The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

| | |
|---|---|
| Title | 磁気共鳴撮影による動脈血流の血行力学的解析 |
| Author(s) | 宮内, 嘉玄 |
| Citation | 日本医学放射線学会雑誌. 1997, 57(14), p. 915-922 |
| Version Type | VoR |
| URL | https://hdl.handle.net/11094/19416 |
| rights | |
| Note | |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

# 磁気共鳴撮影による動脈血流の血行力学的解析

宮内　嘉玄

南松山病院放射線科

## Hemodynamic Analysis of Pulsatile Blood Flow in Arteries by MRI

Kagen Miyauchi

The purpose of this study was to analyze the hemodynamics of pulsatile blood flow in arteries by MRI.

The blood flow velocity was calculated by dividing the traveled distance of blood bolus by the echo time obtained from DBI images. Pulsatile water flow in the phantom and blood flow in abdominal aorta of 27 volunteers were estimated by means of both the DBI image and an approximate equation of flow velocity.

The measured flow well agreed with the actual flow in the flow phantom study. Three-dimensional flow velocity profiles calculated using the approximate equation were similar to the DBI images and had the characteristics of pulsatile flow. The negative flow velocity near the aortic wall could be expressed in the flow velocity profiles by the approximate equation. The maximum flow velocities at the center of the abdominal aorta and the time-averaged wall shear stress calculated by the approximate equation decreased with aging ($r = -0.78$ $P < 0.0001$ and $r = -0.64$ $P < 0.0003$, respectively). The present results suggest that the DBI method and analysis based on the approximate equation proposed here will be valuable to analyze the hemodynamics of pulsatile blood flow.

***Research Code No. :*** *508.9*

***Key words :*** *MR imaging, Flow study*

*Received Jun. 10, 1997; revision accepted Oct. 1, 1997*

Department of Radiology, Minami-Matsuyama Hospital

## はじめに

動脈内での血流動態を理解することは，動脈硬化の発生機序や早期診断をしていく上で重要と考えられ，種々のファントム実験や超音波検査による検討がなされてきた[1)-3)]．しかし，動脈内での血流の動きには，拍動があり，また血流速度は血管中心軸でと，血管壁近くでは異なるため，血行力学的解析が臨床で役立つには至っていない．今回著者は磁気共鳴撮影(以下MRI)を用いて，非侵襲的にヒトの拍動流での血行力学的解析が可能かどうか，また臨床的に応用可能かどうか検討する目的で今回の検討を行った．

## 方　法

### 1．MRI装置と速度測定法

使用したMRI装置は島津製作所製SMT50(0.5T)で，速度測定法はDirect Bolus Imaging法(以下DBI法)[4)]である．DBI法は血管軸に垂直な断面で励起し，エコー時間(TE)後に血管軸に平行な面で撮影する．撮影されるDBI像は，基準線となる励起面と移動した血流のbolusである．拍動流の場合，1心周期の間に設定したTEに応じて測定開始時間から一定時間毎のDBI像が得られる．それぞれの画像でbolusの移動距離を測定し，TEで除すと速度が算出される(Fig.1)．基準線およびbolusは厚みがあるが，それぞれの上縁から上縁までの距離を移動距離とした．また，計測時のウィンド幅とレベルは，画像上基準線の幅があらかじめ設定した幅として描出されるように適宜設定した．

### 2．拍動流のDBI像の撮影方法

a)拍動流ファントムの場合

塩化ビニール性のチューブに拍動流を生じるblood pump (sarns 7400)を用いて水を流すファントムを作製した(Fig.2)．チューブの内半径R(cm)を0.45，0.60，0.75とし，流量Q(l/min)を0.42，0.85，1.83と変化させ，スライス厚10mmでDBI像を撮影した．拍動周期は1000msecとした．

MRI装置の設定は拍動周期と同期させるためTRは1000msecとした．TEは50msec，FOVは350mm×350mm，matrixは128×128，加算回数1回とした．DBI像は拍動周

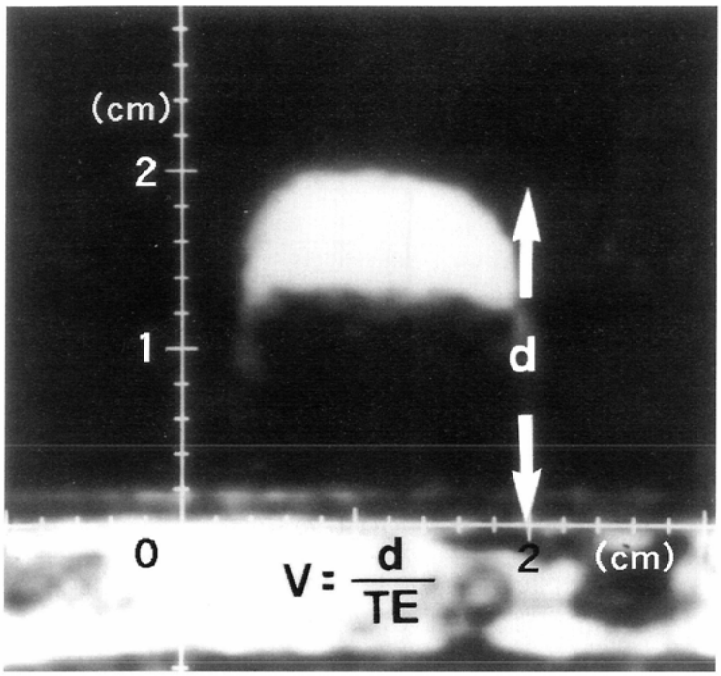


Fig.1 An image of blood flow in abdominal aorta obtained by the DBI method. The image showed a traveling blood bolus from a base line. The blood flow velocity (V) was calculated by dividing the traveled distance of blood bolus (d) by the echo time (TE).

