OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	線形離散時間システムの最短時間制御に関する研究
Author(s)	西村, 卓也
Citation	大阪大学, 1980, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1971
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

線形離散時間システムの最短時間制御に関する研究

西　村　卓　也

昭和54年11月

序　　文

この論文は，これまでに著者が行なってきた線形離散時間システムの最短時間制御システムおよび最短時間観測システムの設計に関する理論的研究の成果をまとめたものである。線形離散時間システムにおいては制御偏差および観測誤差を有限時間内に零に整定することができると言う特長があるが，著者は本論文においてこの特長に着目し，最短時間で制御または観測を行なうシステムに関する性質を考察し，それらの設計方法を明らかにする。更にそれらの結果を集成して，終局的には出力フィードバックによる最短時間制御システムの設計を意図している。

この論文は次に述べるような六つの章で全体を構成している。

第1章は本論文の序論であり，最短時間制御問題および最短時間観測問題について説明するとともに，その工学的意義および研究の歴史について述べる。それによって本論文のこの分野における位置を明らかにする。

第2章では本論文を通して考察の対象とする線形離散時間システムの数学モデルを記述するとともに，その制御および観測に対する可能性と最短時間性について考察する。

第3章では状態フィードバックが可能な場合の最短時間制御システムの設計を対象とする最短時間制御問題について考察する。前章で求めた制御における最短時間性を満足するような状態フィードバック最短時間制御システムが構成可能であるための必要十分条件，およびそのような最短時間制御システムを構成するためのすべての状態フィードバック最短時間制御ゲインを設計する方法を明らかにする。さらに，この論文を通して制御量であるシステムの出力を直接対象とした設計を行なうから，得られた最短時間制御システムの安定性についてもくわしく考察する。

第4章では観測対象であるシステムの状態（または状態の線形関数）を最短時間で観測する最短時間オブザーバ（および線形関数最短時間オブザーバ）の設計方法について考察するが，第2章で求めた観測における最短時間性を満足するだけでなく任意な時点における観測誤差空間を最小にするような最短時間オブザーバを設計する。その結果として、この章で得られた最短時間オブザーバが第5章の出力フィードバック最短時間制御システムの構成に有効となる。

第5章では，出力フィードバック最短時間制御問題について考察する。まず状態フィードバックが可能でないと言う状況下における制御の最短時間性を明確にし，次にそれを満足するような出力フィードバック最短時間制御システムの設計を第3章および第4章の結果を集成した形で行なう。すなわち，第3章で求めた状態フィードバック最短時間制御ゲインと第4章で求めた最短時間オブザーバとを縦続結合したものが出力フィードバック最短時間制御システムを構成する最短時間制御器となることを示し，この問題において制御と観測との分離性が成立すると言うシステムの設計上極めて有用な結果を明らかにする。さらに得られた最短時間制御システムの安定性についても考察する。

第6章は本論文の結論であり，得られた結果を総括するとともに，他の制御理論の分野で得られている結果との比較検討を行なう。最後にこの分野における研究の発展方向について簡単に述べる。

以上がこの論文の構成と内容の概略である。

「公表文献表」

本論文の内容に関連した公表文献は次の通りである（ただし，電子通信学会，電気学会および計測自動制御学会の講演会および研究会などでの口頭発表の22件分は省略する）。

(1) 長田　朗、植田　司、西村卓也：“時間遅れのある線形サンプル値系の最短時間整定”，計測自動制御学会論文集，VOL.4，No.1，pp. 22～26，1968

(2) 長田　朗、西村卓也：“多入力線形サンプル値システムのフィードバック最短時間制御”，電子通信学会論文誌C，VOL. 53－C，No.3，pp. 175～176，1970

(3) 長田　朗、西村卓也：“線形離散システムの最短時間問題”，電子通信学会論文誌D，VOL. 56－D，No.9，pp. 507～514，1973

(4) 西村卓也、長田　朗：“線形離散システムのオブザーバの一構成法”，計測自動制御学会論文集，VOL. 9，No.6，pp. 665～671，1973

(5) 西村卓也、長田　朗：“線形離散システムの制御および観測について”，システムと制御，VOL. 18，No.8，pp. 483～489，1974

(6) A. Nagata，T. Nishimura，M. Ikeda：“Linear Function Observer for Linear Discrete-Time Systems”，IEEE Trans. Automatic Control，VOL. AC－20，No.3，pp. 401～407，1975

(7) 西村卓也、瓜倉　茂、長田　朗：“線形離散システムの最短時間出力整定”，計測自動制御学会論文集，VOL. 11，No.6，pp. 688～694，1975

(8) 西村卓也、長田　朗：“離散時間システムの出力フィードバック最短時間制御”，計測自動制御学会論文集，VOL. 15，No.1，pp. 26～32，1979

(9) 西村卓也、長田　朗：“線形離散時間システムの出力フィードバックによる出力最短時間整定問題”，電子通信学会論文誌A，VOL. 62-A，No.1，pp. 81～88，1979

諸　記　号

$\mathcal{K}$	任意な体（実数体$\mathcal{R}$，複素数体$\mathcal{C}$，素数pを法とする有限体$\mathcal{GF}$(p)，などの総称）
$\mathcal{K}^n$	体$\mathcal{K}$を基礎とするn次元ベクトル空間
$\mathcal{K}^{n\times m}$	$\mathcal{K}^n$と$\mathcal{K}^m$との直積空間
$\mathcal{S}$	制御対象の線形時不変離散時間システム（§ 2.2）
F	（状態フィードバック）制御ゲイン（§ 3.2）
F^*	最短時間制御ゲイン（§ 3.3）
F_-^*	安定な最短時間制御ゲイン（§ 3.3）
$\mathcal{O}$	オブザーバ（§ 4.2）
$\mathcal{O}_F$	オブザーバ$\mathcal{O}$の出力にFを作用させて構成した線形関数オブザーバ（§ 4.3）
$\mathcal{O}^*$	最短時間オブザーバ（§ 4.3）
$\mathcal{O}_F^*$	最短時間オブザーバ$\mathcal{O}^*$を用いた線形関数オブザーバ（§ 4.3）
$\mathcal{S}(F, I_n)$	状態フィードバックシステム（§ 3.2）
$\mathcal{S}(F, \mathcal{O})$	出力フィードバックシステム（§ 5.2）
$\mathcal{S}(\mathcal{O}_F)$	線形オブザーバ$\mathcal{O}_F$を用いた出力フィードバックシステム（§ 5.3）
$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$	(k, $\mathcal{T}$)可制御空間（§ 2.3）
$\mathcal{K}_{x\cdot k}$	k可制御空間（§ 2.3）
$\mathcal{K}_k$	k出力可整定空間（§ 2.3）
$\mathcal{Z}_k$	k可到達空間（§ 2.3）
$\mathcal{N}_k$	k非可決定空間（§ 2.4）
$\mathcal{M}_k$	k非可観測空間（§ 2.4）
$\mathcal{N}$	観測行列Cの 零空間 null〔C〕（§ 2.4）
$\mathcal{B}$	駆動行列Bの 値域空間 range〔B〕（§ 2.3）
$\mathcal{N}^*$	$\mathcal{N}$に含まれる最大の（A，B）不変部分空間（§ 2.3）
μ_x	$\mathcal{S}$の可制御性指数（§ 2.3）
μ	$\mathcal{S}$の出力可整定性指数（§ 2.3）

δ	$\mathcal{S}$の可到達性指数（§ 2.3）
ν	$\mathcal{S}$の可決定性指数（§ 2.4）
γ	$\mathcal{S}$の可観測性指数（§ 2.4）
ν_F	$\mathcal{S}$のＦ－可決定性指数（§ 2.4）
γ_F	$\mathcal{S}$のＦ－可観測性指数（§ 2.4）
ω^*	$\mathcal{S}$の出力フィードバック出力可整定性指数（§ 5.3）
null$[\bullet]$	行列$[\bullet]$の零空間
range $[\bullet]$	行列$[\bullet]$の値域空間
$\{[\bullet]\}$	行列$[\bullet]$の値域空間（例題の節§ 3.4，§ 4.4および§ 5.4でのみ使用）
$\underline{\alpha}$	集合$\{0, 1, \cdots, \alpha\}$
$\underline{\alpha/0}$	集合$\{1, 2, \cdots, \alpha\}$
$\triangleq$	左辺と右辺は定義として等しい。
$\mathcal{P} \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \mathcal{O}$	命題$\mathcal{P}$と命題$\mathcal{O}$とは定義として等しい。
$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ならば$\mathcal{Q}$である。
$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ならば$\mathcal{Q}$かつ$\mathcal{Q}$ならば$\mathcal{P}$である
$\forall$	for all
$\exists$	exist

（スカラー，ベクトルおよび行列は明朝体の活字α，x，A…を，集合，空間およびシステムは筆記体の活字$\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$，$\mathcal{S}$… を用いることにする。（§・）はその記号が定義されている節を表わしている。）

目　　次

第 1 章　序　　論 …… 1

第 2 章　線形離散時間システムの制御および観測に対する
可能性と最短時間性について …… 6

2. 1　ま え が き …… 6

2. 2　システムの記述 …… 7

2. 3　制御に対する可能性と最短時間性 …… 9

2. 4　観測に対する可能性と最短時間性 …… 21

2. 5　あ と が き …… 28

第 3 章　状態フィードバック最短時間制御問題 …… 30

3. 1　ま え が き …… 30

3. 2　問題の記述 …… 31

3. 3　状態フィードバック最短時間制御システムの設計 …… 33

3. 4　例　　題 …… 45

3. 5　あ と が き …… 50

第 4 章　最短時間観測問題 …… 52

4. 1　ま え が き …… 52

4. 2　問題の記述 …… 53

4. 3　最短時間オブザーバの設計 …… 57

4. 4　例　　題 …… 63

4. 5　あ と が き …… 69

第5章　出力フィードバック最短時間制御問題 …… 70
5.1　まえがき …… 70
5.2　問題の記述 …… 72
5.3　出力フィードバック最短時間制御システムの設計 …… 74
5.4　例　　題 …… 88
5.5　あとがき …… 93

第6章　結　　論 …… 96

謝　　辞 …… 99

参　考　文　献 …… 100

第1章　序　　論

制御工学における最も基本的な問題は制御偏差を零に整定するようなフィードバックシステムを構成する問題であるが，このとき定常偏差を零に整定するだけでなく偏差が零に整定するまでの過渡特性をも最適となるようにフィードバックシステムを設計するのが最適制御問題であり，現代制御理論はこの問題を中心として発展してきたと言える。この最適制御問題においては制御の良さ（最適性）を偏差量および操作量の2次形式の積分を評価関数とする最適レギュレータ問題が代表的であるが，他の一つとして偏差を零に整定するのに必要とする時間を評価関数とし，これを最小にしようとする最短時間制御問題も制御理論における基本的な問題として挙げることができる。最短時間制御問題は操作量に振巾制限がある場合とない場合とでは問題の性質が基本的に異なり，その取扱い方も全く違ってくる。前者は非線形な問題であり[1),2)]，後者は線形な問題であるが離散時間システムにおいてのみ意味がある[3)]。前者の場合でも離散時間システムの方が最適解の計算および実現が容易である[4)]。このように最短時間制御問題は離散時間システムに適合した特有の問題であり，制御対象が線形離散時間システムであるとき，これを最短時間制御システムとして設計することは有用で興味ある問題であると考えられる。本論文では線形離散時間システムにおける操作量に振巾制限のない最短時間制御問題を理論的に考察し，一般的な最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。その結果として，連続時間システムに対してもこれを離散時間システムに変換し，最短時間制御システムとして構成する設計方法が有用であることをも示唆しようとしている。

線形離散時間システムの最短時間制御問題に対する研究の歴史は古く，その発祥となる論文は定かでないが，古典制御理論の時代においてはパルス伝達関数で記述された1入力1出力線形サンプル値制御システムを対象に有限時間で制御偏差を零に整定する応答（有限時間整定応答）を得るような設計方法が知られていた[5)〜7)]。　1959年，R. E. Kalman，J. E. Bertram[8),9)]はこれに現代制御理論の光を当て，最短時間制御問題と言う新しい問題を導入した。すなわち，1入力1出力線形サンプル値制御システムを状態変数を用いたシステム方程式で記述し，制御偏差を零に整定するのに必要な最短時間性を明確にすることによって最短時間制御と言う新しい概念を導入した。さらに，この最

短時間制御を実現する状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。これが現代制御理論における線形離散時間システムの最短時間制御問題の始まりであり，この問題はその後二つの方向にわかれて発展して行った。一つは操作量や状態などに拘束条件が課せられた非線形な問題として考えようとする方向であり[10)〜13)]，もう一つは非線形な問題となるような拘束条件を設けないで線形な問題として発展させて行こうとする方向である。前者の方向への発展の歴史については文献（11）に詳しいので省略することにし，ここでは本論文が従がう後者の方向について，R. E. Kalman，J. E. Bertram[8),9)]以後の研究の発展の跡を追うことにする（ただし，以下に述べるのは大筋の歴史であり，詳細については各章のまえがきにゆずることにする）。まず，著者等[14)]がR. E. Kalman等[8)]の結果を多入力多出力線形サンプル値システムの場合に拡張した。線形サンプル値システムの状態遷移行列は常に正則であるが，順序回路やオートマンなどのように内部に離散時間信号を含むシステムや大規模システムなどのより一般的な線形離散時間システムの状態遷移行列は必らずしも正則とは限らない[17)〜22)]。このような一般的な線形離散時間システムを対象に状態遷移行列が正則でない場合の最短時間制御問題は著者等[15)]およびT. Mullis[16)]によって解決された。この段階で制御対象はほぼ完全に一般化されたと言えるが，最短時間制御システムを構成するのに状態フィードバックを仮定している点では不十分であった。すなわち，システムの内部量である状態は直接観測またはフィードバックできない場合が多く，状態フィードバックを仮定することは工学的実現性に欠ける面があった。これは当時の最適制御理論に共通の欠点であり，状態フィードバックによらない最適制御システムの設計が次の大きな課題であった。

R. E. Kalman[44)]はシステムの外部量である入出力列を適当な期間，観測することによって，システムの内部量である状態が決定可能であることを既に可観測性の概念として明らかにしていたから，これを実現するような観測システムを構成しようとするのが自然な方向である。D. G. Luenberger[23)]は1入力1出力の線形連続時間システムを観測対象にしてそのような観測システムの設計方法を明らかにし，これをオブザーバ（observer）と呼んだ。彼はさらにこれを観測対象が多入力多出力システムである場合にも拡張した[24)]。線形システムにおいては制御問題と観測問題とは双対な関係にあるから[44)]，有限時間で制御偏差を零に整定することができる離散時間システムを観測対象とする場合には，有限時

間で観測誤差を零に整定することが可能である[46),47)]。したがって，線形離散時間システムのオブザーバとしては最短時間で観測誤差を零に整定する最短時間オブザーバの設計が試みられた。まず，著者等[25)]が，続いて井上　昭等[26),27)]がこの最短時間オブザーバの設計方法を明らかにした。

このような最短時間オブザーバと言う観測システムの存在は状態フィードバックによらない最短時間制御システムの構成が可能であることを示唆していると考えられた。しかし，状態フィードバックが可能でないと言う状況下での最短時間制御問題（これを以下出力フィードバック最短時間制御問題と呼ぶ）においては，制御の問題と観測の問題とを同時に同じ場で考えなければならず，しかも両者の相互作用が複雑であることが，出力フィードバック最短時間制御問題の解決を困難なものとした。この問題に対しても，まず著者等[28)]が状態フィードバック最短時間制御ゲインと最短時間オブザーバとを縦属結合した制御器を用いて構成したフィードバックシステムの動作を考察し，観測に要する時間と制御に要する時間との和よりも短い時間で全体としての制御が完了する場合のあることを明らかにした。B. Porter，A. Bradshaw[29)]も同じような試みをしているが，単にオブザーバを用いて有限時間で制御偏差を零に整定するようなフィードバックシステムが構成可能であることを示しているに過ぎない。次に著者等[30)]および明石　一，足立正雄[31),32)]は時変な制御法則によって状態フィードバックが可能でないと言う状況下での最短時間性を保証しようと試みたが，時不変なシステムを時変な制御器を用いて制御するのは如何にも不自然であり，不十分であると言える。

このように出力フィードバック最短時間制御問題の解決が遅れている間，状態フィードバック最短時間制御問題および最短時間観測問題においてさらにそれぞれの最短時間性を追求した次のような進展があった。すなわち，それまではシステムの状態を最短時間で制御することにより，間接的に制御量であるシステムの出力を制御しようとする設計方法が採用されてきたが，これでは制御量そのものに対する最短時間性は必らずしも保証されないから，制御量である出力を直接対象とした設計方法の確立されることがより望ましい。このような出力に対する最短時間性を満足する状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を著者等[33)]が明らかにした。B. Leden[34)]もかなり遅れて同じ問題を考察しているが，著者等の場合よりも厳しい条件のもとで解いており不十分である。このような制御量である出力を直接対象として設計されたシステムに対してはその安定性が問

題となることが良く知られている[58),59)]。制御量の出力に対する最短時間性を満足する安定な最短時間制御システムの設計方法については著者等[35)]がこれを明らかにしている。観測の問題についても上と同じような最短時間性の改善が試みられた。制御法則を実現するために観測する必要があるのは状態そのものではなくその線形関数であるから，この状態の線形関数の観測に対する最短時間性を満足する線形関数最短時間オブザーバの設計が望まれた。これについては，状態遷移行列が正則な場合に対して池田雅夫，富田義数[36)]が，一般的な場合に対して著者等[37)]がその設計方法を明らかにしている。

これらの結果の集成として，出力フィードバック最短時間制御問題が著者等[38),39)]および明石　一，足立正雄[40)]によって独立してほぼ同時に解決され，制御と観測との分離性が成立すると言う，システムの設計上極めて有用な結果が明らかにされた。すなわち，制御については状態フィードバック最短時間制御問題の解である最短時間制御ゲインを，観測については最短時間観測問題の解である最短時間オブザーバを，用いることにし，これらを縦続結合したものが出力フィードバック最短時間制御システムを構成するための最短時間制御器となることを明らかにしている。

以上が線形離散時間システムの最短時間制御問題の研究に関する現在までの歴史の概要であり，この問題に関する研究は理論の上では本質的な点で完全に解かれたものと考える。

本論文では，線形離散時間システムの最短時間制御問題を，

「問題１」　線形離散時間システムの制御および観測に対する可能性と最短時間性（第２章）

「問題２」　状態フィードバック最短時間制御問題（第３章）

「問題３」　最短時間観測問題（第４章）

「問題４」　出力フィードバック最短時間制御問題（第５章）

で表わされるような四つの問題にわけて理論的に考察し，この問題に関する研究を完成させるとともに，最短時間制御問題を応用した最適制御システムの設計方法の基礎を確立することを意図している。一般に制御対象としては，順序回路などの少数の例外を除いては，ほとんどが連続時間システムであると言えるが，それにもかかわらず離散時間システムとして制御システムを構成することが多くなっている。その基本的な理由は離散時間データの方が連続時間データよりもデータ処理の面で質，量ともにはるかに有利であると言えるからであ

り，驚異的な発達を遂げつつあるディジタルコンピュータがこれを支えている。したがって，この離散時間システムの役割が重要視されると言う傾向は今後も続くものと考えられ，線形離散時間システムの設計理論の確立が急がれる現状である。本論文は最短時間制御システムの設計理論がこれに応え得るものであることを示そうとしている。本論文は先に述べたように，本論を形成する四つの問題を考察する四つの章の他に，「第1章　序論」と「第6章　結論」とを付け加えて六つの章で全体を構成する。第2章では「問題1」の線形離散時間システムの制御および観測に対する可能性と最短時間性について考察する。特に，線形離散時間システムの最大の特長である各時点毎に定まる制御可能な空間および観測不可能な空間を用いて制御および観測の可能性の幾何学的な条件を求め，次にそれをもとに制御および観測の最短時間性を明確にする。第3章では「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題について考察し，前章で定めた最短時間性を満足する状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。本論文全体を通して制御量であるシステムの出力を直接対象とする設計を行なうから，設計されたシステムの安定性が問題となるが，この章では制御量に対する最短時間性を満足するとともに，安定性をも保証された状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。第4章では「問題3」の最短時間観測問題について考察し，第2章で求めた観測の最短時間性を満足するだけでなく，次章の出力フィードバック最短時間制御システムの構成に使用することを考慮して，任意な時点での観測誤差空間を最小とするような最短時間オブザーバの設計方法を明らかにする。第5章では「問題4」の出力フィードバック最短時間制御問題について考察し，以上の章の結果を集成した形で出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。まず，状態フィードバックが可能でないと言う状況下における制御に対する最短時間性を明確にし，観測に要する時間と制御に要する時間との和よりも短い時間で制御が完了する場合のあることを示す。次に，第3章で求めた「問題2」の解である最短時間制御ゲインと，第4章で求めた「問題3」の解である最短時間オブザーバとを縦続結合したものが出力フィードバック最短時間制御システムを構成するための最短時間制御器となることを示し，この問題において制御と観測との分離性が成立することを明らかにする。第6章は本論文の結論であり，得られた結果を総括するとともに，他の分野で得られている結果と比較検討する。最後に，この問題に関する研究の今後の発展方向について簡単に述べる。

第2章　線形離散時間システムの制御および観測に対する可能性と最短時間性について

第2.1節　まえがき

この章では本論文を通して考察の対象とする線形離散時間システムの数学モデルを記述するとともに，「問題1」であるその制御および観測に対する可能性と最短時間性について考察する。

R. E. Kalman[42)〜44)]によって導入された線形システムの可制御性および可観測性の概念は制御理論のあらゆる問題に深く関係しているが，最短時間制御問題および最短時間観測問題もその例外ではなく，最大限可能な制御および観測を行なう必要があると言う問題の性質上，他の問題よりもさらに深く直接的にこれらの性質に関係していると言える。線形離散時間システムの制御および観測の可能性が線形連続時間システムのそれと異なり，区別して考えなければならない点は，(i)一般的な線形離散時間システムにおいては状態遷移行列の正則性が必らずしも保証されず[17)〜22)]，目標値が零か非零かによって制御可能性の条件に違いが生じ，さらに観測時点の違いによって観測可能性の条件にも違いが生じる。，および(ii)線形離散時間システムにおいては各時点毎の制御可能な空間および観測不可能な空間が定まり，有限時間で制御偏差および観測誤差を零に整定することができる。，の以上2点である。(i)については児玉慎三[45)]およびL. Weiss[46)]が初めてこれを示し，遅れて著者等[47)]も制御および観測の最短時間性と関連づけて明らかにしている。(ii)については，R. E. Kalman[8)]が初めて各時点毎の制御可能な空間を導入し，L. Weiss[46)]，C. T. Mullis[16)]，明石　一等[40),41)]および著者等[38),39)]がこれを一般化している。各時点毎の観測不可能な空間については井上　昭[27)]が初めて状態空間の双対空間においてこれを導入し，明石　一等[63)]および著者等[39)]がこれを状態空間に直し一般化している。

本章ではこの線形離散時間システムの特長である各時点毎の御制可能な空間および観測不可能な空間を最大限に生かした形で，「問題1」の制御および観測の可能性と最短時間性を考察する。さらに，本論文では制御量であるシステムの出力を直接対象とした設計を行なおうとしているから，出力に対する制御可能性の概念を(i)の点に留意して導入し，それらについての制御可能性と最短時間性について考察する。観測についても状態そのものではなくその線形関数

に対する観測可能性の概念を同じく(i)の点に留意して導入し，それらの観測可能性と最短時間性を考察する。

本章の構成は次の通りである。まず，第2.2節では考察の対象とする線形離散時間システムの数学モデルを記述する。次に，第2.3節では制御に対する可能性と最短時間性について，第2.4節では観測に対する可能性と最短時間性について考察する。

(本章の内容は「公表文献表」(pp. iii)中の(5)，(8)および(9)に依っている。)

第2.2節　システムの記述

本論文全体を通して考察の対象とする一般的な線形時不変離散時間システム$\mathcal{S}$の数学モデルを次のようなシステム方程式で記述する。

$$\mathcal{S}\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) & : \text{状態方程式} \quad (2.1) \\ y(k) = C\,x(k) \quad (+ D\,u(k)) & : \text{出力方程式} \quad (2.2) \\ k = 0,\ 1,\ \cdots \end{cases}$$

ここで，$x(k) \in \mathcal{V}^n$ ：時点kでの$\mathcal{S}$の状態，

$u(k) \in \mathcal{V}^r$ ：時点kでの$\mathcal{S}$への入力(操作量)，

$y(k) \in \mathcal{V}^m$ ：時点kでの$\mathcal{S}$の出力(制御量)，

$A \in \mathcal{V}^{n\times n}$ ：$\mathcal{S}$の状態遷移行列，　$B \in \mathcal{V}^{n\times r}$：$\mathcal{S}$の駆動行列，

$C \in \mathcal{V}^{m\times n}$ ：$\mathcal{S}$の観測行列，　($D = O_{m\times r} \in \mathcal{V}^{m\times r}$)，

(ただし，$\mathcal{V}^n$ は任意な体$\mathcal{V}$を基礎とするn次元ベクトル空間であり，$\mathcal{V}^{n\times r}$は$\mathcal{V}^n$と$\mathcal{V}^r$との直積空間である。)

考察の対象とする線形離散時間システム$\mathcal{S}$に一般性をもたせるために状態遷移行列Aの正則性は仮定しないことにする。ベクトル空間の基礎となる体は任意としておき，サンプル値制御システムなどを対象とするときは$\mathcal{V} \equiv \mathcal{R}$，$\mathcal{V}^n \equiv \mathcal{R}^n$($\mathcal{R}$：実数体，$\mathcal{R}^n$：n次元実ユークリッド空間)とし，順序回路などを対象とするときは$\mathcal{V} \equiv \mathcal{GF}(p)$，$\mathcal{V}^n \equiv \mathcal{GF}(p)^n$，($\mathcal{GF}(p)$：素数pを法とする有限体(Galois Field)，$\mathcal{GF}(p)^n$：有限体上のn次ベクトル空間)とすれば良い。このようにできるだけ一般的なシステムを考察の対象としようとする一方で，出力方程式において$D = O_{m\times r}$と仮定する。これは以下での考察を簡単化するためのもので本質的な仮定ではない。さらに，この仮定のもとで得られた結果は仮定が成立しない場合にも容易に拡張できる。

このような数学モデルで記述できる離散時間システムとしては，順序回路（抽象的にはオートマトン）に代表される基本的に離散時間動作をするシステムや，サンプル値制御システムに代表されるような連続時間システムの入力を離散時間化することによって得られるシステム，などがある。さらに，任意な有限長の離散時間形入出力データから（2.1）式および（2.2）式の形の数学モデルが実現できる[48),49)]ことを考慮すると，この数学モデルで非常に広範囲のシステムを記述することができると言える。時点間の間隔はサンプル値制御システムなどでは一定であるが，順序回路などでは必らずしもそうとは限らない。したがって，離散時間システムにおいては時間の長さを時点の個数で評価し，これをステップ数と呼ぶことにする。最後に，以下ではシステムとその数学モデルとを特に区別しないことにする。

以下で使用する特殊な記号の用法をここで整理してまとめておく。

〈記号の用法〉

(i)行列Aの値域空間（range space）を range[A] で表わす。[注]
行列Aの零空間（null space）を null[A] で表わす。
特に，$\mathcal{B} \triangleq$ range[B]，$\mathcal{N} \triangleq$ null[C] とする。

(ii)有限な長さαの入力列および出力列をそれぞれ次のように表わす。

$$\{u(\bullet)\}_0^{\alpha-1} \triangleq \{u(0), u(1), \cdots, u(\alpha-1)\}$$

$$\{y(\bullet)\}_0^{\alpha-1} \triangleq \{y(0), y(1), \cdots, y(\alpha-1)\}$$

(iii)$\mathcal{X}$を状態空間$\mathcal{V}^n$の部分空間とし，行列Aとその表わす線形写像とを特に区別しないで混用するとき，$\mathcal{X}$の写像Aに関する逆像空間（inverse image space）を逆行列 A^{-1} の存在の有無とは無関係に $A^{-1}\mathcal{X}$ で表わす。すなわち，

$$A^{-1}\mathcal{X} \triangleq \{x \mid Ax \in \mathcal{X},\quad x \in \mathcal{V}^n\}。$$

ただし，逆行列 A^{-1} が存在するとき，$A^{-1}\mathcal{X}$ は A^{-1} による$\mathcal{X}$の像である。

(iv)状態空間$\mathcal{V}^n$の部分空間$\mathcal{X}$の基底列ベクトルで構成される行列を base [$\mathcal{X}$] で表わす。すなわち，base[$\mathcal{X}$]は次の関係を満足する行列である。

「脚注」ただし，例題の節（§3.4，§4.4および§5.4）においては記述を簡略化するために{A}で行列Aの値域空間を表わすことにする。

$\mathcal{X}$ = range [base [$\mathcal{X}$]], base [$\mathcal{X}$] : full rank

(V)非負整数αに対して,

$$\underline{\alpha} \triangleq \{ 0, 1, \cdots, \alpha \}, \qquad \underline{\alpha/0} \triangleq \{ 1, 2, \cdots, \alpha \}$$

とする。

第2.3節　制御に対する可能性と最短時間性

この節では，線形離散時間システム$\mathcal{S}$の状態またはその線形関数で与えられる制御量である出力の制御可能性とその最短時間性について考察する。まず，線形離散時間システム$\mathcal{S}$の制御可能性を評価する定義を与えるが，このとき次の点に注意する必要がある。(i)まえがきで述べたごとく，状態遷移行列Aの正則性を仮定していないから，目標値が零の場合とそうでない場合とを区別しなければならない。(ii)目標値へ制御する場合と整定する場合とを区別しなければならない。以上の2点が明確になるように，従来から知られているものに若干新しいものを加えてシステム$\mathcal{S}$の制御可能性の定義を次のように与える。

〈定義2.1〉線形離散時間システム$\mathcal{S}$の制御可能性

システム$\mathcal{S}$において，初期状態$x(0) = x_0$から有限ステップω($<\infty$)で目標状態$x(\omega) = x_f$へ制御する入力列,

$$\{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \triangleq \{ u(0), u(1), \cdots, u(\omega-1) \}, \qquad (2.3)$$

が存在することを，次のように略記する。

$$\exists \{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \Big| \; x(0) = x_0 \longrightarrow x(\omega) = x_f, \quad \omega < \infty \qquad (2.4)$$

(iA)「$\mathcal{S}$は可制御(controllable)である」$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \Big| \; x(0) = x_0 \longrightarrow x(\omega) = 0, \quad \omega < \infty \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n$$

(iB)「$\mathcal{S}$は可整定(regulatable)である」$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \Big| \; x(0) = x_0 \longrightarrow x(\omega+\alpha) = 0, \quad \omega < \infty, \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad \alpha \geq 0$$

(iiA)「$\mathcal{S}$は可到達(reachable)である」$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \Big| \; x(0) = 0 \longrightarrow x(\omega) = x_f, \quad \omega < \infty, \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n$$

(iiB)「$\mathcal{S}$は非零可整定(non-zero regulatable)である」$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{ u(\bullet) \}_0^{\omega-1} \Big| \; x(0) = 0 \longrightarrow x(\omega+\alpha) = x_f, \quad \omega < \infty, \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n, \quad \alpha \geq 0$$

(ⅲA) 「$\mathcal{S}$は完全可制御(completely controllable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow x(\omega)=x_f, \quad \omega<\infty, \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad x_f \in \mathcal{V}^n$$

(ⅲB) 「$\mathcal{S}$は完全可整定(completery regulatable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow x(\omega+\alpha)=x_f, \quad \omega<\infty \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad x_f \in \mathcal{V}^n, \quad \alpha \geq 0$$

(ⅳA) 「$\mathcal{S}$は出力可制御 (output controllable) である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow y(\omega)=0, \quad \omega<\infty, \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n$$

(ⅳB) 「$\mathcal{S}$は出力可整定(output regulatable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow y(\omega+\alpha)=0, \quad \omega<\infty, \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad \alpha \geq 0$$

(ⅴA) 「$\mathcal{S}$は出力可到達(output reachable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=0 \rightarrow y(\omega)=y_f, \quad \omega<\infty, \quad \forall y_f \in \mathcal{V}^m$$

(ⅴB) 「$\mathcal{S}$は出力非零可整定(output non-zero regulatable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=0 \rightarrow y(\omega+\alpha)=y_f, \quad \omega<\infty, \forall y_f \in \mathcal{V}^m, \quad \alpha \geq 0$$

(ⅵA) 「$\mathcal{S}$は出力完全可制御(output completely controllable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow y(\omega)=y_f, \quad \omega<\infty, \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad y_f \in \mathcal{V}^m$$

(ⅵB) 「$\mathcal{S}$は出力完全可整定(output completely regulatable)である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \{u(\cdot)\}_0^{\omega-1} \mid x(0)=x_0 \rightarrow y(\omega+\alpha)=y_f, \quad \omega<\infty \quad \forall x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad y_f \in \mathcal{V}^m, \quad \alpha \geq 0$$

(注意：この定義における語句の用法は普通良く用いる R. E. Kalman [42] および L. Weiss [46] の定義における語句の用法と少し異なっている。この定義における語句の用法を彼等のそれと照合すると，(ⅰA)は「 completely controllability 」と，(ⅱA)は「 completely reachability 」と呼ばれているものに相当している。ここでの定義のように(ⅰA)および(ⅱA)の場合に「 completely 」と言う語句をつけない方がより自然であると考えられること，および(ⅲA)の条件が線形連続時間システムの完全可制御性の条件に一致すること，などの理由で上のように定義する [47]。 システムの出力に対する制御可能性の定義(ⅳ) ～ (ⅵ)は S. P. Bhattacharyya等 [50],[51] が線形連続時間システ

