数理ファイナンスの論理構造に関する研究と応用

大阪大学大学院経済学研究科提出 学位請求論文

赤壁弘康

神戸学院大学 経済学部経営学科

2000年9月4日

目次

全体の構成と各章の概要

Black-Scholes[43] 以降、ファイナンス理論の数学的精緻化は徐々に加速していったが、Harrison-Kreps[81] ならびに Harrison-Pliska[82] の登場によってその流れは一気にピークに達し、数理ファイナンスと呼ばれるひとつの分野を形成するまでにいたった。(1)数理ファイナンスは今日では、もっとも成功した数理経済学のひとつの分野、あるいは、数学者（特に確率論の研究者）にとっての絶好の応用フィールド、とみなされているようである。

学問研究と実務の双方にとって、理論の整備は歓迎されることである。しかし、われわれのような数学プロパーでない一般のファイナンス研究者には、この状況はきわめて過酷なものとなっている。というのも、数学プロパーにとっては自明であることも一般のファイナンス研究者にとっては必ずしも自明ではないため多くの時間と労力を数学的準備のために費やし、それがため、高度な数学的バックグラウンドを前提とする数理ファイナンスの論理構造を把握するまでに疲労してしまい、ファイナンス理論のエッセンスを簡単には享受し得ないからである。

そこで、本稿は、まず第1に数理ファイナンスの論理構造を正確に把握することを主たる目的とする（第1部、第1章・第2章)。次に、第1部で明らかにされた数理ファイナンスの論理構造を踏まえ、ファイナンス理論の中心的なアプリケーションであるオプション評価・期間構造モデルへと進む（第2部、第3章・第4章)。

第1部（第1章、第2章）は、数理ファイナンスの論理構造の中核をなす証券市場均衡における証券価格評価の問題を取り扱う。第1部のアプローチの特徴は、ともに状態価格デフレータを基礎とする点にある。(2)

第1章の目的は、離散時間かつ無限期間の設定の下で、一期間状態価格アプローチに対応する結果を導くことにある。無限期間問題は有限期間問題の極限であり、有限期間の場合には表面に現れない理論的な問題点が顕在化することから、有限期間の設定ではなく敢えて無限期間の設定を採用した。離散時間モデル設定は後に続く連続時間モデルへの橋渡しとしての意味とともに、より広いクラスの価格過程に適応し得る。ここでは、まず市場参加者の最適化問題を Markov ダイナミック・プログラミングとして定式化することから議論を始め、Markov 均衡が明らかにされる。しかる後に、Markov 性を仮定せずに証券価格の無裁定あるいは最適性の含意が考察される。ただし、本章は市場参加者の効用最大化問題からスタートするため、採用されている取引戦略のクラスはいわゆる自己資金充足的な取引戦略（self-financing trading strategy）ではなく、消費資金充足的な取引戦略であることに注意をしなければならない。(3)

これに対して第2章は、参加者の期待効用アプローチから離れ、証券市場の均衡そのものを考

(1)このことは、*Mathematical Finance*、*Finance and Stochastics* 等の数理 Finance に関する専門雑誌が相次いで刊行されていることからもわかる。

(2)Arrow-Debreu 証券をもとにする状態価格アプローチについては Duffie[66, Chp.1] あるいは赤壁 [2] を参照されたし。

(3)本章で採用されている取引戦略のクラスは、Breeden[46] による消費ベースの資本資産評価モデル（CCAPM）で採用される取引戦略のクラスの離散時間版であると見ることができる。

察対象とする。特に状態価格デフレータの果たす役割を中心として、数理ファイナンス論の主要結果である「連続時間における無裁定証券価格の理論」の論理構造を解明することを目的とする。取引戦略の空間として確率積分を定義するに足るある可積分な適合過程の空間を前提とし、「状態価格デフレータの存在は裁定が存在しないこと」「裁定が存在しないための十分条件は同値マルチンゲール測度が存在すること」を証明して、無裁定証券価格理論の論理構造を自己充足的・体系的に把握することを意図した。

証券価格理論の論理構造を正確にアプローチするという目的にとっては、定理・補題等の意味内容を正確に把握することはもちろんであるが、その証明がきわめて重要な意味を持つ。そこで第1部では、読み易さは多少犠牲にすることにして、証明を本文中に陽に示すことにした。

ファイナンス理論が今日の成功をおさめたひとつの原因として、Black-Scholes[43] や Merton[114] らによるオプション評価理論や、CIR モデル [54]・HJM モデル [85] に代表される期間構造モデルなど、きわめて優れたファイナンス理論のアプリケーションが存在したことがあげられる。そこで第2部（第3章、第4章）では、第1部で明らかにされた数理ファイナンスの論理構造を踏まえて、これらファイナンス理論のアプリケーションを構築、あるいは再評価する。

第3章では、経路依存型エキゾチックオプションのひとつであるロシア型オプションの新しいモデルを提示する。Shepp-Shiryaev[129] によって提唱されたロシア型オプションは、エキゾチックオプションのなかでも数学的に興味あるオプションであるが、価格の有限性を保証するにはあまり現実的とはいえない仮定を必要とした。他方、Duffie-Harrison[68] は、オプションの本源的証券である株式に連続的な配当がある場合には、ロシア型オプションが無裁定取引戦略によって複製可能であることを示している。しかし、時間を通じて一定の配当利回りの連続的配当をもつ証券（株式）のみを対象とすることは、少なくとも現実的な妥当性の観点からは、きわめて強い制約条件であるといわざるを得ない。そこで本章では、連続的配当に依存しない有限の市場価値をもつロシア型オプションモデルを提示し、マルチンゲール価格理論アプローチにしたがって、このオプションの評価と複製戦略を厳密に導くことにする。モデルのもっとも本質的な前提は、ロシア型オプションの本源的資産を単一株式とするのではなく、幾何平均インデックスとすることにある。

第4章では、利子率の期間構造モデルの中でも代表的な Cox-Ingersol-Ross[54] の期間構造モデルと Heath-Jarrow-Morton[85] モデルを取り上げる。CIR と HJM の期間構造モデルはともに後に続く論文の創出効果が高く、数理ファイナンス論の分野では非常に大きな貢献を成し遂げたが、単一因子による CIR モデルよりは因子に依存しない HJM モデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。また、ボラティリティ係数にのみ依存する HJM モデルは、期間構造派生証券の理論価格を計算する際に、きてきわめて強力であると考えられているようである。本稿は、マルチンゲール価格理論アプローチから両モデルを詳細に再検討した結果、このような見解が支持し得ないことを主張する。この目的のために、モデルの差異にかかわらず成り立つ利子率の期間構造モデルの一般理論を提示する。この議論にもとづいて、前者の観点に対しては、ゼロクーポン債の価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度の存在性・一意性を主張し得るかどうか、あるいはボラティリティ係数が一意であることをモデルの内在的な仮定のみから主張し得るかどうか（ゼロクーポン債の明示的な価格公式の導出プロセス）を検討し、HJM モデルはこの点に関して弱点を持つことを見る。後者の観点に対しては、期間構造派生証券の端的な例としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ、その明示的な評価公式を導出し、CIR モデルと HJM モデルにおけるそれぞれの計算コストの比較を行う。結果として得られた評価公式の計算コストは、HJM モデルがはるかに安価であることが確認されるが、

コールの明示的評価公式を導出する際の、HJM モデルの特定化に問題があることを見る。

本稿の第 1 章から第 3 章までは、日本経営財務研究学会編『経営財務研究双書』に掲載、ないしは掲載許可された論文を加筆修正したものである。[4]この場を借りて、経営財務研究双書編集委員会、ならびに適切なコメントをいただいた匿名レフェリー諸氏には心から感謝を申し述べたい。もちろん、各章に残されている誤謬が筆者の責に帰すものであることはいうまでもない。また、第 4 章は現在のところ学術誌に投稿中であり、最終的な審査結果を待っている段階であることを付記する。

[4]巻末の参考文献リストを参照されたし。

第I部

数理ファイナンスの論理構造に関する研究

第1章　離散時間モデルにおける無限期間状態価格アプローチ

要旨

本章の目的は、無限期間の設定の下で、一期間の状態価格アプローチに対応する結果を導くことにある。まず、市場参加者の最適化問題を Markov ダイナミック・プログラミングとして定式化することから議論を始め、Markov 均衡を明らかにする。しかる後に、Markov 性を仮定せずに証券価格の無裁定あるいは最適性の含意を考察する。

キーワード

有界適合過程、Blackwell の不動点定理、Markov 均衡、証券市場均衡、Riesz の表現定理

はじめに

一期間の状態価格アプローチでは、裁定・最適性・均衡などのファイナンス論の中心的な概念が厳密に定義され、あるいは分析され得ることが示されている (Duffie[63, 64, 65, 66])。一期間の状態価格アプローチは、有限集合で表わされる状態が $j \in \{1, \ldots, S\}$ であるときに証券 i $(i = 1, \ldots, N)$ によって支払われる配当 D_{ij} を要素とする $N \times S$ 配当行列 D によって特徴づけられる。一期間の状態価格アプローチを多期間に拡張するには、ペイオフ $D^{\top}\theta$ を確率過程（配当過程）に拡張することを別にすれば、さほど困難はない（実際には、以下の定義 1.2.1 で定義される状態価格関数 $\mathfrak{S}$ によって対応づけられる）。むしろ、有限期間か無限期間かで、モデルに課される制約が異なる。無限期間を取扱うためには、有限期間よりも厳しい制約が課され、しかも有限期間の場合には表れない数学的な技術が必要となる。それゆえ、無限期間で得られる結果は、それと同等ないしはより緩い制約条件の下で、有限期間においても得られる。

したがって、本章の目的は、無限期間の設定の下で、一期間の状態価格アプローチ（たとえば Duffie[66, Chp.1]）に対応する結果を導くことにある。

離散時間無限期間の設定は、離散時間多期間モデルによる資産評価を取り扱った Samuelson[128], Levhari-Srinivasan[107], Lucas[109] らの先駆的業績と大いに関連する。特に、Markov ダイナミック・プログラミングを用いて定式化した Lucas[109] は無限期間設定の理論的な骨格をほとんど完成したといってよいであろう。無限期間状態価格アプローチに関する最近の業績では Duffie[63, 65, 66] が体系的かつ詳細である。しかし、Duffie[63] は Borel 空間を前提にしており、数学プロパーでないファイナンス研究者にとっては初等的なアプローチとはいい難い。また、Duffie[65, 66] は関数空間を工夫することによって前者に比べれば数学的には初等的アプローチになっており大いに参考になるが、議論を厳密に展開するために不可欠な証明がまったく付されていないため、(1.1) 自己充

(1.1) 唯一の例外は Duffie[65, 66, Chp.4, Sec.A, Thm.] であるが、作用素 $\mathfrak{U}$ の定義の相違によってこの定理の証明は完全に同じわけではない。後の脚注 (1.9), (1.14) を参照されたし。

足的とは言い難い。そこで本章は、概ねDuffie[66, Chp.4]の分析の流れをフォローしながら、可能な限り自己充足的に証明を施すことにする。

まず、状態価格関数 $\mathfrak{S}$ を固定して市場参加者の効用最大化問題を Markov ダイナミック・プログラミングとして定式化することから議論を始め（第2, 3節）、この後に、Markov 性を仮定せずに証券価格の無裁定あるいは最適性の含意を考察する（第4, 5節）。第2節では、この時間斉次 Markov ダイナミック・プログラミングの値関数が Blackwell の不動点定理 1.2.1 で示唆される一意な不動点として与えられることを示す。第3節では、状態価格関数 $\mathfrak{S}$ によって Markov 単一参加者均衡を特徴づける。$\mathfrak{S}$ が Markov 単一参加者均衡であるための必要十分条件は、$\mathfrak{S}$ が確率 Euler 方程式 (1.12) を満足することであることが示される。第4節では、有界適合過程の空間 L を前提として T 期裁定が存在しないとき、状態価格版配当割引モデルが導出される。しかし無限期間設定（$T \to \infty$）のとき、配当割引モデルと資産価格のバブルの理論の関係と同様、状態価格デフレータ $\pi \in L$ の存在性・一意性は保証されなくなる。そこで L にあるノルムを備えた $L^* \subset L$ を状態価格デフレータの候補の空間に選ぶことによって、第5節で Markov 性を仮定しない最適性が主張される。そこでは Markov 設定に依存することなく、確率 Euler 方程式 (1.12) が均衡の必要条件であることが示される。次に、S が単一参加者経済の均衡であるための必要十分条件は、市場参加者の効用関数の方向微分 $\nabla U(e)$ に対する Riesz 表現 $\pi \in L^*$ が状態価格デフレータとなることによって与えられることを主張する。

1.1　証券市場—モデルの一般的な前提—

無限期間問題を取り扱うためには、確率変数の収束と極限操作が不可欠になる。まず、これを明らかにしておこう。

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ を固定すれば、すべての $\epsilon > 0$ に対して $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \to 0$ であるとき、確率変数列 $\{X_n\}$ は X に**確率収束**するといわれる。事象 B のすべての ω に対して $X_n(\omega) \to X(\omega)$ となるような確率1の B が存在するとき（言い換えれば、確率1で $X_n(\omega) \to X(\omega)$ となれば）、確率変数列 $\{X_n\}$ は X に**概収束**するといわれる。このとき、Lebesgue の優越収束定理の名で知られている以下の定理が成り立つ。(1.2)

定理 1.1.1 (Lebesgue の優越収束定理). $\{X_n\}$ **はすべての** n **に対して** $|X_n| \leq Y$ **である確率空間上の確率変数列とし、**Y **は** $\mathbb{E}(Y) < \infty$ **である確率変数とする。**X_n **は** X **に概収束するとする。このとき** $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$。

証明の詳細についてはたとえばLiptser-Shiryayev[108, Thm.1.4], Shiryayev[131, Chp.II, Sec.6, Thm.3] を参照されたし（Liptser-Shiryayev[108, p.16, Note 1] は、概収束列 $\{X_n\}$ を確率収束列としても定理が成り立つことを示している）。この定理は、収束確率変数列に関しては、期待値演算と極限操作は交換可能であることを保証している。

k を定数として $|X_t| \leq k$ を満足する $\mathfrak{F}_t$ 可測な確率変数を考える。このような確率変数に対して $X = \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ で表される確率変数列の空間を L で表わすものとする。言い換えれば、L は**有界適合過程の空間**である。L が有界適合過程の空間であるから、L に属するすべての確率変数列に関して、Lebesgue の優越収束定理 1.1.1 を適用することができる。

(1.2)「優越収束定理」は dominated convergence theorem の訳語である。しかし伊藤 [12, p.2] が指摘するように、dominated convergence theorem には適当な訳語がない。本章では、「有界収束定理」(bounded convergence theorem) と区別するために、あえてこの訳語を採用した。

N 種の証券が存在するものとする。ここで、証券 n は L に属する配当過程 δ^n に対する請求権として定義され、L に属する（配当支払後）価格過程 S^n を有するものとする。ただし、δ_t^n は時刻 t に証券 n によって支払われる配当額を表す。(1.3)取引戦略とはある $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^N) \in \Theta \equiv L^N$ である。ここで、$\theta_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^N)$ は、取引きの後、時刻 t で保有されるポートフォリオを表す。Θ に属する各々の θ は

$$\delta_t^\theta = \theta_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \theta_t \cdot S_t, \quad t \geq 0$$

によって定義される配当過程 δ^θ を生成する。ここで慣習によって $\theta_{-1} = 0$ と仮定される。はじめに無限期間設定における**裁定**を定義しておく。(1.4)

定義 1.1.1. 無限期間における**裁定**とは、$\delta^\theta > 0$ であるような取引戦略 θ を意味する。$T < \infty$ に対して T 期裁定とは、$\delta^\theta > 0$ かつ $\theta_t = 0,\ t \geq T$ であるような裁定 θ を意味する。

裁定が存在しないならば、明らかに、任意の T に対して T **期裁定**が存在しない。状態価格デフレータは次のように定義される。

定義 1.1.2. $\theta_t = 0,\ t \geq T$ であるような任意の取引戦略 θ に対して $\mathbb{E}(\sum_{t=0}^T \pi_t^T \delta_t^\theta) = 0$、かつ、$\pi_0^T = 1$ である狭義に正の過程 $\pi^T \in L$ を T 期状態価格デフレータという。

市場参加者は L の非負過程の集合 L_+ から消費過程を選択するものとする。消費過程は実行可能予算集合 $\Theta(e)$ から取られるものとする。

定義 1.1.3. 消費過程を資金調達するに足る実行可能予算集合 $\Theta(e)$ を、$\Theta(e) = \{\theta \in \Theta:\ e + \delta^\theta \geq 0\}$ で定義する。

所与の市場参加者は、L_+ に属する賦存額過程 e と(1.5)状態 $i \in Z$ を所与として、効用関数 $U^i:\ L_+ \to \mathbb{R}$ を有するものとする。この参加者の問題は

$$\sup_{\theta \in \Theta(e)} U^i(e + \delta^\theta)$$

である。この問題は、経済学の観点から見れば、実行可能予算集合 $\Theta(e)$ から効用を最大化するように消費過程（したがってポートフォリオ θ）を選択する市場参加者の効用最大化問題を表わしている。

1.2 市場参加者の最適化問題の Markov ダイナミック・プログラミングとしての解

本節では、上述の市場参加者の効用最大化問題を解くための第1段階として、U^i, e, δ^θ が時間斉次性を満たすという前提の下で、時間斉次 Markov 制御問題（Markov ダイナミック・プログラミング）の値関数を求めるという特殊化された問題を考える。分析のステップは、時間斉次 Markov ダイナミック・プログラミングの値関数が Blackwell の不動点定理 1.2.1 で示唆される一意な不動点として与えられることを示すことにある。

(1.3) $\delta \in L_+$ ではなく $\delta \in L$ で定義されているから、一般に「負の」配当も排除されていないことに注意せよ。
(1.4) 以下の裁定の定義は、現在もっとも一般に採用されている Ross[127] の裁定の定義と矛盾するものではないことは明らかである。
(1.5) すなわち、賦存額過程 e とは、証券取引（配当 δ^θ）以外から市場参加者が受け取る（サラリーのような）非負の付加的利得過程を意味する。

$X=\{X_1,X_2,\ldots\}$は、有限集合Z上の時間に関して斉次な[1.6]Markov連鎖であるとする。[1.7]$\mathfrak{F}_t$によって$\{X_0,\ldots,X_t\}$から生成される必ずしも有限ではない状態集合Ωの族を表わすことにする。Markov連鎖Xが有限集合Zで値をとることから、各々のtに関して$\mathfrak{F}_t$には単に有限個の事象しか含まれないということになる。

時間斉次Markovモデルを展開するため、はじめに効用関数、賦存額、証券配当が特殊な時間斉次性を満足するものとする。iを所与として、効用関数$U^i:\ L_+\to\mathbb{R}$が割引率$\rho\in(0,1)$と、[1.8]狭義に増加・有界・凹かつ連続な関数$u:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$によって

$$U^i(c)=\mathbb{E}^i\left[\sum_{t=0}^{\infty}\rho^t u(c_t)\right] \tag{1.1}$$

のように定義されるものとする。ここで$\mathbb{E}^i$は$X_0=i$に関する確率測度$\mathbb{P}_i$の下でとった期待値を表わす。関数$g:\ Z\to\mathbb{R}_{++}$および$f:\ Z\to\mathbb{R}^N_{++}$によって、すべての$t$に対して賦存額が$e_t=g(X_t)$で、配当ベクトルが$\delta_t=f(X_t)$で与えられるものとする。

最後に、証券価格は、すべてのtに関して$S_t=\mathfrak{S}(X_t)$となるようなある固定された関数$\mathfrak{S}:\ Z\to\mathbb{R}^N_{++}$によって与えられるものとする。本来、状態価格は各々の状態iと配当過程δ^θを対応づけるものであるべきである。しかし各証券の配当δ^nは仮定によって$\mathbb{R}^n$値証券価格過程Sに体化されているので、この関数$\mathfrak{S}$はある状態$i\in Z$と証券価格S_tを対応づけるものであるから、状態価格アプローチの本質的な部分とみなしてよい。

定義 1.2.1. すべてのtに関して証券価格が$S_t=\mathfrak{S}(X_t)$となるようなある関数$\mathfrak{S}:\ Z\to\mathbb{R}^N_{++}$によって与えられるとき、$\mathfrak{S}$を**状態価格関数**という。

次節において、この状態価格関数$\mathfrak{S}$がMarkov均衡を特徴づけることが明らかにされる。

ここで、$\mathbb{R}^n_{++}$に属するポートフォリオbを固定し、$-b$を空売りポジションの下限とする。この制約は後で取り除かれるが、現在のところは、富は

$$\underline{w}=\min_{i\in Z}-b\cdot[\mathfrak{S}(i)+f(i)]$$

によって下から有界であるとする。

定義 1.2.2. $D=Z\times[\underline{w},\infty)$とする。$Z$に属する各々の$i$に対して$F(i,\cdot):\ [\underline{w},\infty)\to\mathbb{R}$が有界・連続な凹関数であれば、関数$F:\ D\to\mathbb{R}$は関数空間$B(D)$に属すると定義する。

上述の市場参加者の効用最大化問題は、参加者のMarkov制御問題の値としてある$V\in B(D)$を求める問題に特殊化される。すなわち

$$V(i,w)=\sup_{(c,\theta)\in L_+\times\Theta}U^i(c) \tag{1.2}$$

[1.6]これは、定常推移確率行列を有するということを意味する。

[1.7]Markov連鎖に関するいくつかの文献（たとえばChung[52]、Freeman[75]等）は、各々のiに関して、$\mathbb{P}_i(X_0=i)=1$およびqを所与の推移確率行列として

$$\mathbb{P}_i(X_{t+1}=j|\ X_0,\ldots,X_t)=q_{X_t,j},$$

という明らかな性質を満足する確率空間$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P}_i)$が存在することを説明している。

[1.8]以下の議論は、形式的には$\rho\in[0,1)$で成り立つ。$\rho=0$のケースは割引かない直近の効用のみが対象となる場合であるので、無限期間を考察するという本章の目的からこのケースを落としている。

が制約

$$W_0^\theta = w \tag{1.3}$$
$$W_t^\theta = \theta_{t-1} \cdot [\mathfrak{S}(X_t) + f(X_t)], \quad t \geq 1 \tag{1.4}$$
$$c_t + \theta_t \cdot \mathfrak{S}(X_t) \leq W_t^\theta + g(X_t), \quad t \geq 0 \tag{1.5}$$
$$\theta_t \geq -b, \quad t \geq 0 \tag{1.6}$$

の下で成り立つような $V \in B(D)$ を求めなければならない。

$B(D)$ に属する任意の F に対して値関数 V を解き、この解の候補から以下で述べるような $\mathfrak{U}F$ で表わされる新しい候補を構成することにする。$F = \mathfrak{U}F$ ならば $F = V$ となることを示すことがここの手法である。$B(D)$ に属する任意の F に対して、$\mathfrak{U}F:\ D \to \mathbb{R}$ を

$$\mathfrak{U}F(i,w) = \sup_{(\bar{\theta},\bar{c}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \Big[u(\bar{c}) + \rho \mathbb{E}^i \Big[F\big(X_2, \bar{\theta} \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\Big]\Big] \tag{1.7}$$

が制約

$$\bar{c} + \bar{\theta} \cdot \mathfrak{S}(i) \leq w + g(i) \tag{1.8}$$
$$\bar{\theta} \geq -b \tag{1.9}$$

の下で成り立つようなものとして定義する。言い換えれば、$\mathfrak{U}F(i,w)$ は、次期の値関数が F であるとして、(i,w) であるときに達成し得る上限効用を表わしている。(1.9)

補題 1.2.1. ***F が $B(D)$ に属するならば、$\mathfrak{U}F$ も $B(D)$ に属する。***

証明. $\mathfrak{U}F \in B(D)$ を主張するには、$\mathfrak{U}F(i,w)$, $w \in [\underline{w}, \infty)$ が各々の $i \in Z$ に対して有界、凹、連続であることを示す必要がある。$\mathfrak{U}F$ の凹性が証明されれば、連続性は証明し得る。(1.10)
（凹性） (i,w_1), (i,w_2), $w_1, w_2 \in [\underline{w}, \infty)$ のときの解をそれぞれ

$$(c_1, \theta_1) = (C(i,w_1), \Phi(i,w_1)), \quad (c_2, \theta_2) = (C(i,w_2), \Phi(i,w_2))$$

とする。したがって

$$\mathfrak{U}F(i,w_1) = u(c_1) + \rho \mathbb{E}^i \big[F\big(X_2, \theta_1 \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\big],$$
$$\mathfrak{U}F(i,w_2) = u(c_2) + \rho \mathbb{E}^i \big[F\big(X_2, \theta_2 \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\big].$$

(1.9) Duffie[65, Chp.4, p.61]（初版）では、$\mathfrak{U}$ の定義として

$$\mathfrak{U}F(i,w) = \sup_{(\bar{\theta},\bar{c}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} \Big[\rho u(\bar{c}) + \rho \mathbb{E}^i \Big[F\big(X_2, \bar{\theta} \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\Big]\Big]$$

が採用されていた。しかしこの作用素 $\mathfrak{U}$ の定義では以下の定理 1.2.2 を証明することができない。Duffie[66, Chp.4, p.65]（改訂版）では、(1.7) と同一の作用素 $\mathfrak{U}$ の定義が採用されおり、この誤りが訂正されている。

(1.10) 凹関数（凸関数）の一般的な性質については、Rockafellar[123]、辻 [24]、田中 [22] 等の文献を参照されたし。

ところで最適性の原理より（$\min[w_1, w_2] \leq \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \leq \max[w_1, w_2]$）

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}F(i, \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) &\geq u(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) \\
&\qquad + \rho\mathbb{E}^i\big[F\big(X_2, (\lambda\theta_1 + (1-\lambda)\theta_2)\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\big] \\
&\geq \lambda u(c_1) + (1-\lambda)u(c_2) \\
&\qquad + \lambda\rho\mathbb{E}^i\big[F\big(X_2, \theta_1\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\big] \\
&\qquad\quad + (1-\lambda)\rho\mathbb{E}^i\big[F\big(X_2, \theta_2\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\big] \\
&= \lambda\mathfrak{U}F(i, w_1) + (1-\lambda)\mathfrak{U}F(i, w_2).
\end{aligned}$$

（有界性）$F \in B(D)$ であるから有界、すなわち

$$\text{for each } i \in Z \quad |F(i,w)| \leq M, \quad \exists M < \infty, \ \text{for } \forall w \in [\underline{w}, \infty)$$

であるから、$\mathbb{E}^i[F(X_2, \bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)])] \leq M$。$u$ は有界、すなわち $|u(x)| \leq K$, $\exists K < \infty$, $x \in \mathbb{R}_+$。したがって $|\mathfrak{U}F(i,w)| \leq \rho(K+M)$。
（連続性）$\mathfrak{U}F(i,\cdot)$ が有界な凹関数であることから、$[\underline{w}, \infty)$ の内部で連続であることは、Jensen の不等式を応用することによって証明することができる。[1.11] □

$B(D)$ に属する任意の関数 F, G に対して、2 関数間の「距離」の概念を用いて

$$d(F,G) = \sup\big\{|F(i,w) - G(i,w)| : \ (i,w) \in D\big\}$$

とする。$d(\cdot,\cdot)$ は以下の距離の公理を満足する。

1. $d(F,G) = 0$ であるとき、かつそのときに限り $F = G$ である。
2. $d(F,G) = d(G,F)$,（対称性の公理）
3. $d(F,H) + d(H,G) \geq d(F,G)$,（三角形の公理）

関数解析のテキスト（たとえば Kolmogolov–Fomin[101, Chp.2] 等）によれば、距離の公理を満足する $d(\cdot,\cdot)$ は完備距離空間を生成することが知られている。また、藤田・黒田・伊藤 [27, 定理 2.1, 定理 2.2] では、完備距離空間上の列を項とする級数が絶対収束するならば、級数も収束する（逆に、ノルム空間上の列を項とする任意の級数が絶対収束してかつ級数自体も収束するならば、ノルム空間は完備である）ことが示されている。

補題 1.2.2. **$B(D)$ に属する任意の F および G に対して、**$d(\mathfrak{U}F, \mathfrak{U}G) \leq \rho d(F,G)$.

証明. $m = d(F,G) = \sup\{|F(i,w) - G(i,w)| : \ (i,w) \in D\}$ とする。このとき

$$F(i,w) \leq G(i,w) + m \quad \text{for } (i,w) \in D.$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}F(i,w) &= \sup_{(\bar{\theta},\bar{c})\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+} \Big[u(\bar{c}) + \rho\mathbb{E}^i\Big[F\big(X_2, \bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)\Big]\Big] \\
&\leq \sup_{(\bar{\theta},\bar{c})\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+} \Big[u(\bar{c}) + \rho\mathbb{E}^i\Big[G\big(X_2, \bar{\theta}\cdot[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big) + m\Big]\Big] \\
&= \mathfrak{U}G(i,w) + \rho m.
\end{aligned}$$

[1.11] 有界凸（凹）関数の連続性に関しては、たとえば辻 [22] あるいは田中 [22] を参照されたし。

同様に

$$G(i,w) \leq F(i,w) + m \quad \text{for } (i,w) \in D.$$

したがって、$\mathfrak{U}G \leq \mathfrak{U}F + \rho m$。かくして

$$d(\mathfrak{U}F, \mathfrak{U}G) \leq \rho m = \rho d(F,G).$$

よって与えられた主張は証明された。 □

この補題を用いれば、**Blackwell の不動点定理**(1.12)の名で知られているいわゆる**縮小写像の原理**によって、方程式 $\mathfrak{U}F = F$ に対する一意解 F を構成することができる。

定義 1.2.3. $F = \mathfrak{U}F$ を満たす一意解 F を、作用素 $\mathfrak{U}$ の**不動点**という。

以下の結果から示されるように、計画期間が無限大に近づくとき、有限計画期間問題の値関数の極限として構成されることがわかる。(1.13)

定理 1.2.1 (Blackwell の不動点定理). **D に属するすべての (i,w) に対して $F_{-1}(i,w) = 0$ であり**

$$F_t = \mathfrak{U}F_{t-1}, \quad t \geq 0$$

とする。このとき、D に属するすべての (i,w) に関して $F(i,w) \equiv \lim_{t\to\infty} F_t(i,w)$ が存在し、$F = \mathfrak{U}F$ を満たす $B(D)$ に属する一意関数 F が存在する。

証明. (一意性) ϕ, $\psi \in B(D)$ がともに作用素 $\mathfrak{U}$ の不動点である、すなわち

$$\phi = \mathfrak{U}\phi, \quad \psi = \mathfrak{U}\psi$$

とする。したがって補題 1.2.1 から

$$d(\phi,\psi) = d(\mathfrak{U}\phi, \mathfrak{U}\psi) \leq \rho d(\phi,\psi). \quad ゆえに\ 0 \leq (1-\rho)d(\phi,\psi) \leq 0.$$

$1-\rho > 0$ から $d(\phi,\psi) = 0$。距離の公理からこれは $\phi = \psi$ を意味する。

(存在性) $F_t = \mathfrak{U}F_{t-1}$ であるから、関数列 $\{F_t\}_{t=0}^{\infty}$ は確かに定義される。不等式

$$d(F_{t+1}, F_t) = d(\mathfrak{U}F_t, \mathfrak{U}F_{t-1}) \leq \rho d(F_t, F_{t-1})$$

を逐次繰り返し用いることによって

$$d(F_{t+1}, F_t) \leq \rho^{t+1} d(F_0, F_{-1})$$

を得る。したがって $0 < \rho < 1$ と $F_{-1} = 0$ より

$$\sum_{t=0}^{\infty} d(F_t, F_{t-1}) < +\infty.$$

$X_t = F_t - F_{t-1}$ とおけば、$\|X_t\| = \sup|F_t - F_{t-1}| = d(F_t, F_{t-1})$ であるから、上は $\sum_{t=0}^{\infty} \|X_t\| < +\infty$ となり級数 $\sum_{t=0}^{\infty} X_t$ が絶対収束することを示している。したがって、級数 $\sum_{t=0}^{\infty} X_t$ が収束するから $\lim_{n\to\infty} F_n = F^*$ は存在する。$n \to \infty$ とすれば $F^* = \mathfrak{U}F^*$ を得る。 □

(1.12)Blackwell[44] を参照されたし。ただし、以下の定理 1.2.1 の証明は Blackwell[44] とは独立である。

(1.13)Lucas[109] も縮小写像の原理によって、同様の定理を証明している。しかし、Lucas[109] の証明は位相空間における Berge[41] の主張を前提にしたもので、以下の証明とはまったく異なる。

以上の証明は、$d(\cdot,\cdot)$ が完備距離空間を生成するということを利用しており、その意味で、「縮小写像」の存在と一意性に関するものと同等である。

$C : D \to \mathbb{R}_+$, $\Phi : D \to \mathbb{R}^N$ は $[C(i,w), \Phi(i,w)]$ が (1.7)-(1.9) の解であるとすることによって定義される関数とする。また、(1.2)-(1.6) の初期状態 (i,w) を所与として、W^* を $W_0^* = w$ かつ $W_t^* = \Phi(W_{t-1}^*, X_{t-1})[S(X_t) + f(X_t)]$, $t \geq 1$ によって定義されるものとする。さらに、(c^*, θ^*) を $c_t^* = C(W_t^*, X_t)$ かつ $\theta_t^* = \Phi(W_t^*, X_t)$, $t \geq 0$ によって定義されるものとする。

定義 1.2.4. (c^*, θ^*) を**最適フィードバック政策**という。

定理 1.2.2. (Duffie[66, Chp.4, Sec.A, Thm.]) (1.2)-(1.6) **の値関数** V **は** $\mathfrak{U}$ **の一意な不動点である。最適フィードバック政策** (c^*, θ^*) **は** (1.2)-(1.6) **の解である。**

証明. F を Bellman 方程式の一意解とする。Z に属する任意の初期状態 i と $[\underline{w}, \infty)$ に属する初期資産 w を固定する。任意の時刻 t において、Bellman 方程式から

$$F(X_t, W_t^\theta) \geq u(c_t) + \rho \mathbb{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta) |\, X_t].$$

両辺に ρ^t をかけて移項すれば

$$\rho^t F(X_t, W_t^\theta) - \rho^{t+1} \mathbb{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta) |\, X_t] \geq \rho^t u(c_t). \tag{1.10}$$

両辺の期待値をとり、反復期待値の法則を用いれば

$$\mathbb{E}^i[\rho^t F(X_t, W_t^\theta)] - \rho^{t+1} \mathbb{E}^i[F(X_{t+1}, W_{t+1}^\theta)] \geq \mathbb{E}^i[\rho^t u(c_t)].$$

任意の $T \geq 1$ に対し、時刻 $t = 0$ から $t = T$ まで上の式の和を計算すれば、左辺の各項が互い違いにキャンセルして、結局

$$\mathbb{E}^i[F(X_0, W_0^\theta)] - \rho^{T+1} \mathbb{E}^i[F(X_{T+1}, W_{T+1}^\theta)] \geq \mathbb{E}^i\left[\sum_{t=0}^{T} \rho^t u(c_t)\right]$$

となる。F は有界、$\rho \in (0,1)$ であるから、$T \to \infty$ のとき左辺の極限は $F(i,w)$ になる。優越収束定理 1.1.1 によって、右辺の極限は $U^i(c)$ になる。かくして $F(i,w) \geq U^i(c)$ となり、これは任意の i, w に対して $F(i,w) \geq V(i,w)$ を意味する。以上の計算はフィードバック政策 (c^*, θ^*) にも当てはまる。このフィードバック政策に関して C, Φ の定義を用いれば、(1.10) の不等式を等式で置き換えることができる。このことによって、最終的に $F(i,w) = U^i(c^*)$ を得る。(i,w) は任意であったから、V は実際に値関数であり、かつ (c^*, θ^*) が最適政策であるということを意味している。したがって定理の主張は証明された。 □

本質的な部分は Blackwell の不動点定理 1.2.1 で既に明らかにされたとおりであり、この定理はそれの言い換えにすぎない。(1.14)

(1.14)以上の証明は Duffie[66, Chp.4, Sec.A, Thm.]（改訂版）と本質的に同一である。作用素 $\mathfrak{U}$ の定義の違いによって（脚注 (1.9) を参照されたし）、Duffie[65, Chp.4, Sec.A, Thm.]（初版）とは証明が若干異なる。後者の証明（Duffie[65, Chp.4, Sec.A, Thm.]）は正しくない。

1.3 Markov ダイナミック・プログラミングと Markov 均衡

前節では、最適制御が現在の状態–富の組合わせ (i, w) で表わされる最適消費およびポートフォリオを特定する政策関数 C および Φ によって与えられるとしたとき、フィードバック型の最適制御が存在することが示された。同じアプローチによって均衡を特徴付けるために、この節ではより強い効用条件を採用することにする。u が狭義に増加・有界・凹かつ連続であるとした最初の仮定に付け加えて、次の正則条件を設定する。

仮定 1.3.1. 関数 u は $(0,\infty)$ において狭義に凹かつ微分可能である。

前節で導入した状態価格関数 $\mathfrak{S}$ によって、Markov 均衡を特徴づけることに進む。

定義 1.3.1. 最適フィードバック制御 C, Φ を任意の i に対して $C(i,0)=g(i)$, $\Phi(i,0)=0$ となるように選ぶことができるとき、状態価格関数 $\mathfrak{S}$ を **Markov 単一参加者均衡**という。

注意 1.3.1. Duffie[66, Chp.1, Sec.E, Prop.] によれば、単一参加者経済 $[(U_\lambda, e), D]$ の均衡（最適ポートフォリオと状態価格の組み）は $(0,q)$ で与えられる。したがって、(1.4)(1.5) から任意の i に対して $w=0$, $\Phi(i,0)=0$, $C(i,0)=g(i)$ であれば、単一参加者経済は Markov 均衡することがわかる。

この定義によれば、参加者が自分の賦存額以上にいかなる資産も当初与えられていない場合には、消費および証券市場は常に清算される。均衡に関しては、ポートフォリオの空売り制約は不必要である。なぜなら、解 $(e,0)$ はこの空売り制約に拘束されていないからである。さらに、以下で示される均衡（しかもこれは一意である）は、$-b$ に選ばれた特定の下界に依存していない。ここの主要目的は、Markov 単一参加者均衡 $\mathfrak{S}$ の特徴付けを示すことにある。

命題 1.3.1. $\mathfrak{S}$ **が** Markov **単一参加者均衡であるための必要十分条件は、すべての** i **に対して**

$$\mathfrak{S}(i)=\frac{1}{u'[g(i)]}\mathbb{E}^i\left(\sum_{t=1}^{\infty}\rho^t u'[g(X_t)]f(X_t)\right) \tag{1.11}$$

が成り立つことである。

反復期待の法則によって、(1.11) と同等な以下のような表現を得る。これは確率的 Euler 方程式と呼ばれることがある。

系 1.3.1. $\mathfrak{S}$ **が** Markov **単一参加者均衡であるための必要十分条件は、任意の時刻** t **と任意の初期状態** i **に対して**

$$\mathfrak{S}(X_t)=\frac{1}{u'[g(X_t)]}\mathbb{E}^i\left(\rho u'[g(X_{t+1})][\mathfrak{S}(X_{t+1})+f(X_{t+1})]\,\middle|\,X_t\right) \tag{1.12}$$

が成り立つことである。

定理 1.3.1. $\mathfrak{S}$ **が** Markov **均衡であるための必要十分条件は**

$$\mathfrak{S}(i)=\frac{1}{u'[g(i)]}\mathbb{E}^i\left(\rho u'[g(X_2)][\mathfrak{S}(X_2)+f(X_2)]\right),\quad i\in Z \tag{1.13}$$

が成り立つことである。言い換えれば、Bellman **方程式** (1.7) **の** 1 **階条件と** V **が** Bellman **方程式の解であるという事実によって、**C **および** Φ **はすべての** i **に対して** (1.13) **であるとき、かつそのときに限り** $C(i,0)=g(i)$ **かつ** $\Phi(i,0)=0$ **となるように選ぶことができる。このとき** (1.13) **は** (1.11) **および** (1.12) **と同等となり、上の命題と系が証明される。**

値関数 V の特性を探求することによって、上の Markov 均衡 $\mathfrak{S}$ の特徴づけに関する定理 1.3.1 を証明することにする。このために、いくつか準備をしておく。

補題 1.3.1. 各々の状態 i に対して、$V(i,\cdot):\ [\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ は増加かつ狭義に凹である。

証明. （狭義の凹性）Blackwell の不動点定理 1.2.1 によって V が作用素 $\mathfrak{U}$ の一意な不動点 $V = \mathfrak{U}V,\ V = \lim_{t\to\infty} F_t,\ F_t = \mathfrak{U}F_{t-1}$ であることは証明された。$B(D)$ の定義を $F(i,\cdot):\ [\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ が狭義に凹と変更したものを $\bar{B}(D)$ で表わすことにする。補題 1.2.1 の証明と同様の議論により、$F \in \bar{B}(D)$ であれば、$\mathfrak{U}F \in \bar{B}(D)$ であることがわかる。$u(\cdot)$ は有界・狭義に凹かつ増加であるから、$F_0(i,w) = \sup_{(\bar{c},\bar{\theta})} u(\bar{c}),$ s.t $\bar{c} + \bar{\theta}\mathfrak{S}(i) \le w + g(i)$ は各々の i に対し w に関して有界・狭義に凹かつ増加、$F_0 \in \bar{B}(D)$ である。したがって $F_1 = \mathfrak{U}F_0$ は $F_1 \in \bar{B}(D)$ である。$t = n$ のとき $F_n \in \bar{B}(D)$ であるとすれば、$\mathfrak{U}F_n = F_{n+1}$ であるから $F_{n+1} \in \bar{B}(D)$ である。かくして負でないすべての整数 t に対して $F_t \in \bar{B}(D)$ である。よって $V = \lim_{t\to\infty} F_t$（一様収束性）から $V \in \bar{B}(D)$ である。

（増加）増加を証明するため、(i,w) に対する最適フィードバック政策 $(C(i,w),\Phi(i,w))$ に関して、以下のような関数 $v:\ [\underline{w},\infty) \to \mathbb{R}$ を定義する。

$$v(w) = u(C(i,w_0) + w - w_0) + \rho\mathbb{E}^i\Big[V\big(X', \Phi(i,w_0)\cdot[\mathfrak{S}(X') + f(X')]\big)\Big], \quad w_0 \in [\underline{w},\infty).$$

u は増加関数であるから $w \ge w_0$ ならば $v(w) \ge v(w_0)$。Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ の一意解を $V(i,w)$ で表わすことにする。V の最適性から $V(i,w) \ge v(w)$、定義より $V(i,w_0) = v(w_0)$。したがって

$$V(i,w) - V(i,w_0) \ge v(w) - v(w_0).$$

したがって

$$w - w_0 \ge 0 \text{ ならば } \quad V(i,w) - V(i,w_0) \ge v(w) - v(w_0) \ge 0.$$

これは V の w に関する増加性を示している。 □

補題 1.3.2. 状態価格関数 $\mathfrak{S}$ を任意に固定し、(C,Φ) を上述の最適フィードバック政策とする。所与の状態 i および $\hat{w} > \underline{w}$ において、$\hat{c} = C(i,\hat{w})$ と仮定する。このとき $V(i,\cdot)$ は $\hat{w}$ において連続微分可能であり、導関数 $V_w(i,\hat{w}) = u'(\hat{c})$ を持つ。(1.15)

