

Title	高信頼度通信網構成法に関するグラフ理論的研究
Author(s)	今瀬, 真
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/1983">https://hdl.handle.net/11094/1983</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

『高信頼度通信網構成法に関する  
グラフ理論的研究』

昭和61年5月

今瀬真

## 内 容 梗 概

本論文は、高信頼度通信網構成技術のうち網トポロジーに関するグラフ理論的研究をまとめたものであり、直径最小グラフを基本として網を構成することにより高信頼高能率な網を構成可能であることを示している。本論文は5章からなり、その内容は以下のとおりである。

第1章では、本研究の歴史的背景についてふれ、3つのグラフ評価尺度、即ち直径・連結度・直径罹障度が、網トポロジーの良さを表現する上で基本となることを述べている。

第2章では、網の効率を表現する評価尺度である直径（最短経路の最大中継段数）について考察しており、2つの直径準最小有向グラフ構成法を提案している。本構成法は任意の点数及び最大次数に対して構成可能であり、構成された有向グラフの直径が下界値に比べ高々1大きいだけであることを示す。また、本構成法により無向グラフを構成した場合も、点数が十分大きければ従来に比べ直径が小さいグラフを構成可能であることを示している。

第3章では、直径と信頼性の評価尺度である連結度（いくつの点が罹障しても通信が可能であるかを示す）の関係について述べている。直径を最小化することが結果的に連結度を最大化させること及び第2章で示した有向グラフの連結度が最大値より高々1小さいことを示している。

第4章では、罹障時の迂回経路の最大中継段数即ち直径罹障度について考察している。直径罹障度の下界値が点数、最大次数及び罹障点数の関数として導出できること、第2章で示した構成法で構成できる有向グラフの部分集合であるDe Bruijn グラフ及びKautz グラフの直径罹障度が下界値に比べ高々1大きいだけであることを示す。

第5章は結論であり、本研究で得られた結果を総括し、今後に残された課題を指摘する。

# 目 次

第1章 序論	1
1.1 研究の意義	1
1.2 研究の歴史的背景	1
1.3 本研究の概要	5
第2章 直径最小グラフ構成法	8
2.1 用語の定義と問題の定式化	8
2.2 線形構成法と構成されたグラフの直径	11
2.3 構成されたグラフの評価	16
2.4 線形構成法の無向グラフへの適用	17
2.5 線形構成法と線グラフの関係	18
2.6 むすび	23
第3章 直径最小グラフの連結度	25
3.1 用語の定義と従来の結果	26
3.1.1 用語の定義	26
3.1.2 従来の結果	26
3.2 直径と連結度の関係	27
3.2.1 点連結度	27
3.2.2 枝連結度	29
3.3 直径最小グラフ $G_1, G_2$ の点連結度	32
3.4 むすび	37

第4章 直径最小グラフの直径冗障度	38
4.1 直径冗障度の性質と下界値	38
4.1.1 直径冗障度とその性質	38
4.1.2 直径冗障度の下界値	39
4.2 De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの性質	40
4.3 De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径冗障度	42
4.3.1 De Bruijn グラフの直径冗障度	42
4.3.2 Kautz グラフの直径冗障度	47
4.4 下界値との比較	52
4.5 ルーチングアルゴリズム	53
4.6 むすび	55
第5章 結 論	56
謝 辞	58
参考文献	59

# 第 1 章 序 論

## 1. 1 研究の意義

近年、通信と情報処理の関係は益々緊密になり、LAN (Local Area Network)、企業内通信網、計算機網など各種の通信網が構築されつつある。また、LSIの発達により大規模なマルチ・マイクロプロセッサシステムの実現が可能となり、プロセッサ相互結合網 (Processor Interconnection Networks) の研究が盛んになりつつある。各種の通信網、プロセッサ相互結合網に共通した重要な課題として信頼性の向上がある。信頼性は網トポロジーに大きく左右され、いかなるトポロジーを基本にして網を構成するかは重要な問題である。

しかし、従来の網設計技術はトポロジーを与えたうえで回線数などの設備量あるいは制御法の最適化を図るものが使われているのみで<sup>たとえば[1]</sup>、トポロジー構成法については適用できる技術はほとんどないのが現状である。

本論文は、交換ノードあるいはプロセッサを点 (vertex)、通信リンクを枝 (edge) に対応させたグラフにより網をモデル化し、所望の信頼性を有しかつ効率のよいグラフを任意の規模に対して構成できることを示し、高信頼・高能率な網の実現可能性を示している。通信リンクが片方向か両方向かにより有向あるいは無向グラフにモデル化できるが、本論文では主に有向グラフを取扱っている。

## 1. 2 研究の歴史的背景

通信網とグラフの結びつきは自然であるが、直接的にその関連が論じられたのは最近のことであり、1972年に発表されたR.S.Wilkovの文献<sup>[2]</sup>が最初のまとまったものである。R.S.Wilkovは、通信網の信頼性・安定性はそのトポロジーに大きく左右されグラフ論的検討が重要であることを主張している。また、2点間の経路の数及びその長さがトポロジーを検討する上で重要であるとし、これを表現するグラフ上での評価尺度として連結度 (Connectivity)、直径 (Diameter)、直径罹障度 (Diameter Vulnerability) が基本となることを述べている。

## 評価尺度

・連結度は、いくつかの点あるいは枝が障害となった時に通信が不能となる（結ぶ経路が存在しない2点が発生する）かを示すものであり、連結度が大きいほど信頼性が高い。また、連結度は2点間の独立な経路の数に一致しており、連結度が大きいほど障害時の迂回経路として選択できる道の数が多い。連結度には、点の障害を想定した点連結度と枝の障害を想定した枝連結度がある。

・直径は最大中継段数（各点間の最短中継段数の最大値）であり、小さくすることにより伝送遅延、接続遅延を低くおさえることができる。また、最大中継段数を小さくすることにより、平均中継段数も小さくなり必要な設備量を削減できる。

・直径罹障度は障害時の直径を示すものである。一般に、障害時の迂回経路は平常時の経路（最短経路）より長くなるため、網の処理能力が低下する。従って、直径罹障度が直径に近いほど障害時の処理能力の低下が小さいといえる。

この基本的な考え方は現在まで受け継がれており<sup>[26]</sup>、通信網に関連するグラフ論的研究のほとんどがこの範疇に入っている。また、最近盛んに研究されているプロセッサ相互結合網は、規模、装置構成技術、地域的拡がりなどの点で通信網とは異なるが、トポロジーという観点からは共通した課題が多く連結度、直径、直径罹障度の3つが基本的な評価尺度となっている<sup>[27]</sup>。

上記評価尺度に関する研究は数多く存在し、ここですべてをサーベイすることはできない。以下では新規に網トポロジーを構成するという観点から内外のグラフ論的研究を概観する。網を構成するという立場では、これ以外に既に存在する網を改善するという立場もあるが、連結度に関していくつかの研究がある<sup>[3, 4, 5, 6]</sup>のみである。

連結度に関しての最も基本的な構成問題は、点数と枝数を与え連結度最大のグラフを求めることである。この問題は1962年にF. Harary<sup>[7]</sup>により解かれ、1960年代にはこれに附随する各種の問題が盛んに研究された<sup>[2]</sup>。しかし、これらの研究で構成されたグラフは直径が大きく効率の面で問題があった。1970年代にはいると、しばらくの間構成問題に関する目立った成果はなく、連結度をより詳細化した評価尺度の

追及<sup>[8, 9]</sup>、直径罹障度の性質<sup>[10, 11]</sup>など任意のグラフに成立する性質の探究が主であった。1978年頃から、本論文の研究と並行して、グラフ構成に関する研究が各所で行われるようになった。これには、LSIの発達により、数百～数千のマイクロプロセッサを接続したシステムの実現性が出てきたことが大きなインパクトとなっている。最近のグラフ構成問題に関する研究は、次の2つのアプローチに大別できる。

### アプローチ 1：直径最小化

最近もっとも多く研究されているものが、 $(\Delta, D)$  グラフ問題である。これは、1964年B. Elspasにより提案されたもので以下のように定式化される<sup>[12]</sup>。

$(\Delta, D)$  グラフ問題 最大次数 $\Delta$ （無向グラフの場合は各点の次数（つながれている枝）の最大値、有向グラフの場合は入次数と出次数の最大値）と直径 $D$ が与えられた時にできるかぎり多くの点数 $n$ をもつグラフを構成せよ。

本問題は、最大次数 $\Delta$ と点数 $n$ を与え直径 $D$ を最小にする問題と本質的には同一である。本問題に関して、点数 $n$ の上界が次式で与えられる。

$$\cdot \text{無向グラフの場合： } n \leq \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta-2} \quad (\text{ただし } \Delta \geq 3) \quad (1.1)$$

$$\cdot \text{有向グラフの場合： } n \leq \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta - 1} \quad (\text{ただし } \Delta \geq 2) \quad (1.2)$$

この右辺はMoore Bound（あるいは有向Moore Bound）と呼ばれ<sup>[13]</sup>、等号が成立するグラフをMoore グラフとよぶ。1960年代は、理論への興味からMoore グラフがどのような最大次数 $\Delta$ 、直径 $D$ に対して存在するかが主に研究され、ごく限られた値に（無向グラフの場合は $D=1$  と $D=2$  かつ $\Delta=3, 7, 57$ <sup>[14, 15]</sup>、有向グラフの場合は $D=1$ <sup>[16]</sup>）しか存在しないことが明らかにされた。図1.1 に $D=2$ 、 $\Delta=3$ の無向Moore グラフを示す。

Moore グラフは、ネットポロジとして次のような優れた性質を持っている。

### Moore グラフの性質

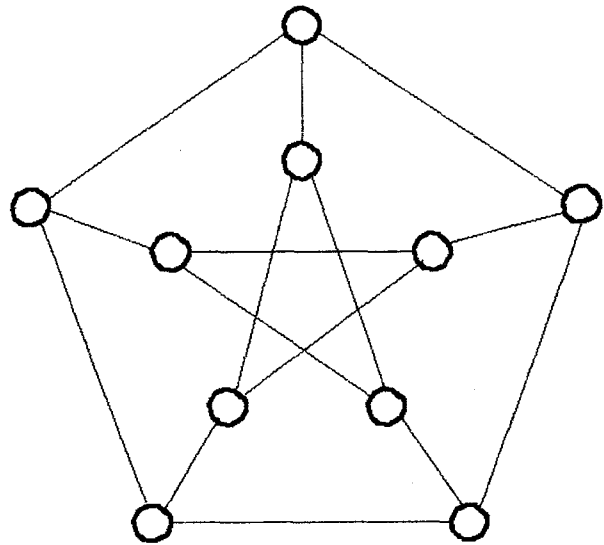
① 最大次数が $\Delta$ 、点数が $n$ のグラフの中で、最大中継段数（直径）と平均中継段数がともに最小である。



② 連結度は、最大次数  $\Delta$  に一致して最大である。言い換えれば、枝数  $n \Delta$  のグラフの中で最大である。

③ 有向 Moore グラフの場合は、 $\Delta - 1$  個以下の点が障害となっても直径は 1 大きくなるだけである。即ち、直径罹障度は直径より 1 大きいだけであり、最大次数  $\Delta$ 、点数  $n$  のグラフの中で最小である。

④ 均一な構造であり、各点に必要なとなるデータ転送処理能力が均一である。



直径  $\kappa : 2$ , 次数  $\delta : 3$

図 1. 1 無向ムーアグラフ

このように、Moore グラフは連結度、直径、直径罹障度すべての面で優れた性質を持っている。1978年頃から、Moore グラフが存在しない領域で Moore Bound に近い点数を持つグラフを求めようとする研究が盛んに行われるようになった<sup>[17-25]</sup>。これは、Moore Bound に近い点数を持つグラフでは上述の性質を近似的に有しているのではないかという予想からである。

( $\Delta, D$ ) グラフ問題では、特定の点数を持つグラフしか構成できない。実用上からは、任意の点数  $n$ , 最大次数  $\Delta$  に対して直径  $D$  が出来るかぎり小さいグラフを求めることが望ましい。この問題は ( $n, \Delta$ ) 問題と呼ばれているが殆ど研究されていないのが現状である。なお、式 (1.1) (1.2) を変形することにより、直径の下限值は次式となる。

$$\text{無向グラフの場合: } D \geq \log_{\Delta-1} \frac{n(\Delta-2)+2}{\Delta} \quad (1.3)$$

$$\text{有向グラフの場合: } D \geq \log_{\Delta} (n(\Delta-1)+1) - 1 \quad (1.4)$$

以下では、( $\Delta, D$ ) グラフ問題あるいは ( $n, \Delta$ ) グラフ問題の近似解として提案されたグラフを直径最小グラフと呼ぶことにする (正確にはその直径は最小ではないが)。

( $\Delta$ ,  $D$ ) グラフ問題の近似解として提案されたグラフをプロセッサ相互結合網への適用を研究したものとして、グラフ上でのルーチング・アルゴリズムの検討がある<sup>[27-29]</sup>。また、通信網への適用として、田中・秋山が研究している<sup>[30]</sup>。

## アプローチ 2 枝数最小化

もう 1 つのアプローチとして連結度、直径、直径罹障度のすべてによいグラフを直接的に求めようとするものがある。これは、1964年にMurthy&Vijayan<sup>[31]</sup>により提案された次の問題を研究するものである。

### $f_v(n, D, D', s)$ 問題

次の様な性質を持つグラフの中で枝数が最小となるグラフ及びその枝数を求めよ。

性質：点数が  $n$ 、直径が  $D$ 、どの  $s$  個の点を除去しても得られるグラフの直径は高々  $D'$ 。

この問題に関しては、数多くの研究がある<sup>[26]</sup>が基本的には無向グラフにおいて次に示す特殊な場合しか構成法が解っておらず、現状では実際の網への適用は困難な段階である。

$$f_v(n, D, D', 1) = \lceil (nD - 2D - 1) / (D - 1) \rceil \quad n > D' \geq 2D - 1 \quad (1.5) \quad [32]$$

$$f_v(n, 2, 2, s) = (s + 1)(n - s - 1) \quad n \geq 2s \quad (1.6) \quad [33]$$

(ただし  $\lceil \rceil$  は切上げを示す)

この問題の難しさは、良い下界値が解っておらず近似界を求める手法がとれないことにある。

## 1. 3 本研究の概要

本研究は、アプローチ 1 の立場にたち有向グラフを対象とし、直径最小グラフ構成法の提案及びそのグラフの連結度、直径罹障度等の性質を求め、これらのグラフが Moore グラフの持つ優れた性質を近似的に有していることを示す。つまり、直径最小グラフのトポロジーを基本にして網を構成することにより、高信頼・高能率な網が実現可能である事を主張している。なお、以下では混乱のない限り有向グラフを単にグ

ラフとよぶ。

主な結果は次の通りである。

- (1) 任意の点数に対して、直径が下界値（式1.4）より高々1大きいグラフの構成が可能である。
- (2) 最大次数を制限した下では、直径を最小化することにより連結度が最大化される。また、(1)で示したすべてのグラフの連結度は最大値より高々1小さいだけである。
- (3) (1)で示したサブクラスであるDe Bruijn グラフ及びKautz グラフは、直径冗障度が下界値より高々1大きいだけである。

以下に各章の概要を述べる。

## 第2章 直径最小グラフ構成法<sup>[42-44, 50]</sup>

本章では、2つの直径最小グラフ構成法を示す。従来提案されている直径最小グラフ（ $(\Delta, D)$ あるいは $(n, \Delta)$ 問題の解）構成法<sup>[12-14, 17-21, 23, 24, 36, 39]</sup>は特定の点数の無向グラフあるいは有向グラフを構成するものであった。本章で示す2つの構成法は、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものであり、任意の点数 $n$ 及び最大次数 $\Delta$ に対して構成が可能である。導出されたグラフの直径は $\lceil \log_{\Delta} n \rceil$ か $\lceil \log_{\Delta} n \rceil - 1$ となり下界値に比べ高々1大きいだけである（ $\lceil \cdot \rceil$ は切上げを示す）。また、平均距離についても下界値より高々0.3程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。

## 第3章 直径最小グラフの連結度<sup>[46, 47, 49, 52]</sup>

本章では、直径と連結度の上に成り立つ一般的関係に着目し、次の2つの不等式を示す。

$$\kappa \geq \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1} \quad \lambda \geq \min \left\{ \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D-1} + \Delta^2 - 2}, \delta \right\}$$

ただし、 $n$ は点数、 $\Delta$ は最大次数、 $\delta$ は最小次数、 $D$ は直径、 $\kappa$ は点連結度、 $\lambda$ は枝連結度である。これより、直径 $D$ を小さくすることにより連結度 $\kappa$ 、 $\lambda$ が大きくなる

ことが分かる。

また、第2章で示した直径最小グラフの連結度は最大値 $\Delta$ より高々1小さいだけである事を示す。

#### 第4章 直径罹障度<sup>[46, 48, 51, 53]</sup>

本章では、迂回経路の最大中継段数（即ち直径罹障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

- ① 直径罹障度の下界値は、最大次数 $\Delta$ 、点数 $n$ 、罹障点数 $s$ の関数として導出できる。
- ② 第2章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの部分集合となるDe Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度は、下界値に比べ高々1大きいだけである。
- ③ 上記グラフでは、障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現できる。

## 第2章 直径最小グラフ構成法

本章では、2つの直径最小グラフ構成法を示す。従来提案されている直径最小グラフ ( $(\Delta, D)$  あるいは  $(n, \Delta)$  問題の解) 構成法<sup>[12-14, 17-21, 23, 24, 36, 39]</sup> は特定の点数でしか無向グラフあるいは有向グラフを構成できなかった。本章で示す2つの構成法は、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものであり、任意の点数  $n$  及び最大次数  $\Delta$  に対して構成が可能である。導出されたグラフの直径は  $\lceil \log_{\Delta} n \rceil$  か  $\lceil \log_{\Delta} n \rceil - 1$  となり、直径の下界値 (式(1.4)) より高々1大きいだけである ( $\lceil \cdot \rceil$  は切り上げを示す)。また、平均距離についても下界値より高々0.3程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。また、本構成法を無向グラフに適用した時、点数  $n$  が大きければ従来に比べ直径の小さなグラフが構成できる。

2.1節で用語の定義と直径・平均距離の下界値を述べ、2.2節でグラフ構成法を提案し、構成されたグラフの直径を明らかにする。2.3節では、直径及び平均距離を下界値と比較評価する。2.4節では、無向グラフに本構成を適用した場合と従来の構成法と比較する。また、2.5節では構成されたグラフの幾つかの性質を示し、従来提案された直径最小グラフ<sup>[38, 39, 35]</sup> が、本章で提案するグラフの集合の一部となっていることを示す。

### 2.1 用語の定義と問題の定式化

本節では、使用する用語を定義し直径最小化問題を定式化する。

有向グラフを  $G = (V, E)$  で表わす。ここで  $V$  は点集合、 $E$  は有向枝集合であり、 $E$  の要素は点の順序対で表現される。ただし、多重枝は許さず、自己ループは許すものとする。枝  $(u, v)$  に対して点  $u$  を始点、点  $v$  を終点と呼ぶ。以下では、有向グラフを単にグラフと呼ぶことにする。点  $v \in V$  の出次数 (out-degree) は  $v$  から出ている枝の本数、入次数 (in-degree) は  $v$  に入ってくる枝の本数である (ただし、自己ループ枝は除く)。グラフ  $G$  の最大次数  $\Delta(G)$  は、すべての点での出次数及び入次数の最大値である。最小次数  $\delta(G)$  は、出次数及び入次数の最小値である。道 (walk)

は点 $v_i$ と枝 $e_i$ が交互に現われる交代系列 $v_0e_1v_1e_2\dots v_{n-1}e_nv_n$ で $e_i=(v_{i-1},v_i)$ となるもので、その道の長さは $n$ である。2つの道 $P$ と $Q$ が独立であるとは、端点以外の $P$ 上の点と $Q$ 上の点がいかにすべて異なることを意味する。また、枝独立とは $P$ 上の枝と $Q$ 上の枝がいかにすべて異なることを意味する。点 $u$ から点 $v$ への距離とは、点 $u$ から点 $v$ への長さが最小の道の長さであり、 $dis(u, v)$ と表わす。ただし、 $u=v$ の時は0、 $u$ から $v$ へ道がないときは無限大とする。点間の距離が小さいほど、データ転送の中継処理（すなわち転送遅延時間、転送処理時間）が小さくなりシステムの処理能力が大きく効率が良いと言える。点間の距離の評価尺度として直径（最大距離）及び平均距離がある。

グラフ $G$ の直径 $D(G)$ とは、すべての点对の距離の最大値、すなわち

$$D(G) = \max_{v_i, v_j \in V} dis(v_i, v_j)$$

である。

また平均距離は、

$$\bar{D}(G) = \left( \sum_{v_i, v_j \in V} dis(v_i, v_j) \right) / n^2$$

とする。

本章で扱う直径最小化問題は次の様に定式化できる。

$(n, \Delta)$  グラフ問題： $H(n, \Delta)$ を点数 $n$ 、最大次数 $\Delta$ のグラフの集合とする。 $H(n, \Delta)$ に属するグラフの中で直径が最小のグラフ及びその直径を求めよ。

$H(n, \Delta)$ に属するグラフは、次に示す性質を持つ。

[性質2.1] もしグラフ $G$ が $H(n, \Delta)$ に属するならば、直径 $D(G)$ について次式が成立する。

$$D \geq b(n, \Delta)$$

$$\text{ただし、 } b(n, \Delta) = \lceil \log_{\Delta} (n(\Delta - 1) + 1) \rceil - 1 \quad (1.3)$$

証明： 略<sup>[13]</sup> ■

$b(n, \Delta)$ は、点数 $n$ 、最大次数 $\Delta$ を与えた時の直径の下界値となる。

[性質 2. 2] もしグラフ  $G$  が  $H(n, \Delta)$  に属するならば、平均距離  $\bar{D}(G)$  について次式が成立する。

$$\bar{D} \geq b - (\Delta^{b+1} - \Delta b - \Delta + b) / n (\Delta - 1)^2 \quad (2.1)$$