ムに対して与えた定義に対応するように著者等[38]が導入したものである。）
上の定義を初期状態と目標値に関して整理すると表2.1のようになる。

表2.1　初期状態と目標値による制御可能性の分類

	初期状態 x_0	目標値　($\omega<\infty$, $\alpha\geq 0$)
可制御性	$\mathcal{V}^n$ 任意	$x(\omega) = 0$
可整定性	〃	$x(\omega+\alpha) = 0$
可到達性	0	$x(\omega) = x_f \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n$
非零可整定性	0	$x(\omega+\alpha) = x_f \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n$
完全可制御性	$\mathcal{V}^n$ 任意	$x(\omega) = x_f \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n$
完全可整定性	〃	$x(\omega+\alpha) = x_f \quad \forall x_f \in \mathcal{V}^n$
出力可制御性	〃	$y(\omega) = 0$
出力可整定性	〃	$y(\omega+\alpha) = 0$
出力可到達性	0	$y(\omega) = y_f \quad \forall y_f \in \mathcal{V}^m$
出力非零可整定性	0	$y(\omega+\alpha) = y_f \quad \forall y_f \in \mathcal{V}^m$
出力完全可制御性	$\mathcal{V}^n$ 任意	$y(\omega) = y_f \quad \forall y_f \in \mathcal{V}^m$
出力完全可整定性	〃	$y(\omega+\alpha) = y_f \quad \forall y_f \in \mathcal{V}^m$

次に，システム$\mathcal{S}$がこれらの性質をもつための必要十分条件を求めようとするが，その準備として離散時間システムの特長である各時点毎の制御可能な空間を定義するとともに，それらがシステム$\mathcal{S}$において容易に求められることを明らかにする。それを与えるのが次の補題であるが，これはシステム$\mathcal{S}$の動特性に関する基本的結果の一つである。

〈補題2.1〉

(i)　(k, $\mathcal{T}$) 可制御空間

「状態空間$\mathcal{V}^n$の部分空間$\mathcal{T}$へkステップで制御可能なすべての初期状態の集合を$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$で表わし，これを(k, $\mathcal{T}$)可制御空間と呼ぶことにする。すなわち，

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{T}) \triangleq \left\{ x_0 \;\middle|\; \exists \{u(\bullet)\}_0^{k-1} \;\middle|\; x(0)=x_0 \rightarrow x(k) \in \mathcal{T},\ x_0 \in \mathcal{V}^n \right\}」 \tag{2.5}$$

(k, $\mathcal{T}$) 可制御空間$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$は部分空間を形成し，次の繰返し形式で与えられる。

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T}) = A^{-1}\{\mathcal{K}_k(\mathcal{T}) + \mathcal{B}\} \\ \mathcal{K}_0(\mathcal{T}) = \mathcal{T}, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで，$\mathcal{B}$は$\mathcal{S}$の駆動行列Bの値域空間(range space)であり，$A^{-1}\{\bullet\}$は部分空間$\{\bullet\}$の線形写像Aに関する逆像空間(inverse image space)である。すなわち，

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \triangleq \text{range}\,[B] \\ &A^{-1}\{\mathcal{K}_k(\mathcal{T})+\mathcal{B}\} \triangleq \{\, x \mid Ax \in \mathcal{K}_k(\mathcal{T})+\mathcal{B},\ \ x \in \mathcal{V}^n \,\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

状態遷移行列Aが正則なときは繰返し形式によらないでも次のように簡単に求めることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(\mathcal{T}) &= A^{-1}\mathcal{B} + A^{-2}\mathcal{B} + \cdots + A^{-k}\mathcal{B} + A^{-k}\mathcal{T} \\ &= \text{range}[\, A^{-1}B,\ A^{-2}B,\ \cdots,\ A^{-k}B,\ A^{-k}T \,] \end{aligned} \tag{2.8}$$

ここで，行列Tは部分空間$\mathcal{T}$の基底で構成される行列 base[$\mathcal{T}$] である。

(ⅱ) $\mathcal{T}$可制御性指数

(k, $\mathcal{T}$) 可制御空間$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$において，

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{T}) = \mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T}) \Longrightarrow \mathcal{K}_{k+\alpha}(\mathcal{T}) = \mathcal{K}_k(\mathcal{T}) \quad \alpha = 0,\ 1,\ \cdots \tag{2.9}$$

が成立する。この関係を満足する最小の整数，すなわち，

$$\mu(\mathcal{T}) \triangleq \min\{\, k \mid \mathcal{K}_k(\mathcal{T}) = \mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T}) \,\}, \quad 0 \le \mu(\mathcal{T}) \le n \tag{2.10}$$

を$\mathcal{S}$の$\mathcal{T}$可制御性指数と呼ぶことにする。

(ⅲ) 「状態空間$\mathcal{V}^n$の部分空間$\mathcal{T}^*$において，

$$\exists\, u(k) = u^* \mid x(k) = x^* \rightarrow x(k+1) = Ax^* + Bu^* \in \mathcal{T}^*,\ \forall\, x^* \in \mathcal{T}^*$$

が成立するとき，$\mathcal{T}^*$は(A, B)不変部分空間であると言う。部分空間$\mathcal{T}^*$が(A, B)不変であるための必要十分条件は，

$$A\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}^* + \mathcal{B} \tag{2.11}$$

が成立することである。」[52),53)]

(A, B)不変部分空間$\mathcal{T}^*$に対する(k, $\mathcal{T}^*$) 可制御空間$\mathcal{K}_k(\mathcal{T}^*)$は次

の包含関係を満足する。

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*) \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_1(\mathcal{T}^*) \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_2(\mathcal{T}^*) \overset{\subset}{+} \cdots$$

$$\cdots \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_{\mu(\mathcal{T}^*)}(\mathcal{T}^*) = \mathcal{K}_{\mu(\mathcal{T}^*)+1}(\mathcal{T}^*) = \cdots \quad (2.12)$$

(iv) k 可到達空間

「零状態の初期状態から k ステップで到達可能なすべての状態の集合を $\mathcal{Z}_k$ で表わし，これを k 可到達空間と呼ぶことにする。すなわち，

$$\mathcal{Z}_k \triangleq \left\{ x_f \;\middle|\; \exists \{u(\bullet)\}_0^{k-1} \;\middle|\; x(0)=0 \rightarrow x(k)=x_f, \quad x_f \in \mathcal{V}^n \right\}」 \quad (2.13)$$

k 可到達空間 $\mathcal{Z}_k$ は部分空間を形成し，次式で与えられる。

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_k = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{k-1}\mathcal{B} & (2.14) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,\ 2,\ \cdots \\ \quad = \mathrm{range}\,[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{k-1}B] & (2.15) \\ \mathcal{Z}_0 = \{0\} \end{cases}$$

(v) 可到達性指数

k 可到達空間 $\mathcal{Z}_k$ は次の包含関係を満足する。

$$\mathcal{Z}_0 \overset{\subset}{+} \mathcal{Z}_1 \overset{\subset}{+} \mathcal{Z}_2 \overset{\subset}{+} \cdots \overset{\subset}{+} \mathcal{Z}_\delta = \mathcal{Z}_{\delta+1} = \cdots \quad (2.16)$$

この関係を満足する δ を $\mathcal{S}$ の可到達性指数と呼ぶ。

(証明) (i) 数学的帰納法を用いて証明する。k = 0 のとき，$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ の定義より，$\mathcal{K}_0(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ であり，この集合が部分空間を形成することは明らかである。次に，$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ が部分空間として定められていると仮定して，$\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})$ が (2.6) 式の形で与えられることを示す。$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ の定義 (2.5) 式より，$x_0 \in \mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})$ であるためには，$Ax_0 + Bu_0 \in \mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ となるような入力 $u_0 \in \mathcal{V}^r$ の存在することが必要十分である。仮定より，$\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ は部分空間であるから，そのような入力 u_0 が存在するためには，$Ax_0 \in \mathcal{B} + \mathcal{K}_k(\mathcal{T})$ となること，すなわち，$x_0 \in A^{-1}\{\mathcal{B} + \mathcal{K}_k(\mathcal{T})\}$ となることが必要十分である。したがって，$\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})$ は (2.6) 式で定まり，さらにこれが部分空間を形成することは明らかである。以上で (2.6) 式が任意な k について成立することが言えた。

状態遷移行列 A が正則ならば，任意な部分空間 $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ に対して次の関係，

$$A^{-1}(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)=A^{-1}\mathcal{T}_1+A^{-1}\mathcal{T}_2,\quad A^{-1}(A^{-k}\mathcal{T})=A^{-k-1}\mathcal{T}$$

が明らかに成立する。この関係を用いると，Aが正則のとき（2.8）式が成立することを次のように示すことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_k(\mathcal{T}) &= A^{-1}\{\mathcal{B}+\mathcal{K}_{k-1}(\mathcal{T})\}=A^{-1}\mathcal{B}+A^{-1}\mathcal{K}_{k-1}(\mathcal{T})\\ &= A^{-1}\mathcal{B}+A^{-1}\{A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{k-2}(\mathcal{T}))\}=A^{-1}\mathcal{B}+A^{-2}\mathcal{B}+A^{-2}\mathcal{K}_{k-1}(\mathcal{T})\\ &= A^{-1}\mathcal{B}+A^{-2}\mathcal{B}+\cdots+A^{-k}\mathcal{B}+A^{-k}\mathcal{T} \qquad =\cdots\\ &= \text{range}\,[\,A^{-1}B,\ A^{-2}B,\ \cdots,\ A^{-k}B,\ A^{-k}T\,]\end{aligned}$$

$$\because\ A^{-i}\mathcal{B}=\text{range}\,[A^{-i}B]$$

（ii） $\mathcal{K}_k(\mathcal{T})=\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})$ ならば，（2.6）式より，

$$\mathcal{K}_{k+2}(\mathcal{T})=A^{-1}\{\mathcal{B}+\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})\}=A^{-1}\{\mathcal{B}+\mathcal{K}_k(\mathcal{T})\}=\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T})=\mathcal{K}_k(\mathcal{T})$$

となるから，以下全く同様にして（2.9）式の関係を得る。さらに，行列Aのサイズがnであることから，$0\leq\mu(\mathcal{T})\leq n$ なる関係は明らかである。

（iii） $\mathcal{T}^*$が（A，B）不変であるための必要十分条件が（2.11）で与えられることについては文献（52）および（53）にゆずる。

$\mathcal{K}_k(\mathcal{T}^*)\subset\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T}^*)$ が成立することを数学的帰納法を用いて示す。$\mathcal{T}^*$が（A，B）不変であることおよび $\mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*)=\mathcal{T}^*$ であることより，

$$A\mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*)\subset\mathcal{B}+\mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*)\iff\mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*)\subset A^{-1}\{\mathcal{B}+\mathcal{K}_0(\mathcal{T}^*)\}=\mathcal{K}_1(\mathcal{T}^*)$$

となり，$k=0$ について成立する。$k=\beta$ について $\mathcal{K}_\beta(\mathcal{T}^*)\subset\mathcal{K}_{\beta+1}(\mathcal{T}^*)$ であると仮定すると，$k=\beta+1$ について上の関係が成立することを次のように示せる。

$$\mathcal{K}_{\beta+2}(\mathcal{T}^*)=A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{\beta+1}(\mathcal{T}^*))\supset A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_\beta(\mathcal{T}^*))=\mathcal{K}_{\beta+1}(\mathcal{T}^*)$$

$$\because\ (2.6)$$

したがって，任意なkについて，$\mathcal{K}_k(\mathcal{T}^*)\subset\mathcal{K}_{k+1}(\mathcal{T}^*)$ が成立する。これに，（ii）の関係を適用すれば（2.12）式の包含関係が成立する。

（iv） $\mathcal{S}$の状態方程式（2.1）より，初期状態が零状態のときの時点kにおける$\mathcal{S}$の状態 $x(k)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}x(k)&=A^kx(0)+A^{k-1}Bu(0)+A^{k-2}Bu(1)+\cdots+Bu(k-1)\\ &=Bu(k-1)+ABu(k-2)+\cdots+A^{k-1}Bu(0)\end{aligned}$$

したがって，（2.13）式の $\mathcal{Z}_k$ の定義より，（2.14）式または（2.15）式のように $\mathcal{Z}_k$ は与えられる。これが部分空間を形成することは明らかである。

(v)　(2.14)式より，$\mathcal{Z}_k$ に関する(2.15)式の包含関係は明らかである。さらに，行列Aのサイズがnであることから，$0 \leq \delta \leq n$ の関係が成立する。

(証明終)

このように，各時点毎の制御可能な空間 $\mathcal{X}_k(\mathcal{T})$ および $\mathcal{Z}_k$ が明確に定まることが線形離散時間システムの最大の特長であり，有限時間整定応答が可能であると言う事実に対応している。本章ではこの特長を最大限に生かした形で制御に対する可能性と最短時間性について考察するが，これらの空間は状態空間において定まるものであるから，出力の制御を考えるときは，出力の制御を等価な状態の制御に変換しておく必要がある。これを次に示す。

〈補題 2.2〉

(i)　$y(\omega) = 0 \iff x(\omega) \in \mathcal{N} = \mathrm{null}[C]$　　(2.17)

(ii)　$y(\omega+\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \geq 0 \iff x(\omega+\alpha) \in \mathcal{N}^* \quad \forall \alpha \geq 0$　　(2.18)

ここで，部分空間 $\mathcal{N}^*$ は観測行列Cの零空間 $\mathcal{N}$ に含まれる最大の(A, B)不変部分空間である。すなわち，次の関係，

$$\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}, \qquad A\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}^* + \mathcal{B} \qquad (2.19)$$

を満足する最大の部分空間であり，これを求めるアルゴリズムはW. M. Wonhamによって文献(52)および(53)で与えられている。

(iii)　$y(\omega) = y_f \iff x(\omega) \in C^{-1}y_f$　　(2.20)

(iv)　$y(\omega+\alpha) = y_f \quad \forall \alpha \geq 0 \iff x(\omega+\alpha) \in \{x_e\} \quad \forall \alpha \geq 0$　　(2.21)

ここで，目標となる状態 x_e は次の関係を満足するものである。

$$x_e \in C^{-1}y_f, \qquad (I-A)x_e \in \mathcal{B} + \mathcal{N} \qquad (2.22)$$

(証明)　(i) システム $\mathcal{S}$ の出力方程式(2.2)式および $\mathcal{N} = \mathrm{null}[C]$ より，$C\mathcal{N} = \{0\}$ となることから明らかである。

(ii) 出力を零に整定するためには状態を観測行列Cの零空間 にとどめておかなければならないから，補題2.1の(iii)より，$\mathcal{N}$ に含まれる最大の(A, B)不変部分空間 $\mathcal{N}^*$ に制御しなければならないことは明らかである。この $\mathcal{N}^*$ を求める方法は文献(52)を参照のこと。

(iii) 出力方程式(2.2)より明らかである。

(iv) 出力を y_f に整定するためには状態を集合 $C^{-1}y_f$ にとどめなければならないから，(2.22)式を満足する状態 x_e へ制御することが必要十分である。

(証明終)

本論文では主として状態または制御量である出力を零に整定する問題を考えるから，これに関係した空間に適当な名称と略記号を用意しておくと便利である。さらに，制御における最短時間性を考察するための記号も用意しておく。

〈定義 2.2〉

(i) $\mathcal{X}_k(\{0\})$ を k 可制御空間と言い，$\mathcal{X}_{x\cdot k}$ で表わす。$\mu(\{0\})$ を可制御性指数と言い，μ_x で表わす。

(ii) $\mathcal{X}_k(\mathcal{N}^*)$ を k 出力可整定空間と言い，$\mathcal{X}_k$ で表わす。$\mu(\mathcal{N}^*)$ を出力可整定性指数と言い，μ で表わす。

(iii) $\mathcal{Z}_k$ を k 可到達空間と言い，δ を可到達性指数と言う。

(iv) 初期状態 $x_0 \in \mathcal{V}^n$ から目標状態 $x_f \in \mathcal{V}^n$ へ制御するのに必要な最小ステップ数を $t(x_0, x_f)$ で表わす。目標が部分空間$\mathcal{T}$のときは $t(x_0, \mathcal{T})$ で表わす。

以上の準備により，線形離散時間システム$\mathcal{S}$の制御可能性の幾何学的な条件およびその制御における最短時間性を次のように明らかにすることができる。

〈定理 2.1〉

(i) $\mathcal{S}$が可制御であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{X}_{x\cdot\mu_x} = \mathcal{V}^n \qquad (2.23)$$

$\mathcal{S}$が可制御であるとき，零状態への制御の最短時間性は次の通りである。

$$t(x_0, 0) = \min\{k \mid x_0 \in \mathcal{X}_{x\cdot k}\} \leq \mu_x \qquad (2.24)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathcal{V}^n} \{t(x_0, 0)\} = \mu_x \qquad (2.25)$$

(ii) $\mathcal{S}$が可整定であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が可制御となることであり，$\mathcal{S}$が可整定であるとき，その最短時間性は可制御性のそれと全く同じである。

(iii) $\mathcal{S}$が可到達であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{Z}_\delta = \mathcal{V}^n \qquad (2.26)$$

$\mathcal{S}$が可到達であるとき，零状態からの制御の最短時間性は次の通りである。

$$t(0, x_f) = \min\{k \mid x_f \in \mathcal{Z}_k\} \leq \delta \qquad (2.27)$$

$$\sup_{x_f \in \mathcal{V}^n} \{t(0, x_f)\} = \delta \qquad (2.28)$$

(iv) $\mathcal{S}$が非零可整定であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{Z}_\delta = \mathcal{V}^n \qquad (2.29)$$

$$\text{range}\,[(I_n - A)] \subset \mathcal{B} \qquad (2.30)$$

$\mathcal{S}$が非零可整定であるとき，零状態からの整定における最短時間性は可到達性のそれと全く同じである。

(v) $\mathcal{S}$が完全可制御であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が可到達となることである。$\mathcal{S}$が完全可制御であるとき，その最短時間性は次の通りである。

$$t(x_0, x_f) = \min\{k \mid x_f - A^k x_0 \in \mathcal{Z}_k\} \qquad (2.31)$$

$$\sup_{x_0, x_f \in \mathcal{V}^n} \{t(x_0, x_f)\} = \delta \qquad (2.32)$$

(vi) $\mathcal{S}$が完全可整定であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が非零可整定となることである。$\mathcal{S}$が完全可整定であるとき，その最短時間性は完全可制御性のそれと全く同じである。

(vii) $\mathcal{S}$が出力可制御であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{K}_{\mu(\mathcal{N})}(\mathcal{N}) = \mathcal{V}^n \qquad (2.33)$$

$\mathcal{S}$が出力可制御であるとき，出力を零に制御するための最短時間性は次の通りである。

$$t(x_0, \mathcal{N}) = \min\{k \mid x_0 \in \mathcal{K}_k(\mathcal{N})\} \leq \mu(\mathcal{N}) \qquad (2.34)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathcal{V}^n} \{t(x_0, \mathcal{N})\} = \mu(\mathcal{N}) \qquad (2.35)$$

(viii) $\mathcal{S}$が出力可整定であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{K}_\mu = \mathcal{V}^n \qquad (2.36)$$

$\mathcal{S}$が出力可整定であるとき，出力を零へ整定するための最短時間性は次の通りである。

$$t(x_0, \mathcal{N}^*) = \min\{k \mid x_0 \in \mathcal{K}_k\} \leq \mu \qquad (2.37)$$

$$\sup_{x_0 \in \mathcal{V}^n} \{t(x_0, \mathcal{N}^*)\} = \mu \qquad (2.38)$$

(ix) $\mathcal{S}$が出力可到達であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$C\mathcal{Z}_\delta = \mathcal{Y}^m \qquad (2.39)$$

$$(\text{または}, \quad \operatorname{rank} C = m, \quad C^{-1}\mathcal{Y}^m \subset \mathcal{Z}_\delta) \qquad (2.40)$$

$\mathcal{S}$が出力可到達であるとき，出力を目標値 y_f へ制御するための最短時間性は次の通りである。

$$t(0, C^{-1}y_f) = \min\{k \mid y_f \in C\mathcal{Z}_k\} \qquad (2.41)$$

$$\sup_{y_f \in \mathcal{Y}^m} \{t(0, C^{-1}y_f)\} = \delta_y \quad (\text{ただし}, \ \delta_y \triangleq \min\{k \mid C\mathcal{Z}_k = \mathcal{Y}^m\}) \qquad (2.42)$$

(X) $\mathcal{S}$が出力非零可整定であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{S} : \text{出力可到達} (\text{i.e. } C\mathcal{Z}_\delta = \mathcal{Y}^m) \qquad (2.43)$$

$$C(I_n - A)\, C^{-1}\mathcal{Y}^m \subset C\mathcal{B} \qquad (2.44)$$

$\mathcal{S}$が出力非零可整定であるとき，出力を目標値 $y_f \in \mathcal{Y}^m$ に整定するための最短時間性は出力可到達性のそれと全く同じである。

(Xi) $\mathcal{S}$が出力完全可制御であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が出力可到達となることであり，その最短時間性は次の通りである。

$$t(x_0, C^{-1}y_f) = \min\{k \mid y_f - CA^k x_0 \in C\mathcal{Z}_k\} \qquad (2.45)$$

$$\sup_{y_f \in \mathcal{Y}^m, x_0 \in \mathcal{Y}^n} \{t(x_0, C^{-1}y_f)\} = \delta_y \qquad (2.46)$$

(Xii) $\mathcal{S}$が出力完全可整定であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が出力非零可整定となることであり，その最短時間性は出力完全可制御性のそれと全く同じである。

(証明) (i)補題 2.1 の (i) および定義 2.2 より，$\mathcal{X}_{x\cdot k} \triangleq \mathcal{X}_k(\{0\})$ は k ステップで零状態へ制御可能なすべての初期状態の集合であるから，この結果は明らかである。

(ii) 可制御性の定義における目標の空間 $\{0\}$ は，補題 2.1 の (iii)で与えられた (A, B) 不変部分空間としての条件を満足していることは明らかであるから，可制御性と可整定性とは等価である。

(iii) 補題 2.1 の (iv) の $\mathcal{Z}_k$ の定義より，$x(0) = 0$ から k ステップで到達可能なすべての目標状態の集合が $\mathcal{Z}_k$ であるから，この結果は明らかである。

(iv) 目標状態 x_f への制御については可到達性の場合と全く同じであるから，目標状態へ到達した後の整定の条件のみを考えれば良い。$\mathcal{S}$の状態方程式 (2.1) より，状態 x_f へ整定可能であるための必要十分条件は，

$$x_f = Ax_f + Bu_f \quad \text{i.e.} \quad (I_n - A)x_f = Bu_f \qquad (2.47)$$

を満足する入力 $u_f \in \mathcal{V}^m$ が存在することである。したがって，任意な目標状態に対しては，$\text{range}[(I_n - A)] \subset \mathcal{B}$ となることが必要十分である。

(v) 初期状態 $x(0) = x_0$ および目標状態 x_f に対して，$x(k) = x_f$ とすることができるためには，$\mathcal{S}$の状態方程式（2.1）より，

$$x_f - A^k x_0 = Bu(k-1) + ABu(k-2) + \cdots + A^{k-1}Bu(0) \qquad (2.48)$$

を満足する入力列 $\{u(\bullet)\}_0^{k-1}$ が存在すること，すなわち，

$$x_f - A^k x_0 \in \mathcal{Z}_k \qquad (2.49)$$

となることが必要十分である。初期状態 x_0 および目標状態 x_f を任意としたとき，$x_f - A^k x_0$ は状態空間全体を張るから，$\mathcal{Z}_k = \mathcal{V}^n$ が必要十分条件である。その最短時間性を与える関係式は上の（2.49）式より明らかである。

(vi) (iv)の証明と同じく制御の条件と整定の条件とを分離して考えれば良いから，完全可制御性の条件と可整定性の条件とを組合せたものが完全可整定性の条件となる。最短時間性については制御の最短時間性のみを考えれば良いから，完全可制御性のそれと同じである。

(vii) および (viii)： 補題 2.2 の (i) および (ii) より，$y(k) = 0$ または $y(k+\alpha) = 0$ とすることは，それぞれ $x(k) \in \mathcal{N}$ または $x(k+\alpha) \in \mathcal{N}^*$ とすることと等価であるから，これらの条件は明らかである。

(ix) $x(0) = 0$ から $y(k) = y_f$ とすることができるためには，次の関係，

$$\begin{aligned} y_f = y(k) &= Cx(k) \\ &= CA^k x(0) + CBu(k-1) + CABu(k-2) + \cdots + CA^{k-1}Bu(0) \\ &= C\{Bu(k-1) + ABu(k-2) + \cdots + A^{k-1}Bu(0)\} \qquad (2.50) \\ \therefore\ y_f &\in C\mathcal{Z}_k \quad \text{または} \quad C^{-1}y_f \in \mathcal{Z}_k \qquad (2.51) \end{aligned}$$

の成立することが必要十分であり，目標値 $y_f \in \mathcal{V}^m$ を任意としたときは $C\mathcal{Z}_\delta = \mathcal{V}^m$ なる関係の成立することが必要十分である。これが（2.40）式と等価であること，および最短時間性については明らかである。

(x) 制御と整定とは分離して考えることが可能であるから，整定の条件を求めて (ix) の結果と組合せれば良い。出力を目標値 y_f へ整定するためには，

$$y_f = Cx_e = Cx'_e \qquad (2.52)$$

$$y_f = Cx'_e = CAx_e + CBu_e \qquad (2.53)$$

を満足する状態 x_e および入力 u_e の存在することが必要十分である。

したがって，任意な目標値 $y_f \in \mathcal{Y}^m$ に対しては（2.44）式の関係が得られる。

(xi) 初期状態 x_0 および目標値 y_f に対して，$y(k) = y_f$ とすることができるためには，(ix) の証明の（2.51）式により，

$$y_f - CA^k x_0 \in C\mathcal{Z}_k \qquad (2.54)$$

なる関係の成立することが必要十分である。したがって，x_0 および y_f を任意とすれば，$y_f - CA^k x_0$ は $\mathcal{Y}^m$ 全体を張るから，$\mathcal{Q}$ が出力可到達であることが求める必要十分条件となる。さらに，その最短時間性については（2.54）式の関係より明らかである。

(xii) この条件は (x) および (xi) の証明より明らかである。

（証明終）

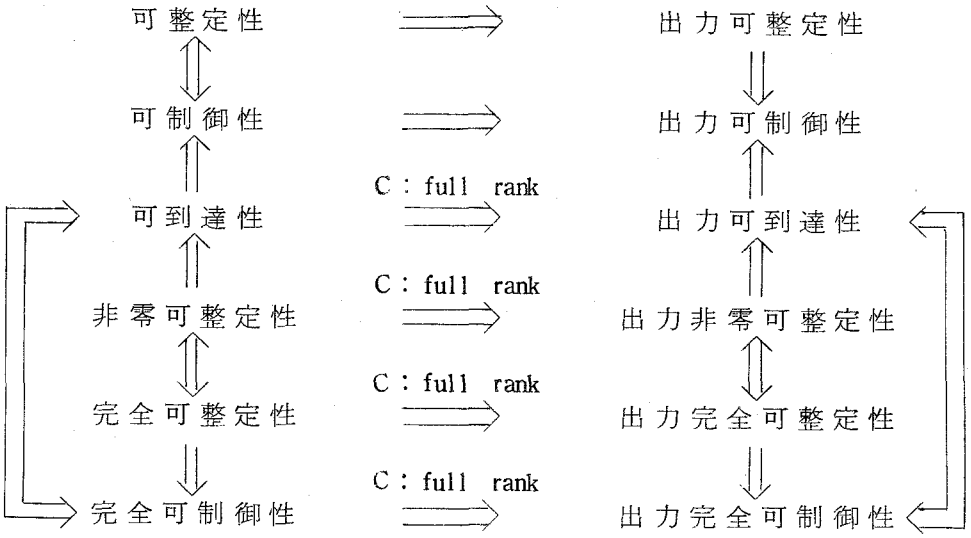

図2.1　制御可能性の条件の関係

この定理の結果を総括すると次のようになる。(i) および (ii) より可制御性と可整定性とは全く等価であることがわかるが，これは目標となる空間 $\{0\}$ がそれ自身補題2.1の (iii) の整定条件を満足する整定空間となっているからである。したがって，可制御性と可整定性とを特に区別する必要はなく，これまでにも区別されたことはなかった。ここでは，単に出力の制御可能性と対応さ

せるために可整定性と言う概念を導入しているに過ぎない。(iv)の非零可整定性の条件は極めて厳しい条件であると言わねばならない。実際に整定する必要があるのは制御量である出力であり，このようにすべての状態について整定する必要があると言う状況は生じないと考えて良い。(vii)の出力可制御性と(viii)の出力可整定性との違いは目標の空間 $\mathcal{N}$ と $\mathcal{N}^*$ との違いによる。もちろん，工学的に有用なのは出力可整定性の方であり，この $\mathcal{N}^*$ の大きさが状態を制御するのと出力を制御するのとの差となって表われる。本論文では制御量である出力を直接対象とした設計を行なうことによって，制御量に対する最短時間性を満足させようとする。

以上の結果を整理すると図2.1のようになる。

第2.4節　観測に対する可能性と最短時間性

この節では線形離散時間システム $\mathcal{S}$ の状態またはその線形関数の観測に対する可能性と最短時間性について考察する。まず，観測可能性を評価する定義を与えるが，制御に対する可能性の場合と同じく次の点に注意する必要がある。一般的な線形離散時間システムを観測対象としているから，その状態遷移行列の正則性は保証されておらず，現時点の状態を観測する場合と過去の時点のそれを観測する場合とを区別しなければならない。この点と有限な長さの入出力列によって観測を行なう点を考慮して，システム $\mathcal{S}$ の観測可能性を評価する定義を次のように与える。

〈定義2.3〉　$\mathcal{S}$ の観測可能性

長さ ω の入出力列 $(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{\omega})$ により，時点 k の状態 $x(k)$ (または線形関数 $Hx(k)$)が決定可能であることを次のように表わす。

$$(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{\omega}) \rightarrow x(k)\ \ (\text{または，}\ Hx(k)) \qquad (2.55)$$

(i)　「$\mathcal{S}$ は可決定 (determinable) である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{\omega}) \rightarrow x(\omega)\ ,\quad \omega < \infty$$

(ii)　「$\mathcal{S}$ は可観測 (observable) である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{\omega} \rightarrow x(0)$$

(iii)　「$\mathcal{S}$ は完全可観測 (completely observable) である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$

$$(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{\omega}) \rightarrow x(k)\ ,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ \omega$$

(iv) 「$\mathcal{S}$はH－可決定（H－determinable）である（$H \in \mathcal{V}^{\eta \times n}$）。」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$
$\left(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1}, \{y(\bullet)\}_0^{\omega} \right) \rightarrow Hx(\omega)$

(v) 「$\mathcal{S}$はH－可観測（H－observable）である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$
$\left(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1}, \{y(\bullet)\}_0^{\omega} \right) \rightarrow Hx(0)$

(vi) 「$\mathcal{S}$はH－完全可観測（H－completey observable）である」 $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$
$\left(\{u(\bullet)\}_0^{\omega-1}, \{y(\bullet)\}_0^{\omega} \right) \rightarrow Hx(k) \qquad k = 0, 1, \cdots, \omega$

（注意：線形離散時間システムの観測可能性に対する語句の用法はまだ確定しているとは言えない。L. Weiss [46] は(i)の場合を“completely determinability”，(ii)の場合を“completely observability”と呼び，R. E. Kalman [17),44)] は(i)の場合を“completely reconstructability”，(ii)および(iii)の場合を“completely observability”と呼んでいる。ここでは制御可能性の定義に対応させた形で，(iii)の場合にのみ“completely”という語を付けている [47]。線形関数の観測に対する語句の用法は池田雅夫等 [36] および著者等 [37] が状態の場合に対応させて導入したものである。）

観測の問題においては観測誤差を零に整定する問題だけを考えれば良いから，観測可能性の定義は制御の場合よりも簡単になる。これらの定義を観測量と時点に関して整理すると表2.2のようになる。

表2.2　観測時点による観測可能性の分類

名　称	観測量と時点
可決定性	$x(\omega)$
可観測性	$x(0)$
完全可観測性	$x(k)$, $k \in \underline{\omega}$

名　称	観測量と時点
H可決定性	$Hx(\omega)$
H可観測性	$Hx(0)$
H完全可観測性	$Hx(k)$, $k \in \underline{\omega}$

観測問題は制御問題の双対問題であるから [44)]，制御問題における各時点毎の制御可能な空間（k可制御空間，k出力可整定空間など）は，観測問題においては各時点における観測不可能な空間に対応する [27)]。この観測不可能な空間を観測可能性の定義に対応させて次のように導入する。

〈定義2.4〉

時点kにおけるシステムの状態 $x(k)$ を次のように表わす。

$$\left.\begin{aligned} &x(k) = V_1 x_1(k) + V_2 x_2(k) \\ &V_1 \triangleq \text{base}\,[\mathcal{V}_1], \quad V_2 \triangleq \text{base}\,[\mathcal{V}_2], \quad \mathcal{V}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.56)$$

(i) $\left(\{u(\bullet)\}_0^{k-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{k}\right) \not\gg x_1(k)$ 注

を満足する最小の部分空間を k 非可決定空間と言い，$\mathcal{N}_k$ で表わす。

(ii) $\left(\{u(\bullet)\}_0^{k-1},\ \{y(\bullet)\}_0^{k}\right) \not\gg x_1(0)$ 注