期の間に65msec毎，計15枚を得た．撮影時間は2分7秒であった．

b)腹部大動脈の場合

正常血圧を示し，貧血のない健康な男女27名を対象とした(収縮期血圧/拡張期血圧　90～145/54～87mmHg，ヘモグロビン　12.9～15.4g/dl)．対象者の内訳は，男16名女11名，年齢は平均35±9歳(21～50歳)である．なお，事前に今回のMRI検査について十分な説明を行い，同意を得た．

腹部大動脈血流のDBI像を撮影する基準となる画像は次のようにして撮影した．あらかじめ撮影した腹部横断面の離れた2枚の画像を選び，各断面で腹部大動脈を指定し，これに沿った断面を撮影することによって，腹部大動脈の走行に沿った前額断面を得た．この画像をもとに腎動脈より3～6cm頭側で肝門部を通過する断面を基準とし，スライス厚5mmで腹部大動脈血流のDBI像を撮影した．

空間分解能を上げるため，脊椎撮影用コイルを使用し，FOVは200mm×200mmとした．心電同期を行い，R波を撮影開始のトリガーとし，R波からの遅延時間それぞれ0，20，40msecとして3回撮影した．1回について70msec毎に平均11枚撮影し，合計平均35枚のDBI像を得た．TRは心周期にもとづき設定し，TEは50msec，matrixは128×128または256×256，加算回数はそれぞれ4回，2回に設定した．撮影時間は一回につき，約5～7分であった．血管半径Rは速度を測定した断面のSE像から計測した．

### 3．解析方法

a)拍動流の近似式

近似式の作成には，Womersleyらが報告している結果[5)-7)]を利用した．彼らの結果は，すべての流体で成立するNavier-Stokesの式を，解析的に解いた計算であり，広く受け入れられている[8)]．なお計算にはMathcad PLUS 5.0 for WINDOWSを使用した．

はじめに血管横断面の中心軸での速度を示す近似式を作成し，次に血管横断面全体での速度分布を示す近似式を作成した．

拍動流の速度は拍動の周期Tの周期関数となる．したがって血管中心軸に平行な速度成分のみを考えると，その速度は時間tを変数とする周期Tのフーリエ級数として展開される．DBI像から血管中心軸での速度を測り，速度分布のグラフを作成した．このグラフから求めた速度を，高速フーリエ変換し，フーリエ係数のベクトルDを計算した．このDをもとに速度の近似式f(t)を得た．

$$f(t) = D_o + \sum_{k=1}^{15} 2D_k \exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここでkはベクトルDの成分番号，πは円周率，iは虚数単位，tは時間(sec)，Tは心周期(sec)を示す．近似式f(t)の実数部が実際の速度を示す．

次に血管横断面全体の速度分布を含む式を作成した．Womersleyは血管内の圧力勾配をフーリエ級数で表し，時間tと血管中心からの相対距離yの関数として円柱座標にて速度の一般式$v_k(t, y)$を計算した．

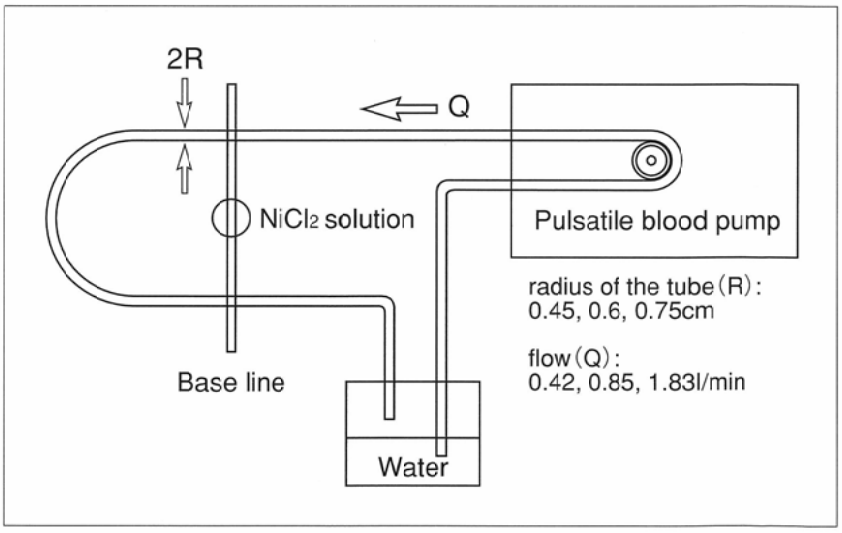


Fig.2 A shematic illustration of a pulsatile flow phantom. Pulsatile water flow created by a pulsatile blood pump had a cycle of 1000msec. Blood bolus images were obtained at the base line on which a bottle of nickel chloride ($NiCl_2$) solution was placed as the landmark.

$$v_k(t,y)=\frac{A_k R^2}{i\left(\alpha\sqrt{k}\right)^2\eta}\left(1-\frac{J_0\left(y\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}{J_0\left(\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}\right)\exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここで$A_k$は定数，Rは血管半径(cm)，ηは血液粘度(poise)，$J_0$は0次のBessel関数，yは血管中心からの相対距離($y=r/R$, $0\leqq y\leqq 1$，rは血管中心からの距離)である．ただし，この式は以下の条件下で計算されている．①血管は剛体円柱管である．②流れは層流である．③血管壁で流れのスリップはない．④重力の影響は無視する．

