Osaka University Knowledge Archive

Title	不連続圧電性弾性導波系のマイクロ波回路的取扱いに関する研究
Author(s)	佐藤, 眞一
Citation	大阪大学, 1975, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1892
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

不連続圧電性弾性導波系のマイクロ波回路的取扱いに関する研究

佐 藤 眞 一

昭和５０年２月

大阪大学大学院基礎工学研究科

内　容　梗　概

本論文は，著者が大阪大学大学院基礎工学研究科（物理系専攻電気工学分野）に在学中に行なった圧電性弾性波に関する研究のうち，不連続圧電性弾性導波系のマイクロ波回路的取扱いに関する研究をまとめたものであり，本文6章と付録よりなっている．

第1章は序論であり，まず，圧電性弾性波に関する研究，その中でも不連続部分を持つ圧電性弾性導波系のマイクロ波回路的取扱いが重要な研究課題であることを述べ，本研究を行なうことの必要性および本研究の目的を明記している．次に，この研究分野における従来の研究を概観し，本論文における研究との差異を指摘して本論文の地位を明らかにしている．

第2章では，圧電性弾性導波系をいわゆるマイクロ波導波管などの導波系に対応させるため，圧電性弾性導波系が波の伝搬方向に相反線路表示可能となるための条件およびそのときの固有モードの直交性について論じている．すなわち，同じ伝搬定数を持つ前進波，後退波が基本方程式と基本構成式を満足するための条件より相反線路表示が可能となる物質定数構造を決定し，この物質定数構造を持つ物質で構成された導波系ではマイクロ波導波管などの導波系におけるように固有モードの直交関係式は二つのベクトル量のスカラ積によって表わされ，等価電圧，電流が定義されることを示している．これらの議論は準静電近似およびその近似をしない一般的取扱いのもとで，2次元および3次元圧電性弾性導波系に対して行なわれており，それぞれの場合が比較対照されている．

第3および4章では，マイクロ波工学での中心概念の一つであり，有効な手段である変分法を不連続圧電性弾性導波系の散乱問題に適用し，

この種の不連続問題を解析するための方法論を提案している．

第3章では，基本的な散乱問題として，構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が断面形状を同じくして接続された導波系を取り上げ，第2章で定義された正規直交固有モード関数を用いて，その不連続部での散乱係数の変分表示式をマイクロ波工学における手法に準じて導いている．さらに，レイリー・リッツ法を用いることにより，散乱係数は固有モード関数のみで非常に簡単な表示式として得られることが示されている．具体例として，等方弾性体無限平板におけるSH波の散乱係数が求められ，他の方法による結果と比較され，妥当な結果であることが論じられている．

第4章では，第3章の同一断面形状接続導波系を拡張して，一般に構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が段を持って接続されたときの散乱係数の変分表示式について論じている．すなわち，ある圧電性弾性波モードが圧電結晶の断面積が小さい導波系から大きい導波系に向って，あるいはその逆に向って入射するときの反射，透過係数の変分表示式を第3章の手法に準じて導き，レイリー・リッツ法を用いることにより，散乱係数は第3章で得られた簡単な表示式と全く同じ形式で与えられることを示している．また，圧電結晶表面の境界条件が違う場合には，得られた結果式における界分布ベクトルの成分あるいは積分範囲をその都度考え直すだけでよく，表示式の形としては変わらないことが指摘され，段部の積分を零にすると第3章の結果式に一致することも指摘されている．さらに，単一モードのみ伝搬可能な不連続圧電性弾性導波系における電力の保存性についても論じられている．具体例としては，段付等方弾性体無限平板における零次SH波の散乱係数が高次モード数をパラメータにして計算されている．

第5章では，溝アレイでの弾性表面波の反射を利用したデバイスが最近注目されている中にあって，溝アレイでの反射，透過現象の基礎資料を得るため，弾性表面波が周期的溝アレイに垂直入射するときの反射と透過について論じている．周期的溝アレイはステップ部分とその他の部分に分けて考えられ，ステップ部分には第4章における結果式を，その他の部分には伝送線路を用い，全体をTマトリクス表示して解析する方法が提案されている．この解析法ではバルク波の影響は無視されるが，溝アレイでの多重反射は考慮されており，解析法の適用範囲はかなり広く，波の伝搬する方向に相反線路表示可能であるならば，いかなる弾性表面波モードに対しても全く同様に適用され，その手法としては概念的には単純なものであることが指摘されている．また，ステップでの反射係数は弾性基盤としてよく用いられる種々の弾性体に対して計算されており，既に実験され，他の方法で解析されている結果との比較より，本解析法は妥当性があるものと思われることが指摘されている．周期的溝アレイにおける反射，透過量は溝の深さ，溝の数を変化させたときのものが計算され，特に，反射量の周波数特性に対しては主ローブと第一サイドローブのレベル差，切れ込み周波数などが検討されている．

第6章は本論文に関する結論であり，本研究の成果を総括して述べたものである．

目　次

内容梗概 ---------- i
主要記号表 ---------- Vii

第 1 章　序　論 ---------- 1

第 2 章　圧電性弾性導波系の相反線路表示 ---------- 6
2．1　序　言 ---------- 6
2．2　基本式と固有モードの直交性 ---------- 7
2.2.1　一般的取扱いのとき ---------- 7
2.2.2　準静電近似のとき ---------- 10
2．3　3次元導波系の場合 ---------- 11
2.3.1　相反線路表示のための条件 ---------- 11
2.3.2　固有モードの変形直交性 ---------- 14
2．4　2次元導波系の場合 ---------- 18
2.4.1　相反線路表示のための条件 ---------- 18
2.4.2　固有モードの変形直交性 ---------- 24
2．5　等価電圧，電流 ---------- 26
2．6　結　言 ---------- 28

第 3 章　圧電性弾性導波系の同一断面形状接続部における散乱係数の変分表示式 ---------- 29
3．1　序　言 ---------- 29
3．2　基本式 ---------- 30
3．3　反射係数の変分表示式 ---------- 33
3．4　透過係数の変分表示式 ---------- 35

3．5　レイリー・リッツ法の適用---------- 39
3．6　具体例---------- 41
3．7　結　言---------- 42

第4章　段付圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式---------- 43
4．1　序　言---------- 43
4．2　反射係数の変分表示式---------- 43
4.2.1　小断面圧電結晶から大断面圧電結晶へ入射の場合---------- 43
4.2.2　大断面圧電結晶から小断面圧電結晶へ入射の場合---------- 50
4．3　透過係数の変分表示式---------- 52
4．4　レイリー・リッツ法の適用---------- 55
4.4.1　反射係数の変分表示式への適用---------- 55
4.4.2　透過係数の変分表示式への適用---------- 59
4．5　結果式に対する検討---------- 61
4．6　電力の保存性---------- 63
4．7　計算例---------- 65
4．8　結　言---------- 69

第5章　周期的溝アレイにおける弾性表面波の反射と透過---------- 70
5．1　序　言---------- 70
5．2　ステップでの弾性表面波の反射係数---------- 71
5.2.1　反射係数式---------- 71
5.2.2　弾性表面波モード関数の決定法---------- 73
5.2.3　計算例---------- 76

5．3　ステップの等価回路表示 ---------- 80
5．4　周期的溝アレイのTマトリクス表示 ---------- 81
5．5　計算例 ---------- 83
5．6　反射量の周波数特性に対する検討 ---------- 88
5．7　結　言 ---------- 94

第6章　結　論 ---------- 95

謝　辞 ---------- 97
文　献 ---------- 98
付　録 ---------- 104

主 要 記 号 表

j : 虚数単位

ω : 角周波数

γ : 伝搬定数

(x_1, x_2, x_3) : 直角座標系

$\mathbb{k}$: $+x_3$方向の単位ベクトル

S, S_0 : 圧電性弾性導波系の断面

$\mathbb{T}(T_I)$: 応力

$\mathbb{U}(U_i)$: 機械的変位

$\mathbb{V}(V_i)$: 粒子速度

$\mathbb{S}(S_I)$: ひずみ

$\mathbb{E}(E_i)$: 電界

$\mathbb{H}(H_i)$: 磁界

$\mathbb{D}(D_i)$: 電束密度

ρ : 弾性体の密度

$\mathbb{d}$ (d_{iJ} あるいは d_{Ij}) : 圧電ひずみテンソル

$\mathbb{e}$ (e_{iJ} あるいは e_{Ij}) : 圧電応力テンソル

$\mathbb{s}^E(s_{IJ}^E)$: $\mathbb{E}$が一定のときの弾性コンプライアンステンソル

$\mathbb{c}^E(c_{IJ}^E)$: $\mathbb{E}$が一定のときの弾性スティフネステンソル

$\mathbb{\varepsilon}^T(\varepsilon_{ij}^T)$: $\mathbb{T}$が一定のときの誘電率テンソル

$\mathbb{\varepsilon}^S(\varepsilon_{ij}^S)$: $\mathbb{S}$が一定のときの誘電率テンソル

$*$: 共役複素数

ϕ : 電位

δ_{ij} : Kronecker のデルタ関数

$\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{K}_m^+$, $\mathbb{U}_m^+$, $\mathbb{I}_m^+$: 前進波の固有モード関数

$\mathbb{U}_m^a$, $\mathbb{I}_m^a$: a導波系における固有モード関数

$\mathbb{U}_p^b$, $\mathbb{I}_p^b$: b導波系における固有モード関数

$U_m^{(i)a}$, $I_m^{(i)a}$: iモード入射時のa導波系におけるモード振巾

$U_p^{(i)b}$, $I_p^{(i)b}$: iモード入射時のb導波系におけるモード振巾

S_{ji}^R : iモード入射時のjモードの反射係数

S_{ji}^T : iモード入射時のjモードの透過係数

π : 円周率

h : ステップの高さ

k : 弾性表面波の波数

λ : 弾性表面波の波長

f : 周波数

$\mathbb{U}^a$, $\mathbb{I}^a$: a導波系における弾性表面波のモード関数

$\mathbb{U}^b$, $\mathbb{I}^b$: b導波系における弾性表面波のモード関数

Y_0, Y_0' : 特性アドミタンス

σ : ポアソン比

γ_g : 周期的溝アレイでの弾性表面波の反射係数

t_g : 周期的溝アレイでの弾性表面波の透過係数

第 1 章　　序　論

弾性体の表面付近にのみエネルギーが集中している弾性表面波を用いたマイクロ波用デバイスが最近の話題となっている．その理由としては，表面からの波の制御が容易であること，弾性波の伝搬速度が数 km/sec，つまり，電磁波より約5桁小さいことによるマイクロ波回路の小型化の可能性があることなどがあげられるが，このほかに，弾性表面波に関する研究を盛りたてた背景として通信・情報処理技術の高度化による新しい素子の必要性，新しい素子の実現を支えるIC 技術に関連した精密加工技術の進歩，新材料の発見といったものなどがあげられる．ところで，弾性表面波素子用の基盤材料としては今日主に圧電結晶が用いられている．それは，弾性表面波の送受信に作成が簡単であり，しかも，変換効率の高い“すだれ状電極”が使用できること，途中からタップを多数取り出すことにより容易に分散形遅延線が構成され得ることなどのためである．また，圧電結晶における弾性波のふるまいは興味ある現象であり，圧電性を積極的に利用したとき，そこにはさまざまな機能を持った新デバイス実現の可能性があることも見逃せないことである．このような観点から，圧電結晶を伝搬する弾性波，すなわち，圧電性弾性波に関する研究は重要である．

弾性波を用いたデバイスを実現するとき，そこには大きな問題が提起される．不連続問題がそれである．たとえば，二つの素子を結ぶ導波路と素子の接続部分，素子の中の不連続部分などでの弾性波のふるまいは実際的に重要な問題である．ところが，不連続部分を持つ導波系，特にそれが圧電結晶で構成されている導波系では，不連続部分での弾性波のふるまいの厳密な解析は非常に困難であり，時には不可能に近いと思わ

れる．というのは，弾性波に対する境界条件は非常に繁雑であり，圧電結晶ではなおさらであるからである．しかしながら，これほどまでに注目され，研究されている弾性表面波を含め，広く弾性波に関する研究を確立するためには，圧電結晶で構成された不連続部分を持つ導波系における弾性波のふるまいの解析は避けて通れない重要な問題であると思われる．

現在，弾性波に関する研究に従事している研究者の中にはマイクロ波工学の専門家がかなり多い．それは，弾性波と電磁波の方程式は非常に類似しており，また，類似の概念も多く，マイクロ波工学に関連した理論的成果としての解析手法の大きな蓄積が弾性波の解析に適用され，弾性波の理論研究に大きく貢献する可能性があるからである．本論文は，このような観点に立って，圧電結晶で構成された不連続部分を持つ弾性導波系を不連続圧電性弾性導波系と名づけ，この種の導波系に対するマイクロ波回路的取扱いを試み，多少とも弾性表面波を含む弾性波工学の確立に貢献することを目的としている．

1969 年，B.A.Auld[1]は弾性波と電磁波の強い類似性を指摘し，弾性波理論へのマイクロ波工学での概念の適用を試みている．また，同年，A.A.Oliner[2]は半無限等方弾性体の境界面に弾性波が斜め入射したとき，その境界面に垂直方向には伝送線路表示，境界面ではバルク波モード別の理想変成器表示が可能であることを論じている．これ以後，弾性導波系のマイクロ波回路的取扱いの機運が高まり，その成果も数多いものになっている．たとえば，伝搬定数の変分表示式[3],[4]あるいはその摂動式[5]，相反関係式[1],[6]などは弾性波と電磁波の方程式の類似性によるマイクロ波工学での概念の適用である．また，最近，S.T.Peng[7]は磁界ベクトルを2階のテンソル量に変換し，弾性系と電磁系の類似性に

ついて論じている．本論文では，応用面からの要求，また，学問的興味から，さらには，電気量，弾性量を零にするとそれぞれ純弾性波，純電磁波に対する式になることから，圧電性弾性導波系を取り上げている．以下，各問題について従来行なわれた研究の概要を述べるとともに，本論文における研究との差異を指摘して本論文の地位を明らかにする．

マイクロ波工学において，導波管などの伝送線路表示はその系の理論を単純化する上で大きな役割を果たしており，不連続部を有するとき，伝送線路と集中定数回路網による等価回路表示は非常に便利である．その伝送線路における電圧，電流は前進波，後退波に対して鏡像の関係を満たしており，本論文では，このような関係を満たす伝送線路を相反線路と呼ぶことにする．弾性波に関しても，2媒質の境界面に斜め入射するバルク波に対して，その境界面に垂直な方向に相反線路表示が可能であることは等方体[(2),(8)]，異方体[(9)~(11)]に対して示され，バルク波モード別に理想変成器表示され，層状構造を伝搬する弾性波の伝搬特性などが解析されている．しかし，そこでの相反線路表示はあくまでバルク波モードに対するものであり，いわゆるマイクロ波導波管などのような導波系における固有モードに対するものではなく，直交関係についてもバルク波モード間のものである．A.A.Olinerら[(12)]はこの点を考慮して，等方弾性体の導波系における固有モードに対し，その伝搬方向への相反線路表示についても論じている．しかし，等方弾性体に限っており，しかも，粒子速度が電界に相当するとして出発しており，一般論を展開するにはその考え方は不適当である．そこで，第2章では，圧電性弾性導波系における固有モードに対する相反線路表示の一般論を示すために，基本方程式，基本構成式から出発し，固有モードの直交性についても直交関係式を変形することにより論じている．すなわち，同じ伝搬定数を

持つ前進波，後退波が基本方程式と基本構成式を満足するための条件より相反線路表示可能となる物質定数構造を決定し，その条件を満たす導波系では，固有モードの直交関係式を成分表示し，固有モードの定義を若干変更することによりマイクロ波導波管などの導波系における電界，磁界の断面成分に相当する二つの新しい固有モードベクトル量が定義され，固有モードの直交関係式はそれら二つのベクトル量のスカラ積で表わされ，等価電圧，電流が定義されることを示している．これらの議論は準静電近似およびその近似をしない一般的取扱いのもとで，2次元および3次元圧電性弾性導波系に対して行なわれており，それぞれの場合が比較対照されている．

マイクロ波導波管などの導波系の不連続部分における散乱係数は電力関係の把握などの上で大きな利点を持っている．杉尾ら[13]は導波管開口アレイの相互結合の解析に散乱係数の変分表示式を用い，その有効性について論じている．弾性波に対しては，一般に境界条件の繁雑さは電磁界理論などの比ではないため，散乱係数の変分表示式は不連続弾性導波系の解析に非常に有効であると考えられる．牧本ら[14]は圧電性弾性導波系が終端され，外部には界分布がないとした不連続導波系を取り上げ，その終端部での反射係数に対する変分表示式の導出を試みている．その他には不連続弾性導波系における散乱係数の変分表示式についての報告は見られないようである．そこで，第3，4章では，第2章で定義された正規直交固有モード関数を用い，文献(13)の手法に準じて，二つの圧電性弾性導波系が接続されたときの接続部における散乱係数の変分表示式について論じている．すなわち，第3章では，構成物質の異なった圧電性弾性導波系が断面形状を同じくして接続されたとき，第4章では，一般に構成物質の異なった圧電性弾性導波系が段を持って接続されたと

きのそれぞれの接続部における散乱係数の変分表示式を導いている．そして，試験関数を固有モードの和で表わし，レイリー・リッツ法を用いるとき，散乱係数は固有モード関数のみで非常に簡単な表示式として得られ，この表示式の形は第3章と第4章の場合に対して同じであることが指摘されている．また，電力の保存性についても論じられている．計算例としては，等方弾性体無限平板におけるSH波が取り上げられ，妥当な結果が得られている．

弾性表面波の伝搬路上に溝アレイを設け，この溝アレイからの反射を利用した信号処理デバイスが最近注目されている[15]．R.C.M.Lis[16],[17]はステップ部分を理想変成器表示などして周期的溝アレイでの弾性表面波の反射について論じている．しかし，その弾性体は等方体である．そこで，第5章では，溝アレイでの反射，透過現象の基礎資料を得るため，圧電性弾性表面波が周期的溝アレイに垂直入射するときの反射と透過の問題を取り上げ，概念的には単純な手法であり，いかなる弾性表面波モードに対しても全く同様に適用可能な解析法を提案している．ステップでの反射係数に対しては第4章で得られた変分表示式に基づく式を用い，それを基にしてステップ部分をTマトリクス表示し，周期的溝アレイはTマトリクス表示された個々の4端子回路の縦続接続で表わされている．この解析法では，溝は浅いとしてバルク波の影響は無視されているが，ステップ間の多重反射は考慮されており，弾性表面波の伝搬方向に導波系が相反線路表示可能ならば本解析法は適用可能であり，かなり一般性を持ったものになっている．計算例としては，弾性基盤としてよく用いられる弾性体をいくつか選んでおり，既に実験され，他の方法で解析されている結果との比較より，溝が浅いとき，本解析法は妥当性があるものと思われることが指摘されている．

第 2 章　圧電性弾性導波系の相反線路表示[(18)～(21)]

2．1　序言

圧電性弾性導波系に対して等価電圧，電流を定義し，マイクロ波回路的取扱いを行なうことは電気工学などに従事してきた者にとってなじみやすく，また，既存の概念，結果の応用が可能となり，きわめて有用である．しかし，一般的には，圧電性弾性導波系ではマイクロ波導波管などにおけるような電圧，電流，すなわち，前進波，後退波に対して鏡像関係を満たす電圧，電流は定義され得ない．本論文では，前進波，後退波の電圧，電流が鏡像関係を満たす伝送線路を相反線路と呼ぶことにする．

弾性波においても，バルク波に対する相反線路表示についてはいろいろ研究されている[(2)，(8)～(11)，(22)]が，それらはあくまでマイクロ波導波管などのような導波系における固有モードに対するものではない．弾性導波系をいわゆるマイクロ波導波管などの導波系に対応させるためには，その系における固有モードに対する相反線路表示が必要になる．弾性体が等方体のときには，導波系における固有モードの伝搬方向に対する相反線路表示は A. A. Oliner 5[(12)] によって議論され，等価電圧，電流が定義されている．

本章では，圧電性弾性導波系が固有モードの伝搬方向に相反線路表示可能となるための条件およびそのときの固有モードの直交性について論じている．すなわち，同じ伝搬定数を持つ前進波，後退波が基本方程式と基本構成式を満足するための条件より相反線路表示可能となる物質定数構造を決定し，その条件を満たす導波系では，固有モードの直交関係式を変形することによりマイクロ波導波管などの導波系における電界，

磁界の断面成分に相当する二つのベクトル量が定義され，固有モードの直交関係式はそれらのベクトル量のスカラ積によって表わされ，等価電圧，電流が定義されることを示している．これらの議論は準静電近似およびその近似をしない一般的取扱いのもとで，2次元および3次元圧電性弾性導波系に対して行なわれており，それぞれの場合が比較対照されている．また，相反線路表示可能となる物質定数構造決定の段階では，固有モードは平面バルク波モードであってもよいため，他の方法による平面バルク波モードに対する結果[10],[11]と比較されている．

2．2　基本式と固有モードの直交性

図2．1は圧電性弾性体で構成された圧電性弾性導波系を示している．圧電性弾性波はx_3方向に伝搬し，断面S（x_1-x_2面）はx_3方向に一様であるとする．$\mathbb{n}$は境界面に垂直な外向きの，また，$\mathbb{k}$は$+x_3$方向の単位ベクトルである．

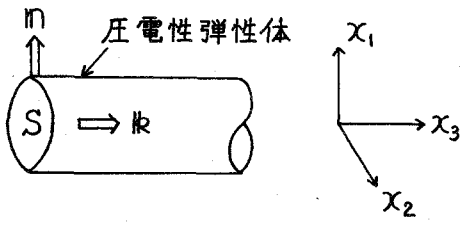


図2．1　圧電性弾性導波系

このとき，圧電性弾性波の界分布は，たとえば，応力に対して，

$$\mathbb{T}(x_1, x_2, x_3; t) = \mathbb{T}(x_1, x_2)\, e^{j\omega t - \gamma x_3} \qquad (2.1)$$

などのように表わされる．ここに，$e^{j\omega t}$は時間因子，γは伝搬定数である．

2．2．1　一般的取扱いのとき

式（2．1）などのように表わされた圧電性弾性波の界分布を外力がないときの圧電性弾性波の満足する基本方程式[1]に代入すると，圧電性弾性導波系（図2．1）における基本方程式は次のように与えられる．

$$\nabla_S : \mathbb{T} - \gamma \mathbb{L} : \mathbb{T} - j\omega\rho \mathbb{V} = 0 \qquad (2.2)$$

$$\nabla_S \cdot \mathbb{V} - \gamma \mathbb{L} \cdot \mathbb{V} - j\omega \mathbb{S} = 0 \qquad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbb{E} - \gamma \mathbb{k} \times \mathbb{E} + j\omega\mu \mathbb{H} = 0 \qquad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbb{H} - \gamma \mathbb{k} \times \mathbb{H} - j\omega \mathbb{D} = 0 \qquad (2.5)$$

ここに，$\mathbb{T}$ (T_I)は応力，$\mathbb{V}$ (V_i)は粒子速度，$\mathbb{S}$ (S_I)はひずみ，$\mathbb{E}$ (E_i)は電界，$\mathbb{H}$ (H_i)は磁界，$\mathbb{D}$ (D_i)は電束密度であり，ρ は弾性体の密度，μ は透磁率である（ただし，$i=1, 2, 3$, $I=1, 2, \cdots\cdots, 6$）．また，

$$\nabla_S := \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\nabla_S} \cdot$$

$$\nabla \times = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & -\partial/\partial x_1 \\ -\partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbb{L}} \cdot$$

である（～は転置マトリクスを意味する）．

また，基本構成式は次式で与えられる[1]．

$$\mathbb{S} = \mathbb{d} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{S}^E : \mathbb{T}, \quad \mathbb{D} = \mathbb{\varepsilon}^T \cdot \mathbb{E} + \mathbb{d} : \mathbb{T} \qquad (2.6)$$

あるいは，

$$\mathbb{T} = -\mathbb{e} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{C}^E : \mathbb{S}, \quad \mathbb{D} = \mathbb{\varepsilon}^S \cdot \mathbb{E} + \mathbb{e} : \mathbb{S} \qquad (2.7)$$

ここに，$\mathbb{d}$ (d_{iJ} あるいは d_{Ij})は圧電ひずみテンソル，$\mathbb{e}$ (e_{iJ} あるいは e_{Ij})は圧電応力テンソルであり，$\mathbb{S}^E$ (S_{IJ}^E)，$\mathbb{C}^E$ (C_{IJ}^E) はそれぞれ $\mathbb{E}$ が一定のときの弾性コンプライアンステンソル，弾性スティフネステンソル，$\mathbb{\varepsilon}^T$ (ε_{ij}^T)，$\mathbb{\varepsilon}^S$ (ε_{ij}^S)はそれぞれ $\mathbb{T}$，$\mathbb{S}$ が一定のときの誘電率テンソルである（ただし，$i, j=1, 2, 3$，$I, J=1, 2, \cdots\cdots, 6$）．また，・はスカラ積，：は二重スカラ積を意味する．

次に，図２．１の導波系における固有モードの直交性について論ずる．

図２．１の導波系において添字m，nを持つ二つの固有モードを考え，演算$\mathbb{V}_n^*\cdot[(2.2)_m]+\mathbb{T}_m:[(2.3)_n^*]-\mathbb{H}_n^*\cdot[(2.4)_m]+\mathbb{E}_m\cdot[(2.5)_n^*]$（ただし，＊は共役複素数を意味する）を行なって得られた式に，その式の共役複素数をとり，mとnを交換した式を加えると次式が得られる．

$$\nabla\cdot[\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n^*+\mathbb{T}_{on}^*\cdot\mathbb{V}_m-\mathbb{E}_m\times\mathbb{H}_n^*-\mathbb{E}_n^*\times\mathbb{H}_m]$$
$$+(\gamma_m+\gamma_n^*)\mathbb{k}\cdot[-\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n^*-\mathbb{T}_{on}^*\cdot\mathbb{V}_m+\mathbb{E}_m\times\mathbb{H}_n^*+\mathbb{E}_n^*\times\mathbb{H}_m]$$
$$+j\omega[\mathbb{T}_m:\mathbb{S}_n^*-\mathbb{T}_n^*:\mathbb{S}_m+\mathbb{E}_m\cdot\mathbb{D}_n^*-\mathbb{E}_n^*\cdot\mathbb{D}_m]=0 \qquad (2.8)$$

ここに，ベクトルおよびテンソルの公式（$\nabla\cdot$は発散を意味する），

$$\nabla\cdot(\mathbb{E}\times\mathbb{H})=\mathbb{H}\cdot(\nabla\times\mathbb{E})-\mathbb{E}\cdot(\nabla\times\mathbb{H}),\quad \mathbb{L}:\mathbb{T}=\mathbb{T}_o\cdot\mathbb{k}$$

$$\nabla\cdot(\mathbb{T}_o\cdot\mathbb{V})=\mathbb{V}\cdot(\nabla_S:\mathbb{T})+\mathbb{T}:(\nabla_S\cdot\mathbb{V}),\quad \mathbb{T}:\mathbb{L}\cdot\mathbb{V}=\mathbb{k}\cdot\mathbb{T}_o\cdot\mathbb{V}=\mathbb{V}\cdot\mathbb{T}_o\cdot\mathbb{k}$$

を用いており，$\mathbb{T}_o$は次のようなものである．

$$\mathbb{T}_o=\begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

式（２．８）の左辺第３項目は式（２．６）あるいは式（２．７）より，

$$s_{IJ}^E=s_{JI}^{E*},\ d_{iJ}=d_{Ji}^*,\ \varepsilon_{ij}^T=\varepsilon_{ji}^{T*}\ \text{あるいは}\ c_{IJ}^E=c_{JI}^{E*},\ e_{iJ}=e_{Ji}^*,\ \varepsilon_{ij}^S=\varepsilon_{ji}^{S*}$$

のとき零であることがわかる．この物質定数に対する条件は弾性体に損失がないときのもの[23]である．このとき，式（２．８）を図２．１の導波系における断面Ｓ上で積分し，周上において，

$$\left.\begin{array}{l}\text{弾性的には，自由；}\mathbb{T}_o\cdot\mathbb{n}=0\ \text{あるいは剛体；}\mathbb{V}=0\\ \text{電気的には，短絡；}\mathbb{E}\times\mathbb{n}=0\ \text{あるいは開放；}\mathbb{H}\times\mathbb{n}=0\end{array}\right\}(2.9)$$

の境界条件を与えると次式が得られる．

$$\int_S\mathbb{k}\cdot[-\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n^*-\mathbb{T}_{on}^*\cdot\mathbb{V}_m+\mathbb{E}_m\times\mathbb{H}_n^*+\mathbb{E}_n^*\times\mathbb{H}_m]dS=0,\quad \gamma_m\neq-\gamma_n^* \qquad (2.10)$$