を満足する最小の部分空間を k 非可観測空間と言い，$\mathcal{M}_k$ で表わす。

まえがきにおいて述べたように線形離散時間システムの最大の特長はこれらの各時点毎の観測不可能な空間が容易に求められることにある。このことを次の補題で示すが，これはシステム$\mathcal{S}$の観測可能性に対する基本的な結果である。

〈補題 2.3〉

(i) システム$\mathcal{S}$に対する k 非可決定空間$\mathcal{N}_k$ は次の繰返し関係で与えられる。

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{k+1} = A\mathcal{N}_k \cap \mathcal{N} \\ \mathcal{N}_0 = \mathcal{N} = \mathrm{null}[C] \end{cases} \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \qquad (2.57)$$

または，繰返し関係によらないで次式で求めることもできる。

$$\mathcal{N}_k = A^k \bullet \mathrm{null}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix}, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \qquad (2.58)$$

特に，状態遷移行列 A が正則のときは次式で求めることもできる。

$$\mathcal{N}_k = \mathrm{null}\begin{bmatrix} C \\ CA^{-1} \\ \vdots \\ CA^{-k} \end{bmatrix}, \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \qquad (2.59)$$

(ii) k 非可決定空間$\mathcal{N}_k$は次の包含関係を満足する。

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \underset{+}{\supset} \mathcal{N}_1 \underset{+}{\supset} \mathcal{N}_2 \underset{+}{\supset} \cdots \underset{+}{\supset} \mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_{\nu+1} = \cdots \qquad (2.60)$$

この関係を満足する ν ($\leq n$) および$\mathcal{N}_\nu$ を それぞれ$\mathcal{S}$の可決定性指数および非可決定空間と呼ぶ。

非可決定空間$\mathcal{N}_\nu$ は次の関係を満足する。

$$A\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\nu \qquad (2.61)$$

脚注：入出力列 ($\{u(\bullet)\}$, $\{y(\bullet)\}$) によって k 時点の状態 $x(k)$ の (2.76) 式を満足する部分空間 $\mathcal{V}_1$ に関する成分 $x_1(k)$ が決定不可能であることをこのように表わす。

(iii)　システム$\mathcal{S}$に対するk可観測空間$\mathcal{M}_k$は次式で与えられる。

$$\mathcal{M}_k = \mathrm{null}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} \qquad k = 0, 1, \cdots \qquad (2.62)$$

(iv)　k非可観測空間$\mathcal{M}_k$は次の包含関係を満足する。

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_0 \supsetneq \mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}_{\gamma+1} = \cdots \qquad (2.63)$$

この関係を満足するγ（$\leq n$）および$\mathcal{M}_\gamma$をそれぞれ$\mathcal{S}$の可観測性指数および非可観測空間と呼ぶ。非観測空間$\mathcal{M}_\gamma$は次の関係を満足する。

$$A\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma \qquad (2.64)$$

（証明）　(i)および(ii)　数学的帰納法を用いて証明する。k＝0について，$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ および $\mathcal{N}_0 \supset A\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}$ が成立することを示す。$\mathcal{N}$を含む任意な部分空間を$\mathcal{V}_1$とし，その任意な補空間を$\mathcal{V}_2$とすると，$x(0)$は，

$$\begin{cases} x(0) = V_{1\cdot0}\, x_{1\cdot0}(0) + \tilde{V}_{1\cdot0}\, \tilde{x}_{1\cdot0}(0) + V_{2\cdot0} x_{2\cdot0}(0) \\ \mathcal{V}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \mathcal{N} \oplus \tilde{\mathcal{V}}_{1\cdot0} \oplus \mathcal{V}_{2\cdot0}, \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{N} \oplus \tilde{\mathcal{V}}_{1\cdot0} \\ V_{1\cdot0} \triangleq \mathrm{base}[\mathcal{N}], \quad \tilde{V}_{1\cdot0} \triangleq \mathrm{base}[\tilde{\mathcal{V}}_{1\cdot0}], \quad V_{2\cdot0} \triangleq \mathrm{base}[\mathcal{V}_{2\cdot0}] \end{cases}$$

と書ける。システム$\mathcal{S}$の出力方程式（2.2）および $\mathcal{N} \triangleq \mathrm{null}[C]$より，

$$\{y(0)\} \not\rightarrow x_{1\cdot0}(0), \quad (\{y(0)\}) \rightarrow \tilde{x}_{1\cdot0}(0), x_{2\cdot0}(0)$$

となることは明白である。したがって，$\mathcal{N}$を含む任意な部分空間は すべて定義2.4の(i)の性質を満足する空間となり，その最小のものは$\mathcal{N}$自身，すなわち，$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$である。この結果より，$\mathcal{N}_0 \supset A\mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}$ は明らかに成立する。k＝βについて成立する，すなわち，$\mathcal{N}_\beta$が定まり，$\mathcal{N}_\beta \supset A\mathcal{N}_\beta \cap \mathcal{N}$ が成立すると仮定して，k＝β＋1について，$\mathcal{N}_{\beta+1} = A\mathcal{N}_\beta \cap \mathcal{N}$ および $\mathcal{N}_{\beta+1} \supset A\mathcal{N}_{\beta+1} \cap \mathcal{N}$ が成立することを示す。状態$x(\beta)$は，

$$\begin{cases} x(\beta) = V_{1\cdot\beta}\, x_{1\cdot\beta}(\beta) + V_{2\cdot\beta} x_{2\cdot\beta}(\beta) \\ \mathcal{V}^n = \mathcal{N}_\beta \oplus \mathcal{V}_{2\cdot\beta}, \quad V_{1\cdot\beta} \triangleq \mathrm{base}[\mathcal{N}_\beta], \quad V_{2\cdot\beta} \triangleq \mathrm{base}[\mathcal{V}_{2\cdot\beta}] \\ (\{u(\bullet)\}_0^{\beta-1}, \{y(\bullet)\}_0^{\beta}) \not\rightarrow x_{1\cdot\beta}(\beta), \quad (\{u(\bullet)\}_0^{\beta-1}, \{y(\bullet)\}_0^{\beta}) \rightarrow x_{2\cdot\beta}(\beta) \end{cases}$$

と書ける。β＋1時点においては新たに，$(u(\beta), y(\beta+1))$が入出力データとして加わるが，この新らしいデータを用いて決定可能な状態の成分を求

める。

システム$\mathcal{S}$のシステム方程式より，$x(\beta+1)$は次のようになる。

$$x(\beta+1)=A\,V_{1\cdot\beta}\,x_{1\cdot\beta}(\beta)+A\,V_{2\cdot\beta}\,x_{2\cdot\beta}(\beta)+B\,u(\beta)$$

さらに，次のような部分空間とその基底列ベクトルで構成される行列，

$$\text{range}\,[AV_{1\cdot\beta}]=A\mathcal{N}_\beta=\mathcal{V}_{1\cdot(\beta+1)}\oplus\widetilde{\mathcal{V}}_{1\cdot(\beta+1)},\quad \mathcal{V}_{1\cdot(\beta+1)}\triangleq A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}$$

$$V_{1\cdot(\beta+1)}\triangleq\text{base}[\mathcal{V}_{1\cdot(\beta+1)}],\quad \widetilde{V}_{1\cdot(\beta+1)}\triangleq\text{base}[\widetilde{\mathcal{V}}_{1\cdot(\beta+1)}]$$

を用意すると，$AV_{1\cdot\beta}\,x_{1\cdot\beta}(\beta)$は次のように書ける。

$$AV_{1\cdot\beta}\,x_{1\cdot\beta}(\beta)=V_{1\cdot(\beta+1)}\,x_{1\cdot(\beta+1)}(\beta+1)+\widetilde{V}_{1\cdot(\beta+1)}\,\widetilde{x}_{1\cdot(\beta+1)}(\beta+1)$$

したがって，$\text{range}[V_{1\cdot(\beta+1)}]\subset\mathcal{N}$ なる関係を考慮すると，

$$y(\beta+1)=Cx(\beta+1)=C\widetilde{V}_{1\cdot(\beta+1)}\,\widetilde{x}_{1\cdot(\beta+1)}(\beta+1)+CA\,V_{2\cdot\beta}(\beta)+CB\,u(\beta)$$

となる。β時点で既に$x_{2\cdot\beta}(\beta)$は決定されているから，結局新しい入出力データ（$u(\beta)$，$y(\beta+1)$）が加わったことにより，$\widetilde{x}_{1\cdot(\beta+1)}(\beta+1)$は決定できるが，$x_{1\cdot(\beta+1)}(\beta+1)$は決定不可能である。したがって，$A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}$ を含むすべての空間は定義2.4の（i）の性質を満足する時点$(\beta+1)$で決定不可能な部分空間であり，その最小のものは$A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}$ 自身である。以上で$\mathcal{N}_{\beta+1}=A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}$ が示された。次に，$k=\beta$ についての仮定およびこの結果より，$\mathcal{N}_\beta\supset A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}=\mathcal{N}_{\beta+1}$ となるから，$\mathcal{N}_{\beta+1}=A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}\supset A\mathcal{N}_{\beta+1}\cap\mathcal{N}$ が成立する。

したがって，任意なkについて，$\mathcal{N}_{k+1}=A\mathcal{N}_k\cap\mathcal{N}$，$\mathcal{N}_0=\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}_k\supset\mathcal{N}_{k+1}$ が成立する。もし，$\mathcal{N}_k=\mathcal{N}_{k+1}$ ならば，$\mathcal{N}_{k+2}=A\mathcal{N}_{k+1}\cap\mathcal{N}=A\mathcal{N}_k\cap\mathcal{N}=\mathcal{N}_k$ となり，以下同様にして $\mathcal{N}_{k+\alpha}=\mathcal{N}_k$ $\alpha\geq 0$ が言えるから，（ii）の（2.60）式の包含関係が成立する。さらに，$\mathcal{N}_{\nu+1}=A\mathcal{N}_\nu\cap\mathcal{N}=\mathcal{N}_\nu$ より，（2.61）式の関係が成立する。行列Aのサイズがnであることより，$\nu\leq n$ は明らかである。

次に，（2.57）で与えられる$\mathcal{N}_k$が（2.58）で与えられるものに等しいことを示す。数学的帰納法を用いる。$k=0$について両者は明らかに等しい。

$k=\beta$ について成立すると仮定すると，$k=\beta+1$ について，

$$\mathcal{N}_{\beta+1}=A\mathcal{N}_\beta\cap\mathcal{N}=A\cdot A^{\beta}\cdot \mathrm{null}\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{\beta}\end{bmatrix}\cap\mathcal{N}=A^{\beta+1}\mathrm{null}\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{\beta+1}\end{bmatrix}\quad(2.65)$$

となり，成立することが示される。したがって，任意なkについて両者は等しい。最後に行列Aが正則ならば，任意な行列 $X\in\mathcal{V}^{t\times n}$ に対して次の関係，

$$A^{\alpha}\ \mathrm{null}\,[X]=\mathrm{null}\,[XA^{-\alpha}]\quad(2.66)$$

が成立することから，(2.62)式の関係が成立する。

(ⅲ)および(ⅳ)：$\mathcal{S}$のシステム方程式より，

$$\begin{bmatrix}y(0)\\y(1)\\\vdots\\y(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{k}\end{bmatrix}x(0)+\begin{bmatrix}0\\CBu(0)\\\vdots\\CA^{k-1}Bu(0)+\cdots+CBu(k-1)\end{bmatrix}\quad(2.67)$$

となるから，(2.62)の関係は明らかである。さらに，(2.62)で与えられる$\mathcal{M}_k$は明らかに(2.63)式の包含関係を満足する。行列Aのサイズがnであるから，$\gamma\leq n$ は明らかである。最後に，(2.64)式の関係も簡単な計算により成立することが示される。

(証明終)

このように各時点毎の観測不可能な空間($\mathcal{N}_k$および$\mathcal{M}_k$)が明確に定まることが線形離散時間システムの観測問題における最大の特長であり，これをもとに観測に対する可能性と最短時間性を次のように明らかにすることができる。

〈定理2.2〉

(ⅰ) $\mathcal{S}$が可決定であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{N}_\nu=\{0\}\quad(2.68)$$

$\mathcal{S}$が可決定であるとき，現時点の状態を誤差なく決定できるために必要な最小の観測ステップ数はνである。

(ⅱ) $\mathcal{S}$が可観測であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{M}_\gamma=\{0\}\quad(2.69)$$

$\mathcal{S}$が可観測であるとき，初期時点の状態を誤差なく決定するのに必要な最小の観測ステップ数はγである。

(iii) $\mathcal{S}$が完全可観測であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$が可観測となることであり，このとき初期時点から現時点までの任意な時点の状態を誤差なく決定するのに必要な最小の観測ステップ数はγである。

(iv) $\mathcal{S}$がH－可決定であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$H\mathcal{N}_\nu = \{0\}, \quad \text{または} \quad \text{null}[H] \supset \mathcal{N}_\nu \qquad (2.70)$$

$\mathcal{S}$がH－可決定であるとき，現時点の状態の線形関数を誤差なく決定するのに必要な最小の観測ステップ数ν_Hは次式で与えられる。

$$\nu_H \triangleq \min\{k \mid H\mathcal{N}_k = \{0\}\} \leq \nu \qquad (2.71)$$

(v) $\mathcal{S}$がH－可観測であるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$H\mathcal{M}_\gamma = \{0\} \quad \text{または} \quad \text{null}[H] \supset \mathcal{M}_\gamma \qquad (2.72)$$

$\mathcal{S}$がH－可観測であるとき，初期時点の状態の線形関数を誤差なく決定するのに必要な最小の観測ステップ数γ_Hは次式で与えられる。

$$\gamma_H \triangleq \min\{k \mid H\mathcal{M}_k = \{0\}\} \qquad (2.73)$$

(vi) $\mathcal{S}$がH－完全可観測であるための必要十分条件は，$\mathcal{S}$がH－可観測となることであり，このとき初期時点から現時点までの任意な時点での線形関数を誤差なく決定するのに必要な最小の観測ステップ数はγ_Hである。

(証明) (i)および(ii)：$\mathcal{N}_k$および$\mathcal{M}_k$の定義より明らかである。

(iii) 初期時点の状態$x(0)$が決定できれば入力列$\{u(\bullet)\}_0^{k-1}$は既知であるから，$\mathcal{S}$のシステム方程式(2.1)より，すべての時点の状態が決定できる。

(iv)～(vi)：$\mathcal{G} \triangleq \text{null}[H]$およびその任意な補空間を$\bar{\mathcal{G}}$とする。

$$Hx(k) = H\{\bar{\theta}_H \bar{x}_H(k) + \theta_H x_H(k)\} = H\bar{\theta}_H \bar{x}_H(k) \qquad (2.74)$$

$$\theta_H \triangleq \text{base}[\mathcal{G}], \quad \bar{\theta}_H \triangleq \text{base}[\bar{\mathcal{G}}]$$

となるから，$\mathcal{G}$の補空間$\bar{\mathcal{G}}$の成分$\bar{x}_H(k)$が決定できれば$Hx(k)$は決定できる。したがって，$\mathcal{G}$が$\mathcal{N}_k$または$\mathcal{M}_k$に含まれることが，それぞれ$Hx(k)$または$Hx(0)$が誤差なく決定できるための必要十分条件となる。観測に対する最短時間性については明らかである。

(証明終)

観測可能性に対する以上の結果を整理すると次のようになる。

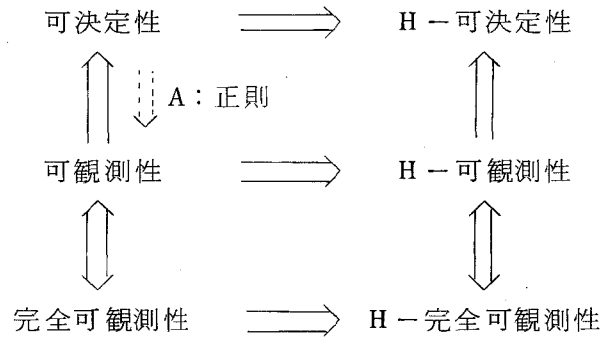

図2.2　観測可能性に対する条件の関係

第2.5節　あとがき

この章では「問題1」の線形離散時間システムの制御および観測に対する可能性と最短時間性について考察した。まず，状態遷移行列の正則性が保証されていない点を考慮して制御および観測の可能性を評価する定義を整理して導入した。次に，システムがこれらの性質を持つための条件を線形離散時間システムの最大の特長である各時点毎の制御可能な空間および観測不可能な空間を用いて幾何学的に表現した。これらの幾何学的な条件は従来から知られている代数的な条件と等価である。さらに，これらの幾何学的条件を用いて制御および観測における最短時間性を明確にした。代数的な条件ではそれを最短時間性と関連づけるのは困難であり，線形離散時間システムに対しては本章のように幾何学的に表現するのが最も自然であり，適切であると考えられる。

状態の線形関数に対する制御および観測の可能性と最短時間性についても考察したが，条件のゆるみおよび最短時間性の短縮は線形関数を構成する行列の零空間の大きさと位置に関係する。システムの制御量は出力であり，その最短時間性は状態のそれよりも短いことは明らかである。したがって，制御量に対する最短時間性を満足する真の最短時間制御システムを得るためには，出力を直接対象とした設計を行なわねばならないことがわかる。このように，この章で得られた結果は最短時間制御システムおよび最短時間観測システムが設計可能であるための条件を与え，かつ設計されたシステムの最短時間性を保証するものであり，その意味で本章は以下の章での考察の準備となる章であると言える。

最後に，この章では各時点毎の制御可能な空間および観測不可能な空間を求めるための具体的な計算手法については触れなかったが，状態遷移行列Aが非

正則なときも一般化逆行列（ generalized inverse matrix ）[54),55)] を用いればこれらの空間を求めることができる。一般化逆行列を求めるときの数値解析上の問題[56)]については本論文の範囲外の問題である。

第3章　状態フィードバック最短時間制御問題

第3.1節　まえがき

この章では「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題について考察する。すなわち，システムの状態または出力を任意に与えられた初期状態から最短時間で零に整定するような状態フイードバック最短時間制御システムを設計する問題である。このような最短時間制御システムを設計するとき，まず問題となるのは設計の対象とする変数を状態とするか出力とするかと言う問題である。明らかに制御量はシステムの出力であり，これを最短時間で零に整定するのが最短時間制御の目的である。しかも，状態を制御することにより間接的に出力を制御するよりも，直接出力を制御する方が最短時間性の点でより優れた制御が可能であることは前章の結果より明らかである。したがって，当然出力を直接対象とする設計が望ましいと言える。それにもかかわらず，状態を対象とした最短時間制御システムの設計が古くから現在に至るまで多く行なわれてきている[57]。この理由は，(i)状態を対象とした方が問題の理論的解析が容易である，および(ii)出力を対象として設計されたシステムの安定性は必らずしも保証されないのに対し[35),58),59)]，状態を対象とした場合は必然的に安定なシステムが得られる[15)]，にあると考えられる。本論文の究極の目的は出力フィードバックによる出力最短時間制御システムの構成であるが，その準備段階として状態フィードバックが可能であるという仮定のもとで，制御量を出力とした最短時間制御システムの設計問題を考察する。このとき前章で求めた制御量の出力に対する最短時間性を厳密に追求するとともに，システムの安定性についても同時に考察する。出力を対象として設計した最適制御システムの安定性については連続時間システムを対象にして詳しく考察されているが[58),59)]，離散時間システムの最短時間制御については著者等[33),72)]がこれを解決した。

状態フィードバックが可能であるという状況は最短時間制御システムの設計には理想的なものであり，与えられた初期状態に対する最短時間性を満足するような形で出力を零に整定し，かつ安定な最短時間制御システムを設計することができる。本章ではこのことを次のような順序で明らかにする。まず第3.2節では「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題を，「問題2A」すべての（状態フィードバック）最短時間制御ゲインを求める問題と「問題2B」

その最短時間制御ゲインの中から安定なフィードバックシステムを構成するものを求める問題,との二つの問題にわけて定式化する。次に，第3.3節では前章で導入したk出力可整定空間を基礎にして「問題2A」および「問題2B」について考察し，その解を明らかにする。第3.4節では簡単な例題を用いて得られた結果を検証する。

（本章の内容は「公表文献表」（pp. ⅲ ）中の(1), (2), (3), (7), (9)に依っている。）

第3.2節　問題の記述

この節では「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題を次の二つの問題に分て定式化する。一つは与えられた初期状態の最短時間性を満足するような状態フィードバック最短時間制御ゲインをすべて求める問題（「問題2A(A')」）であり，他の一つはその中から安定なフィードバックシステムを構成するものを求める問題（「問題2B」）である。

まず，問題を定式化する準備として，線形離散時間システム$\mathcal{S}$において状態フィードバックが可能であるとし，これに任意なゲイン（行列）$F \in \mathcal{V}^{r\times n}$を用いて次のような状態フィードバック制御法則，

$$u(k) = Fx(k) \qquad k = 0, 1, \cdots \qquad (3.1)$$

を施して構成した状態フィードバックシステムを用意し，これを$\mathcal{S}(F, I_n)$で表わす（図3.1参照）。$\mathcal{S}$のシステム方程式（2.1），（2.2）式および状態フィードバック制御法則（3.1）式より，状態フィードバックシステム$\mathcal{S}(F, I_n)$のシステム方程式は次のように与えられる。

$$\mathcal{S}(F, I_n) \quad \begin{cases} x(k+1) = (A+BF)\,x(k) & (3.2) \\ y(k) = Cx(k) \qquad k = 0, 1, \cdots & (3.3) \end{cases}$$

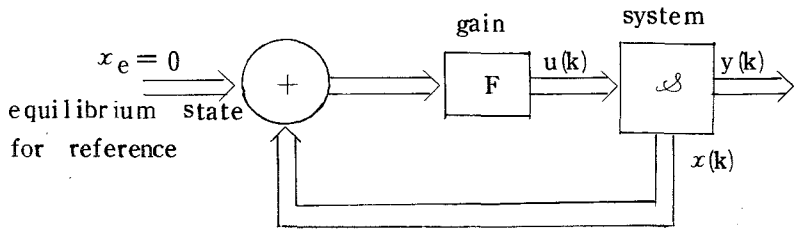

図3.1　状態フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, I_n)$

この状態フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, I_n)$ を用いて，まず「問題２」状態フィードバック最短時間制御問題の最初の問題を次のように定式化する。

「問題２Ａ：最短時間制御ゲインを求める問題」

状態フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, I_n)$ において，任意に与えられた初期状態 $x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n$ に対し，定理2.1の(viii)で与えられる最小の制御ステップ数 $t(x_0, \mathcal{N}^*) \triangleq \min\{k \mid x_0 \in \mathcal{X}_k\}$ で出力を零に整定する，すなわち，$y\{t(x_0, \mathcal{N}^*)+\alpha\} = 0 \quad \forall\, \alpha \geq 0$ とするような状態フィードバック最短時間制御ゲイン F^*（以下単に最短時間制御ゲインと呼ぶ）を求めよ。

この問題を前章で導入したk出力可整空間 $\mathcal{X}_k$ を用いて考察しようとしているから，状態空間における等価な問題としてこの問題を書き換える必要があり，これを行なった結果が次の「問題２Ａ′」である。

「問題２Ａ′：最短時間制御ゲインを求める問題」

線形離散時間システム $\mathcal{S}$ に対して，

$$F^*: \quad (A+BF^*)\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_{i-1} \qquad i = 1, 2, \cdots, \mu \qquad (3.4)$$

$$(A+BF^*)\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_0 \qquad (3.5)$$

を満足する最短時間制御ゲイン F^* を求めよ。

「問題２Ａ」または「問題２Ａ′」の解である最短時間制御ゲイン F^* の集合を $\mathcal{F}^*$ で表で表わす。すなわち，

$$\mathcal{F}^* \triangleq \{F^* \in \mathcal{V}^{r\times n} \mid (3.4), (3.5)\text{式を満足する。}\} \qquad (3.6)$$

上の二つの問題が等価であることを次に示しておく。

〈補題3.1〉

「問題２Ａ」と「問題２Ａ′」とは等価である。

（証明） 補題2.2より，$y(t^*+\alpha) = 0$，$t^* \triangleq t(x_0, \mathcal{N}^*) \quad \forall\, \alpha \geq 0$ は，$x(t^*+\alpha) \in \mathcal{N}^* \quad \forall\, \alpha \geq 0$ と等価である。$\mathcal{S}(F, I_n)$ のシステム方程式（3.2）より，$x(k) = (A+BF)^k x(0)$ であるから，$\mathcal{S}(F^*, I_n)$ において $x(t^*+\alpha) \in \mathcal{N}^* \quad \forall\, \alpha \geq 0$ となるための必要十分条件は，

$$(A+BF^*)^i \mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \mu \qquad (3.7)$$

が成立することである。上式の関係は明らかに，

$$(A+BF^*)^i \mathcal{X}_i = (A+BF^*)^{i-1}\{(A+BF^*)\mathcal{X}_i\} \subset \mathcal{N}^* \quad i \in \underline{\mu \diagup 0} \qquad (3.8)$$

$$(A+BF^*)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0 \qquad (3.9)$$

と書き直すことができるから，（3.7）式の関係が成立するためには，

$$(A+BF^*)\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_{i-1} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu \qquad (3.10)$$

となることが必要十分である。したがって，「問題２Ａ」と「問題２Ａ′」とは等価である。

（証明終）

以下では「問題２Ａ」と「問題２Ａ′」とを特に区別はしないで用いることにする。　この「問題２Ａ」の解である最短時間制御ゲインの集合$\mathcal{F}^*$の中から，状態フィードバック最短時間制御システム$\mathcal{S}(F^*,\ I_n)$を安定にするものを求めようとするのが二つ目の問題である。

「問題２Ｂ：最短時間制御システムの安定化問題」

次の性質を満足する最短時間制御ゲイン $F^* \in \mathcal{F}^*$を求めよ。

$$|\lambda_\tau[(A+BF^*)]| < 1 \qquad \tau=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (3.11)$$

ここで，$\lambda_\tau[(A+BF^*)]$はシステム$\mathcal{S}(F^*,\ I_n)$の状態遷移行列$(A+BF^*)$の固有値であり，重複度を含めて数えるものとする。

第3.3節　状態フィードバック最短時間制御システムの設計

この節では，まず「問題２Ａ」の最短時間制御ゲインを求める問題を考察する。次にその結果をもとに「問題２Ｂ」の安定な最短時間制御システムを構成する問題を考察し，これが前者の結果の拡張として容易に解決できることを明らかにする。まず「問題２Ａ」について考察するが，前章におけるシステム$\mathcal{S}$の制御可能性に対する定義（定義2.1の（ⅣＢ））および結果（定理2.1の（Ⅷ））より，任意に与えられた初期状態から有限時間で出力を零に整定できるための必要十分条件は，「システム$\mathcal{S}$が出力可整定である」ことである。したがって，状態フィードバック最短時間制御システムを設計しようとしている制御対象のシステム$\mathcal{S}$に対しては少くなくとも次の仮定が成立しなければならないことは明らかである。

〈仮定１：制御の仮定〉

システム$\mathcal{S}$は出力可整定である。すなわち，$\mathcal{K}_\mu = \mathcal{V}^n$。　　（3.12）

この仮定はシステム$\mathcal{S}$に対する基本的な仮定であり，本論文全体を通して成立するものとする。この仮定は「問題２Ａ」の解である最短時間制御ゲインが

存在するための必要条件となっていることは明らかであり，この仮定のもとで最短時間制御ゲインの存在が証明できれば，十分条件でもあることになる。このことを次に示すが，その前にこの仮定のもとで次の補題で与えられるアルゴリズムが常に実行可能であることを証明し，その後でこのアルゴリズムで与えられる行列が「問題2A」に対する解の最短時間制御ゲインであることを示す。この補題はまたk出力可整定空間の基本的性質を示すものである。

〈補題3.2〉

(i) システム$\mathcal{S}$が出力可整定ならば次のアルゴリズムは常に実行可能である。

「最短時間制御ゲインF^*を求めるアルゴリズム」(図3.2参照，pp.36)

「A1」 $i:=1$ とする。次の関係，

$$\mathcal{B}+\mathcal{K}_0 = \bar{\mathcal{B}} \oplus \bar{\mathcal{K}}_0 \quad (\supset A\mathcal{K}_1) \tag{3.13}$$

$$\bar{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}, \quad \bar{\mathcal{K}}_0 \subset \mathcal{K}_0 = \mathcal{N}^*$$
$$r \geq \rho \geq r-q, \quad \rho \triangleq \dim \bar{\mathcal{B}}, \quad q \triangleq \dim \mathcal{B} \cap \mathcal{N}^* \tag{3.14}$$

を満足する部分空間 $\bar{\mathcal{B}}$ および $\bar{\mathcal{K}}_0$ を求め，[注)] 次へ進む。

「A2」 $i=\mu$ ならば，「A4」へ飛ぶ，さもなければ次の関係，

$$\mathcal{B}+\mathcal{K}_i = (\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1}) \oplus \bar{\mathcal{K}}_i \quad (\supset A\mathcal{K}_{i+1})$$
$$\{0\} \subsetneq \bar{\mathcal{K}}_i \subset \mathcal{K}_i \tag{3.15}$$

を満足する部分空間 $\bar{\mathcal{K}}_i \supsetneq \{0\}$ を求め，次へ進む。

「A3」 $i:=i+1$ として「A2」へもどる。

「A4」 次の関係を満足する $\bar{\mathcal{K}}_\mu$ を求め[注)]，次へ進む。

$$(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{\mu-1}) \oplus \bar{\mathcal{K}}_\mu = \mathcal{V}^n \tag{3.16}$$

「A5」 以上の過程で定ゆられた部分空間 $\bar{\mathcal{B}}$ および $\bar{\mathcal{K}}_i$，$i=0, 1, \cdots, \mu$ に対して，次の関係を満足する任意な行列ΓおよびΦを求める[注)]。

$$\bar{\mathcal{B}} \triangleq \text{range}\,[B\Gamma], \quad \Gamma \in \mathcal{V}^{r\times\rho} \quad (\text{または，} B\Gamma = \text{base}[\bar{\mathcal{B}}])$$
$$\text{null}\,[\Phi] = \bar{\mathcal{K}}_0 \oplus \bar{\mathcal{K}}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathcal{K}}_{\mu-1} \oplus \bar{\mathcal{K}}_\mu, \quad \Phi \in \mathcal{V}^{\rho\times n} \tag{3.17}$$

注：アルゴリズムの説明の便宜上，$\bar{\mathcal{B}} \supsetneq \{0\}$，$\bar{\mathcal{K}}_0 \supsetneq \{0\}$ および $\bar{\mathcal{K}}_\mu \supsetneq \{0\}$ と仮定するが，この仮定は必らずしも成立するとは限らない。もし，この中に$\{0\}$に等しいものがあれば，それに対応する行列を「A5」の段階ではずせば良い。極端な場合として，$F^*=0_{r\times n}$ の場合があり得るが，これについては後にくわしく述べる。これらの空間の関係を図3.2(pp.36)に示している。

この行列Γおよび$\mathcal{O}$に対して，（$\mathcal{O}B\Gamma$）は正則となり，最短時間制御ゲインF^*を次のように構成することができる。

$$F^* = -\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}A \qquad (3.18)$$

(ii)　(i)のアルゴリズムの過程で求められた部分空間$\bar{\mathcal{B}}$および$\bar{\mathcal{X}}_i$，$i=0, 1, \cdots, \mu$は次の関係を満足する。

$$\mathcal{V}^n = \bar{\mathcal{B}} \oplus \bar{\mathcal{X}}_0 \oplus \bar{\mathcal{X}}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathcal{X}}_\mu \qquad (3.19)$$

$$\left.\begin{aligned} A\mathcal{X}_i \subset \mathcal{B} + \mathcal{X}_{i-1} &= \bar{\mathcal{B}} \oplus \bar{\mathcal{X}}_0 \oplus \bar{\mathcal{X}}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathcal{X}}_{i-1} \\ & \qquad i = 1, 2, \cdots, \mu \\ A\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{B} + \mathcal{X}_0 &= \bar{\mathcal{B}} \oplus \bar{\mathcal{X}}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

$$\bar{\mathcal{X}}_0 \oplus \bar{\mathcal{X}}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\mathcal{X}}_i \subset \mathcal{X}_i \qquad i = 0, 1, \cdots, \mu \qquad (3.21)$$

（証明）　(i)および(ii)を同時にアルゴリズムの手順を追いながら証明する。仮定1より，$\mathcal{X}_\mu = \mathcal{V}^n$であり，さらに$\mathcal{N}^*$が(A, B)不変であるから補題2.1の(iii)より，次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}^* = \mathcal{X}_0 \overset{\subset}{+} \mathcal{X}_1 \overset{\subset}{+} \mathcal{X}_2 \overset{\subset}{+} \cdots \overset{\subset}{+} \mathcal{X}_\mu = \mathcal{V}^n \qquad (3.22)$$

「A 1」の段階では部分空間$\mathcal{B}+\mathcal{X}_0$を直和分割するだけであるから，(3.13)および(3.14)式を満足する$\bar{\mathcal{B}}$および$\bar{\mathcal{X}}_0$が存在することは明らかである。ただし，$\bar{\mathcal{B}}$および$\bar{\mathcal{X}}_0$の選び方には任意性があり，もし$\mathcal{B} \subset \mathcal{X}_0$ならば$\bar{\mathcal{B}} = \{0\}$とすることが，$\mathcal{B} \supset \mathcal{X}_0$ならば，$\bar{\mathcal{X}}_0 = \{0\}$とすることが可能である。次に「A 2」の段階を考える。まず，$\mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1} \overset{\subset}{+} \mathcal{B}+\mathcal{X}_i$，$i \in \underline{\mu-1 / 0}$となることを示す。(3.22)式の関係より，$\mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1} \subset \mathcal{B}+\mathcal{X}_i$は明らかである。もし，$\mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1} = \mathcal{B}+\mathcal{X}_i$ならば，補題2.1の(i)より，

$$\mathcal{X}_{i+1} = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{X}_i) = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1}) = \mathcal{X}_i$$

