Osaka University Knowledge Archive

Title	高信頼度通信網構成法に関するグラフ理論的研究
Author(s)	今瀬, 真
Citation	大阪大学, 1986, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/1983
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

『高信頼度通信網構成法に関する
グラフ理論的研究』

昭和６１年５月

今　瀬　真

内　容　梗　概

本論文は、高信頼度通信網構成技術のうち網トポロジーに関するグラフ理論的研究をまとめたものであり、直径最小グラフを基本として網を構成することにより高信頼高能率な網を構成可能であることを示している。本論文は５章からなり、その内容は以下のとおりである。

第１章では、本研究の歴史的背景についてふれ、３つのグラフ評価尺度、即ち直径・連結度・直径罹障度が、網トポロジーの良さを表現する上で基本となることを述べている。

第２章では、網の効率を表現する評価尺度である直径（最短経路の最大中継段数）について考察しており、２つの直径準最小有向グラフ構成法を提案している。本構成法は任意の点数及び最大次数に対して構成可能であり、構成された有向グラフの直径が下界値に比べ高々１大きいだけであることを示す。また、本構成法により無向グラフを構成した場合も、点数が十分大きければ従来に比べ直径が小さいグラフを構成可能であることを示している。

第３章では、直径と信頼性の評価尺度である連結度（いくつの点が罹障しても通信が可能であるかを示す）の関係について述べている。直径を最小化することが結果的に連結度を最大化させること及び第２章で示した有向グラフの連結度が最大値より高々１小さいことを示している。

第４章では、罹障時の迂回経路の最大中継段数即ち直径罹障度について考察している。直径罹障度の下界値が点数、最大次数及び罹障点数の関数として導出できること、第２章で示した構成法で構成できる有向グラフの部分集合であるDe Bruijn グラフ及びKautz グラフの直径罹障度が下界値に比べ高々１大きいだけであることを示す。

第５章は結論であり、本研究で得られた結果を総括し、今後に残された課題を指摘する。

目　次

第１章　序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

１．１　研究の意義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

１．２　研究の歴史的背景 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

１．３　本研究の概要 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5

第２章　直径最小グラフ構成法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8

２．１　用語の定義と問題の定式化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8

２．２　線形構成法と構成されたグラフの直径 ・・・・・・・・・・・・１１

２．３　構成されたグラフの評価 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・１６

２．４　線形構成法の無向グラフへの適用 ・・・・・・・・・・・・・・・１７

２．５　線形構成法と線グラフの関係 ・・・・・・・・・・・・・・・・・１８

２．６　むすび ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２３

第３章　直径最小グラフの連結度 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２５

３．１　用語の定義と従来の結果 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２６

３．１．１　用語の定義 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２６

３．１．２　従来の結果 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２６

３．２　直径と連結度の関係 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２７

３．２．１　点連結度 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２７

３．２．２　枝連結度 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・２９

３．３　直径最小グラフG_1、G_2 の点連結度 ・・・・・・・・・・・・・３２

３．４　むすび ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・３７

第４章　直径最小グラフの直径罹障度 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・３８
４．１　直径罹障度の性質と下界値 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・３８
４．１．１　直径罹障度とその性質 ・・・・・・・・・・・・・・・・・３８
４．１．２　直径罹障度の下界値 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・３９
４．２　De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの性質 ・・・・・・・・・４０
４．３　De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度 ・・・・・・４２
４．３．１　De Bruijn グラフの直径罹障度 ・・・・・・・・・・・・４２
４．３．２　Kautz グラフの直径罹障度 ・・・・・・・・・・・・・・４７
４．４　下界値との比較 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５２
４．５　ルーチングアルゴリズム ・・・・・・・・・・・・・・・・・・５３
４．６　むすび ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５５

第５章　結　論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５６

謝　辞 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５８

参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・５９

第１章　序　論

１．１　研究の意義

近年、通信と情報処理の関係は益々緊密になり、ＬＡＮ（Local Area Network）、企業内通信網、計算機網など各種の通信網が構築されつつある。また、ＬＳＩの発達により大規模なマルチ・マイクロプロセッサシステムの実現が可能となり、プロセッサ相互結合網（Processor Interconnection Networks）の研究が盛んになりつつある。各種の通信網、プロセッサ相互結合網に共通した重要な課題として信頼性の向上がある。信頼性は網トポロジーに大きく左右され、いかなるトポロジーを基本にして網を構成するかは重要な問題である。

しかし、従来の網設計技術はトポロジーを与えたうえで回線数などの設備量あるいは制御法の最適化を図るものが使われているのみでたとえば[1]、トポロジー構成法については適用できる技術はほとんどないのが現状である。

本論文は、交換ノードあるいはプロセッサを点（vertex）、通信リンクを枝(edge)に対応させたグラフにより網をモデル化し、所望の信頼性を有しかつ効率のよいグラフを任意の規模に対して構成できることを示し、高信頼・高能率な網の実現可能性を示している。通信リンクが片方向か両方向かにより有向あるいは無向グラフにモデル化できるが、本論文では主に有向グラフを取扱っている。

１．２　研究の歴史的背景

通信網とグラフの結びつきは自然であるが、直接的にその関連が論じられたのは最近のことであり、1972年に発表されたR.S.Wilkovの文献[2]が最初のまとまったものである。R.S.Wilkovは、通信網の信頼性・安定性はそのトポロジーに大きく左右されグラフ論的検討が重要であることを主張している。また、２点間の経路の数及びその長さがトポロジーを検討する上で重要であるとし、これを表現するグラフ上での評価尺度として連結度(Connectivity)、直径(Diameter)、直径罹障度(Diameter Vulnerability)が基本となることを述べている。

評価尺度

・連結度は、いくつの点あるいは枝が障害となった時に通信が不能となる（結ぶ経路が存在しない2点が発生する）かを示すものであり、連結度が大きいほど信頼性が高い。また、連結度は2点間の独立な経路の数に一致しており、連結度が大きいほど障害時の迂回経路として選択できる道の数が多い。連結度には、点の障害を想定した点連結度と枝の障害を想定した枝連結度がある。

・直径は最大中継段数（各点間の最短中継段数の最大値）であり、小さくすることにより伝送遅延、接続遅延を低くおさえることができる。また、最大中継段数を小さくすることにより、平均中継段数も小さくなり必要な設備量を削減できる。

・直径罹障度は障害時の直径を示すものである。一般に、障害時の迂回経路は平常時の経路（最短経路）より長くなるため、網の処理能力が低下する。従って、直径罹障度が直径に近いほど障害時の処理能力の低下が小さいといえる。

この基本的な考え方は現在まで受け継がれており[26]、通信網に関連するグラフ論的研究のほとんどがこの範疇に入っている。また、最近盛んに研究されているプロセッサ相互結合網は、規模、装置構成技術、地域的拡がりなどの点で通信網とは異なるが、トポロジーという観点からは共通した課題が多く連結度、直径、直径罹障度の3つが基本的な評価尺度となっている[27]。

上記評価尺度に関する研究は数多く存在し、ここですべてをサーベイすることはできない。以下では新規に網トポロジーを構成するという観点から内外のグラフ論的研究を概観する。網を構成するという立場では、これ以外に既に存在する網を改善するという立場もあるが、連結度に関していくつかの研究がある[3, 4, 5, 6] のみである。

連結度に関しての最も基本的な構成問題は、点数と枝数を与え連結度最大のグラフを求めることである。この問題は1962年にF.Harary[7] により解かれ、1960年代にはこれに附随する各種の問題が盛んに研究された[2] 。しかし、これらの研究で構成されたグラフは直径が大きく効率の面で問題があった。1970年代にはいると、しばらくの間構成問題に関する目立った成果はなく、連結度をより詳細化した評価尺度の

追及[8, 9]、直径罹障度の性質[10, 11]など任意のグラフに成立する性質の探究が主であった。1978年頃から、本論文の研究と並行して、グラフ構成に関する研究が各所で行われるようになった。これには、ＬＳＩの発達により、数百～数千のマイクロプロセッサを接続したシステムの実現性が出てきたことが大きなインパクトとなっている。最近のグラフ構成問題に関する研究は、次の２つのアプローチに大別できる。

アプローチ　１：直径最小化

最近もっとも多く研究されているものが、（Δ，Ｄ）グラフ問題である。これは、1964年B.Elspasにより提案されたもので以下のように定式化される[12]。

（Δ，Ｄ）グラフ問題　最大次数Δ（無向グラフの場合は各点の次数（つながれている枝）の最大値、有向グラフの場合は入次数と出次数の最大値）と直径Ｄが与えられた時にできるかぎり多くの点数ｎをもつグラフを構成せよ。

本問題は、最大次数Δと点数ｎを与え直径Ｄを最小にする問題と本質的には同一である。本問題に関して、点数ｎの上界が次式で与えられる。

・無向グラフの場合：　$n \leqq \dfrac{\Delta(\Delta-1)^{D}-2}{\Delta-2}$　（ただしΔ≧３）　(1.1)

・有向グラフの場合：　$n \leqq \dfrac{\Delta^{D+1}-1}{\Delta-1}$　（ただしΔ≧２）　(1.2)

この右辺はMoore Bound（あるいは有向Moore Bound）と呼ばれ[13]、等号が成立するグラフをMoore グラフとよぶ。1960年代は、理論への興味からMoore グラフがどのような最大次数Δ、直径Ｄに対して存在するかが主に研究され、ごく限られた値に（無向グラフの場合はD=1 とD=2 かつΔ=3,7,57[14, 15]、有向グラフの場合はD=1[16]）しか存在しないことが明らかにされた。図1.1 にＤ=2，Δ=3の無向Moore グラフを示す。

Moore グラフは、網トポロジーとして次のような優れた性質を持っている。

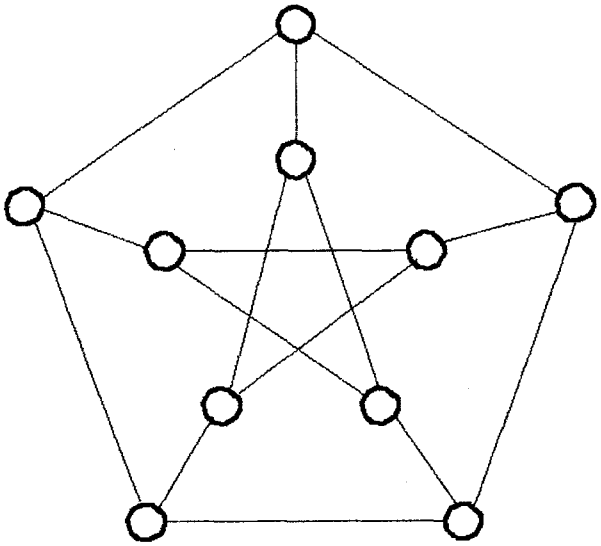
Moore グラフの性質

①　最大次数がΔ、点数がｎのグラフの中で、最大中継段数（直径）と平均中継段数がともに最小である。

② 連結度は、最大次数Δに一致して最大である。言い換えれば、枝数nΔのグラフの中で最大である。

③ 有向Moore グラフの場合は、Δ－1個以下の点が障害となっても直径は1大きくなるだけである。即ち、直径罹障度は直径より1大きいだけであり、最大次数Δ、点数nのグラフの中で最小である。

