



Title	障害物のある平面上での最短経路問題に関する研究
Author(s)	安留, 誠吾
Citation	大阪大学, 1993, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3065943
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

障害物のある平面上での
最短経路問題に関する研究

安留誠吾

大阪大学大学院基礎工学研究科

1993

障害物のある平面上での
最短経路問題に関する研究

安留誠吾

大阪大学大学院基礎工学研究科

1993

内容梗概

本論文は筆者が大阪大学大学院基礎工学研究科(物理系専攻)の学生として、都倉研究室において行なった研究のうち、障害物のある平面上での最短経路問題に関する研究をまとめたものである。

本論文では、計算幾何学において、基本的な問題である最短経路問題について考察している。とくに、障害物のある平面上での、水平もしくは垂直な線分からなる経路(マンハッタン経路)について議論している。この問題は、ロボットの移動、VLSI の設計、地理情報システム(GIS)などへ応用できる。

本論文の第1章では、最短経路問題の研究の現状と本研究の新しい諸結果について概説している。

第2章では、計算幾何学、最短経路問題に関する諸定義について述べている。

第3章では、障害物内を代償を払うことにより通過できるものとしたときに屈折数(経路が曲がる数)と L_1 距離(マンハッタン経路を仮定する距離)を複合した評価尺度を最小とする経路を求めるアルゴリズムについて述べる。そして、この評価尺度の有用性について考察する。

第4章では、高々 k 本の水平直線上に経路中の全ての水平線分が存在するような、長方形の障害物と交差しないマンハッタン最短経路を求める新しい問題を定義し、この問題について考察している。

第5章の結論では、本研究で得られた主な結果をまとめ、今後に残された問題について述べている。

関連発表論文

- (1) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 “重み付き領域を考慮した最短経路問題”, 情処学アルゴリズム研報, **92-AL-26**, pp. 9-16 (1992-03).
- (2) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 “障害物のある平面上で水平線分に制限をおいた水平垂直線分からなる経路について”, 信学技報, **COMP92-40**, pp. 7-16 (1992-10).
- (3) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 “障害物の重みを考慮した最短経路問題”, 電子情報通信学会論文誌 **D-I**, (1993 年掲載予定).
- (4) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 “障害物のある平面上で水平線分に制限をおいた水平垂直線分からなる最短経路について”, (投稿中).
- (5) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 “ユークリッド距離と回転角度を考慮した最短経路について”, 情処学アルゴリズム研報, (1993-03 発表予定).

障害物のある平面上での 最短経路問題に関する研究

目次

1 緒論	1
2 諸定義	6
3 障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題	9
3.1 諸定義	9
3.2 $MSP(s, t)$	13
3.3 最短経路グラフ	18
3.4 結果	22
4 k -マンハッタン最短経路問題	24
4.1 諸定義	24
4.2 1-マンハッタン最短経路問題	26
4.3 2-マンハッタン最短経路問題	31
4.3.1 $Pst(s', t', L_1, L_2)$ を求める	32
4.3.2 $Ps(s, s', L_1, L_2)$ を求める	39
5 結論	46
謝辞	49

- 1) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 2) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 3) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 4) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 5) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 6) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 7) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 8) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 9) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。
- 10) 大塚 幸司「日本経済の発展と環境問題」『環境と経済』1997年10月号、10-15頁。

図目次

3.1	内部投影点	12
3.2	垂直線分のみの場合	14
3.3	水平線分のみの場合	15
3.4	最短経路でない場合	15
4.1	$2-MP(s, t)$	25
4.2	分割されたマンハッタン経路	32
4.3	$T(l), S(l)$	34
4.4	迂回	40
4.5	走査の状況	43

表 目 次

1.1 評価尺度のパラメタの設定	4
1.2 既存の結果との比較	5
3.1 評価尺度のパラメタの設定	11
3.2 既存の結果との比較	23
5.1 既存の結果との比較	47

第 1 章

緒論

平面上の 2 点が与えられたとき, これらの 2 点を結ぶ最短経路を求める問題は, 計算幾何学における基本的問題の一つであり, これまでに多くの研究が行われ, ロボットの移動, *VLSI* の設計, 地理情報システム (*GIS*) などへ応用ができる. この問題は, 求める経路の形状や距離の定義, あるいは障害物の形状などの違いにより分類される.

Shamos⁽¹⁾† は n 頂点の 1 つの単純多角形内において, 与えられた 2 点間のユークリッド距離での最短経路を見つける問題を考えた. また, Chazelle⁽²⁾ と Lee, Preparata⁽³⁾ もこの問題を研究し, $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを提案した. のちにこのアルゴリズムは Chazelle⁽⁴⁾ の線形時間で三角形分割を求めるアルゴリズムにより $O(n)$ 時間のアルゴリズムとなった.

一方で, Lee⁽⁵⁾ は, 1 つの多角形内の最短経路を求めるのではなく, 有限個の多角形を障害物にみたて, これらの障害物を避ける最短経路を求める問題を研究した. そして, Sharir, Schorr⁽⁶⁾ はこの問題を $O(n^2 \log n)$ 時間で解くアルゴリ

†1978 年に発表されたこの論文で, この研究分野が “計算幾何学” と命名された.

ズムを提案した. ここで, n は障害物の頂点の総数を表す. Reif, Storer⁽⁷⁾ は障害物を k 個の重ならない多角形としたとき $O(nk + n \log n)$ 時間に改良した.

文献(3)では n 本の水平垂直な線分を障害物としたとき平面走査法と呼ばれる手法を導入し $O(n \log n)$ 時間で最短経路を求めるアルゴリズムも提案した.

ユークリッド距離での最短経路を求めるのではなく経路の形状として水平垂直線分のみからなる経路(マンハッタン経路)を考えた研究がある. Larson, Li⁽⁸⁾ は多角形と m 個の頂点对が与えられたとき頂点对を端点とする m 本のマンハッタン最短経路を $O(m(m^2 + n^2))$ 時間で求めるアルゴリズムを提案した. De Rezende, Lee, Wu⁽⁹⁾ は重ならない長方形の障害物と任意の1点(始点)が与えられた状況を考え, $O(n \log n)$ 時間 $O(n)$ 領域で前処理をしておくことにより, 任意の1点(終点)が与えられた場合にマンハッタン最短経路を $O(\log n)$ 時間で求めるアルゴリズムを提案した. Clarkson, Kapoor, Vaidya⁽¹⁰⁾ は障害物を重ならない多角形としたときにマンハッタン最短経路を $O(n \log^2 n)$ 時間で求めるアルゴリズムを提案した. のちに Mitchell^(11, 12) は $O(n \log n)$ 時間で求める最適なアルゴリズムを提案した.

Lenhart et al.⁽¹³⁾, Suri^(14, 15), Ke⁽¹⁶⁾, Djidjev, Lingas, Sack⁽¹⁷⁾ は単純多角形内での屈折数, つまり経路が曲がる数を最小とする経路を求める問題を研究した. そして, Mitchell, Rote, Wöginger⁽¹⁸⁾ は, 障害物が存在する平面上において, 障害物を重ならない多角形としたときに, 屈折数を最小とする経路を $O(n^2 \alpha(n) \log^2 n)$ 時間で求めるアルゴリズムを提案した. ここで, $\alpha(n)$ は逆アッカーマン関数である.

De Berg, Kreveld, Nilsson, Overmars⁽²¹⁾ は, 境界が水平垂直線分のみからな

る障害物が存在する平面上で任意の1点(始点)が前もって与えられたときに、 $O(n^2)$ 時間と $O(n \log n)$ 領域を用いて前処理をすれば、他の1点(終点)を与えられたときに $O(\log n)$ 時間で屈折数と L_1 距離(マンハッタン経路を仮定する距離)の両方を考慮した評価尺度による2点間の最短経路を求めるアルゴリズムを提案している。

以上の研究は、障害物と2点間の経路が交差できない(つまり、障害物の内部を通れない)環境において考えられた。しかし、一般に障害物は、ある代償を払えば通過できることもあり、その代償は障害物によって異なるものである。例えば、交通網を考える。A地点からB地点まで行きたいときC地点を通る経路がユークリッド距離における最短である。しかし、Cはいつも交通渋滞である。このとき、Cの交通渋滞の混雑度を障害物の重みと考えると渋滞を考慮した最短経路が求められる。

そこで、障害物を通過する際に払う代償を考慮した最短経路についてもこれまでに研究されている。Lee, Chen, Yang⁽²⁰⁾は、境界が水平垂直線分のみからなる代償を考慮した障害物(重み付き障害物)と2点を与えられたときに $O(n^2)$ 時間で2点間のマンハッタン最短経路を求めるアルゴリズムを提案している。また、障害物と1点の前もって与えられたときに、 $O(n^2)$ 時間と $O(n^2)$ 領域を用いて前処理をすれば、他の1点を与えられたときに $O(n \log^2 n)$ 時間と $O(n \log n)$ 領域で2点間のマンハッタン最短経路を求めるアルゴリズムも提案している。

第2章の定義に続き、第3章は、関連発表論文(1)(3)として公表した最短経路問題に関する研究をまとめたものである。ここでは、境界が水平もしくは垂直な線分のみからなる重み付き障害物のある平面上で、 L_1 距離と屈折数の両方を

考慮した評価尺度 (複合評価尺度とよぶ) において最短となるマンハッタン経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した. この章で示すアルゴリズムは, 文献 (21) と同様に, 重み付きグラフを構成し, そのグラフにおいて, 最短経路を求めるアルゴリズムを実行することによって平面上での最短経路を求める. 構成する重み付きグラフが文献 (21) と大きく異なるためにオーダ的には悪くなってる. しかし, 複合評価尺度は表 1.1 のように評価尺度のパラメタおよび障害物の重みを設定することにより従来の屈折数最小の経路, (重み付き) L_1 距離最小の経路に一致する. すなわち, 複合評価尺度は屈折数, (重み付き) L_1 距離などの従来の評価尺度を一般化したものといえる. 表 1.2 からわかるように, この章で提案する手法は, 従来の評価尺度を扱った文献のなかでオーダ的に最悪である重み付き L_1 距離を扱った文献 (20) と同じオーダで実行できる.