ただし、 $b$  は下界値  $b(n, \Delta)$ 。

証明 : グラフ  $G = (V, E)$  において、ある点  $u \in V$  から他の任意の点  $v \in V$  への最短道をすべて含むスパニングトリー  $T_u$  を構成する。  $T_u$  において  $u$  から  $v$  への距離の総和を  $S_u$  とすると、次式が成立する。

$$S_u = \sum_{v \in V} \text{dis}(u, v)$$

$S_u$  を最小化するスパニングトリー  $T_u$  は次の性質を持つ (図 2. 1 参照)。

- ①  $T_u$  の深さは、直径の下界値  $b$  に一致する。
- ②  $u$  から深さが  $b - 2$  以下の点の出次数はすべて  $\Delta$  となる。つまり、深さ  $i \leq b - 1$  の点の個数は  $\Delta^i$  個となる。

従って、 $S_u$  の個数は次のように見積れる。

$$\begin{aligned} S_u &\geq \sum_{i=0}^{b-1} \Delta^i \cdot i + (n - \sum_{i=0}^{b-1} \Delta^i) \cdot b \\ &= nb - (\Delta^{b+1} - \Delta b - \Delta + b) / (\Delta - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\bar{D}(G) = \left( \sum_{u \in V} S_u \right) / n^2 = S_u / n$$

であるから式 (2.1) が導かれる。 ■

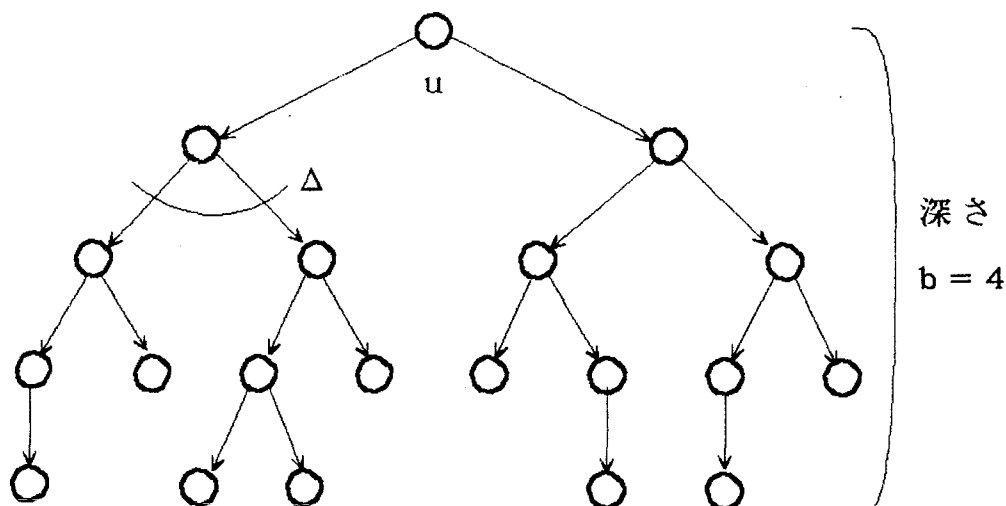


図 2. 1  $S_u$  を最小にするスパニングトリー  $T_u$

## 2. 2 線形構成法と構成されたグラフの直径

本章では、 $H(n, \Delta)$  に属する2つのグラフのクラスを提案し、その直径を明らかにする。両者とも、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものである。

[構成法1]  $n$ 個の点の集合  $V$  を  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  とする。点  $i$  と点  $j$  が次式を満たす時かつその時に限り、点  $i$  から点  $j$  への枝を付加する。

$$j \equiv i \times d + p \pmod{n} \quad p = 0, 1, 2, \dots, d-1 \quad (2.2)$$

[構成法2]  $n$ 個の点の集合  $V$  を  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  とする。点  $i$  と点  $j$  が次式を満たす時かつその時に限り、点  $i$  から点  $j$  への枝を付加する。

$$j \equiv -i \times d - q \pmod{n} \quad q = 1, 2, \dots, d-1, d \quad (2.3)$$

以下では、構成法1、2により構成されるグラフを各々  $G_1(n, d)$   $G_2(n, d)$  とする。 $G_1, G_2$  は、最大次数が  $d$  であり  $H(n, d)$  に属する。図2.2 及び 2.3に各々  $G_1(7, 2)$ 、 $G_2(9, 2)$  を示す。

$G_1(n, d)$  では、つねに自己ループが存在し最小次数  $\delta$  は  $d-1$  となる。また、 $G_2(n, d)$  は点数  $n$  が  $d+1$  の倍数のとき自己ループを含まず  $\delta$  は  $d$  となり、それ以外は  $\delta$  は  $d-1$  となる。また、最大次数  $\Delta$  は両者とも  $d$  となる。網に適用する場合

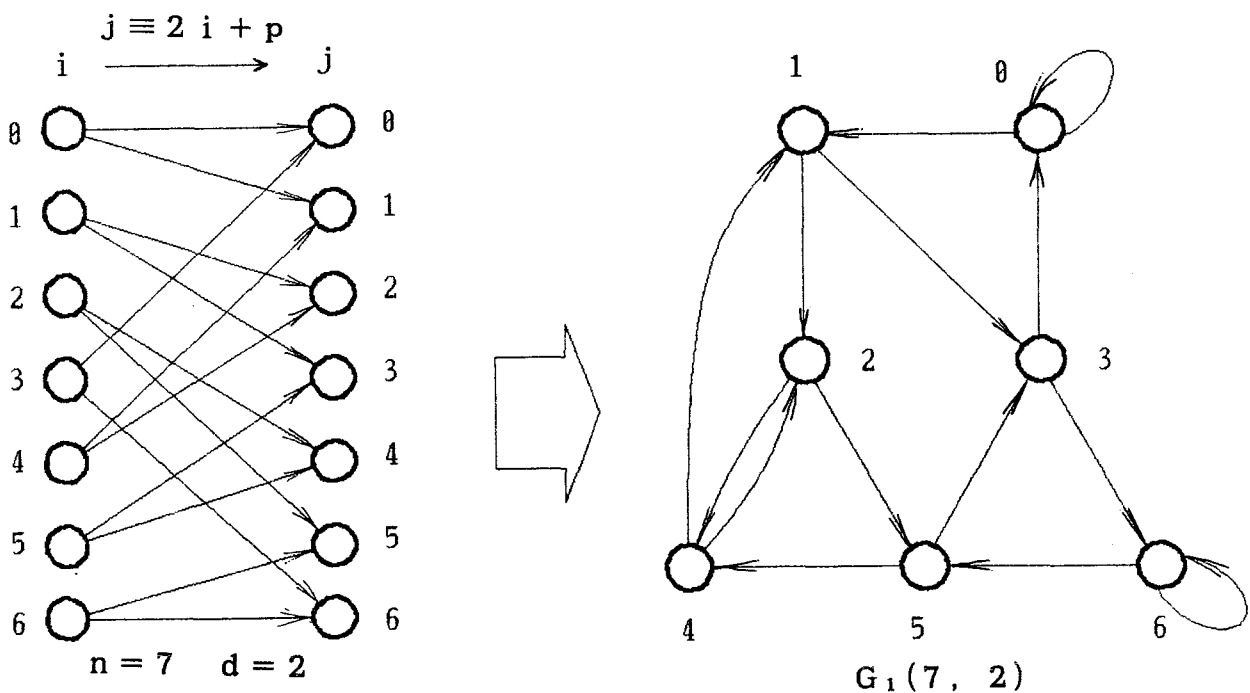


図2. 2  $G_1(7, 2)$



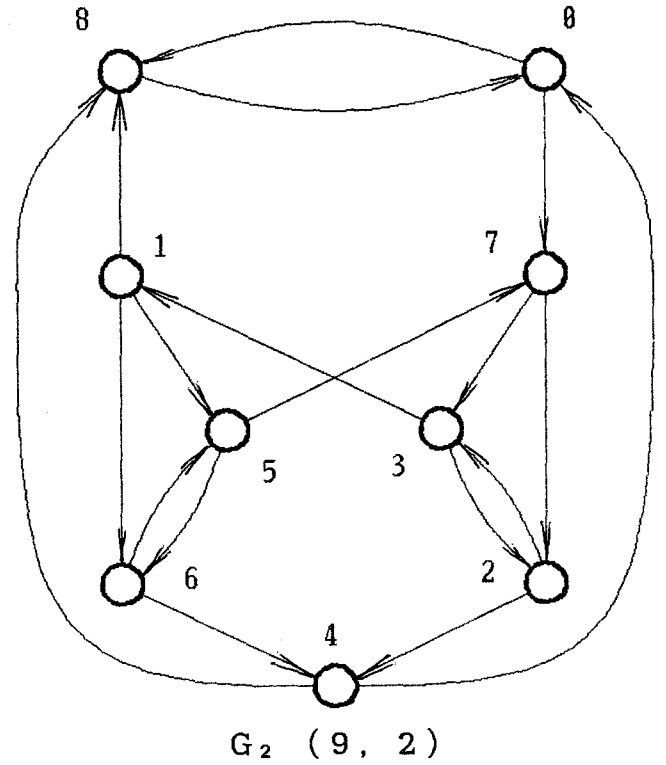
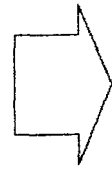
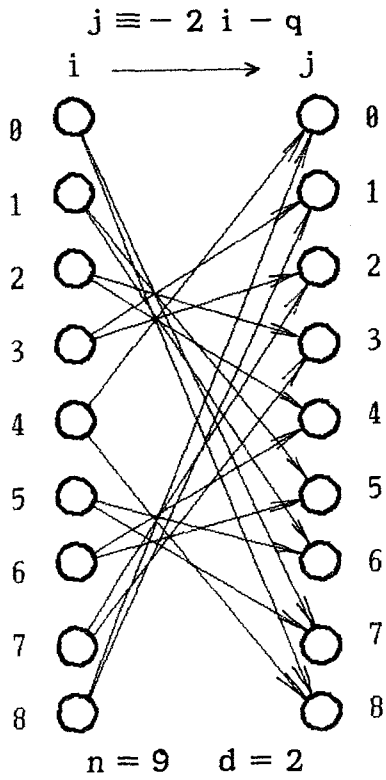


図 2. 3  $G_2(9, 2)$

自己ループは意味がないが、議論の都合上自己ループを含めたグラフを  $G_1(n, d)$ ,  $G_2(n, d)$  とする。

これらのグラフの直径を見積るため次の定義を導入する。

[定義 2. 1] グラフ  $G = (V, E)$  において、点  $u$  から長さ  $m$  の道が存在する点の集合を  $J_m(u)$  とする。

たとえば、図 2.3 に示すグラフ  $G_2(9, 2)$  において、 $J_0(0), J_1(0), J_2(0), J_3(0)$  は、各々  $\{0\}, \{7, 8\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  となる。

[定理 2. 1]  $G_1(n, d) = (V, E)$  において、次式が成立する。

$$|J_m(i)| = \min\{d^m, n\} \quad \text{ただし、} i \in V, m \text{ は自然数。} \quad (2.4)$$

また、直径  $D$  は次式を満たす。

$$D(G_1(n, d)) \leq \lceil \log_d n \rceil \quad (2.5)$$

証明 : 式 (2.2) より、

$$J_1(i) = \{j \mid j \equiv id + p_1 \pmod{n} \quad p_1 = 0, 1, \dots, d-1\}$$

$$J_2(i) = \{j \mid j \equiv id^2 + p_1d + p_2 \pmod{n} \quad p_1, p_2 = 0, 1, \dots, d-1\}$$

⋮

$$J_m(i) = \{j \mid j \equiv id^m + p_1d^{m-1} + \dots + p_s d^s + \dots + p_m \pmod{n}\} \\ p_s = 0, 1, \dots, d-1 \quad s=1, 2, \dots, m \} \quad (2.6)$$

となる。

$p_s$ が $0, 1, \dots, d-1$ の値をとることから、式(2.6)の右辺は $d$ 進数表現とみなせる。従って、 $id^m, id^{m+1}, \dots, (i+1)d^m - 1$ の値、つまり $d^m$ 個の連続した値をとることになり、式(2.4)が成立する。

また、 $m = \lceil \log_d n \rceil$ となる $m$ に対して、 $n \leq d^m$ となり、 $J_m(i)$ は $V$ と一致する。つまり、 $i$ からすべての点に対して長さ $m$ の道が存在することになる。 $i$ は任意の点でよく、直径は $m$ 以下となる。 ■

$G_2(n, d)$ についても、 $G_1(n, d)$ と同様な性質を持つ。

[定理 2. 2]  $G_2(n, d) = (V, E)$ において、次式が成立する。

$$|J_m(u)| = \min\{d^m, n\} \quad (2.7)$$

ただし、 $i \in V$ 、 $m$ は自然数。また、直径 $D$ は次式を満たす。

$$D(G_2(n, d)) \leq \lceil \log_d n \rceil \quad (2.8)$$

証明：定理 1 の証明と同様にして、次式が求まる。

$$J_m(i) = \{j \mid j \equiv f_{m,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_m) \pmod{n}\} \\ q_s = 1, 2, \dots, d, \quad s=1, 2, \dots, m$$

ただし  $f_{m,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_m)$

$$= i(-d)^{m-q_1}(-d)^{m-1-q_2} \dots - q_s(-d)^{m-s} \dots - q_m = i(-d)^m - \sum_{s=1}^m q_s (-i)^{m-s} \quad (2.9)$$

$f_{m,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_m)$ が最大、最小となるのは、 $q_s (s=1, \dots, m)$ が各々次の値の時である。

$$\text{最大： } q_s = \begin{cases} 1 & m-s \text{が偶数の時} \\ d & m-s \text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{最小： } q_s = \begin{cases} d & m-s \text{が偶数の時} \\ 1 & m-s \text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.11)$$

$f_{m,i}$ の最大値を $f_{\max}(m, i)$ 、最小値を $f_{\min}(m, i)$ とすると、その値は次のようになる。

$$f_{\max}(m, i) =$$

$$\begin{cases} f_{m, i}(d, 1, d, \dots, d, 1) = (i + 1) d^m - 1 & m \text{が偶数の時} \\ f_{m, i}(1, d, 1, \dots, d, 1) = -i d^m - 1 & m \text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$f_{\min}(m, i) =$$

$$\begin{cases} f_{m, i}(1, d, 1, \dots, 1, d) = i d^m & m \text{が偶数の時} \\ f_{m, i}(d, 1, d, \dots, 1, d) = -(i + 1) d^m & m \text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.13)$$

これより、 $f_{\max}(m, i) - f_{\min}(m, i) = d^m - 1$ となる。従って、 $f_{m, i}$ が  $f_{\max}(m, i)$  から  $f_{\min}(m, i)$  の間の任意の自然数値をとることが示せれば、 $f_{m, i}$  は  $d^m$  個の連続した値をとることが解り、命題が成立することになる。

以下ではこれを示す。任意の  $(q_1, q_2, \dots, q_s, \dots, q_m)$  (ただし  $q_s = 1, 2, \dots, d$ ,  $s = 1, \dots, m$ 、 $f_{m, i}(q_1, \dots, q_s, \dots, q_m) \neq f_{\max}(m, i)$ ) に対して次式を満たす  $(q_1', \dots, q_s', \dots, q_m')$  が存在すればよい。

$$f_{m, i}(q_1, \dots, q_s, \dots, q_m) + 1 = f_{m, i}(q_1', \dots, q_s', \dots, q_m')$$

$f_{m, i} \neq f_{\max}$  より、 $(q_1, \dots, q_s, \dots, q_m)$  において  $m-s$  が偶数で  $q_s > 1$  又は  $m-s$  が奇数で  $q_s < d$  となる (即ち、式 (2.10) を満たさない)  $q_s$  が必ず存在する。今、その中で添字が最大となるものの添字を  $T$  とする。 $q_s' (s = 1, \dots, m)$  を

$$q_s' = \begin{cases} q_s & s < T \text{の時} \\ q_s - 1 & s = T \text{で } m-s \text{が偶数の時} \\ q_s + 1 & s = T \text{で } m-s \text{が奇数の時} \\ d & s > T \text{で } m-s \text{が偶数の時} \\ 1 & s > T \text{で } m-s \text{が奇数の時} \end{cases}$$

とすると、 $f_{m, i}(q_1, \dots, q_s, \dots, q_m) + 1 = f_{m, i}(q_1', \dots, q_s', \dots, q_m')$  となる。

■

定理2.1, 定理2.2 より  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  の直径が「 $\log_d n$ 」以下となることが解った。では、真に「 $\log_d n$ 」より小さい場合が存在するかが問題となる。 $G_1(n, d)$  では存在しない。これは、点0から点  $n-1$  への距離が、 $n$ 、 $d$  に依存せず「 $\log_d n$ 」となることから解る。 $G_2(n, d)$  では、次の定理にしめすように「 $\log_d n$ 」-1 となる場合がある。

[定理 2. 3]  $G_2(n, d) = (V, E)$  において、点数  $n$  が  $d^{m-b}(d^b + 1)$  (ただし  $b$  は奇数) の時、

$$D(G_2) = m = \lceil \log_d n \rceil - 1 \quad (2.14)$$

証明：定理 2. 2 の証明より、

$$J_m(i) = \{j \mid j \equiv j' \pmod{n}, \\ j' = f_{\min}(m, i), f_{\min}(m, i)+1, \dots, f_{\max}(m, i)\}$$

$$J_{m-b}(i) = \{j \mid j \equiv j' \pmod{n}, \\ j' = f_{\min}(m-b, i), f_{\min}(m-b, i)+1, \dots, f_{\max}(m-b, i)\}$$

となる。次の 2 つの場合に分けて考える。

①  $m$  が偶数 ( $m-b$  が奇数) の時、式 (2.12)、(2.13) 及び  $n = d^m + d^{m-b}$  より、

$$f_{\min}(m, i) - f_{\max}(m-b, i) = id^m - (-id^{m-b}-1) = i(d^m + d^{m-b}) + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$f_{\min}(m-b, i) - f_{\max}(m, i) = -(i+1)d^{m-b} - ((i+1)d^m - 1) \\ = -(i+1)(d^m + d^{m-b}) + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

②  $m$  が奇数 ( $m-b$  が偶数) の時、式 (2.12) と (2.13) より、

$$f_{\min}(m, i) - f_{\max}(m-b, i) = -(i+1)d^m - ((i+1)d^{m-b}-1) \\ = -(i+1)(d^m + d^{m-b}) + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$f_{\min}(m-b, i) - f_{\max}(m, i) = id^{m-b} - (-id^m - 1) = i(d^m + d^{m-b}) + 1 \equiv 1 \pmod{n}$$

従って、 $V$  のすべて

の  $(0, 1, 2, \dots$  と番号  
付けられた) 点は  
 $J_m(i)$ 、 $J_{m-b}(i)$  の  
どちらかに含まれる  
ことになり (図 2.  
4 参照)、点  $i$  から  
すべての点に長さ  $m$   
または  $m-b$  の道が  
存在することにな  
る。点  $i$  は任意の点

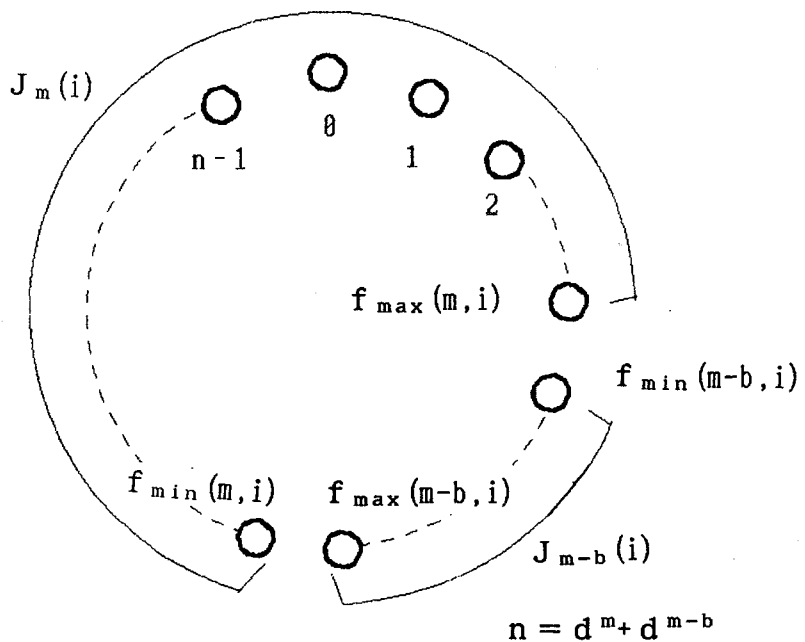


図 2. 4  $J_m(i)$  と  $J_{m-b}(i)$  の関係

であり直径が  $m$  となる。 ■

### 2. 3 構成されたグラフの評価

定理 2.1~2.3 より、グラフ  $G_1(n, d)$ ,  $G_2(n, d)$  の直径が明らかになった。まず、これらと 2. 1 節で述べた下界値を比較する。今、点数  $n$ 、次数  $d$  に対して自然数  $m$  を  $d^{m-1} < n \leq d^m$  となるようにとると、 $G_1(n, d)$ ,  $G_2(n, d)$  の直径は次のようになる。

$$D(G_1(n, d)) = \lceil \log_d n \rceil = m$$

$$D(G_2(n, d)) = \begin{cases} \lceil \log_d n \rceil - 1 = m - 1 & n = d^{m-b} (d^b + 1) \text{ の時} \\ \lceil \log_d n \rceil = m & n \text{ がそれ以外の時} \end{cases}$$

ただし、 $b$  は奇数。

一方、直径の下界値 Moore bounds  $b(n, d)$  は次のようになる。

$$b(n, d) \begin{cases} = m - 1 & d^{m-1} < n \leq \frac{d^m - 1}{d - 1} \\ = m & \frac{d^m - 1}{d - 1} < n \leq d^m \end{cases}$$

従って、 $G_1, G_2$  の直径は下界値より高々 1 大きいだけであり、下界値と一致するのは、次の場合になる。

$$G_1(n, d) : \frac{d^m - 1}{d - 1} < n \leq d^m$$

$$G_2(n, d) : \frac{d^m - 1}{d - 1} < n \leq d^m \quad \text{または} \quad n = d^{m-b} (d^b + 1) \quad (b \text{ は奇数})$$