証明. 関数 $v:\ S \to \mathbb{R},\ S \subset [\underline{w},\infty)$

$$v(w) = u(C(i,\hat{w}) + w - \hat{w}) + \rho\mathbb{E}^i\Big[V\big(X', \Phi(i,\hat{w})\cdot[\mathfrak{S}(X') + f(X')]\big)\Big]$$

を定義する。ただし、$\hat{w} \in S$ とし、V は Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ を満たす一意な解とする。定義から明らかに

$$v(\hat{w}) = V(i,\hat{w}).$$

(1.15) Duffie[65, 66, Chp.4, Sec.B, Fact.2] では

$$V_w(i,\hat{w}) = \rho u'(\hat{c})$$

を主張している。Duffie[65] の作用素の定義であればこの主張は正しい。しかし、以下の証明で明らかになるように、(1.7) で定義される作用素 $\mathfrak{U}$ の場合にはこの主張は成り立たない。

また、V の最適性から $w \in S$ に対して

$$v(w) \leq V(i, w).$$

V の凹性から

$$k(w - \hat{w}) \geq V(i, w) - V(i, \hat{w}) \geq v(w) - v(\hat{w}).$$

ところで v は微分可能である。なぜなら実際に

$$v'(w) = u'(C(i, \hat{w}) + w - \hat{w})$$

であるからである。したがって、上式において $w \neq \hat{w}$ として両辺を $w - \hat{w}$ で除して $w \to \hat{w}$ とすれば

$$V_w(i, \hat{w}) = v'(\hat{w}) = u'(C(i, \hat{w})$$

を得る。V は狭義に凹であるから、その導関数は連続である。 □

上の 2 つの補題を用いれば、定理 1.3.1 によって状態価格関数 $\mathfrak{S}$ が Markov 均衡であるための必要十分条件が得られ、先の命題と系の関連を示すことができる。

定理 1.3.1 の証明. $V \in \bar{B}(D)$、すなわち各状態 i に対して $V(i, \cdot) : [\underline{w}, \infty) \to \mathbb{R}$ が狭義に凹であるから、最適フィードバック政策が存在すればそれは一意である。したがって、必要性か十分性の一方を確かめればよい。

Bellman 方程式 $V = \mathfrak{U}V$ を次のように書き改める。任意の $(i, w) \in D$ に対して

$$V(i, w) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^N} \Big[u[w + g(i) - \theta \cdot \mathfrak{S}(i)] + \rho \mathbb{E}^i \Big[V\big(X_2, \theta \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big) \Big] \Big].$$

最適性に関する 1 階の必要条件

$$0 = -u'[w + g(i) - \theta \cdot \mathfrak{S}(i)]\mathfrak{S}(i) + \rho \mathbb{E}^i \Big[V_w\big(X_2, \theta \cdot [\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]\big)[S(X_2) + f(X_2)] \Big]$$

から $\mathbb{R}^N$ の内点 $\theta = \Phi(i, 0) = 0$（したがって $c = C(i, 0) = g(i) > 0$ を意味する）が最適フィードバック政策であれば

$$-u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) + \rho \mathbb{E}^i [V_w(X_2, 0)[\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)]] = 0.$$

補題 1.3.2 から $V_w(i, 0) = u'[g(i)]$ であるから

$$\mathfrak{S}(i) = \frac{1}{u'[g(i)]} \mathbb{E}^i \Big[\rho u'[g(X_2)][\mathfrak{S}(X_2) + f(X_2)] \Big].$$

したがって、(1.13) を得る。

次に、(1.11),(1.12),(1.13) の同等性を証明する。(1.11) がすべての $i \in Z$ に対して成り立つのであるから

$$
\begin{aligned}
u'[g(X_t)]\mathfrak{S}(X_t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=t+1}^{\infty} \rho^{k-t} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_t = i \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}] f(X_{t+1}) + \sum_{k=t+2}^{\infty} \rho^{k-t} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_t = i \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}] f(X_{t+1}) + \rho \sum_{k=t+2}^{\infty} \rho^{k-(t+1)} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_t = i \right) \\
&= \mathbb{E}\big(\rho u'[g(X_{t+1}] f(X_{t+1}) | X_t = i \big) \\
&\qquad + \mathbb{E}\left(\rho \mathbb{E}\left(\sum_{k=t+2}^{\infty} \rho^{k-(t+1)} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_{t+1} \right) \middle| X_t = i \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1}] f(X_{t+1}) | X_t = i \right) + \mathbb{E}\left(\rho u'[g(X_{t+1})] \mathfrak{S}(X_{t+1}) \middle| X_t = i \right) \\
&= \mathbb{E}\left[\rho u'[g(X_{t+1})] [\mathfrak{S}(X_{t+1}) + f(X_{t+1})] \middle| X_t = i \right].
\end{aligned}
$$

これより (1.12) を得る。逆に、任意の t に対して (1.12) が成り立っておれば $T < \infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
u'[g(X_t)]\mathfrak{S}(X_t) &= \mathbb{E}^i (\rho u'[g(X_{t+1})][\mathfrak{S}(X_{t+1}) + f(X_{t+1})] | X_t) \\
&= \mathbb{E}^i (\rho u'[g(X_{t+1})] \mathfrak{S}(X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})] f(X_{t+1}) | X_t) \\
&= \mathbb{E}^i \big(\rho \mathbb{E}^i (\rho u'[g(X_{t+2})][\mathfrak{S}(X_{t+2}) + f(X_{t+2})] | X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})] f(X_{t+1}) | X_t \big) \\
&= \mathbb{E}^i (\rho^2 u'[g(X_{t+2})] \mathfrak{S}(X_{t+2}) + \rho^2 u'[g(X_{t+1})] f(X_{t+1}) + \rho u'[g(X_{t+1})] f(X_{t+1}) | X_t) \\
&\qquad \cdots \\
&= \mathbb{E}^i \left(\rho^T u'[g(X_{t+T})] \mathfrak{S}(X_{t+T}) + \sum_{k=t+1}^{T+t} \rho^{k-t} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_t \right) \\
&= \rho^T \mathbb{E}^i (u'[g(X_{t+T})] \mathfrak{S}(X_{t+T}) | X_t) + \mathbb{E}^i \left(\sum_{k=t+1}^{T+t} \rho^{k-t} u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_t \right).
\end{aligned}
$$

$T \to \infty$ とすれば最右辺第 1 項は $0 < \rho < 1$ であるから 0 に収束する。そこで $t = 0$ とおけば

$$
u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) = \mathbb{E}^i \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k u'[g(X_k)] f(X_k) \middle| X_0 \right).
$$

したがって (1.11) を得る。

(1.12) は任意の t に対して成り立つのであるから、(1.12) において $t = 0$ とおけば

$$
u'[g(i)]\mathfrak{S}(i) = \mathbb{E}^i [\rho u'[g(X')][\mathfrak{S}(X') + f(X')], \quad X' \in Z,
$$

すなわち (1.13) を得る。すべての $i \in Z$ に対して (1.13) が成り立つのであるから、$X_t = i$ とおくことによって (1.12) を得る。

よって定理の主張はすべて証明された。 □

1.4 裁定と状態価格—状態価格版配当割引モデルと無限期間設定—

次に、抽象的な無限期間の設定で証券価格に関する無裁定および最適性がいかなる意味を持っているかを検証するために、Markov 的な不確実性という特殊なケースから離れることにする。

Ω をある集合、$\mathfrak{F}$ を Ω に対するある族であるとし、各々の非負整数 t に対して $\mathfrak{F}_t$ を $s \geq t$ ならば $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}_s$ であるような非減少部分族であるとする。また、$(\Omega, \mathfrak{F})$ 上のひとつの確率測度 $\mathbb{P}$ を固定する。通常の場合と同様、$\mathfrak{F}_0$ は確率が 0 または 1 であるような事象のみを含んでいるものとする。再び、L によって有界適合過程の空間を表わすことにする。N 種の証券が存在し、第 n 証券は L に属する配当過程 δ^n と L に属する価格過程 S^n によって定義されるものとする。取引戦略は $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^N) \in \Theta \equiv L^N$ で表わされるものとする。

定義 1.1.1 の内容を繰り返せば、**裁定**とは、$\delta^\theta > 0$ であるような取引戦略 θ である。裁定が存在しないならば、任意の T に対して T **期裁定**が存在しない。T 期裁定とは、$\theta_t = 0,\ t \geq T$ であるような裁定 θ を意味する。一時的に T を固定したとき、T 期裁定が存在しないならば、T 期状態価格デフレータ（定義 1.1.2）が存在することになる。同様に、$(T+1)$ 期状態価格デフレータ π^{T+1} が存在する。$\hat{\pi}_t = \pi_t^T,\ t \leq T$ かつ $\hat{\pi}_t = \pi_t^{T+1},\ t > T$ によって定義される過程 $\hat{\pi}$ が $(T+1)$ 期状態価格デフレータであることを示すことができる。実際、T 期裁定が存在しないのであるから

$$\theta_t = 0,\ t \geq T$$

であるような任意の取引戦略 θ に対して

$$\delta_{T+1}^\theta = \theta_T \cdot (S_{T+1} + \delta_{T+1}) - \theta_{T+1} \cdot S_T = 0, \quad \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t^T \delta_t^\theta\right) = 0$$

となる。したがって

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t^T \delta_t^\theta\right) + \pi_{T+1}^{T+1} \delta_{T+1}^\theta = 0.$$

ゆえに

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T+1} \hat{\pi}_t \delta_t^\theta\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t^T \delta_t^\theta\right) + \hat{\pi}_{T+1}^{T+1} \delta_{T+1}^\theta = 0.$$

以上のことによって、T における帰納法から、ある T 以上のすべての t に対して $\theta_t = 0$ となる任意の取引戦略 θ に対して、$\mathbb{E}(\sum_{t=0}^{\infty} \pi \delta_t^\theta) = 0$ となるような狭義に正の適合過程 π が存在するということがわかる。特に、任意の t と $\tau \geq t$ に対して、π はすでに表わされた状態価格の関係式

$$S_t = \frac{1}{\pi_t} \mathbb{E}_t \left(\pi_\tau S_\tau + \sum_{j=t+1}^{\tau} \pi_j \delta_j\right) \tag{1.14}$$

を満足するという特徴を持っている。(1.14) は、いわば**状態価格版配当割引モデル**とみなすことができる。[1.16]

[1.16] 配当割引モデルに関しては若杉 [30, 第 11 章]、米沢 [29] を参照されたし。

方程式 (1.14) は、τ が有限の停止時刻であれば常に成り立つ。しかし残念ながら、(1.14) が無限の停止時刻に対して成り立つような状態価格デフレータ（すなわち狭義に正の適合過程）$\pi \in L$、すなわち任意の t に対して

$$S_t = \frac{1}{\pi_t}\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} \pi_j \delta_j\right) \tag{1.15}$$

が存在するという根拠は（今のところはまだ）ない。仮に存在するとしても、資産価格のバブルの理論が示すように、[1.17] π の一意性が保証し得なくなるかもしれない。事実、(1.15) の右辺は定義することすら十分にはなし得ないかもしれない。このためには π にある種の制約が課されなければならないのである。

そこで、以下のように π の属する空間を制約することにする。

定義 1.4.1. 適合過程 x は $\mathbb{E}(\sum_{t=0}^{\infty} |x_t|) < \infty$ であれば**平均加算的**であるということにする。また、L^* によって**平均加算的適合過程の空間**を表わすことにする。[1.18]

$\pi \in L^*$ かつ $c \in L$ であれば、Lebesgue の優越収束定理 1.1.1 によって、$\mathbb{E}(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t c_t)$ を定義することができ、しかもそれは有限値をとることがわかる。したがって、(1.15) が機能すれば、L^* は状態価格デフレータの候補の空間として自然なものであるということができる。

次節では、この制約の下で、$\pi \in L^*$ がある線形汎関数の Riesz 表現として与えられ、したがって状態価格デフレータが存在して一意であることが示される。この意味で、平均加算的な適合過程の空間 L^* は、無限期間においても資産価格のバブルが発生しないことを保証する十分条件となっているのである。

1.5　最適性と状態価格—線形汎関数 $\nabla U(c, x)$ の Riesz 表現 $\pi \in L^*$ と状態価格デフレータ—

任意の市場参加者は、非負過程の空間 L_+ に属する賦存額の過程 e と、狭義に増加である効用関数 $U : L_+ \to \mathbb{R}$ によって定義される。配当と価格の組 $(\delta, S) \in L^N \times L^N$ を所与として、参加者は実行可能予算集合 $X(S, e) = \{e + \delta^\theta \in L^\theta :\ \theta \in \Theta\}$ を持ち、以下のような問題に直面するものとする。

$$\sup_{c \in X(S,e)} U(c). \tag{1.16}$$

すなわち、(1.16) は、実行可能予算集合 $X(S, e)$ から最適消費計画 c を選ぶ市場参加者の効用最大化問題である。この問題と、第1節で述べた市場参加者の効用最大化問題、あるいは、第2節の Markov 制御問題 (1.2) との対応は明らかであろう。

L に属する任意の消費過程 c に対して、c^* における c の方向への U の導関数は、絶対値において十分に小さいスカラー α に対して $g(\alpha) = U(c^* + \alpha c)$ の導関数 $g'(0)$ で定義され、これを $\nabla U(c^*; c)$ で表わすことにする。

[1.17] 資産価格のバブルの理論については Blanchard-Watson[45]、翁 [14] を参照されたし。

[1.18] L^* は、無限期間の証券市場均衡の安定性を保証するある種のノルムを備えた、ノルム化ベクトル空間と見ることもできる。この点に関しては岩井 [13, pp.138-9] が参考になろう。

定義 1.5.1. L に属する任意の c に対して導関数 $\nabla U(c^*;c)$ が存在するとき、U が c^* において微分可能であるという。

U が c において微分可能であれば、$\nabla U(c)$ は L 上の線形汎関数となることが知られている。内積 $(x|y)$ を

$$(x|y) \equiv \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} x_t y_t\right), \quad x \in L^*,\ y \in L$$

で定義すれば、Riesz の表現定理より、$\nabla U(c)$ には一意な Riesz 表現が存在する。(1.19) したがって、次のように定義することは自然である。

定義 1.5.2. 勾配 $\nabla U(c)$ が存在し、かつ L に属する任意の方向 x に対して

$$\nabla U(c,x) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t x_t\right)$$

で定義される L^* に属する Riesz 表現 π を持つならば、効用関数 U は L^*-スムーズであるという。

第 3 節では、状態価格関数 $\mathfrak{S}$ が Markov 均衡であるための必要十分条件は、$\mathfrak{S}$ が確率的 Euler 方程式 (1.12) を満たすことであることが示された。本節ではこれに対応する結果を導くことが目的である。すなわち、Markov 設定に依存することなく (1.12) を均衡の必要条件とすることができることを示す（系 1.5.1）。十分性を示すために、確率的 Euler 方程式によって S がある均衡であることを示唆する均衡条件を与える。

定義 1.5.3. 証券価格 $S \in L^N$ を所与として e が (1.16) の解になるとき、この S を単一参加者均衡と定義する。

以下の定理 1.5.1 に示されるように、S が単一参加者経済の均衡であるための必要十分条件は、$\nabla U(e)$ の Riesz 表現 $\pi \in L^*$ が状態価格デフレータとなることを最終結果として主張することができる。

定理 1.5.1. U は狭義増加、凹かつ賦存額過程 e の下で L^* スムーズであるとする。賦存額過程 e はゼロから有界であるとする。$\pi \in L^*$ を $\nabla U(e)$ の Riesz 表現とする。S が単一参加者均衡となるための必要十分条件は、π が状態価格デフレータとなることである。

以下はこの定理 1.5.1 を証明することに費やされる。そのためにいくつかの準備が必要になる。

U が加算的効用であれば、以下の補題が成り立つことがわかる。(1.20)

(1.19) 上のように定義された $(x|y)$ が内積の公理

1. 交換法則 $x, y \in L^*$ に対して $(x|y) = (y|x)$
2. 分配法則 $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$
3. ある実数 α に対して $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$
4. $(x|x) \geq 0$
5. $x = 0$ の場合に限り $(x|x) = 0$

を満たすことは明らか。したがって $L^* \subseteq L$ は Hilbert 空間になる。Hilbert 空間上の線形汎関数に対して、Riesz の表現定理を証明するのは容易である。

(1.20) この補題は Samuelson[128], Levhari–Srinivasan[107] と関連がある。Hakansson[80] も参照されたし。

補題 1.5.1. U **が** $U(c) = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)]$ **で定義されているとする。ただし、**$u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ **が狭義増加かつ** $(0,\infty)$ **で連続微分可能、また、**$\rho \in (0,1)$ **とする。このとき、**0 **から有界な** L_+ **に属する任意の** c **に対して、**U **は** c **において** L^***-スムーズ、**L **に属する任意の** x **は** c **において到達可能方向であり、かつ、以下の関係が成り立つ。**

$$\nabla U(c;x) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t) x_t\right], \quad x \in L. \tag{1.17}$$

証明. u が狭義に増加、かつ、$(0,\infty)$ で連続微分可能、かつ $c \in L_+$（すなわち確率過程 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ は、すべての時刻 t において c_t は $\mathfrak{F}_t$ 可測かつ $0 \le c_t \le k$ である非負有界適合過程）であるから、任意の時刻 t において $u(c_t) \le u(k) < \infty$。したがって $u'(c_t) \le M < \infty$ であるような適当な定数 M が存在するから $0 < \rho^t u'(c_t) \le \rho^t M$ となる。したがって

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t)\right) \le \frac{M}{\rho} < \infty,$$

すなわち確率過程 $\{\rho^t u'(c_t)\}$ は $\{\rho^t u'(c_t)\} \in L^*$。$U(c) = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)]$ において関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(\alpha) = U(c + \alpha x)$$

を定義する。このとき優越収束定理 1.1.1 から

$$\begin{aligned}
\nabla U(c;x) &\equiv g'(0) \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{U(c+\alpha x) - U(c)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left[\frac{u(c_t + \alpha x_t) - u(c_t)}{\alpha x_t}\right] x_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u'(c_t) x_t\right).
\end{aligned}$$

したがって、$\pi_t = \rho^t u'(c_t)$ で定義される確率過程 π は $\nabla U(c)$ の一意な Riesz 表現であるから、状態価格デフレータである。 □

この補題から以下のような状態価格の特徴が明らかになる。

命題 1.5.1. c^* **は** (1.16) **の解であり、**c^* **は** 0 **から有界で、かつ、**U **が** c^* **で** L^***-スムーズであるとする。このとき、**$\nabla U(c^*)$ **の** Riesz **表現** π **は状態価格デフレータである。**

証明. c^* の最適性の 1 階条件から

$$\nabla U(c^*; \delta^\theta) = 0, \quad \theta \in \Theta.$$

U は L^*-スムーズであるから、L に属する任意の x に対して

$$\nabla U(c^*; x) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t x_t\right).$$

したがって、任意の取引き戦略 θ に対して

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t \delta_t^\theta\right) = 0.$$

ここで、任意の停止時刻 $\tau < \infty$ と任意の証券 n に対して

$$\begin{cases} \theta^k = 0, & \text{for } k \neq n, \\ \theta_t^n = 1, & \text{for } t < \tau, \\ \theta_t^n = 0, & \text{for } t \geq \tau \end{cases}$$

となる取引き戦略 θ を考える。このとき

$$\begin{aligned} \delta_0^\theta &= -S_0^n, \\ \delta_t^\theta &= \delta_t^n, \quad t < \tau, \\ \delta_\tau^\theta &= S_\tau^n + \delta_\tau^n \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi_t \delta_t^\theta\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\tau-1} \pi_t \delta_t^\theta + \pi_\tau S_\tau\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\tau-1} \pi_t \delta_t^n + \pi_\tau S_\tau^n + \pi_\tau \delta_\tau^n\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{\tau} \pi_t \delta_t^n + \pi_\tau S_\tau^n - \pi_0 S_0^n\right). \end{aligned}$$

n, τ は任意であったから、したがって

$$S_0 = \frac{1}{\pi_0}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{\tau} \pi_j \delta_j + \pi_\tau S_\tau\right),$$

すなわち

$$S_t = \frac{1}{\pi_t}\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau} \pi_j \delta_j + \pi_\tau S_\tau\right)$$

を得る。これは状態価格関係式 (1.14) である。 □

系 1.5.1. U **が** $U(c) = \mathbb{E}[\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(c_t)]$ **で定義されているとする。ただし、**$\rho \in (0,1)$ **かつ** u **は** $(0,\infty)$ **で狭義に正の導関数を持つものとする。このとき、**$\pi_t = \rho^t u'(c_t^*)$ **で定義される** π **は状態価格デフレータであり、任意の時刻** t **と停止時刻** $\tau > t$ **に対して次式が成り立つ。**

$$S_t = \frac{1}{u'(c_t^*)}\mathbb{E}_t\left[\rho^{\tau-t} u'(c_\tau^*) S_\tau + \sum_{j=t+1}^{\tau} \rho^{j-t} u'(c_j^*) \delta_j\right].$$

証明. $\pi_t = \rho^t u'(c_t)$ で定義される $\nabla U(c^*)$ の一意な Riesz 表現 π が状態価格デフレータであることはすでに示した。また

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right) &= \mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j+\delta_j+\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)+\mathbb{E}_t\left(\mathbb{E}_\tau\left(\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)+\mathbb{E}_t(S_\tau\pi_\tau).
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{\pi_t}\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{\pi_t}\mathbb{E}_t\left(\pi_\tau S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{\rho^t u'(c_t^*)}\mathbb{E}_t\left(\rho^\tau u'(c_\tau^*)S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\pi_j\delta_j\right)\\
&= \frac{1}{u'(c_t^*)}\mathbb{E}_t\left(\rho^{\tau-t}u'(c^*)S_\tau+\sum_{j=t+1}^{\tau}\rho^{j-t}u'(c_j^*)\delta_j\right).
\end{aligned}$$

かくして与えられた主張は証明された。 □

この系は最適性の必要条件を与える。均衡のケースが特定化されれば、Markov 不確実性や動的計画法に依拠することなしに、確率的 Euler 方程式 (1.12) を均衡の必要条件として復活させることができる。十分性に関しては、確率的 Euler 方程式によって S が均衡であることを示唆する条件を与える必要がある。定義 1.5.3 で定義したように、S を所与として e が (1.16) の解になるとき、この S を単一参加者均衡と定義することによって必要な条件を与える。このようにすれば最終的な結果（定理 1.5.1）を証明することができる。

定理 1.5.1 の証明. S が単一参加者均衡であれば、e は (1.16) の解であるから与えられた前提の下で、命題 1.5.1 から $\nabla U(e)$ の一意な Riesz 表現 $\pi \in L^*$ は状態価格デフレータである。

逆に、$\nabla U(e)$ の Riesz 表現 $\pi \in L^*$

$$\nabla U(e;x) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\pi_t x_t\right)$$

が所与の S に対して状態価格デフレータ

$$S_t = \frac{1}{\pi_t}\mathbb{E}_t\left(\sum_{j=t+1}^{\infty}\pi_j\delta_j\right)$$

であるとする。$\delta_t^\theta = \theta_{t-1} \cdot (S_t + \delta_t) - \theta_t \cdot S_t$ であるから、このとき

$$\pi_0 \delta_0^\theta = -\theta_0 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{\infty} \pi_t \delta_t\right),$$

$$\mathbb{E}(\pi_0 \delta_0^\theta + \pi_1 \delta_1^\theta) = -\theta_1 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{t=2}^{\infty} \pi_t \delta_t\right),$$

$$\cdots$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} \pi_t \delta_t^\theta\right) = -\theta_T \cdot \mathbb{E}_T\left(\sum_{t=T+1}^{\infty} \pi \delta_t\right), \quad (0 \leq T < \infty)$$

$$\cdots.$$

$T \to \infty$ のとき優越収束定理 1.1.1 より

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \pi \delta_t^\theta\right) = 0$$

となるから

$$\nabla U(e; \delta^\theta) = 0.$$

U は狭義増加な凹関数であったから、これは e の最適性を示している。したがって、S は単一参加者均衡である。 □

第2章　連続時間設定における無裁定証券価格評価理論の基本的フレームワーク

要旨

本章は、特に状態価格デフレータの果たす役割を中心として、数理ファイナンス論の主要結果である「連続時間における無裁定証券価格の理論」の論理構造を明らかにすることを目的とする。取引戦略の空間として確率積分を定義するに足る2乗可積分な適合過程の空間 $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とし、「状態価格デフレータの存在は裁定が存在しないこと」「裁定が存在しないための十分条件は同値マルチンゲール測度が存在すること」を証明する。$(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすることの数学的・経済学的意味付けは2.1.2節で明らかにする。

キーワード

状態価格デフレータ、連続時間無裁定証券価格評価理論、同値マルチンゲール測度、Girsanovの定理、完備証券市場

はじめに

本章は、特に状態価格デフレータの果たす役割を中心として、数理ファイナンス論の主要結果である「連続時間における無裁定証券価格の理論」の論理構造を明らかにすることを目的とする。

連続時間における無裁定証券価格の理論はHarrison-Kreps[81]、Harrison-Pliska[82][83]等の先駆的業績に多くを負っており、彼らがほとんどの部分を完成させたといっても過言ではない。(2.1)同値マルチンゲール測度を中心に展開される彼らの分析を、従来のBlack-Scholes[43]流のアプローチとは一線を画すものとして、特にマルチンゲール価格理論と呼んで区別する場合もある。(2.2)以下で議論しているとおり、本章は証券の価格過程を伊藤過程に限定する。伊藤過程に限定することは、狭いクラスの価格過程のみを分析対象とするという欠点がある一方、演算を明示的におこない得るためモデル・分析の論理構造が把握しやすくなるという長所を持つ（もっとも、Harrison-Kreps[81]、Harrison-Pliska[82]、Kreps[103]自体は、必ずしも伊藤過程に依存した分析をおこなっていない)。本章では確率積分を定義するに足るある2乗可積分な適合過程の空間 $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とするが、マルチンゲール価格理論にとってはこの制約は必ずしも必要ではなく、(2.3)実際Delbaen[57]等によってこの制約条件はもっと緩められている。(2.4)そうであるにもかかわらず、$(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすることの意味を1.2節で明らかにしておく。

(2.1)Harrison-Kreps[81]は、無裁定条件とともに、証券市場の価格体系に対して "viability" と呼ばれる経済主体のある種の選好順序によるトポロジーを導入することによってはじめて、同値マルチンゲール測度を得ている。Harrison-Pliska[82]は、無裁定条件と自己資金充足性を関連付けることによって、同値マルチンゲール測度を得ている。特にHarrison-Pliska[82]の分析に関しては、すでに東北大学経済学部飯野正幸氏による詳細な紹介論文[10]があるので、そちらを参照されたし。

(2.2)マルチンゲール価格理論については田畑[23, 7章]等を参照されたし。

(2.3)$(\mathfrak{L}^2)^d$ とは別の（たとえばHarrison-Kreps[81]の "viability" のような）トポロジーを導入すればよい。

(2.4)楠岡[15]はDelbaen[57]アプローチを確率論の立場から紹介している。

以下で見るように、状態価格デフレータの存在は、裁定が存在しないことを意味する。(2.5)また、Harrison-Pliska[82] が示したとおり、裁定が存在しないための十分条件は同値マルチンゲール測度が存在することである。証券の価格過程が伊藤過程で与えられており、取引戦略が適当な可積分な適合過程の空間に属しておれば、同値マルチンゲール測度の存在性に関する条件は Girsanov の定理が与えてくれる。しかし、この定理は数学的にやや難しいので、通常のファイナンス論のテキストはもちろん先端的な研究業績ですらも、技術的な「ブラックボックス」として敢えて詳細に議論することを避る傾向にある。(2.6)

既存の理論を応用することによって新たな分析を推し進めていくことに主たる関心がある場合には、Girsanov の定理や同値マルチンゲール測度の存在性に関する条件を「ブラックボックス」とするのは当然の方策である。しかし、残念ながら、つねに同値マルチンゲール測度が存在するものとしてよいわけではない。(2.7)したがって、同値マルチンゲール測度の存在性に関する議論を詳細に検討することは、数理ファイナンス論の立場から見れば、一度はくぐらねばならない通過儀礼であると考えられる。

この意味で本章は、可能な限り「ブラックボックス」を排除することによって、無裁定証券価格理論の論理構造を自己充足的・体系的に把握することを目標とするものである。

2.1　自己資金充足的な取引戦略と裁定

2.1.1　概念規定—諸概念の規定と確率論的な制約—

ある時間間隔 $[0,T]$ に制約された、所与の確率空間 $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$ 上で定義される測度 $\mathbb{P}$ の下でのある $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動 $B=(B^1,\ldots,B^d)$ を固定する。ただし、$B^1,\ldots,B^d$ は互いに独立であるとする。また、B の標準フィルトレーション（非減少な列をなす部分 σ 集合族を要素とする集合）$\mathbb{F}=\{\mathfrak{F}_t:\ t\in[0,T]\}$ を固定する。(2.8)議論を単純にするために $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_T$ とする。確率過程 X が $\mathbb{F}$ に適合している適合過程であるとは、任意の $t\in[0,T]$ に対して X_t が $\mathfrak{F}_t$ 可測であることを意味するものとする。(2.9)このような確率過程を単に**適合過程**と呼ぶことにする。$\mathfrak{L}$ によって $\mathbb{R}^1$ 値

(2.5)static な証券市場均衡論を dynamic な設定へと拡張する際には、状態価格アプローチは非常に便利なツールとなる。この立場から状態評価アプローチを積極的に導入しているものとして、Duffie[66] をあげることができる。状態価格デフレータと同値マルチンゲール測度との関連は Duffie[66, Chp.6] によって展開され、本章はその流れを汲むものである。

(2.6)わが国にも森村・木島 [28]、田畑 [23]、沢木 [19] をはじめとして優れた数理ファイナンス論のテキストが存在する。また、Lamberton-Lapeyre[105], Musiela-Rutkowski[116] をはじめ、数理ファイナンス論の観点から確率解析の手法を詳細に紹介しているテキストもいくつか現れはじめた。しかしこれらテキストを含めてほとんどが、Girsanov の定理を筆頭として本質的に重要ないくつかの数学定理を「ブラックボックス」としている点には変化がないようである。

(2.7)同値マルチンゲール測度の存在性・一意性が主張し得ない端的な例として、不完備市場があげられる。第3節の命題1, 2を参照されたし。

(2.8)しかし、必ずしも $\mathfrak{F}_t$ が B によって生成されるという意味ではない。

(2.9)誤解を恐れることなく直感的に説明することにすれば、時刻 t までに過不足なく集められた情報を用いれば、X の時刻 t における値を知ることができるということである。

適合過程の集合を表わすものとする。また

$$(\mathfrak{L}^1)^d = \left\{\theta \in (\mathfrak{L})^d : \int_0^T \|\theta_t\| dt < \infty \text{ a.s.}\right\}$$
$$(\mathfrak{L}^2)^d = \left\{\theta \in (\mathfrak{L})^d : \int_0^T \theta_t \cdot \theta_t dt < \infty \text{ a.s.}\right\}$$
$$(\mathfrak{H}^2)^d = \left\{\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d : \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_t \cdot \theta_t dt\right) < \infty\right\}$$

とする。配当が支払われない所与の N 種証券の価格過程は $\mathbb{R}^N$ 値伊藤過程 $X = (X^1, \ldots, X^N)^\top$

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

を形成するものとする。ただし、μ, σ はそれぞれ $\mu \in (\mathfrak{L}^1)^N$, $\sigma \in (\mathfrak{L}^2)^{N\times d}$ であるような、それぞれ $\mathbb{R}^N$ 値、$\mathbb{R}^{N\times d}$ 値適合過程とする。また特に断らない限り、行列 σ の最大階数 $r(\sigma)$ は $r(\sigma) \leq d$ とする。(2.10)

上の定義の下で、確率積分の存在性に関する以下の結果が知られている。(2.11)

定理 2.1.1 (Lamberton-Lapeyre[105]). H **を以下で定義される** $\mathbb{R}^d$ **値単過程とする。**

$$H_t(\omega) = \sum_{1\leq i\leq n} \theta_i(\omega) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t).$$

ただし、$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$**、かつ、**$\theta_i$ **は** $\mathfrak{F}_{t_i-1}$ **可測で有界な** $\mathbb{R}^d$ **値確率変数とする。また、**H **と** $\mathbb{R}^d$ **値標準 Brown 運動** B **に対して**

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq n} \theta_i \cdot (B_{t_i\wedge t} - B_{t_{i-1}\wedge t})$$

を定義する。このとき、以下の条件を満たす $(\mathfrak{H}^2)^d$ **から** $\mathfrak{F}_t$ **可測な連続マルチンゲールの空間への一意な線形写像** J **が存在する。**

1. **任意の** $t \in [0,T]$ **に対して** $J(H)_t = I(H)_t$
2. **すべての** $t \in [0,T]$ **に対して**

$$\mathbb{E}(J(H)_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t H_s \cdot H_s ds\right)$$

また、以下の条件を満たす $(\mathfrak{L}^2)^d$ **から適合過程の空間への一意な線形写像** $\tilde{J}$ **が存在する。**

1. **任意の** $t \in [0,T]$ **に対して** $\tilde{J}(H)_t = I(H)_t$

(2.10) 同値マルチンゲール測度と、裁定、リスクの市場価値との関連を議論する 3 節において、この仮定をおいておく方が便利である。それ以外の多くの部分では、この仮定を意識する必要はない。また、$r(\sigma) < d$ である場合、これは必ずしも $r(\sigma) = N$ を意味しない、したがって、$r(\sigma) = r < N$ であることは妨げられないことに注意しなければならない。この場合には、σ には線形従属な行が存在することになる。

(2.11) 証明は Lamberton-Lapeyre[105, Proposition 3.4.4(p.38),Proposition 3.4.6(p.40),Remark 3.4.7(p.41)] の該当ページを参照されたし。

2. $H^n \in (\mathfrak{L}^2)^d$ が

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\int_0^T H_s^n \cdot H_s^n ds < \epsilon\right) = 1 \qquad \text{任意の}\epsilon > 0 \text{ に対して}$$

であるような確率変数列であるとすれば

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\tilde{J}(H^n)_t| < \epsilon\right) = 1 \qquad \text{任意の}\epsilon > 0 \text{ に対して}$$

それぞれ、$J(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$, $H \in (\mathfrak{H}^2)^d$、$\tilde{J}(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$, $H \in (\mathfrak{L}^2)^d$ **で表わし、これらを確率積分と呼ぶ。**

$H \in (\mathfrak{H}^2)^d$ **であるとき確率積分** $\int_0^t H_s dB_s$ **によって定義される過程はマルチンゲールであるが、**$H \in (\mathfrak{L}^2)^d$ **であるとき確率積分** $\int_0^t H_s dB_s$ **によって定義される過程は必ずしもマルチンゲールにはならない。**

上の定理の最後の主張に対する一例をあげる。[2.12]

$$p(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2(1-t)}\right), & 0 \le t < 1 \text{ かつ } x \in \mathbb{R} \text{ に対して} \\ 0, & t = 1 \text{ に対して} \end{cases}$$

によって定義される関数 $p(t,x)$ に対して $M_t = p(t, B_t)$ で定義される適合過程 M を考えれば、Fubini の定理等によって、$M \in \mathfrak{L}^2$ であるが $M \notin \mathfrak{H}^2$ であることがわかる。また、$0 \le t < 1$ のとき $\mathbb{E}(M_t) = 1$ であるが $t = 1$ において $\mathbb{E}(M_t) = 0$ となり、M はマルチンゲールにならないことがわかる。

X が (2.1) で定義される $\mathbb{R}^N$ 値伊藤過程であり、θ が $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^N)^\top$ であるようなある $\mathbb{R}^N$ 値適合過程ベクトルであって

$$\theta \cdot \mu \in \mathfrak{L}^1 \quad \text{かつ} \quad \text{各々の } i = 1, \ldots, d \text{ に対して } \theta \cdot \sigma^i \in \mathfrak{L}^2 \tag{2.2}$$

であるとき、$\theta \in \mathfrak{L}(X)$ と表わすことにする。同様に

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_t \cdot \mu_t dt\right)^2\right] < \infty \quad \text{かつ} \quad \text{各々の } i = 1, \ldots, d \text{ に対して } \theta \cdot \sigma^i \in \mathfrak{H}^2 \tag{2.3}$$

であるとき、$\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ と表わすことにする。

取引戦略 θ とは、$\theta \in \mathfrak{L}(X)$ であるような $\mathbb{R}^N$ 値適合過程を意味するものとする。取引戦略 θ が

$$\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dX_s, \quad t \le T \tag{2.4}$$

を満たすとき、θ は**自己資金充足的**であると定義する。[2.13] いいかえれば、自己資金充足的な取引戦略は、新たな資金の注入・引き上げのない取引戦略であることを意味する。

[2.12] Lamberton-Lapeyre[105, Exercise 15(p.59)] を参照。

[2.13] 自己資金充足性の観点から見れば、前提 $\theta \in L(X)$ は取引戦略の価値過程 $\theta \cdot X$ を確率積分として定義するための十分条件となっている。

$\mathfrak{L}^1$ に属するある $\mathbb{R}^1$ 値適合過程 r が存在し、ある証券の価格過程 β が

$$\beta_t = \beta_0 \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad t \in [0, T] \tag{2.5}$$

で与えられる場合、r を**短期利子率過程**と呼ぶことにする。(2.5) から $d\beta_t = r_t\beta_t dt$ となるから、瞬間的な意味において、r_t を時刻 t における無危険短期連続複利利子率とみなすことができる。

経済学の通常の定義では、裁定は価格差を利用した取引（あるいは経済行為）を意味することが多い。(2.14) しかし、本章では Ross[127] 以降に採用されている定義にしたがって、より限定した意味でのみこの用語を用いる。すなわち、**裁定**とは、条件

$$\theta_0 \cdot X_0 < 0 \text{ かつ } \theta_T \cdot X_T \geq 0 \qquad \text{あるいは} \qquad \theta_0 \cdot X_0 \leq 0 \text{ かつ } \theta_T \cdot X_T > 0 \tag{2.6}$$

を満たす自己資金充足的な取引戦略を意味する。(2.15)

2.1.2 適合過程の空間 $(\mathfrak{L}^2)^d$ の意味について—技術的側面と証券市場均衡の存在性からの側面—

上述のとおり本章ではいわゆるマルチンゲール価格理論を要約するに当たって、2 乗可積分な適合過程の空間 $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とする。しかし、すでに指摘したとおり Delbaen[57] 等の最先端の研究によって、この条件は $(\mathfrak{L}^p)^d$, $1 \leq p \leq \infty$ まで緩められている。そうであるにもかかわらず、適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすることの意味を明らかにしておく。

これは次の 3 点を根拠とする。

1. 適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすれば、取引戦略の空間を $\theta \in \mathfrak{L}(X)$ とすることは、取引戦略の価値過程 $\theta \cdot X$ を確率積分で定義するための十分条件となる。
2. 適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすれば、取引戦略の空間を $\theta \in \mathfrak{L}(X)$ とすることは、無裁定を保証する十分条件となる。
3. 適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすれば、消費空間を $c \in L_+ \subseteq \mathfrak{H}^2$ とすることは、証券市場均衡が存在するための十分条件である。

第 1 の点については定理 2.1.1 と自己資金充足性の定義 (2.4) から明らかである。したがって以下では、第 2,3 の点について簡単に紹介する。

はじめに第 2 の点について説明することにする。裁定が自己資金充足的な取引戦略（$\theta \in \mathfrak{L}(X)$ であるような取引戦略で (2.4) を満たすもの）に限定して定義されていることには注意しなければならない。$\theta \in \mathfrak{L}(X)$ の制約をはずして、たとえば単に (2.4) を満たすような取引戦略 $\theta \in (\mathfrak{L})^N$ に対して自己資金充足性を定義した場合には、ほとんどつねに裁定を作り出すことができる。このことを例示するために、倍々戦略として知られている以下のような取引戦略を考えることにする。

B を $\mathbb{R}^1$ 値 Brown 運動とし、価格過程 $X = (S, \beta)$ を考える。ただし、すべての t に対してある証券の価格過程 β はつねに $\beta_t = 1$ であり、これとは別の証券の価格過程 S は $dS_t = S_t dB_t$, $S_0 = 1$

(2.14) 最近の用語集である諸井・後藤 [31, p.121] によれば、裁定（取引）とは、「金融市場や商品市場で商品の理論値と市場値に乖離が生じた場合、資金なしでリスクを最小にとどめて利益を得る取引」であると定義されている。

(2.15) 確率変数 X に対する不等式 $X \geq 0$, $X > 0$ は、それぞれ「すべての $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) \geq 0$」、「すべての $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) \geq 0$、かつ、ある $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) \neq 0$」を意味する。この定義は、状態空間が有限次元である場合には、通常のベクトルの不等式の定義に一致する。有限次元状態空間における裁定の定義については、Duffie[64]、Duffie[66, Chp.1] を参照のこと。

を満たすものとする。ある定数 $\alpha > 0$ に対して、以下のような停止時刻 τ を考える。

$$\tau = \inf\left\{t:\ \int_0^t \frac{dB_s}{\sqrt{T-s}} = \alpha\right\}.$$

取引戦略 $\theta_t = (a_t, b_t)^\top$ を次のように特定化する。

$$a_t = \begin{cases} \dfrac{1}{S_t\sqrt{T-t}}, & t \le \tau \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

$$b_t = -a_t S_t + \int_0^t a_s dS_s.$$

$t \to T$ のとき a_t はますます大きくなり、したがってこれが一種の倍々戦略であることがわかる。このとき $b_0 = -a_0 S_0$ であるから

$$\begin{aligned} a_t S_t + b_t \beta_t &= a_t S_t + b_t \\ &= a_0 S_0 + b_0 + \int_0^t a_s dS_s \end{aligned}$$

となって、(2.4) を満たす。したがって、$\theta_0 \cdot X_0 = 0$、かつ、ほとんど確実に $\theta_T \cdot X_T = \alpha > 0$ となり、取引戦略 θ が裁定であることが示される。

しかし、$\theta \in \mathfrak{L}(X)$ であるような取引戦略に限定して自己資金充足性が定義されている場合には、上の倍々戦略 θ は裁定ではない。なぜなら、この取引戦略 θ は条件 (2.2) を満たさないから、$\theta \notin \mathfrak{L}(X)$ であるからである。

第 1 の点と第 2 の点は、どちらかというと技術的（確率論的）な側面からの十分性を主張するものである。[2.16]しかし、第 3 の証券市場の均衡の存在性に関する点は、経済学的に重要な十分性を主張しているということができる。なぜなら、証券市場均衡が存在し得ないような空間においてたとえ証券 "価格" 理論が構築し得たとしても、経済学的にはまったくナンセンスな評価（価格付け）理論となる可能性があるからである。