表 1.1 評価尺度のパラメタの設定

C	障害物の重み	対応する尺度
十分大きい値	∞	屈折数
0	∞	L_1 距離
0	—	重み付き L_1 距離
—	∞	屈折数と L_1 距離

第 4 章は, 関連発表論文 (2)(4) として公表した最短経路問題に関する研究をまとめたものである. ここでは, L_1 距離において, 使える水平垂直線分の数制限するのではなく, 使える水平垂直線分の位置を制限した新しい問題を定義し, この問題について考察している. 結果として, 有限個の長方形からなる障

害物のある平面上で, 水平線分が高々2本の水平直線上にしか存在しないマンハッタン最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n)$ 領域で求める手法を提案した.

第5章では, 本研究で得られた主な結果を表5.1にまとめ, 今後に残された問題について述べている.

表 1.2 既存の結果との比較

尺度	障害物	結果
屈折数	多角形	$O(n^2 \alpha(n) \log^2 n)$ 時間 ⁽¹⁸⁾ $O(n^2)$ 領域
L_1 距離	多角形	$O(n \log^2 n)$ 時間 ⁽¹²⁾
重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ⁽²⁰⁾ $O(n^2)$ 領域
屈折数と L_1 距離	水平垂直線分	$O(n^2)$ 時間 ⁽²¹⁾ $O(n \log n)$ 領域
屈折数と 重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ^(第3章) $O(n^2)$ 領域

第 2 章

諸定義

まず, 本論文で用いる主用語の定義をしておく.

定義 1 (平面) 2次元のユークリッド空間, すなわち, 実数 x, y の 2 個組からなり, 距離が $(x^2 + y^2)^{1/2}$ で与えられる空間を平面という. $\square$

定義 2 (点) 2 個組 (x, y) で平面のある点を表す. $\square$

定義 3 (直線) 平面上の任意の異なる点 p_1, p_2 に対して線形結合

$$\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2 \quad (\alpha \in \text{実数})$$

を直線とよぶ. $\square$

定義 4 (線分) 平面上の任意の異なる点 p_1, p_2 に対して式 $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$ に $0 \leq \alpha \leq 1$ という条件を付加すると p_1 と p_2 の凸結合が得られる. すなわち,

$$\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2 \quad (\alpha \in \text{実数}, 0 \leq \alpha \leq 1)$$

この凸結合は, 2 点 p_1, p_2 を結ぶ線分を表す. また, この線分を $\overline{p_1 p_2}$ で表す. $\square$

定義 5 (多角形) 平面上で, 多角形は, 線分の有限集合で次の条件を満たすものとして定義される.

1. 集合内の線分のどの端点もちょうど2つの線分に共有される.
2. どの真部分集合も条件1を満たさない.

このような線分は多角形の辺とよび, 端点を頂点とよぶ. □

定義 6 (経路) 有限個の点の系列 $p_1, p_2, \dots, p_u$ に関して $p_i, p_{i+1} (i = 1, \dots, u-1)$ の間を線分で連結したものを経路といい, $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ で表す. そして, 点 p_1, p_u をそれぞれ経路 P の始点, 終点という.

定義 7 (交点) 線分と線分が端点以外で, ちょうど1つの共有点を持つとき交差するといい, その共有点を交点という. □

定義 8 (マンハッタン経路) 経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ が次の条件を満たすときその経路を p_1-p_u マンハッタン経路という.

- 線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ の長さは正である ($i = 1, \dots, u-1$).
- $\overline{p_i p_{i+1}}$ は水平もしくは垂直である ($i = 1, \dots, u-1$).
- $\overline{p_i p_{i+1}}$ が水平 (垂直) なら $\overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ は垂直 (水平) である ($i = 1, \dots, u-2$).
- 相異なる線分は交点を持たない. □

定義 9 (交差) 障害物とマンハッタン経路は, 障害物の境界のある線分とマンハッタン経路中のある線分が交点を持つとき障害物とマンハッタン経路が交差しているという. □

定義 10 (屈折数) マンハッタン経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ は $p_i (i = 2, \dots, u-1)$ で向きを変える. この点を屈折点といい, 屈折点の数をそのマンハッタン経路の屈折数という. つまり, マンハッタン経路 P の屈折数は $u-2$ である. $\square$

定義 11 (単純直線経路) 屈折数が 1 のマンハッタン経路と線分を単純直線経路という. $\square$

定義 12 (マンハッタン経路の長さ) マンハッタン経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ の長さを経路中の線分の長さの総和とする. すなわち, $p_i = (x_i, y_i)$ とするとき,

$$\text{経路 } P \text{ の長さ} = \sum_{i=1}^{u-1} \{|x_i - x_{i+1}| + |y_i - y_{i+1}|\}$$

である. $\square$

問題によって扱う障害物が異なるため, 障害物の定義は, 各章で行なう.

第 3 章

障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題

3.1 諸定義

本章で扱う重み付き障害物 (以下この章では単に, 障害物とよぶ) を, 次のように仮定する.

定義 13 障害物を次のように仮定する.

- 障害物は境界が水平線分もしくは垂直線分からなる (単純) 多角形である.
- 各障害物において, 障害物内に他の領域は存在しない.
- 異なる障害物は頂点以外を共有することはない.
- 各障害物は正の重みを持つ.

□

障害物として単純多角形を考えており凹部をもつ図形を許している。1つの障害物は4以上の頂点を指定してその位置形状を表現できる。それらの頂点の集合を V , $n = |V|$ とする。

定義 14 マンハッタン経路 P の重み付き L_1 距離を次のように定義する。

$$\text{重み付き } L_1 \text{ 距離} = \int_P (1 + f(p)) dp$$

ただし,

$$f(p) = \begin{cases} \text{位置 } p \text{ を含む障害物の重み} & (\text{位置 } p \text{ が障害物内のとき}) \\ 0 & (\text{位置 } p \text{ が障害物外あるいは障害物の境界上のとき}) \end{cases}$$

□

$f(p)$ はそれぞれの障害物内では定義 13 のように一定値と仮定している。すなわち、障害物外は通常のユークリッド距離で、障害物内ではその障害物のもつ重みをその通過距離にかけたものとなる。

本章では、次の定義のように屈折数と重み付き L_1 距離を複合した評価尺度 (以降、複合評価尺度とよぶ) の値を最小とするマンハッタン経路を求める。

定義 15 マンハッタン経路 P の複合評価尺度の値を次のように定義する。

$$P \text{ の複合評価尺度の値} = C \times (P \text{ の屈折数}) + (P \text{ の重み付き } L_1 \text{ 距離})$$

ただし、 C は負でない実数の定数とする。

□

ここで、注意しておきたいことは、表 3.1 のように評価尺度のパラメタおよび障害物の重みを設定することにより複合評価尺度の値を最小とする経路は屈折数最小の経路、(重み付き) L_1 距離最小の経路に一致する。すなわち複合評価尺度

は屈折数, (重み付き) L_1 距離などの従来の評価尺度を一般化したものといえる.

表 3.1 評価尺度のパラメタの設定

C	障害物の重み	対応する尺度
十分大きい値	∞	屈折数
0	∞	L_1 距離
0	—	重み付き L_1 距離
—	∞	屈折数と L_1 距離

本章で考える障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題を次のように定義する.

定義 16 障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題とは障害物内を通過できる環境において平面上の重み付き障害物と任意の2点 s, t が与えられたとき s, t をそれぞれ始点, 終点とする 複合評価尺度の値を最小とする s - t マンハッタン経路 ($MSP(s, t)$ で表す) を求める問題である. $\square$

定義 17 障害物のある平面上の任意の点を q とする. 点 q を通る水平, 垂直な直線を描いたとき, 障害物の境界と交点ができる. このすべての交点を点 q の投影点とよぶ. 障害物の頂点の中で, 外角が 90° である頂点を凹頂点とよぶ. 障害物 o が凹頂点 q を含む場合を考える. 点 q を端点とする障害物 o の辺は2つあるが, これらを $\overline{qq_1}, \overline{qq_2}$ とする. 点 q_1 を端点とし線分 $\overline{qq_1}$ を含む半直線と, 点 q_2 を端点とし線分 $\overline{qq_2}$ を含む半直線を考える. それぞれの半直線において, 点 q から

最も近い o の境界との交点を点 q の内部投影点とよぶ. つまり, 内部投影点とは, 点 q を含む線分に沿って障害物 o を直線で通過しようとするとき, 障害物の外にでるときに必ず通過する点であるということが出来る. 図 3.1 においては点 q_d, q_r が点 q の内部投影点である. そして

$\bar{V} = V \cup (\text{すべての凹頂点の内部投影点の集合})$

$\cup \{ \text{始点, 終点} \} \cup (\text{始点, 終点の投影点の集合})$

とする. □

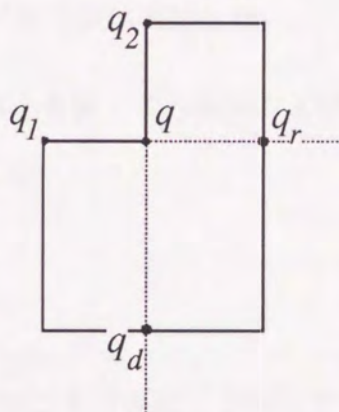


図 3.1 内部投影点

Fig.3.1 Inner projected points

$\bar{V}$ の要素は 3.2 節において最短経路グラフの頂点として使われる. 凹頂点の内部投影点の集合の要素数, 始点終点の投影点の集合の要素数はどちらも $O(n)$ であるので $\bar{V}$ の要素数は $O(n)$ である.

3.2 $MSP(s, t)$

$MSP(s, t)$ を求めるアルゴリズムを述べるまえに重み付き障害物のある平面でのマンハッタン経路の特徴を述べる.