グラフ  $G_1, G_2$  の平均距離  $\bar{D}$  を陽に見積ることは困難である。図 2. 5 に計算で求めた  $G_1, G_2$  の平均距離と下界値を示す。図から、最大次数  $\Delta$  が 2 の時  $\bar{D}(G_1(n, 2))$   $\bar{D}(G_2(n, 2))$  と下界値 (式 (2.1) の左辺) の差は、高々 0.3 程度であることが解る。また、差は最大次数  $\Delta$  が大きくなる程小さくなっている。

構成法 1、2 は、任意の点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$  を与えて直径が準最小のグラフを構成するものであった。もちろん、 $(\Delta, D)$  グラフ問題に対しても適用可能である。

$(\Delta, D)$  グラフ問題の観点からは、構成法 2 において点数が  $\Delta^D + \Delta^{D-1}$  の時のグラフ  $G_2(\Delta^D + \Delta^{D-1}, \Delta)$  が最も良い解である。最大次数  $\Delta$ 、直径  $D$ 、点数  $\Delta^D + \Delta^{D-1}$

となるグラフは、Kautzが既に別の構成法を示している<sup>[39]</sup>。2. 5節で後述するが、実は Kautzグラフと  $G_2(\Delta^D + \Delta^{D-1}, \Delta)$  は同じグラフとなっている。

図2. 5  $G_1, G_2$  の平均距離と下界値の比較

点数n	平均距離 D								
	最大次数 $\Delta = 2$			最大次数 $\Delta = 3$			最大次数 $\Delta = 4$		
	下界値	$G_1(n, 2)$	$G_2(n, 2)$	下界値	$G_1(n, 3)$	$G_2(n, 3)$	下界値	$G_1(n, 4)$	$G_2(n, 4)$
6	1.333	1.611	1.333	1.167	1.270	1.222	1	1.167	1.111
10	1.9	2.120	2.120	1.5	1.62	1.580	1.4	1.44	1.400
20	2.7	2.960	2.960	2.1	2.210	2.190	1.7	1.870	1.7
30	3.133	3.502	3.473	2.4	2.536	2.493	2.1	2.220	2.178
40	3.575	3.859	3.859	2.55	2.815	2.805	2.325	2.380	2.337
50	3.86	4.171	4.152	2.84	2.999	2.999	2.46	2.495	2.484

#### 2. 4 線形構成法の無向グラフへの適用

前節で示した構成法2により、最大次数  $d$ 、直径  $D$ 、点数  $d^D + d^{D-1}$  の有向グラフが構成できる。いまこの有向グラフ  $G_2(d^D + d^{D-1}, d)$  の枝の向きを除去した無向グラフを考えると、最大次数  $\Delta$  は  $2d$  となる。一般に有向グラフの枝の向きを除去した無向グラフの直径は、もとのグラフの直径より小さい。従って、点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$ 、直径  $D$  の間には次式が成立する。

$$n \geq (\Delta/2)^D + (\Delta/2)^{D-1} \quad (2.15)$$

これは、従来構成された各種の無向グラフと異なる特徴となっている。従来の構成法<sup>[17-20, 23]</sup>における最大次数  $\Delta$ 、直径  $D$ 、点数  $n$  の間の関係式は、全て次のように一般化できる。

$$n_0 \leq f(\Delta) \times (\Delta - 1)^{D/2} + g(\Delta) \quad (2.16)$$

ただし、 $f(\Delta)$ 、 $g(\Delta)$  は直径  $D$  には依存せず最大次数  $\Delta$  のみに依存する関数。

式(2.15)と(2.16)を比べた時、 $f(\Delta)$ 、 $g(\Delta)$  がどのような値でも直径 $D$ が充分大きければ式(2.15)の方が多くの点数 $n$ を持つことが解る。つまり、ここで提案した構成法は点数 $n$ が十分大きい(大規模)なグラフを構成する場合は従来のどの構成法より優れている。

従来の構成法で式(2.16)が成立するのは、トリーを基本に構成していたことに因る。トリーでは、根にあたる点から他の点への距離がリーフからリーフへの距離(直径 $D$ )の $1/2$ となり(図2.

6参照)、全体の点数は式(2.16)の形式で表現できる。

従来の構成法は、複数のトリーを組合せたり各種の変形を行っているが、基本的にはこの性質が残っており $f(\Delta)$ 、 $g(\Delta)$ を小さくすることに努力が払われていたと見なせる。

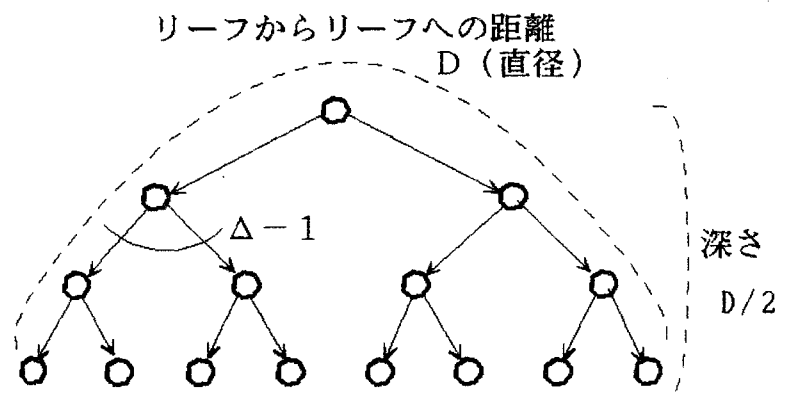


図 2 . 6 トリーの構造

我々の発表の後、構成法1の変形<sup>[21, 24]</sup>などトリーを基本としない構成法が研究され<sup>[22, 25]</sup>特定の $\Delta$ 、 $D$ に対しては式(2.15)より多くの点数を持つグラフが構成されているが、直径 $D$ (つまり点数 $n$ )が充分大きいところでは、より優れた構成法はまだ明らかになっていない。

## 2. 5 構成されたグラフと線グラフの関係

次章以下(特に4章)の準備として、前章で構成法を示した $G_1, G_2$ がグラフの演算の一種である線グラフ変換<sup>[37]</sup>と深く関わりがあることを示し、

- ①  $G_1(d^m, d)$ が完全回路<sup>[38]</sup>の個数を数えあげるために構成されたDe Bruijnグラフと同一である事、
- ②  $G_2(d^m + d^{m-1}, d)$ がKautz<sup>[39]</sup>とReddy<sup>[35]</sup>が独立に提案した直径最小グラフ(以下Kautzグラフとよぶ)と同一である事を示す。

グラフ  $G$  の線グラフ  $L(G)$  とは次の性質を満たすグラフである。

(性質 1)  $L(G)$  の点は、 $G$  の枝に対して 1 対 1 に対応がつく。

(性質 2)  $G$  の 2 つの枝を  $e_1, e_2$  とし、 $L(G)$  において  $e_1, e_2$  に対応する点を  $v_1, v_2$  とする。もし、 $G$  において  $e_1$  の終点と  $e_2$  の始点と同じである時かつその時に限り、 $L(G)$  において点  $v_1$  から点  $v_2$  に枝が存在する。

即ち、線グラフ  $L(G)$  とは、グラフ  $G$  の枝を点とみなしたグラフの事である (線グラフの線は枝の意味)。図 2. 7 に完全グラフ  $K_3$  とその線グラフ  $L(K_3)$  を示す。

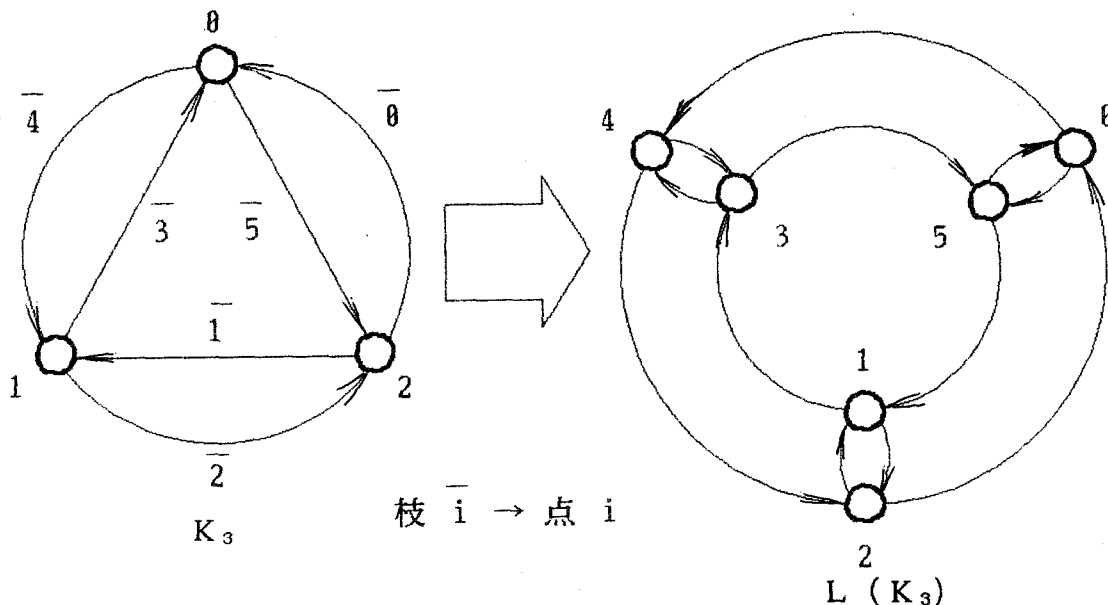


図 2. 7 完全グラフとその線グラフ  $L(K_3)$

線グラフの観点から見ると、2. 2 節で構成法を示した直径最小グラフ  $G_1, G_2$  では次の性質が成立する。

[性質 2. 3] グラフ  $G_1(nd, d), G_2(nd, d)$  は、各々  $G_1(n, d), G_2(n, d)$  の線グラフとなっている。即ち、

$$G_1(nd, d) = L(G_1(n, d))$$

$$G_2(nd, d) = L(G_2(n, d))$$

証明：最初に  $G_1$  について証明する。今、 $G_1(n, d) = (V, E)$ 、 $G_1(nd, d) = (V', E')$  とする。 $G_1(n, d)$  において式 (2.2) で構成された枝を  $\langle i, p \rangle$  で表わすことにする ( $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq p \leq d-1$ )。即ち、枝  $(i, j) \in E$  について

$$j \equiv i d + p \pmod{n}$$

を満たす時、その枝を  $\langle i, p \rangle$  で表わす。また、 $G_1(nd, d)$  の点は、0 から



nd-1の自然数で表わす。今、 $G_1(n,d)$ の枝 $\langle i, p \rangle$ と $G_1(nd,d)$ の点 $u$ との対応関係を次の関数で定義する(図2.8参照)。

$$u = f(i, p) = i d + p$$

この対応関数は $E$ から $V'$ への1対1写像になっていることは明らかであり、線グラフの性質2を満たすことを示せばよい。

今、枝 $\langle i_1, p_1 \rangle$ の終点と枝 $\langle i_2, p_2 \rangle$ の始点が一致したとすると次式が成立する。

$$i_2 \equiv i_1 * d + p_1 \pmod{n}$$

これを变形することにより、

$$i_2 * d + p_2 \equiv (i_1 * d + p_1) d + p_2 \pmod{nd}$$

$L(G)$ において枝 $\langle i_1, p_1 \rangle$ 枝 $\langle i_2, p_2 \rangle$ に対応する点を各々 $u_1, u_2$ とすると、対応関数 $f$ より $u_1 = i_1 d + p_1$   $u_2 = i_2 d + p_2$ となり、次式が成立する。

$$u_2 \equiv u_1 * d + p_2 \pmod{nd}$$

従って、 $G_1$ において $u_1$ から $u_2$ への枝が存在することになる。この証明は、逆にもたどれるので、枝 $\langle i_1, p_1 \rangle$ の終点と枝 $\langle i_2, p_2 \rangle$ の始点が一致した時かつその時に限り、 $u_1$ から $u_2$ への枝が存在する。

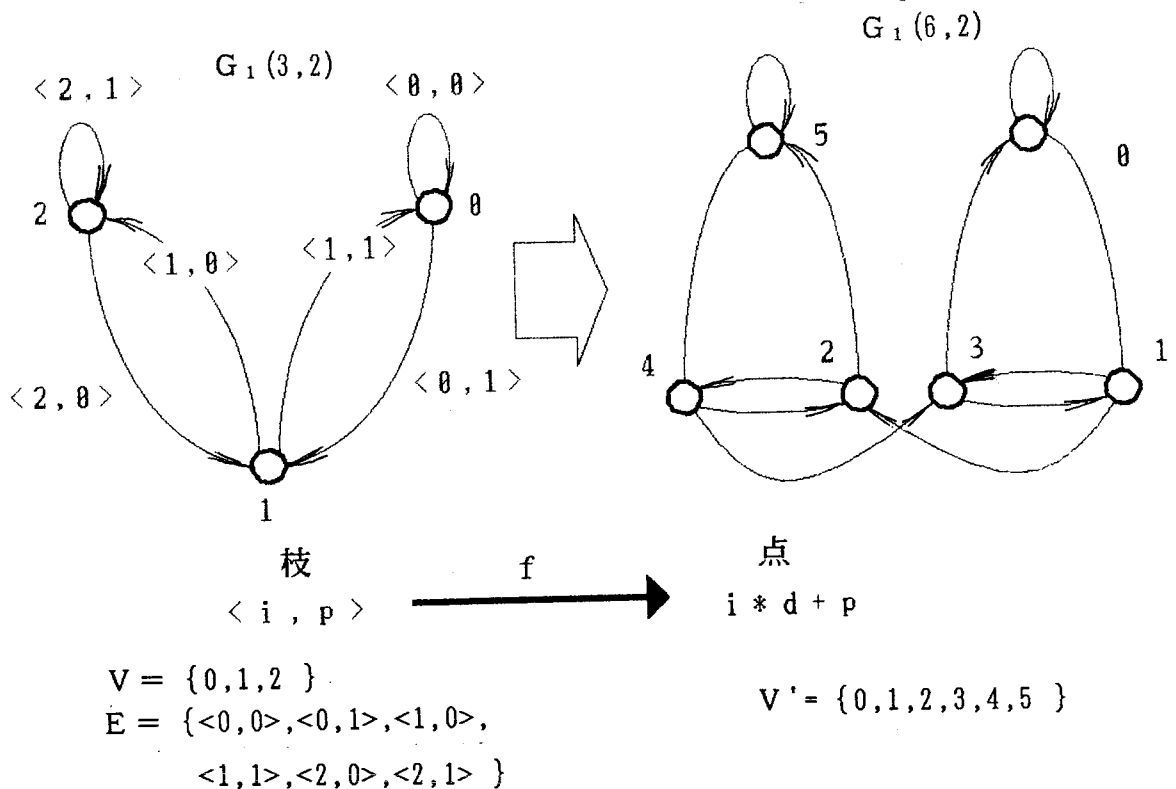


図2.8  $G_1(3, 2)$ と $G_2(6, 2)$ の関係

$G_2$  についても、 $G_2(n, d)$  の枝を  $\langle i, q \rangle$  で表し、 $E$  から  $V'$  への対応関係を次の関数  $h'$  とすることにより同様に示せる。

$$h' (i, q) = nd - id - q \quad \blacksquare$$

上記性質の系として次の性質が成立する。

[性質 2. 4]

$$G_1(d^k, d) = L^{k-1}(\overline{K}_d)$$

$$G_2(d^{k+1}, d) = L^{k-1}(K_{d+1})$$

ただし、 $K_{d+1}$  は点数  $d+1$  の完全グラフ（各点の次数は  $d$ ）、 $\overline{K}_d$  は点数  $d$  の完全グラフ  $K_d$  の各点に自己ループを付加したグラフである。

証明： $G_1(d, d)$  が  $\overline{K}_d$ 、 $G_2(d+1, d)$  が  $K_{d+1}$  であることと性質 2. 3 より導かれる。 ■

次に、あるグラフ  $G$  を  $m$  回線グラフ変換したグラフ  $L^m(G)$  はどのように表現できるかについて考察する。一般に有向グラフ  $G = (V_1, E_1)$  において、枝集合  $E_1$  は  $V_1$  から  $V_1$  への 1 対多写像とみなせる。今この写像を  $\Gamma$  とすると枝集合  $E_1$  は次のように表わせる。

$$E_1 = \{ (x_1 \ x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in \Gamma(x_1) \}$$

$L(G) = (V_2, E_2)$  において、 $V_2 = E_1$  である。また、点  $(x_1 \ x_2)$  から出ている枝の終点は集合  $\{ (x_2 \ x_3) \mid x_3 \in \Gamma(x_2) \}$  となる。即ち、点集合  $V_2$ 、枝集合  $E_2$  は次の様に表わせる。

$$V_2 = \{ (x_1 \ x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in \Gamma(x_1) \}$$

$$E_2 = \{ (x_1 \ x_2 \ x_3) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in \Gamma(x_1), x_3 \in \Gamma(x_2) \}$$

同様にして、 $L^m(G) = (V_m, E_m)$  は次のように表わせる。

$$V_m = \{ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m) \mid x_1 \in V_1, x_{i+1} \in \Gamma(x_i), i=1, 2, \dots, m-1 \}$$

$$E_m = \{ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m+1}) \mid x_1 \in V_1, x_{i+1} \in \Gamma(x_i), i=1, 2, \dots, m \}$$

また、点  $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)$  から出ている枝の終点集合は次のようになる。

$$\{ (x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m \ x_{m+1}) \mid x_{m+1} \in \Gamma(x_m) \}$$

例えば、 $\overline{K}_2 = (V_1, E_1)$  と  $L(\overline{K}_2) = (V_2, E_2)$  について示す (図 2. 9 参照)。有向

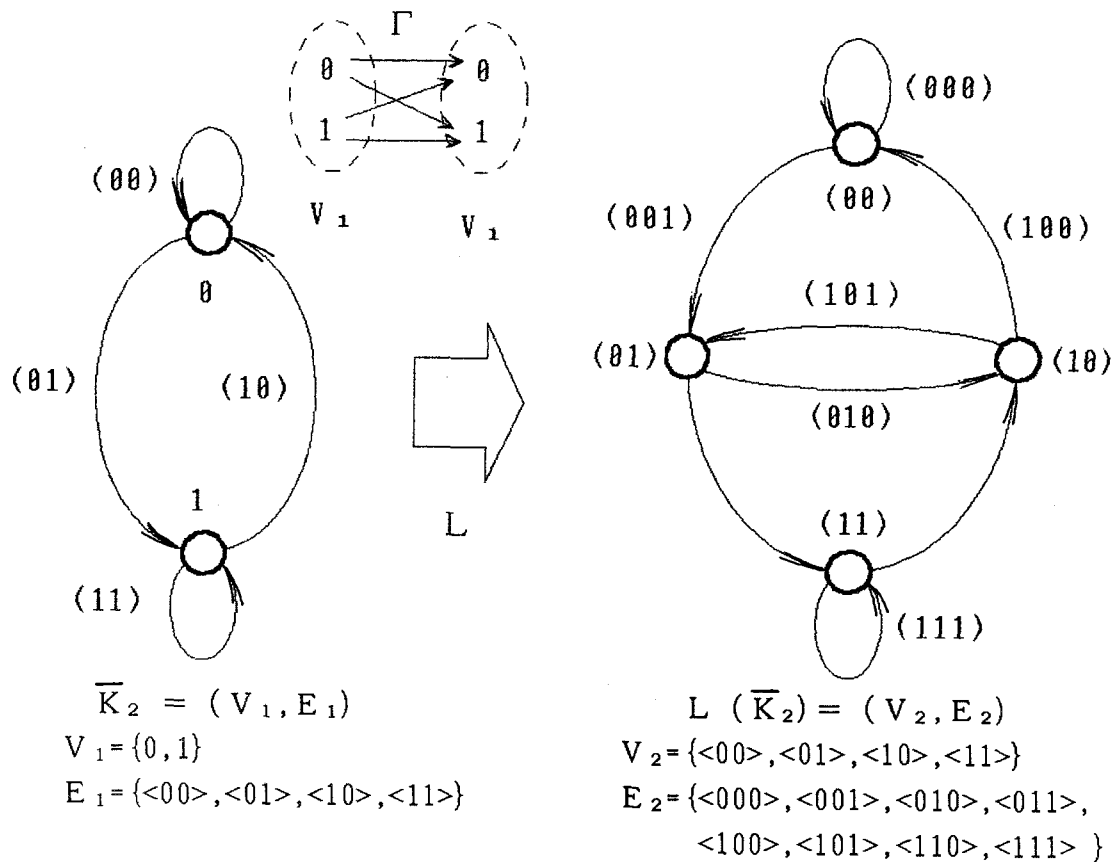


図 2. 9  $K_2$  と  $L(K_2)$  の関係

グラフ  $\bar{K}_2 = (V_1, E_1)$  において、枝集合  $E_1$  は  $V_1 = \{0, 1\}$  から  $V_1$  への 1 対多写像は次の様になる。

$$\Gamma(0) = \{0, 1\}, \Gamma(1) = \{0, 1\}$$

枝集合  $E_1$  は次のように表わせる。

$$E_1 = \{ (00), (01), (10), (11) \}$$

$L(K_2)$  において点集合  $V_2$ 、枝集合  $E_2$  は次の様に表わせる。

$$V_2 = \{ (00), (01), (10), (11) \}$$

$$E_2 = \{ (000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111) \}$$

$\bar{K}_d = (V_1, E_1)$  では、点集合は  $V_1 = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 、写像は  $\Gamma(x_1) = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 、  
 $K_{d+1} = (V_1, E_1)$  では、点集合は  $V_1 = \{0, 1, \dots, d-1\}$ 、写像は  
 $\Gamma(x_1) = \{s \mid s=0, 1, \dots, d \text{ かつ } s \neq x_1\}$  となる。