証券市場の Arrow-Debreu 均衡の存在性については以下の結果が知られている。[2.17]

定理 2.1.2 (Duffie-Zame[67]). 消費空間を $c \in L_+ \subseteq \mathfrak{H}^2$ とする。非ゼロ線形写像 $\mathfrak{L}_+ \mapsto \mathbb{R}$ を価格関数 Π と呼ぶことにする。各々の i に対して、$\mathbb{R}^1$ 値非負適合過程 c^i が

$$\sup_{c \in L_+} U_i(c) \qquad \text{制約条件 } \Pi(c) \le \Pi(e^i) \text{ の下で}$$

の解であるような、ある価格関数 Π とある実行可能消費配分 $(c^1, \dots, c^m) \in (L_+)^m$ からなる組み合わせ

$$[\Pi, (c^1, \dots, c^m)]$$

を Arrow-Debreu 均衡という。ただし、$e^i \in L_+$ は総賦存過程であり、$\sum_{i=1}^m c^i \le \sum_{i=1}^m e^i$ とする。

[2.16]いいかえれば、適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とすることは Hahn-Banach 定理を用いるに十分なトポロジーを提供するといってよい。

[2.17]証明は Duffie-Zame[67, Theorem A4] を参照されたし。

総賦存過程 e がゼロから有界で、各々の i に対して U_i が滑らかつ (u_i) 加算的、すなわち、すべての i に対して効用関数 $U_i : L_+ \to \mathbb{R}$ が

$$U_i(c) = \mathbb{E}\left[\int_0^T u_i(c_t^i, t)dt\right]$$

であるとする。ただし、$u_i : \mathbb{R}_+ \times [0,T] \to \mathbb{R}$ は $(0,\infty) \times [0,T]$ において滑らか、かつ、任意の $t \in [0,T]$ に対して $u_i(\cdot,t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が厳密な凹増加関数であり、$(0,\infty)$ において非有界な導関数 $u_{ic}(\cdot,t)$ を持つものとする。このとき、Π が有界な Riesz 表現 p をもち、すべての i に対して c^i がゼロから有界になるような Arrow-Debreu 均衡 $[\Pi,(c^1,\ldots,c^m)]$ が存在する。

この定理は、$c \in L_+ \subseteq \mathfrak{H}^2$ と、滑らかかつ (u_i) 加算的な効用関数という仮定に依存している。したがって、可積分性に関してより緩い条件の下でも均衡の存在性を主張することは（少なくとも理論上は）可能である。しかしその場合には効用関数に対して、滑らかかつ (u_i) 加算的という仮定よりも強い仮定を設ける必要が生ずるであろう。経済学的な立場からいえば、滑らかかつ (u_i) 加算的という仮定ですら十分に強い制約であるので、それ以上効用関数に恣意的な制限を設定することが好ましいことでないことは改めて指摘するまでもないであろう。

したがって適合過程の空間として $(\mathfrak{L}^2)^d$ を前提とする（したがって、取引戦略の空間として $\theta \in \mathfrak{L}(X)$ あるいは $\theta \in \mathfrak{H}(X)$ を、消費空間として $c \in L_+$ を考える）ことは、単に確率積分が定義できるからという理由や適当な測度変換によってマルチンゲールにすることができるというだけでなく、証券市場均衡の存在性まで視野に置く場合には十分リーズナブルなものであるといえるであろう。

2.2 状態価格デフレータと状態価格ベータモデル

2.2.1 デフレータとニューメレール不変性の定理

ある特定証券の価格過程をニューメレールとして、残りのすべての証券価格を基準化する必要が生ずる場合がある。このような基準化は、いかなる経済的な効果も本質的には持たない。これがニューメレール不変性の意味することである。このことを示すために、**デフレータ** Y を厳密に正である $\mathbb{R}^1$ 値伊藤過程として定義する。所与の証券価格過程 X をデフレータ Y でデフレートすれば、$X_t^Y = X_t Y_t$ で定義される新たな価格過程 X^Y を得る。

定理 2.2.1 (ニューメレール不変性の定理). Y をあるデフレータとすると、θ が X に関して自己資金充足的であることと、θ が X^Y に関して自己資金充足的であることは同値である。また、θ が X に関して裁定であることと、θ が X^Y に関して裁定であることは同値である。

証明. $\theta \in \mathfrak{L}(X)$ であるから、確率積分 $\int_0^t \theta_s^\top dX_s$ を定義するに十分であって、$W_t = \theta_t \cdot X_t$ で定義される価値過程 W は

$$W_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dX_s, \quad t \in [0,T]$$

で表わされる $\mathbb{R}^1$ 値伊藤過程となる。W, Y が伊藤過程であることから、適当な適合過程 μ_W, σ_W, μ_Y, σ_Y に対して

$$dW_t = \mu_W(t)dt + \sigma_W(t)dB_t,$$
$$dY_t = \mu_Y(t)dt + \sigma_Y(t)dB_t.$$

便宜のために、証券価格過程 X を

$$dX_t = \mu_X(t)dt + \sigma_X(t)dB_t$$

で表わすことにする。Y によってデフレートされた証券価格過程 X^Y は

$$dX_t^Y = Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)^\top dt$$

で表わされる確率微分をもつ。デフレートされた価値過程 W^Y は $W_t^Y = W_t Y_t$ で定義される。伊藤の補題を用いれば

$$\begin{aligned} dW_t^Y &= Y_t dW_t + W_t dY_t + \sigma_W(t)\sigma_Y(t)^\top dt \\ &= Y_t \theta_t^\top dX_t + (\theta_t \cdot X_t)dY_t + (\theta_t^\top \sigma_X(t))\sigma_Y(t)^\top dt \\ &= \theta_t \cdot [Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)^\top] \\ &= \theta_t^\top dX_t^Y. \end{aligned}$$

したがって $\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dX_s$ であるとき、かつ、そのときに限り $\theta_t \cdot X_t^Y = \theta_0 \cdot X_0^Y + \int_0^t \theta_s^\top dX_s^Y$ である。

デフレータ Y は厳密に正である伊藤過程であったから、裁定の定義 (2.6) によって主張の後半部分は自明である。よって、主張は証明された。 □

2.2.2 状態価格デフレータと証券 (自己資金充足的取引戦略) の収益率

以下の目的に対して、**状態価格デフレータ**と呼ばれる特殊なデフレータが重要な役割を果たす。状態価格デフレータ π とは、デフレートされた価格過程 X^π がマルチンゲールになるようなデフレータを意味する。状態価格デフレータ π と先に定義した取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(X)$ に対して、次の命題が成り立つ。

命題 2.2.1 (状態価格デフレータと裁定). 任意の状態価格デフレータ π に関して、$\mathfrak{H}^2(X^\pi)$ に属する任意の（X に対する）自己資金充足的な取引戦略 θ は（X に対する）裁定ではない。

証明. 状態価格デフレータの定義から X^π はマルチンゲールであるから

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^\top dX_s^\pi\right) = 0.$$

θ が X に対して自己資金充足的であるから、ニューメレール不変性の定理 2.2.1 より、θ は X^π に対して自己資金充足的

$$\theta_t \cdot X_t^\pi = \theta_0 \cdot X_0^\pi + \int_0^t \theta_s^\top dX_s^\pi$$

である。したがって $t = T$ で評価して

$$\theta_0 \cdot X_0^\pi = \mathbb{E}\left(\theta_T \cdot X_T^\pi - \int_0^T \theta_s^\top dX_s^\pi\right) = \mathbb{E}(\theta_T \cdot X_T^\pi).$$

かくして $\theta_T \cdot X_T^\pi \geq 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0^\pi \geq 0$。また同様に、$\theta_T \cdot X_T^\pi > 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0^\pi > 0$。これは、$\theta$ が X^π に対して裁定ではないことを示している。したがって定理 2.2.1 より、θ は X に対して裁定ではない。 □

Duffie[66, Chp.6] では、この命題が信用割当された取引戦略の空間 $\Theta(X^\pi)$ に対しても成り立つことが示されている。

命題 2.2.2 (証券の収益率). π **を価格過程** X **に対する状態価格デフレータとし、**$\mathbb{R}^1$ **値伊藤過程である価格過程** S **を持つある特定証券を考える。当該証券の累積的な収益率過程** R **を確率積分** $R_t = \int_0^t dS_t/S_t$ **によって定義すれば**

$$\mu_R(t) - \hat{r}_t = -\frac{1}{\pi_t}\sigma_R(t)\cdot\sigma_\pi(t). \tag{2.7}$$

ただし $\hat{r}_t = -\mu_\pi(t)/\pi_t$ **とする。**

証明. 状態価格デフレータ π は（厳密に正である）伊藤過程であるから、適当な適合過程 μ_π, σ_π に対して

$$d\pi_t = \mu_\pi(t)dt + \sigma_\pi(t)dB_t$$

と表わすことができる。同様に S に対しても

$$dS_t = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dB_t$$

と表わすことができる。状態価格デフレータでデフレートされた価格過程 S^π に対して伊藤の補題を用いれば

$$\begin{aligned} dS_t^\pi &= \pi_t dS_t + S_t d\pi_t + \sigma_\pi(t)\sigma_S(t)dt \\ &= (\mu_S(t)\pi_t + \mu_\pi(t)S_t + \sigma_\pi(t)\sigma_S(t))dt + (\sigma_\pi(t)S_t + \sigma_S(t)\pi_t)dB_t. \end{aligned}$$

状態価格デフレータの定義より S^π はマルチンゲールであるから、上式最左辺の「ずれ (drift) 項」はほとんどいたるところでゼロでなければならない。したがって

$$0 = \mu_S(t)\pi_t + \mu_\pi(t)S_t + \sigma_\pi(t)\sigma_S(t).$$

これより

$$\frac{\mu_S(t)}{S_t} = -\frac{\mu_\pi(t)}{\pi_t} - \frac{\sigma_\pi(t)\sigma_S(t)}{\pi_t S_t} \tag{2.8}$$

を得る。当該証券の累積的な収益率過程 R は $dR_t = dS_t/S_t$, $R_0 = 0$ によって定義されているから

$$dR_t \equiv \mu_R(t)dt + \sigma_R(t)dB_t = \frac{\mu_S(t)}{S_t}dt + \frac{\sigma_S(t)}{S_t}dB_t.$$

伊藤過程 R の表現の一意性と (2.8) を考慮することによって、(2.7) を得る。 □

この結果は、後で述べる状態価格ベータモデルの前段階であるという意味で、重要である。

(2.7) は特定証券の収益率に関するものであるが、同じ議論が、任意の自己資金充足的な取引戦略 θ の収益率 R^θ に対してもあてはまる。

系 2.2.1 (自己資金充足的取引戦略の収益率). π **を価格過程** X **に対する状態価格デフレータとし、** $W_t = \theta_t \cdot X_t$ **で定義される** $\mathbb{R}^1$ **値伊藤過程である価値過程** W **を考える。また、**θ **に対する累積的な収益率** R^θ **を以下のような伊藤過程として定義する。すなわち**

$$R_t^\theta = \int_0^t \frac{1}{W_s} dW_s, \tag{2.9}$$

$$dR_t^\theta = \mu_\theta(t)dt + \sigma_\theta(t)dB_t. \tag{2.10}$$

このとき、(2.7) **は以下のように書き換えられる。**

$$\mu_\theta(t) - \hat{r}_t = -\frac{1}{\pi_t}\sigma_\theta(t)\sigma_\pi(t), \quad \hat{r}_t = -\frac{\mu_\pi(t)}{\pi_t}. \tag{2.11}$$

証明. θ は自己資金充足的であるから、その価値過程 W は

$$dW_t = \theta_t^\top dX_t = \theta_t^\top \mu_X(t)dt + \theta_t^\top \sigma_X(t)dB_t.$$

したがって

$$dR_t^\theta = \frac{dW_t}{W_t} = \frac{\theta_t^\top \mu_X(t)}{W_t}dt + \frac{\theta_t^\top \sigma_X(t)}{W_t}dB_t.$$

他方、X^π がマルチンゲールであることから

$$0 = \mu_X(t)\pi_t + \mu_\pi(t)X_t + \sigma_X(t)\sigma_\pi(t)^\top.$$

上式の両辺と θ_t との内積をとり適当に整理した結果と、伊藤過程 R^θ の表現の一意性によって拡散項が一致するという事実から

$$\begin{cases} \dfrac{\theta_t^\top \mu_X(t)}{W_t} = -\dfrac{\mu_\pi(t)}{\pi_t} - \dfrac{\theta_t^\top \sigma_X(t)\sigma_\pi(t)^\top}{\pi_t W_t}, \\ \sigma_\theta(t) = \dfrac{\theta_t^\top \sigma_X(t)}{W_t}. \end{cases}$$

かくして目的の関係式を得る。 □

2.2.3　状態価格デフレータと状態価格ベータモデル

σ_π を状態価格デフレータの $\mathbb{R}^d$ 値拡散項、σ_X を価格過程 X の $\mathbb{R}^{N\times d}$ 値拡散項とする。このとき

$$\sigma_\pi(t)^\top = \sigma_X(t)^\top \varphi_t + \varepsilon_t \quad \text{かつ} \quad \sigma_X(t)\varepsilon_t = 0, \quad t \in [0,T] \tag{2.12}$$

を満たす $\mathbb{R}^N$ 値適合過程 φ と $\mathbb{R}^d$ 値適合過程 ε がつねに存在する。θ を $\sigma_X^\top\theta = \sigma_X^\top\varphi$ を満たすような自己資金充足的取引戦略とする。すでに見てきたとおり、θ が自己資金充足的であるから、θ の市場価値過程 $W = \theta \cdot X$ は、その拡散項が $\theta^\top\sigma_X = \varphi^\top\sigma_X$ である伊藤過程となる。したがって、θ の累積収益率過程 R^θ を確率積分 (2.10) で定義することができ、その拡散項 σ_θ は $\sigma_\theta = \varphi^\top\sigma_X/W$ となる。ある任意の証券に対する累積的な収益率過程 R は $\mathbb{R}^1$ 値伊藤過程であるから、(2.7) から

$$\begin{aligned} \mu_R(t) - \hat{r}_t &= -\frac{1}{\pi_t}\sigma_R(t) \cdot [\varphi_t^\top \sigma_X(t) + \varepsilon_t] \\ &= -\frac{W_t}{\pi_t}\sigma_R(t) \cdot \sigma_\theta(t) \end{aligned}$$

を得る。なぜなら、σ_R は σ_X の行の線形結合であるから、$\sigma_R(t)\cdot\varepsilon_t=0$ となるからである。特に、(2.11) より、取引戦略 θ に対する収益率過程 R^θ に対して

$$\mu_\theta(t)-\hat{r}_t=-\frac{W}{\pi_t}\sigma_\theta(t)\cdot\sigma_\theta(t)$$

となるから、以下のような特定証券の収益率 R に対する**状態価格ベータモデル**

$$\begin{aligned}&\mu_R(t)-\hat{r}_t=\beta_R(t)(\mu_\theta(t)-\hat{r}_t)\\ &\text{ただし}\\ &\beta_R(t)=\frac{\sigma_\pi(t)\cdot\sigma_\theta(t)}{\sigma_\theta(t)\cdot\sigma_\theta(t)}\end{aligned} \tag{2.13}$$

を得る。この結果は、単一期間状態価格ベータモデルの連続時間版であると見ることができる。[(2.18)]

2.3 同値マルチンゲール測度と Girsanov の定理

同一空間 $(\Omega,\mathfrak{F})$ に対する同値確率測度 $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ において、[(2.19)] $\mathbb{P}$ 可測な確率変数 X が $\mathbb{Q}$ に関してマルチンゲールであり、かつ、Radon-Nikodym 導関数 $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ が有限分散を持つ場合、$\mathbb{Q}$ を X に関する**同値**マルチンゲール**測度**という。

同値マルチンゲール測度の存在性を保証する価格過程 X の条件と、一意性に関する条件を調べておく。このために Girsanov の定理を用いる。[(2.20)]

2.3.1 同値マルチンゲール測度と Girsanov の定理の関係、および可約性

価格過程 X は $\mathbb{R}^N$ 値伊藤過程であるから、(2.1) で示されたように、適合過程 μ, σ をそれぞれ $\mu\in(\mathfrak{L}^1)^N$, $\sigma\in(\mathfrak{L}^2)^{N\times d}$ であるような $\mathbb{R}^N$ 値、$\mathbb{R}^{N\times d}$ 値適合過程として

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu_s ds+\int_0^t\sigma_s dB_s$$

と表わすことができる。ここで、$\mathbb{R}^d$ 値適合過程 $\eta\in(\mathfrak{L}^2)^d$ を解とする線形方程式

$$\sigma_t\eta_t=\mu_t,\quad t\in[0,T] \tag{2.14}$$

を考える。(2.14) に解が存在するとき、X は**可約**であるという。(2.14) の解は、各々の Brown 運動によって生み出される価格変化の平均価格変化率 μ と「リスク」の量 σ との間にある比例関係をもたらすものとみることができる。この意味で、η を**リスクの市場価格過程**と呼ぶことがある。もっとも、応用上は、リスクの市場価格という用語を**ニューメレールデフレータ**によって基準化した後に用いることの方が多いようである。ここでいうニューメレールデフレータとは、ある単一証券（短期利子率過程 r を持つゼロクーポン債が用いられることが多い）の価格過程の逆数であるようなデフレータを意味する。[(2.21)]

[(2.18)] 状態価格ベータモデルの単一期間版については、Duffie[66, Chp.1] を参照されたし。
[(2.19)] 同値確率測度の定義については、補論を参照されたし。
[(2.20)] Girsanov の定理については補論の定理 2.A.2 を参照されたし。
[(2.21)] この点に関しては、以下の系 2.3.1 を参照されたし。

Girsanov の定理によるずれ項の変換と拡散項の不変性を示す補論の系 2.A.1 の (2.A.6)(2.A.7) から、X が可約であるとき、X は

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s d\hat{B}_s \tag{2.15}$$

のように変換されることがわかる。ここで、$\hat{B}$ は同値確率測度 $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動である。したがって、X は $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールとなる。上の仮定の下では、Radon-Nikodym 導関数 $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = \xi_T^\eta$, $\xi_t^\eta = 1 + \int_0^t \xi_s^\eta \eta_s dB_s$ が測度 $\mathbb{P}$ の下で有限分散を持つことはほとんど自明であるから、$\mathbb{Q}$ は同値マルチンゲール測度となる。

2.3.2　可約性、同値マルチンゲール測度と裁定

同値マルチンゲール測度が $\mathbb{Q}$ が存在するものとしよう。このとき、Radon-Nikodym 導関数 $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ に関して有限分散を持つ。取引戦略 θ を $\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ に限定する。さらに、$\mathbb{R}^1$ 値確率変数 Y を

$$Y = \int_0^T \|\theta_t^\top \sigma_t\|^2 dt$$

によって定義する。このとき Y は測度 $\mathbb{P}$ に関して有限分散を持つ。有限分散を持つ 2 つの確率変数の積は有限な期待値をもつから、$(d\mathbb{Q}/d\mathbb{P})\sqrt{Y}$ は $\mathbb{P}$ に関して有限な期待値を持つ。したがって

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\sqrt{Y}\right) &= \int_\Omega \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\sqrt{Y} d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \sqrt{Y} d\mathbb{Q} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\sqrt{Y}) < \infty. \end{aligned}$$

X は (2.15) のように変換されるから

$$\int_0^T \theta_t^\top dX_t = \int_0^T \theta_t^\top \sigma_t d\hat{B}_t$$

は測度 $\mathbb{Q}$ に関してマルチンゲールとなる。したがって

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \theta_t^\top dX_t\right) = 0.$$

以上の議論を利用すれば、同値マルチンゲール測度が存在することは、裁定が存在しないための十分条件となっていることを確認することができる。

定理 2.3.1 (同値マルチンゲール測度と裁定). 価格過程 X に関する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在すれば、$\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ である任意の自己資金充足的取引戦略 θ は裁定ではない。

証明. $\mathbb{Q}$ は同値マルチンゲール測度であるから、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\int_0^T \theta_t^\top dX_t) = 0$。自己資金充足性の定義 (2.1) から

$$\theta_0 \cdot X_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\theta_T \cdot X_T - \int_0^T \theta_s dX_s\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\theta_T \cdot X_T).$$

このことから、$\theta_T \cdot X_T \geq 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0 \geq 0$。同様に、$\theta_T \cdot X_T > 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0 > 0$。したがって、自己資金充足的取引戦略 $\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ は裁定で有り得ない。 □

この定理の系として以下のことが成り立つ。以下で見るとおり、これは本質的には状態価格デフレータに関する 2 節の命題 2.2.1 と同等である。

系 2.3.1. **あるデフレータ Y によってデフレートされた価格過程 X^Y に対して、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するものとする。このとき、$\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ である任意の自己資金充足的取引戦略 θ は裁定ではない。**

証明. 定義から X^Y は同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ に関してマルチンゲールとなるから

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T \theta_s^\top dX_s^Y\right) = 0.$$

θ が価格過程 X に対して自己資金充足的であるから、ニューメレール不変性の定理 2.2.1 より、θ は X^Y に対して自己資金充足的

$$\theta_t \cdot X_t^Y = \theta_0 \cdot X_0^Y + \int_0^t \theta_s^\top dX_s^Y$$

である。したがって $t = T$ で評価して

$$\theta_0 \cdot X_0^Y = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\theta_T \cdot X_T^Y - \int_0^T \theta_s^\top dX_s^Y\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\theta_T \cdot X_T^Y).$$

かくして $\theta_T \cdot X_T^Y \geq 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0^Y \geq 0$。また同様に、$\theta_T \cdot X_T^Y > 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0^Y > 0$。これは、θ が X^Y に対して裁定ではないことを示している。したがって定理 2.2.1 より、θ は X に対して裁定ではない。 □

応用上は、短期利子率過程 r が存在する場合には、デフレータ Y を $Y_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ に選ぶことが便利である。さらに、r が有界であるならば $\mathfrak{H}^2(X) = \mathfrak{H}^2(X^Y)$ となるから、これまでに得た結論はより自然な形で表現し直すことが可能になる。特に、η をリスクの市場価格とみなす場合には便利である。

価格過程 X の拡散項 σ に対する 1 節の仮定 $r(\sigma) < d$ の下では、リスクの市場価格が存在しない場合には裁定が生み出されることを、補題として示す。

補題 2.3.1. **あるニューメレールデフレータ Y に対して、デフレートされた価格過程 X^Y が可約でないとする。このとき、$\mathfrak{H}^2(X^Y)$ において裁定が存在する。さらに、X^Y に関しては同値マルチンゲール測度は存在しない。**

証明. X^Y が可約でないとき、$\mathfrak{H}^2(X^Y)$ において裁定が存在することを示す。デフレートされた価格過程 X^Y は伊藤過程であるから、そのずれ項を μ^Y、拡散項を σ^Y とすれば

$$X_t^Y = X_0^Y + \int_0^t \mu_s^Y ds + \int_0^t \sigma_t^Y dB_s$$

と表現することができる。X^Y が可約でないから

$$\sigma^Y \eta = \mu^Y$$

を満たす解 $\eta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ は存在しない。したがって、すべての $\eta \in (\mathfrak{L}^2)^d, \theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ に対して

$$\theta^\top \sigma^Y \eta \neq \theta^\top \mu^Y.$$

ここで、任意の (ω,t) に対して $\theta^\top\sigma^Y=0,\ \theta^\top\mu^Y\neq 0$ を満たす θ を考える。階数について $r(\sigma^Y)<d$ が仮定されているから、$\theta^\top\sigma^Y=0$ の解は無数に存在する。このような θ のなかで、任意の (ω,t) に対して $\theta(\omega,t)^\top\mu^Y(\omega,t)<0$ となるものがあればそれをゼロとするように θ を置き換えることが可能で、$\theta(\omega,t)^\top\mu^Y(\omega,t)>0$ とすることができる。

ところで、ニューメレールデフレータ Y に対応するニューメレール証券はデフレートされた後は恒等的に1に等しい価格を持つ。したがって、自己資金充足性の下では、時刻 $t=0$ における ニューメレール証券に対する取引戦略の値が時刻 $t>0$ における価値過程 $W_t=\theta_t\cdot X_t^Y$ に対して影響を及ぼすのは、唯一、初期の価値 $W_0=\theta_0\cdot X_0^Y$ を通じてのみである。したがって、上のような性質を持つ取引戦略 θ に対して、さらに $\theta_0\cdot X_0^Y=0$ を満たすものをとることができる。このとき

$$
\begin{aligned}
\theta_t\cdot X_t^Y &= \int_0^t(\theta_s^\top\mu_s^Y ds+\theta_s^\top\sigma_s^Y dB_s)\\
&= \int_0^t\theta_s^\top\mu_s^Y ds>0.
\end{aligned}
$$

したがって、このような取引戦略 θ は裁定である。

Y の非負性から、$\theta^\top\sigma\equiv 0,\ \theta^\top\mu\neq 0$ であるような $\mathbb{R}^N$ 値ベクトルが存在することは容易にわかる。

X^Y が可約でないとき、補論の系 2.A.1 より、X^Y に関して同値マルチンゲール測度は存在しない。 □

この補題は、リスクの市場価格の存在性（ニューメレールデフレータ Y でデフレートされた価格過程 X^Y の可約性）が無裁定に対する必要条件であることを示している。

上の証明の中でもふれたとおり、$\sigma(\omega,t)$ の階数について $r(\sigma)<d$ であれば、(2.14) の解 $\eta(\omega,t)$（すなわち、リスクの市場価格過程）は無数に存在する。これは分析上都合が悪いので、以下では、(2.14) の解を η^X に一元化する方法を考える。

σ_t から可能な限り線形従属な行を（ω 毎に）取り除き、[2.22] μ_t からこれに対応する要素を取り除くことによって、$\hat\sigma_t,\ \hat\mu_t$ を作る。X が可約であれば、具体的にどのように $\hat\sigma_t,\ \hat\mu_t$ が得られるかに無関係に、(2.14) に対する一意な解 η^X は

$$
\eta_t^X=(\hat\sigma_t^\top\hat\sigma_t)^{-1}\hat\sigma_t^\top\hat\mu_t
$$

で与えられる。

ここで、η に対して

$$
\nu(X)=\frac{1}{2}\int_0^T\eta_t^X\cdot\eta_t^X dt, \tag{2.16}
$$

$$
\xi(X)=\exp\left[\nu(X)-\int_0^T\eta_t^X dB_t\right] \tag{2.17}
$$

を定義する。X が可約、$\exp[\nu(X)]$ の期待値が有限、かつ、$\xi(X)$ の分散が有限であるとき、X は L^2 **可約**であるということにする。

[2.22] すでに脚注 (2.10) で指摘したとおり、$r(\sigma)<d$ は必ずしも $r(\sigma)=N$ を意味するわけではなく、$r(\sigma)=r<N$ であってよい。この場合には、σ には線形従属な行が含まれているから、それを削除することは可能である。「可能な限り」とはこのような状況を意味している。

定理 2.3.2. **X は L^2 可約であるとする。このとき、X に関する同値マルチンゲール測度が存在し、裁定は存在しない。**

証明. X は L^2 可約であるから、Girsanovの定理の系2.A.1から、$d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = \xi(X)$ によって定義される同値確率測度 $\mathbb{Q}$ は同値マルチンゲール測度であることがわかる。裁定が存在しないことは、定理2.3.1から結論される。 □

X が L^2 可約であることを保証する積分可能性の条件が満たされているものとする。そうすれば、先の補題2.3.1とあわせて、この定理は、可約性が裁定が存在しないことの必要かつ十分な条件であることを示している。また同様に、可約性は同値マルチンゲール測度が存在するための必要かつ十分な条件でもある。

次の命題は、同値マルチンゲール測度の一意性に関する条件を与える。

命題 2.3.1. **価格過程 X の拡散項過程 σ がほとんどいたるところで $r(\sigma) = d$ の条件を満たすものとする。このとき、同値マルチンゲール測度はたかだか1つしか存在しない。**

証明. Girsanovの定理から、任意の同値確率測度 $\mathbb{Q}$ に対して

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \xi(X)$$

とすることができる。ここで、$\xi(X)$ は、(2.14) のある解 η^X に対して、(2.17) で与えられるものである。他方、$\sigma_t(\omega)$ の最大階数が $r(\sigma) = d$ であれば、状態 ω に関して (2.14) の解はたかだかひとつしか存在し得ない。したがって、同値マルチンゲール測度はたかだかひとつに限られる。 □

2.3.3 完備市場と冗長な証券の価格

完備市場という用語は、さまざまな文脈でさまざまな意味を持ち得る。しかし、少なくとも本章ではHarrison-Pliska[82] にしたがって、有限分散を持つ任意の確率変数 Y がある自己資金充足的取引戦略 θ の終端価値 $\theta_T \cdot X_T$ として与えられるような市場を意味するものとする。

冗長な証券とは、価格過程 X を所与として、自己資金充足的取引戦略 $\theta \in \mathfrak{H}^2(X)$ の終端価値 $\theta_T \cdot X_T$ が $\theta_T \cdot X_T = Y_T$ で与えられるとき、Y をその価格過程とするような証券を意味する。

以下では、価格過程 X が $X = (\beta, S^1, \ldots, S^{N-1})$ で与えられるものとする。ただし、β は (2.5) で与えられるほとんどいたるところで非負な証券価格であり、$S = (S^1, \ldots, S^{N-1})$ は

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_s^S ds + \int_0^t \sigma_s^S dB_s \tag{2.18}$$

で与えられる $\mathbb{R}^{N-1}$ 値伊藤過程である。ただし、μ^S, σ^S はそれぞれ $\mathbb{R}^{N-1}$, $\mathbb{R}^{(N-1)\times d}$ 値適合過程であり、r は有界な $\mathbb{R}^1$ 値適合過程であるとする。このとき、β^{-1} でデフレートされた価格過程 $X/\beta = (1, S^1/\beta, \ldots, S^{N-1}/\beta)$ を S/β で代表することができる。

命題 2.3.2. **β^{-1} でデフレートされた価格過程 S/β に関して、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するものとする。このとき、(2.18) で与えられる証券価格過程 S は、$\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準Brown運動 $\hat{B}$ に対して確率微分方程式**

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t^S d\hat{B}_t \tag{2.19}$$

を満たす。さらに、市場が完備であるための必要かつ十分な条件は、ほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ であることである。

証明. $Z = S/\beta$ とする。伊藤の補題より、伊藤過程 Z は次の確率微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{dS_t}{\beta_t} - \frac{S_t}{\beta_t^2} d\beta_t \\ &= \frac{1}{\beta_t}\left((\mu_t^S - r_t S_t)dt + \sigma_t^S dB_t\right) \\ &= \left(\frac{\mu_t^S}{\beta_t} - r_t Z_t\right) dt + \frac{\sigma_t^S}{\beta_t} dB_t. \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$ は Z に関する同値マルチンゲール測度であるから、Z は $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになる。また、拡散項の不変性（Girsanov の定理の系 2.A.1）から

$$dZ_t = \frac{\sigma_t^S}{\beta_t} d\hat{B}_t.$$

したがって、$S_t = \beta_t Z_t$ に対して伊藤の補題を用いて

$$\begin{aligned} dS_t &= Z_t d\beta_t + \beta_t dZ_t \\ &= r_t S_t dt + \sigma_t^S d\hat{B}_t. \end{aligned}$$

「ほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ であるとき市場は完備である」ことを示す。このため、Y を有限分散を持つ任意の確率変数とする。補論の Girsanov の定理 2.A.2 と、定理 2.A.1 の 4（マルチンゲール表現定理および伊藤の表現定理）から

$$\frac{Y}{\beta_T} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) + \int_0^T \eta_t d\hat{B}_t$$

であるような $\eta \in \mathfrak{L}(\hat{B})$ が存在する。$r(\sigma^S) = d$ の仮定から

$$\hat{\theta}_t^\top \sigma_t^S = \beta_t \eta_t^\top, \quad t \in [0, T] \tag{2.20}$$

を満たすある適合過程 $\hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^{N-1})^\top$ が存在することがわかる。ここで、θ^0 を

$$\begin{aligned} \theta_t^0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) + \left(\int_0^t \hat{\theta}_s^\top dZ_s - \hat{\theta}_t^\top Z_t\right), \\ \theta_0^0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) - \hat{\theta}_0^\top Z_0 \end{aligned}$$

によって定義する。

このとき、$1/\beta$ によってデフレートされた価格過程 $X/\beta = (1, S^1/\beta, \ldots, S^{N-1}/\beta)^\top$ に対して、$\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{N-1})^\top$ は

$$\begin{aligned} \theta_t \cdot \left(\frac{X_t}{\beta}\right) &= \theta_t^0 + \hat{\theta}_t \cdot Z_t \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) + \int_0^t \hat{\theta}_s^\top dZ_s \\ &= \theta_0^0 + \hat{\theta}_0^\top Z_0 + \int_0^t \hat{\theta}_s^\top dZ_s \end{aligned}$$

を満たす。これは、θ が価格過程 X/β に関して自己資金充足的であることを示している。また

$$
\begin{aligned}
\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) &= \theta_0^0 + \hat{\theta}_0^\top Z_0 + \int_0^T \hat{\theta}_t^\top dZ_t \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) + \int_0^T \hat{\theta}_t^\top \left(\frac{\sigma_t^S}{\beta_t}\right) d\hat{B}_t \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{Y}{\beta_T}\right) + \int_0^T \eta_t d\hat{B}_t \\
&= \frac{Y}{\beta_T}.
\end{aligned}
$$

デフレートされた価格過程 X/β をデフレータ β でデフレートする。ニューメレール不変性の定理 2.2.1 から、θ は $X = (\beta, S^1, \ldots, S^{N-1})^\top$ に関しても自己資金充足的であって、$\theta_T \cdot X_T = Y$ となる。定義より、これは市場が完備であることを示している。

「市場が完備であるときほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ である」ことを示すために、その対偶「ほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ であるという条件が真でない場合、市場は完備でない」ことを示す。ほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ であるという条件が真でない場合、$r(\sigma) < d$ であるから、すべての $\hat{\theta}$ に対して (2.20) が成り立たないようなある有界な $\eta \in \mathfrak{L}(\hat{B})$ が存在する。そこで

$$
\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) = \theta_T^0 + \hat{\theta}_T \cdot Z_T = \int_0^T \eta_t d\hat{B}_t, \quad \frac{\hat{\theta}_t^\top \sigma_t^S}{\beta_t} = \eta_t + \varepsilon_t^\theta
$$

が成り立つような取引戦略 $\theta \in \mathfrak{L}(\hat{B})$ と η を考える。ただし、ε^θ は、各々の θ に対して、ほとんどいたるところで非ゼロであるとする。これは、取引戦略 θ の終端価値 $\theta_T \cdot (X_T/\beta_T)$ が有限分散を持つ確率変数であることを示している。したがって以下では、このような θ が X/β に関して自己資金充足的でないことを示す。

$\mathbb{Q}$ は Z に関する同値マルチンゲール測度であるから

$$
dZ_t = \frac{\sigma_t^S}{\beta_t} d\hat{B}_t.
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \theta_t^\top d\left(\frac{X_t}{\beta_t}\right) &= \int_0^T \hat{\theta}_t^\top dZ_t \\
&= \int_0^T \frac{\hat{\theta}_t^\top \sigma_t^S}{\beta_t} d\hat{B}_t \\
&= \int_0^T (\eta_t + \varepsilon_t^\theta) d\hat{B}_t \\
&= \theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) + \int_0^T \varepsilon_t^\theta d\hat{B}_t.
\end{aligned}
$$

これは、θ が X/β に関して自己資金充足的でないことを示している。したがって、ニューメレール不変性の定理 2.2.1 から、θ は X に関して自己資金充足的でない。かくして完備性の定義から、ほとんどいたるところで $r(\sigma^S) = d$ であるという条件が真でない場合、市場は完備でない。 □

この補題を一般化することによって、冗長な証券に関する結果を導くことができる。

定理 2.3.3 (冗長な証券と裁定、同値マルチンゲール測度). デフレートされた価格過程 X/β に関して同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するものとする。さらに、価格過程 X を所与として、Y を価格過程とする冗長な証券を考える。冗長な価格過程 (X,Y) を $(X,Y) \equiv (\beta, S^1, \dots, S^{N-1}, Y)^\top$ で定義する。このとき、取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(X,Y)$ において、(X,Y) に関する裁定が存在しないための必要かつ十分な条件は、Y/β が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになることである。

証明. Y/β が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールであるとする。$\mathbb{Q}$ は X/β に関する同値マルチンゲール測度であるから、$Z=(X,Y)$ とすれば、$\mathbb{Q}$ は Z/β に関する同値マルチンゲール測度でもある。したがって、定理 2.3.1 から、Z/β に関する自己資金充足的取引戦略 θ は裁定ではない。よって、ニューメレール不変性の定理 2.2.1 から、θ は $Z=(X,Y)$ に関して裁定ではない。すなわち、取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(X,Y)$ において、(X,Y) に関する裁定は存在しない。

逆を証明するために、その対偶「Y/β が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールでないとき、(X,Y) に関する裁定が取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(X,Y)$ に存在する」ことを示す。Y/β

$$\frac{Y_t}{\beta_t} = \frac{Y_0}{\beta_0} + \int_0^t d\left(\frac{Y_s}{\beta_s}\right)$$

が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールでないから

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y_T}{\beta_T}\right) < \frac{Y_0}{\beta_0}$$

とする（反対の不等号 $>$ の場合も、以下と同様の方法によって、裁定が存在することを示すことができる)。

また、デフレートされた価格過程 X/β に関して同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するのであるから、$\theta = (\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{N-1})^\top \in \mathfrak{H}^2(X)$ を自己資金充足的取引戦略

$$\theta_t \cdot \left(\frac{X_t}{\beta_t}\right) = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) + \int_0^t \theta_s^\top d\left(\frac{X_s}{\beta_s}\right)$$

とすると、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\theta \cdot (X_T/\beta_T)] = \theta_0 \cdot (X_0/\beta_0)$。したがって、取引戦略 $(\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{N-1}, -1)^\top \in \mathfrak{H}^2(X,Y)$ は

$$\theta_t \cdot \left(\frac{X_t}{\beta_t}\right) - \frac{Y_t}{\beta_t} = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{Y_0}{\beta_0} + \int_0^t \theta_s^\top d\left(\frac{X_s}{\beta_s}\right) - \int_0^t d\left(\frac{Y_s}{\beta_s}\right)$$

であるから、自己資金充足的である。$t=T$ において、冗長な証券の定義から

$$Y_T = \theta_T \cdot X_T$$

であるから

$$\frac{Y_0}{\beta_0} > \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{Y_T}{\beta_T}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right)\right] = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right).$$

すなわち

$$0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) - \frac{Y_T}{\beta_T}\right] > \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{Y_0}{\beta_0}.$$

したがって、自己資金充足的取引戦略 $(\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{N-1}, -1)^\top \in \mathfrak{H}^2(X,Y)$ は

$$\theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{Y_0}{\beta_0} < 0 \quad \text{かつ} \quad \theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) - \frac{Y_T}{\beta_T} = 0$$

となるから、裁定である。したがって、ニューメレール不変性の定理 2.2.1 から、確かに (X,Y) に関する裁定が取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(X,Y)$ に存在する。 □

2.3.4 状態価格デフレータと同値マルチンゲール測度

これまでの分析を前提とすれば、同値マルチンゲール測度と状態価格デフレータとの関係を調べることができる環境がいよいよ整った。

定理 2.3.4 (状態価格デフレータと同値マルチンゲール測度の同等性). r **を有界な** $\mathbb{R}^1$ **値適合過程として、以下で定義される確率過程** Y

$$Y_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

を価格過程 X **に対するデフレータとする。また、適合過程** ξ **を**

$$\xi_t = \mathbb{E}_t\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)$$

で定義する。さらに、過程 Y, ξ **に対して、新たな過程** π **を**

$$\pi_t = \xi_t Y_t$$

で定義する。このとき、 π **が状態価格デフレータとなるための必要かつ十分な条件は、** Y **でデフレートした後の価格過程** X^Y **に関して同値マルチンゲール測度** $\mathbb{Q}$ **が存在することである。**

証明. まず、X^Y に関する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するとしよう。ところで、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Z|) < \infty$ を満たす任意の $\mathfrak{F}_s$ 可測な確率変数 Z（ただし $s > t$ とする）に対して、補論の補題 2.A.1 から

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(Z)\mathbb{E}_t(\xi_s) = \mathbb{E}_t(\xi_s Z).$$

適合過程 ξ は測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになるから

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(Z)\xi_t = \mathbb{E}_t(\xi_s Z), \quad t \in [0, T].$$

したがって $\mathbb{Q}$ が X^Y に関する同値マルチンゲール測度であり、$\pi_t = \xi_t Y_t$ であるから

$$\mathbb{E}_t(\pi_s X_s) = \mathbb{E}_t(\xi_s X_s^Y) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(X_s^Y)\xi_t = \xi_t X_t^Y = \pi_t X_t.$$

これは、X^π がマルチンゲールであることを示しており、したがってデフレータ π は状態価格デフレータである。

逆に、π が状態価格デフレータであるとしよう。このとき

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(X_s^Y) = \frac{\mathbb{E}_t(\xi_s X_s^Y)}{\xi_t} = \frac{\mathbb{E}(\pi_s X_s)}{\xi_t} = \frac{\mathbb{E}(X_s^\pi)}{\xi_t} = \frac{X_t^\pi}{\xi_t} = X_t Y_t = X_t^Y.$$

これは、X^Y が測度 $\mathbb{Q}$ に関してマルチンゲールになることを示しており、したがって定義から、$\mathbb{Q}$ は X^Y に関する同値マルチンゲール測度である。 □

以上の分析の結果から、実際上、状態価格デフレータと同値マルチンゲールの存在という 2 つの概念は同一であることがわかる。

2.3.5　配当を持つ価格過程に対する拡張

これまでは、証券には配当が支払われないものとしてきた。ここでは、$[0,T]$ で配当が支払われる証券に対して、これまでの基本的な分析を拡張することを試みる。[2.23] [2.24]

ある証券 j に対して時刻 t までに支払われた累積配当額を D_t^j として、当該証券の累積配当過程 D^j が伊藤過程であるとする。特に、$D_t^j = \int_0^t \delta_s^j ds$ であるとき、δ^j を当該証券の**配当率過程**ということがある。累積配当過程 D^j と、これに関連した証券価格過程 X^j を所与とすれば、利得過程 $G^j = X^j + D^j$ は、当該証券を保有することによって生み出される総利得（資本利得と配当利得）を表わす。

$D = (D^1, \ldots, D^N)$, $X = (X^1, \ldots, X^N)$, $G = X + D$ とする。G を総利得過程と呼ぶことにする。取引戦略 $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^j)$ は $\mathfrak{L}(G)$ に属するものとし、確率積分 $\int \theta^\top dG$ を定義するに十分な仮定が満たされているものとすれば、$\int \theta^\top dG$ は θ によって生み出される総利得を表わす。簡単化のために、各 j に対して、X^j, D^j はそれぞれ有限分散を持つ伊藤過程であるとする。取引戦略 θ は

$$\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dG_s, \quad t \in [0,T]$$