式（２．10）が固有モード間の直交性を与える式であるが，直交関係

式には共役複素数を意味する記号＊がつかない表示式も可能である．その場合の式というのは，演算$\mathbb{V}_n\cdot[(2.2)_m]+\mathbb{T}_m:[(2.3)_n]-\mathbb{H}_n\cdot[(2.4)_m]+\mathbb{E}_m\cdot[(2.5)_n]$を行なって得られた式から，その式における$m$と$n$を交換して得られた式を差し引き，その結果の式を断面S上で積分し，周上において式（２．９）の境界条件を与えてやると次式のように求まる．

$$\int_S \mathbb{k}\cdot[-\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n+\mathbb{T}_{on}\cdot\mathbb{V}_m+\mathbb{E}_m\times\mathbb{H}_n-\mathbb{E}_n\times\mathbb{H}_m]dS=0\ ,\ \gamma_m\neq-\gamma_n \quad (2.11)$$

ここに，基本構成式（２．６）あるいは（２．７）が用いられているが，この場合には物質定数は対称テンソルでありさえすればよく，したがって，式（２．11）は弾性体に損失がある場合にも成り立つものである．

２．２．２　準静電近似のとき

弾性波の速さは電磁波の速さに比べて約５桁程遅いので，電気量に対して準静電近似が可能である．このとき，式（２．４），（２．５）のかわりに次式が与えられる．

$$\nabla\phi-\gamma\phi\mathbb{k}+\mathbb{E}=0 \quad (2.12)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{D}-\gamma\mathbb{k}\cdot\mathbb{D}=0 \quad (2.13)$$

ここに，$\nabla\phi$は電位ϕの勾配である．

演算$\mathbb{V}_n^*\cdot[(2.2)_m]+\mathbb{T}_m:[(2.3)_n^*]-(j\omega\mathbb{D}_n)^*\cdot[(2.12)_m]+j\omega\phi_m[(2.13)_n^*]$を行なって得られた式に，その式の共役複素数をとり，mとnを交換した式を加え，基本構成式および式（２．９）の境界条件（ただし，電気的には，短絡；$\phi=0$あるいは開放；$\mathbb{D}\cdot\mathbb{n}=0$）を用いると，

$$\int_S \mathbb{k}\cdot[-\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n^*-\mathbb{T}_{on}^*\cdot\mathbb{V}_m+\phi_m(j\omega\mathbb{D}_n)^*+\phi_n^*(j\omega\mathbb{D}_m)]dS=0\ ,\ \gamma_m\neq-\gamma_n^* \quad (2.14)$$

が得られる．ここに，ベクトル公式$\nabla\cdot(\phi\mathbb{D})=\mathbb{D}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\mathbb{D}$を用いた．

また，演算$\mathbb{V}_n\cdot[(2.2)_m]+\mathbb{T}_m:[(2.3)_n]-j\omega\mathbb{D}_n\cdot[(2.12)_m]-j\omega\phi_m[(2.13)_n]$を行なって得られた式から，その式における$m$と$n$を交換して得られた式を差し引き，その結果の式を断面S上で積分し，基本構成式および式（２．９）の境界条件を用いると次式が得られる．

$$\int_S \mathbb{k}\cdot[-\mathbb{T}_{om}\cdot\mathbb{V}_n+\mathbb{T}_{on}\cdot\mathbb{V}_m+\phi_m(j\omega\mathbb{D}_n)-\phi_n(j\omega\mathbb{D}_m)]dS=0,\ \gamma_m\neq-\gamma_n \quad (2.15)$$

式（２．14），（２．15）が準静電近似のもとでの固有モード間の直交関係式である．式（２．14）は弾性体に損失がないときのものであり，式（２．15）は弾性体に損失がある場合にも成り立つものである．

２．３　３次元導波系の場合

この節では，一般的取扱いおよび準静電近似のもとで，図２．１のような3次元の圧電性弾性導波系がx_3方向に相反線路表示可能となるための条件およびそのときの固有モードの直交性について論ずる．

２．３．１　相反線路表示のための条件

相反線路表示のための条件を求めるために基本方程式と基本構成式を満足する因子$e^{j\omega t-\gamma x_3}$を持つ前進波，因子$e^{j\omega t+\gamma x_3}$を持つ後退波を考える．そして，それぞれは界分布の右肩に＋，－を書くことにより示される（γの虚部は正である）．

まず，式（２．２）を成分に分けると，前進波に対しては，

$$\left.\begin{aligned}\partial T_1^+/\partial x_1+\partial T_6^+/\partial x_2-\gamma T_5^+-j\omega\rho V_1^+=0\\ \partial T_2^+/\partial x_2+\partial T_6^+/\partial x_1-\gamma T_4^+-j\omega\rho V_2^+=0\\ \partial T_4^+/\partial x_2+\partial T_5^+/\partial x_1-\gamma T_3^+-j\omega\rho V_3^+=0\end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

が得られる．また，後退波に対しては式（２．16）におけるγを$-\gamma$に書き換えた式（ただし，右肩の＋も－に書き換える）が得られる．この

とき，これら前進波，後退波に対する式を比較すると，前進波に対して，同じ伝搬定数γを持ち，次の関係を満たす後退波は許される解であることがわかる．

$$\left.\begin{array}{l} T_1^- = T_1^+,\ T_2^- = T_2^+,\ T_3^- = T_3^+,\ T_4^- = -T_4^+,\ T_5^- = -T_5^+ \\ T_6^- = T_6^+,\ V_1^- = V_1^+,\ V_2^- = V_2^+,\ V_3^- = -V_3^+ \end{array}\right\} \quad (2.17)$$

また，式（２．３）に対しても同様に成分に分け，前進波，後退波に対する式を比較すると，式（２．17）が成り立つとき，ひずみ$\mathbb{S}$に対して次の関係は許されるものであることがわかる．

$$S_1^- = S_1^+,\ S_2^- = S_2^+,\ S_3^- = S_3^+,\ S_4^- = -S_4^+,\ S_5^- = -S_5^+,\ S_6^- = S_6^+ \quad (2.18)$$

なお，式（２．17），（２．18）は同時に成り立つものであるが，前進波の界分布の前の符号が反転した関係† も許されるものである．

次に，式（２．４），（２．５）についても成分に分け，前進波，後退波に対する式を比較すると，前進波に対して，同じ伝搬定数γを持ち，次の関係を満たす後退波は許される解であることがわかる．

$$\mathbb{E}_t^- = \mathbb{E}_t^+,\ E_3^- = -E_3^+,\ \mathbb{H}_t^- = -\mathbb{H}_t^+,\ H_3^- = H_3^+,\ \mathbb{D}_t^- = \mathbb{D}_t^+,\ D_3^- = -D_3^+ \quad (2.19)$$

あるいは，

$$\mathbb{E}_t^- = -\mathbb{E}_t^+,\ E_3^- = E_3^+,\ \mathbb{H}_t^- = \mathbb{H}_t^+,\ H_3^- = -H_3^+,\ \mathbb{D}_t^- = -\mathbb{D}_t^+,\ D_3^- = D_3^+ \quad (2.20)$$

ここに，添字tは断面成分を意味する．

ところで，圧電性弾性波の前進波，後退波は基本構成式（２．６）あるいは（２．７）を満足するので，式（２．17），（２．18）と式（２．19）あるいは（２．20）が成り立つためには物質定数に制限が加わる．物質定数構造が表２．１あるいは表２．２†† のとき，式（２．17），（

---

† たとえば，$T_1^- = -T_1^+$，$V_1^- = -V_1^+$，$S_1^- = -S_1^+$，$S_4^- = S_4^+$ などの関係．

†† この物質定数構造の表わし方は文献(24)に準じている．

2．18）と式（2．19）あるいは（2．20）は満足される．ここに，基本構成式としては式（2．6）を用いている．

表2．1　式（2.17），（2.18）（2.19）が成り立つための物質定数構造

	$\mathbb{T}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{S}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	・	・	・	○	○	・	・	・	○
	・	・	・	○	○	・	・	・	○
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
$\mathbb{D}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	・	・	・	○	○	・	・	・	○

表2．2　式（2.17），（2.18）（2.20）が成り立つための物質定数構造

	$\mathbb{T}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{S}$	○	○	○	・	・	○	・	・	○
	○	○	○	・	・	○	・	・	○
	○	○	○	・	・	○	・	・	○
	・	・	・	○	○	・	○	○	・
	・	・	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	・	・	○
$\mathbb{D}$	・	・	・	○	○	・	○	○	・
	・	・	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	・	・	○

表2．1，2．2において，6行6列の成分は$\mathbb{S}^E$，3行6列（あるいは6行3列）の成分は$\mathbb{d}$，3行3列の成分は$\mathbb{\varepsilon}^T$の成分であり†，・印はその成分が零，○印は零でなくてもよいことを意味する．

つまり，表2．1あるいは表2．2の物質定数構造を持つ圧電物質では，式（2．17），（2．18）と式（2．19）あるいは（2．20）によって前進波の界分布と関係づけられる後退波が前進波と同じ伝搬定数を

---

† 基本構成式として式（2．7）を用いるとき，物質定数構造としては$\mathbb{c}^E$，$\mathbb{e}$，$\mathbb{\varepsilon}^S$に対するものになるが，・，○印の配置は表2．1，2．2と同じものになる．

持って伝搬可能であるということになる．

次に，準静電近似のときについて考える．このときには式（２．12），（２．13）が成り立つが，これらの式に対しても一般的取扱いのときと同様に，成分に分け，前進波，後退波に対する式を比較すると，前進波に対して，同じ伝搬定数γを持ち，次の関係を満たす後退波は許される解であることがわかる†（添字tは断面成分を意味する）．

$$\phi^- = \phi^+,\ \mathbb{E}_t^- = \mathbb{E}_t^+,\ E_3^- = -E_3^+,\ \mathbb{D}_t^- = \mathbb{D}_t^+,\ D_3^- = -D_3^+ \qquad (2.21)$$

あるいは，

$$\phi^- = -\phi^+,\ \mathbb{E}_t^- = -\mathbb{E}_t^+,\ E_3^- = E_3^+,\ \mathbb{D}_t^- = -\mathbb{D}_t^+,\ D_3^- = D_3^+ \qquad (2.22)$$

式（２．17），（２．18）と式（２．21）あるいは（２．22）の関係に対して基本構成式を検討すると，それぞれの関係は，この場合にも，表２．１あるいは表２．２の物質定数構造において成り立つことがわかる．

なお，弾性量に対する関係式（２．17），（２．18）において前進波の界分布の前の符号が反転した関係の場合には，電気量として式（２．20）（準静電近似のときには式（２．22））あるいは式（２．19）（準静電近似のときには式（２．21））の場合がそれぞれ表２．１あるいは表２．２の物質定数構造において成り立つことがわかる．

２．３．２　固有モードの変形直交性

ここでは，表２．１あるいは表２．２の物質定数構造を持つ圧電物質で構成された3次元導波系においては，固有モードの直交関係式を変形

---

† 式（２．12），（２．13）より$\phi^- = \phi^+$, $\mathbb{E}_t^- = \mathbb{E}_t^+$, $E_3^- = -E_3^+$, $\mathbb{D}_t^- = -\mathbb{D}_t^+$, $D_3^- = D_3^+$ あるいは $\phi^- = -\phi^+$, $\mathbb{E}_t^- = -\mathbb{E}_t^+$, $E_3^- = E_3^+$, $\mathbb{D}_t^- = \mathbb{D}_t^+$, $D_3^- = -D_3^+$ の関係も得られるが，このときには基本構成式より$\varepsilon_{11} = 0$が条件に入ってくるので除かれる．

し，固有モードの定義を若干変更することによりマイクロ波導波管などの導波系における電界，磁界の断面成分に相当する二つのベクトル量が定義され，それら二つのベクトル量のスカラ積によって固有モードの直交関係式が表わされることを示している．

固有モードm，nが共に前進波のとき，固有モードの直交関係式（2.10）におけるベクトルおよびテンソル量を成分に分けることにより，その式は次式のように変形して書かれ得ることがわかる．

$$\int_S \left[\mathbb{W}_n^{+*} \cdot \mathbb{K}_m^{+} + \mathbb{W}_m^{+} \cdot \mathbb{K}_n^{+*} \right] dS = 0 \ , \ \gamma_m \neq -\gamma_n^* \qquad (2.23)$$

ここに，・はスカラ積を意味しており，

$$\mathbb{W}_m^{+} = \left[V_{m1}^{+}, V_{m2}^{+}, T_{m3}^{+}, E_{m1}^{+}, E_{m2}^{+} \right], \quad \mathbb{K}_n^{+} = \left[-T_{n5}^{+}, -T_{n4}^{+}, -V_{n3}^{+}, H_{n2}^{+}, -H_{n1}^{+} \right] \qquad (2.24)$$

あるいは，

$$\mathbb{W}_m^{+} = \left[V_{m1}^{+}, V_{m2}^{+}, T_{m3}^{+}, H_{m2}^{+}, H_{m1}^{+} \right], \quad \mathbb{K}_n^{+} = \left[-T_{n5}^{+}, -T_{n4}^{+}, -V_{n3}^{+}, E_{n1}^{+}, -E_{n2}^{+} \right] \qquad (2.25)$$

であり，$\mathbb{W}_n^{+}$，$\mathbb{K}_m^{+}$は添字m，nを交換したものである．

次に，固有モードmは前進波，nは後退波であるとき，

$$\int_S \left[\mathbb{W}_n^{-*} \cdot \mathbb{K}_m^{+} + \mathbb{W}_m^{+} \cdot \mathbb{K}_n^{-*} \right] dS = 0, \ \gamma_m \neq \gamma_n^* \qquad (2.26)$$

が得られる．ここに，$\mathbb{W}_n^{-}$，$\mathbb{K}_n^{-}$ は次のようなものである．

$$\mathbb{W}_n^{-} = \left[V_{n1}^{-}, V_{n2}^{-}, T_{n3}^{-}, E_{n1}^{-}, E_{n2}^{-} \right], \quad \mathbb{K}_n^{-} = \left[-T_{n5}^{-}, -T_{n4}^{-}, -V_{n3}^{-}, H_{n2}^{-}, -H_{n1}^{-} \right] \qquad (2.27)$$

あるいは，

$$\mathbb{W}_n^{-} = \left[V_{n1}^{-}, V_{n2}^{-}, T_{n3}^{-}, H_{n2}^{-}, H_{n1}^{-} \right], \quad \mathbb{K}_n^{-} = \left[-T_{n5}^{-}, -T_{n4}^{-}, -V_{n3}^{-}, E_{n1}^{-}, -E_{n2}^{-} \right] \qquad (2.28)$$

式（2.24）と（2.27），式（2.25）と（2.28）はそれぞれ表2.1，2.2において関係づけられ，それらの式における前進波，後退波のモード関数は次式の関係を満足している．

$$\mathbb{W}_n^{-} = \mathbb{W}_n^{+}, \quad \mathbb{K}_n^{-} = -\mathbb{K}_n^{+} \qquad (2.29)$$

式（２．29）を用いて後退波である固有モードnのモード関数を前進波のものに変換してやると，式（２.26）は式（２.23）における和を表わす＋を差を表わす－にした式になる．この結果得られた式と式（2.23）を連立にすると次式が得られる†．

$$\int_S \mathbb{W}_m^+ \cdot \mathbb{K}_n^{+*} dS = 0, \quad \gamma_m \neq -\gamma_n^* \qquad (2.30)$$

次に，固有モードの直交関係式として式（２．11）を用いるとき，同様な過程を踏むと式（２．30）に対応して次式が得られる（付録１参照）．

$$\int_S \mathbb{U}_m^+ \cdot \mathbb{I}_n^+ dS = 0, \quad \gamma_m \neq \gamma_n \qquad (2.31)$$

ここに，

$$\mathbb{U}_m^+ = [V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, E_{m2}^+], \quad \mathbb{I}_n^+ = [-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, -H_{n2}^+, H_{n1}^+] \qquad (2.32)$$

あるいは，

$$\mathbb{U}_m^+ = [V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, H_{m1}^+], \quad \mathbb{I}_n^+ = [-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, E_{n1}^+, -E_{n2}^+] \qquad (2.33)$$

であり，それぞれは表２．１あるいは２．２に対応し，次式が成り立つ．

$$\mathbb{U}_n^- = \mathbb{U}_n^+, \quad \mathbb{I}_n^- = -\mathbb{I}_n^+ \qquad (2.34)$$

また，準静電近似のときの固有モードの直交関係式（２．14），（2.15）に対しても，同様に，固有モードm，nが共に前進波のときの式と固有モードnが後退波（mは前進波）であるときの式（ただし，後退波nは式（２．17），（２．21）あるいは（２．22），それぞれは表２．１，

---

† 前進波，後退波はそれぞれ因子$e^{-\gamma x_3}$，$e^{\gamma x_3}$を持ち，しかも，γの虚部は正であるので，式（２．26）に示された$\gamma_m \neq \gamma_n^*$は常に成り立つ．つまり，式（２．26）に示された積分は常に零であり，式（２．23）と連立にして得られた式（2.30）には$\gamma_m \neq -\gamma_n^*$が条件に入る．

2．2の場合に対応している，に従って前進波に変換される）を連立にすると，式（2．30），（2．31）の形の式が得られる．ただし，

$$\mathbb{W}_m^+=[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, \phi_m^+],\quad \mathbb{K}_n^+=[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, j\omega D_{n3}^+] \qquad (2.35)$$

あるいは，

$$\mathbb{W}_m^+=[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+],\quad \mathbb{K}_n^+=[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, \phi_n^+] \qquad (2.36)$$

であり，また，

$$\mathbb{U}_m^+=[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, \phi_m^+],\quad \mathbb{I}_n^+=[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, -j\omega D_{n3}^+] \qquad (2.37)$$

あるいは，

$$\mathbb{U}_m^+=[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+],\quad \mathbb{I}_n^+=[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, \phi_n^+] \qquad (2.38)$$

である．式（2．35），（2．37）あるいは式（2．36），（2．38）はそれぞれ表2．1あるいは表2．2の場合に対応しており，前進波，後退波に対して式（2．29），（2．34）が成り立っている．

前進波の固有モード関数として $\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{K}_n^+$ あるいは $\mathbb{U}_m^+$, $\mathbb{I}_n^+$ を用いるとき，それらは直交関係式（2．30）あるいは（2．31）を満足しており，また，後退波の固有モード関数とは式（2．29）あるいは（2．34）で関係づけられているので，$\mathbb{W}_m^+$，$\mathbb{U}_m^+$ あるいは $\mathbb{K}_n^+$，$\mathbb{I}_n^+$ はそれぞれマイクロ波導波管などにおける電界あるいは磁界の断面成分に相当していることがわかる．

なお，式（2．24），（2．32），（2．35），（2．37）は表2．1の場合に，式（2．25），（2．33），（2．36），（2．38）は表2．2の場合に対応しているが，それぞれの表のような物質定数構造では，2．3．1の最後（p．14）で述べられたことより，$\mathbb{W}_m^+$ と $\mathbb{K}_n^+$ の成分を，また，$\mathbb{U}_m^+$ と $\mathbb{I}_n^+$ の成分を全く入れかえた表示も可能である（この表示の場合にも式（2．29），（2．34）を満足する固有モードの直交関係式は式（2．30），（2．31）で与えられる）ことがわかる．

したがって，$\mathbb{W}_m^+$，$\mathbb{K}_n^+$ あるいは $\mathbb{U}_m^+$，$\mathbb{I}_n^+$ としてどちらの表示のものを用いるかは実際の個々の問題において検討され，式（２．29），（２．34）が満足されるように決定されねばならない．

２．４　２次元導波系の場合

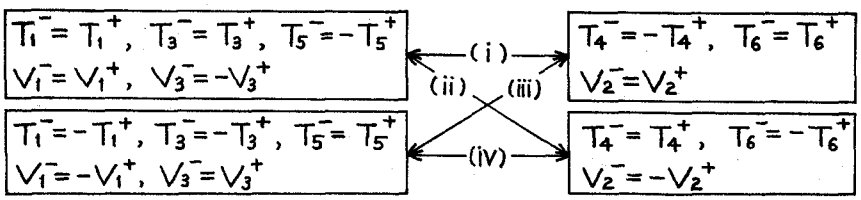
この節では，２．３と同様な議論を２次元導波系，たとえば，無限平板などに対して行なう．すなわち，一般的取扱いおよび準静電近似のもとで，２次元の圧電性弾性導波系が固有モードの伝搬方向に相反線路表示可能となるための条件およびそのときの固有モードの直交性について論ずる．

２．４．１　相反線路表示のための条件

弾性波は x_3 方向に伝搬し，x_2 方向には変化しないとする．このとき，式（２．２）を成分に分けると，前進波に対して次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \partial T_1^+/\partial x_1 - \gamma T_5^+ - j\omega\rho V_1^+ &= 0 \\ \partial T_6^+/\partial x_1 - \gamma T_4^+ - j\omega\rho V_2^+ &= 0 \\ \partial T_5^+/\partial x_1 - \gamma T_3^+ - j\omega\rho V_3^+ &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.39)$$

ここに，右肩の＋は $+x_3$ 方向に伝搬する前進波（因子 $e^{j\omega t-\gamma x_3}$ を持つ）を表わしており，後退波（右肩に－をつけて表わす）に対しては，式（２．39）における γ を $-\gamma$ に書き換えた式が得られる．このとき，これら前進波，後退波に対する式を比較すると，前進波に対して，同じ伝搬定数 γ を持ち，次の関係（矢印で結ばれる４通りの組み合わせ）を満たす後退波は許される解であることがわかる．



なお，$\partial/\partial x_2=0$ のために T_2^+ は式（２．39）に現われてこない（T_2^- についても同様）．つまり，$T_2^\pm$ に対する関係は考慮される必要がない．

次に，式（２．３）に対しても成分に分け，前進波，後退波に対する式を比較すると，前述の（i）～（iv）それぞれの組み合わせに対して次の関係は許されるものであることがわかる．

(i) のとき：$S_1^-=S_1^+,\ S_3^-=S_3^+,\ S_4^-=-S_4^+,\ S_5^-=-S_5^+,\ S_6^-=S_6^+$

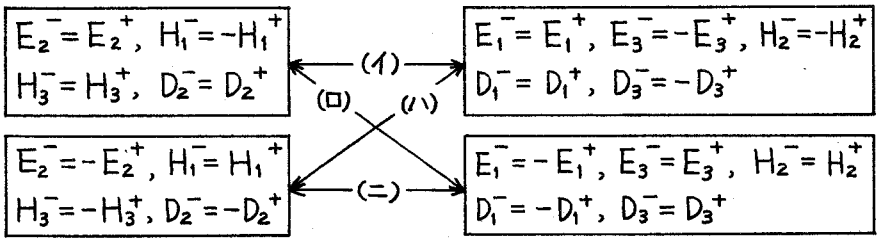
(ii) のとき：$S_1^-=S_1^+,\ S_3^-=S_3^+,\ S_4^-=S_4^+,\ S_5^-=-S_5^+,\ S_6^-=-S_6^+$

(iii) のとき：$S_1^-=-S_1^+,\ S_3^-=-S_3^+,\ S_4^-=-S_4^+,\ S_5^-=S_5^+,\ S_6^-=S_6^+$

(iv) のとき：$S_1^-=-S_1^+,\ S_3^-=-S_3^+,\ S_4^-=S_4^+,\ S_5^-=S_5^+,\ S_6^-=-S_6^+$

ただし，$\partial/\partial x_2=0$ のために $S_2^\pm=0$ である．

一方，式（２．４），（２．５）に対しても同様な議論を行なうと，次の関係（矢印で結ばれる４通りの組み合わせ）を満たす後退波は許される解であることがわかる．



つまり，圧電性弾性波においては，前進波に対して，同じ伝搬定数 γ を持ち，（i）～（iv）と（イ）～（ニ）の組み合わせ（計16通り）を満たす後退波は許される解であることになる．

基本構成式として式（２．７）を用い†，（i）～（iv）と（イ）～（ニ）の組み合わせを満足する前進波，後退波が存在するための条件を検討すると，

---

† 基本構成式として式（２．６）を用いるとき，考慮される必要のない $T_2^\pm$ に対する関係を用いる必要があり，式（２．６）は適当でない．

表２．３～２．10の物質定数構造を持つ圧電物質では（i）～（iv）と（イ）～(ニ)の組み合わせは満足されることがわかる．

表２．３　（i）と(イ)，（iv）と(ニ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	・	・	○
	・	○	・	○	○	・	・	・	○
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
$\mathbb{D}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	・	・	○

表２．４　（i）と(ロ)，（iv）と(ハ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	・	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	・	○	○
	・	○	・	○	○	・	○	・	・
	・	○	・	○	○	・	○	・	・
	○	○	○	・	・	○	・	○	○
$\mathbb{D}$	・	○	・	○	○	・	○	・	・
	○	○	○	・	・	○	・	○	○
	○	○	○	・	・	○	・	○	○

表２．５　（i）と(ハ)，（iv）と(ロ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	○	・	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	○	・	・
	・	○	・	○	○	・	・	○	○
	・	○	・	○	○	・	・	○	○
	○	○	○	・	・	○	○	・	・
$\mathbb{D}$	○	○	○	・	・	○	○	・	・
	・	○	・	○	○	・	・	○	○
	・	○	・	○	○	・	・	○	○

表２．６　（i）と(ニ)，（iv）と(イ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	・	・	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	・	・	○
	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	・	・	○
$\mathbb{D}$	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	・	・	○

表2．7　(ii)と(イ)，(iii)と(ニ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	・	・	○
	・	○	・	・	○	○	・	・	○
$\mathbb{D}$	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	・	・	○

表2．8　(ii)と(ロ)，(iii)と(ハ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	・	○	・	・	○	○	○	・	・
	・	○	・	・	○	○	○	・	・
$\mathbb{D}$	・	○	・	・	○	○	○	・	・
	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○

表2．9　(ii)と(ハ)，(iii)と(ロ)の組み合わせの場合

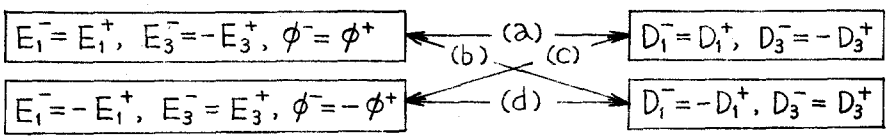
	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	○	・	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	○	・	・
	○	○	○	○	・	・	○	・	・
	・	○	・	・	○	○	・	○	○
	・	○	・	・	○	○	・	○	○
$\mathbb{D}$	○	○	○	○	・	・	○	・	・
	・	○	・	・	○	○	・	○	○
	・	○	・	・	○	○	・	○	○

表2．10　(ii)と(ニ)，(iii)と(イ)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	・	・	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	・	○
	○	○	○	○	・	・	・	・	○
	・	○	・	・	○	○	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	○	○	・
$\mathbb{D}$	・	○	・	・	○	○	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	○	○	・
	○	○	○	○	・	・	・	・	○

表2．3～2．10において，6行6列の成分は$\mathbb{C}^E$，3行6列（あるいは6行3列）の成分は$\mathbb{C}$，3行3列の成分は$\mathbb{E}^S$の成分であり，・印はその成分が零，○印は零でなくてもよいことを意味する．

次に，準静電近似のときにも，式（２．12），（２．13）を成分に分け，前進波，後退波に対する式を比較すると，前進波に対して，同じ伝搬定数γを持ち，次の関係（矢印で結ばれる４通りの組み合わせ）を満たす後退波は許される解であることがわかる．



なお，$\partial/\partial x_2 = 0$ のために $E_2^{\pm} = 0$ であり，また，$D_2^{\pm}$ に対する関係は考慮される必要がない．

基本構成式として式（２．７）を用い，(i)～(iv)と（a)～(d)の組み合わせを満足する前進波，後退波が存在するための条件を検討すると，表２．11～２．14の物質定数構造を持つ圧電物質ではそれらの組み合わせは満足されることがわかる（ただし，(b)，(c)の場合は $\varepsilon_{11}^S = 0$ が条件に入ってくるので除かれる）．

表２．11　(i)と(a)，(iv)と(d)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	・	○	○
	・	○	・	○	○	・	・	○	○
	○	○	○	・	・	○	○	○	・
$\mathbb{D}$	○	○	○	・	・	○	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	・	○	・	○	○	・	・	○	○

表２．12　(i)と(d)，(iv)と(a)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	・	・	○	・	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	・	○	○
	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	・	・	○	・	○	○
$\mathbb{D}$	・	○	・	○	○	・	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	・	・	○	・	○	○

表2．13　(ii)と(a)，(iii)と(d)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	・	○	○
	・	○	・	・	○	○	・	○	○
$\mathbb{D}$	○	○	○	○	・	・	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	・	○	・	・	○	○	・	○	○

表2．14　(ii)と(d)，(iii)と(a)の組み合わせの場合

	$\mathbb{S}$						$\mathbb{E}$		
$\mathbb{T}$	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○
	・	○	・	・	○	○	○	○	・
	・	○	・	・	○	○	○	○	・
$\mathbb{D}$	・	○	・	・	○	○	○	○	・
	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	・	・	・	○	○

なお，表2．11～2．14においても，・印はその成分が零，○印は零でなくてもよいことを意味している．

表2．1～2．14の物質定数構造を決定する段階では基本方程式および基本構成式のみを用いており，したがって，得られた物質定数構造はバルク波に対してもあてはまるものである．平面バルク波モードに対しては疋田ら[10]，田中ら[11]が論じており，表2．3，2．6は疋田らによって取り扱われており†，また，表2．11～2．14は田中らの結果と一致している††．