従って、 $G_1(d^k, d)$   $G_2(d^k + d^{k-1}, d)$  は次のように表現できる。

$$G_1(d^k, d) = L^{k-1}(\bar{K}_d) = (V, E)$$

$$V = \{ (a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \}$$

$$E = \{ (a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \}$$

$$\cdot G_2(d^k+d^{k-1}, d) = L^{k-1}(K_{d+1}) = (V', E')$$

$$V' = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, d\} \quad a_i \neq a_{i+1} (i=1, 2, \dots, k-1)\}$$

$$E' = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, d\} \quad a_i \neq a_{i+1} (i=1, 2, \dots, k)\}$$

このように  $G_1$  の点・枝は  $d$  進数、 $G_2$  は  $d+1$  進数で表現される。また、点間の接続関係はこのシフトにより表現できる。即ち、各点  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  から  $d$  個の点  $(a_2, \dots, a_k, s)$  へ有向枝が存在する ( $G_1$  の場合  $s=0, 1, \dots, d-1$ 、 $G_2$  の場合  $s=0, 1, \dots, d$  かつ  $s \neq a_k$ )。以下では、このグラフ表記法をシフトレジスタ表現と呼ぶことにする。

以上のように、直径最小グラフ  $G_1(d^k, d)$ 、 $G_2(d^k+d^{k-1}, d)$  については、2.2 節で提案した線形構成法以外に線グラフ変換及びシフトレジスタ表現によっても構成できることが解った。

De Bruijn は完全回路の存在性と総数を求めるためシフトレジスタ表現により  $G_1(d^k, d)$  を構成しており、このグラフは De Bruijn グラフと呼ばれている<sup>[38]</sup>。また、 $G_2(d^k+d^{k-1}, d)$  は、直径最小化問題の解として Kautz がシフトレジスタ表現により<sup>[39]</sup>、Reddy が線グラフ変換により<sup>[35]</sup> 各々独立して構成している。線グラフ変換およびシフトレジスタ表現はグラフの性質を検討する上では有効である。しかし、線形構成法が任意の点数に対してグラフを構成出来るのに対して、これらの構成法は限られた点数のグラフしか構成できない欠点がある。

## 2.6 むすび

本章では、2つの直径最小グラフ  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  の構成法を示し、その特徴について検討した。主な結果は次のとおりである。

(1)  $G_1$ 、 $G_2$  の直径 (最大中継段数) は下界値に比べ高々 1 大きいだけである。また次の場合は下界値に一致する。

$$G_1(n, d) : \frac{d^m - 1}{d - 1} < n \leq d^m$$

$$G_2(n, d) : \frac{d^m - 1}{d - 1} < n \leq d^m \quad \text{または} \quad n = d^{m-b}(d^b + 1) \quad (b \text{ は奇数})$$

ただし、 $m$  は  $d^{m-1} < n \leq d^m$  を満たす自然数。

- (2)  $G_1, G_2$  の平均距離は、下界値に比べ高だか 0.3 程度大きい事が計算より予想される。
- (3) また、従来直径最小グラフとして提案されているグラフ<sup>[35, 38, 39]</sup>は、 $G_1, G_2$  の部分集合となっている。
- (4) 本章で提案した構成法は無向グラフを構成する場合も有効であり、 $n$  が十分大きい場合には従来などの構成法よりも直径が小さいグラフを構成できる点で優れている。

今後検討すべき課題として、下界値と上界値を一致させるという困難な問題が残っているが、 $G_1, G_2$  は下界値に比べ高々 1 大きいだけであり、実用上は十分と考えられる。無向グラフについては下界値と上界値の差は大きく<sup>[25]</sup>、今後の検討が期待される。

### 第 3 章 直径最小グラフの連結度

前章では、任意の点数において直径が下界値より高々 1 大きいグラフが構成できることを示した。本章では、信頼性の 1 つの評価尺度である連結度について、直径最小グラフ（前述したように直径最小化問題の解として提案されたグラフをこのように呼ぶ。直径が最小とは限らない。）の持つ性質について検討する。連結度は、いくつの点あるいは枝が障害となった時通信が不能になる（道が存在しない点対が生じる）かを示すものであり、連結度が大きいほど信頼性が高いと言える。連結度には点の障害を想定した点連結度と枝の障害を想定した枝連結度がある。従来、直径が小さく連結度の大きいグラフを求めようという立場から、直径最小グラフの連結度について幾つかの研究が行われていた<sup>[34-36]</sup>。これらの研究は単に構成されたグラフの連結度を調べるものであり、目立った成果は得られていなかった。

本章では、直径と連結度の中に成り立つ一般的関係に着目し、次の 2 つの不等式を示す。

$$n \leq \kappa \left( \frac{\Delta^D - 1}{\Delta - 1} + \Delta \right) \qquad n \leq \lambda \left( \frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} + \Delta + 1 \right)$$

ただし、 $n$  は点数、 $\Delta$  は最大次数、 $D$  は直径、 $\kappa$  は点連結度、 $\lambda$  は枝連結度である。これより、点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$  を一定とした時、直径  $D$  を小さくするにつれて連結度  $\kappa$ 、 $\lambda$  が大きくなることが保証される。また、この不等式より、次の 2 つの事実を導く。

- ① 最大次数  $\Delta$  と点数  $n$  が与えられた下で、連結度が最大値  $\Delta$  となるための十分条件を示す。
- ② 2 章で構成法を示した直径最小グラフ  $G_1(n, d)$  及び  $G_2(n, d)$  の連結度は最大値  $d$  より高々 1 小さいだけである。

3. 1 節では、いくつかの用語を定義した後、直径が小さいグラフの連結度に関する従来の結果を示す。3. 2 節では、連結度と直径の関係式を導出し、直径を最小化することにより連結度が最大化されることを示す。3. 3 節では、3. 2 節の結果を用い  $G_1(n, d)$  及び  $G_2(n, d)$  の連結度が  $d - 1$  以上であることを示す。

### 3. 1 用語の定義と従来の結果

#### 3. 1. 1 用語の定義

通信網における障害を表現するため、点（あるいは枝）の除去という演算を導入する。グラフ  $G = (V, E)$  から点  $v$  を除去したグラフ  $G - v$  とは、 $v$  を除く  $G$  のすべての点及び  $v$  につながっていないすべての枝から構成されるグラフである。また、 $G$  から枝  $e$  を除去したグラフ  $G - e$  とは、 $G$  の全ての点及び  $e$  以外のすべての枝から構成されるグラフである。同様に点部分集合  $V' \subseteq V$ 、枝部分集合  $E' \subseteq E$  を除去した部分グラフを定義でき、これを各々  $G - V'$ 、 $G - E'$  と表わすことにする。

グラフが連結であるとは、任意の点对  $(v, w)$  に対し  $v$  から  $w$  及び  $w$  から  $v$  に道が存在することを言う。連結度はグラフの信頼性を表現するパラメータとしてよく用いられる。グラフ  $G$  の点連結度  $\kappa(G)$  とは、非連結なグラフかトリビアルなグラフ（1つの点から構成されるグラフ）を作るために除去すべき点の最小個数である。同様に枝連結度  $\lambda(G)$  は除去すべき枝の最小個数である。つまり、点連結度  $\kappa$  が  $d$  である事は、任意の  $d - 1$  個の点が障害となっても障害となっていない任意の点間で通信が可能であることを意味する。また、任意の2点間に  $d$  本の点独立な道の存在が保証される。枝連結度  $\lambda$  は枝の障害に対し同様の保証をあたえる。連結度  $\kappa$ 、 $\lambda$  と最小次数  $\delta$ 、最大次数  $\Delta$  の間には次の関係が成立することが知られている。

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \quad (3.1)$$

2章で構成法を示した直径最小グラフ  $G_1(n, d)$  及び  $G_2(n, d)$  の枝数は  $nd$  であった。点数  $n$ 、枝数  $nd$  のグラフの最小次数  $\delta$  は  $d$  以下であり連結度も高々  $d$  となる。

#### 3. 1. 2 従来の結果

2章で述べたように  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  及びこれらのグラフの枝の向きを除去した無向グラフも直径最小化問題に対し有効な解であることから、これらのグラフの性質について各種の研究がなされている。Reddy 等は、①  $G_1(n, d)$  の一部を変更することにより点数  $n$  が  $d^k$  あるいは  $d^{k+1}$  の時、点連結度  $d$ 、直径  $k$  のグラフを構成できる事<sup>[35]</sup> 及び、②  $G_2(n, d)$  について、点数が  $d^k + d^{k-1}$  の時、点連結度が  $d$

である事を示した<sup>[36]</sup>。また、Schlumbergerは $G_1(n, d)$ の枝の向きを除いた無向グラフの連結度について、点数 $n$ が $d^k$ あるいは $p \cdot d^{k-1}$  ( $p$ と $d$ は互いに素)の時 $2d-2$ 以上であることを示した<sup>[34]</sup>。しかし、これらはすべて特定の点数に対してのみの結果であり、任意の点数のグラフの連結度については解っていない。

### 3. 2 直径と連結度の関係

本節では、 $H(n, \Delta)$ に属するグラフについて直径と連結度の関係について考察し、連結度を最大化する十分条件を示す。3. 2. 1では点連結度、3. 2. 2では枝連結度を取扱う。

#### 3. 2. 1 点連結度

ここでは、まず点数 $n$ 、最大次数 $\Delta$ 、直径 $D$ 、点連結度 $\kappa$ の間に成り立つ不等式を導き(定理3. 1)、これより連結度を最大化するための十分条件を示す(性質3. 1)。

[定理3. 1] もし、グラフ $G = (V, E)$ において点数が $n$ 、最大次数が $\Delta$ 、直径が $D$ 、点連結度が $\kappa \neq 0$ であれば、次式が成立する。ただし、 $n \geq \kappa + 2$ 。

$$n \leq \kappa \left( \frac{\Delta^D - 1}{\Delta - 1} + \Delta \right) \quad (3.2)$$

証明：点連結度の定義より、 $|V_0| = \kappa$ かつ $G - V_0$ が非連結となる点部分集合 $V_0 \subseteq V$ が存在する。これより $G - V_0$ において、点集合 $V - V_0$ を2つの集合 $V_1, V_2$ に分割し $V_1$ の点から $V_2$ の点への枝がないようにすることが可能である(図3. 1参照)。即ち $G$ において任意の2点 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ に対し、 $v_1$ から $v_2$ への道上の点には必ず $V_0$ の点が含まれる。 $V_0$ を $\{u_j \mid j = 1, 2, \dots, \kappa\}$ とする。

今、証明の都合上、 $m, Q(u_j)$ を次のように定義する。

$$m = \max_{v \in V_1} \{ \text{dis}(v, V_0) \} \quad \text{ただし} \quad \text{dis}(v, V_0) = \min_{u \in V_0} \{ \text{dis}(v, u) \}$$

$$Q(u_j) = \{ v \in V_1 \mid \text{dis}(v, u_j) \leq m \} \quad \text{ただし} \quad u_j \in V_0$$

また、 $V_1$ の点で $V_0$ との距離が $m$ となる点の1つを $v_1$ とする。即ち、 $\text{dis}(v_1, V_0) = m$  ( $v_1 \in V_1$ )が成立する点を $v_1$ とする。



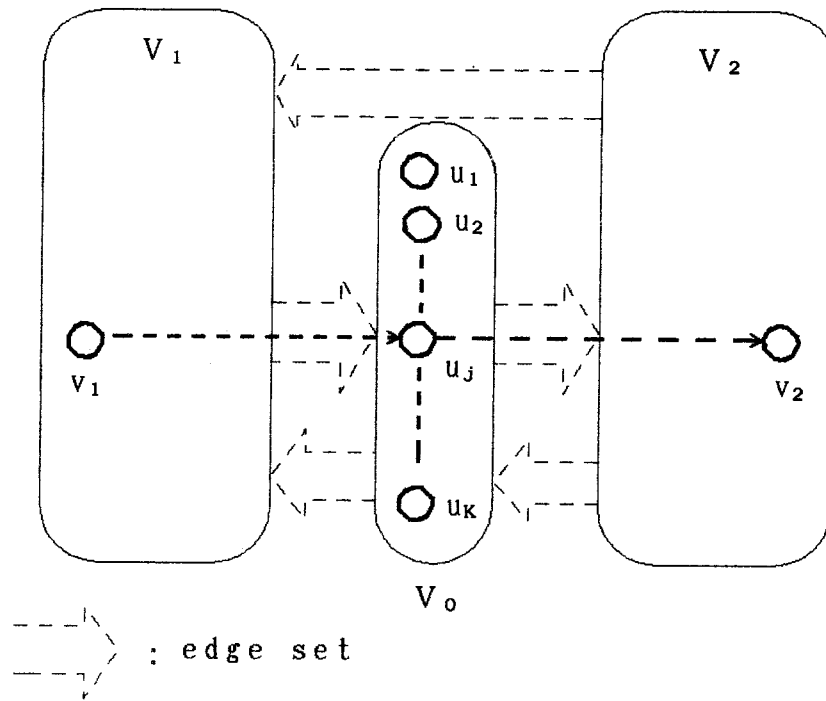


図3. 1 点連結度  $\kappa$  がとなるグラフに要求される構造

最初に  $V_1$  の個数を見積る。  $Q(u_j)$  は  $u_j$  までの距離が  $m$  以下の点の集合であり、各点の入次数は  $\Delta$  以下であるから、

$$|Q(u_j)| \leq \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^m = \Delta \frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1}$$

となる。  $V_1$  に含まれる点は、  $Q(u_j)$  ( $j=1, 2, \dots, \kappa$ ) のどれかに含まれるから

$$|V_1| \leq |Q(u_1)| + |Q(u_2)| + \dots + |Q(u_\kappa)| \leq \kappa \Delta \frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1} \quad (3.3)$$

となる。

次に  $V_2$  の個数を見積る。

今、  $v_2$  を  $V_2$  に含まれる任意の点とする。直径が  $D$  であるから、  $v_1$  から  $v_2$  へは長さが  $D$  以下の道が存在する

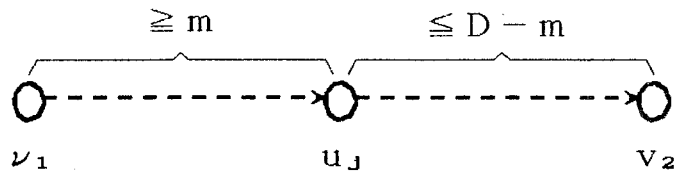


図3. 2  $v_1$  から  $v_2$  への道

(図3. 2参照)。

また、その道は  $V_0$  の点を含む。従って、  $v_1, v_2$  及びある  $u_j \in V_0$  に対し、

$$\text{dis}(v_1, u_j) + \text{dis}(u_j, v_2) = \text{dis}(v_1, v_2) \leq D$$

が成立する。  $v_1$  の定義より、  $\text{dis}(v_1, u_j) \geq m$  であり  $\text{dis}(u_j, v_2) \leq D - m$  と

なる。つまり、任意の  $v_2 \in V_2$  はある  $u_j \in V_0$  から長さ  $D - m$  以下の道が必ず存在することになる。従って、次式が成立する。

$$|V_2| \leq \kappa (\Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^{D-m}) = \kappa \Delta \frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1} \quad (3.4)$$

式(3.3), (3.4) より、

$$n = |V_0| + |V_1| + |V_2| \leq \kappa \left( 1 + \Delta \frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1} + \Delta \frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1} \right) \quad (3.5)$$

関数  $f(m) = \Delta^m + \Delta^{D-m}$  は  $[1, D-1]$  の範囲で上に凹であり、 $1 \leq m \leq D-1$  となることから、 $\Delta^m + \Delta^{D-m} \leq \Delta + \Delta^{D-1}$  が成立する。この不等式を式(3.5)に代入することにより式(3.2)が得られる。 ■

[性質 3. 1] 点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$ 、直径  $D$  の連結グラフ  $G$  において、

もし、 $n > \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$  ならば、点連結度  $\kappa(G)$  は最大値  $\Delta$  となる。

また、 $n > (\Delta - 2) \left( \frac{\Delta^D - 1}{D - 1} + D \right)$  ならば、 $\kappa(G) \geq \Delta - 1$  となる。

証明：今  $G$  の連結度が  $\Delta - 1$  以下と仮定する。定理 3. 1 より、

$$n \leq \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$$

となり命題に矛盾する。従って、連結度は  $\Delta$  となる。同様に、 $G$  の連結度を  $\Delta - 2$  と仮定すると、

$$n \leq (\Delta - 2) \left( \frac{\Delta^D - 1}{\Delta - 1} + \Delta \right)$$

となり命題に矛盾し、連結度  $\Delta - 1$  以上となる。 ■

上記性質と式(3.1)より、「もし  $n > \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$  であれば、最小次数  $\delta$  と最大次数  $\Delta$  が一致し正則グラフとなる」ことが解る。

### 3. 2. 2 枝連結度

枝連結度に関しても、点連結度と同様の議論を展開できる。

[定理 3. 2] もし、グラフ  $G = (V, E)$  において点数が  $n$ 、最大次数が  $\Delta$ 、最小次数が  $\delta$ 、直径が  $D$ 、枝連結度が  $\lambda \neq 0$  であれば、次式が成立する。ただし、 $\lambda$  は  $\delta - 1$  以下とする。

$$n \leq \lambda \left( \frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} + \Delta + 1 \right) \quad (3.6)$$

証明 枝連結度の定義より、 $G - E_0$ が非連結となるような要素数 $\lambda$ の枝部分集合 $E_0 \subseteq E$ が存在する。これより、 $G - E_0$ において点集合 $V$ を2つの集合 $U_1, U_2$ に分割し、 $U_1$ から $U_2$ への枝がないようにすることが可能である。即ち、 $G$ において、任意の2点 $v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$ に対し、 $v_1$ から $v_2$ への道上の枝には必ず $E_0$ の枝が含まれる。いま、 $E_0$ に含まれる枝の始点の集合を $U_0 = \{u_j\}$ 、終点の集合を $U_0' = \{u_j'\}$ とする(図3.3参照)。

$U_0$ と $U_0'$ は、各々 $U_1$ と $U_2$ の部分集合となっており、要素数は $\lambda$ 以下である。

今、証明の都合上、 $m, Q(u_j)$ を次のように定義する。

$$m = \max_{v \in U_1} \{ \text{dis}(v, U_0) \} \quad \text{ただし} \quad \text{dis}(v, U_0) = \min_{u_j \in U_0} \{ \text{dis}(v, u_j) \}$$

$$Q(u_j) = \{ v \in U_1 \mid \text{dis}(v, u_j) \leq m \} \quad \text{ただし} \quad u_j \in U_0$$

また、 $U_1$ の点で $U_0$ との距離が $m$ となる点の1つを $v_1$ とする。即ち、 $\text{dis}(v_1, U_0) = m$ が成立する。

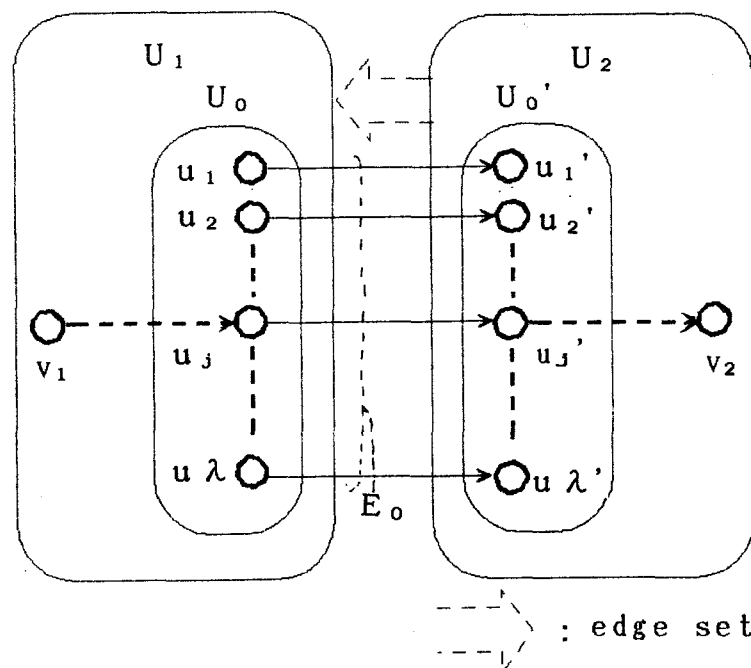


図3.3 枝連結度が $\lambda$ となるグラフに要求される構造

最初に  $U_1$  の個数を見積る。  $Q(u_j)$  は  $u_j$  までの距離が  $m$  以下の点の集合であり、各点の入次数は  $\Delta$  以下であるから ( $u_j$  も含まれることに注意)、

$$|Q(u_j)| \leq 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^m = \frac{\Delta^{m+1} - 1}{\Delta - 1}$$

となる。  $U_1$  に含まれる点は、  $Q(u_j)$  ( $j=1, 2, \dots, \lambda$ ) のどれかに含まれるから

$$|U_1| \leq \sum_{j=1}^{\lambda} |Q(u_j)| \leq \lambda \frac{\Delta^{m+1} - 1}{\Delta - 1} \quad (3.7)$$

となる。

次に  $U_2$  の個数を見積る。今、  $v_2$  を  $U_2$  に含まれる任意の点とする。

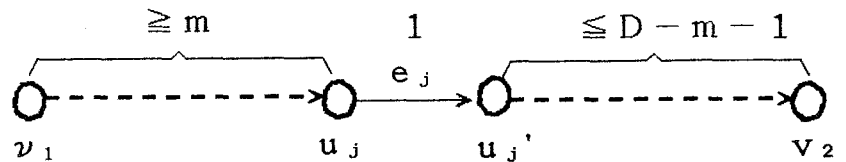


図 3. 4  $v_1$  から  $v_2$  への道

$v_1$  から  $v_2$  へは長さが  $D$  以下の道が存在する

(直径が  $D$  より)。

また、その道は  $E_0$  の枝を含む (図 3. 4 参照)。従って、  $v_1, v_2$  及びある  $e_j = (u_j, u_j') \in E_0$  に対し、

$$\text{dis}(v_1, u_j) + 1 + \text{dis}(u_j', v_2) = \text{dis}(v_1, v_2) \leq D$$