であるとき、総利得過程 G に関して自己資金充足的である。裁定は、以前と同様

$$\theta_0 \cdot X_0 \leq 0 \text{ かつ } \theta_T \cdot X_T > 0 \quad \text{または} \quad \theta_0 \cdot X_0 < 0 \text{ かつ } \theta_T \cdot X_T \geq 0$$

を満たす自己資金充足的取引戦略 θ として定義される。配当–価格過程 (D, X) に関する同値マルチンゲール測度は、総利得過程 G がマルチンゲールになり、$d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ が有限分散を持つような同値確率測度 $\mathbb{Q}$ として定義される。配当–価格過程 (D, X) に関してある取引戦略 θ を所与として

$$D_t^\theta = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dG_s - \theta_t \cdot X_t, \quad t \in [0,T]$$

で定義される過程 D^θ が伊藤過程であるとき、D^θ を θ によって生み出される累積配当過程と呼ぶことにする。

累積配当過程 D を

$$dD_t = \mu_D(t)dt + \sigma_D(t)dB_t$$

で表わすことにすれば、デフレートされた累積配当過程 D^Y は

$$dD_t^Y = Y_t dD_t + \sigma_D(t)\sigma_Y(t)^\top dt$$

となる。D^Y が伊藤過程であることは自明であろう。また、デフレートされた利得過程 G^Y は

$$G_t^Y = G_t Y_t = D_t^Y + X_t Y_t$$

によって定義される。G^Y が伊藤過程であることも自明であろう。

以上のような概念の拡張にともなって、定理 2.2.1 は以下のように拡張される。

[2.23] 以下で明らかにされるように、ここでいう「配当」は必ずしも正の値でなくてよい。マイナスの配当が支払われるということは、外部から何らかの「資金注入」を必要とすると解釈することができる。

[2.24] ただし、配当が支払われる証券を考察する必要があるのは、証券市場均衡の存在性に関する分析を別にすれば純粋な数理ファイナンスの領域ではなく、むしろ主たる関心が応用にある領域（端的な例としては、期間構造派生証券をあげることができる）であるので、この節の配当が支払われる証券に対する拡張は、証券市場均衡の存在性の分析あるいは期間構造派生証券の分析等へ進むための準備的考察としての意味合いが強い。

定理 2.3.5. Y **をあるデフレータとすると、**θ **が** G **に関して自己資金充足的であることと、**θ **が** G^Y **に関して自己資金充足的であることは同値である。また、**θ **が** G **に関して裁定であることと、**θ **が** G^Y **に関して裁定であることは同値である。**

証明. $\theta \in \mathfrak{L}(G)$ であるから、確率積分 $\int_0^t \theta_s^\top dG_s$ を定義するに十分であって、$W_t = \theta_t \cdot X_t$ で定義される価値過程 W は

$$W_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dG_s, \quad t \in [0, T]$$

で表わされる $\mathbb{R}^1$ 値伊藤過程となる。W, Y が伊藤過程であることから、適当な適合過程 μ_W, σ_W, μ_Y, σ_Y に対して

$$\begin{aligned} dW_t &= \mu_W(t)dt + \sigma_W(t)dB_t, \\ dY_t &= \mu_Y(t)dt + \sigma_Y(t)dB_t. \end{aligned}$$

便宜のために、総利得過程 G を

$$dG_t = \mu_G(t)dt + \sigma_G(t)dB_t$$

で表わすことにする。Y によってデフレートされた総利得過程 G^Y は

$$dG_t^Y = Y_t dG_t + G_t dY_t + \sigma_G(t)\sigma_Y(t)^\top dt$$

で表わされる確率微分をもつ。デフレートされた価値過程 W^Y は $W_t^Y = W_t Y_t$ で定義される。伊藤の補題を用いれば

$$\begin{aligned} dW_t^Y &= Y_t dW_t + W_t dY_t + \sigma_W(t)\sigma_Y(t)^\top dt \\ &= Y_t \theta_t^\top dG_t + (\theta_t \cdot G_t)dY_t + (\theta_t^\top \sigma_G(t))\sigma_G(t)^\top dt \\ &= \theta_t \cdot [Y_t dG_t + G_t dY_t + \sigma_G(t)\sigma_Y(t)^\top] \\ &= \theta_t^\top dG_t^Y. \end{aligned}$$

したがって $\theta_t \cdot X_t = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dG_s$ であるとき、かつ、そのときに限り $\theta_t \cdot X_t^Y = \theta_0 \cdot X_0^Y + \int_0^t \theta_s^\top dG_s^Y$ である。

デフレータ Y は厳密に正である伊藤過程であったから、裁定の定義 (2.6) によって主張の後半部分は自明である。よって、主張は証明された。 □

補題 2.3.2. **配当–価格過程** (D, X) **に関して取引戦略** θ **によって生み出される累積配当過程** D^θ **が伊藤過程として定義されるものとする。このとき、**D^θ **をデフレータ** Y **によってデフレートしたものは、デフレートされた配当–価格過程** (D^Y, X^Y) **に関する取引戦略** θ **によって生み出される利得過程である。**

証明. 累積配当過程 D を

$$dD_t = \mu_D(t)dt + \sigma_D(t)dB_t$$

で表わすことにする。D^θ は

$$D_t^\theta = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s^\top dG_s - \theta_t \cdot X_t, \quad t \in [0, T]$$

によって定義される伊藤過程であるから

$$dD_t^\theta = \theta_t^\top dG_t - \theta_t \cdot dX_t = \theta_t^\top dD_t.$$

すなわち、D^θ の拡散係数は $\theta^\top \sigma_D$ である。このことから、$D^\theta Y$ を確率微分すれば

$$\begin{aligned} d(D_t^\theta Y_t) &= Y_t dD_t^\theta + \theta_t^\top \sigma_D(t)\sigma_Y(t)^\top dt \\ &= \theta_t^\top (Y_t dD_t + \sigma_D(t)\sigma_Y(t)^\top dt) \\ &= \theta_t^\top dD_t^Y \\ &= \theta_t^\top dG_t^Y - \theta_t \cdot dX_t^Y. \end{aligned}$$

したがって $D_0^\theta = 0$ に注意して

$$D_t^\theta Y_t = \theta_0 \cdot X_0^Y + \int_0^t \theta_t^\top dG_t^Y - \theta_t \cdot X_t^Y.$$

右辺はデフレートされた配当–価格過程 (D^Y, X^Y) に関する取引戦略 θ によって生み出される利得過程であるから、上の主張は証明された。 □

同様に、定理 2.3.1 は以下のように拡張される。

定理 2.3.6. **配当–価格過程 (D,X) に関する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在すれば、$G = X + D$ であるような任意の自己資金充足的取引戦略 $\theta \in \mathfrak{H}^2(G)$ は、総利得過程 G に関して裁定ではない。**

証明. $\mathbb{Q}$ は同値マルチンゲール測度であるから、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\int_0^T \theta_s^\top dG_s) = 0$。自己資金充足性の定義から

$$\theta_0 \cdot X_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\theta_T \cdot X_T - \int_0^T \theta_s dG_s\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\theta_T \cdot X_T).$$

このことから、$\theta_T \cdot X_T \geq 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0 \geq 0$。同様に、$\theta_T \cdot X_T > 0$ であれば $\theta_0 \cdot X_0 > 0$。したがって、自己資金充足的取引戦略 $\theta \in \mathfrak{H}^2(G)$ は利得過程 G に関して裁定で有り得ない。 □

冗長な証券に対する拡張は、次のようになされる。まず、θ によって生み出される累積配当過程 D^θ を

$$D_t^\theta = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^t \theta_s dG_s - \theta_t \cdot X_t, \quad t \in [0,T]$$

によって定義する。累積配当過程 H と価格過程 V をもつ付加的な証券を考える。ある取引戦略 $\theta \in \mathfrak{H}^2(G)$ に対して、$H = D^\theta$, $\theta_T \cdot X_T = V_T$ であれば、この付加的な証券は冗長であるという。このとき、定理 2.3.3 は次のように拡張される。

定理 2.3.7. **デフレートされた配当–価格過程 $(D/\beta, X/\beta)$ に関して同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するものとする。さらに、配当–価格過程 (D,X) を所与として、$H = D^\theta$ を配当過程、V を価格過程とする冗長な証券を考える。冗長な価格過程 (X,V) を $(X,V) \equiv (\beta, S^1, \ldots, S^{N-1}, V)^\top$ で定義する。このとき、取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(\hat{G})$, $\hat{G} = G + (V+H)$, $G = X + D$ において、$\hat{G}$ に関する裁定が存在しないための必要かつ十分な条件は、デフレートされた冗長な証券の利得過程 $(V+H)/\beta$ が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになることである。**

証明. $(V+H)/\beta$ が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールであるとする。$\mathbb{Q}$ は $(D/\beta, X/\beta)$ に関する同値マルチンゲール測度であるから、$Z=(X,V)$, $Y=(D,H)$ とすれば、$\mathbb{Q}$ は $(Y/\beta, Z/\beta)$ に関する同値マルチンゲール測度でもある。したがって、定理 2.3.6 から、$\hat{G}/\beta = G/\beta + (V+H)/\beta$ に関する自己資金充足的取引戦略 θ は裁定ではない。よって、ニューメレール不変性の定理 2.3.5 から、θ は $\hat{G}$ に関して裁定ではない。すなわち、取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(\hat{G})$ において、$\hat{G}$ に関する裁定は存在しない。

逆を証明するために、その対偶「$(V+H)/\beta$ が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールでないとき、$\hat{G}$ に関する裁定が取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(\hat{G})$ に存在する」ことを示す。$(V+H)/\beta$

$$\frac{V_t+H_t}{\beta_t} = \frac{V_0+H_0}{\beta_0} + \int_0^t d\left(\frac{V_s+H_s}{\beta_s}\right)$$

が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールでないから

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_T+H_T}{\beta_T}\right) < \frac{V_0+H_0}{\beta_0}$$

とする（反対の不等号 $>$ の場合も、以下と同様の方法によって、裁定が存在することを示すことができる）。また、デフレートされた配当–価格過程 $(D/\beta, X/\beta)$ に関して同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が存在するのであるから、$\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{N-1})^\top \in \mathfrak{H}^2(G)$ を自己資金充足的取引戦略

$$\theta_t \cdot \left(\frac{X_t}{\beta_t}\right) = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) + \int_0^t \theta_s^\top d\left(\frac{G_s}{\beta_s}\right)$$

とすると、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\theta\cdot(X_T/\beta_T)] = \theta_0\cdot(X_0/\beta_0)$。したがって、取引戦略 $(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{N-1}, -1)^\top \in \mathfrak{H}^2(\hat{G})$ は

$$\theta_t \cdot \left(\frac{X_t}{\beta_t}\right) - \frac{V_t+H_t}{\beta_t} = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{V_0+H_0}{\beta_0} + \int_0^t \theta_s^\top d\left(\frac{G_s}{\beta_s}\right) - \int_0^t d\left(\frac{V_s+H_s}{\beta_s}\right)$$

であるから、自己資金充足的である。$t=T$ において、冗長な証券の定義から

$$V_T = \theta_T \cdot X_T, \quad H_T = \theta_0 \cdot X_0 + \int_0^T \theta_s dG_s - \theta_s \cdot X_t$$

であるから

$$\frac{V_0+H_0}{\beta_0} > \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{V_T+H_T}{\beta_T}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right)\right] = \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right).$$

すなわち

$$0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) - \frac{V_T+H_T}{\beta_T}\right] > \theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{V_0+H_0}{\beta_0}.$$

したがって、自己資金充足的取引戦略 $(\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{N-1}, -1)^\top \in \mathfrak{H}^2(\hat{G})$ は

$$\theta_0 \cdot \left(\frac{X_0}{\beta_0}\right) - \frac{V_0+H_0}{\beta_0} < 0 \quad \text{かつ} \quad \theta_T \cdot \left(\frac{X_T}{\beta_T}\right) - \frac{V_T+H_0}{\beta_T} = 0$$

となるから、裁定である。したがって、ニューメレール不変性の定理 2.3.5 から、確かに裁定が取引戦略の空間 $\mathfrak{H}^2(\hat{G})$ に存在する。 □

2.4 まとめ

本章は、状態価格デフレータの果たす役割を中心として、数理ファイナンス論の主要結果である「連続時間における無裁定証券価格の理論」の論理構造を明らかにすることを目的として執筆されたものである。

Delbaen[57] 等によって、取引戦略 θ の空間に対する制約条件は $\mathfrak{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ まで緩められている。しかし 1.2 節で示したとおり、取引戦略の空間として 2 乗可積分な適合過程の空間 $\mathfrak{L}^2$ をとれば、1. 確率積分を定義するための十分条件となること、2. 無裁定を保証する十分条件となること、3. 証券市場均衡が存在する十分条件となること、を根拠として本章では $\mathfrak{L}^2$ を採用した。

状態価格デフレータの存在は、裁定が存在しないことを意味した（これは状態評価アプローチの帰結でもあるが、この点に関しては Duffie[66, Chp.2,4,6] に大いに刺激を受けた）。また、裁定が存在しないための十分条件は、同値マルチンゲール測度が存在することであった。特に本章では、この同値マルチンゲール測度の存在性に関する条件と Girsanov の定理との関係を詳細に分析した。また、Girsanov の定理とそれに関連する数学の定理も、できるだけ自己完結的に直感的な証明（あるいはその概略）を付した。

既存の理論を応用することによって新たな分析を推し進めていくことに主たる関心がある場合には、同値マルチンゲール測度の存在性に関する条件を「ブラックボックス」とするのは当然の方策である。しかし、残念ながら、つねに同値マルチンゲール測度が存在して一意であるとしてよいわけではない（第 3 節の命題 1, 2 を参照されたし）。したがって、同値マルチンゲール測度の存在性に関する議論を詳細に検討することは、数理ファイナンス論の立場から見れば、一度はくぐらねばならない通過儀礼であると考えられる。数理ファイナンスの分野は数学者をはじめ多くの数学プロパーがどんどん参入してきており、必ずしも数学プロパーではないわれわれファイナンス研究者は理論をフォローすることすら困難になりつつある状況にある。この意味で、可能な限り「ブラックボックス」を排除することによって、無裁定証券価格理論の論理構造を自己充足的・体系的に把握することを目標とした本章の研究意図は、少なくとも今後しばらくの間はその重要性を失うことはないと考えられる。

2.A 補論—Girsanov の定理に関連する確率論の要約—

確率過程の空間 $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$, $\mathfrak{H}^2$ の定義については本論第1節を参照されたし。

2.A.1 同値確率測度

同一空間 $(\Omega, \mathfrak{F})$ に対する確率測度 $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ において、任意の事象 A に対して

$$\mathbb{P}(A) > 0 \leftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0$$

であるとき、$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{P}$ の（$\mathbb{P}$ は $\mathbb{Q}$ の）**同値確率測度**であるという。

Radon-Nikodym 導関数を介して、条件付期待値の確率測度の変換に関する以下の有用な定理が成り立つことが知られている。

補題 2.A.1. **$\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ を可測空間（確率空間）$(\Omega, \mathfrak{F})$ に対する 2 つの確率測度とし、f を測度 $\mathbb{P}$ の下で $|f|$ が可積分であるような確率変数として**

$$d\mathbb{Q}(\omega) = f(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

が成り立つものとする。X を

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|X|) = \int_\Omega |X(\omega)|d\mathbb{P}(\omega) < \infty \quad \text{かつ} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|X|) = \int_\Omega |X(\omega)|f(\omega)d\mathbb{P}(\omega) < \infty$$

を満たす $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上のある確率変数とする。$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ である部分 σ 加法族とすると、以下の関係が成り立つ。

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathfrak{G}]\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[f|\mathfrak{G}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[fX|\mathfrak{G}].$$

証明. 条件付期待値の定義から、任意の $G \in \mathfrak{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})fd\mathbb{P} &= \int_G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})d\mathbb{Q} = \int_G Xd\mathbb{Q} \\ &= \int_G Xfd\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(fX|\mathfrak{G})d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

他方、繰返し期待値の法則から

$$\begin{aligned}\int_G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})fd\mathbb{P} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})f \cdot \chi_G\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})f \cdot \chi_G|\mathfrak{G}\right)\Big) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\chi_G\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X|\mathfrak{G})\right) \\ &= \int_G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f|\mathfrak{G})d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

したがって

$$\int_G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X|\mathfrak{G})\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(f|\mathfrak{G})d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(fX|\mathfrak{G})d\mathbb{P}.$$

G は任意であったから、所望の関係式を得る。 □

2.A.2　$\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ を被積分項とする確率積分

$\theta \in (\mathfrak{H}^2)^d$ に対して確率積分を定義することは、通常の確率変数列の概収束の意味でなし得る。そこで、ある所与の適合過程 $\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ に対して確率積分 $\int \theta dB \equiv \sum_i^d \int \theta^i dB^i$ を定義することを考える。

任意に与えられた正の整数 n に対して

$$\tau(n) = \inf\left\{t:\ \int_0^t \theta_s \cdot \theta_s ds = n\right\}$$

であるような停止時刻 $\tau(n)$ を考え、$\theta_t^{(n)} = \theta_t 1_{t \le \tau(n)}$ とする。定義から、$\theta^{(n)} \in (\mathfrak{L}^2)^d$ であり、ほとんど確実に $\int_0^T \theta_s^{(n)} \cdot \theta_s^{(n)} ds \le n$ となるから、$\theta^{(n)} \in (\mathfrak{H}^2)^d$。したがって、$\int \theta^{(n)} dB$ を定義することができる。また、$\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ であり、ほとんど確実に $\int_0^t \theta_s \cdot \theta_s ds$ は t に関して非減少であるから

$$n = \int_0^{\tau(n)} \theta_s \cdot \theta_s ds \le \int_0^T \theta_s \cdot \theta_s ds \le \infty.$$

したがって、$\{\tau(n)\}$ は非減少閉確率変数列となるから

$$\lim_{n\to\infty} \tau(n) = T \quad \text{a.s.}$$

よって、任意の $t \in [0,T]$ に対して $n \to \infty$ のときの $\int_0^t \theta_s^{(n)} dB_s$ の極限として、$\int_0^t \theta_s dB_s$ を定義することができる。

2.A.3　局所マルチンゲールと優マルチンゲールの性質

任意の時刻 $t,\ s\ (s > t)$ に対して、性質

$$\mathbb{E}_t(X_s) \le X_t$$

を満足する可積分な適合過程 X を優マルチンゲールという（$\mathbb{E}_t(\cdot)$ は時刻 t における条件付き期待値を表わす）。

各々の n に対して $X_t^{\tau(n)} = X_{t\wedge\tau(n)}$ で定義される停止過程 $X^{\tau(n)}$ がマルチンゲールとなるような、ほとんど確実に T に収束する停止時刻の非減少列 $\tau(n)$ が存在するとき、適合過程 X は局所マルチンゲールであるという。

定理 2.A.1. 以下の結果がなり立つことが知られている。

1. あらゆるマルチンゲールは局所マルチンゲールであるが、その逆は成り立たない。
2. （Fatou の補題）非負局所マルチンゲールは優マルチンゲールである。
3. （Doob-Meyer 分解）右連続な優マルチンゲール X は、M をあるマルチンゲール、A を $A_0 = 0$ であるようなある増加適合過程として、$X = M - A$ の形に一意に分解される。
4. （マルチンゲール表現定理）M を局所マルチンゲールとする。このとき

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \ge 0 \tag{2.A.1}$$

を満たす一意な適合過程 $\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ が存在する。また、$\mathfrak{F}_T$ 可測な 2 乗可積分確率変数 F に対して

$$F(\omega) = \mathbb{E}(F(\omega)) + \int_0^T \theta_s^\top dB_s(\omega) \tag{2.A.2}$$

であるような一意な適合過程 $\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ が存在する。

この定理の証明は確率論の専門書に譲る。(2.25)
先の場合、$\int \theta^{(n)} dB$ はマルチンゲールであるから、$\int \theta dB$ は局所マルチンゲールとなる。

2.A.4 Girsanov の定理

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}_T, \mathbb{P})$、標準 Brown 運動 $B = \{B_t : t \in [0,T]\}$ の標準フィルトレーション $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t : t \in [0,T]\}$ はすでに定義されているとおりとする。$\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ である確率変数 θ は

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s \cdot \theta_s ds\right)\right] < \infty \tag{2.A.3}$$

であるとき、**Novikov の条件**を満たすといわれる。

補題 2.A.2 (Novikov の定理). **θ が Novikov の条件を満たすとき**

$$\xi_t^\theta = \exp\left(\int_0^t \theta_s^\top dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s \cdot \theta_s ds\right), \quad t \in [0,T]$$

で定義される確率過程 ξ^θ は非負マルチンゲールである。

厳密な証明は Ikeda-Watanabe[93, Theorem 5.3(p.152)]、Karatzas-Shreve[98, Sec.3.5(pp.190-201)] 等に譲り、ここでは直感的な証明を与える。

証明. 定義から $\xi_0^\theta = 1$。また伊藤の補題から

$$d\xi_t^\theta = \xi_t^\theta\left(\theta_t^\top dB_t - \frac{1}{2}\theta_t \cdot \theta_t dt\right) + \frac{1}{2}\xi_t^\theta[\theta_t^\top dB_t]^2 = \xi_t^\theta \theta_t^\top dB_t.$$

すなわち

$$\xi_t^\theta = 1 + \int_0^t \xi_s^\theta \theta_s^\top dB_t, \quad t \in [0,T] \tag{2.A.4}$$

を得る。マルチンゲール表現定理から、ξ^θ は明らかにマルチンゲールである。 □

(2.25) 第一の項目については Karatzas-Shreve[98, p.36(Remark 5.16)] を参照のこと。Fatou の補題に関しては、Karatzas-Shreve[98, p.36(Problem 5.19)]、Rogers-Williams[125, IV.14(p.22)] を参照のこと。優マルチンゲールに関する Doob-Meyer 分解については、Liptser-Shiryayev[107, pp.62-71] が詳しい証明を与えている。Karatzas-Shreve[98, pp.24-6] は劣マルチンゲールの場合を証明している。マルチンゲール表現定理の後半部分は、一般に、**伊藤の表現定理**として知られている。Øksendal[120, Chp.IV] は、伊藤の表現定理を含むマルチンゲール表現定理を紹介・証明している。Rogers-Williams[125] はさまざまなタイプのマルチンゲール表現定理を紹介している。

Ikeda-Watanabe[93, Theorem 5.3, Remark 5.1] は、Novikov の条件および風巻の条件

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \theta_s^\top dB_s\right)\right] < \infty$$

が、ξ^θ がマルチンゲールであるための十分条件であることを示している。

同値確率測度 $\mathbb{Q}$ は、伊藤の表現定理より適当な θ を定めて、非負マルチンゲール ξ^θ（ただし $\xi_0^\theta = 1$）を構成することにより

$$\frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)} = F(\omega), \quad F(\omega) = \xi_T^\theta(\omega)$$

によって定めることができる。

定理 2.A.2 (Girsanov の定理). **$\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ を所与とし、ξ^θ が非負マルチンゲールであるとする。このとき**

$$B_t^\theta = B_t - \int_0^t \theta_s ds, \quad t \leq T \tag{2.A.5}$$

によって定義される $\mathbb{R}^d$ 値過程 B^θ は、同値確率測度 $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動となる。

$\mathbb{Q}$ 測度の下での局所マルチンゲール M に対して

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dB_s^\theta, \quad t \leq T$$

を満たす一意な適合過程 $\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ が存在する。

厳密な証明は確率論の専門書に譲り、ここでは直感的な証明を与える。

証明. まず、(2.A.5) で定義される B^θ が $\mathbb{Q}$ 測度の下で $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B_t^\theta) = 0$ であるマルチンゲールとなることを見るために、$\zeta_t = \xi_t^\theta B_t^\theta$ とおく。$d\xi_t^\theta = \xi_t^\theta \theta_t dB_t$ であることに注意して、伊藤の補題を用いれば

$$\begin{aligned}
d\zeta_t &= \xi_t^\theta dB_t^\theta + B_t^\theta d\xi_t^\theta + d\xi_t^\theta dB_t^\theta \\
&= \xi_t^\theta(-\theta_t dt + dB_t) + B_t^\theta \xi_t^\theta \theta^\top dB_t + \xi_t^\theta \theta_t^\top dB_t dB_t \\
&= \xi_t^\theta [dB_t + B_t^\theta \theta_t^\top dB_t] \\
&= \xi_t^\theta \Gamma_t^\theta dB_t
\end{aligned}$$

を得る。ただし、Γ_t^θ は $B^\theta = (B^{\theta 1}, B^{\theta 2}, \ldots, B^{\theta d})$ に対して

$$[\Gamma_t^\theta]_{ij} = \begin{cases} \theta_t B_t^{\theta j}, & i \neq j, \\ 1 + \theta_t B_t^{\theta j}, & i = j \end{cases}$$

で定義される $\mathbb{R}^{d \times d}$ 行列を表わす。また、第 2 等号の右辺第 3 項は、$B = (B^1, \ldots, B^d)$ において $B^1, \ldots, B^d$ がそれぞれ独立

$$dB_t^i dB_t^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ dt, & i = j \end{cases}$$

であることから

$$\xi_t^\theta \theta_t^\top dB_t dB_t = \left(\xi_t^\theta \sum_{i=1}^d \theta_t^i dB_t^i \right) dB_t = \xi_t^\theta \theta_t dt$$

となって、第3等号を得る。

上の結果は ζ が測度 $\mathbb{P}$ の下でマルチンゲールとなることを示している。そこで、$t > s$ として先の補題 2.A.1 を用いれば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(B_t^\theta | \mathfrak{F}_s) &= \frac{\mathbb{E}(\xi_t^\theta B_t^\theta | \mathfrak{F}_s)}{\mathbb{E}(\xi_t^\theta | \mathfrak{F}_s)} \\ &= \frac{\mathbb{E}(\zeta_t | \mathfrak{F}_s)}{\xi_s^\theta} \\ &= \frac{\zeta_s}{\xi_s^\theta} = B_s^\theta \end{aligned}$$

を得る。これは B^θ が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールになることを示している。また、定義から $B_0^\theta = 0$。

B^θ が測度 $\mathbb{Q}$ の下で Brown 運動であることを主張するには、すべての $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して $(B_t^\theta (B_t^\theta)^\top - tI_{d\times d})_{ij} = B_t^{\theta i} B_t^{\theta j} - \delta_{ij} t$ が測度 $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールであることを示せばよい。これは、$\nu_t = [\xi_t^\theta (B_t^\theta (B_t^\theta)^\top - tI_{d\times d})]_i$ に対して伊藤の補題を用いれば、本質的に上と同様の手段で示すことができる。

後半は、B^θ が測度 $\mathbb{Q}$ の下での標準 Brown 運動であるから、定理 2.A.1 のマルチンゲール表現定理より直ちに示される。 □

系 2.A.1 (Girsanov の定理によるずれ項の変換と拡散項の不変性). それぞれ $\mathbb{R}^N$ 値、$\mathbb{R}^{N\times d}$ 値適合過程である μ, σ に対して、$\mathbb{R}^N$ 値伊藤過程 X が

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

を満たすものとする。ただし、B は測度 $\mathbb{P}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動である。ν は

$$\sigma_t \theta_t = \mu_t - \nu_t, \quad t \le T \tag{2.A.6}$$

を満たすある適合過程 $\theta \in (\mathfrak{L}^2)^d$ が存在するような、ある適合過程 $\nu \in (\mathfrak{L}^1)^N$ とする。(2.A.6) で存在の保証された θ と非負マルチンゲール ξ^θ に対して

$$d\mathbb{Q}(\omega) = \xi_T^\theta(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

で定義される同値確率測度 $\mathbb{Q}$ に関しても、X がある伊藤過程となるとする。このとき

$$X_t = X_0 + \int_0^t \nu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^\theta, \quad t \le T \tag{2.A.7}$$

のように表現される。ただし、B^θ は測度 $\mathbb{Q}$ の下での標準 Brown 運動を表わす。

証明. これは、直接計算によって示すことができる。X を確率微分することによって

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \mu_t dt + \sigma_t dB_t \\
&= (\sigma_t \theta_t + \nu_t) dt + \sigma_t dB_t \qquad ((2.A.6)\text{ より}) \\
&= \nu_t dt + \sigma_t (\theta_t dt + dB_t) \\
&= \nu_t dt + \sigma_t dB_t^\theta. \qquad ((2.A.5)\text{ より})
\end{aligned}
$$

したがって

$$X_t = X_0 + \int_0^t \nu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^\theta$$

を満たす。測度を $\mathbb{P}$ から $\mathbb{Q}$ に変換することによって、ずれ項を μ から ν に変換し得る場合でも、拡散項 σ は不変に保たれる。 □

第II部

数理ファイナンスの応用研究

第3章　ロシア型幾何平均インデックスオプションの評価と複製戦略

要旨

Shepp-Shiryaev[129] によって提唱されたロシア型オプションは、エキゾチックオプションのなかでも数学的に興味あるオプションであるが、価格の有限性を保証するにはあまり現実的とはいえない仮定を必要とした。他方、Duffie-Harrison[68] は、オプションの本源的証券である株式に連続的な配当がある場合には、ロシア型オプションが無裁定取引戦略によって複製可能であることを示している。しかし、時間を通じて一定の配当利回りの連続的配当をもつ証券（株式）のみを対象とすることは、少なくとも現実的な妥当性の観点からは、きわめて強い制約条件であるといわざるを得ない。そこで本章では、連続的配当に依存しない有限の市場価値をもつロシア型オプションモデルを提示し、マルチンゲール価格理論アプローチにしたがって、このオプションの評価と複製戦略を厳密に導くことにする。もっとも本質的なモデルの前提は、ロシア型オプションの本源的資産を単一株式とするのではなく、幾何平均インデックスとすることにある。

キーワード

自己資金充足的な取引戦略、複製戦略、同値マルチンゲール測度、Black-Scholes（BS）証券価格モデル、幾何平均インデックス、ロシア型オプション、マルチンゲール価格理論アプローチ

はじめに

近年のオプション評価では、現実には取引されていない仮想的オプションを評価しようとする試みが積極的におこなわれている。このような仮想的なオプションのなかで、価値が本源資産の価格過程のパスに依存するタイプ、すなわち経路依存型オプション（path-dependent option）、が数種類考案されている。(3.1) この種のオプションは名称に国名・地域名を被せられることが多いので別名エキゾチックオプションとも呼ばれるが、(3.2) このようなパスに依存したオプションの評価は、「裁定」というテクニックを別にすれば、Black-Scholes[43] オプション公式やその導出法をそのまま利用することができないために、一般に、数学的にはかなり難しい問題になる。近年開発された新しいタイプの経路依存型オプションモデルには、Yor-Chesney-Geman-Jeanblanc Picqué[136] が提示したパリ型オプション（バリアオプション）、Akahori[33]、Dassion[55] が提示したクォンタイルオプション（パーセンタイルオプション）がある。しかし、経路依存型オプションの代表的モデルとしては、いわゆるアジア型オプションとロシア型オプションを欠くことができない。

(3.1) 経路依存型オプションは Goldman-Sosin-Gatto[79] によるルックバックオプションを契機とする。ルックバックオプションに関してはほかに、池田 [11] が参考になる。
(3.2) エキゾチックオプションに関しては Zhang[138] のテキストが詳細である。

Geman-Yor[78] はアジア型オプションを、Shepp-Shiryaev[129, 130] および Duffie-Harrison[68] はロシア型オプションを考察対象としている。

現実に取引されていない仮想的なオプションにすぎない経路依存型オプションを考案し、それを評価（価格付け）しようとする試みを、どのように評価すればよいであろうか。[3.3]

第1に、仮想的な option でも論理的に価格付け可能であることを示すのは、それ自体で意義のあることである。オプションはひとつの条件付き請求権に過ぎず、条件付き請求権はそれを考案する人間のイマジネーションによってきわめて多様な形態をとり得る。そのような条件付き請求権に対しても、従来のアプローチを修正・拡張することによって評価し得るということが示されれば、このことは従来の理論的フレームワークがきわめて妥当性の高い、適用範囲の広いものであるということを確認することにつながる。

第2に、このようにして評価された仮想的なオプションの評価式は、まだ十分に分析されつくしていない現実の資産・証券の評価に利用することができるかもしれない。実際、ある請求権の評価式が別の請求権を評価あるいは解釈する際に有効であるという例をあげるのはそれほど困難なことではない。[3.4]任意の2つの請求権の間に成り立つ対応を見いだすのはそれほど簡単なことではないが、現実には存在しないという理由で一方の評価を放棄するのは、現実に存在してまだ十分に分析がなされていない他方の請求権の評価に際して、目隠ししたまま素手で立ち向かおうとするようなものであろう。まだ十分に分析されつくしていない請求権の代表例としては、アメリカ型プット・オプションがある。[3.5]

Shepp-Shiryaev[129] が提唱したロシア型オプションは、誤解を恐れずに簡単にいえば、任意の時点 τ で、任意に固定されたある値と原証券（株式）の価格履歴の最大値（これを running maximum という）$\sup_{t\leq\tau} S_t$ のいずれか小さくない方をペイオフとして受け取ることができる権利である。任意時点で行使可能である点、満期日が特定されない点、価格履歴の最大値を行使価格とみなせる点などから、アメリカ型永久ルックバック・プットと類似点を持つ（Duffie-Harrison[68, Sec.5]）。

個人投資家の観点からのロシア型オプションの合理的評価（最適な行使時刻を決定すること、ならびにそれから導かれるオプションの主観的な価値）は、Shepp-Shiryaev[129] によってほぼ完全に解決されている。[3.6]しかしながら、ロシア型オプションの市場価格の有限性を保証するには、源証券の価格動学を

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad B \text{ は確率空間 } (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \text{ 上の } \mathbb{R}^1\text{-値標準 Brown 運動}, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}^1$$

とし、無危険資産収益率 r が時間を通じて一定であるとして、$r > \mu$ というあまり現実的とはいえない仮定を必要とした。他方、Duffie-Harrison[68, Prop.2] では、オプションの本源的証券である株式に連続的配当がない場合には、ロシア型オプションは無限の市場価格をもつことが示されている。同様に、オプションの本源的証券である株式に時間を通じて配当利回りが一定であるよう

[3.3] もちろん、経路依存型オプションすべてが取引されていないというわけではない。たとえば、ルックバックオプションのあるタイプは OTC（店頭）取引が行われているようである。しかし、多くの経路依存型オプションは取引所取引がなされていない。

[3.4] この具体例として、たとえば Ingersoll[94, Chp.17] が参考になる。

[3.5] アメリカ型プット・オプションに関する理論的なサーベイは Myneni[117] によって与えられている。

[3.6] 彼らは、ノンスタンダード最適停止アプローチによって、有界な個人の合理的価格評価関数を導出している。ノンスタンダードとは、制御されるべき値が確率過程の過去の履歴を引きずっているという意味である。スタンダード最適停止問題は変分不等式アプローチによって Bensoussan[40] が完全に解いている。そこでは、一定の正則条件の下で、最適停止時刻の存在性・値関数の存在性と一意性が証明されている。

オプション評価分析の分野における最適停止アプローチの応用として、Jacka[95], El Karoui-Karatzas[73] をあげることができる。

な連続的な配当がある場合には、ロシア型オプションが無裁定取引戦略によって複製可能であることを示している。

市場価値が無限となるような条件付き請求権を市場に上場することは不可能であるし、たとえ上場されたとしても事実上取引することは不可能である。また、時間を通じて配当利回りが一定であるような連続的配当をもつ株式のみを対象とすることも、少なくとも現実的な妥当性の観点からは、きわめて強い制約条件であるといえる。

そこで、本章では、連続的配当に依存しないロシア型オプションをモデル化し、これを評価するとともに複製戦略を明らかにすることにする。モデルのもっとも本質的な前提は、ロシア型オプションの本源的資産を単一株式とするのではなく、Value Line タイプの幾何平均インデックスとすることにある。国友・高橋 [17] は、幾何平均と算術平均のそれぞれのオプション評価を分析しており大いに参考になるが、残念ながら彼らの関心は評価にあり、複製戦略・ヘッジ化は分析されていない。S&P100 や TOPIX タイプの加重平均インデックスに関する（プット・コール）オプションのヘッジ化戦略は、Lamberton-Lapeyre[106] によって分析されている。しかし、幾何平均インデックスオプションに関するオプションの複製戦略・ヘッジ化の問題は、これまでほとんど取り扱われていない。そこで第 1 節において、幾何平均インデックスと Black-Scholes 証券価格モデルを前提とする証券市場モデルの関係を分析することからはじめる。結論的には、本章の設定の下では幾何平均インデックスの「価格」動学は 1 次元幾何 Brown 運動に従い、Shepp-Shiryaev[129] の分析手法が利用できることがわかる。つぎに第 2 節において、ロシア型インデックスオプションの保有者の最適停止問題（現在価値を最大にするようオプションの最適行使時刻を選択する）としてロシア型インデックスオプションの値関数を導出する。この分析は、基本的には Shepp-Shiryaev[129] を踏襲することができるが、2 節の最終結論（定理 2.1）の証明にとって最も重要な一様可積分マルチンゲール（命題 2.1）については Shepp-Shiryaev[129] の原論文とは違うものを提示した。(3.7)最後に第 3 節で、ロシア型インデックスオプションの価値を複製する自己資金充足的な取引戦略を明らかにし、この取引戦略が裁定でないことを証明して（定理 3.3.1）、ロシア型インデックスオプションの市場価値を明らかにする。2 節がオプション保有者の主体的問題であるのに対して、3 節はオプションライターのヘッジ化・複製戦略の（したがって市場評価の）問題となっている。ここでは Duffie-Harrison[68] と比較可能な結果が得られているが、本章で採用した分析手法はマルチンゲール価格理論アプローチに厳密にしたがっており、この意味で Duffie-Harrison[68] の結果を単純に応用したものではなく、彼らとは独立である。

3.1 証券市場と幾何平均インデックス

3.1.1 証券市場モデル

まずはじめに、一般的に利用される証券市場モデルを明らかにしておく。証券市場には N 種の危険証券と無危険資産の $N+1$ 種類の証券が存在するとする。N 種危険証券の価格の動学は以下

(3.7)赤壁・荒木 [9] は、原論文 Shepp-Shiryaev[129] の一様可積分性の証明方法に疑念を示し、閉マルチンゲールによる一様可積分性の証明を採用している。本章も彼らのアプローチを採用した。また、最近のテキスト Kallianpur-Karandikar[97, Chp.14,pp.246-7] でも（必ずしも明示的ではないが）閉マルチンゲールによるアプローチが採用されているようであるが、本章の証明はそれとは独立である。

のように与えられるものとする。(3.8)

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + S_i(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dw_j(t),$$

$$i = 1, 2, \cdots, N, \quad \text{すべての } i, j \text{ に対して} \mu_i,\ \sigma_{ij} \text{は定数}. \quad (3.1)$$

ここで適合過程 $(w_j(t); \mathfrak{F}_t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathbb{P}, \mathfrak{F})$ 上で定義される互いに独立な $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動を表わす。(3.9) また、無危険資産価格 S^0 の動学は

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \qquad S_0^0 = 1$$

で与えられるものとする。ただし、r は定数で、瞬間的利子率と解釈される。

自己資金充足的な取引戦略 (self-financing trading strategy) と裁定 (arbitrage) を定義しておく。$\mathbb{R}^N$-値確率過程 (S_t) を $S_t = (S_1(t), \ldots, S_N(t))^\top$ で定義することにする。

定義 3.1.1 (**自己資金充足的な取引戦略、裁定、同値マルチンゲール測度**). 取引戦略

$$\Phi = (\phi^0, \phi),\ \phi^0 \in \mathbb{R}^1,\ \phi \in \mathbb{R}^N$$

に対する価値過程 $V(\Phi)$ は

$$V_t(\Phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^\top S_t$$

で与えられる。取引戦略 Φ が任意に固定された時刻 $T < \infty$ に対して必要な積分可能性条件

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt < \infty, \qquad \int_0^T \|\phi_t\|^2 dt < \infty$$

を満たし、かつ

$$V_t(\Phi) = V_0(\Phi) + \int_0^t \phi_t^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u^\top dS_u, \quad t \le T$$

を満たすとき、Φ を自己資金充足的 (self-financing) な取引戦略という。

裁定は

$$V_0(\Phi) < 0 \text{ かつ } V_T(\Phi) \ge 0 \qquad \text{あるいは} \qquad V_0(\Phi) \le 0 \text{ かつ } V_T(\Phi) > 0$$

を満たす自己資金充足的な取引戦略 Φ として定義される。(3.10)

割引かれた価格過程 $(\tilde{S}_t)$, $\tilde{S}_t = S_t/S_t^0$ がマルチンゲールになるような $\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{P}^*$ が存在する場合に、$\mathbb{P}^*$ を同値マルチンゲール測度 (equiverent martingale measure) という。

このとき、次の定理が成り立つ。

(3.8) El Karoui-Quenez[72] の証券市場モデルを参考にした。

(3.9) これは $w = (w^1, \ldots, w^d)$ が $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動であるということを示す。しかしながら、すべての $i, j (i \neq j)$ に対して一般に $\sigma_{ij} \neq 0$ であるので、これは N 種の本源的証券の価格がそれぞれ独立であるということを意味しているわけではないことに注意されたし。この証券価格モデルは、すべての危険証券が同じ $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動を不確実性の源泉とするということを意味している。

(3.10) このような自己資金充足的な取引戦略としての裁定の定義は、Ross[127] 以降の数理ファイナンス論の習慣にしたがっている。

定理 3.1.1 (同値マルチンゲール測度と裁定). $\tilde{S}$ に対して同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ が存在するものとすれば、任意の自己資金充足的取引戦略 Φ は裁定ではない。

証明は補論を参照されたし。

定義 3.1.2 (**複製戦略と市場の完備性**). 取引戦略 $\Phi = (\phi_t^0, \phi_t)_{0\le t\le T}$ は、自己資金充足的であり、かつ、対応するポートフォリオの現在価値 $\tilde{V}_t(\Phi) = \phi_t^0 + \phi_t\tilde{S}_t$ がすべての t に対して非負であり $\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ が $\mathbb{P}^*$ に関して 2 乗可積分である場合に、許容される (admissible) という。オプションのペイオフ（ヨーロッパ型オプションの場合はオプションの満期価値）が許容される取引戦略の終端価値に等しい場合に、複製可能 (replicatable) であるといわれる。すなわち、満期 T である条件付き請求権 X の複製戦略 (replicating strategy) は、$V_T(\Phi) = X$ となるような自己資金調達可戦略 Φ である。

少なくとも一つの複製戦略が存在する場合に、請求権 X は達成可能 (attainable) であるという。市場が完備 (complete) であるというのは、市場のあらゆる請求権 X が達成可能であること、いいかえれば、すべての $\mathfrak{F}_T$ 可測な有限分散確率変数 X に対して、$V_T(\Phi) = X$ となるような自己資金充足的取引戦略 Φ が存在することである。

注意 3.1.1. $\mathbb{R}^N$-値ベクトル μ, $\mathbf{1}$、$\mathbb{R}^{N\times d}$-値行列 σ を

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu_N\end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1d}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{Nd}\end{pmatrix}$$