血管中心軸での速度の近似式f(t)を$v_k(t,y)$を用いて変形し，血管横断面全体の速度の近似式 f(t, y)を求めた(Appendix参照)．

$$f(t,y)=D_0\left(1-y^2\right)+\sum_{k=1}^{15}2D_k\frac{v_k(t,y)}{v_k(t,0)}\exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここで$v_k(t,y)$に含まれるαは次式で表されるWomersley定数である．

$$\alpha=R\sqrt{\frac{2\pi\rho}{\eta T}}$$

ここでρは血液密度(g/cm³)を示す．なおファントムの場合は，水の温度は20℃で粘度ηは0.01poise，密度ρは1g/cm³とした．ボランティアの場合は，あらかじめ採取した血液の粘度ηと比重を測定し，密度ρは比重の値を用いた(37℃)．粘度は円錐平板型粘度計で測定し，せん断速度375sec⁻¹の時の値を用いた．

b)流量Q，レイノルズ数Re，壁せん断応力$\tau_w$について

f(t, y)を1心周期分積分し，心拍数を乗じることにより流量Qを計算した．血流の動態を知るため，次式によってレイノルズ数Reを求めた．

$$Re=\alpha^2\frac{UT}{\pi R}$$

ここでUは血流の平均速度($=Q/\pi R^2$)である．流れが層流より乱流に移行するときのレイノルズ数を臨界レイノルズ数$Re_{cr}$というが，NeremらのK値[9]を用い，250αとして求めた．

速度の近似式f (t, y)を血管横断面方向のyで微分し，粘度ηを乗じて，せん断応力τを計算した．血管壁でのせん断応力$\tau_w$は$y=1$の時の値である．

4．相関係数の有意性の検討

P値が0.05以下を有意とした．

## 結　果

1．拍動流ファントムでの検討

ファントム実験ではDBI像の流れの中心軸から得られる速度と，近似式を用いた解析で計測できる流量の精度について検討を行った．実流量と計測流量の比較をFig.3に示す．相関係数は0.999，P値は0.0001以下で有意な相関が見られた．測定の範囲内では，Re数は$Re_{cr}$数を超えず，流れは層流であった．なおRe数が$Re_{cr}$数を超え，乱流の発生する条件下では，計測流量は実流量より低値を示した．

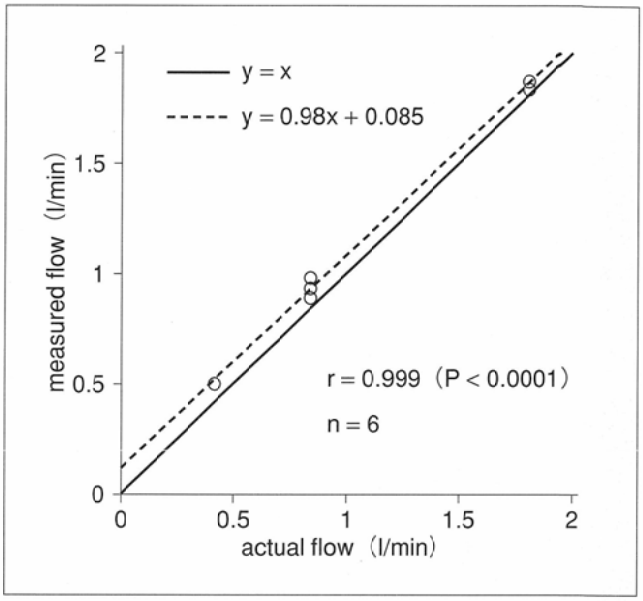


Fig.3　Relationship between the measured flow and the actual flow. The measured flow was comparable with the actual flow with a good correlation coefficient (r = 0.999).

2．腹部大動脈での検討

代表例で血管中心軸の速度の近似式f(t)の1心周期に相当する部分の経時的変化を示した(Fig.4)．同じグラフ上に，

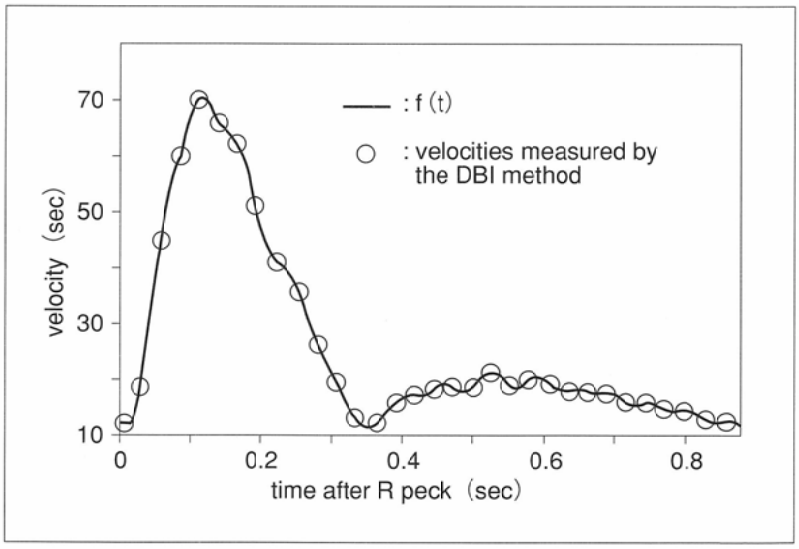


Fig.4　A flow velocity profile during one cardiac cycle at the center of abdominal aorta, started from the R peak of electrocardiogram. The solid curve by f(t) was well fitted to the velocities measured by the DBI method. There were two peaks at t = 0.12 and 0.52sec on the curve.