が成立する。  $v_1$  の定義より、  $\text{dis}(v_1, u_j) \geq m$  であり  $\text{dis}(u_j', v_2) \leq D - m - 1$  となる。つまり、任意の  $v_2 \in V_2$  はある  $u_j' \in U_0'$  から長さ  $D - m - 1$  以下の道が必ず存在することになる。従って、次式が成立する。

$$|V_2| \leq \lambda (1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^{D-m-1}) = \lambda \frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1} \quad (3.8)$$

式 (3.7), (3.8) より、

$$n = |U_0| + |U_1| \leq \lambda \left( \frac{\Delta^{m+1} - 1}{\Delta - 1} + \frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1} \right) \quad (3.9)$$

次に、  $1 \leq m \leq D - 2$  であることを証明する。  $m$  のとりかたから、  $0 \leq m \leq D - 1$  は明らかである。今、  $m = 0$  と仮定し矛盾を導く。仮定より、  $U_1 = U_0$  となる。従って、  $U_1$  の要素数は次式を満たす。

$$1 \leq |U_1| = |U_0| \leq \lambda$$

今、 $E(u_i) = \{(u_i, v) | v \in U_2\}$  とし、 $od(u_i)$  を点  $u_i$  の出次数とすると、次式が成立する（出次数は点から出ている枝数であるが、自己ループ枝は除く事に注意）。

$$|E_0| = \sum_{u_i \in U_1} E(u_i) \geq \sum_{u_i \in U_1} (od(u_i) - (|U_1| - 1)) = |U_1| \times (od(u_i) - (|U_1| - 1))$$

条件より枝連結度  $\lambda$  は  $\delta - 1$  以下であるので、 $od(u_i) \geq \delta > \lambda$  が成立する。従って、

$$|E_0| > |U_1| \times (\lambda - (|U_1| - 1))$$

となる。今、右辺を  $f(|U_1|)$  とする。 $U_1$  のとり方から、 $1 \leq |U_1| \leq \lambda$  である。

$f(1) = f(\lambda) = \lambda$  であり、 $f$  は上に凸な関数である。 $|E_0| > f(|U_1|) \geq f(1) = \lambda$  となり  $E_0$  のとりかたに矛盾する。従って  $m \neq 0$  となる。

同様にして、 $m \neq D - 1$  も証明できる。

式 (3.9) と  $1 \leq m \leq D - 2$  より、式 (3.6) が得られる。 ■

[性質 3. 2] 点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$ 、最小次数  $\delta$ 、直径  $D$  の連結グラフ  $G$  において、もし、 $n > \Delta^{D-1} + \Delta^2 - 2$  であり  $\delta = \Delta$  ならば、

枝連結度  $\lambda(G)$  は最大値  $\Delta$  となる。

また、 $n > (\Delta - 2) \left( \frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} + \Delta + 1 \right)$  であり  $\delta \geq \Delta - 1$  ならば、

$\lambda(G) \geq \Delta - 1$  となる。

証明：性質 3. 1 と同様。 ■

$G_1(n, d)$  及び  $G_2(n, d)$  において、最大次数  $\Delta$  は  $d$  であり  $n > \Delta^{D-1}$  となる。また最小次数  $\delta \geq \Delta - 1$  が成立する。従って、性質 3. 2 より、 $G_1(n, d)$  及び  $G_2(n, d)$  の枝連結度が  $d - 1$  以上であることが解る。最小次数  $\delta$  は大抵の場合（すべての  $G_1$  及び点数が  $d+1$  の倍数でない  $G_2$ ）は  $d - 1$  であり、この場合は枝連結度は丁度  $d - 1$  となる。

### 3. 3 直径最小グラフ $G_1, G_2$ の連結度

3. 2 節では直径と連結度の関係を考察することにより、連結度を最大化する十分条件を導いた。この十分条件から直径最小グラフ  $G_1, G_2$  の枝連結度が  $d - 1$  以上（

たいていの場合はちょうど  $d - 1$  ) であることが直接導かれたが、点連結度については十分条件を直接適用しても正しく見積れない。このような場合でも直径が小さいグラフにおいては、直径と連結度の関係を考察することは有効である。本章では、任意の点数に対して  $G_1, G_2$  の点連結度が  $d - 1$  以上であることを示す。

証明の準備として以下の定義を行なう。

定義 3. 1 グラフ  $G = (V, E)$  及び点部分集合  $V' \subseteq V$  において、 $S(V')$  を  $V'$  に含まれる点の子の集合、 $P(V')$  を親の集合とする。即ち、次のようにおく。

$$S(V') = \{ v \mid u \in V' \text{ かつ } (u, v) \in E \}$$

$$P(V') = \{ u \mid v \in V' \text{ かつ } (u, v) \in E \}$$

定義 3. 2 グラフ  $G = (V, E)$  及びある点  $v \in V$  において、 $v$  から長さ  $m$  の道が存在する点の集合を  $J_m(v)$ 、 $v$  へ長さ  $m$  の道が存在する点の集合を  $J_m^-(v)$  とする。

即ち、次のようにおく ( $J_m(v)$  については、定義 2. 1 で既に定義している)。

$$J_0(v) = \{v\} \quad J_m(v) = S(J_{m-1}(v))$$

$$J_0^-(v) = \{v\} \quad J_m^-(v) = P(J_{m-1}^-(v))$$

[性質 3. 3] 直径準最小グラフ  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  及びこれに含まれる任意の点  $v$  において、次式が成立する。

$$|J_m(v)| = d^m \tag{3.10}$$

$$|J_m^-(v)| = d^m \tag{3.11}$$

ただし、 $m$  はグラフの直径  $D$  より小さい。

証明：式 (3.10) については、2 章 [定理 2.1] [定理 2.2] で証明している。最初にグラフ  $G_1(n, d) = (V, E)$  において式 (3.11) が成立することを示す。今、 $J_s^-(v)$  に含まれる点を  $u_s$  とする ( $s=1, 2, \dots, m$ ) と、 $v$  と  $u_s$  の間には次式が成立する。

$$v \equiv u_1 \times d + a_1 \pmod{n}$$

$$v \equiv u_2 \times d^2 + a_1 \times d + a_2 \pmod{n}$$

$$v \equiv u_3 \times d^3 + a_1 \times d^2 + a_2 \times d + a_3 \pmod{n}$$

⋮

$$v \equiv u_m \times d^m + a_1 \times d^{m-1} + \dots + a_{m-1} \times d + a_m \pmod{n}$$

ただし、 $a_i$  は 0 から  $d - 1$  の自然数。

従って、 $J_m^-(v)$  は次のように表わせる。

$$J_m^-(v) = \{ u \mid u \times d^m \equiv f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m) \pmod{n}, \\ 0 \leq a_i \leq d-1 \quad (i=1, 2, \dots, m) \}$$

ただし、 $f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m) = v - \sum_{i=1}^m a_i \times d^{m-i}$

関数  $f()$  が  $v-d^{m+1} (=f(d-1, d-1, \dots, d-1))$  から  $v (=f(0, 0, \dots, 0))$  までの任意の整数値を取ることは明らかである。従って、 $u \in J_m^-(v)$  でありかつその時に限り、点  $u$  は次の  $d^m$  個の式のどれかを満たす。

$$\begin{aligned} d^m \times u &\equiv v - d^m + 1 \pmod{n} \\ d^m \times u &\equiv v - d^m + 2 \pmod{n} \\ &\vdots \\ d^m \times u &\equiv v \pmod{n} \end{aligned} \tag{3.12}$$

$G_1$  では、 $n > d^D$  が成立し条件より  $m < D$  であるから、 $d^m \leq d^{D-1} < n$  となる。従って、上記  $d^m$  個の式の右辺の値は全て異なる。

次に、上記  $d^m$  個の式を  $u$  に関する合同方程式と考え、その解の個数を見積る（解の個数は  $J_m^-(v)$  の要素数に一致する）。一般に「合同方程式  $p \times x \equiv q \pmod{n}$  において、 $\alpha$  を  $p$  と  $n$  の最大公約数とする。この合同方程式は、 $q$  が  $\alpha$  の倍数かつその時に限り  $\alpha$  個の解を持つ」ことが知られている<sup>[40]</sup>。今、 $\alpha$  を  $d^m$  と  $n$  の最大公約数とし、 $d^m / \alpha$  を  $e$  とする（ $e$  は自然数）。上記  $d^m$  個の合同方程式の右辺は  $d^m$  個の連続した整数値をとるから、 $d^m$  個の合同方程式のうち  $e$  個は  $\alpha$  個の解を持ち、他の  $d^m - e$  個は解を持たない。従って、 $J_m^-(v)$  の要素数は  $e \times \alpha = d^m$  となり、命題が成立する。

$G_2(n, d)$  の場合、

$$J_m^-(v) = \{ u \mid u \times d^m \equiv g(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m) \pmod{n}, \\ 1 \leq b_i \leq d \quad (i=1, 2, \dots, m) \}$$

ただし、 $g(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m) = v + \sum_{i=1}^m b_i \times (-d)^{m-i}$

となり、同様に証明できる。 ■

性質 3. 3 より次の性質が導かれる。

[性質 3. 4]  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  において、もし点部分集合  $V'$  が  $J_m(v)$  に含まれ  $m+1 < D$  であるなら、

$$|S(V')| = d \times |V'| \quad (3.13)$$

もし点部分集合  $V'$  が  $J_m^-(v)$  に含まれ  $m+1 < D$  であるなら、

$$|P(V')| = d \times |V'| \quad (3.14)$$

証明： $G_1$ 、 $G_2$  の任意の点から出ている枝の数はちょうど  $d$  であることと性質 3. 3 より明らか。 ■

[定理 3. 3]  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  において直径  $D$  が 4 以上であるなら、点連結度  $\kappa$  は  $d-1$  以上である。即ち、

$$\kappa(G_1(n, d)) = d - 1$$

$$\kappa(G_2(n, d)) \begin{cases} = d - 1 & (n \text{ が } d + 1 \text{ の倍数でない時}) \\ = d - 1 \text{ または } d & (n \text{ が } d + 1 \text{ の倍数である時}) \end{cases}$$

証明： $G_1$  の最小次数  $\delta$  は  $d-1$ 、 $G_2$  は点数  $n$  が  $d+1$  の倍数のとき  $\delta = d$ 、それ以外は  $d-1$  となるので、 $G_1$  及び  $G_2$  の点連結度が  $d-1$  以上であることを示せばよい。今、 $G_1(n, d)$  または  $G_2(n, d)$  を  $G(n, d) = (V, E)$  とし、定理 3. 1 と同様に  $V_0, V_1, V_2, m$  を定義する。即ち、

$$\textcircled{1} \quad V_0 \cup V_1 \cup V_2 = V, \quad V_0 \cap V_1 = V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_0 = \phi, \quad |V_0| = \kappa$$

② どの点  $v_1 \in V_1$  から点  $v_2 \in V_2$  への任意の道には  $V_0$  の点が 1 つ以上含まれる。

$$\textcircled{3} \quad m = \max_{v_1 \in V_1} \{ \text{dis}(v_1, V_0) \}$$

定理 3. 1 の証明中で示したように次の不等式が成立する ( $G$  の最大次数は  $d$ )。

$$|V_1| \leq \kappa \times d \frac{d^m - 1}{d - 1}, \quad (3.3)$$

$$n \leq \kappa \left( d \frac{d^m - 1}{d - 1} + 1 + d \frac{d^{D-m} - 1}{d - 1} \right) \quad (3.5)$$

ただし、 $1 \leq m \leq D - 1$ 。

ここでは、連結度  $\kappa$  が  $d-2$  以下と仮定し矛盾を導く。 $m$  の値を次の 5 つの



場合に分けて矛盾を導く。

(場合1)  $m = 1$  : 不等式(3.3) と  $m = 1$  より  $|V_1| \leq \kappa \times d \leq d^2 - 2d$  となる。

今、 $Q_i(v_1) = J_i(v_1) \cap V_1$  とし、 $v_1$  を  $V_1$  に含まれる点とする。 $V_1$  から  $V_2$  への枝は存在しないから、 $S(Q_i(v_1)) \subseteq V_1 \cup V_0$  となる。 $|V_0| = \kappa \leq d - 2$  であるから、

$$\begin{aligned} |S(Q_i(v_1)) \cap V_1| &= |S(Q_i(v_1))| - |S(Q_i(v_1)) \cap V_0| \\ &\geq |S(Q_i(v_1))| - |V_0| \\ &\geq |S(Q_i(v_1))| - d + 2 \end{aligned}$$

となる。上記不等式と性質3.4より

$$\begin{aligned} |Q_{i+1}(v_1)| &= |J_{i+1}(v_1) \cap V_1| = |S(J_i(v_1)) \cap V_1| \\ &\geq |S(Q_i(v_1)) \cap V_1| \geq |S(Q_i(v_1))| - d + 2 \\ &= d \times |Q_i(v_1)| - d + 2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる(ただし  $i + 1 < D$ )。条件より  $D \geq 4$  であり、次式が成立する。

$$\begin{aligned} |Q_0(v_1)| &= |\{v_1\}| = 1 \\ |Q_1(v_1)| &\geq d \times 1 - d + 2 = 2 \\ |Q_2(v_1)| &\geq d \times 2 - d + 2 = d + 2 \\ |Q_3(v_1)| &\geq d \times (d + 2) - d + 2 = d^2 + d + 2 \end{aligned}$$

$Q_3(v_1)$  は  $V_1$  に含まれるから、 $|V_1| \geq d^2 + d + 2$  となる。しかしながら、 $|V_1| \leq d^2 - 2d$  であり、矛盾する。

(場合2)  $m = D - 1$  : 場合1において、 $J_i(\cdot)$  を  $J_i^{-}(\cdot)$ ,  $V_1$  を  $V_2$ ,  $V_2$  を  $V_1$ ,  $v_1$  を  $v_2$ ,  $S(\cdot)$  を  $P(\cdot)$  と置換えることにより同様に証明できる。

(場合3)  $m = 2$  : 不等式(3.3) と仮定より  $|V_1| \leq d^3 - d^2 - 2d$  となる。

今、 $v_1$  を  $V_1$  に含まれる点で  $\text{dis}(v_1, V_0) = 2$  となる点の1つとすると、 $v_1$  の  $d$  個の子  $S(\{v_1\})$  は  $V_1$  に含まれる。従って、

$$|Q_1(v_1)| = d$$

式(3.6)より、

$$|Q_2(v_1)| \geq d \times d - d + 2 = d^2 - d + 2$$

$$|Q_3(v_1)| \geq d \times (d^2 - d + 2) - d + 2 = d^3 - d^2 + d + 2$$

となり、 $V_1$ の要素数は次のように見積れる。

$$|V_1| \geq |Q_3(v_1)| \geq d^3 - d^2 + d + 2 > d^3 - d^2 - 2d$$

これは、矛盾である。

(場合4)  $m = D - 2$  : 場合3において、 $J_i(\cdot)$ を $J_i^-(\cdot)$ 、 $V_1$ を $V_2$ 、 $V_2$ を $V_1$ 、 $v_1$ を $v_2$ 、 $\text{dis}(v_1, V_0) = 2$ を $\text{dis}(V_0, v_2) = 2$ 、 $S(\cdot)$ を $P(\cdot)$ と置換えることにより同様に証明できる。

(場合5)  $3 \leq m \leq D - 3$  : 式(3.5)より

$$n \leq (d - 2) \left( d \frac{d^3 - 1}{d - 1} + 1 + d \frac{d^{D-3} - 1}{d - 1} \right)$$

しかしながら、直径 $D$ が「 $\log_d n$ 」以下であることから $n > d^{D-1}$ であり矛盾する。 ■

### 3. 4 むすび

本章では、直径を最小化する事が結果的に信頼度の評価尺度である連結度を最大化させることを示した。主な結果は次のとおりである。

- ① 任意のグラフ $G$ の点数 $n$ 、最大次数 $\Delta$ 、最小次数 $\delta$ 、点連結度 $\kappa$ 、枝連結度 $\lambda$ 、直径 $D$ に対し次の関係が成立する。

$$\kappa \geq \frac{n(\Delta - 1)}{\Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1} \quad \lambda \geq \min \left\{ \frac{n(\Delta - 1)}{\Delta^{D-1} + \Delta^2 - 2}, \delta \right\}$$

- ② 2章で構成法を示した直径最小グラフ $G_1(n, d)$ 及び $G_2(n, d)$ の連結度は最大値 $d$ より高々1小さいだけである。

残された課題としては、 $G_1, G_2$ と直径の値は同じで連結度が最大値 $d$ となるグラフを求めることがある。これに関しては、特定の点数についてはPradhanが $G_1$ を変形することにより可能であることを示している。任意の点数についても同様の手法により可能である事が予想される。

また、無向グラフについても、直径と連結度の関係について検討することは、高信頼・高能率な網を構成する上で有効であると考えられる。

## 第4章 直径最小グラフの直径罹障度

前章では、直径最小グラフ  $G_1(n, d)$ 、 $G_2(n, d)$  の連結度について、最大値  $d$  より高々 1 小さいだけであることを示した。つまり、 $G_1$ 、 $G_2$  は、いくつかの点（枝）が障害になっても通信が可能かという意味では、ほぼ最適に近いことが解った。一般に障害時の迂回経路は平常時の経路（最短経路）に比べ長くなるため、網の処理能力が低下する。従って、グラフにおいて点（枝）が障害となった時の直径の値をできるだけ小さくすることは、網トポロジーを検討する上で重要な課題である。

本章では、 $G_1$ 、 $G_2$  の迂回経路の最大中継段数（即ち直径罹障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

- (1) 直径罹障度の下界値は、最大次数  $\Delta$  と点数  $n$  の関数として導出できる。
- (2) De Bruijn グラフ ( $G_1$  で点数  $d^k$ 、最大次数  $d$ 、直径  $k$  のグラフ)、Kautz グラフ ( $G_2$  で点数  $d^k + d^{k-1}$ 、最大次数  $d$ 、直径  $k$  のグラフ) の直径罹障度は、 $k + 2$  以下である。また、この値は下界値に比べ高々 1 大きいだけである。
- (3) 障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現できる。

4. 1 節で直径罹障度の下界値を導き、4. 2 節で De Bruijn グラフ及び Kautz グラフの性質について述べる。4. 3 節では上記 2 つのグラフの直径罹障度を導き、4. 4 節で下限値と比較する。4. 5 節では、4. 3 節の結果をもとにルーチングアルゴリズムの一例を示す。

なお、本章では点の障害についてのみ考察するが、枝の障害についても同様の議論が可能である。

### 4. 1 直径罹障度の性質と下界値

本章では直径罹障度を定義し、最大次数  $\Delta$  と点数  $n$  が与えられた時の直径罹障度の下界値を導く。

#### 4. 1. 1 直径罹障度 (Diameter Vulnerability) とその性質

グラフ  $G = (V, E)$  の  $s$ -直径罹障度  $K(s; G)$  とは、 $G = (V, E)$  より任意の  $s$  個の点を除去したグラフの直径の最大値である。

$$K(s; G) = \max_{|V_{\text{sub}}|=s} D(G - V_{\text{sub}}) \quad \text{ただし、} V_{\text{sub}} \subseteq V. \quad (4.1)$$

定義より、 $s = 0$  の時は  $G$  の直径  $D(G)$  と一致する。また、 $K(s; G) = \infty$  となる最小の  $s$  の値は、連結度と一致する。つまり、 $K(s; G)$  は、直径と連結度の二つの概念を統合したものと言える。

連結度の類推から『直径即ち距離を考慮しても Menger 型の性質が成り立つか（つまり、 $K(s; G) \leq \alpha$  の時、グラフ  $G$  の任意の 2 点間に長さ  $\alpha$  以下の道が  $s + 1$  本以上存在するか）否か』という問題が考えられる。無向グラフについては、一般に成立しないことが既に知られている<sup>[41]</sup>。また有向グラフについても同様に示せる。もちろん上記命題の逆（長さ  $\alpha$  以下の独立な道が  $s + 1$  本存在すれば  $K(s; G) \leq \alpha$  となる。）は明らかに成立する。また、直径罹障度が除去する点数  $s$  について単調増加することは容易に証明できる。また、枝の障害を想定した評価尺度として枝直径罹障度  $K_e(s; G)$  が考えられる。

$$K_e(s; G) = \max_{|E_{sub}|=s} D(G - E_{sub}) \quad \text{ただし、} E_{sub} \subseteq E \quad (4.1)$$

直径罹障度と枝直径罹障度の間には次の関係が成立する。

[性質 4. 1] 任意のグラフ  $G$  に対して、

$$K_e(s; G) \leq K(s; G) + 1 \quad \text{ただし、} K_e(s; G) \neq \infty$$

(証明は略)

#### 4. 1. 2 直径罹障度の下界値

グラフの最大次数  $\Delta$  が与えられた時、直径罹障度  $K(s; G)$  の下界値は次のように見積れる。

[性質 4. 2] 任意のグラフ  $G$  の点数が  $n$ 、最大次数が  $\Delta$ 、直径罹障度  $K(s; G)$  が  $m$  の時（ただし  $s < \Delta$ ）、次式が成立する。

$$n \leq \frac{\Delta^{m+1} - \Delta^2}{(s+1)(\Delta-1)} + \Delta + 1 \quad (4.2)$$

証明：  $G$  において出次数が  $\Delta$  の点を  $u$  とする。  $K(s; G) = m$  とすると、点  $u$  から隣接しない点 ( $n-1-\Delta$  個存在する) へ長さ  $m$  以下の道（必ずしも独立とは限らない）が  $s + 1$  本以上存在する。一方最大次数  $\Delta$  のグラフにおいて長さ  $m$  で到達できる点（長さ 1 は除く）の数は高々

$$\Delta^2 + \Delta^3 + \dots + \Delta^m = \frac{\Delta^2 (\Delta^{m-1} - 1)}{\Delta - 1}$$

である。従って、

$$(n-1-\Delta)(s+1) \leq \frac{\Delta^2 (\Delta^{m-1} - 1)}{\Delta - 1}$$

となる。これを変形することにより、式(4.2) が得られる。 ■

式(4.2) において  $s = 0$  とした時、 $m$  は直径  $D$  となり、右辺は有向 Moore Bound (式(1.2)) と一致する。

性質 4. 2 より、

$$m \geq \lceil \log_{\Delta} ((s+1)(n-1-\Delta)(\Delta-1) + \Delta^2) \rceil - 1 \quad (4.3)$$