となり，しかも$i \leq \mu - 1$であるから，これは出力可整定性指数μの定義(補題2.1の(ii))に矛盾する。したがって，

$$\mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1} \overset{\subset}{+} \mathcal{B}+\mathcal{X}_i \qquad i = 1, 2, \cdots, \mu-1 \qquad (3.24)$$

となり，「A 2」の段階を満足する$\bar{\mathcal{X}}_i \overset{\supset}{+} \{0\}$　$i \in \underline{(\mu-1)/0}$の存在することが示せた。$\mathcal{B}+\mathcal{X}_{\mu-1} \overset{\subset}{+} \mathcal{V}^n$ならば仮定1により，「A 4」の段階で(3.16)式を満足する$\bar{\mathcal{X}}_\mu$を補なうことができる。したがって，$\mathcal{S}$が出力可整定であるとき，「A 1」から「A 4」の手順により，$\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{\mathcal{X}}_0$, $\bar{\mathcal{X}}_1$, $\cdots$, $\bar{\mathcal{X}}_\mu$を定めることができる。ただし，$\bar{\mathcal{X}}_i \overset{\supset}{+} \{0\}$，$i \in \underline{(\mu-1)/0}$で

あるが，$\overline{\mathcal{B}}$，$\overline{\mathcal{K}}_0$ および $\overline{\mathcal{K}}_\mu$ については｛0｝となる場合がある。$\overline{\mathcal{B}}$ および $\overline{\mathcal{K}}_i$，$i \in \underline{\mu}$ の関係を図示すると図3.2のようになる。

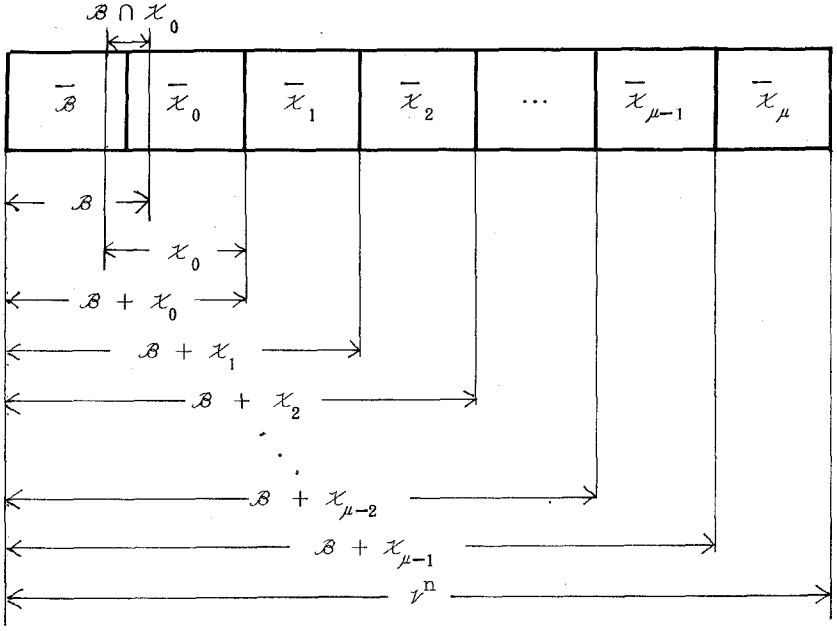

図3.2　部分空間$\mathcal{B}$，$\overline{\mathcal{B}}$，$\mathcal{K}_i$ および $\overline{\mathcal{K}}_i$ の関係

任意な部分空間$\mathcal{T}$の逆像空間 $A^{-1}\mathcal{T}$ に関しては次の関係が成立する[52)]。

$$A \cdot A^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \text{range}〔A〕 \qquad (3.26)$$

これに留意して(ii)の性質を次に証明する。

補題2.1の(i)より，$\mathcal{K}_i = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1})$ であるから，

$$A\mathcal{K}_i = A \cdot A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1} = (\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1}) \cap \text{range}〔A〕 \subset \mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1} \quad (3.27)$$

となる。他方，「A 1」から「A 4」までの $\overline{\mathcal{B}}$ および $\overline{\mathcal{K}}_i$，$i \in \underline{\mu}$ の定め方により，次の二つの関係式が明らかに成立する。

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^n = \mathcal{B}+\mathcal{K}_\mu &= (\mathcal{B}+\mathcal{K}_{\mu-1}) \oplus \overline{\mathcal{K}}_\mu = \{(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{\mu-2}) \oplus \overline{\mathcal{K}}_{\mu-1}\} \oplus \overline{\mathcal{K}}_\mu \\ &= \cdots = (\mathcal{B}+\mathcal{K}_0) \oplus \overline{\mathcal{K}}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{K}}_\mu \\ &= \overline{\mathcal{B}} \oplus \overline{\mathcal{K}}_0 \oplus \overline{\mathcal{K}}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{K}}_{\mu-1} \oplus \overline{\mathcal{K}}_\mu, \qquad (3.28) \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1} = (\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-2}) \oplus \mathcal{K}_{i-1} = \cdots = \overline{\mathcal{B}} \oplus \overline{\mathcal{K}}_0 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{K}}_{i-1}, \quad i \in \underline{\mu/0}。 \qquad (3.29)$$

(3.28)式は(3.19)式そのものである。さらに，(3.29)式の関係を(3.27)式に適用すると(3.20)式の関係が得られる。$\mathcal{K}_0 = \mathcal{N}^*$ は(A,B)

不変部分空間であるから，$A\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{B} + \mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{B}} \oplus \overline{\mathcal{X}}_0$ の関係は明らかである。次に，「A 1」から「A 4」の手順における $\overline{\mathcal{X}}_i$，$i \in \underline{\mu}$ の定め方より，$\overline{\mathcal{X}}_i \subset \mathcal{X}_i$，$i \in \underline{\mu}$ が成立し，さらに補題 2.1 の (iii) より，$\mathcal{X}_0 \overset{\subset}{+} \overset{\subset}{+} \mathcal{X}_1 \overset{\subset}{+} \cdots \overset{\subset}{+} \mathcal{X}_i$ であるから，(3.21) 式の関係が成立する。これで (ii) の性質はすべて証明された。

最後に「A 5」の段階で，(3.17) 式のように行列 Γ および $\mathcal{O}$ を定めると，

$$\mathcal{V}^n = \overline{\mathcal{B}} \oplus \overline{\mathcal{X}}_0 \oplus \overline{\mathcal{X}}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{X}}_\mu$$

$$\text{range}\,[B\Gamma] = \overline{\mathcal{B}},\quad \text{null}\,[\mathcal{O}] = \overline{\mathcal{X}}_0 \oplus \cdots \oplus \overline{\mathcal{X}}_\mu,\quad B\Gamma,\ \mathcal{O} : \text{full rank}$$

であるから，明らかに $(\mathcal{O}B\Gamma)$ は正則となり，行列 $-\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}A$ は常に存在する。ただし，$\overline{\mathcal{B}}$，$\overline{\mathcal{X}}_0$ および $\overline{\mathcal{X}}_\mu$ の中に $\{0\}$ に等しいものがあればそれを単に「A 5」の段階で除くだけで良い。

（証明終）

この補題のアルゴリズムで与えられる行列 $-\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}A$ が「問題 2A」の解である最短時間制御ゲインとなることを次に示すが，その前に $\overline{\mathcal{X}}_i$，$i \in \underline{\mu}$ の簡単な求め方を述べておく。まず，$X_i \triangleq \text{base}\,[\overline{\mathcal{X}}_i]$，$i \in \underline{\mu}$ を用意し，これを次のようにならべる。

$$B,\ X_0,\ X_1,\ \cdots,\ X_\mu \qquad (3.30)$$

この中から 1 次独立な列ベクトルを左から順番にえらび出すとき，行列 X_i からえらばれた列ベクトルで構成される行列を $\overline{X}_i$ で表わすと，$\overline{\mathcal{X}}_i = \text{range}\,[\overline{X}_i]$，$i \in \underline{\mu}$ となることは明らかであり，$\overline{\mathcal{X}}_i$ は容易に定められる。

次に「問題 2A」に対する基本的結果を示す。

〈定理 3.1〉

「問題 2A」の解である最短時間制御ゲインが存在するための必要十分条件は，　「〈仮定 1：制御の仮定〉システム $\mathcal{S}$ は出力可整定である。」が成立することであり，すべての最短時間制御ゲイン F^* は補題 3.1 のアルゴリズムで与えられる。

（証明）　問題 2A および定義 2.1 の (iv) より，仮定 1 が必要条件であることは明らかである。この仮定 1 のもとで最短時間制御ゲイン F^* が存在することを示せば，この仮定 1 が十分条件でもあることが示せる。そのためには，仮定 1 のもとで補題 3.2 のアルゴリズムが常に実行可能であるから，このアルゴリズムで与えられる (3.18) 式の行列が最短時間制御ゲインであることを示せ

ば良い。それを次に示すが,(3.18)式で与えられる行列をここでは,

$$\tilde{F}^* \triangleq -\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi A \qquad (3.31)$$

と置き換えて,これが「問題 2 A′」で示した最短時間制御ゲインであるための性質(3.4)および(3.5)式を満足することを示す。

まず,(3.17)式で定義されるΓおよびΦに対しては,($\Phi B\Gamma$)は正則で,

$$\Phi[\bar{X}_0, \bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_\mu] = 0_{\rho\times(n-\rho)}, \quad \rho \triangleq \dim \bar{\mathcal{B}} \qquad (3.32)$$

であるから,次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} &(I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)B\Gamma = 0_{n\times\rho} \\ &(I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)\bar{X}_i = \bar{X}_i, \quad i = 0, 1, \cdots, \mu \end{aligned} \qquad (3.33)$$

したがって,線形写像 $(I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)$ は次の性質を満足する。

$$(I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)(\bar{\mathcal{B}}\oplus\bar{\mathcal{X}}_0\oplus\cdots\oplus\bar{\mathcal{X}}_i) = \bar{\mathcal{X}}_0\oplus\cdots\oplus\bar{\mathcal{X}}_i \subset \mathcal{X}_i,$$
$$i = 0, 1, \cdots, \mu \qquad (3.34)$$

この関係を用いて, $\tilde{F}^* = -\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi A$ が最短時間制御ゲインとしての性質(3.4)および(3.5)式を満足することが次のように示される。

$$\begin{aligned} (A+B\tilde{F}^*)\mathcal{X}_i &= (A - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi A)\mathcal{X}_i = (I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)A\mathcal{X}_i \\ &\subset (I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)(\bar{\mathcal{B}}\oplus\bar{\mathcal{X}}_0\oplus\cdots\oplus\bar{\mathcal{X}}_{i-1}) \quad \because \text{補題 3.2 - (ii)} \\ &= \bar{\mathcal{X}}_0\oplus\cdots\oplus\bar{\mathcal{X}}_{i-1} \quad \because (3.34) \\ &\subset \mathcal{X}_{i-1} \quad \because \text{補題 3.2 - (ii)}, \quad i \in \underline{\mu/0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B\tilde{F}^*)\mathcal{X}_0 &= (I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)A\mathcal{X}_0 \subset (I_n - B\Gamma(\Phi B\Gamma)^{-1}\Phi)(\bar{\mathcal{B}}\oplus\bar{\mathcal{X}}_0) \\ &= \bar{\mathcal{X}}_0 \subset \mathcal{X}_0 \quad \because \text{補題 3.2 - (ii)}, \ (3.24) \end{aligned}$$

次に,(3.4)および(3.5)式を満足する任意な最短時間制御ゲインはすべて補題 3.2 のアルゴリズムで与えられることを示す。「問題 2 A′」の定式化より,最短時間制御ゲイン F^* は次の性質を満足しなければならない。

$$\left.\begin{aligned} &(A+BF^*)\mathcal{X}_i = A\mathcal{X}_i + BF^*\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}_{i-1}, \quad i \in \underline{\mu/0} \\ &(A+BF^*)\mathcal{X}_0 = A\mathcal{X}_0 + BF^*\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

上式の関係が成立するためには,補題 3.2 の(ii)より,

$$A\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{B}+\mathcal{X}_0, \quad A\mathcal{X}_i \subset \mathcal{B}+\mathcal{X}_{i-1} \quad i = \underline{\mu/0}$$

であるから，$F^*\mathcal{K}_i$ が $A\mathcal{K}_i$，$i\in\underline{\mu}$ の $\overline{\mathcal{K}}_0\oplus\cdots\oplus\overline{\mathcal{K}}_\mu$ に沿った $\overline{\mathcal{B}}$ への正射影に負号を付したものとなることが必要十分である。さらに，$F^*\mathcal{K}_i$ は B によって写像されて，結果として $A\mathcal{K}_i$ に作用するのであるから，$A\mathcal{K}_i$ の $\overline{\mathcal{B}}$ 成分のみが状態フィードバック制御法則によって作用し得るから，$F^*\mathcal{K}_i$ は $A\mathcal{K}_i$ の，

$$\left\{\begin{array}{l|l} \overline{\mathcal{K}}_{i-1} & \mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-1}=(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{i-2})\oplus\overline{\mathcal{K}}_{i-1}\ ,\quad i\in\underline{\mu/0} \\ \overline{\mathcal{K}}_0 & \mathcal{B}+\mathcal{K}_0=\overline{\mathcal{B}}\oplus\overline{\mathcal{K}}_0 \end{array}\right\}$$

に沿った $\overline{\mathcal{B}}$ への正射影となっていなければならない。そのためには，F^* は（3.18）式で与えられるような形をしていなければならない[55]。したがって，補題 3.2 の（i）のアルゴリズムはすべての最短時間制御ゲインを与えるものである。

（証明終）

このように補題 3.2 のアルゴリズムは問題 2 A のすべての解を与えるものであるが，その解の任意性は主として手順「A 1」から「A 4」における $\overline{\mathcal{B}}$ および $\overline{\mathcal{K}}_i$，$i\in\mu$ のえらび方にあり，手順「A 5」における Γ および Φ のえらび方は重要ではない。この点を考慮して補題 3.2 の最短時間制御ゲインを求めるアルゴリズムを次のように簡単化できる。

〈系 3.1〉

「最短時間制御ゲインを求める簡単化アルゴリズム」

「A′ 1」～「A′ 4」：補題 3.2「A 1」～「A 4」に同じ。

「A′ 5」最短時間制御ゲイン F^* を次のように構成する。

$$F^*=-\Gamma[I_\rho,\ 0_{\rho\times(n-\rho)}][B\Gamma,\ \overline{X}_0,\overline{X}_1,\cdots,\overline{X}_\mu]^{-1}A,\quad(3.36)$$

$$B\Gamma=\mathrm{base}[\overline{\mathcal{B}}],\quad \overline{X}_i=\mathrm{base}[\overline{\mathcal{K}}_i],\quad i=0,1,\cdots,\mu$$

（証明）　補題 3.2 のアルゴリズムの手順「A 5」において，

$$\Phi_0\triangleq[I_\rho,\ 0_{\rho\times(n-\rho)}][B\Gamma,\ \overline{X}_0,\ \cdots,\ \overline{X}_\mu]^{-1}\qquad(3.37)$$

とすると，

$$\Phi_0[B\Gamma,\ X_0,\cdots,X_\mu]=[I_\rho,0_{\rho\times(n-\rho)}]\ I_n=[I_\rho,\ 0_{\rho\times(n-\rho)}]$$

となるから，Φ_0 は次の関係式を満足する。

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{null}[\Phi_0]=\mathrm{range}[\overline{X}_0,\ \overline{X}_1,\ \cdots,\ \overline{X}_\mu]=\overline{\mathcal{K}}_0\oplus\overline{\mathcal{K}}_1\oplus\cdots\oplus\overline{\mathcal{K}}_\mu \\ \Phi_0 B\Gamma=I_\rho \end{array}\right.$$

したがって，Φ_0 は手順「A 5」の（3.17）式を満足する Φ の一つであり，

$$F^*=-\Gamma(\Phi_0 B\Gamma)^{-1}\Phi_0 A=-\Gamma\Phi_0 A \qquad \therefore (3.39)$$

$$=-\Gamma\left[I_\rho,\ 0_{\rho\times(n-\rho)}\right]\left[B\Gamma,\ \bar{X}_0,\ \cdots,\ \bar{X}_\mu\right]^{-1}A$$

は最短時間制御ゲインとなる。このように手順「A 1」から「A 4」により，$\bar{\mathcal{B}}$ および $\bar{\mathcal{X}}_i$，$i\in\underline{\mu}$ を定め，（3.37）式のように Φ_0 を定めると，$\Phi_0 B\Gamma = I_\rho$ となるから，最短時間制御ゲインの形が（3.18）式の場合より簡単になる。（証明終）

システムの状態を制御することにより，間接的に制御量である出力を制御しようとする設計が行なわれる場合もあることはまえがきでも述べたが，以上の結果はそのような状態を対象とした最短時間制御システムの設計法をも含んでいることは明らかである。すなわち，以上の考察において，$C=I_n$，$\mathcal{N}^*=\{0\}$ とすると，状態を対象としたときの最短時間制御ゲイン F_x^* が得られる。最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, I_n)$ と状態を対象として設計したときの状態最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$ との最短時間性に関する比較を次に示す。

〈系 3.2〉

この系 3.2 においてはシステム $\mathcal{S}$ は可制御であると仮定する。

（i） 初期状態 $x(0)=x_0$ のとき出力を零に整定するステップ数に対する $\mathcal{S}(F^*, I_n)$ と $\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$ との性能を比較すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{S}(F^*, I_n)\ :\ y\{t(x_0, \mathcal{N}^*)+\alpha\}=0\\&\mathcal{S}(F_x^*, I_n)\ :\ y\{t(x_0, 0)-\kappa+\alpha\}=0\end{aligned}\right\}\quad \alpha=0,1,\cdots \qquad (3.38)$$

$$t(x_0, \mathcal{N}^*)\le t(x_0, 0)-\kappa \qquad (3.39)$$

ここで，κ は次式で与えられる非負整数とする。

$$\kappa \triangleq \mu_x-\min\{k \mid \mathcal{X}_{x\cdot k}\subset\mathcal{N}^*\}\le\mu_x \qquad (3.40)$$

（ii） 初期状態を任意としたときの出力を零に整定するステップ数に対する $\mathcal{S}(F^*, I_n)$ と $\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$ との性能を比較すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{S}(F^*, I_n)\ :\ y(\mu+\alpha)=0\\&\mathcal{S}(F_x^*, I_n)\ :\ y(\mu_x-\kappa+\alpha)=0\end{aligned}\right\}\quad \alpha=0,1,\cdots \qquad (3.41)$$

$$\mu\le\mu_x-\kappa \qquad (3.42)$$

（証明） 補題2.1の（ⅰ）および（ⅲ）より，k出力可整定空間$\mathcal{X}_k$およびk可制御空間$\mathcal{X}_{x\cdot k}$に対しては，$\mathcal{X}_k \supset \mathcal{X}_{x\cdot k}$ $\forall\, k \geq 0$ であり，さらに，次の関係が成立する。

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{N}^* = & \mathcal{X}_0 & \subset & \mathcal{X}_1 & \subset \cdots & \subset & \mathcal{X}_\mu & = \mathcal{V}^n \\ & \cup & & \cup & \cup & & \cup & \end{array}$$

$$\{0\} = \mathcal{X}_{x\cdot 0} \subset \mathcal{X}_{x\cdot 1} \subset \cdots \subset \mathcal{X}_{x\cdot\kappa} \subset \mathcal{X}_{x\cdot\kappa+1} \subset \cdots \subset \mathcal{X}_{x\cdot(\kappa+\mu)} \subset \cdots \subset \mathcal{X}_{x\cdot\mu_x} = \mathcal{V}^n \qquad (3.43)$$

したがって，（ⅰ）および（ⅱ）の結果が成立することは明らかである。

（証明終）

この系により，$\mathcal{S}(F^*, I_n)$の方が$\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$より最短時間性の面でより優れていると言える。ただし，$\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$の安産性が常に保証されているのに対し，上のように出力を対象とした設計に共通のものとして，$\mathcal{S}(F^*, I_n)$の安定性は必らずしも保証されないという欠点がある。

次に，制御量に対する最短時間性を満足し，かつ安定な状態フィードバック最短時間制御システムを設計する「問題2 B」について考察する。

状態を対象として設計した$\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$においては，

$$\left.\begin{array}{l} x(\mu_x) = (A+BF_x^*)^{\mu_x} x_0 = 0 \qquad \forall\, x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n \\ \text{すなわち,} \qquad (A+BF_x^*)^{\mu_x} \mathcal{V}^n = \{0\} \end{array}\right\} \qquad (3.44)$$

が成立するから，その状態遷移行列$(A+BF_x^*)$はべき零指数がμ_xのべき零行列でなければならず，その固有値はすべて零である。したがって，$\mathcal{S}(F_x^*, I_n)$は常に安定であることが保証される。他方，出力を直接対象とした最短時間制御システム$\mathcal{S}(F^*, I_n)$においては，「問題2 A′」より，

$$(A+BF^*)^{\mu} \mathcal{V}^n \subset \mathcal{N}^* \qquad (3.45)$$

$$(A+BF^*)\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}^* \qquad (3.46)$$

であれば良く，その状態遷移行列$(A+BF^*)$のすべての固有値が零である必要はない。すなわち，部分空間$\mathcal{N}^*$は$(A+BF^*)$不変部分空間となり，そのモードは必らずしも安定なモードとは限らない。したがって，$\mathcal{S}(F^*, I_n)$が常に安定であると言う保証は得られないことになり，このままでは最短時間制御システムの設計としては不十分である。そこで，制御量に対する最短時間性を満足しつつ，安定な最短時間制御システム$\mathcal{S}(F^*, I_n)$を設計しようとするのが「問題2 B」である。この問題は「問題2 A」に対する考察と結果を応用

して次のように簡単に解決できる。

〈定理 3.2〉

(i) 安定な最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, I_n)$ が設計できるための必要十分条件は次の関係が成立することである。

$$\mathcal{K}_{x\cdot\mu_x} \supset \mathcal{N}_+^* \qquad (3.47)$$

ここで，$\mathcal{N}_+^*$ は整定空間 $\mathcal{N}^*$ に含まれる不安定なモードを持つA不変部分空間の和空間である。すなわち，

$$\mathcal{N}_+^* \subset \mathcal{N}^*, \quad A\mathcal{N}_+^* \subset \mathcal{N}_+^* \qquad (3.48)$$

であり，Aの $\mathcal{N}_+^*$ への制限を $A/\mathcal{N}_+^*$ で表わすと，その固有値は，

$$|\lambda_\sigma[A/\mathcal{N}_+^*]| \geq 1 \qquad \sigma = 1, 2, \cdots, \dim[\mathcal{N}_+^*] \qquad (3.49)$$

である（ただし，重複度を含めて数えるものとする）。

(ii) 上の条件（3.47）式が成立するとき，補題3.2の「最短時間制御ゲインを求めるアルゴリズム」において，

$$\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}, \quad \rho = r \qquad (3.50)$$

とすれば，安定な最短時間制御システムを構成するための最短時間制御ゲインが得られる。これを安定な最短時間制御ゲインと呼び，F_-^* で表わす。

（証明）(i)（必要性）可制御でない部分空間に関係したモードは状態フィードバックによって変更できないことは既に良く知られているから[60),61)]，$\mathcal{S}(F^*, I_n)$ が安定であるためには少くなくとも（3.47）式の関係が成立しなければならないことは明らかである。

（十分性）この（3.47）式の関係が成立するという仮定のもとで，（ii）により求めた最短時間制御ゲイン F_-^* が安定な最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_-^*, I_n)$ を構成することが証明できれば良い。これを次の(ii)で示す。

(ii)（A, B）不変部分空間 $\mathcal{N}^*$ に対して，次の関係を満足するようなA不変部分空間 $\tilde{\mathcal{N}}^*$ が存在する[59)]。

$$\mathcal{N}^* = (\bar{\mathcal{N}}_1^* \oplus \cdots \oplus \bar{\mathcal{N}}_{\mu_x}^*) \oplus \tilde{\mathcal{N}}^* \qquad (3.51)$$

$$\bar{\mathcal{N}}_j^* = \mathcal{N}^* \cap \mathcal{K}_{x\cdot j}, \quad j = 1, 2, \cdots, \mu_x \qquad (3.52)$$

$$A\tilde{\mathcal{N}}^* \subset \tilde{\mathcal{N}}^* \qquad (3.53)$$

（ただし，$\bar{\mathcal{N}}_j^* = \{0\}$，$\tilde{\mathcal{N}}^* = \{0\}$ となる場合もあるが，以下では説明の便宜上，$\bar{\mathcal{N}}_j^* \supsetneq \{0\}$，$\tilde{\mathcal{N}}^* \supsetneq \{0\}$ と仮定する。（$\{0\}$ に等しいものがあ

ればそれを除けば良い。) このとき，(3.47)式の安定化の条件が成立していれば，

$$|\lambda_\varsigma[A/\widetilde{\mathcal{N}}^*]|<1,\qquad \varsigma=1,2,\cdots,\dim[\widetilde{\mathcal{N}}^*] \tag{3.54}$$

となる。これらの部分空間の基底で構成される行列を，

$$\overline{N}_j^* \triangleq \text{base}[\overline{\mathcal{N}}_j],\ j=1,\cdots,\mu_x,\qquad \widetilde{N}^* \triangleq \text{base}[\widetilde{\mathcal{N}}^*] \tag{3.55}$$

とすると，次の関係が成立する。

$$A(\overline{N}_1^* g_1+\cdots \overline{N}_j^* g_j)=Bh_0+\overline{N}_1^* h_1+\cdots+\overline{N}_{j-1}^* h_{j-1}$$
$$j=1,\cdots,\mu_x\ (\text{ただし，}\ A\overline{N}_1^* g_1=Bh_0) \tag{3.56}$$

$$A\widetilde{N}^* p_\alpha=\widetilde{N}^* p_{\alpha+1},\ \|\widetilde{N}^* p_{\alpha+1}\|<\|\widetilde{N}^* p_\alpha\|\qquad \alpha=0,1,\cdots \tag{3.57}$$

次に，(ii)のように，補題3.2のアルゴリズムにおいて $\overline{\mathcal{B}}=\mathcal{B}$ として求めた最短時間制御ゲインを F_-^* で表わす。最短時間制御ゲインとしての性質により，$\mathcal{S}(F_-^*, I_n)$ においては，$x(\mu)=(A+BF_-^*)^\mu x(0)\in\mathcal{N}^*$ となるから，(3.51)，(3,55)式より，$x(\mu)$ は次のように書ける。

$$x(\mu)=\overline{N}_1^* x_1(\mu)+\cdots+\overline{N}_\mu^* x_{\mu_x}(\mu)+\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu)\in\mathcal{N}^* \tag{3.58}$$

これに(3.56)および(3.57)式の関係を用いると，

$$\begin{cases} Ax(\mu)=B\overline{x}_0(\mu)+\overline{N}_1^*\overline{x}_1(\mu)+\cdots+\overline{N}_{\mu_{x-1}}^*\overline{x}_{\mu_{x-1}}(\mu)+\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1), \\ \|\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu)\|>\|\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1)\| \end{cases} \tag{3.59}$$

となる。したがって，$\mu+1$ 時点の状態 $x(\mu+1)$ は次のようになる。

$$x(\mu+1)=(A+BF_-^*)x(\mu)=(I_n-B\mathcal{O}_-^*)Ax(\mu)$$
$$=(I_n-B\mathcal{O}_-^*)(B\overline{x}_0(\mu)+\overline{N}_1^*\overline{x}_1(\mu)+\cdots+\overline{N}_{\mu_{x-1}}^*\overline{x}_{\mu_{x-1}}(\mu)+\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1)$$
$$=\overline{N}^*\overline{x}_1(\mu)+\cdots+\overline{N}_{\mu_{x-1}}^*\overline{x}_{\mu_{x-1}}(\mu)+\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1)\in\mathcal{N}^* \tag{3.60}$$

$$(\because\ \mathcal{O}_-^* B=I_r,\ \mathcal{O}_-^*\overline{N}_j^*=0\quad j=\underline{\mu_x/0},\ \mathcal{O}_-^*\widetilde{N}^*=0 \tag{3.61}$$

ただし，$\mathcal{O}_-^*$ は F_-^* に対応して補題3.2の(3.17)式で与えられる行列である。)

ここで，$x_j(\mu+1)\triangleq\overline{x}(\mu)$ とすると上式は次のように書ける。

$$x(\mu+1)=\overline{N}_1^* x_1(\mu+1)+\cdots+\overline{N}_{\mu_{x-1}}^* x_{\mu_{x-1}}(\mu+1)+\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1)$$

以下同じ計算を繰返すことにより，

$$x(\mu+\mu_x+\alpha)=\widetilde{N}^*\,\widetilde{x}(\mu+\mu_x+\alpha)\in\mathcal{N}_-^* \qquad \alpha=0,\ 1,\ \cdots \qquad (3.62)$$

が得られる。しかも，$\widetilde{\mathcal{N}}^*$ は安定なモードをもったA不変部分空間であるから，

$$\|\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu)\|>\|\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+1)\|>\cdots>\|\widetilde{N}^*\widetilde{x}(\mu+\mu_x)\|>\cdots \qquad (3.63)$$

となり，$\mathcal{S}(F_-^*,\ I_n)$ において次の関係が成立する。

$$\lim_{k\to\infty}\|x(k)\|=\lim_{k\to\infty}\|(A+BF_-^*)^k x(0)\|=0 \qquad (3.64)$$

したがって，$\mathcal{S}(F_-^*,\ I_n)$ は安定である。

（証明終）

このように安定な最短時間制御システムの設計は「問題2A」の解を与える補題3.2および定理3.1の結果を拡張して容易に行なうことが可能である。すなわち，補題3.2の「最短時間制御ゲインを求めるアルゴリズム」において，$\bar{\mathcal{B}}=\mathcal{B}$ とするだけで可制御空間 $\mathcal{X}_{x\cdot\mu_x}$ に関係したすべての極を零に指定することができ，安定な最短時間制御システムが得られる。ただし，この定理3.2の(ii)で与えた安定な最短時間制御ゲイン F_-^* を求める方法が必らずしもすべての F_-^* を与えるものでないことは明らかである。次に，安定な最短時間制御ゲイン F_-^* をすべて求めるための方法を明らかにするが，これも補題3.2のアルゴリズムの簡単な拡張で行なえる。

〈系3.3〉

安定な最短時間制御システムを構成するためには補題3.2の最短時間制御を求めるアルゴリズムにおいて，$\bar{\mathcal{B}}$ を次の性質が満足されるように選ばなければならない。このようにして求めた最短時間制御ゲインを $F_{-\cdot\bar{\mathcal{B}}}^*$ で表わす。

$$\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\bar{\mathcal{B}})_x}\supset\mathcal{N}_+^* \qquad (3.65)$$

ここで，$\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot k}$ および $\mu(\bar{\mathcal{B}})_x$ は，次の状態遷移方程式をもつシステム $\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{B}}}$

$$\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{B}}}:\ x(k+1)=Ax(k)+B\Gamma u(k),\quad \bar{\mathcal{B}}=\mathrm{range}\,[B\Gamma] \qquad (3.66)$$

に対する k 可制御空間および可制御性指数である。すなわち，

$$\begin{cases}\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot(k+1)}=A^{-1}\{\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot k}+\bar{\mathcal{B}}\}\\ \mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot 0}=\{0\}\end{cases} \qquad (3.67)$$

$$\mu(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot}\triangleq\min\{k\mid\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot k}=\mathcal{X}(\bar{\mathcal{B}})_{x\cdot(k+1)}\} \qquad (3.68)$$

（証明）　補題3.2のアルゴリズムで求めた最短時間制御ゲインにより構成した最短時間制御システムが安定であるためには，（3.66）式で記述されるシステムに対して定理3.2の（i）の条件（3.47）式が成立していなければならない。したがって，（3.65）式の条件が満足されていなければならない。

（証明終）

以上で安定な最短時間制御システムを設計する「問題2B」に対する解を得ることができた。したがって，「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題をほぼ完全に解決することができたと言える。

第3.4節　例　　題

簡単な例題を用いて前節で得られた結果を検証する。次式で記述されるシステム$\mathcal{S}$を制御対象とする。

$$\mathcal{S}\begin{cases} x(k+1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&-1&0\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}u(k) & (3.69)\\ y(k)=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}x(k) & (3.70)\\ n=5,\quad r=2,\quad m=2,\quad \mathcal{V}=\mathcal{R} \end{cases}$$

まず，システム$\mathcal{S}$に対するk出力可整定空間$\mathcal{X}_k$およびk可制御空間$\mathcal{X}_{x\cdot k}$を第2.3節の補題2.1および補題2.2によって計算すると次のように求めることができる。

$$\mathcal{N}=\mathrm{null}[C]=\left\{\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\right\}\ \text{注)},\quad \mathcal{N}^*=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\quad (3.71)$$

「脚注」：この節では記述を簡略化するために行列$[\bullet]$の値域空間を$\{[\bullet]\}$で表わすことにする。

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{N}^* \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_1 = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_2 = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_1) =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_3 = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{V}^5$$

(3.72)

