回転数の大きい超音速送風機などでは無視できないであろう。なお上述の部分で

「流路の曲りがあまり大きくないとき」と注を加えたが、これは流路の曲りが大きいときには等ベルヌーイ面が二次うずによって、流路の後の部分で流れ面と一致しなくなるからである。

半径流羽根車では大体 $\vec{\omega} \perp \vec{W}$ となるから第3項は無視できるが、第2項は二次うずの発生原因の重要な因子となる。

1.2 遠心羽根車に対する簡易式

(4.17)式を遠心羽根車の流路に適用して羽根車後方の二次うず度を計算する基礎式を導く。

いま I ＝一定の面は流れ面に一致し、さらに、流れ面は羽根車の回転軸(z 軸)に垂直であると仮定する。すなわち $\omega = 0$ 。そうすると $\text{grad}(I/\rho)$ は z 軸方向成分のみをもつことになるので、

$$\text{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) \div \frac{d(I/\rho)}{dz}$$

とおくことができる。

$(\vec{W} \cdot \text{grad}) \vec{W}$ は場所的加速度を表わすが、これは流線方向の成分 $\partial \vec{W} / \partial s$ (s は流線にそって長さ)と、流線に直交する成分 W^2/R に分解できる。ただし R は流線の曲率半径である。一方 $\vec{W} \times \text{grad}(I/\rho)$ は流れ面内にあって流線に直交するベクトルである。したがって右辺第1項は

$$- \frac{2}{W^4} \cdot W \cdot \frac{d(I/\rho)}{dz} \cdot \frac{W^2}{R} = \frac{2}{RW} \frac{d(I/\rho)}{dz} \quad \dots \dots (4.18)$$

である。また右辺第2項は $\vec{\omega} \parallel \text{grad}(I/\rho)$ であるから

$$2 \frac{\omega}{W^2} \cdot \frac{d(I/\rho)}{dz} \quad \dots \dots (4.19)$$

である。第3項は常に $\omega_w = 0$ であるから0である。左辺は

$$hW \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\Omega_w}{hW} \right) \quad \dots \dots (4.20)$$

である。(4.18)～(4.20)式を(4.17)式に代入して流線に沿って積分すると

$$\left(\frac{\Omega W}{hW}\right)_2 - \left(\frac{\Omega W}{hW}\right)_1 = - \int_1^2 \frac{2}{hW^2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \frac{ds}{R} + \int_1^2 \frac{2\omega}{hW^3} \frac{d(I/\rho)}{dz} ds \dots (4.21)$$

となる。ただし、添字 1, 2 は羽根車入口, 出口に対する量である。 ds/R は流体粒子が微小距離 ds だけ進む間の流線の転向角 $d\varepsilon$ であり, ds/W は流体粒子が ds だけ進む間に要する時間 $d\tau$ で, $\omega d\tau$ はその間の流体粒子の羽根車に対する相対回転角である。

したがって(4.20)式は

$$\left(\frac{\Omega W}{hW}\right)_2 - \left(\frac{\Omega W}{hW}\right)_1 = - \int_1^2 \frac{2}{hW^2} \frac{d(I/\rho)}{dz} (d\varepsilon - \omega d\tau) \dots (4.22)$$

と表わすことができる。上式で z 軸の正方向を回転角速度ベクトルの向きにとると ε は後向き羽根の場合に正となる。したがって後向き羽根の場合には $d\varepsilon$, $\omega d\tau$ は共に正となり(4.22)式からわかるとおり, 両者は互に打ち消し合う。すなわち後向き羽根では, 羽根車の回転のためのうずベクトルの羽根車に対する相対回転によって生ずる二次うずと, 流路の曲りによる二次うずは互に打ち消し合うように発生する。また前向き羽根では互に助け合うように発生するから二次うずは強くなる。

非粘性流体を仮定しているので相対全水頭は流れ面内で一定である。

したがって羽根車幅が半径方向に一定の場合には(4.7)式で説明したように,

$$\frac{d(I/\rho)}{dz} \div \text{一定} \quad Wr \div \text{一定}$$

と近似できて,(4.22)式は次のようになる。

$$\left(\frac{\Omega W}{W}\right)_2 - \left(\frac{\Omega W}{W}\right)_1 = - \frac{1}{W^2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \int_1^2 \left(\frac{r}{r_2}\right) (d\varepsilon - \omega d\tau) \dots (4.23)$$

また羽根車幅が半径方向に変化する場合には, 相対全水頭のこう配は羽根車幅に逆比例する。したがって羽根車幅が半径に逆比例する場合($rh = \text{一定}$)には

$$h = h_2 \frac{r_2}{r}, \quad \left. \frac{d(I/\rho)}{dz} \div \frac{r}{r_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \right|_{r=r_2}$$

と近似することができ、(4.21)式は

$$\left(\frac{\Omega_W}{h} \right)_2 - \left(\frac{\Omega_W}{h} \right)_1 = - \frac{2}{W} \left. \frac{d(I/\rho)}{dz} \right|_{r=r_2} \int_1^2 \frac{1}{h} \frac{r}{r_2} (d\varepsilon - \omega d\tau) \quad \dots \dots (4.24)$$

となる。

以上は羽根車幅が一定の場合、および半径に逆比例する場合であるが、羽根車幅が半径 r の関数として与えられておれば(4.21)式は容易に(4.23)、(4.24)式と同様な形に変形することができる。

最も簡単な場合として、羽根角 β の対数らせん羽根をもつ羽根車の一次元軸対称流を考え、流線が羽根曲線と一致するものとする。と流線は $r = r_2 e^{\theta \tan \beta}$ (r_2 は羽根車外周半径)となり、 $ds = dr / \sin \beta$, $R = r / \cos \beta$ であるから $d\varepsilon = ds/R = (\cot \beta / r) dr$, $d\tau = ds/W = dr / W \sin \beta$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \Omega_{W2} - \frac{r_1}{r_2} \Omega_{W1} \\ = - \left. \frac{d(I/\rho)}{dz} \right|_{r=r_2} \frac{1}{W_2} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right\} \cot \beta - K \frac{\omega r_2}{W_2 \sin \beta} \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \right\} \right] \quad \dots \dots (4.25) \end{aligned}$$

となる。ただし h = 一定の場合は $K = \frac{1}{2}$, $n = 4$, rh = 一定の場合は $K = \frac{2}{3}$, $n = 3$ である。

(4.25)式の羽根車幅一定の場合は $G. O. Ellis$ が求めている²⁷ が、(4.25)式は羽根車幅が変化する場合も含んでおり、 $Ellis$ の解よりも一般的である。また $Ellis$ の解析ではベクトル方程式の変形の際にテンソル

演算を用いているが、この方法では早くから近似を行わなければならないので
1. 1で述べたような二次流れの発生機構についての物理的解釈ができない。

図 4. 1は (4. 2 5) 式から求めた
流線方向の二次うず度を図示したも
ので、縦軸は二次うず度を $(1/u_2)$
 $\times (d(I/\rho)/dz)$ で除した無次
元二次うず度である。すなわち

$$\Xi = \frac{\Omega_{W2} - (r_1/r_2)\Omega_{W1}}{\frac{1}{u_2} \cdot \frac{d(I/\rho)}{dz}}$$

で定義される。また横軸は流量係数
 $\phi = c_{r2}/r_2$ (c_{r2} は羽根車出口にお
ける平均半径方向流速である。

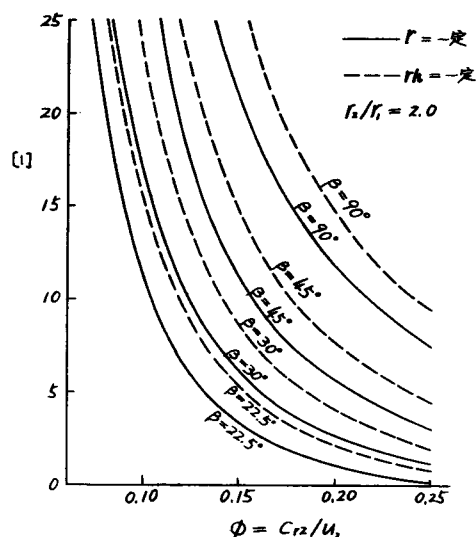


図 4. 1 無次元二次うず度

図に示すとおり羽根角が大きいほど流路間二次うず度は強くなる。送風機ではしばしば前向き羽根が用いられるが、この場合は非常に強い二次うずが生ずることになる。

図で $\phi = 0.08$ 以下の小流量の部分は省いたが、これは (4. 2 5) 式の導出の際の流れ面の仮定が第 3 章に述べた実験結果から考えて成り立たなくなると考えられるからである。

(4. 2 5) 式は無次元二次うず度と流量係数を用いて、

$$\Xi = - \frac{\sin \beta}{\phi} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right\} \cot \beta - \frac{K}{\phi} \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \right\} \right] \dots (4.26)$$

と変形できる。この式は羽根車内外径比が r_1/r_2 である場合の ϕ の変化にともなう二次うず度の強さの変化を表わしており、図 4. 1 に示したとおり、 ϕ の減少にともなって Ξ は急激に増加する。すなわち流量の小さい部分で二次うずが

強くなること，したがって流れの三次元性が強くなることがわかる。

流れは一次元流れと仮定しているので羽根車入口での相対流入角は羽根角に一致するものとし，絶対流れが半径方向であるときを正規流量と定義して添字 0 を付し，任意の流量状態における流量の正規流量に対する割合の逆数を ξ であらわす。すなわち

$$c_{r0} / c_{r1} = \xi$$

また半径 r を入口半径 r_1 で除した無次元半径を R とする。すなわち

$$r / r_1 = R$$

このとき R を羽根車の外径と内径の比であるとも考えることができ，このように考えるときは R と ϕ の間には，羽根車幅が一定の場合は

$$\phi = \frac{t a_n \beta}{\xi R^2} \quad \dots \dots (4.27)$$

羽根車幅が半径に逆比例する場合は

$$\phi = \frac{t a_n \beta}{\xi R} \quad \dots \dots (4.28)$$

の関係がある。したがって (4.26) 式は，たとえば，羽根車幅一定の場合には次のように変形できる。

$$\Xi = - \frac{\xi \cos^2 \beta}{\sin \beta} \left\{ (R^2 - 1) - \frac{\xi}{2} (R^4 - 1) \right\} \quad \dots \dots (4.29)$$

(4.29) 式はまた R に対する Ξ の変化を表わす式と考えることもできる。

第 2 節 うず糸追跡法による方法

第 1 節に述べた方法では二次うずの発生機構に関する物理的解釈は (4.22) 式によって説明できる。しかし羽根形状が対数らせんでない任意の形状であるときには (4.22) 式の積分は容易でない。本節ではうず糸追跡法を用いてより二次うずの強さを表わす式を一般的な形に表現することを試みる。

羽根車幅は一定とし，流れは羽根車回転軸に直角な面内にあるものとする。
 図 4.2 で微小角 $d\theta$ の間に含まれるうず糸 AF を追跡する．ここで AB と FE は羽根の両面の流線を表わし，速度は異なるが流線は軸対称とする．すなわち，この微小角 $d\theta$ の間に含まれる流路内で，流れはポテンシャル流れをするものとする．

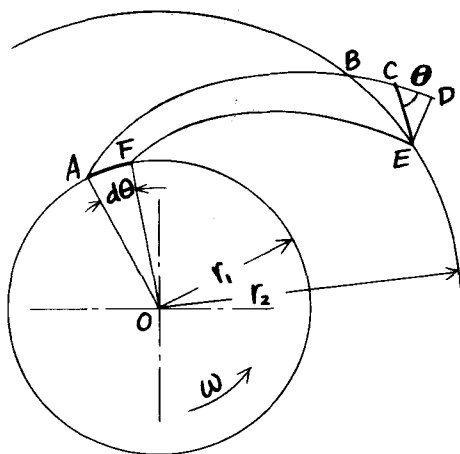


図 4.2 うず糸の移動

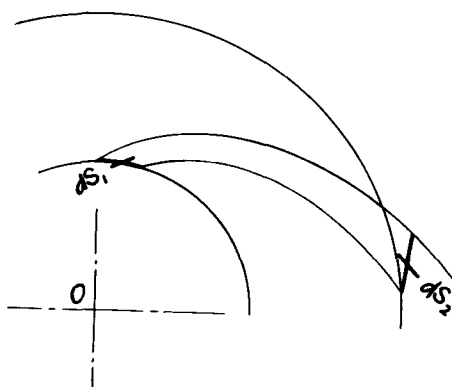


図 4.3

うず糸追跡法においては相対うず度を絶対うず度と回転角速度ベクトルにわけて解析し，おのおの結果を加え合せばよいが，回転角速度ベクトルは遠心羽根車では常に流れ面に直交するのでこの成分については考えなくてよい．

(4.6) 式より流線に直交するうず度 Ω'_n は

$$\Omega'_n = \frac{1}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz} \quad \dots \dots (4.30)$$

一般に静圧 p_s は羽根車幅方向には一定と見なしてよいから

(4.30) 式は

$$\Omega'_n = \frac{1}{W} \cdot W \cdot \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dz} \quad \dots \dots (4.31)$$

と変形できるように思われるが，(4.3 1)式は正しくない．たとえば羽根車幅一定の羽根車では $\frac{d(I/\rho)}{dz}$ は一定であり， $W \propto 1/r$ であるから

$$\frac{dW}{dz} \propto \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz} \propto r$$

となつて(4.3 0)式と(4.3 1)式は異なる．このことは基礎流れに重ね合わせられる流れの乱れによって生ずる Ω'_n の大きさは羽根車前方の近より流れのうず度と同じ程度の大きさを持つので前者を無視してならないことを示している．

(4.3 0)式はまた *Helmholz* の定理を用いて次のように導くこともできる．図 4.3 に示すように羽根車入口での長さ ds_1 ，高さ 1 の長方形の周に沿う循環は，*Helmholz* の定理によつて，等しくなければならないから

$$\Omega'_{n1} \cdot ds_1 = \Omega'_n \cdot ds$$

となる．連続の式より

$$ds_1/W_1 = ds/W$$

であるから

$$\Omega'_n = \Omega'_{n1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{W_1}{W} \Omega'_{n1}$$

となる．ところが，

$$\Omega'_{n1} = \frac{d(I/\rho)}{dz} \cdot \frac{1}{W_1}$$

であるから

$$\Omega'_n = \frac{1}{W} \cdot \frac{d(I/\rho)}{dz} \quad \dots\dots\dots (4.30)$$

となる。流線方向の成分 Ω'_w は

$$\Omega'_w = -\Omega'_n \cot \theta \quad \dots\dots\dots (4.32)$$

となる。ただし θ は図 4.2 に示すようにうず糸と流線のなす角である。

$$\overline{BC} \doteq \left(\int_1^2 \frac{ds}{W_{FE}} - \int_1^2 \frac{ds}{W_{AB}} \right) \times W_2 = -\frac{d}{d\theta} \left(\int_1^2 \frac{ds}{W} \right) d\theta \cdot W_2$$

$$\overline{BD} \doteq r_2 d\theta \cdot \cos \beta_2, \quad \overline{ED} \doteq r_2 d\theta \sin \beta_2$$

であるから

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BD} - \overline{BC}}{\overline{ED}} \\ &= \left\{ r_2 d\theta \cos \beta_2 + \frac{d}{d\theta} \left(\int_1^2 \frac{ds}{W} \right) d\theta \cdot W_2 \right\} / r_2 d\theta \sin \beta_2 \\ &= \cot \beta_2 + \frac{d}{d\theta} \left(\int_1^2 \frac{ds}{W} \right) \frac{W_2}{r_2 \sin \beta_2} \quad \dots\dots\dots (4.33) \end{aligned}$$

となる。羽根車出口単位幅あたりの循環を $\triangle \Gamma_2$ とすると (4.31), (4.32)

(4.33) 式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \triangle \Gamma_{W_2} &= \Omega'_{W_2} \times \overline{ED} \\ &= -\frac{1}{W_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \left[\cot \beta_2 + \frac{d}{d\theta} \left(\int_1^2 \frac{ds}{W} \right) \frac{W_2}{r_2 \sin \beta_2} \right] r_2 \sin \beta_2 d\theta \end{aligned}$$

羽根車出口の羽根一ピッチ間の相対速度の平均値を $\overline{W}_2$ とするとすると，二次うず度の羽根一ピッチ間の平均値は

$$\Omega'_{W2} = \frac{\int_0^{2\pi/N} \Delta \Gamma_{W2} d\theta}{\int_0^{2\pi/N} r_2 \sin \beta_2 d\theta}$$

$$= - \frac{d(I/\rho)}{dz} \cdot \frac{\cot \beta_2}{\overline{W}_2} + \frac{N}{2\pi} \frac{d(I/\rho)}{dz} \frac{1}{r_2 \sin \beta_2} \oint \frac{ds}{W}$$

. (4.34)

となる。ただし N は羽根枚数で， $\oint$ は1枚の羽根のまわりについて，圧力面に沿って入口から出口まで積分し，次に負圧面に沿って出口から入口まで積分することを意味する。羽根車入口での流線方向のうず度は(4.30)，(4.32)式から

$$\Omega'_{W1} = - \frac{1}{\overline{W}_1} \frac{d(I/\rho)}{dz} \cot \beta_1$$

. (4.35)

である。ここに $\overline{W}_1$ は羽根車入口での平均相対速度である。

(4.34)，(4.35)式より

$$\Omega'_{W2} - \frac{r_1}{r} \Omega'_{W1} = - \frac{1}{\overline{W}_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \left\{ \cot \beta_2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \cot \beta_1 \right\}$$

$$+ \frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_2 \sin \beta_2} \cdot \oint \frac{ds}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz}$$

. (4.36)

となる。対数らせん羽根の場合には $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ であるから(4.36)式の第1項は(4.25)式の右辺〔〕内の第1項に一致する。

次に(4.36)式の右辺第2項は(4.25)式の右辺〔〕内第2項に対応することを、対数らせん羽根の場合について示す。

いま羽根は対数らせん羽根で、羽根数はきわめて多いが有限であるとする。流線に直交する方向に羽根圧力面から距離 n をとり、流線の曲率半径を R とすると、羽根負圧面上の相対流速 W_t は、羽根圧力面での相対流速 W_d を用いて

$$W_t \doteq e^{-n/r} (W_d - 2\omega R) + 2\omega R$$

と近似できる。

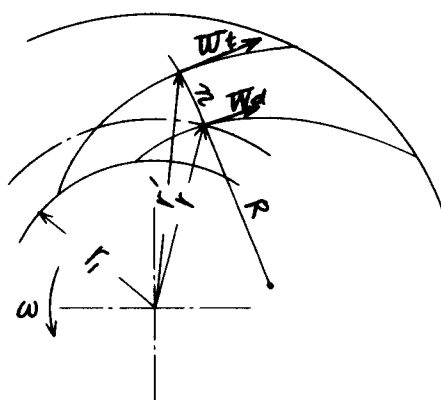


図 4.4 流路間の速度

羽根圧力面上で半径 r の点をとおり、流線に直交する曲線 n が次の羽根の負圧面と交わる点の半径を r' とし、その直交線の長さを n_t とすると(図4.4)半径 r' の点の羽根負圧面上の相対流速 W'_t は

$$W'_t \doteq \left(1 - \frac{n_t}{R}\right) (W_d - 2\omega R) + 2\omega R = \left(1 - \frac{n_t}{R}\right) W_d + 2\omega n_t$$

となる。また半径 r' の点の圧力面の相対流速 W'_d は

$$W'_d = \frac{r}{r'} W_d$$

であるから

$$W'_t - W'_d = \left(1 - \frac{n_t}{R} - \frac{r}{r'}\right) W_d + 2\omega n_t$$

となる。ところが

$$n_t = \frac{r' - r}{\cos \beta} = r d\theta \sin \beta$$

$$R = r_t \sec \beta$$

であるから

$$\left(1 - \frac{n_t}{R} - \frac{r}{r'} \right) = 0$$

である。したがって

$$W'_t - W'_d \doteq 2\omega n_t = 2\omega r' d\theta \sin \beta \quad \dots\dots\dots (4.37)$$

となる。上式を用いると

$$\begin{aligned} \oint \frac{ds}{W} &= \int_1^2 \frac{ds}{W'_d} - \int_1^2 \frac{ds}{W'_t} = \int_1^2 \frac{W'_t - W'_d}{W'_d W'_t} ds \\ &\doteq \int_1^2 \frac{2\omega r \sin \beta}{W^2} ds = \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{\omega r_2}{2W_2^2 \sin \beta} \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right\} \\ &\dots\dots\dots (4.38) \end{aligned}$$

となり、上式を(4.36)式に代入すると

$$\begin{aligned} \Omega'_{W2} - \frac{r_1}{r_2} \Omega'_{W1} &= -\frac{1}{W_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \left[\cot \beta \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right\} - \frac{\omega r_2}{2W_2 \sin \beta} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4.39) \end{aligned}$$

(4.39)式は(4.25)式に一致する。

以上の説明は対数らせん羽根の場合である。

静止流路では $\omega = 0$ であるから、対数らせん曲り流路が静止している場合は、曲りによる二次うず度として(4.25)式または(4.39)式の右辺第1項の

みがある。 $\oint ds/W$ は対数らせん流路の場合は、流路が静止しておれば 0、また回転しておれば回転の影響のみが含まれる。静止している場合は対数らせん流路では壁面に速度差が生じないからである。しかし一般には $\oint ds/W$ は回転の影響だけでなく曲りの影響も含み、したがって静止流路においては $\oint ds/W$ は必ずしも 0 とはならない。

(4.36) 式は対数らせん羽根でない羽根の羽根車の場合をも求めることができるから (4.25) 式より一般的な表現である。

ところで一般に実際の羽根車について得られる $\oint ds/W$ の値は、対数らせん羽根の羽根車の場合でも、(4.38) 式の計算値とは一致しない。

図 4.5 は神元教授らによって測定された羽根面圧力分布の実験結果⁴⁵ から換算した $\oint ds/W$ の無次元量で、縦軸 Ξ^* は (4.36) 式または (4.39) 式の右辺第 2 項を

$$\frac{1}{u_2} \frac{d(I/\rho)}{dz}$$

で除した無次元量で、実線はその計算値である。また ●, ○, × 印はそれぞれ羽根枚数 8, 6, 4 枚の場合である。ただし実験値として示した Ξ^* は羽根面速度 W 、羽根に沿う長さ s を用いて

$$\Xi^* = \frac{1}{2\pi/N} \cdot \frac{1}{\sin \beta} \cdot \oint \frac{d(s/r_2)}{(W/u_2)}$$