④ 均一な構造であり、各点に必要となるデータ転送処理能力が均一である。



直径κ：2，　次数δ：3

図1．1　無向ムーアグラフ

このように、Moore グラフは連結度、直径、直径罹障度すべての面で優れた性質を持っている。1978年頃から、Moore グラフが存在しない領域でMoore Bound に近い点数を持つグラフを求めようとする研究が盛んに行われるようになった[17-25]。これは、Moore Bound に近い点数を持つグラフでは上述の性質を近似的に有しているのではないかという予想からである。

（Δ，D）グラフ問題では、特定の点数を持つグラフしか構成できない。実用上からは、任意の点数n，最大次数Δに対して直径Dが出来るかぎり小さいグラフを求めることが望ましい。この問題は（n，Δ）問題と呼ばれているが殆ど研究されていないのが現状である。なお、式(1.1)(1.2)を変形することにより、直径の下限値は次式となる。

無向グラフの場合：　$D \geqq \log_{\Delta-1} \dfrac{n(\Delta-2)+2}{\Delta}$　(1.3)

有向グラフの場合：　$D \geqq \log_{\Delta}(n(\Delta-1)+1)-1$　(1.4)

以下では、（Δ，D）グラフ問題あるいは（n，Δ）グラフ問題の近似解として提案されたグラフを直径最小グラフと呼ぶことにする（正確にはその直径は最小ではないが）。

（Δ，Ｄ）グラフ問題の近似解として提案されたグラフをプロセッサ相互結合網への適用を研究したものとして、グラフ上でのルーチング・アルゴリズムの検討がある[27-29]。また、通信網への適用として、田中・秋山が研究している[30]。

アプローチ２　枝数最小化

もう１つのアプローチとして連結度、直径、直径罹障度のすべてによいグラフを直接的に求めようとするものがある。これは、1964年にMurthy&Vijayan[31]により提案された次の問題を研究するものである。

$f_v(n,D,D',s)$問題

次の様な性質を持つグラフの中で枝数が最小となるグラフ及びその枝数を求めよ。

性質：点数がｎ、直径がＤ、どのｓ個の点を除去しても得られるグラフの直径は高々Ｄ’。

この問題に関しては、数多くの研究がある[26]が基本的には無向グラフにおいて次に示す特殊な場合しか構成法が解っておらず、現状では実際の網への適用は困難な段階である。

$$f_v(n,D,D',1) = \lceil (nD-2D-1)/(D-1) \rceil \qquad n > D' \geqq 2D-1 \qquad (1.5)$$ [32]

$$f_v(n,2,2,s) = (s+1)(n-s-1) \qquad n \geqq 2s \qquad (1.6)$$ [33]

（ただし「　」は切上げを示す）

この問題の難しさは、良い下界値が解っておらず近似界を求める手法がとれないことにある。

１．３　本研究の概要

本研究は、アプローチ１の立場にたち有向グラフを対象とし、直径最小グラフ構成法の提案及びそのグラフの連結度、直径罹障度等の性質を求め、これらのグラフがMoore グラフの持つ優れた性質を近似的に有していることを示す。つまり、直径最小グラフのトポロジーを基本にして網を構成することにより、高信頼・高能率な網が実現可能である事を主張している。なお、以下では混乱のない限り有向グラフを単にグ

ラフとよぶ。

主な結果は次の通りである。

（１）任意の点数に対して、直径が下界値（式1.4 ）より高々１大きいグラフの構成が可能である。

（２）最大次数を制限した下では、直径を最小化することにより連結度が最大化される。また、（１）で示したすべてのグラフの連結度は最大値より高々１小さいだけである。

（３）（１）で示したサブクラスであるDe Bruijn グラフ及びKautz グラフは、直径罹障度が下界値より高々１大きいだけである。

以下に各章の概要を述べる。

第２章　直径最小グラフ構成法[42-44, 50]

本章では、２つの直径最小グラフ構成法を示す。従来提案されている直径最小グラフ（（Δ，Ｄ）あるいは（ｎ，Δ）問題の解）構成法[12-14, 17-21, 23, 24, 36, 39] は特定の点数の無向グラフあるいは有向グラフを構成するものであった。本章で示す２つの構成法は、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものであり、任意の点数ｎ及び最大次数Δに対して構成が可能である。導出されたグラフの直径は「$\log_{\Delta} n$」か「$\log_{\Delta} n$」－１となり下界値に比べ高々１大きいだけである（「　」は切上げを示す）。また、平均距離についても下界値より高々０．３程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。

第３章　直径最小グラフの連結度[46, 47, 49, 52]

本章では、直径と連結度の間に成り立つ一般的関係に着目し、次の２つの不等式を示す。

$$\kappa \geqq \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D}+\Delta^{2}-\Delta-1} \qquad \lambda \geqq \min\left\{\frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D-1}+\Delta^{2}-2},\ \delta\right\}$$

ただし、ｎは点数、Δは最大次数、δは最小次数、Ｄは直径、κは点連結度、λは枝連結度である。これより、直径Ｄを小さくすることにより連結度κ、λが大きくなる

ことが分かる。

また、第２章で示した直径最小グラフの連結度は最大値Δより高々１小さいだけである事を示す。

第４章　直径罹障度[46, 48, 51, 53]

本章では、迂回経路の最大中継段数（即ち直径罹障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

① 直径罹障度の下界値は、最大次数Δ、点数ｎ、罹障点数ｓの関数として導出できる。

② 第２章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの部分集合となるDe Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度は、下界値に比べ高々１大きいだけである。

③ 上記グラフでは、障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現できる。

第２章　直径最小グラフ構成法

本章では、２つの直径最小グラフ構成法を示す。従来提案されている直径最小グラフ（（Δ，Ｄ）あるいは（ｎ，Δ）問題の解）構成法[12-14, 17-21, 23, 24, 36, 39]は特定の点数でしか無向グラフあるいは有向グラフを構成できなかった。本章で示す２つの構成法は、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものであり、任意の点数ｎ及び最大次数Δに対して構成が可能である。導出されたグラフの直径は「$\log_{\Delta} n$」か「$\log_{\Delta} n$」－１となり、直径の下界値（式(1.4)）より高々１大きいだけである（「」は切り上げを示す）。また、平均距離についても下界値より高々０．３程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。また、本構成法を無向グラフに適用した時、点数ｎが大きければ従来に比べ直径の小さなグラフが構成できる。

２．１節で用語の定義と直径・平均距離の下界値を述べ、２．２節でグラフ構成法を提案し、構成されたグラフの直径を明らかにする。２．３節では、直径及び平均距離を下界値と比較評価する。２．４節では、無向グラフに本構成を適用した場合と従来の構成法と比較する。また、２．５節では構成されたグラフの幾つかの性質を示し、従来提案された直径最小グラフ[38, 39, 35]が、本章で提案するグラフの集合の一部分となっていることを示す。

２．１　用語の定義と問題の定式化

本節では、使用する用語を定義し直径最小化問題を定式化する。

有向グラフをＧ＝（Ｖ，Ｅ）で表わす。ここでＶは点集合、Ｅは有向枝集合であり、Ｅの要素は点の順序対で表現される。ただし、多重枝は許さず、自己ループは許すものとする。枝（ｕ，ｖ）に対して点ｕを始点、点ｖを終点と呼ぶ。以下では、有向グラフを単に<u>グラフ</u>と呼ぶことにする。点ｖ∈Ｖの<u>出次数</u>(out-degree)はｖから出ている枝の本数、<u>入次数</u>(in-degree)はｖに入ってくる枝の本数である（ただし、自己ループ枝は除く）。グラフＧの<u>最大次数Δ(G)</u>は、すべての点での出次数及び入次数の最大値である。<u>最小次数δ(G)</u>は、出次数及び入次数の最小値である。<u>道</u>(walk)

は点v_iと枝e_iが交互に現われる交代系列$v_0e_1v_1e_2....v_{n-1}e_nv_n$で$e_i=(v_{i-1},v_i)$となるもので、その道の長さはnである。2つの道PとQが独立であるとは、端点以外のP上の点とQ上の点が互いにすべて異なることを意味する。また、枝独立とはP上の枝とQ上の枝が互いにすべて異ることを意味する。点uから点vへの距離とは、点uから点vへの長さが最小の道の長さであり、dis(u, v) と表わす。ただし、u＝vの時は0，uからvへ道がないときは無限大とする。点間の距離が小さいほど、データ転送の中継処理（すなわち転送遅延時間、転送処理時間）が小さくなりシステムの処理能力が大きく効率が良いと言える。点間の距離の評価尺度として直径（最大距離）及び平均距離がある。

グラフGの直径D(G) とは、すべての点対の距離の最大値、すなわち

$$D(G) = \max_{v_i,v_j \in V} dis(v_i,v_j)$$

である。

また平均距離は、

$$\overline{D}(G) = \left(\sum_{v_i,v_j \in V} dis(v_i,v_j) \right) / n^2$$

とする。

本章で扱う直径最小化問題は次の様に定式化できる。

（n，Δ）グラフ問題：H（n，Δ）を点数n、最大次数Δのグラフの集合とする。H（n，Δ）に属するグラフの中で直径が最小のグラフ及びその直径を求めよ。

H（n，Δ）に属するグラフは、次に示す性質を持つ。

［性質2．1］もしグラフGがH（n，Δ）に属するならば、直径D(G) について次式が成立する。

$$D \geqq b(n, \Delta)$$

ただし、$b(n, \Delta) = \lceil \log_{\Delta} (n(\Delta - 1) + 1) \rceil - 1$ (1.3)

証明： 略[13] ■

b（n，Δ）は、点数n、最大次数Δを与えた時の直径の下界値となる。

［性質２．２］もしグラフＧがＨ（ｎ，Δ）に属するならば、平均距離$\overline{D}(G)$について次式が成立する。

$$\overline{D} \geqq b-(\Delta^{b+1}-\Delta b-\Delta+b)/n(\Delta-1)^2 \qquad (2.1)$$