とする。線形方程式 $\mu - r\mathbf{1} = \sigma\eta$ を満たす解 $\eta \in \mathbb{R}^d$ が存在して（可約であるといわれる）一意であるとき（σ の最大位数 $r(\sigma) = d \le N$）、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ は存在して一意であり、定理 3.1.1 の逆命題が成り立つことが知られている。(3.11)

3.1.2 幾何平均インデックス—定義—

次に、先の証券市場モデルの下で幾何平均インデックスを考察する。幾何平均インデックスは、N 種危険証券のなかから n 種の証券を固定的に選んで構成され、一般に以下のように定義される。

$$X_t \equiv C\left\{\prod_{k=1}^{n} S_k(t)\right\}^{1/n}, \quad 1 < n \le N \tag{3.2}$$

ここで X_t は時刻 t におけるインデックスを表わす。また、一般性を失うことなく、N 種危険証券のなかから 1 番目から n 番目までの証券によってインデックスが構成されるものとすることができる。$S_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ は時刻 t における第 i 証券の価格を、C は幾何平均インデックスのウェイトを表わし、正値定数とする。実際、Value Line Composite インデックスでは $C = 100/X_{1961}$ のように与えられる。(3.12) しかしながら本章では、C（したがって X_0）を適当に固定することができるものとする。

はじめに以下のことを明らかにしておく。

(3.11) Duffie[66]、赤壁 [3] を参照のこと。

(3.12) Value Line インデックスに関する財務契約については、Eytan-Harpaz[74] を参照されたし。Value Line インデックス・オプションはカンサスシティ証券取引所で取引されている（Ingersol[94, p.382] を参照されたし）。

補題 3.1.1.

$$w_t^k = \frac{\sum_{j=1}^d \sigma_{kj} w_j(t)}{\sigma^k}, \quad \sigma^k = \sqrt{\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^2}, \quad k = 1, \ldots, N$$

によって新たに定義される確率過程 (w_t^i) は $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動である。

証明は補論を参照されたし。このとき、先の証券価格モデル (3.1) は

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + S_i(t)\sigma^i dw_t^i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N, \quad \text{すべての } i \text{ に対して} \mu_i,\ \sigma^i \text{は定数}. \tag{3.3}$$

のように変更される。w_i, w_j $(i, j = 1, \ldots, d)$ は仮定より互いに独立な標準 Brown 運動であったが、各々の証券に対して与えられた不確実性の源泉である標準 Brown 運動 w^i, w^j $(i, j = 1, \ldots, N)$ は定義より無相関にならない。この点を別にすれば、(3.3) は各々の証券価格が 1 次元 Black-Scholes 証券価格モデル（以下 BS 価格モデルと略記する）に従うということを示している。

w^i, w^j $(i, j = 1, \ldots, N)$ に相関があることに注意すれば、多次元伊藤の補題を (3.2) に適用することによって、幾何平均インデックスの動学が以下のように与えられることは容易に示される。

命題 3.1.1. 幾何平均インデックス X の動学は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i - \hat{\delta}(n) \right) dt + \frac{1}{n} X_t \sum_{i=1}^n \sigma^i dw^i, \\ \hat{\delta}(n) &\equiv \frac{1}{2n^2} \left\{ (n-1) \sum_{i=1}^n (\sigma^i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \rho_{ij} \sigma^i \sigma^j \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで、ρ_{ij} は $\mathbb{E}(dw^i dw^j) = \rho_{ij} dt$ によって与えられる相関係数である。

3.1.3　BS 証券価格モデルと幾何平均インデックス

オプション評価の先行業績において、2 種類以上の本源資産が存在する場合には、それぞれの本源資産が BS 価格モデルに従うもの、すなわちそれぞれの本源資産 i, j が独立な不確実性の源泉 w^i, w^j を持つもの、として取り扱うものが少なくない。[3.13]本章もこの証券価格モデルの設定を採用することにする。これは、(3.3) において、w^i, w^j $(i, j = 1, \ldots, N)$ がそれぞれ独立な $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動である（$\mathbb{E}(dw^i dw^j) = 0$）と仮定することを意味する。

以上の前提の下では、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ は存在して一意であることがわかる。実際、次の補題が成り立つ。

補題 3.1.2. $\zeta_i = (\mu_i - r)/\sigma^i$, $i = 1, \ldots, N$ **とすれば**

$$\tilde{w}_t^i = w_t^i + \zeta_i t, \quad i = 1, \ldots, N$$

によって定義される互いに独立な $\mathbb{R}^N$-値確率過程 $(\tilde{w}_t)$ は、$\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{P}^*$ に関する標準 Brown 運動となる。[3.14]このとき、すべての i に対してデフレートされた価格過程 $(\tilde{S}_i)$ は $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールとなる。

[3.13]たとえば、資産交換オプションに関する Lamberton-Lapeyre[105, pp.83-6] を参照されたし。
[3.14]Girsanov 変換を施しても $\tilde{w}^i$ の互いの独立性は保存されることは明らかである。

証明は補論を参照されたし。w^i, w^j $(i, j = 1, \ldots, N)$ がそれぞれ独立な $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動である（$\mathbb{E}(dw^i dw^j) = 0$）と仮定しているので、幾何平均インデックスの動学 (3.4) は以下のように修正される。

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \delta(n) \right) dt + \frac{1}{n} X_t \sum_{i=1}^{n} \sigma^i dw^i, \\ \delta(n) &\equiv \frac{1}{2n^2}(n-1) \sum_{i=1}^{n} (\sigma^i)^2 > 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

インデックスに組み入れられた n 種証券に対する自己資金充足的取引戦略のクラスを Θ であらわすことにする。また、取引戦略 $\theta \in \Theta$ の時刻 t における価値を $P_t(\theta) = \theta_t^\top S_t$ であらわすことにする。

命題 3.1.2. 幾何平均インデックス X のウェイト C が適当に固定されているものとする。このとき

$$X_t = e^{-\delta(n)t} P_t(\theta) \tag{3.6}$$

であるような自己資金充足的な取引戦略 $\theta \in \Theta$ が存在する。

証明は補論を参照されたし。証明にあるように、このような自己資金充足的な取引戦略 θ の具体的な例として、n 種証券に資金を常に同額投資するよう再配分する取引戦略がある。

幾何平均インデックス X は n 種証券価格 S_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ の非線形結合であり、それ自体は「非価格」変数である。しかしながら、上の命題 3.1.2 で存在が示される $\theta \in \Theta$ に対して定義された $P_t(\theta)$ は価格 S_k の線形結合であり、明らかに「価値」である。(3.6) は、このような θ を媒介とすることによって、X が「価値」$P(\theta)$ を割引率 $\delta(n)$ でデフレートしたものの「価格」変数であるとみなすことができることを示している。いいかえれば、インデックス X の値は n 種証券のポートフォリオ θ の価値によって求めることができるのである。

命題 3.1.1, 3.1.2 から、X の動学 (3.5) を次のように書きかえることができる。

$$dX_t = (\mu - \delta(n)) X_t dt + \sigma X_t dB_t, \qquad X_0 = x > 0. \tag{3.7}$$

ここで、$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i / n$, $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma^i)^2}$ であり、(B_t) は $B_t = \int_0^t \sum_{i=1}^n \sigma^i dw^i / n\sigma$ によって与えられる $\mathbb{R}^1$-値 $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動を表わす。[3.15] (3.7) は明らかに「強い解」をもち、その明示的な解過程は

$$X_t = x \exp\left[\left(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right]$$

によって与えられる。以下では、インデックスの動学として (3.5) の代わりに (3.7) を用いることにする。

[3.15] 測度 $\mathbb{P}$ の下で $w^i \sim N(0, t)$, $i = 1, \ldots, n$ であり、それぞれ独立であることに注意すれば、$\sum_{k=1}^n \sigma^k w^k$ に対して

$$\mathbb{E}(e^{i \sum_{k=1}^n \sigma^k w^k}) = \prod_{k=1}^{n} e^{-(\sigma^k)^2 t/2} = e^{-t \sum_{k=1}^n (\sigma^k)^2}.$$

したがって、$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma^i)^2}$ とおけば、$B_t = \sum_{i=1}^n \sigma^i w^i / \sigma$ は測度 $\mathbb{P}$ の下で $N(0, t)$ の正規確率変数となる。

さらに $W_t = \sum_{i=1}^N \sigma^i \tilde{w}_t^i$ とすれば、(W_t) は $\mathbb{P}^*$-標準 Brown 運動となり、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ の下で (3.5) は

$$dX_t = (r - \delta(n))X_t dt + \sigma X_t dW_t, \qquad X_0 = x > 0 \tag{3.8}$$

となる。同じノーテーションを用いれば、命題 3.1.2 の取引戦略 $\theta \in \Theta$ の価値 $P_t(\theta)$ は次のように表わされる。

$$dP_t(\theta) = \begin{cases} P_t(\theta)(\mu dt + \sigma dB_t) & \mathbb{P}\text{ の下で,} \\ P_t(\theta)(r dt + \sigma dW_t) & \mathbb{P}^*\text{の下で.} \end{cases} \tag{3.9}$$

したがって、デフレートされた価値過程 $(\tilde{P}_t(\theta)) = (e^{-rt}P_t(\theta))$ は $\mathbb{P}^*$ の下で

$$\tilde{P}_t(\theta) = x \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$$

となり、$\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであることがわかる。有限の T に対して、明らかに、$\mathbb{E}^*(\int_0^T (\tilde{P}_s(\theta))^2 ds) < \infty$ となる。ここで、$\mathbb{E}^*$ は測度 $\mathbb{P}^*$ に関する期待値を表わす。

注意 3.1.2. BS 証券価格モデルでは、時間を通じて一定の配当利回り δ_S によって連続的に配当がなされる証券価格過程 (S_t) は

$$dS_t = S_t(\mu_S - \delta_S)dt + \sigma_S S_t dB_t$$

によって表わされる。(3.8) は、たとえ各証券に配当がない場合であっても、幾何平均インデックスには「一定の配当利回り」$\delta(n)$ による連続的配当が形式的に生まれることを示している。

また、多くの場合、インデックスそれ自体が派生証券として取引されることはない。したがって、インデックスに関するオプション（条件付き請求権）は、実際にどのような「証券」に対する権利であるのかを現実に則して解釈することが難しい場合が少なくない。しかし幾何平均インデックスの場合には、命題 3.1.2 でみたように現実に取引可能なポートフォリオ θ の価値 $P_t(\theta)$ から逆にインデックスを構成することが可能であるので、幾何平均インデックスに関するオプションはこのようなポートフォリオ θ に関する条件付き請求権であると考えることができる。

上の注意は重要である。なぜならこの注意によって、ロシア型インデックスオプションの解釈が容易になるとともに、これを複製する複製戦略を構成する際に分析がかなり単純化されるからである。

3.2 ロシア型幾何平均インデックスオプション—定義とその値関数—

3.2.1 定義

x_t によって、(3.7) の解過程として与えられる「価格」過程 $(X_s)_{s=0}^t$ の running maximum、すなわち

$$x_t = \sup_{0 \le u \le t} X_u \tag{3.10}$$

を表わすことにする。ロシア型インデックスオプションの価値過程 (Y_t) は、以下のように、任意に固定された正値定数 y から出発する running maximum x_t の時間連続な非減少確率過程として定義される。[3.16]

$$Y_t = x_t \vee y, \qquad x_0 = X_0 = x, \quad 0 < x < y, \quad t \geq 0, \tag{3.11}$$

定義より、(Y_t) はフィルトレーション $(\mathfrak{F}_t)$ に適合している。オプションの保有者は、任意の行使日 $\tau \in [0, \infty)$ を選択することが許されており、時刻 τ において当該オプションを行使すればペイオフ Y_τ を受け取ることができる。したがって、無危険資産収益率 r と、過程 $X = (X_t)$ と $Y = (Y_t)$ のそれぞれの初期値 x, y を所与とすれば、オプション保有者は以下のように、オプションの期待行使価値を最大にするような行使時刻を決定する最適化問題に直面することになる。

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau.$$

ただし、$\mathcal{T}_{0,\infty}$ によってフィルトレーション $(\mathfrak{F}_t)$ のすべての停止時刻の集合を表わすことにする。running maximum x_t の定義 (3.10) によって、任意の時刻 $t \in [0, \infty)$ において

$$Y_t \geq x_t \geq X_t \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

であることがわかる。以上のモデルをファイナンス論から解釈すれば、このインデックスオプションが保有者に時刻 τ において権利行使価格 Y_τ で本源証券（幾何平均インデックス X を構成するポートフォリオ $\theta \in \Theta$）を売却する権利を与えているものと見ることができる。[3.17]

3.2.2 ロシア型インデックスオプション保有者による最適オプション行使問題の値関数

ここでは、ロシア型インデックスオプションの保有者による主体的最適化問題（オプションの現在価値を最大にするよう最適な行使時刻 τ を選択するという最適停止問題）の値関数を求めることにする。

関数 $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$F(x, y) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau \tag{3.12}$$

のように定義する。ただし、(Y_t) は (3.11) によって定義される確率過程であり、割引率 r とインデックスのドリフト係数 $\mu - \delta(n)$ のあいだには

$$r > \mu - \delta(n)$$

[3.16] Shepp-Shiryaev[129] の定義も参照されたし。

[3.17] 実際には、オプション保有者は行使時刻 τ において無条件に Y_τ を受け取ることができ、ペイオフ $Y_\tau - X_\tau$ を受け取るわけではないので、この解釈はやや強引に過ぎるかもしれない。しかし 3 節の議論を先取りすれば、通常の意味におけるプットオプションの（同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ の下での）市場評価に関しては、$\tilde{X} = (e^{-rt}X_t)$ が $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであることを考慮すれば

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau}(Y_\tau - X_\tau) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau - x$$

となるから、このような解釈にもある程度正当性が生ずる。この意味で、(3.11) で定式化されるロシア型オプションはプットオプションと考えることができる（Kallianpur-Karandikar[97, p.255] も参照されたし）。また、任意行使が可能であるという意味で、「ユーザ・フレンドリーなアメリカ型オプションの変種」（Musiela-Rutkowski[116, p.205]）とみなすこともできる。

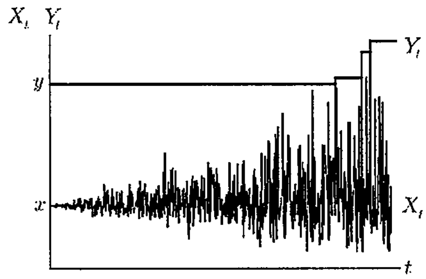

図 3.1: X_t と Y_t の標本過程

なる関係があるものとする。最適停止問題 (3.12) の継続領域 $\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{D} = \{(t, X, Y)|e^{-rt}F(X, Y) > e^{-rt}Y,\ X \leq Y\}$ で定義する。(3.18)

補題 3.2.1. $F(x, y) \in C^{2,1}$ **とすれば、**$(t, X, Y) \in \mathfrak{D}$ **において** $F(X, Y)$ **は** Bellman **方程式**

$$\mathfrak{A}F - rF = 0$$

を満足する。ここで、微分作用素 $\mathfrak{A}$ **は**

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\mu - \delta(n))x\frac{\partial}{\partial x}$$

で定義される。また、$(t, X, Y) \notin \mathfrak{D}$ **においては** $F(X, Y) = Y$ **である。**

証明は補論を参照されたし。

このロシア型インデックスオプションの値関数 $F(x, y)$ に対して、以下のような解の候補 $F^*(x, y)$ を考える。$\tilde{\mathfrak{D}} = \{(x, y)|F^*(x, y) > y,\ x \leq y\}$, $(x, y) \in \tilde{\mathfrak{D}}$ に対して $\tilde{\mathfrak{D}}_y = \{x|F^*(x, y) > y\}$ とする。$\tilde{\mathfrak{D}}$ 上で定義される $F^*(x, y) \in C^{2,1}$ は以下の条件を満たす関数とする。

$$\mathfrak{A}F^*(x, y) - rF^*(x, y) = 0, \quad \text{on } \tilde{\mathfrak{D}}_y, \tag{3.13}$$

$$F^*(\xi, y) = y, \quad F_x^*(\xi, y) = 0, \quad \text{for } \xi \in \partial\tilde{\mathfrak{D}}_y, \tag{3.14}$$

$$F_y^*(y, y) = \left.\frac{\partial F^*(x, y)}{\partial y}\right|_{x=y} = 0. \tag{3.15}$$

このとき、以下の補題が成り立つ。

(3.18)下の補題の主張を一見する限りでは、最適停止問題 (3.12) の継続領域 $\mathfrak{D}$ の定義に時間パラメータ $t \in \mathbb{R}_+$ が含まれていることが本質的な役割を果たしていないように見えるかもしれない。しかし、補題 2.1 の証明にあるとおり、$\xi_t^* = e^{-rt}F(X_t, Y_t)$ で定義される確率過程 ξ^* が優マルチンゲールになることが重要な役割を果たすため、$(t, X, Y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義する必要があるのである。

補題 3.2.2. $F^*(x,y)$ **は**

$$F^*(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\alpha_2-\alpha_1}\left\{\alpha_2\left(\dfrac{\beta}{y}x\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(\dfrac{\beta}{y}x\right)^{\alpha_2}\right\}, & y/\beta < x \le y, \\ y, \quad 0 < x \le y/\beta \end{cases} \tag{3.16}$$

によって与えられる。ただし $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1 < 0 < 1 < \alpha_2$ **は 2 次方程式**

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \left(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\right)x - r = 0$$

の解であり

$$\beta = \left(\frac{1-1/\alpha_1}{1-1/\alpha_2}\right)^{1/(\alpha_2-\alpha_1)} (>1)$$

とする。

証明は補論を参照されたし。

残された問題として、得られた解の候補 $F^*(x,y)$ がロシア型インデックスオプションの値関数 $F(x,y)$ に一致することを主張しなければならない。このためにはいくつかの準備が必要となる。まず、最適停止時刻 τ が有限である（すなわち、ロシア型インデックスオプションは必ず行使される）ことを確認しておく。

補題 3.2.3. $\mu - \delta(n) < \sigma^2/2$ **を仮定する。このとき最適停止問題** (3.12) **の最適停止時刻** τ **は測度** $\mathbb{P}$ **に関してほとんど確実に有限である、すなわち**

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1, \qquad \tau = \inf\{t|\ X_t \le Y_t/\beta\}$$

が成り立つ。

証明は補論を参照されたし。

以下の命題は閉マルチンゲールに関する一様可積分性を保証するものである。[3.19]

[3.19] 確率変数 X_t が概収束（あるいは確率収束）するとき、積分と極限の順序交換

$$\lim_{t\to\infty}\int X_t d\mathbb{P} = \int \lim_{t\to\infty} X_t d\mathbb{P}$$

が成立するための十分条件としてよく用いられるのが、一様可積分性である。一様可積分性とは、$(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ を可積分な確率過程として、(X_t) が

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{t\in[0,\infty)}\int_{|X_t|>c}|X_t|d\mathbb{P} = 0$$

を満たすことをいう。

また、命題 3.2.1 はより一般に、条件

1. x_n は一様可積分
2. x_n は L^1 収束する
3. x_n は可閉である

が同値であるという主張に拡張可能である。しかしわれわれの目的に照らせば、「可閉 $\to$ 一様可積分」を示せば十分である。

命題 3.2.1 (Liptser-Shiryaev[108]Thm.2.7, 國田 [16] 定理 5.10). 離散時間マルチンゲール $X = (x_n, \mathfrak{F}_n)$, $n \geq 1$ に関して、x_n は可閉（すなわち、$\mathbb{E}|\eta| < \infty$ として $x_n = \mathbb{E}(\eta|\mathfrak{F}_n)$）であれば、$x_n$ は一様可積分である。

証明は補論を参照されたし。

(3.16) で導いた $F^*(x, y)$ に対して確率過程

$$\xi_t = e^{-rt}F^*(X_t, Y_t)$$

を定義する。また、$\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t \leq Y_t/\beta\}$ とする。このとき、上の命題 3.2.1 を用いれば、以下の補題を主張することができる。

補題 3.2.4. $(\xi_{t\wedge\tau})$ **は一様可積分マルチンゲールであり**

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_{x,y}\xi_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}_{x,y}\xi_0$$

が成り立つ。

証明は補論を参照されたし。

以上のことから次の結論を得る。

定理 3.2.1. 上記仮定の下では、$F(x, y) = F^*(x, y)$ である。

証明は補論を参照されたし。

3.3 ロシア型インデックスオプションに対する複製戦略およびヘッジ化とその市場価値

本節では、ロシア型インデックスオプションの市場評価（ロシア型インデックスオプションが証券市場で取引される場合、いったいどのような価格で取引されるのか）を明らかにする。

証券市場におけるロシア型インデックスオプションの評価（価格付け）を決定するためには、複製戦略（オプションを複製する無裁定な自己資金充足的取引戦略）を明らかにする必要がある。2.2 節がオプション保有者によるオプションの最適行使問題を考察したのに対して、本節はオプションライターのヘッジ化と複製戦略を考察することになる。

定義 3.1.1 の文脈では、ロシア型インデックスオプションは無危険資産と 1 番目から n 番目までの n 種証券によって複製されることを証明する必要がある。しかし注意 3.1.2 で指摘したように、命題 3.1.2 の証明は、幾何平均インデックスの「価値」を作り出すことのできる取引戦略 $\theta \in \Theta$ が具体的に存在することを示している。したがって、ロシア型インデックスオプションの市場評価は、S^0 を価格過程とする無危険資産と、P を価格過程（その動学が (9) 式で与えられる）とするこの取引戦略からなる自己資金充足的取引戦略 $\phi = ((H_t^0, H_t))$ によって、当該オプションが複製可能であることを証明すれば十分である。なぜなら既に 1 節で明らかにしたとおり、BS 証券価格モデルでは補題 3.1.2 によって同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ の存在性は証明されているから、定理 3.1.1 によって、このような複製戦略 ϕ は裁定でないことが主張できるからである。

まずはじめに、次の関数 $G(x, y)$ を定義する。

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\gamma_2 - \gamma_1}\left\{\gamma_2\left(\dfrac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\dfrac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_2}\right\}, & y/\beta < x < y, \\ y, & 0 < x \leq y/\beta. \end{cases} \tag{3.17}$$

ただし、γ_1, γ_2 はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \left(r - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\right) x - r = 0$$

の解で、$\gamma_1 < 0$, $1 < \gamma_2$ である。また、β は

$$\beta = \left(\frac{1 - 1/\gamma_1}{1 - 1/\gamma_2}\right)^{1/(\gamma_2 - \gamma_1)} > 1$$

で定義される定数である。明らかに、$|G(x, y_0) - G(x, y_1)| \leq K|y_0 - y_1|$ であるような定数 K が存在する。

上で定義した関数 G は、補題 3.2.1, 3.2.2 の前提を犯していないので

$$\mathfrak{A}^* G - rG = 0$$
$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (r - \delta(n)) x \frac{\partial}{\partial x}$$

の解であり、したがって

$$G(x, y) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau$$

である。ただし、$\mathbb{E}^*$ は同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ の下での期待値を表わす。すなわち G は、2.2 節 (16) 式で導出したロシア型インデックスオプションの保有者による最適オプション行使問題の値関数 F を同値マルチンゲール測度 $\mathbb{P}^*$ の下で表現しなおしたものである。最終的に、命題 3.3.1 において、現在時刻 $t = 0$ におけるロシア型インデックスオプションの市場価値 V_0 が $G(x, y)$ によって与えられることが示される。

ここで明らかに

$$e^{-rt} G(X_t, Y_t) = G(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t) \tag{3.18}$$

が成り立つ。ただし、X, Y はそれぞれ (3.10), (3.11) で定義される確率過程を表わし、$\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ はそれぞれその割り引かれた過程を表わす。

最終的な結論として、以下の定理を得る。

定理 3.3.1. 時刻 $t \leq \tau$, $\tau = \inf\{t | X_t \leq Y_t/\beta\}$ における価値 V_t が

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P_t$$

である取引戦略 $\phi = ((H_t^0, H_t))$、ただし

$$\begin{aligned} H_t^0 &= G(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t) - G_x \tilde{X}_t, \\ H_t &= G_x e^{-\delta(n)t} \end{aligned} \tag{3.19}$$

は自己資金充足的であり、ロシア型幾何平均インデックスオプションを複製する。したがって、(3.19) で与えられる複製戦略 ϕ は裁定ではない。

証明は補論を参照されたし。

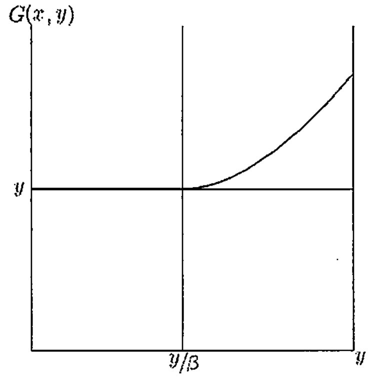

図 3.2: 関数 $G(x,y)$ の概形

命題 3.3.1. 現在時刻 $t=0$ におけるロシア型インデックスオプションの市場価値 V_0 は

$$V_0 = G(x,y)$$

によって与えられる。

証明. 最適停止問題 $\sup_\tau \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau$ の最適停止時刻 τ は、補題 3.2.2 より、$\tau = \inf\{t | X_t \le Y_t/\beta\}$ である（測度 $\mathbb{P}$ から $\mathbb{P}^*$ への変換は補題 3.2.2 の主張を変更するものでないことは明らかである）。また (3.17) から、最適停止時刻 $t=\tau$ においては明らかに $V_\tau = Y_\tau$ である。したがって

$$G(x,y) = \sup_\tau \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau} Y_\tau = \mathbb{E}^*_{x,y} e^{-r\tau} V_\tau = \mathbb{E}^*_{x,y} \tilde{V}_\tau = V_0.$$

この結果は、時刻 $t=0$ における複製戦略の価値

$$V_0 = G(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) S^0_0 = G(x,y).$$

と一致する。したがって、ロシア型インデックスオプションの市場価値は $V_0 = G(x,y)$ で与えられる。 □

3.4 結び

Duffie-Harrison[68, Prop.2] は、オプションの本源的証券である株式に連続的な配当がある場合には、ロシア型オプションが無裁定取引戦略によって複製可能であることを示している。しかし、時間を通じて一定の配当利回りの連続的配当をもつ証券（株式）のみを対象とすることは、少なくとも現実的な妥当性の観点からは、きわめて強い制約条件であるといわざるを得ない。

本章では、ロシア型オプションの本源的資産を単一株式とするのではなく幾何平均インデックスとすることによって、必ずしも連続的配当をもたない証券が対象であっても有限の市場価値をもつロシア型インデックスオプションモデルを提示した。このロシア型インデックスオプションの価値を複製する自己資金充足的な取引戦略（複製戦略）を明らかにし、この取引戦略が裁定でないことを証明した。

S&P100 や TOPIX タイプの加重平均インデックスに関する（プット・コール）オプションのヘッジ化戦略は、Lamberton-Lapeyre[106] によって分析されているが、幾何平均インデックスオプションに関するオプションのヘッジ化の問題はこれまでほとんど取り扱われていないため、幾何平均インデックスと BS 証券価格モデルを前提とする証券市場モデルの関係を詳細に分析した。

3.A　補論—定理・補題の証明

定理 3.1.1 の証明. $\tilde{S}$ は $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであるから

$$\mathbb{E}^*\left(\int_0^T \phi_t^\top d\tilde{S}_t\right) = 0.$$

$\tilde{V}_t(\Phi) = \phi_t^0 + \phi_t^\top \tilde{S}_t$ とすれば、Φ は $(\tilde{S}_t)$ に対しても自己資金充足的

$$\tilde{V}_t(\Phi) = \tilde{V}_0(\Phi) + \int_0^t \phi_t^\top d\tilde{S}_u$$

であることは明らか。ただし、期待演算子 $\mathbb{E}^*$ は $\mathbb{P}^*$ の下での期待値であることを表わす。$t = T$ で評価して

$$\tilde{V}_0(\Phi) = \mathbb{E}^*\left(\tilde{V}_T(\Phi) - \int_0^T \phi_t^\top d\tilde{S}_t\right) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_T(\Phi)).$$

したがって $\mathbb{P}^*$-a.s. で $\tilde{V}_T(\Phi) \geq 0 \to \tilde{V}_0(\Phi) \geq 0$。同様に、$\tilde{V}_T(\Phi) > 0 \to \tilde{V}_0(\Phi) > 0$。$S_t^0 > 0$ であるから Φ は $\mathbb{P}^*$-裁定ではない。$\mathbb{P}^*$ と $\mathbb{P}$ は同値であるから Φ は裁定ではない。 □

補論 3.1.1 の証明. ある k に対して $\mathbb{E}(e^{iw_t^k}) = e^{-t/2}$ を示せば十分である。測度 $\mathbb{P}$ の下で $w_j \sim N(0, \sqrt{t})$, $j = 1, \ldots, d$ であり、互いに独立であることに注意すれば、$\sum_{j=1}^d \sigma_{kj} w_j$ に対して

$$\mathbb{E}(e^{i\sum_{j=1}^d \sigma_{kj} w_j}) = \prod_{j=1}^d e^{-\sigma_{kj}^2 t/2} = e^{-t\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^2/2}.$$

したがって、$\sigma^k = \sqrt{\sum_{j=1}^d \sigma_{kj}^2}$ とおけば、$w_t^k = \sum_{j=1}^d \sigma_{kj} w_i / \sigma^k$ は測度 $\mathbb{P}$ の下で $N(0, \sqrt{t})$ の正規確率変数となる。 □

補題 3.1.2 の証明. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)^\top$ は明らかに

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \sum_{i=1}^N \zeta_i dw_t^i\right)\right] < \infty$$

であるから、Novikov の条件を満たしている。したがって、Girsanov の定理が利用できる。確率過程 (L_t)

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \zeta_s^\top dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\zeta_s\|^2 ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^N \zeta_i dw_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^N (\zeta_i)^2 ds\right)$$

は $L_0 = 1$, $\mathbb{P}$-a.s. である $\mathbb{P}$-マルチンゲールである。そこで、任意に固定された有限の $T < \infty$ に対して

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \sum_{i=1}^N \zeta_i dw_t^i - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^N (\zeta_i)^2 ds\right)$$

によって定義される確率測度 $\mathbb{P}^*$ を考える。Girsanov の定理から

$$\tilde{w}_t^i = w_t^i + \zeta_i t, \quad i = 1, \ldots, N$$

によって定義される互いに独立な $\mathbb{R}^N$-値確率過程 $(\tilde{w}_t)$ は $\mathbb{P}^*$-標準 Brown 運動になる。ところで

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)[\mu_i dt + \sigma^i dw_t^i] \\ &= S_i(t)[r dt + \sigma^i d\tilde{w}_t^i], \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

また、$(\tilde{S}_i) = (e^{-rt} S_i(t))$ に対して

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} S_i(t)) &= -r\tilde{S}_i(t)dt + \tilde{S}_i(t)[r dt + \sigma^i d\tilde{w}_t^i] \\ &= \sigma^i \tilde{S}_i(t) dw_t^i \end{aligned}$$

であるから、すべての i に対してデフレートされた価格過程 $(\tilde{S}_i)$ は $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールとなる。 □

命題 3.1.2 の証明. 取引戦略を $\theta=(\theta^1,\dots,\theta^n)^\top$ によって表わすことにする。θ が自己資金充足的取引戦略である（$\theta\in\Theta$）とすれば、定義 3.1.1 によって

$$\int_0^T \|\theta_t\|^2 dt < \infty$$

（すなわち $\mathcal{L}^2$ 可積分性）を満足しなければならない。ここでは θ の存在性を示せば十分であるので、すべての $t\le T$ に対して $\|\theta_t\|^2\le C$ と仮定して議論を進めることにする。すべての n 証券への同量投資ポートフォリオを $\mathbf{1}=(1,\dots,1)^\top$ すれば $\|\mathbf{1}\|^2=n$ であるから、$|\theta_t^\top\mathbf{1}|\le\sqrt{nC}$。したがって、このとき $\lambda_t=\theta_t^\top\mathbf{1}$ で定義される確率過程 λ は有界適合過程となる。いいかえれば、λ が有界適合過程であることは、θ が $\mathcal{L}^2$ 可積分であることの十分条件となる。

命題の主張を満たす自己資金充足的取引戦略 θ の存在性を示すためには、そのような取引戦略のクラスを具体的に見出せば十分である。そこで、Θ^λ によって、λ が有界適合過程となる取引戦略のクラスを表わすことにする。$\theta\in\Theta^\lambda$ が自己資金充足的な取引戦略であれば、定義 3.1.1 から $P_t(\theta)$ は

$$P_t(\theta)=\theta_t^\top S_t,\quad dP_t(\theta)=\theta_t^\top dS_t,\quad \theta_t^\top\mathbf{1}=\lambda_t$$

を満足しなければならない。さらに、$\theta\in\Theta^\lambda$ は、それぞれの証券に常に同額投資されるよう投資資金が再配分されるような取引戦略であるとしよう。それぞれの証券に対し常に同額投資されるのであるから、$\theta^i S_i=\theta^j S_j,\ i,j=1,\dots,n$。したがって任意の時刻 $t\le T$ に対して以下のような連立方程式

$$\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & S_2 & -S_3 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & S_{n-1} & -S_n\\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \vdots\\ \theta^{n-1}\\ \theta^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ \lambda\end{pmatrix}$$

が得られ、実際、各 t における λ の値に対して

$$\theta_t^i=\lambda_t\frac{\prod_{j\neq i}^n S_j(t)}{\sum_{i=1}^n S_i(t)},\qquad P_t(\theta)=\lambda_t\frac{n}{\sum_{i=1}^n S_i(t)}\prod_{i=1}^n S_i(t)$$

が解となる。さらに $dP_t(\theta)=\theta_t^\top dS_t$ から、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} dP_t(\theta)&=\lambda_t\frac{\prod_{i=1}^n S_i(t)}{\sum_{i=1}^n S_i(t)}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i dt+\sum_{i=1}^n \sigma^i dw^i\right)\\ &=P_t(\theta)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i dt+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sigma^i dw^i\right). \end{aligned}$$

命題 3.1.1 によって、上式は P が X と完全相関（すなわち $dX/X-dP/P=-\delta(n)dt$）し、

$$X_t=(X_0/P_0(\theta))e^{-\delta(n)t}P_t(\theta)$$

であることを示している。したがって

$$P_0(\theta)=\lambda_0\frac{n}{\sum_{i=1}^n S_i(0)}\prod_{i=1}^n S_i(0)=X_0$$

となるように λ_0（すなわち θ_0）を選べば、$X_t=e^{-\delta(n)t}P_t(\theta)$ を得る。かくして、命題の主張が成り立つような自己資金充足的な取引戦略 $\theta\in\Theta$ の存在性は示された。 □

補題 3.2.1 の証明. 確率過程

$$\xi_t^*=e^{-rt}F(X_t,Y_t)$$

を考える。$t \geq 0$ に対して、$\xi_0^* = F(x,y) \geq \mathbb{E}[\xi_t^*|X_0 = x, Y_0 = y]$ であるから、(ξ_t^*) は優マルチンゲールである。

任意の停止時刻 T で過程 (ξ_t^*) を停止したときのペイオフは $e^{-rT}Y_T$ である。再帰方程式

$$\xi_t^* = \max(e^{-rt}\xi_t, U\xi_t^*)$$

に対し、$X_t = X, Y_t = Y, (t, X, Y) \in \mathfrak{D}$ においては十分小さい Δt に対して最大値原理より確率過程 ξ^* は局所マルチンゲール、すなわち $\xi_t^* = \mathbb{E}[\xi_{t+\Delta t}^*|X_t = X,\ Y_t = S]$ となる。(ξ_t^*) のこの性質は、ξ_t^* の非負性とFatou の補題から、(ξ_t^*) の優マルチンゲール性と矛盾しない。また伊藤の補題より

$$\xi_{t+\Delta t}^* = \xi_t^* + \left\{\int_t^{t+\Delta t} e^{-ru}\left[F_x(X_u, Y_u)(\mu - \delta(n))X_u + \frac{1}{2}F_{xx}(X_u, Y_u)\sigma^2 X_u^2 - rF(X_u, Y_u)\right]du \right.$$
$$\left. + \int_t^{t+\Delta t} e^{-ru}F_s(X_u, Y_u)dY_u + \int_0^{t+\Delta t} e^{-ru}F_x(X_u, Y_u)\sigma X_u dB_u \right| X_t = X, Y_t = Y\bigg\}.$$

ただし、Y_t は $X_t = Y_t$ の場合に限って増加する。ところで、Karatzas-Shereve[98], Liptser-Shiryaev[108]から、$\{\Delta t \geq 0 | X_{t+\Delta t} = Y_{t+\Delta t}\}$ において測度 dY は 0, $\mathbb{P}$-a.e. となる。(3.20) このとき、上式の第2積分は0であることを示すことができる。

したがって、上のことから次のような微分方程式

$$\mathfrak{A}F - rF = 0$$

が導かれる。

また、$X_t = X, Y_t = Y, (t, X, Y) \notin \mathfrak{D}$ においては Y_t の停止時ペイオフが $\exp(-rt)Y_t$ であることより

$$F(X_t, Y_t) = Y_t.$$

□

補題 3.2.2 の証明. (3.13) から

$$F^*(x,y) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2},$$

ただし $\alpha_{1,2}$, $\alpha_1 < 0 < 1 < \alpha_2$ は与えられた2次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \left(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\right)x - r = 0$$

の解で

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sigma^2/2 - (\mu - \delta(n)) \pm \sqrt{(\sigma^2/2 - \mu + \delta(n))^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$$

(3.20) 彼らによって与えられている命題は以下のとおりである。

命題 3.1.1 (Karatzas-Shereve[98]Theorem 2.9.6). $\mathbb{P}$-標準 Brown 運動 (B_t) に対して

$$\mathfrak{L} = \{(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega | B_t(\omega) = 0\}$$

と、任意に固定された $\omega \in \Omega$ に対して B のゼロ集合 $\mathfrak{L}_\omega$

$$\mathfrak{L}_\omega = \{0 \leq t < \infty | B_t(\omega) = 0\}$$

を定義する。測度 $\mathbb{P}$ でほとんど至るところの $\omega \in \Omega$ に対してゼロ集合 $\mathfrak{L}_\omega$ は Lebesgue 測度 0 である。

Karatzas-Shereve[98, pp.104-5], Liptser-Shiryaev[108, p.32] によれば、$\mathfrak{L}_\omega$ については命題 3.1.1 以上のことを主張することができるが、われわれの目的に照らせば命題 3.1.1 の主張で十分である。証明の過程からわかるように、この命題が過程 $(Y_t - X_t)$ に対しても適用することができることは明らかである。

である。smooth hit 条件 (3.14) より

$$F^*(x,y) = \frac{y}{\alpha_2 - \alpha_1}\left\{\alpha_2\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha_2}\right\}.$$

境界条件 (3.15) から[3.21] $\xi = \xi(y)$ とすれば

$$\lim_{y\to 0}\xi(y) = 0$$

を境界条件とする常微分方程式

$$\xi'(y) = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{\alpha_2(y/\xi)^{\alpha_1} - \alpha_1(y/\xi)^{\alpha_2}}{(y/\xi)^{\alpha_1+1} - (y/\xi)^{\alpha_2+1}}$$

を得る。ところで、計算によって

$$\xi = \frac{y}{\beta},\quad \beta = \left(\frac{1-1/\alpha_1}{1-1/\alpha_2}\right)^{1/(\alpha_2-\alpha_1)} \ (>1)$$

が解であることがわかる。また、先の常微分方程式の左辺を $f(\xi,y)$ とおく。このとき

$$\frac{\partial f(\xi,p)}{\partial\xi} = -\frac{1}{y} - \frac{\left(\alpha_2(y/\xi)^{\alpha_1} - \alpha_1(y/\xi)^{\alpha_2}\right)\left(-(y/\xi)^{\alpha_1} - \alpha_1(y/\xi)^{\alpha_1} + (y/\xi)^{\alpha_2} + \alpha_2(y/\xi)^{alpha_2}\right)}{\alpha_1\alpha_2 y\left((y/\xi)^{\alpha_1} - (y/\xi)^{\alpha_2}\right)^2}.$$

したがって、$y \in (0,\bar{y}]$ において

$$\left|\frac{\partial f(\xi,y)}{\partial\xi}\right| < M,\quad 0 < M < \infty$$

となる実数 M が存在する、言い換えれば、$f(\xi,y)$ は Lipschitz 条件を満たすことがわかる。したがって、Cauchy-Lipschitz の一意性定理から、先の常微分方程式には解が存在し、しかも一意であることがわかる。したがって、$\xi = y/\beta$ である。このとき $\tilde{\mathfrak{D}}_y = \{x | y/\beta < x \le y\}$ となる。

したがって主張の関数 $F^*(x,y)$ を得る。 □

補題 3.2.3 の証明. $X_0 = x$, $Y_0 = y$, $x \le y/\beta$ のときは明らかに $\tau = 0$ である。したがって $x > y/\beta$ のとき $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ を示せば十分である。

固定された T $(T < \tau)$ に対して

$$X_t \ge \frac{Y_t}{\beta} \ge \frac{Y_u}{\beta} \ge \frac{X_u}{\beta},\quad 0 \le u \le t \le T.$$

したがって

$$\frac{X_t}{X_u} \ge \frac{1}{\beta} \Longleftrightarrow \exp\Big(\sigma(B_t - B_u) + \big(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\big)(t-u)\Big) \ge \frac{1}{\beta}.$$

かくして

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\sigma B_T + \left(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \ge \frac{1}{\beta}\right).$$

[3.21] この条件はこの種の問題にしばしばあらわれる境界条件である。この条件がなければ、アメリカ型オプションの評価と同様（たとえば、これまでの研究を survey している Myneni[117] 参照のこと）、もとの問題は自由境界問題になる。言い換えれば、この条件を付加することによって、自由境界問題になる困難さを回避しようとしているわけである。経済学的に適当な解釈が可能であるか否かは別にして、この条件は Heinricher and Stockbridge[86] などでひろく用いられていることは事実である。

ここで確率変数 $\eta_t = \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$ を定義する。

$$\mathbb{E}(\eta_t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\sigma x)\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx = 1$$

であり

$$\eta_t = \eta_s \exp\left(\sigma(B_t - B_s) - \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)$$

となるが、$B_t - B_s$ は $\mathfrak{F}_s$ 可測な確率変数 B_s とは独立であり、その分布は B_{t-s} と同一であるので

$$\mathbb{E}(\eta_t|\mathfrak{F}_s) = \eta_s \mathbb{E}\left\{\exp\left(\sigma(B_{t-s}) - \frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)\right\} = \eta_s,$$

すなわち非負マルチンゲールになることがわかる。そこで、Doob の不等式[3.22]を用いて

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > T) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\sigma B_T + \left(\mu - \delta(n) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \geq \frac{1}{\beta}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\eta_T \geq \frac{e^{(\delta(n)-\mu)T}}{\beta}\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{t\leq T}\eta_t \geq \frac{e^{(\delta(n)-\mu)T}}{\beta}\right)\\ &\leq \beta e^{(\mu-\delta(n))T}\mathbb{E}(\eta) = \beta e^{(\mu-\delta(n))T}.\end{aligned}$$