---

† ただし，疋田らは計算まちがいをしており，$C_{24}^{E}=C_{25}^{E}=0$ も物質定数に対する制限に入れている．

†† ただし，田中らの座標系の取り方は本節でのものと異なっているため，物質定数の添字は異なっている．

2．4．2　固有モードの変形直交性

2次元圧電性弾性導波系での固有モードの直交関係式は，圧電結晶表面に式（2．9）の境界条件を与えるとき，3次元導波系での式（2．10），（2．11），（2．14），（2．15）における断面Sに関する積分をx_1に関する積分にした式で与えられる．このとき，それぞれの式におけるベクトルおよびテンソル量を成分に分け，2．3．2と同様に，固有モードm，nが共に前進波のときの式と固有モードmは前進波であるが，nは後退波であるときの式（ただし，後退波nは表2．3～2．14に示される組み合わせに従って前進波に変換される）を連立にすると，固有モードの直交関係式は次のように変形されたものになる．

$$\int \mathbb{W}_m^+ \cdot \mathbb{K}_n^{+*} dx_1 = 0 \quad (\gamma_m \neq -\gamma_n^*), \quad \int \mathbb{U}_m^+ \cdot \mathbb{I}_n^+ dx_1 = 0 \quad (\gamma_m \neq \gamma_n) \qquad (2.40)$$

ここに，前者は式（2．10），（2．14）に，また，後者は式（2．11），（2．15）に対応しており，＋は前進波，＊は共役複素数，・はスカラ積を意味している．そして，$\mathbb{W}_m^+$，$\mathbb{K}_n^+$，$\mathbb{U}_m^+$，$\mathbb{I}_n^+$ は表2．15に与えられており，後退波のモード関数とは次の関係で結ばれている．

$$\mathbb{W}_m^- = \mathbb{W}_m^+, \quad \mathbb{K}_n^- = -\mathbb{K}_n^+, \quad \mathbb{U}_m^- = \mathbb{U}_m^+, \quad \mathbb{I}_n^- = -\mathbb{I}_n^+ \qquad (2.41)$$

表2．15における#1～12の場合はそれぞれ表2．3～2．14に示された組み合わせのうち前者のものに対応しており，後者の組み合わせの場合はそれぞれ#1～12で与えられる$\mathbb{W}_m^+$と$\mathbb{K}_n^+$，$\mathbb{U}_m^+$と$\mathbb{I}_n^+$それぞれに対し，お互いの成分を全く入れ換えたものになる†．なお，$\mathbb{W}_m^+$，$\mathbb{K}_n^+$などの2通りの可能性に対する注意事項は2．3．2の最後に述べてある．

---

† たとえば，(iv)と(ニ)の組み合わせ（表2．3）の場合は$\mathbb{W}_m^+ = [-T_{m5}^+, -T_{m4}^+, -V_{m3}^+, H_{m2}^+, -H_{m1}^+]$，$\mathbb{K}_n^+ = [V_{n1}^+, V_{n2}^+, T_{n3}^+, E_{n1}^+, E_{n2}^+]$などと与えられることになる．

表2．15　2次元圧電性弾性導波系における直交固有モード関数

（#1～12はそれぞれ表2．3～2．14に対応する）

		$\mathbb{W}_m^+$(上段)，$\mathbb{K}_n^+$(下段)	$\mathbb{U}_m^+$(上段)，$\mathbb{I}_n^+$(下段)
一般的取扱い	#1	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, H_{n2}^+, -H_{n1}^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, -H_{n2}^+, H_{n1}^+]$
	#2	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, E_{n1}^+, -H_{n1}^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, E_{n1}^+, H_{n1}^+]$
	#3	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, H_{n2}^+, -E_{n2}^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, -H_{n2}^+, -E_{n2}^+]$
	#4	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, E_{n1}^+, -E_{n2}^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, E_{n1}^+, -E_{n2}^+]$
	#5	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, H_{n2}^+, -H_{n1}^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, -H_{n2}^+, H_{n1}^+]$
	#6	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, E_{n1}^+, -H_{n1}^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, E_{m2}^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, E_{n1}^+, H_{n1}^+]$
	#7	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, H_{n2}^+, -E_{n2}^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, E_{m1}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, -H_{n2}^+, -E_{n2}^+]$
	#8	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, E_{n1}^+, -E_{n2}^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, H_{m2}^+, H_{m1}^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, E_{n1}^+, -E_{n2}^+]$
準静電近似	#9	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, \phi_m^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, j\omega D_{n3}^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, \phi_m^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, -j\omega D_{n3}^+]$
	#10	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, -V_{n3}^+, \phi_n^+]$	$[V_{m1}^+, V_{m2}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+]$ $[-T_{n5}^+, -T_{n4}^+, V_{n3}^+, \phi_n^+]$
	#11	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, \phi_m^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, j\omega D_{n3}^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+ T_{m3}^+, \phi_m^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, -j\omega D_{n3}^+]$
	#12	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+]$ $[-T_{n5}^+, -V_{n2}^+, -V_{n3}^+, \phi_n^+]$	$[V_{m1}^+, T_{m4}^+, T_{m3}^+, j\omega D_{m3}^+]$ $[-T_{n5}^+, V_{n2}^+, V_{n3}^+, \phi_n^+]$

前進波の固有モード関数として$\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{K}_n^+$あるいは$\mathbb{U}_m^+$, $\mathbb{I}_n^+$を用いるとき，固有モードの直交関係式は式（2．40）で，また，後退波の固有モード関数との関係式は式（2．41）で与えられ，これらの関係式の形は3次元導波系の場合と同じである．

表2．1，2．2（3次元導波系の場合）あるいは表2．3～2．14（2次元導波系の場合）の物質定数構造を持つ圧電物質で構成された導波系では，$+x_3$方向に伝搬する前進波モードに対し，同じ伝搬定数を持ち，$-x_3$方向に伝搬する後退波モードは存在可能であり，その後退波モード関数は式（2．29），（2．34）（3次元導波系の場合），式（2．41）（2次元導波系の場合）で前進波のモード関数と関係づけられている．したがって，$\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{U}_m^+$はマイクロ波導波管などの導波系における電界の断面成分に，また，$\mathbb{K}_n^+$, $\mathbb{I}_n^+$は磁界の断面成分に相当していることがわかり，表2．1～2．14はx_3方向に相反線路表示可能となるための条件を与えていることがわかる．なお，$\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{K}_n^+$に対する直交関係式は物質に損失がないときに成り立つものであり，$\mathbb{U}_m^+$, $\mathbb{I}_n^+$に対するものは物質に損失があってもよい．

2．5　等価電圧，電流

この節では，2．3，2．4で定義された$\mathbb{W}_m^+$, $\mathbb{K}_n^+$あるいは$\mathbb{U}_m^+$, $\mathbb{I}_n^+$を用いて，等価電圧，電流について論ずる．

圧電性弾性導波系（ただし，周上での境界条件は式（2．9）で与えられるものとする）に前進波，後退波の固有モードが多く存在するとき，その結果としての界分布はそれらの和により次のように表わされる．

$$\mathbb{W}=\sum_m[A_m e^{-\gamma_m x_3}+B_m e^{\gamma_m x_3}]\mathbb{W}_m^+,\quad \mathbb{K}=\sum_m[A_m e^{-\gamma_m x_3}-B_m e^{\gamma_m x_3}]\mathbb{K}_m^+ \qquad (2.42)$$

あるいは，

$$\mathbb{U}=\sum_m\left[A_m e^{-\gamma_m x_3}+B_m e^{\gamma_m x_3}\right]\mathbb{U}_m^+,\ \mathbb{I}=\sum_m\left[A_m e^{-\gamma_m x_3}-B_m e^{\gamma_m x_3}\right]\mathbb{I}_m^+ \qquad (2.43)$$

ここに，時間因子 $e^{j\omega t}$ は省略されており，A_m，B_mはそれぞれ前進波，後退波mモードの振巾である．このとき，

$$\left.\begin{aligned} A_m e^{-\gamma_m x_3}+B_m e^{\gamma_m x_3} &= \begin{cases} W_m(x_3)：式(2.42)に対して \\ U_m(x_3)：式(2.43)に対して \end{cases} \\ A_m e^{-\gamma_m x_3}-B_m e^{\gamma_m x_3} &= \begin{cases} K_m(x_3)：式(2.42)に対して \\ I_m(x_3)：式(2.43)に対して \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (2.44)$$

とおくと，$W_m(x_3)$，$U_m(x_3)$はマイクロ波導波管などの導波系における等価電圧に，また，$K_m(x_3)$，$I_m(x_3)$は等価電流に対応づくことがわかる．

ところで，2．3，2．4で得られた固有モードの直交関係式は伝搬定数が一般に複素数の場合のものであり，$\mathbb{U}_m^+$，$\mathbb{I}_n^+$に対する直交関係式については固有モード関数を正規化することにより次式が得られる．

$$\int_S \mathbb{U}_m^+\cdot\mathbb{I}_n^+ dS=\delta_{mn} \qquad (2.45)$$

ここに，δ_{mn}はKronecker のデルタ関数である．また，$\mathbb{W}_m^+$，$\mathbb{K}_n^+$に対する場合には伝搬定数が純虚数のとき次式が得られる．

$$\int_S \mathbb{W}_m^+\cdot\mathbb{K}_n^{+*} dS=\delta_{mn} \qquad (2.46)$$

このとき，式(2．42)～(2．46)より次式が得られることがわかる．

$$W_m(x_3)=\int_S \mathbb{W}\cdot\mathbb{K}_m^{+*}dS,\ K_m(x_3)=\int_S \mathbb{W}_m^{+*}\cdot\mathbb{K}dS,\ U_m(x_3)=\int_S \mathbb{U}\cdot\mathbb{I}_m^+ dS,\ I_m(x_3)=\int_S \mathbb{U}_m^+\cdot\mathbb{I}dS$$

また，式（２．46）が成り立つとき，式（２．42）を用いることにより，圧電性弾性導波系の断面を$+x_3$方向に通過する平均電力P_oは次のように与えられることがわかる．

$$P_o = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\int_S \mathbb{W}\cdot\mathbb{K}^* dS = \frac{1}{2}\sum_m \left[\,|A_m|^2 - |B_m|^2\,\right] \quad (2.47)$$

ここに，$\mathbb{W}\cdot\mathbb{K}^*/2$ は複素ポインチングベクトルの$+x_3$方向成分であり†，Re はその実部を意味し，また，｜｜は絶対値を意味する．

式（２．47）はマイクロ波導波管などの導波系における電力関係式と同じであることがわかる．

２．６　結　言

準静電近似およびその近似をしない一般的取扱いのもとで，２次元および３次元圧電性弾性導波系に対し，固有モードの伝搬方向に相反線路表示可能となる物質定数構造を決定した．そして，その物質定数構造を持つ物質で構成された導波系では，マイクロ波導波管などの導波系における電界，磁界の断面成分に相当する二つのベクトル量が定義され，等価電圧，電流が定義され得ることを示した．その二つのベクトル量は，同じ伝搬定数を持つ前進波，後退波が基本式と固有モードの直交関係式を満足することより得られており，その方法論としては一般的である．

---

† 式（２．２）～（２．５）の共役複素数をとることにより得られる前進波，後退波モード関数間の関係と式（２．29）の関係を考慮すると，複素ポインチングベクトルの$+x_3$方向成分は$\mathbb{W}\cdot\mathbb{K}^*/2$で与えられることがわかる．なお，異なったモード間で運ばれる平均電力については文献(51)で論じられている．

第 3 章　圧電性弾性導波系の同一断面形状接続部における散乱係数の変分表示式[25]～[27]

3．1　序言

不連続部分を持つ弾性導波系における散乱問題の厳密な解析は一般には非常に困難である．物質の異なった二つの弾性導波系が断面形状を同じくして接続されたときの散乱問題に限っても，無限平板におけるラム波[28]，[29]が接続部に垂直入射するときの散乱問題，特に，その弾性体が等方体であるという基本的な問題でさえ解析されていないようである．弾性体が圧電結晶などではこの種の問題の厳密な解析は不可能に近いと思われる．このようなとき，近似法としてマイクロ波工学での中心概念の一つであり，有効な手段である変分法が考えられ，散乱係数に対する変分表示式が得られると電力関係の把握などの上で大きな力を発揮することが期待される．

本章は，第2章で定義された正規直交固有モード関数を用い，構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が断面形状を同じくして接続されたときのその接続部における散乱係数の変分表示式をマイクロ波工学での手法[13]に準じて導き，試験関数を固有モードの和で表わしてレイリー・リッツ法を用いるとき，散乱係数は固有モード関数のみで簡単な表示式として得られることを示したものである．本章での議論は，圧電性弾性導波系が固有モードの伝搬方向に相反線路表示可能，つまり，第2章で示された物質定数構造を持つ物質で構成されている場合に対するものであるが，導波系の断面形状は任意であり，物質に損失があっても適用可能である．具体例としては，等方弾性体無限平板におけるSH波の散乱問題が取り上げられ，他の方法による結果[52]との比較により妥当な結果

であることが指摘されている．

3．2　基本式

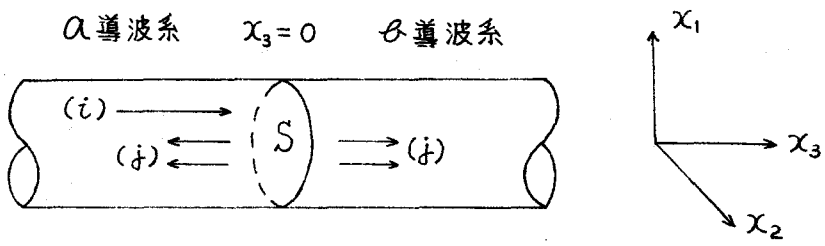


図3．1　同一断面形状接続圧電性弾性導波系

図3．1は異なった圧電結晶で構成された二つの圧電性弾性導波系が$x_3=0$において断面形状を同じくして接続された導波系を示している．Sは圧電結晶の接合断面であり，$x_3<0$，$x_3>0$における導波系をそれぞれa導波系，b導波系と名づけることにする．そして，各導波系は第2章で考えられたような導波系，すなわち，周上の境界条件は式（2．9）で与えられ，x_3方向には相反線路表示可能な導波系であるとする．このとき，式（2．31）に関連した付録2より，a，b導波系それぞれにおいて次の正規直交関係式を満たす固有モード関数$\mathbb{U}_m$，$\mathbb{I}_n$が定義されることがわかる（式(3．1)における・印はスカラ積を意味する）．

$$\int_S \mathbb{U}_m \cdot \mathbb{I}_n \, dS = \delta_{mn} \qquad (3.1)$$

ここに，右肩の＋記号は省略されており†，δ_{mn}はKroneckerのデルタ関

† 以下，第3章および第4章において現われる固有モード関数では，右肩の＋記号は省略されている．

数である．また，この式におけるSは各導波系の断面である．

式（３．１）は固有モードm，nの伝搬定数が複素数，実数，純虚数のどの場合にも成り立つものである（付録２参照）．

図３．１における$x_3=0$の断面S上での境界条件は，機械的変位，応力のx_3方向成分，電磁界の断面（x_1-x_2面）成分の連続であるが，第２章での議論より，$\mathbb{U}_m$，$\mathbb{I}_m$は固有モードmの粒子速度（機械的変位の時間微分），応力のx_3方向成分，電磁界の断面成分をその成分として含んでいるので，$x_3=0$の断面S上における境界条件は次式で表わせることがわかる†．

$$\mathbb{U}^{(i)}=\sum_m \mathbb{U}_m^{(i)a}\mathbb{U}_m^{a}=\sum_p \mathbb{U}_p^{(i)b}\mathbb{U}_p^{b} \qquad (3.2)$$

$$\mathbb{I}^{(i)}=\sum_m \mathbb{I}_m^{(i)a}\mathbb{I}_m^{a}=\sum_p \mathbb{I}_p^{(i)b}\mathbb{I}_p^{b} \qquad (3.3)$$

ここに，右肩の(i)はiモードのみの入射を，a，bはそれぞれa，b導波系での量を意味し，$\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{I}^{(i)}$はiモードのみが入射したときの$x_3=0$の断面S上におけるその結果としての界分布であり，入射および発生固有モードの和で与えられている．また，式（２．44）より次の関係

---

† ただし，式（３．２），（３．３）を連続条件式として用いる限り，$\mathbb{U}_m^{a}$と$\mathbb{U}_p^{b}$の構成成分，$\mathbb{I}_m^{a}$と$\mathbb{I}_p^{b}$の構成成分は同じである必要性が生じ，したがって，a，b導波系の圧電結晶はその必要性を満たす物質定数構造を持つ必要がある．たとえば，a，b導波系がそれぞれ表２．１，２．２（ただし，表中の○印の成分はすべて零でないとする）のような物質定数構造を持つとき，$x_3=0$の断面S上での境界条件は式（３．２），（３．３）では表わせない．

式が得られる（ただし，式（３．４），（３．６）における積分には式（３．１），（３．２）が用いられている）．

$$\mathbb{U}_j^{(i)a} = A_i^{(i)a}\delta_{ij} + B_j^{(i)a} = \int_S \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_j^a dS \qquad (3.4)$$

$$\mathbb{I}_j^{(i)a} = A_i^{(i)a}\delta_{ij} - B_j^{(i)a} \qquad (3.5)$$

$$\mathbb{I}_j^{(i)b} = A_j^{(i)b} = \mathbb{U}_j^{(i)b} = \int_S \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_j^b dS \qquad (3.6)$$

ここに，$A_i^{(i)a}$，$B_j^{(i)a}$，$A_j^{(i)b}$はそれぞれiモードのみがa導波系からb導波系に向って入射（図３．１参照）したときの入射モード，a導波系における発生jモード，b導波系における発生jモード（a，b導波系における発生モードをjモードとしている）の振巾†であり，δ_{ij}はKroneckerのデルタ関数である．

以下，図３．１のような不連続圧電性弾性導波系において，a導波系におけるiモードのみが$x_3=0$の面に入射したときのjモードの散乱係数（反射，透過係数）に対する変分表示式を導いていくが，そのときの基本式は式（３．３）～（３．６）である††．ただし，iモード入射のときのjモードの散乱係数の変分表示式を求めるには，jモード入射のときのiモードに着目した場合と連立にする必要があり，透過係数に対する場合には，その基本式は３．４で論じられている．

---

† 式（２．44）ではA_m，B_mはそれぞれ前進波，後退波モードの振巾としているが，ここでは，図３．１のような不連続導波系を考える関係上，$B_j^{(i)a}$，$A_j^{(i)b}$は発生jモードの振巾と考える．

†† 境界条件式のうち式（３．２）の方については既に式（３．４），（３．６）で用いられている．

3．3　反射係数の変分表示式

式（3．3）は次のように変形される．

$$I_i^{(i)a}\mathbb{I}_i^a+\sum_m{}'I_m^{(i)a}\mathbb{I}_m^a=\sum_p I_p^{(i)b}\mathbb{I}_p^b \qquad (3.7)$$

ここに，$\sum_m{}'$は$m=i$を除いた総和である．また，式（3．5）において$j=i$とした式は次のように変形される．

$$I_i^{(i)a}=2A_i^{(i)a}-\mathbb{U}_i^{(i)a} \qquad (3.8)$$

このとき，iモード入射に対するjモード（共にa導波系にある）の反射係数を，

$$S_{ji}^R=B_j^{(i)a}/A_i^{(i)a} \qquad (3.9)$$

によって定義し，このS_{ji}^Rを用いて式（3．4）より$A_i^{(i)a}$を求め，式（3．8）に代入する．また，式（3．8）における$\mathbb{U}_i^{(i)a}$には式（3．4）を用いる．この結果得られた$I_i^{(i)a}$を式（3．7）に代入し，式（3．7）における$I_m^{(i)a}$†，$I_p^{(i)b}$には式（3．4）～（3．6）の関係を用いると，式（3．7）より次式が得られることがわかる．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^R}\mathbb{I}_i^a\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS=\sum_m\mathbb{I}_m^a\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\sum_p\mathbb{I}_p^b\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS \qquad (3.10)$$

式（3．10）の両辺に$\mathbb{U}^{(j)}$（jモード入射のときの$x_3=0$の断面S上での界分布）をスカラ積し，$x_3=0$の断面S上で積分すると，

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^R}=\frac{\sum_m\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\sum_p\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS}{\int_S\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS} \qquad (3.11)$$

---

† 式（3．7）においては$m\neq i$であるので，式（3．4），（3．5）より$I_m^{(i)a}=-\mathbb{U}_m^{(i)a}$である．

が得られる．式（３．11）より $S_{ji}^{R}=S_{ij}^{R}$ が成り立つことがわかる．

式（３．11）の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとると次式が得られる．

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS$$

$$=-\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS\right]$$

$$+\sum_m\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\right]$$

$$+\sum_p\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\right] \quad (3.12)$$

一方，式（３．10）の両辺に $\delta\mathbb{U}^{(j)}$ をスカラ積し，$x_3=0$ の断面Ｓ上で積分すると次式が得られる．

$$0=-\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\sum_m\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS$$

$$+\sum_p\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS \quad (3.13)$$

式（３．13）における i と j を交換して得られる式を式（３．13）に加え，その結果得られた式を式（３．12）より辺々差し引くと，

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS=0 \quad (3.14)$$

が得られる．ここに，$S_{ji}^{R}=S_{ij}^{R}$ の関係が用いられている．

式（３．14）における積分項は一般には零ではないので，$\delta S_{ji}^{R}=0$ が得られる．すなわち，式（３．11）は $\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(j)}$ を試験関数としたときの S_{ji}^{R}（振巾１の i モード入射に対する j モードの反射係数）に対する

変分表示式になっていることがわかる．特に，式（３．11）において$j=i$とおくと，iモードが入射したときのiモードの反射係数S_{ii}^{R}に対する変分表示式が得られる．

３．４　透過係数の変分表示式

a導波系におけるiモードのみが$x_3=0$の面に入射したときのb導波系におけるjモードの透過係数S_{ji}^{T}を次式で定義する．

$$S_{ji}^{T}=A_j^{(i)b}/A_i^{(i)a} \qquad (3.15)$$

式（３．６），（３．15）より$A_i^{(i)a}$がS_{ji}^{T}を用いて表わされると，あとは３．３と全く同様である．すなわち，この$A_i^{(i)a}$を式（３．８）に代入し，また，式（３．８）における$\mathbb{U}_i^{(i)a}$には式（３．４）を用いる．この結果得られた$I_i^{(i)a}$を式（３．７）に代入し，式（３．７）における$I_m^{(i)a}$，$I_p^{(i)b}$には式（３．４）～（３．６）の関係を用いると，式（３．７）より次式が得られることがわかる．

$$\frac{2}{S_{ji}^{T}}\mathbb{I}_i^{a}\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS=\sum_m \mathbb{I}_m^{a}\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_p \mathbb{I}_p^{b}\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS \qquad (3.16)$$

式（３．16）の両辺に$\mathbb{U}^{(j)}$をスカラ積し，$x_3=0$の断面S上で積分すると次式が得られる．

$$\frac{2}{S_{ji}^{T}}=\frac{\sum_m \int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_p \int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS}{\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS} \qquad (3.17)$$

ところで，反射係数に対してはi，jモードは同じ導波系にあるのでiとjの交換により式的には容易に取り扱えるが，透過係数に対してはi，jモードは異なった導波系にあるのであえて場合を分けて取り扱う

必要がある．すなわち，図３．１の導波系において，b 導波系における j モードが $-x_3$ 方向に伝搬し，$x_3=0$ の面に入射したとき，a 導波系における i モードの透過係数 S_{ij}^{T} を求めるには式（３．４）～（３．６）のかわりに次の関係式が用いられる．

$$\mathbb{U}_p^{(j)b} = A_p^{(j)b} + \delta_{jp} B_j^{(j)b} = \int_S \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_p^{b} dS \qquad (3.18)$$

$$I_p^{(j)b} = A_p^{(j)b} - \delta_{jp} B_j^{(j)b} \qquad (3.19)$$

$$I_i^{(j)a} = -B_i^{(j)a} = -\mathbb{U}_i^{(j)a} = -\int_S \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_i^{a} dS \qquad (3.20)$$

ここに，$B_j^{(j)b}$，$A_p^{(j)b}$，$B_i^{(j)a}$ はそれぞれ入射モード，b 導波系における発生 p モード，a 導波系における発生 i モードの振巾であり，δ_{jp} は Kronecker のデルタ関数である．また，式（３．18），（３．20）には式（３．２）における i を j に書き換えた連続条件式が用いられている．

式（３．３）における i を j に書き換えた式より次式が得られる．

$$I_j^{(j)b} \mathbb{I}_j^{b} + \sum_p{}' I_p^{(j)b} \mathbb{I}_p^{b} = \sum_m I_m^{(j)a} \mathbb{I}_m^{a} \qquad (3.21)$$

ここに，$\sum_p{}'$ は $p=j$ を除いた総和である．

また，式（３．19）において $p=j$ とした式は次のように変形される．

$$I_j^{(j)b} = -2 B_j^{(j)b} + \mathbb{U}_j^{(j)b} \qquad (3.22)$$

さらに，b 導波系における j モードのみが $x_3=0$ の面に入射したときの a 導波系における i モードの透過係数 S_{ij}^{T} は次式で定義される．

$$S_{ij}^{T} = B_i^{(j)a} / B_j^{(j)b} \qquad (3.23)$$

式（３．20），（３．23）より S_{ij}^{T} を用いて $B_j^{(j)b}$ を表わし，式（3.22）に代入する．また，式（３．22）における $\mathbb{U}_j^{(j)b}$ には式（３．18）を用いる．このときの $I_j^{(j)b}$ を式（３．21）に代入し，その式における

$I_p^{(j)b}$ には式（３．18），（３．19）の関係を，また，$I_m^{(j)a}$ には式（３．20）の関係を用いると，式（３．21）より次式が得られることがわかる．

$$\frac{2}{S_{ij}^{T}}\mathbb{I}_j^b\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS=\sum_m \mathbb{I}_m^a\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\sum_p \mathbb{I}_p^b\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS \quad (3.24)$$

式（３．24）の両辺に $\mathbb{U}^{(i)}$ をスカラ積し，$x_3=0$ の断面Ｓ上で積分すると，$2/S_{ij}^{T}$ に対する式の右辺は式（３．17）の右辺と等しいことがわかる．すなわち，$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$ が成り立っていることがわかる．

次に，式（３．17）の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとると次式が得られる．

$$\delta\left(\frac{2}{S_{ji}^{T}}\right)\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^b dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS$$

$$=-\frac{2}{S_{ji}^{T}}\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^b dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS\right]$$

$$+\sum_m\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\right]$$

$$+\sum_p\left[\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS+\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\right] \quad (3.25)$$

一方，式（３．16）の両辺に $\delta\mathbb{U}^{(j)}$ をスカラ積し，$x_3=0$ の断面Ｓ上で積分すると次式が得られる．

$$0=-\frac{2}{S_{ji}^{T}}\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\sum_m\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS$$

$$+\sum_p\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_S \delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS \quad (3.26)$$

また，式（３．24）の両辺に $\delta\mathbb{U}^{(i)}$ をスカラ積し，$x_3=0$ の断面Ｓ上

で積分すると次式が得られる．

$$0=-\frac{2}{S_{ij}^{T}}\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS+\sum_m\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS$$

$$+\sum_p\int_S \delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS \qquad (3.27)$$

式（３．26）と式（３．27）を加え，得られた式を式（３．25）より辺々差し引くと次式が得られる．

$$\delta\left(\frac{2}{S_{ji}^{T}}\right)\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS=0 \qquad (3.28)$$

ここに，$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$ の関係が用いられている．

式（３．28）における積分項は一般には零ではないので，$\delta S_{ji}^{T}=0$ が得られる．すなわち，式（３．17）は $\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(j)}$ を試験関数としたときの S_{ji}^{T}（振巾１の i モード入射に対する j モードの透過係数）に対する変分表示式になっていることがわかる．

式（３．11），（３．17）はまとめて次のように書かれる．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}=\frac{\sum_m\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_p\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS}{\int_S \mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS\int_S \mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS} \qquad (3.29)$$

ここに，右辺分母における右肩の二重の添字 a，b はそれぞれ S_{ji}^{R}，S_{ji}^{T} に対応しており，S_{ji}^{T} に対しては常に $\delta_{ij}=0$ である．

なお，式（３．３）のかわりに式（３．２）の方を変形し，同様な過程を踏むと，$\mathbb{I}^{(i)}$，$\mathbb{I}^{(j)}$ を試験関数とした反射，透過係数に対する変分表示式が得られる．

3．5　レイリー・リッツ法の適用

式（3．29）における試験関数を次のように有限個の固有モードの和で表わす．

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{U}^{(i)} &= \begin{cases} \sum_{k}^{N} U_k^{(i)a}\,\mathbb{U}_k^{a} & (S_{ji}^{R}\text{に対して}) \\ \sum_{k}^{N} U_k^{(i)b}\,\mathbb{U}_k^{b} & (S_{ji}^{T}\text{に対して}) \end{cases} \\ \mathbb{U}^{(j)} &= \sum_{k}^{N} U_k^{(j)a}\,\mathbb{U}_k^{a} \quad (S_{ji}^{R},\ S_{ji}^{T}\text{に対して}) \end{aligned}\right\} \quad (3.30)$$