ただし、ｂは下界値ｂ（ｎ，Δ）。

<u>証明</u>：グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）において、ある点$u\in V$から他の任意の点$v\in V$への最短道をすべて含むスパニングトリーT_uを構成する。T_uにおいてｕからｖへの距離の総和をS_uとすると、次式が成立する。

$$S_u = \sum_{v\in V} dis(u,v)$$

S_uを最小化するスパニングトリーT_uは次の性質を持つ（図２．１参照）。

① T_uの深さは、直径の下界値ｂに一致する。

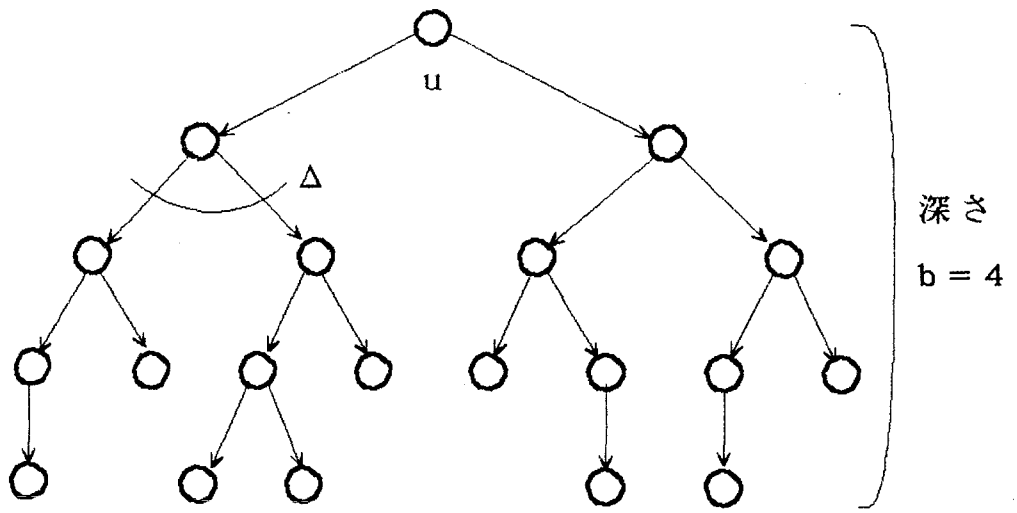
② ｕから深さがｂ－２以下の点の出次数はすべてΔとなる。つまり、深さ$i\leqq b-1$の点の個数はΔ^i個ととなる。

従って、S_uの個数は次のように見積れる。

$$S_u \geqq \sum_{i=0}^{b-1}\Delta^i\cdot i+(n-\sum_{i=0}^{b-1}\Delta^i)\cdot b$$
$$=nb-(\Delta^{b+1}-\Delta b-\Delta+b)/(\Delta-1)^2$$

$$\overline{D}(G)=(\sum_{u\in V}S_u)/n^2=S_u/n$$

であるから式(2.1)が導かれる。 ■



<u>図２．１　S_uを最小にするスパニングトリーT_u</u>

２．２　線形構成法と構成されたグラフの直径

本章では、Ｈ（ｎ，Δ）に属する２つのグラフのクラスを提案し、その直径を明らかにする。両者とも、接続関係を点番号の線形式で規定することによりグラフを構成するものである。

［構成法１］ｎ個の点の集合Ｖを｛0,1,2,....,n-1｝とする。点ｉと点ｊが次式を満たす時かつその時に限り、点ｉから点ｊへの枝を付加する。

$$j \equiv i \times d + p \pmod{n} \qquad p = 0,1,2,\ldots,d-1 \tag{2.2}$$

［構成法２］ｎ個の点の集合Ｖを｛0,1,2,....,n-1｝とする。点ｉと点ｊが次式を満たす時かつその時に限り、点ｉから点ｊへの枝を付加する。

$$j \equiv -i \times d - q \pmod{n} \qquad q = 1,2,\ldots,d-1,d \tag{2.3}$$

以下では、構成法１、２により構成されるグラフを各々$G_1(n,d)$ $G_2(n,d)$とする。G_1、G_2 は、最大次数がｄでありＨ(n,d) に属する。図2.2 及び 2.3に各々G_1(7，2)、G_2(9，2) を示す。

G_1(n，d) では、つねに自己ループが存在し最小次数δはｄ－１となる。また、G_2(n，d) は点数ｎがｄ＋１の倍数のとき自己ループを含まずδはｄとなり、それ以外はδはｄ－１となる。また、最大次数Δは両者ともｄとなる。網に適用する場合

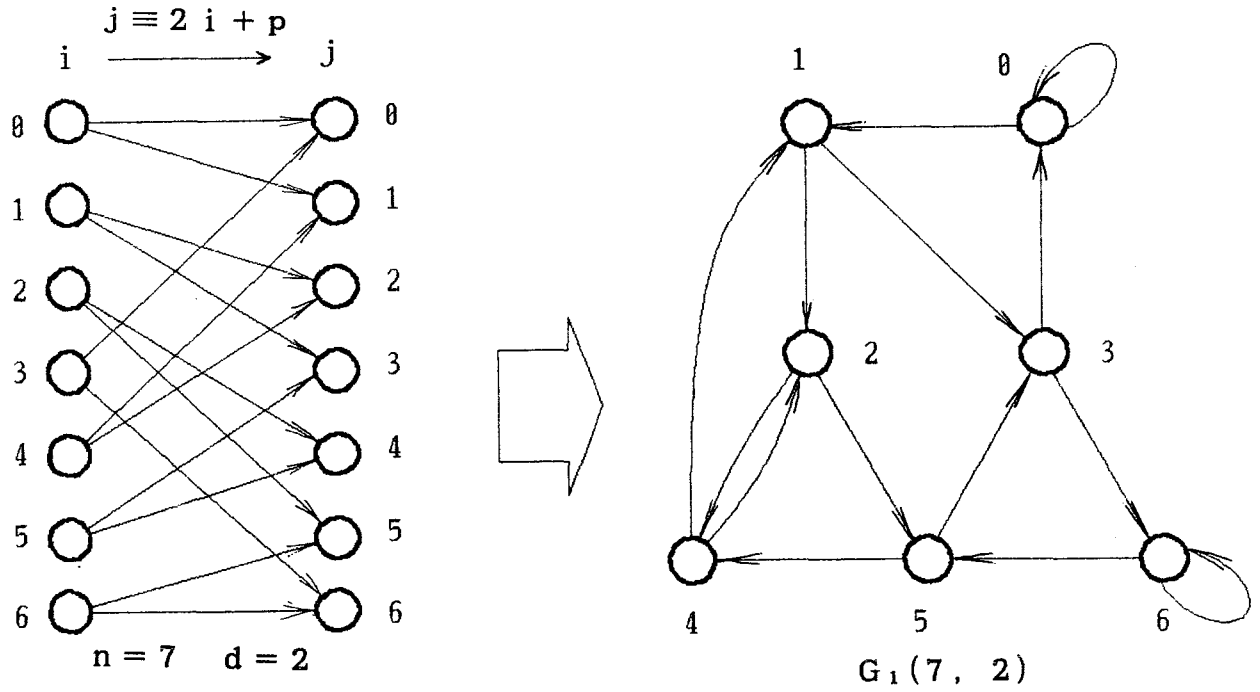


図２．２　G_1(7，2)

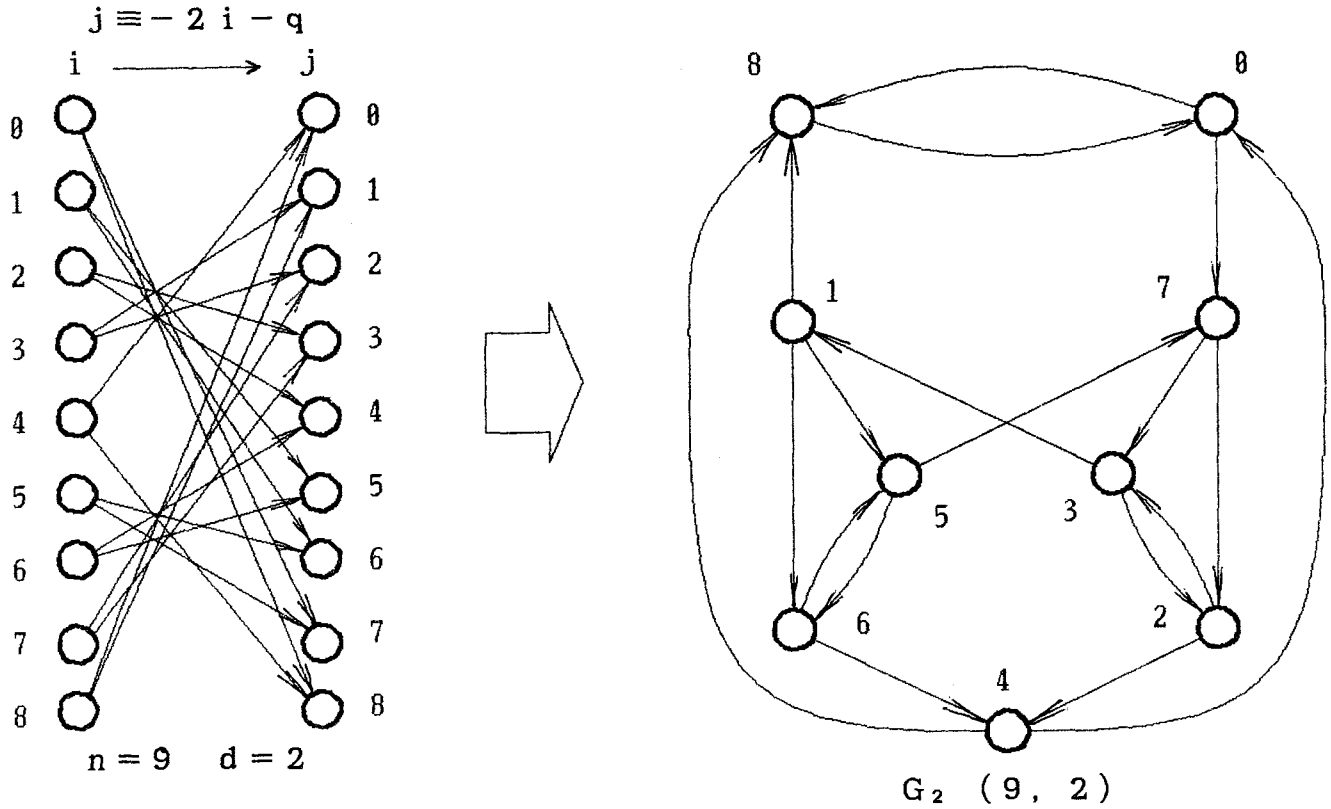


図2．3　$G_2(9, 2)$

自己ループは意味がないが、議論の都合上自己ループを含めたグラフを$G_1(n, d)$，$G_2(n, d)$とする。

これらのグラフの直径を見積るため次の定義を導入する。

［定義2．1］グラフ$G=(V, E)$において、点uから長さmの道が存在する点の集合を$J_m(u)$とする。

たとえば、図 2.3に示すグラフ$G_2(9, 2)$において、$J_0(0)$，$J_1(0)$，$J_2(0)$，$J_3(0)$は、各々{0}，{7,8}，{0,1,2,3}，{1,2,3,4,5,6,7,8}となる。

［定理2．1］$G_1(n, d)=(V, E)$において、次式が成立する。

$$|J_m(i)| = \min\{d^m, n\} \qquad \text{ただし、} i \in V\text{、}m\text{は自然数。} \tag{2.4}$$