により求めた。また ⊙ 印は二次元ポテンシャル流れ理論によって羽根面速度を計算した場合である。

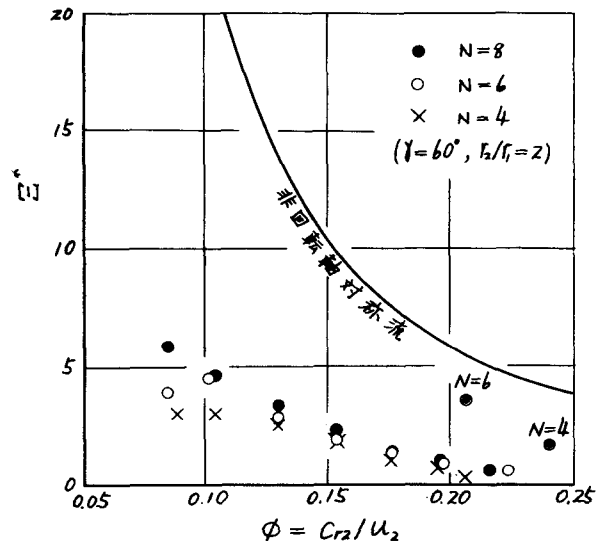


図 4.5 $\oint ds/W$ の計算値と実験値の比較

横軸は流量係数 $\phi = c_{r2}/u_2$ である。

図に明らかなように、実際の羽根車の場合と、計算に用いた非回転軸対称流の場合では、 S^* の値は非常に差がある。 $\phi^* d s / W$ の値がこのように大きな差があるから、非回転軸対称流が二次うずの計算に対して意味がないということにはならない。実際の羽根車について得られる $\phi^* d s / W$ の値は羽根面境界層の発達や、流れの乱れなどの影響を受けるが、このことは二次うず度の強さの変化を説明することにはならない。したがって図 4.5 から (4.39) 式に対する補正係数を算出することは正しくない。(4.39) 式にはもちろん補正係数を必要とするものと考えられるが、この補正係数は二次うず度の強さの実測値と計算値のくい違いから求めるべきである。対数らせん羽根でない羽根の羽根車については (4.36) 式において同様の補正係数を求めるべきである。

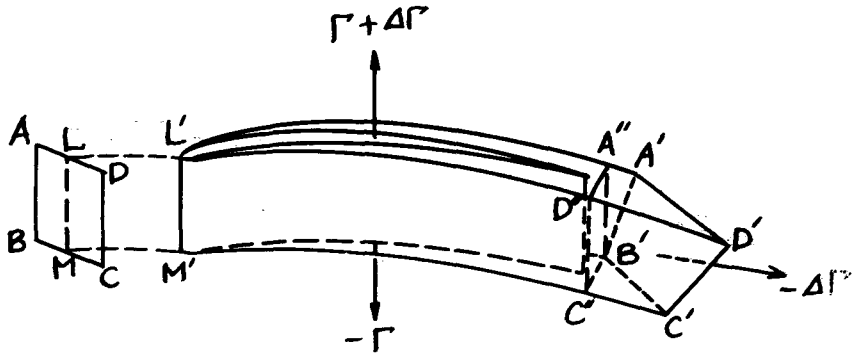
なお、付言すれば、Soundranayagam³⁰ は軸流翼列の場合にその翼のまわりの循環から近似的に $\phi^* d s / W$ を求め、翼列節弦比の二次うずの強さに対する影響を考察し、節弦比が大きいほど一枚の翼のまわりの循環が大きいため $\phi^* d s / W$ も大きいと述べているが、遠心羽根車の場合にも同様の傾向があるものと考えられ、羽根枚数が多い方が二次うず度は小さいものと予想される。

第3節 翼端二次うず

前節までに述べたのは流路間に生ずる二次うずであったが、流路後方に生ずる二次うずは翼端から流出する二次うずをも加えなければならない。このような翼端二次うずの存在は軸流翼列の場合にはかなり詳しく調べられているが、遠心羽根車の場合は全く考察されていない。しかし一般に遠心羽根車後縁は厚味をもつ羽根であることが多く、翼端二次うずは羽根伴流に乱されて翼端二次うずとして分離しにくい場合が多いと思われるので、ここでは簡単に述べることにとどめる。

流路高さは一定で、流れ面は等ベルヌーイ面、すなわち羽根車回転軸に垂直な面内にあるものとする。そして相対全水頭は流れ面に垂直な方向にのみ変化

するものとする。



4.6 翼端二次うず

図 4.6 に示すように、岐点流線 $L'L'$ 、 MM' を含む単位高さ、微少幅の面 $ABCD$ を考える。最初うず糸はこの面内にあつたものとして、時間 t の後のおの角 A, B, C, D の位置を考えると、それぞれ A', B', C', D' となる。

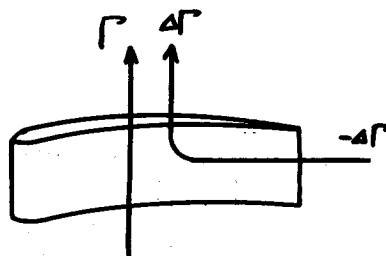
羽根の高さ方向の流速の違いのために $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ は羽根車後方では流れ面に対してある傾きをもつことになる。また羽根の圧力面と負圧面の速度差のために $\overline{AD'}$ 、 $\overline{BD'}$ が流線となす角は $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ のそれらと異なる。

Helmholtz の定理によつて回路 $A'L'D'C'M'B'A'$ の循環は O である。したがつて面 $A'L'D'$ のまわりの循環と、面 $C'M'B'$ のまわりの循環と、面 $A'B'C'D'$ のまわりの循環の総和は O である。

もし $\Gamma(A'B'C'D') = \Gamma(C'M'B')$ 、すなわち $\Delta\Gamma = 0$ ならば $\Gamma(A'B'C'D') = 0$ であるから流れの方向のうず度は面 $A'B'C'D'$ に含まれるうず糸のうず度の流線方向の成分のみとなる。そしてこの場合は $\overline{AB'}$ 、 $\overline{DC'}$ は流れ面に垂直となる。この種の二次うずは羽根車前方のうず糸の流下にともなう伸びによつて生じるものと考えられ、*Vortex Filament Vortex* と呼ばれる。

$\Delta\Gamma \neq 0$ ならば $\Gamma(A'B'C'D') = -\Delta\Gamma$ であるからこの流線方向成分が翼端二次うずとして残る。この種の二次うずは *Trailing Shed Vortex* と呼ばれるが、これは近寄り流れの速度こう配によって生ずるもので、図 4.7 に示す

すなわち有限単独翼の随伴うずと同じ
概念で考察できるが、単独翼の随伴うず
は一様な流れの中でも生ずるものであり、
この点は物理的意味が異なる。



4.7

Trailing Shed Vortex の強さ

$\triangle \Gamma_3$ は図 4.7 から

$$\Delta\Gamma_3 = -\frac{d\Gamma}{dz} = -\frac{d}{dz} \mathcal{G}^W ds$$

より求まる. ただし z は羽根車幅方向の座標である.

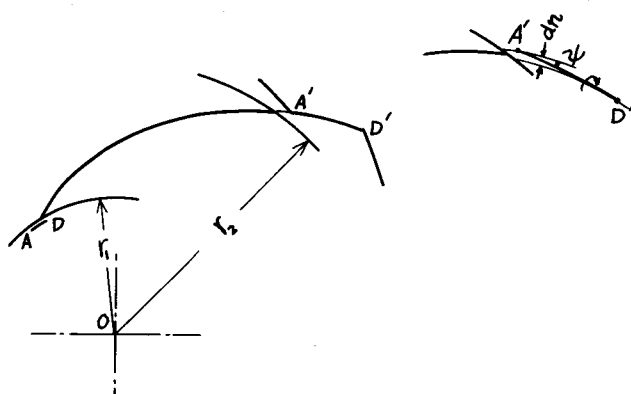
次に *Vortex Filament Vortex* について述べる.

Vortex Filament による翼端二次うずを考えると先述のとおり循環の变化を考えなくてよい。

無限に微少なうず糸 $\overline{AD}$ を考え、これを追跡する。羽根車後方では $\overline{AD}'$ の位置を占める。 $\overline{AD}'$ の流線に直角な距離は d_n であるとする。

流線に直角な方向のうず度は (4.30) 式に示したとおり

$$Q'_n = \frac{1}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz}$$



☒ 4.8 *Vortex Filament Vortex* の追跡

となる。したがって流線方向のうず度 Ω'_w は

$$\Omega'_w = -\Omega'_n \cot \psi = \frac{1}{W_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \cdot \cot \psi \quad \dots \dots (4.41)$$

となる。ただし ψ は流線が $\overline{AD}'$ となす角で無限に O に近い。

$dn \times 1$ の長方形の面をつらぬく循環は

$$\Delta \Gamma_2 = \Omega'_w \times dn \times 1 = \frac{1}{W_2} \frac{d(I/\rho)}{dz} \times \cot \psi \times dn$$

である。また

$$\cot \psi \doteq \frac{\overline{AD}'}{dn} \doteq W_2 \int_1^2 \left(\frac{ds}{W_d} - \frac{ds}{W_t} \right) \times \frac{1}{dn} = W_2 \oint \frac{ds}{W} \frac{1}{dn}$$

である。ただし W_d , W_t はそれぞれ圧力面, 負圧面の流速である。

したがって,

$$\Delta \Gamma_2 = - \frac{d(I/\rho)}{dz} \oint \frac{ds}{W} \quad \dots \dots (4.42)$$

となる。一方(4.36)式の右辺第2項より求める流路間二次うずの羽根—ヒッチ間の循環は

$$\frac{N}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_2 \sin \beta_2} \oint \frac{ds}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz} \times \frac{2\pi}{N} r_2 \sin \beta_2 = \frac{d(I/\rho)}{dz} \oint \frac{ds}{W} \quad \dots \dots (4.43)$$

である。(4.42)式と(4.43)式は符号反対で大きさが等しい。したがって、対数らせん羽根の場合、うずベクトルの転向によつて生ずる二次うずの総循環は羽根後縁から翼端二次うずとして流出する二次うずの循環と打ち消し合う

流線も相対流速も軸対称であるとする完全な一次元流れでは， $\phi' ds/W$ は0となって流路間二次うずの中に $\phi' ds/W$ が入らないことになるが，これは（4.42）式で与えられる翼端二次うずが流路間に一様に分布するためと解釈してもよい。

またこのような一次元軸対称流の場合には，流路間に体積力 $\vec{F}$ を一様に分布させればよい。したがって運動方程式は（4.2）式と同じ符号を用いて

$$\vec{W} \times \vec{\Omega} = \text{grad}(I/P) + 2\vec{\omega} \times \vec{W} - \vec{F} \quad \dots\dots (4.44)$$

となる。（4.2）式のかわりに（4.44）式を用いて第1節と同じ解析を行うと *Vortex Filament Vortex* に対応する項として（4.17）式の右辺に

$$- \frac{1}{W^2} (\vec{\Omega}' \cdot \vec{F}) \quad \dots\dots (4.45)$$

の項が加わる。この対応はたとえば対数らせん羽根の羽根車に対して以下のよう示される。

$\vec{F}$ は流線に直交する成分 f_n のみであるから

$$\vec{\Omega}' \cdot \vec{F} = \Omega'_n \cdot f_n$$

である。さらに

$$f_n = W \cdot \Omega_z$$

であるが， Ω_z は基礎流れから定まる z 方向のうず度で

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{d(rW_\theta)}{dz} = - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (Wr \cos \beta)$$

である。ただし W_θ は相対流速の周方向成分である。対数らせん羽根の羽根車では $\Omega_z = 0$ であるから

$$\Omega'_z = 2\omega$$

となる。したがって

$$f_n = 2\omega W$$

となり，（ 4.45 ）式による羽根車出口での値 Ω'_{W_2} は

$$\begin{aligned}\Omega'_{W_2} &= - W_2 \int_1^2 \frac{1}{W^3} (\vec{\Omega} \cdot \vec{F}) ds \\ &= - W_2 \int_1^2 2 \omega W \cdot \frac{1}{W^3} \cdot \frac{1}{W} \frac{d(I/\rho)}{dz} ds \\ &= - \frac{\omega r_2}{2 W_2^2 \sin \beta} \frac{d(I/\rho)}{dz} \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right\} \dots \dots \dots (4.46)\end{aligned}$$

となる。これは（ 4.39 ）式の右辺第 2 項と大きさ等しく符号反対である

第 4 節 境界層理論によるシュラウド 境界層の二次流れの解析

前節まではうず度をもつ流れが遠心羽根車の流路を通過する際の二次うずの発生を，非粘性流体として考察した。本来この取扱いは，軸流翼列間流路のボスまたはケーシング壁面の境界層を近似的に取扱う方法として考察されたものであるが，遠心羽根車のシュラウド面に沿って発達する境界層に適用するには種々の点で難がある。たとえば，非粘性流体として取扱うためにはうず度を仮定しなければならず，次第に厚味を増し，かつ速度分布も変化していく境界層のうず度をいかにして正しく評価するかについては決定的な根拠がない。また二次流れの考察は最終的には二次流れの損失を求めることにあるが，うず糸理論から計算される二次流れ損失はきわめて小さく，実際の流れにおける二次流れ損失を評価することができない。さらにうず度の強さが求まることによって実際の流れの乱され方をほとんど計算できないことも難点である。しかし二次流量の大きさを知ることができ，これが生ぜしむる流れの乱れは羽根車後方におけるすべりの発生として評価しうる可能性がある。そして境界層を計算することによって境界層の定量的性質を知るとは，非粘性流体としての取扱いに応用する場合にも必用不可欠の条件である。

本節では主流を一次元軸対称流に理想化してシュラウド面境界層を計算し、定量的解析の基礎的な考察を行う。

4.1 計算に用いる仮定

計算には次の仮定をおく

1. 羽根車幅は一定で、流れ面は羽根車の回転軸に垂直な面内にあるものとする。
2. 流れは主流も境界層の流れも軸対称で主流の流線は円周に対する傾き角が β の自由対数らせんとする。
3. 境界層は上、下シュラウドともに羽根車入口半経 r_1 の位置から発達しはじめ、はじめから乱流境界層であるとする。
4. 軸対称流であるから羽根の作用を表わす分布した質量力がはたらくが、この質量力の大きさは主流でも境界層でも同じであるとする。この仮定は質量力は羽根面圧力差によるもので境界層の厚さ方向には圧力は一定であることを根拠にしている。

4.2 座標系

計算には直交曲線座標系を用いる。図4.9に示すとおり、主流にそって s 軸、流れ面内で主流に直交する方向に z 軸をとる。ただし (n, s, z) の順に右手系を構成するよう

におのおのの座標軸の正の向

きを定める。したがって s 軸は主流の向きと反対の向きが正となる。また n 軸は羽根圧力面から負圧面に向かう向きが正となる。

n, s 座標系は円柱座標 (r, θ) を用いて次のように表わされる。

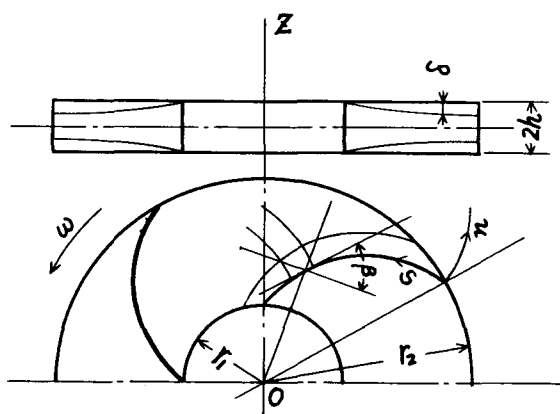


図4.9 座標系

$$s = -\tan \beta \log \left(\frac{r}{r_2} \right) + \theta \quad \dots \dots \dots (4.47)$$

$$n = \cot \beta \log \left(\frac{r}{r_2} \right) + \theta \quad \dots \dots \dots (4.48)$$

$n-s$ 座標系が直交することは直角座標 (x, y, z) に対し

$$\sum \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} = \sum \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \sum \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

を計算することによって簡単に確かめられる。

また $n-s$ 曲線座標系の第1種基本量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^2} = r \sin \beta \\ g_2 &= r \cos \beta \\ g_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4.49)$$

4.3 運動方程式および連続の式

4.3.1 運動方程式

相対流れの運動方程式をベクトル表示すると

$$-\vec{\omega} \times \vec{\Omega} + \text{grad} \left(\frac{I}{\rho} \right) + 2\vec{\omega} \times \vec{w} = \vec{F} + \vec{S} \quad \dots \dots \dots (4.50)$$

となる。ただし $\vec{w}$ は相対流速ベクトル， $\vec{\Omega}$ は流れの相対うず度ベクトルで $\vec{\Omega} = r \times \vec{\omega}$ である。 $\vec{\omega}$ は回転角速度ベクトル， $\vec{F}$ は質量力ベクトル， $\vec{\Sigma}$ は摩擦応力の効果を表わすベクトル， I/ρ は相対全水頭である。(4.50)式は第1節の(4.2)式に $\vec{F}$ と $\vec{\Sigma}$ が加わった形である。

$\vec{\Sigma}$ の n ， s ， z 軸方向成分は次のようにして求められる。

$\vec{\Sigma}$ の直角座標系の座標軸方向成分 Σ_x ， Σ_y ， Σ_z はそれぞれ

$$\Sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\Sigma_y = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

$$\Sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

である。応力テンソルの (x, y, z) 座標系における成分と， (n, s, z) 座標系における成分の間には次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_n & l_s & l_z \\ m_n & m_s & m_z \\ n_n & n_s & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n & \tau_{ns} & \tau_{nz} \\ \tau_{ns} & \sigma_s & \tau_{sz} \\ \tau_{nz} & \tau_{sz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n & m_n & n_n \\ l_s & m_s & n_s \\ l_z & m_z & n_z \end{pmatrix}$$

ただし， (l_n, m_n, n_n) ， (l_s, m_s, n_s) ， (l_z, m_z, n_z) はそれぞれ， n ， s ， z 軸の x ， y ， z 軸に対する方向余弦である。

すなわち，

$$l_n = \cos(\beta + \theta) \quad m_n = \sin(\beta + \theta) \quad n_n = 0$$

$$l_s = -\sin(\beta + \theta) \quad m_s = \cos(\beta + \theta) \quad n_s = 0$$

$$l_z = 0 \quad m_z = 0 \quad n_z = 1$$

である。したがって

$$\sigma_x = \sigma_n \cos^2(\beta + \theta) - \tau_{ns} \sin 2(\beta + \theta) + \sigma_s \sin^2(\beta + \theta)$$

$$\sigma_y = \sigma_n \sin^2(\beta + \theta) + \tau_{ns} \sin 2(\beta + \theta) + \sigma_s \cos^2(\beta + \theta)$$

$$\sigma_z = \sigma_z$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \sigma_n \sin 2(\beta + \theta) + \tau_{ns} \cos 2(\beta + \theta) - \frac{1}{2} \sigma_s \sin 2(\beta + \theta)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{nz} \cos(\beta + \theta) - \tau_{sz} \sin(\beta + \theta)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{nz} \sin(\beta + \theta) + \tau_{sz} \cos(\beta + \theta)$$

となる。ここで流体の粘性および乱れによる応力は τ_{sz} , τ_{nz} のほかはこれらに比べて十分に小さいと考えてよいから

$$\sigma_n = \sigma_s = \sigma_z = \tau_{ns} \div 0$$

とおくことができ、

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} \div 0$$

となる、したがって、

$$\Sigma_x = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad \Sigma_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \quad \Sigma_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

となる。

以上より、 $\vec{\Sigma}$ の n , s , z 軸方向成分は

$$\Sigma_n = l_n \Sigma_x + m_n \Sigma_y + n_n \Sigma_z = \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z}$$

$$\Sigma_s = l_s \Sigma_x + m_s \Sigma_y + n_s \Sigma_z = \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z}$$

$$\Sigma_z = l_z \Sigma_x + m_z \Sigma_y + n_z \Sigma_z = \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n}$$

$$+ \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} + \frac{\tau_{nz} \cos \beta}{r} - \frac{\tau_{sz} \sin \beta}{r}$$

...(4.51)

となる。

さて、 n ， s ， z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_n$ ， $\vec{e}_s$ ， $\vec{e}_z$ とし、 n ， s ， z 軸方向の成分にそれぞれ添字 n ， s ， z を付す。また境界層内の量を小文字で表わし、主流部での量を大文字で表わす。

相対流速を

$$\vec{w} = w_n \vec{e}_n + w_s \vec{e}_s + \vec{e}_z w_z \quad \dots\dots\dots (4.52)$$

と表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \Omega_n &= \frac{1}{g_1 g_3} \left\{ \frac{\partial (g_3 w_z)}{\partial s} - \frac{\partial (g_2 w_s)}{\partial z} \right\} \\ \Omega_s &= \frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial (g_1 w_n)}{\partial z} - \frac{\partial (g_3 w_z)}{\partial n} \right\} \\ \Omega_z &= \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial (g_2 w_s)}{\partial n} - \frac{\partial (g_1 w_n)}{\partial s} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.53)$$

$$\begin{aligned} grad \left(\frac{I}{\rho} \right) &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial (I/\rho)}{\partial n} \vec{e}_n + \frac{1}{g_2} \frac{\partial (I/\rho)}{\partial s} \vec{e}_s \\ &+ \frac{1}{g_3} \frac{\partial (I/\rho)}{\partial z} \vec{e}_z \quad \dots\dots\dots (4.54) \end{aligned}$$

であるから、(4.50) 式を n ， s ， z 軸方向の成分に分ると次の運動方程式が得られる。

n 方向 :

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_n}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_n}{\partial z} - \frac{w_s w_n \sin \beta}{r} \\ - \frac{w_s w_n \sin \beta}{r} - 2\omega w_s = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial p}{\partial n} + r\omega^2 \cos \beta + F_n + \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \\ \dots\dots\dots (4.55) \end{aligned}$$

s 方向 :