補題 1 $\bar{V}$ 中の任意の点を $r, MSP(s, t)$ を $P = p_1 (= s), p_2, \dots, p_u (= t)$ とし, P 上の $\bar{V}$ の要素を含まない線分を $\overline{p_i p_{i+1}}$ とする. このとき, 線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を長方形の1辺とし点 r を線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ の対辺上の点とする長方形が構成できるならば, この長方形の領域 (境界を含む) を T とする. 領域 T が次の条件 (条件1) を満たすとき線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を点 r まで平行移動し, それに伴い, 線分 $\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ を拡張, 縮退しても 複合評価尺度の値は増加しない.

(条件1) T の r を含む境界上を除く T の境界および T の内部には $\bar{V}$ の要素は存在せず, $r \neq s, t$ である.

(証明)

一般性を失うことなしに $\overline{p_i p_{i+1}}$ を垂直線分と仮定する. 領域 T の内部に $\bar{V}$ の要素が存在しないことから, T 内に障害物の境界の垂直線分と水平線分が混在することはない. したがって, 次の場合を考えればよい.

1. 垂直線分のみ存在する場合 (図 3.2)

点 $r \in \bar{V}$ は s, t ではないことから障害物の境界上の点である. 領域 T 内は障害物の垂直線分のみであるから r を含む T の境界は重みが0である. また, 線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ は障害物外である. なぜなら $\overline{p_i p_{i+1}}$ が障害物内に存在するとき $\overline{p_i p_{i+1}}$ を r まで平行移動すると複合評価尺度の値が小さくなり, こ

れは経路 P が $MSP(s, t)$ であることに矛盾するからである。また、平行移動しても屈折数は増加しない。したがって、線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を点 r まで平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない。

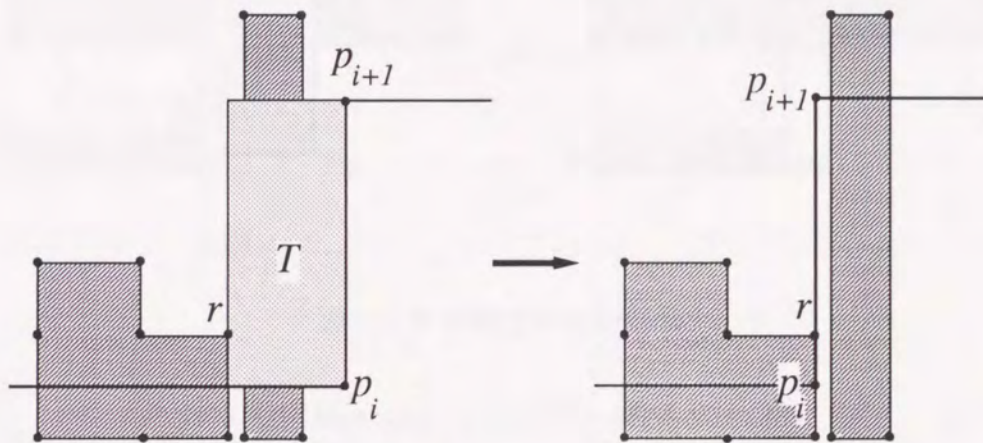


図 3.2 垂直線分の場合

Fig.3.2 Case of vertical line segments only

2. 水平線分のみ存在する場合 (図 3.3)

線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ の両端点は、両方とも障害物内にないか、両方とも同じ重みの障害物に含まれるかのいずれかである。なぜなら、図 3.4 のように $\overline{p_i p_{i+1}}$ の両端点が異なる重みの領域に存在すれば、重みの大きい領域を通過する線分 $\overline{p_{i-1} p_i}$ が短くなるように $\overline{p_i p_{i+1}}$ を平行移動すると複合評価尺度の値を小さくすることができ、経路 P が $MSP(s, t)$ であることに矛盾するからである。また、平行移動しても屈折数は増加しない。よって線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$

を点 r まで平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない.

□

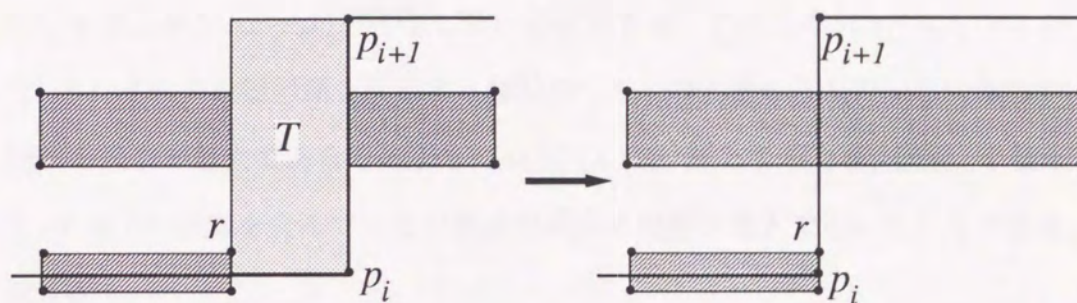


図 3.3 水平線分だけの場合

Fig.3.3 Case of horizontal line segments only

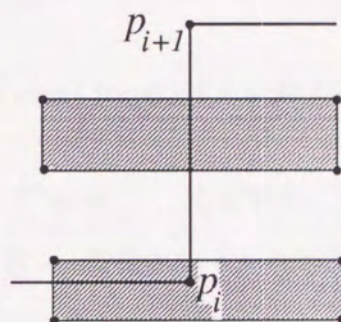


図 3.4 最短経路でない場合

Fig.3.4 Case of non shortest path

補題 2 次の条件を満たす $MSP(s, t)P = p_1, p_2, \dots, p_u$ が存在する.

- 各線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($1 \leq i \leq u-1$) は $\bar{V}$ の要素を少なくとも1つ含む.

(証明)

条件を満たす $MSP(s, t)$ が存在しないと仮定する. すべての $MSP(s, t)$ のなかで, それぞれの最短経路を構成する線分のうち $\bar{V}$ の要素を含んでいない線分が現れる順番が最大であるものをもつ $MSP(s, t)$ を P' とすると, 補題1を使って, P' が $\bar{V}$ の要素を含んでいない線分が現れる順番が最大でないという矛盾を導き出す.

任意の $MSP(s, t) P = p_1, p_2, \dots, p_u$ に対し,

$$first(P) = \min\{i | \overline{p_i p_{i+1}} \text{ は } \bar{V} \text{ の要素を含まない} \}$$

とする. つまり, $first(P)$ は P を構成する線分のうち, $\bar{V}$ の要素を含まない線分が最初に現れるのが何番目かを示す. そして,

$$first(P') = \max\{first(P) | P \text{ は } MSP(s, t)\} \quad (1)$$

となる任意の $MSP(s, t)$ を $P' = p'_1, \dots, p'_u$ とする. 但し, $\bar{V}$ の要素を含んでいない最初の線分を $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ とする. 一般性を失うことなしに $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を垂直線分と仮定する. $MSP(s, t) P'$ から次の操作によって得られる s - t マンハッタン経路を P'' とする.

$\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を $\overline{p'_{i-1} p'_i}$ の方向へ平行移動し, $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ が $\bar{V}$ の要素を含んだ時点で平行移動を終了する. $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ の平行移動に応じて, 線分 $\overline{p'_{i-1} p'_i}, \overline{p'_{i+1} p'_{i+2}}$ を縮退, 拡張させる. このとき, 平行移動後の $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を $\overline{p''_i p''_{i+1}}$, $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ の軌跡(長方形領域である)を T とし, $\overline{p''_i p''_{i+1}}$ が含んでいる $\bar{V}$ の要素を点 r とする.

1. $r \neq s, t$ の場合

補題 1 の条件 1 を満たしているので, 線分 $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない. したがって, P'' は $MSP(s, t)$ である. このとき, $\overline{p''_i p''_{i+1}}$ は $\bar{V}$ の要素を含むから $first(P'') > first(P')$ であり, 条件 (1) に矛盾する.

2. $r = s$ の場合

- 領域 T 内に障害物の垂直線分のみある場合

線分 $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を点 r まで平行移動することにより屈折数が 1 減少する. $C = 0$ のときは複合評価尺度の値は増加しない. $C \neq 0$ のときは複合評価尺度の値が小さくなる. これは経路 P' が $MSP(s, t)$ であることに矛盾する.

- 領域 T 内に障害物の水平線分のみある場合

障害物の垂直線分のみある場合と同様である.

3. $r = t$ の場合

線分 $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を点 r まで平行移動することにより線分 $\overline{p''_{i-1} p''_i}$ は $\overline{p'_{i-1} p'_i}$ よりも短くなる. しかし, 線分 $\overline{p''_i p''_{i+1}}$ が終点 t を含むことより線分 $\overline{p''_i p''_{i+1}}$ は不要となる. これは経路 P' が $MSP(s, t)$ であることに矛盾する.

よって, $first(P'') > first(P')$ であり, 条件 (1) に矛盾する.

したがって, 補題 2 の条件を満たす $MSP(s, t)$ が存在する. □

補題 3 $MSP(s, t)$ で, $\bar{V}$ の要素間の単純直線経路を連結して得られるものが存在する.

(証明)

補題 2 より, 各 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($1 \leq i \leq u-1$) が $\bar{V}$ の要素の少なくとも 1 つを含むような $MSP(s, t)P = p_1, p_2, \dots, p_u$ が存在する. この経路 P は P に現れる $\bar{V}$ の要素で分割すれば, P は $\bar{V}$ の要素間の線分と屈折数 1 のマンハッタン経路の連結したものとみなせる. 線分と屈折数 1 のマンハッタン経路は単純直線経路であるから, 任意の 2 点 s, t に対し, $\bar{V}$ の要素間の単純直線経路を連結して得られるような $MSP(s, t)$ が存在する. $\square$

文献 (21) では, 障害物である線分の端点および始点, 終点の間の単純直線経路を連結して得られるマンハッタン経路のみを考えている. 障害物を通過できるとした際には, 補題 3 より $\bar{V}$ の要素間の単純直線経路を連結して得られるマンハッタン経路のみを考えればよいことがわかる.

3.3 最短経路グラフ

次のようなグラフ G^* を考える.

定義 18 重み付きグラフ $G^* = (V', E)$ を次のように定義する.