このとき，式（3．29）より次式が得られる（式（3．1）が用いられる）．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}} = \frac{\sum_{k}^{N}\sum_{n}^{N} Q(k,n)\,U_k^{(i)a}\,U_n^{(j)a}}{U_j^{(i)a}\,U_i^{(j)a}} \quad (3.31)$$

ここに，右辺における右肩の二重の添字 a，b はそれぞれ S_{ji}^{R}，S_{ji}^{T} に対応しており，また，$Q(k,n)$ は次のようなものである．

$$Q(k,n) = \begin{cases} \sum_{p}\int_{S}\mathbb{U}_k^{a}\cdot\mathbb{I}_p^{b}\,dS\int_{S}\mathbb{U}_n^{a}\cdot\mathbb{I}_p^{b}\,dS+\delta_{kn} & (S_{ji}^{R}\text{に対して}) \\ \int_{S}\mathbb{U}_n^{a}\cdot\mathbb{I}_k^{b}\,dS+\int_{S}\mathbb{U}_k^{b}\cdot\mathbb{I}_n^{a}\,dS & (S_{ji}^{T}\text{に対して}) \end{cases} \quad (3.32)$$

ここに，δ_{kn} は Kronecker のデルタ関数である．

レイリー・リッツ法[30]により，式（3．31）の右辺分母を払い，$2/(\delta_{ij}+S_{ji}^{R})$ の $U_l^{(i)a}$，$U_r^{(j)a}$ に関する偏微分を零とおくと次の連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\,U_i^{(j)a} - \sum_{g}^{N} Q(j,g)\,U_g^{(j)a} &= 0 \quad (l=j) \\ -\sum_{g}^{N} Q(l,g)\,U_g^{(j)a} &= 0 \quad (l\neq j) \end{aligned}\right\} \quad (3.33)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{\substack{R\\T}}}\Pi_j^{(i)g}-\sum_g^N Q(g,i)\Pi_g^{(i)g}&=0 \quad (r=i)\\ -\sum_g^N Q(g,r)\Pi_g^{(i)g}&=0 \quad (r\neq i)\end{aligned}\right\} \qquad (3.34)$$

式（３．33），（３．34）において非自明な解が存在するためには振巾の係数の行列式が零でなければならない．このとき，$S_{ji}^{\substack{R\\T}}$は次のように与えられることがわかる（式（３．33），（３．34）における振巾の係数の行列式＝０より得られる$S_{ji}^{\substack{R\\T}}$は同じものである）．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{\substack{R\\T}}}=\frac{|[Q(N,N)]|}{|[Q(N,N)]|_{ji}} \qquad (3.35)$$

ここに，$[Q(N,N)]$はN行N列の行列であり，その成分は式（３．32）で与えられる．また，$|\ |$は行列式であり，$|\ |_{ji}$はその行列式における（j，i）成分の余因子である．ところで，式（３．35）の右辺は行列$[Q(N,N)]$の逆行列の（i，j）成分の逆数に等しい．したがって，式（３．35）より次式が得られる．

$$S_{ji}^{\substack{R\\T}}=2(Q^{-1})_{ij}-\delta_{ij} \qquad (3.36)$$

ここに，$(Q^{-1})_{ij}$は行列$[Q(N,N)]$の逆行列の（i，j）成分である．

式（３．36）は，S_{ji}^{R}，S_{ji}^{T}が全く同じ形式の式で与えられ，それぞれは行列$[Q(N,N)]$の逆行列を計算することにより容易に求められることを示している．

なお，本章での結果式は２次元導波系に対しても，また，３次元導波系に対してもあてはまる．また，準静電近似のもとでも，その近似をしない一般的取扱いのもとでもあてはまる．さらに，電気量，弾性量を零

にするとそれぞれの場合は純弾性波，純電磁波に対する場合の式になる．

3．6　具体例

この節では，等方弾性体無限平板におけるSH波の散乱問題として，図3．2のように，異なった等方弾性体からなるa，b導波系（共に厚さ$2d$の無限平板）が$x_3=0$において接続された導波系を考える．ρ^gは密度，λ^g，μ^gはLamèの定数であり，$x_1=\pm d$の面は弾性的に自由とする．そして，a導波系におけるSH波が$+x_3$方向に伝搬し，$x_3=0$の面に入射するとする．x_2方向には一様とする．

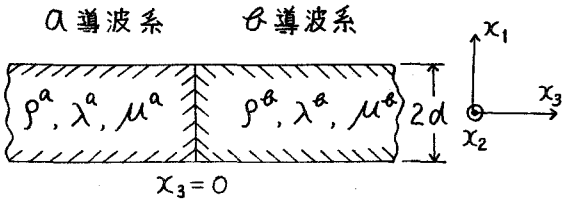


図3．2　等方体無限平板接続導波系

無限平板におけるSH波[53]はその機械的変位としてはx_2方向成分のみ持っており，式（3．1）の正規化を満たす固有mモード関数は次のように与えられる．

$$\mathrm{II}_m=\left[\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon_m \mu k_m d}}\cos\left\{\frac{m\pi}{2d}(x_1+d)\right\}\right],\ \mathrm{II}_m=\left[\sqrt{\frac{\mu k_m}{\varepsilon_m \omega d}}\cos\left\{\frac{m\pi}{2d}(x_1+d)\right\}\right] \tag{3.37}$$

ここに，ωは角周波数，k_mはmモードの波数であり，a，b導波系それぞれに対し，k_m^a，k_m^bである．また，μについてもμ^a，μ^bである．さらに，$\varepsilon_m=1$　$(m\neq 0)$，2　$(m=0)$である．

式（3．37）の固有モード関数を持つSH波に対しては$x_3=0$でのモード変換はおこらず，a導波系におけるMモードが$x_3=0$の面に入射したときのMモードの反射係数S_{MM}^R，b導波系におけるMモードへの透過係数S_{MM}^Tは式（3．29），（3．36）より次のように与えられる．

$$S_{MM}^{R}=\frac{\mu^{a}k_{M}^{a}-\mu^{b}k_{M}^{b}}{\mu^{a}k_{M}^{a}+\mu^{b}k_{M}^{b}},\quad S_{MM}^{T}=\frac{2\sqrt{\mu^{a}k_{M}^{a}}\sqrt{\mu^{b}k_{M}^{b}}}{\mu^{a}k_{M}^{a}+\mu^{b}k_{M}^{b}}\qquad(3.38)^{\dagger}$$

ところで，図3．2のような導波系におけるSH波の反射，透過係数については文献(52)で論じられている．その文献では，$x_3=0$での境界条件，すなわち，機械的変位の連続（言いかえれば粒子速度の連続），応力のx_3方向成分の連続から直接的に反射，透過係数を求めている．その文献の結果と式（3．38）を比較すると，式（3．38）におけるS_{MM}^{R}は文献に示されている粒子速度反射係数と一致しており，また，S_{MM}^{T}は粒子速度透過係数と応力透過係数の幾何平均になっていることがわかる．

3．7　結　言

構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が断面形状を同じくして接続されたときの散乱係数の変分表示式をマイクロ波工学での手法に準じて導き，レイリー・リッツの方法を用いて散乱係数が固有モード関数のみで簡単な表示式として表わされることを示した．具体例としては，等方弾性体無限平板におけるSH波の散乱問題が取り上げられ，妥当な結果が得られた．

本章での結果式は，導波系が波の伝搬方向に相反線路表示可能な場合に対するものであるが，物質に損失があっても適用可能である．そして，得られた結果式において，電気量，弾性量成分を零にするとそれぞれ純弾性波，純電磁波の場合の式になる．

---

† 式（3．29）における試験関数としてa導波系の固有モードを用いても，また，b導波系の固有モードを用いてもS_{MM}^{R}，S_{MM}^{T}は同じ値になり，式（3．36）からも同じ値が得られる．

第 4 章　段付圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式[31)〜(33)]

4．1　序言

本章では，第3章における不連続導波系をより一般化し，一般に構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が段を持って接続されたときの散乱係数の変分表示式を第3章の手法に準じて導いている．そして，試験関数を固有モードの和で表わし，レイリー・リッツ法を用いるとき，散乱係数は第3章の結果式と形式的には同じの簡単な表示式として得られることを示している．また，変分表示式の導出，レイリー・リッツ法の適用過程は導波系として自由空間中に電気壁あるいは磁気壁がある場合に対するものであるが，圧電結晶表面の境界条件が違う場合，たとえば，電気壁あるいは磁気壁が圧電結晶表面に接する場合などの式についても論じられている．さらに，本論文で定義される散乱係数と電力の関係についても論じられ，単一モードのみ伝搬可能な導波系が接続された不連続導波系における電力保存関係式が示されている．具体例としては，等方弾性体の無限平板が段を持つときの零次SH波の散乱係数が高次モード数をパラメータにして計算されている．

4．2　反射係数の変分表示式

4．2．1　小断面圧電結晶から大断面圧電結晶へ入射の場合

ここでは，図4．1に示されるような$x_3=0$で圧電結晶が段を持って接続された段付圧電性弾性導波系において，振巾1のiモードが$+x_3$方向に伝搬し，$x_3=0$の不連続面に入射したときのjモードの反射係数の変分表示式を導く．

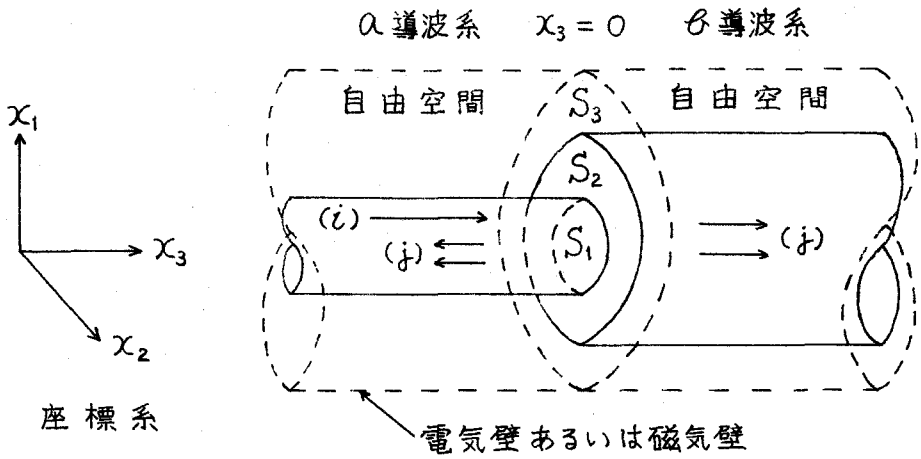


図4．1　小断面圧電結晶から大断面圧電結晶へ入射の場合

図4．1において，S_1はa導波系（$x_3<0$），b導波系（$x_3>0$）における圧電結晶（一般には異なった物質）の接合部，S_2はその接合部を除く$x_3=0$での圧電結晶の断面，S_3はS_1，S_2を除く$x_3=0$での断面であり，$S_0=S_1+S_2+S_3$は$x_3=0$での断面である．圧電結晶がx_3方向に相反線路表示可能の性質を持つとき，自由空間をも含めたa，b導波系もそれぞれその性質を持つことになり，各導波系は電気壁あるいは磁気壁でおおわれているので，各導波系において式（3．1）の正規直交関係式を満たす固有モード関数III_m，II_nが定義される（各導波系における圧電結晶と自由空間との境界は弾性的には自由あるいは剛体とする）．

$x_3=0$での境界条件として，S_1上では機械的変位，応力のx_3方向成分，電磁界の（x_1-x_2）成分の連続，S_2上では応力のx_3方向成分が零，電磁界の（x_1-x_2）成分の連続，S_3上では電磁界の（x_1-x_2）成分の連続とすると，III_m，II_mはその成分として粒子速度，応力のx_3方向成分，電磁界の（x_1-x_2）成分を含んでいるので，その境界条件は次式で表わされることになる．

$S_0(=S_1+S_2+S_3)$上：

$$\sum_m \mathrm{U}_m^{(i)a}\,\mathbb{U}_m^{a}=\sum_p \mathrm{U}_p^{(i)b}\,\mathbb{U}_p^{b} \qquad (4.1)$$

$$\sum_m \mathrm{I}_m^{(i)a}\,\mathbb{I}_m^{a}=\sum_p \mathrm{I}_p^{(i)b}\,\mathbb{I}_p^{b} \qquad (4.2)$$

S_2上：

$$\sum_p \mathrm{U}_p^{(i)b}\,\mathbb{U}_p^{Ab}=0 \qquad (4.3)$$

$$\sum_p \mathrm{I}_p^{(i)b}\,\mathbb{I}_p^{Bb}=0 \qquad (4.4)$$

ここに，第3章同様，右肩の(i)はiモードのみの入射を，また，a，bはそれぞれa，b導波系での量を意味する．なお，式（4．1），（4．2）はS_1上では機械的変位，応力のx_3方向成分，電磁界の（x_1-x_2）成分のそれぞれ連続を，S_2，S_3上では電磁界の（x_1-x_2）成分の連続を表わしており，S_2上での応力のx_3方向成分が零という条件は式（4．3），（4．4）で表わされている．右肩のA，Bはb導波系における内部界$\mathbb{U}^{(i)b}$，$\mathbb{I}^{(i)b}$（それぞれは$\sum_p \mathrm{U}_p^{(i)b}\mathbb{U}_p^{b}$，$\sum_p \mathrm{I}_p^{(i)b}\mathbb{I}_p^{b}$で表わされる）の成分のうち応力成分のみを取り出したことを意味している†．

$\mathbb{U}^{(i)}$をS_0上での界分布とし，b導波系における固有モードの和で表わすと式（3．1）（ただし，その式におけるS上での積分は今の場合S_0上での積分になる），（4．3）より次式が得られる．

$$\mathrm{U}_p^{(i)b}=\int_{S_0}\hat{\mathbb{U}}^{(i)}\cdot\hat{\mathbb{I}}_p^{b}\,dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)Bb}\cdot\mathbb{I}_p^{Bb}\,dS \qquad (4.5)$$

---

† なお，第3章同様，$x_3=0$における境界条件を$\mathbb{U}_m$，$\mathbb{I}_m$などを用いて表わし，議論していく方法は，準静電近似のもとでも，また，2次元，3次元導波系にかかわらずあてはまるものである．

ここに，$\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$はS_2上では$\mathbb{U}^{(i)}$の成分のうち電気量成分（電界，磁界成分）のみを持つものであり，S_1，S_3上では$\mathbb{U}^{(i)}$の成分そのものを持つものである．また，$\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}$は$\mathbb{U}^{(i)}$の成分のうち境界条件に関与しない弾性量，今の場合，粒子速度のみを持つものである．$\hat{\mathbb{I}}_p^{\mathscr{B}}$，$\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}$はそれぞれ$\mathbb{I}_p^{\mathscr{B}}$の成分のうち$\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}$とのスカラ積に関与する成分のみを持つものである．ただし，スカラ積のときの成分の対応は式（３．１）における成分の対応関係†を保ち，たとえば，$\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}=-V_1^{(i)\mathscr{B}}T_{p5}^{\mathscr{B}}-V_2^{(i)\mathscr{B}}T_{p4}^{\mathscr{B}}$である．

ところで，$\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$をあらためて$\mathbb{U}^{(i)}$に書き換えると，この$\mathbb{U}^{(i)}$は式（4.1）の右辺の量と同じになり，式（３．１），（４．１）より次式が得られる．

$$\mathbb{U}_m^{(i)a}=\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}\,dS \qquad (4.6)$$

また，式（４．１）～（４．４）における振巾間の関係は，第３章における場合と同様に，式（２．44）に基づいて得られ，次のように変形され，表わされる．

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbb{U}_j^{(i)a}=A_i^{(i)a}\delta_{ij}+B_j^{(i)a}=A_i^{(i)a}(\delta_{ij}+S_{ji}^{R})\\
&I_i^{(i)a}=A_i^{(i)a}-B_i^{(i)a}=2A_i^{(i)a}-\mathbb{U}_i^{(i)a}\\
&I_j^{(i)a}=-B_j^{(i)a}=-\mathbb{U}_j^{(i)a}\ (j\neq i),\quad I_j^{(i)\mathscr{B}}=A_j^{(i)\mathscr{B}}=\mathbb{U}_j^{(i)\mathscr{B}}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

ここに，$A_i^{(i)a}$，$B_j^{(i)a}$，$A_j^{(i)\mathscr{B}}$は，３．２における場合と同様に，そ

---

† たとえば，$\mathbb{U}_m=[V_{m1},V_{m2},T_{m3},E_{m1},E_{m2}]$，$\mathbb{I}_n=[-T_{n5},-T_{n4},V_{n3},-H_{n2},H_{n1}]$のとき，スカラ積のときの成分の対応関係とは$V_{m1}$と$-T_{n5}$，$V_{m2}$と$-T_{n4}$などの対応のことを言う．

れぞれ入射 i モード，a 導波系における発生 j モード，b 導波系における発生 j モードの振巾であり，δ_{ij} は Kronecker のデルタ関数である．また，S_{ji}^{R} は振巾 1 の入射 i モードに対する j モードの反射係数である．

式（4．5）（ただし，$\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$，$\hat{\mathbb{I}}_p^{b}$ をそれぞれ $\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{I}_p^{b}$ に書き換えるが，意味するところは同じである）と式（4．6）を用いるとき，式（4．1），（4．3）は用いられたことになり，この場合の基本式は式（4．2），（4．4）～（4．7）である．

式（4．2）の左辺において $\mathbb{I}_i^{(i)a}\mathbb{I}_i^{a}$ のみを取り出し，式（4．5）～（4．7）の関係を用いる（この過程は3．3における場合と同じである）と次式が得られる．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\mathbb{I}_i^{a}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS=\sum_m\mathbb{I}_m^{a}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_p\mathbb{I}_p^{b}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathcal{B}}dS\right] \tag{4.8}$$

また，式（4．4），（4．5），（4．7）より次式が得られる．

$$\sum_p\mathbb{I}_p^{B\mathcal{B}}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathcal{B}}dS\right]=0 \tag{4.9}$$

式（4．8）の両辺に $\mathbb{U}^{(j)}$（これは $\mathbb{U}^{(i)}$ の右肩の i を j に置き換えたものであり，j モード入射のときの界分布である）をスカラ積し，S_0 上で積分した式と，式（4．9）の両辺に $\mathbb{U}^{(j)B\mathcal{B}}$ をスカラ積し，S_2 上で積分したのち i と j を交換して得られた式とを連立にすると，

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}=\frac{\sum_m\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_p\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\times\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS-\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathcal{B}}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathcal{B}}dS\right]}{\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS} \tag{4.10}$$

が得られる．式（4．10）より $S_{ji}^{R}=S_{ij}^{R}$ が成り立つことがわかる．

ところで，式（４．10）はまだS_{ji}^{R}に対する変分表示式ではなく，変分表示式は式（４．10）の右辺分母を払い，第一変分をとっていく過程において得られる．次に，そのことについて論ずる．

まず，式（４．10）の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとると，

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS$$

$$=-\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\left[\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS\right]$$

$$+\sum_m\left[\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\right]$$

$$+\sum_p\left[\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\right.$$

$$\left.-\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS-\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\right] \tag{4.11}$$

が得られる．また，式（４．８）の両辺に$\delta\mathbb{U}^{(j)}$をスカラ積し，S_0上で積分すると，

$$0=-\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^a dS\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^a dS+\sum_m\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^a dS$$

$$+\sum_p\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\right] \tag{4.12}$$

が得られる．さらに，式（４．９）の両辺に$\delta\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}$をスカラ積し，$S_2$上で積分すると次式が得られる．

$$0=-\sum_p\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^b dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}} dS\right] \tag{4.13}$$

式（４．12）と式（４．13）を辺々加えた式に，その式におけるiとjを交換した式を辺々加える．その結果得られた式を式（４．11）から

辺々差し引くと，

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS$$

$$=\sum_{P}\left[-\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS-\int_{S_0}\delta\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS\right.$$

$$\left.+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(j)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(i)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS\right]$$

（４．14）

が得られる．ここに，$S_{ji}^{R}=S_{ij}^{R}$ の関係が用いられている．このとき，式（４．10）の右辺分子にあらかじめ，

$$\sum_{P}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS\right]$$

を加えておくと，式（４．14）は次のようになることがわかる．

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS$$

$$=2\sum_{P}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(j)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS+\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_P^{b}dS\int_{S_2}\delta\mathbb{U}^{(i)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS\right]$$

（４．15）

式（４．13）およびその式における i と j を交換した式を用い，式（4.15）の右辺を S_2 上での積分項のみで表わしたとき，式（４．10）の右辺分子に，再度，

$$2\sum_{P}\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\theta}\cdot\mathbb{I}_P^{B\theta}dS$$

なる量を加えておくと次式が得られることがわかる．

$$\delta\left(\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\right)\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS=0 \qquad (4.16)$$

式（４．16）における積分項は一般には零ではないので，$\delta S_{ji}^{R}=0$

が得られる．すなわち，式（４．10）の右辺分子に，結局，

$$\sum_p \left[\int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \left(\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_p^{\mathscr{b}} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \right) \right.$$

$$\left. + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \left(\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_p^{\mathscr{b}} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \right) \right]$$

なる量を加えることにより得られる，

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}} = \frac{\sum_m \int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_m^{a} dS \int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_m^{a} dS + \sum_p \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_p^{\mathscr{b}} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \right] \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_p^{\mathscr{b}} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}} \cdot \mathbb{I}_p^{B\mathscr{b}} dS \right]}{\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_j^{a} dS \int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_i^{a} dS} \qquad (4.17)$$

は，$\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(j)}$，$\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{b}}$，$\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}}$ を試験関数とする S_{ji}^{R} の変分表示式を与えていることがわかる．なお，この加える量は，式（４．９）の両辺に $\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}}$ をスカラ積し，S_2 上で積分した式とその式における i と j を交換した式より零なるものであることがわかる．

４．２．２　大断面圧電結晶から小断面圧電結晶へ入射の場合

ここでは，図４．２に示されるような段付圧電性弾性導波系において，振巾１の i モードが $+x_3$ 方向に伝搬し，$x_3=0$ の不連続面に入射したときの j モードの反射係数 S_{ji}^{R} に対する変分表示式を導く．

図４．２において，断面 S_1 などの意味するところ，圧電結晶の持つ性質，$x_3=0$ での境界条件などは図４．１の場合と同じであるとする（すなわち，図４．１の導波系において，$x_3<0$ にある圧電結晶の断面積が $x_3>0$ にあるものより大きくなったと考えればよい）と，式（４．４）～（４．６）で a と $\mathscr{b}$ を交換した式および式（４．２），（４．７）が成り立つことになり，それらの式がこの場合の基本式である．このとき，

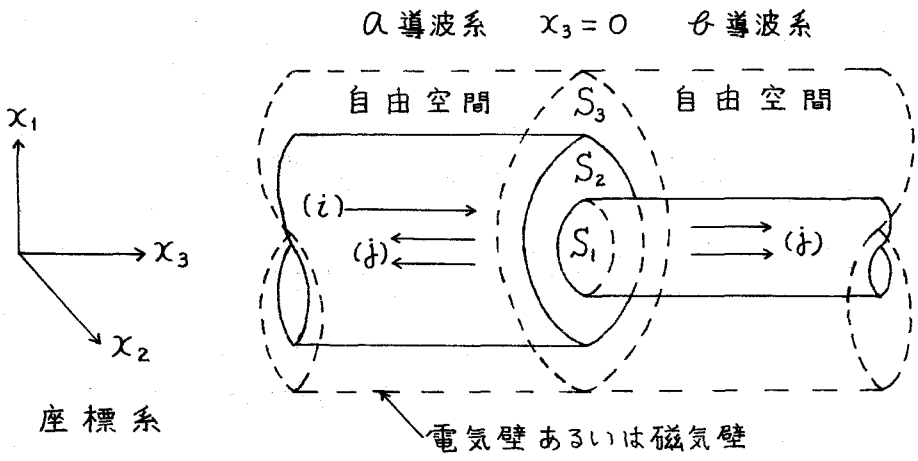


図4．2　大断面圧電結晶から小断面圧電結晶へ入射の場合

4．2．1と同様な過程を踏むと，式（4．10）に対応して次式が得られる．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{a}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)Ba}\cdot\mathbb{I}_j^{Ba}dS\right]$$

$$-\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ij}^{R}}\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)Ba}\cdot\mathbb{I}_j^{Ba}dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)Ba}\cdot\mathbb{I}_i^{Ba}dS\right]$$

$$=\sum_m\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS-\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)Ba}\cdot\mathbb{I}_m^{Ba}dS\right.$$

$$\left.\times\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)Ba}\cdot\mathbb{I}_m^{Ba}dS\right]+\sum_p\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS \qquad (4.18)$$

ここに，S_{ij}^{R} は a 導波系における j モードが $x_3=0$ の面に入射したときの i モードの反射係数である．

式（4．18）における i と j を交換した式を式（4．18）から辺々差し引くと $S_{ji}^{R}=S_{ij}^{R}$ が示される．辺々加えて得られる $2/(\delta_{ij}+S_{ji}^{R})$ に対する式の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとると，$2/(\delta_{ij}+S_{ji}^{R})$ に対する式の右辺分子にあらかじめ，

$$\sum_m \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_m^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \right]$$

$$- \frac{2}{\delta_{ij} + S_{ji}^{R}} \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_i^{Ba} dS \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_j^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_j^{Ba} dS \right]$$

$$+ \sum_m \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_i^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \right]$$

$$- \frac{2}{\delta_{ij} + S_{ji}^{R}} \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_j^{Ba} dS \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_i^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_i^{Ba} dS \right]$$

なる量（この量は，式（４．４），（４．５）におけるbをaに書き換えた式と式（４．７）より零なるものであることがわかる）を加えておくと，S_{ji}^{R}に対する変分表示式が得られることがわかる（この過程は4.2．1と同様である）．次式がその結果式である．

$$\frac{2}{\delta_{ij} + S_{ji}^{R}} = \frac{\sum_m \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_m^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \right] \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_m^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_m^{Ba} dS \right] + \sum_p \int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_p^{b} dS \int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_p^{b} dS}{\left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(i)} \cdot \mathbb{I}_j^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(i)Ba} \cdot \mathbb{I}_j^{Ba} dS \right] \left[\int_{S_0} \mathbb{U}^{(j)} \cdot \mathbb{I}_i^{a} dS + \int_{S_2} \mathbb{U}^{(j)Ba} \cdot \mathbb{I}_i^{Ba} dS \right]} \quad (4.19)$$

式（４．19）は$\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(j)}$，$\mathbb{U}^{(i)Ba}$，$\mathbb{U}^{(j)Ba}$を試験関数とするS_{ji}^{R}の変分表示式を与えている．

４．３　透過係数の変分表示式

３．４においても述べられたように，iモードが入射したときのjモードの散乱係数の変分表示式を求めるためにはjモードが入射したときのiモードに着目した場合と連立にする必要があり，反射係数に対してはi，jモードは同じ導波系にあるのでiとjの交換により式的には容

易に取り扱えるが，透過係数に対してはi，jモードは異なった導波系にあるので場合を分けて取り扱う必要がある．

まず，図４．１の導波系の場合について考える．

a導波系におけるiモードが$x_3=0$の不連続面に入射したときには式（４．２），（４．４）～（４．６）が成り立つ（ただし，式（４．5）における$\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$，$\hat{\mathbb{I}}_p^{b}$はそれぞれ$\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{I}_p^{b}$に書き換えられるが，意味するところは同じである）．また，$S_{ji}^{T}=A_j^{(i)b}/A_i^{(i)a}$によって$i$モード入射に対する$j$モード（$b$導波系にある）の透過係数を定義すると，式（４．７）も成り立つ．一方，b導波系におけるjモードが$-x_3$方向に伝搬し，$x_3=0$の不連続面に入射したときには，式（４．２），（４．4）～（４．６）におけるiをjに書き換えた式が成り立つ．また，式（4.7）のかわりに次の関係式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbb{U}_i^{(j)a}=B_i^{(j)a}=B_j^{(j)b}S_{ij}^{T}=-I_i^{(j)a}\\
&I_j^{(j)b}=A_j^{(j)b}-B_j^{(j)b}=-2B_j^{(j)b}+\mathbb{U}_j^{(j)b}\\
&I_p^{(j)b}=A_p^{(j)b}=\mathbb{U}_p^{(j)b}\quad(p\neq j)
\end{aligned}\right\}\qquad(4.20)$$

ここに，S_{ij}^{T}はjモード入射のときのiモードの透過係数であり，これらi，jモード入射の二つの場合の式より，４．２．１と同様な過程を踏むと，式（４．10）に対応して次の二つの式が得られる．

$$\frac{2}{S_{ji}^{T}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_j^{B\mathcal{B}}dS\right]$$

$$-\frac{2}{S_{ij}^{T}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathcal{B}}\cdot\mathbb{I}_j^{B\mathcal{B}}dS$$

$$=\sum_{m}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_{p}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\right.$$

$$\left.-\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right] \qquad (4.21)$$

$$\frac{2}{S_{ij}^{T}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS=\sum_{m}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS$$

$$+\sum_{p}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS-\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right] \qquad (4.22)$$