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{r \sin \beta} \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} + \frac{w_n w_s \cos \beta}{r} \\ + \frac{w_n^2 \sin \beta}{r} + 2\omega w_n = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial p}{\partial s} - r\omega^2 \sin \beta + F_s + \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \\ \dots\dots\dots (4.56) \end{aligned}$$

z 方向 :

$$\begin{aligned} \frac{w_n}{r \sin \beta} \frac{\partial w_z}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_z}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + \frac{1}{r \sin \beta} \\ \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} + \frac{\tau_{nz} \cos \beta}{r} - \frac{\tau_{sz} \sin \beta}{r} \\ \dots\dots\dots (4.57) \end{aligned}$$

また主流部では $W_n = W_z = 0$, $\tau_s = \tau_n = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ であるから n , s , z 軸

方向に対して，それぞれ次の運動方程式が成り立つ．

$$\frac{W_s}{r \cos \beta} \frac{\partial W_s}{\partial s} - \frac{W_s^2 \cos \beta}{r} - 2\omega W_s = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial p}{\partial n} + r\omega^2 \cos \beta + F_n \quad \dots \dots (4.58)$$

$$\frac{W_s}{r \cos \beta} \frac{\partial W_s}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial p}{\partial s} - r\omega^2 \sin \beta + F_s \quad \dots \dots (4.59)$$

$$F_z = 0 \quad \dots \dots (4.60)$$

(4.55)，(4.56)式の右辺第1～第4項は流体の流れの場所的加速度による慣性力を表わし，第5項はコリオリの力を表わす．また右辺の第1項は圧力こう配，第2項は遠心力，第3項は質量力を表わす．

羽根から流体に加わる力は，非粘性流体では羽根面に直交するから，一次元軸対称流では主流流線に直交する．したがって，(4.59)式の F_s は0と置いて省略することもできる．すなわち，主流部分では，流れの慣性力，遠心力，コリオリの力，静圧差が釣り合っている．

(4.60)式の $F_z = 0$ は主流が二次元流れであるからである．

仮定(4)によつて(4.55)式および(4.58)式の F_n ，(4.56)式および(4.59)式の F_s はそれぞれ等しい．したがって(4.58)，(4.59)式から F_n ， F_s を求めて，それらを(4.55)，(4.56)式に代入して質量力を消去することができる．

その結果は次のとおりである． n 方向：

$$\begin{aligned} & \frac{w_n}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_n}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_n}{\partial z} - \frac{w_s^2 \cos \beta}{r} - \frac{w_n w_s \sin \beta}{r} - 2\omega w_s \\ & = -\frac{W_s^2 \cos \beta}{r} - 2\omega W_s + \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \quad \dots \dots (4.61) \end{aligned}$$

s 方向：

$$\frac{w_n}{r \sin \beta} \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} + \frac{w_n w_s \cos \beta}{r} + \frac{w_n^2 \sin \beta}{r} + 2 \omega w_n = \frac{W_s}{r \cos \beta} \frac{\partial W_s}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \quad \dots \dots (4.62)$$

z 方向の運動方程式は，(4.57)式に変化はない。

質量力の消去の際に，上式のとおり，静圧項，遠心力項も同時に消去されるが，静圧項が消去されるのは，後述のように，静圧が境界層内と主流とで等しいからであり，また遠心項が消去されるのは遠心力が流速に無関係で，単位質量当りの大きさが境界層内でも主流部でも等しいからである。

(4.55)，(4.56)式の F ， p ， $r\omega^2$ を消去することによって流れは流速のみを用いて表わすことができることになる。

4.3.2 連続の式

連続の式をベクトル形式で表わすと

$$\text{div } \vec{w} = 0 \quad \dots \dots (4.63)$$

これをスカラ表示すると次のようになる。

$$\frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} + \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{w_n \cos \beta}{r} - \frac{w_s \sin \beta}{r} = 0 \quad \dots \dots (4.64)$$

4.3.3 境界層近似

平板境界層に対して *Prandtl* が示したように，境界層厚さが薄いものとして(4.55)～(4.57)式の各項の大きさの程度を比較し，無視しうる項を省略する。

境界層厚さは δ は 1 に比べて十分に小さい数とし，主流方向の境界層内の速

度の大きさの程度を 1 とすれば，平板境界層の場合には連続の式から，壁面に垂直な方向の速度は δ の程度の大きさであることがわかる。しかし，ここに扱う問題では境界層内の速度が三軸方向にそれぞれ成分をもつので，平板境界層の場合のように連続の式だけではおのこの速度成分の大きさの程度を評価することはできない。したがって運動方程式の三つの式から物理的意味を考慮しながら，大きさの程度を判定しなければならない。

はじめに境界層厚さ δ は 1 に比べて十分に小さいとする。そして主流方向の境界層内の速度 w_s を 1 の程度の大きさとする。

また厚さ方向の境界層内の速度 w_z は δ の程度の大きさとする。

この仮定は平板境界層の流れからの類推である。

w_n はその大きさの程度は直観的には定められない。

乱流境界層の場合はせん断応力の大きさの程度を速度こう配から定めることができないので境界層近似の方法を用いて大きさの程度を判定することができない。層流境界層の場合はせん断応力の程度を簡単に判定することができ， w_n の大きさの程度は層流の場合も乱流の場合も同じであると考えられるので，はじめに層流境界層の場合について考える。

層流境界層の場合は (4.56)，(4.57) 式の粘性項は $-\nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w}$ を座標軸方向に分解することによつて次のように求められる。

n 方向：

$$-\nu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_s}{\partial n} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \beta}{r^2} w_s + \frac{w_n \sin^2 \beta}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \beta \cdot \cos \beta} \frac{\partial^2 w_s}{\partial s \partial n} - \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_s}{\partial s} - \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} + \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial n} \right\} \cdots \cdots (4.65)$$

s 方向:

$$- \nu \left\{ \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial^2 w_z}{\partial z \partial s} - \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial^2 w_s}{\partial n^2} + \frac{1}{r^2 \cos \beta \cdot \sin \beta} \frac{\partial^2 w_n}{\partial n \partial s} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_n}{\partial s} + \frac{w_s \cos^2 \beta}{r^2} + \frac{w_n \sin \beta \cdot \cos \beta}{r^2} \right\} \dots \dots \dots (4.66)$$

w_s と、その微分量の大きさの程度は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} O(w_s) &= O\left(\frac{\partial w_s}{\partial n}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial n^2}\right) = O\left(\frac{\partial w_s}{\partial s}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2}\right) \\ &= O\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial s \partial n}\right) = 1 \\ O\left(\frac{\partial w_s}{\partial z}\right) &= \frac{1}{\delta}, \quad O\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\delta^2} \end{aligned} \right\} (4.67)$$

w_z については次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} O(w_z) &= O\left(\frac{\partial w_z}{\partial s}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial s^2}\right) = O\left(\frac{\partial w_z}{\partial n}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial n^2}\right) = \delta \\ O\left(\frac{\partial w_z}{\partial z}\right) &= 1, \quad O\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\delta} \end{aligned} \right\} (4.68)$$

さて、 $O(w_n) = \delta$ と仮定すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{\partial w_n}{\partial s}\right) &= O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2}\right) = O\left(\frac{\partial w_n}{\partial n}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial n^2}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial n \partial s}\right) = \delta \\ O\left(\frac{\partial w_n}{\partial z}\right) &= 1, \quad O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right) = \delta \end{aligned} \right\} (4.69)$$

(4.56), (4.66)式について(4.67)~(4.69)式の大きさの程度を用いて各項の大きさの程度を比較し, 1の大きさの程度の項, および最も大きい粘性項だけを残すと次のようになる。

$$\frac{w_s}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} + w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} = \frac{W_s}{r \cos \beta} \frac{\partial W_s}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2}$$

上式が境界層内の流れを表わすためには, 粘性項が他の項と同じ大きさ, すなわち 1の大きさととならなければならない。したがって,

$$O\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\delta^2}$$

であるから ν の大きさの程度は δ^2 でなければならない。

n 方向には (4.55), (4.65) 式から, 同様にして次のようになる。

$$-\frac{w_s^2 \cos \beta}{r} - 2\omega w_s = -\frac{W_s^2 \cos \beta}{r} - 2\omega W_s + \nu \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2} \dots (4.71)$$

ところが,

$$O(\nu) = \delta^2, \quad O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\delta}$$

であるから (4.71) 式の粘性項の大きさは δ となり他の項に比べて無視できる。すなわち $O(w_n) = \delta$ と仮定すれば流れの運動方程式の中に w_n は全く含まれないことになり, 二次流れは計算できないことになる。したがって w_n の大きさの程度は 1 でなければならない。

次に $O(w_n) = 1$ と仮定すれば

$$O\left(\frac{\partial w_n}{\partial s}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2}\right) = O\left(\frac{\partial^3 w_n}{\partial n}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial n^2}\right) = O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial n \partial s}\right) = 1$$

$$O\left(\frac{\partial w_n}{\partial z}\right) = \frac{1}{\delta}, \quad O\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{\delta^2}$$

となり，先と同様の演算によつて v の大きさの程度は δ^2 となり，流れに直角な方向の粘性項の大きさの程度は1となる。二次流れを計算しうするためには，主流に直交する方向の運動方程式の中で，粘性項が他の項と同じ程度の大きさでなければならない，このためには w_n の大きさの程度は1が可能で，また1でなければならない。

以上の考察により層流三次元境界層の場合には二次流れの速度の大きさの程度は主流方向のそれと同じ程度の大きさでなければならないことがわかる。

次に乱流境界層の場合を考える。

w_z, w_s の大きさの程度は乱流境界層の場合も層流境界層の場合と同様 (4.67), (4.68) 式および (4.69) 式の関係が成立する。したがつて w_n の大きさの程度が1であつても δ であつても (4.62) 式が境界層の流れをあらわす運動方程式であるためには $\partial \tau_{sz} / \partial z$ の大きさの程度は1でなければならない。

さて $\partial \tau_{nz} / \partial z$ については十分に根拠ある表現はない。しかしせん断応力の合力の方向は合速度の方向であると考えるのが最も適當であろう。すなわち

$$\frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} / \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} = K \frac{w_n}{w_s} \quad \dots \dots \dots (4.72)$$

であり，比例定数 K は1の程度の大きさでなければならない。

上式より $\partial \tau_{nz} / \partial z$ は w_n と同じ程度の大きさでなければならないことがわかる。

さて(4.61) 式より w_n の大きさの程度が1であつても δ であつても、最も大きい項の大きさの程度は1である。主流に直交する方向の運動方程式は、 w_n の大きさの程度が δ であれば、層流境界層の場合と同様、 w_n を含む項はすべて δ の程度の大きさとなつて、二次流れを計算することができない。 w_n の大きさの程度が1であれば、主流に直交する方向の運動方程式は合理的に二次流れを表わしうることになる。

以上の考察により運動方程式の境界層近似においては w_n, w_s の大きさの程度はともに1でなければならないことがわかる。

この結果、計算に用うべき運動方程式は n, s 方向にはそれぞれ(4.61)、(4.62) 式がそのまま、どの項も省略しないで残されることになる。また z 軸方向には

$$\frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z}$$

の大きさの程度が1であるから τ_{nz}, τ_{sz} の大きさの程度はともに δ となり(4.57) 式から、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots (4.73)$$

となる。すなわち境界層の厚さ方向に静圧は一定とみなしてよいことがわかる。これは仮定(4)の根拠となっている。

なお、 w_n, w_s の大きさの程度に関しては ³¹ Gruschwitz, ³² Magee が与えた、主流がポテンシャル流れとなるような三次元境界層の基礎式においても同様の評価をしているようである。

連続の式、(4.64) も境界層近似によつて省略される項はない。

4.4 積分条件式

運動方程式(4.61)、(4.62)、および連続の式(4.64)を用いると

き，未知量は w_n ， w_s ， w_z ， W_s の四つであるから，方程式の数が一つ不足するので解は求まらない。そこで運動方程式を z 軸方向に $z=0 \sim \delta$ (δ は境界層厚さ) の間で積分して積分条件式になおし，境界層内の速度分布を仮定して未知数を一つ減ずる。

(4.64) 式より

$$w_z \Big|_{z=\delta} = \int_0^\delta \left(\frac{w_s \sin \beta}{r} - \frac{w_n \cos \beta}{r} - \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} \right) dz$$

..... (4.74)

である。

n 軸方向の積分条件式は，(4.61) 式を積分し，次のようにして得られる。

$$\int_0^\delta w_z \frac{\partial w_n}{\partial z} dz = [w_z w_n]_0^\delta - \int_0^\delta w_n \left(\frac{w_s \sin \beta}{r} - \frac{w_n \cos \beta}{r} - \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} \right) dz$$

で， $w_n \Big|_{z=\delta} = 0$ ， $w_z \Big|_{z=0} = w_n \Big|_{z=0} = 0$ であるから上式右辺第 1 項は 0 である。また

$$\int_0^\delta \frac{\partial w_n^2}{\partial n} dz = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n^2 dz - W_n^2 \frac{\partial \delta}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n^2 dz$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial (w_n w_s)}{\partial s} dz = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_n w_s dz - W_n W_s \frac{\partial \delta}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_n w_s dz$$

であるから，

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r s \sin \beta} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n^2 dz + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s w_n dz \\
& - \int_0^\delta \left(\frac{w_s^2 \cos \beta}{r} + \frac{2 w_n w_s}{r} \sin \beta - \frac{s \sin^2 \beta}{r} \right) dz \\
& = - \int_0^\delta \frac{W_s^2 \cos \beta}{r} dz - 2 \omega \int_0^\delta (W_s - w_s) dz + \tau_{nz}^* \dots \dots (4.75)
\end{aligned}$$

となる。また s 軸方向には (4.62) 式を積分し、次のようにして得られる。

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta w_z \frac{\partial w_s}{\partial z} dz &= [w_z w_s]_0^\delta - \int_0^\delta w_s \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \\
&= W_s \int_0^\delta \left(\frac{w_s \sin \beta}{r} - \frac{w_n \cos \beta}{r} - \frac{1}{r \sin \beta} \frac{\partial w_n}{\partial n} - \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s}{\partial s} \right) dz \\
\int_0^\delta \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial w_s^2}{\partial s} dz &= \frac{1}{r \cos \beta} \left(\frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s^2 dz - W_s^2 \frac{\partial \delta}{\partial s} \right) \\
\int_0^\delta \frac{1}{r s \sin \beta} \frac{\partial (w_n w_s)}{\partial n} dz &= \frac{1}{r s \sin \beta} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n w_s dz
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s^2 dz + \frac{1}{r s \sin \beta} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n w_s dz - W_s \left(\frac{1}{r s \sin \beta} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^\delta w_n dz \right. \\
& \left. + \frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\delta w_s dz \right) + W_s \int_0^\delta \left(\frac{w_s \sin \beta}{r} - \frac{w_n \cos \beta}{r} \right) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\delta \left(\frac{w_s^2 \sin \beta}{r} - \frac{2w_n w_s \cos \beta}{r} - \frac{w_n^2 \sin \beta}{r} \right) dz \\
& = \frac{W_s}{r \cos \beta} \frac{\partial W_s}{\partial s} \delta - 2 \omega \int_0^\delta w_n dz + \tau_{sz}^* \dots \dots \dots (4.76)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 τ_{nz}^* 、 τ_{sz}^* はそれぞれ壁面における摩擦力である。

さて仮定 1 により主流は円周に対する傾き角 β の軸対称流であるから、次の関係によって $\frac{\partial}{\partial n}$ および $\frac{\partial}{\partial s}$ はいずれも半径 r に関する常微分方程式に変換される。

(4.47)、(4.48) 式より

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r \sin \beta \cos \beta, \quad \frac{\partial r}{\partial s} = -r \sin \beta \cos \beta$$

である。そして軸対称流れの仮定によつて $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ であるから、

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} = r \sin \beta \cdot \cos \beta \frac{d}{dr} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\sin \beta \cdot \cos \beta \frac{d}{dr}$$

となる。(4.77) 式の関係を用いて (4.75)、(4.76) 式を変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \int_0^\delta (w_n^2 \cos \beta - w_s w_n \sin \beta) dz - \int_0^\delta \left(\frac{w_s^2 \cos \beta}{r} + \frac{2w_n w_s \sin \beta}{r} - \frac{w_n^2 \cos \beta}{r} \right) dz \\ &= -\frac{W_s^2 \cos \beta}{r} \delta - 2\omega \int_0^\delta (W_s - w_s) dz + \tau_{nz}^* \quad \dots\dots (4.78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \int_0^\delta (w_n w_s \cos \beta - w_s^2 \sin \beta) dz - W_s \frac{d}{dr} \int_0^\delta (w_n \cos \beta - w_s \sin \beta) dz \\ &+ W_s \int_0^\delta \frac{w_s \sin \beta - w_n \cos \beta}{r} dz - \int_0^\delta \frac{1}{r} (w_s^2 \sin \beta - 2w_s w_n \cos \beta - w_n^2 \sin \beta) dz \\ &= -W_s \sin \beta \frac{dW_s}{dr} \delta - 2\omega \int_0^\delta w_n dz + \tau_{sz}^* \quad \dots\dots (4.79) \end{aligned}$$

32

Magerが示した三次元境界層の基礎式は上式と同様の種類の式であるか偏微分方程式の形で示されており，その解を求めることはきわめて困難である。軸対称で近似することによって上式のように計算が可能となり，近似的ではあるが，定量的解析が可能となる。

なお，(4.77) 式の関係を用いると，主流に対しては，(4.59) 式から $F_s = 0$ であるから

$$-W_s \frac{dW_s}{dr} + r\omega^2 - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = 0$$

すなわち，

$$\frac{1}{2} (W_s^2 - r^2 \omega^2) + \frac{h}{\rho} = \text{const}$$

となる。これは回転座標系に対するベルヌーイの式である。

4.5 計 算 式

4.5.1 境界層内の速度分布

(4.78), (4.79) 式は積分条件式であるから境界層内の速度分布をあらかじめ仮定して, おおのこの積分値を計算しなければならない。

三次元境界層内の速度分布についてはいろいろな提案があるが, 最も信頼しうるデータは *Gruschwitz* が行った静止曲り流路³¹についての実験データ³¹であると思われる。

Prandtl は三次元境界層の速度分布の一般的な形として

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= G\left(\frac{z}{\delta}\right) \\ \frac{w}{U} &= eG\left(\frac{z}{\delta}\right) \cdot g\left(\frac{z}{\delta}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.80)$$

と与えた³³。ただし G, g は

$$\left. \begin{aligned} y = \delta \text{ で } \quad G &= 1, g = 0 \\ y = 0 \text{ で } \quad G &= 0, g = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.81)$$

を満足する任意の関数である。また U は主流速度, u は主流方向の境界層内の速度, w は境界層内の二次流速である。 e は壁面での摩擦応力の方向と主流の方向とがなす角の正接である。

(4.80) 式はいろいろな批判があるが, *Gruschwitz* の実験結果³¹では

$$G = \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7}, \quad g = \left[1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)\right]^2 \quad \dots\dots\dots (4.82)$$

において実験値とよく一致することが確められている。

これらの結果を考慮して, 本論文の計算では境界層内の速度分布を次のよう

に仮定する。

$$\begin{aligned} w_s &= W_s \cdot G(\eta) \\ w_n &= W_s \cdot G(\eta) \cdot g(\eta) \cdot q(r) \end{aligned} \quad \dots (4.83)$$

ただし， $\eta = z/\delta$ で， η は z 軸方向の無次元座標である。

(4.83) 式では，主流方向の境界層内速度分布は半径方向に相似であり，二次流速分布は半径方向に相似な，境界層厚さのみの関数 $G(\eta) \cdot g(\eta)$ と半径 r のみの関数 $q(r)$ との積で表わしてある。なお，(4.83) 式で w_n の右辺の負の符号は主流速度 W_s の正の方向が主流と逆方向を向いているので， n 軸の正の方向の二次流速を正と扱うためである。

(4.83) 式の $G(\eta)$ ， $g(\eta)$ は (4.82) 式を用う。

(4.83) 式で未知量は W_s ， $q(r)$ ， δ である。

図 4.10 は (4.83) 式の境界層内の速度分布を示したもので， $q(r) = 1$ とした寸法比で示してある。

(4.83) 式の速度分布から次の定数が定まる。

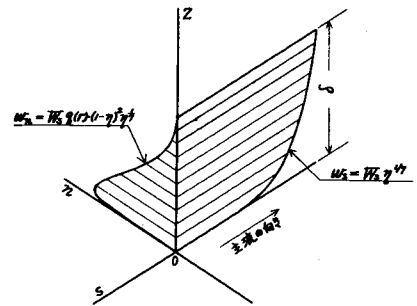


図 4.10 境界層内の速度分布

$$c_1 = \int_0^1 G \cdot g d\eta = 0.2598$$

$$c_2 = \int_0^1 G^2 \cdot g^2 d\eta = 0.1097$$

(4.84)

$$c_3 = \int_0^1 G d\eta = 0.875, \quad c_4 = \int_0^1 G^2 d\eta = 0.7778$$

$$c_5 = \int_0^1 G^2 \cdot g^2 d\eta = 0.2071$$

4.5.2 連続の条件

上述のように未知量は三つであるが，利用しうる方程式は(4.78)，(4.79)式および連続の式である。しかし，(4.64)式で示した微分形式の連続の式はそのままでは計算に利用しにくい。すなわち運動方程式を積分形式に直したので，連続の式もまた積分形式で示す方が便利である。

半径方向の流れが一定となるための条件から次式が得られる。

羽根車入口半径を r_1 とし，他の量の羽根車入口における値に添字1を付すと

$$r_1 W_{r1} h = \int_0^\delta r w_r dz + r(h-\delta) W_r$$

となる。ただし，羽根車幅を $2h$ とする。

$$w_r = -w_s \sin \beta + w_n \cos \beta$$

であるから

$$-r_1 W_{s1} \sin \beta \cdot h = \int_0^h r (-w_s \sin \beta + w_n \cos \beta) dz - (h-\delta) r W_s \sin \beta \quad \dots \dots \dots (4.85)$$

となる。ここで計算を無次元量で行うため，次の無次元量を定める。

$$\begin{aligned} \text{無次元半径} \quad R &= r/r_1 \\ \text{無次元境界層厚さ} \quad \Delta &= \delta/h \quad \dots \dots \dots (4.86) \\ \text{無次元主流速度} \quad U &= W_s/W_{s1} \end{aligned}$$