また、直径Dは次式を満たす。

$$D(G_1(n, d)) \leqq \lceil \log_d n \rceil \tag{2.5}$$

証明：式(2.2)より、

$$J_1(i) = \{j \mid j \equiv id + p_1 \pmod{n} \quad p_1=0,1,\ldots,d-1\}$$

$$J_2(i) = \{j \mid j \equiv id^2 + p_1 d^1 + p_2 \pmod{n} \quad p_1,p_2=0,1,\ldots,d-1\}$$

$$\vdots$$

$$J_m(i) = \{j \mid j \equiv id^m + p_1 d^{m-1} + \ldots + p_s d^s + \ldots + p_m \pmod{n}$$

$$p_s = 0,1,\ldots,d-1 \quad s=1,2,\ldots m\} \qquad (2.6)$$

となる。

p_sが$0,1,\ldots,d-1$ の値をとることから、式(2.6) の右辺はｄ進数表現とみなせる。従って、 $id^m, id^m+1, \ldots, (i+1)d^m - 1$の値、つまり$d^m$個の連続した値をとることになり、式(2.4) が成立する。

また、$m = \lceil \log_d n \rceil$ となるｍに対して、$n \leqq d^m$となり、$J_m(i)$ はＶと一致する。つまり、ｉからすべての点に対して長さｍの道が存在することになる。ｉは任意の点でよく、直径はｍ以下となる。 ■

$G_2(n, d)$ についても、$G_1(n, d)$ と同様な性質を持つ。

［定理２．２］$G_2(n, d) = (V, E)$ において、次式が成立する。

$$|J_m(u)| = \min\{d^m, n\} \qquad (2.7)$$

ただし、$i \in V$、ｍは自然数。また、直径Ｄは次式を満たす。

$$D(G_2(n, d)) \leqq \lceil \log_d n \rceil \qquad (2.8)$$

証明：定理１の証明と同様にして、次式が求まる。

$$J_m(i) = \{j \mid j \equiv f_{m,i}(q_1, q_2, \ldots, q_s, \ldots, q_m) \pmod{n}$$

$$q_s = 1,2,\ldots,d, \quad s=1,2,\ldots m\}$$

ただし　$f_{m,i}(q_1, q_2, \ldots, q_s, \ldots, q_m)$

$$= i(-d)^m - q_1(-d)^{m-1} - \ldots - q_s(-d)^{m-s} - \ldots - q_m = i(-d)^m - \sum_{s=1}^{m} q_s(-i)^{m-s} \qquad (2.9)$$

$f_{m,i}(q_1, q_2, \ldots, q_s, \ldots, q_m)$が最大、最小となるのは、$q_s(s=1,\ldots,m)$ が各々次の値の時である。

$$\text{最大：} \quad q_s = \begin{cases} 1 & m-s\text{が偶数の時} \\ d & m-s\text{が奇数の時} \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$\text{最小：} \quad q_s = \begin{cases} d & m-s\text{が偶数の時} \\ 1 & m-s\text{が奇数の時} \end{cases} \qquad (2.11)$$

$f_{m,i}$ の最大値を$f_{max}(m,i)$、最小値を$f_{min}(m,i)$とすると、その値は次のようになる。

$f_{max}(m,i) =$

$$\begin{cases} f_{m,i}(d,1,d,\ldots,d,1) = (i+1)\,d^m - 1 & m\text{が偶数の時} \\ f_{m,i}(1,d,1,\ldots,d,1) = -i\,d^m - 1 & m\text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.12)$$

$f_{min}(m,i) =$

$$\begin{cases} f_{m,i}(1,d,1,\ldots,1,d) = i\,d^m & m\text{が偶数の時} \\ f_{m,i}(d,1,d,\ldots,1,d) = -(i+1)\,d^m & m\text{が奇数の時} \end{cases} \quad (2.13)$$

これより，$f_{max}(m,i) - f_{min}(m,i) = d^m - 1$ となる。従って、$f_{m,i}$ が $f_{max}(m,i)$ から $f_{min}(m,i)$ の間の任意の自然数値をとることが示せれば、$f_{m,i}$ は d^m 個の連続した値をとることが解り、命題が成立することになる。

以下ではこれを示す。任意の $(q_1,q_2,\ldots,q_s,\ldots,q_m)$（ただし $q_s=1,2,\ldots,d$、$s=1,\ldots,m$ 、$f_{m,i}(q_1,\ldots,q_s,\ldots,q_m) \neq f_{max}(m,i)$）に対して次式を満たす $(q_1',\ldots,q_s',\ldots,q_m')$ が存在すればよい。

$$f_{m,i}(q_1,\ldots,q_s,\ldots,q_m) + 1 = f_{m,i}(q_1',\ldots,q_s',\ldots,q_m')$$

$f_{m,i} \neq f_{max}$ より、$(q_1,\ldots,q_s,\ldots,q_m)$ において $m-s$ が偶数で $q_s > 1$ 又は $m-s$ が奇数で $q_s < d$ となる（即ち、式 (2.10) を満たさない）q_s が必ず存在する。今、その中で添字が最大となるものの添字をTとする。q_s' $(s=1,\ldots,m)$ を

$$q_s' = \begin{cases} q_s & s < T\text{の時} \\ q_s - 1 & s = T\text{で } m-s\text{が偶数の時} \\ q_s + 1 & s = T\text{で } m-s\text{が奇数の時} \\ d & s > T\text{で } m-s\text{が偶数の時} \\ 1 & s > T\text{で } m-s\text{が奇数の時} \end{cases}$$

とすると、$f_{m,i}(q_1,\ldots,q_s,\ldots,q_m) + 1 = f_{m,i}(q_1',\ldots,q_s',\ldots,q_m')$ となる。

■

定理2.1,定理2.2 より $G_1(n, d)$ 、$G_2(n, d)$ の直径が「$\log_d n$」以下となることが解った。では、真に「$\log_d n$」より小さい場合が存在するかが問題となる。$G_1(n, d)$ では存在しない。これは、点0から点 $n-1$ への距離が、n、dに依存せず「$\log_d n$」となることから解る。$G_2(n, d)$ では、次の定理にしめすように「$\log_d n$」-1 となる場合がある。

［定理２．３］　$G_2(n, d) = (V, E)$ において、点数 n が $d^{m-b}(d^b+1)$（ただし b は奇数）の時、

$$D(G_2) = m = \lceil \log_d n \rceil - 1 \tag{2.14}$$

証明：定理２．２の証明より、

$$J_m(i) = \{ j \mid j \equiv j' \pmod{n},\ j' = f_{min}(m,i),\ f_{min}(m,i)+1, \ldots,\ f_{max}(m,i) \}$$

$$J_{m-b}(i) = \{ j \mid j \equiv j' \pmod{n},\ j' = f_{min}(m-b,i),\ f_{min}(m-b,i)+1, \ldots,\ f_{max}(m-b,i) \}$$

となる。次の２つの場合に分けて考える。

①　m が偶数（$m-b$ が奇数）の時、式(2.12)、(2.13)及び $n=d^m+d^{m-b}$ より、

$$f_{min}(m,i) - f_{max}(m-b,i) = id^m - (-id^{m-b}-1) = i(d^m+d^{m-b})+1 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$f_{min}(m-b,i) - f_{max}(m,i) = -(i+1)d^{m-b} - ((i+1)d^m - 1)$$
$$= -(i+1)(d^m+d^{m-b})+1 \equiv 1 \pmod{n}$$

②　m が奇数（$m-b$ が偶数）の時、式(2.12)と(2.13)より、

$$f_{min}(m,i) - f_{max}(m-b,i) = -(i+1)d^m - ((i+1)d^{m-b} - 1)$$
$$= -(i+1)(d^m+d^{m-b})+1 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$f_{min}(m-b,i) - f_{max}(m,i) = id^{m-b} - (-id^m - 1) = i(d^m+d^{m-b})+1 \equiv 1 \pmod{n}$$

従って、Ｖのすべての（0,1,2,..と番号付けられた）点は $J_m(i)$、$J_{m-b}(i)$ のどちらかに含まれることになり（図２．４参照）、点 i からすべての点に長さ m または $m-b$ の道が存在することになる。点 i は任意の点

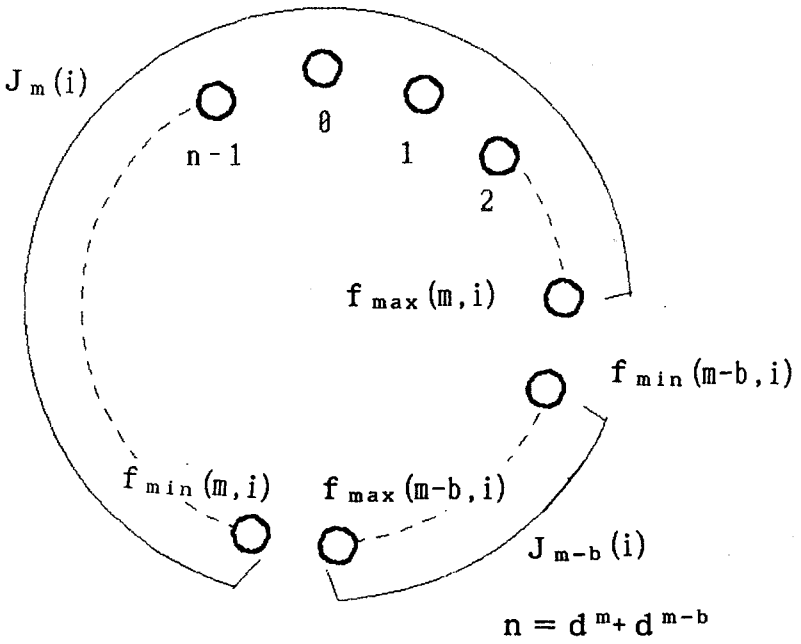


図２．４　$J_m(i)$ と $J_{m-b}(i)$ の関係

であり直径がmとなる。 ■

2．3　構成されたグラフの評価

定理 2.1〜2.3 より、グラフ$G_1(n,d)$，$G_2(n,d)$の直径が明らかになった。まず、これらと2．1節で述べた下界値を比較する。今、点数n、次数dに対して自然数mを$d^{m-1} < n \leqq d^m$ となるようにとると、$G_1(n,d)$，$G_2(n,d)$の直径は次のようになる。

$$D(G_1(n,d)) = \lceil \log_d n \rceil = m$$

$$D(G_1(n,d)) = \begin{cases} \lceil \log_d n \rceil - 1 = m-1 & n = d^{m-b}(d^b+1)\text{の時} \\ \lceil \log_d n \rceil = m & n\text{がそれ以外の時} \end{cases}$$

ただし、bは奇数。

一方、直径の下界値Moore boundsb（n，d）は次のようになる。

$$b(n,d) \begin{cases} = m-1 & d^{m-1} < n \leqq \dfrac{d^m-1}{d-1} \\ = m & \dfrac{d^m-1}{d-1} < n \leqq d^m \end{cases}$$

従って、G_1, G_2 の直径は下界値より高々1大きいだけであり、下界値と一致するのは、次の場合になる。

$$G_1(n,d): \quad \frac{d^m-1}{d-1} < n \leqq d^m$$

$$G_2(n,d): \quad \frac{d^m-1}{d-1} < n \leqq d^m \quad \text{または} \quad n = d^{m-b}(d^b+1) \quad (b\text{は奇数})$$