式（４．21）から式（４．22）を辺々差し引くと，$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$ が示される．辺々加えて得られる $2/S_{ji}^{T}$ に対する式については，４．２における場合と同様に，その式の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとっていく過程において S_{ji}^{T} の変分表示式が得られることになる．すなわち，式（４．21）と式（４．22）を辺々加えて得られる $2/S_{ji}^{T}$ に対する式の右辺分母を払い，両辺の第一変分をとると，$2/S_{ji}^{T}$ に対する式の右辺分子にあらかじめ，

$$\sum_{p}\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right]+\sum_{p}\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS$$

$$\times\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right]-\frac{2}{S_{ji}^{T}}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_j^{B\mathscr{B}}dS$$

なる量を加えておけば，

$$\frac{2}{S_{ji}^{T}}=\frac{\sum_{m}\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS+\sum_{p}\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right]\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS\right]}{\int_{S_0}\mathbb{U}^{(j)}\cdot\mathbb{I}_i^{a}dS\left[\int_{S_0}\mathbb{U}^{(i)}\cdot\mathbb{I}_j^{b}dS+\int_{S_2}\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_j^{B\mathscr{B}}dS\right]} \qquad (4.23)$$

のような$\mathbb{U}^{(i)}$, $\mathbb{U}^{(j)}$, $\mathbb{U}^{(i)B\mathscr{b}}$, $\mathbb{U}^{(j)B\mathscr{b}}$を試験関数とする$S_{ji}^{T}$の変分表示式が得られることがわかる．なお，この加える量は，式（４．４）とその式におけるiをjに書き換えた式†を考慮すると零なるものであることがわかる．

式（４．23）は，図４．１の導波系において，$\mathscr{a}$導波系における振巾１のiモードが$x_3=0$の不連続面に入射したときの$\mathscr{b}$導波系におけるjモードの透過係数の変分表示式を与えている．そして，$\mathscr{b}$導波系における振巾１のjモードが$x_3=0$の不連続面に入射したときの$\mathscr{a}$導波系におけるiモードの透過係数S_{ij}^{T}とは$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$なる関係††で結ばれている．すなわち，S_{ji}^{T}は小断面圧電結晶導波系から大断面圧電結晶導波系への透過係数，S_{ij}^{T}はその逆方向への透過係数であるので，図４．２の導波系における透過係数についてはことさら論ずる必要はない†††．

４．４　レイリー・リッツ法の適用

４．４．１　反射係数の変分表示式への適用

まず，図４．１の導波系における反射係数の変分表示式（４．17）に

---

† 振巾間の関係式としては，式（４．５）とその式におけるiをjに書き換えた式，および，式（４．７），（４．20）を用いる．

†† 式（４．21）から式（４．22）を辺々差し引くと$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$が示されるので，式（４．21）と式（４．22）を辺々加えて得られる$2/S_{ji}^{T}$に対する式は$2/S_{ij}^{T}$に対する式でもあり，その結果，式（４．23）の右辺は$2/S_{ij}^{T}$にも等しい．

††† 式の上から言えば，図４．２の場合の$2/S_{ji}^{T}$は式（４．23）の右辺における$\mathscr{a}$と$\mathscr{b}$，iとjを交換したもので与えられ，$S_{ji}^{T}=S_{ij}^{T}$である．

対する場合を考える．

ところで，式（４．１）で $\mathbb{U}_m^{(i)a}$ ，$\mathbb{U}_p^{(i)b}$ が関係づけられているので，固有モードの正規直交関係式（３．１）を用いると次式が得られる．

$$\mathbb{U}_m^{(i)a}=\sum_p a_{mp}\mathbb{U}_p^{(i)b}\ ,\quad a_{mp}=\int_{S_0}\mathbb{U}_p^{b}\cdot\mathbb{I}_m^{a}dS \qquad (4.24)$$

このとき，Cramerの公式[34]を用いると，式（４．24）より次式が得られる．

$$\mathbb{U}_p^{(i)b}=\sum_m\frac{\Delta_{mp}}{|A|}\mathbb{U}_m^{(i)a} \qquad (4.25)$$

ここに，$|A|$ は a_{mp} を成分に持つ行列の行列式，Δ_{mp} は $|A|$ における（m，P）成分を１に，P列の他の成分を零に置き換えた行列式である．また，式（４．24），（４．25）における i を j に書き換えた式も成り立つ．

式（４．17）における試験関数を，

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{U}^{(i)}&=\sum_m^M\mathbb{U}_m^{(i)a}\mathbb{U}_m^{a}\ ,\quad \mathbb{U}^{(i)Bb}=\sum_g^N\mathbb{U}_g^{(i)b}\mathbb{U}_g^{Bb}\\ \mathbb{U}^{(j)}&=\sum_m^M\mathbb{U}_m^{(j)a}\mathbb{U}_m^{a}\ ,\quad \mathbb{U}^{(j)Bb}=\sum_g^N\mathbb{U}_g^{(j)b}\mathbb{U}_g^{Bb}\end{aligned}\right\} \qquad (4.26)$$

のように有限個の固有モードの和で表わすとき，式（４．25）を用いて $\mathbb{U}_g^{(i)b}$，$\mathbb{U}_g^{(j)b}$ を消去すると次式が得られる．

$$\frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^{R}}=\frac{\sum_l\sum_k P(l,k)\mathbb{U}_l^{(i)a}\mathbb{U}_k^{(j)a}}{\mathbb{U}_j^{(i)a}\mathbb{U}_i^{(j)a}} \qquad (4.27)$$

ここに，

$$\begin{aligned}P(l,k)=&\sum_p\left[\alpha_l\int_{S_0}\mathbb{U}_l^{a}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\sum_g^N\frac{\Delta_{lg}}{|A|}\int_{S_2}\mathbb{U}_g^{Bb}\cdot\mathbb{I}_p^{Bb}dS\right]\\ &\times\left[\alpha_k\int_{S_0}\mathbb{U}_k^{a}\cdot\mathbb{I}_p^{b}dS+\sum_r^N\frac{\Delta_{kr}}{|A|}\int_{S_2}\mathbb{U}_r^{Bb}\cdot\mathbb{I}_p^{Bb}dS\right]+\alpha_l\alpha_k\delta_{lk}\end{aligned} \qquad (4.28)$$

である．式（４．28）における$\delta_{\ell k}$はKroneckerのデルタ関数であり，また，$\alpha_\ell = 1$（$\ell \leq M$），0（$\ell > M$）である．

レイリー・リッツの方法により，式（４．27）の右辺分母を払い，両辺を$U_\ell^{(i)a}$，$U_r^{(j)a}$で偏微分し，$\partial[2/(\delta_{ij}+S_{ji}^R)]/\partial U_\ell^{(i)a} = \partial[2/(\delta_{ij}+S_{ji}^R)]/\partial U_r^{(j)a} = 0$ を考慮して式の変形を行なっていく過程は３．５における場合と同様である．

式（４．27）の右辺分母を払い，両辺を$U_\ell^{(i)a}$で偏微分し，$2/(\delta_{ij}+S_{ji}^R)$に対する偏微分は零であることを考慮すると次の連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\delta_{ij}+S_{ji}^R} U_i^{(j)a} - \sum_k P(j,k)\, U_k^{(j)a} = 0 \quad (\ell = j) \\ - \sum_k P(\ell,k)\, U_k^{(j)a} = 0 \quad (\ell \neq j) \end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

また，$U_r^{(j)a}$で偏微分した場合にも同様な連立方程式が得られ，それら連立方程式における振巾（$U_k^{(j)a}$など）が非自明な解を持つための条件より，次式が得られることがわかる．

$$S_{ji}^R = 2(P^{-1})_{ij} - \delta_{ij} \qquad (4.30)$$

ここに，$(P^{-1})_{ij}$は，式（４．28）で与えられる$P(\ell,k)$を成分に持つ行列の逆行列の（i，j）成分である．

次に，式（４．17）における試験関数を不連続部に存在するすべての固有モードの和で表わすとしたときの場合を考え，有限個のモード和の場合と同様な取扱いを行なう．この場合には，式（４．５），（４．6），および，それらの式におけるiをjに書き換えた式が成り立ち，式（4.25）を用いると式（４．17）は式（４．27）のように変形される．ただし，式（４．27）における$P(\ell,k)$は，今の場合，次のようなものである．

$$P(\ell,k)=\sum_{p}\frac{\Delta_{\ell p}}{|A|}\frac{\Delta_{kp}}{|A|}+\delta_{\ell k}=\sum_{p}(A^{-1})_{p\ell}(A^{-1})_{pk}+\delta_{\ell k} \qquad (4.31)$$

ここに，$(A^{-1})_{p\ell}$は式（４．24）で与えられるa_{mp}を成分に持つ行列の逆行列の（ｐ，ℓ）成分である．また，式（４．27）が成り立つとき，式（４．29）などの過程を経て，式（４．30）が得られる（ただし，式（４．30）における$(P^{-1})_{ij}$は式（４．31）で与えられる$P(\ell,k)$を成分に持つ行列の逆行列の（i，j）成分である）．なお，式（４．31）で与えられる$P(\ell,k)$は，式（４．28）においてすべての固有モードを考慮するとしたときの式と一致していることは容易に示される（付録３参照）．

次に，図４．２の導波系における反射係数の変分表示式（４．19）に対する場合を考える．

式（４．19）における試験関数を有限個の固有モード関数の和で表わすと，その式の右辺分母は，式（４．27）におけるような二つのモード振巾の積の形では表わされなくなり，モード振巾の有限和の積の形になる．したがって，その形のままの式において右辺分母を払い，式（４．29）から式（４．30）に至る過程と同様な過程を踏むと，S_{ji}^{R}は一つに定まった形で求まらなくなる．しかし，不連続部に存在するすべての固有モードを考慮するとしたとき，式（４．３），したがって，式（４．５）（それぞれの式におけるaはbに書き換えられる）が成り立つことになり，式（４．17）の変分表示式に対する場合と同様な取扱いがなされ得ることになる．すなわち，式（４．19）における試験関数を不連続部に存在するすべての固有モードの和で表わすとしたとき，式（４．５），（４．６）におけるaとbを交換した式，および，それらの式でiをjに書き換えた式が成り立ち，式（３．１），（４．１）より得ら

れる式，

$$\mathbb{U}_p^{(i)b}=\sum_m b_{pm}\mathbb{U}_m^{(i)a}, \quad b_{pm}=\int_{S_0}\mathbb{U}_m^a\cdot\mathbb{I}_p^b dS \qquad (4.32)$$

および，式（４．32）における i を j に書き換えた式を用いると，式（４．19）は式（４．27）のように変形される．ただし，式（４．27）における $P(l,k)$ は，今の場合，次式で与えられる．

$$P(l,k)=\sum_p b_{pl}b_{pk}+\delta_{lk} \qquad (4.33)$$

ここに，δ_{lk} はKroneckerのデルタ関数である．なお，式（４．27）が得られるので，式（４．29）などの過程を経て，式（４．30）が得られることは，図４．１の導波系における反射係数の変分表示式（４．17）に対する場合と同じである．

４．４．２　透過係数の変分表示式への適用

ここでは，透過係数の変分表示式（４．23）に対するレイリー・リッツ法の適用について論ずる．

この場合にも，式（４．19）に対する場合と同様，試験関数を有限個の固有モード関数の和で表わすと，式（４．23）の右辺分母にはモード振巾の有限和が入ってくるので，その式の右辺分母を払い，式（４．29）から式（４．30）に至る過程と同様な過程を踏むと S_{ji}^T は一つに定まった形で求まらなくなる．したがって，ここでは，試験関数として不連続部に存在するすべての固有モードを考慮するとしたときのみを取り扱うことにする．

試験関数として不連続部に存在するすべての固有モードを考慮するとしたとき，式（４．５），（４．６），および，それらの式における i を j に書き換えた式が成り立つ．そして，式（４．24），および，式（

4．25）における i を j に書き換えた式を用いるとき，式（4．23）は次式のように変形される．

$$\frac{2}{S_{ji}^{T}}=\frac{\sum_{l}\sum_{k}P(l,k)\,U_{l}^{(i)b}\,U_{k}^{(j)a}}{U_{i}^{(j)a}\,U_{j}^{(i)b}} \qquad (4.34)$$

ここに，

$$P(l,k)=\frac{\Delta_{kl}}{|A|}+a_{kl}=(A^{-1})_{lk}+a_{kl} \qquad (4.35)$$

である．式（4．35）における $(A^{-1})_{lk}$，a_{kl} などは式（4．31）におけるものと同じである．

4．4．1における場合と同様，式（4．34）の右辺分母を払い，両辺を $U_{l}^{(i)b}$，$U_{r}^{(j)a}$ で偏微分し，$2/S_{ji}^{T}$ に対する偏微分は零であることを考慮すると次の連立方程式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{S_{ji}^{T}}U_{i}^{(j)a}-\sum_{k}P(j,k)\,U_{k}^{(j)a}=0 \quad (l=j)\\
&\qquad\qquad -\sum_{k}P(l,k)\,U_{k}^{(j)a}=0 \quad (l\neq j)\\
&\frac{2}{S_{ji}^{T}}U_{j}^{(i)b}-\sum_{k}P(k,i)\,U_{k}^{(i)b}=0 \quad (r=i)\\
&\qquad\qquad -\sum_{k}P(k,r)\,U_{k}^{(i)b}=0 \quad (r\neq i)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.36)$$

このとき，式（4．36）における振巾が非自明な解を持つための条件より，次式が得られることがわかる．

$$S_{ji}^{T}=2(P^{-1})_{ij} \qquad (4.37)$$

ここに，$(P^{-1})_{ij}$ は，式（4．35）で与えられる $P(l,k)$ を成分に持つ

行列の逆行列の（i，j）成分である．

4．5　結果式に対する検討

式（4．30），（4．37）をまとめて，

$$S_{ji}^{\substack{R\\T}} = 2(P^{-1})_{ij} - \delta_{ij} \qquad (4.38)$$

のように表わすとき，式（4．38）（ただし，S_{ji}^{T} に対しては常に $\delta_{ij}=0$ である）は，同一断面形状接続導波系における場合の式（3．36）とその形式は同じであることがわかる．なお，式（4．38）における（$P^{-1})_{ij}$ を求めるときに必要な $P(\ell, k)$ は式（4．28），（4．31），（4．33），（4．35）で与えられるが，それらの $P(\ell, k)$ における S_0 上での積分のうち S_2 上分については，式（4．5）に関して説明されたように，$\mathbb{U}_m^a$，$\mathbb{U}_p^b$ は電気量のみ（それに付随して $\mathbb{I}_p^b$，$\mathbb{I}_m^a$ も電気量のみ）を成分として持つということには注意する必要がある．また，散乱係数の変分表示式（4．17），（4．19），（4．23）において，段部の積分，すなわち，S_2 上での積分を零にすると，式（3．29）† に一致することがわかる．

図4．1，4．2のような導波系において電気壁あるいは磁気壁が圧電結晶に接している（ただし，断面 S_2 上は弾性的には自由とする）場合には，式（4．17），（4．19），（4．23）で与えられる式における S_0 上での積分のうち S_2，S_3 上分は零，S_1 上分はそのままに保ち，S_2 上での境界条件に関与しない $\mathbb{U}^{(i)}$，$\mathbb{U}^{(j)}$ の電気量成分はそれぞれ $\mathbb{U}^{(i)Ba}$，$\mathbb{U}^{(j)Ba}$

---

† 式（3．29）は，圧電結晶のまわりに自由空間が存在し，電気壁あるいは磁気壁で囲まれている導波系の場合にも適用可能である．

（あるいは$\mathbb{U}^{(i)Ba}$，$\mathbb{U}^{(j)Ba}$）に含ませればよい．この結果，４．４においては，$\mathbb{U}_g^{Bb}$，$\mathbb{U}_r^{Bb}$はそれぞれ$\mathbb{U}_g^{b}$，$\mathbb{U}_r^{b}$の成分のうちS_2上での境界条件に関与しない電気量成分をも含むことになり，積分断面S_0はS_1に書き換えられたものになる†．

なお，断面S_2上での境界条件が弾性的には剛体である場合には，$\mathbb{U}^{(i)Bb}$，$\mathbb{U}^{(j)Bb}$（あるいは$\mathbb{U}^{(i)Ba}$，$\mathbb{U}^{(j)Ba}$），$\mathbb{U}_g^{Bb}$，$\mathbb{U}_r^{Bb}$は，その成分として，粒子速度成分のかわりに応力成分を含むことになる．

以上のように，$x_3=0$の不連続面における境界条件がいろいろ違う場合には，本章で得られた結果式における界分布ベクトルの成分，あるいは，積分範囲をその都度考え直すだけでよいということは次のことに起因している．すなわち，$x_3=0$の不連続面における境界条件式としては式（４．１）～（４．４）のような形式が用いられており，したがって，それらの式の意味するところには自由度があることになり††，そして，式（４．１）～（４．４）を用いての変分表示式の導出過程，レイリー・リッツ法の適用などは，物理的意味に関係なく，全く数式的に行なわれ得るということに起因している．また，全く数式的に行なわれ得るということは，p.45 の脚注においても述べられているように，本章での議論，結果式は２次元，３次元導波系にかかわらず，準静電近似のもとで

---

† 電気壁あるいは磁気壁で圧電結晶表面がおおわれている場合の散乱係数の変分表示式などの具体形は文献(31)に与えられている．

†† たとえば，式（４．３），（４．４）はS_2上での境界条件を表わしているが，それらの式の左辺の量は，その成分として，本章で考えられたような境界条件では応力成分を，また，弾性的境界条件が剛体の場合には粒子速度成分を持つのであると考えることができる．

も，また，その近似をしない一般的取扱いのもとでもあてはまるということになる†.

本章における結果式は，第3章同様，物質に損失がある場合にも定義され，正規直交関係式（3．1）を満たす$\mathbb{U}_m$，$\mathbb{I}_n$を用いているため，導波系を構成する物質に損失がある場合にも適用可能である．

4．6　電力の保存性

ここでは，図3．1，4．1，4．2のように，$x_3=0$において不連続部を持つ不連続圧電性弾性導波系における電力の保存性について論ずる．

まず，a導波系（$x_3<0$）におけるモード関数$\mathbb{U}_i^a$，$\mathbb{I}_i^a$，振巾$A_i^{(i)a}$を持つiモードがb導波系（$x_3>0$）に向って伝搬し，$x_3=0$の不連続面に入射したときの反射あるいは透過jモードの電力について論ずる．ただし，簡単のため，i，jモードの伝搬定数は純虚数とする．

ところで，第3，4章で求まる散乱係数の絶対値の2乗は一般には平均電力を表わさない．このことは，変分表示式を求めるときに用いた$\mathbb{U}_m$，$\mathbb{I}_m$に対して$\mathbb{U}_m\cdot\mathbb{I}_m^*$が複素ポインチングベクトルの$x_3$方向成分を表わすのではなくて，第2章で定義された$\mathbb{W}_m$，$\mathbb{K}_m$より得られる$\mathbb{W}_m\cdot\mathbb{K}_m^*$がそれを表わすからである（2．5参照）．したがって，固有モード関数が式（3．1）のような正規直交関係式を満たすとき，導波系の断面Sを通過する入射iモードの平均電力P_{in}は次式で与えられることにな

---

† このことは第3章の場合にもあてはまることである．ただし，2次元導波系の場合には，得られた結果式における断面積分は線積分で与えられる．

る．

$$P_{in}=\frac{1}{2}|A_i^{(i)a}|^2\,\mathrm{Re}(M_i^a),\quad M_i^a=\int_S \mathbb{W}_i^a\cdot\mathbb{K}_i^{a*}dS \qquad (4.39)$$

ここに，| |は絶対値，Re は実部，＊は共役複素数を意味している．正規直交関係式と式（３．１）を用いるために M_i^a は一般には１ではない．また，反射，透過 j モードそれぞれの平均電力 $P_{ref.}$，$P_{tra.}$ は次のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned} P_{ref.}&=\frac{1}{2}|A_i^{(i)a}|^2\,|S_{ji}^R|^2\,\mathrm{Re}(M_j^a),\quad M_j^a=\int_S \mathbb{W}_j^a\cdot\mathbb{K}_j^{a*}dS\\ P_{tra.}&=\frac{1}{2}|A_i^{(i)a}|^2\,|S_{ji}^T|^2\,\mathrm{Re}(M_j^b),\quad M_j^b=\int_S \mathbb{W}_j^b\cdot\mathbb{K}_j^{b*}dS \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

ここに，S_{ji}^R，S_{ji}^T は第３，４章における変分表示式あるいはレイリー・リッツ法の適用後の結果式で与えられる．

式（４．40）における $P_{ref.}$，$P_{tra.}$ を式（４．39）で与えられる P_{in} で辺々割り算をし，それぞれ $|S_{ji}^{PR}|^2$，$|S_{ji}^{PT}|^2$ と表わし，平均電力１の入射 i モードに対する反射，透過 j モードの平均電力と定義すると，次式はその定義を満足する．

$$\left.\begin{aligned} S_{ji}^{PR}&\doteqdot\sqrt{\mathrm{Re}(M_j^a)/\mathrm{Re}(M_i^a)}\;S_{ji}^R\\ S_{ji}^{PT}&=\sqrt{\mathrm{Re}(M_j^b)/\mathrm{Re}(M_i^a)}\;S_{ji}^T \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

式（４．41）より，$S_{ii}^{PR}=S_{ii}^R$ が常に成り立ち，一般には $S_{ji}^{PR}\neq S_{ij}^{PR}$，$S_{ji}^{PT}\neq S_{ij}^{PT}$ であることがわかる．

次に，a，b 導波系では単一モードのみが伝搬可能であるとしたときの電力の保存性について述べる．

a，b 導波系でのモードの番号をそれぞれ１，２とする．そして，式

（４．41）で与えられる $S_{ji}^{\ell R}$，$S_{ji}^{\ell T}$ が真の値であるとき，文献(35)に従うと，次のような電力の保存性を表わす関係式（無損失な不連続導波系において成り立つべき関係式）が得られることがわかる．

$$\left.\begin{aligned}&|S_{11}^{R}|^2+|S_{21}^{T}|^2\,\mathrm{Re}(M_2^{b})/\mathrm{Re}(M_1^{a})=1\\&|S_{12}^{T}|^2\,\mathrm{Re}(M_1^{a})/\mathrm{Re}(M_2^{b})+|S_{22}^{R}|^2=1\\&S_{11}^{R}S_{12}^{T*}+S_{21}^{T}S_{22}^{R*}\,\mathrm{Re}(M_2^{b})/\mathrm{Re}(M_1^{a})=0\end{aligned}\right\}\qquad(4.42)$$

４．７　計算例

ここでは，図４．３，４．４に示されているような導波系，すなわち，$x_3=0$ において collinear状態で等方弾性体無限平板が段を持っているような導波系における零次SH波の散乱係数を不連続部で発生する高次モード数をパラメータにして計算する．弾性体の外部は自由空間であり，弾性体表面は弾性的に自由であるとする．$x_3<0$ を a 導波系，$x_3>0$ を b 導波系とし，a 導波系における零次SH波が $x_3=0$ の面に垂直入射し，波は x_2 方向には一様であるとする．また，平板の厚みが薄い方を $2d$，厚い方を $2d'$ とする．なお，用いる式は式（４．31），（４．33），（４．35），（４．38）とする．

まず，平板の厚みが薄い方から厚い方への入射の場合について考えることにする．

a，b 各導波系における固有モード関数としては，

$$\mathrm{III}_m=[\,V_{m2}\,],\quad \mathrm{II}_m=[\,-T_{m4}\,]$$

であり，その具体形は式（３．37）で与えられている．このとき，式（４．24）より，対称，反対称モードの相互結合はなく，対称モードのみを考慮すればよいことがわかる．そして，$\xi=d/d'$ とするとき，式（

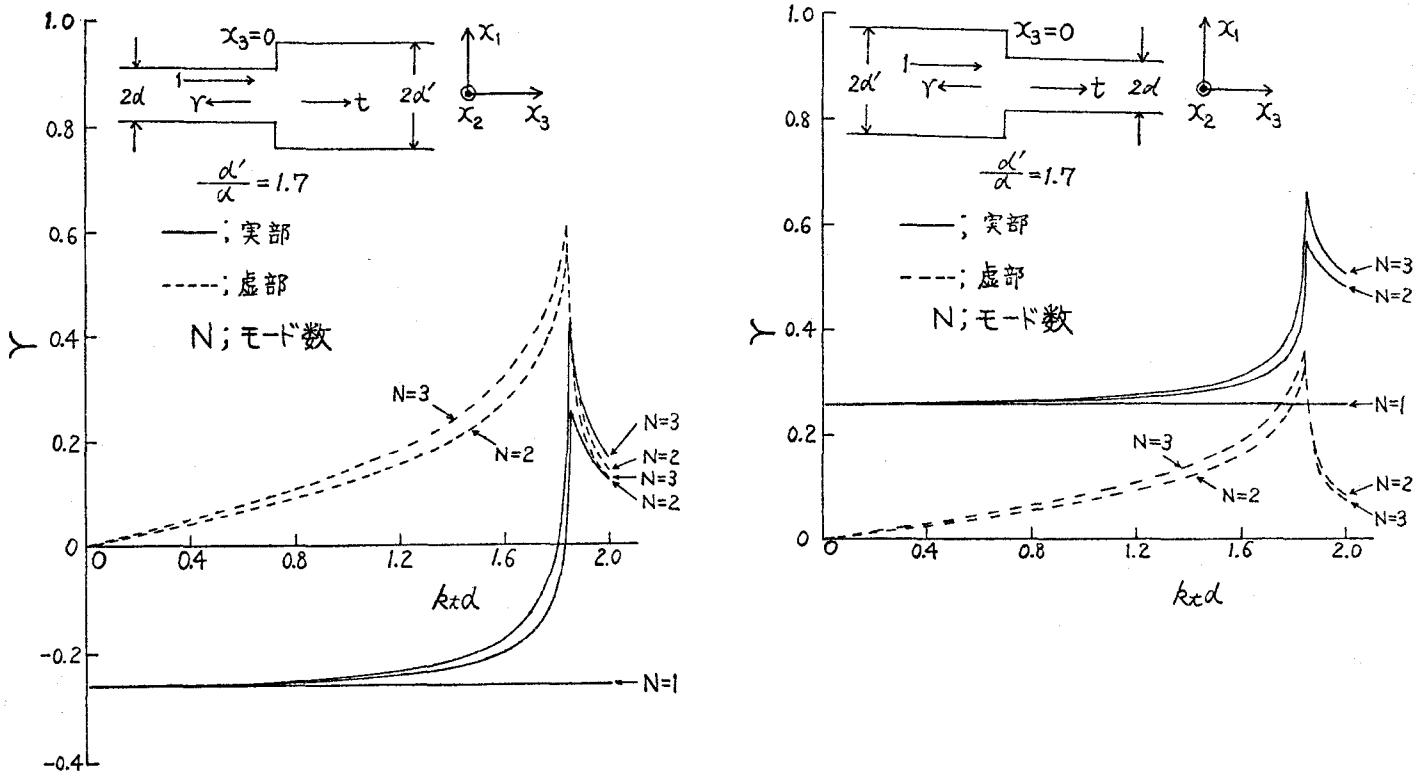


図4．3　段付等方弾性体無限平板における零次SH波の反射係数

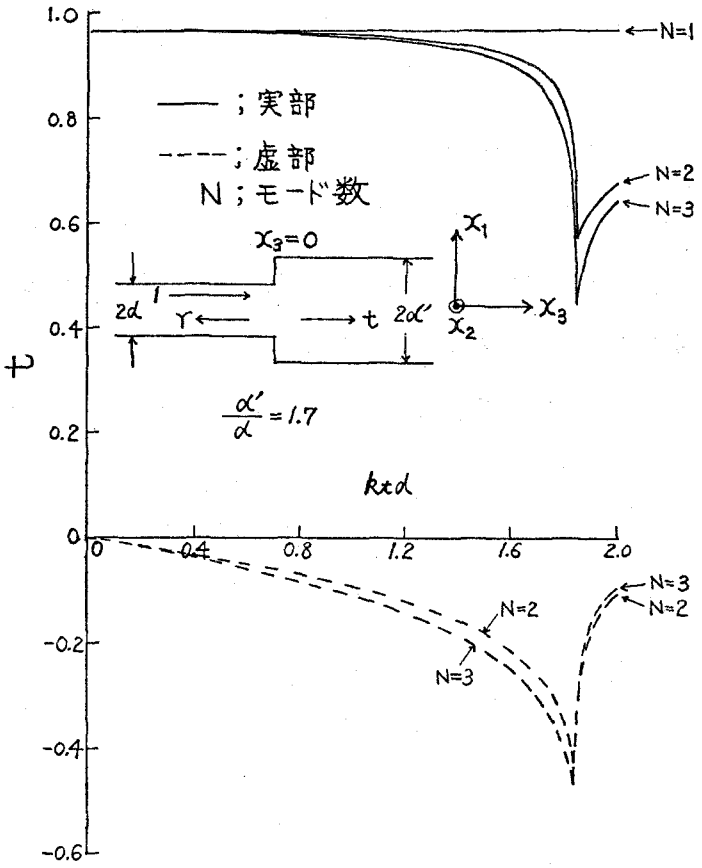


図4．4　段付等方弾性体無限平板における零次SH波の透過係数

4．24）におけるa_{mp}は次のように与えられる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&a_{mp}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{(k_m^a d)}{\varepsilon_m \varepsilon_p (k_p^b d')}}\,\frac{p\xi(-1)^{m+1}\sin p\xi\pi}{(m+p\xi)(m-p\xi)} \quad \left(\begin{array}{l} m,p=0,1,2,3,\cdots\cdots \\ \text{ただし，}m=p=0\text{を除く}\end{array}\right) \\
&a_{00}=\sqrt{\xi} \\
&k_m^a d=\begin{cases} \sqrt{(k_t^a d)^2-(m\pi)^2} & (\text{伝搬モード}) \\ -j\sqrt{(m\pi)^2-(k_t^a d)^2} & (\text{遮断モード}) \end{cases}, \quad k_p^b d'=\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{k_t^a d}{\xi}\right)^2-(p\pi)^2} & (\text{伝搬モード}) \\ -j\sqrt{(p\pi)^2-\left(\frac{k_t^a d}{\xi}\right)^2} & (\text{遮断モード}) \end{cases}
\end{aligned}
\right\}
$$