これらの無次元量を用いると(4.85)式は次のようになる。

$$\Delta = \frac{1 - (1/RU)}{1 - c_3 - c_1 q \cot \beta} \quad \dots \dots \dots (4.87)$$

4.5.3 壁面摩擦力

壁面摩擦力の方向は合速度の壁面での極限の向きと反対の向きに向くべきである。(4.83)式より

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{w_n}{w_s} = q(R)$$

である。したがって

$$\tau_{nz}^* = -q \tau_{sz}^* \quad \dots \dots (4.88)$$

となる。主流方向の壁面摩擦力は *Blasius* が与えた平板乱流境界層における壁面摩擦力に等しいと仮定して、

$$\tau_{sz}^* = 0.0225 \rho W_s^2 \left(\frac{W_s \delta}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad \dots \dots (4.89)$$

とする。ただし ρ は流体の密度、 ν は動粘性係数である。

4.5.4 計算式

(4.78), (4.79), (4.87) 式を用いて未知量 U, Δ, q を R の関数として計算する。

(4.88), (4.89) 式を用いて τ_{sz}^* , τ_{nz}^* を定め、これらを (4.78), (4.79) 式に代入し、これらの式の両辺を W_{s1}^2 / r_1 で除して無次元化すると次のようになる。ただし Δ は (4.87) 式を用いて途中で消去する。

$$q(q c_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta) \{ 1 + 2(RU - 1) \} \frac{dU}{dR} \\ + U \{ q c_1 \cot \beta \cdot RU \cdot (q c_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta) + (2q c_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta)(RU - 1) \} \frac{dq}{dR}$$

$$= -\frac{U}{R} \left[q(qc_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta) + \{ q(qc_2 \cos \beta + 2c_5 \sin \beta) + \cos \beta (1 - c_4) \} (RU - 1) \right. \\ \left. + 2\xi \cos \beta (1 - c_3) (RU - 1) - \frac{qT(RU - 1)}{U} \right] \dots \dots \dots (4.90)$$

$$\frac{1}{U} \left\{ -1 + \frac{(1 - c_4) \sin \beta - c_5 q \cos \beta}{(c_1 - c_5) q \cos \beta + (c_3 - c_4) \sin \beta} \right\} \frac{dU}{dR} \\ + \left\{ \frac{(c_1 - c_5) \cos \beta}{(c_1 - c_5) q \cos \beta + (c_3 - c_4) \sin \beta} - \frac{1}{q} \left(1 + \frac{qc_2 \cos \beta}{qc_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta} \right) \right\} \frac{dq}{dR} \\ = \frac{-2c_5 U q \cos \beta + T(U^2/R) \{ (c_3 - c_4 + c_2 q^2) \sin \beta + (c_1 - 2c_5) q \cos \beta \}}{U^2 \{ (c_1 - c_5) q \cos \beta + (c_3 - c_4) \sin \beta \}} \\ + \frac{1}{R} \left\{ \frac{c_5 \sin \beta + \cos \beta (1 - c_4)/q}{qc_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta} + 1 \right\} - \frac{2\xi (1 - c_3) U \cos \beta - qT}{qU^2 (qc_2 \cos \beta + c_5 \sin \beta)} \\ \dots \dots \dots (4.91)$$

ただし

$$T = \frac{\tau_s^*}{\rho W_{s1}^2 \delta / r_1} = \frac{AU^2}{(U \Delta)^{1/4}} \dots \dots \dots (4.92) \\ A = 0.0225 \left(\frac{r_1}{h} \right) \left(-\frac{W_{s1} h}{\nu} \right)^{-1/4}$$

である。また \$\xi\$ は第 1 節に述べたとおりで，無次元流量である。

4.5.5 初期値

(4.90), (4.91) 式は非線型微分方程式であるから解析的には解けない。したがって電子計算機を用いて *Rung-kutta* 法により，数値解を求めること

になる。

$R=1$ における q, U の初期値を次のように与える。

$$q=0, U=1 \quad \text{at} \quad R=1 \quad \dots\dots (4.93)$$

このように初期値を定めると (4.90), (4.91) 式はいずれも各項が 0 となって数値的にも解は求まらない。すなわち $R=1$ は特異点である。

$R=1$ に非常に近いが $R=1$ ではない場合は $q \neq 0, U \neq 1$ とおくことができ, (4.90), (4.91) 式の十分小さい項を無視すると $R \neq 1$ では次の近似式が成り立つ。

(4.90) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dR} + \left(c_4 q \cot \beta \cdot \Delta + \frac{RU-1}{q} \right) \frac{dq}{dR} \\ = -1 + \frac{2\xi(1-c_3) - (1-c_4)}{c_5} \cot \beta \cdot \frac{RU-1}{q} - \frac{T(RU-1)}{c_5 \sin \beta} \dots\dots (4.95) \end{aligned}$$

(4.91) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1-c_3}{c_3-c_4} \frac{dU}{dR} - \frac{1}{q} \frac{dq}{dR} \\ = \frac{T}{(c_3-c_4) \sin \beta} + \frac{(1-c_4) \cos \beta}{c_5 \sin \beta} \frac{1}{q} - \frac{2\xi(1-c_3) \cos \beta}{q c_5 \sin \beta} + \frac{T}{c_5 \sin \beta} \\ \dots\dots\dots (4.96) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$q = \alpha_1 (RU - 1)^{\frac{5}{4}}$$

$$\frac{dU}{dR} = \alpha_2 (RU - 1)^{-\frac{1}{4}} \quad \dots \dots \dots (4.97)$$

とおくと

$$\frac{RU - 1}{q} = \frac{1}{\alpha_1} (RU - 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{dq}{dR} = \frac{5}{4} \alpha_1 \alpha_2$$

となり, (4.95), (4.96) 式から

$$\alpha_1 = - \frac{(1-c_4) - 2\xi(1-c_3)}{5} \cot \beta \bigg/ \frac{2.25}{c_3 - c_4} + \frac{1}{c_5} \frac{(1-c_3)^{\frac{5}{4}}}{\sin \beta} \quad \dots \dots (4.98)$$

$$\alpha_2 = \frac{(1-c_3)^{\frac{5}{4}} A}{(c_3 - c_4) \sin \beta} \quad \dots \dots \dots (4.99)$$

となる。したがって q , U は $R = 1$ 近傍では分離され, (4.97) 式の第2式から U を定めれば, 第1式を用いて q を求めることができる。

さて (4.97) 式の第2式はやはり解析的には解けない。そこで

$$R = 1 + r^*, \quad U = 1 + u^* \quad \dots \dots \dots (4.100)$$

とおくと, (4.94) 式の第2式は

$$\frac{du^*}{dr^*} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{r^* + u^* + r^* u^*}}$$

$$= \alpha_2 \left(\frac{5}{4} \alpha_2 \right)^{\frac{4}{5}} r^{*\frac{-1}{5}} \left\{ 1 + \frac{r^{*\frac{1}{5}}}{(5\alpha_2/4)^{\frac{5}{4}} + r^*} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

となり, r^* が十分小さい範囲では, $\left\{1 + (5\alpha_2/4)^{-\frac{5}{4}} r^{*\frac{1}{5}} + r^*\right\}^{-\frac{1}{4}}$ はすみやかに収束する級数に展開できる。すなわち,

$$\begin{aligned} u^* = & \frac{4}{5} \times 10^{-10} \times (125c - 0.25 + \frac{1}{c} \times 1.302083 \times 10^{-3} \\ & - \frac{1}{c^2} \times 8.370535 \times 10^{-6} + \frac{1}{c^3} \times 5.95093 \times 10^{-8} \\ & - \frac{1}{c^4} \times 4.49627 \times 10^{-10} + \frac{1}{c^5} \times 3.5408 \times 10^{-12} - \dots) \\ & \dots \dots (4.101) \end{aligned}$$

となる。ただし, $c = (5\alpha_2/4)^{\frac{4}{5}}$ である。

計算では $r^* = 0 \sim 10^{-10}$ の範囲で (4.101) 式を用い, $r^* = 10^{-10} \sim 10^{-5}$ の間は (4.97) 式を用い, それらの結果を (4.90), (4.91) 式の初期値として用いた。

4.6 計算結果および計算結果に対する考察

ξ , $H = h/r_1$, W_{s01} , ν , β の五つの変数によって異なった計算結果を与える。しかし $U(R)$, $q(R)$, $\Delta(R)$ の曲線はこれらのパラメータのいろいろな値に対して同じ傾向となる。

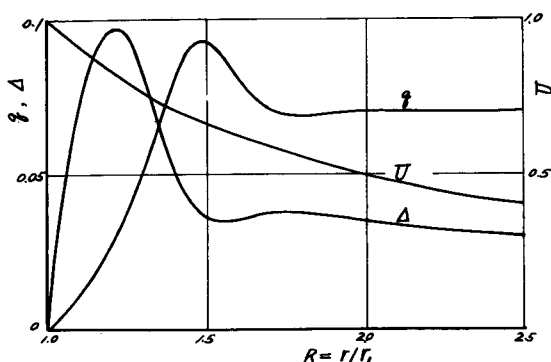


図 4.11

$U(R)$, $q(R)$, $\Delta(R)$ の
計算結果

$$H = 20/3, W_{s01} = -350 \text{ m/s}$$

$$\beta = 30^\circ, \xi = 2$$

$$\nu = 1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

図 4.1.1 は計算結果の代表例で， $\xi=2$ ， $H=\frac{2.0}{3}$ ， $W_{s01}=-3.50\text{ m/s}$ ， $\beta=30^\circ$ ， $\nu=1.31\times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ （ 10°C の水）の場合である。

$U(R)$ 曲線はほぼ $1/R$ によって近似でき，主流速度は非粘性流れの場合に非常に近い。

U ははじめ $U>1/R$ であるが途中で $U=1/R$ となり以後は $U<1/R$ となる。

$U>1/R$ の場合は二次流れ量が小さく，境界層内の半径方向速度の積分値の減少分だけ，主流速度が非粘性流れの場合より大きくなる場合である。二次流れの増大とともに境界層内の半径方向速度の積分値は非粘性流れの場合の同じ厚さ内での半径方向流量に近ずき U と $1/R$ の差が小さくなる。

さて三次境界層の場合の遠心羽根車の二次流れはコリオリの力と流線の曲りによる，流線に直交する方向の遠心力によって発生するものと考えてよい。

静止曲り流路においてはコリオリの力はないから，二次流れは流線の曲りによる遠心力のみによって発生する。そして静圧は主流部と境界層内とで等しいから，主流に直交する方向の静圧のこう配もまた，主流部と境界層内で等しくなければならない。主流部の流速ははじめは境界層内の流速より大きく，遠心力は速度の二乗に比例し，曲率半径に逆比例するから，境界層内の流線の曲率半径は主流のそれよりも小さくなければならない。したがって静止流路の場合には本節に述べたと同じ座標系，境界層内速度分布を仮定すれば， $q<0$ となる。

回転流路ではコリオリの力がはたらき，コリオリの力は流線の曲りによる遠心力と逆の方向にはたらく。普通はコリオリの力の方が遠心力よりも強いので二次流れの発生の向きは静止流路の場合と反対になる。

静止流路では $q<0$ となるので主流速度は $1/R$ よりはるかに大きくなり，境界層厚さは減少することはない。

ξ は図 4.1.1 に示したようにはじめ急に増大するが途中で最大値に達し，以後は減少する。そして R のある値以上ではほぼ一定とみなしうるようになる。

q の減少は q の増大を妨げる壁面摩擦力のためであり， $\tau_{nz}^* = 0$ とおいて計算するときは q に減少はおこらない。 q の増大とともに境界層内の合速度は主流部のそれより大きくなるが，それまでに境界層内の速度の向きは主流の向きと十分にくい違うので，これに加わる遠心力，コリオリの力の主流に直交する方向の成分は小さく二次流れの減少にはあまり寄与せず，境界層厚さの減少の方に大きく作用することになる。

境界層厚さ Δ も，発達のはじめの部分では厚さを増すが，二次流れ量の増大にともなう発達速度が鈍り，最大厚さに達した後，断面縮小流路の場合のように減少する。

主流方向の力の釣合いを考えると主流部分では慣性力，回転による遠心力，静圧差がつり合っているが，境界層内ではこれらの力のほかに壁面摩擦力と二次流れの発生にともなう，主流に直交する流れに加わるコリオリの力と，流線の曲がりによる遠心力とが加わる。これらのうち，壁面摩擦力と遠心力は主流と反対の向きにはたらくが，コリオリの力は主流と同じ向きにはたらく。これらの境界層内の主流方向の力の差は慣性力，したがって積分条件式における流れの方向の運動量の変化とつり合わなければならない。

回転流路においてはコリオリの力が壁面摩擦力と遠心力の和よりも大きくなることもあり，この場合は主流方向の運動量が増加しなければならない。そしてこの場合は主流方向の境界層内の速度分布を相似と仮定しているので境界層厚さが減少することになる。主流方向の境界層内の速度分布を相似としなければ主流方向の運動量の増加は，境界層厚さの減少と，速度分布が太ることによってつり合わせられる。速度分布が太ることの効果の方が大きい場合は境界層厚さは減少しないですむ。しかし速度分布が太ることの効果は $G = \eta^{1/m}$ の指数 m が 7 以上に増大してもそれほど大きくはない。したがって遠心羽根車シェラウド面に沿う境界層では，境界層厚さが減少することは必然的であると考えられる。

なお Δ が最大値をとるのは $RU - 1 = 0$ となる点とは一致しない。

q の符号については先述のとおりほとんど $q < 0$ となって二次流れは羽根圧力面側から負圧面に向かう向きに生ずるが、この結果は後述のとおり、筆者の実験結果ばかりでなく、他の研究者による実験結果とも一致している。しかし $R = 1$ 近傍では必ずしも常に $q > 0$ ではなく、 ξ がある値より小さいときは $R = 1$ 近傍で $q < 0$ となる。

(4.98) 式より $\xi < (1 - c_4) / 2(1 - c_3)$ の場合には $\alpha_1 < 0$ となり、したがって $q < 0$ となる。 $-(1 - c_4) \cos \beta (U^2/R)(RU - 1)$ は $\int_0^\delta (W_s^2 - w_s^2) \cos \beta dz$ を無次元化して得た項で、これは主流流線の曲りによる、主流に直交する方向の遠心力を代表し、 $2\xi(1 - c_3) \times (RU - 1) U \cos \beta$ は $2\omega \int_0^\delta (W_s - w_s) dz$ を無次元化して得た項で、これは主流に直交する方向のコリオリの力を代表する。二次流れを誘起する主な力はこれら二つで、流量が大きい場合、羽根車入口では遠心力の方がコリオリの力よりも大きくなる。この場合は $q < 0$ となるが、遠心力は上述のとおり U^2/R 、したがってほぼ $1/R^3$ に比例するのに反し、コリオリの力は U 、したがって、ほぼ $1/R$ に比例するので、 $R = 1$ 近傍で $q < 0$ となっても短い距離の間で $q > 0$ になる。

図 4.12 は二次流量 q の R による変化を示したもので、(a) は $\beta = 30^\circ$ の場合、(b) は $\beta = 45^\circ$ の場合である。ただし q は半径 R の円周上の二次流量を、そのときの吐出量で除した無次元量である。すなわち

$$q = \frac{r \int_0^\delta w_n dz}{-W_{s1} \sin \beta r_1 h} = \frac{q c_1 \Delta RU}{\sin \beta}$$

である。図 4.12 は $H = h/r_1 = 20/3$, $W_{s01} = -3.50 \text{ m/s}$, $\nu = 1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (10°C の水) の場合である。

図 4.12 に示すとおり $\xi = 0.8$ の場合には $R = 1$ 近傍では $q^* < 0$ となっている。

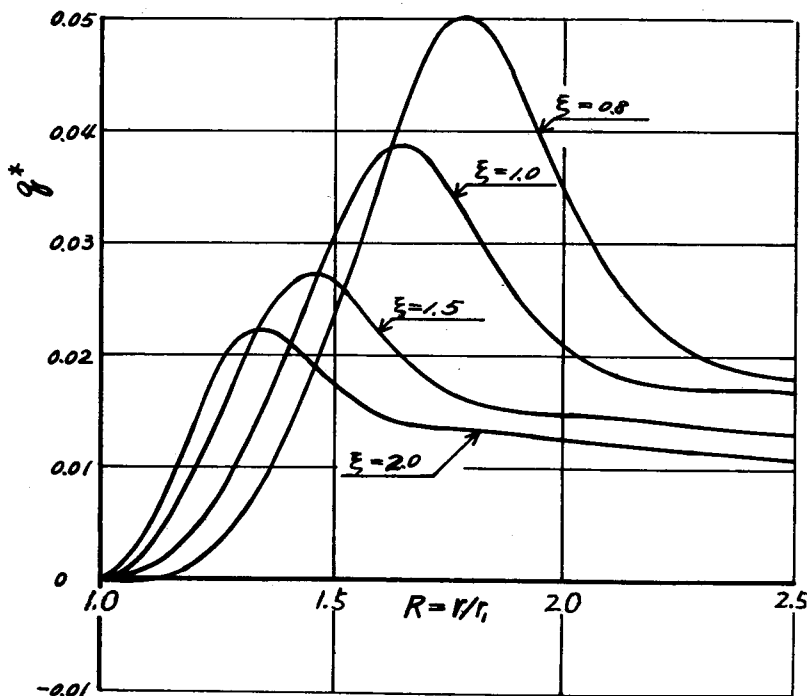
ξ については先に述べたが、流量係数 ϕ と R との間には (4.27) 式の関係

があるので、 ξ = 一定の曲線上で、横軸 R に対する値は同時に、半径比が R なる羽根車について、(4.27) 式で与えられる ϕ なる流量係数の場合の羽根車出口における値を与えることになる。

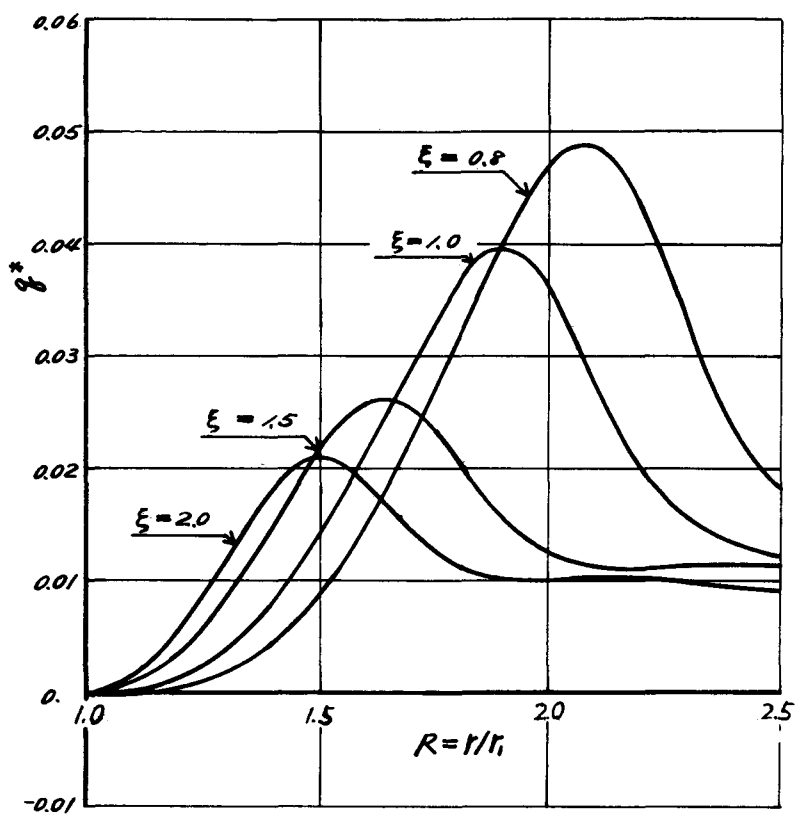
同じ条件で回転数を変えた場合の計算結果の一例を図 4.13 に示す。図 4.13 は $\xi = 1$ 、 $\beta = 30^\circ$ 、 $H = r_1/h = 20/3$ 、 $\nu = 1.31 \times 10^{-6}$ (10°C の水) の場合で、実線は $W_{s01} = -3.50 \text{ m/s}$ 、破線は $W_{s01} = -1.00 \text{ m/s}$ である。図に示すように両者にほとんど差はない。

図 4.12 は二次流量であるが、これは第 1 節、第 2 節で述べた二次うず度と直接関係はない。計算に仮定した速度分布から二次うず度を求めることは適当でないので、二次うず度 ΩW および相対全水頭のこう配 $\frac{d(l/\rho)}{dz}$ を次式で定義する。

$$\Omega W = \frac{\int_0^\delta w_n dz}{\frac{1}{2} \delta^2} = - \frac{2W_s}{\delta} q c_1 \quad \dots \dots (4.102)$$



(a) $\beta = 30^\circ$



(b) $\beta = 45^\circ$

图 4.1.2 二次流量

$$\left(H = \frac{h}{r_1} = \frac{2.0}{3}, \quad W_{s01} = -350 \text{ m/s} \quad \nu = 1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \right)$$