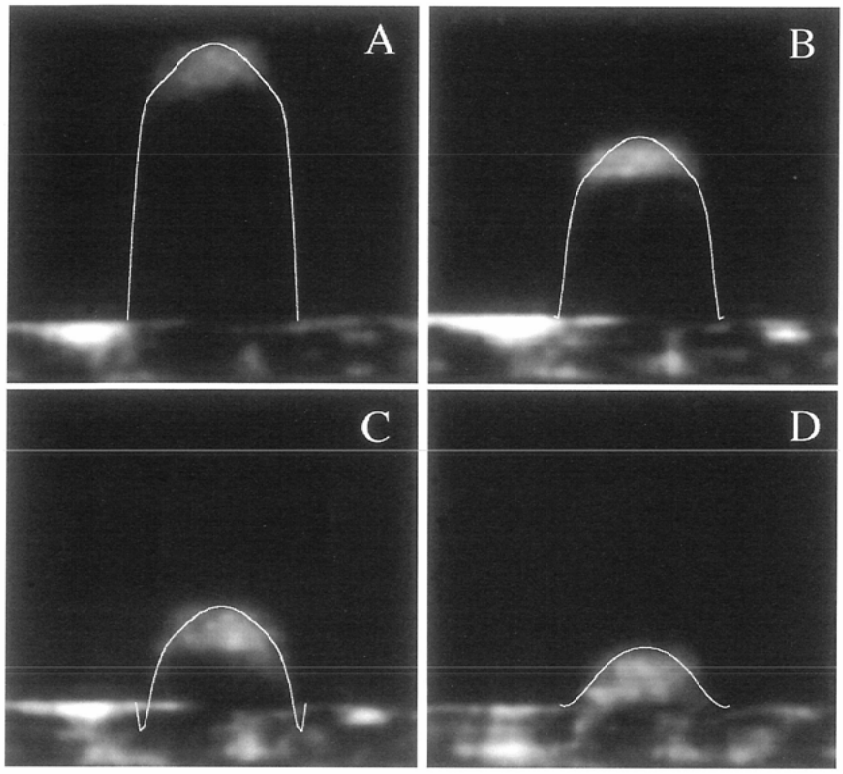


Fig.5 Representative velocity profiles, calculated by the approximate equation, and super imposed on the DBI images of aldominal aorta. The profiles were drawn at 0.14sec (A), 0.21sec (B), 0.28sec (C), and 0.63sec (D) from R peak.

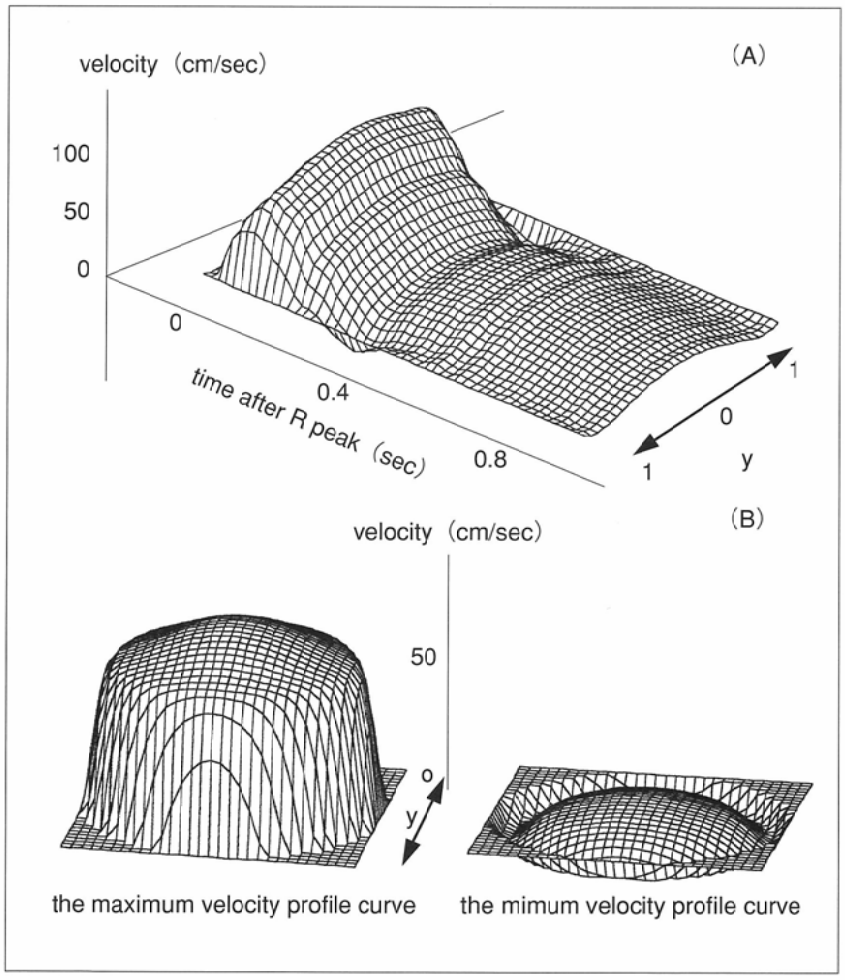


Fig.6 The three dimensional profiles of f(t, y). A: The time course of f(t, y) at a cross-section of abdominal aorta during one cardiac cycle started from the R peak of electrocardiogram. B: The maximum (left) and the minimum (right) flow velocity profiles in abdominal aorta. The velocity profiles were blunted at the center of abdominal aorta, but the velocity was sharply reduced near the wall at the first peak. Negative velocity was observed near the wall at the minimum velocity.