となる。ただし、 $\lceil \rceil$  は切り上げを示す。

これより、 $s$ -直径罹障度の下界値  $l(s, n, \Delta)$  は次のように定義できる。

$$l(s, n, \Delta) = \lceil \log_{\Delta} ((s+1)(n-1-\Delta)(\Delta-1) + \Delta^2) \rceil - 1$$

もし、あるグラフ  $G$  の直径罹障度  $K(s; G)$  の値が  $l(s, n, \Delta)$  と一致したならば、グラフ  $G$  は、点数  $n$  最大次数  $\Delta$  のグラフの中で  $s$ -直径罹障度が最小であることが保証される。

#### 4. 2 De Bruijn グラフ及び Kautz グラフの性質

2. 5 節で示したように  $G_1(d^k, d)$ 、 $G_2(d^k + d^{k-1}, d)$  は、各々 De Bruijn グラフ、Kautz グラフと一致し、2. 2 節の構成法以外に線グラフ変換及びシフトレジスタ表現により構成が可能である。上記 2 つのグラフは最大次数と直径を与えれば構成できるので、本章では De Bruijn グラフを  $G_B(d, k)$ 、Kautz グラフを  $G_K(d, k)$  と記することにする。即ち、

$$G_B(d, k) = G_1(d^k, d)$$

$$G_K(d, k) = G_2(d^k + d^{k-1}, d)$$

直径罹障度を求めるためにはシフトレジスタ表現が役立つ。

##### [ $G_B(d, k)$ のシフトレジスタ表現 ]

①点の名前：各点の名前を  $k$  桁  $d$  進数  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  で表現する。

ただし、 $a_i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ 。

②有向枝の付加：各点  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  から、 $d$  個の点  $(a_2, \dots, a_k, s)$  へ有向枝を付加する。ただし、 $s=0, 1, \dots, d-1$ 。

[ $G_K(d, k)$  のシフトレジスタ表現]

①点の名前：各点の名前を  $k$  桁  $d+1$  進数  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  で表現する。

ただし、 $a_i \in \{0, 1, \dots, d\}$  かつ  $a_i \neq a_{i+1}$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ )。

②有向枝の付加：各点  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  から、 $d$  個の点  $(a_2, \dots, a_k, s)$  へ有向枝を付ける。ただし、 $s=0, 1, \dots, d$  かつ  $s \neq a_k$ 。

$G_B(d, k)$  の点数は  $d^k$ 、連結度は  $d-1$ 、 $G_K(d, k)$  の点数は  $d^k + d^{k-1}$ 、連結度は  $d$  であり、ともに直径は  $k$  である。図 4. 1 に  $G_B(3, 2)$ 、図 4. 2 に  $G_K(2, 2)$  を示す。 $G_B$  内の自己ループは、通信網に適用する際は除去するが、議論の都合上自己ループを含んだものを De Bruijn グラフと呼ぶことにする。上記の表記法では、長さ  $h$  の道は  $k+h$  桁の系列で一意に表現できる。たとえば、 $G_K(2, 2)$  において点  $(01)$  から点  $(20)$  への最短道（長さ 2）は、 $[0120]$  となる。枝は  $k+1$  桁の系列で表現できる。以下では、区別のため、点は  $()$ 、道は  $[]$ 、枝は  $\langle \rangle$  で括り、各々点表現、道表現、枝表現と呼ぶ。

$k+h$  桁の道表現において、 $k$  桁 ( $k+1$  桁) の部分系列は道に含まれる点 (枝) を示している。たとえば、 $G_K(2, 2)$  において、道  $[0120]$  に含まれる点は  $(01)$ ,  $(12)$ ,  $(20)$  であり、含まれる枝は  $\langle 012 \rangle$ ,  $\langle 120 \rangle$  である。

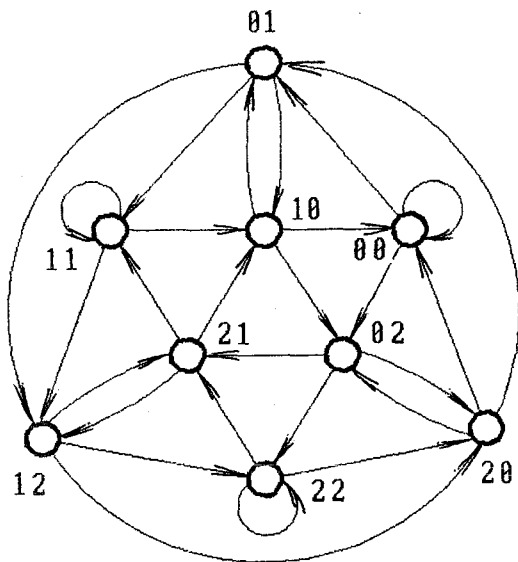
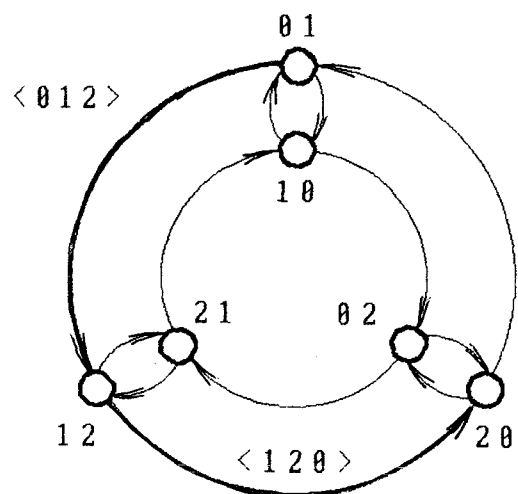


図 4. 1  $G_B(3, 2)$  ( $G_1(9, 3)$ )



Thick lines: walk  $[0120]$

図 4. 2  $G_K(2, 2)$  ( $G_2(6, 2)$ )

#### 4. 3 De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度

本章では、De Bruijn グラフ  $G_B(d, k)$ 、Kautzグラフ  $G_K(d, k)$  の  $s$ -直径罹障度について、

$$K(s; G_B(d, k)) = k + 1 \quad (s=1, \dots, d-2) \quad (4.4)$$

$$K(s; G_K(d, k)) \begin{cases} = k + 1 & (s=1, \dots, d-3) \\ \leq k + 2 & (s=d-2, d-1) \end{cases} \quad (4.5)$$

ただし、 $k \geq 2$ .

となることを示す。これ以外の  $s$  に対する直径罹障度については、直径が  $k$  であることから

$$K(0; G_B(d, k)) = k \quad K(0; G_K(d, k)) = k,$$

点連結度  $\kappa(G_B(d, k))$  が  $d-1$ 、 $\kappa(G_K(d, k))$  が  $d$  であることから

$$K(s; G_B(d, k)) = \infty \quad (s \geq d-1) \quad K(s; G_K(d, k)) = \infty \quad (s \geq d)$$

となる。また、 $k=1$  の時は

$$K(s; G_B(d, 1)) = 2 \quad (s=1, \dots, d-2) \quad K(s; G_K(d, 1)) = 2 \quad (s=1, \dots, d-1)$$

となる。

Esfanianらは De Bruijnグラフの枝の向きを除去した無向グラフ  $G_B'$  について、

$$K(s; G_B'(d, k)) \begin{cases} \leq k+3+\log_d k & (1 \leq s \leq d-2) \\ \leq k+5+\log_d k & (d-1 \leq s \leq 2d-3) \end{cases}$$

を示した<sup>[28]</sup>。また、Kumarらは Kautzグラフの枝の向きを除去した無向グラフ  $G_K'$  について、

$$K(s; G_K'(d, k)) \begin{cases} \leq k+4s & (1 \leq s \leq d-1) \\ \leq 3k+6s & (d \leq s \leq 2d-1) \end{cases}$$

を示した<sup>[29]</sup>。一般に枝の向きを除去した無向グラフの直径罹障度はもとの有向グラフの直径罹障度以下であり、本章の結果は ( $G_B$  については  $1 \leq s \leq d-2$  の範囲で、 $G_K$  については  $1 \leq s \leq d-1$  の範囲で) 従来より優れた見積りである。

##### 4. 3. 1 De Bruijn グラフの直径罹障度

隣接しない任意の2点  $u$  から  $v$  への距離を  $h$  ( $2 \leq h \leq k$ ) とすると、 $u, v$  は次

のような点表現で表せる（直径  $k$  より、 $h \leq k$ ）。

$$u = (a_h \dots a_2 a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-h})$$

$$v = (c_1 c_2 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h)$$

ただし、 $a_1 \neq b_1$ 。

$u$  から  $v$  へ  $d-1$  本の道を次のようにとる。これらの道が互いに独立であれば、式 (4.4) が成立する。

[ $d-1$  本の道] 今、 $u$  から  $v$  に対して 1 本の最短路  $P$ 、 $d-2$  本の長さ  $k+1$  の道  $Q_s$  を次のようにとる。

$$P = [a_h \dots a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h]$$

$$Q_1 = [a_h \dots a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-h} x_1 c_1 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h]$$

$$Q_2 = [a_h \dots a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-h} x_2 c_1 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h]$$

|

|

|

$$Q_s = [a_h \dots a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-h} x_s c_1 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h]$$

|

|

$$Q_{d-2} = [a_h \dots a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-h} x_{d-2} c_1 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h]$$

ただし、 $a_1, b_1, x_1, x_2, \dots, x_{d-2}$  は互いに異なる（これは  $d-1$  本の道上で最初に現れる枝同士及び最後に現れる枝同士が互いに異なることを意味する）。

まず、 $u$  から  $v$  への距離が 2 ( $h=2$ ) となる 2 点  $u, v$  に対する道  $P, Q_s (s=1, \dots, d-2)$  が互いに独立であることを示す。 $h=2$  より  $u$  から  $v$  への道は、

$$P = [a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-2} b_1 b_2]$$

$$Q_s = [a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{k-2} b_1 b_2]$$

となる。

[補題 4. 1] グラフ  $G_B(d, k)$  ( $k \geq 3$ ) の 2 点  $x, y$  が次の点表現となる時、 $x$  と  $y$  は異なる。

$$x = (c_0 \ c_1 \dots c_{k-i-1} c_{k-i} \ c_{k-i+1} \dots c_{k-2} c_{k-1})$$

$$y = (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} \ c_{k-1}' \ c_1 \dots c_{i-2} c_{i-1})$$

ただし、 $k \geq 3, 2 \leq i \leq k-1, c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ 。



証明： 今、 $x$  と  $y$  が同じ点であると仮定して矛盾を導く。仮定 ( $x=y$ ) より次の  $k$  個の等式が成立する。

$$c_0 = c_{i-1}, c_1 = c_i, \dots, c_{k-i-1} = c_{k-2}, c_{k-i} = c_{k-1}', \dots, c_{k-2} = c_{i-2}, c_{k-1} = c_{i-1}$$

ここで、 $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k-1}'$  を点とし、上記  $k$  個の等式を点間の有向枝（左辺の点から右辺の点への枝）で表したグラフを考える。以下では、このグラフを等号グラフ (Equivalence Relation Graph) と呼ぶ。等号グラフにおいて弱連結（枝の向きを除いた無向グラフにおいて連結）である点の値はすべて等しいことになる。

上記  $k$  個の等式において、 $c_0$  と  $c_{k-1}$  は左辺に 1 回、 $c_{k-1}'$  は右辺に 1 回、 $c_{i-1}$  は左辺に 1 回右辺に 2 回現れる。それ以外の点は左辺に 1 回右辺に 1 回現れる。従って、等号グラフにおいて  $c_0$  と  $c_{k-1}$  は出次数 1、 $c_{k-1}'$  は入次数 1、 $c_{i-1}$  は入次数 2 出次数 1、それ以外の点は入次数 1 出次数 1 となる。また  $c_0$  から  $c_{i-1}$ 、 $c_{k-1}$  から  $c_{i-1}$  への枝がある（図 4. 3 参照）。

$c_0, c_{i-1}, c_{k-1}, c_{k-1}'$  以外の点は入次数 1 出次数 1 であることから  $c_{i-1}$  から  $c_{k-1}'$  には必ず道がある。従って、 $c_{k-1}$  と  $c_{k-1}'$  に道が存在し、 $c_{k-1} \neq c_{k-1}'$  に矛盾する。

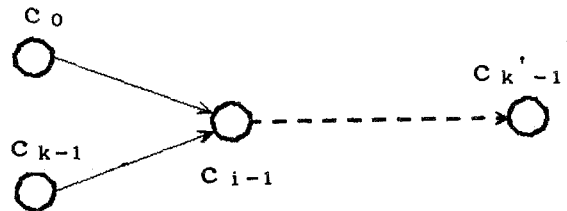


図 4. 3 等号グラフにおいて点  $c_{i-1}$  を含む連結成分の構造



[性質 4. 3]  $G_B(d, k)$  において、 $dis(u, v) = 2$  なる点  $u$  から  $v$  への道  $P$  と道  $Q_s$  は独立である。

証明： 図 4. 4 に示すように、道  $P = [a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-2} b_1 b_2]$  上の点を  $p$ 、道  $Q_s = [a_2 a_1 c_1 \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{k-2} b_1 b_2]$  上の点を  $q_{s, i}$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) とすると、 $p$  と  $q_{s, i}$  の点表現は次のようになる。

$$p = (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1)$$

$$q_{s,i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} x_s) & i=1 \text{の時} \\ (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2, \dots, k-1 \text{の時} \\ (x_s c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1) & i=k \text{の時} \end{cases}$$

点  $p$  と  $q_{s,i}$  が異なることを示せばよい。 $b_1 \neq x_s$  より点  $p$  と  $q_{s,1}$  は異なり、 $a_1 \neq x_s$  より点  $p$  と  $q_{s,k}$  は異なることが解る ( $k=2$  の場合はこれ以外の点の組は存在せず証明は終り)。点  $p$  と  $q_{s,i}$  ( $i=2, \dots, k-1$ ) については、 $a_1$  を  $c_0$ ,  $b_1$  を  $c_{k-1}$ ,  $x_s$  を  $c_{k-1}'$  と置くと  $c_{k-1} \neq c_{k-1}'$  となり、補題 1 より異なることが示せる。 ■

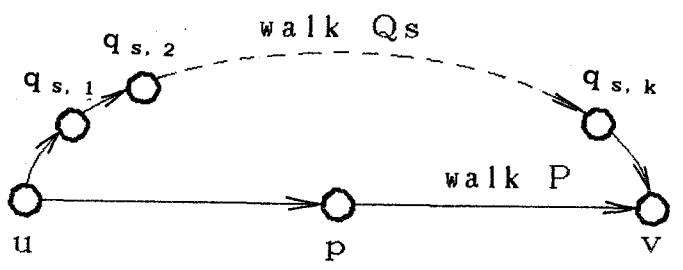


図 4. 4 道 P と  $Q_s$  の関係

[性質 4. 4]  $G_B(d, k)$  において、 $dis(u, v) = 2$  なる  $u$  から  $v$  への道  $Q_s$  と  $Q_t$  ( $s \neq t$ ) は独立である。

証明:  $Q_s$  上の点を  $q_{s,i}$ 、 $Q_t$  上の点を  $q_{t,j}$  とすると点表現は次のようになる。

$$q_{s,i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} x_s) & i=1 \text{の時} \\ (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2, \dots, k-1 \text{の時} \\ (x_s c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1) & i=k \text{の時} \end{cases}$$

$$q_{t,j} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} x_t) & j=1 \text{の時} \\ (c_{j-1} c_j \dots c_{k-2} x_t c_1 \dots c_{j-2} c_{j-1}) & j=2, \dots, k-1 \text{の時} \\ (x_t c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1) & j=k \text{の時} \end{cases}$$

$i \leq j$  としても一般性を失わない。 $x_s \neq x_t$  より  $q_{s,i} \neq q_{t,i}$  ( $i=1..k$ ) となり、 $a_1 \neq x_t$  より  $q_{s,1} \neq q_{t,k}$  となる ( $k=2$  の場合は証明終り)。点  $q_{s,i} \neq q_{t,j}$  ( $j=2, \dots, k-1$ ) については、 $a_1$  を  $c_0$ ,  $x_s$  を  $c_{k-1}$ ,  $x_t$  を  $c_{k-1}'$  と置き補題 1 を適用して示せる。

$q_{s,i}$  と  $q_{t,j}$  ( $i=2, \dots, k-1, j=2, \dots, k-1, i < j$ ) については、補題 1 と同様に等号グ

ラフをつくる。 $x_s$ は出次数1、 $x_t$ は入次数1、その他の点は出次数1入次数1  
 (ただし $c_{i-1}$ から $c_{j-1}$ へは2本の枝が存在する)となる。従って、 $x_s$ から $x_t$ に  
 は道が存在し $x_s \neq x_t$ に矛盾する。

$q_{s,i}$ と $q_{t,k}$  ( $i=2, \dots, k-1$ ) については、 $x_s$ を $c_{k-1}$ 、 $x_t$ を $c_0$ 、 $b_1$ を $c_{k-1}$ とし補題  
 1より $q_{s,i} \neq q_{t,k}$ となる。 ■

上記2つの性質から、距離が2となる点 $u$ から $v$ への $d-1$ 本の道が互いに独立である  
 ことが示せた。これより任意の点間の道が互いに独立であることが示せる。

[定理4.1] De Bruijn グラフ $G_B(d,k)$  ( $k \geq 2$ )において、 $\text{dis}(u,v) \neq 1$ なる点  
 $u$ から $v$ への道 $P, Q_s$  ( $s=1, 2, \dots, d-2$ ) は互いに独立である。すなわち、点直径罹障  
 度について次式が成立する。

$$K(s; G_B) \leq k + 1 \quad (s=1, \dots, d-2) \quad (4.6)$$

証明:  $k$ に関する帰納法で示す。

①  $k=2$ の時:  $G_B(d,2)$ において $\text{dis}(u,v) \neq 1$ なる点 $u$ から $v$ への距離は2で  
 あるから、性質2、3より成立する。

②  $k=m$ の時成立すると仮定し、 $k=m+1$ の時成立する事を示す。

$G_B(d,m+1)$ において $\text{dis}(u,v)=m+1-h \geq 2$  ( $h \leq m-1$ )なる任意の点 $u, v$ の点表現  
 を、次のようにする。

$$u = (a_{m+1-h} a_{m-h} \dots a_1 c_1 c_2 \dots c_{h-1} c_h)$$

$$v = (c_1 c_2 \dots c_h b_1 b_2 \dots b_{m-h} b_{m+1-h})$$

$G_B$ の直径は $m+1$ であり  $m+1-h \leq m+1$ となる。これと $h$ のとりかたより、  
 $0 \leq h \leq m-1$ となる。

③  $h=m-1$ の時は、 $\text{dis}(u,v)=2$ となり性質2、3より $d-1$ 本の道は独立  
 である。

④  $0 \leq h \leq m-2$ の時

$G_B(d,m)$ において、次の2点 $u''$ 、 $v''$ を考える ( $u''$ は $u$ の点表現の最左  
 1桁を除き $m$ 桁としたもの、 $v''$ は $v$ の最右1桁を除いたもの)。

$$u'' = (a_{m-h} \dots a_2 a_1 c_1 c_2 \dots c_h)$$

$$v'' = (c_1 c_2 \dots c_h b_1 b_2 \dots b_{m-h})$$

$h \leq m - 2$  より、 $u''$  から  $v''$  への距離は 2 以上となる。

また、 $u''$  から  $v''$  への  $d - 1$  本の道を  $P''$ 、 $Q_s''$  ( $s=1, \dots, d-2$ ) とする。道の取り方より、 $P''$  の道表現は  $P$  の道表現より最左 1 桁及び最右 1 桁を除いたものとなり、 $Q_s''$  の道表現は  $Q_s$  の道表現より最左 1 桁及び最右 1 桁を除いたものとなる。 $P$ 、 $Q_s$  上の任意の 2 点を  $x$ 、 $y$  とする。ただし  $x$  と  $y$  は、道の端点でなく同一の道上にない。 $x$ 、 $y$  の点表現は、 $P''$ 、 $Q_s''$  上の枝表現 ( $m + 1$  桁となる) の中に一致するものが必ず存在する (図 4. 5 参照)。その枝を  $x''$ 、 $y''$  とする。 $P''$ 、 $Q_s''$  が互いに独立であることから、 $x''$  と  $y''$  の枝表現は異なり、点  $x$  と  $y$  の点表現は異なる。従って、点  $x$ 、 $y$  は異なり  $P$ 、 $Q_s$  は互いに独立である。 $Q_s$  と  $Q_t$  ( $s \neq t$ ) が互いに独立であることも同様に示せる。

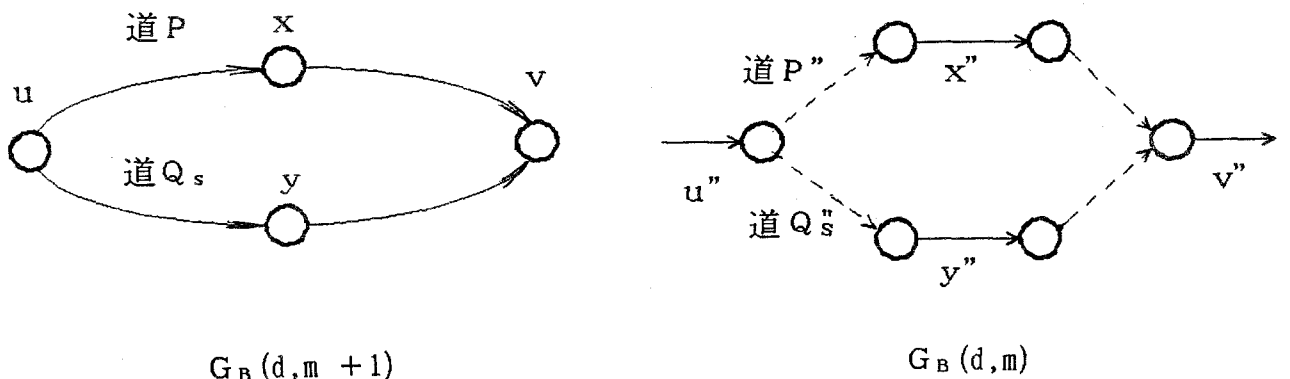


図 4. 5  $G_B(m + 1, d)$  の点と  $G_B(m, d)$  の枝の対応関係

#### 4. 3. 2 Kautzグラフの直径罹障度

Kautzグラフ  $G_K(d, k)$  の直径罹障度についても De Bruijn グラフとほぼ同様に示せる。ただ、点表現の隣合う桁が異なるため、道のとり方が異なる。