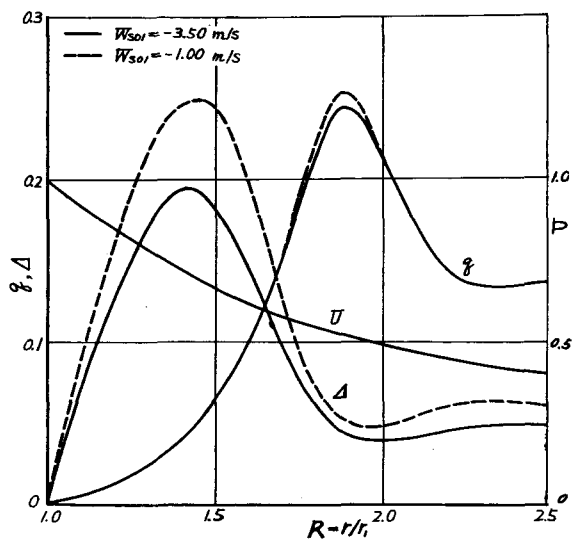


図 4.13

回転数を変えた場合の計算例

$$H = \frac{r_1}{h} = \frac{20}{3}, \quad \beta = 30^\circ$$

$$\xi = 1,$$

$$\nu = 1.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

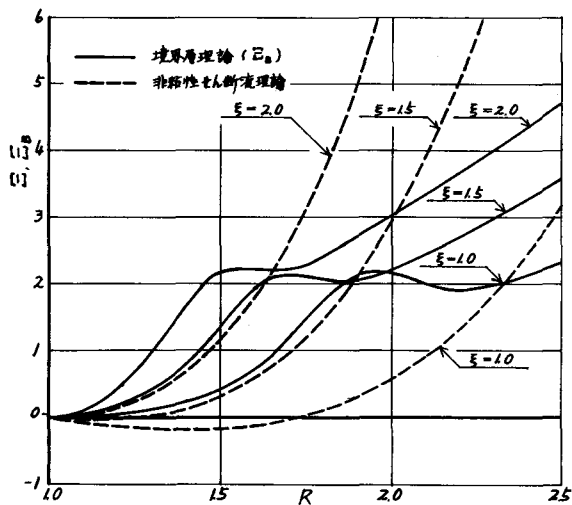


図 4.14

二次うず度

(非粘性せん断流れ理論と，
境界層理論の比較)

$$\frac{d(I/\rho)}{dz} = \frac{\int_0^\delta \left(\frac{1}{\rho}\right) dz}{\frac{1}{2} \delta^2} \div \frac{\int_0^\delta \frac{1}{2} w^2 dz}{\frac{1}{2} \delta^2} = \frac{W_s^2}{\delta} (q^2 c_2 + c_4) \quad \dots\dots (4.103)$$

上式は境界層内の二次流速，相対全水頭が，壁面から境界層外縁まで直線的に変化するものと仮定することと等価である。

(4.102)，(4.103) 式を用いて無次元二次うず度 Ξ_B を定義すると次のようになる。

$$\Xi_B = \frac{\frac{\Omega W}{u} \frac{1}{dz} \frac{d(I/\rho)}{dz}}{2 c_1 q R \xi U} = \frac{2 c_1 q R \xi U}{(q^2 c_2 + c_4) \cos \beta} \quad \dots\dots (4.104)$$

図 4.14 は (4.104) 式の Ξ_B と非粘性せん断流れによる計算値 Ξ とを比較したものであり，実線は Ξ_B ，破線は (4.26) 式から求めた Ξ である。

(4.104) 式と (4.26) 式の無次元二次うず度は厳密に対応するものではないから，それらの定量的な比較は意味がないが，定性的には両者が一致することがわかる。非粘性せん断流れ理論では壁面摩擦を考慮することができないので， Ξ はなめらかに増加する。

図に示すとおり二次うず度については無次元流量 $1/\xi$ が小なるほど大であるが，二次流量は図 4.12 に示したとおり $1/\xi$ が小なるほど小である。すなわち二次うず度のみでは二次流れの現象のすべてを説明することはできない。

さらに図 4.14 の実線と破線は，二次うず度，相対全水頭の定義が異なっているとはいえ，数値的には大きな差がある。このことは非粘性せん断流れ理論をシュラウド境界層の二次流れに適用することの困難さを示している。

次に境界層の発達にともなう流れの損失について簡単に考察する。はじめに述べたようにここに行った解析ではエネルギーの条件は満足されないので損失を

評価するのは困難である。

流体から羽根車に加わる力は質量力とシュラウド面の摩擦力である。それらの周方向成分をそれぞれ F_θ, τ_θ とすれば、車軸に加わるモーメントは

$$M = 2 \times 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 (\tau_\theta + F_\theta h) dr$$

である。したがって車軸に供給すべき動力 N は

$$N = M\omega = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 (\tau_\theta^* + F_\theta h) dr$$

となる。ただし r_1, r_2 はそれぞれ羽根車入口、出口半径である。

さて、

$$\tau_\theta^* = \tau_{sz}^* \cos\beta - \tau_{nz}^* \sin\beta = \tau_{sz}^* (\cos\beta - q \sin\beta)$$

$$F_\theta = F_n \sin\beta + F_s \cos\beta$$

である。 F_n, F_s は (4.58), (4.59) 式から求められ、

$$F_\theta = -\sin\beta \cdot \cos\beta \left(W_s \frac{dW_s}{dr} + \frac{W_s^2}{r} + 2\omega W_s \right) \dots\dots (4.105)$$

となる。動力 N がすべて水のエネルギーに変換されるとき、この水頭 H_t が理論水頭 (input head) である。すなわち、吐出量を Q とし、流体の比重量を γ とすると

$$H_t = \frac{N}{\gamma Q}$$

である。 H_t を u_1^2/g で除した無次元量 ψ_t' で表わすと

$$\psi_t' = \left\{ 4 \int_1^{R_2} R^2 U dR - \frac{1}{\xi} (K_2^2 U^2 - 1) \right\} \\ + \frac{1}{\xi \cos \beta \cdot \sin \beta} \int_1^{R_2} R^2 (\cos \beta - q \sin \beta) T \Delta dR \dots (4.106)$$

となる。ただし T は (4.92) 式に示したとおりである。

(4.106) 式の右辺 { } 内は質量力による入力水頭であり、第2項はシュラウド面摩擦力による入力水頭である。先に第2章で、損失の評価の際にシュラウド面摩擦による羽根作用を無視したが、(4.106)式のシュラウド面摩擦による水頭は、質量力による水頭の0.5%以下となり、先の仮定は正しいといえる。

さて羽根車入口、出口間での増加水頭 H_r は

$$hH_r = \int_0^h \left(\frac{p_s}{r} + \frac{c^2}{2g} \right)_2 dz - \int_0^h \left(\frac{p_s}{r} + \frac{c^2}{2g} \right)_1 dz \dots\dots (4.107)$$

である。ただし添字1, 2は羽根車入口, 出口に対する量であることを示す。

また p_s は静圧, c は絶対速度である。

p_s/r は回転座標系に対するベルヌーイの式から求められる。

すなわち

$$\frac{p_{s2}}{r} - \frac{p_{s1}}{r} = \frac{W_{s2}^2 - W_{s1}^2}{2g} - \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}$$

で, u は回転周速度である。

(4.106) 式を u_1^2/g で除した無次元水頭 ψ_r' で表わすと,

$$\psi_r' = (R^2 - 1) + \frac{U^2}{2\xi \cos^2 \beta} \left(q^2 c_2 - \frac{2}{9} \right) \\ - \frac{RU}{\xi \cos \beta} \left[\cos \beta - \{ (1 - c_3) \cos \beta - c_1 \sin \beta \} \Delta \right] + \frac{U}{\xi} \cdots (4.108)$$

となる。上式で Δ を含む項はいずれも境界層の効果を表わす項であるが、これらは他の項に比べて十分に小さい。

$\psi_i - \psi_r'$ が無次元損失水頭となるが、この計算結果は境界層厚さが減少する部分で、わずかではあるが負となる部分がある。

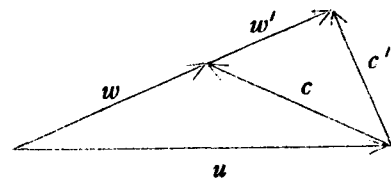
これは明らかに矛盾であるが、これは解析に用いた基礎式が運動量式であり、エルギーの関係を満足していないからである。そしてこの誤差は回転流路の場合とくに大きくなる。

運動量式では境界層内の速度の一乗の積分量については誤差を生じないが、速度の二乗の積分量については正しいとは限らない。しかし速度の一乗あるいは二乗の積分量に関係する損失の誤差はそれほど大きいものではなく、本計算で損失の評価に誤差が生じるのは主として以下に述べるような、回転流路に特有な理由によるものである。

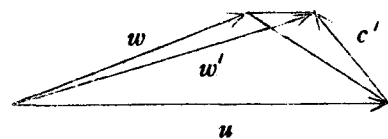
回転流路では先に示したように二次流れは主流流線の曲率よりも、境界層内の流線の曲率の方が大きくなるような向きに発生する。

そして二次流量がある量を越えると主流速度の減少は非粘性流体の場合の減速よりも大きくなる。

主流速度の減速はベルヌーイの定理によって静圧の増加となる。回転流路では主流速度の減少は図 4.15 (a) に示すように絶対速度の増加を誘起することがありうる。全水頭は静圧水頭と絶対速度水頭の和であるから、主流速度の減少は全水頭の増加となることがありうる。静止流路では主流速度の減少はそのまま速度水頭の減少となつて、ベルヌーイの式は主流部で常に満足されるので主流部でのエネルギーの増減はなく損失の評価には誤差を生じない。



(a)



(b)

図 4.15

また二次流れの発生は、遠心羽根車では図 4.15 (b) に示すように絶対速度の増加となるので全水頭は大きくなる。ところが二次流れの発生は(4.105)式から明らかなように軸トルクの減少をもたらす。(4.105)式の周方向の力は力の関係のみで定めたものでこれはエネルギーの条件を満足するものではない。

以上に考察したとおり回転流路では運動量式を用いて境界層を解析すれば水頭損失の評価には大きい誤差を生ずる。

第5節 実 験

5.1 従来の実験結果

羽根車の相対流を測定した多くの研究者が二次流れに関する考察を述べているが、G.O. Ellis²⁷⁾ のほかはすべて定性的説明のみである。

Hamrick¹⁷⁾ は羽根車内の相対流を測定し、羽根車流路間の損失分布を求め、損失の大きいところはエネルギーが低い領域であるから、損失の大きいところは

エネルギーが低い領域であるから，損失の少ない高エネルギーの領域から流体が流れ込み，二次流れを誘起すると述べているが，この説明は十分でない。

なぜならば，流体のもつエネルギーは第2章で計算したとおり，絶対流の全水頭について云えば，ポテンシャル流れにおいてすでに羽板車流路間の分布は一樣でないからである。また相対全水頭の小さい方へ二次流れが生ずると説明する方法も根拠がない。しかし二次流れが発生する為に相対全水頭のこう配が必要であることは前節までの解析によって明らかである。

藤江¹⁹は損失の分布が一樣でないことが二次流れを誘起することを指摘し，相対流速分布から二次流線を定性的に求めているが，これも定量的解析ではない。藤江が得た二次流線は図4.16(a)に示すとおりである。

Ellis²⁷は三つの半径の円周上で，相対全水頭と二次流速の分布を測定し，二次うず度を求め，先に述べたベクトル解析の理論値と比較した。この報告に述べられている二次流れは流路幅全体に及ぶ相対全水頭のこう配によって生ずるもので，シュラウド面境界層の発達による二次流れについては述べていない。

前記二つの報告においては，二次流線を求めてはいるが，その発生原因を分析して求めたものではなく，Ellisもまたシュラウド面境界層の発達による二次流れを別に解析しなければならないことは考慮していない。

Ellis²⁷が実験に用いた羽根車は斜流羽根車であり，流れは羽根車入口部では軸方向からなめらかに半径方向に転向し，流線の曲率はケーシング側が大であるから損失もケーシング側に大きい。したがって羽根車出口における二次

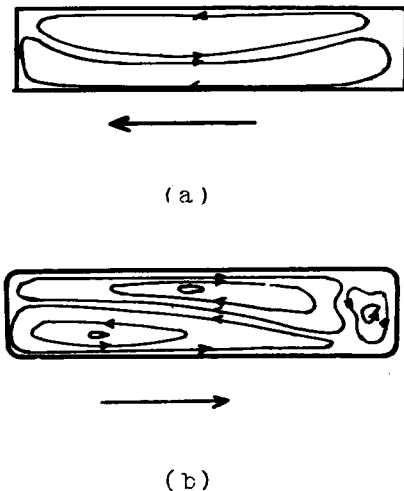


図 4.16 二次流線

(a) 藤江¹⁹の実験結果

(b) Ash⁴⁶ //

うず度ベクトルは外向きとなっている。

また Ellis は Ash⁴⁶ が求めた二次流速から二次流線を求めており，その結果は図 4.16 (b) に示すとおりである。

図 4.16 はいずれもシュラウド面近傍の二次流れの向きは羽根圧力面から負圧面に向かっている。この実験結果は第 4 節の理論解析の結果と一致する。

5.2 筆者の実験結果

5.2.1 実験装置

二次流れの測定に用いた実験装置は第 3 章の実験装置と同じである。

羽根車は幅一定で，羽根角 30° の対数らせん羽根である。羽根枚数は 4 枚，および 6 枚である。

また羽根車後方の測定点の配置は図 4.17 に示すとおりである。

5.2.2 実験結果

図 4.18 (a), 4.19 (a) は羽根一ピッチ間の二次流速および相対全水頭の分布である。

図 4.18 は羽根枚数 4 枚，流量数は $\phi = 0.210$ であり，図 4.19 は羽根枚数 6 枚，流量係数 $\phi = 0.195$ の場合である。

二次流速 w_n は羽根車幅方向の平均流線に直交する方向の速度で

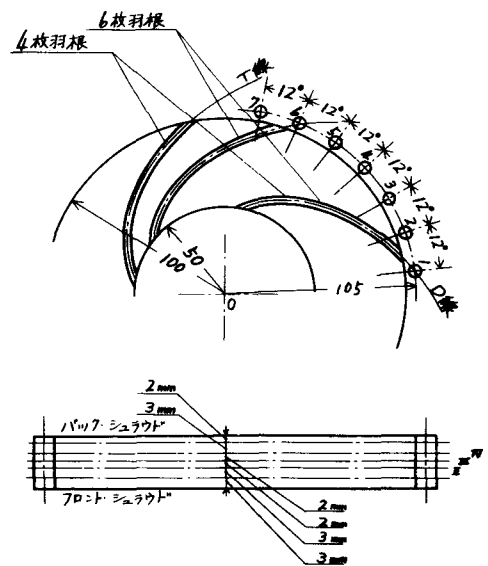
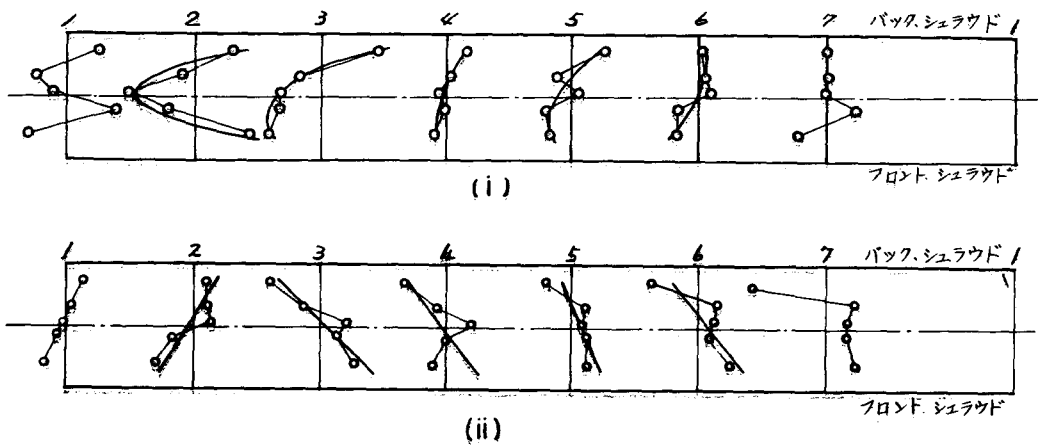


図 4.17 測定点の配置

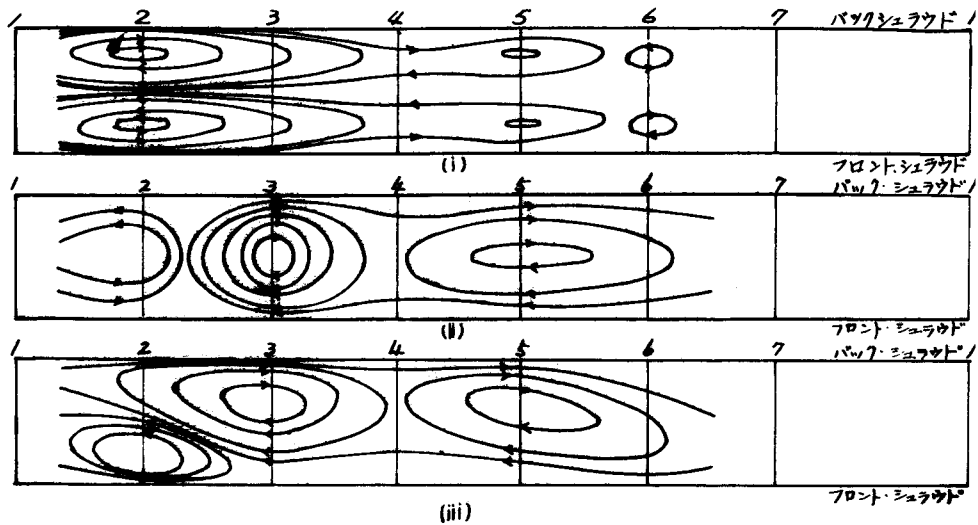
$$w_n = w_\theta \sin \beta_m + w_r \cos \beta_m$$

より求めた。ただし、 w_θ は相対流速の周方向成分で、羽根車の回転方向を正としている。 w_r は相対流速の半径方向成分であり、 β_m は流れ角の羽根車幅方向の平均値である。 β_m は測定点 No 1 ~ No 7 でそれぞれ異なった値をとる



(i) 二次流速分布
(ii) 相対全水頭分布

図 4.18 (a)



- (b) 二次流線 (i) シュラウド境界層二次流線
(ii) 相対全水頭の勾配による二次流線
(iii) 全二次流線

図 4.18 二次流速，相対全水頭分布および二次流線

($N=4$, $\beta=30^\circ$, $r_2/r_1=2$, $R^*=1.05$, $\phi=0.211$)

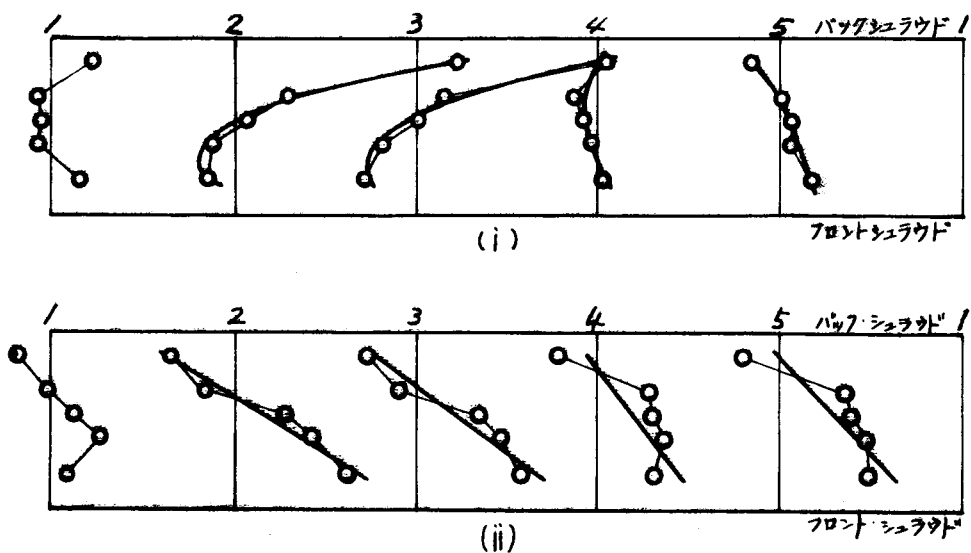
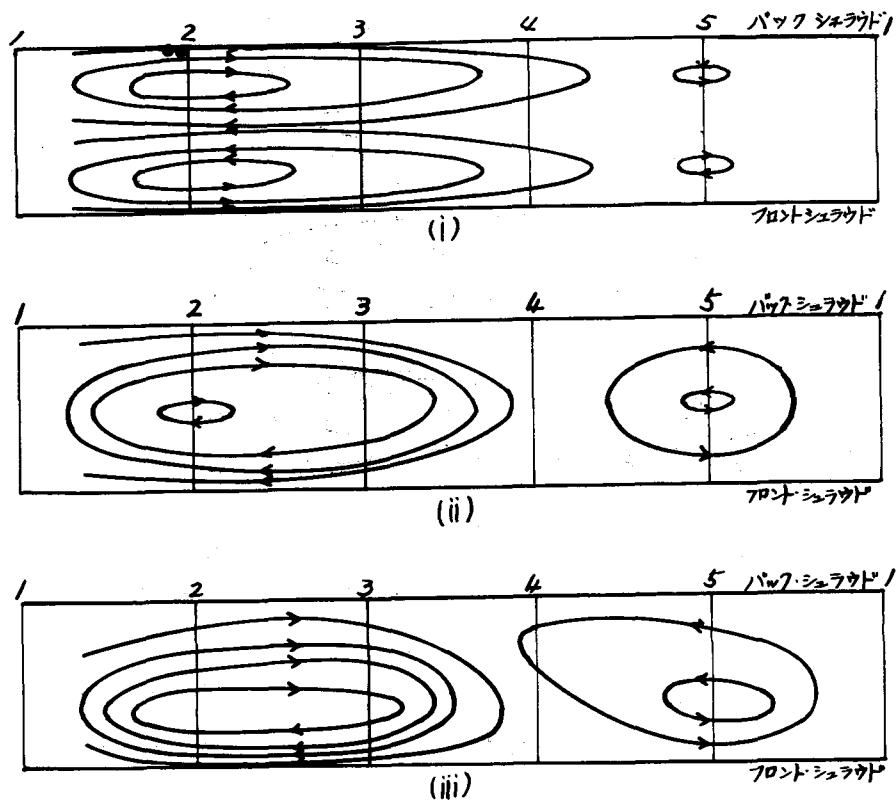


図 4.19 (a) (i) 二次流速分布， (ii) 相対全水頭分布



(b) 二次流線

(i) シュラウド境界層二次流線

(ii) 相対全水頭のこう配による二次流線

(iii) 全二次流線

図 4.19 二次流速，相対全水頭分布および二次流線

$$(N=6, \beta=30^\circ, r_2/r_1=2, R^*=r/r_2=1.05, \phi=0.195)$$

図に明らかなように筆者の実験では損失はバックシュラウド側に大きいが、これは実験に用いた羽根車が純ふく流羽根車で、羽根車入口部での流れの向きの転向が急であるから流体慣性のためにバックシュラウド側での流速が大きくなるためと解される。相対全水頭のこう配による羽根車出口での二次うず度ベクトルの向きは内向きとなっており、これは *Ellis* の場合と反対である。