(注：×印は左からしらべて1次従属となる列ベクトルを表わしている。)

$$\mathcal{K}_{x\cdot 0} = \{0_5\} \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_{x\cdot 1} = A^{-1}\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \overset{\subset}{+} \mathcal{K}_{x\cdot 2} = A^{-1}(\mathcal{B}+A^{-1}\mathcal{B}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \overset{\subset}{+}$$

$$\mathcal{K}_{x\cdot 3} = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{x\cdot 2}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \overset{\subset}{+}$$

$$\mathcal{K}_{x\cdot 4} = A^{-1}(\mathcal{B}+\mathcal{K}_{x\cdot 3}) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{V}^5 \quad (3.73)$$

したがって．$\mathcal{B}$は出力可整定かつ可制御であり，その出力可整定性指数μおよび，可制御性指数μ_xはそれぞれ$\mu=3$および$\mu_x=4$である。さらに，出力整定空間$\mathcal{N}^*$に含まれるA不変部分空間で不安定なモードをもったもの$\mathcal{N}_-^*$および不安定なモードをもったもの$\mathcal{N}_+^*$を求めると次のようになる。

$$\mathcal{N}_-^* = \{0_5\},\quad \mathcal{N}_+^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\lambda=2} \right\} \subset \mathcal{X}_{x\cdot\mu_x} = \mathcal{V}^5 \qquad (3.74)$$

このように制御対象$\mathcal{S}$は〈仮定1：制御のための仮定〉および定理3.2の安定化のための必要十分条件(3.47)式を満足しているから，$\mathcal{S}$に対する安定な状態フィードバック最短時間制御システムの設計が可能である。

補題3.2の「最短時間制御ゲイン F^* を求めるアルゴリズム」にしたがって最短時間制御ゲイン F^* を求める。

「A1」，「A2」，「A3」および「A4」

$$\left\{ \begin{bmatrix} \overbrace{1 & 0 & 0}^{\mathcal{B}\ \ \mathcal{X}_0} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{V}^5 \qquad (3.75)$$

$\overleftarrow{\quad \mathcal{B}+\mathcal{X}_0 \quad}$ $\overline{\mathcal{X}}_1$ $\overline{\mathcal{X}}_2$ ，$\overline{\mathcal{X}}_3 = \{0_5\}$

$\overleftarrow{\quad \mathcal{B}+\mathcal{X}_1 \quad}$

$\overleftarrow{\quad \begin{Bmatrix} \mathcal{B}+\mathcal{X}_2 \\ \mathcal{B}+\mathcal{X}_3 \end{Bmatrix} \quad}$

「A5」 〈系3.1〉の「A′5」を用いて(3.17)式を満足する行列Γ，Φおよび F^* を計算する。($\overline{\mathcal{X}}_3 = \{0_5\}$であるから，$\overline{X}_3$は除くものとする)。

(イ) $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ として安定性を保証した最短時間制御ゲイン F_-^* を求める。

$$\mathcal{B}+\mathcal{X}_0 = \overline{\mathcal{B}} \oplus \overline{\mathcal{X}}_0 = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathcal{B}}} \right\} \oplus \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\overline{\mathcal{X}}_0} \right\}, \quad \rho_1 = 2,\ \Gamma_1 = I_2 \qquad (3.76)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline B & \overline{X}_0 & \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \end{array}\right]^{-1} = \rho_1\left\{\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right. \phi_1, \quad \phi_1 B\Gamma_1 = I_2 \qquad (3.77)$$

$$\therefore F_-^* = \Gamma_1 (\phi_1 B\Gamma_1)^{-1} \phi_1 A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.78)$$

(ロ) $\overline{\mathcal{B}} \subsetneq \mathcal{B}$ として安定性を考慮しないで最短時間制御ゲイン $F_\square^*$ を求める。

$$\mathcal{B}+\mathcal{K}_0 = \overline{\mathcal{B}} \oplus \mathcal{K}_0 = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \oplus \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad \rho_\square = 1, \quad \Gamma_\square = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.79)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline B\Gamma_\square & \overline{X}_0 & \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \end{array}\right]^{-1} = \rho_\square\left\{\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right. \phi_\square, \quad \phi_\square B\Gamma_\square = 1 \qquad (3.80)$$

$$\therefore \quad F_\square^* = -\Gamma_\square (\phi_\square B\Gamma_\square)^{-1} \phi_\square A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.81)$$

次に，これらの最短時間制御ゲインを用いて構成した状態フィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, I_5)$ の任意な初期状態に対する動作をしらべ，これらが状態フィードバック最短時間制御システムであること（すなわち問題 1.A′ の性質（3.4）および（3.5）式を満足すること）および安定性について確認する。

(イ) $\mathcal{S}(F_-^*, I_5)$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \qquad (3.82)$$

$(A + BF_-^*)$

(ロ) $\mathcal{S}(F_\square^*, I_5)$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) \qquad (3.83)$$

$(A + BF_\square^*)$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}x(k)$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_3=\mathcal{V}^5,\quad y(0)=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$x(1)=\begin{bmatrix}x_1-x_4\\x_3\\x_4\\x_1-x_4\\0\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_2,\quad y(1)=\begin{bmatrix}x_1\\x_1-x_4\end{bmatrix}$$

$$x(2)=\begin{bmatrix}0\\x_4\\x_1-x_4\\0\\0\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_1,\quad y(2)=\begin{bmatrix}x_1-x_4\\0\end{bmatrix}$$

$$x(3)=\begin{bmatrix}0\\x_1-x_4\\0\\0\\0\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_0,\quad y(3)=0_2$$

$$x(4)=0_5\in\mathcal{X}_0,\quad y(4)=0_2$$

$$\cdots$$

$$x(1)=\begin{bmatrix}x_1-x_4\\x_3\\x_4\\x_1-x_4\\2x_5\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_2,\quad y(1)=\begin{bmatrix}x_1\\x_1-x_4\end{bmatrix}$$

$$x(2)=\begin{bmatrix}0\\x_4\\x_1-x_4\\0\\4x_5\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_1,\quad y(2)=\begin{bmatrix}x_1-x_4\\0\end{bmatrix}$$

$$x(3)=\begin{bmatrix}0\\x_1-x_4\\0\\0\\8x_5\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_0,\quad y(3)=0_2$$

$$x(4)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\16x_5\end{bmatrix}\in\mathcal{X}_0,\quad y(4)=0_2$$

$$\cdots$$

以上の結果より，$\mathcal{S}(F_-^*, I_5)$および$\mathcal{S}(F_\square^*, I_5)$ともに状態フィードバック最短時間制御システムであることが確認された。ただし，安定性を考慮しなかった(ロ)の場合には$\mathcal{S}(F_\square^*, I_5)$が不安定となっていることがわかる。この例のように制御対象のシステム$\mathcal{S}$が出力整定空間$\mathcal{N}^*$内に不安定なモードのA不変部分空間$\mathcal{N}_+^*$を持つときは安定性を考慮した最短時間制御システムの設計が必要であることがわかる。もし，$\mathcal{N}_+^*=\{0_5\}$ならば安定性を考慮する必要はなくなる。例えばこの例の制御対象$\mathcal{S}$における状態遷移行列を，

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0.5\end{bmatrix},\quad \mathcal{N}_-^*=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}_{\lambda=0.5}\right\},\quad \mathcal{N}_+^*=\{0_5\}\qquad(3.84)$$

と変更したシステムを考えるとき，上で求めた（3.78）式の F_-^* および（3.81）の $F_\square^*$ がそのまま最短時間制御ゲインとして用いることができる。しかも，このとき $\mathcal{N}_+^*=\{0_5\}$ であるから，$\mathcal{S}(F_-^*, I_5)$ および $\mathcal{S}(F_\square^*, I_5)$ は共に安定な最短時間制御システムである。

第3.5節　あとがき

この章では「問題2」の状態フィードバック最短時間制御問題について考察した。特に，システムの出力を直接対象とした設計を行なうことにより，制御量に対する最短時間性を満足し，かつ安定性をも保障するような状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。その結果，この問題はほぼ完全に解決されたと言える。

状態フィードバックが可能であると言う状況は制御システムの設計上理想的なものであり，前章の定理2.1で求めた個々の初期状態に対する最短時間性を満足するように出力を零に整定する最短時間制御システムを設計することができた。初期状態を任意としたときの全体としての制御における最短時間性のみを求めるような問題の定式化を避け，この章では個々の初期状態の最短時間性をも求めるより精密な問題の定式化を行なった。その結果，この章で求めた状態フィードバック最短時間制御ゲインが第5章での「問題4」出力フィードバック最短時間制御問題において有効となる。しかも，このように定式化することによって設計の困難さが増すことはない。

本論文のように制御量である出力を直接対象として設計されたシステムにおいては安定性が問題となるが，これを制御の問題（「問題2A（A′）」）と安定化の問題（「問題2B」）とにわけて考察し，安定な最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。これは，B. D. O. Anderson [59] が連続時間システムを対象にして制御するための制御法則と安定にするための制御法則とが分離可能であることを明らかにした結果にもとづいている。すなわち，補題3.2のアルゴリズムにおいて $\overline{\mathcal{B}}$ を，$\mathcal{B}+\mathcal{N}^*=\overline{\mathcal{B}}\oplus\mathcal{N}^*$ となるように選ぶと制御のためだけの制御法則を表わす最短時間制御ゲインが分離でき，残りの $\mathcal{B}\cap\mathcal{N}^*$

がシステムを安定化するために利用できる。したがって，$\mathcal{B}=\mathcal{B}$ とすることによって最短時間制御ゲインを求めると，これがそのままシステムを最大限に安定化するためのものが得られる。

第4章　最短時間観測問題

第4.1節　まえがき

この章では「問題3」の最短時間観測問題について考察し，システムの状態またはその線形関数を最短時間で観測する最短時間オブザーバの設計方法を明らかにする。一般に状態フィードバックが可能であると仮定して制御問題を考察することは，理想的な制御システムが設計できる反面，工学的実現性に欠ける面があり，制御問題の考察としては不十分である。したがって，状態フィードバックを仮定しないで制御問題を考える必要があるが，「未知のものは制御できない」というのが制御の基本原則であるから，このとき何んらかの手段によってシステムの状態を知る必要がある。D. G. Luenberger[23),24)]は線形連続時間システムを観測対象にしてオブザーバ（Observer）と呼ばれる線形な観測システムを導入し，この問題を解決した。線形離散時間システムにおいては有限な長さの入出力データによって状態を誤差なく決定可能であるから，最短時間で観測誤差を零に整定するようなオブザーバの存在が予想され，その設計問題に関する研究がいっせいに試みられた。まず著者等[25)]が状態フィードバック最短時間制御問題と関連させて一つの基本的な設計方法を示し，これを最短時間オブザーバ（Minimal Time Observer）と名付けた。すぐ続いて，井上　昭等[26),27)]がすべての最短時間オブザーバの設計方法を明らかにするとともに，その観測機構を明らかにした。吉川恒夫[62)]は最短時間オブザーバを構成するのに必要な最小の次数について考察し，ある条件のもとでこれを明らかにした。一般に状態フィードバック制御法則は状態の線形関数によって実現されるが，この線形関数を最短時間で観測する線形関数最短時間オブザーバについては，状態遷移行列が正則な場合について池田雅夫等[36)]が，一般的な場合について著者等[37)]がその設計方法を明らかにした。その後，明石　一等[63),64)]および著者等[65),38),39)]はこれまでの結果を総括する形でより精密な考察を行なっている。最短時間オザーバを構成するのに必要な最小次数について木村英紀[66)]が線形関数最短時間オブザーバを含めて完全に解決している。以上のように最短時間観測問題に関する研究もほぼ完成の域に近づいていると言える。

この章では，「問題3」の最短時間オブザーバの設計方法について考察するが，観測に必要とする時間（ステップ数）を最短にするだけでなく，すべての

時点での観測誤差空間を最小にするような観測システムとして最短時間オブザーバを定義する。すなわち，各時点における観測誤差空間が第2.4節で求めたk非可決定空間に一致するようなオブザーバを設計する問題として「問題3」を第4.2節で定式化する。このように従来から知られていた定義[67]よりも若干厳しい定義のもとで設計した最短時間オブザーバは第5章の出力フィードバック最短時間制御システムの構成に有効となり，さらに，これをもとに線形関数最短時間オブザーバが極めて容易に構成できる。しかも，このように最短時間オブザーバを厳しく定義することによって設計が困難になることはない。第4.3節ではk非可決定空間を基礎にして最短時間オブザーバの設計方法を明らかにする。さらに，それをもとにした線形関数最短時間オブザーバの設計方法をも明らかにする。第4.4節では簡単な例題を用いて得られた結果を検証する。（本章の内容は「公表文献表」（pp. ⅲ　）中の(4)，(5)，(6)，(8) および(9)に依っている。）

第4.2節　問題の記述

この節では線形離散時間システム$\mathcal{S}$を観測対象とする最短時間オブザーバを定義するとともに，「問題3」の最短時間観測問題を定式化する。

まず，システム$\mathcal{S}$の入力 u(k) および出力 y(k) をそれ自身の入力として持つ次のような線形時不変離散時間システム $\mathcal{O}$ を導入する。（図4.1参照）。

$$\mathcal{O}\begin{cases} z(k+1) = J\,z(k) + K\,y(k) + L\,u(k) & (4.1) \\ w(k) = M\,z(k) + N\,y(k) & (4.2) \\ \qquad\qquad k=0,\ 1,\ \cdots \end{cases}$$

ここで，　λ ：システム$\mathcal{O}$の次数，

$z(k) \in \mathcal{V}^{\lambda}$ ：時点kでの$\mathcal{O}$の状態，

$w(k) \in \mathcal{V}^{n}$ ：時点kでの$\mathcal{O}$の出力，

であり，$J \in \mathcal{V}^{\lambda\times\lambda}$，$K \in \mathcal{V}^{\lambda\times m}$，$L \in \mathcal{V}^{\lambda\times r}$，$M \in \mathcal{V}^{n\times\lambda}$ および $N \in \mathcal{V}^{n\times m}$ はシステム$\mathcal{O}$がオブザーバとして機能するように定める設計パラメータ行列である。

この観測システム$\mathcal{O}$による観測対象$\mathcal{S}$の状態に対する観測誤差を，

$$e(k) \triangleq x(k) - w(k) \qquad (4.3)$$

で表わす。システム$\mathcal{S}$と$\mathcal{O}$の任意な初期状態および入力列に対し時点kで生じ得るすべての観測誤差の集合を，

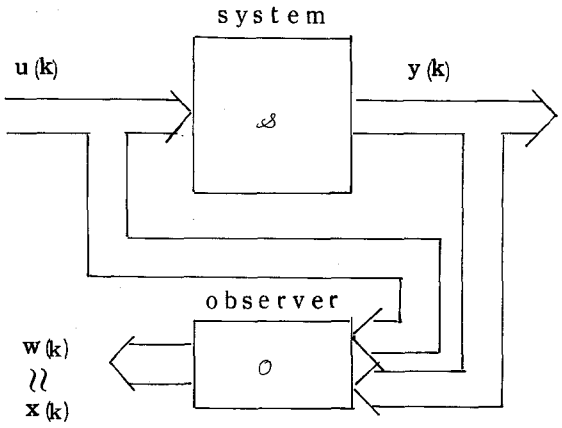

図4.1　観測対象$\mathcal{S}$に対するオブザーバO

$$\mathcal{E}_k(O) \triangleq \{\ e(k) \mid e(k) = x(k) - w(k)\ ,\quad \forall\ z(0) \in \mathcal{V}^{\lambda},\quad x(0) \in \mathcal{V}^{n},\quad \{u(\bullet)\}_0^{k-1}\ \} \qquad (4.4)$$

で表わすと，明らかにこれは部分空間を形成し，観測誤差空間と呼ぶことにする。第2.4節の定義2.4および補題2.3によれば，時点kにおける観測不可能な空間の最小のものがk非可決定空間$\mathcal{N}_k$であることから，観測誤差空間$\mathcal{E}_k(O)$は$\mathcal{N}_k$より小さくすることができないことは明らかである。この点を考慮して最短時間オブザーバを次のように定義する。

〈定義4.1〉

観測システムOにおいて，任意な時点kの観測誤差空間がk非可決定空間に等しいとき，すなわち，

$$\mathcal{E}_k(O) = \mathcal{N}_k \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots \qquad (4.5)$$

が成立するとき，これを最短時間オブザーバ（Minimal Time Observer）と言い，O^*で表わすことにする。

この定義は従来から行なわれてきた最短時間オブザーバの定義[67]，

「観測システムOにおいて，次のような関係，

$$\mathcal{E}_{\nu+\alpha}(O) = \{0\} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ \cdots \qquad (4.6)$$

が成立するとき，これを最短時間オブザーバと言い，$\tilde{O}$で表わす。」，

よりも若干条件が厳しくなっている。観測対象$\mathcal{S}$が可決定であるならば$\mathcal{N}_{\nu+\alpha} = \{0\}$であるから，定義4.1はこれまでの定義を含んでいる。このように最短時間オブザーバを，すべての時点で最大限可能な観測を行なう観測システム

として観測対象$\mathcal{S}$の可決定性を仮定しないで定義しておくと，この定義4.1の最短時間オブザーバ$\mathcal{O}^*$を用いて出力フィードバック最短時間制御システムおよび線形関数最短時間オブザーバが構成可能となることを以下で明らかにする。しかも定義の条件を厳しくすることによって，その設計が困難になることはない。

次に，上で用意した観測システム$\mathcal{O}$がオブザーバとして機能するために満足すべき基本的な関係式を明らかにしておくが，これは D. G. Luenberger [24] が連続時間システムを対象として求めたものと全く同じものとなっている。

〈補題 4.1〉

観測システム$\mathcal{O}$において，行列J，K，L，MおよびNが次の関係，

$$\begin{cases} J=PAM,\ K=PAN,\ L=PB & (4.7) \\ MP+NC=I_n,\ \mathrm{null}[P]=\mathrm{null}[I_n-NC],\ P:\ \mathrm{full\ rank} & (4.8) \end{cases}$$

を満足するとき，観測誤差空間は次のように行列Nのみの関数となる。

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{O})=\{(I_n-NC)A\}^k(I_n-NC)\mathcal{V}^n\supset\mathcal{N}_k \qquad (4.9)$$

（証明） システム$\mathcal{O}$において，（4.7）および（4.8）式の関係が満足されているとき，観測誤差の方程式を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} e(k+1)&=x(k+1)-w(k+1) \\ &=Ax(k)+Bu(k)-MJZ(k)-MKCx(k)-MLu(k) \\ &\quad -NCAx(k)-NCBu(k) \quad (\because \mathcal{S}\text{および}\mathcal{O}\text{のシステム方程式}(2.1),(2.2),(4.1))(4.2)) \\ &=(A-MKC-NCA)x(k)-MJz(k)+(B-ML-NCB)u(k) \\ &=(A-MPANC-NCA)x(k)-MPAMz(k) \\ &\qquad +(B-MPB-NCB)u(k) \quad \because (4.7) \\ &=MPA(I_n-NC)x(k)-NPAMz(k) \quad \because (4.8) \\ &=MPA\{(I_n-NC)x(k)-Mz(k)\} \\ &=(I_n-NC)A\{x(k)-NCx(k)-Mz(k)\} \quad \because (4.8) \\ &=(I_n-NC)A\{x(k)-(Mz(k)+Ny(k))\} \quad \because (4.8) \\ &=(I_n-NC)A(x(k)-w(k)) \quad \because (4.2) \\ &=(I_n-NC)Ae(k) \end{aligned}$$

$$\therefore\ e(k+1)=(I_n-NC)Ae(k) \qquad k=0,1,\cdots \quad (4.11)$$

ただし，$e(0)$は 状態空間$\mathcal{V}^n$の任意の要素ではなく，次のような制限がある。

$$\begin{aligned} e(0) &= x(0) - w(0) = x(0) - Mz(0) - Ny(0) \\ &= x(0) - NCx(0) - Mz(0) = (I_n - NC)x(0) - Mz(0) \\ &= (I_n - NC)x(0) - (I_n - NC)\tilde{x}(0) \qquad \tilde{x}(0) \in \mathcal{V}^n \quad (\because \text{注参照}) \\ &= (I_n - NC)(x(0) - \tilde{x}(0)) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

（注：何故ならば（4.8）式の関係より，$Mz(0) = (I_n - NC)\tilde{x}(0)$ を満足する $\tilde{x}(0)$ が存在する。）

初期状態 $x(0)$ は任意であるから，

$$\mathcal{E}_0(\mathcal{O}) = (I_n - NC) \cdot \mathcal{V}^n = \text{range}\,[I_n - NC] \qquad (4.13)$$

が成立する。したがって，これを先に求めた（4.11）式より，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(\mathcal{O}) &= (I_n - NC)A\mathcal{E}_{k-1}(\mathcal{O}) \\ &= \{(I_n - NC)A\}^k \mathcal{E}_0(\mathcal{O}) \\ &= \{(I_n - NC)A\}^k (I_n - NC) \cdot \mathcal{V}^n \qquad k = 1, 2, \cdots \end{aligned} \qquad (4.14)$$

が成立する。これで（4.9）式が証明された。

（証明終）

この補題の条件（4.7）および（4.8）式は観測システム$\mathcal{O}$がオブザーバとして機能するための基本的な関係式であり，以下ではこれをオブザーバの基本関係式と呼ぶことにする。このオブザーバの基本関係式が満足されるとき，オブザーバ$\mathcal{O}$による観測誤差空間が設計パラメータ行列の中でNのみの関数となることは非常に興味深い結果であり，この行列Nは前章の制御問題における制御ゲインに対応するものであると言える。その意味で，以下ではこの行列Nを観測ゲインと呼ぶことにし，最短時間観測問題を次のように定式化する。

「問題3：最短時間観測問題」

観測対象のシステム$\mathcal{S}$が与えられたとき，

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{O}^*) = \{(I_n - N^*C)A\}^j (I_n - N^*C) \cdot \mathcal{V}^n = \mathcal{N}_j$$
$$j = 0, 1, \cdots, \nu \qquad (\text{注参照}) \qquad (4.15)$$

を満足する最短時間観測ゲインN^*を求めよ。さらに，この最短時間観測ゲインN^*をもとにオブザーバの基本関係式を満足する設計パラメータ行列J^*, K^*, L^*, M^*およびP^*を求め，最短時間オブザーバ$\mathcal{O}^*$を構成せよ。

（注：補題2.3より，$\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_{\nu+\alpha}$ $\alpha \geq 0$ であるから，jはすべての非負整数について考える必要はない。）

前章の「問題2」と上の「問題3」とを比較すると，制御問題と観測問題との双対関係が明らかになる。

「問題2：状態フィードバック最短時間制御問題」	「問題3：最短時間観測問題」
$\begin{cases}(I_n - B\Gamma^* \mathcal{O}^*)A\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_{i-1} \\ \qquad\qquad i=1, 2, \cdots, \mu \\ (I_n - B\Gamma^* \mathcal{O}^*)A\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0\end{cases}$	$\begin{cases}(I_n - N^*C)A\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{j+1} \\ \qquad\qquad j=0, 1, \cdots, \nu \\ (I_n - N^*C)\mathcal{Y}^n = \mathcal{N}_0\end{cases}$
を満足する最短時間制御ゲイン F^* ($=-\Gamma^* \mathcal{O}^* A$) を求めよ。	を満足する最短時間観測ゲイン N^* を求めよ。

（このような制御問題と観測問題との対応関係については明石　一等[40]も指摘している。）

第4.3節　最短時間オブザーバの設計

この節では「問題3」の最短時間観測問題について考察する。前節で定式化したように最短時間オブザーバの設計問題は（4.15）式を満足するような最短時間観測ゲイン N^* を求める問題に帰着されるが，ここでは，まず「最短時間観測ゲイン N^* を求めるアルゴリズム」を与え，それが常に実行可能であることを示す。次にそのアルゴリズムで得られた行列 N^* が最短時間観測ゲインであることを明らかにする。さらに，最短時間観測ゲイン N^* を用いてオブザーバの基本関係式を満足する J^*, K^*, L^*, M^* および P^* を求めることが常に可能であることを示し，最終的には最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*$ を構成する。

まず「最短時間観測ゲイン N^* を求めるアルゴリズム」を示し，これが常に実行可能であることを明らかにする。それが次の補題である。

〈補題4.2〉

(i)　次のアルゴリズムは常に実行可能である。

「最短時間観測ゲイン N^* を求めるアルゴリズム」（図4.2参照，pp. 58）

「B1」　$j=0$ とする。次の関係，

$$\mathcal{Y}^n = (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_0) \oplus \mathcal{W}_0 \quad , \quad \mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \qquad (4.20)$$

を満足する部分空間 $\mathcal{W}_0$ を求め（次頁脚注参照），次へ進む。

「B2」　$j=\nu$ ならば「B4」へ飛ぶ。さもなければ，次の関係，

$$\mathcal{N} + A\mathcal{N}_j = (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_{j+1}) \oplus \mathcal{W}_{j+1} \qquad (4.21)$$

を満足する部分空間 $\mathcal{W}_{j+1}$ を求め，[注] 次へ進む。

「B3」　$j := j+1$ とし，「B2」へもどる。

「B4」　部分空間 $\mathcal{W}_j$，　$j \in \underline{\nu}$ の基底で構成される行列を，

$$W_j \triangleq \text{base}[\mathcal{W}_j], \quad j = 0, 1, \cdots, \nu \qquad (4.22)$$

とし，最短時間制御ゲイン N^* を次のように構成する。

$$N^* = W(CW)^{-1} \qquad (4.23)$$

ただし，

$$W \triangleq [W_0, W_1, \cdots, W_\nu] \qquad (4.24)$$

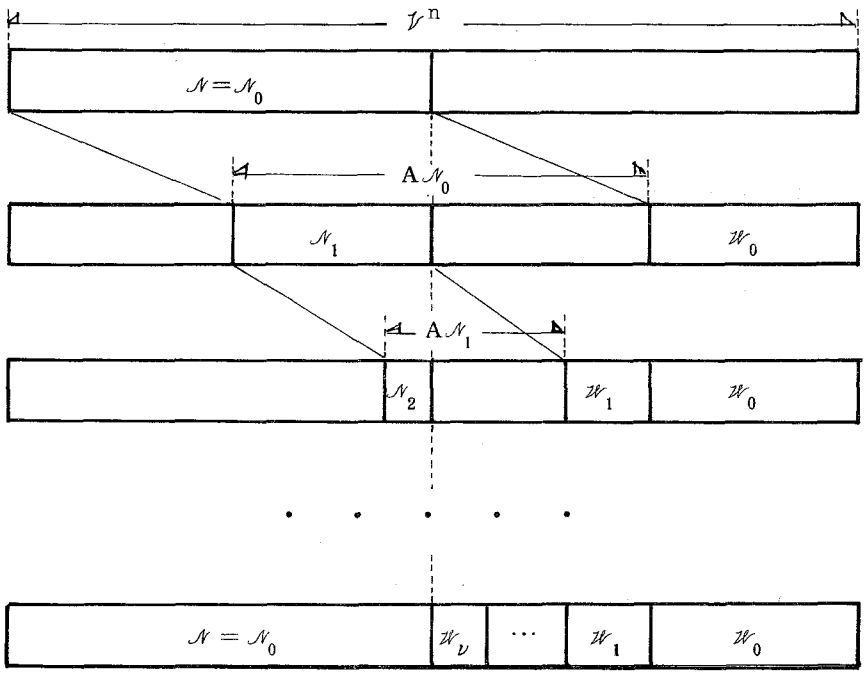

図4.2　部分空間 $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_j$ および $\mathcal{W}_j$ の関係

(ii) 上のアルゴリズムで定められた部分空間 $\mathcal{W}_j$ は次の関係を満足する。

$$\mathcal{V}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \cdots\cdots \oplus \mathcal{W}_\nu \qquad (4.25)$$

$$A\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{j+1} \oplus \mathcal{W}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\nu \qquad j = 0, 1, \cdots, \nu-1$$
$$A\mathcal{N}_{\nu+\alpha} = \mathcal{N}_\nu \qquad \alpha = 0, 1, \cdots \qquad (4.26)$$

(注：このアルゴリズムの説明の便宜上，$\mathcal{W}_j \neq \{0\}$，　$j \in \underline{\nu}$ と仮定する。この仮定は必らずしも成立するとは限らないが，もし $\{0\}$ に等しいものがあれば，単に「B5」の段階でそれを除くだけで良い。)

（証明）　（ⅰ）このアルゴリズムが実行可能であること，および（ⅱ）の性質が成立すること，をアルゴリズムの手順を追いながら同時に証明する。

「B1」の段階が実行可能であることは明らかである（ただし，$\mathcal{V}^n = \mathcal{N} + A\mathcal{N}_0$ のときは，$\mathcal{W}_0 = \{0\}$ とする）。「B2」の段階についても，補題2.3の（ⅱ）より，$\mathcal{N}_j \supset \mathcal{N}_{j+1}$ であるから，

$$\mathcal{N} + A\mathcal{N}_j \supset \mathcal{N} + A\mathcal{N}_{j+1} \qquad (4.27)$$

となり，「B2」は実行可能である（ただし，$\mathcal{N} + A\mathcal{N}_j = \mathcal{N} + A\mathcal{N}_{j+1}$ のときは $\mathcal{W}_{j+1} = \{0\}$ とする）。必要な回数「B2」の段階を繰返すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^n &= (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_0) \oplus \mathcal{W}_0 \\ &= \{(\mathcal{N} + A\mathcal{N}_1) \oplus \mathcal{W}_1\} \oplus \mathcal{W}_0 \\ &\quad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ &= (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_\nu) \oplus \mathcal{W}_\nu \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_0 \\ &= \mathcal{N} \oplus \mathcal{W}_\nu \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_0 \qquad \because \text{補題2.3の（ⅱ）}: \mathcal{N}_\nu = A\mathcal{N}_\nu\end{aligned}$$

となり，（4.25）式の関係が成立する。さらに，上と全く同じ様にして，

$$\begin{aligned}\mathcal{N} + A\mathcal{N}_j &= (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_{j+1}) \oplus \mathcal{W}_{j+1} = (\mathcal{N} + A\mathcal{N}_{j+2}) \oplus \mathcal{W}_{j+2} \oplus \mathcal{W}_{j+1} \\ &\quad \cdots \\ &= \mathcal{N} \oplus \mathcal{W}_\nu \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_{j+2} \oplus \mathcal{W}_{j+1}\end{aligned} \qquad (4.28)$$

となる。次に，$\mathcal{N}_{j+1} = \mathcal{N} \cap A\mathcal{N}_j$（補題2.3の(ⅰ)）であるから，

$$\begin{cases} \mathcal{N} + A\mathcal{N}_j = \widetilde{\mathcal{N}}_{j+1} \oplus \mathcal{N}_{j+1} \oplus \overline{A\mathcal{N}_j} \\ \mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{N}}_{j+1} \oplus \mathcal{N}_{j+1}, \quad A\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{j+1} \oplus \overline{A\mathcal{N}_j} \end{cases} \qquad (4.29)$$

を満足する部分空間 $\widetilde{\mathcal{N}}_{j+1}$ および $\overline{A\mathcal{N}_j}$ が存在する。したがって，

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{j+1} \oplus \mathcal{N}_{j+1} \oplus \overline{A\mathcal{N}_j} = \widetilde{\mathcal{N}}_{j+1} \oplus \mathcal{N}_{j+1} \oplus \mathcal{W}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\nu$$

となるから，（4.26）式が成立する。$\mathcal{N}_\nu = A\mathcal{N}_{\nu+\alpha}$ については補題2.3の（ⅱ）そのものである。これで（ⅱ）は すべて証明されたことになる。次に，「B4」の段階で，（4.22）式および（4.24）式によって行列Wを定めると，（ⅱ）の（4.25）式の関係より，CWは正則となることは明らかである。したがって，（4.23）式のように行列N^*を定めることが常に可能である。

（証明終）

この補題のアルゴリズムで求めた行列N^*が最短時間観測ゲインであること，およびこれをもとに最短時間オブザーバが常に構成可能であることを次に示す。これが「問題3」に対する基本的な結果である。

〈定理4.1〉

(i) (4.1)および(4.2)式で記述される観測システム$\mathcal{O}$において，

$$\mathcal{O}^*\begin{cases}\lambda = n - m & (4.30)\\ J = P^*AM^*, \quad K = P^*AN^*, \quad L = P^*B & (4.31)\\ M = M^*, \quad N = N^* & (4.32)\end{cases}$$

とすれば最短時間オブザーバ$\mathcal{O}^*$が得られる。ここで，行列N^*は補題4.2のアルゴリズムで与えられる最短時間観測ゲインであり，P^*およびM^*は，

$$\text{null}\,[P^*] = \text{null}[I_n - N^*C], \quad P^*: \text{full rank} \qquad (4.33)$$

$$M^*P^* + N^*C = I_n \qquad (4.34)$$

を満足するように定められる任意な行列である。

(ただし，$\nu = 0$ のときは，$\lambda = 0$ とする。)

(ii) 最短時間オブザーバ$\mathcal{O}^*$を用いて観測対象であるシステム$\mathcal{S}$の状態が誤差なく決定できるための必要十分条件は，

「観測対象$\mathcal{S}$は可決定である。すなわち，$\mathcal{N}_\nu = \{0\}$。」

が成立することである。

(証明) (i) (4.31)～(4.34)式は補題4.1で示したオブザーバの基本関係式であるから，補題4.2のアルゴリズムで求めた行列$W(CW)^{-1}$が最短時間観測ゲインとしての性質(4.15)式を満足すること，およびこの行列$W(CW)^{-1}$に対しては(4.33)，(4.34)式を満足するM^*およびP^*が存在すること，を示せば良い。そのことを次に示すが，まず補題4.2のアルゴリズムで与えられる行列$N^* = W(CW)^{-1}$に対しては次の関係，

$$\begin{cases}(I_n - N^*C)\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_j\\ (I_n - N^*C)\mathcal{W}_j = \{0\}\end{cases} \qquad j = 0, 1, \cdots, \nu \qquad (4.35)$$