- 頂点集合 $V' = V_h \cup V_v$

ただし,

$$V_h = \{r^h | r \in \bar{V}\}$$

$$V_v = \{r^v | r \in \bar{V}\}$$

とする. つまり, 仮想的に 1 つの頂点を h, v という上つき記号のついた 2 つの頂点に置き換える.

- 辺集合 $E = E_{hh} \cup E_{vv} \cup E_{hv} \cup E_{vh} \cup E'$

ただし,

$$E_{hh} = \{(r^h, w^h) \mid \text{線分 } \overline{p_r p_w} \text{ が水平線分}, r, w \in \bar{V}, r \neq w\}$$

重み = $\overline{p_r p_w}$ の重み付き L_1 距離

$$E_{vv} = \{(r^v, w^v) \mid \text{線分 } \overline{p_r p_w} \text{ が垂直線分}, r, w \in \bar{V}, r \neq w\}$$

重み = $\overline{p_r p_w}$ の重み付き L_1 距離

$$E_{hv} = \{(r^h, w^v) \mid \text{線分 } \overline{p_r p_w} \text{ が水平, 垂直線分でない}, r, w \in \bar{V}, r \neq w\}$$

重み = 水平線分 $\overline{p_r p_x}$ の重み付き L_1 距離

+ 垂直線分 $\overline{p_x p_w}$ の重み付き L_1 距離 + C

$$E_{vh} = \{(r^v, w^h) \mid \text{線分 } \overline{p_r p_w} \text{ が水平, 垂直線分でない}, r, w \in \bar{V}, r \neq w\}$$

重み = 垂直線分 $\overline{p_r p_x}$ の重み付き L_1 距離

+ 水平線分 $\overline{p_x p_w}$ の重み付き L_1 距離 + C

$$E' = \{(r^h, r^v) \mid r \in \bar{V}\}$$

重み = C

つまり, V_v の頂点には垂直線分のみが入って, V_h の頂点には水平線分のみが入るようにする. そして, 水平線分から垂直線分 (水平線分から垂直線分) へ移動するときにはグラフ G^* において必ず辺 E' をたどり重み C が課せられる. $\square$

文献 (21) では, 経路が障害物を通過しないことより 2 点 r, v 間の単純直線経路は形状が水平線分-垂直線分であっても垂直線分-水平線分であってもマンハッタン経路の長さは同じであった. しかし, 本章では, マンハッタン経路が障害物

を通過できる場合を考えるので水平線分-垂直線分, 垂直線分-水平線分となる単純直線経路を別々に考える必要がある.

補題 4 グラフ G^* の各辺に対応する単純直線経路の重みが $O(n^2)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で計算できる.

(証明)

2 点 r, v 間の単純直線経路は水平線分-垂直線分, 垂直線分-水平線分, 垂直線分, 水平線分の 4 通りである. よって r, v 間の単純直線経路の重み付き L_1 距離を求めるには, r, v 間の単純直線経路を構成する水平線分, 垂直線分それぞれの重み付き L_1 距離が求まればよい. ここでは, 水平線分についてのみ説明する. まず, 水平方向に関して $\bar{V}$ の要素を整列する. 点 $i \in \bar{V}$ と $\bar{V}$ のすべての要素間の重み付き L_1 距離を求める際には, 点 i から整列した順に累積和を計算することによって順番に求める. 以下の [アルゴリズム 1] によって $table_h[r][v]$ には, r, v 間の水平線分-垂直線分あるいは水平線分となる単純直線経路の水平線分のみ重み付き L_1 距離が格納される. 垂直方向についても $table_v[r][v]$ を同様に用意し, [アルゴリズム 1] と同様の処理を行なう.

[アルゴリズム 1]

入力: 水平方向に関して整列された頂点集合;

出力: $table_h[|\bar{V}|][|\bar{V}|]$;

配列 $table_h$ を初期化する;

for $i := 1$ to $|\bar{V}|$ do begin


```

for  $j:=i-1$  to 1 step -1 do
     $table_h[i][j] = table_h[i][j+1] +$  (点  $i$  を通る水平直線と
    点  $j, j+1$  を通る垂直直線の 2 つの交点を端点と
    する水平線分の重み付き  $L_1$  距離, ただし水平線分
    が存在しないときは 0);
for  $j:=i+1$  to  $|\bar{V}|$  do
     $table_h[i][j] = table_h[i][j-1] +$  (点  $i$  を通る水平直線と
    点  $j, j-1$  を通る垂直直線の 2 つの交点を端点と
    する水平線分の重み付き  $L_1$  距離, ただし水平線分
    が存在しないときは 0);
end

```

2 点 r, v 間の単純直線経路の重み付き L_1 距離は, 次のようにして求めることができる.

2 点 r, v 間の単純直線経路の重み付き L_1 距離 =

$$\begin{cases} table_h[r][v] + C + table_v[v][r] & r \in V_h, v \in V_v \\ table_v[r][v] + C + table_h[v][r] & r \in V_v, v \in V_h \\ table_v[r][v] & r \in V_v, v \in V_v \\ table_h[r][v] & r \in V_h, v \in V_h \end{cases}$$

$\bar{V}$ の要素数が $O(n)$ であることから整列に $O(n \log n)$, 表 $table_h$ の初期化に $O(n^2)$ 時間必要である. [アルゴリズム 1] の計算にも $O(n^2)$ 時間必要である. 垂直方向についても水平方向と同様にして重み付き L_1 距離を求めるのに $O(n^2)$ 時間必要である. 上の重み付き L_1 距離を求める計算式を使って $O(n^2)$ 時間で $\bar{V}$ の

すべての要素間の単純直線経路の重み付き L_1 距離を $O(n^2)$ 時間で求めることができる。このとき、 $\bar{V}$ の要素数が $O(n)$ であることから表 $table_h, table_v$ に $O(n^2)$ 領域必要である。 $\square$

3.4 結果

補題 2,3,4 より次のことがいえる。

定理 1 障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で解くことができる。

(証明)

次のステップにより $MSP(s, t)$ を求めることができる。

ステップ 1 : グラフ G^* の構築。

ステップ 2 : グラフ G^* において最短経路問題を解く。

ステップ 1 は補題 4 より $O(n^2)$ 時間 $O(n^2)$ 領域必要である。ステップ 2 は *Dijkstra* の重み付きグラフにおける最短経路を求めるアルゴリズム⁽²²⁾を使うことにより $O(n^2)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で解くことができる。よって障害物の重みを考慮したマンハッタン最短経路問題を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で解くことができる。 $\square$

境界が水平もしくは垂直な線分のみからなる重み付き障害物のある平面上で、 L_1 距離と屈折数の両方を考慮した評価尺度 (複合評価尺度とよぶ) を提案

し、複合評価尺度において最短となるマンハッタン経路を $O(n^2)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した。構成する重み付きグラフが文献(21)と大きく異なるためにオーダ的には悪くなってる。しかし、複合評価尺度は表1.1のように評価尺度のパラメタおよび障害物の重みを設定することにより従来の屈折数最小の経路、(重み付き) L_1 距離最小の経路に一致する。すなわち、複合評価尺度は屈折数、(重み付き) L_1 距離などの従来の評価尺度を一般化したものといえる。表3.2からわかるように、この章で提案する手法は、従来の評価尺度を扱った文献のなかでオーダ的に最悪である重み付き L_1 距離を扱った文献(20)と同じオーダで実行できる。

表 3.2 既存の結果との比較

尺度	障害物	結果
屈折数	多角形	$O(n^2 \alpha(n) \log^2 n)$ 時間 ⁽¹⁸⁾ $O(n^2)$ 領域
L_1 距離	多角形	$O(n \log^2 n)$ 時間 ⁽¹²⁾
重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ⁽²⁰⁾ $O(n^2)$ 領域
屈折数と L_1 距離	水平垂直線分	$O(n^2)$ 時間 ⁽²¹⁾ $O(n \log n)$ 領域
屈折数と 重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ^(第3章) $O(n^2)$ 領域

第 4 章

k -マンハッタン最短経路問題

4.1 諸定義

本章で扱う障害物, 問題を次のように定義する.

定義 19 障害物を次のように仮定する.

- 各障害物は長方形でその辺は, 座標軸に平行である.
- 各障害物は辺以外では重ならない.

障害物の頂点集合を V , $\bar{V} = V \cup \{\text{始点, 終点}\}$ とする. また $n = |V|$ とする. そして, 長方形の障害物の集合を $R = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ とする. R_i の 4 頂点を $(a_i, b_i), (c_i, b_i), (a_i, d_i), (c_i, d_i)$ とし R_i を $r(a_i, b_i, c_i, d_i)$ とする. ただし, $a_i < c_i, b_i < d_i$ とする. □

定義 20 k -マンハッタン最短経路問題とは, 長方形の障害物の存在する平面において, 任意の 2 点 $s = (s_x, s_y), t = (t_x, t_y)$ と正の整数 k が与えられたとき, s, t

4.2 1-マンハッタン最短経路問題

まず, 前処理をしておけば, 1-マンハッタン最短経路問題が $O(n)$ 時間, $O(1)$ 領域で解けることを示す.

定義 21 始点 s , 終点 t を通る垂直直線をそれぞれ s_{line} , t_{line} とする. そして, s_{line} , t_{line} を障害物の境界との交点で分割された線分を連結したもののみなすことができる. この分割された線分のうち 始点 s , 終点 t を含む線分 ((半) 直線の場合もある) をそれぞれ, s_{seg} , t_{seg} とよぶ. $\square$

補題 5 $1-MP(s, t)$ に含まれる水平線分は高々 1 本である.