流路間二次流れが羽根車入口における相対全水頭のこう配によるものと、シュラウド面境界層の発達によるものにわけられることを考慮し、両者を分離することを試みる。

いま w_n 曲線を二次曲線で近似し、その係数を測定値から最小二乗法によって決定する。すなわち、

$$w_n = mz^2 + nz + l \quad \dots\dots (4.109)$$

とおく。ただし z は幅方向の座標で羽根車幅中心を $z = 0$ とする。

図 4.18(a), 4.19(a) に示した実線の曲線は最小二乗法で求めた回帰曲線である。

$mz^2 + l$ の流速は羽根車幅中心に対して上下対称に分布し、これによる二次流線もまた、羽根車幅中心に対して対称となる。

これを羽根車シュラウド面境界層による二次流線と考える。この流れのみによる二次流線は図 4.18, 4.19 の (b), (i) のようになる。図の横方向の番号 1, 2 …… 7 は図 4.17 の測定番号 1, 2 …… 7 に対応する。

流線は次のようにして決定した。

z 方向の流速を無視すれば二次流

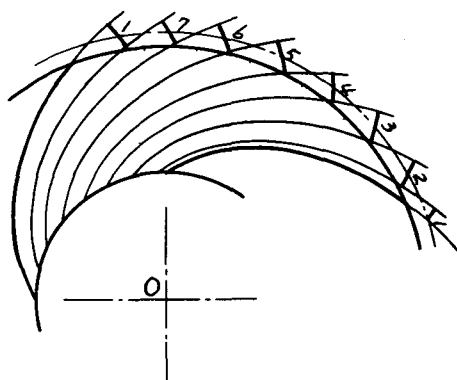


図 4.20 二次流線を考える断面

れの流れ関数を ψ_1 とすると

$$w_n = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$$

であるから

$$\psi_1 = \int_0^z w_n dz = \frac{m}{3} z^3 + l z + c_1 \quad \dots \dots \dots (4.110)$$

となる。ただし c_1 は常数で $z = \pm h$ で $\psi_1 = 0$ なるように定める。

すなわち $c_1 = 0$ である。二次流線は測定点 1~7 での ψ_1 の等しい点を結んだ曲線として画いてある。このようにして求めた流線は図 4.20 に示すように、おのおのの測定点で流線に直交する断面の流れを一つの面に投影して流線をつなぎ合わせたもので、連続した面内の流れではないことに注意すべきである。二次流線のこのような画き方は羽根車の二次流線の場合は止むを得ない。従来の実験報告の中には一定半径の円周面内での流線を二次流線と扱う報告もあるが、これは周方向成分から求めたことになり、二次流線とはいえない。

次に、 nz の二次流速による二次流線は羽根車幅全体で閉じた流線となり、これは相対全水頭の幅方向のこう配による二次流線と考えられる。図 4.18, 4.19(b), (ii) はこの流れのみによる二次流線を示している。流線の求め方は先の ψ_1 と同様で、この二次流れの流れ関数を ψ_2 とすれば

$$\psi_2 = \frac{n}{2} (z^2 - h^2) \quad \dots \dots \dots (4.111)$$

である。

ψ_1 と ψ_2 の和は全二次流れ関数を表わし、その流線は図 4.18, 4.19(b), (iii) のようになる。

羽根枚数 4 枚の場合も 6 枚の場合も羽根圧力面側では強い二次流れが認められる

が，負圧面側ではそれほど強くなく二次流線は乱れる。このことは図 4.16

(b) に示した Ash の二次流線でも同様である。

シュラウド面境界層による二次流線はシュラウド面近傍で羽根圧力面から負圧面に向かっており，これは先の理論的考察と一致する。その数値的な比較は次のようになる。

二次流量を Q_s とし， Q_s を

$$Q_s = \frac{1}{2} \int_0^h m_z^2 dz \quad \dots \dots (4.112)$$

で近似する。ただし h は羽根車の半幅で， $\int_0^h (m_z^2 + 1) dz$ は 0 である。

Q_s をそのときの吐出量で除した無次元二次流量 q^* を計算すると表 4.1 のようになる。

表 4.1 で v_s は

$$v_s = Q_s / h$$

で定義される羽根車幅方向の平均二次流速である。また c_r はその点の平均径方向流速である。したがって

$$q^* = \frac{v_s}{c_r} \quad \dots \dots (4.113)$$

である。先の理論計算による値はほぼ $q^* = 0.04$ であるから，実験値には大きなばらつきはあるが，4 枚羽根の場合はほぼ同じ程度の大きさであり，6 枚羽根の場合は実測値がやや大きい程度である。したがって先の軸対称流を仮定した理論計算が，ほぼ定量的な近似値を与えるものと結論される。

次に相対全水頭の羽根車幅方向のこう配による二次うずについて考察する。

この種の二次うずのうず度 Ω_w を $w_n = nz$ から

$$\Omega_W = \frac{dw_n}{dz} = n$$

と考える。また相対全水頭のこう配， $\left. \frac{d(I/\rho)}{dz} \right|_{r=r_2}$ を測定点（ $r/r_2 = 1.05$ の円周上）のそれで近似する。相対全水頭の測定値は先に図 4.18，4.19 で示したが，そのこう配を，これらの測定値を直線とみなして最小二乗法によって求める。この回帰直線が図 4.18，4.19 (a)，(ii) に示した直線である。

二次うず度を (4.26) 式で示した無次元二次うず度で表わす。

すなわち，

$$\varepsilon_E = \frac{\Omega_W}{\frac{1}{u_2} \left. \frac{d(I/\rho)}{dz} \right|_{r=r_2}} \quad \dots \dots \dots (4.114)$$

とする。

表 4. 1 二次流量の実験値

(a) $N=4$, $\beta=30^\circ$, $\phi=0.211$

測 定 点	2	3	4	5	6
v_s m/s	0.0467	0.0189	0.0033	0.0070	- 0.0044
c_r m/s	0.562	0.418	0.468	0.364	0.402
q^*	0.083	0.044	0.407	0.019	- 0.011

(b) $N=4$ $\beta=30^\circ$, $\phi=0.195$

測 定 点	2	3	4	5
v_s m/s	0.0581	0.0475	0.0122	- 0.006
c_r m/s	0.560	0.402	0.427	0.569
q^*	0.104	0.118	0.029	- 0.010

表 4. 2 二次うず度の実験値

(a) $N=4$ $\beta=30^\circ$ $\phi=0.211$

測 定 点	2	3	4	5	6
Ω_s 1/s	4.2	-10.2	-3.2	-5.6	-4.0
$\frac{d(I/\rho)}{dz}$	1.19	-2.00	-1.76	-0.95	-1.56
E_E	0.76	1.09	0.39	1.26	0.55

(b) $N=4$ $\beta=30^\circ$ $\phi=0.195$

測 定 点	2	3	4	5
Ω_s 1/s	33.9	32.6	-2.1	-8.7
$\frac{d(I/\rho)}{dz}$	6.38	5.43	3.10	4.03
E_E	1.13	1.28	-0.14	-0.45

表 4.2 は実験結果から計算した無次元二次うず度である。

6枚羽根の場合は羽根負圧面に近い領域でうずベクトルの向きが理論と逆になる。しかし図 4.18, 4.19 に示した二次流線から明らかなように、全体としては理論と実験は一致している。

うず度の強さについては理論値は $\beta \div 3.0$ の程度であるから、実験値は理論値に比べてやや小さい。そして実験値から (4.26) 式は、補正係数 2.0 ~ 2.5 で除すべきであることがわかる。この程度の補正係数は、基礎流れがきわめて理想化された一次元軸対称流れであることを考えれば全くやむをえない。

実験結果によれば、羽根圧力面近傍では、ここに用いた、理想化した基礎流れの計算は、実際の現象をよく近似していることがわかる。しかし、羽根負圧面近傍では二次流れは、計算の仮定に用いた流れのように整然としていないようである。負圧面近傍における二次流れの乱れは *Ash* の実験でも認められる。⁴⁶

5.3 む す び

二次流れ理論の最終的な目的は二次流れによる流れの損失を求めることにあ
る。静止曲り流路における二次流れの研究は、遠心羽根車の流路面二次流れの
研究よりはるかに詳細に検討されているが、それでもなお二次流れ損失の理論
的評価は現在のところ不可能である。たとえば主流に直交する断面内の二次流
れ流れによる運動エネルギーがすべて損失となるものと考えても、静止翼列間
流路の場合、二次流れ損失は全損失の 1% 以下となる。ところが実際には、軸
流羽根車流路間の二次流れによると考えられる損失は全損失の 30% 以上にも
およぶと考えられている。すなわち、損失の評価に関する限り、従来の非粘性
せん断流の扱いによっては理論的には求まらない。しかし静止曲り流路におけ
る従来の理論的考察によって、少なくとも二次流れの定性的性質については非常
に多くの知識が加えられた。

本節に述べた実験結果が先の理論解析の結果と厳密には一致しないが、実用

には十分な程度に一致することは，本章で行った解析に意味があったと考えてよい。

ところで，遠心羽根車については羽根車流路間の流れ相対流としての測定がたびたび行われたにもかかわらず，二次流れと基礎流れの分離はほとんど行われておらず，二次流れに関する実験データは損失ばかりでなく，基礎的な部分についてもまったく不足している。

本章の解析はそれらに手がかりを与える基礎的な近似解であって，もちろん全面的な解答を与えるものではないが，今後の実験データの集積が進めば，遠心羽根車二次流れのより正確な知識が得られるであろう。

第6節 結 論

本章では遠心羽根車流路間二次流れの最も基本的な定量的解析を行うために基礎流れを一次元軸対称流れと理想化した。それにもかかわらず，理論解析の結果は実験値を十分に近似しうる値を与えるものとなった。

解析に先立って，遠心羽根車の流路間二次うずの発生原因は二つの原因にわけられることを指摘した。すなわち，

1. 羽根車幅方向の相対全水頭のこう配によるもの。これは羽根車に流入する流れが羽根車幅方向に一樣でないために生じる。

2. シュラウド面に発達する境界層によるもの。

であり，二次流れはその発生原因によって取扱いを変えなければならない。

上記の1は非粘性せん断流れのベクトル解析およびうず糸追跡法によって解析し，2は境界層理論によつて解析した。

その結果を要約すると次のとおりである。

1. 非粘性せん断流れ理論によつて，回転曲り流路の二次うずの強さを表わす一般式を導き，二次うずの発生原因を考察した。それによれば，二次うずは

- (i) 流路が曲っていること
- (ii) 流路が回転しているためにうず糸が羽根車に対して相対的に回転すること。
- (iii) 流路が曲っているために軸の回転角度ベクトルの流線方向成分が変化すること。

によって生ずる。(iii)は遠心羽根車では0と近似することができ、(i)と(ii)は後向き羽根では互いに打ち消し合う。

2. 一般式を、基礎流れが一次元軸対称流であるという仮定を用いて遠心羽根車流路間二次うずの強さの計算式になおした。この計算式によれば二次うずの強さは流量係数が小さいほど強く、羽根角が小さいほど弱い。

3. うず糸追跡法を用いて遠心羽根車後方の二次うずの強さを表わす計算式を一般化した。それによれば二次うずの強さは羽根面上の相対速度分布を知ることによって求まる。

4. 主流を一次元軸対称流としてシュラウド面境界層を乱流境界層として計算し、二次流量を求めた。その結果、二次流量は入口からの半径方向の距離が増すにつれて無限に大きくはならず、ほぼ一定値におちつくこと、二次流量は他の条件が同じならば流量が小さい方が小さいことがわかった。

5. 遠心羽根車出口での二次流れの測定結果を、相対全水頭の羽根車幅方向のこう配による二次流れと、シュラウド面境界層による二次流れに分離し、理論計算の結果と比較した。その結果理論は実験とほぼ一致することがわかった。ただし二次うず度については理論値は実験値よりやや大きく、係数を乗じて補正しなければならない。

第 5 章 リングディフューザの流れ

本章では羽根のないリングディフューザの壁面境界層を計算し，圧力回復，損失水頭を評価する。

第 1 節 理 論 計 算

リングディフューザの従来の研究の課程，および，それらの研究の問題点については先に序論で述べた。

本章で取扱うのはリングディフューザの壁面に沿う境界層を，乱流境界層とした場合の境界層助走区間の部分の流れで，これは先に *Jansen* が解析を試みている。³⁸ *Jansen* の解析には序論で述べたような難点が含まれており，本章の解析はその難点を解消する方法を用いており，計算結果は *Jansen* の得た実験結果，および筆者の実験結果と比較した。

第 4 章において，運動量式を用いた場合の損失の評価に大きな誤差が含まれることを述べたが，本章での解析では同じように運動量式を用いるにもかかわらず，損失は実験結果を十分に近似しうるものとなった。

1. 1 計算に用いる仮定

計算には次の仮定を置く。

1. 流れは軸対称である。
2. 主流は二次元流れであり，主流に対しては非粘性流体の運動方程式が適用される。
3. 境界層は入口から発達しはじめ，初めから乱流である。
4. 壁面摩擦力の方向は主流に平行である。
5. ディフューザ入口では速度分布は一様である。

これらの仮定のうち，仮定 4 は壁面摩擦力の方向が主流と平行でない場合につ

いても簡単に考察する。また仮定2は主流がポテンシャル流れをするという仮定と等価で、第4章で扱ったような質量力は考えない。

1.2 基礎式

理論計算において用いる符号は次のとおりである。

V : 主流合速度	δ : 境界層厚さ
V_r : 主流の半径方向速度	τ : デイフューザ壁面の摩擦 応力
V_θ : 主流の周方向速度	ρ : 流体の密度
v_r : 境界層内の半径方向速度	ν : 流体の動粘性係数
v_θ : 境界層内の周方向速度	α : 流れの向き（流れの向きの動径となす角）
$2h$: 流路幅	
r : 半径	

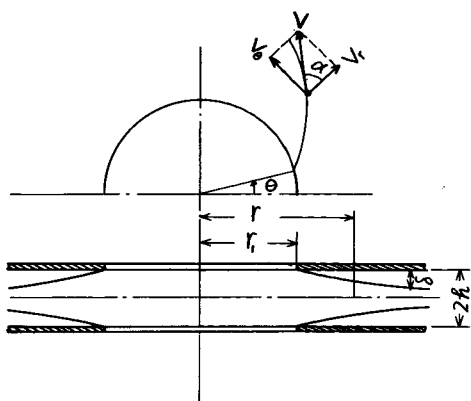


図 5.1 リングデイフューザ

また、入口での量に添字1を付し、径方向の成分、周方向の成分にそれぞれ添字 r 、 θ を付す。

計算には半径方向の運動量式、周方向の角運動量式、主流の運動方程式（径方向および周方向）、および連続の条件式の五つの方程式を利用することができる。これらを円柱座標系（ r 、 θ 、 z ）で表わす。

それらはそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ r \int_0^\delta v_1^2 dz + r(h-\delta)V_r^2 \right\} - \left\{ \int_0^\delta v_\theta^2 dz + (h-\delta)V_\theta^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} rh - \frac{r\tau_r}{\rho} \quad \dots\dots\dots (5.1) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^\delta v_r v_\theta dz + r^2 V_r V_\theta (h-\delta) \right\} = \frac{r^2}{\rho} \tau_\theta \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

$$V_r \frac{dV_r}{dr} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

$$V_r \frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_r V_\theta}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

$$\int_0^\delta r V_r dz + (h-\delta) r V_r = r_1 V_{r1} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

(5.5) 式は第4章，第4節と同様，半径方向の流量がすべての半径上で等しいという条件で，これは連続の式の積分形である。

(5.4) 式を積分すると

$$r V_\theta = \text{const} = r_1 V_{\theta 1} \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

となる。計算には(5.4)式よりも(5.6)式の方が便利であるから(5.6)式を用いる。

(5.3) 式を積分すると

$$\frac{1}{2} (V_r^2 + V_\theta^2) + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

となる。これはベルヌーイの式である。すなわち，(5.3) 式のかわりに (5.7) 式を用いてもよい。

壁面摩擦力は第 4 章，第 4 節と同様，*Blasius* の平板乱流境界層に対する式を用いる。すなわち，合応力 τ は

$$\tau = 0.0225 \rho V^2 \left(\frac{V \delta}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad \dots\dots (5.8)$$

とする。 τ_r, τ_θ は

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \tau \cos \alpha \\ \tau_\theta &= \tau \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5.9)$$

より定める。ただし

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{V_\theta}{V_r} \quad \dots\dots (5.10)$$

である。

1.3 速度分布の仮定

(5.7) ~ (5.10) 式のうち利用できる方程式は五つであるが，未知数は $V_r, V_\theta, v_r, v_\theta, p, \delta$ の六つである。これらのうち， V_θ は (5.6) 式から r の関数として定まり， p は (5.3) 式を (5.1) 式に代入して消去できる。したがって未知量は $V_r, v_r, v_\theta, \delta$ の四つであり，利用しうる方程式は三となる。一般に，運動量条件式を用いて境界層を解くときは，このように方程式の数よりも未知数の数の方が多くなるので，別に仮定を入れて，未知数の数を減ずる。たとえば，平板境界層では，境界層内の速度分布が相似であると仮定して， V と v の間の関係を仮定し，未知量を V のみとする。(平板境界層の場合は V は主流速度が壁面に沿うて一定という条件が入るので，未知量は

δ のみとなり， δ に関する一元常微分方程式となり，これは解析的に解ける。

V と v との関係を仮定すれば，連続の条件(5.5)式を用いて未知量 δ は消去できるので，残された方程式は二つとなり，未知量として二つ残すことができる。

Jansen は V と v との関係を次のように仮定している。

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_r}{V_r} &= \left\{ 1 - \left(\frac{\delta}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{\delta} \right)^2 \right\} \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/10} \\ \frac{v_\theta}{u_\theta} &= \left(\frac{z}{\delta} \right)^{1/10} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5.11)$$

ここで

$$z/\delta = \eta, \quad \delta/h = \Delta \quad \dots\dots (5.12)$$

なる無次元 z 座標 η ，無次元境界層厚さ Δ を用いると(5.11)式は

$$v_r = V_r \left[1 - \Delta^2 (1 - \eta)^2 \right] \eta^{1/10} \quad \dots\dots (5.13)$$

$$v_\theta = V_\theta \eta^{1/10} \quad \dots\dots (5.14)$$

となる。ただし，(5.13)，(5.14)式は境界層内，すなわち， $0 \leq \eta \leq 1$ の区間のみで成立する。

V_θ は先述のとおり r の関数としてわかっているから(5.13)式に含まれる未知量は V_r ， Δ のみとなる。しかるに利用しうる方程式は角運動量式，半径方向の運動量式，連続の条件式の三であるから，*Jansen* の仮定した境界層内の速度分布を用いて計算するときには，未知数の数よりも方程式の数の方が一つ多いことになるので，どれか一つの方程式は省略して解かねばならない。

Jansen は径方向の運動量式を用いていない。

境界層内の速度分布の相似性または準相似性（たとえば，第4章，第4節に

述べた $w_s = W_s \cdot q(r) \cdot g(\eta)$ を仮定することは積分条件式を用いる境界層の解法の基本的方法であるが、この速度分布の形状決定は諸説があつて、決定的な形状はない。

Jansen が用いた (5.13), (5.14) 式の速度分布³⁸ は三次元境界層の *Polar Plot* (極線図) の形状から帰納したもののものであるが、*Polar Plot* を支持する十分に根拠ある実験データは揃つていないといへない。

なお、付言するならば、三次元境界層の速度分布の仮定は一般には主流の方向の成分と、主流に直交する成分とについて、*Prandtl*³³ *Mager*³² らの与えた相似的分布を用いるのが普通で、極座標を用いた場合の境界層内速度分布の相似的形状を仮定する方法は少ない。

上述の考察によつて、*Jansen* の解法の難点が明らかになった。この難点を避けるためには利用しうる方程式をすべて利用するように、速度分布の仮定の際に、未知数を二つ含ませるようにすればよい。また *Jansen* が仮定した根拠となつてゐる *Polar Plot* に対する信頼度から考えて、複雑な分布を仮定することはあまり意味がない。その上、運動量式は境界層内速度の境界層の区間での積分量が重要なのであつて、その細かな形状は全く無意味である。

ところで、周方向の境界層内の速度分布については *Jansen* が実験的に確めたとおり、(5.14) 式はきわめて精度が高い。

そこで、ここに述べる解析では

$$v_r/V_r = \eta^{1/m} \quad \dots\dots (5.15)$$

$$v_\theta/V_\theta = \eta^{1/10} \quad \dots\dots (5.16)$$

と仮定する。ここに m は半径 r の関数で、未知量である。上式の仮定によれば未知量は V_r , m の二つが残され、別の未知量 δ と台せて、未知量は三つとなり、利用しうる方程式の数もまた三つであるから合理的に解が求まるはずである。

1.4 計 算 式

(5.15), (5.16) 式の速度分布を用いると

$$\int_0^\delta r v_r dz = \frac{m r}{m+1} V_r \delta$$

であるから, (5.5) 式は

$$\Delta = \left(1 - \frac{1}{RU}\right) (m+1) \quad \dots\dots (5.17)$$

となる。ただし

$$\Delta = \frac{\delta}{h}, \quad R = \frac{r}{r_1}, \quad U = \frac{V_r}{V_{r1}}, \quad H = \frac{h}{r_1} \quad \dots\dots (5.18)$$

であり, 以後これらの無次元量を用う。

$$\text{また, } \int_0^\delta v_r^2 dz = \frac{m}{m+2} V_r^2 \delta \quad \int_0^\delta v_\theta^2 dz = \frac{5}{6} V_\theta^2 \delta$$

$$\int_0^\delta v_r v_\theta dz = \frac{10}{11m+10} V_r V_\theta \delta$$

であるから, (5.1) 式にこれらを代入し, 両辺を $r_1^2 V_{r1}^2$ で除し, また, (5.2) 式を同様にして, $r_1^2 V_{r1}^2$ で除して無次元化し, (5.17) 式の関係を用いて, Δ を消去すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2m+2}{m+2} - \frac{3m+2}{m+2} RU \right) \frac{dU}{dR} + (1-RU) \frac{2U}{(m+2)^2} \frac{dm}{dR} \\ &= -T + \frac{mU^2}{m+2} + \frac{m+1}{6R^2} \tan^2 \alpha_1 \left(\frac{1}{RU} - 1 \right) \quad \dots\dots (5.19) \end{aligned}$$

$$\frac{m^2 R}{11m+10} \frac{dU}{dR} + (RU-1) \frac{11m^2+20m}{(11m+10)^2} \frac{dm}{dR} = \frac{T}{U} \frac{m^2 U}{11m+10}$$