が成立することを示す。補題2.3より，$\mathcal{N}_j \subset \mathcal{N} = \text{null}[C]$, $j \in \underline{\nu}$ であるから，(4.35)式の成立することは明らかである。部分空間$\mathcal{W}_j$に含まれる任意な要素xは，$x = W\tilde{w}$ と表わすことができるから，

$$(I_n - N^*C)x = (I_n - N^*C)W\tilde{w} = (I_n - W(CW)^{-1}C)W\tilde{w} = 0$$

となり，(4.36)式の関係が成立する。数学的帰納法を用いて補題4.2のアルゴリズムで与えられる行列$N^* = W(CW)^{-1}$に対して(4.15)式が成立することを示す。$k = 0$について，

$$\{(I_n - N^*C)A\}^0 (I_n - N^*C)\cdot \mathcal{V}^n = (I_n - N^*C)\mathcal{V}^n$$
$$= (I_n - N^*C)(\mathcal{N} \oplus \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\nu) \quad \text{補題 4.2 - (ii)}$$
$$= \mathcal{N} \quad \because (4.35), (4.36)$$

となり，成立することが言える。$k = \beta$ について成立する，すなわち，

$$\{(I_n - N^*C)A\}^\beta (I_n - N^*C)\cdot \mathcal{V}^n = \mathcal{N}_\beta$$

が成立すると仮定して，$k = \beta + 1$ について考えると，$\beta \leq \nu - 1$ のとき，

$$\{(I_n - N^*C)A\}^{\beta+1} (I_n - N^*C)\mathcal{V}^n = (I_n - N^*C)A\cdot\{(I_n - N^*C)A\}^\beta (I_n - N^*C)\mathcal{V}^n$$
$$= (I_n - N^*C)A\mathcal{N}_\beta \quad \because k = \beta \text{ についての仮定}$$
$$= (I_n - N^*C)(\mathcal{N}_{\beta+1} \oplus \mathcal{W}_{\beta+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\nu)$$
$$\because \text{補題 4.2 - (ii)}, \quad \beta \leq \nu - 1$$
$$= \mathcal{N}_{\beta+1} \quad \because (4.35), (4.36)$$

$\beta > \nu - 1$ のときは，

$$\{(I_n - N^*C)A\}^{\beta+1} (I_n - N^*C)\mathcal{V}^n = (I_n - N^*C)A\mathcal{N}_\beta$$
$$= (I_n - N^*C)\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\nu$$

となり，成立することが言える。したがって，任意の k について，補題 4.2 で与えた行列 $N^* = W(CW)^{-1}$ は (4.15) 式の関係を満足する。

さらに，補題 4.2 および (4.35)，(4.36) 式より，

$$\text{rank } N^* = m, \qquad \text{rank}(I_n - N^*C) = n - m$$

は明らかであるから，(4.33)，(4.34) 式を満足する M^* および P^* は 常に存在し，(4.30)，(4.31) および (4.32) 式を用いて 最短時間オブザーバを設計することができる。

(ii) 必要性については定理 2.2 の (i) より明らかである。十分性についても，$\mathcal{S}$ が可決定であれば $\mathcal{N}_\nu = \{0\}$ であるから，

$$\mathcal{E}_{\nu+\alpha}(O^*) = \mathcal{N}_{\nu+\alpha} = \{0\} \qquad \alpha = 0, 1, \cdots$$

となり，明らかである。しかも観測の最短時間性も満足している。

(証明終)

この定理および補題 4.2 からわかるように，前節で定義した最短時間オブザーバは観測対象 $\mathcal{S}$ の観測可能性とは無関係に常に設計可能である。このように任意の時点で観測誤差空間が最小となるように最短時間オブザーバを構成することにより，次章での出力フィードバック最短時間制御システムの構成にこの最短時間オブザーバが有効となる。さらに，この最短時間オブザーバをもとに線形関数最短時間オブザーバが容易に構成できる。この定理で設計される最短

時間オブザーバの次数は（ｎ－ｍ）であるが，これは必らずしも最小次数とは限らないことは著者等[25]によって指摘された（連続システムにおいてはｎ－ｍが最小次数であることが保証される）。吉川恒夫[62]は，

$$\mathrm{rank}\,[A,\ B] = n \qquad (4.38)$$

のとき，ｎ－ｍが最小次数となることを，木村英紀[66]はオブザーバに必要な最小次数を，明らかにしている。ここでは解析と設計の容易さの点および（4.38）式の条件が殆んどの場合満足されている点などから，オブザーバの次数は（ｎ－ｍ）に固定しておく。この章での最短時間オブザーバは各時点において最大限可能な観測を行なうものであるから，これをもとにして状態の線形関数 $Hx(k)$, $H \in \mathcal{V}^{\eta \times n}$ に対する線形関数最短時間オブザーバ $\mathcal{O}_H^*$ が次のように簡単に構成可能である。

〈系 4.1〉

（ｉ） 定理 4.1 で設計した最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*$ の出力 $w(k)$ に行列 $H \in \mathcal{V}^{\eta \times n}$ を作用させたシステムを $\mathcal{O}_H^*$ で表わす。すなわち，

$$\mathcal{O}_H^* \begin{cases} z(k+1) = J^* z(k) + K^* y(k) + L^* u(k) & (4.39) \\ w_H(k) = H\,w(k) = HM^* z(k) + HN^* y(k) & (4.40) \end{cases}$$

$$k = 0,\ 1,\ \cdots$$

（ここで，$J^* \triangleq P^*AM^*$，$K^* \triangleq P^*AN^*$，$L^* \triangleq P^*B$ とする。）

とすると（図 4.3 参照），システム $\mathcal{O}_H^*$ は線形関数 $Hx(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバである。

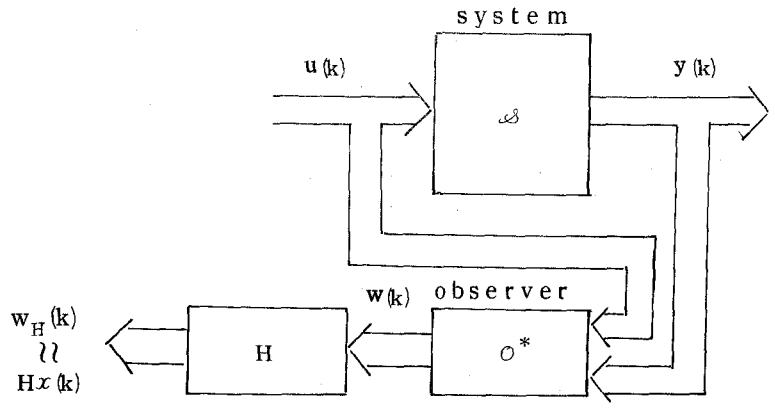

図 4.3　システム $\mathcal{O}_H^*$ の構造

(ii) 線形関数最短時間オブザーバ $\mathcal{O}_H^*$ を用いて状態の線形関数 $Hx(k)$ が誤差なく決定できるための必要十分条件は，

「観測対象 $\mathcal{S}$ は H－可決定である。すなわち，$H\mathcal{N}_{\nu_H} = \{0\}$」

が成立することである。

(証明) (i) (4.39)および(4.40)式で記述されるシステム $\mathcal{O}_H^*$ による線形関数 $Hx(k)$ に対する観測誤差を $e_H^*(k)$ で表わすと，

$$\begin{aligned} e_H^*(k) &\triangleq Hx(k) - w_H(k) \\ &= H\{x(k) - w(k)\} = He(k) \end{aligned} \qquad (4.41)$$

となるから，システム $\mathcal{O}_H^*$ と観測対象 $\mathcal{S}$ の任意な初期状態および任意な $\mathcal{S}$ への入力列 $\{u(\bullet)\}_0^{k-1}$ に対して生じ得るすべての観測誤差の集合 $\mathcal{E}_{H\cdot k}(\mathcal{O}_H^*)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{H\cdot k}(\mathcal{O}_H^*) \triangleq \{ e_H^*(k) \mid\ & e_H^*(k) = Hx(k) - w_H(k), \\ & \forall x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n,\ z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^{n-m},\ \{u(\bullet)\}_0^{k-1} \\ = H\mathcal{E}_k(\mathcal{O}^*) &= H\mathcal{N}_k \qquad k = 0,\ 1,\ \cdots \end{aligned} \qquad (4.42)$$

したがって，観測システム $\mathcal{O}_H^*$ は線形関数 $Hx(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバとなることは明らかである。

(ii) 観測対象 $\mathcal{S}$ が H－可決定であるための必要十分条件は定理 2.2 より，

$$H\mathcal{N}_{\nu_H} = \{0\} \qquad (4.43)$$

(ただし，$\nu_H \triangleq \min\{k \mid H\mathcal{N}_k = \{0\}\}$。)

が成立することであることより明らかである。しかも上式より，システム $\mathcal{O}_H^*$ が $Hx(k)$ の観測に対する最短時間性を満足していることがわかる。

(証明終)

このように，線形関数最短時間オブザーバが最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*$ を用いて容易に構成できるのは，最短時間オブザーバを定義 4.1 のようにすべての時点で観測誤差空間を最小にするものと定義した結果である。システム $\mathcal{O}_H^*$ の次数は $n-m$ であるが，これは必らずしも最小次数とは限らない。線形関数最短時間オブザーバの最小次数については木村英紀[66]がこれを明らかにしている。

第 4.4 節　例　　題

簡単な例題を用いて前節で得られた結果を検証する。次式で記述されるシステム $\mathcal{S}$ を観測の対象とする。

$$
\mathcal{S}\left\{\begin{array}{l}
x(k+1) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} u(k) \qquad (4.44)\\[2ex]
y(k) = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1 \end{bmatrix} x(k) \qquad (4.45)\\[2ex]
n=7, \quad r=1, \quad m=3, \quad \nu=\mathcal{R}
\end{array}\right.
$$

まず，このシステム$\mathcal{S}$に対するk非可決定空間$\mathcal{N}_k$を第2.4節の補題2.3によって計算すると次のように求めることができる。

$$
\mathcal{N}_0 = \mathrm{null}[C] = \left\{\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\right\} \supsetneq \mathcal{N}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}\right\} \supsetneq \mathcal{N}_2 = \{0\} = \mathcal{N}_3 = \cdots \qquad (4.46)
$$

したがって，システム$\mathcal{S}$は可決定であり，その可決定性指数は$\nu = 2$である。前節の補題4.2で与えた「最短時間観測ゲインN^*を求めるアルゴリズム」にしたがってN^*を求める。

「B1」

$$
\mathcal{N}+A\mathcal{N}_0 = \left\{\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\right\} + \left\{\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&1&1&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{R}^7 \qquad \therefore \mathcal{W}_0 = \{0\} \qquad (4.47)
$$

（×印は左からしらべたとき1次従属となる列ベクトルを示している。）

「B2」，「B3」

$$
\mathcal{N}+A\mathcal{N}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}\right\} + \left\{\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \therefore \mathcal{W}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 0&0\\ 0&1\\ 1&0\\ 0&-1\\ 0&0\\ 1&1\\ 0&1 \end{bmatrix}\right\} \qquad (4.48)
$$

$$\mathcal{N}+A\mathcal{N}_2 = \left\{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right\}+\{0\}, \qquad \therefore \mathcal{W}_2=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad (4.49)$$

「B4」

$$W=\left[\begin{array}{cc|c}0&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{array}\right], \quad (CW)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix} \qquad (4.49)$$

W_1 | W_2

（注：$\mathcal{W}_0=\{0\}$ であるから，W_0 は除いてある。）

したがって，最短時間観測ゲイン N^* は次のように求まる。

$$N^* = W(CW)^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&-1\\0&-1&0\\0&-1&1\\1&2&-1\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad (4.50)$$

これが最短時間観測ゲインとしての性質（4.15）式を満足することは 次のようにして確認することができる。

$$\left.\begin{array}{l}\{(I_7-N^*C)\}=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&-1\\0&-2&-1&0&0&1&1\\0&-1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right\}=\mathcal{N}_0\\[2ex]\{(I_7-N^*C)A(I_7-N^*C)\}=\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\right\}=\mathcal{N}_1\\[2ex]\{((I_7-N^*C)A)^2\cdot(I_7-N^*C)\}=0_{7\times7}\end{array}\right\} \qquad (4.51)$$

次に，この（$I_7 - N^*C$）を最大階数分解することによって（4.33）および（4.34）式を満足する行列 M^* および P^* を求める。

$$(I_7 - N^*C) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}}_{M^*} \underbrace{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&-2&-1&0&0&1&1 \\ 0&-1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}}_{P^*} \qquad (4.52)$$

$$\mathrm{null}\,[P^*] = \mathrm{null}\,[(I_7 - N^*C)],\quad P^* : \text{full rank}$$

以上の準備により，定理 4.1 を用いて最短時間オブザーバ O^* を次のように構成することができる。

$$O^* \begin{cases} z(k+1) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ -2&1&2 \\ -1&0&1 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) & (4.53) \\ w(k) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&1&-1 \\ 0&-1&0 \\ 0&-1&1 \\ 1&2&-1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix} y(k) & (4.54) \end{cases}$$

この最短時間オブザーバ O^* の動作を，観測対象 $\mathcal{S}$ の任意な初期状態および入力列 $u(0) = u_0$，$u(1) = u_1$，$u(2) = u_2$，… に対して次のように検証することができる。

$$z(0) \triangleq \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},\quad y(0) = \begin{bmatrix} x_3 + x_5 \\ x_2 \\ x_5 + x_7 \end{bmatrix}$$

$$x(0) \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix},\quad w(1) = \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \\ z_4 + x_2 + x_3 - x_7 \\ z_2 - x_2 \\ -z_4 - x_2 + x_5 + x_7 \\ z_3 + 2x_2 + x_3 - x_7 \\ z_4 + x_2 \end{bmatrix},\quad e(0) = \begin{bmatrix} -z_1 \\ 0 \\ -z_4 - x_2 + x_7 \\ -z_2 + x_2 \\ z_4 + x_2 - x_7 \\ -z_3 - 2x_2 - x_3 + x_7 \\ -z_4 - x_2 + x_7 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_0$$

$$z(1)=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3+x_5 \\ -z_2+x_2-2x_3+2x_7+u_0 \\ -x_3-x_7+u_0 \end{bmatrix},\quad x(1)=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1+x_4 \\ x_5 \\ x_4+x_6 \\ x_1+x_7 \\ x_7+u_0 \end{bmatrix},\quad y(1)=\begin{bmatrix} x_1+2x_4+x \\ x_3 \\ x_4+x_6+x_7 \end{bmatrix}$$

$$w(1)=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1+x_4 \\ x_5 \\ x_4+x_6 \\ -z_2+x_1+x_2+x_4+x_7 \\ x_7+u_0 \end{bmatrix},\quad e(1)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_2+x_2+x_4 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_1$$

$$z(2)=\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1+2x_4+x_6 \\ -2x_1-2x_4-x_5+2x_7+2u_0+u_1 \\ -x_1-x_4+x_7+u_0+u_1 \end{bmatrix},\quad x(2)=\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1+x_4 \\ x_2+x_5 \\ x_4+x_6 \\ x_1+x_5+x_7 \\ -x_2+x_7+u_0 \\ x_7+u_0+u_1 \end{bmatrix}$$

$$y(2)=\begin{bmatrix} x_1+x_2+2x_5+x_7 \\ x_1+x_4 \\ x_1+x_5+2x_7+u_0+u_1 \end{bmatrix},\quad w(2)=\begin{bmatrix} x_3 \\ x_1+x_4 \\ x_2+x_5 \\ x_4+x_6 \\ x_1+x_5+x_7 \\ -x_2+x_7+u_0 \\ x_7+u_0+u_1 \end{bmatrix}=x(2)$$

$$e(2)=0_7=e(3)=\cdots\in\mathcal{N}_2=\{0\} \qquad (4.55)$$

最後に，この最短時間オブザーバ O^* を用いて線形関数最短時間オブザーバが容易に構成できることを示す。状態の線形関数として，

$$Hx(k)=\begin{bmatrix} 1&2&1&2&1&0&1 \\ 0&1&2&1&2&0&1 \end{bmatrix}x(k) \qquad (4.56)$$

を考えるとき，システム$\mathcal{S}$において次の関係が成立する。

$$H\mathcal{N}_1 = \{0_2\}, \quad \nu_H = 1 \qquad (4.57)$$

この最短時間オブザーバO^*の出力に行列Hを作用させたシステムO_H^*においては，次のように上式の最短時間性が満足される。

$$Hx(1) - Hw(1) = He(1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -z_2 + x_2 + x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.58)$$

したがって，O_H^*は線形関数最短時間オブザーバである。

他方，観測対象$\mathcal{S}$に対する次式で記述されるようなオブザーバ$\tilde{O}$，

$$\tilde{O}\begin{cases} \tilde{z}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{z}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) & (4.59) \\ \tilde{w}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{z}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} y(k) & (4.60) \end{cases}$$

を考えるとき，このオブザーバ$\tilde{O}$は$\mathcal{S}$の任意な初期状態および入力列に対して次のように動作する。

$$\tilde{e}(0) = \begin{bmatrix} -z_3 \\ 0 \\ -z_2 + z_3 - z_4 + x_3 \\ -z_1 + x_2 + x_4 \\ z_2 - z_3 + z_4 - x_3 \\ -z_2 + z_3 - 2z_4 + x_3 + x_6 - x_7 \\ -z_2 + z_3 - z_4 + x_3 \end{bmatrix} \notin \mathcal{N}_0, \quad \tilde{e}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -z_1 - z_3 + x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 \\ z_1 + z_3 - x_1 + x_2 - x_4 \\ -z_1 - 2z_3 + 2x_1 + x_2 + x_4 \\ -z_1 - z_3 + x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix} \notin \mathcal{N}_1$$

$$\tilde{e}(2) = 0_7 \in \mathcal{N}_2 \qquad (\text{ただし，} \tilde{e}(k) \triangleq x(k) - \tilde{w}(k)) \qquad (4.61)$$

このようにオブザーバ$\tilde{O}$は$\mathcal{S}$の状態の観測に対する最短時間性を満足しては

いるが，任意な時点における観測誤差空間 $\mathcal{E}_k(\tilde{\mathcal{O}})$ が k 非可決定空間 $\mathcal{N}_k$ に等しくなると言う最短時間オブザーバの性質を満足していないことがわかる。したがって，このオブザーバ $\tilde{\mathcal{O}}$ の出力に行列Hを作用させた観測システム $\tilde{\mathcal{O}}_H$ は線形関数 $Hx(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバとはならない。すなわち，

$$He(1)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+3x_2+x_4 \\ -z_1-z_3+x_1+5x_2+x_4 \end{bmatrix} \neq 0_2 \quad 。$$

第4.5節　あとがき

この章では「問題3」の最短時間観測問題について考察し，システム $\mathcal{S}$ を観測対象とする最短時間オブザーバの設計方法を明らかにした。この最短時間オブザーバは次の二つの特長をもっている。(i)観測が終了するまでの時間を最短にするだけでなく，すべての時点で観測誤差空間を最小にする，すなわち，最大限可能な観測を行なうようなオブザーバであり，(ii)観測対象 $\mathcal{S}$ の観測可能性とは無関係に常に設計可能である。その結果として，この章で設計した最短時間オブザーバが次章の出力フィードバック最短時間制御システムの構成に使用可能となる。なお，(i)の性質は従来の最短時間オブザーバの設計方法[67]においても殆んどの場合満足されている。これは観測における最短時間性を満足するためにすべての時点で最大限の観測を行なうような設計が考えられてきたからであると言える。

第5章　出力フィードバック最短時間制御問題

第5.1節　まえがき

この章では「問題4」の状態フィードバックが可能でない場合の最短時間制御問題について考察し，出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。状態フィードバックが可能であるときは，任意に与えられた初期状態の最短時間性を満足するような形で最短時間制御システムを構成することができるが，この仮定は工学的実現性の面で難点がある。したがって，状態フィードバックにはよらないで，より一般的な出力フィードバックによる最短時間制御システムの設計方法を明らかにする必要がある。「未知のものは制御できない」と言うのが制御の基本原則であるから，状態フィードバックが可能でないと言う状況下では，何んらかの手段で制御対象であるシステムの内部状態を知る必要がある。他方，前章で明らかにした最短時間オブザーバの存在は出力フィードバック最短時間制御システムが構成可能であることを予想させる。すなわち，第3章で求めた「問題2」の解である最短時間制御ゲイン F^* と，第4章で求めた「問題3」の解である最短時間オブザーバ O^* とを，縦続結合した制御器を用いて図5.1のように構成したフィードバックシステムが最短時間制御システムとなるのではないかと考えるのは当然の予想である。

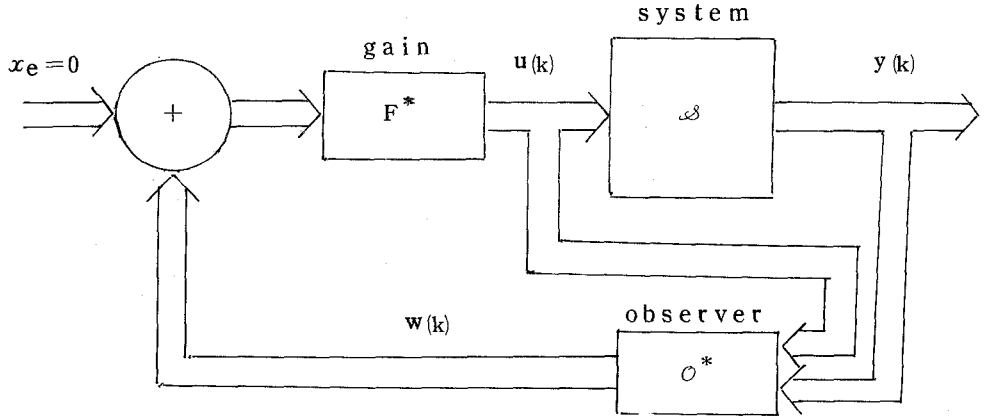

図5.1　F^* と O^* とを縦続結合した制御器を用いたフィードバックシステム

しかし，状態フィードバックが可能でないという状況下における制御の最短時間性は必らずしも明確でなく，この図5.1のフィードバックシステムが最短

時間制御システムであるという保証はない。何故ならば，ゲイン F^* とオブザーバ O^* の相互作用のもとでは，これらの合成が最適であるという判定が早急には下せないからである。このように出力フィードバック最短時間制御問題においては制御の問題と観測の問題とを同時にかつ同じ場で考えなければならない。ここでは，まず状態フィードバックが可能でないという状況下での制御の最短時間性を明確にし，次にその最短時間性を満足する制御ゲインとオブザーバとの組合せを求める。その結果として，最短時間制御ゲイン F^* と最短時間オブザーバ O^* との組合せがその最短時間性を満足すること，すなわち，図5.1のフィードバックシステムが求める出力フィードバック最短時間制御システムであることを明らかにする。これは出力フィードバック最短時間制御問題において制御と観測との分離性が成立するということを意味し，出力フィードバック最短時間制御システムの設計を容易にしている。出力フィードバックという状況下における最短時間性については，制御ゲインとオブザーバとの相互作用の結果として，観測に必要とする時間と制御に必要とする時間との和よりも短かい時間で全体としての制御が完了する場合があることを明らかにし，その機構の解明を試みる。最後に，構成された出力フィードバック最短時間制御システムの安定性についても考察する。

この章では，まず第5.2節で「問題4」の出力フィードバック最短時間制御問題を定式化する。任意な制御ゲインと任意なオブザーバとを組合せた出力フィードバックシステムを用意し，「初期状態を任意としたときのシステム全体としての最短時間性を満足するような制御ゲインとオブザーバの組合せを求めよ」という形で問題を定式化する。次に第5.3節でこの問題について考察し，最短時間制御ゲインと最短時間オブザーバの組合せが求めるものであることを明らかにする。さらに，この組合せで構成したフィードバックシステムの安定性について考察し，安定な出力フィードバック最短時間制御システムを設計する。第5.4節では簡単な例題を用いて得られた結果を検証するとともに，出力フィードバック最短時間制御システムの動作機構を明らかにする。

この問題に関する従来の研究については第1章でくわしく述べたので，ここでは省略する。

（本章の内容は，「公表文献表」（pp. Ⅲ　）中の（8）および（9）に依っている。）

第5.2節　問題の記述

この節では「問題4」の出力フィードバック最短時間制御問題を定式化する。制御対象のシステム $\mathcal{S}$ において状態フィードバックが可能でないとき，何んらかの手段で $\mathcal{S}$ の状態を知る必要がある。第4.2節で用意した（4.1）および（4.2）式で記述される $\mathcal{S}$ に対する任意な オブザーバ $\mathcal{O}$ を，このために用いることにし，これに第3.2節で用意した（3.1）式で記述される任意な状態フィードバック制御ゲイン F を縦続結合したものを，制御器として用いる。この制御器を用いて，制御対象であるシステム $\mathcal{S}$ に対して 次のような出力フィードバック制御法則，

$$u(k) = F\,w(k) = FM\,z(k) + FN\,y(k) \qquad (5.1)$$

をほどこして，図5.2のように構成したフィードバックシステムを $\mathcal{S}(F, \mathcal{O})$ で表わす。システム $\mathcal{S}$ およびオブザーバ $\mathcal{O}$ のシステム方程式より，フィード

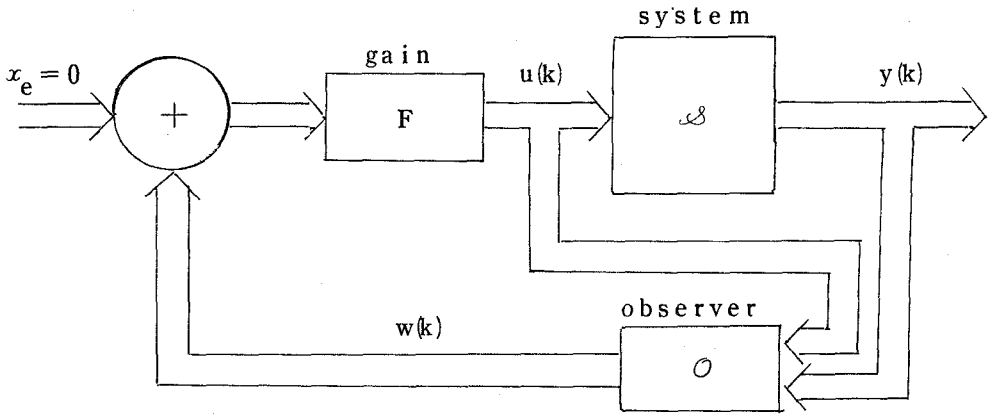

図5.2　フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, \mathcal{O})$ の構造

バックシステム $\mathcal{S}(F, \mathcal{O})$ のシステム方程式は次のように与えられる。

$$\mathcal{S}(F, \mathcal{O}) \begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + BF\,w(k) & (5.2) \\ z(k+1) = J\,z(k) + K\,y(k) + LF\,w(k) & (5.3) \\ y(k) = C\,x(k) & (5.4) \\ w(k) = M\,z(k) + N\,y(k) & (5.5) \end{cases}$$

上式の関係を整理すると次のようになる。

$$\mathcal{S}(F, \mathcal{O}) \left\{ \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BFNC & BFM \\ K+LFN & J+LFM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \right. \qquad (5.6)$$

$$\left\{ \quad y(k) = [C,\ O] \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \right. \qquad (5.7)$$

このフィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ を用いて出力フィードバック最短時間制御問題を次のように定式化する。

「問題4：出力フィードバック最短時間制御問題」

フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，任意に与えられた未知の $\mathcal{S}$ および O の初期状態に対して，システム $\mathcal{S}$ の出力を常に零に整定するのに必要な最小の制御ステップ数を求めよ。以下これを出力フィードバック最小整定ステップ数と呼び，ω_{min} で表わす。すなわち，

$$\omega_{min} \triangleq \min \{ \omega \mid y(\omega+\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \cdots \quad \forall x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n, \ z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^\lambda \}。 \qquad (5.8)$$

次に，この出力フィードバック最小整定ステップ数を満足するように，出力を零に整定する制御ゲインとオブザーバとの組合せを求めよ。以下このような出力フィードバックにおける最短時間性を満足する制御ゲインとオブザーバとの組合せを最短時間制御器と呼び，(F_{min}, O_{min}) で表わす。すなわち，フィードバックシステム $\mathcal{S}(F_{min}, O_{min})$ において，

$$y(\omega_{min} + \alpha) = 0 \qquad \alpha = 0, 1, \cdots \quad \forall x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n, \ z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^\lambda \qquad (5.9)$$

となるような (F_{min}, O_{min}) を求めよ。

この定式化においては個々の初期状態に対する最短時間性を満足することは必らずしも要求しておらず，初期状態を任意としたときの，全体としての制御ステップ数 ω を最小にすることを要求している。状態フィードバックが可能な場合には個々の初期状態に対する最短時間性を満足する制御が可能であったが，初期状態が未知である出力フィードバック最短時間制御問題においては，上のように初期状態を任意としたときの全体としての制御ステップ数を最小にするように，問題を定式化するのが最も自然であり，その結果として制御と観測との分離性が成立するのである。最適レギュレータ問題のように最適な評価関数値が初期状態の関数となるような問題においては，制御と観測との分離は不可能であることが良く知られており[68)~71)]，上の問題においても個々の初期状態に対する最短時間性を満足させようとすると制御と観測との分離は不可能となり，時変な制御器を必要とする[30)~32)]。時不変なシステムを時変な制御器を用いて制

御するのは如何にも不自然であり，上のように問題を定式化するのが妥当であると言える。

第5.3節　出力フィードバック最短時間制御システムの設計

この節では「問題4」の出力フィードバック最短時間制御問題について考察し，安定な出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにする。まず，前節の定式化において用いた任意な制御ゲインと任意なオブザーバとを縦続結合して構成したフィードバックシステム$\mathcal{S}(F, O)$において，有限ステップ数で出力を零に整定できるための必要条件を求める。次に，この必要条件を満足する最小のステップ数で出力を零に整定することが可能であることを示し，この最小のステップ数が求める出力フィードバック最小整定ステップ数であること，およびこの必要条件が十分条件でもあることを明らかにする。しかも，この出力フィードバックという状況下における最短時間性を満足する制御器が「問題2」の最短時間制御ゲインと「問題3」の最短時間オブザーバとを縦続結合することによって得られることを示し，この問題において制御と観測との分離が可能であることを明らかにする。

まず，フィードバックシステム$\mathcal{S}(F, O)$において有限ステップ数で出力を零に整定するのに必要な条件を，第2章で導入したk出力可整定空間およびk非可決定空間を用いて示したものが次の補題である。

〈補題5.1〉

フィードバックシステム$\mathcal{S}(F, O)$において，これを構成する制御対象$\mathcal{S}$およびオブザーバOの任意な初期状態に対し，時点ωで$\mathcal{S}$の出力が零に整定することが可能である，すなわち，

$$y(\omega+\alpha) = 0 \qquad \alpha = 0, 1, \cdots$$
$$\forall\ x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^\lambda \qquad (5.10)$$

とすることが可能であるためには次の三つの条件が成立しなければならない。

（条件A）　$\mathcal{K}_\mu = \mathcal{V}^n$　　，　$\omega \geq \mu$　　(5.11)

（条件B）　$\mathcal{N}^* \supset \mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}_\nu$　　$\omega \geq \nu$　　(5.12)

（条件C）　$\mathcal{K}_i \supset A\mathcal{N}_{\omega-1-i}$　，　$i = 0, 1, \cdots, \mu$　　(5.13)

ここで，$\mathcal{K}_k$は第2.3節で導入したk出力可整定空間（補題2.1，定義2.2参照），$\mathcal{N}^*$は観測行列Cの零空間に含まれる最大の（A，B）不変部分空間（補

題 2.2 参照），および $\mathcal{N}_k$ は第 2.4 節で導入した k 非可決定空間（定義 2.4，補題 2.3 参照）である。

（証明） フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，これを構成するシステム $\mathcal{S}$ および O の任意な初期状態 $x(0)=x_0 \in \mathcal{V}^n$ および $z(0)=z_0 \in \mathcal{V}^\lambda$ に対して，システム $\mathcal{S}$ の k 時点における状態 $x(k)$ のすべての集合を $\{x(k)\}$ で表わす。システム $\mathcal{S}(F, O)$ のシステム方程式（5.6）式より，$\{x(k)\}$ が部分空間を形成することは明らかである。

（i） まず（条件A）を示す。システム $\mathcal{S}(F, O)$ において，

$$y(\omega+\alpha)=0, \quad \alpha=0, 1, \cdots, \quad \forall x(0)=x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad z(0)=z_0 \in \mathcal{V}^\lambda$$

となるためには，補題 2.2 の（ii）より，$\{x(\omega+\alpha)\} \subset \mathcal{N}^*$, $\alpha=0, 1, 2, \cdots$ が成立しなければならない。$\mathcal{X}_k$ は k ステップで $\mathcal{N}^*$ へ制御可能なすべての状態の集合であるから，この関係が成立するためには，

$$\begin{cases} \{x(\omega-j)\} \subset \mathcal{X}_j, & j=0, 1, \cdots, \omega \qquad (5.14) \\ \{x(\omega+\alpha)\} \subset \mathcal{X}_0=\mathcal{N}^* & \alpha=0, 1, \cdots \qquad (5.15) \end{cases}$$

が成立しなければならない。$\mathcal{S}$ の初期状態 $x(0)=x_0 \in \mathcal{V}^n$ は任意であるから，$\{x(0)\}=\mathcal{V}^n$ となり，（5.15）式において $j=\omega$ のときを考えると，

$$\{x(0)\}=\mathcal{V}^n \subset \mathcal{X}_\omega \qquad (5.16)$$

が成立しなければならない。これに出力可整定指数 μ の定義より（補題 2.1 および定義 2.2 参照），$\omega \geq \mu$ の関係は明らかである。これで（条件A）は示された。