(証明)

$1-MP(s, t)$ を $P = p_1(= s), p_2, \dots, p_u(= t)$ とする. P に水平線分が 2 本以上含まれていると仮定する. 経路 P を p_1 から順に辿ったとき, 最初にあらわれる水平線分を線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($i = 1$ または 2) とすると定義 8 より $\overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ は垂直線分 $\overline{p_{i+2} p_{i+3}}$ は水平線分である. 定義 8 より $\overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ の長さは 0 でないから p_{i+1} と p_{i+2} の y 座標は異なる. 従って, $\overline{p_i p_{i+1}}, \overline{p_{i+2} p_{i+3}}$ は同一水平直線上ではなく, 経路 P が $1-MP(s, t)$ であることに矛盾する. よって $1-MP(s, t)$ に含まれる水平線分は 高々 1 本である. $\square$

補題 6 $1-MP(s, t)$ が水平線分を含むなら, 含まれる水平線分の両端点はそれぞれ s_{seg} , t_{seg} 上に存在する.

(証明)

補題 5 より $1-MP(s, t)$ は高々 1 本の水平線分を含む. $1-MP(s, t)$ を $P =$

$p_1, p_2, \dots, p_u$ とすると水平線分は $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($i = 1$ または 2) である。以下では、一方の端点が s_{seg} 上に存在することだけを示す。他方の端点が t_{seg} 上に存在することは同様に示すことができる。

[$i = 1$ の場合]

p_1 が始点であることより p_1 は s_{seg} 上に存在する。

[$i = 2$ の場合]

$\overline{p_2 p_3}$ が水平線分であることより $\overline{p_1 p_2}$ は垂直線分である。 p_1 が始点であることと障害物の境界と交差しない線分であることから $\overline{p_1 p_2}$ は s_{seg} 上の線分である。従って p_2 は s_{seg} 上に存在する。

したがって、 $1-MP(s, t)$ が水平線分を含むなら、含まれる水平線分の両端点はそれぞれ s_{seg}, t_{seg} 上に存在する。 $\square$

補題 7 $1-MSP(s, t)$ が水平線分を含むならば、その水平線分上に $\bar{V}$ の要素が存在するような $1-MSP(s, t)$ が必ず存在する。

(証明)

補題 5 より、 $1-MP(s, t)$ が水平線分を含むなら水平線分は 1 本である。

[水平線分が始点または終点を含む場合]

条件を満たす。

[水平線分が始点も終点も含まない場合]

$1-MSP(s, t)P = p_1, p_2, p_3, p_4$ で $\overline{p_2 p_3}$ が水平線分 $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_3 p_4}$ は垂直線分である。 $p_i = (x_i, y_i)$ とするとき $(y_2 - y_1) \times (y_2 - y_4) > 0$ の場合には、 $\overline{p_2 p_3}$ を p_1

の方向に平行移動することによって P より短い $1-MP(s, t)$ が得られる。
 これは P が $1-MSP(s, t)$ であることに矛盾する。 $(y_2 - y_1) \times (y_2 - y_4) < 0$
 の場合には、 $\bar{V}$ の要素を含むようになるまで $\overline{p_2 p_3}$ を平行移動することによって、 P と長さの等しい $1-MP(s, t)$ が得られる。

よって、経路中の水平線分上に $\bar{V}$ の要素が存在するような $1-MSP(s, t)$ が必ず存在する。 □

定理 2 $\bar{V}$ の要素が上下方向に整列されていれば 1-マンハッタン最短経路問題を $O(n)$ 時間 $O(1)$ 領域で解くことができる。

(証明)

始点 s 終点 t が同じ垂直直線上にある (つまり、 $s_x = t_x$) 場合 $1-MSP(s, t)$ が存在するならば、それは、 s, t 間を垂直線分で連結したものである。従って、これは始点終点間に障害物が存在しないことを確かめることより $O(n)$ 時間 $O(1)$ 領域で 1-マンハッタン最短経路問題を解くことができる。

以下では、始点 s 終点 t が同じ垂直直線上にない (つまり、 $s_x \neq t_x$) 場合について考える。このとき、 $1-MSP(s, t)$ が存在するならば、それは水平線分を含む。補題 5 より $1-MSP(s, t)$ 中の水平線分は 1 本である。また、補題 7 より水平線分上に $\bar{V}$ の要素が存在する $1-MP(s, t)$ のみを考えればよい。障害物と交差しない経路を求めることより、次の障害物の集合 $\bar{R}$ の要素と交差せず、両端が s_{seg}, t_{seg} 上に存在する水平線分が $1-MP(s, t)$ の唯一の水平線分となる。

$$\bar{R} = \{R_i | s_x \leq a_i < c_i \leq t_x \text{ or } a_i < s_x < c_i \text{ or } a_i < t_x < c_i\}$$

この水平線分を含む基準直線を見つけるためには $\bar{R}$ の要素と交差しない水平直線を見つければよい。障害物は長方形なので、 $\bar{R}$ の要素の境界の垂直線分と交差しない水平直線を求めればよい。そこで、 $\bar{V}$ の要素を含む水平直線を走査線として、上から下へと走査し、走査線と $\bar{R}$ の要素の境界の垂直線分との交点数を求める。一般性を失うことなしに $s_x < t_x, s_y < t_y$ とする。走査線を $y = l$ とし、 n 個の障害物の頂点を $z_i = (x_i, y_i) (i = 1, \dots, n)$ とする。このとき

$c =$ (水平直線 $y = l$ と交差し s_{line}, t_{line} 間にある垂直線分の数)

$f = \{z_i | \bar{R} \text{ の要素の頂点, } s_x \leq x_i \leq t_x, l < y_i, z_i \text{ は垂直線分の上側端点} \}$

$g = \{z_i | \bar{R} \text{ の要素の頂点, } s_x \leq x_i \leq t_x, l < y_i, z_i \text{ は垂直線分の下側端点} \}$

とすると $c = |f| - |g|$ である。

従って、上から下へと走査する際に、 s_{line}, t_{line} 間に存在する $\bar{R}$ の要素の境界の垂直線分の上側端点の場合は変数 c に 1 を加え、 $\bar{R}$ の要素の境界の垂直線分の下側端点の場合は、 c から 1 を引くという操作をすることによって走査線と交差する s_{line}, t_{line} 間にある障害物の境界の垂直線分の数維持することができる。 $c = 0$ となったならばそれを基準直線の候補とすることができ、基準直線と s_{line}, t_{line} との交点をそれぞれ、 $(S_x, S_y), (T_x, T_y)$ とし始点、終点をそれぞれ $(s_x, s_y), (t_x, t_y)$ で表す。 $(S_x, S_y), (T_x, T_y)$ がそれぞれ s_{seg}, t_{seg} 上に存在すれば、この基準直線に関して最短の $1-MP(s, t)$ の長さが次の式で計算できる。

$$\text{経路の長さ} = |s_y - S_y| + |S_x - T_x| + |T_y - t_y|$$

常に最短経路を保持すれば最後に $1-MSP(s, t)$ を求めることができる。これを実現したものが [アルゴリズム 2] である。このアルゴリズムは $\bar{V}$ の要素が上

下方向に整列されていれば $\bar{V}$ の要素数が $O(n)$ であることより $O(n)$ 時間 $O(1)$ 領域で実行できる. □

[アルゴリズム 2]

入力: 上下方向に整列された $\bar{V}$ のリスト $v_1, v_2, \dots, v_{n+2} (v_i = (x_i, y_i))$;

出力: 最短経路の長さ;

$c := 0$; /*線分との交差数を保持*/

if (直線 $y = y_1$ が s_{seg}, t_{seg} と交差) then

/*最短経路の長さの初期化*/

$min := (v_1$ を通る $1-MP(s, t)$ の長さ)

else

$min := \infty$;

for $i := 1$ to $n+2$ do begin

if (v_i が $\bar{R}$ の要素の頂点) then

if (v_i が垂直線分の上側の端点) then

$c := c + 1$

else

$c := c - 1$;

if ($c = 0$) and (直線 $y = y_i$ が s_{seg}, t_{seg} と交差)

and ($min > (v_i$ を通る $1-MP(s, t)$ の長さ)) then

$min := (v_i$ を通る $1-MP(s, t)$ の長さ)

end

return min ;

4.3 2-マンハッタン最短経路問題

2-マンハッタン最短経路問題を $O(n^2)$ 時間, $O(n)$ 領域で解くことができることを示す. $2-MSP(s, t)$ を次に定義する3つの領域にそれぞれ存在する部分経路に分割して考える.

定義 22 平面を s_{line} , t_{line} により3つの領域に分割し, それぞれの領域内に存在する L_1, L_2 を基準直線とするマンハッタン経路を次のように定義する (図 4.2).

$$Ps(s, s', L_1, L_2) : x \leq s_x \text{ なる領域に存在する } 2-MSP(s, s')$$

$$Pst(s', t', L_1, L_2) : s_x < x < t_x \text{ なる領域に存在する } 2-MSP(s', t')$$

$$Pt(t', t, L_1, L_2) : t_x \leq x \text{ なる領域に存在する } 2-MSP(t', t)$$

ただし, L_1, L_2 と s_{line} との交点をそれぞれ, s_1, s_2 とし, t_{line} との交点をそれぞれ, t_1, t_2 とするとき

$$s' = s_1 \text{ or } s_2$$

$$t' = t_1 \text{ or } t_2$$

である. □

$Ps(s, s', L_1, L_2)$, $Pst(s', t', L_1, L_2)$, $Pt(t', t, L_1, L_2)$ を連結した次の経路が $2-MP(s, t)$ である.

$$Ps(s, s_1, L_1, L_2)Pst(s_1, t_1, L_1, L_2)Pt(t_1, t, L_1, L_2)$$

$$Ps(s, s_1, L_1, L_2)Pst(s_1, t_2, L_1, L_2)Pt(t_2, t, L_1, L_2)$$

$$Ps(s, s_2, L_1, L_2)Pst(s_2, t_1, L_1, L_2)Pt(t_1, t, L_1, L_2)$$

$$Ps(s, s_2, L_1, L_2)Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)Pt(t_2, t, L_1, L_2)$$

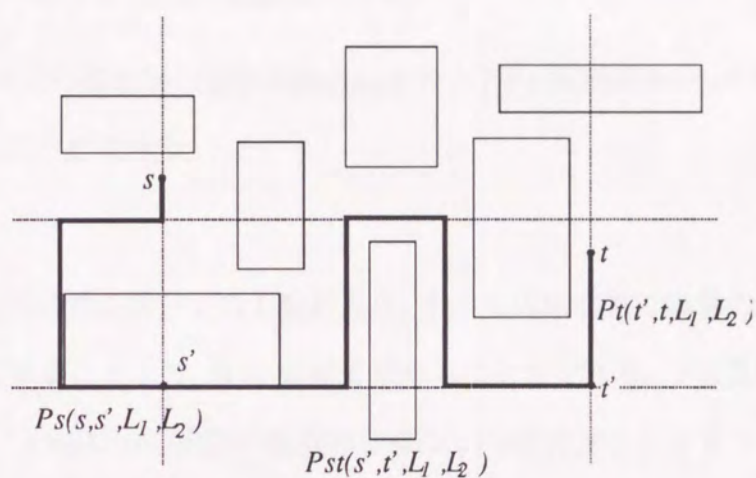


図 4.2 分割されたマンハッタン経路

Fig.4.2 Separated rectilinear paths

これらの経路の中で最短な経路が L_1, L_2 を基準直線とする最短の $2-MP(s, t)$ である.