f(t)の算出のもとになったDBI法より得られた血流速度の値を示した．27例全例で，程度の差は見られるが，二峰性(第一峰t = 0.08～0.18sec；第二峰t = 0.42～0.65sec)を示し，末梢へ向かう一方向性の速度を示した．f(t)はDBI法より得られた血管中心軸の血流速度の時間的変化を忠実に再現できた．

同一症例のDBI像と，血管横断面全体の速度の近似式f(t, y)から得られる速度分布の重ね合わせを行った．心電図のR波から0.14，0.21，0.28，0.63sec後の像を示した(Fig.5)．近似式f(t, y)による速度分布はDBI像を厳密には近似できなかった．すなわち近似式f(t, y)では血管中心軸から壁に近づくにつれて，速度をわずかに低く計算した．また近似式f(t, y)で見られる壁近くの逆流する速度分布はDBI像では描出されなかった．

同一症例の近似式f(t, y)の1心周期分の経時的変化(Fig.6 A)と，血管中心軸で最高血流速度ならびに，最低血流速度を示す時の速度分布を示した(Fig.6 B)．速度が速い時期(第一峰)には，血管の中心軸付近で比較的平坦な速度分布を示し，血管壁近くでは急激な速度低下を示した．一方速度の遅いの時期(第二峰)には，血管中心部では末梢に向かう速度分布を示すが，血管壁近くで逆流する速度分布が見られた．

同一症例の1心周期の間の壁せん断応力の経時的変化を示した(Fig.7)．拍動にしたがって壁せん断応力は変化するが，血管の末梢へ向かう成分(正の成分)だけでなく，中枢へ向かう成分(負の成分)が見られた．

今回検討した症例について得られた血行力学的所見をTable 1にまとめた．

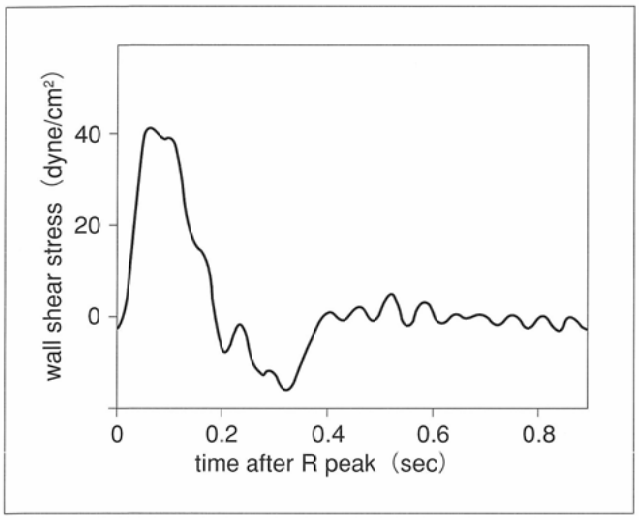


Fig.7　An example of the pulsatile change of wall shear stress in abdominal aorta during one cardiac cycle, started from the R peak of electrocardiogram.

Table 1　Rhelogical and hemodynamic data in 27 volunteers

| | |
|---|---|
| age | 35 ± 9 |
| Radius (mm) | 8.6 ± 0.1 |
| heart rate (/min) | 62 ± 7 |
| blood density (g/cm³) | 1.057 ± 0.003 |
| blood viscosity (poise)* | 0.038 ± 0.005 |
| flow (l/min) | 1.93 ± 0.35 |
| $\alpha$ | 11.6 ± 1.6 |
| Re | 669 ± 115 |
| $Re_{cr}$ | 2890 ± 390 |
| wall shear stress (dyne/cm²)** | 2.17 ± 0.49 |

$\alpha$: Womersley parameter　Re: Reynolds number　$Re_{cr}$: critical Reynolds number　*: shear rate is 375 $s^{-1}$　**: time-averaged value
The values are expressed as mean ± S. D.

Re数は669 ± 115であり，$Re_{cr}$数は2890 ± 390となり，Re数は$Re_{cr}$数より小さく，血流は層流であることがわかった．計算で得られた流量は1.93 ± 0.35 l/minであった．壁せん断応力の時間平均値は，2.17 ± 0.49dyne/cm²となった．

加齢よる血行動態の変化を見るため，年齢と血管中心軸の最高血流速度，年齢と時間平均壁せん断応力の関係を調べた．ともに良好な負の相関が見られた(Fig.8)．すなわち，最高血流速度は加齢とともに減少し，これにともなって壁せん断応力も低下することがわかった．

## 考　察

### 1．DBI像と近似式による速度分布の比較

本研究では，MRIにてDBI法で血流速度の定量化を行い，計測した速度を用いて作成した近似式にて拍動流の血行力学的解析を行った．近似式で計算できる速度分布は，DBI像をよく表現した．すなわち，血管中心軸での速度を示す近似式f(t)は，フーリエ解析を用いることで，非連続的に速度分布を測定しうるDBI法での計測値を忠実に再現した．また，血管横断面全体の速度分布を示す近似式f(t, y)においても，DBI像の特徴をよく表現した．つまり，血管中心部で