$\mu - \delta(n) \leq 0$ であれば $T \to \infty$ のとき最右辺は 0 に収束するから $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ であることがわかる。
同様に、$0 < \mu - \delta(n) - \sigma^2/2 < 0$ のとき

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \mathbb{P}\left(B_T \geq \frac{\log(1/\beta) - (\mu - \delta(n) - \sigma^2/2)T}{\sigma}\right),$$

かくして[3.23]

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > T) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{0\leq t\leq T} B_t \geq \left[\frac{\log(1/\beta) - (\mu - \delta(n) - \sigma^2/2)T}{\sigma}\right]^+\right)\\ &\leq \frac{\sigma^2 T}{\{\log(1/\beta) - (\mu - \delta(n) - \sigma^2/2)T\}^2}.\end{aligned}$$

左辺は $T \to \infty$ のとき 0 に収束するから $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$. □

命題 3.2.1 の証明. Jensen の不等式から $|x_n| \leq \mathbb{E}[|x_\infty||\mathfrak{F}_n]$ である。ゆえに

$$\int_{|x_n|>c}|x_n|d\mathbb{P} \leq \int_{|x_n|>c}\mathbb{E}[|x_n||\mathfrak{F}_n]d\mathbb{P} = \int_{|x_n|>c}|x_\infty|d\mathbb{P}.$$

ところで

$$\sup_n \mathbb{P}(|x_n| > c) \leq \frac{1}{c}\sup_n \mathbb{E}[|x_n|] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[|x_\infty|].$$

上式の最右辺は $c \to \infty$ のとき一様に 0 に収束する。したがって x_n は一様可積分である。 □

[3.22] (X_t) をマルチンゲールとすれば、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbb{P}(\max_{s\leq t} X_s \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_t^+)}{\lambda}$$

が成り立つ。ただし、$X_t^+ = X_t \vee 0$ である。

[3.23] $\{X_t\}$ を $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ なるマルチンゲールとすれば、任意の $\lambda > 0$ に対して Doob-Kolmogrov の不等式

$$\mathbb{P}(\max_{t\leq T}|X_t| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X_T^2)}{\lambda^2}$$

が成り立つ。これを Brown 運動 (B_t) に適用すれば評価式を得る。

補題 3.2.4 の証明. 定義より

$$\xi_t = e^{-rt}F^*(X_t, Y_t) = \begin{cases} e^{-rt}Y_t, \quad t \in [\tau, \infty), \\ e^{-rt}\dfrac{Y_t}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[\alpha_2\left(\dfrac{\beta X_t}{Y_t}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\left(\dfrac{\beta X_t}{Y_t}\right)^{\alpha_2}\right], \quad t \in [0, \tau). \end{cases}$$

が成り立つ。$\tau > 0$ としよう。[3.24] $\xi_\tau = e^{-r\tau}Y_\tau$, $\xi_T = e^{-rT}Y_\tau$, $\tau < T$ であるから、ξ_t, $t \in [0, \tau)$ は非負優マルチンゲールであり、$d\xi_t = -re^{-rt}S_\tau$。

他方、停止時刻の列 $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \ldots$, $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ と、確率変数 $Z_n = \xi_{t_n \wedge \tau}$ を考える。明らかに Z_n はマルチンゲールであり、$Z_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n$ は存在して($Z_\infty = Y_\tau$)、$Z_n = \mathbb{E}[Z_\infty|\mathfrak{F}_n]$ である。したがって、(Z_n) は閉マルチンゲールである。命題 3.2.1 を $Z = (Z_n, \mathfrak{F}_n)$ に適用すれば、上のことより $Z_n = Y_{t_n \wedge \tau}$ は一様可積分であることがいえ

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{x,y}\xi_{t_n\wedge\tau} = \mathbb{E}_{x,y}\left(\lim_{n\to\infty}\xi_{t_n\wedge\tau}\right) = \mathbb{E}_{x,y}\xi_\tau$$

であることがわかる。停止時刻の列 $T = \{t_n \ge \tau\}$ のとり方は任意であるから(任意抽出定理[3.25]による)

$$\mathbb{E}_{x,y}\xi_\tau = \mathbb{E}_{x,y}\xi_0$$

を得る。 □

定理 3.2.1 の証明. 補題 3.2.4 の (ξ_t) に対して、$t \in [0, \tau)$ において

$$d\xi_t = e^{-rt}F_x^*(X_t, Y_t)X_t\sigma dW_t$$

であるから $\mathbb{E}_{x,y}d\xi_t = 0$。また、$\xi_0 = F^*(x, y)$。したがって

$$\mathbb{E}_{x,y}d\xi_t \le 0, \quad t \in [0, \infty).$$

かくして任意の停止時刻 τ_0 に対し

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,y}e^{-r\tau_0}Y_{\tau_0} &\le \mathbb{E}_{x,y}e^{-r\tau_0}F^*(X_{\tau_0}, Y_{\tau_0}) \qquad (F^* \text{ の定義より}) \\ &= \mathbb{E}_{x,y}\xi_{\tau_0} \quad (\xi_t \text{ の定義より}) \\ &\le \mathbb{E}_{x,y}\xi_0 \qquad (Y_t \text{ の優マルチンゲール性より}) \\ &= F^*(X_0, Y_0) = F^*(x, y). \end{aligned}$$

τ_0 に関して sup をとれば

$$F(x, y) \le F^*(x, y). \tag{3.A.1}$$

逆に、$x < y/\beta$ とすれば、$t \in [0, \infty)$ において ξ_t は優マルチンゲールとなるから、結論の評価式 (3.A.1) は成り立つ。

また、ξ_t, $t \in [0, \tau]$ はマルチンゲールであるから、任意の t について

$$\mathbb{E}_{x,y}\xi_0 = \mathbb{E}_{x,y}\xi_{t\wedge\tau}.$$

補題 3.2.4 から $(\xi_{t\wedge\tau})$ が一様可積分であるから、極限操作と積分の順序を交換できて

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_{x,y}\xi_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}_{x,y}\left(\lim_{t\to\infty}\xi_{t\wedge\tau}\right) = \mathbb{E}_{x,y}\xi_\tau = \mathbb{E}_{x,y}\xi_0$$

[3.24] 言い換えれば、$x > y/\beta$ である。

[3.25] $\{x_n\}$ は閉マルチンゲールであり、τ および σ を停止時刻とすると

$$\mathbb{E}[x_\tau|\mathfrak{F}_\sigma] = x_{\tau\wedge\sigma}$$

が成り立つ。また、τ, σ が有界であれば、必ずしも閉でない一般のマルチンゲールに対してもこの関係が成り立つ。これを任意抽出定理という。

とすることができる。このとき

$$F(x,s) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_{x,y}\xi_\tau \geq \mathbb{E}_{x,y}\xi_0 = F^*(x,y)$$

となり、評価式 (3.A.1) と反対の結果

$$F(x,y) \geq F^*(x,y) \tag{3.A.2}$$

を得るから、目的であった

$$F(x,y) = F^*(x,y) \tag{3.A.3}$$

を得る。 □

定理 3.3.1 の証明. デフレートされた V_t の価値 $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ は

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t\tilde{P}_t.$$

したがって、$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{P}_t = \sigma H_t \tilde{P}_t dW_t$、すなわち

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{P}_s = V_0 + \int_0^t \sigma H_s \tilde{P}_s dW_s.$$

これは、取引戦略 ϕ が必要な可積分条件

$$\int_0^T |H_t^0| dt < \infty, \quad \int_0^T H_t^2 dt < \infty, \qquad T < \tau$$

を満たしておれば、$(\tilde{V}_t)$ が $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであること、ならびに、ϕ が自己資金充足的であることを示している。

そこで、定義 3.1.1, 3.1.2 にしたがって、(3.19) で与えられる取引戦略 ϕ が許容される取引戦略であること、必要な可積分条件を満たすことをチェックする。$x > y/\beta$ においては (3.17) より

$$G_x(x,y) = \beta\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}\left\{\left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_1-1} - \left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_2-1}\right\}.$$

また、$t \leq T < \tau$ においては $Y_t/\beta < X_t \leq Y_t$ であるから

$$0 < G_x(X_t, Y_t) \leq M, \qquad M \equiv \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2-\gamma_1}(\beta^{\gamma_1} - \beta^{\gamma_2}).$$

したがって H_t の非負性は明らかである。可積分性については

$$\int_0^T H_t^2 dt = \int_0^T e^{-2\delta(n)t}\{G_x(X_t,Y_t)\}^2 dt \leq M^2 \int_0^T e^{-2\delta(n)t} dt < \infty$$

であるから保証される。さらに、Lebesgue の優越収束定理より

$$\mathbb{E}^*_{x,y}\left(\int_0^T H_t^2 dt\right) < \infty.$$

また同様に

$$G(x,y) - G_x(x,y)x = \frac{y}{\gamma_2-\gamma_1}\left\{\gamma_2(1-\gamma_1)\left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1(1-\gamma_2)\left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_2}\right\}.$$

したがって $y/\beta < x < y$ を考慮すれば、$G(y,y) - G_x(y,y)y = 0,\ G(y/\beta,y) - G_x(y/\beta,y)y/\beta = y > 0$。さらに、上式の両辺を x で微分して

$$-G_{xx}x = \frac{\gamma_1\gamma_2\beta}{\gamma_2-\gamma_1}\left\{(1-\gamma_1)\left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_1-1} - (1-\gamma_2)\left(\frac{\beta x}{y}\right)^{\gamma_2-1}\right\} < 0.$$

かくして測度 $\mathbb{P}^*$ の下ではほとんど確実に $e^{-rt}Y_t > H_t^0 = e^{-rt}(G(X_t, Y_t) - G_x X_t) > 0$。また、$(Y_t)$ が非減少連続過程であることから、可積分性は

$$\int_0^T H_t^0 dt < \int_0^T e^{-rt} Y_t dt < \infty$$

より導かれる。命題 3.1.2(3.6) および (3.18) より、(3.19) で与えられる取引戦略 ϕ の価値 V_t は

$$\begin{aligned} V_t &= H_t^0 S_t^0 + H_t P_t \\ &= (G(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t) - G_x \tilde{X}_t)e^{rt} + G_x e^{-\delta(n)t} P_t \\ &= G(X_t, Y_t) - G_x X_t + G_x X_t \\ &= G(X_t, Y_t) \end{aligned}$$

である。$\mathbb{E}_{x,y}^*(\int_0^t H_s d\tilde{P}_s)^2 = \mathbb{E}_{x,y}^*(\int_0^t H_s^2 ds) < \infty$ であることを用いれば

$$\mathbb{E}_{x,y}^*\left(\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t^2\right) = \mathbb{E}_{x,y}^*\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(V_0 + \int_0^t H_s d\tilde{P}_s\right)^2\right) < \infty$$

はほとんど自明であるから、確かに ϕ はロシア型インデックスオプションの複製戦略である。

ある取引戦略 $\phi = ((H_t^0, H_t))$ がロシア型インデックスオプションを複製するものとする。このとき、$\tilde{V}_t = e^{-rt}G(X_t, Y_t)$ であるから

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -re^{-rt}Gdt + e^{-rt}G_x dX_t + e^{-rt}G_{xx}d\langle X, X\rangle_t \\ &= e^{-rt}\left(-rG + \frac{\sigma^2}{2}G_{xx}X_t^2 + (r - \delta(n))G_x X_t\right)dt + \sigma G_x \tilde{X}_t dW_t \\ &= e^{-rt}\left(-rG + \frac{\sigma^2}{2}G_{xx}X_t^2 + (r - \delta(n))G_x X_t\right)dt + \sigma G_x e^{-\delta(n)t}\tilde{P}_t dW_t, \end{aligned}$$

すなわち

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t e^{-rt}\left(-rG + \frac{\sigma^2}{2}G_{xx}X_s^2 + (r - \delta(n))G_x X_s\right)ds + \int_0^t \sigma G_x e^{-\delta(n)s}\tilde{P}_s dW_s.$$

(V_t) が $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであることより、右辺第 1 項の積分は測度 $\mathbb{P}^*$ と時刻 $t < \tau$ に関してほとんどいたるところでゼロでなければならないが、これは G が微分方程式

$$\mathfrak{A}^* G - rG = 0$$

$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (r - \delta(n))x\frac{\partial}{\partial x}$$

の解であることから直ちに導かれる。したがって、複製戦略の自然な候補として (3.19) を得る。

取引戦略 ϕ が必要な可積分条件を満たしていることは既に明らかにしているから、$(\tilde{V}_t)$ が $\mathbb{P}^*$-マルチンゲールであること、ならびに、ϕ が自己資金充足的であることが明らかになった。したがって、定理 3.1.1 によって、この取引戦略 ϕ は裁定でないことが主張される。 □

第4章　期間構造モデルのマルチンゲール価格理論アプローチ

要旨

Cox-Ingersol-Ross[54] の期間構造モデルと Heath-Jarrow-Morton[85] の期間構造モデルはともに後に続く論文の創出効果が高く、数理ファイナンスの分野では非常に大きな貢献を成し遂げたが、単一因子による CIR モデルよりは因子に依存しない HJM モデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。また、ボラティリティ係数にのみ依存する HJM モデルは、期間構造派生証券の理論価格を計算する際に、きわめて強力であると考えられているようである。本章は、マルチンゲール価格理論アプローチから両モデルを詳細に再検討した結果、このような見解が支持し得ないことを主張する。この目的のために、モデルの差異にかかわらず成り立つ利子率の期間構造モデルの一般理論を提示する。この議論にもとづいて、前者の観点に対しては、ゼロクーポン債の価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度の存在性・一意性を主張し得るかどうか、あるいはボラティリティ係数が一意であることをモデルの内在的な仮定のみから主張し得るかどうか（ゼロクーポン債の明示的な価格公式の導出プロセス）を検討し、HJM モデルはこの点に関して弱点を持つことを見る。後者の観点に対しては、期間構造派生証券の端的な例としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ、その明示的な評価公式を導出し、CIR モデルと HJM モデルにおけるそれぞれの計算コストの比較を行う。結果として得られた評価公式の計算コストは、HJM モデルがはるかに安価であることが確認されるが、コールの明示的評価公式を導出する際の、HJM モデルの特定化に問題があることを見る。

キーワード

単一因子期間構造モデル、ゼロクーポン債の価格、CIR 期間構造モデル、HJM 期間構造モデル、証券市場均衡理論、マルチンゲール価格理論、Feynman-Kac の公式、Bessel 2 乗過程、Girsanov の定理、同値マルチンゲール測度

4.1　はじめに—本章の目的と分析方法—

Keynes『一般理論』[100] および Hicks『価値と資本』[87] による経済理論・金融理論からの流動性選好説アプローチは、利子率の期間構造の理論的フレームワークに少なからず影響を与えた。しかし少なくともファイナンス論の分野に関しては、利子率の期間構造モデルの理論的精緻化の流れは債券によって代表される「定収入証券」の評価ならびにヘッジ化を直接の契機としている（たとえば Roll[126] を参照されたし）。今日、理論的側面においては、期間構造モデルは現代ファイナンス論の理論モデルの中でももっとも成功したもののひとつであるといわれるまでに成熟し

ており、他方実務の領域では、単一債券ポートフォリオのリスク管理から、担保化抵当債務計画とその評価にまで及ぶ日々のビジネス問題に応用されている。

これまでに提示された代表的な期間構造モデルの分類に関しては、さまざまなバリエーションの期間構造モデルが「一因子 (one-factor)」あるいは「単一因子 (single-factor)」期間構造モデルと呼ばれるカテゴリーに分類されている。単一因子という名称は、それらのモデルが任意の時点における利子率の全期間構造を、単一の状態変数である短期利子率の関数として取り扱っていることにちなんでいる。これに対して、「多因子 (multi-factor)」期間構造モデルは、利子率の期間構造が短期利子率だけでなく他の状態変数の関数として与えられるものをさす。(4.1)

経済理論の分野で権威ある雑誌のひとつである *Econometrica* に、きわめて重要な二つの論文が相次いで掲載された。Cox-Ingersoll-Ross[54]（CIR 期間構造モデル）と Heath-Jarrow-Morton[85]（HJM 期間構造モデル）である。CIR 期間構造モデルと HJM 期間構造モデルはともに後に続く論文の創出効果が高く、数理ファイナンスの分野で非常に大きな貢献を成し遂げた。

CIR モデルは、連続時間設定における投資家の効用最大化問題から導出されたものであり、証券市場均衡理論の成果を直接適用することが可能で、この意味でミクロ経済学的基礎を有しているということができる。この特徴は他の単一因子期間構造モデルにはないものであり、したがって、CIR モデルには経済理論の観点からも高い評価を与えることができる。一般に因子による期間構造のモデル化においては、基本モデルとして短期利子率過程が $r_t = R(X_t, t)$ の形の因子構造である場合が取り扱われる。CIR モデルでは何ら ad-hoc な仮定を追加することなく、証券市場均衡と両立する形でこの因子構造が導かれる。これは、恣意的に因子構造が仮定されている他の期間構造モデルにはない、CIR モデルの大きな特徴となっている。

HJM 期間構造フレームワークの中では、いわゆる単一因子モデルも多因子モデルもすべて、直接的に利子率にではなく限界的な先渡しレートに関して考察し得ることが示されている。いいかえれば、HJM[85] モデルでは、利回り曲線の将来の時間発展が依存する「状態変数」は、ある特定の有限次元状態ベクトルではなく、経常利回り曲線全体となっているのである。HJM モデルのフレームワークを用いれば単一因子であると多因子であるとを問わず経常利回り曲線によって統一的に解釈が可能となる点が、HJM モデルが果たした理論的貢献の一つである。

この意味で、数理ファイナンス論の観点から種種の期間構造モデルのフレームワークを検討する場合、CIR モデルと HJM モデルを取り上げれば十分である場合が少なくない。しかし、上記評価の観点は必ずしも一般に定着しているとは言い難いため、両期間構造モデルをこの観点から理論的に再検討することには大いに意味がある。

さらに、純粋理論上の一般的見解として、単一因子による CIR モデルよりは、因子に依存しない HJM モデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。また、実務・応用に関わる理論的側面からの一般的見解として、ボラティリティ係数にのみ依存する HJM モデルは、期間構造派生証券の理論価格を計算する際に、きわめて強力であると考えられているようである。

本章は、マルチンゲール価格理論アプローチからこのような見解が支持できるものであるか否かを検討した結果、このふたつの見解はともに支持し得ないと主張するものである。検討の方法は次のとおりである。(4.2)

(4.1)単一因子期間構造モデルを代表する例として Merton[115], Ho-Lee[89], Dothan[62], Brennan-Schwartz[43], Vasicek[132], Cox-Ingersoll-Ross[54] 等をあげることができる。期間構造モデルの分類については、Duffie[66, Chp.7], Duffie-Kan[69] のサーベイが参考になる。affine 期間構造に関しては Brown-Schaefer[49], Björk[50] が参考になる。また、Rogers[124] の数学者の立場からの示唆も理論的に整理する際に参考になる。

(4.2)本章は、数理ファイナンス論の観点から期間構造モデルのフレームワークを考察することを意図しているので、可

前者の純粋理論上の見解に対しては、それぞれのモデルに対する同値マルチンゲール測度の存在性・一意性について検討することになる。後者の実務・応用に関わる理論的側面からの見解に対しては、CIR モデルと HJM モデルにおいて同一の期間構造派生証券の明示的な評価公式を導出し、その計算コストを比較検討することになる。期間構造派生証券の計算コストを比較する目的に照らせば、数多くの派生証券を取り上げることはあまり有効とはいえない。そこで、本章では、期間構造派生証券として最も代表的なゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを中心に検討することにする。この二つの見解をつなぐ架け橋として、ゼロクーポン債の明示的価格公式を取り上げる。

この目的を遂行するために、まず第 1 節において、モデルの差異にかかわらず成り立つ利子率の期間構造モデルの一般理論を提示する。すなわち、マルチンゲール価格理論アプローチによって利子率の期間構造を理論的にあとづけることから始める。[4.3]同時に、期間構造モデルの主要応用対象である期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールと金利スワップを取り上げ、それぞれの評価の一般論を展開する。次に第 2 節において、CIR モデルを Duffie-Zame[67] による連続時間設定における証券市場均衡と状態価格デフレータの観点から厳密に導出するというアプローチを採る。[4.4]CIR モデルを理論的に解釈する際には Bessel 2 乗過程についての言及を避けてとおることができない。この結果と第 1 節の議論を考慮すれば、ゼロクーポン債の価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度の存在を仮定したとき、CIR モデルにおいてはゼロクーポン債の明示的な価格公式をモデルの内在的な仮定のみから導出し得ることが確認される。さらに、CIR 期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ、その評価公式を導出する。この評価公式にもとづいて理論価格を計算する場合、計算コストが禁止的に高くなる（計算が可能であったとしても、時間的・経済的に計算することが見合わない）ことを主張する。第 3 節では、先渡しレートに関する HJM 期間構造モデルのクラスについて取り扱う。[4.5]CIR モデル同様、HJM モデルも同値マルチンゲール測度の存在性・一意性が結論される（定理 4.4.1）が、同時に、満期の異なるゼロクーポン債を必要なだけ導入し得るとする仮定 4.2.1 に強く依存することが指摘される。さらに、CIR モデルの場合と同様、HJM 期間構造派生証券としてゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールを取り上げ、単純化の仮定のもとでその明示的な評価公式を導出する。この評価公式にもとづいて理論価格を計算する場合には、計算コストが Black-Scholes オプション評価公式の場合と同等のレベルにあることが主張される。

4.2 利子率の期間構造に関する一般理論

4.2.1 定義と基本的結果

所与の確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ 上で定義された、ある時間間隔 $[0, T]$ に制約された測度 $\mathbb{P}$ に関する $\mathbb{R}^d$-値標準 Brown 運動 $B = (B^1, \ldots, B^d)$ を固定する。ただし、B^i, B^j, $i \neq j$ は互いに独立であるとする。また、B に関連する標準 Filtration $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ を固定する。[4.6]

能な限り厳密・自己完結的な分析を目指す。しかし、読みやすさを考慮して、補題・命題・系の証明は補論にまとめて記すことにする。

[4.3] この一般理論の段階では、仮定 1.1 に示したように、同値マルチンゲール測度の存在性を仮定しなければならない。しかし、個々の期間構造モデルにおいては、存在性・一意性は仮定ではなく、証明すべき事項となる。

[4.4] 均衡からのアプローチではないが、Delbaen[57] は CIR モデルに対する理論的に厳密なアプローチとして参考になる。

[4.5] HJM モデル以後の理論的発展については、Björk[50] が参考になる。

[4.6] しかし、必ずしも $\mathfrak{F}_t$ が B によって生成されるという意味ではない。

$\int_0^T |r_t|dt < \infty$ となるような適合的短期利子率過程 r を所与とする。まずはじめに、時刻 $s > t$ で満期を迎えるゼロクーポン債を考える。定義によって、この債券には時刻 s までいかなる配当も支払われず、時刻 s において固定された一括支払いが提供される。(4.7)

仮定 4.2.1. 各々の満期日 s を持つゼロクーポン債が必要なだけ存在するものとする。

この仮定は特に、HJM モデルにおいて同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の存在性を証明する際に本質的な役割を果たす。利子率の期間構造モデルの関心事のひとつに、この s-満期債券の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ を特徴づけることがある。

裁定が存在しないという条件に関しては、同値マルチンゲール測度が存在するために必要ないくつかの純粋に技術的な条件が必要になる。そこで、存在性については以下のとおり仮定しておく。

仮定 4.2.2. s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格を $\Lambda_{t,s}$ で表わす。あらゆる実数値 $u \in [0,T]$ に対して

$$\tilde{\Lambda}_{t,u} = \Lambda_{t,u} \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

によって定義される割り引かれた価格過程 $\tilde{\Lambda}_{t,u},\ 0 \le t \le u$ がマルチンゲールになるような、$\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在する。

$\tilde{\Lambda}$ が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであることより

$$\tilde{\Lambda}_{t,u} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{\Lambda}_{u,u}|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp - \int_0^u r(s)ds \middle| \mathfrak{F}_t\right).$$

したがって、$\Lambda_{t,u}$ は $\mathfrak{F}_t$ 可測であり、次式によって与えられることがわかる。

$$\Lambda_{t,u} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_t^u -r_s ds\right)\middle| \mathfrak{F}_t\right]. \tag{4.1}$$

$\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ の下では Radon-Nikodym 導関数 $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = L_T$ が存在し、時刻 s において非負確率変数 Z であらわされる有限分散ペイオフを持つ任意の証券に対して $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{E}(ZL_T)$ が成り立つことは容易にわかる。ペイオフ Z が $\mathfrak{F}_t$ 可測であれば、$L_t = \mathbb{E}(L_T|\mathfrak{F}_t)$ とおくことによって、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z) = \mathbb{E}(ZL_t)$ を得る。このとき、Girsanov の定理より

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \xi(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\xi(s)\|^2 ds\right), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{4.2}$$

となるような $\mathbb{R}^d$ 値適合過程 $\xi(t),\ 0 \le t \le T$ が存在することがわかる。したがって、有限分散ペイオフ Z を持つ任意の証券の時刻 $t \le s$ における価格は

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_t^s -r_u du\right) Z \middle| \mathfrak{F}_t\right] \tag{4.3}$$

で与えられることがわかる。なぜなら、(4.3) で特に $Z = 1$ とおけば、(4.1) より、上式の値は s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ であることがわかるからである。2 つのインデックスを有する過程 Λ はときに「割引関数」、あるいはより広義に「利子率の期間構造」という名で知られている。

(4.7)一般性を失うことなく、この一括支払額を 1 金額単位に等しいとすることができる。このような取り扱いは必ずしも本質的なものではない。

定義 4.2.1 **(利子率の期間構造)**. s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ を利子率の期間構造といい、(4.1) で与える。期間構造は「利回り曲線」で表現されることも多い。このため、時刻 $t+\tau$ で満期をむかえるゼロクーポン債に対する連続複利利回り $y_{t,\tau}$ を次式で定義する。

$$y_{t,\tau} = -\frac{\log(\Lambda_{t,t+\tau})}{\tau}.$$

期間構造は HJM モデルのように先渡し利子率で表現されることもある。

以下の命題は、期間構造に関する一般的な結果であり、適合過程 ξ を経済的に解釈する際に有用である。

命題 4.2.1. 任意の満期 s に対して、次式で定義される $\mathbb{R}^d$ 値適合過程 σ_t^s, $0 \leq t \leq s$ が存在する。

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}} = (r(t) - \sigma_t^s \xi(t))dt + \sigma_t^s dB_t, \quad t \in [0, s]. \tag{4.4}$$

証明は補論を参照されたし。

注意 4.2.1. $\mathbb{Q}$ の存在性は仮定されているが、一意であるとは限らない。したがって、適合過程 σ^s の存在性は主張し得るが、必ずしも一意であるとは限らない。σ^s の一意性を主張し得るか否かは、ゼロクーポン債も含んだ背景の証券市場均衡が不確実性の源泉である $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動をスパンし得るか否か、すなわち完備証券市場均衡の存在性・一意性、を問題にしなければならない（Duffie[66, pp.105-6] あるいは赤壁 [2, 第 4(1) 節] を参照されたし）が、これは個別の期間構造モデルごとにそれぞれ検討する必要がある。

これまでに、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下での短期利子率 r の振るまいを記述するいくつかの代替的なモデルが展開されている。そのいずれの場合においても、多くの場合、r は $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動 W に関してモデル化されている。

注意 4.2.2. 概念上は、r_t は時刻 t における「無危険」債券に対する連続複利利子率である。債券価格は、時刻 t でなされた 1 金額単位の投資を t から s までの時間、連続的に短期利子率で再投資した場合の時刻 s における市場価値 $\exp(\int_t^s r_u du)$ であるとすることによって定式化される。通常のマルチンゲール価格理論アプローチによる資産価格評価理論では、同値マルチンゲール測度は同時にリスク中立確率でもあった。しかし、通常の資産価格評価理論とは違って期間構造モデルにおいては、r は適合過程とされているから、いわゆる「無危険」収益率ではない（この意味で、「無危険」債券の価格過程 S^0 は無危険ではないという用語上の矛盾を生ずる）。しかしながら、以下のように解釈することができる。すなわち第一に、(4.4) の右辺第一項は債券の（危険）収益率を表わしており、したがって、$-\sigma_t^s \xi(t)$ は債券の平均利回りと（危険）収益率の差であるから、$\xi(t)$ を一種のリスク・プレミアムと解釈することができる。これによって、利子率の期間構造に対する Keynes[100]・Hicks[87] の流動性選好説との関連が復元される。また、$W_t = B_t - \int_0^t \xi(s)ds$ で定義される $\mathbb{R}^d$ 値過程 W は $\mathbb{Q}$-標準 Brown 運動であるから（Girsanov の定理の結果）、(4.4) は

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}} = r(t)dt + \sigma_t^s dW_t,$$

すなわち

$$\Lambda_{t,s} = \Lambda_{0,s} \exp\left(\int_0^t r(u)du + \int_0^t \sigma_u^s dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_u^s\|^2 du\right) \tag{4.4'}$$

となる（満期 s における一括支払い額が 1 金額単位に等しいとすることができれば、$\Lambda_{0,s} = 1$ となる）。この結果から、過程 r のみで定義される債券の価格は相対的な意味で無危険であると見なすことができ、これまでどおり $\mathbb{Q}$ を「リスク中立」確率と呼んでも差し支えないことがわかる。このことからさらに、「無危険」債券の価格過程 S^0 を、一般性を失うことなく

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \quad S_0^0 = 1 \tag{4.5}$$

とすることができる。

4.2.2　期間構造派生証券の例

以下で、期間構造派生証券の評価を一般的に特徴づけることにする。ここでいう期間構造派生証券とは、ペイオフが期間構造に依存するような証券を意味する。ここでは、このような期間構造派生証券の例として、ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールオプションの評価と金利スワップを取り上げることにする。

例 4.2.1 **(ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コール)**. 満期が T であるゼロクーポン債に対して、行使価格が K で満期 $s \leq T$ のヨーロッパ型コールオプションを考える。満期 s におけるオプションの価値は $(\Lambda_{s,T} - K)^+$ で与えられる。通常のオプション評価アプローチと同様、このコールが無危険資産とゼロクーポン債でヘッジ化・複製可能であると考える。時刻 t における取引戦略 ϕ は、無危険債券の量 H_t^0 とゼロクーポン債の保有数 H_t の組 $\phi = (H_t^0, H_t) \in \mathbb{R}^2$ によって与えられる。先のノーテーションを用いれば、この取引戦略の時刻 t における価値 V_t は、$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t \Lambda_{t,T}$ によって与えられる。自己資金充足的条件は

$$dV_t = H^0 dS_t^0 + H_t d\Lambda_{t,T}$$

となる。ただし、積分可能条件 $\int_0^T |H_t^0 r(t)|dt < \infty$, $\int_0^T \|H_t \sigma_t^T\|^2 dt < \infty$ が課せられる。また、ϕ が自己資金充足的であり、割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負、かつ、$\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で 2 乗可積分であるとする。

より一般的に、次の命題が成り立つ。

命題 4.2.2. すべての $t \in [0,s]$, $s < T$ に対してほとんど確実に $\sup_{0\leq t\leq T} |r(t)| < \infty$、かつ、$\sigma_t^T \neq 0$ が成り立つものとする。x を $xe^{-\int_0^s r(u)du}$ が $\mathbb{Q}$-2 乗可積分となるようなある $\mathfrak{F}_s$ 可測な確率変数であるとする。このとき、時刻 s における価値 V_s が条件付き請求権 x に等しくなるような取引戦略 ϕ が存在する。この取引戦略 ϕ は自己資金充足的（したがって、x の複製戦略）であり、割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負、かつ、$\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で 2 乗可積分となる。この取引戦略の時刻 t における価値 V_t, $t \leq s$ は

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x \exp\left(-\int_t^s r(u)du\right) \middle| \mathfrak{F}_t\right]$$

によって与えられる。

証明は補論を参照されたし。命題 4.2.2 において $x = (\Lambda_{s,T} - K)^+$ とおけば（$\Lambda_{s,T}$ が $\mathfrak{F}_s$ 可測であるから、x が $\mathfrak{F}_s$ 可測であることは明らか）、コールが「無危険」資産とゼロクーポン債によって複製可能であることを結論するとともに、コールの「リスク中立」的な評価を得る。

次に、金利スワップの評価を考察する。

例 4.2.2 (**金利スワップ**). ある期間構造派生証券が $\mathbb{R}\times[0,T]$ で定義されている可測な実数値関数 h および g で定義されたペイオフを有するものとする。ただし、任意の時刻 $t\in[0,T]$ における配当率は $h(r_t,t)$ で、ある特定時刻 $\tau\le T$ における終端ペイオフは $g(r_\tau,\tau)$ で特定化する。同値マルチンゲール測度の定義から、このような証券の時刻 t における価格は

$$F(r_t,t)\equiv\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T\varphi_{t,s}h(r_s,s)ds+\varphi_{t,\tau}g(r_\tau,\tau)\middle|\mathfrak{F}_t\right]$$

となる。ここで $\varphi_{t,s}=\exp(-\int_t^s r_v dv)$ とする。金利スワップはこのタイプの派生証券であり、配当率 $h(r_t,t)=r_t-r^*$ を支払う財務契約として定義される。ここで、r^* は時刻ゼロで合意されている固定利子率である。

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 4.2.3. 時刻 t **における金利スワップの価値は** $v_t=1-\Lambda_{t,\tau}-r^*\int_t^T\Lambda_{t,s}ds$ **で与えられる。** $v_t=0$ **であればこのスワップは「アット・ザ・マネー」の状態にある。この場合には、経常スワップ率が** $r_t^*=(1-\Lambda_{t,\tau})/\int_t^T\Lambda_{t,s}ds$ **で与えられる。**

証明は補論を参照されたし。

4.3 Cox-Ingersoll-Ross モデル

単一因子期間構造モデルの中でも最も著名なもののひとつに、Cox-Ingersoll-Ross[54]（CIR）モデルがある。ここでは、まず CIR モデルを一般均衡論の立場から導出することから始める。

一般に因子による期間構造のモデル化においては、基本モデルとして短期利子率過程が $r_t=R(X_t,t)$ の形の因子構造である場合が取り扱われる。CIR モデルでは何ら ad-hoc な仮定を追加することなく、証券市場均衡と両立する形でこの因子構造が導かれる。これは、恣意的に因子構造が仮定される他の期間構造モデルにはない CIR モデルの大きな特徴となっている。

4.3.1 証券市場均衡理論からの CIR 期間構造モデルの導出

この節では、Cox-Ingersoll-Ross[54] 期間構造モデルを証券市場の一般均衡から正当化することを試みる。資本ストック過程 K を有するある生産技術からの最適な消費過程 δ を含んだ代表的市場参加者の確率制御問題の解を出発点とする。この問題の解から出発して、次に、証券市場均衡理論 (たとえば Duffie-Zame[67] を参照) と共通の一般均衡論のフレームワークで分析され、自然な形で短期利子率過程の因子構造 $r_t=R(X_t,t)$ が (4.13) のように導かれる。CIR 期間構造モデルがこのような経済学的アプローチから導出されるという特徴は、他の期間構造モデルにない、経済理論の観点からも高い評価を与え得る点となっている。

所与の割引率 $\rho\in(0,\infty)$ に関して

$$U(c)\equiv\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\rho t}\log(c_t)dt\right],\qquad c\in L_+ \tag{4.6}$$

とおく。ここで、L_+ は非負適合過程の空間を表わす。(4.8)経済の単一参加者は (4.6) で定義される

(4.8)オリジナルの CIR[54] モデルでは HARA 型の効用関数

$$e^{-\rho t}\left[\frac{c_t^\gamma-1}{\gamma}\right]$$

効用関数 $U : L_+ \to \bar{\mathbb{R}}$ を持つ。

単純化のために、Brown 運動は1次元であるとする。

$\mathcal{C}$ によって、すべての $t \geq 0$ に対してほとんど確実に $\int_0^T c_t dt < \infty$ を満たす非負の適合消費過程の空間を表わすことにする。$\mathcal{C}$ に属するすべての c に対して、資本ストック過程 K^c は

$$dK_t^c = (hK_t^c Y_t - c_t)dt + K_t^c \epsilon \sqrt{Y_t} dB_t; \qquad K_0^c = x > 0 \tag{4.7}$$

によって定義される。ここで、Y は所与の生産技術における資本ストックの成長率を規定する状態変数（適合過程）、h, ϵ は $h > \varepsilon^2$ となるような厳密に正のスカラーである。h を適当に解釈することによって、(4.7) を、いわゆる「資本ストック調整原理」にもとづく Samuelson[128] 流加速度モデルの確率過程版とみることができる。当面の目的は、所与の生産技術における資本ストックの成長率が、$2b > k^2$ であるような厳密に正のスカラー κ, b, k に関して

$$dY_t = (b - \kappa Y_t)dt + k\sqrt{Y_t} dB_t; \qquad Y_0 > 0 \tag{4.8}$$

で表される確率微分方程式の解である適合過程 Y によって規定されるとき、最適消費計画 δ と最適資本ストック過程 K を決定することにある。しかしこのアプローチを正当化するためには、適合過程 Y の存在性と非負性を示す必要がある。しかし、これはそれほど自明ではない。まずこれを示すことにする。

補題 4.3.1. 過程 Y は存在し、非負である。

証明は補論を参照されたし。

補題 4.3.2. すべての $t \in [0, T]$ に対して $K_t^c \geq 0$ を制約とする代表的市場参加者の最適消費計画問題

$$V(x, y) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-\rho t} \log(c_t) dt\right]$$

を考える。

このとき、最適資本ストック K は

$$dK_t = (K_t h Y_t - \delta_t)dt + K_t \epsilon \sqrt{Y_t} dB_t; \qquad K_0 > 0 \tag{4.9}$$

によって定義される伊藤過程となる。ここで最適消費計画 δ は

$$\delta_t = \frac{\rho K_t}{1 - e^{-\rho(T-t)}}, \qquad t \in [0, T] \tag{4.10}$$

である。

証明は補論を参照されたし。補題 4.3.1 から、以下のように最適資本ストック過程 K の存在性を主張することができる。

補題 4.3.3. (4.9)-(4.10) **によって定義される過程 K の存在性は保証される。**

を採用している。対数効用関数は、後で見るとおり稲田条件をはじめとしてその導関数に要請されている滑らかさが十分ではないから、伝統的な確率制御モデルの技術的なフレームワークに合致しない。しかし、この点を別にすれば、目的の CIR 期間構造モデルを直接に導けるという利点を持つ。

証明は補題を参照されたし。

単一参加者の賦存過程 e が、(4.10) で定義される資本ストックの最適「引き出し」率 δ であると仮定することから始める。このように仮定すれば、Duffie-Zame[67, Theorem 1(p.1287)] の証券市場均衡の結果と対応する結果を構成することができる。[4.9] $u_\lambda(x,t) = e^{-\rho t}\log x$ である単一参加者（$\lambda = 1$）のケースに対して、Duffie-Zame[67] の仕方で定義されるように

$$p_t = u_{\lambda c}(\delta_t, t) = \frac{e^{-\rho t}}{\delta_t}, \qquad t \in [0, T) \tag{4.11}$$

を状態価格デフレータ p に採用することにする。このとき、証券の実物価格過程 $\hat{S} = S/p$ は実物「引き出し」率過程 $\hat{\delta} = \delta/p$ に対して

$$\hat{S}_t = \frac{1}{p_t}\mathbb{E}\left(\int_t^T p_s\hat{\delta}_s ds \middle| \mathfrak{F}_t\right), \qquad t \in [0, T] \tag{4.12}$$

で与えられることがわかる。[4.10]

このとき、状態価格デフレータと短期利子率との関係（たとえば赤壁 [2, p.146] を参照）を用いれば、短期利子率過程 r は、次式で与えられる。

$$r_t = \frac{-\mu_p(t)}{p_t} = (h - \epsilon^2)Y_t. \tag{4.13}$$

注意 4.3.1. 上のことは、CIR モデルでは何ら ad-hoc な仮定を追加することなく、証券市場均衡と両立する形で因子構造 $r_t = R(X_t, t)$ が導かれることを示している。

定理 4.3.1. 短期利子率過程 r は次の確率微分方程式の解である。

$$dr_t = \kappa(r^* - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dB_t. \tag{4.14}$$

ただし、$r^* = b(h-\epsilon^2)/\kappa$, $\sigma_r = k\sqrt{h-\epsilon^2}$ である。

この定理 4.3.1 の (4.14) は CIR[54, eqn.(16)(p.391)] と本質的に同一である。しかし以下の証明によるその導出方法は、CIR[54] とは異なることに注意されたい。

証明. 伊藤の補題を援用することによって、(4.9), (4.10) から次式を得る。

$$dK_t = K_t\left(hY_t - \frac{\rho}{1-e^{-\rho(T-t)}}\right)dt + K_t\epsilon\sqrt{Y_t}dB_t,$$

$$p_t = \frac{e^{-\rho t}}{\delta_t} = \frac{e^{-\rho t}(1-e^{-\rho(T-t)})}{\rho K_t}.$$

p_t に対して伊藤の補題を適用して

$$\begin{aligned} dp_t &= -\frac{e^{-\rho t}}{K_t}dt - \frac{e^{-\rho t}(1-e^{-\rho(T-t)})}{\rho K_t}\frac{dK_t}{K_t} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\rho t}(1-e^{-\rho(T-t)})}{\rho K_t}\frac{2}{K_t^2}K_t^2\epsilon^2 Y_t^2 dt \\ &= (\epsilon^2 - h)p_t Y_t dt - p_t\epsilon\sqrt{Y_t}dB_t. \end{aligned} \tag{4.15}$$

[4.9] すでに指摘しているように、ここで述べる均衡は伝統的な確率制御モデルの技術的なフレームワークに合致しない。というのも対数効用関数には、稲田条件をはじめとしてその導関数に要請されている滑らかさが十分ではないからである。それでも、技術的な諸条件が満たされなくともモデルの本質的な局面が侵害されることはないという仮定の下で、議論を進めていくことにする。

[4.10] Duffie-Zame[67, eqn.(6)(p.1287)] を参照されたし。

短期利子率過程 r は、(4.13) で与えられる。したがって、(4.8) から

$$\begin{aligned} dr_t &= (h-\epsilon^2)dY_t \\ &= (h-\epsilon^2)(b-\kappa Y_t)dt + (h-\epsilon^2)k\sqrt{Y_t}dB_t \\ &= \kappa\left(\frac{(h-\epsilon^2)b}{\kappa} - (h-\epsilon^2)Y_t\right)dt + (h-\epsilon^2)k\sqrt{Y_t}dB_t \\ &= \kappa(r^* - r_t)dt + k\sqrt{(h-\epsilon^2)}\sqrt{(h-\epsilon^2)Y_t}dB_t. \end{aligned}$$

したがって、$r^* = b(h-\epsilon^2)/\kappa,\ \sigma_r = k\sqrt{h-\epsilon^2}$ とすれば、(4.14) を得る。 □