..... (5.20)

ただし

$$T = ARU^2 \sqrt{1 + \frac{tan^2 \alpha_1}{R^2 U^2}} \left[\frac{R}{(m+1)(RU-1)} \sqrt{\frac{1}{1 + tan^2 \alpha_1 / RU}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

..... (5.21)

$$A = 0.0225 H^{-\frac{5}{4}} \left(\frac{V_{r1} r_1}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}}$$

..... (5.22)

である。

1.5 初期値

境界層は m の R による変化のために、いわゆるねじれ境界層となるが、入口では流れは一様であるから境界層はねじれない。したがって、 m の初期値は 10 とすべきである。また、 U の初期値は 1 である。

(5.19), (5.20) 式は非線型連立微分方程式であるから解析的には解けない。

$R=1$ で $U=1$, $m=10$ とおくと、 $T \rightarrow \infty$ となるので、(5.19),

(5.20) 式は $R=1$ の点で特異点となり、数值的にも解けない。したがって

$R=1$ の近傍では適当な解析関数を用いて、近似的に解かなければならない。

(5.19), (5.20) 式より

$$\left\{ -\frac{2}{(m+2)^2} + \frac{11m^2+20m}{(11m+10)^2} \right\} T + \dots\dots\dots$$

$$\frac{dU}{dR} = - \frac{\left(\frac{2m+2}{m+2} - \frac{3m+2}{m+2} RU \right) \frac{11m^2+20m}{(11m+10)^2} + \frac{2m^2 RU}{11m+10} \left(\frac{1}{m+1} \right)^2}{\dots\dots\dots} \quad (5.23)$$

となるが、分子の T 以外の項は $R=1$ ではすべて有限値であるから無視する。
 分母はすべて有限値であり、 m, U は $R=1$ から R が大きくなるにつれて変化
 するが、いまは R が 1 にきわめて近い部分を検討するのであるから、 m, U は
 $R=1$ における値で近似することができる。すなわち、上式で、

$$R = 1, \quad m = 10, \quad U = 1$$

を代入すると

$$\frac{dU}{dR} \div 1.2 T_1 \quad \dots\dots\dots (5.24)$$

同様にして、

$$\frac{T}{U} \left(\frac{2m+2}{m+2} - \frac{3m+3}{m+2} RU + \frac{m^2}{11m+10} RU \right) + \dots\dots\dots$$

$$\frac{dm}{dR} = \frac{\left(\frac{2m+2}{m+2} - \frac{3m+2}{m+2} RU \right) \frac{11m^2+20m}{(11m+10)^2} + \frac{2m^2 RU}{11m+10} \left(\frac{1}{m+2} \right)^2}{\dots\dots\dots} \quad (5.25)$$

となる。したがって、

$$\frac{dm}{dR} \div 28.8 T_1 \quad \dots\dots\dots (5.26)$$

T_1 は $R = 1$ における T の値で

$$T_1 \doteq A \left(\frac{1}{11 \cos \alpha_1} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\sqrt{RU-1}} \quad \dots\dots (5.27)$$

である。すなわち

$$\frac{dU}{dR} = 1.2 A \left(\frac{1}{11 \cos \alpha_1} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\sqrt{RU-1}} \equiv \frac{k_0}{4\sqrt{RU-1}} \quad \dots\dots (5.28)$$

$$\frac{dm}{dR} = 28.8 \left(\frac{1}{11 \cos \alpha_1} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\sqrt{RU-1}} \quad \dots\dots (5.29)$$

となる。(5.29) 式より

$$m = 24U - 14 \quad \dots\dots (5.30)$$

となる。したがって、(5.28) 式から U が求まればよい。

(5.28) 式はまた解析的には解けない。そこで、 $R = 1 + r^*$,
 $U = 1 + u^*$ とおくと、(5.28) 式は

$$\begin{aligned} \frac{d u^*}{d r^*} &= \frac{k_0}{4\sqrt{r^* + u^* + r^* u^*}} \\ &= K_0 \left(\frac{5}{4} K_0 \right)^{-\frac{4}{5}} r^{*\frac{1}{5}} \left\{ 1 + \frac{1}{(5K_0/4)^{\frac{5}{4}}} r^{*\frac{1}{5}} + r^* \right\}^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

となる。上式で r^* が十分小さい範囲では

$$\left\{ 1 + (5K_0/4)^{-\frac{5}{4}} r^{*\frac{1}{5}} + r^* \right\}^{-\frac{1}{4}}$$

はすみやかに収束する級数に展開できる。すなわち

$$u^* = \frac{4}{5} \times 10^{-10} \times \left\{ 125c - 0.25 + \frac{1}{c} \times 1.302083 \times 10^{-3} \right. \\ - \frac{1}{c^2} \times 8.370535 \times 10^{-6} + \frac{1}{c^3} \times 5.950928 \times 10^{-8} \\ - \frac{1}{c^4} \times 4.496256 \times 10^{-10} + \frac{1}{c^5} \times 3.540802 \times 10^{-12} \\ \left. - \dots \dots \dots \right\}$$

となる。ただし、 $c = (5K_0/4)^{\frac{4}{3}}$ である。

計算では、 $r^* = 10^{-10}$ までを級数展開によつて求め、 $r^* = 10^{-10} \sim 10^{-5}$ の間で(5.28)式を数値積分し、それらを(5.19)、(5.20)式の初期値として用いた。

1.6 数値計算結果

(5.19)、(5.20)式を *Runge-Kutta* 法により、電子計算機を用いて解く。計算は助走区間に対してのみ意味があるので、 $\Delta = 1$ で計算を止める。

計算値として得られるのは U 、 Δ 、 m の R に対する変化であるが、これらの値から次式を用いて、圧力回復係数 ζ_p 、損失係数 ζ_t 、平均速度水頭係数 ζ_v を計算する。

$$\zeta_p = \frac{P_s - P_{s1}}{\gamma} \bigg/ \frac{V_{r1}^2}{2g} = 1 - \left(U^2 \cos^2 \alpha_1 + \frac{\sin^2 \alpha_1}{R^2} \right) \dots \dots \dots (5.31)$$

$$\zeta_t = \frac{H_{tp} - H_t}{V_{r1}^2 / 2g} = \Delta \frac{2}{m+2} \left(U^2 \cos^2 \alpha_1 + \frac{\sin^2 \alpha_1}{R^2} \right) \dots \dots \dots (5.32)$$

$$\zeta_v = \left\{ \int_0^\delta v^2 dz + (h - \delta) V_0^2 \right\} / V_r^2 h = 1 - \zeta_p - \zeta_t \cdots \cdots (5.33)$$

ただし， p_s は任意の半径円周上での静圧で，静圧は幅方向に一定と近似できるので，主流に対するベルヌーイの式，(5.7) 式から求まる。 γ は流体の比重量である。また， Htp は境界層の発達がない場合の，任意の半径の円周上の全水頭であり， H_t は境界層の発達による速度水頭の減少を考慮に入れた場合の幅方向の平均全水頭である。

計算に際しては，入口流速 V_{r1} ，流入角 α_1 ，入口レイノルズ数 $Re_1 = V_{r1} \times r_1 / \nu$ ，および， h を与えねばならない。

図 5.2 は $V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}$ ， $\alpha_1 = 47.0^\circ$ ， $Re_1 = 9.87 \times 10^5$ ， $H = r_1/h = 20/3$ の場合である。

図 5.3 は $V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}$ ， $\alpha_1 = 67.0^\circ$ ， $Re_1 = 9.87 \times 10^5$ ， $H = 20/3$ の場合である。 U の曲線の $\Delta > 1$ の部分の破線で示した曲線は助走区間終了後，主流が $1/R$ に比例して減少するものと仮定した曲線である。

図 5.2 の m ， Δ ， ζ_p ， ζ_t ， ζ_v の破線は後に述べる壁面摩擦応力の向きを修正した場合である。

また， $1/R$ ， $1/R^2$ の破線で示した曲線は非粘性流体の場合である。

図 5.2，5.3 で示した計算の場合と同じ条件で *Jansen* は入念な実験を行っている。 U についてそれらを *Plot* したものが図中 $\bigcirc$ 印である。

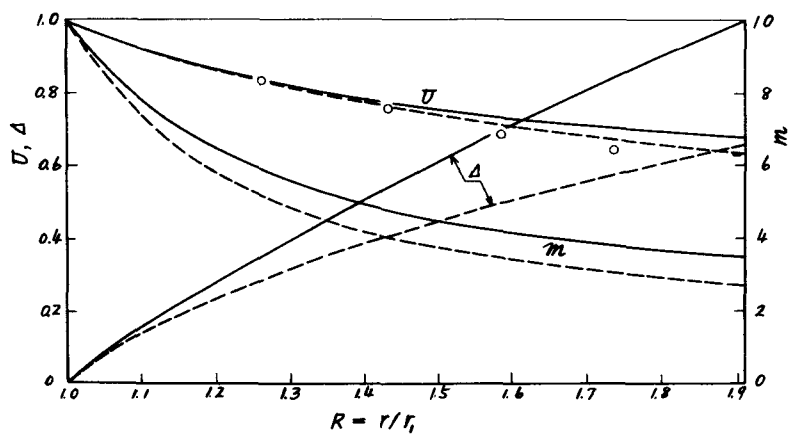
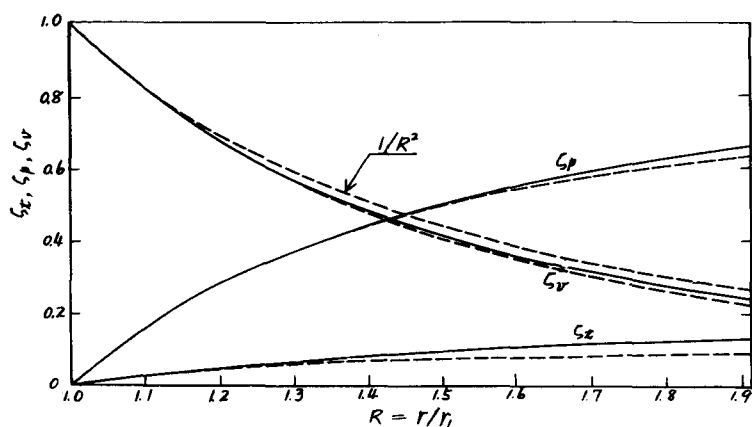


図 5.2 リングディフューザ壁面の境界層の計算結果

$$V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}$$

$$\alpha_1 = 47.0^\circ$$

$$Re_1 = 9.87 \times 10^5$$

$$H = \frac{r_1}{h} = \frac{20}{3}$$

○印は *Jansen* の実験値 (U)³⁸

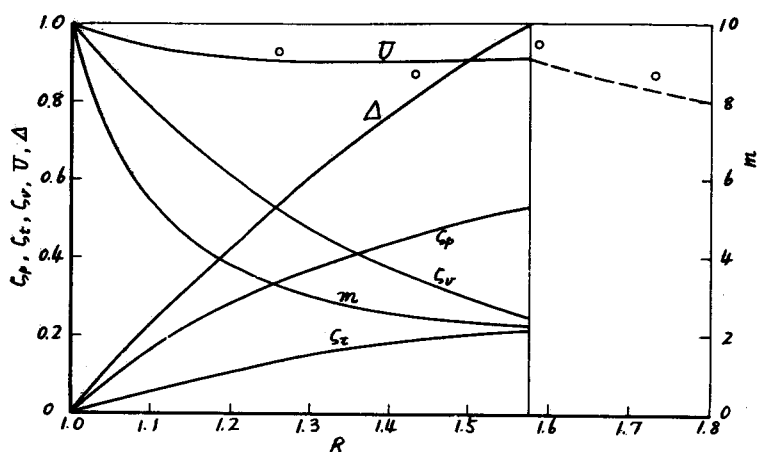


図 5.3 リングディフューザ壁面の境界層の計算結果

$$V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}$$

$$\alpha_1 = 67.0^\circ$$

$$Re_1 = 9.87 \times 10^5$$

$$H = r_1/h = 20/3$$

○印は Jansen の実験値³⁸ (U)

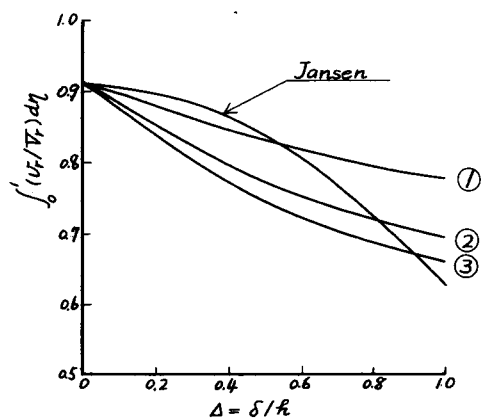
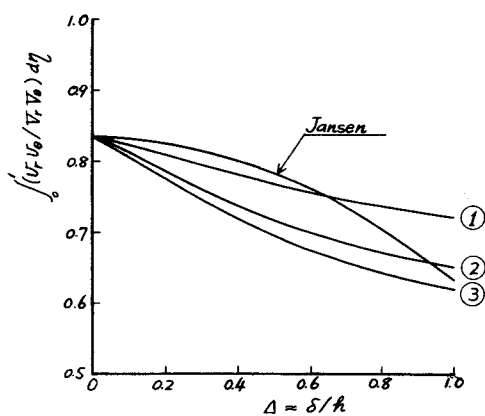


図 5.4 境界層内の速度の積分値に関する

Jansen の仮定と筆者の計算値の比較

この計算例から，この計算は実験結果ときわめてよく一致することがわかる
 なお *Jansen* はその理論計算の結果を筆者のような R に対する変化として計算していないので，比較しにくい，*Jansen* の実験結果も U については実験値と，筆者の計算と同程度によく一致しているようである。円周に対する流入角が小さいときは半径方向距離が同じであっても長さは長いので，境界層発達区間の半径長さは小さくなる。

非粘性流体の場合には半径に沿う圧力回復の速さは，流れの入口における条件に無関係に $(1 - 1/R^2)$ となるが，境界層の発達を考慮する場合には，入口における流れの向きの円周方向に対する傾きが小さいほど，境界層厚さの発達が速いので，主流速度も速くなり，圧力回復の速さはおそい。

図 5. 4 は v_r/V_r および $(v_r, v_\theta/V_r, V_\theta)$ の境界層内での積分量について，筆者の計算の場合と *Jansen* の場合とを比較したものである。*Jansen* の仮定では， v_r/V_r は Δ のみの関数として表わされているので，流れの条件に無関係に同じ曲線となる。しかし筆者の計算では，この仮定は，図 5. 4 に示すとおり正しくない。

流れの解析は基本的には，流れの基礎式を満足するものでなければならない。*Jansen* の行ったように，三次元境界層の一般的性質を解明し，その結果から境界層内の速度分布を帰納する方法は正しい。しかし，帰納して得た速度分布はすべての三次元境界層を満足するものでなければならない。そのことは流れの基礎式をも満足すべきであることを含んでいる。したがって，三次元境界層の一般的性質を検討する段階において，できるだけ多くの三次元境界層が流れの基礎式から解かれねばならない。

図 5. 4 に示したような違いが生ずることは，*Jansen* が行った三次元境界層の性質からの境界層内の速度分布の帰納ががまだ十分な根拠をもっていないことを示しており，

$$\int_0^1 (v_r/V_r) d\eta, \int_0^1 (v_r, v_\theta/V_r, V_\theta) d\eta \quad \text{などの半径方向の変化は三}$$

次元境界層の一般的性質の整理のための一つの資料として利用すべきものである。

$\int_0^1 (v_r/V_r) d\eta$ は境界層の発達にともなう半径方向の流れの力のつり合いのうち、どれほどの大きさの力が境界層内の運動量の変化に寄与するかを示す量である。壁面に働く、流れにさからう摩擦力は、流れに沿う運動量の減少で打ち消されねばならない。運動量の減少は境界層厚さの増大と、境界層内の速度分布がやせること、すなわち、指数 m が減少することによつて可能である。境界層の発達の初めの部分では Δ の増大も大きい、 m の値も急激に減少する。これは前縁付近では境界層がうすく、したがって、摩擦抵抗が大きいので、大幅な運動量の減少が必要であり、そのためには境界層厚さの増大ばかりでなく、速度分布が急激にやせることが必要であるためである。

Ja nsen の仮定は、速度分布がやせる速さは境界層厚さのみによつて定まるといふ仮定と等価であるが、図 5.4 に示すとおり、壁面摩擦力につり合うための、運動量の減少の境界層厚さの増大によるものと、速度分布がやせることによるものとの割合は一意的には定められないものである。

1.7 壁面摩擦力の方向の修正の試み

ねじれ境界層では、主流の向きと境界層内の流れの向きは明らかにことなる。壁面摩擦力の方向は壁面での流れの方向と等しく、向きは反対になるべきである。壁面では速度は 0 であるから摩擦力の方向の円周に対する傾き θ は

$$\theta = - \tan^{-1} \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{v_r}{v_\theta} \right)$$

となるべきである。上式で θ を決定するためには、 v_r 、 v_θ の分布が正確でなければならないが、これは不可能である。

三次元境界層の取扱いは境界層内の速度分布の相似性を仮定する方法と *Polar Plot* による方法があり、上記の θ と主流の向きとのくい違いにつ

いてもその表現法がある。前者の方法は前章第4節，(4.82)式に述べた $q(r)$ に等価な関数 ε であるが， $q(r)$ または ε を境界層の他のパラメータたとえば，主流速度や境界層厚さの関数として表わす普遍的な方法は与えられておらず，その実験データもない。つまり，この方法は速度分布の相似性を仮定して， q または ε を求めるのが主眼で， q または ε を境界層の他のパラメータから求められるような形にはなっていない。したがって，いま試みようとする計算には利用できない。

Johnston³⁶ は *Polar Plot* でねじれ境界層を表現し，主流と境面の流れの向きのくい違い角 e を次の形で近似的に表現している。

$$\frac{\tan e}{\theta} + 1 = \frac{1}{C_f} \left(\frac{1 + \tan^2 e}{C_f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots (5.34)$$

$$\theta = 2\theta^* \quad \dots\dots (5.35)$$

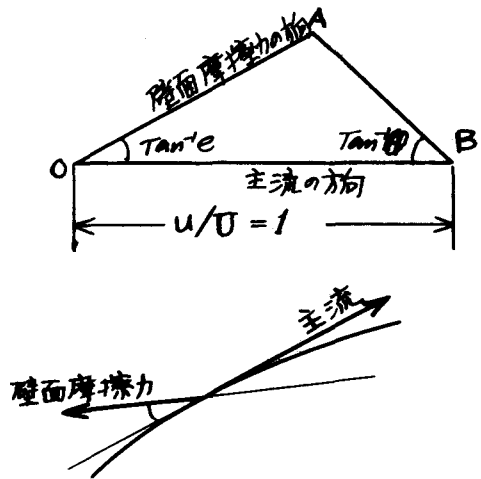


図 5.5 主流の向きと壁面摩擦力のくい違い

ただし， θ^* は主流の転向角， e ， θ は図 5.5 に示すとおりである。

また， C_f は壁面の摩擦抵抗係数で

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

である。

図 5.5 はいわゆる三次元境界層の *Polar Plot* で OB は主流部の速度ベクトルで，速度の大きさを主流速度 V で除して無次元化するので $OB = 1$ である。境界層内の速度ベクトルの先端が AB および OA 上に並ぶというのが

Polar Plot の要点であり，速度ベクトル $\vec{OA}$ 上に並ぶ部分では境界層はねじれていない。この部分はいわゆる層流底層であると考えられている。層流底層の外縁から境界層外縁までの部分の速度ベクトルの先端が， AB 上に並ぶことは実験的によく確められているが， OA の部分，および A の位置については十分に確められていない。これは壁面のごく近くの層流底層では側定に十分な精度を与えうるほど小型の流速測定装置を作りえないためである。

現在のところ，主流と壁面摩擦力の方向のくい違いを表現する式として提案されているのは，(5.34)，(5.35) 式で示されるもののみである。

いま，壁面摩擦力の向きの修正として，上記の二式を用いることにする。

境界層内では，圧力のつり合いから主流よりも流線の曲率が大きいから，修正後の摩擦力の半径方向成分 τ_r' ，周方向成分 τ_θ' は

$$\left. \begin{aligned} \tau_r' &= \tau_r \frac{\cos(\alpha+e)}{\cos \alpha} \\ \tau_\theta' &= \tau_\theta \frac{\sin(\alpha+e)}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5-36)$$

となる。

この場合の計算結果は図 5.2 (a) の破線で示した曲線である。

(5.34)，(5.35) 式は主流転向角があまり大きいときには適用できないようであるから，この修正は可能な一つの試みにすぎないがこの計算のおもな目的である ξ_p ， ξ_t については修正の効果はほとんどない。したがって，壁面摩擦力の向きについては主流と同方向と考えてよい。

なお，*Jansen* の計算でも壁面摩擦力の向きは主流と同方向と仮定している。

1.8 二 次 流 れ

第4章，第4節で扱ったと同様にして，二次流量を計算することができる。
主流流線に直交する方向の速度を v_n とすると

$$v_n = -v_r \sin \alpha + v_\theta \cos \alpha$$

となる。 v_n の向きは図5.6に示す
とおり主流線の凹側である。

二次流量 q は

$$q = 2\pi r \int_0^\delta v_n dz \cdots (5.37)$$

であり， q をそのときの半径方向流量 Q で除いた無次元二次流量 q^* であらわすと

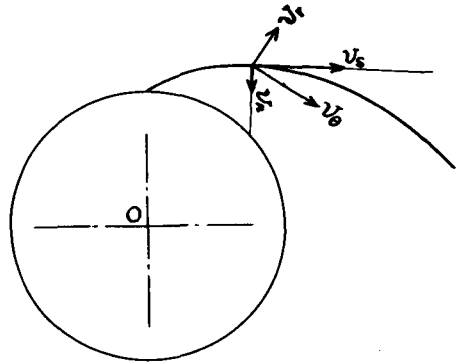


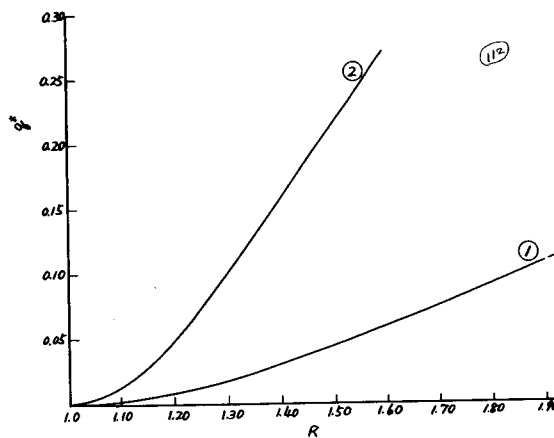
図5.6 二 次 流 れ

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{2\pi r \int_0^\delta v_n dz}{2\pi r_1 V_{r_1} h} \\ &= \left(-\frac{10}{11} - \frac{m}{m+1} \right) R U \Delta \sin \alpha \cdots (5.38) \end{aligned}$$