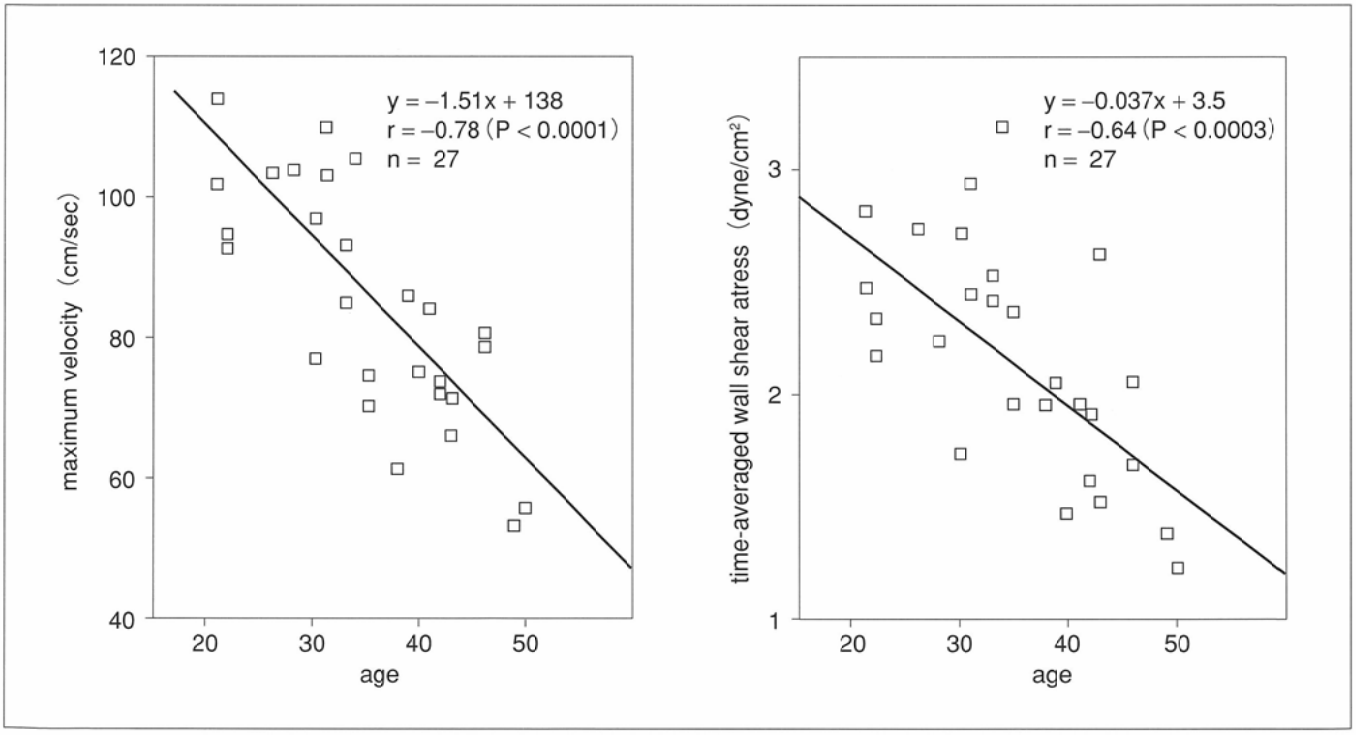


Fig.8　Age-dependent changes of maximum flow velocity at the center of abdominal aorta (left) and time-averaged wall shear stress (right)

は比較的平坦な速度分布を示し，血管壁近くで速度が急激に減少する特徴が，近似式にて表現できた．

一般に円柱管における定常流の速度分布が放物線状となる事実はよく知られている．しかし，拍動流における速度分布は放物線状にはならない．このことは本研究で用いたWomersleyの報告以来，種々研究がなされている．DBI像で描出される血管中心部で比較的平坦な血流の移動を示し，壁に近づくにつれ血流の移動が急激に減少する像は，これまでの報告[3),10)-12)]に述べられた拍動流の速度分布をよく表現できている．

ただ，近似式による計算値はDBI像に比べて，血管壁に近づくにつれて若干低値を示す．これには以下の原因が考えられる．①血管壁は収縮と拡張を繰り返す弾性体であり，②血管径は末梢に行くほど小さくなり，円柱管ではない．③三次元的な血流速度分布を二次元画像として撮影するDBI像では，前後で異なる血流の移動が重ね合わされている．④DBI像は何回かの周期で得られる画像の加算により画像のS/N比を向上させているが，実際の周期はそれぞれわずかに異なるので，速度にもわずかのずれが生じる．

近似式による速度分布は血管壁近くで逆流を示す時期が存在する．すなわち血流速度は同一血管横断面で，同一時刻に血管中心の速度は末梢に向かう順行性を示す一方，血管壁近くでは中枢へ向かう逆行性を示すことがある．これについては，拍動流をフーリエ級数として表現し始めたころよりHaleら[13)]により指摘され，最近では動物実験[14)]においても，ヒト[2)]においても確認されている．この現象はDBI像にて捉えられていない現象である．この原因の一つは，DBI像では基準線が血管内部にも描出され，血管壁近くでの逆流するbolusの部分は基準線と重なることにある．今後の開発が必要と思われる．

以上のことから，DBI像で示される拍動流を近似式で解析してもよいと思われた．

## 2．定量性について

ファントム実験から明らかなように，DBI法および近似式による解析法は，精度よく流量計測ができる．したがって，ファントム実験に用いたチューブと同じような管径の腹部大動脈において計測された流量の精度は保証されるものと思われた．

ただ，次の二つの点で注意すべきである．第一点は流れが層流であるか，乱流であるかということ，第二点は，ファントム実験で使用したチューブでは分岐はなく，腹部大動脈は腹腔動脈，腎動脈などを分岐し，これが血流量の評価にどの程度影響するかということである．

第一点については，Steinら[11)]によると，腹部大動脈で乱流は見られていない．今回の検討でもボランティアの腹部大動脈の計測においても流れは層流であった．ファントム実験では流れが層流である限り，実測値と計測値は高い直線関係があり，この点では腹部大動脈の血流量計測に精度上の問題はないと思われる．

第二点の分岐血管の問題は，今回の検討で考慮していない．分岐血管がある場合，計測できる血流量の精度に大きな影響を与えると推定できる．しかし，DBI法では腹腔動脈や腎動脈に流れる血流成分も同時に評価していると考えられ，撮影された画像上ではすでに腹部大動脈の成分から差し引かれていると思われる．