4.3.1 $Pst(s', t', L_1, L_2)$ を求める

前処理をしておくことにより, L_1 が与えられたとき, すべての L_2 について $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で $Pst(s', t', L_1, L_2)$ を求めることができることを示す.

定義 23 障害物のある平面上の任意の障害物の垂直線分を e とする. 垂直線分 e を含む直線を描いたとき, 障害物の境界と交点ができる. これらの交点のうち e に最も近い上下の交点をそれぞれ線分 e の上(下)投影点とよぶ. 上(下)投影点が無限遠点に存在する場合は, e が直線 $x = l$ 上の線分とするととき, 点

$(l, +\infty)((l, -\infty))$ を上(下)投影点とする. □

補題 8 すべての障害物の境界の垂直線分の上(下)投影点を $O(n^2)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる.

(証明)

障害物の境界の垂直線分 e の上投影点は, すべての障害物の境界の水平線分が $O(n)$ 本存在することより, $O(n)$ 時間で求めることができる. 下投影点も同様である. すべての障害物の境界の垂直線分は $O(n)$ 本存在することより障害物の境界の垂直線分の上(下)投影点を $O(n^2)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる. □

定義 24 点 x から水平線分((半)直線) l に引いた垂直線分が障害物と交差しないとき x が l から見えるという. l から見えるすべての点だけからなる領域を l から見える領域といい, $T(l)$ と表す (図 4.3). □

定義 25 水平線分((半)直線) l に関して次の条件を満たす長方形 K 内に含まれる障害物(障害物の上または下の部分)の集合を $S(l)$ とよぶ (図 4.3).

条件 1 長方形 K の 1 本の水平辺は l に含まれる.

条件 2 長方形 K の 2 本の垂直辺は $T(l)$ 内に含まれる. □

定義 26 水平直線 L_1 を障害物との交点を端点とし, 端点のみを共有する線分((半)直線)が連続しているとみなしたとき, それぞれの線分((半)直線)のうち障害物外の線分を左から $l_1, l_2, \dots, l_u$ とする. このとき $S(L_1)$ を次のように定義する.

$$S(L_1) = \bigcup_{i=1}^u S(l_i)$$

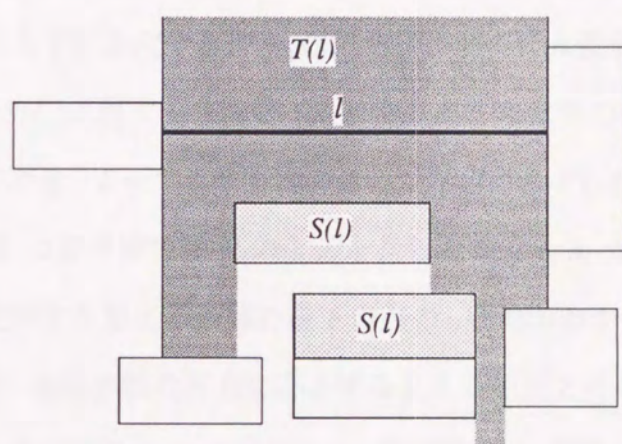


图 4.3 $T(l), S(l)$

Fig.4.3 $T(l), S(l)$

□

補題 9 すべての障害物の各頂点の上(下)投影点が求まっていれば, 1本の水平直線 L_1 が与えられたとき, $S(L_1)$ を $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる.

(証明)

水平直線 L_1 を分割した線分((半)直線) l_j から見える領域を $T(l_j)$ とする. $T(l_j)$ は水平直線 L_1 の上下に存在するが L_1 の下側についてのみ説明する. 定義 25 の [条件 2] より, $S(l_j)$ に属する障害物 (障害物の上または下の部分) は $T(l_j)$ によって挟まれている. よって各障害物において左右それぞれに存在するもっと近い見える領域, つまり障害物 R_i の上辺を含む直線 $y = d_i$ が左右それぞれの方角で最初に交差する見える領域の最下の点の y 座標がわかれば $S(l_j)$ を求めることができる. 各障害物の左右に存在する見える領域とその最下の点の y 座標を保持するために表 LT, RT を用意する. 障害物 R_i の左側に存在するもっとも近い見える領域が $T(l_j)$ である場合には $LT[i][1] = j$ が格納され, $LT[i][2]$ には $T(l_j)$ の R_i の左側で最下の点の y 座標が格納される. RT も同様の内容が格納される. LT, RT が求まれば, [アルゴリズム 3] により $S(L_1)$ を求めることができる.

[アルゴリズム 3]

入力: 水平直線 L_1 によって定まる $LT[m][2], RT[m][2]$;

出力: $S(L_1)$;

$S(L_1) := \emptyset$;

for $i := 1$ to m do begin


```

if ( $LT[i][1] \neq RT[i][1]$ ) then next ;
tmp := max( $LT[i][2], RT[i][2]$ );
/* $R_i = r(a_i, b_i, c_i, d_i)$  とする. */
if ( $b_i \leq tmp < d_i$ ) then  $S(L_1) := S(L_1) \cup r(a_i, tmp, c_i, d_i)$ ;
end

```

LT は各 $T(l_i)$ において左から順に $T(l_i)$ の垂直な境界の最下の点を保持しながら処理することによって求めることができる ([アルゴリズム 4]). RT も同様の方法で求めることができる.

[アルゴリズム 4]

入力: 水平直線 L_1 , 横方向に整列された障害物の

境界の垂直線分のリスト $e_1, e_2, \dots, e_{2m}$;

出力: 水平直線 L_1 によって定まる LT ;

for $i := 1$ to m do LT を初期化;

$LT[e_1$ を持つ障害物][2] := $-\infty$;

lower := $-\infty$; $j := 1$;

for $i := 1$ to $2m$ do begin

if (e_i が L_1 より上) then

/* L_1 の上側にある障害物について*/

next ;

if (e_i が L_1 と交差)

and (e_i が障害物の右側の線分である) then begin

/* L_1 と交差する障害物について*/


```

    j := j + 1;
    lower := (eiの下投影点の y 座標)
end
if (eiが障害物の左側の線分である) then begin
    /*L1の下側にある障害物について*/
    LT[eiを持つ障害物][1] := j;
    LT[eiを持つ障害物][2] := lower
end
if (L1から eiがみえる)
    and (eiの下投影点が lower より下) then
        /*lowerの更新*/
        lower := (eiの下投影点の y 座標)
end

[アルゴリズム 4] より, 障害物の境界の垂直線分の上(下) 投影点が求まって
いれば, 水平直線 L1 が与えられたときに, 表 LT, RT は障害物の境界の垂直線
分が O(n) あることより O(n) 時間で求めることができる. [アルゴリズム 3] よ
り, 表 LT, RT が求まった後 S(L1) を O(n) 時間で求めることができる. 障害物
の集合の数が m = n/4 であることより表 LT, RT に O(n) 領域必要である. □

```

補題 10 始点 s 終点 t と L_1 が与えられたとき $S(L_1)$ が求まっていれば, すべて
 の L_2 に対して $Pst(s', t', L_1, L_2)$ の長さを $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることがで
 きる.

(証明)

$Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ の場合について証明する. 他の場合も同様の方法で求めることができる.

$S(L_1)$ を除く障害物 (ある障害物の一部分が $S(L_1)$ に属する場合は, 残りの部分) の集合に対して L_2 を基準直線とする $1-MSP(s_2, t_2)$ を求めたとき, この $1-MSP(s_2, t_2)$ を基に $Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ を構成できることを示す. $1-MSP(s_2, t_2)$ は補題 5,7 より, 水平線分は 1 本であり, その両端点は s_{line}, t_{line} 上に存在する. つまり, $S(L_1)$ に属する障害物と交差するのは, 1 本の水平線分だけである. s_2 から $1-MSP(s_2, t_2)$ を辿る際に最初に交差する $S(L_1)$ の障害物を Q_{left} とする (図 4.4). Q_{left} が $S(l_w)$ の要素であるならば, $S(l_w)$ の要素のなかで最後に $1-MSP(s_2, t_2)$ と交差する障害物を Q_{right} とする. 定義 25 より $Q_{left}(Q_{right})$ の左 (右) に必ず $T(l_w)$ が存在する. $Q_{left}(Q_{right})$ の左 (右) に存在する $T(l_w)$ 中の L_2 上の任意の点を $q_{left}(q_{right})$ とする. 定義 24 より q_{left}, q_{right} から l_w へ障害物と交差せずに垂直線分を引くことができる. この垂直線分の l_w 上の端点をそれぞれ h_{left}, h_{right} とする. このとき, 経路 q_{left}, q_{right} の代わりに経路 $q_{left}, h_{left}, h_{right}, q_{right}$ を使えば $1-MSP(s_2, t_2)$ と交差している Q_{left} から Q_{right} までの障害物を全て迂回できる. 同様に $1-MSP(s_2, t_2)$ と交差する障害物をすべて迂回することができる. よって, $1-MSP(s_2, t_2)$ の基準直線 L_2 と L_1 を基準直線とする $Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ が構成できる. 定理 2 より $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で $1-MSP(s_2, t_2)$ を求めることができる. つぎに, $Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ の長さを求めるために [アルゴリズム 2] を次の表も保持するように変更する.