となる。

図5.7は図5.2，図5.3の流れの条件のもとでの二次流量の計算値である。

図より， $q^* > 0$ であるから，二次流れの向きは第4章，第4節の回転流路の場合と反対であることがわかる。二次流量は主流の転向角によって大きな差があり，同じ半径距離の間でも，流入する流れの円周に対する傾き角が小さい場合には転向角が大きいから二次流量も大きい。したがって，遠心羽根車後方のディフューザとして用いる場合は流量が小さい場合では，とくに案内羽根を設け



$$\textcircled{1} V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}, \alpha_1 = 47.0^\circ$$

$$R_{e1} = 9.87 \times 10^5, H = \frac{20}{3}$$

$$\textcircled{2} V_{r1} = 0.830 \text{ m/s}, \alpha_1 = 47.0^\circ$$

$$R_{e1} = 9.87 \times 10^5, H = \frac{20}{3}$$

図 5.7 二 次 流 量

て流れを案内することが望ましいことがわかる。

第 2 節 実 験

理論計算の結果は前節では *Jansen* が行った実験結果と比較した。

Jansen の実験は流入部では境界層を吸いとして流入する流れの速度分布を幅方向に一様に整え，また，周方向の速度成分は入口部で金網を円筒上に巻きつけた羽根のない回転板によって与えて，軸対称な流れを作っており，理論計算に用いた仮定と十分に一致する流れを用いて実験している。この実験結果と筆者の理論解とがよく一致することはすでに述べた。

Jansen の実験では， ζ_p ， ζ_t ， ζ_v に対する実験値が報告されていないので，これらの理論解との比較ができない。

筆者は第3章で述べた相対流の実験装置をそのまま利用し，ディフューザ部分を静止平行平板ディフューザに取りかえて，半径方向に流れを測定し， ζ_p ， ζ_t ， ζ_v について理論計算の結果と比較した。筆者の実験ではディフューザ入口部の流れは *Jansen* の実験のように，理論計算に用いた仮定を満足して

はおらず，フリーインペラの羽根車から流出する流れがあるから，羽根ーピツ間で周方向に変動し，また，幅方向にも一様でない流れとなっている。

2. 1 実 験 装 置

実験装置の構成は第3章のそれと全く同じである。

測定部流路の形状寸法は図5.8に示すとおりである。

測定用プローブは第3章に述べた三孔ビトー管である。

この測定では三孔ビトー管は上部ディフューザ板に固定され，ディフューザ板は静止しているから，ビトー管の指示値は静止マノメータに導いて読みとつた。

流れは幅方向に5点で測定し，これらを平均してその半径における値とした。また，半径方向には $R = r/r_1 = 1.05, 1.10, 1.20, 1.30, 1.40$ の5点で測定した。

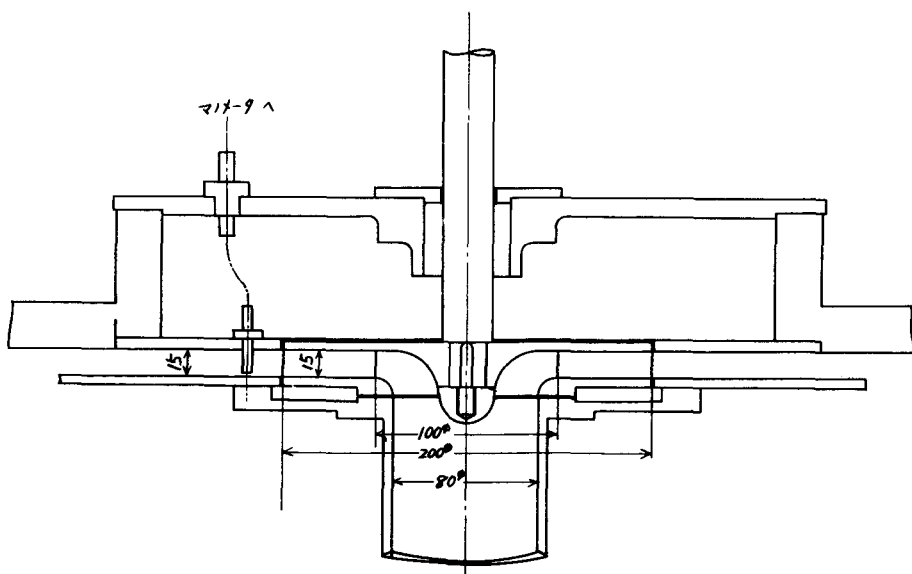


図 5.8 測定部の形状寸法

2.2 実験結果および考察

流れは軸対称ではないので、流量は半径方向の測定位置によるばらつきがあるので、それらの平均値をその流れ状態の流量と考えた。また、 ξ_t 、 ξ_p についてはディフューザ入口部での流れの値を基準としなければならないが、羽根車出口からディフューザ入口までの測定は不可能であるから、流量、したがつ

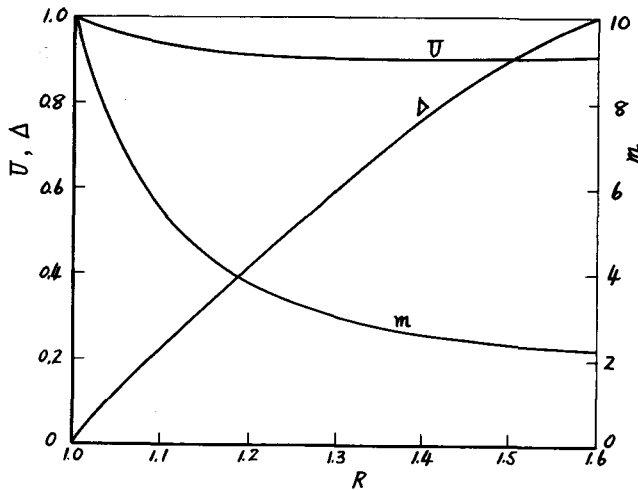
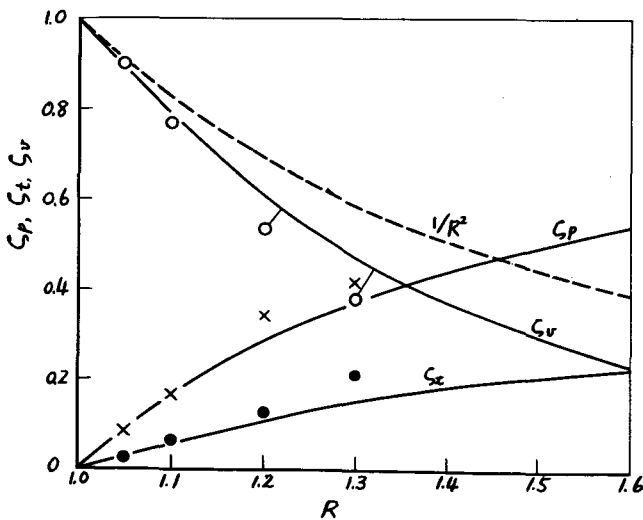


図 5.9
リングディフューザ
壁面の境界層の計算
値と実質値の比較



$$V_{r1} = 0.470 \text{ m/s}$$

$$\alpha_1 = 67^\circ$$

$$H = 20/3$$

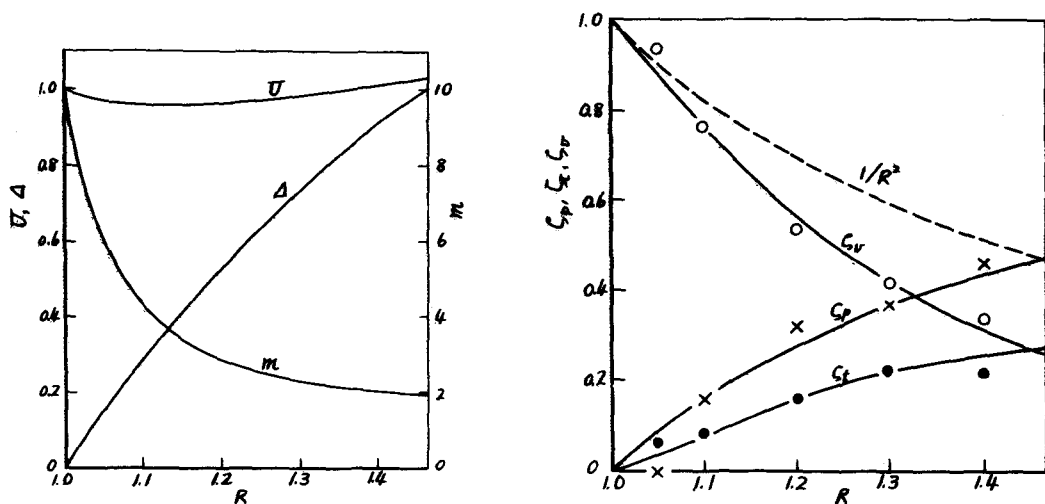


図 5.10 リングディフューザ壁面の境界層の計算値と実験値の比較

$$V_{r1} = 0.410 \text{ m/s} \quad \alpha_1 = 71^\circ$$

$$H = 20/3$$

て、半径方向速度成分が全体の平均値にもっとも近い測定点の値を基準値として用いた。

図 5.9 , 図 5.10 はそれぞれ $V_{r1} = 0.470 \text{ m/s}$, $\alpha_1 = 67^\circ$ の場合および $V_{r1} = 0.410 \text{ m/s}$, $\alpha_1 = 71^\circ$ の場合である。これらのレイノルズ数は図 5.8 に示した測定部形状から図 5.9 の入口流れの場合は $Re_1 = 3.62 \times 10^4$, 図 5.10 の場合は 3.15×10^4 である。

また、 ζ_p 、 ζ_t の基準値を採用した測定位置は
 図 5.9 では $R = 1.05$ ，
 図 5.10 では $R = 1.15$ の点である。すなわち，
 静圧回復については，それぞれ基準位置の静圧が理論値のそれと等しいものと仮定してディフューザ入口での値を逆算した。
 なお， ζ_t は (5.33) 式

$$\zeta_t = 1 - \zeta_p - \zeta_v$$

より求めた。

図 5.9，図 5.10 の (b) はそれぞれの場合の Δ ， U ， m の計算結果で，これに対する実験値は測定していない。

図 5.11 は流れの幅方向の乱れの程度を示すもので，図は合速度の幅方向の分布を示している。

図 5.11 の程度に流れが乱れているにもかかわらず，理論値と実験値はほぼ満足に一致している。図 5.9 で速度が理論値よりも小さくなっているのは流れの円周に対する傾き角が理論値よりも大きいためで，図 5.11 (a) からわかるように，流速が幅方向に大きく変化する場合には理論計算値は，実験とのくい違いが大きくなるようである。

第 4 章，第 4 節で述べたように，運動量式を用いた境界層の解はエネルギーの条件を満足しないから，流れの損失を求める際には誤差が含まれる。したがって，(5.32) 式で示した損失水頭係数は m ， U の近似値の精度よりさらに精度が悪い近似値である。

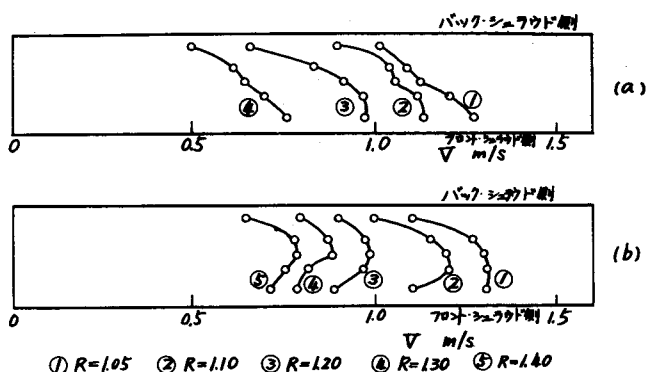


図 5.11 幅方向の流速分布

(a) 図 5.9 に対応

(b) 図 5.10 に対応

それにもかかわらず， ζ_t の実験値と理論値がほぼ一致することは，静止流路の三次元境界層の計算の際には，運動量式を用いる方法がエネルギーの条件にそれほど大きな誤差を与えないことを示している。

第 3 節 結 論

本章では遠心羽根車の最も簡単な圧力回復装置として用いられる羽根のない平行リングディフューザの流れを解析した。理論計算においては壁面にそう境界層の発達を乱流境界層として積分条件を用いて計算し，圧力回復，損失水頭などを求めた。

また流入する流れは幅方向にも，周方向にも一様であるような理想的な条件を仮定し，さらに，流れはいたるところ軸対称流であると仮定した。この解析はすでに *Jansen* によって為されているが，それには境界層内の速度分布の仮定，基礎方程式の取り扱い方に難点があった。これらの難点は簡単な速度分布の仮定によって避けることができた。

また実験によって理論計算の結果をどれほど広範囲に適用できるかについて検討した。それらの結果を要約すると，

1. 理論計算では積分式で表わされた流れの基礎式をすべて満足するように解を定めることができ，この結果から三次元境界層における境界層内の運動量は境界層厚さのみでは定まらないことがわかった。
2. 理論計算の結果は，計算に用いたと同じ条件の実験の結果とよく一致する。
3. 理論計算の結果は，流入する流れが幅方向に一様でなく，時間的に変動するような羽根車出口の流れの場合でも，損失水頭，圧力回復については実験とよく一致する。

第 6 章 結 論

本研究は遠心羽根車の性能改善のための研究の一環として，羽根車後方の流れを解析したものである。

遠心羽根車の性能については，理論的研究が始められて以来，一次元軸対称流理論を基礎として行われてきたが，この方法は羽根車流路間の流れの解析に対しては全く無用であるという根本的な欠陥のために，性能改善のための基礎理論としては限界があった。より高い羽根車性能を得るためには羽根車流路間の流れの微視的な考察が必要となり，二次元ポテンシャル流れ理論が考案されたが，この方法もまた，従来の研究では流路間の流れの解析に対しては応用されなかった。

本研究では遠心羽根車後方の流れを構成する基礎的な流れは二次元ポテンシャル流れであると推定し，まず二次元ポテンシャル流れ理論によって羽根面外の点の流れを計算する方法を開発した。この方法は主として対数らせん羽根をもった羽根車に適用されるべき方法であるが，対数らせんに近い羽根の場合も扱うことができ，実用される多くの純ふく流型羽根車を扱うことができる。

次にこの理論が実際の流れをどの程度正しく表わしているかを確かめるため，フリーインペラ型実験装置を用いて羽根車後方の相対流れを測定し，理論計算の結果と比較した。

以上の羽根車流路内の流れの二次元流れとしての扱いを補正する最も代表的な方法は二次流れである。本研究では二次元流れとしての考察に続いて羽根車流路間二次流れを解析した。解析にはベクトル解析法，うず糸追跡法，境界層理論の三つの方法を用い，前二者によって二次うず度を，境界層理論によって二次流量を考察した。このような解析は従来ほとんど行われていなかった。これらの結果は実験的に検討した。

遠心羽根車の性能は，羽根車のみでなく，吐出装置によって大きな影響を受けるが，それらのすべてについて検討するのは不可能であるから，最も簡単でかつ，流体力学的に興味深いリングディフューザの流れを解析した。

これらの解析の結果，次の結論が得られた。

1. 羽根車後方の流れの分布は，同一の羽根車については流量の大小にはほとんど関係なく類似の分布をする。
2. 羽根の作用は羽根圧力面側で強く負圧面側で弱い。すなわち，全水頭は羽根圧力面近傍で高い。
3. 相対流れの向きは羽根の両面とも，流路中央部に比べ，径方向に傾く。
4. 羽根車出口における絶対流れの向きは流量によって大幅に変化するが，相対流れの向きは流量によってそれほど大きな変化はない。
5. 羽根車前方の羽根車の回転と同方向の予回転はすべりに等しい効果を与える。
6. 流量が無衝突流入流量のほぼ半分以上の流量では，簡単な補正のもとに，二次元ポテンシャル流れは実際の流れをよく近似しうる。
7. 流量が非常に小さい部分では羽根車後方の流れは定性的にも二次元ポテンシャル流れと一致しない。
8. 流量が多い場合，羽根のまわりの循環は，二次元ポテンシャル流れ理論による計算値よりも小さくなる。

この羽根循環の減少は，相対速度の増加とそれにもなう静圧の低下によって生じているが，いわゆるすべりの現象と考えてよい。

9. 非粘性せん断流れ理論による二次うずの解析によれば，遠心羽根車の流路間二次うずは，

- (i) 流路が曲っている為の，うず糸の流路に対する相対的回転
- (ii) 流路が回転している為の，うず糸の流路に対する相対的回転
- (iii) 流路が曲っている為の，軸の回転角度速度ベクトルの流線方向成分の変化

によって生ずる。そして(i)と(iii)の原因による二次うずは後向き羽根では互に打ち消し合う。

10. 二次うずの強さは流量係数が小さいほど強い。

- 1 1. 二次うずの強さは羽根面上の相対速度分布から求まる。
- 1 2. 羽根車シュラウド面に発達する境界層の三次元性によって生ずる二次流れの流量は，他の条件が同じならば，流量が小さい方が少い。
- 1 3. 二次うずの強さは，実際の羽根車では，非回転軸 対称流を基礎流れとする非粘性せん断流れ理論による計算値よりやや小さい。二次流量は境界層理論を用いた解析の結果は，実験値とほぼ一致する。
- 1 4. 三次元境界層における境界層内の運動量は境界層厚さのみでは定まらない。
- 1 5. 運動量式，角運動量式など，運動方程式の積分式をすべて満足するようなリングディフューザ壁面の境界層の解は実験値とよく一致する。またこの解は，幅方向に，流入する流れが一様でない場合もよい近似値を与える。

本研究では遠心型流体機械の構成部分のおのをおのを分析的に研究し，それぞれについて，ある程度，新しい知見を加えることができたと思われる。

謝

辞

本研究は 1963 年 4 月から約 3 年半にわたって大阪大学工学部機械工学教室で行われたものである。

その間，村田教授からは終始懇切，丁寧な指導を賜った。
また研究の初期には当時工学部教授であった現基礎工学部長，植松教授のご指導を賜った。ここに謹んで両先生に深甚の謝意を表します。また小川助教授をはじめ，水力実験室の諸氏からは実験，数値計算の際，多大なご援助をいただいた。とくに川谷洋治，久保田英誠，三宅健作，志水勇，児王旦の諸君からは格別のご協力を賜った。併せて厚く謝意を表します。

1966 年 10 月

三 宅 裕

文 献

- (1) S. リリー : 人間と機械の歴史 岩波新書
- (2) L. Euler : Berichte der Königlichen Akad.
d. Wiss. z. Berlin (1754)
(文献(20)より転載)
- (3) B. Eck : Ventilatoren, Springer (1957)
- (4) B. Eckert : Axial Kompressoren und Radial
Kompressoren, Springer (1953)
- (5) C. Pfeleiderer : Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten
und Gase, Springer (1961)
- (6) H. Örtli : Diss. T.H. Zürich (1923)
(文献(9)より転載)
- (7) A. Carrard : Tech. mod. Bd. 15(1923) P.65
- (8) K. Fischer : Mitt. Hydr. Inst. T.H. München H.
(1931)
- (9) E. Grünagel : VDI-Forsch. Heft. 404(1940) P.1
- (10) W. Kucharski : Strömungen einer reibungsfreien
Flüssigkeit bei Rotation fester Körper.
Oldenbourg (1918)
- (11) W. Spannhaake : Festschrift d. T.H. Karlsruhe(1925)
- (12) A. Busemann : ZAMM Bd. 3. Nr.5.(1928). s.372
- (13) 葛西・高松ほか : 日本機械学会 第40期定時総会講演会
前刷 No.86. P.121. ほか
- (14) S. Uchimarui : J. of. Facul. Eng. Tokyo Imp. Univ.
16. Nr.6 (1925)
- (15) W.C. Osborne & D.A. Morelli :
Trans. ASME. Vol.72 (1950-11) P.999

- (34) R.W. Moore, Jr. & D.L. Richardson :
MIT Gas Turb. Lab. Rep. No.33 (1955-1)
- (35) A.M.Kuethe, P.G.Mackee. & W.H. Cuny. :
NACA TN. No.1946 (1949-9)
- (36) J.P. Johnston : Trans. ASME. Vol. 82 Ser. D (1960-3)
P.233
- (37) E.S.Taylor : Trans. ASME Vol.81. Ser.D (1959-8)
P.297
- (38) W. Jansen : Trans. ASME. Vol. 86 Ser.D (1964-9)
P.607
- (39) 古 屋 , 川 口 : 日本機械学会論文集第 3 2 卷 第 2 3 5 号
(昭 4 1 - 3)
- (40) G. Klingemann : Ing. Arch. Vol.11 (1940) P.151
- (41) H. Krüger : Ing. Arch. Vol.26 (1958) P.243
- (42) 村 田 暹 : 日本機械学会論文集 第 2 7 卷 第 1 7 7 号
P.666 ほか (昭 3 6 - 5)
- (43) 沼 知 福三郎 : 日本機械学会誌 , 第 3 4 卷 (昭 6 - 7)
P.986
- (44) J.H. Horlock : Trans. ASME Vol.85 Ser.D (1963) P.85
- (45) 神 元 . 平 井 : 日本機械学会論文集第 1 9 卷第 8 5 号
(昭 2 8 - 1) P.37
- (46) J. E. Ash : ASME Paper No.56-A205 (1956-11)
- (47) J.D. Staniz : Trans. ASME Vol.74(1952-5) P.473
- (48) 大宮司 久 明 : 東北大学速研報告 第 2 1 卷 第 2 0 9 号