[d本の道] 点  $u = (a_h \dots a_2 a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-h})$  から  $v = (c_1 c_2 \dots c_{k-h} b_1 b_2 \dots b_h)$  への道を次のようにとる。

$$P = [a_h \dots a_1 c_1 \dots c_{k-h} b_1 \dots b_h]$$

$$Q_s = [a_h \dots a_1 c_1 \dots c_{k-h} x_s c_1 \dots c_{k-h} b_1 \dots b_h] \quad s=1, 2, \dots, d-3$$

$$R_t = [a_h \dots a_1 c_1 \dots c_{k-h} y_t z_t c_1 \dots c_{k-h} b_1 \dots b_h] \quad t=d-2, d-1$$

ただし、 $b_1, c_{k-h}, x_1, \dots, x_{d-3}, y_{d-2}, y_{d-1}$  は互いに異なり、 $a_1, c_1, x_1, \dots, x_{d-3}$ ,

$z_{d-2}, z_{d-1}$  も互いに異なる。まず、 $u$  から  $v$  への距離が 2 ( $h = 2$ ) となる 2 点  $u, v$  に対する道  $P, Q_s, R_t$  について、道上の点を各々  $p, q_{s, i}, r_{t, j}$  とする。各点の点表現は次のようになる。

$$p = (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1)$$

$$q_{s, i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} x_s) & i=1 \text{の時} \\ (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2, \dots, k-1 \text{の時} \\ (x_s c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1) & i=k \text{の時} \end{cases}$$

$$r_{t, j} = \begin{cases} (a_1 c_1 \dots c_{k-2} y_t) & j=1 \text{の時} \\ (c_{j-1} \dots c_{k-2} y_t z_t c_1 \dots c_{j-2}) & j=2, \dots, k \text{の時} \\ (z_t c_1 \dots c_{k-2} b_1) & j=k+1 \text{の時} \end{cases}$$

[補題 4. 2] グラフ  $G_k(d, k)$  ( $k \geq 3$ ) の 2 点  $x, y$  が次の点表現となる時、 $x$  と  $y$  は異なる。

$$x = (c_0 \ c_1 \dots c_{k-i-1} c_{k-i} \ c_{k-i+1} \dots c_{k-2} c_{k-1})$$

$$y = (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} \ c_{k-1}' \ c_1 \dots c_{i-2} c_{i-1})$$

ただし、 $c_{k-1} \neq c_{k-1}'$  かつ  $2 \leq i \leq k-1$ 。

証明：補題 1 と同様に証明できる。 ■

[補題 4. 3] グラフ  $G_k(d, k)$  ( $k \geq 2$ ) の 2 点  $x, y$  が次の点表現となる時、 $x$  と  $y$  は異なる。

$$x = (c_0 \ c_1 \dots c_{k-i-1} c_{k-i} \ c_{k-i+1} c_{k-i+2} \dots c_{k-1})$$

$$y = (c_{i-1} c_i \dots c_{k-2} \ c_{k-1}' \ c_0' \ c_1 \dots c_{i-2})$$

ただし、 $c_0 \neq c_0', c_{k-1} \neq c_{k-1}'$  かつ  $2 \leq i \leq k$ 。

証明： $k = 2$  の時は明らかであり、 $k \geq 3$  とする。 $x = y$  と仮定し矛盾を導く。 $x$  の各桁を  $c_p$  ( $p=0, 1, \dots, k-1$ ) とすると、仮定より次の  $k$  個の等式が成立する。

$$p = k-i, k-i+1 \text{の時} \quad c_p = c_q'$$

$$p \neq k-i, k-i+1 \text{の時} \quad c_p = c_q$$

$$\text{ただし } p + (i-1) \equiv q \pmod{k} \tag{4.7}$$

上記  $k$  個の等式  $x = y$  を表現する等号グラフを考えると、点  $c_0$  と  $c_{k-1}$  は出次数 1、 $c_0'$  と  $c_{k-1}'$  は入次数 1、その他の点は入次数 1 出次数 1 となる。等号

グラフの各点の次数から、 $c_0, c_0', c_{k-1}, c_{k-1}'$  の等号関係は次の2つの場合に  
限られる。

(場合1)  $c_0 = c_0' \neq c_{k-1} = c_{k-1}'$

$c_0 \neq c_0'$  に矛盾する。

(場合2)  $c_0 = c_{k-1}' \neq c_0' = c_{k-1}$

$c_0$  と  $c_1$ 、 $c_0'$  と  $c_1$  は各々  $x$ 、 $y$  の点表現で隣接するから  $c_0' \neq c_1$ 、 $c_0 \neq c_1$  である。従って、 $c_0, c_0', c_1$  は互いに異なり、等号グラフは3つ以上の連結成分が存在する。その1つは、 $c_0, c_0', c_{k-1}, c_{k-1}'$  は含まず  $c_1$  を含み入次数1出次数1の点のみで構成されており、有向ループとなる。等号グラフの点数は  $k+2$  であり、有向ループ上の点数は  $k-2$  以下である。有向ループ上の点を  $c_x$ 、ループ上の点数を  $m$  とすると、式(4.6)より

$$\begin{aligned} x + (i-1) \cdot m &\equiv x \pmod{k} \\ (i-1) \cdot m &\equiv 0 \pmod{k} \end{aligned} \tag{4.8}$$

が成立する。また、 $c_{k-1} = c_0'$  よりある値  $m'$  が存在し、

$$\begin{aligned} k-1 + (i-1) \cdot m' &\equiv 0 \pmod{k} \\ (i-1) \cdot m' &\equiv 1 \pmod{k} \end{aligned}$$

が成立し、 $i-1$  と  $k$  の最大公約数は1となる。従って、式(4.7)より

$$m \equiv 0 \pmod{k}$$

が導かれ、ループ上の点数  $m$  が  $k$  の倍数となる。これは、ループの点数が  $k-2$  以下であることに矛盾する。 ■

[性質4.5]  $G_k(d, k)$  において、 $\text{dis}(u, v) = 2$  なる点  $u$  から  $v$  への道  $P$  と道  $Q_s$  は独立である。

証明：性質4.3と同様。 ■

[性質4.6]  $G_k(d, k)$  において、 $\text{dis}(u, v) = 2$  なる点  $u$  から  $v$  への道  $P$  と  $R_t$  は互いに独立である。

証明：点  $p$  と点  $r_{t, j}$  ( $j=1..k+1$ ) が異なることを示せばよい。両者の点表現は次のとお

りである。

$$p = (a_1 c_1 c_2 \dots c_{k-2} b_1)$$

$$\begin{cases} r_{t, 1} = (a_1 c_1 \dots c_{k-2} y_t) \\ r_{t, j} = (c_{j-1} \dots c_{k-2} y_t z_t c_1 \dots c_{j-2}) & j=2, \dots, k \text{の時} \\ r_{t, k+1} = (z_t c_1 \dots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$b_1 \neq y_t$ より  $p \neq r_{t, 1}$ 、 $a_1 \neq z_t$ より  $p \neq r_{t, k+1}$ となる。 $p \neq r_{t, j}$  ( $j=2, \dots, k$ ) については、 $a_1$ を $c_0$ 、 $b_1$ を $c_{k-1}$ 、 $y_t$ を $c_{k-1}'$ 、 $z_t$ を $c_0'$ と置けば、 $c_0 \neq c_0'$ 、 $c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ となり補題3より示せる。 ■

[性質4. 7]  $G_K(d, k)$ において、 $\text{dis}(u, v) = 2$ なる点 $u$ から $v$ への道 $Q_s$ と $R_t$ は独立である。

証明：点 $q_{s, i}$ と $r_{t, j}$  ( $i=1, \dots, k, j=1, \dots, k+1$ ) が異なることを示せばよい。

$$\begin{cases} q_{s, 1} = (a_1 c_1 \dots c_{k-2} x_s) \\ q_{s, i} = (c_{i-1} \dots c_{k-2} x_s c_1 \dots c_{i-1}) & i=2, \dots, k-1 \\ q_{s, k} = (x_s c_1 \dots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{t, 1} = (a_1 c_1 \dots c_{k-2} y_t) \\ r_{t, j} = (c_{j-1} \dots c_{k-2} y_t z_t c_1 \dots c_{j-2}) & j=2, \dots, k \\ r_{t, k+1} = (z_t c_1 \dots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$q_{s, 1} \neq r_{t, j}$ 、 $q_{s, k} \neq r_{t, j}$  ( $j=1, \dots, k+1$ ) については、各々 $x_s$ を $b_1$ に、 $x_s$ を $a_1$ に置換え性質4. 6と同様に示せる ( $k=2$ の時は証明終り)。また、 $q_{s, i} \neq r_{t, 1}$  ( $i=2, \dots, k-1$ ) については、 $x_s$ を $c_{k-1}'$ 、 $a_1$ を $c_0$ 、 $y_t$ を $c_{k-1}$ とし補題4. 2より導ける。 $q_{s, i} \neq r_{t, k+1}$  ( $i=2, \dots, k-1$ ) についても、同様に補題4. 2より導ける。従って、 $q_{s, i} \neq r_{t, j}$  ( $i=2, \dots, k-1, j=2, \dots, k$ ) を示せばよい。 $q_{s, i} = r_{t, j}$ と仮定し等号グラフを作る。 $x_s$ は出次数1、 $y_t$ と $z_t$ は入次数1、 $c_{i-1}$ は入次数1出次数2その他の点は入次数1出次数1となり、 $x_s, c_{i-1}$ を含む等号グラフの連結成分は図4. 6に示す2つの場合に限られる。従って、 $x_s$ から $y_t$  (または $z_t$ ) への道が存在し $x_s \neq y_t$  (または $x_s \neq z_t$ ) に矛盾する。 ■

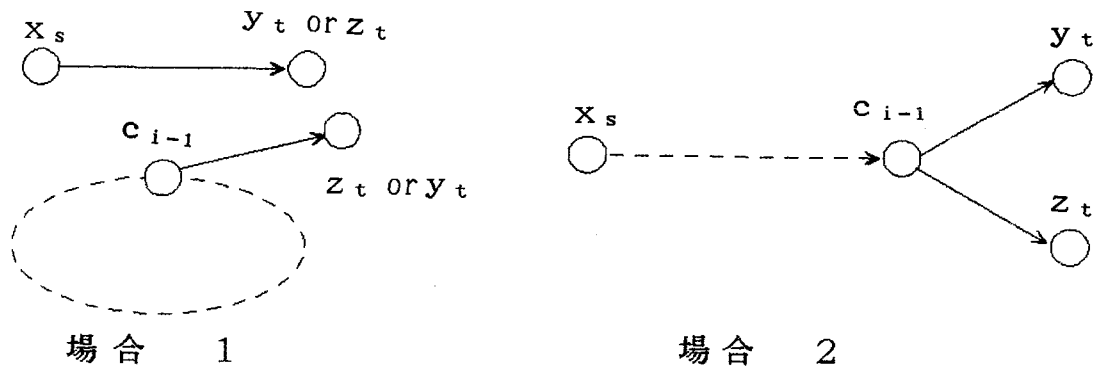


図 4. 6 等号グラフにおいて点  $X_s$  と点  $c_{i-1}$  を含む連結成分の構造

[性質 4. 8]  $G_I(d, k)$  において、 $\text{dis}(u, v) = 2$  なる  $u$  から  $v$  への道  $Q_s$  と  $Q_t$  ( $s \neq t$ ) は独立である。

証明：性質 4. 4 と同様。 ■

[性質 4. 9]  $\text{dis}(u, v) = 2$  なる  $u$  から  $v$  への道  $R_s$  と  $R_t$  ( $s \neq t$ ) は独立である。

証明：点  $r_{s, i}$  と  $r_{t, j}$  ( $i = 1 \dots k+1, j = 1 \dots k+1$ ) が異なることを示せばよい。

$$\begin{cases} r_{s, 1} = (a_1 c_1 \dots c_{k-2} y_s) \\ r_{s, i} = (c_{i-1} \dots c_{k-2} y_s z_s c_1 \dots c_{i-2}) & i = 2, \dots, k \text{ の時} \\ r_{s, k+1} = (z_s c_1 \dots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{t, 1} = (a_1 c_1 \dots c_{k-2} y_t) \\ r_{t, j} = (c_{j-1} \dots c_{k-2} y_t z_t c_1 \dots c_{j-2}) & j = 2, \dots, k \text{ の時} \\ r_{t, k+1} = (z_t c_1 \dots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$i \leq j$  と仮定しても一般性を失わない。 $r_{s, 1} \neq r_{t, j}$  ( $j = 1 \dots k+1$ ) は  $y_s$  を  $b_1$  と置けば性質 4. 6 と同様に証明できる。 $r_{s, i} \neq r_{t, i}$  ( $i = 2 \dots k$ ) は  $y_s \neq y_t$  より導ける。 $r_{s, i} \neq r_{t, j}$  ( $i = 2 \dots k, j = 2 \dots k+1, i < j$ ) は、 $y_s$  を  $c_{k-1}$ 、 $z_s$  を  $c_0$ 、 $y_t$  を  $c_{k-1}'$ 、 $z_t$  を  $c_0'$  と置き換え両者の点表現を  $k - i$  桁左へシフトする事により、補題 4. 3 より導出できる。また、 $r_{s, k+1} \neq r_{t, k+1}$  は  $z_s \neq z_t$  より導出できる。 ■

上記 5 つの性質より、距離が 2 となる点  $u$  から  $v$  へ  $d$  本の道が互いに点独立であることが示せた。これより、次の定理が導かれる。



[定理 4. 2] Kautzグラフ  $G_K(d, k)$  ( $k \geq 2$ ) において、 $\text{dis}(u, v) \neq 1$  なる点  $u$  から  $v$  への道  $P$ 、 $Q_s$ 、 $R_t$  は互いに独立である。また、点直径罹障度について次式が成立する。

$$\begin{aligned} K(s; G_K(d, k)) &\leq k+1 \quad (s=1, \dots, d-3) \\ K(s; G_K(d, k)) &\leq k+2 \quad (s=d-2, d-1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

証明：定理 1 と同様。 ■

#### 4. 4 下界値の比較

本節では、4. 1. 2 章で導いた下界値  $l(s, n, d)$  と前節で導いた直径罹障度を比較する。

De Bruijn グラフ  $G_B(d, k)$  の点数は  $d^k$ 、Kautzグラフ  $G_K(d, k)$  の点数は  $d^k + d^{k-1}$  であり、これらの点数の時の直径罹障度の下界値を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} l(s, d^k, d) &= \lceil \log_d((s+1)(d^{k-1}-d)(d-1)+d^2) \rceil - 1 \\ &= \lceil \log_d(d^{k+1} + sd^k(d-1-1/s-1/d^{k-1} + (s+1)/sd^k)) \rceil - 1 \quad (= \lceil k+1 + \epsilon \rceil - 1) \\ &= \lceil \log_d(d^{k+1}(1+s-s/d-1/d - (ds-s-1)/d^{k+1})) \rceil - 1 \quad (= \lceil k+2 - \epsilon \rceil - 1) \\ &= k+2-1 = k+1 \quad (\text{ただし } d \geq 3, 1 \leq s \leq d-2) \\ l(s, d^k + d^{k-1}, d) &= \lceil \log_d((s+1)(d^k + d^{k-1} - 1 - d)(d-1) + d^2) \rceil - 1 \quad (= \lceil k+1 + \epsilon \rceil - 1) \\ &= \lceil \log_d(d^{k+1} + sd^k(d-1/d-1/sd-1/d^{k-1} + (s+1)/sd^k)) \rceil - 1 \quad (= \lceil k+2 - \epsilon \rceil - 1) \\ &= \lceil \log_d(d^{k+1}(1+s-1/d^2 - (ds-s-1)/d^{k+1})) \rceil - 1 \\ &= k+2-1 = k+1 \quad (\text{ただし } d \geq 2, 1 \leq s \leq d-1) \end{aligned}$$

従って、定理 4. 1、4. 2 内の式(4.6)、(4.9) より、

$$\begin{aligned} K(s; G_B(d, k)) &= l(s, d^k, d) \quad s=1, \dots, d-2 \\ K(s; G_K(d, k)) &= l(s, d^k + d^{k-1}, d) \quad s=1, \dots, d-3 \\ &\leq l(s, d^k + d^{k-1}, d) + 1 \quad s=d-2, d-1 \end{aligned}$$

となり、De Bruijn グラフおよび Kautzグラフの直径罹障度は下界値に比べ高々 1 大きいだけである。

また、下界値と一致した場合は、式(4.6)、(4.9) の不等号は成立せず式(4.4)、(4.5) が導かれる。

#### 4. 5 ルーティングアルゴリズム

計算機網においては、通信のための径路選択（ルーティング）アルゴリズムが必要となる。特にビルディングブロック型のマルチプロセッサシステムでは各点（マイクロプロセッサ）の処理能力が小さいため、簡単なルーティング・アルゴリズムでなければならない。

De Bruijn グラフ及び Kautz グラフでは、4. 3 節の検討より簡単なルーティング・アルゴリズムが導ける。以下ではこれを示す。

各点は、前述の点表現  $(a_1 \dots a_k)$  で表現する。

また、点  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  より点  $(a_2 \dots a_k s)$  への枝は  $s$  で表現する。

メッセージは図 4. 7 に示すように発信アドレス (sender address)、着信アドレス (receiver address)、メッセージが通過する道を示すタグ (tag)、及びメッセージ (message) で構成される。タグは道表現の先頭  $k$  桁を取り除いたものであり、タグの桁数は道の長さに一致する。

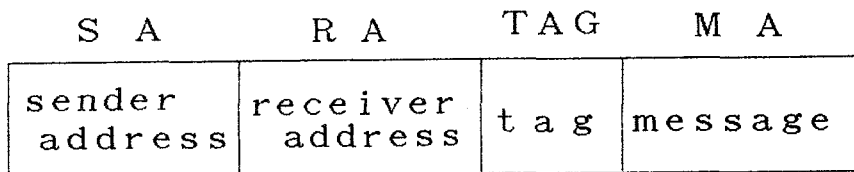


図 4. 7 メッセージの形式

[メッセージ組み立て] 発信点では、発信アドレス、着信アドレス以外にメッセージが通過する道を指定するためのタグを作る必要がある。道は、前章で述べた  $d$  本の道  $P$ 、 $R_s$ 、 $Q_t$  のうち最も短い道  $P$  をまず選択する。もし、道  $P$  によりメッセージ転送ができない時は、残りの中で最も短い道を選択する（迂回選択）。この迂回選択を繰り返すことにより、De Bruijn グラフでは  $d - 2$  個、Kautz グラフでは  $d - 1$  個以下の障害点がグラフに含まれても、通信が可能である。

[メッセージ転送中継] メッセージが送られてきた点は、着信アドレスと自アドレスを比較し、自分に送られてきたメッセージか中継するメッセージかを判断する。もし、中継するメッセージの時は、タグの先頭桁で指定される枝にメッセージを送出する。その際、タグは左に1桁シフトする。各中継点が、この動作を行うことにより、メッセージは、発信点で指定した道を通って着信点に届く。

図4.8は、Kautzグラフ $G_k(2,2)$ における点(01)から点(20)へのメッセージ転送の様子を示している。発信点(01)では、最初に第1経路(道 $P=[0120]$ )を選択しタグを $20^{**}$ としメッセージを組み立てる(メッセージ形式でタグのために用意する桁数は最大の道の長さ $k+2$ あり、\*は適当な数でよいことを示す)。次に、点(01)はメッセージ転送動作に移る。タグの先頭桁が2であることから枝2にメッセージを送出する。この際、タグを左へ1桁シフトし $0^{***}$ とする。メッセージを受取った点(12)は、着信アドレスが自アドレスと異なる事およびタグの先頭桁が0である事から枝0にメッセージを送出する。もし第1方路でメッセージ転送が不可能な場合は、迂回経路として道 $Q_t=[01020]$ を選択しタグを $020$ とする。

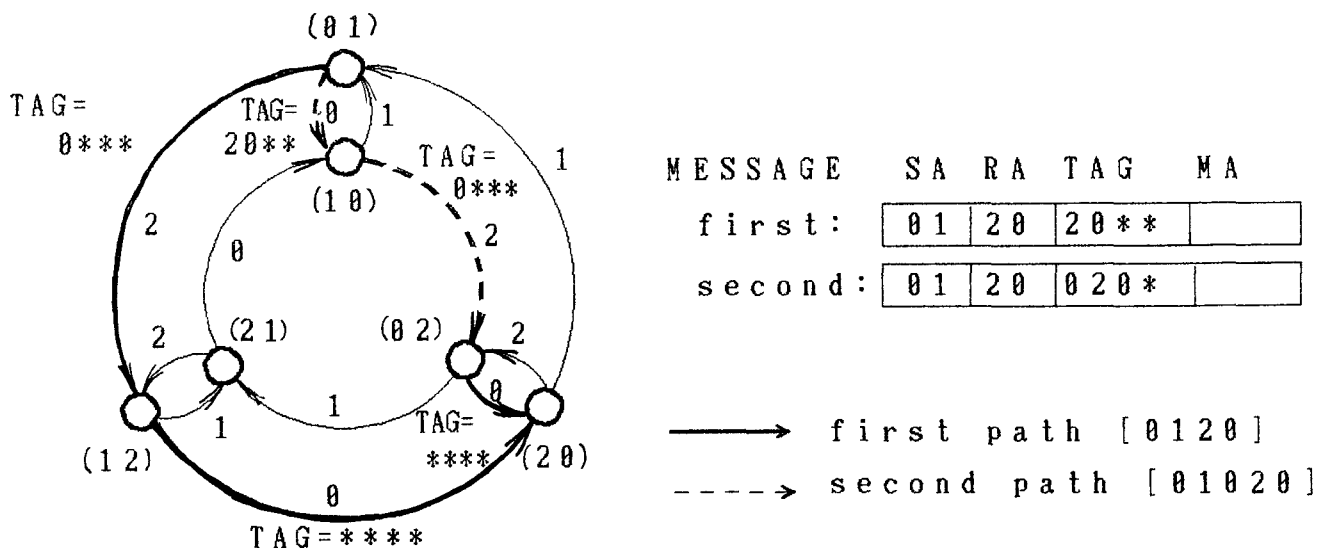


図4.8 Kautzグラフにおけるメッセージ転送例

#### 4. 6 むすび

De Bruijn グラフ及び Kautz グラフが、第 1 経路だけでなく迂回経路も準最小であることを示した。また、簡単なルーチングアルゴリズムが存在する事を示した。