（4．43）

ここに，k_t^a は a 導波系における弾性体が無限に広がったときの横波の波数である．また，m，p はそれぞれ a，b 導波系における対称モードのモード番号（m，$p=0$ は零次モード）であり，$\varepsilon_m, \varepsilon_p = 1$（$m$，$p \neq 0$），$2$（$m, p=0$）である．

式（4．31），（4．35），（4．38），（4．43）を用いて反射，透過係数が計算されることになる．

次に，平板の厚みが厚い方から薄い方への入射の場合について考えることにする．

この節で計算例として考えている導波系においては，a，b 導波系は同じ弾性体で構成されている．したがって，式（4．24）と式（4．32）を見比べることにより，この場合にも対称，反対称モードの相互結合はなく，式（4．32）における b_{pm} は式（4．43）の a_{mp} において m と p を交換したもので与えられることがわかる†．このとき，反射係数は式（4．33），（4．38）より計算される．なお，この場合の透過係数は平板の厚みが薄い方から厚い方への入射の場合の透過係数に等しい（4．3参照）ので，ことさら論じなくてもよい．

図4．3，4．4は $\xi = d/d' = 1/1.7$ のときの零次SH波の散乱係数（反射，透過係数）を計算したものであり，横軸は $k_t d$（$k_t = k_t^a = k_t^b$ は無限等方弾性体での横波の波数）である．Nは考慮した対称モード数（a，b 導波系で同数）であり，N=1は零次モードのみを考慮した場合である．また，実線は散乱係数の実部，破線は虚部を表わしている．N

---

† 式（4．24）と式（4．32）との対応から言えば，m と p の交換と同時に右肩の a と b の交換も必要であるが，今の場合，$k_t^a = k_t^b (= k_t)$ であり，$k_t d$ を変数にして散乱係数を計算するので，その必要はない．

＝1のときの虚部は零であり，N＞3のときにはN＝3の場合とほとんど変化がなかった．つまり，3モードまで考慮しておけば十分であると言える．なお，N＝3のとき，式（4.42）は十分成り立っていた．図4.3，4.4において，$k_t d$が1.84あたりで急激な変化があるが，これは，厚さ$2d'$の導波系における対称1次モードが遮断領域から伝搬領域に移るためである．また，$k_t d \longrightarrow 0$のとき，虚部は零に近づくが，実部は零以外のある値に近づくことがわかる．これは，$d'/d=1.7$と固定したため，この比の値による構造上（寸法上）の違い，つまり，特性インピーダンスの違いとでも言えるものによるためであると解釈される．

4.8　結言

本章では，第3章の不連続圧電性弾性導波系を拡張し，一般に構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が段を持って接続された導波系を取り上げ，第3章における手法に準じて，散乱係数の変分表示式を導き，レイリー・リッツの方法を用いて散乱係数が固有モード関数のみで簡単な表示式として表わされることを示した．変分表示式は停留性を証明して行く過程において得られており，このことは第3章の場合と異なるところであるが，得られた結果式において段部の積分を零にすると第3章の結果式と一致しており，また，レイリー・リッツ法の適用後の散乱係数は第3章における場合の式と全く同じ形式で与えられている．また，電力の保存性についても論じられており，計算例としては等方弾性体無限平板における零次SH波の散乱問題が取り上げられている．

本章での結果式は，第3章同様，相反線路表示可能な導波系に対するものであるが，電気量，弾性量を零にするとそれぞれ純弾性波，純電磁波の場合の式になる．

第 5 章　周期的溝アレイにおける弾性表面波の反射と透過[20],[36]

5．1　序言

弾性表面波に関する研究は数多くなされており，特に，広帯域フィルタなど信号処理のための研究[37]が盛んである．最近では，弾性表面波の伝搬路上に溝アレイを設け，この溝アレイでの弾性表面波の反射を利用したRAC（Reflective-Array Compressor）[15]が信号処理デバイスとして大いに注目されている．このような中にあって，弾性表面波の伝搬路上にステップあるいは溝アレイがあるときの散乱問題の解析は意義あることである．R.C.M.Lis[16],[17]は弾性体として等方体を選び，ステップ部分を理想変成器表示などしてこの種の解析に精力的に取り組んでいる．

伝搬路の途中にステップがある場合の弾性表面波の散乱問題は主に地震学者によって解析されてきた[38]．弾性体は等方体であり，バルク波は無視されている．最近では，バルク波の影響も考慮した解析がなされている[39]～[42]．しかし，解析は非常に複雑になり，このために特定の弾性物質，弾性表面波モードに対して取り組まれているに過ぎない．

本章は基盤表面に周期的溝アレイがあるときの弾性表面波の反射と透過について論じたものであり，解析法の適用範囲はかなり広く，導波系が相反線路表示可能ならばどんな弾性表面波モードに対しても全く同様に，概念的に単純な手法で計算され得る．この場合，周期的溝アレイはステップ部分とその他の部分に分けて考えられ，ステップ部分の反射係数には第4章における結果式を用い，それを基にしてステップ部分をTマトリクス表示し，Tマトリクス表示された個々の4端子回路の縦続接続で周期的溝アレイを表わしている．なお，この解析法では，溝は浅い

としてバルク波の影響は無視されているが，ステップ間の多重反射は考慮されている．計算例としては，等方体，Yカット，X伝搬と131.5°回転Yカット，X伝搬の$LiNbO_3$，Yカット，X伝搬のSiO_2，Zカット，X伝搬のZnOとCdS，さらに，[001]カット，[110]伝搬の$Bi_{12}GeO_{20}$に対するものである．

5．2　ステップでの弾性表面波の反射係数

この節では，図5．1のように$x_3=0$で高さhのステップを持つ半無限導波系において，a導波系（$x_3<0$）からb導波系（$x_3>0$）へ振巾1の弾性表面波が垂直入射したときの反射係数γについて論ずる．弾性体はx_3方向に相反線路表示が可能な物質であるとする．また，自由空間との境界は弾性的には自由とし，弾性表面波はx_2方向には変化しないものとする．

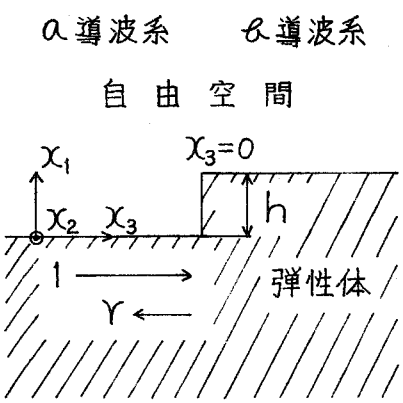


図5．1　ステップ導波系

5．2．1　反射係数式

3次元段付圧電性弾性導波系における式（4.28），（4.30）を図5．1のような2次元ステップ導波系に適用すると次式が得られる．

$$\gamma = 2/P - 1 \qquad (5.1)$$

ここに，

$$P = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{U}^{a}\cdot\mathbb{I}^{b}\,dx_1 + \frac{\int_0^h \mathbb{U}^{B\theta}\cdot\mathbb{I}^{B\theta}\,dx_1}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{U}^{b}\cdot\mathbb{I}^{a}\,dx_1}\right]^2 + 1 \qquad (5.2)$$

ただし，図５．１の導波系では，hは弾性表面波の波長に比べて十分小さいとして不連続部で発生するバルク波を無視し，x_1方向には指数関数的に減衰し，$x_1=\pm\infty$ では界分布が零である弾性表面波モードのみを考え，第４章で設定した電気壁あるいは磁気壁は今の場合$x_1=\pm\infty$ にあると考えている．バルク波を無視し，式（５．１），（５．２）を用いることの妥当性については５．２．３で論じられている．

式（５．２）において，右肩のa，bはそれぞれa，b導波系での量を意味し，$\mathbb{V}$，$\mathbb{I}$は弾性表面波のモード関数である．また，$\mathbb{V}^{ab}$，$\mathbb{I}^{ab}$は$-\infty\leq x_1\leq 0$では弾性量と電気量，$0\leq x_1\leq\infty$では電気量のみを含み，$\mathbb{V}^{Bb}$はステップ部分の境界条件に関しないb導波系での弾性量，今の場合，粒子速度，$\mathbb{I}^{Bb}$は$\mathbb{V}^{Bb}$とのスカラ積において$\mathbb{V}^{Bb}$の成分と対応する成分，今の場合，応力のみを含むものであり，これらの定義は第４章に準ずる．

ところで，式（５．１），（５．２）は弾性体がx_3方向に相反線路表示可能な物質の場合に適用されるものであり，２次元圧電性弾性導波系においては，このような性質を持つ物質の物質定数構造は，２．４で示されたように準静電近似のもとでは４種類，その近似をしない一般的取扱いのもとでは８種類あると判断される．そして，それぞれの物質定数構造に対して，$\mathbb{V}$，$\mathbb{I}$としては２通りの表示が可能である．ここに，$\mathbb{V}$，$\mathbb{I}$はa導波系あるいはb導波系での量を意味するものであり，２．４における$\mathbb{V}_m^+$，$\mathbb{I}_m^+$とそれぞれその成分は同じである．したがって，結晶のカット，伝搬方向が与えられたとき，（ｉ）一般的取扱い，準静電近似のどちらをするのか，（ii）（ｉ）に対して，考えている物質はどの物質定数構造にあてはまるのか，（iii）それぞれの物質定数構造に対して$\mathbb{V}$，$\mathbb{I}$としては２通り可能であり，どちらを用いればよいのか，の三つの過程を経て式（５．１），（５．２）を用いることになる．

5．2．2　弾性表面波モード関数の決定法

ここでは，例として回転Yカット，X伝搬の$LiNbO_3$の場合を取り上げ，5．2．1で示された（i）～（iii）に従って$\mathbb{U}$，$\mathbb{I}$を決定していく．

過程（i）に対して：ここでは準静電近似をする．

過程（ii）に対して：座標軸をx_1，x_2，x_3，結晶軸をX_1，X_2，X_3とするとき，着目する座標系（x_1，x_2，x_3）への座標系（X_1，X_2，X_3）の変換はオイラー角[43] θ，φ，ψで表わされ，回転Yカット，X伝搬（X，YはそれぞれX_1，X_2と同じものを意味する）では$\theta=\varphi=\pi/2$が常に成り立つ．このとき，座標変換マトリクスとBond応力変換マトリクス[48]を用いて物質定数が変換され，$LiNbO_3$では次の形の物質定数構造が得られる．

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}, \quad [e'] = \begin{bmatrix} e'_{11} & e'_{12} & e'_{13} & 0 & 0 & e'_{16} \\ e'_{21} & e'_{22} & e'_{23} & 0 & 0 & e'_{26} \\ 0 & 0 & 0 & e'_{34} & e'_{35} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & 0 \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix}$$

ここに，$[C']$，$[e']$，$[\varepsilon']$はそれぞれ座標系（x_1，x_2，x_3）でみた電界が一定のときの弾性スティフネステンソル，圧電応力テンソル，ひずみが一定のときの誘電率テンソルである．これらの物質定数構造は2．4．1における表2．11の場合にあてはまることがわかる．

過程（iii）に対して：2．4．2より，相反線路表示が可能な物質では固有モード関数に対して次の関係式が成り立つ．

$$\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}^- \quad , \quad \mathbb{I}^+ = -\mathbb{I}^- \qquad (5.3)$$

ここに，右肩の＋，－はそれぞれ前進波，後退波を意味する．

まず，ここで考えている回転Yカット，X伝搬の$LiNbO_3$では式（5．

3）を満たす固有モード関数の成分はどのようなものであるかを論ずる．

図5．1のα導波系における圧電結晶中の解を次のように仮定する．

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= A\exp(\Omega k x_1)\ ,\quad u_2 = B\exp(\Omega k x_1) \\ u_3 &= C\exp(\Omega k x_1)\ ,\quad \phi = D\exp(\Omega k x_1) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

ここに，因子 $e^{j(\omega t - k x_3)}$ は省略してあり，kは波数，A，B，Cは機械的変位の振巾，Dは電位の振巾，Ωは無次元減衰定数である．このとき，圧電結晶中の弾性波の満たす基本方程式[1]に式（5．4）を代入し，A，B，C，Dが非自明な解を持つための条件を考えるとΩ^2に関する4次方程式が得られる．このうち，Ωの実部が正（弾性表面波としての条件）なるものは最大四つあり，弾性表面波モードとして次の形の解が得られる．

$$\left.\begin{aligned} u_1^+ &= A_1^+ \sum_{i=1}^{4} \eta_i^+ e^{\Omega_i k x_1}\ ,\quad u_2^+ = A_1^+ \sum_{i=1}^{4} \eta_i^+ p_i^+ e^{\Omega_i k x_1} \\ u_3^+ &= A_1^+ \sum_{i=1}^{4} \eta_i^+ q_i^+ e^{\Omega_i k x_1}\ ,\quad \phi^+ = A_1^+ \sum_{i=1}^{4} \eta_i^+ r_i^+ e^{\Omega_i k x_1} \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

ここに，右肩の＋は前進波を表わし，A_1^+は振巾，η_i^+ は$x_1=0$での境界条件より決定されるものである（ただし，$\eta_1^+ \equiv 1$）．また，p_i^+，q_i^+，r_i^+ は式（5．4）を基本方程式に代入して得られる四つの式のうち任意の三つの式，たとえば，

$$\left.\begin{aligned} &(c_{16}'\Omega^2 - c_{45}')B/A - j\Omega(c_{13}'+c_{55}')C/A + (e_{11}'\Omega^2 - e_{35}')D/A = c_{55}' - c_{11}'\Omega^2 - \rho v^2 \\ &(c_{66}'\Omega^2 - c_{44}' + \rho v^2)B/A - j\Omega(c_{36}'+c_{45}')C/A + (e_{16}'\Omega^2 - e_{34}')D/A = c_{45}' - c_{16}'\Omega^2 \\ &j\Omega(c_{36}'+c_{45}')B/A - (c_{55}'\Omega^2 - c_{33}' + \rho v^2)C/A + j\Omega(e_{13}'+e_{35}')D/A = -j\Omega(c_{13}'+c_{55}') \end{aligned}\right\}$$

（5．6）

において，

$$B_i/A_i = p_i\ ,\quad C_i/A_i = q_i\ ,\quad D_i/A_i = r_i \qquad (5.7)$$

で定義される量（添字 i は Ω_i に対する量を意味する）である．式（５．６）における ρ は弾性体の密度，v は弾性表面波の速さである．

一方，因子 $e^{j(\omega t+kx_3)}$ を持つ後退波に対しては，式（５．５）の＋を－に書き換えた式（弾性表面波を考えているので $\Omega_i k$ は変わらない）が成り立つ．そして，p_i^-，q_i^-，r_i^- は式（５．７）で定義されるが，この場合には式（５．６）に示した破線部分の符号が変わり，

$$p_i^- = p_i^+ \ , \ q_i^- = -q_i^+ \ , \ r_i^- = r_i^+$$

が成り立つことがわかる．また，$\eta_i^- \equiv \eta_i^+$ である．

以上より，式（５．５）とその式で＋を－に書き換えた式を比較すると，固有モード関数に対して次式が成り立つことがわかる．

$$u_1^- = u_1^+ \ , \ u_2^- = u_2^+ \ , \ u_3^- = -u_3^+ \ , \ \phi^- = \phi^+ \qquad (5.8)$$

したがって，粒子速度では $v_1^- = v_1^+$，$v_2^- = v_2^+$，$v_3^- = -v_3^+$ が成り立ち，構成式（２．７）より次の関係式が成り立つこともわかる．

$$T_3^- = T_3^+ \ , \ T_4^- = -T_4^+ \ , \ T_5^- = -T_5^+ \ , \ D_3^- = -D_3^+ \qquad (5.9)$$

ここに，T_3 などは応力成分，D_3 は電束密度の x_3 方向成分である．

式（５．８），（５．９）より，２通りの表示が可能であるⅣ，Ⅱのうち次の表示の方を用いると式（５．３）が満たされることがわかる．

$$\mathrm{IV} = [v_1, v_2, T_3, \phi] \ , \ \mathrm{II} = [-T_5, -T_4, v_3, -j\omega D_3] \qquad (5.10)$$

ただし，前進波としての＋記号は省略している．また，自由空間中では，このように決められたⅣ，Ⅱの成分のうち電気量（ただし，$\hat{\phi}$，$\hat{D}_3$ で表わす）のみを含むことになる．

a，b 導波系における弾性物質は今の場合同じであるので，b 導波系での固有モード関数の成分の構成は a 導波系におけるものと同じである．

次に，式（５．２）で実際に用いる固有モード関数について論ずる．

式（５．２）における固有モード関数は正規化されている必要，つま

り，式（５．10）および自由空間中の固有モード関数の成分は，

$$R^{a,b}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{U}^{a,b}\cdot\mathbb{I}^{a,b}\,dx_1 \qquad (5.11)$$

で定義される$\sqrt{R^{a,b}}$で割っておく（a，b導波系の量はそれぞれ$\sqrt{R^{a}}$，$\sqrt{R^{b}}$で割る）必要があり，この結果，式（５．２）で用いるb導波系での量はa導波系の量におけるx_1をx_1-hとおくことにより得られる．このとき，式（５．２）におけるa，b導波系での量は次のように与えられる．

$-\infty\leq x_1\leq 0$では：$\mathbb{U}^{a,b}=[V_1^{a,b},V_2^{a,b},T_3^{a,b},\phi^{a,b}]$，$\mathbb{I}^{a,b}=[-T_5^{a,b},-T_4^{a,b},V_3^{a,b},-j\omega D_3^{a,b}]$

$0\leq x_1\leq h$では：$\mathbb{U}^{a}=[\hat{\phi}^{a}]$，$\mathbb{U}^{b}=[\phi^{b}]$，$\mathbb{I}^{a}=[-j\omega\hat{D}_3^{a}]$，$\mathbb{I}^{b}=[-j\omega D_3^{b}]$

$\mathbb{U}^{Bb}=[V_1^{b},V_2^{b}]$，$\mathbb{I}^{Bb}=[-T_5^{b},-T_4^{b}]$

$h\leq x_1\leq\infty$では：$\mathbb{U}^{a,b}=[\hat{\phi}^{a,b}]$，$\mathbb{I}^{a,b}=[-j\omega\hat{D}_3^{a,b}]$

ここに，右肩のa，bはそれぞれ対応する．

５．２．３　計算例

式（５．５）におけるA_1^+が１のときの反射係数Υは式（５．１）より計算され，図５．２にはh/λ（λ：弾性表面波の波長）を変数にし，いろいろな物質に対して計算した結果が示されている．

131.5°回転Ｙカット，Ｘ伝搬とＹカット，Ｘ伝搬の$LiNbO_3$の場合は５．２．２での$\mathbb{U}$，$\mathbb{I}$を用いて計算される．また，他の物質の場合にも５．２．２と同様な過程を踏むと$\mathbb{U}$，$\mathbb{I}$は決定され，Υは計算される．

Ｙカット，Ｘ伝搬のSiO_2は２．４．１における表２.12の物質定数構造の場合にあてはまり，前進波の弾性表面波モードとして式（５．５）の形を用いると，

$$p_i^-=p_i^+,\quad q_i^-=-q_i^+,\quad \gamma_i^-=-\gamma_i^+ \qquad (i=1\sim4)$$

の関係が得られる．このとき，式（５．10）に対応するモード関数は，

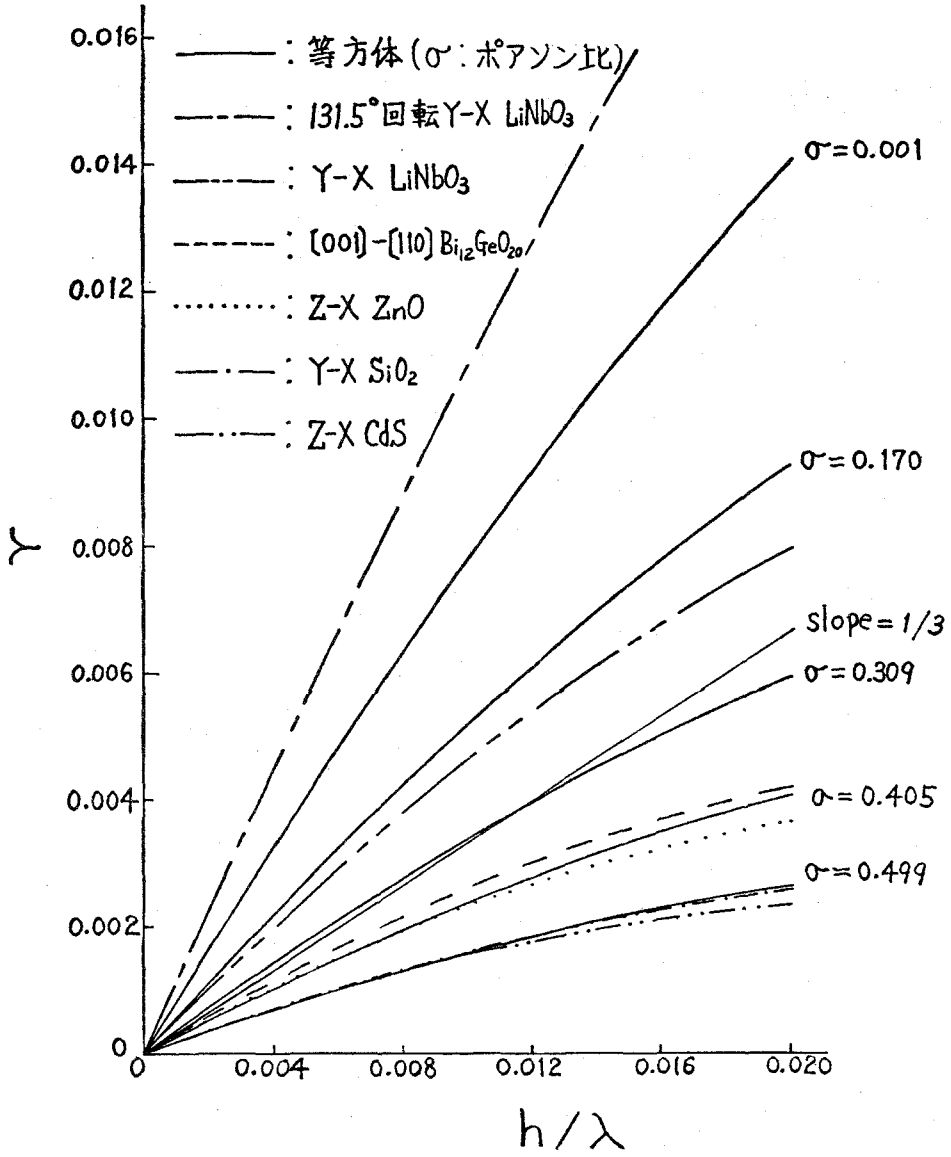


図５．２　いろいろな物質に対するステップでの反射係数

$$\mathrm{I}=[V_1, V_2, T_3, j\omega D_3], \quad \mathrm{II}=[-T_5, -T_4, V_3, \phi]$$

のように与えられる（Y カット，X 伝搬に限らず，回転 Y カット，X 伝搬に対してこの形で与えられる）．

〔001〕カット，〔110〕伝搬の $Bi_{12}GeO_{20}$ は 2．4．1 における表 2.11，2.13 の二つの物質定数構造の場合にあてはまるが，このカット，伝搬方向ではレイリー波（$V_2=T_4=0$）が伝搬すること，および，レイリー波モードとして式（5．5）の形（ただし，$i=1\sim3$ であり，U_2^+ については考える必要はない）を用いて得られる関係式，

$$\gamma_i^- = -\gamma_i^+, \quad \Upsilon_i^- = \Upsilon_i^+ \quad (i=1\sim3)$$

を考慮すると，式（5．10）に対応する固有モード関数は，

$$\mathrm{I}=[V_1, T_3, \phi], \quad \mathrm{II}=[-T_5, V_3, -j\omega D_3]$$

のように一つに決まることがわかる．

以上のものに対しては準静電近似を行なっているが，Z カット，X 伝搬の ZnO，CdS に対しては一般的取扱いを行なっている．このとき，固有モード関数 I，II は次のように与えられる†．

$$\mathrm{I}=[V_1, T_3, E_1], \quad \mathrm{II}=[-T_5, V_3, -H_2]$$

なお，$LiNbO_3$，SiO_2，$Bi_{12}GeO_{20}$ の結晶定数値，弾性表面波の速さとしては文献(49)，(50)を用いており，また，ZnO，CdS に対するモード関数，弾性表面波の速さは文献(44)のものを用いている．

---

† この場合にも物質定数構造としては 2．4．1 における表 2．3，2．9 の二つの場合があてはまるが，ZnO，CdS は共に 6mm クラスの結晶であり，Z カット，X 伝搬ではレイリー波が存在する(44)〜(46)ため，すなわち，$V_2=T_4=H_1=E_2=0$ のために I，II としては一つに決まる．

また，等方体の場合にはレイリー波が存在し，その速さとしてはポアソン比σと関係づけられる近似式を用いており，その式およびモード関数は文献(54)に与えられている．そして，固有モード関数Ⅲ，Ⅱは次のように与えられる．

$$Ⅲ=[\ V_1\ ,\ T_3\ ]\ ,\ Ⅱ=[-T_5\ ,\ V_3\ ]$$

ところで，R.C.Williamson らはYカット，Z伝搬の$LiNbO_3$に対して，その反射係数γは$h/\lambda \lesssim 0.012$では傾き1/3の直線になることを実験的に示し[15]，R.C.M.Li はその系における$LiNbO_3$に対し，等価等方体としてポアソン比$\sigma=0.309$を与えた[16]．図5．2には$\sigma=0.309$のグラフとslope＝1/3の直線が対比されており，両者は$h/\lambda \lesssim 0.012$においてかなり一致していることがわかる．このことは，反射係数γを計算するとき，$h/\lambda \lesssim 0.012$では式（5．1），（5．2）を用いても妥当であることを示していると思われる．

図5．2より，h/λが小さいときにはγはh/λにほぼ比例することがわかる．また，$h/\lambda \lesssim 0.012$では，Z-X（Zカット，X伝搬のことを意味する）ZnOのグラフは$\sigma=0.405$のグラフと，Y-X SiO_2，Z-X CdSのグラフは$\sigma=0.499$のグラフとよく一致していることがわかる．

図5．3はZカット，X伝搬のZnO，CdSにおいて，圧電効果を考慮した場合（実線）と無視した場合（破線）の反射係数γを比較したものである．圧電無視の場合のモード関数，弾性表面波の速さは文献(44)のものを用いている．圧電考慮のZnOではγは複素数になっているが，その虚部は実部に比べて小さく，ほとんど実数と考えられる†．なお，図

---

† 虚部は実部の約1/25，電力（式（4.41）よりγの絶対値の2乗は電力を表わす）ではその2乗だけ小さい．

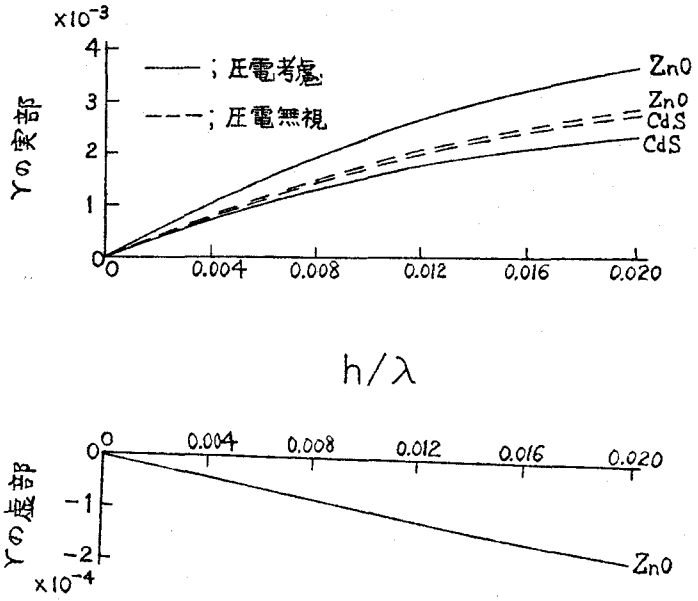


図５．３　Ｚカット，Ｘ伝搬のＺｎＯ，ＣｄＳにおけるレイリー波の反射係数

５．２におけるＺｎＯ，ＣｄＳに対する反射係数は図５．３における圧電考慮の場合の反射係数の実部を示したものである．

図５．３より，圧電無視のときにはＺｎＯ，ＣｄＳはほとんど同じ大きさの反射係数を持ち，圧電考慮と無視のグラフを比較すると，ＺｎＯの方がＣｄＳより圧電効果が大きいことがわかる．