$cross[w] = (l_w \text{ の下に存在する走査線と交差している } S(L_1) \text{ の要素数})$

この表は $cross[w] \neq 0$ である場合には l_w を使って迂回しなければならないことを意味している。つまり, $cross[w] \neq 0$ である $cross[w]$ の数を数えることにより最短経路の長さが迂回回数から簡単に求まる。 $cross[w] \neq 0$ である $cross[w]$ の数を保持する変数を $bypass$ とする。走査線に含まれる障害物の境界の水平線分をもつ障害物を $R_i (i = 1, \dots, m)$ とすると, R_i が $S(L_1)$ の要素であるときには, 次の操作を追加する。

R_i の上側の水平線分が走査線に含まれている場合

$cross[w]$ に 1 を加える。その結果,
 $cross[w] = 1$ になれば $bypass$ に 1 を加える。

R_i の下側の水平線分が走査線に含まれている場合

$cross[w]$ から 1 を引く。その結果,
 $cross[w] = 0$ になれば $bypass$ から 1 を引く。

$S(L_1)$ の要素である障害物は LT, RT を参照することによってどの線分 l_w の下に存在するかがわかる。また, $bypass$ を参照するだけで, $cross[w] \neq 0$ である数がわかる。従って, $S(L_1)$ が求まっていれば L_1 と L_2 を基準直線とする $Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ の長さを $O(1)$ 時間で求めることができる。よってすべての L_2 に対して $Pst(s_2, t_2, L_1, L_2)$ の長さを $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる。

□

4.3.2 $Pst(s, s', L_1, L_2)$ を求める

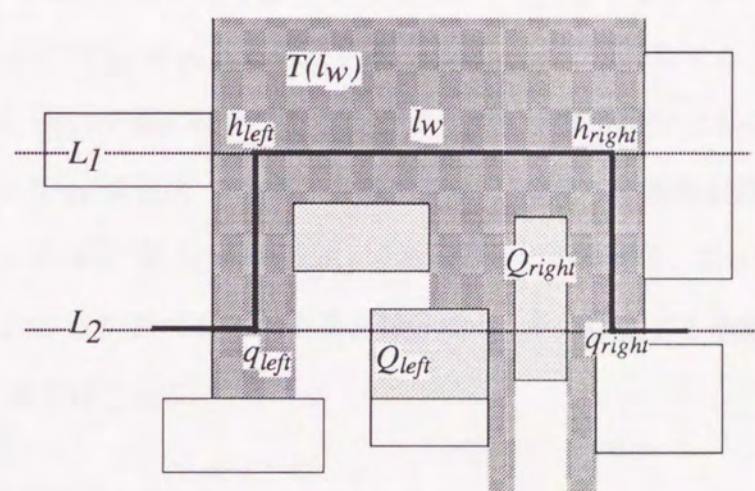


图 4.4 迂回

Fig.4.4 bypass

補題 11 $Ps(s, s', L_1, L_2)$ に含まれる垂直線分は s_{line} 上に存在する垂直線分以外は 1 本である.

(証明)

$Ps(s, s', L_1, L_2)$ を $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ とする. ただし, s_{line} 上に存在する線分を考えないことより $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_{u-1} p_u}$ を水平線分とする. P は $2-MP(p_1, p_u)$ である. よって, $x_2 < s_x, x_{u-1} < s_x, y_1 \neq y_u$ である. よって $y = y_1$ と $y = y_u$ が基準直線である. ここで $p_3 \neq p_{u-1}$ と仮定する. p_3 は s_{line} 上の点でないことより $u \geq 4$ が成り立つ. $\overline{p_2 p_3}$ が垂直線分であることより $\overline{p_3 p_4}$ は水平線分である. このとき $p_3 \neq p_{u-1}$ より $y_3 \neq y_{u-1}$ である. よって $y = y_3$ は 2 本の基準直線と異なる直線である. これは P が $2-MP(p_1, p_u)$ であることに矛盾する. よって $p_3 = p_{u-1}$ である. したがって P に含まれる垂直線分は s_{line} 上に存在する垂直線分以外には $\overline{p_2 p_3}$ の 1 本だけである. $\square$

定義 27 次の情報を格納した表を ST とする.

$ST[i] = \{ \text{障害物の境界の上から } i \text{ 番目の水平線分を含む水平直線 } L_2 \text{ と } s_{line} \text{ との交点 } s_2 \text{ と始点 } s \text{ を端点とする } Ps(s, s_2, L_1, L_2) \text{ の長さ} \}$ $\square$

補題 12 1 本の基準直線 L_1 がまえもって与えられたとき, ST を $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる.

(証明)

次のような長方形 K を考える.

- 右辺は s_{line} 上である.

- 上辺, 下辺はそれぞれ L_1, L_2 上で, 障害物と交差しない.
- 左辺は 障害物と交差しない.

長方形 K の右辺を除く境界を経路とみなせば, この経路は上辺, 下辺がそれぞれ L_1, L_2 上に存在し, 障害物と交差しないことより $2\text{-MP}(s_1, s_2)$ である. 一般性を失うことなしに, L_1 は L_2 より上にあるものとする. K の上辺, 右辺はそれぞれ L_1, s_{line} 上である. そこで, 左辺と下辺を含む直線をそれぞれ LE, BE とし走査することを考える. LE は LE と交差し L_1, BE 間に存在する障害物の境界の水平線分の数 bc を保持する. BE も同様に BE と交差し s_{line}, LE 間に存在する障害物の境界の垂直線分の数 lc を保持する. LE と L_1 の交点から垂線を降ろしたとき障害物の境界の水平線分と最初に交差する点を bl とする (図 4.5).

LE を定めたとき BE を bl を含むようになるまで走査する. この際に, $bc = 0$ の場合 BE 上に存在する障害物の境界の水平線分の上からの順番をインデックスとしてもつ ST に LE を記録する. BE が bl まで走査したなら, LE を障害物の境界の左側の垂直線分を含みその LE の bl が BE よりも下に存在するまで走査する. その際に, LE 上に存在する障害物の境界の垂直線分が BE と交差するならば bc に 1 を加えておく. そして, また, BE を bl まで走査する. bl が障害物の境界との交点であることより, bl より下には LE を左辺とする K は存在しない. よって BE は $O(n)$ の水平線分を走査することになる. bl は LE に含まれる障害物の境界の垂直線分の下投影点である. よって補題 8 より基準直線 L_1 が与えられたとき $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で ST を求めることができる. $\square$

補題 13 始点 s と L_1 が与えられたとき, ST が求まっていれば, $Ps(s, s_2, L_1, L_2)$ を $O(1)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる.

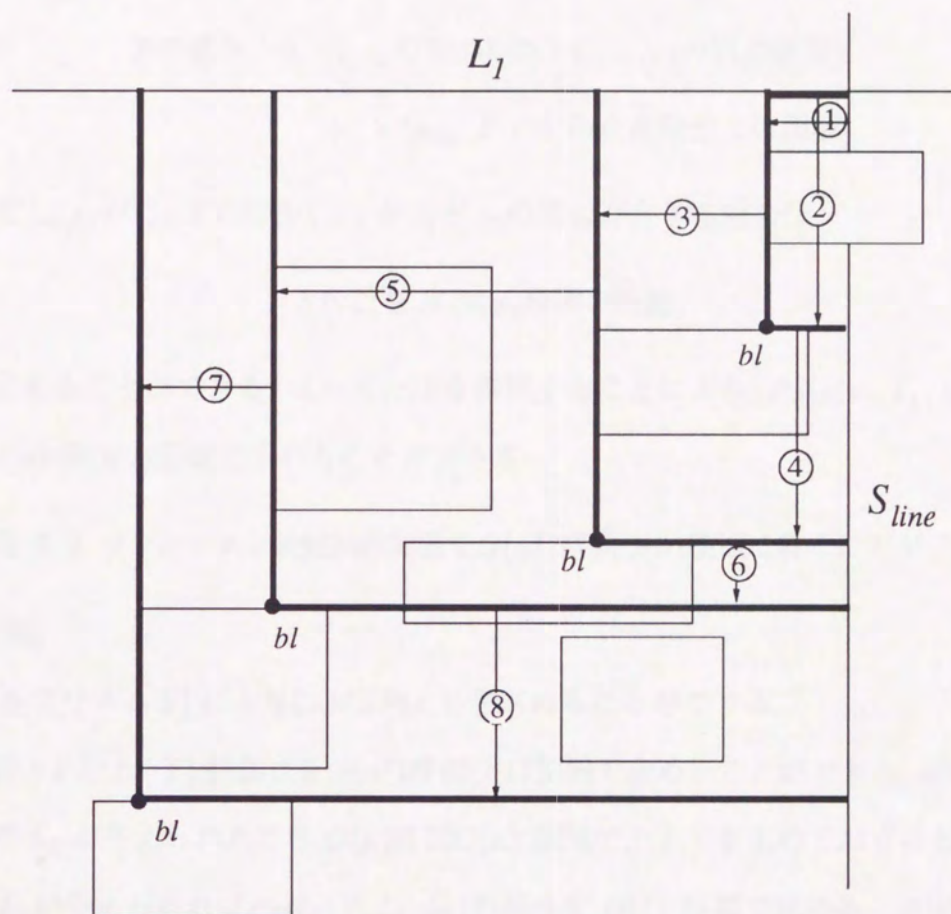


図 4.5 走査の状況

Fig.4.5 The configuration of sweep

(証明)

$P = Ps(s, s_2, L_1, L_2)$ の長さは次の式で求めることができることより長さが分かれば経路を構成することができる。

$$\begin{aligned} P \text{ の長さ} &= (s, s_1 \text{ の間の距離}) + (s_1, s_2 \text{ の間の距離}) \\ &\quad + 2 \times (s_{line} \text{ と } P \text{ 中の垂直線分との距離}) \end{aligned}$$