点（枝）の障害時、迂回経路が特定の点または枝に集中すると、大幅なデータ転送遅延が起こる（これはボトルネック問題と呼ばれる）。De Bruijn グラフ及び Kautz グラフでは、迂回による負荷の増大はグラフ全体に均一になると予想され、この問題を解決する一構成法となる可能性がある。今後、これを定量的に見積る予定である。また、実際に適用する際は、障害点の検出及び通知法、障害時のメッセージ再送法についても検討する必要がある。

本章の結果は、線形構成法で構成されるグラフの中で特定の点数の場合に対して直径冗障度を明らかにしたものであり、すべての点数については解っていない。計算機による計算結果から、任意の点数についても直径冗障度は下界値に近い事が予想される。これを示す事は今後残された課題である。

## 第5章 結 論

本研究では、高信頼度通信網を構成する上でいかなる網トポロジーを基本にするかが重要な問題であるという着眼点から、グラフ理論の立場から直径最小グラフが通信網を考える上での基本となる三つの評価尺度（即ち直径、連結度、直径冗障度）すべてに対し優れた性質を持つことを示した。つまり、直径最小グラフを基本として網を構成することにより、高信頼度・高能率な網を構成可能であることを示している。

本論文で示した結果を要約すると次のようになる。

(1) 第2章では、2つの直径最小グラフ構成法を示した。本構成法は、任意の点数  $n$  及び最大次数  $\Delta$  に対して構成が可能であり、構成されたグラフの直径は下界値に比べ高々1大きいだけである。また、平均距離についても下界値より高々0.3程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。

(2) 第3章では、直径を最小化する事が結果的に信頼度の評価尺度である連結度を最大化させることを示した。主な結果は次の通りである。

① 任意のグラフ  $G$  の点数  $n$ 、最大次数  $\Delta$ 、最小次数  $\delta$ 、直径  $D$ 、点連結度  $\kappa$ 、枝連結度  $\lambda$  に対し次の関係が成立する。

$$\kappa \geq \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1} \quad \lambda \geq \min \left\{ \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D-1} + \Delta^2 - 2}, \delta \right\}$$

② 第2章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの連結度は最大値  $\Delta$  より高々1小さいだけである。

(3) 第4章では、迂回経路の最大中継段数（即ち直径冗障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

① 直径冗障度の下界値は、最大次数  $\Delta$  と点数  $n$  の関数として導出できる。

② 第2章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの部分集合となる De Bruijn グラフ及び Kautz グラフの直径冗障度は、下界値に比べ高々1大きいだけである。

③ 上記グラフでは、障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現出来る。

今後の課題として残された問題は数多くあるが、最も重要なものは「構成するための複雑さを如何に評価するか」である。本論文で扱った3つの尺度はいずれも構成されたトポロジーを評価するものである。しかし、現実に関を構成するための困難さ（例えば通信網では建設コスト、建設時間など。プロセッサ相互結合網では配線長など。）を加味してどの網構成にするか判断すべきである。現状では網を構成するための複雑さを反映するグラフ評価尺度はなく、この種の研究が盛んになることが望まれる。

本論文の結果は、高信頼・高能率な網を構成するためのバックボーンを与えたものである。特に、企業内通信網、計算機網、プロセッサ相互結合網など各種の網に共通した技術基盤となるものを主に検討した。実際に網を構成する場合は、そのアプリケーションに依存した各種の解決すべき問題があると考えるが、本論文の成果が役立つものと確信している。

## 謝 辞

本研究をまとめるに際し、懇切なる御指導並びに御助言を頂いた大阪大学基礎工学部嵩忠雄教授に心から感謝の意を表します。また、御助言と励ましを頂いた大阪大学基礎工学部藤沢俊男教授、都倉信樹教授、鳥居宏次教授、谷口健一教授に厚く感謝致します。

本研究は、日本電信電話株式会社基礎研究所における研究業務の一環として担当したものであり、この間御指導、御鞭撻頂いた東京工科大学畔柳功芳教授（もと情報通信基礎研究部長）、立石電機梶原正幸氏（もと情報通信基礎研究部第五研究室長）、情報通信基礎研究部岡田桂治第五研究室長に心から御礼申し上げます。

また、本研究の過程で、貴重な御意見を頂いた故大阪大学高島堅助教授、東京工業大学梶谷洋司教授、大阪大学白川功助教授、神戸商科大学加藤直樹助教授、東京工業大学上野修一助手に感謝致します。

さらには、本研究を進めるに当たり、有益な討論、協力を頂いた日本電信電話株式会社基礎研究所情報通信基礎研究部曾根岡昭直研究主任、伊藤正樹主任研究員、市川晴久主任研究員、第一通信網研究所吉田靖之主任研究員に心から感謝致します。

本研究の遂行、本論文の執筆は以上の方々をはじめとする関係各位の多くの方々により支えられてきました。ここに心から感謝の意を表します。

## 参考文献

- [ 1 ] 秋山 稔：『通信網工学』 コロナ社 (1981).
- [ 2 ] R.S.Wilkov: "Analysis and Design of Reliable Computer Networks", IEEE Trans. Commun. , COM-20, no.3, pp.660-678 (1972) .
- [ 3 ] K.P.Eswaran and R.E.Tarjan: "Augmentation problems", SIAM J.Comput., vol.5, no.4, pp.653-665 (1976) .
- [ 4 ] 増澤、萩原、和田、都倉："k- 頂点連結性に関する有向 2 進木の拡大構成問題" , 信学論, J67-D, no.1, pp.77-84 (1984).
- [ 5 ] 渡辺、中村：" 辺の付加による k - 辺連結グラフ構成問題" , 信学技報, AL83-90, pp.115-122 (1984) .
- [ 6 ] S.Ueno, Y.Kajitani and H.Wada: "The minimum augmentation of a tree to a k-edge-connected graph", Networks 誌投稿中.
- [ 7 ] F.Harary: "The maximum connectivity of a graph", Proc. Nat. Acad. Sci., vol.48, pp.1142-1146 (July 1962).
- [ 8 ] A.M.Farley: "Networks immune to isolated failures", Networks, vol.11, pp.255-268 (1981) .
- [ 9 ] 椎塚：" グラフの堅固さの尺度と I L F I ネットワークについて", 信学技報, CAS83-112, pp.17-22 (1983).
- [ 1 0 ] F.T.Boesch, F.Harary and J.A.Kabell: "Graphs as models of communication network vulnerability:connectivity and persistence", Networks, vol.11, pp.57-63 (1981).
- [ 1 1 ] J.A.Bondy and P.Hell: "Counter examples to theorems of Menger type for the diameter", Discrete Math., vol.44, pp.217-220 (1983) .
- [ 1 2 ] B.Elspas: "Topological construction on interconnection limited logic", Switching Theory Logic Des., vol.S-164, pp.133-147 (Oct. 1964) .
- [ 1 3 ] A.J.Hoffman and R.R.Singleton: "On Moore graphs with diameter 2 and 3", IBM J. of Res. Development, vol.4, pp.497-504 (1960) .
- [ 1 4 ] H.D.Friedman: "On the impossibility of certain Moore graphs", J.of Combinatorial Theory, vol.B-10, pp.245-252 (1971) .



- [ 1 5 ] E.Bannai and T.Ito: "On finite Moore graphs", J. Fac. Sci., Tokyo Univ., pp.191-208 (1973) .
- [ 1 6 ] W.G.Bridge and S.Toueg: "On the impossibility of directed Moore graphs", J. Combinatorial Theory, series B29, pp.339-341 (1980) .
- [ 1 7 ] H.Friedman: "A design for (d,k) graphs", IEEE Trans. Electron.Comput., vol. EC-14, p.488 (June 1965).
- [ 1 8 ] I.Korn: "On (d,k) graphs", IEEE Trans. Electron. Comput., vol.EC-16, p.90 (Feb. 1967) .
- [ 1 9 ] S.Toueg and K.Steiglitz: "The design of small-diameter network by local search", IEEE Trans. Comput., C-28, pp.537-542 (July 1979).
- [ 2 0 ] B.W.Arden and H.Lee: "A regular network for multicomputer systems", IEEE Trans. Comput., C-31, pp.60-69 (1982) .
- [ 2 1 ] G.Memmi and Y.Roillard: "Some new results about the (d,k) graph problem", IEEE Trans. Comput., C-31, pp.784-791 (Aug. 1982) .
- [ 2 2 ] J.C.Bermond and B.Bollobas: "The diameter of graphs- A survey", Congressus Numeratum, vol.32, pp.3-27 (1981) .
- [ 2 3 ] R.M.Storwick: "Improved constructions techniques for (d,k)graphs",IEEE Trans. Comput., C-19, pp.1214-1216 (1970) .
- [ 2 4 ] C.Delorme and G.Farhi:"Large graphs with given degree and diameter- Part I", IEEE Trans. Comput., vol.C-33, no.9 (Sept. 1984) .
- [ 2 5 ] J.C.Bermond, C.Delorme and J.J.Quisquater: "Tables of large graphs with given degree and diameter", Information Processing Letters, vol.15, no.1, pp.10-13 (Aug. 1982) .
- [ 2 6 ] J.C.Bermond, J.Bond, M.Paoli and C.Peyrat: "Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability", Survey in Combinatorics London Math. Soci. Lecture Notes, no.82, pp.1-30(1983) .
- [ 2 7 ] D.K.Pradhan and S.M.Reddy: "A fault-tolerant communication architecture for distributed systems", IEEE Trans. Comput., C-31,no.9 (Sept. 1982) .
- [ 2 8 ] A.H.Esfahanian and S.L.Hakimi: "Fault-tolerant routing in De Bruijn communication networks", IEEE Trans. Comput.,C-43,no.9, pp.777-788(Sept. 1985).

- [ 2 9 ] U.D.Kumar and S.M.Reddy: "A class of graphs for fault-tolerant processor interconnections", Proc. 5th Int. Conf. Distributed Computing Systems, pp. 137-147 (Oct. 1984).
- [ 3 0 ] 田中、秋山: "非階層多段中継通信網の構成", 信学論B, J66-B, no.12, pp.1494-1501 (1983).
- [ 3 1 ] U.S.R.Murty and K.Vijayan: "On accessibility in graphs", Sankhya Ser. A, no.26, pp.299-302 (1964).
- [ 3 2 ] H.Enomoto and Y.Usami:"Minimum number of edges in graphs with given diameter and connectivity, I", to be published to J. of Comb. Theory, Ser. B (1983).
- [ 3 3 ] B.Bollobas and S.Eldridge: "On graphs with diameter two", J.Combinatorial Theory, B-21, pp.201-205 (1976).
- [ 3 4 ] M.A.Schlumberger: "Connectivity of de Bruijn graphs", Univ.Grenoble, France, Research Report 146 (Oct. 1978).
- [ 3 5 ] S.M.Reddy, D.K.Pradhan and J.G.Kuhl: "Directed graphs with minimal diameter and maximal connectivity", School Eng., Oakland Univ., Rochester, MI, Technical Report (July 1980).
- [ 3 6 ] S.M.Reddy, J.G.Kuhl and S.H.Hosseini: "On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity", in Proc. 20th Annu. Allerton Conf, pp.1018-1026 (Oct .1982).
- [ 3 7 ] F.Harary and R.Z.Norman: "Some properties of line digraphs", Rend.Circ. Mat. Palermo, vol.9, pp.161-168 (1961)
- [ 3 8 ] N.G.De Bruijn: "A combinatorial problem", in Proc. Akademe Van Wetenschappen, vol.49, part2, pp.758-764 (1946).
- [ 3 9 ] W.H.Kautz: "Bounds on directed (d,k)-graphs", In Theory of Cellular Logic Networks and Machines, AFCRL-68-0668, SRI proj.7258, Final Report(1968).
- [ 4 0 ] B.L.van der Waerden:"Algebra",Berlin,Springer-Verlag,pp.63-65 (1964).
- [ 4 1 ] S.M.Boyles:"A counterexample to a conjecture on paths of bounded length", J. of Graph theory,vol.6,pp.205-209(1982)

- [ 4 2 ] M.Imase,M.Itoh:"Design to minimize diameter on building-block network",IEEE Trans.Comput.,vol.C-30,no.6,pp.439-442 (1981.6).
- [ 4 3 ] 今瀬、伊藤、岡田："直径が準最小な正則有向グラフ構成法"信学技法, C A S 82-84 (1982).
- [ 4 4 ] 伊藤、今瀬、吉田："準最小な直径を持つ正則有向グラフ構成法" 信学論 vol.J66-A, no.1,pp48-55(1983).
- [ 4 5 ] 岡田、今瀬、市川："グラフ理論を用いた高信頼度網構成法" 58年信学会総合全国大会,no.1620.
- [ 4 6 ] 今瀬、岡田、市川、："高信頼度通信網構成のグラフ理論的検討" 信学論 vol.J66-B, no.3,pp.337-344(1983).
- [ 4 7 ] 曾根岡、今瀬、岡田："グラフ理論を用いた高信頼度網構成" 58年信学会情報・システム部門全国大会, no.409 (1983).
- [ 4 8 ] 今瀬、曾根岡、市川："拡大完全グラフにおける節点除去時の直径増加量とルーチング" 信学技法, C A S 83-114(1983).
- [ 4 9 ] 曾根岡、今瀬、岡田："直径が小さい正則有向グラフの連結度について" 信学技法, C A S 83-114(1983).
- [ 5 0 ] M.Imase,M.Itoh:"A Design Method for Directed Graphs with MinimumDiameter", IEEE Trans.Comput.,vol.C-32,no.9(1983)-Correspondence.
- [ 5 1 ] 曾根岡、今瀬："り障に強い網トポロジーの一検討" 59年信学会総合全国大会,no.1825.
- [ 5 2 ] M.Imase,T.Soneoka,K.Okada:"Connectivity of Regular Graphs with Small Diameter", IEEE Trans.Comput., vol.C-34, no.3, pp.267-273 (1985).
- [ 5 3 ] 今瀬、曾根岡、岡田、："障害耐力のあるプロセッサ相互結合ネットワーク" 信学論, vol.J-66-D,no.8,pp.1449-1456 (1985).

## 著者の発表論文一覧表

### 論文誌

- [1] 岡田、今瀬、市川 「マイクロプロセッサによるビルディングブロック型通話路構成法の検討」,  
信学論, vol.J63-B, no.2, pp.105-112 (1980.2).
- [2] M.Imase, M.Itoh "Design to minimize diameter on building-block network",  
IEEE Trans. Comput., vol.C-30, no.6, pp.105-112 (1980.2).
- [3] K.Mase, M.Imase "An adaptive capacity allocation scheme in telephone networks", --concise paper  
IEEE Trans.Comm., vol.COM-30, no.2, pp.354-359 (1982.2)
- [4] 間瀬、川嶋、今瀬、梶原 「SS/TDMAを用いた斜回線可変設定方式」  
信学論, vol.J65-B, no.12, pp.1491-1498 (1982.12).
- [5] 伊藤、今瀬、吉田 「準最小直径を持つ正則グラフ構成法」  
信学論, vol.J66-A, no.1, pp.48-55 (1983.1)
- [6] 今瀬、岡田、市川 「高信頼度通信網構成のグラフ理論的検討」  
信学論, vol.J66-B, no.3, pp.337-344 (1983.3).
- [7] M.Imase, M.Itoh "A design method for directed graphs with minimum diameter",--correspondence  
IEEE Trans. Comput., vol.C-32, no.9, pp.782-784 (1983.9 )
- [8] N.Shimizu, M.Ikeda, "A guide-wave optical arbiter circuit",  
M.Imase, K.Okada IEEE J.Lightwave, vol.LT-1, no.2, pp.424-428 (1983.6).
- [9] 間瀬、川嶋、今瀬、梶原 「SS/TDMAを用いた斜回線可変設定方式」  
NTT 研究実用化報告, vol.33, no.1, pp.155-168 (1984.1)
- [10] M.Imase, T.Soneoka, "Connectivity of regular graphs with small diameter",  
K.Okada IEEE Trans.Comput., vol.C34, no.3 (1985.3).
- [11] T.Soneoka, H.Tanaka, "Sufficient conditions for maximally connected dense  
M.Imase, C.Peyrat graph", Discrete Mathematics, accepted as a paper.
- [12] 今瀬、曾根岡、岡田 「障害耐力のあるプロセッサ相互結合ネットワーク」  
信学論, vol.J68-D, no.8, pp.1449-1456 (1985.8).
- [13] M.Iwashita, M.Imase, "A graph-theoretic approach to the construction of highly  
T.Soneoka, H.Nakanishi reliable trasmission line network",--Letter  
IECE of Japan, vol.E69no.4,pp.347-348 (1986.4).

## 国際会議

- [1] K.Okada, M.Imase "New architecture and the traffic aspects of switching network using microprocessor",  
H.Ichikawa Int.Teletraffic Conf.9, (1979.10).
- [2] M.Imase, Y.Hirakawa "Functional programming language for switching description and its hardware architecture",  
K.Okada, M.Kajiwara Int. Switching Symposium'84,13C-2 (1984.5).
- [3] T.Soneoka, H.Tanaka, "Sufficient condition for dense graphs",  
M.Imase ISCAS'85, pp.811-814 (1985.5).
- [4] T.Soneoka, M.Imase "CANDY:Computer aided network design system for highly reliable networks", Network'86, S8-4 (1986.6).  
K.Okada

## 全国大会

- [1] 岡田、今瀬 「制御機能内蔵型時分割メモリスイッチの実現法」  
53年度信学会総合全国大会,S12-7.
- [2] 今瀬、市川、岡田 「インテリジェントスイッチによる通話路構成法」  
53年度信学会通信部門全国大会,no.192.
- [3] 市川、今瀬 「個別制御交換方式の一構成法」  
54年度信学会全国大会,S15-11.
- [4] 今瀬、市川、伊藤、吉田 「ハードスケジューラを持つ交換用プロセッサの提案」  
55年度信学会通信部門全国大会,no.140.
- [5] 平川、今瀬、吉田 「状態遷移図にもとづく機能分散法」  
57年度信学会総合全国大会,no.1560.
- [6] 今瀬、市川、岡田 「分散制御交換機のアービタ構成」  
57年度信学会通信部門全国大会,no.210.
- [7] 岡田、今瀬、市川 「グラフ理論を用いた高信頼度網構成法」  
58年度信学会総合全国大会,no.1620.
- [8] 清水、池田、今瀬、岡田 「光導波路型アービタ回路」  
58年度信学会総合全国大会,no.1036.
- [9] 曾根岡、今瀬、岡田 「グラフ理論を用いた高信頼度通信網構成法」  
58年度信学会情報・システム部門全国大会,no.409.
- [10] 今瀬、岡田 「パターンマッチによる関数起動型交換用言語」  
58年度信学会情報・システム部門全国大会,no.460.
- [11] 平川、川嶋、今瀬 「関数型言語の交換システムへの応用」  
59年度信学会総合全国大会,no.1922.

- [12] 曾根岡、今瀬 「り障に強い網トポロジーの一検討」  
59年度信学会総合全国大会, no.1825.
- [13] 志村、上野、梶谷、今瀬 「非分離度によるネットワークの信頼性評価」  
60年度信学会総合全国大会, S7-4.
- [14] 岩下、今瀬、曾根岡、  
中西 「グラフ理論による高信頼化線路網構成の一検討」  
60年度信学会総合全国大会, no.2051.

## 研究会

- [1] 市川、今瀬 「個別制御交換方式SPICEの概要」  
信学会交換研究会, SE79-73 (1979.9)
- [2] 今瀬、市川、岡田 「制御機能融合型スイッチによるビルディングブロック交換システム(PHENIX)の試作・検討」信学会交換研究会, SE80-11
- [3] 今瀬、市川、吉田 「ハードスケジューラを持つ通信制御用プロセッサ」  
信学会電子計算機研究会, EC81-60 (1981.12).
- [4] 今瀬、伊藤、岡田 「直径が準最小正則有向グラフ構成法」  
信学会回路とシステム研究会, CAS82-84 (1982.10).
- [5] 梶原、岡田、市川、  
今瀬、石飛 「分散制御交換システムに関する一検討」  
信学会交換研究会, SE82-76 (1982.11).
- [6] 平川、今瀬、岡田 「状態遷移図分解とそのプログラム構成への応用」  
信学会交換研究会, SE83-45 (1983.7).
- [7] 今瀬、曾根岡、岡田 「拡大完全グラフにおける節点除去時の直径増加量とルーチング」  
信学会回路とシステム研究会, CAS83-115 (1983.9).
- [8] 曾根岡、今瀬、岡田 「直径が小さい正則有向グラフの連結度について」  
信学会回路とシステム研究会, CAS83-114 (1983.9).
- [9] 平川、川嶋、今瀬、岡田 「交換用関数型プログラミング言語LAN-FM」  
信学会交換研究会, SE84-24 (1984.5).
- [10] 今瀬、曾根岡 「MDFスイッチ回路網に関する一考察」  
信学会オートマトンと言語研究会, AL84-28 (1984.9).
- [11] 曾根岡、今瀬、岡田 「高信頼度通信網設計システムCANDY」  
信学会情報ネットワーク研究会, IN85-51 (1985.8).
- [12] 曾根岡、井上、真鍋、  
今瀬 「二重化構造を持つトポロジーの信頼性」  
信学会回路とシステム研究会, CAS85-92 (1985.10).