加えて考えると，固定が不十分な腹腔動脈，蛇行のある腎動脈，管径の小さな四肢の動脈などでは，十分な空間的速度分布を得るために呼吸停止下の撮影やmatrixを増加させる努力が必要であろう．またこれらの部位では血流が乱流である可能性もあり，近似式の作成法にもさらなる検討が必要と思われる．

## 3．加齢と血行力学的変化

DBI像を解析する手法として，今まで述べてきた近似式を用いる方法に関しては流量のみについて定量的検討を加えてきた．しかしながら，近似式がDBI像から定性的に大きなずれを生じていないことを考慮すると，近似式から求められる代表的な値を腹部大動脈血流の示す特徴として検討してよいと思われる．

a）最高血流速度と加齢

血流速度と加齢につてはあまり検討されていない．経静脈的Digital Subtracion Angiographyを行う際，同じ部位より注入する造影剤が腹部大動脈に出現するまでの時間は，加齢により遅れることが知られている[15)]．このことは加齢により血流速度が低下することを示唆している．今回最高血流速度が加齢に伴って低下することが示された（$r=-0.78$，$P<0.0001$）．これは上記のような経験的事実を裏付ける一つの証拠になる．

b）壁せん断応力と加齢

近似式にもとづいて壁せん断応力は簡単に計算できる．結果に示したように，壁せん断応力は拍動する．このことは，血管内膜が心周期毎に順逆両方向の壁せん断応力にさらされていることを示している．ただ，血管を円柱と仮定しているため，計測した血管横断面では，壁せん断応力がどの部分でも同じ値となり，実際の値と異なることはさけられない．しかし今回得られた値は，すでに報告されている値[1),3)]と大きな差はなく，一つの目安となると思われる．

動脈硬化と壁せん断応力の関係が種々論じられ，時間平均壁せん断応力が低下することと動脈硬化の進行が密接に関連しているといわれている[1)]．今回は動脈壁自体の変化について検討していない．そこで時間平均壁せん断応力の加齢による変化を検討した．その結果，時間平均壁せん断応力は加齢とともに減少することが示された（$r=-0.64$，$P<0.0003$）．Simonらは，頸動脈において超音波検査にて求めた血管軸流の速度からWomersleyの計算によって求めた壁せん断応力が年齢と負の相関のあることを指摘している[3)]．計測部位は異なるが，著者の示した結果も同様の傾向を示しており，今回の解析法の妥当性を示す根拠の一つと考えられた．

## 4．DBI法とフェーズコントラスト（PC）法について

今回の検討ではtime of fightの手法の一種であるDBI法を

用いている．MRIによる血流計測には他にPC法があるが，PC法を用いれば動脈内の速度分布を画像上の各ピクセル毎に直接評価することが可能になり，血流量もまた壁近くの逆流成分も評価できる可能性がある．しかし，著者にはPC法の経験がなく，直接のコメントは差し控えたい．ただ，DBI法と近似式を用いた今回の解析の利点を推測すると以下の点が挙げられよう．①DBI法は血流のbolusが画像化され，一種の血流の可視化法となっている．②近似式を用いることで，測定値が非連続的であるにも関わらず測定値以外の部分の値も推定でき，結果的に血流量の精度が上昇したと推定される．③壁せん断応力の値の計算には，壁での加速度成分が必要である．これは近似式を用いることで容易に算出される．

また，PC法で，血管中心軸での血流速度を計測し，今回の解析で用いた近似式を適用することは可能であると思われる．

## 結　語

MRIにてDBI法を使用して拍動流の速度を計測し，速度の近似式を作成することで腹部大動脈血流の血行力学的解析を行った．

①DBI像から求められる速度値を用いて作成した近似式で，拍動流の特徴的速度分布をよく表現できた．

②拍動流を流すファントム実験で行ったDBI法および近似式による解析では，流量を精度よく計測できた．したがって，同じスケールの範囲内にある腹部大動脈での流量計測の精度も保証されるものと思われた．

③壁せん断応力は拍動し，血管壁は順逆二方向の力にさらされていることが示唆された．

④加齢とともに最高血流速度ならびに時間平均壁せん断応力が低下する傾向を示した．

⑤MRIによるDBI法を用いた血流速度の定量および血流速度分布の近似式は，動脈血流の血行力学的解析を行う上で有用な一手法になりうると考えられた．

謝辞

稿を終えるにあたり，御指導，御校閲を賜りました前愛媛大学医学部放射線医学教室濱本　研教授（現市立八幡浜総合病院院長），同教室池添潤平教授に深謝いたします．御指導を賜りました同教室棚田修二助教授，村瀬研也講師に感謝いたします．また御協力いただきました南松山病院尾崎光泰院長をはじめこの仕事の遂行に協力を賜った方々に感謝いたします．なお，本論文の要旨は，第23回日本磁気共鳴医学大会，第36回日本脈管学会総会において発表した．

## Appendix

動脈の中心軸での速度をフーリエ級数で表した場合の一般項$f_k(t)$は次式で与えられる．

$$f_k(t) = 2D_k \exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここで$D_k$はDBI法で求めた速度を高速フーリエ変換して求めた値である．

$f_k(t)$を血管横断面全体での速度に拡張するために以下の操作を行った．

Womersley[5]は剛体円柱管における拍動流の式を，血管内の圧力勾配をフーリエ級数で表すことで計算した．まず圧力勾配の一般項を次式のように定義した．

$$-\frac{\partial P_k}{\partial z} = A_k \exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここで$A_k$は定数である．