（ii） （条件B）および（条件C）を示す。まず準備として，フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，次の関係，

$$\{x(k+1)\} \supset A\mathcal{N}_k, \quad k=0, 1, \cdots \qquad (5.17)$$

が恒等的に成立することを示す。出力フィードバック制御法則（5.1）より，

$$x(k+1)=Ax(k)+BFw(k)$$
$$=(A+BF)x(k)-BFe(k) \qquad \because e(k) \triangleq x(k)-w(k)$$

であるから，フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，

$$\{x(k+1)\}=(A+BF)\{x(k)\}+BF\mathcal{E}_k(O) \qquad (5.18)$$

なる関係が成立する。さらに，状態空間 $\mathcal{V}^n$ の任意な部分空間 $\mathcal{T}$ および行列 F について次の関係，

$$(A+BF)\mathcal{T}+BF\mathcal{T} \supset A\mathcal{T} \qquad (5.19)$$

が恒等的に成立することに留意しておく。以上の準備により，数学的帰納法を用いて（5.17）式が成立することを示す。k＝0 について，（5.18）より

$$\{x(1)\}=(A+BF)\{x(0)\}+BF\mathcal{E}_0(O)$$
$$=(A+BF)\mathcal{V}^n+BF\mathcal{E}_0(O) \qquad \because \{x(0)\}=\mathcal{V}^n$$
$$\supset(A+BF)\mathcal{N}_0+BF\mathcal{N}_0 \qquad \because \text{補題 4.1 の（4.10）式}$$
$$\supset A\mathcal{N}_0 \qquad \because (5.19)$$

となり，成立することが示せる。k＝β について成立する，すなわち，

$$\{x(\beta+1)\}\supset A\mathcal{N}_\beta \qquad (5.20)$$

が成立すると仮定して，k＝β＋1 について考える。（5.18）式より，

$$\{x(\beta+2)\}=(A+BF)\{x(\beta+1)\}+BF\mathcal{E}_{\beta+1}(O)$$
$$\supset(A+BF)A\mathcal{N}_\beta+BF\mathcal{E}_{\beta+1}(O) \qquad \because (5.20)$$
$$\supset(A+BF)\mathcal{N}_{\beta+1}+BF\mathcal{N}_{\beta+1}$$
$$\because \text{補題 2.3 の（2.56）および補題 4.1 の（4.10）}$$
$$\supset A\mathcal{N}_{\beta+1} \qquad \because (5.19)\text{式}$$

となり，成立することが示せる。したがって，任意な k について（5.17）式が成立する。この（5.17）式の関係を用いて（条件B）および（条件C）を示す。フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，$\mathcal{S}$ および O の任意な初期状態に対して時点 ω で出力が零に整定できるためには（5.14）および（5.15）式が成立しなければならない。したがって，これに（5.17）式の関係を代入して，

$$\mathcal{K}_j\supset\{x(\omega-j)\}\supset A\mathcal{N}_{\omega-1-j} \qquad j=0,\ 1,\ \cdots,\ \omega \qquad (5.21)$$

$$\mathcal{K}_0\supset\{x(\omega+\alpha)\}\supset A\mathcal{N}_{\omega-1+\alpha} \qquad \alpha=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.22)$$

が成立しなければならないことになる。これに補題 2.1 の（ii）および定義 2.2 の出力可整定性指数の定義を考慮すると，上式の関係は等価的に，

$$\mathcal{K}_i\supset A\mathcal{N}_{\omega-1-i} \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu \qquad (5.23)$$

$$\mathcal{K}_0=\mathcal{N}^*\supset A\mathcal{N}_{\omega-1+\alpha} \qquad \alpha=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.24)$$

と書き直すことができ，（条件C）が示せる。最後に（条件B）を示す。（5.24）式より，$\mathcal{N}\supset\mathcal{N}^*\supset A\mathcal{N}_{\omega-1}$ であるから，

$$\mathcal{N}_\omega=\mathcal{N}\cap A\mathcal{N}_{\omega-1}=A\mathcal{N}_{\omega-1} \qquad \because \text{補題 2.3 の（i）}$$

となり，次の関係が成立する。

$$\mathcal{N}_{\omega+\alpha} = \mathcal{N} \cap A\mathcal{N}_{\omega+\alpha-1} = \mathcal{N}_{\omega} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.25)$$

したがって，補題 2.3 の（ii）における可決定性指数 ν の定義より，

$$^{*}\supset A\mathcal{N}_{\omega-1} = \mathcal{N}_{\omega} = \mathcal{N}_{\nu}\ , \qquad \omega \geq \nu \qquad (5.26)$$

が成立する。これですべて証明された。

（証明終）

この補題はフィードバックシステム $\Sigma(F, G)$ において出力を零に整定するための必要条件を与えているが，これらの中で（条件A）は第3章で仮定した，〈仮定1：制御のための仮定〉であり，この（条件A）が満足されることは既に保証されている。一方，（条件B）は観測に関する条件であるが，第4章では何んの仮定もなしに最短時間オブザーバを構成したから，（条件B）が満足されるという保証はまだない。したがって，ここでシステム Σ に対する観測のための仮定を設けて（条件B）が満足されることを保証する。

〈仮定2：観測のための仮定〉

システム Σ の非可決定空間 $\mathcal{N}_{\nu}$ は出力整定空間 $\mathcal{N}^{*}$ に含まれる。

$$\mathcal{N}^{*} \supset \mathcal{N}_{\nu} \qquad (5.27)$$

補題5.1の最後の条件である（条件C）は出力が零に整定する時点 ω の満足するべき条件を与えるものであるが，〈仮定2：観測のための仮定〉のもとでこの（条件C）を満足する有限な ω が存在する。これを次の補題で示す。

〈補題5.2〉

システム Σ において，

〈仮定2：観測のための仮定〉 $\mathcal{N}^{*} \supset \mathcal{N}_{\nu}$ （条件B）

が成立するとき，補題5.1の（条件C）を満足する有限な正整数，

$$\begin{cases} \omega^{*} \triangleq \min\{\ \omega \mid \mathcal{K}_{i} \supset A\mathcal{N}_{\omega-1-i}\ ,\quad i \in \underline{\mu}\ \} & (5.28) \\ \mu + \nu \geq \omega^{*} \geq \max(\mu, \nu) & (5.29) \end{cases}$$

が存在する。以下ではこれを出力フィードバック出力可整定性指数と呼ぶ。

（証明） $\omega = \mu + \nu$ とすると，〈仮定2〉および補題2.3の（ii）より，

$$\mathcal{N}^{*} \supset \mathcal{N}_{\nu} = A\mathcal{N}_{\nu+\alpha} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.30)$$

となるから，これに補題2.1の（ii）の関係を適用すると，

$$\mathcal{K}_{\mu} \underset{+}{\supset} \mathcal{K}_{\mu-1} \underset{+}{\supset} \cdots \underset{+}{\supset} \mathcal{K}_{0} = \mathcal{N}^{*} \supset A\mathcal{N}_{\nu+\alpha} \qquad (5.31)$$

となり，有限な $\omega^* \leq \mu + \nu$ の存在することが示せる。さらに（条件A）および（条件B）より，$\omega^* \geq \max(\mu, \nu)$ でなければならないことは明らかである。したがって，〈仮定2〉のもとで（条件C）を満足する有限な出力フィードバック出力可整定性指数 ω^* が（5.24）式の範囲で存在する。

（証明終）

このように（条件C）は（条件B）の中に必要条件としては含まれるが，この（条件C）は出力フィードバック最小整定ステップ数 ω_{min} を与える基本的な条件として重要な役割を果すことが以下で明らかになる。

フィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において，これを構成する制御対象 $\mathcal{S}$ およびオブザーバ O の任意な初期状態に対して時点 ω で出力を零に整定することが可能であるための必要条件が（条件A），（条件B）および（条件C）である。〈仮定1〉および〈仮定2〉により（条件A）および（条件B）が満足されるとき，（条件C）を満足する最小の数である出力フィードバック出力可整定性指数 ω^* で制御対象 $\mathcal{S}$ の出力を零に整定する，すなわち，

$$y(\omega^* + \alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \cdots \quad \forall\, x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n, \quad z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^\lambda$$

とすることが可能であるならば，この ω^* が求める「問題4」の出力フィードバック出力最小整定ステップ数 ω_{min} であると言うことができる。このように時点 ω^* で出力を零に整定するような制御ゲインとオブザーバとが〈仮定1〉および〈仮定2〉のもとで存在することを次に示す。しかも「問題2」の最短時間制御ゲイン F^* と「問題3」の最短時間オブザーバ O^* とを縦続結合して構成したフィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ が，この時点 ω^* で出力を零に整定すると言うことを明らかにする。したがって，（条件A）および（条件B）は十分条件でもあると言うことになる。次の定理が以上のことを示す「問題4」に対する基本的な結果である。

〈定理5.1〉

（i）「問題4」の解である出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_{min}, O_{min})$ が存在するための必要十分条件は，

〈仮定1：制御のための仮定〉　$\mathcal{K}_\mu = \mathcal{V}^n$ ，

〈仮定2：観測のための仮定〉　$\mathcal{N}^* \supset \mathcal{N}_\nu$ ，

が成立することである。

（ii）出力フィードバック最小整定ステップ数 ω_{min} は次式で与えられる。

$$\omega_{min} = \omega^* \left(\triangleq \min \{ \omega \mid \mathcal{K}_i \supset A\mathcal{N}_{\omega-1-i}, \quad i \in \underline{\mu} \} \right)$$

(ⅲ) 〈仮定1〉および〈仮定2〉のもとで「問題2」の解である最短時間制御ゲイン F^* と「問題3」の解である最短時間オブザーバ O^* とが存在し，これらを用いて図5.3のように構成したフィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ は出力フィードバック最短時間制御システムとなる。すなわち，フィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ において，

$y(\omega_{min} + \alpha) = 0$, $\alpha = 0, 1, \cdots$, $\forall\ x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n$, $z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^{n-}$

となる。したがって，任意な最短時間制御ゲイン $F^* \in \mathcal{F}^*$ と任意な最短時間オブザーバ O^* とを縦続結合したものは最短時間制御器となる。すなわち，

$$(F^*, O^*) \in \{ (F_{min}, O_{min}) \} \qquad (5.33)$$

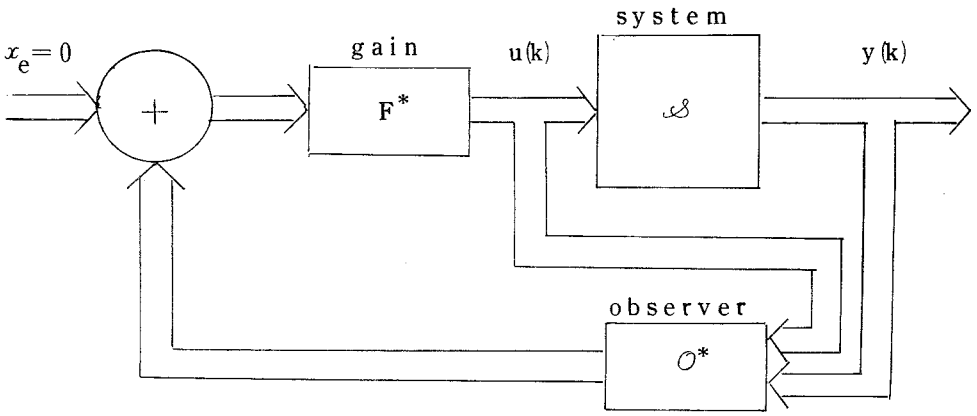

図5.3 出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$

(証明) (ⅰ)補題5.1より，〈仮定1〉および〈仮定2〉が必要条件であることは明らかである。〈仮定1〉および〈仮定2〉が十分条件であることは，これらの仮定のもとで，

$y(\omega_{min} + \alpha) = 0$, $\alpha = 0, 1, \cdots$ $\forall\ x(0) = x_0 \in \mathcal{V}^n$, $z(0) = z_0 \in \mathcal{V}^\lambda$

とすることができるような制御ゲイン F_{min} とオブザーバ O_{min} とが存在することを示せば良い。それを次に(ⅱ)および(ⅲ)で示す。

(ⅱ)および(ⅲ)：補題5.1の(条件C)はフィードバックシステム $\mathcal{S}(F, O)$ において時点 ω で出力を零に整定することができるための必要条件であるから，それを満足する最小の正整数として補題5.2で定めた出力フィードバッ

ク出力可整定性指数の ω^* 時点で出力を零に整定することができれば，この ω^* が求める出力フィードバック最小整定ステップ数 ω_{min} である，すなわち，$\omega_{min} = \omega^*$ であると言うことができる。〈仮定1〉のもとで最短時間制御ゲイン F^* が存在することは定理3.1より明らかである。次に定理4.1により最短時間オブザーバ O^* が常に存在する。更に〈仮定2〉により，補題5.2で与えられる出力フィードバック出力可整定性指数 ω^* が存在する。この最短時間制御ゲイン F^* と最短時間オブザーバ O^* と縦続結合して図5.3のように構成したフィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ において，

$$y(\omega^*+\alpha)=0\ ,\quad \alpha=0,1,\cdots \qquad \forall\ x(0)=x_0\in\mathcal{V}^n,\quad z(0)=z_0\in\mathcal{V}^{n-m}$$

とすることが可能であることを，示すことができれば，(ii)および(iii)が証明されたことになる。以下にそれを示す。

補題5.1の証明の過程で用いたのと同じく次のような記号を用意する。フィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ において，制御対象 $\mathcal{S}$ とオブザーバ O^* の任意な初期状態に対して時点kで制御対象 $\mathcal{S}$ が取り得るすべての状態の集合を $\{x(k)^*\}$ で表わすことにする。この $\{x(k)^*\}$ に対しても補題5.1の証明で用いた(5.18)式と同じ関係，

$$\{x(k+1)^*\}=(A+BF^*)\{x(k)^*\}+BF^*\mathcal{E}_k(O^*) \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.34)$$

が成立することは明らかである。さらに，これに最短時間オブザーバ O^* が満足すべき性質，$\mathcal{E}_k(O^*)=\mathcal{N}_k$ (定義4.1，(4.15)式)を適用すると，

$$\{x(k+1)^*\}=(A+BF^*)\{x(k)^*\}+BF^*\mathcal{N}_k \qquad k=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.35)$$

なる関係が成立する。この関係をもとに次の時点，

$$\tau^* \triangleq \omega^* - \mu \qquad (5.36)$$

を初期時点と見なしたフィードバックシステム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ の動作について考える。(5.35)式および最短時間制御ゲイン F^* の性質(3.4)式より，

$$\begin{aligned}
\{x(\tau^*+1)^*\} &= (A+BF^*)\{x(\tau)^*\}+BF^*\mathcal{N}_{\tau^*} \\
&\subset (A+BF^*)\mathcal{X}_\mu+BF^*\mathcal{N}_{\tau^*} && \because \{x(\tau)^*\}\subset\mathcal{X}_\mu=\mathcal{V}^n \\
&\subset \mathcal{X}_{\mu-1}+BF^*\mathcal{N}_{\tau^*} && \because (3.4) \\
&= \mathcal{X}_{\mu-1} && \because (5.38)\text{注意}
\end{aligned} \qquad (5.37)$$

が成立する。

（注意：証明は後述するが，次の関係，

$$\mathcal{X}_{\mu-1-i} \supset BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+i}\ , \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu-1 \qquad (5.38)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* \supset BF^*\mathcal{N}_{\omega^*+\alpha}\ , \qquad \alpha=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.39)$$

を用いた。）

以下同じように計算を繰返すと，

$$\begin{aligned}\{x(\tau^*+2)^*\} &= (A+BF^*)\{x(\tau^*+1)^*\} + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+1}\\ &\subset (A+BF^*)\mathcal{X}_{\mu-1} + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+1} && \because (5.37)\\ &\subset \mathcal{X}_{\mu-2} + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+1} && \because (3.4)\\ &= \mathcal{X}_{\mu-2} && \because (5.38)\end{aligned}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\begin{aligned}\{x(\tau^*+\mu)^*\} &= \{x(\omega^*)^*\}\\ &= (A+BF^*)\{x(\tau^*+\mu-1)^*\} + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+\mu-1}\\ &\subset (A+BF^*)\mathcal{X}_1 + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+\mu-1}\\ &\subset \mathcal{X}_0 + BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+\mu-1} && \because (3.4)\\ &\subset \mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* && \because (5.38) \qquad (5.40)\end{aligned}$$

となり，この時点ω^*でフィードバックシステム$\mathcal{S}(F^*, O^*)$の出力が零になることがわかる。さらに計算を続けて出力が零に整定されることが次のように確認できる。

$$\begin{aligned}\{x(\omega^*+1)^*\} &= (A+BF^*)\{x(\omega^*)^*\} + BF^*\mathcal{N}_{\omega^*}\\ &\subset (A+BF^*)\mathcal{X}_0 + BF^*\mathcal{N}_{\omega^*} && \because (5.40)\\ &\subset \mathcal{X}_0 + BF^*\mathcal{N}_{\omega^*} && \because (3.4)\\ &\subset \mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* && \because (5.39)\end{aligned}$$

以下全く同じようにして，

$$\{x(\omega^*+\alpha)^*\} \subset \mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* \qquad \alpha=0,\ 1,\ \cdots \qquad (5.41)$$

が成立することは明らかである。したがって，フィードバックシステム$\mathcal{S}(F^*, O^*)$において，

$$y(\omega^*+\alpha)=0 \qquad \alpha=0,\ 1,\cdots \qquad \forall\ x(0)=x_0\in\mathcal{V}^n,\ z(0)=z_0\in\mathcal{V}^{n-m}$$

となることが証明できた。最後に残された（5.38）および（5.39）式の関係を証明する。最短時間制御ゲイン F^* を与える定理 3.1 により，

$$\begin{aligned} BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+i} &= B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset A\mathcal{N}_{\tau^*+i} \\ &\subset B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset\mathcal{X}_{\mu-i} \qquad \because \text{補題 5.2 の（5.28）} \\ &\qquad i=0,\ 1,\cdots,\ \mu-1 \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} BF^*\mathcal{N}_{\omega^*+\alpha} &= B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset A\mathcal{N}_{\omega^*+\alpha} \\ &\subset B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset\mathcal{X}_0 \\ &\qquad \alpha=0,\ 1,\cdots \qquad \because \text{補題 5.2 の（5.28）式} \end{aligned} \tag{5.43}$$

が成立する。他方，補題 3.2 の結果および証明の過程より，

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{B}}_{2\cdot e} \triangleq \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{X}_e \\ \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}_{1\cdot e} \oplus \overline{\mathcal{B}}_{2\cdot e} \end{cases} \qquad e=0,\ 1,\cdots,\ \mu-1 \tag{5.44}$$

とすると，

$$\mathcal{B}+\mathcal{X}_e=\overline{\mathcal{B}}_{1\cdot e}\oplus\overline{\mathcal{B}}_{2\cdot e}\oplus\overline{\mathcal{X}}_0\oplus\overline{\mathcal{X}}_1\oplus\cdots\oplus\overline{\mathcal{X}}_e \tag{5.45}$$

$$\mathcal{X}_e=\overline{\mathcal{B}}_{2\cdot e}\oplus\overline{\mathcal{X}}_0\oplus\overline{\mathcal{X}}_1\oplus\cdots\oplus\overline{\mathcal{X}}_e \tag{5.46}$$

が成立する。したがって，$x_e\in\mathcal{X}_e$ ならば，

$$x_e=B\Gamma_{2\cdot e}\overline{b}_2+\overline{X}_0\overline{x}_0+\overline{X}_1\overline{x}_1+\cdots+\overline{X}_e\overline{x}_e \tag{5.47}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\mathcal{B}}_{2\cdot e}=\text{range}\,[B\Gamma_{2\cdot e}],\quad \Gamma_{2\cdot e}:\text{full rank} \\ &\overline{\mathcal{B}}_{1\cdot e}=\text{range}\,[B\Gamma_{1\cdot e}],\quad \Gamma_{1\cdot e}:\text{full rank} \\ &\overline{\mathcal{B}}=\text{range}\,[B\Gamma],\quad \Gamma=[\Gamma_{1\cdot e},\ \Gamma_{2\cdot e}] \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

$$\overline{X}_\ell\triangleq\text{base}\,[\overline{\mathcal{X}}_\ell] \qquad \ell=0,\ 1,\cdots,\ e \tag{5.49}$$

と書ける。これを用いると，補題 3.2 の $\emptyset$ の定義（3.17）式より，

$$\begin{aligned} B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset x_e &= B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset(B\Gamma_{2\cdot e}\overline{b}_2+\overline{X}_0\overline{x}_0+\cdots+\overline{X}_e\overline{x}_e) \\ &= B\Gamma(\emptyset B\Gamma)^{-1}\emptyset B\Gamma_{2\cdot e}\overline{b}_2 \\ &\qquad \because \emptyset\overline{\mathcal{X}}_e=\{0\} \qquad e=0,\ 1,\cdots,\ \mu \quad (3.32)\text{式} \end{aligned}$$

$$= B\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}B\Gamma\begin{bmatrix}0\\ \bar{b}_2\end{bmatrix} = B\Gamma\begin{bmatrix}0\\ \bar{b}_2\end{bmatrix}$$

$$= B\Gamma_{2\cdot e}\bar{b}_2$$

$$\in \bar{\mathcal{B}}_{2\cdot e} \subset \mathcal{K}_e \qquad \because (5.44) \qquad (5.50)$$

となり，

$$B\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}\mathcal{K}_e \subset \mathcal{K}_e \qquad e=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu-1 \qquad (5.51)$$

が成立する。したがって，この関係を（5.42）および（5.43）式へ適用すると，（5.38）および（5.39）式の成立することが次のように示せる。

$$BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+i} \subset B\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{O}\mathcal{K}_{\mu-i} \subset \mathcal{K}_{\mu-i} \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ \mu-1$$

$$BF^*\mathcal{N}_{\omega^*+\alpha} \subset B\Gamma(\mathcal{O}B\Gamma)^{-1}\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0 = \mathcal{N}^*$$

以上ですべて証明された。

（証明終）

この定理は「問題4」の出力フィードバック最短時間制御問題に対する基本的な結果を多く含んでいるが，これを整理して以下に述べる。まず状態フィードバックが可能でないと言う状況下における制御量である出力に対する最短時間性を明確にした。すなわち，制御対象のシステム$\mathcal{S}$に対して補題5.2で一意に定まる出力フィードバック出力可整定性指数ω^*がそれである。これは，

$$\mu+\nu \geq \omega^* = \omega_{min} \geq \max(\mu,\ \nu)$$

によって抑えられる。この関係は観測に必要とするステップ数νと制御に必要とするステップ数μとの和$\mu+\nu$よりも少ないステップ数で，全体としての制御が完了する場合のあることを示唆している。この定理の前提条件の一つである〈仮定2：観測のための仮定〉は非可決定空間$\mathcal{N}_\nu$が$\{0\}$となることを必らずしも要求しておらず，状態を誤差なく決定することができなくても出力を零に整定することが可能であることを示している。さらに，出力フィードバック最短時間制御システム$\mathcal{S}(F^*, \mathcal{O}^*)$においては$\tau^* \triangleq \omega^*-\mu$時点から有効な制御が開始されているが，補題5.2の（5.29）式より，$\omega^* \leq \mu+\nu$であるから，このτ^*については次の関係が成立することは明らかである。

$$\tau^* \leq \nu \qquad (2.52)$$

したがって，$\mathcal{S}(F^*, \mathcal{O}^*)$においては観測が完了する時点$\nu$以前の時点$\tau^*$から有効な制御が開始されていることになる。これと前の可決定でなくても出力

が零に整定できると言うことは制御ゲインとオブザーバの相互作用の結果であり，これを次のように解釈することができる。$\mathcal{S}(F^*, O^*)$の時点τ^*における観測誤差の影響は上の定理の証明の（5.35）式より，$BF^*\mathcal{N}_{\tau^*}$で表わされる。これがその時点τ^*における制御$(A+BF^*)\mathcal{X}_\mu \subset \mathcal{X}_{\mu-1}$に悪影響を及ぼさなければ，すなわち，$\mathcal{X}_{\mu-1} \supset BF^*\mathcal{N}_{\tau^*}$ならば，この$\tau^*$時点における制御は有効となる。以下同じことが継続する，すなわち，

$$\mathcal{X}_i \supset BF^*\mathcal{N}_{\tau^*+\mu-1-i}, \quad i=0, 1, \cdots, \mu-1 \qquad (5.53)$$

が成立するならば，τ^*時点からμステップ後の$\omega^* \triangleq \tau^*+\mu$時点で出力が零に整定する。上式で与えられる$\tau^*$時点に始まる継続時点での制御が有効となるための条件を制御ゲインFとオブザーバOとに無関係な形で表わし，開始時点を$\omega-\mu$としたのが（条件C）である。したがって，この（条件C）を満足する最小の数である出力フィードバック出力可整定性指数ω^*が出力フィードバック最小整定ステップ数ω_{min}となり，これがμ＋ν以下となる場合が生じ得るのである。次に問題となるのはこの出力フィードバックにおける最短時間性を満足する制御ゲインF_{min}とオブザーバO_{min}を設計する問題であるが，これについては制御の問題と観測の問題とが分離可能であると言う出力フィードバック最短時間制御システムの設計上極めて有用な結果が得られた。すなわち，制御ゲインとしては第3章で設計した「問題2」の最短時間制御ゲインF^*を，オブザーバとしては第4章で設計した「問題3」の最短時間オブザーバO^*を，用いて図5.3のように構成したシステム$\mathcal{S}(F^*, O^*)$が出力フィードバック最短時間制御システムとなることを明らかにした。これは第5.2節で出力フィードバック最短時間制御問題を個々の初期状態の最短時間性ではなく，初期状態を任意としたときの全体としての制御の最短時間性を満足させるように定式化したからであり，第5.2節における問題の定式化の妥当性を示していると考えられる。この定理の証明から明らかなように，最短時間制御ゲインF^*は（3.4）および（3.5）式を満足するような各時点で最大限可能な制御を行なう制御ゲインであり，最短時間オブザーバO^*は（4.4）式を満足するような各時点で最大限可能な観測を行なうオブザーバである。その意味でフィードバックシステム$\mathcal{S}(F^*, O^*)$は出力フィードバックと言う状況下において各時点で最大限可能な制御を行なっていると言える。

定理5.1で設計した出力フィードバック最短時間制御システム$\mathcal{S}(F^*, O^*)$

は最短時間制御ゲイン F^* と最短時間オブザーバ O^* とを縦続結合したものを最短時間制御器として用いている。系 4.1 によれば，この最短時間制御器は線形関数 $F^*x(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバとなっていることは明らかである。したがって，線形関数最短時間オブザーバを用いても出力フィードバック最短時間制御システムが構成可能であることが当然考えられる。これを次に示す。

〈系 5.1〉

最短時間制御ゲイン F^* が表わす線形関数 $F^*x(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバ O^*_* を用いて図 5.4 のように構成したフィードバックシステムを $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ で表わすと，このフィードバックシステム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ は出力フィードバック最短時間制御システムである[注]。

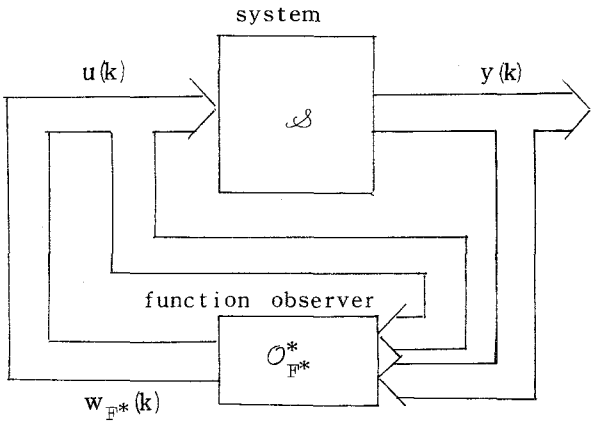

図 5.4　線形関数オブザーバ $O^*_{F^*}$ を用いた
出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$

（証明）　前章の系 4.1 より，最短時間制御ゲイン F^* と最短時間 オブザーバ O^* とを縦続結合した最短時間制御器は線形関数 $F^*x(k)$ に対する 線形関数最短時間オブザーバとして機能する。したがって，線形関数 $F^*x(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバ $O^*_{F^*}$ を用いて構成したフィードバックシステム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ は定理 5.1 で与えた出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ と全く同じ動作をする。すなわち，フィードバックシステム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ は出力フィードバック最短時間制御システムである。　（証明終）

脚注：ここでの $O^*_{F^*}$ は，必らずしも最短時間オブザーバ O^* の出力に F^* を作用させたものとは限らない，任意な（4.42）式を満足する線形関数最短時間オブザーバである。以下ではこのように $O^*_{F^*}$ を解釈する。

このように出力フィードバック最短時間制御システムを構成する最短時間制御器として，最短時間制御ゲインと最短時間オブザーバとを縦続結合したものと，線形関数 $F^*x(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバとは全く同じ機能を持っているが，両者を構成するのに必要な次数については必らずしも同じであるとは限らない。すなわち，線形関数最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*_{F^*}$ を構成するのに必要な最小次数は最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*$ のそれよりも小さくできることは明らかである[37),64),66)]。したがって，システムを構成するのに必要な次数までをも考慮するときは，出力フィードバック最短時間制御システムとしては $\mathcal{S}(F^*, \mathcal{O}^*)$ よりも $\mathcal{S}(\mathcal{O}^*_{F^*})$ の方が優れていると言える。

最後に出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, \mathcal{O}^*)$ または $\mathcal{S}(\mathcal{O}^*_{F^*})$ の安定性について考えるが，これについては第3章の状態フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*, I_n)$ の安定性に対する考察がそのまま適用できる。したがって，既に定理5.1で明らかにした設計方法をもとに安定な出力フィードバック最短時間制御システムが容易に設計できる。

〈定理5.2〉

(i) 次の二つの仮定が成立するとき，安定な出力フィードバック最短時間制御システムが設計可能である。

〈仮定1*〉
$$\begin{cases} \text{〈仮定1：制御のための仮定〉} \quad \mathcal{K}_{\mu} = V^n \\ \mathcal{K}_{x\cdot\mu_x} \supset \mathcal{N}^*_+ \end{cases} \qquad (5.53)$$

〈仮定2*〉
$$\mathcal{N}^*_- \supset \mathcal{N}_{\nu} \cap \mathcal{K}_{x\cdot\mu_x} \qquad (5.54)$$

ここで，$\mathcal{N}^*_+$ は出力整定空間 $\mathcal{N}^*$ に含まれる不安定なモードを持ったA不変部分空間であり，$\mathcal{N}^*_-$ は同じく $\mathcal{N}^*$ に含まれる安定なモードを持ったA不変部分空間である。行列Aの $\mathcal{N}^*_+$ への制限を $A/\mathcal{N}^*_+$ で，その固有値を $\lambda_\sigma[A/\mathcal{N}^*_+]$ で表わすと，

$$|\lambda_\sigma[A/\mathcal{N}^*_+]| \geq 1, \quad |\lambda_\zeta[A/\mathcal{N}^*_-]| < 1 \ 。 \qquad (5.55)$$

(ii) 定理3.2（または系3.2）で与えられる安定な最短時間制御ゲイン F^*_- と最短時間オブザーバ $\mathcal{O}^*$ とを縦続結合した最短時間制御器を用いて構成した出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*_-, \mathcal{O}^*)$ は安定である。

（証明） (i)および(ii)：〈仮定1*〉および〈仮定2*〉のもとで安定な出力フィードバック最短時間制御システムが設計可能であることをまず示す。

〈仮定1*〉のもとで安定な最短時間制御ゲイン F_-^* が存在することは定理3.2により保証されている。さらに，定理4.1により，最短時間オブザーバ O^* も常に存在する。したがって，両者を用いて出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_-^*, O^*)$ が構成可能である。この $\mathcal{S}(F_-^*, O^*)$ が〈仮定2*〉のもとで安定となることを示す。定理5.1の証明の過程で用いた(5.38)および(5.39)式の関係より，〈仮定2*〉のもとで，

$$BF_-^* \mathcal{N}_{\nu+\alpha} \subset \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{N}_\nu \subset \mathcal{N}_-^* \qquad (5.56)$$

が成立する。このとき，定理3.2および定理5.1の証明の場合と全く同じように計算すると，

$$\{x(\nu+\mu_x+\alpha)^*\} \subset \mathcal{N}_-^* \subset \mathcal{N}^* \qquad (5.57)$$

となる。しかも，$\mathcal{N}_-^*$ は安定なモードを持ったA不変部分空間の和空間であるから，

$$\| x(\nu+\mu_x) \| > \| x(\nu+\mu_x+1) \| > \cdots \qquad (5.58)$$

が成立することは明らかである。したがって，出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_-^*, O^*)$ において，〈仮定2*〉のもとで，

$$\lim_{\alpha\to\infty} \| x(\omega^*+\alpha) \| = 0$$

となり，このシステムは安定である。

(証明終)

このように安定な出力フィードバック最短時間制御システムが定理3.2および定理5.1の結果の拡張として容易に設計可能である。線形関数最短時間オブザーバ $O_{F^*_-}^*$ を用いた出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(O_{F^*_-}^*)$ が〈仮定1*〉および〈仮定2*〉のもとで安定となることは言うまでもない。