グラフG_1, G_2 の平均距離$\overline{D}$を陽に見積ることは困難である。図2．5に計算で求めたG_1, G_2 の平均距離と下界値を示す。図から、最大次数Δが2の時$\overline{D}(G_1(n,2))$ $\overline{D}(G_2(n,2))$ と下界値（式(2.1) の左辺）の差は、高々0.3 程度であることが解る。また、差は最大次数Δが大きくなる程小さくなっている。

構成法1、2は、任意の点数n、最大次数Δを与えて直径が準最小のグラフを構成するものであった。もちろん、（Δ，D）グラフ問題に対しても適用可能である。（Δ，D）グラフ問題の観点からは、構成法2において点数が$\Delta^D+\Delta^{D-1}$ の時のグラフ$G_2(\Delta^D+\Delta^{D-1}, \Delta)$ が最も良い解である。最大次数Δ、直径D、点数$\Delta^D+\Delta^{D-1}$

となるグラフは、 Kautzが既に別の構成法を示している[39]。２．５節で後述するが、実は Kautzグラフと$G_2(\Delta^D+\Delta^{D-1}, \Delta)$ は同じグラフとなっている。

図２．５　G_1 G_2 の平均距離と下界値の比較

	平均距離　D								
	最大次数　Δ＝２			最大次数　Δ＝３			最大次数　Δ＝４		
点数n	下界値	$G_1(n,2)$	$G_2(n,2)$	下界値	$G_1(n,3)$	$G_2(n,3)$	下界値	$G_1(n,4)$	$G_2(n,4)$
６	1.333	1.611	1.333	1.167	1.270	1.222	1	1.167	1.111
１０	1.9	2.120	2.120	1.5	1.62	1.580	1.4	1.44	1.400
２０	2.7	2.960	2.960	2.1	2.210	2.190	1.7	1.870	1.7
３０	3.133	3.502	3.473	2.4	2.536	2.493	2.1	2.220	2.178
４０	3.575	3.859	3.859	2.55	2.815	2.805	2.325	2.380	2.337
５０	3.86	4.171	4.152	2.84	2.999	2.999	2.46	2.495	2.484

２．４　線形構成法の無向グラフへの適用

前節で示した構成法２により、最大次数ｄ、直径Ｄ、点数d^D+d^{D-1} の有向グラフが構成できる。いまこの有向グラフ$G_2(d^D+d^{D-1}, d)$ の枝の向きを除去した無向グラフを考えると、最大次数Δは２ｄとなる。一般に有向グラフの枝の向きを除去した無向グラフの直径は、もとのグラフの直径より小さい。従って、点数ｎ、最大次数Δ、直径Ｄの間には次式が成立する。

$$n \geqq (\Delta/2)^D + (\Delta/2)^{D-1} \qquad (2.15)$$

これは、従来構成された各種の無向グラフと異なる特徴となっている。従来の構成法[17-20, 23]における最大次数Δ、直径Ｄ、点数ｎの間の関係式は、全て次のように一般化できる。

$$n_0 \leqq f(\Delta) \times (\Delta-1)^{D/2} + g(\Delta) \qquad (2.16)$$

ただし、$f(\Delta)$、$g(\Delta)$ は直径Ｄには依存せず最大次数Δのみに依存する関数。

式(2.15)と(2.16)を比べた時、f(Δ)、g(Δ) がどのような値でも直径Dが充分大きければ式(2.15)の方が多くの点数nを持つことが解る。つまり、ここで提案した構成法は点数nが十分大きい（大規模）なグラフを構成する場合は従来のどの構成法より優れている。

従来の構成法で式(2.16)が成立するのは、トリーを基本に構成していたことに因る。トリーでは、根にあたる点から他の点への距離がリーフからリーフへの距離（直径D）の1／2となり（図2.6参照）、全体の点数は式(2.16)の形式で表現できる。従来の構成法は、複数のトリーを組合せたり各種の変形を行っているが、基本的にはこの性質が残っておりf(Δ)、g(Δ) を小さくすることに努力が払われていたと見なせる。

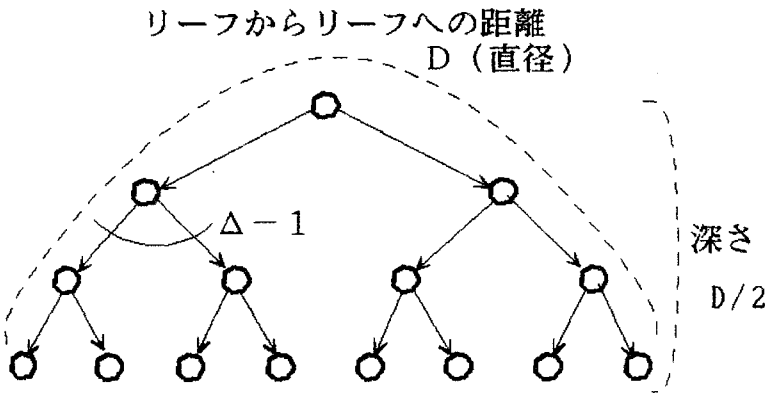


図２．６　トリーの構造

我々の発表の後、構成法１の変形[21,24] などトリーを基本としない構成法が研究され[22,25] 特定のΔ、Dに対しては式(2.15)より多くの点数を持つグラフが構成されているが、直径D（つまり点数n）が充分大きいところでは、より優れた構成法はまだ明らかになっていない。

２．５　構成されたグラフと線グラフの関係

次章以下（特に４章）の準備として、前章で構成法を示したG_1, G_2 がグラフの演算の一種である線グラフ変換[37]と深く関わりがあることを示し、

① $G_1(d^m, d)$ が完全回路[38]の個数を数えあげるために構成された De Bruijnグラフと同一である事、

② $G_2(d^m+d^{m-1}, d)$が Kautz[39]とReddy[35] が独立に提案した直径最小グラフ（以下 Kautzグラフとよぶ）と同一である事を示す。

グラフGの線グラフL（G）とは次の性質を満たすグラフである。

（性質１）L（G）の点は、Gの枝に対して１対１に対応がつく。

（性質２）Gの２つの枝をe_1, e_2とし、L（G）においてe_1, e_2に対応する点をv_1, v_2とする。もし、Gにおいてe_1の終点とe_2の始点が同じである時かつその時に限り、L（G）において点v_1から点v_2に枝が存在する。

即ち、線グラフL（G）とは、グラフGの枝を点とみなしたグラフの事である（線グラフの線は枝の意味）。図２．７に完全グラフK_3とその線グラフL（G）を示す。

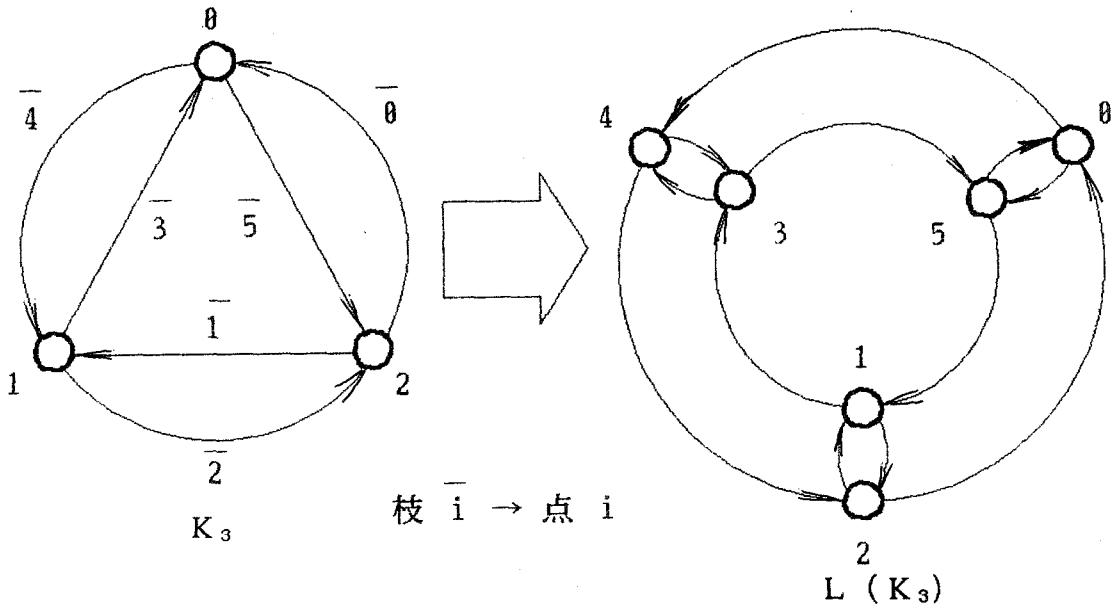


図２．７　完全グラフとその線グラフL（K_3）

線グラフの観点から見ると、２．２節で構成法を示した直径最小グラフG_1, G_2では次の性質が成立する。

［性質２．３］グラフ$G_1(nd,d), G_2(nd,d)$は、各々$G_1(n,d)$，$G_2(n,d)$の線グラフとなっている。即ち、

$$G_1(nd,d) = L(G_1(n,d))$$

$$G_2(nd,d) = L(G_2(n,d))$$

証明：最初にG_1について証明する。今、$G_1(n,d)=(V,E)$、$G_1(nd,d)=(V',E')$とする。$G_1(n,d)$において式(2.2)で構成された枝を＜i，p＞で表わすことにする($0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq p \leqq d-1$)。即ち、枝$(i,j) \in E$について

$$j \equiv id + p \pmod{n}$$

を満たす時、その枝を＜i，p＞で表わす。また、$G_1(nd,d)$の点は、０から

nd-1の自然数で表わす。今、$G_1(n,d)$の枝＜i，p＞と$G_1(nd,d)$ の点uとの対応関係を次の関数で定義する（図２．８参照）。

$$u = f(i, p) = id + p$$

この対応関数はＥからＶ’への１対１写像になっていることは明らかであり、線グラフの性質２を満たすことを示せばよい。

今、枝$<i_1,p_1>$ の終点と枝$<i_2,p_2>$ の始点が一致したとすると次式が成立する。

$$i_2 \equiv i_1 * d + p_1 \pmod{n}$$

これを変形することにより、

$$i_2 * d + p_2 \equiv (i_1 * d + p_1) d + p_2 \pmod{nd}$$

Ｌ（Ｇ）において枝$<i_1,p_1>$ 枝$<i_2,p_2>$ に対応する点を各々u_1、u_2とすると、対応関数ｆより$u_1=i_1d+p_1$ $u_2=i_2d+p_2$ となり、次式が成立する。

$$u_2 \equiv u_1 * d + p_2 \pmod{nd}$$

従って、G_1 においてu_1 からu_2 への枝が存在することになる。この証明は、逆にもたどれるので、枝$<i_1,p_1>$ の終点と枝$<i_2,p_2>$ の始点が一致した時かつその時に限り、u_1 からu_2 への枝が存在する。