ただし, s_2 が s_{seg} 上に存在し, s が s_1 と s_2 の間に存在する場合は

$$P \text{ の長さ} = (s, s_2 \text{ の間の距離})$$

で求めることができる。よって, ST を参照することにより, $Ps(s, s_2, L_1, L_2)$ を $O(1)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる。□

定理 3 2-マンハッタン最短経路問題を $O(n^2)$ 時間 $O(n)$ 領域で解くことができる。

(証明)

[アルゴリズム 5] により $2-MSP(s, t)$ を求めることができる。

補題 8 より上(下)投影点を $O(n^2)$ 時間 $O(1)$ 領域で求めることができる。補題 10 より L_1 が与えられたとき $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で $S(L_1)$ を求めておくことにより L_2 が与えられれば $Pst(s', t', L_1, L_2)$ の長さを $O(1)$ 時間で求めることができる。補題 13 より L_1 が与えられたとき $O(n)$ 時間 $O(n)$ 領域で ST を求めておくことにより L_2 が与えられれば $Ps(s, s', L_1, L_2)$, $Pt(t', t, L_1, L_2)$ の長さを $O(1)$ 時間で求めることができる。よって, $2-MSP(s, t)$ は $O(n^2)$ 時間 $O(n)$ 領域で求めることができる。□

[アルゴリズム 5]

入力: 始点 s , 終点 t , 障害物;

出力: $2\text{-MSP}(s, t)$;

上下投影点を求める;

for each $L_1 \in (\text{障害物の境界を含む水平直線})$ do begin

$ST, S(L_1)$ を求める;

for each $L_2 \in (\text{障害物の境界を含む水平直線})$ do begin

$Ps(s, s', L_1, L_2)$ の長さを求める ;

$Pst(s', t', L_1, L_2)$ の長さを求める ;

$Pt(t', t, L_1, L_2)$ の長さを求める ;

最短経路の更新

end

end

第 5 章

結論

表 5.1 に既存の結果と本研究の結果をまとめておく。

文献 (20) は重み付き L_1 距離 (障害物を代償を払えば通過できるものと考えた場合の L_1 距離) での最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した。文献 (21) は屈折数と L_1 距離の両方を考慮した評価尺度による最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n \log n)$ 領域で求める手法を提案した。第 3 章では, 屈折数と重み付き L_1 距離の両方を考慮した評価尺度として複合評価尺度とよぶ評価尺度を提案し, この尺度に関する最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した。また, 複合評価尺度のパラメタを表 3.1 のように設定することにより, 本手法で従来の屈折数最小の経路, (重み付き) L_1 距離に関して最短の経路を求めることができる。

また, 第 4 章では, 長方形からなる障害物のある平面上で, 水平線分が高々 2 本の水平直線上にしか存在しない水平もしくは垂直な線分のみからなる最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n)$ 領域で求める手法を提案した。

今後の課題として, 点と障害物に関して前処理を実行した後に他の 1 点が与

表 5.1 既存の結果との比較

尺度	障害物	結果
屈折数	多角形	$O(n^2 \alpha(n) \log^2 n)$ 時間 ⁽¹⁸⁾ $O(n^2)$ 領域
L_1 距離	多角形	$O(n \log^2 n)$ 時間 ⁽¹²⁾
重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ⁽²⁰⁾ $O(n^2)$ 領域
屈折数と L_1 距離	水平垂直線分	$O(n^2)$ 時間 ⁽²¹⁾ $O(n \log n)$ 領域
屈折数と 重み付き L_1 距離	水平垂直線分のみ からなる多角形	$O(n^2)$ 時間 ^(第 3 章) $O(n^2)$ 領域
制限付 L_1 距離	長方形	$O(n^2)$ 時間 ^(第 4 章) $O(n^2)$ 領域

えられた場合のアルゴリズムを考える必要がある。また、 $k(k > 2)$ -マンハッタン最短経路問題、マンハッタン経路中の水平線分、垂直線分に制限を加えたもののいろいろな最短経路を求めるアルゴリズム、多次元へ拡張などが考えられる。

謝辞

本研究の全過程を通じて、直接御理解ある御指導を賜わり、常に励ましていただいた都倉信樹教授に深く感謝の意を表します。

大学院後期課程において御教示、御指導いただいた情報工学科の橋本昭洋教授、谷口健一教授、嵩忠雄教授、樺田栄一教授、首藤勝教授、鳥居宏次教授、宮原秀夫教授、西谷絃一教授、谷内田正彦教授、柏原敏伸教授、菊野亨教授、教養部の藤井護教授、大阪大学産業科学研究所の豊田順一教授、北橋忠宏教授、溝口理一郎教授、医学部の田村進一教授、工学部の西尾章治郎教授に心から深謝致します。

本研究の全過程を通じて、有益な御助言、御指導いただいた辻野嘉宏助教授、増澤利光助教授に厚く御礼申し上げます。

大学院を通じて御指導いただいた荒木俊郎助教授、萩原兼一助教授、松浦敏雄助教授、伊藤実助教授、角田良明助教授、東野輝男助教授、井上克郎助教授、藤原融助教授、下條真司助教授、村田正幸助教授、関浩之助教授、Richard Selby助教授に深く感謝致します。

種々の面で御助言、御援助いただいた情報工学科の齊藤明紀助手、魚井宏高助手に心から感謝致します。

さらに、著者の在学中、御討論いただいた都倉研究室の方々、並びに亀田益代技官に感謝致します。

最後に、私を心から支えてくれた妻 美加子、娘 綾香に対して、心より感謝の意を表すものであります。

文献

- (1) M. I. Shamos: "Computational Geometry", PhD thesis, Yale University, New Haven, CN (1978).
- (2) B. Chazelle: "A Theorem on Polygon Cutting with Applications", Proceeding of 3rd IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp. 339-349 (1982).
- (3) D. T. Lee and F. P. Preparata: "Euclidean Shortest Paths in the Presence of Rectilinear Barriers", Networks, **14**, pp. 393-410 (1984).
- (4) B. Chazelle: "Triangulating a Simple Polygon in Linear Time", Discrete & Computational Geometry, **6**, pp. 485-524 (1991).
- (5) D. T. Lee: "Proximity and Reachability in the Plane", PhD thesis, University of Illinois (1978).
- (6) M. Sharir and A. Schorr: "On Shortest Paths in Polyhedral Spaces", SIAM Journal of Comput., **15**, pp. 193-215 (1986).
- (7) J. Reif and J. A. Storer: "Shortest Paths in Euclidean Space with Polyhedral Obstacles", Tech.Rep CS-85-121, Comp. Science Dept., Brandeis University, Waltham, MA (1985).

- (8) R. C. Larson and V. O. Li: "Finding Minimum Rectilinear Paths in the Presence of Barriers", *Networks*, **11**, pp. 285-304 (1981).
- (9) P. J. de Rezende, D. T. Lee and Y. F. Wu: "Rectilinear Shortest Paths with Rectangular Barriers", *Discrete & Computational Geometry*, **4**, pp. 41-53 (1989).
- (10) K. Clarkson, S. Kappor and P. Vaidya: "Rectilinear Shortest Paths through Polygonal Obstacles in $O(n \log^2 n)$ Time", *Proceeding of the 3rd ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 251-257 (1987).
- (11) J. S. B. Mitchell: "An Optimal Algorithm for Shortest Rectilinear Paths Among Obstacles in the Plane", *Abstracts of the First Canadian Conference on Computational Geometry*, p. 22 (1989).
- (12) J. S. B. Mitchell: " L_1 Shortest Paths Among Polygonal Obstacles in the Plane", *Algorithmica*, **8**, pp. 55-88 (1992).
- (13) W. Lenhart, R. Pollack, J. Sack, R. Seidel, M. Sharir, S. Suri, G. Toussaint, S. Whitesides and C. Yap: "Computing the Link Center of a Simple Polygon", *Discrete & Computational Geometry*, **3**, pp. 281-293 (1988).
- (14) S. Suri: "A linear time algorithm for minimum link paths inside a simple polygon", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, **35**, pp. 99-110 (1986).

- (15) S. Suri: "On Some Link Distance Problems in a Simple Polygon", IEEE Trans. on Robotics and Automation, **6**, pp. 108–113 (1990).
- (16) Y. Ke: "An Efficient Algorithm for Link Distance Problems", Proceeding of the 5th ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 69–78 (1989).
- (17) H. N. Djidjev, A. Lingas and J. Sack: "An $O(n \log n)$ time Algorithm for Computing the Link Center in a Simple Polygon", STACS 89 Lecture Notes in Computer Science 349, pp. 213–224 (1990).
- (18) J. S. B. Mitchell, G. Rote and G. Wöginger: "Computing the Minimum Link Path Among a Set of Obstacles in the Plane", Proceeding of the 6th ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 63–72 (1990).
- (19) M. de Berg: "On Rectilinear Link Distance", Comp. Geom.: Theory and Applications, **1**, pp. 13–34 (1991).
- (20) D. T. Lee, T. H. Chen and C. D. Yang: "Shortest Rectilinear Paths among Weighted Obstacles", Proceeding of the sixth annual Symposium on Computational Geometry, pp. 301–310 (1990).
- (21) M. de Berg, M. van Kreveld, B. J. Nilsson and M. H. Overmars: "Finding Shortest Paths in the Presence of Orthogonal Obstacles Using a Combined L_1 and Link Metric", SWAT 90 Lecture Notes in Computer Science 447, pp. 213–224 (1990).

- (22) E. W. Dijkstra: "A Note on Two Problems in Connection with Graphs",
Numer. Math, **1**, pp. 269-271 (1959).
- (23) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 "重み付き領域を考慮した最短経路問題", 情報学
アルゴリズム研報, **92-AL-26**, pp. 9-16 (1992).
- (24) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 "障害物のある平面上で水平線分に制限をおいた
水平垂直線分からなる経路について", 信学技報, **COMP92-40**, pp. 7-16
(1992).
- (25) 安留, 増澤, 辻野, 都倉 "障害物の重みを考慮した最短経路問題", 電子情
報通信学会論文誌, **D-I**, (1993 年掲載予定).