最後に安定な出力フィードバック最短時間制御システムが構成可能であるための必要十分条件およびその設計方法を明らかにする。

〈系5.2〉

(i) 安定な出力フィードバック最短時間制御システムが構成可能であるための必要十分条件は次の二つの仮定を満足するような $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ が存在することである。

〈仮定1**〉
〈仮定1：制御のための仮定〉 $\mathcal{K}_\mu = \mathcal{V}^n$

$$\mathcal{K}(\overline{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\overline{\mathcal{B}})_x} \supset \mathcal{N}_+^* \qquad (5.59)$$

〈仮定2**〉

$$\mathcal{N}^* \supset \mathcal{N}_-^* \supset \mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{K}(\overline{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\overline{\mathcal{B}})_x} \qquad (5.60)$$

ここで，$\mathcal{K}(\overline{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\overline{\mathcal{B}})_x}$ は第3.3節の系3.3.3.で導入した $\mathcal{S}_{\overline{\mathcal{B}}}$ （（3.66）式参照）に関する可制御空間であり（（3.67）および（3.68）式参照），さらに，$\mathcal{N}_+^*$ は出力整定空間 $\mathcal{N}^*$ に含まれる不安定なモードを持ったA不変部分空間であり，$\mathcal{N}_-^*$ は同じく $\mathcal{N}^*$ に含まれる安定なモードを持ったA不変部分空間である。

$$|\lambda_\sigma[A/\mathcal{N}_+^*]| \geq 1, \qquad |\lambda_\zeta[A/\mathcal{N}_-^*]| < 1 \qquad (5.61)$$

（ii） 補題3.2の最短時間制御ゲインを求めるアルゴリズムにおいて，上の性質を満足するように $\overline{\mathcal{B}}$ をえらんで得られた最短時間制御ゲインを $F_{-,\overline{\mathcal{B}}}^*$ で表わすと，出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F_{-,\overline{\mathcal{B}}}^*, O^*)$ は安定である。

（証明） 〈仮定1**〉が必要なことは明らかである。〈仮定2**〉が必要なことについて示す。システム $\mathcal{S}_{\overline{\mathcal{B}}} = \langle A, B\Gamma, C\rangle$ の可制御空間 $\mathcal{K}(\overline{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\overline{\mathcal{B}})_x}$ に関する極を自由に指定できるという性質を用いて不安定な極を安定な極に指定しなければならない。この空間 $\mathcal{K}(\overline{\mathcal{B}})_{x\cdot\mu(\overline{\mathcal{B}})_{x_1}}$ に対する観測誤差空間の影響は安定なモードを持ったA不変部分空間に含まれていなければならない。そのための条件が〈仮定2**〉である。十分性については系3.3および定理5.2より明らかである。

（証明終）

第5.4節 例　　題

簡単な例題を用いて前節で得られた結果を検証する。次式で記述されるシステム $\mathcal{S}$ を制御対象とする。

$$\mathcal{S}\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k) & (5.62) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) & (5.63) \\ n=5, \quad r=2, \quad m=2, \quad \nu=\mathcal{R} \end{cases}$$

まず，このシステム $\mathcal{S}$ に対するk出力可整定空間 $\mathcal{X}_k$，可制御空間 $\mathcal{X}_{x\cdot k}$ および k非可決定空間 $\mathcal{N}_k$ などを第2.3節および第2.4節の結果を用いて計算する（このシステム $\mathcal{S}$ は第3.4節で用いたシステムに（3.84）式の変更を加えたものであるから，第3.4節の結果が利用できる）。

$$\mathcal{N}^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{\text{注}}, \quad \mathcal{N}_-^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\lambda=\frac{1}{2}} \right\}, \quad \mathcal{N}_+^* = \{0_5\} \qquad (5.64)$$

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{N}^* \underset{+}{\subset} \mathcal{X}_1 \underset{+}{\subset} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \underset{+}{\subset} \mathcal{X}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \underset{+}{\subset} \mathcal{X}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{V}^5 \qquad (5.65)$$

$$\mathcal{X}_{x\cdot 4} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{V}^5$$

したがって，システム $\mathcal{S}$ は出力可整定かつ可制御であり，その出力可整性指数 μ および可制御性指数 μ_x はそれぞれ $\mu=3$ および $\mu_x=4$ である。

$$\mathcal{N}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \underset{+}{\supset} \mathcal{N}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{N}_2 = \cdots, \qquad (5.66)$$

したがって，システム $\mathcal{S}$ は非可決定であり，状態を誤差なく決定することはできない。$\mathcal{S}$ の可決定性指数は $\nu=1$ である。

以上の結果より，制御対象のシステム $\mathcal{S}$ は安定な出力フィードバック最短時間制御システムが設計できるための条件，

「脚注」：この節でも記述を簡略化するために 行列$[\cdot]$ の値域空間を $\{[\cdot]\}$ で表わす。

〈仮定1*〉　$\mathcal{X}_3 = \mathcal{V}^5$ ，　$\mathcal{X}_{x\cdot 4} \supset \mathcal{N}_+^*$

〈仮定2*〉　$\mathcal{N}^* \supset \mathcal{N}_1$ ，　$\mathcal{N}_-^* \supset \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{X}_{x\cdot 4}$

を満足していることがわかる。さらに，$\mathcal{S}$の出力フィードバック出力可整定性指数 ω^* および出力フィードバック制御開始時点を計算すると次のようになる。

$$\mathcal{X}_2 \dotplus A\mathcal{N}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \therefore \tau^* \geqq_+ 0 \,,\ \omega^* \geqq_+ 3 \qquad (5.67)$$

$$\mathcal{X}_2 \supset A\mathcal{N}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},\ \mathcal{X}_1 \supset A\mathcal{N}_2 \,,\ \mathcal{X}_0 \supset A\mathcal{N}_3 \qquad \therefore \begin{cases} \tau^* = 1 \\ \omega^* = 4 \end{cases} \qquad (5.68)$$

システム$\mathcal{S}$に対する安定な最短時間制御ゲイン F_-^* の存在は〈仮定1*〉によって保証されており，これを第3.3節の結果にしたがって設計すると次のようになる。

$$F_-^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (5.69)$$

第4.3節の結果にしたがって〈定義4.1〉を満足するような最短時間オブザーバ O^* を設計すると次のようになる。

$$O^* \begin{cases} z(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k) & (5.70) \\ w(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(k) & (5.71) \end{cases}$$

この最短時間制御ゲイン F_-^* と最短時間オブザーバ O^* とを縦続結合した制御器を用いて図5.3のように構成した出力フィードバックシステム $\mathcal{S}(F_-^*, O^*)$ は安定な出力フィードバック最短時間制御システムであることを確認する。

そのためには $\mathcal{S}$ および O^* の任意な初期状態に対してシステム $\mathcal{S}(F_-^*, O^*)$ の出力が $\omega^*=4$ 時点でかならず零に整定できることを示せば良い。それを次のように確認することができる。

$$x(0)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\quad z(0)=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},\quad y(0)=\begin{bmatrix} x_1+x_4 \\ x_4 \end{bmatrix},\quad w(0)=\begin{bmatrix} -z_3+x_1+x_3 \\ z_1-x_4 \\ z_3 \\ x_4 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$u(0)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+x_3 \\ -\frac{1}{2}z_2 \end{bmatrix}$$

$$x(1)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+x_2+x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1-x_4 \\ -\frac{1}{2}z_2+\frac{1}{2}x_5 \end{bmatrix},\quad z(1)=\begin{bmatrix} x_1+x_3-x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix},\quad y(1)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1-x_4 \end{bmatrix}$$

$$w(1)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+x_2+x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1-x_4 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u(1)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_2+x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(2)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ x_4 \\ x_1-x_4 \\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ -\frac{1}{4}z_2+\frac{1}{4}x_5 \end{bmatrix},\quad z(2)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ 0 \\ x_1-x_4 \end{bmatrix},\quad y(2)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_1+x_2+x_3 \\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \end{bmatrix}$$

$$w(2)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ x_4 \\ x_1-x_4 \\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u(2)=\begin{bmatrix} -x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(3)=\begin{bmatrix} 0 \\ x_1-x_4 \\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ 0 \\ -\frac{1}{8}z_2+\frac{1}{8}x_5 \end{bmatrix},\quad z(3)=\begin{bmatrix} x_1-x_4 \\ 0 \\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \end{bmatrix},\quad y(3)=\begin{bmatrix} -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w(3)=\begin{bmatrix}0\\ x_1-x_4\\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad u(3)=\begin{bmatrix}-x_1+x_4\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x(4)=\begin{bmatrix}0\\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4\\ 0\\ 0\\ -\frac{1}{16}z_2+\frac{1}{16}x_5\end{bmatrix},\quad z(4)=\begin{bmatrix}-z_1-z_3+x_2+x_3+x_4\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad y(4)=0_2 \qquad (5.72)$$

$$w(4)=\begin{bmatrix}0\\ -z_1-z_3+x_2+x_3+x_4\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad u(4)=\begin{bmatrix}z_1+z_3-x_2-x_3-x_4\\ 0\end{bmatrix}$$

以下全く同様に計算を続けると，$k\geq 5$ に対して，

$$x(k)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ (\frac{1}{2})^k(x_5-z_2)\end{bmatrix},\quad z(k)=0_3,\quad y(k)=0_2,\quad w(k)=0_5,\quad u(k)=0_2 \qquad (5.73)$$

となり，$\mathcal{S}(F^*,O^*)$ は安定な出力フィードバック最短時間制御システムであることが確認できたことになる。

他方，この制御対象 $\mathcal{S}$ の状態遷移行列Aを，

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&2\end{bmatrix} \qquad (5.74)$$

と変更したシステム $\mathcal{S}'$ を考えるとき，システム $\mathcal{S}'$ に対しては $\mathcal{X}_k$，$\mathcal{X}_{x\cdot k}$，$\mathcal{N}^*$ $\mathcal{N}^*$ および $\mathcal{N}_k$ は $\mathcal{S}$ と全く同じであるが，

$$\mathcal{N}_-^* = \{0_5\}, \quad \mathcal{N}_+^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{\lambda=2} \tag{5.75}$$

となる点だけがΣと異なっている。このシステムΣ'に対しては〈仮定1*〉は成立するが，〈仮定2*〉については，

$$\mathcal{N}^* \supset \mathcal{N}_\nu, \quad \mathcal{N}_-^* \not\supset \mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{X}_{x\cdot 4} \tag{5.76}$$

となり，満足されないことがわかる。したがって，制御対象Σ'に対しては安定な出力フィードバック最短時間制御システムは設計できないことになる。実際，このΣ'に対して出力フィードバック最短時間制御システム$\Sigma'(F_-^*, O^*)$を構成して任意な初期状態に対してこれを動作させると次のような結果が得られる。

$$x(4+\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^{4+\alpha}(x_5 - z_2) \end{bmatrix}, \quad y(4+\alpha) = 0_2 \tag{5.76}$$

したがって，出力フィードバック最短時間制御システム$\Sigma'(F_-^*, O^*)$は不安定であることがわかる。このシステムΣ'に対しては，$\mathcal{X}_{x\cdot\mu_x} \supset \mathcal{N}_+^*$であるから，もし状態フィードバックが可能であるならば安定な最短時間制御システムが構成可能である（第3.4節参照）。しかし，状態フィードバックが不可能な場合には$\mathcal{N}_+^* = \mathcal{N}_\nu$であり，$\mathcal{N}_-^* = \{0\} \supset \mathcal{N}_\nu \cap \mathcal{X}_{x\cdot\mu_x}$が成立しないから，安定なシステムが構成できないことになる。

第5.5節　あとがき

この章では「問題4」の状態フィードバックが可能でない場合の最短時間制御問題について考察し，安定な出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。制御ゲインFとオブザーバOとを縦続結合した制御器を用いて構成したフィードバックシステム$\Sigma(F, O)$を考え，制御対象であるシステムΣおよびオブザーバOの任意な初期状態に対して出力を零に整定するステップ数を最小にすると言う形で出力フィードバック最短時間制御問題を定式化した。その結果，制御の問題と観測の問題を分離して考えて出力フィー

ドバック最短時間制御システムが設計可能であると言うシステムの設計上極めて有用な結果を明らかにした。すなわち，制御については第3章で設計した最短時間制御ゲイン F^* を用い，観測については第4章で設計した最短時間オブザーバ O^* を用い，両者を縦続結合して構成したフィードバック システム $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ が出力フィードバック最短時間制御システムであることを明らかにした。これは，第5.2節において個々の初期状態に対する最短時間性を必らずしも要求せず，初期状態を任意としたときの全体としての整定ステップ数を最小にするように問題を定式化した結果として得られたものであり，定式化の妥当性を表わしていると言える。最適レギュレータ問題においては最適評価関数値が初期状態の関数となるから，このような制御と観測との分離は不可能であり，出力フィードバック最適レギュレータシステムの設計は容易でないことが知られている[68)~71)]。 したがって，出力フィードバック制御システムを最短時間制御システムとして設計することは有用であると考えられる。さらに，出力フィードバック出力可整定性指数 ω^* を導入することにより，状態フィードバックが可能でないと言う状況下での制御量の出力に対する最短時間性を明確にした。その結果，観測に必要とする時間 ν と制御に必要とする時間 μ との和 $\nu+\mu$ よりも短かい時間で制御が完了する場合があると言う興味深い事実を示し，その理由を明らかにした。最短時間制御ゲイン F^* が表わす線形関数 $F^*x(k)$ に対する線形関数最短時間オブザーバ $O^*_{F^*}$ を用い構成したフィードバックシステム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ が出力フィードバック最短時間制御システムとなることについても明らかにした。最後に，安定な出力フィードバック最短時間制御システムを設計する方法も考察し，これが第3章で求めた安定な最短時間制御ゲイン F^*_- を用いて出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(F^*_-, O^*)$ を構成することによって簡単に得られることを明らかにした。

この章では出力フィードバック最短時間制御システムを構成するのに必要な最小の次数については考察しなかったが，これは今後に残された重要な問題であると言える。オブザーバの次数を考えるときは線形関数最短時間オブザーバ $O^*_{F^*}$ を用いて構成した出力フィードバック最短時間制御システム $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ の方が $\mathcal{S}(F^*, O^*)$ よりも優れていると言える。ただし，線形関数最短時間オブザーバの最小次数は線形関数の関数となるから，最小次数の $O^*_{F^*}$ を用いた $\mathcal{S}(O^*_{F^*})$ が最小次数の出力フィードバック 最短時間制御システムであるとは限らない。すなわち，最短時間性を満足し，より低次数の線形関数最短時間オブ

ザーバが得られるような制御ゲインが存在する可能性があるからである。この章ではすべての出力フィードバック最短時間制御システムを設計する方法を求めてはいないから，上に述べたような意味で最小次数の出力フィードバック最短時間制御システムの設計問題は今後に残されている。システムを構成するのに必要な次数までをも考慮するときは制御と観測との分離性は成立しなくなるものと考えられる。

本章の結果において $C = I_n$，$\mathcal{N}^* = \{0\}$ とすると状態を制御量とする出力フィードバック最短時間制御システムが設計できることは言うまでもない。

第6章　結　　論

本論文では線形離散時間システムの最短時間制御問題を次の四つの問題

「問題1」　制御および観測に対する可能性と最短時間性（第2章）

「問題2」　状態フィードバック最短時間制御問題（第3章）

「問題3」　最短時間観測問題（第4章）

「問題4」　出力フィードバック最短時間制御問題（第5章）

にわけて理論的に考察し，それぞれの問題を解決することによって結果として，この問題に関する研究を完成させることを目的とした。

「問題1」については，線形離散時間システムの特長である各時点毎に定まる制御可能な空間（可制御空間，可到達空間および出力可整定空間など）および観測不可能な空間（非可観測空間および非可決定空間）を導入することにより，制御および観測に対する可能性と最短時間性を明確にした。本論文ではこの出力可整定空間および非可決定空間を基礎にして最短時間制御システムおよび最短時間観測システムの設計を行なっており，その意味で本論文の設計手法は W. Wonham 等[52]が“幾何学的手法（Geometric Approach）”と呼んでいるものの範ちゅうに入るものであると言える。

「問題2」については，「問題1」で明らかにした初期状態に対する最短時間性を満足するようなすべての状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。さらに，その安定性についても考察し，安定な状態フィードバック最短時間制御システムの設計方法を明らかにした。したがって，この問題についてはほぼ完全に解決したと考えている。

「問題3」についても一般的な最短時間オブザーバの設計方法を明らかにした。この最短時間オブザーバは観測時間を最短にするだけでなく，すべての時点で観測誤差空間を最小にするものである。最短時間オブザーバを構成するのに必要な最小の次数についてはここでは触れなかったが，本論文の執筆の途中で木村英紀[66]がこれを完全に解決した。したがって，この問題もほぼ完全に解決されたと考えられる。

「問題4」については，状態フィードバックが可能でないと言う状況下における最短時間性をまず明確にし，これを出力フィードバック出力可整定性指数と名付けた。次に，その最短時間性を満足する出力フィードバック最短時間制御

システムを，状態フィードバック制御ゲインとオブザーバとを縦続結合した制御器を用いて構成することを考え，その設計問題が制御と観測とを分離して考えることが可能であると言う出力フィードバック制御システムの設計上極めて有用な結果を明らかにした。すなわち，制御については「問題2」の解である最短時間制御ゲインを，観測については「問題3」の解である最短時間オブザーバを用いて，両者を縦続結合したものが最短時間制御器となることを明らかにした。さらに，このように設計したシステムの安定性について考察し，安定な出力フィードバック最短時間制御システムを設計する方法も明らかにした。ただし，すべての出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法および最小次数の出力フィードバック最短時間制御システムの設計方法は未解決な問題として今後に残されている。特に，次数の最小性をも考慮してシステムの設計を行なおうとすると制御と観測との分離性は成立しなくなり，最小次数の出力フィードバック最短時間制御システムの設計問題の解決は非常に困難になるであろうと予想される。

以上が本論文で解決した問題および未解決な問題を総括したものであるが，序論で述べた本論文の当初の目標である最短時間制御問題に関する研究を完成の域に近付け，最短時間制御システムとして制御システムを設計する方針の有用性を示そうとする目的はほぼ達成できたものと自負している。

第5章で「問題4」について成立することを明らかにした制御の問題と観測の問題との分離性は状態フィードバックが可能でない最適レギュレータ問題においては成立しないが[68)〜71)]，この場合にも問題の定式化に適当な工夫を施こすことによって制御と観測との分離性が成立する可能性のあることをこの章の結果は示唆していると考えられる。本論文では“幾何学的手法”を用いて最短時間制御問題を考察したが，極指定問題としてこの問題を考察することも可能ではないかと考えられる。すなわち，システムの状態遷移行列は，その固有値をすべて零に指定することによって，べき零行列となり，有限時間整定応答が得られる。しかし，この場合個々の初期状態に対する最短時間性を満足するような極指定を行なうことは非常に困難であるから，最短時間制御問題に対する設計手法としては本論文で用いたような幾何学的手法が最も自然であり，適切であると言える。この幾何学的な手法は制御問題の基本的な構造を明確にし，一般的な解を与えるのに有効な手法であるが，具体的に解を計算するのが困難であると一般に言われてきた。しかし，この計算の困難さは他の手法にも存在

するものであり，それが表面に出ないで隠されているに過ぎない。しかも，数値解析問題における一般化逆行列および偽似逆行列などに対する数値計算法の急速な進歩はこの欠点を既に解消しつつあると言っても過言ではない。本論文で明らかにした設計手法についても電子計算機を用いた自動設計（CAD：Computer Aided Design）が行なえるようにするのが次の目標であり，さらに研究を続けて行きたいと考えている。

謝　　辞

本研究を行なうに際し，終始懇切な御指導および御鞭撻を賜わり，更に本論文提出の御世話および御審査の労をも賜わりました大阪大学工学部電子工学科児玉慎三教授に心から感謝致します。

本研究を行なうに際し，終始懇切な御指導および御鞭撻を賜わりました近畿大学理工学部電子工学科 長田　朗教授に心から感謝致します。

本論文の提出を御許可下さり，御審査の労を賜わりました大阪大学工学部電子工学科 尾崎　弘教授，同電気工学科 藤井克彦教授および鈴木　胖教授に心から感謝致します。本論文の御審査を賜わりました大阪大学工学部電子工学科の教授の皆様方に心から感謝致します。

有益な御意見を賜わりました大阪大学工学部電子工学科 前田　肇助教授および神戸大学工学部システム工学科 池田雅夫助教授に心から感謝致します。

著者が現在勤務中の近畿大学理工学部電子工学科において，公私にわたり御指導および御鞭撻を賜わりました 石井順也教授，岡本允夫教授および 梶谷浩二助教授に心から感謝致します。有益な御討論および公私にわたる御助力を賜わりました　同　藤本英昭講師，山口　孜講師および 瓜倉　茂助手に心から感謝致します。特に，瓜倉　茂助手には最短時間制御システムの安定性について多くの御教示をいただき，また山口　孜講師には資料の収集などの種々の面で御助力をいただきました。御二人には厚く御礼申し上げます。種々の御教示をいただきました　同 電気工学科 馬場鍈一助教授に深く感謝致します。

私事にわたりますが，北九州大学文学部藤原正義教授には言葉につくせぬ御世話になりました。心から御礼申し上げます。最後に，本論文の作成に当り御協力いただいた西村充代氏に心から感謝致します。

参　考　文　献

(1) L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, etal: "The Mathematical Theory of Optimal Processes", pp. 115～181, John Wiley & Sons, 1962

(2) M. Athans, P.L. Falb: "Optimal Control", pp. 504～601, McGraw-Hill, 1966

(3) これを示すのが本論文の目的の一つでもある。以下に多数の文献を掲げるが、その中で(8),(9),(14)～(16)などがこれに相当する。

(4) この章の記述の順序の関係で後に掲げる(9)～(13)がこれに相当する。特に、(11)はこれについて詳しく述べている。

(5) E.I. Jury: "Sampled-Data Control Systems", pp. 182～214, John Wiley & Sons., 1958

(6) J.T.Tou: "Digital and Sampled-Data Control Systems", pp. 405～500, McGraw-Hill. 1959

(7) 高橋安人：" システムと制御（第2版）", pp. 335～376, 岩波, 1978

(8) R.E. Kalman, J.E. Bertram: "General Synthesis Procedure for Computer Control of Single-Loop and Multi-Loop Linear Systems", AIEE Trans. Basic Engineering, VoL. 77, Part 11, pp. 602～609, 1959 Jan.

(9) R.E. Kalman, J.E. Bertram: " A Unified Approach to Jheory of Sampling Systems" J. Franklin Institute, VoL. 267, No. 5, pp. 405～435, 1959 May

(10) C.A. Desoer, J. Wing: "Minimal Time Discrete Systems", IRE Trans. Automatic Control, VoL. AC-6, No. 1, pp. 5～15, 1961 Feb.

(11) 長田　朗：" サンプル値制御系の最適制御理論に関する研究", 学位論文（大阪大学昭和39年）, 1964 Jan.

(12) S.S.L. Chang: " Minimal Time Control with Multiple Saturation Limits" IEEE Trans. Automatic Control, VoL. AC-8, No. 1, pp. 35～42, 1963

(13) A. Nagata, S. Kodama, S. Kumagai: "Time Optimal Discrete Control System with Bounded State Variable", IEEE Trans. Automatic Control, VoL. AC-10, No. 2, pp. 155～164, 1965 Apr.

(14) 長田　朗，西村卓也：〝多入力線形サンプル値システムのフィードバック最短時間制御〟，電子通信学会論文誌C，VoL. 53−C，No. 3，pp. 175〜176，1970 Mar.

(15) 長田　朗，西村卓也：〝線形離散システムの最短時間問題〟，電子通信学会論文誌D，VoL. 56−D，No. 9，pp. 507〜514，1973 Sept.

(16) C.T. Mullis：〝Time Optimal Discrete Regulator Gain〟，IEEE Trars. Automatic Control，VoL. AC−17，No. 2，pp. 265〜266，1972 Feb.

(17) R.E. Kalman，P.L. Falb，M.A. Arbib：〝Topics in Mathematical System Theory〟，pp. 237〜335，McGraw−Hill，1969

(18) A. Gill：〝Linear Sequential Circuits〟，pp. 21〜54，McGraw−Hill，1966

(19) L.A. Zadeh ed.：〝System Theory〟，pp. 279〜312，McGraw−Hill，1969

(20) 深尾　毅：〝システム理論入門〟，pp. 71〜137，昭晃堂，　1972

(21) 長田　朗：〝非正則状態転移サンプル値システムの最短時間制御〟，電子通信学会論文誌C，VoL. 51−C，No. 4，pp. 154〜160，1968 Mar.

(22) M. Athans ed.：〝Large Scale Systems and Decentralized Control〟，IEEE Trans. Automatic Control，VoL. AC−23，No. 2，1978 Apr.
(Special Issue on Large Scale Systems and Decentzalized Control)

(23) D.G. Luenberger：〝Observing the State of a Linear System〟，IEEE Trans. Military Electronics，VoL. MIL−8，No. 2，pp. 74〜80，1964 Apr.

(24) D.G. Luenberger：〝Observers for Multivariable Systems〟，IEEE Trans Automatic Control，VoL. AC−11，No. 2，pp. 190〜197，1966 Apr.

(25) 西村卓也，長田　朗：〝線形離散システムのオブザーバーの一構成法〟，計測自動制御学会論文集，VoL. 9，No. 6，pp. 665〜671，1973 Dec.

(26) 井上　昭，室井伸一：〝線形離散時間形制御系のオブザーバー〟，システムと制御，VoL. 18，No. 5，pp. 309〜313，1974 May

(27) 井上　昭：〝離散時間形線形制御系の可観測性と観測機構〟，計測自動制御学会論文集，VoL. 10，No. 5，pp. 561〜568，1974 Oct.

(28) 西村卓也，長田　朗，田村由紀一：〝動的補償器を用いた線形離散システムの最短時間制御〟，第18回自動制御連合講演会，No. 1013，1975 Nov.

(29) B. Porter，A. Bradshaw：〝Design of Dead−Beat Controllers and Full−

order Observers for Linear Multivariable Discrete−time Plants", International J. Control, VoL, 22, No. 2, pp. 149〜155, 1975 Apr.

(30) 西村卓也，長田 朗：〝線形離散時間システムの出力フイードバック最短時間制御〃，第 15 回計測自動制御学会学術講演会，No. 1103, 1976 Aug.

(31) 明石 一，足立正雄：〝線形離散システムに対する最短時間制御〃，システムと制御，VoL. 21, No. 12, pp. 671〜677, 1977 Dec.

(32) H. Akashi, M. Adachi：〝Minimum Time Output Regulation Problem of Linear Discrete −time Systems〃, IEE Trans. Automatic Control, VoL. AC−22, No. 6, pp. 939〜942, 1977 Dec.

(33) 西村卓也，瓜倉 茂，長田 朗：〝線形離散システムの最短時間出力整定問題〃，計測自動制御学会論文集，VoL. 11, No. 6, pp. 688〜694, 1975 Dec

(34) B. Leden：〝Output Dead − Beat Control−A Geometric Approach〃, Int. J. Control, VoL. 26, No. 4, pp. 493〜507, 1977 Aug.

(35) 瓜倉 茂，西村卓也，長田 朗：〝線形離散時間出力最短時間整定システムの可安定性について〃，第 22 回日本自動制御協会学術講演会，No. E3, pp. 81〜82, 1978 May

(36) 池田雅夫，富田義数：〝線形離散時間システムに対する線形関数観測器について〃，電子通信学会論文誌 D，VoL. 56−D, No. 12, pp. 722〜724, 1973 Dec.

(37) A. Nagata. T. Nishimura, M. Ikeda：〝Linear Function Observer for Linear Discrete−time Systems〃, IEEE Trans. Automatic Control, VoL. AC−20, No. 3, pp. 401〜407, 1975 Jun.

(38) 西村卓也，長田 朗：〝離散時間システムの出力フィードバック最短時間制御〃，計測自動制御学会論文集，VoL. 15, No. 1, pp. 26〜32, 1979 Feb.

(39) 西村卓也，長田 朗：〝線形離散時間システムの出力フィードバックによる出力最短時間整定問題〃，電子通信学会論文誌 A，VoL. J62−A, No. 1, pp. 81〜88, 1979 Jan.

(40) 明石 一，今井弘之，足立正雄：〝離散時間線形多変数システムに対する動的デッドビート制御器の設計〃. システムと制御，VoL. 22, No. 12, pp. 753〜760, 1978 Dec.

(41) M. Aoki : "Some Approximation Methods for Estimation and Control of Large Scale Systems", IEEE Trans. Automatic Control, VoL, AC-23, No. 2, pp. 173～182, 1978 Apr.

(42) 文献 (17) の pp. 50～60.

(43) R. E. Kalman : " Mathematical Description of Linear Dynamical Systems" SIAM J. Control, VoL. 1, No. 2, pp. 152～192, 1963 Apr.

(44) R. E. Kalman : "On the General Theory of Control Systems", Automatic and Remote Control－1(the 1st IFAC), Butter Worths, pp. 481～492, 1960

(45) 児玉慎三 : "入力や状態に制限のある線形サンプル値システムの Controllability", 電子通信学会誌, VoL. 48, No. 5, pp. 884～890, 1965 May

(46) L. Weiss : "Controllability, Realization and Stability of Discrete Time Systems", SIAM J. Control, VoL. 10, No. 2, pp. 230～251, 1972 May

(47) 西村卓也, 長田 朗 : "線形離散システムの制御および観測について" システムと制御、 VoL. 18, No. 8, pp. 483～489, 1974 Aug.

(48) 古田勝久 : "〔解説〕システムの実現問題", 計測と制御, VoL. 13, No. 6, pp. 497～508, 1975 Jun.

(49) 児玉慎三 : "システムの実現問題－離散型状態方程式モデルのあてはめ" 自動制御技術 22, 第 23 回日本自動制御協会講習会, pp. 39～50, 1976 Feb.

(50) S.P. Bhattacharyya, J. B. Peason, W.M. Wonham : "On Zeroing the Output of a Linear System", Information and Control, VoL. 20, No. 1, pp. 135～142, 1972 Feb.

(51) S.P. Bhattacharyya, A.C. Del Nero Gomes : "Output Controllability and Eigen-Values Assignability", IEEE Trans. Automatic Control, VoL. AC－18, No. 5, pp. 540～ 541, 1975 Oct.

(52) W. M. Wonham: " Linear Multivariable Control Theory ", Springer Verlag, pp. 90～104, 1974

(53) W.M. Wonham, A.S. Morse : " Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems－A Geometric Approach", SIAM J. Control,

VoL. 8, No. 1, pp. 1～18, 1970 Feb.

(54) T.L. Boullion, P.L. Odell : " Generalized Inverse Matrices ", pp. 1～75, John Wiley & Sons, 1971

(55) 児玉慎三，須田信英：〝システム制御のためのマトリクス理論〟，pp. 325～347，計測自動制御学会，1978

(56) 羽根田博正：〝〔講座〕システム制御のための数値解折理論Ⅰ～Ⅴ〟，システムと制御，VoL. 21, No. 10.～VoL. 22, No. 2, 1977～1978

(57) 文献(8),(9),(14)～(16),(38)および(40)。

(58) 文献(52)の pp. 133～226

(59) B. D. O. Anderson:〝Output Nulling Invariant and Controllability Subspaces〟, pp. 43. 6. 1～43. 6. 9, 6th IFAC(Boston), Part I, 1975

(60) W. M. Wonham : 〝On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems〟, IEEE Trans. Automatic Control, VoL. AG－12, No. 6, pp. 660～665, 1967 Dec.

(61) J. C. Willems, S.K. Mitter : 〝Controllability, Observability, Pole Allocation, and State Reconstruction〟, IEEE Trans. Automatic Control, Control, VoL. AC－16, No. 6, pp. 582～595, 1971 Dec.

(62) 吉川恒夫：〝線形離散時間系に対するオブザーバーの最小次元数〟，システムと制御，VoL. 18, No. 2, pp. 125～126, 1974 Feb.

(63) 明石　一，今井弘之：〝線形離散時間システムに対するオブザーバーについて〟，システムと制御、VoL. 21. No. 11, pp. 636～644, 1977 Nov.

(64) 明石　一，今井弘之：〝線形離散時間システムに対する線形関数オブザーバ〟，システムと制御、VoL. 22, No. 2, pp. 104～110, 1978. Feb.

(65) 瓜倉　茂，西村卓也，長田　朗：〝可決定な線形離散システムに対する状態オブザーバ〟，近畿大学理工学部研究報告10号，pp.233～237, 1975

(66) H. Kimura :〝Dead-Beat Function Observers for Discrete Time Linear Systems〟, SIAM J. Control and Optimization, VoL. 16, No. 12, pp. 880～894, 1978 Nov.

(67) 文献 (25),(26),(27),(62),(65) 等。

(68) 瓜倉　茂，山腕重信，長田　朗：〝観測器を用いた線形離散システムの最

適制御〃，第18回自動制御連合講演会，No.1007，pp. 13～14，1975 Nov.

(69) H. Maeda, H. Hino : "Design of Optimal Obsenvers for Linear Time Invariant Systems", International J. Control, VoL. 19, No.5, pp. 993～1004, 1974 Oct.

(70) R.A. Miller : "Specific Optimal Control of the Linear Regulator Using a Minimal Order Observer", International J. Control, VoL. 18, No.1, pp. 139～159, 1973 Feb.

(71) 須田信英，藤井隆雄、山内良一：〃観測器を併合した線形離散時間系に対する最適レギュレータ，計測自動制御学会論文集，VoL. 12, No.5, pp. 504～510, 1976 Oct.

(72) 西村卓也，長田　朗：〃線形離散時間システムの一設計法〃，昭和54年度電気学会全国大会，No.1217, pp. 1607, 1974 Apr.