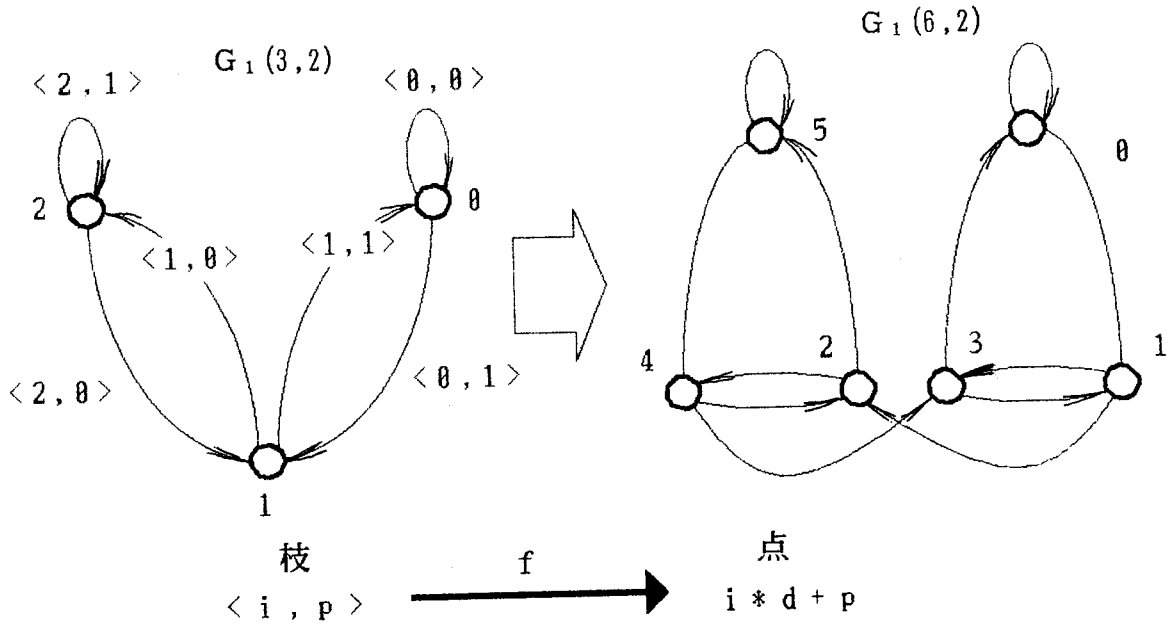


図２．８　$G_1(3, 2)$ と$G_2(6, 2)$ の関係

G_2 についても、$G_2(n,d)$ の枝を＜i，q＞で表し、EからV'への対応関係を次の関数h'とすることにより同様に示せる。

$$h'(i, q) = nd - id - q$$ ■

上記性質の系として次の性質が成立する。

［性質２．４］

$$G_1(d^k, d) = L^{k-1}(\overline{K}_d)$$

$$G_2(d^k + d^{k-1}, d) = L^{k-1}(K_{d+1})$$

ただし、K_{d+1} は点数d＋1の完全グラフ（各点の次数はd）、$\overline{K}_d$ は点数dの完全グラフK_d の各点に自己ループを付加したグラフである。

証明：$G_1(d, d)$ が$\overline{K}_d$、$G_2(d+1, d)$ がK_{d+1} であることと性質２．３より導かれる。 ■

次に、あるグラフGをm回線グラフ変換したグラフ$L^m(G)$ はどのように表現できるかについて考察する。一般に有向グラフ$G=(V_1,E_1)$ において、枝集合E_1はV_1からV_1への１対多写像とみなせる。今この写像をΓとすると枝集合E_1は次のように表わせる。

$$E_1 = \{(x_1\ x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in \Gamma(x_1)\}$$

$L(G) = (V_2,E_2)$ において，$V_2 = E_1$である。また、点$(x_1\ x_2)$ から出ている枝の終点は集合 $\{(x_2\ x_3) \mid x_3 \in \Gamma(x_2)\}$ となる。即ち、点集合V_2、枝集合E_2は次の様に表わせる。

$$V_2 = \{(x_1\ x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in \Gamma(x_1)\}$$

$$E_2 = \{(x_1\ x_2\ x_3) \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in \Gamma(x_1),\ x_3 \in \Gamma(x_2)\}$$

同様にして、$L^m(G) = (V_m,E_m)$ は次のように表わせる。

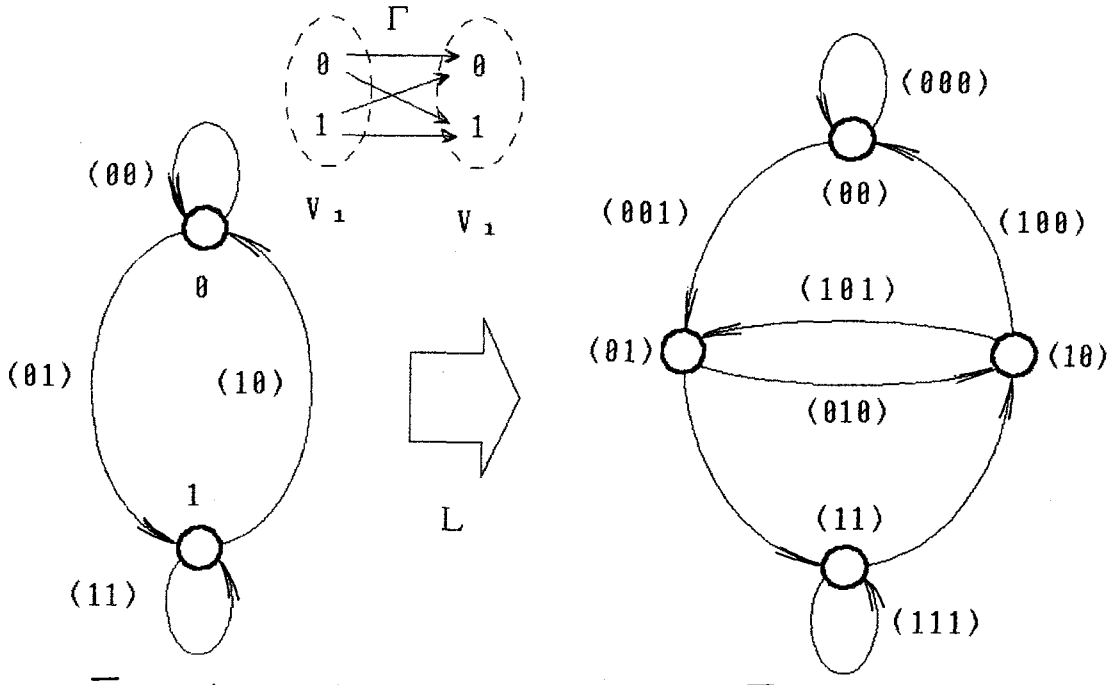
$$V_m = \{(x_1\ x_2\ \ldots x_m) \mid x_1 \in V_1,\ x_{i+1} \in \Gamma(x_i),\ i=1,2,\ldots,m-1\}$$

$$E_m = \{(x_1\ x_2\ \ldots x_{m+1}) \mid x_1 \in V_1,\ x_{i+1} \in \Gamma(x_i),\ i=1,2,\ldots,m\}$$

また、点$(x_1\ x_2\ \ldots x_m)$から出ている枝の終点集合は次のようになる。

$$\{(x_2\ x_3\ \ldots x_m\ x_{m+1}) \mid x_{m+1} \in \Gamma(x_m)\}$$

例えば、$\overline{K}_2 = (V_1,E_1)$ と$L(\overline{K}_2) = (V_2,E_2)$ について示す（図２．９参照）。有向



$\overline{K}_2 = (V_1, E_1)$

$V_1 = \{0, 1\}$

$E_1 = \{<00>, <01>, <10>, <11>\}$

$L(\overline{K}_2) = (V_2, E_2)$

$V_2 = \{<00>, <01>, <10>, <11>\}$

$E_2 = \{<000>, <001>, <010>, <011>, <100>, <101>, <110>, <111>\}$

図2．9　K_2 と $L(K_2)$ の関係

グラフ$\overline{K}_2=(V_1,E_1)$ において、枝集合E_1は$V_1=\{0,1\}$からV_1への１対多写像は次の様になる。

$\Gamma(0)=\{0,1\}$、$\Gamma(1)=\{0,1\}$

枝集合E_1は次のように表わせる。

$E_1=\{(00),(01),(10),(11)\}$

$L(K_2)$において点集合V_2、枝集合E_2は次の様に表わせる。

$V_2=\{(00),(01),(10),(11)\}$

$E_2=\{(000),(001),(010),(011),(100),(101),(110),(111)\}$

$\overline{K}_d=(V_1,E_1)$ では、点集合は$V_1=\{0,1,\ldots,d-1\}$，写像は$\Gamma(x_1)=\{0,1,\ldots,d-1\}$ 、$K_{d+1}=(V_1,E_1)$ では、点集合は$V_1=\{0,1,\ldots,d-1\}$，写像は$\Gamma(x_1)=\{s \mid s=0,1,\ldots,d$ かつ $s\neq x_1\}$ となる。

従って、$G_1(d^k,d)$ $G_2(d^k+d^{k-1},d)$は次のように表現できる。

・$G_1(d^k,d) = L^{k-1}(\overline{K}_d) = (V, E)$

$V = \{(a_1,a_2,\ldots,a_k) \mid a_i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\}$

$E = \{(a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}) \mid a_i \in \{0,1,\ldots,d-1\}\}$

・$G_2(d^k+d^{k-1},d) = L^{k-1}(K_{d+1}) = (V', E')$

$$V' = \{(a_1,a_2,...,a_k) \mid a_i \in \{0,1,...,d\} \quad a_i \neq a_{i+1} (i=1,2,...,k-1)\}$$

$$E' = \{(a_1,a_2,...,a_{k+1}) \mid a_i \in \{0,1,...,d\} \quad a_i \neq a_{i+1} (i=1,2,...,k)\}$$

このようにG_1の点・枝はd進数、G_2はd＋1進数で表現される。また、点間の接続関係はこのシフトにより表現できる。即ち、各点$(a_1,a_2,...,a_k)$からd個の点$(a_2,...,a_k,s)$へ有向枝が存在する（G_1の場合$s=0,1,..,d-1$、G_2の場合$s=0,1,..,d$かつ$s \neq a_k$）。以下では、このグラフ表記法をシフトレジスタ表現と呼ぶことにする。

以上のように、直径最小グラフ$G_1(d^k,d)$，$G_2(d^k+d^{k-1},d)$については、2.2節で提案した線形構成法以外に線グラフ変換及びシフトレジスタ表現によっても構成できることが解った。