これをWomersleyはNavier-Stokesの流体の式をもとに解いて円柱座標で速度の一般項$v_k(t, y)$を求めた．

$$v_k(t,y) = \frac{A_k R^2}{i\left(\alpha\sqrt{k}\right)^2 \eta}\left(1 - \frac{J_o\left(y\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}{J_o\left(\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}\right)\exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

ここでyは血管の中心軸からの相対距離を示す（本文参照）．この式を用いて著者は次の計算を行った．今仮に，

$$w_k(y) = \frac{1}{i\left(\alpha\sqrt{k}\right)^2}\left(1 - \frac{J_o\left(y\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}{J_o\left(\alpha\sqrt{k}\sqrt{i^3}\right)}\right)$$

とおくと

$$v_k(t,y) = \frac{A_k R^2}{\eta}\cdot w_k(y)\cdot \exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

と書ける．

$y = 0$の時，$v_k(t, y)$は血管の中心軸の速度を表し，結局それは$f_k(t)$となるから，

$$2D_k = \frac{A_k R^2}{\eta}\cdot w_k(0)$$

したがって血管横断面全体の速度の一般項は，

$$v_k(t,y) = \frac{2D_k}{w_k(0)}\cdot w_k(y)\cdot \exp\left(2\pi i\left(\frac{t}{T}\right)k\right)$$

となる．

ここで近似式の本文で示した血管の中心軸での近似式$f(t)$に戻り，拍動しない定常部$D_0$を考える．すなわち$k = 0$の場合であるが，先に示した$w_k(y)$は$k = 0$では成立しない．しかしながら，岡[6]により，$v_k(t, y)$を導いた微分方程式にもとづいて考えると，

$$w_o(y) = 0.25 \cdot (1 - y^2)$$

この定常部の血管横断面全体での速度$v_0(t, y)$は

$$v_o(t, y) = \frac{A_o R^2}{\eta} \cdot 0.25 \cdot (1 - y^2)$$

となる．$v_0(t, y)$が$D_0$となるのは$y = 0$の時であり，

$$D_o = \frac{A_o R^2}{\eta} \cdot 0.25$$

となる．したがって，

$$v_o(t, y) = D_o(1 - y^2)$$

となる．

今回の研究では1心周期を32等分し，32個の速度の値を求め，フーリエ係数を求めた．したがって，求められる速度のフーリエ級数は，その半分の16個の項となる[16]．ここであらためて血管横断面全体の速度を$f(t, y)$とすると

$$f(t, y) = v_o(t, y) + \sum_{k=1}^{15} v_k(t, y)$$

となり，結局次式が求められる．

$$f(t, y) = D_o(1 - y^2) + \sum_{k=1}^{15} 2D_k \frac{w_k(y)}{w_k(0)} \exp\left(2\pi i \left(\frac{t}{T}\right) k\right)$$

ところで

$$\frac{w_k(y)}{w_k(0)} = \frac{v_k(t, y)}{v_k(t, 0)}$$

であるから，本文中では右辺を用いた．

## 文　献


1) Moore JE Jr, Xu C, Glagov S, et al: Fluid wall shear stress measurements in a model of the human abdominal aorta: oscillatory behavior and relationship to atherosclerosis. Atherosclerosis 110: 225-240, 1994
2) Caro CG, Paker KH, Fish PJ, et al: Blood Flow near the Aterial Wall and Arteial Disease: Clin Hemorheology, 5:849-871, 1985
3) Simon AC, Levenson J, Flaud P: Pulsatile flow and oscillating wall shear stress in the brachial artery of normotensive and hypertensive subjects. Cardiovasc Res 24: 129-136, 1990
4) Shimizu K, Matsuda T, Sakurai T, et al.: Visualization of moving fluid: quantitative analysis of blood flow velocity using MR imaging. Radiology 159: 195-199, 1986
5) Womersley JR: Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube-I: The linear approximation for long waves. Phil Mag 46: 199-221, 1955
6) 岡　小天：血液のレオロジー(V)高分子，16：842-849，1967
7) He X, Ku DN, Moore JE Jr: Simple calculation of the velocity profiles for pulsatile flow in a blood vessel using Mathematica. Ann Biomed Eng 21: 45-49, 1993
8) Nichols WW, O'Rourke MF: McDonald's Blood Flow in Arteries, third edition, 35, 1990, Edward Arnold, London.
9) Nerem RM, Seed WA, Wood NB: An experimental study of the velocity distribution and transition to turbulence in the aorta. J Fluid Mech 52: 137-160, 1972
10) Ku DN, Giddens DP, Zarins CK, et al: Pulsatile flow and atherosclerosis in the human carotid bifurcation. Arteriosclerosis 5: 293-302, 1985
11) Stein PD, Sabbah HN, Anbe DT, et al: Blood velocity in the abdominal aorta and common iliac artery of man. Biorheology 16: 249-255, 1979
12) Azuma T, Fukushima T: Flow patterns in stenotic blood vessel models. Biorheology 13: 337-355, 1976
13) Hale JF, McDonald DA, Womersley JR: Velocity profiles of oscillating arterial flow, with some calculation of viscus drag and the Reynolds number. J Physiol (Lond) 128: 629-640, 1955
14) Farthing S, Peronneau P: Flow in the thoracic aorta. Cardiovacsc Res 13: 607-620, 1979
15) 松岡昭治：経静脈性血管造影法，第一版，35-37，173-174，1994，医歯薬出版株式会社，東京
16) Nichols WW, O'Rourke MF: McDonald's Blood Flow in Arteries, third edition, 275, 1990, Edward Arnold, London.