なお，圧電考慮のＺカット，Ｘ伝搬のＺｎＯ以外では，図５．２，５．３に示される物質に対する反射係数Γは実数であった．

５．３　ステップの等価回路表示

図５．１のステップ導波系を図５．４に示されるような異なった特性アドミタンスを持った伝送線路の接続による等価回路で表わす．R.C.M.Li５[17]は規準面Ｒの位置にバルク波による蓄積エネルギーを表わすものと

して容量性サセプタンスを並列に挿入しているが，その効果は小さくて2次効果であるので，ここでは，図5．4の等価回路を用いることにする．図5．4におけるkは波数である．このとき，規準面Rへ振巾1の波が入射したときの反射係数Υ，透過係数tは次のように与えられる．

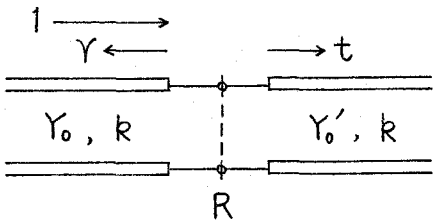


図5．4　ステップ導波系の等価回路

$$\Upsilon=\frac{Y_0-Y_0'}{Y_0+Y_0'},\quad t=\frac{2\sqrt{Y_0}\sqrt{Y_0'}}{Y_0+Y_0'} \tag{5.12}$$

一方，図5．1の系とは逆に$x_3<0$がhだけ高いときには式（5．12）においてY_0とY_0'を交換した式が反射係数，透過係数を与え，それぞれをΥ'，t'とすると，$\Upsilon'=-\Upsilon$，$t'=t$（Υ，tは式（5．12）で与えられる）が成り立つ．ここに，Υ，t，Υ'，t'について，それぞれの絶対値の2乗は電力を表わす．

式（5．1）のΥ（式（4．41）よりその絶対値の2乗は電力を表わす）を一般に$\Upsilon=a+ib$（a，b：実数，i：虚数単位）とおき，式（5．12）のΥと等しくおくと次式が得られる．

$$\frac{Y_0'}{Y_0}=\frac{1-a-ib}{1+a+ib}$$

このとき，式（5．1）のΥを用いてt，Υ'，t'が決定されることになる．

5．4　周期的溝アレイのTマトリクス表示

図5．5は，x_3方向に相反線路表示が可能な弾性体の表面に深さhの溝が設けられた周期的溝アレイである．ここに，x_2方向には一様である

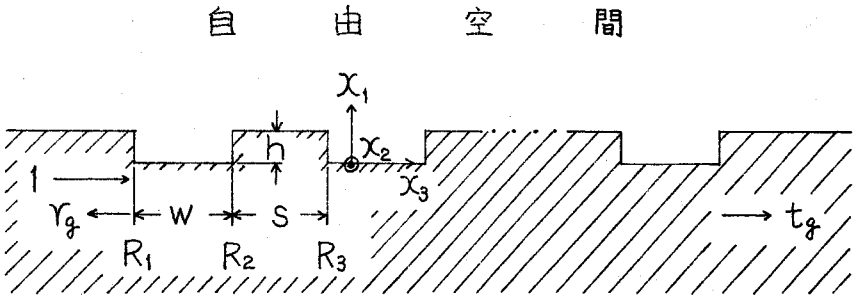


図５．５　周期的溝アレイ

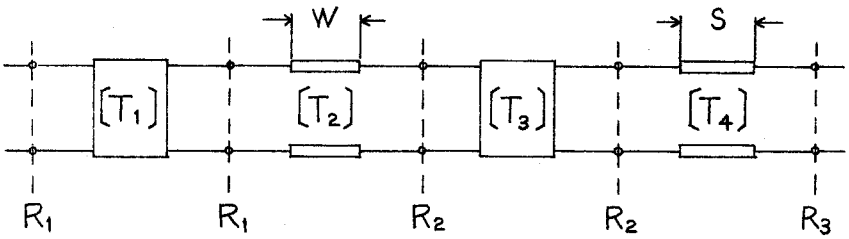


図５．６　周期的溝アレイのＴマトリクス表示

とし，また，自由空間との境界は弾性的には自由とする．

図５．６は図５．５のＴマトリクス表示であり，両図における文字は対応している．

溝の数がn個のときＴマトリクスの個数mは，

$$m = 4(n-1)+3$$

になり，全体としてのＴマトリクスは次式で与えられる．

$$[T]=[T_m][T_{m-1}]\cdots\cdots[T_3][T_2][T_1] \qquad (5.13)$$

今，全体としてのＴマトリクスを用いて図５．７のような４端子回路を考える．このとき，反射係数 $r_g = b_1/a_1$，透過係数 $t_g = b_m/a_1$ は $a_m=0$ とおくことにより次のように与えられる．

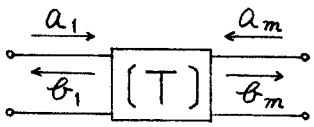


図５．７　４端子回路

$$\gamma_g = -\frac{T_{21}}{T_{22}}, \quad t_g = \frac{|[T]|}{T_{22}} \qquad (5.14)$$

ここに，T_{ij}は行列〔T〕の(i,j)成分，| |は〔T〕の行列式を意味する．また，γ_g，t_gは図5．5に示されるものと同じであり，それぞれは，振巾1の弾性表面波が周期的溝アレイに垂直入射したときのその入射面，透過面での反射係数，透過係数である．

ところで，溝の深さhが各ステップ部分で等しいとき，式（5．13）における〔$T_{4\ell+1}$〕，〔$T_{4\ell+3}$〕（$\ell=1, 2, \cdots\cdots$）はそれぞれ〔T_1〕，〔T_3〕とその成分が同じであり，式（5．13）を計算するためには，

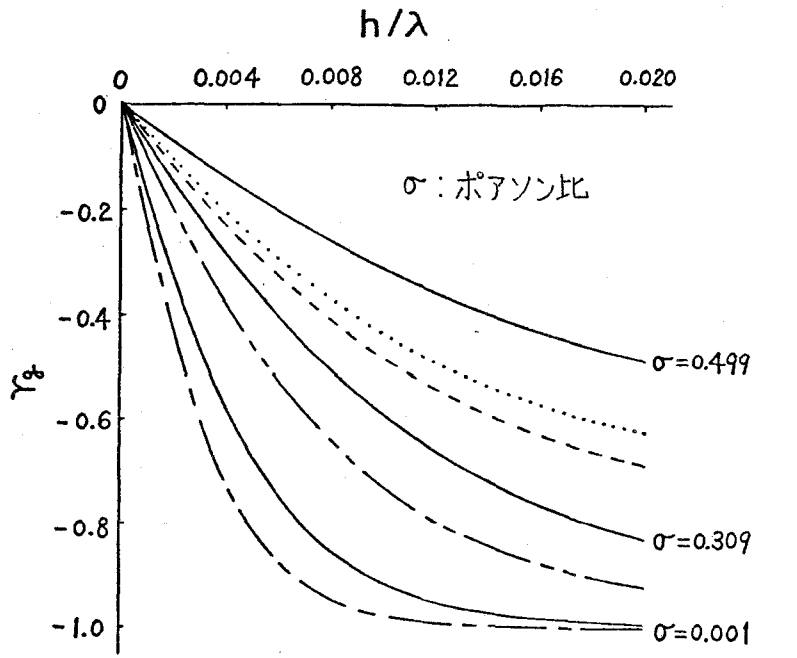
$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1/t & \gamma/t \\ \gamma/t & 1/t \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1/t & -\gamma/t \\ -\gamma/t & 1/t \end{bmatrix}, \quad [T_t] = \begin{bmatrix} e^{-j\theta} & 0 \\ 0 & e^{j\theta} \end{bmatrix}$$

のみがわかっていればよい．ここに，$\gamma' = -\gamma$，$t' = t$（これらは5．3で示されている）の関係が用いられている．また，〔T_t〕は伝送線路部分のTマトリクスであり，$\theta = kW, kS$（θ：電気角）それぞれに対し，〔T_t〕＝〔T_2〕，〔T_4〕である．

5．5　計算例

この節では，弾性体として等方体，Yカット，X伝搬と131.5°回転Yカット，X伝搬の$LiNbO_3$，Yカット，X伝搬のSiO_2，Zカット，X伝搬のZnOとCdS，さらに，〔001〕カット，〔110〕伝搬の$Bi_{12}GeO_{20}$を取り上げ，式（5．14）を計算した結果を示す．ただし，溝の深さhは各ステップ部分で等しいものとする．

図5．8は溝の数$n=100$，$W=S=\lambda/4$（λ：弾性表面波の波長）のときの反射係数γ_g，図5．9はそのときの透過係数t_gである．計算結果によるとγ_gは実数，t_gは純虚数であった（ただし，Z−X ZnOではγ_g，

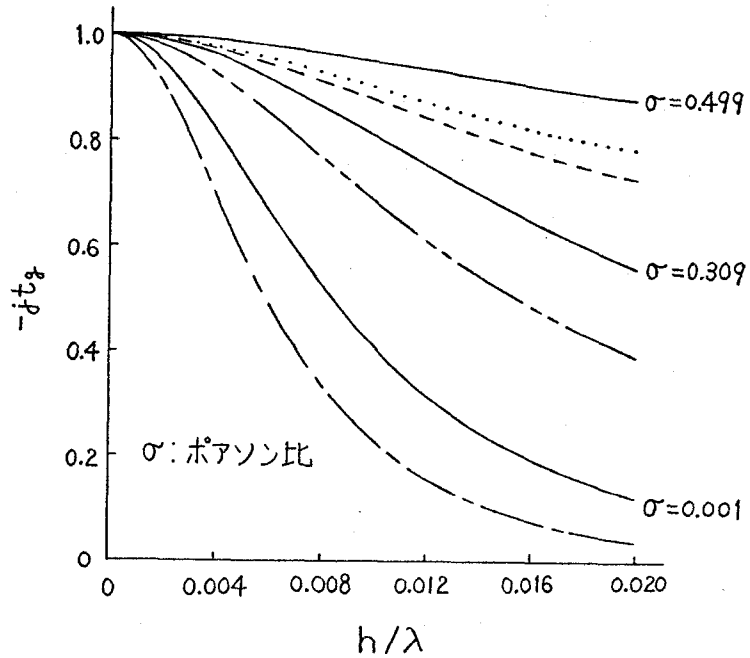


——— : 等方体，　— — — : 131.5°回転Y-X $LiNbO_3$

— · — · — : Y-X $LiNbO_3$，　- - - - - - : [001]-[110] $Bi_{12}GeO_{20}$

····· : Z-X ZnO

図５．８　いろいろな物質に対する周期的溝アレイでの反射係数（$n=100$, $W=S=\lambda/4$）



——— : 等方体，　— — — : 131.5°回転Y-X $LiNbO_3$

— · — · — : Y-X $LiNbO_3$，　- - - - - - : [001]-[110] $Bi_{12}GeO_{20}$

····· : Z-X ZnO

図５．９　いろいろな物質に対する周期的溝アレイでの透過係数（$n=100$, $W=S=\lambda/4$）

t_gは複素数になるが，γ_gの虚部，t_gの実部はそれぞれの実部，虚部に比べて2桁程小さく，γ_g，t_gはそれぞれほぼ実数，純虚数と考えられる）．

ここでの解析では，式（５．１）を基本にしているので，したがって，バルク波の影響を無視しているので，図５．８，５．９が正しいかどうかは実験あるいは厳密な計算を待たねばならない．しかし，５．２．３における議論よりh/λが0.012ぐらいまではバルク波の影響が小さいと考えられ，図５．８，５．９においても$h/\lambda \leqq 0.012$ではほぼ正しい値を与えているものと思われる．

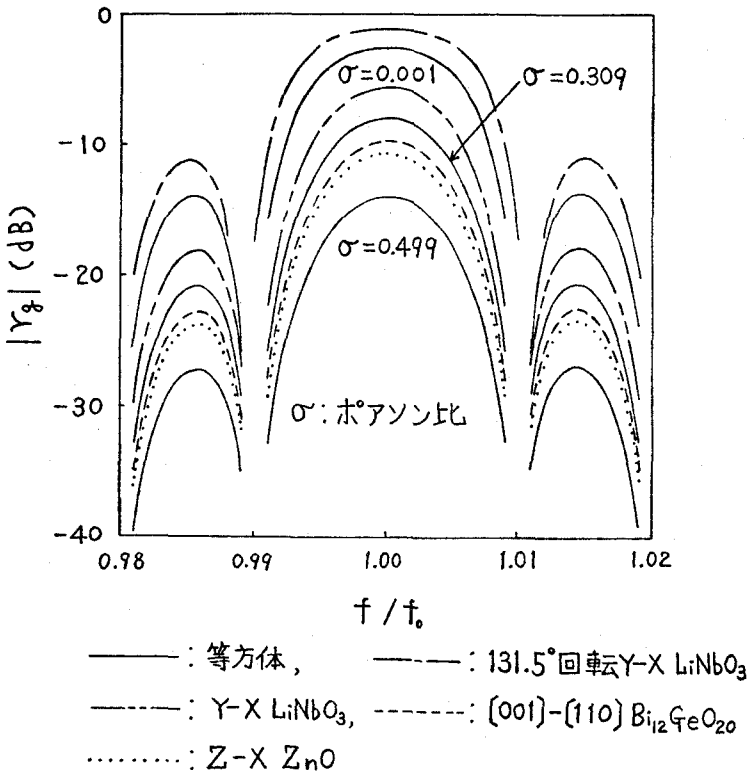


図５．10　いろいろな物質に対する$|\gamma_g|$の周波数特性

（$n=100$，$h/\lambda_0=0.006$，$W=S=\lambda_0/4$）

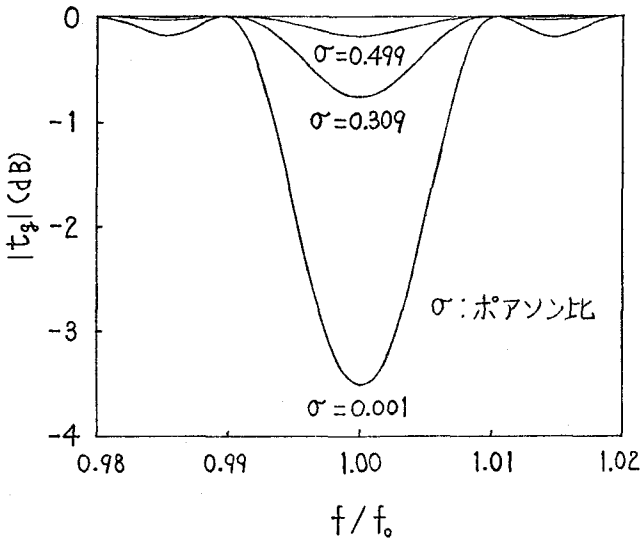


図５．11　等方体に対する $|t_g|$ の周波数特性

（n=100，h/λ_0=0.006，W=S=$\lambda_0/4$）

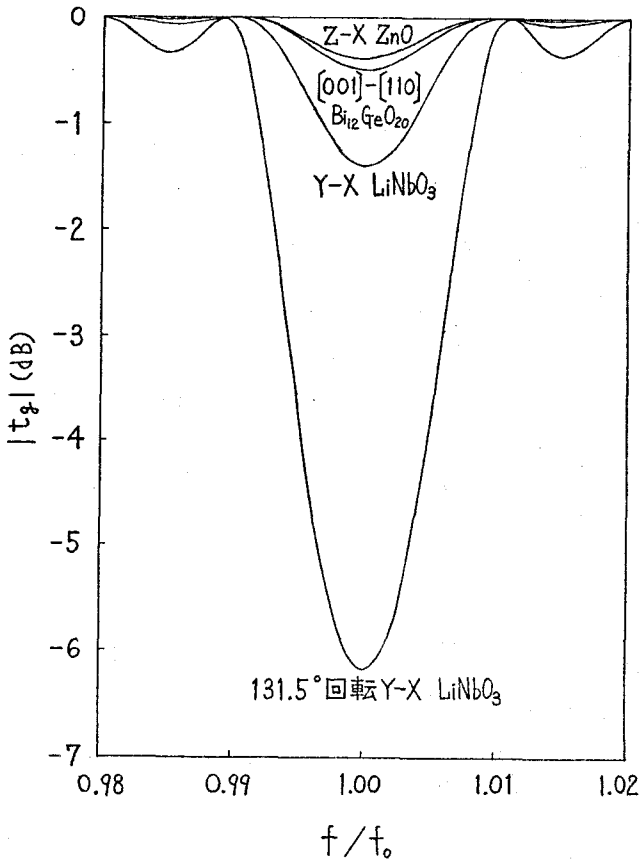


図５．12　$LiNbO_3$，$Bi_{12}GeO_{20}$，ZnO に対する $|t_g|$ の周波数特性（n=100，h/λ_0=0.006，W=S=$\lambda_0/4$）

図5．10～5．12は溝の数n=100，h/λ_0=0.006，W＝S＝$\lambda_0/4$のときの$|\gamma_g|$，$|t_g|$の周波数特性を示したものであり，dB 単位で表わされている（｜｜は大きさを意味する）．λ_0はf_0（中心周波数）での波長であり，弾性表面波の速さをvとして，$\lambda_0=v/f_0$＝4W＝4S の関係を満たすものである．

図5．13，5．14は溝の数nを変数にしたときの反射量，透過量の変化を示している．ただし，h/λ＝0.006，W＝S＝$\lambda/4$の場合であり，n=100 のときの反射量，透過量は図5．10～5．12におけるf/f_0＝1のときのものと一致している．

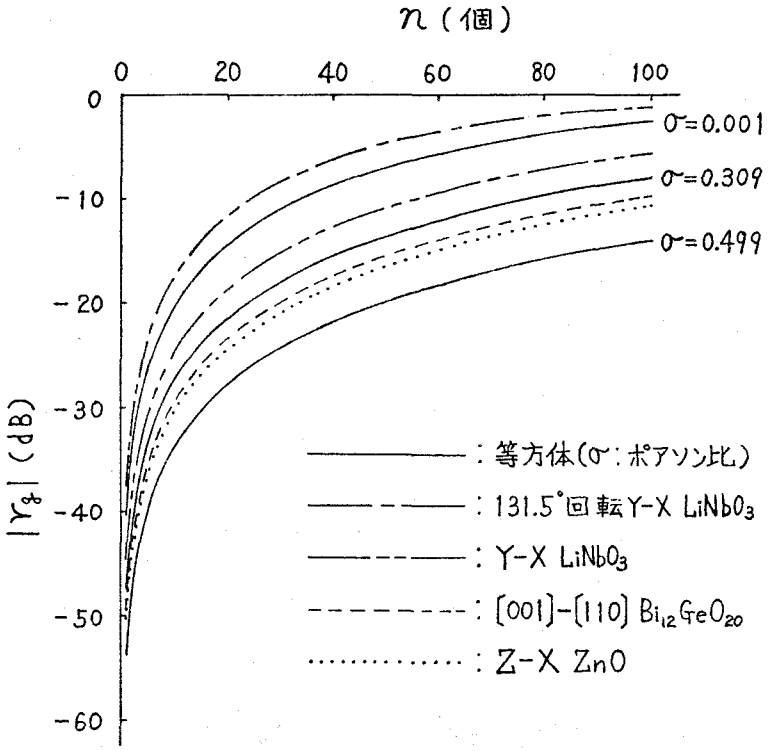


図5．13　いろいろな物質に対する$|\gamma_g|$の溝数n依存性
（h/λ＝0.006，W＝S＝$\lambda/4$）

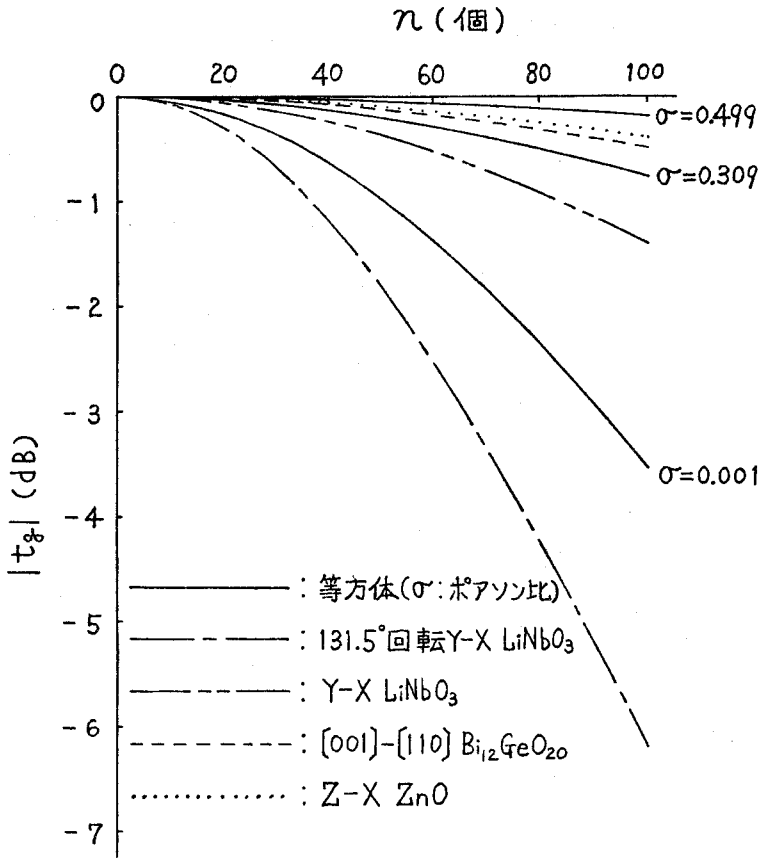


図５．14　いろいろな物質に対する $|t_g|$ の溝数 n 依存性

（$h/\lambda=0.006$，$W=S=\lambda/4$）

なお，Y-X SiO_2，Z-X CdS の反射係数，透過係数は $\sigma=0.499$ のものとよく類似している（図５．２参照）のでここでは省いている．

５．６　反射量の周波数特性に対する検討

E.K.Sittig ら[47]は特性インピーダンスの違う二つの伝送線路が接続されたものを一つの対とし，それが周期的にN対接続された系において，そのインピーダンスの違いが小さいとき，反射量の周波数特性は近似的

に $\sin x/x$ 型（ただし，$x=N\pi f/f_0$）になることを示している．また，R.C.M.Li[16]はポアソン比 $\sigma=0.309$ の等方弾性体（ただし，これはYカット，Z伝搬の $LiNbO_3$ の等価等方体である）における周期的溝アレイでの弾性表面波に対し，溝の数 $n=100$，$h/\lambda_0=0.01$，$W=S=\lambda_0/4$ のとき，その反射量の周波数特性について論じている．

本節では，図5．5の周期的溝アレイに垂直入射する弾性表面波に対し，溝の数，溝の深さをいろいろ変化させたときの反射量の周波数特性について検討する．

図5．15は溝の数 $n=10$，$W=S=\lambda_0/4$ のときの反射量の周波数特性であり，ポアソン比 $\sigma=0.001$，0.499 の2種類の等方弾性体それぞれに対し，3種類の h/λ_0 の場合が示されている．計算法は5．5におけるものと同じである．また，図5．16，5．17はそれぞれ $n=50, 100$ の場合である．

図5．15～5．17より次のことがわかる．すなわち，切れ込み周波数としては $f/f_0 \simeq 1 \pm c/n$（c：自然数）であるが，$n=100$（図5．17），$\sigma=0.001$，$h/\lambda_0=0.01$ の場合には $1 \pm c/n$ からのずれが大きく，この傾向は反射量が大きい（$|\gamma_g|$ が0dBに近いほど反射量は大きい）ほど強く現われ，$n=50$（図5．16），$\sigma=0.001$，$h/\lambda_0=0.01$ および $n=100$，$\sigma=0.001$，$h/\lambda_0=0.006$ の場合にもその傾向が現われていることがわかる．また，$|\gamma_g|$ の $f/f_0=1$ に関する対称性については，$n=100$ ではほとんど対称であるが，n が小さいほど対称性は悪く，$n=10$ では $f/f_0=1$ の左右のサイドローブに対して，そのレベルには約数dBの違いがある．透過量の周波数特性（図5．11，5．12）と共に反射量の周波数特性を見ると，ここで計算されたような周期的溝アレイは透過する弾性表面波に対して帯域阻止フィルタの性質を持っており，n が大