De Bruijnは完全回路の存在性と総数を求めるためシフトレジスタ表現により$G_1(d^k,d)$を構成しており、このグラフはDe Bruijnグラフと呼ばれている[38]。また、$G_2(d^k+d^{k-1},d)$は、直径最小化問題の解としてKautzがシフトレジスタ表現により[39]、Reddyが線グラフ変換により[35]各々独立して構成している。線グラフ変換およびシフトレジスタ表現はグラフの性質を検討する上では有効である。しかし、線形構成法が任意の点数に対してグラフを構成出来るのに対して、これらの構成法は限られた点数のグラフしか構成できない欠点がある。

2．6　むすび

本章では、2つの直径最小グラフ$G_1(n,d)$、$G_2(n,d)$の構成法を示し、その特徴について検討した。主な結果は次のとおりである。

(1) G_1、G_2の直径（最大中継段数）は下界値に比べ高々1大きいだけである。また次の場合は下界値に一致する。

$$G_1(n,d): \quad \frac{d^m-1}{d-1} < n \leqq d^m$$

$$G_2(n,d): \quad \frac{d^m-1}{d-1} < n \leqq d^m \quad \text{または} \quad n = d^{m-b}(d^b+1) \quad (b \text{ は奇数})$$

ただし、mは$d^{m-1} < n \leqq d^m$を満たす自然数。

(2) G_1、G_2の平均距離は、下界値に比べ高だか０．３程度大きい事が計算より予想される。

(3) また、従来直径最小グラフとして提案されているグラフ[35, 38, 39]は、G_1、G_2の部分集合となっている。

(4) 本章で提案した構成法は無向グラフを構成する場合も有効であり、nが十分大きい場合には従来のどの構成法よりも直径が小さいグラフを構成できる点で優れている。

今後検討すべき課題として、下界値と上界値を一致させるという困難な問題が残っているが、G_1、G_2は下界値に比べ高々１大きいだけであり、実用上は十分と考えられる。無向グラフについては下界値と上界値の差は大きく[25]、今後の検討が期待される。

第３章　直径最小グラフの連結度

前章では、任意の点数において直径が下界値より高々１大きいグラフが構成できることを示した。本章では、信頼性の１つの評価尺度である連結度について、直径最小グラフ（前述したように直径最小化問題の解として提案されたグラフをこのように呼ぶ。直径が最小とは限らない。）の持つ性質について検討する。連結度は、いくつの点あるいは枝が障害となった時通信が不能になる（道が存在しない点対が生じる）かを示すものであり、連結度が大きいほど信頼性が高いと言える。連結度には点の障害を想定した点連結度と枝の障害を想定した枝連結度がある。従来、直径が小さく連結度の大きいグラフを求めようという立場から、直径最小グラフの連結度について幾つかの研究が行われていた[34-36]。これらの研究は単に構成されたグラフの連結度を調べるものであり、目立った成果は得られていなかった。

本章では、直径と連結度の間に成り立つ一般的関係に着目し、次の２つの不等式を示す。

$$n \leqq \kappa \left(\frac{\Delta^{D} - 1}{\Delta - 1} + \Delta \right) \qquad\qquad n \leqq \lambda \left(\frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} + \Delta + 1 \right)$$

ただし、ｎは点数、Δは最大次数、Ｄは直径、κは点連結度、λは枝連結度である。これより、点数ｎ，最大次数Δを一定とした時、直径Ｄを小さくするにつれて連結度κ、λが大きくなることが保証される。また、この不等式より、次の２つの事実を導く。

① 最大次数Δと点数ｎが与えられた下で、連結度が最大値Δとなるための十分条件示す。

② ２章で構成法を示した直径最小グラフ$G_1(n, d)$及び$G_2(n, d)$の連結度は最大値ｄより高々１小さいだけである。

３．１節では、いくつかの用語を定義した後、直径が小さいグラフの連結度に関する従来の結果を示す。３．２節では、連結度と直径の関係式を導出し、直径を最小化することにより連結度が最大化されることを示す。３．３節では、３．２節の結果を用い$G_1(n, d)$及び$G_2(n, d)$の連結度がｄ－１以上であることを示す。

3．1　用語の定義と従来の結果

3．1．1　用語の定義

通信網における障害を表現するため、点（あるいは枝）の除去という演算を導入する。グラフG＝（V，E）から点vを除去したグラフG－vとは、vを除くGのすべての点及びvにつながっていないすべての枝から構成されるグラフである。また、Gから枝eを除去したグラフG－eとは、Gの全ての点及びe以外のすべての枝から構成されるグラフである。同様に点部分集合$V' \subseteq V$、枝部分集合$E' \subseteq E$を除去した部分グラフを定義でき、これを各々$G-V'$、$G-E'$と表わすことにする。

グラフが連結であるとは、任意の点対（v，w）に対しvからw及びwからvに道が存在することを言う。連結度はグラフの信頼性を表現するパラメータとしてよく用いられる。グラフGの点連結度$\kappa(G)$とは、非連結なグラフかトリビアルなグラフ（1つの点から構成されるグラフ）を作るために除去すべき点の最小個数である。同様に枝連結度$\lambda(G)$は除去すべき枝の最小個数である。つまり、点連結度κがdである事は、任意のd－1個の点が障害となっても障害となっていない任意の点間で通信が可能なことを意味する。また、任意の2点間にd本の点独立な道の存在が保証される。枝連結度λは枝の障害に対し同様の保証をあたえる。連結度κ、λと最小次数δ、最大次数Δの間には次の関係が成立することが知られている。

$$\kappa(G) \leqq \lambda(G) \leqq \delta(G) \leqq \Delta(G) \qquad (3.1)$$

2章で構成法を示した直径最小グラフ$G_1(n, d)$及び$G_2(n, d)$の枝数はndであった。点数n、枝数ndのグラフの最小次数δはd以下であり連結度も高々dとなる。

3．1．2　従来の結果

2章で述べたように$G_1(n, d)$、$G_2(n, d)$及びこれらのグラフの枝の向きを除去した無向グラフも直径最小化問題に対し有効な解であることから、これらのグラフの性質について各種の研究がなされている。Reddy 等は、①$G_1(n, d)$の一部を変更することにより点数nがd^kあるいはd^k+1の時、点連結度d、直径kのグラフを構成できる事[35]及び、②$G_2(n, d)$について、点数がd^k+d^{k-1}の時、点連結度がd

である事を示した[36]。また、 SchlumbergerはG$_1$(n, d) の枝の向きを除いた無向グラフの連結度について、点数nがd^kあるいは$p*d^{k-1}$（pとdは互いに素）の時2d-2以上であることを示した[34]。しかし、これらはすべて特定の点数に対してのみの結果であり、任意の点数のグラフの連結度については解っていない。

3．2　直径と連結度の関係

本節では、H（n，Δ）に属するグラフについて直径と連結度の関係について考察し、連結度を最大化する十分条件を示す。3．2．1では点連結度、3．2．2では枝連結度を取扱う。

3．2．1　点連結度

ここでは、先ず点数n、最大次数Δ、直径D、点連結度κの間に成り立つ不等式を導き（定理3．1）、これより連結度を最大化するための十分条件を示す（性質3．1）。

［定理3．1］　もし、グラフG＝（V，E）において点数がn、最大次数がΔ、直径がD、点連結度が$\kappa \neq 0$であれば、次式が成立する。ただし、$n \geqq \kappa + 2$。

$$n \leqq \kappa \left(\frac{\Delta^D - 1}{\Delta - 1} + \Delta \right) \qquad (3.2)$$

証明：点連結度の定義より、$|V_0| = \kappa$かつ$G - V_0$が非連結となる点部分集合$V_0 \subseteq V$が存在する。これより$G - V_0$において、点集合$V - V_0$を2つの集合V_1、V_2 に分割しV_1の点からV_2の点への枝がないようにすることが可能である（図3．1参照）。即ちGにおいて任意の2点$v_1 \in V_1$、$v_2 \in V_2$に対し、v_1からv_2への道上の点には必ずV_0の点が含まれる。V_0を $\{u_j \mid j = 1, 2, ..., \kappa\}$ とする。

今、証明の都合上、m，$Q(u_j)$を次のように定義する。

$$m = \max_{v \in V_1} \{dis(v, V_0)\} \qquad ただし \quad dis(v, V_0) = \min_{u \in V_0} \{dis(v, u)\}$$

$$Q(u_j) = \{ v \in V_1 \mid dis(v, u_j) \leqq m \} \qquad ただし \quad u_j \in V_0$$

また、V_1の点でV_0との距離がmとなる点の1つをv_1 とする。即ち、$dis(v_1, V_0) = m$ ($v_1 \in V_1$) が成立する点をv_1 とする。

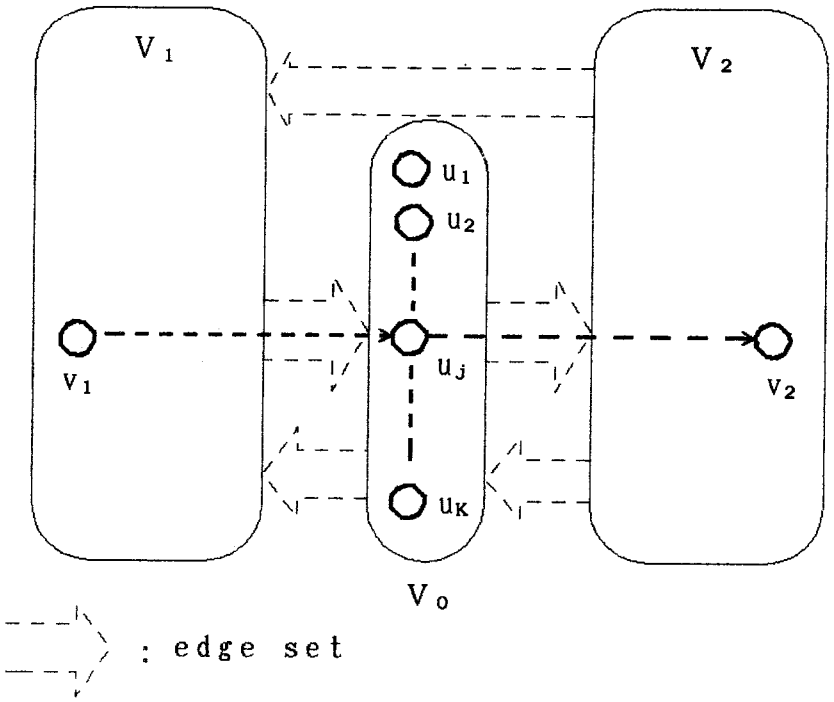


図３．１　点連結度κがとなるグラフに要求される構造

最初にV_1の個数を見積る。$Q(u_j)$はu_jまでの距離がm以下の点の集合であり、各点の入次数はΔ以下であるから、

$$|Q(u_j)| \leqq \Delta + \Delta^2 + \cdots + \Delta^m = \Delta \frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1}$$

となる。V_1に含まれる点は、$Q(u_j)$ $(j=1,2,\ldots,\kappa)$ のどれかに含まれるから

$$|V_1| \leqq |Q(u_1)| + |Q(u_2)| + \ldots + |Q(u_\kappa)| \leqq \kappa \Delta \frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1} \qquad (3.3)$$