$r_t > r^*$ であれば r のずれ項は負であり、$r_t < r^*$ であれば r のずれ項は正になる。それゆえ、r は r^* に関して反転する「平均反転」過程と見ることができる。以下では、この点をより正確に検証することにする。

命題 4.3.1 (CIR 期間構造モデルの「平均反転」性). **$r_t > r^*$ であれば r のずれ項は負であり、$r_t < r^*$ であれば r のずれ項は正になる。それゆえ、測度 $\mathbb{P}$ の下で短期利子率過程 r は r^* に関して反転する「平均反転」過程と見ることができる。**

証明は補論を参照されたし。

いくつかのタイプの期間構造派生証券を評価するためには、同値マルチンゲール測度の下で短期利子率過程 r を評価できれば十分であることがある。[4.11] このためには状態価格デフレータ p の明示的な評価が必要になる。これは以下の補題によって与えられる。

補題 4.3.4. **状態価格デフレータ p の明示的な評価は以下のとおりである。**

$$p_t = p_0 \exp\left(\frac{h-\epsilon^2/2}{\epsilon^2-h}\int_0^t r_s ds - \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}dB_s\right). \tag{4.16}$$

証明は補論を参照されたし。補題 4.3.4 から以下の命題を得る。

補題 4.3.5. CIR **期間構造モデルにおいては、必要な積分可能性条件の下で、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の密度過程 ξ は**

$$\begin{aligned} \xi_t &= \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)\frac{p_t}{p_0} \\ &= \exp\left(\frac{\epsilon^2/2}{\epsilon^2-h}\int_0^t r_s ds - \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\int_0^t \sqrt{r_s}dB_s\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

で与えられる。また、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下での標準 Brown **運動 W は次式で定義される。**

$$dW_t = dB_t + \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\sqrt{r_t}dt. \tag{4.18}$$

[4.11] しかしゼロクーポン債に対するオプションの評価では、$\Lambda_{t,s}$ の明示的な表現が必要になる。これは後述の期間構造偏微分方程式で導出する。

証明は補論を参照されたし。この補題から、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下で、短期利子率過程 r に関して次のような 2 乗根の平均反転的な評価式を得る。

$$\begin{aligned} dr_t &= \{b(h-\epsilon^2) - \kappa r_t\}dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dB_t \\ &= \{b(h-\epsilon^2) - \kappa r_t\}dt + \sigma_r\sqrt{r_t}\left\{dW_t - \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\sqrt{r_t}dt\right\} \\ &= \{b(h-\epsilon^2) - (\kappa + k\epsilon)r_t\}dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_t. \end{aligned}$$

定理 4.3.2 (CIR 期間構造モデル). 同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下で、短期利子率過程 r に関して次のような評価式

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa(r^* - r_t)dt + \sigma_r\sqrt{r_t}\left(dW_t + \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\sqrt{r_t}dt\right) \\ &= [b(h-\epsilon^2) - (k\epsilon + \kappa)r_t]dt + \sigma_r\sqrt{r_t}dW_t. \end{aligned} \tag{4.19}$$

を得る。測度 $\mathbb{Q}$ の下で短期利子率過程 r は以下で定義される r^{**}

$$r^{**} \equiv \frac{b(h-\epsilon^2)}{k\epsilon+\kappa} = r^*\frac{\kappa}{k\epsilon+\kappa} < r^*$$

に関して「平均反転性」を持つ。

証明. 測度 $\mathbb{Q}$ の下での「平均反転性」は測度 $\mathbb{P}$ の下での命題を準用できる。必要な計算と証明は上述のとおり。 □

4.3.2 CIR 期間構造偏微分方程式の解としての CIR ゼロクーポン債価格

単一因子モデルであればいかなるものであっても、偏微分方程式と確率微分方程式のあいだに成り立つ Feynman-Kac 関係を利用すれば、期間構造を（明示的にできなければ数量的に）計算することができることが知られている。満期日 T を固定すれば、(4.1) から期間構造偏微分方程式と呼ばれる以下のような偏微分方程式を得る。補論 4.A.1 の Feynman-Kac アプローチが要求する μ と σ に関する技術的な諸条件の下では、その解は存在して一意であることが知られている。

定理 4.3.3 (期間構造偏微分方程式). (4.1) **の解過程である r は非負過程であり、かつ μ, σ が x に関する** Lipschitz **条件を満たし、導関数 μ_x, σ_x, μ_{xx}, σ_{xx} が連続で x に関する成長条件を満たすものとする。**

このとき、すべての t に関して

$$\Lambda_{t,T} = f(r_t, t) \tag{4.20}$$

が成り立つ。ただし、$\Lambda_{t,T}$ は (4.1) **によって定義される価格過程を、$f \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T))$ は偏微分方程式**

$$\mathfrak{D}f(x,t) - xf(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T) \tag{4.21}$$

の境界条件

$$f(x,T) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

の下での一意な解を表わす。ここで微分作用素 $\mathfrak{D}$ は

$$\mathfrak{D}f(x,t) = f_t(x,t) + f_x(x,t)\mu(x,t) + \frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\sigma^2(x,t)$$

で定義される。

定理 4.3.3 の条件は、(4.20), (4.21), (4.22) が首尾一貫したものになるための十分条件である。CIR 期間構造モデルは Lipschitz 条件を満たさないため、この定理を直接適用することができない。しかし、この諸条件は必ずしも必要ではなく、たとえば補論 A.2 の山田・渡辺の一意性定理（定理 4.A.1）を利用することによって、既に見たように（実次元 Bessel 2 乗過程によって r の存在性と一意性を主張した命題 4.3.1 の証明を参照されたし）、存在性と一意性は保証される。

μ, σ が t に依存しなければ、$f(r_0,t)$ を債券価格 $\Lambda_{0,T-t}$ とみなすことができる。この場合には単一の関数 f が任意の時刻における全期間構造をあらわすことになる。

$r_0 > 0$ が仮定され、$[0,\infty)$ の範囲にある短期利子率 x に対してのみ (4.21)-(4.22) を適用するものとする。このとき、定理 4.3.3 の系として、以下を主張することができる。

系 4.3.1 (CIR 期間構造偏微分方程式の解). CIR モデル (4.14) に対する期間構造偏微分方程式 (4.21)-(4.22) の解は

$$f(x,t) = H_1(T-t)\exp[-H_2(T-t)x] \tag{4.23}$$

で与えられる。ここで

$$H_1(t) = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)t/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma t}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa r^*/\sigma_r^2}, \tag{4.24}$$

$$H_2(t) = \frac{2(e^{\gamma t}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma t}-1)+2\gamma} \tag{4.25}$$

であり、$\gamma = (\kappa^2 + 2\sigma_r^2)^{1/2}$ とする。

それゆえ、CIR モデルによる満期 T のゼロクーポン債の時刻 t における価格 (4.1) は

$$\Lambda_{t,T} = H_1(T-t)\exp[-H_2(T-t)r_t] \tag{4.26}$$

のように明示的に表現することができる。

証明は補題を参照されたし。この系は [54, eqn.(6)(p.393)] と本質的に同じものである。しかし彼ら自身は証明を与えていない。

注意 4.3.2. (4.26) と (2.4') との比較から明らかなように、時刻 t における CIR 期間構造モデルにおけるゼロクーポン債の価格 $\Lambda_{t,T}$ は適合過程 r_t の時刻 t における値とゼロクーポン債の満期までの残り時間 $(T-t)$ にのみ依存することを示している。また、補題 4.3.1 と (4.13) から、(2.4') における適合過程 (σ_t^s) の一意性は明らかである。

4.3.3　CIR 期間構造派生証券としてのヨーロッパ型コールの評価

満期が T のゼロクーポン債に対して書かれた、満期 $s \leq T$ で行使価格 K のヨーロッパ型コールオプションを評価する問題を考察する。命題 4.2.2 の証明において、コールの複製戦略はすでに明

らかにされている。したがって、明示的なコール価格を導出することに考察を集中することができる。

コールの終端ペイオフは $(\Lambda_{s,T}-K)^+$ で表わされるから、時刻 0 におけるコールの価格は

$$C_0=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\Lambda_{s,T}-K)^+\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right]$$

によって与えられる。ここでは、上式をさらに展開して、Black-Scholes 公式に対応する公式を導出することが目的である。記号を節約するために、CIR モデル (4.19) を

$$dr_t=(a-(\kappa+\alpha\sigma_r)r_t)dt+\sigma_r\sqrt{r_t}dW_t \tag{4.27}$$

と書くことにする。すなわち、$a=b(h-\epsilon^2)$, $\alpha=\epsilon/\sqrt{h-\epsilon^2}$ とする。

結論を記せば以下のとおりである。

命題 4.3.2 (CIR 期間構造ヨーロッパ型コール価格). 満期が T のゼロクーポン債に対して書かれた、満期 $s\le T$ で行使価格 K のヨーロッパ型コールオプションの時刻 0 における価格 C_0 は

$$C_0=\Lambda_{0,T}\Psi_{4a/\sigma_r^2,\zeta_1}\left(\frac{r^*}{L_1}\right)-K\Lambda_{0,s}\Psi_{4a/\sigma_r^2,\zeta_2}\left(\frac{r^*}{L_2}\right)$$

で与えられる。ただし、$\Psi_{\delta,\zeta}(\cdot)$ は自由度 δ で、非心母数 ζ の非心 χ^2 分布を表わす。[4.12]**また、非心母数 ζ_1, ζ_2 はそれぞれ**

$$\zeta_1=\frac{8r_0\hat{\gamma}^2e^{\hat{\gamma}s}}{\sigma_r^2(e^{\hat{\gamma}s}-1)(\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+(\sigma_r^2\hat{H}_2(T-s)+b^*)(e^{\hat{\gamma}s}-1)},$$

$$\zeta_2=\frac{8r_0\hat{\gamma}^2e^{\hat{\gamma}s}}{\sigma_r^2(e^{\hat{\gamma}s}-1)(\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+b^*(e^{\hat{\gamma}s}-1))}$$

で与えられる。ただし、$b^*=\kappa+\sigma_r\alpha$, $\hat{\gamma}=\sqrt{(b^*)^2+2\sigma^2}$ である。関数 $\hat{H}_2$ は、系 4.3.1 (4.24) で与えられた H_2 において κ を b^* に、γ を $\hat{\gamma}$ に置き換えたもの

$$\hat{H}_2(t)=\frac{2(e^{\hat{\gamma}t}-1)}{\hat{\gamma}-b^*+e^{\hat{\gamma}t}(\hat{\gamma}+b^*)}$$

によって与えられる。また同様に、関数 $\hat{H}_1(\cdot)$ を

$$\hat{H}_1(t)=\left(\frac{2\hat{\gamma}e^{t(\hat{\gamma}+b^*)/2}}{\hat{\gamma}-b^*+e^{\hat{\gamma}t(\hat{\gamma}+b^*)}}\right)^{2a/\sigma_r^2}$$

によって定義すれば ((4.25) を参照されたし)、r^* は

$$r^*=\frac{\log\hat{H}_1(T-s)-\log(K)}{\hat{H}_2(T-s)}$$

によって与えられる。L_1, L_2 はそれぞれ

$$L_1=\frac{\sigma_r^2}{2}\frac{e^{\hat{\gamma}s}-1}{\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+(\sigma_r^2\hat{H}_2(T-s)+b^*)(e^{\hat{\gamma}s}-1)},\quad L_2=\frac{\sigma_r^2}{2}\frac{e^{\hat{\gamma}s}-1}{\hat{\gamma}(e^{\hat{\gamma}s}+1)+b^*(e^{\hat{\gamma}s}-1)}$$

によって与えられる。

[4.12]非心 χ^2 分布については、たとえば竹内 [21, p.112] や『岩波数学辞典』[32, 338.B] を参照されたし。

証明は補論を参照されたし。この命題は [54, Sec.4(pp.396-7)] と本質的に同じものである。しかし彼らは証明を記していない。

注意 4.3.3. Black-Scholes オプション公式との形式的対応はつくものの、非心 χ^2 分布に依存するこの結果は標準正規分布関数 N のみに依存する Black-Scholes 公式よりはるかに複雑で、計算機のコストがほとんど禁止的なまでに膨大になることが予想される。(4.13)CIR モデルは、論理的に厳密であるにもかかわらず、HJM モデルに比べて実務家に利用されることが少ないように思われる。それは、この公式の複雑性・計算コストが原因の一つであると考えられる。

4.4 Heath-Jarrow-Morton モデル

CIR モデルはもちろん、一般に因子による期間構造のモデル化においては、因子構造の基本モデルとして短期利子率過程が $r_t = R(X_t, t)$ の形である場合が取り扱われる。ここで（ある同値マルチンゲール測度の下で）X はある所与の確率微分方程式の解である。単一因子の場合には、通常、$r_t = X_t$ とされる。このアプローチには有限次元「状態空間」のみを取り扱えばよいという利点がある。この利点を利用すれば、この状態空間アプローチを用いて、偏微分方程式の解としてある種の派生証券の価格を計算することができる。

他方、Brennan-Schwartz[43] をはじめとして、長短金利の乖離をモデル化する多因子モデルを開発した研究がある。しかし残念ながら、モデルをより複雑にするこの方向の研究は、ゼロクーポン債や派生証券の評価において明示的な偏微分方程式の解・公式を導出することに成功していない。

これに代わり得るアイデアとして、Ho-Lee[89] の離散時間モデルを契機に、全利回り曲線を状態変数とする研究が現れた。このアイデアは、連続時間設定である HJM モデルの本質部分でもある。

HJM モデルの際立った特徴として、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下では先渡し率の確率分布がボラティリティ関数 σ にのみ依存するということがあげられる。したがって、HJM 期間構造派生証券の価格も σ にのみ依存することになる。この特徴によって、Black-Scholes オプション評価公式と同様、計算機によって期間構造派生証券の価格を計算することが可能になり、HJM モデルが理論家のみならず実務家にも広く受け入れられる要因となった。しかし以下では、このような計算可能性が理論の一般性を犠牲にしてはじめて得られるものであることが確認される。

4.4.1 先渡し率と HJM ゼロクーポン債価格

この節では、HJM モデルの基本構成要素を以下の補題に要約する。

補題 4.4.1. 時刻 s で満期を迎え時刻 τ で引渡しのあるゼロクーポン債の時刻 t における ($s \geq \tau \geq t$) 先渡し価格は、（無裁定の状況では）$\Lambda_{t,s}/\Lambda_{t,\tau}$、すなわち満期日と引渡し日のそれぞれに対するゼロクーポン債の価格比、によって与えられる。また、先渡し価格に関連した「先渡し率」Φ を

$$\Phi_{t,\tau,s} \equiv \frac{\log(\Lambda_{t,\tau}) - \log(\Lambda_{t,s})}{s - \tau} \tag{4.28}$$

によって定義する。(4.14)**「瞬間先渡し率」f を、各々の時刻 t と将来の引渡し日 $\tau \geq t$ に関する Φ**

(4.13)非心 χ^2 分布の密度関数は、χ^2 分布の密度関数の自由度に関する重み付き無限級数として与えられる（『岩波数学辞典』[32, 338.B] を参照されたし）。

(4.14)これは、先渡しで購入した債券の連続複利利回りとみなすことができる。

の極限(存在すれば)として

$$f(t,\tau) = \lim_{s \downarrow \tau} \Phi_{t,\tau,s}. \tag{4.29}$$

で定義する。[4.15]**s で満期をむかえるゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,s}$ は**

$$\Lambda_{t,s} = \exp\left(-\int_t^s f(t,u)du\right) \tag{4.30}$$

によって与えられる。

証明は補論を参照されたし。(4.28)-(4.29) は期間構造から瞬間先渡し率が決定されることを示しているのに対して、(4.30) は期間構造が瞬間先渡し率から復元されることを示している。

短期利子率の非負性が仮定されれば、以下の命題が成り立つ。

命題 4.4.1. すべての t に対して $r_t \geq 0$ w.p.1 であれば、先渡し率 $\Phi_{t,\tau,s}$ および瞬間先渡し率 $f(t,\tau)$ はともに非負である。

証明は補論を参照されたし。

4.4.2 HJM モデルにおける同値マルチンゲール測度の存在性・一意性と HJM 期間構造モデル

先渡し率の確率モデル f を所与とすれば、$r_t = f(t,t)$ が短期利子率過程 r を定義するものと仮定することができる。これは、満期が限りなくゼロに近づくときの債権利回りの極限として、r_t を取り扱うことができるということを意味している。ある技術的な諸条件の下では、この仮定が正当化される。

次の仮定は HJM 期間構造モデルにおいて、最も本質的な仮定である。

仮定 4.4.1 (**先渡し率に関する** HJM **モデル**). 先渡し率に関する HJM モデルは、各々の固定された満期 s に対して

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \alpha(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dB_u, \quad t \leq s \tag{4.31}$$

で与えられる。ここで、$\{\alpha(t,s) : 0 \leq t \leq s\}$ および $\{\sigma(t,s) : 0 \leq t \leq s\}$ は、(4.31) が伊藤過程として定義されるに十分なように、それぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^d$ で値をとる適合過程とする。さらに、$d = 1$ であり、かつ、σ が $f(t,s)$ の関数 $\sigma(f(t,s))$ と見なし得る場合、これをボラティリティ関数ということがある。ここでは、α および σ を $\mathcal{T} \times \Omega$ における可測関数であるとみなすことにする。ただし、$\mathcal{T} = \{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \leq s\}$ である。また、B は $\mathbb{P}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動である。

この仮定は HJM 自身の「条件 C.1」([85, p.80]) と同一である。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 4.4.1. 仮定 4.2.1 **が成り立つものとする。このとき $\mathbb{P}$ に対する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ が一意に存在し、**(4.31) **は以下のように書き改めることができる。**

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \mu(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dW_u, \quad t \leq s. \tag{4.32}$$

ただし W は $\mathbb{Q}$ の下での $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown **運動である。**

[4.15] したがって、瞬間先渡し率が存在するための必要十分条件は、すべての t に対して割引 $\Lambda_{t,s}$ が s に関して微分可能であることである。

この定理の証明はかなりテクニカルである。

証明の概略. 任意に固定された $s \geq t$ に対して $\mathbb{R}^d$ 値過程 a_t^s と実数値過程 b_t^s をそれぞれ以下のように定義する。

$$a_t^s = -\int_t^s \sigma(t,u)du, \qquad b_t^s = \frac{1}{2}\|a_t^s\| - \int_t^s \alpha(t,u)du.$$

このとき、任意に固定されたそれぞれの s に対して

$$\Lambda_{t,s} = \Lambda_{0,s} + \int_0^t \Lambda_{u,s}(r_u + b_u^s)du + \int_0^t \Lambda_{u,s}a_u^s dB_u, \quad 0 \leq t \leq s$$

が成り立つ。ここで仮定 4.2.1 より、異なる満期 $s(i),\ i=1,\dots,d,\ S = \min s(i)$ を有する d 種のゼロクーポン債の割り引かれた価格 $\tilde{\Lambda}_{t,s(i)}$ を考える。すなわち

$$\tilde{\Lambda}_{t,s(i)} = \exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\Lambda_{t,s(i)}.$$

すべての $i=1,\dots,d$ に対して

$$d\tilde{\Lambda}_{t,s(i)} = \tilde{\Lambda}_{t,s(i)}b_t^{s(i)}dt + \tilde{\Lambda}_t^{s(i)}a_t^{s(i)}dB_t$$

が成り立つことは容易にわかる。ベクトル $a_t^{s(i)}$ の第 j 要素を第 i 行第 j 列要素とする $d \times d$ 行列を A_t、$b_t^{s(i)}$ を第 i 要素とする $\mathbb{R}^d$ 値ベクトルを λ_t として、線形方程式 $A_t\eta_t = \lambda_t$ を考える。割り引かれたゼロクーポン債価格ベクトル $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}_{\cdot,s(1)},\dots,\tilde{\Lambda}_{\cdot,s(d)})$ に関して方程式が可約（方程式に解 η が存在する）であり、η が Novikov の条件を満たすものとする。さらに

$$\xi = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^S \|\eta_t\|^2 dt - \int_0^S \eta_t dB_t\right)$$

が有限分散を有するとする。ここで

$$\xi_t = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds - \int_0^t \eta_t dB_s\right)$$

とすれば、$(\xi_t)_{t\leq S}$ は非負マルチンゲールであり、$d\mathbb{P}/d\mathbb{Q} = \xi$ を Radon-Nikodym 導関数とする $\mathbb{P}$ と同値な確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在することがわかる。したがってマルチンゲール価格理論の結果を利用すれば、割り引かれたゼロクーポン債価格ベクトル $\tilde{\Lambda}$ に関して、この同値確率測度 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{P}$ に対する同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ であり、裁定が存在しないこと、$\mathbb{Q}$ は一意であることが主張し得る。[4.16] さらに Girsanov の定理より $W_t = B_t - \int_0^t \eta_s ds$ は $\mathbb{Q}$ の下で $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動となる。したがって、$\mu(t,s) = \alpha(t,s) - \sigma(t,s)\eta_t$ とおけば (4.32) を得る。 □

注意 4.4.1. 上の定理は HJM[85, Prop.2] と本質的に同一である。上の証明の流れは概ね彼ら自身の証明（HJM[85, Appendix]）に従うものの、それよりも直接的である。この定理は HJM モデルにおける同値マルチンゲール測度の存在性・一意性を示している点で非常に重要であるが、証明の中身から明らかなように、仮定 4.2.1 に強く依存している。注意 4.2.1 で述べたように、$\mathbb{Q}$ の存在性・一意性を主張し得るか否かは、ゼロクーポン債も含んだ背景の証券市場均衡が不確実性の

[4.16] 赤壁 [2, 定理 3.2, 命題 1(p.155)] を参照されたし。

源泉である $\mathbb{R}^d$ 値標準 Brown 運動をスパンし得るか否か、すなわち完備証券市場均衡の存在性・一意性、を問題にしなければならない。HJM[85] のアイデアは、仮定 4.2.1 によって、この不確実性の源泉をスパンするに必要なだけ満期の異なるゼロクーポン債を導入しようというものであり、きわめて卓越した着想であると評価し得る。しかし仮定 4.2.1 が成り立たないような状況では、再び、ゼロクーポン債以外の別の証券で不確実性がスパンし得るか否かが問われることになる。

μ および σ が $\mathcal{T}\times\Omega$ 可測な関数であるケースでは、μ と σ の間には、以下に示されるように、ある重要な定常的関係があることがわかる。

補題 4.4.2. 上記モデルの設定において

$$\mu(t,s)=\sigma(t,s)\int_s^t \sigma(t,s)^\top du. \tag{4.33}$$

なる関係が成り立つ。

証明は補題を参照されたし。上の計算を正当化する技術的な諸条件に関しては、適宜、専門の文献を参照されたし。

定理 4.4.2 (HJM 期間構造モデル). (4.33) **と短期利子率の定義** $r_t=f(t,t)$ **を用いることによって**

$$r_t=f(0,t)+\int_0^t \sigma(v,t)\int_v^t \sigma(v,u)^\top du dv+\int_0^t \sigma(v,t)dW_v \tag{4.34}$$

を得る。

証明. 証明の本質的な部分は補題 4.4.2 のとおり。後はほとんど自明である。 □

注意 4.4.2. 仮定 4.4.1、定理 4.4.2 から明らかなように、単一因子(短期利子率)で表わされる CIR モデルとは違って、全利回りをもとにする HJM モデルでは「平均反転性」が問題にされることはほとんどない。また、μ および σ が $\mathcal{T}\times\Omega$ 可測な関数である HJM の一般的設定のケースでは (4.34) の成立が示されることがわかったが、σ を一般のボラティリティ関数 $\sigma(f(t,s))$ で置き換えた場合、必ずしも (4.34) が成立する保証はない。これは、確率微分方程式 (4.32) の解の存在性と一意性に関わる問題であり、σ に対して Feynman-Kac の公式が要求する諸条件(連続性・微分可能性、Lipschitz 条件・成長条件を満足すること)が課せられることになるであろう。これは、HJM モデルによって現実のデータから期間構造派生証券を評価する実務家にとっては、かなり厳しい制約となると思われる。さらに、σ がほとんどいたるところでゼロであれば、確定的な債券市場において無裁定ということから期待されるように、すべての時刻 t においてスポット利子率 r_t と先渡し利子率 $f(0,t)$ は(ほとんど確実に)一致する。最後に、上記の HJM の一般的な設定のもとでは、(2.4') あるいは CIR の (4.26) と比較し得るようなゼロクーポン債の明示的な価格公式を導くことは非常に困難である。ゼロクーポン債の明示的な価格公式を得るには、以下の補題 4.4.3 のように、σ に関してより特殊化した仮定を設定しなければならない。

(4.34) と基本公式 (4.3) から、少なくとも理論的には、任意の証券を評価することができる。Gauss 型の特殊なケースを別にすれば、HJM の設定に関しては、ほとんどの評価の作業を数値的に行なうことができる。しかしながらこのモデルに関しては、特殊なケースを除けば、状態変数の集合は有限ではない。したがって、偏微分方程式にもとづいた計算法は利用できない。その代わりに、有限の状態数を持つ類似の離散時間モデルを構築することによって近似価格を計算することになる。

4.4.3　HJM ゼロクーポン債価格とヨーロッパ型コールの評価

CIR モデルと同様、HJM モデルにおいても、ゼロクーポン債に対するヨーロッパ型コールの明示的な公式を導出することを考える。しかし、ボラティリティ関数 $\sigma(f(t,s))$ を一般形のまま扱おうとすれば、コールの複製可能性と「リスク中立的」評価式を与える命題 4.2.2 の結論を上回る内容を提示することは難しい。そこで、ボラティリティ関数 σ は正値定数（これは標準 Brown 運動の次元 d が $d=1$ であることも意味する）であると仮定することによって、コールの明示的な評価公式を導くことを試みる。ただしこのような単純化は、σ を $\mathcal{T}\times\Omega$ 可測な関数（あるいは、瞬間先渡し率の関数）として定式化する HJM モデル本来の理論的意義からみれば、はなはだしい逸脱であるといわざるを得ない。(4.17) しかしながら、公式を現実問題に適用する実務家の立場から見れば、注 4.4.2 で指摘したように、たとえ Feynman-Kac の公式が要求する諸条件を満たすようななんらかの解析関数を仮定したとしても、σ の特定化に関する ad-hoc 性は回避し得ないと思われる。(4.18)

CIR モデルで扱ったと同様、満期が T のゼロクーポン債に対して書かれた、満期 $s\le T$ で行使価格 K のヨーロッパ型コールオプションを考える。したがって、満期 s におけるコールの価値は $(\Lambda_{s,T}-K)^+$ によって与えられる。

結論を導くために、上記仮定のもとにおけるゼロクーポン債の価格に関する補題を用意する。

補題 4.4.3. 上記仮定のもとでは、(4.34) **より、短期利子率** r_t **は**

$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t$$

で与えられる。また、時刻 T **を満期とするゼロクーポン債の時刻** t **における価格は**

$$\begin{aligned}\Lambda_{t,T} &= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left(-\sigma(T-t)W_t - \frac{\sigma^2 sT(T-t)}{2}\right)\\ &= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left[-(T-t)\left(r_t - \frac{\sigma^2 t(T-t)}{2} - f(0,t)\right)\right]\end{aligned} \tag{4.35}$$

によって明示的に与えられる。

証明は補論を参照されたし。

注意 4.4.3. HJM ゼロクーポン債価格 (4.35) と、最も一般的な (2.4') あるいは CIR ゼロクーポン債価格 (4.26) を比較することは容易である。(4.26) と (4.35) を比較すれば、いずれも適合過程 r_t の現在時刻 t の値とゼロクーポン債の満期までの残り時間 $(T-t)$ に依存する点が共通である。ただしこの共通点は σ を定数とする特殊な仮定のもとで得られたもので、必ずしも一般には妥当しないことに注意する必要がある。

補題 4.4.3 を用いれば以下の結果を得る。

(4.17) Björk[50, Sec.5.3] は $\sigma(t,s)$ を 2 乗可積分な**確定関数**としてコールの明示的な評価公式を導いている。しかし残念ながら、この意味で、Björk[50] のアプローチも一般的というには程遠い。

(4.18) 明示的な価格公式を得るという観点から見れば、σ を $\mathbb{R}^d$ 値適合過程（あるいは $\mathcal{T}\times\Omega$ 可測な関数）であるとすることを断念して、Gauss 型 HJM モデルを検討するほうが有益であるようである。Musiela-Rutkowski[116] は Gauss 型 HJM モデルに基づいた様々な期間構造派生証券の評価を試みている。ただしこの場合でも、オリジナル HJM 理論から見れば、理論的には大きな後退であることは否めないし、σ の特定化に関する ad-hoc 性を回避し得ているとは思われない。

命題 4.4.2 (HJM 期間構造ヨーロッパ型コール価格). 時刻 0 におけるコールの価格は

$$C_0 = \Lambda_{0,T}N(d) - K\Lambda_{0,s}N\big(d - \sigma\sqrt{s}(T-s)\big)$$

によって与えられる。ただし、N は標準正規分布関数であり、d は

$$d = \frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(K\Lambda_{0,s}/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}$$

によって与えられるパラメータである。

証明は補論を参照されたし。この命題の結論は HJM[85, Sec.6(pp.90-2)], Jamshidian[96] と本質的に同じである。しかし HJM[85] 自身は証明を与えていない。

注意 4.4.4. 得られた評価公式と Black-Scholes 公式との対応関係は明らかであろう。ボラティリティ関数が正値定数であるという単純化がなされているものの、この評価公式は Black-Scholes 公式の場合と同様標準正規分布関数 N のみで表わされており、正値定数 σ の計測にのみ計算機コストを支払えばよいということになる。

4.5 結び

本章は、CIR 期間構造モデルと HJM 期間構造モデルの理論的フレームワークを検証し、数理ファイナンス論の観点から再検討したものである。

CIR モデルは、連続時間設定における投資家の効用最大化問題から導出されたものであり、証券市場均衡理論の成果を直接適用することが可能で、この意味でミクロ経済学的基礎を有している期間構造モデルであることが再確認された。

HJM モデルでは、利回り曲線の将来の時間発展が依存する「状態変数」は、ある特定の有限次元状態ベクトルではなく、経常利回り曲線全体となっている。HJM モデルの際立った特徴として、同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下では先渡し率 $f(t,s)$ の確率分布がボラティリティ関数 σ にのみ依存し、したがって、HJM 期間構造派生証券の価格も σ にのみ依存すると期待してよいことが再確認された。この特徴は、Black-Scholes 公式と同等の計算コストで、期間構造派生証券の価格を計算することができるということを期待させる。

それぞれのモデルについて、期間構造派生証券の代表例として、ゼロクーポン債に対して書かれたヨーロッパ型コールオプションの評価問題を検討した。「リスク中立」的評価と複製可能性については命題 4.2.2 によって論理的に解決されるが、明示的な公式を得るためにはゼロクーポン債の価格 $\Lambda_{t,s}$ そのものを明示的に表わす必要がある。これはいずれのモデルにおいても、Feynman-Kac アプローチによって解を得ることになる。Feynman-Kac アプローチは、一定の技術的な諸条件を満たしていれば解の存在性と一意性まで保証してくれるため、応用上まことに都合がよい。特に、期間構造モデルは無裁定状態における（「リスク中立化」「市場均衡」「同値マルチンゲール測度」の下での）評価でなければ意味を成さない。この状態での期間構造モデルの解の一意性が保証されていることは、理論上きわめて都合がよい。

しかし、Feynman-Kac アプローチを採用するために引き起こされる問題点があることも事実である。本章では考察することができなかったが、「破産のリスク」の処理がある。Cauchy 問題（境界条件を持つ微分方程式）を解くための手法として Feynman-Kac アプローチが採用できることを保証するように、破産のリスクをモデルに導入することは非常に困難である。なぜならば、多く

の場合、破産によって値関数あるいは終端ペイオフ関数の連続微分可能性が満足されなくなると考えられるからである。そのような場合には、Feynman-Kac アプローチによる解の存在性と一意性が主張し得ない。したがって、場当たり的に Cauchy 問題を解き（解ければ存在性は示される）、まったく別の手法で一意性を示さなければならなくなる。「破産のリスク」の問題は、稿を改めて論ずることにしたい。

また、注 4.4.2 のなかでも指摘したように、Feynman-Kac アプローチが要求する技術的な諸条件はきわめて厳しいものである。CIR モデルの場合は幸いにして、追加的な強い仮定をおくことなしに明示的な表現 (4.26) を得ることができた。他方、HJM モデルの場合は、σ を $\mathcal{T} \times \Omega$ 可測な関数（あるいは、瞬間先渡し率の関数）として定式化する HJM モデル本来の理論的意義からみれば、ゼロクーポン債の価格 $\Lambda_{t,s}$ を得るためになされるボラティリティ関数 σ の特定化はすべて ad-hoc であるという批判を免れ得ないであろう。少なくとも実務家の立場からすれば、特定化の ad-hoc 性を回避し得ない現状は決して満足すべき状況であるとはいえないであろう。

単一因子による CIR モデルよりは、因子に依存しない HJM モデルのほうが理論的一般性が高いものと見なされる傾向があるようである。CIR モデルでは同値マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ を与える密度 ξ が一意に決定される（(4.17) を参照されたし）。これは、CIR モデルが証券市場均衡理論と両立し得るものであるから当然であるといえる。他方、HJM モデルも定理 4.4.1 によって $\mathbb{Q}$ の存在性・一意性が証明されるが、注意 4.4.1 で指摘したように、この結論は仮定 4.2.1 に強く依存している。したがって仮定 4.2.1 が成り立たないような状況では、HJM モデルが証券市場均衡と両立し得るか否かは他の本源的証券の価格モデルに依存することになる。現実の証券市場では、満期の異なるゼロクーポン債を必要なだけ導入し得るとは考えがたいから、この点は実務家にとっても厄介な問題となるであろう。

CIR モデルでは、ゼロクーポン債に対するコールの明示的な評価公式はリーズナブルな計算コストを保証するものではなかった。HJM モデルでは、Black-Scholes 公式と同等の計算コストを保証してくれるものの、明示的なゼロクーポン債価格を得るため σ を正値定数とするという強い仮定に依存することとなった。したがって、本章が考察するゼロクーポン債に対する期間構造ヨーロッパ型コールの評価に関する限り、この二つの優れた期間構造モデルの間に優劣はつけがたい。

4.A 補論—本章で必要な確率論の結果—

4.A.1 Feynman–Kac の公式

所与の $T>0$ に対して Cauchy 問題を考える。すなわち

$$\mathfrak{D}f(x,t)-r(x,t)f(x,t)+h(x,t)=0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T) \tag{4.A.1}$$

の境界条件

$$f(x,T)=g(x), \quad x\in\mathbb{R}^N \tag{4.A.2}$$

の下での解 $f\in C^{2,1}(\mathbb{R}^N\times[0,T))$ を見出すことである。ここで $r:\mathbb{R}^N\times[0,T]\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^N\times[0,T]\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^N\times[0,T]\to\mathbb{R}^N$, $\sigma:\mathbb{R}^N\times[0,T]\to\mathbb{R}^{N\times d}$ とする。ただし微分作用素 $\mathfrak{D}$ は次のように定義される。

$$\mathfrak{D}f(x,t)=f_t(x,t)+f_x(x,t)\mu(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(x,t)\sigma(x,t)^\top f_{xx}(x,t)]. \tag{4.A.3}$$

(4.A.1)-(4.A.2) に対する Feynman–Kac の解は、存在するとすれば

$$f(x,t)=E^{x,t}\left[\int_t^T\varphi_{t,s}h(X_s,s)ds+\varphi_{t,T}g(X_T)\right] \tag{4.A.4}$$

で与えられる。ただし

$$\varphi_{t,s}=\exp\left[-\int_t^s r(X_\tau,\tau)d\tau\right]$$

とする。以下の条件

(a). r, g, h, μ, σ, f はすべて少なくとも 2 階連続微分可能で x に関して Lipschitz 条件を満たす
(b). r は非負でない
(c). r, g, h, μ, σ, f とその導関数は x に関して成長条件を満たす

が満たされているものとすれば、(4.A.1)-(4.A.2) に対する Feynman–Kac の解は一意に存在し、(4.A.4) で与えられることが知られている。この条件はさらに緩めることが可能であるが、この点に関しては専門の数学書に譲ることにする。

4.A.2 山田・渡辺の一意性定理

定理 4.A.1 (Yamada-Watanabe[134]). **1 次元確率微分方程式**

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t, \qquad X_0=x \tag{4.A.5}$$

を考える。σ, b は可測、かつ、以下の条件を満たすものとする。

(a). **条件**

$$\int_{0+}\rho(u)^{-1}du=\infty,$$

$$(\sigma(x)-\sigma(y))^2\le\rho(|x-y|), \qquad \text{すべての } x,y\in\mathbb{R} \text{ に対して}$$

を満たす増加関数 $\rho:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ が存在する。
(b). **b は Lipschitz 条件を満たす。**

このとき、(4.A.5) の解過程には道ごとの一意性が成り立つ。

証明は Rogers-Williams[125, V.40 (pp.265-6)] を参照されたし。

4.A.3　Bessel 過程と Bessel 2 乗過程

補題 4.A.1. $\alpha > 0$ として、α 次元 Bessel 過程 r は確率微分方程式

$$dr_t = \frac{\alpha - 1}{2r_t}dt + dB_t, \qquad r_0 = a > 0$$

を満たす。Bessel 過程の推移密度は

$$p(t,x,y) = \frac{\exp[-(x^2+y^2)/2t]}{t(xy)^{(\alpha-2)/2}} y^{\alpha-1} I_{(\alpha-2)/2}\left(\frac{xy}{t}\right)$$

で明示的に与えられる。ただし、$I_\nu(x)$ は修正 Bessel 関数

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \tag{4.A.6}$$

である。

Bessel 過程に関する以上の事実は Karlin-Taylor[99, p.238] による。$\alpha = n$, n は整数のとき

$$r_t = \sqrt{(w_t^1)^2 + \cdots + (w_t^n)^2}$$

となる。ただし、w^k, $k = 1, 2, \ldots, n$ は独立な標準 Brown 運動過程である。

補題 4.A.2. $Z = r^2$ に関して伊藤の補題を適用することにより、Bessel 2 乗過程 Z の確率微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} dZ_t &= 2r_t dr_t + dt \\ &= \alpha dt + 2r_t dB_t \\ &= \alpha dt + 2\sqrt{Z_t} dB_t, \qquad Z_0 = r_0^2 = z_0 > 0 \end{aligned}$$

山田・渡辺の一意性定理 4.A.1 より、上の確率微分方程式には道ごとに一意な解が存在する。また、$\alpha \geq 2$ のとき、$t > 0$ において Z は決してゼロになることはない。

最後の主張は Rogers-Williams[125, V.35 (pp.69-70)] を参照されたし。

4.B　命題・補題の証明

命題 4.2.1 の証明. 適合過程 $\tilde{\Lambda}_{t,s}$, $0 \leq t \leq s$ は $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるから、$\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t$, $0 \leq t \leq s$ は $\mathbb{P}$-マルチンゲールである。また、すべての $t \in [0,s]$ に対してほとんど確実に $\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t > 0$ であることは明らか。このとき、(4.2) と同じように、Girsanov の定理から

$$\tilde{\Lambda}_{t,s}L_t = \tilde{\Lambda}_{0,s} \exp\left(\int_0^t \theta_u^s dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta_u^s\|^2 du\right),$$

かつ、$\int_0^s \|\theta_u^s\|^2 du < \infty$ を満たすある適合過程 θ_t^s, $0 \leq t \leq s$ が存在することがわかる。したがって、(4.2) より

$$\Lambda_{t,s} = \Lambda_{0,s} \exp\left(\int_0^t r(u)du + \int_0^t (\theta_u^s - \xi_u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t (\|\theta_u^s\|^2 - \|\xi(u)\|^2)du\right).$$

この結果を確率的に微分すれば

$$\frac{d\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,s}} = (r(t) + \|\xi(t)\|^2 - \theta_t^s \xi(t))dt + (\theta_t^s - \xi(t))dB_t$$

を得る。ここで、$\sigma_t^s = \theta_t^s - \xi(t)$ とおけば所望の結果を得る。 □

命題 4.2.2 の証明. 取引戦略 ϕ は自己資金充足的であり、割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負、かつ、$\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で 2 乗可積分となるものとする。このとき

$$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{\Lambda}_{t,T} = H_t\tilde{\Lambda}_{t,T}\sigma_t^T dW_t$$

が成り立つ。$\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ は $\mathbb{Q}$-2 乗可積分であるから、割引価値過程 $\tilde{V}$ は $\mathbb{Q}$-マルチンゲール、すなわち

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_s|\mathfrak{F}_t),\ \forall t\le s$$

である。ここで、$V_s = x$ とすれば

$$V_t = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\middle|\mathfrak{F}_t\right].$$

逆を証明するために、割引価値 $\tilde{V}_t$ がすべての t に対して非負、かつ、$\sup_{t\in[0,T]}\tilde{V}_t$ が $\mathbb{Q}$ の下で 2 乗可積分となるような自己資金充足的取引戦略を見出すことにする。マルチンゲール表現定理によって、$\int_0^s\psi_t^2 dt<\infty$、かつ

$$x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] + \int_0^s\psi_s dW_s$$

を満たす適合過程 ψ が存在することがわかる。このとき、すべての $t\le\ s$ に対して

$$H_t = \frac{\psi_t}{\tilde{\Lambda}_{t,T}\sigma_t^T}\quad \text{かつ}\quad H_t^0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[x\exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\middle|\mathfrak{F}_t\right] - \frac{\psi_t}{\sigma_t^T}$$

を満たすように取引戦略 ϕ を定めれば、このコールを複製することができる。すなわち、時刻 s におけるこの取引戦略の価値 V_s は x であることがわかる。 □

命題 4.2.3 の証明. 「変動率手形」と呼ばれる以下のような証券を考える。ある満期 τ までは短期利子率 r それ自体、それ以後は 1 であるような配当率が支払われるものとする。このような変動率手形の価値を f で表わすことにすれば

$$\begin{aligned}
f(r_t,t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s}r_s ds + \varphi_{t,\tau}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau r_s\exp\left(-\int_t^s r_v dv\right)ds + \exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right)\right]\\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[1-\exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right) + \exp\left(-\int_t^\tau r_v dv\right)\right]\\
&= 1.
\end{aligned}$$

問題の配当率スワップの時刻 t における価値を v_t で表わすことにすれば

$$\begin{aligned}
v_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s}(r_s - r^*)ds\right]\\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^\tau \varphi_{t,s}r_s ds + \varphi_{t,\tau}\right] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[r^*\int_t^\tau \varphi_{t,s}ds + \varphi_{t,\tau}\right]\\
&= f(r_t,t) - r^*\int_t^\tau \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\varphi_{t,s})ds - \Lambda_{t,\tau} \qquad \text{(Fubini の定理より)}\\
&= 1 - r^*\int_t^\tau \Lambda_{t,s}ds - \Lambda_{t,\tau}.
\end{aligned}$$