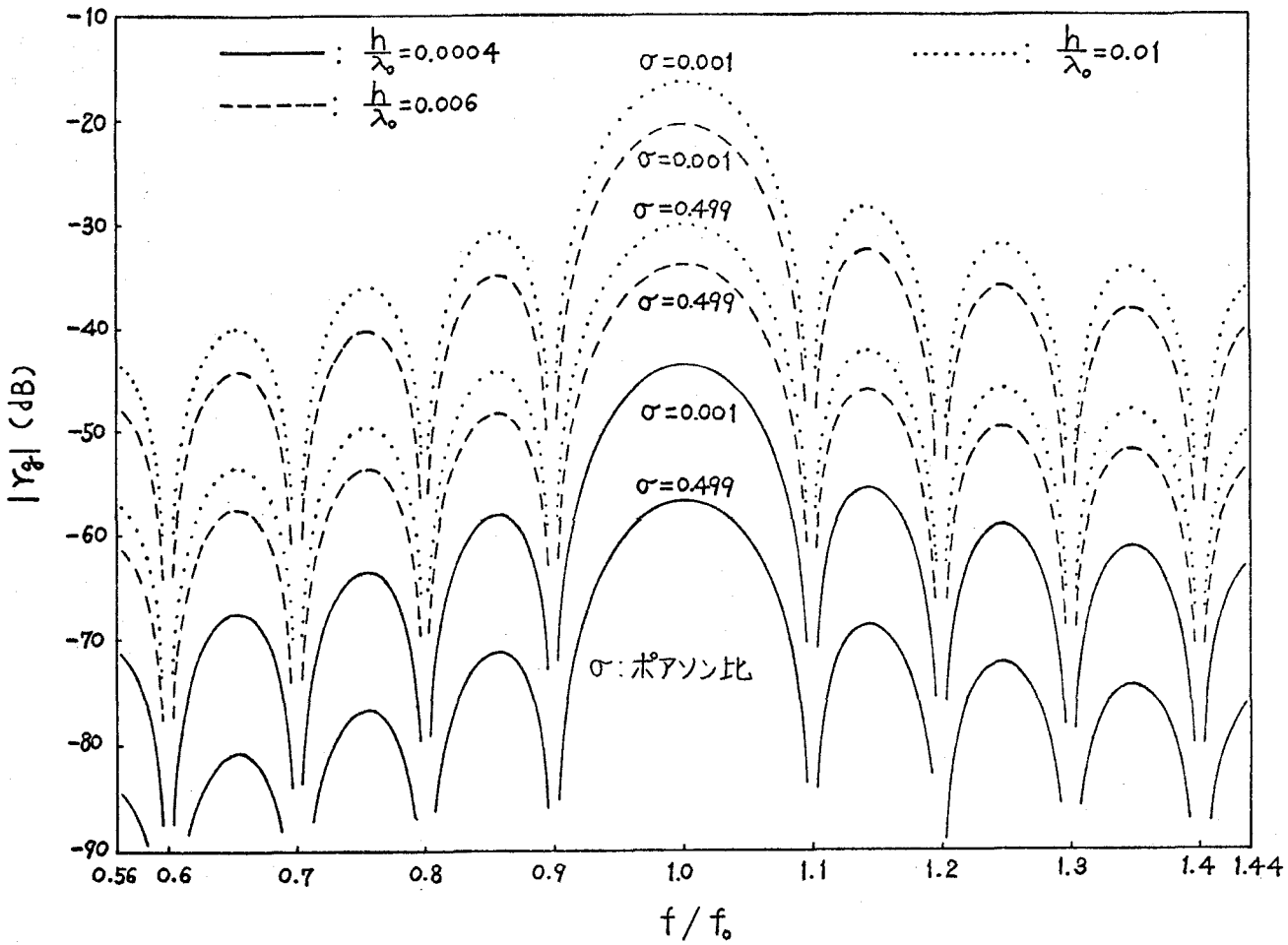


図5．15　$|\Gamma_g|$ の周波数特性（$n=10$, $W=S=\lambda_0/4$）

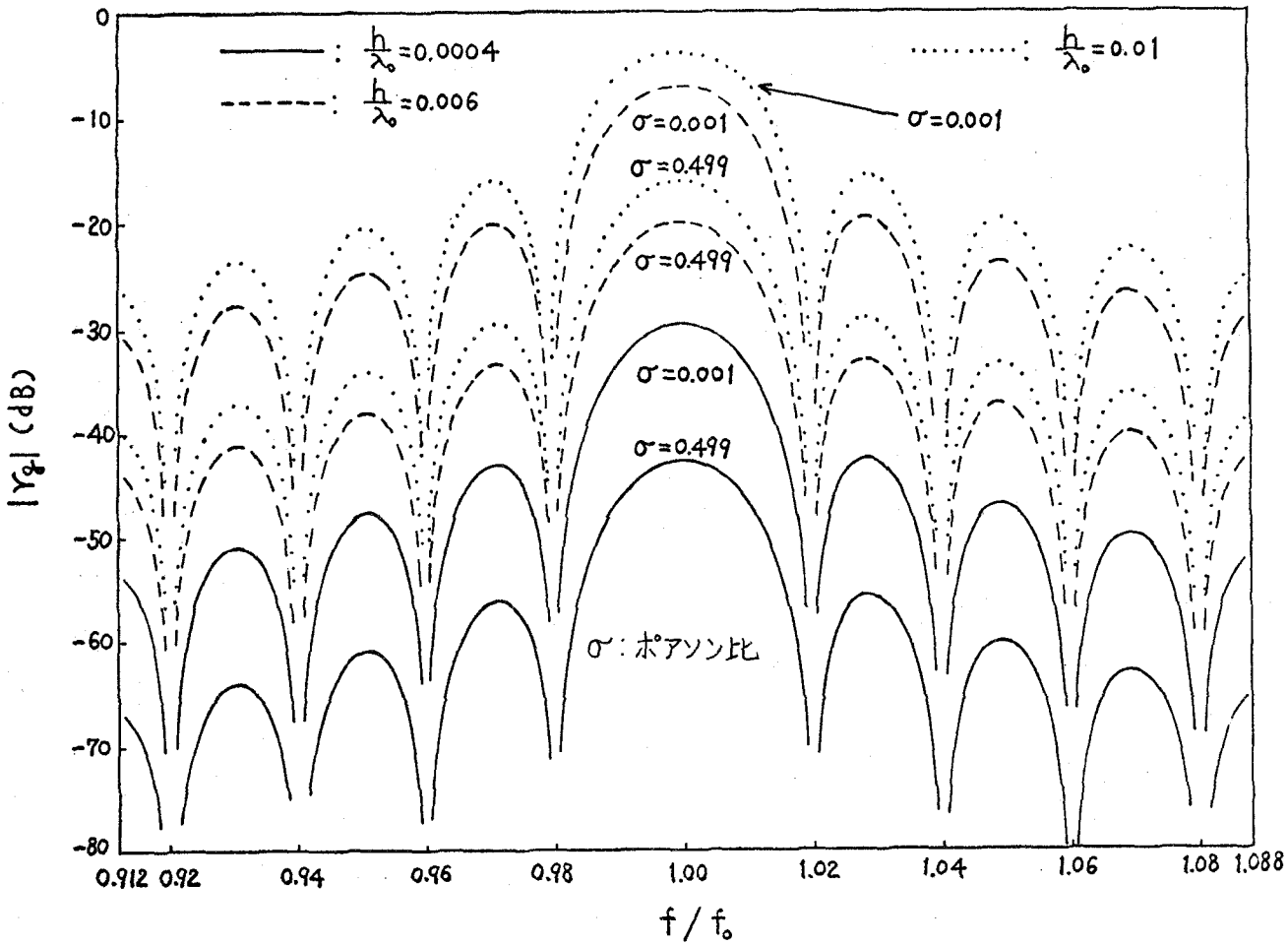


図5．16　$|Y_g|$ の周波数特性（$n=50$, $w=s=\lambda_0/4$）

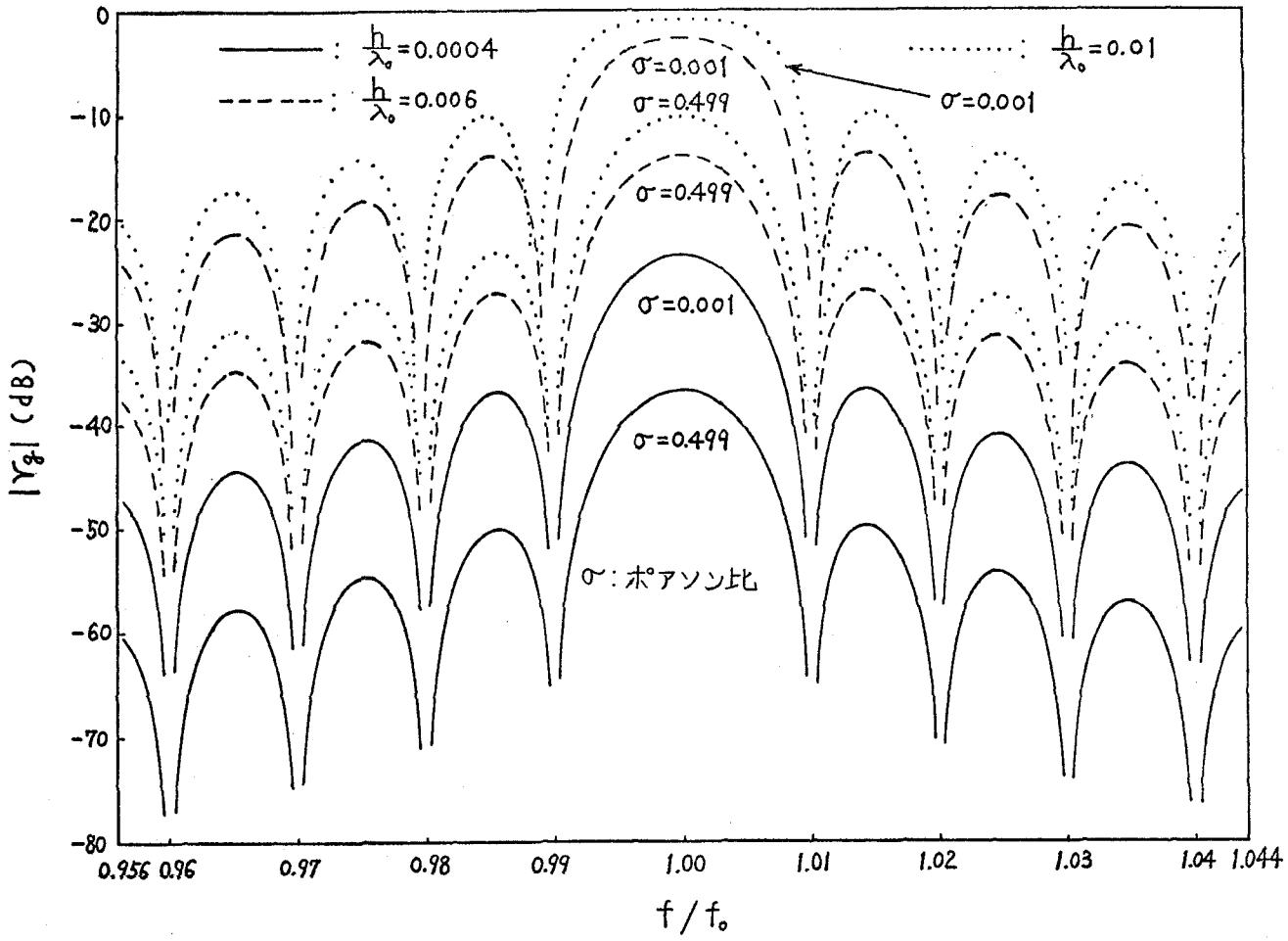


図5．17　$|Y_g|$ の周波数特性（$n=100, W=S=\lambda_0/4$）

きいほど（ただし，同じ弾性体，h/λ_0のとき），また，nが同じでもステップでの反射量が大きいほどその性質は強く現われることがわかる．

図5．18は$|\gamma_g|$の周波数特性における主ローブと第一サイドローブのレベル差をh/λ_0を変数にして示したものである．ただし，$n=100$，$W=S=\lambda_0/4$であり，弾性体としてはポアソン比$\sigma=0.001$，0.309，0.499の等方体である．$n=100$の場合を選んだのは，$|\gamma_g|$の周波数特性が図5．17に見られるように$f/f_0=1$に関してほぼ対称であるためである．計算結果によると，h/λ_0が0.0004のとき，3種類の弾性体とも主ローブと第一サイドローブのレベル差は約13.4dBであった．

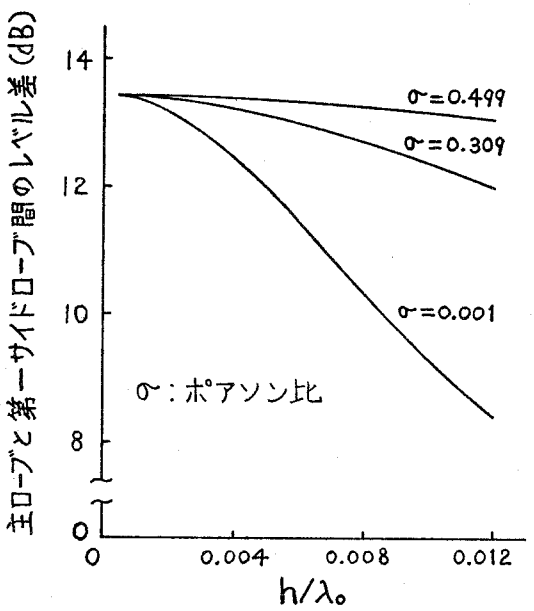


図5．18　等方体周期的溝アレイの周波数特性における主ローブと第一サイドローブ間のレベル差（$n=100$，$W=S=\lambda_0/4$）

以上より，nが大きく，かつ，ステップでの反射量が小さいほど$|\gamma_g|$の周波数特性は$\sin x/x$型† に近づくことがわかる．というのは，nが大きいほど$f/f_0=1$に関する対称性が良くなり，ステップでの反射量が小さいほど切

† $\sin x/x$型（ただし，$x=n\pi f/f_0$）は$f/f_0=1$に関して対称であり，その切れ込み周波数は$1\pm C/n$（C：自然数），主ローブと第一サイドローブのレベル差は約13.5dBである．

れ込み周波数が $1 \pm c/n$ に近づき，また，主ローブと第一サイドローブのレベル差が13.5dB近くになるからである．

なお，本節では，代表的な例としてポアソン比が0.001，0.309，0.499の等方弾性体の場合を取り上げているが，5．5におけるような物質に対しても同様な傾向の図が得られる．というのは，γ_g，t_gは式（5．1）のγが計算されさえすればあとは全く等価回路論的に計算され得るものであり，図5．2より，h/λ が小さいとき，いろいろな物質に対するγの傾向は類似しているためである．

5．7　結　言

3次元構造の段付圧電性弾性導波系における反射係数の変分表示式に基づく式を2次元ステップ導波系の場合に適用し，その反射係数を基にしてステップ部分をTマトリクス表示し，Tマトリクス表示された個々の4端子回路の縦続接続で周期的溝アレイを表わし，周期的溝アレイにおける弾性表面波の反射と透過について論じた．計算例としては，弾性表面波用基盤としてよく用いられる弾性体をいくつか選んでおり，溝の深さ，溝の数を変化させたときの反射量，透過量が計算されている．特に，反射量の周波数特性に対しては，主ローブと第一サイドローブのレベル差，切れ込み周波数などが検討されている．

本解析法ではバルク波は無視されるが，ステップ間の多重反射は考慮される．そして，ステップでの反射係数には変分表示式に基づいた式を用い，あとは全く等価回路論的に論じており，ステップが小さい導波系では一つの方法論として価値があるものと思われる．また，導波系が相反線路表示可能ならば本解析法は適用可能であり，かなり一般性があるものと思われる．

第 6 章　　結　論

本章では，第2章から第5章までの各章で得られた研究成果を総括して述べる．

第2章では，圧電性弾性導波系において同じ伝搬定数を持つ前進波，後退波が基本方程式と基本構成式を満たすための条件より，導波系が波の伝搬方向に相反線路表示可能となる物質定数構造を決定し，その物質定数構造を持つ物質で構成された導波系では，いわゆるマイクロ波導波管などの導波系における電界，磁界の断面成分に相当する二つのベクトル量が定義され，固有モードの直交関係式はそれらのベクトル量のスカラ積で与えられることを示した．固有モードの直交関係式としては，物質に損失がない場合に成り立つ関係式および損失があっても成り立つ関係式が得られ，等価電圧，電流についても論じられた．

第3章では，第2章で定義された正規直交固有モード関数を用い，構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が断面形状を同じくして接続された不連続圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式をマイクロ波工学での手法に準じて導いた．そして，レイリー・リッツ法を用いるとき，散乱係数は固有モード関数のみで非常に簡単な表示式として与えられることを示した．具体例としては，等方弾性体無限平板におけるSH波の散乱問題が取り上げられ，妥当な結果が得られた．

第4章では，第3章における問題をより拡張し，一般に構成物質の異なった二つの圧電性弾性導波系が段を持って接続された不連続圧電性弾性導波系を取り上げ，第3章における手法に準じて，散乱係数の変分表示式を導いた．そして，レイリー・リッツ法を用いるとき，散乱係数は第3章で得られた簡単な表示式と全く同じ形式で与えられることを示し

た．また，電力についても論じられ，本論文における散乱係数を用いて，単一モードのみ伝搬可能な不連続圧電性弾性導波系における電力保存関係式が得られた．具体例としては，段付等方弾性体無限平板における零次SH波の散乱係数が不連続部で発生する高次モード数をパラメータにして計算された．

第5章では，弾性基盤上に設けられた周期的溝アレイに弾性表面波が垂直入射したときの反射と透過の問題が取り上げられ，弾性表面波の伝搬方向に導波系が相反線路表示可能でありさえすれば，反射，透過係数はどんな弾性表面波モードに対しても全く同様に，また，概念的には単純に計算され得る方法論が示された．すなわち，ステップでの反射係数には第4章で得られた式が用いられ，それを基にしてステップ部分がTマトリクス表示され，周期的溝アレイは全く等価回路論的に論じられた．計算例としては，弾性基盤としてよく用いられる弾性体がいくつか選ばれ，反射，透過量の溝数依存性，周波数特性など，溝アレイでの反射，透過現象の基礎資料が得られた．

謝　辞

本研究を進めるに際し，終始懇切な御指導を賜わった，大阪大学教授牧本利夫工学博士に深く感謝いたします．

大阪大学大学院基礎工学研究科に在学中，懇切な御指導，御教示をいただいた，教授藤沢和男工学博士，教授末田正工学博士，教授難波進理学ならびに工学博士に深く感謝いたします．

本研究に関し，有益な御助言と不断の励ましをいただいた，大阪大学助教授山本鎧彦工学博士，西村貞彦氏，山本尚氏，根本承次郎工学博士，杉尾嘉彦工学博士，大阪工業大学助教授豊田幸弘工学博士，杉本光範氏，北谷和弘氏，また，計算に御協力くださった卒業研究生の諸氏に心からお礼申し上げます．

文　献

(1) B. A. Auld : " Application of microwave concepts to the theory of acoustic fields and waves in solids ", IEEE Trans., Vol. MTT-17, No.11, pp. 800～811 (Nov. 1969).

(2) A. A. Oliner : " Microwave network methods for guided elastic waves ", IEEE Trans., Vol. MTT-17, No.11, pp. 812～826 (Nov. 1969).

(3) 牧本，佐藤：" 圧電性弾性波の伝搬定数の変分表示式 "，電子通信学会全国大会，551（昭46-04).

(4) 牧本，佐藤：" 圧電性弾性波の伝搬定数の変分表示式 "，電子通信学会論文誌（B），Vol. 54-B, No.7, pp.442～443（昭46-07).

(5) R. A. Waldron : " Perturbation formulas for elastic resonators and waveguides ", IEEE Trans., Vol. SU-18, No. 1, pp. 16～20 (Jan. 1971).

(6) 佐藤，牧本：" 圧電性弾性波に対する相反性とリアクション "，電子通信学会全国大会，664（昭48-03).

(7) S. T. Peng : " Rigorous analogies between elastic and electromagnetic systems ", Appl. Phys., Vol. 1, pp. 87～91 (1973).

(8) A. A. Oliner, R. C. M. Li and H. L. Bertoni : " Catalog of acoustic equivalent networks for planar interfaces ", Proc. IEEE, Vol.60, No.12, pp. 1513～1518 (Dec. 1972).

(9) 小柴，榎戸，鈴木：" マイクロウェーブアクースティクス取り扱いの公式化 —— 異方性を考慮した層状媒質系について —— "，電子通信学会論文誌（B），Vol. 55-B, No.8, pp.456～462（昭47-08).

(10) 疋田，小柴，谷藤，鈴木：" 圧電媒質系におけるマイクロウェー

ブアクースティクスの伝送路モデルによる取り扱い”，電子通信学会論文誌（B），Vol. 56-B, No. 2, pp. 65～71（昭48-02）.

(11) 田中，清水：“弾性波の相反線路表示が可能な圧電媒体の対称性”，電子通信学会全国大会，S8-2（昭49-07）.

(12) A. A. Oliner, H. L. Bertoni and R. C. M. Li：“A microwave network formalism for acoustic waves in isotropic media”, Proc. IEEE, Vol.60, No.12, pp.1503～1512（Dec. 1972）.

(13) 杉尾，牧本：“導波管開口平面状有限アレイにおける散乱係数の定留表示式”，電子通信学会論文誌（B），Vol. 55-B, No. 6, pp. 326～327（昭47-06）.

Y. Sugio and T. Makimoto：“Stationary expressions for scattering coefficients of rectangular waveguides with dielectric plugs constituting a finite planar array”, IEEE Trans., Vol. AP-20, No.5, pp. 657～659（Sep. 1972）.

杉尾嘉彦：“導波管開口アレイの相互結合に関する研究”，工学博士（大阪大学）論文（昭48-02）.

(14) 牧本，佐藤：“圧電性弾性導波系の不連続部における散乱係数”，電子通信学会全国大会，759（昭47-04）.

(15) R. C. Williamson and H. I. Smith：“The use of surface-elastic-wave reflection grating in large time-bandwidth pulse-compression filters”, IEEE Trans., Vol. MTT-21, No.4, pp.195～205（Apr. 1973）.

(16) R. C. M. Li：“Analysis of surface wave reflection from a periodic array of grooves”, Proc. 1972 IEEE Ultrasonics Symp., pp. 263～266（Oct. 1972）.

(17) R. C. M. Li and J. Melngailis：“Second-order effects in surface-

wave devices due to stored energy at step discontinuities", Proc. 1973 IEEE Ultrasonics Symp., pp. 503～505 (Nov. 1973).

(18) 牧本，佐藤："圧電性弾性波のマイクロ波回路的取扱い"，電子通信学会マイクロ波研究会資料，MW71-33 (1971-06).

(19) T. Makimoto and S. Sato："Generalized treatment of piezoelectric waveguide", Proc. IEEE, Vol.60, No.6, pp.733～734 (Jun. 1972).

(20) 佐藤，牧本："周期的溝アレイにおける弾性表面波の反射と透過"，電子通信学会マイクロ波研究会資料，MW74-66 (1974-09).

(21) 佐藤，牧本："2次元圧電性弾性導波系の相反線路表示のための条件と固有モードの直交性"，原稿 6枚，電子通信学会論文誌(B) (採録決定).

(22) 尾上："S行列による超音波の反射透過の表現"，電子通信学会超音波研究会資料，US71-46 (1972-03).

(23) R. Holland："Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients", IEEE Trans., Vol. SU-14, No.1, pp.18～20 (Jan. 1967).

(24) J. F. Nye："Physical properties of crystals", p. 295, Clarendon Press (1967).

(25) 佐藤，牧本："圧電性弾性導波系の同一断面形状接続部における散乱係数"，電気関係学会関西支部連合大会，G10-13 (昭47-10).

(26) 佐藤，牧本："圧電性弾性導波系の同一断面形状接続部における散乱係数"，電子通信学会マイクロ波研究会資料，MW72-98 (1972-11).

(27) S. Sato and T. Makimoto："Stationary expression for scattering coefficients at uniform piezoelectric waveguide junction", Proc.

IEEE, Vol.61, No.11, pp.1648～1650 (Nov. 1973).

(28) I.A.Viktrov: "Rayleigh and Lamb waves", p.67, Plenum Press (translated from Russian) (1967).

(29) 瀬恒, 佐藤, 水内, 牧本: "CUBIC 弾性体平板におけるラム波の伝搬特性", 電子通信学会超音波研究会資料, US72-33(1973-02).

(30) P.M.Morse and H.Feshbach: "Methods of theoretical physics, Part II", p.1117, McGraw-Hill Book Co. (1953).

(31) 佐藤, 牧本: "段付圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式 — 弾性表面波への適用 —", 電子通信学会超音波研究会資料, US 73-47 (1974-02).

(32) 佐藤, 池田, 牧本: "不連続圧電性弾性導波系における散乱係数", 電子通信学会全国大会, S 8-4 (昭49-07).

(33) 佐藤, 牧本: "段付圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式", 原稿 29枚, 電子通信学会論文誌(B) (採録決定).

(34) 古屋: "行列と行列式", p.45, 培風館 (昭41).

(35) 牧本, 松尾: "マイクロ波工学の基礎", p.108, 廣川書店(昭43).

(36) 佐藤, 牧本: "周期的溝アレイにおける弾性表面波の反射と透過", 原稿 24枚, 電子通信学会 論文誌(B) (投稿中).

(37) たとえば, IEEE Trans., Vol.MTT-21, No.4 (Apr. 1973), Vol.SU-20, No.2 (Apr. 1973) (Special issue on microwave acoustic signal processing), 日本音響学会誌, Vol.30, No.10 (昭49-10) (弾性表面波工学特集).

(38) たとえば, A.McGarr and L.E.Alsop: "Transmission and reflection of Rayleigh waves at vertical boundaries", J. Geophys. Res., Vol.72, No.8, pp.2169～2180 (Apr. 1967).

(39) L.J.van der Pauw: "Diffraction of a Bleustein-Gulyaev wave by a

conductive semi-infinite surface layer", J. Acoust. Soc. Amer., Vol.53, No.4, pp.1107~1115 (Apr. 1973).

(40) T. Yoneyama and S. Nishida: "Reflection and transmission of Rayleigh wave by the edge of a deposited thin film", J. Acoust. Soc. Amer., Vol.55, No.4, pp.738~743 (Apr. 1974).

(41) 杉本，牧本："薄膜導波系の不連続部におけるBleustein波の反射および透過"，電子通信学会マイクロ波研究会資料，MW74-14 (1974-05).

(42) H. S. Tuan and R. C. M. Li: "Rayleigh-wave reflection from groove and step discontinuities", J. Acoust. Soc. Amer., Vol.55, No.6, pp.1212~1217 (Jun. 1974).

(43) 後藤："力学通論"，p.211，学術図書（昭42）.

(44) C. C. Tseng and R. M. White: "Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals", J. Appl. Phys., Vol.38, No.11, pp.4274~4280 (Oct. 1967).

(45) 牧本，佐藤："対称性考慮による圧電性表面弾性波の伝搬波形"，電子通信学会超音波研究会資料，US 71-36 (1972-02).

(46) 牧本，佐藤："対称性を考慮した圧電性表面弾性波の伝搬モード"，電子通信学会論文誌(A), Vol.56-A, No.7, pp.409~410 (昭48-07).

(47) E. K. Sittig and G. A. Coquin: "Filters and dispersive delay lines using repetitively mismatched ultrasonic transmission lines", IEEE Trans., Vol. SU-15, No.2, pp.111~119 (Apr. 1968).

(48) B. A. Auld: "Acoustic fields and waves in solids, Volume I", p.73, John Wiley & Sons (1973).

(49) ibid., p.357.

(50) B. A. Auld : " Acoustic fields and waves in solids , Volume II ", p.379, John Wiley & Sons (1973).

(51) ibid., p. 184.

(52) ibid., p. 190.

(53) ibid., p. 74.

(54) ibid., p. 88 .

付　録

1．　式（2．31）の導出

固有モードm，nが共に前進波のとき，固有モードの直交関係式（2．11）におけるベクトルおよびテンソル量を成分に分けることにより，その式は次のように変形して書かれ得ることがわかる．

$$\int_S [\mathbb{U}_n^+ \cdot \mathbb{I}_m^+ - \mathbb{U}_m^+ \cdot \mathbb{I}_n^+] dS = 0 \ , \ \gamma_m \neq -\gamma_n \qquad (A.1)$$

ここに，$\mathbb{U}_m^+$，$\mathbb{I}_n^+$ は式（2．32）あるいは（2．33）に与えられており，$\mathbb{U}_n^+$，$\mathbb{I}_m^+$ は添字mとnを交換したものである．

次に，固有モードmは前進波，nは後退波であるとき，

$$\int_S [\mathbb{U}_n^- \cdot \mathbb{I}_m^+ - \mathbb{U}_m^+ \cdot \mathbb{I}_n^-] dS = 0 \ , \ \gamma_m \neq \gamma_n \qquad (A.2)$$

が得られる．ここに，$\mathbb{U}_n^-$，$\mathbb{I}_n^-$ は後退波のモード関数であり，その成分はそれぞれ$\mathbb{U}_n^+$，$\mathbb{I}_n^+$ の成分の右肩の＋を－に書き換えたものである．そして，前進波，後退波モード関数に対する関係式（2．34）が成り立っている．

式（2．34）を用いて後退波である固有モードnのモード関数を前進波のものに変換してやると，式（A．2）は式（A．1）における差を表わす－を和を表わす＋にした式になる．この結果得られた式と式（A．1）を連立にすると式（2．31）が得られることがわかる．ところで，前進波，後退波はそれぞれ因子$e^{j\omega t-\gamma x_3}$，$e^{j\omega t+\gamma x_3}$を持っている（γの虚部は正）．したがって，式（A．1）における$\gamma_m \neq -\gamma_n$の条件は常に成り立っており，固有モードm，nが共に前進波であるときの式（A．1）は常に成り立つ式である．一方，式（A．2）については，後退波

である固有モードnのモード関数が前進波のものに変換されるのであるが，その前進波nモードの伝搬定数はγ_nであり，したがって，後退波nモードのモード関数が前進波nモードのモード関数に変換された後の式でも$\gamma_m \neq \gamma_n$が条件として残ってくる．したがって，その変換後の式と式（A．1）を連立にして得られた式（2．31）には$\gamma_m \neq \gamma_n$が条件として入ってくることになる．

2．　固有モードの正規直交関係式（3．1）について

第2章における式（2．45）に対しては，固有モードは伝搬モード（伝搬定数の虚部は正）とされている．遮断モード，すなわち，実数の伝搬定数を持つ固有モードに対しては，$+x_3$方向に減衰しているモードのモード関数をIII_m^+，II_m^+とし，また，III_n^-，II_n^-に対しては$-x_3$方向に減衰しているモードとするとき，式（A．1）は常に成り立ち，式（A．2）に対しては，III_n^-，II_n^-をIII_n^+，II_n^+に変換（表2．1～2．14および式（2．29），（2．34），（2．41）などは伝搬定数が複素数，実数，純虚数の場合にあてはまるものである）した後にも$\gamma_m \neq \gamma_n$が条件に入ってくる．したがって，III_m^+，II_n^+は$+x_3$方向に減衰している固有モードのモード関数であるとするとき，式（2．45）は遮断モードに対しても成り立つ正規直交関係式であることがわかる（なお，III_m^+とII_m^+あるいはIII_n^-とII_n^-がそれぞれ$+x_3$あるいは$-x_3$方向に増大しているモードのモード関数であるとしたときにも式（2．45）は成り立つ）．また，固有モードm，nの伝搬定数が共に複素数，共に実数，共に純虚数の場合以外は，式（A．1），（A．2）より，m，nモードは常に直交していることがわかる．以上より，式（2．45），すなわち，式（3．1）は固有モードm，nの伝搬定数が複素数，実数，純虚数のどの場合

にも成り立つ関係式であることがわかる.

3. 式(4.28)は不連続部に存在するすべての固有モードを考慮したとすると式(4.31)と一致することの証明

式(4.5)(ただし, $\hat{\mathbb{U}}^{(i)}$, $\hat{\mathbb{I}}_p^{\mathscr{B}}$はそれぞれ$\mathbb{U}^{(i)}$, $\mathbb{I}_p^{\mathscr{B}}$に書き換えられる)に式(4.26)(ただし, M, Nは取り除かれる)を代入し, 式(4.25)と比較すると次式が成り立つことがわかる.

$$\frac{\Delta_{\ell p}}{|A|}=\int_{S_0}\mathbb{U}_\ell^{a}\cdot\mathbb{I}_p^{\mathscr{B}}dS+\sum_{g}\frac{\Delta_{\ell g}}{|A|}\int_{S_2}\mathbb{U}_g^{B\mathscr{B}}\cdot\mathbb{I}_p^{B\mathscr{B}}dS$$

このとき, 式(4.28)(ただし, Nを取り除き, α_ℓ, $\alpha_k=1$と置く)は式(4.31)と一致することがわかる.