この結果より、主張の後半部分は明らか。 □

補題 4.3.1 の証明の概略. 次のような実数次元 Bessel 2 乗過程 Z を考える (Bessel 過程と Bessel 2 乗過程については補論 A.3 を参照されたし)。

$$dZ_t = 2\frac{2b}{k^2}dt + 2\sqrt{Z_t}dB_t,\qquad Z_0 = z_0.$$

補論 A.2 の山田・渡辺の一意性定理（定理 4.A.1）によって、$2b/k^2 > 1$ のとき上の確率微分方程式は道ごとに一意で非負な解過程 Z が存在することが知られている。このとき、Delbaen[57] によれば、(4.8) で定義される確率過程は $4b/k^2$ 次元 Bessel 2 乗過程 Z で表すことができる。

$$Y_t = \exp(-\kappa t) Z_{(k^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}.$$

厳密な証明は Pitman-Yor[121] を参照されたし。この結果から、Y の存在性と道ごとの一意性、および非負性は、上の実数次元 Bessel 2 乗過程 Z が道ごとに一意に存在することから明らか。ここでは、この結果を伊藤の補題を用いて計算によって確かめる。

$\tau = (k^2/4\kappa)(e^{\kappa t} - 1)$ とおいて

$$dB_\tau = \sqrt{\frac{k^2}{4} e^{\kappa t}} dB_t = \frac{k}{2} e^{\kappa t/2} dB_t$$

であることを考慮して

$$\begin{aligned} dZ_\tau &= 2\frac{2b}{k^2} d\tau + 2\sqrt{Z_\tau} dB_\tau \\ &= 2\frac{2b}{k^2}\frac{k^2}{4} e^{\kappa} dt + 2\sqrt{Z_\tau} dB_\tau \\ &= b e^{\kappa t} dt + k e^{\kappa t/2}\sqrt{Z_\tau} dB_t. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} dY_t &= -\kappa e{-}\kappa t Z_\tau dt + e^{-\kappa t} dZ_\tau \\ &= -\kappa Y_t dt + b dt + k e^{-\kappa t/2}\sqrt{Z_\tau} dB_t \\ &= (b - \kappa Y_t) dt + k\sqrt{\exp(-\kappa t) Z_\tau} dB_t \\ &= (b - \kappa Y_t) dt + k\sqrt{Y_t} dB_t. \end{aligned}$$

□

補題 4.3.2 の証明.

$$\begin{aligned} &V(x,y) = J(x,y,0), \quad J(x,y,T) = 0 \qquad \text{かつ} \\ &J(x,y,t) = A_1(t)\log(x) + A_2(t)y + A_3(t), \qquad (x,y,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0,T) \end{aligned}$$

なる関数 J を考える。HJB 方程式は

$$\sup_{c\in\mathcal{C}} \left\{ \dot{A}_1(t)\log(x) + \dot{A}_2(t)y + \dot{A}_3(t) + A_1(t)\frac{1}{x}(hxy - c) + A_2(t)(b - \kappa y) - A_1(t)\frac{\epsilon^2 y}{4} + e^{-\rho t}\log(c) \right\} = 0.$$

上式を c で微分して

$$-\frac{A_1(t)}{x} + \frac{e^{-\rho t}}{c} = 0.$$

この関係を元の方程式に代入して、$\log(c)$ の係数を見れば

$$\dot{A}_1(t) + e^{-\rho t} = 0, \qquad A_1(T) = 0$$

なる微分方程式を得る。したがって $A_1(t) = e^{-\rho t}(1 - e^{-\rho(T-t)})/\rho$。かくして

$$c = \frac{\rho x}{1 - e^{-\rho(T-t)}}.$$

これより最適消費計画 δ と最適資本ストック K がそれぞれ (4.10) と (4.9) で与えられることがわかる。[4.19]

□

[4.19] HJB 方程式の解が値関数 $V(x,y)$ に一致することは別に主張する必要があるが、この最適性のチェックは割愛する。この点に関しては、$A_2(t)$, $A_3(t)$ に関する常微分方程式を解くことによって $J(x,y,t)$ を明示的に表し、横断性条件を考慮することによってなし得るということを指摘するにとどめる。

補題 4.3.3 の証明. (4.9)-(4.10) によって定義される過程 K の存在性は、K_t を Y で表すことによって得られる。これは伊藤の補題を援用して $\log(K_t)$ を展開することによって得られる。

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\bar{b} - \bar{\kappa} Y_s) ds + \int_0^t \bar{k}\sqrt{Y_s} dB_s, \qquad 2\bar{b} > \bar{k}^2$$

であるから、上の補題の証明から積分 $\int_0^t Y_s ds$ は存在し、確率積分 $\int_0^t \bar{k}\sqrt{Y_s} dB_s$ は定義されることがわかる。ここで $\log(K_t)$ に伊藤の補題を適用すれば

$$\begin{aligned} d\log(K_t) &= \frac{1}{K_t} dK_t - \frac{1}{K_t^2} K_t^2 \epsilon^2 Y_t dt \\ &= \left((h - \epsilon^2) Y_t - \frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-t)}} \right) dt + \epsilon\sqrt{Y_t} dB_t \\ &= \left(-\frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-t)}} - \bar{\kappa} Y_t \right) dt + \epsilon\sqrt{Y_t} dB_t. \end{aligned}$$

したがって $\log(K_t)$ は

$$\log(K_t) = \log(K_0) + \int_0^t \left(-\frac{\rho}{1 - e^{-\rho(T-s)}} - \bar{\kappa} Y_s \right) ds + \int_0^t \epsilon\sqrt{Y_s} dB_s$$

となるから、確率過程 $\log(K)$ は存在する。$\log(\cdot)$ は単調変換であるから、K の存在性は示された。 □

命題 4.3.1 の証明. $\bar{r_t} \equiv \mathbb{E}(r_t)$ は有限かつ t に関して連続である。なぜならば、上述のとおり、r は実数次元 Bessel 2 乗過程

$$r_t = \exp(-\kappa t) Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}$$

であらわすことができる。したがって $\mathbb{E}(r_t)$ の連続性は保証される。Bessel 2 乗過程の定義より

$$\mathbb{E}(Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}) = Z_0 + (\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t} - 1)$$

であるから、適当な正の数 $C,\ D,\ D \geq C$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(r_t) &= \exp(-\kappa t)\mathbb{E}(Z_{(\sigma_r^2/4\kappa)(e^{\kappa t}-1)}) \\ &\leq e^{-\kappa t}(C(e^{\kappa t} - 1) + D) \\ &= C + (D - C)e^{-\kappa t} \\ &\leq D. \end{aligned}$$

よって

$$\bar{r_t} = \mathbb{E}(r_t) \leq D.$$

かくして有界性が示された。

$D \geq \mathbb{E}(r_t) > 0$ であるから Fubini の定理が使えて

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt \right) = \int_0^T \mathbb{E}(r_t) dt = \int_0^T \bar{r}_t dt \leq DT < \infty.$$

それゆえ、確率積分 $\int_0^T \sigma_r \sqrt{r_t} dB_t$ の期待値はゼロであることがわかる。

かくして

$$\bar{r}_t = r_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \kappa(r^* - r_s) ds \right].$$

再び Fubini の定理を用いて、(4.14) から

$$
\begin{aligned}
\bar{r}_t = \mathbb{E}(r_t) &= \mathbb{E}\left(r_0 + \int_0^t \kappa(r^* - r_s)ds + \int_0^t \sigma_r \sqrt{r_t} dB_t\right) \\
&= r_0 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \kappa(r^* - r_s)ds\right) \\
&= r_0 + \left(\int_0^t \mathbb{E}(\kappa(r^* - r_s))ds\right) \qquad \text{Fubini の定理による} \\
&= r_0 + \left(\int_0^t \kappa(r^* - \mathbb{E}(r_s))ds\right).
\end{aligned}
$$

これは、$\bar{r}_t = r^* + (r_0 - r^*)e^{-\kappa t}$ を解とする以下の常微分方程式と同値である。[4.20]

$$
\frac{d\bar{r}_t}{dt} = \kappa(r^* - \bar{r}_t); \qquad \bar{r}_0 = r_0.
$$

かくして t に関して指数的に $\mathbb{E}(r_t) \to r^*$ となり、r^* は短期利子率の「長期平均」水準となる。条件付き期待値に Fubini の定理を用いることによって、任意の時刻 t および $s \geq t$ に関して

$$
\mathbb{E}_t(r_s) = r^* + (r_t - r^*)e^{-\kappa(s-t)} \qquad \text{ほとんど確実に}
$$

が成り立つことを同様に示すことができる。[4.21] □

補題 4.3.4 の証明. (4.15), (4.13) から

$$
dp_t = -p_t r_t dt - p_t \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}} \sqrt{r_t} dB_t.
$$

$\log(p_t)$ に伊藤の補題を適用して

$$
\begin{aligned}
d\log(p_t) &= \frac{dp_t}{p_t} - \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{h - \epsilon^2}\frac{p_t^2 r_t}{p_t^2} dt \\
&= -r_t \left(1 + \frac{\epsilon^2/2}{h - \epsilon^2}\right) dt - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}} \sqrt{r_t} dB_t \\
&= \frac{h - \epsilon^2/2}{\epsilon^2 - h} r_t dt - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}} \sqrt{r_t} dB_t.
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\log(p_t) - \log(p_0) = \frac{h - \epsilon^2/2}{\epsilon^2 - h} \int_0^t r_s ds - \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}} \int_0^t \sqrt{r_s} dB_s.
$$

よって (4.16) を得る。 □

補題 4.3.5 の証明. 確率過程 θ を

$$
\theta_t = \frac{\epsilon}{\sqrt{h - \epsilon^2}} \sqrt{r_t}
$$

[4.20] $x_t = r^* - \bar{r}_t$ とおけば、常微分方程式は

$$
\frac{dx_t}{dt} = -\kappa x_t; \qquad x_0 = r^* - r_0
$$

となる。したがって $x_t = (r^* - r_0)e^{-\kappa t}$。したがって、所望の解を得る。

[4.21] $\bar{r}_s = \mathbb{E}_t(r_s), s \geq t$ とおけば、$s = t$ を初期時点として上の議論がそのまま成り立つ。

とおく。指数関数は凸関数であるから

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\epsilon^2}{h-\epsilon^2}\int_0^T r_t dt\right)\right] \\
&\le \exp\left[\mathbb{E}\left(\frac{\epsilon^2}{h-\epsilon^2}\int_0^T r_t dt\right)\right] \qquad \text{Jensen の不等式より} \\
&= \exp\left[\frac{\epsilon^2}{h-\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt\right)\right] \\
&< \infty. \qquad \mathbb{E}\left(\int_0^T r_t dt\right) < \infty \text{ より}
\end{aligned}
$$

これは θ が Novikov の条件を満たすことを示している。したがって、ξ は Novikov の定理より非負マルチンゲールになる。このとき Girsanov の定理から

$$
\begin{aligned}
dW_t &= dB_t + \theta_t dt \\
&= dB_t + \frac{\epsilon}{\sqrt{h-\epsilon^2}}\sqrt{r_t}dt
\end{aligned}
$$

で定義される確率過程 W は、密度過程を ξ とする同値確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で標準 Brown 運動となる。 □

系 4.3.1 の証明. $f(x,t) = H_1(T-t)\exp[-H_2(T-t)x]$ が境界条件 $f(x,T) = 1$ を満たすことは明らか。次に

$$
g(x,t) = \log f(x,t) = \frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\log\left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\kappa)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right] - \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}x
$$

とする。このとき

$$
g_x = -H_2(T-t) = -\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma},
$$

$$
g_{xx} = 0, g_t = \frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\left[-\frac{\gamma+\kappa}{2} + \frac{\gamma(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right] + \frac{4\gamma^2 e^{\gamma(T-t)}}{[(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma]^2}x.
$$

また

$$
g_t = \frac{f_t}{f}, \quad g_x = \frac{f_x}{f}, \quad g_{xx} = \frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f}\right)^2.
$$

したがって、期間構造偏微分方程式 (4.21) から

$$
g_t + g_x\kappa(r^*-x) + \frac{1}{2}g_x^2\sigma_r^2 x - x = 0.
$$

先に定義した $g(x,t)$ がこの方程式を満たすことを示せばよい。上式において、x の係数は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\Big\{4\gamma^2 e^{\gamma(T-t)} + 2\kappa\{(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}+\gamma-\kappa\} \\
&\qquad +2\sigma_r^2(e^{\gamma(T-t)}-1)^2 - \{(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}+\gamma-\kappa\}^2\Big\} = 0.
\end{aligned}
$$

x に関わらない部分は

$$
\frac{2\kappa r^*}{\sigma_r^2}\left[-\frac{\gamma+\kappa}{2} + \frac{\gamma(\gamma+\kappa)e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} - \frac{\sigma_r^2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right] = 0.
$$

したがって、与えられた関係は確かに解である。 □

命題 4.3.2 の証明. x からスタートする (4.27) の解過程を (X_t^x) で表わすことにし、Ikeda-Watanabe[93, pp.235-40] の結果を用いれば、X_t^x の Laplace 変換（積率母関数）が

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t^x}) = \frac{1}{(2\lambda L + 1)^{2a/\sigma_r^2}} \exp\left(-\frac{\lambda L \zeta}{2\lambda L + 1}\right)$$

によって与えられることがわかる。ただし

$$L = \frac{\sigma_r^2}{4(\kappa + \alpha\sigma_r)(1 - e^{-(\kappa+\alpha\sigma_r)t})}, \quad \zeta = \frac{4x(\kappa + \alpha\sigma_r)}{(\sigma_r^2(e^{(\kappa+\alpha\sigma_r)t} - 1))}$$

とする。この記号を用いれば、X_t^x/L の Laplace 変換（積率母関数）が $g_{4a/\sigma_r^2,\zeta}$、ただし

$$g_{\delta,\zeta}(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda + 1)^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{\lambda\zeta}{2\lambda + 1}\right)$$

によって与えられることがわかる。これは自由度 δ、非心母数 ζ の非心 χ^2 分布の Laplace 変換（積率母関数）である。Laplace 変換を反転することによって、この分布の密度が

$$f_{\delta,\zeta}(x) = \frac{e^{-\zeta/2}}{2\zeta^{\delta/4-1/2}} e^{-x/2} x^{\delta/4-1/2} I_{\delta/2-1}(\sqrt{x\zeta}), \quad x > 0$$

によって与えられることが知られている。$I_{\delta/2-1}$ は自由度 $\delta/2-1$ の修正 Bessel 関数（(4.A.6) を参照されたし）である。

ところで、命題 4.3.1 より

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\Lambda_{s,T} - K)^+ \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(H_1(T-s)\exp(H_2(T-s)r_s) - K)^+ \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Lambda_{s,T} 1_{\{r_s<r^*\}} \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] - K\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[1_{\{r_s<r^*\}} \exp\left(-\int_0^s r(u)du\right)\right] \end{aligned}$$

である。割引かれた価格の $\mathbb{Q}$-マルチンゲール性より、$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{s,T} e^{-\int_0^s r(u)du}) = \Lambda_{0,T}$ を得る。同様に

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^s r(u)du}) = \Lambda_{0,s}.$$

したがって、第 1 式最右辺を書き改めて

$$C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{P}_1(r_s(\omega) < r^*) - K\Lambda_{0,s}\mathbb{P}_2(r_s(\omega) < r^*).$$

ただし、$\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ はそれぞれ

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} = \frac{\Lambda_{s,T} e^{-\int_0^s r(u)du}}{\Lambda_{0,T}}, \quad \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^s r(u)du}}{\Lambda_{0,s}}$$

によって与えられる（$\mathbb{Q}$ に関する）密度を有する確率である。$\mathbb{P}_1$ の下での r_s/L_1、および $\mathbb{P}_2$ の下での r_s/L_2 がともに自由度 $4a/\sigma_r^2$ の非心 χ^2 分布に従い、その非心母数がそれぞれ ζ_1, ζ_2 で与えられることは上述のとおりである。したがって、主張の結果を得る。 □

補題 4.4.1 の証明. 引渡し日 $\tau \geq t$ におけるゼロクーポン債の価格は $\Lambda_{\tau,s}$ であるから、無裁定の状況では、

時刻 t における先渡し価格 $p_{t,\tau,s}$ は $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\tau,s})$ となる。ところで、「繰返し期待値の法則」から

$$\begin{aligned}
\Lambda_{t,\tau}p_{t,\tau,s} &= \Lambda_{t,\tau}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\tau,s}) \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_s^\tau r_u du\right)\Lambda_{\tau,s}\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_\tau^s r_u du\right)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\exp\left(-\int_\tau^s r_u du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\mathbb{E}_\tau^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right] \\
&= \Lambda_{t,s}.
\end{aligned}$$

したがって

$$p_{t,\tau,s} = \frac{\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{t,\tau}}$$

を得る。

$\Lambda_{t,s}$ がすべての t に対して s に関して微分可能であるとすれば

$$f(t,\tau) = \lim_{s\downarrow\tau}\frac{\log(\Lambda_{t,\tau}) - \log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau} = \frac{d}{d\tau}(-\log\Lambda_{t,\tau}), \quad s \ge \tau \ge t.$$

したがって

$$\Lambda_{t,s} = \exp\left(-\int_t^s f(t,u)du\right).$$

□

命題 4.4.1 の証明. 仮定より

$$-\int_t^s r_u du \le -\int_t^\tau r_u du, \quad s \ge \tau \ge t, \quad \text{w.p.1.}$$

したがって

$$\Lambda_{t,\tau} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right)\right] \ge \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right)\right] = \Lambda_{t,s},$$

つまり $\log\Lambda_{t,\tau} \ge \log\Lambda_{t,s}$ となる。したがって $s > \tau$ に対して

$$\Phi_{t,\tau,s} \equiv \frac{\log(\Lambda_{t,\tau}) - \log(\Lambda_{t,s})}{s-\tau} \ge 0, \quad f(t,\tau) = \lim_{s\downarrow\tau}\Phi_{t,\tau,s} \ge 0.$$

□

補題 4.4.2 の証明. 固定された満期 s に対して、次式で定義される $\mathbb{Q}$ 可測なマルチンゲール M を考える。

$$\begin{aligned}
M_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)\right] \\
&= \exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\Lambda_{t,s} \qquad (4.B.7) \\
&= M_0 e^{J(t)}.
\end{aligned}$$

ここで、(4.30) を用いて

$$J_t = -\log M_0 - \int_0^t r_u du - \int_t^s f(t,u)du. \tag{4.B.8}$$

Girsanov の定理の系であるマルチンゲール表現定理によって、M が $\mathbb{Q}$-マルチンゲールであるから、$\mathcal{L}(\hat{B})$ に属するある $\mathbb{R}^d$ 値過程 η_s に対して次のように表現することができる。

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s(u)d\hat{B}_u. \tag{4.B.9}$$

（添字に表わされているように、満期日 s における全過程 η_s に依存することに注意せよ。）M は厳密に正であるから、伊藤の補題を用いて、次のとおりに (4.B.9) を再表現することができる。

$$M_t = M_0 e^{K_t}. \tag{4.B.10}$$

ここで、$H(u,s) = \eta_s(u)/M_u$ に対して

$$K_t = \int_0^t H(u,s)d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t H(u,s)H(u,s)^\top du. \tag{4.B.11}$$

(4.B.7) と (4.B.10) から $J = K$ を得る。なぜならば、(4.B.9) より

$$dM_t = \eta_s(t)d\hat{B}_t.$$

また、(4.B.10) より

$$K_t = \log M_t - \log M_0, \quad K_0 = 0$$

であるから

$$dK_t = \frac{\eta_s(t)}{M_t}d\hat{B}_t - \frac{1}{2}\frac{\eta_s(t)\cdot\eta_s(t)}{M_t^2}dt.$$

したがって $\mathbb{R}^d$ 値ベクトル $H(u,s)$ を $H(u,s) = \eta_s(u)/M_u$ で定義すれば

$$\begin{aligned} K_t &= \int_0^t \frac{\eta_s(u)}{M_u}d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\eta_s(u)\cdot\eta_s(u)}{M_u^2}du \\ &= \int_0^t H(u,s)d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t H(u,s)H(u,s)^\top du. \end{aligned}$$

J を伊藤過程として表現し、そのずれ項と拡散項を計算する必要がある。伊藤過程の一意分解性を用いれば、J のずれ項と拡散項が K のそれにそれぞれ一致し、したがって、望ましい関係 (4.33) が得られるとしてよい。

(4.B.8) の項 $\int_t^s f(t,u)du$ は伊藤過程の積分（u に関する「無限和」）とみなすことができる。伊藤過程の有限和の拡散項は個々の拡散項の和であるから、少なくともある技術的な正則条件の下では、伊藤過程の無限和についても同じ線形性が適用できるものと期待してよい。この場合には、$f(t,u)$ の拡散項は $\sigma(t,u)$ であったから、J の拡散項は単に $\int_t^s \sigma(t,u)du$ となる（この事実は確率積分に対する Fubini の定理として知られている）。これと K の拡散項が一致することから

$$H(t,s) = \int_t^s \sigma(t,u)du \tag{4.B.12}$$

を得る。同様に、$\int_t^s f(t,u)du$ のずれ項を $f(t,u)$ のずれ項の積分（u に関する和）として表わし得るための十分な技術的正則条件を仮定すれば、(4.B.8) から、J と K のずれ項は以下の場合に等しくなる。(4.22)

$$-\frac{1}{2}H(t,s)H(t,s)^\top = -r_s - \int_t^s \mu(t,u)du. \tag{4.B.13}$$

(4.22) (4.32) から、$f(t,u)$ のずれ項は $\mu(t,u)$ となる。したがって、J_t のずれ項は $-r_t - \int_t^s \mu(t,u)du$ となる。

(4.B.12)(4.B.13) を所与とすれば、s に関する偏微分方程式を定義するに十分な条件が満足され、それぞれ以下のようになる。

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = \sigma(t,s)^\top \quad \text{(4.B.12) より} \tag{4.B.14}$$

$$H(t,s)\cdot\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = \mu(t,s). \quad \text{(4.B.13) より} \tag{4.B.15}$$

なぜならば、(4.B.12) の両辺を s に関して微分すれば

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = \sigma(t,s)^\top,$$

(4.B.13) の両辺を s に関して微分すれば

$$\begin{aligned}
-\mu(t,s) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s)\cdot H(t,s)) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s)H(t,s)^\top) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^\top - \frac{1}{2}H(t,s)\left(\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\right)^\top \\
&= -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^\top \\
&= -H(t,s)\cdot\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}
\end{aligned}$$

を得る。

最後に、(4.B.12)(4.B.14)(4.B.15) を組み合わせることによって

$$\begin{aligned}
\mu(t,s) &= \frac{\partial H(t,s)}{\partial s}H(t,s)^\top \\
&= \sigma(t,s)\left(\int_t^s \sigma(t,u)du\right)^\top \\
&= \sigma(t,s)\int_t^s \sigma(t,u)^\top du.
\end{aligned}$$

を得る。これは所望の基本的な結論 (4.33) である。 □

補題 4.4.3 の証明. 仮定より、(4.32) は

$$df(t,s) = \sigma^2(s-t)dt + \sigma dW_t$$

となるから、伊藤の補題より

$$f(t,s) = f(0,s) + \sigma^2 t(s-t/2) + \sigma W_t.$$

したがって、$r_t = f(t,t) = f(0,s) + \sigma^2 t^2/2 + \sigma W_t$。したがって

$$\exp\left(-\int_0^s r_u du\right) = \Lambda_{0,s}\exp\left[-\int_0^s\left(\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \sigma W_u\right)du\right].$$

同様に、満期 T のゼロクーポン債の時刻 t における価格 $\Lambda_{t,T}$ は

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{t,T} &= \exp\left(\int_t^T -f(t,s)ds\right) \\
&= \exp\left[\int_t^T -f(0,s)ds - \int_t^T \sigma^2 t\left(s-\frac{t}{2}\right)ds - \int_t^T \sigma W_t ds\right] \\
&= \exp\left(\int_0^T -f(0,s)ds - \int_0^t -f(0,s)ds - \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) - \sigma W_t(T-s)\right) \\
&= \frac{\Lambda_{0,T}}{\Lambda_{0,t}}\exp\left(-\sigma(T-t)W_t - \frac{\sigma^2 tT(T-t)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

r_t に関する上の結果を用いれば、(4.35) の最右辺の等式が成り立つことはほとんど自明である。 □

命題 4.4.2 の証明. コールの時刻 0 における価格 C_0 は

$$
C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)(\Lambda_{s,T}-K)^+\right]
$$

で与えられるから

$$
\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)\Lambda_{s,T}}{\Lambda_{0,T}}, \quad \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp\left(-\int_0^s r_u du\right)}{\Lambda_{0,s}}
$$

によって、確率測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ を定めれば[4.23]

$$
C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}(1_A) - K\mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}(1_A)
$$

と表わすことができる。ここで、事象 A は $A = \{\omega | \Lambda_{s,T} - K \geq 0\}$ を表わす。

$\mathbb{Q}$-標準 Brown 運動 W の測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ の下での分布を得るために、それぞれの測度の下での Laplace 変換（積率母関数）を計算すれば

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}(e^{\lambda W_s}) = \exp\left[\left(-\sigma sT + \frac{\sigma s^2}{2}\right)\lambda + \frac{s}{2}\lambda^2\right], \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}(e^{\lambda W_s}) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\lambda + \frac{s}{2}\lambda^2\right).
$$

これは、W が測度 $\mathbb{P}_1$ の下では平均 $-\sigma sT + \sigma s^2/2$、分散 s の、測度 $\mathbb{P}_2$ の下では平均 $-\sigma s^2/2$、分散 s の正規分布に従うことを示す。したがって X, Y をそれぞれ測度 $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ に対する標準正規確率変数として

$$
\begin{aligned}
C_0 = \Lambda_{0,T}\mathbb{P}_1&\left(X \leq \frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(\Lambda_{0,s}K/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}\right) \\
&- K\Lambda_{0,s}\mathbb{P}_2\left(Y \leq -\frac{\sigma\sqrt{s}(T-s)}{2} - \frac{\log(\Lambda_{0,s}K/\Lambda_{0,T})}{\sigma\sqrt{s}(T-s)}\right). \quad (4.B.16)
\end{aligned}
$$

よって目的の評価公式を得た。 □

[4.23] $\mathbb{P}_1$ $\mathbb{P}_2$ が確率測度の要件を満たすことをチェックするのは容易である。

参考文献リスト

参考文献リスト

[1] 赤壁弘康 (1994).「Path-Dependent Option の評価について」『神戸学院大学経済学論集』第26巻第3号 73-94.

[2] ______ (1995).「状態評価アプローチによる数理 Finance 理論の分析方法について」『神戸学院大学経済学論集』第27巻第3号 1-43.

[3] ______ (1998a).「連続時間設定における無裁定証券価格評価理論の基本的フレームワーク—状態価格、同値 martingale 測度と Girsanov の定理—」日本経営財務研究学会編『経営財務研究双書 18 コーポレート・ファイナンスの理論と実証』中央経済社 第6章 135-181.（本稿第2章）

[4] ______ (1998b).「期間構造モデルの理論的フレームワークに関する数理ファイナス論の観点からの再検討—CIR モデルと HJM モデルを中心として—」神戸学院大学経済学会 Working Paper Series No.15.（投稿中、本稿第4章）

[5] ______ (1999a).「martingale 価格理論アプローチによる Black-Scholes 証券価格モデルにもとづくオプションの評価理論:前編」『神戸学院大学経済学論集』第30巻3・4号 1-43.

[6] ______ (1999b).「martingale 価格理論アプローチによる Black-Scholes 証券価格モデルにもとづくオプションの評価理論:後編」『神戸学院大学経済学論集』第31巻1号 1-35.

[7] ______ (1999c).「数理 Finance 論の離散時間モデルにおける無限期間状態価格アプローチの設定と分析—有界適合過程、Lebesgue の優越収束定理および Blackwell の不動点定理による Markov 制御の応用—」日本経営財務研究学会編『経営財務研究双書 19 経営財務情報の経済分析』中央経済社 51-82.（本稿第1章）

[8] ______ (2000年刊行予定).「ロシア型幾何平均インデックスオプションの評価と複製戦略」日本経営財務研究学会編『経営財務研究双書 20』中央経済社.（平成12年3月20日受理、本稿第3章）

[9] ______・荒木長照 (1994).「Russian Option と最適停止問題」神戸学院大学経済学会 Working Paper Series(B) No.5.

[10] 飯野正幸 (1990).「Harrison-Pliska 論文に関する一考察」『神戸学院大学経済学論集』第22巻第1号 23-35.

[11] 池田昌幸 (1991).「経路依存型オプション契約の評価について」『ファイナンス研究』No.13. 1-19.

[12] 伊藤清 (1991).『岩波基礎数学選書 確率論』岩波書店.

[13] 岩井克人 (1987). 『不均衡動学の理論』岩波書店.

[14] 翁邦雄 (1985). 『期待と投機の経済分析』東洋経済新報社.

[15] 楠岡成雄 (1992).「裁定とマルチンゲール」『工学、経済学と確率解析 講演アブストラクト』(科研費総合 (A) シンポジウム、於 神戸大学瀧川記念学術交流会館、1992 年 12 月 7 日～ 12 月 10 日）89-93.

[16] 國田寛. (1976).『確率過程の推定』産業図書.

[17] 国友直人・高橋昭彦 (1992).「平均オプション価格の評価法」『ファイナンス研究』No.14. 1-19.

[18] 小平邦彦 (1991).『岩波基礎数学選書 解析入門』 岩波書店.

[19] 沢木勝茂 (1994).『ファイナンスの数理』朝倉書店.

[20] 柴川林也編 (1985). 『財務管理』中央経済社.

[21] 竹内 啓 (1994).『統計的方法』岩波講座 応用数学 [方法 11] 岩波書店.

[22] 田中謙輔 (1994).『数理情報科学シリーズ 5 凸解析と最適化理論』 牧野書店.

[23] 田畑吉雄 1993.『数理ファイナンス論』牧野書店.

[24] 辻正次 (1962). 『実函数論』槙書店.

[25] 二階堂副包 (1960). 『現代経済学の数学的方法』 岩波書店.

[26] 藤田宏・今野浩・田辺國士 (1994).『最適化法 (岩波講座応用数学 9)』 岩波書店.

[27] ______・黒田成俊・伊藤清三 (1991).『岩波基礎数学選書 関数解析』 岩波書店.

[28] 森村英典・木島正明 (1991).『ファイナンスのための確率過程』日科技連.

[29] 米沢康博 (1985). 「資本市場の理論と実際」（柴川編 [20, 第 3 章] 収録）.

[30] 若杉敬明 (1988). 『企業財務論』東京大学出版会.

[31] 諸井勝之助・後藤幸男（編）(1992).『財務・金融小事典』中央経済社.

[32] 日本数学会（編）(1985).『岩波 数学辞典』第 3 版 岩波書店.

[33] Akahori, J. (1995). "Some Formulae for a New Type of Path-Dependent Option," *Annals of Applied Probability*, **5**, 383-388.

[34] Aliprantis, C. and O. Burkinshaw (1985). *Positive Operators.* Academic Press.

[35] Arrow, K. J. (1953). "Le Rôle des valeurs boursières pour la repartition la meillure des risques," *Econometrie.* Colloq. Internat. Center National de la RechercheScientifique 40 (Paris 1952), pp.41-47;discussion, C.N.R.S. (Paris 1953), pp.47-48. English translation "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing," in *Review of Economic Studies*, **31**(1964), 91-96.

[36] ——— and G. Debreu (1954). "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, **22**, 265-290.

[37] ——— and F. H. Hahn (1971). *General Competitive Analysis*, Holden-Day, Inc.（福岡正夫・川又邦雄訳『一般均衡分析』岩波書店 1976 年）

[38] ——— and M. Intriligator eds. (1982). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. II, North-Holland.

[39] Biais, B., Björk, T., Cvitanić, J., El Karoui, N., Jouini, E., and J. C. Rochet eds. (1997). *Financial Mathematics*, Lecture Notes in Mathematics, 1656, Springer.

[40] Bensoussan, A. (1982). *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, North-Holland.

[41] Berge, C. (1963). *Topological Spaces*, Macmillan.

[42] Bertsekas, D. and S. Shreve (1978). *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*, Academic Press.

[43] Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, 637-59.

[44] Blackwell, D. (1965). "Discounted Dynamic Programming," *Annals of Mathematical Statistics*, 36, 226-35.

[45] Blanchard, O. and O. Watson (1984). "Bubble, Rational Expectations and Financial Markets," in Wachtel[133].

[46] Breeden, D. (1979). "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics*, **7**, 265-296.

[47] Brennan, M. and E. Schwartz (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds," *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133-55.

[48] Brezis, H. (1983). *Analyse Functionnelle*, Masson Editeur.（藤田宏監訳・小西芳雄訳『関数解析』 産業図書 1988 年）

[49] Brown, R. H., and S. M. Schaefer (1995). "Interest Rate Volatility and the Shape of the Term Structure," in Howison-Kelly-Wilmott[90, Chp.11].

[50] Björk, T. (1997). "Interest Rate Theory," in Biais-Björk-Cvitanić-El Karoui-Jouini-Rochet[39, Chp.2].

[51] Chamberlain, G. and M. Rothschild (1983). "Arbitrage, Factor Structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets," *Econometrica*, **51**, 1281-1304.

[52] Chung, K. L. (1967). *Markov Chain with Stationary Transition Probabilities*, 2nd. ed., Springer.

[53] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and S. A. Ross (1985a). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, **53**, 363-384.

[54] ______, ______ and ______(1985b). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-407.

[55] Dassion, A. (1995). "The Distribution of the Quantile of a Brownian Motion with Drift and the Pricing of related Path-Dependent Options," *Annals of Applied Probability*, **5**, 389-398.

[56] Davis, M. H. A., Duffie, D., Fleming, W. H. and S. E. Shreve eds. (1995). *Mathematical Finance*, Springer.

[57] Delbaen, F. (1992). "Representing Martingale Measures when Asset Prices Are Continuous and Bounded," *Mathematical Finance*, **2**, 107-30.

[58] ______. (1993). "Consols in the CIR Model," *Mathematical Finance*, **3**, 125-34.

[59] Dempster, M. A. H. and S. R. Pliska. (1997). *Mathematics of Derivative Securities*, Cambridge UP.

[60] Debreu, G. (1959). *Theory of Value*, Cowles Found. Monograph 17, Yale Univ. Press. （丸山徹訳『価値の理論 経済均衡の公理的分析』 東洋経済新報社 1977 年）

[61] ______. (1982). "Existence of Competitive Equilibrium," in Arrow-Intriligator[38, pp.697-743].

[62] Dothan, M. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-64.

[63] Duffie, D. (1988). *Security Markets Stochastic Models*, Academic Press.

[64] ______. (1991). "The Theory of Value in Security Markets," in Hildenbrand-Sonnenschein[88, Chp.31].

[65] ______. (1992). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 1st ed., Princeton.

[66] ______. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd. ed., Princeton. （山崎 昭・桑名陽一・大橋和彦・本多俊毅訳『資産価格の理論』 創文社）

[67] ______ and W. Zame. (1989). "The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, **57**, 1279-97.

[68] ______ and M. Harrison. (1993). "Arbitrage Pricing of Russian Options and Perpetual Lookback Options," *The Annals of Applied Probability*, **3**, 641-51.

[69] ______ and R. Kan (1995). "Multi-Factor Term Structure Models," in Howison-Kelly-Wilmott[90, pp.127-36].

[70] Dybvig, P. H. and S. A. Ross. (1989). "Arbitrage," in Eatwell-Milgate-Newman[71, pp.57-71].

[71] Eatwell, J., Milgate, M. and P. Newman ed. (1989). *The New Palgrave Finance*, Macmillan.

[72] El Karoui, N. and M.-C. Quenez. (1995). "Dynamic Programing and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market," *SIAM Journal of Control and Optimization*, **33**, 29-66.

[73] ——— and I. Karatzas. (1995). "The Optimal Stopping Problem for a General American Put-Option," in Davis-Duffie-Fleming-Shreve[56, pp.63-74].

[74] Eytan, T. H. and G. Harpaz. (1986). "The pricing of Futures and Options Contracts on the Value Line Index," *The Journal of Finance*, **41**, 843-55.

[75] Freedman, D. (1983). *Markov Chains*, Springer.

[76] Garman, M. B. and S. W. Kohlhagen. (1983). "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, **2**, 231-37.

[77] Geske, R. (1979). "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, **7**, 63-81

[78] Geman, H. and M. Yor. (1993). "Bessel Process, Asian Options, and Perpetuities," *Mathematical Finance*, **3**(4), 349-375.

[79] Goldman, B., Sosin, H. and M. Gatto. (1979). "Path Dependent Option: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, **34**, 1111-28.

[80] Hakansson, N. (1970). "Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions," *Econometrica*, **38**, 587-607.

[81] Harrison, J. M. and D. Kreps (1979). "Martingales and Arbitrage in Maltiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.

[82] ——— and S. Pliska. (1981). "Martingales and Stochastic Integrals in Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, **11**, 215-60.

[83] ——— and ———. (1983). "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets," *Stochastic Processes and Their Applications*, **15**, 313-6.

[84] Hart, O. (1975). "On the Existence of Equilibrium in a Securities Model," *Journal of Economic Theory*, **9**, 293-311.

[85] Heath, D., Jarrow, R. and A. Morton (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, **60**, 77-105.

[86] Heinricher, A. C. and R. H. Stockbridge. (1991). "Optimal Control of the Running Max," *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**(4), 936-53.

[87] Hicks, J. (1939). *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford University Press. (安井琢磨・熊谷尚夫訳『価値と資本』岩波書店)

[88] Hildenbrand, W. and H. Sonnenschein eds. (1991). *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Elsevier.

[89] Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contigent Claims," *Journal of Finance*, **41**, 1011-29.

[90] Howison, S. D., Kelly, F. P., and P. Wilmott eds. (1995). *Mathematical Models in Finance*, Chapman & Hall.

[91] Huberman, G. (1982). "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory," *Journal of Economic Theory*, **28**, 183-191.

[92] ______. (1989). "Arbitrage Pricing Theory," in Eatwell-Milgate-Newman[71, pp.72-80].

[93] Ikeda, N. and S. Watanabe. (1989). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2nd. ed., North-Holland.

[94] Ingersoll, J. E. Jr. (1987). *Theory of Financial Decision Making*, Rowman.

[95] Jacka, S. D. (1991). "Optimal Stopping and the American Put," *Mathematical Finance*, **1**, 1-14.

[96] Jamshidian, F. (1989). "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, **44**, 205-9.

[97] Kallianpur, G. and R. L. Karandikar. (1999). *Introduction to Option Pricing Theory*, Birkhäuser.

[98] Karatzas, I. and S. E. Shreve. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer.

[99] Karlin, S. and H. M. Taylor (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic.

[100] Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Empolyment, Interest and Money*, Macmillan. (塩野谷裕一訳『雇用、利子および貨幣の一般理論』東洋経済新報社)

[101] Kolmogorov, A. N. and S. V. Fomin. (1976). *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, in Russian. (山崎三郎・柴岡泰光訳『函数解析の基礎(上・下)』岩波書店 1979年)

[102] Kreps, D. M. (1988). *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press.

[103] ______. (1982). "Multiperiod Securities and the Efficient Allocation of Risk: A Comment on the Black-Scholes Option Pricing Model," in McCall[112, Chp.6].

[104] von Neumann, J. and O. Morgenstern. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press. (銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳『ゲームの理論と経済行動』東京図書 1972-73年)

[105] Lamberton, D. and B. Lapeyre. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, translated by Rabeau, N. and F. Mantion, Chapman & Hall.

[106] ______ and ______ (1993). "Hedging Index Options with Assets," *Mathematical Journal*, **3**, 25-41.

[107] Levhari, D. and T. Srinivasan (1969). "Optimal Saving under Uncertainty," *Review of Economic Studies*, **59**, 153-165.

[108] Liptser, R. S. and A. N. Shiryayev (1974). *Statistics of Random Processes,* I, II, Springer.

[109] Lucas, R. E., Jr. (1978). "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, **46**, 1429-45.

[110] Mas-Colell, A. and W. R. Zame (1991). "Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Space," in Hildenbrand, W. and H. Sonnenschein ed., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. IV, Elsevier.

[111] Margrabe, W. (1978). "The value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, **33**, 177-98

[112] McCall, J. ed. (1982). *The Economics of Information and Uncertainty*, University of Chicago Press.

[113] Merton, R. C. (1973a). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica*, **41**, 867-87.

[114] ______ (1973b). "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-83.

[115] ______ (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **29**, 449-70.

[116] Musiela, M. and M. Rutkowski. (1997). *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.

[117] Myneni, R. (1992). "The Pricing of the American Option," *The Annals of Applied Probability*, **2**, 1-23.

[118] Nielsen, L. T. (1990a). "Equilibrium in CAPM without a Riskless Asset," *Review of Economic Studies*, **57**, 315-324.

[119] ______ (1990b). "Existence of Equilibrium in CAPM," *Journal of Economic Theory, 52*, 223-231.

[120] Øksendal, B. (1995). *Stochastic Differential Equations*, 4th ed., Springer.

[121] Pitman, J. and M. Yor (1982). "A Decomposition of Bessel Bridges," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie*, **59**, 425-57.

[122] Pliska, S. R. (1986). "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios," *Mathematics of Operations Research*, **11**, 371-82.

[123] Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press.

[124] Rogers, L. C. G. (1995). "Which Model for Term-Structure of Interest Rates Should One Use?" in Davis-Duffie-Fleming-Shreve[56, pp.93-115].

[125] ——— and D. Williams. (1987). *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, Vol.2, *Itô Calculus*, John Wiley.

[126] Roll, R. (1971). "Inverstmanet Diversification and Bond Maturity," *Journal of Finance*, **26**, 51-66.

[127] Ross, S. (1978). "A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams," *Journal of Bussiness*, **51**, 453-475.

[128] Samuelson, P. (1969). "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming," *Review of Economics and Statistics*, **51**, 239-46.

[129] Shepp, L. and A. N. Shiryaev. (1993). "The Russian Option: Reduced Regret," *The Annals of Applied Probability*, **3**, 631-40.

[130] ——— and ———. (1994). "A New Look at Pricing of the 'Russian Option'," *Theory of Probability and Its Applications*, **39**, 103-19.

[131] Shiryayev, A. N. (1995). *Probability*, 2nd ed., Springer.

[132] Vasicek, O. (1977). "An Equilibruim Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-88.

[133] Wachtel, P. ed. (1984). *Crises in Economics and Financial Structures*, D. C. Heath.

[134] Yamada, T. and S. Watanabe (1971). "On the Uniqueness of Solutions of Stochastic Differential Equation," *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **11**, 155-67.

[135] Yang, H. G. (1985). "A Note on Currency Option Pricing Models," *Journal of Bussiness Finance and Accounting*, **12**, 429-38

[136] Yor, M., Chesney, M., Geman, H., and M. Jeanblanc-Picqué (1997). "Some Combinations of Asian, Parisian and Barrier Options," in Dempster-Pliska[59, pp.61-87].

[137] Yoshida, K. (1964). *Functional Analysis*. Springer.

[138] Zhang, P. G. (1998). *Exotic Options*, 2nd ed., World Scientific.