となる。

次にV_2の個数を見積る。

今、v_2をV_2に含まれる任意の点とする。直径がDであるから、v_1 からv_2へは長さがD以下の道が存在する（図３．２参照）。

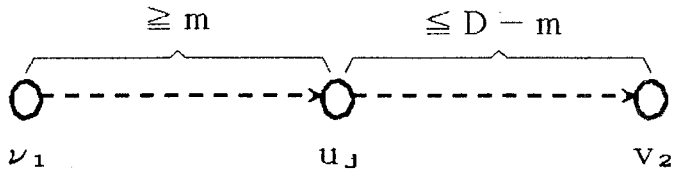


図３．２　v_1からv_2への道

また、その道はV_0の点を含む。従って、v_1,v_2及びある$u_j \in V_0$に対し、

$$dis(v_1,u_j)+dis(u_j,v_2)=dis(v_1,v_2) \leqq D$$

が成立する。v_1 の定義より、$dis(v_1,u_j) \geqq m$であり$dis(u_j,v_2) \leqq D-m$と

なる。つまり、任意の$v_2 \in V_2$はある$u_j \in V_0$から長さD－m以下の道が必ず存在することになる。従って、次式が成立する。

$$|V_2| \leqq \kappa\ (\Delta + \Delta^2 + \cdots + \Delta^{D-m}) = \kappa\Delta\frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1} \qquad (3.4)$$

式(3.3),(3.4) より、

$$n = |V_0| + |V_1| + |V_2| \leqq \kappa\ (1 + \Delta\frac{\Delta^m - 1}{\Delta - 1} + \Delta\frac{\Delta^{D-m} - 1}{\Delta - 1}) \qquad (3.5)$$

関数$f(m) = \Delta^m + \Delta^{D-m}$ は[1,D-1] の範囲で上に凹であり、$1 \leqq m \leqq D-1$となることから、$\Delta^m + \Delta^{D-m} \leqq \Delta + \Delta^{D-1}$ が成立する。この不等式を式(3.5) に代入することにより式(3.2) が得られる。 ■

［性質３．１］点数ｎ、最大次数Δ、直径Ｄの連結グラフＧにおいて、

もし、$n > \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$ならば、　点連結度$\kappa$（Ｇ）は最大値Δとなる。

また、$n > (\Delta - 2)(\frac{\Delta^D - 1}{D - 1} + D)$ ならば、$\kappa(G) \geqq \Delta - 1$となる。

証明：今Ｇの連結度がΔ－１以下と仮定する。定理３．１より、

$$n \leqq \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$$

となり命題に矛盾する。従って、連結度はΔとなる。同様に、Ｇの連結度をΔ－２と仮定すると、

$$n \leqq (\Delta - 2)(\frac{\Delta^D - 1}{\Delta - 1} + \Delta)$$

となり命題に矛盾し、連結度Δ－１以上となる。 ■

上記性質と式(3.1) より、「もし$n > \Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1$であれば、最小次数δと最大次数Δが一致し正則グラフとなる」ことが解る。

３．２．２　枝連結度

枝連結度に関しても、点連結度と同様の議論を展開できる。

［定理３．２］　もし、グラフＧ＝（Ｖ，Ｅ）において点数がｎ、最大次数がΔ、最小次数がδ、直径がＤ、枝連結度が$\lambda \neq 0$であれば、次式が成立する。ただし、λはδ－１以下とする。

$$n \leqq \lambda \left(\frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} + \Delta + 1 \right) \tag{3.6}$$

証明　枝連結度の定義より、$G - E_0$が非連結となるような要素数λの枝部分集合$E_0 \subseteq E$が存在する。これより、$G - E_0$において点集合Vを２つの集合U_1, U_2に分割し、U_1からU_2への枝がないようにすることが可能である。即ち、Gにおいて、任意の２点$v_1 \in U_1$、$v_2 \in U_2$に対し、v_1からv_2への道上の枝には必ずE_0の枝が含まれる。いま、E_0に含まれる枝の始点の集合を$U_0 = \{u_j\}$、終点の集合を$U_0' = \{u_j'\}$ とする（図３．３参照）。

U_0とU_0'は、各々U_1とU_2の部分集合となっており、要素数はλ以下である。

今、証明の都合上、m，$Q(u_j)$を次のように定義する。

$$m = \max_{v \in U_1} \{dis(v, U_0)\} \quad ただし \quad dis(v, U_0) = \min_{u_j \in U_0} \{dis(v, u_j)\}$$

$$Q(u_j) = \{ v \in U_1 \mid dis(v, u_j) \leqq m \} \quad ただし \quad u_j \in U_0$$

また、U_1の点でU_0との距離がmとなる点の１つをv_1とする。即ち、$dis(v_1, U_0) = m$が成立する。

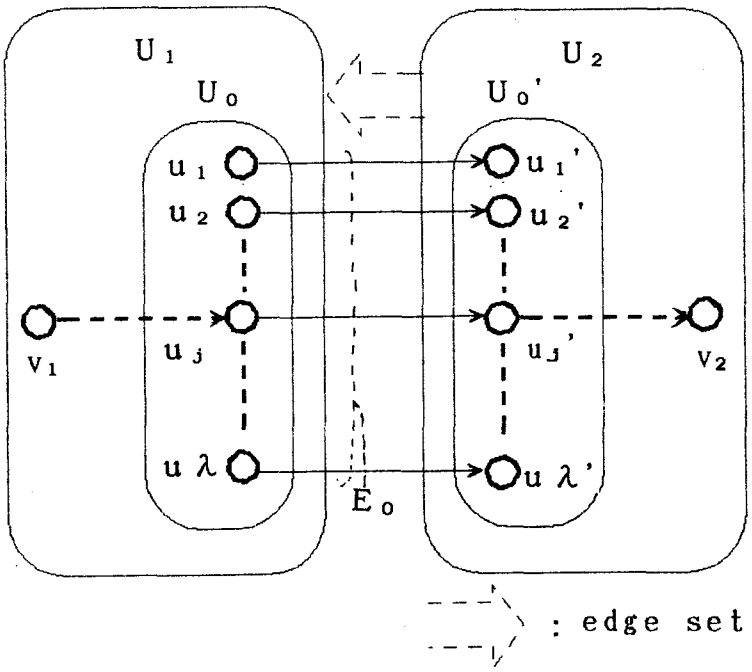


図３．３　枝連結度がλとなるグラフに要求される構造

最初にU_1の個数を見積る。$Q(u_j)$はu_jまでの距離がm以下の点の集合であり、各点の入次数はΔ以下であるから（u_jも含まれることに注意）、

$$|Q(u_j)| \leqq 1+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^m = \frac{\Delta^{m+1}-1}{\Delta-1}$$

となる。U_1に含まれる点は、$Q(u_j)$ $(j=1,2,\ldots,\lambda)$ のどれかに含まれるから

$$|U_1| \leqq \sum_{j=1}^{\lambda} |Q(u_j)| \leqq \lambda\frac{\Delta^{m+1}-1}{\Delta-1} \qquad (3.7)$$

となる。

次にU_2の個数を見積る。今、v_2をU_2に含まれる任意の点とする。v_1 からv_2へは長さがD以下の道が存在する（直径がDより）。

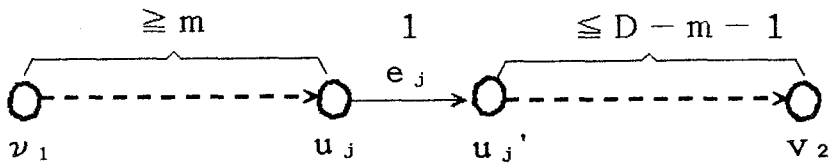


図３．４　v_1 からv_2 への道

また、その道はE_0の枝を含む（図３．４参照）。従って、v_1,v_2及びある$e_j=(u_j,u_j')\in E_0$に対し、

$$dis(v_1,u_j)+1+dis(u_j',v_2) = dis(v_1,v_2) \leqq D$$

が成立する。v_1 の定義より、$dis(v_1,u_j) \geqq m$であり$dis(u_j',v_2) \leqq D-m-1$となる。つまり、任意の$v_2\in V_2$はある $u_j'\in U_0'$ から長さD－m－１以下の道が必ず存在することになる。従って、次式が成立する。

$$|V_2| \leqq \lambda\,(1+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^{D-m-1}) = \lambda\frac{\Delta^{D-m}-1}{\Delta-1} \qquad (3.8)$$

式(3.7),(3.8) より、

$$n=|U_0|+|U_1| \leqq \lambda\left(\frac{\Delta^{m+1}-1}{\Delta-1}+\frac{\Delta^{D-m}-1}{\Delta-1}\right) \qquad (3.9)$$

次に、$1\leqq m\leqq D-2$であることを証明する。mのとりかたから、$0\leqq m\leqq D-1$は明らかである。今、$m=0$と仮定し矛盾を導く。仮定より、$U_1=U_0$となる。従って、U_1の要素数は次式を満たす。

$$1\leqq|U_1|=|U_0| \leqq \lambda$$

今、$E(u_i)=\{(u_i,v)|v\in U_2\}$ とし、$Od(u_i)$を点u_iの出次数とすると、次式が成立する（出次数は点から出ている枝数であるが、自己ループ枝は除く事に注意）。

$$|E_0|=\sum_{u_i\in U_1}E(u_i)\geqq\sum_{u_i\in U_1}(od(u_i)-(|U_1|-1))=|U_1|\times(od(u_i)-(|U_1|-1))$$

条件より枝連結度λはδ－１以下であるので、$od(u_i)\geqq\delta>\lambda$が成立する。従って、

$$|E_0|>|U_1|\times(\lambda-(|U_1|-1))$$

となる。今、右辺を$f(|U_1|)$ とする。U_1のとり方から、$1\leqq|U_1|\leqq\lambda$である。$f(1)=f(\lambda)=\lambda$であり、ｆは上に凸な関数である。$|E_0|>f(|U_1|)\geqq f(1)=\lambda$となり$E_0$のとりかたに矛盾する。従って$m\neq 0$となる。

同様にして、$m\neq D-1$も証明できる。

式(3.9) と$1\leqq m\leqq D-2$より、式(3.6) が得られる。 ■

［性質３．２］点数ｎ、最大次数Δ、最小次数δ、直径Ｄの連結グラフＧにおいて、もし、$n>\Delta^{D-1}+\Delta^2-2$であり$\delta=\Delta$ならば、

枝連結度λ（Ｇ）は最大値Δとなる。

また、$n>(\Delta-2)(\frac{\Delta^{D-1}-1}{\Delta-1}+\Delta+1)$であり$\delta\geqq\Delta-1$ならば、

λ（Ｇ）$\geqq\Delta-1$となる。

証明：性質３．１と同様。 ■

$G_1(n,d)$ 及び$G_2(n,d)$ において、最大次数Δはｄであり$n>\Delta^{D-1}$となる。また最小次数$\delta\geqq\Delta-1$が成立する。従って、性質３．２より、$G_1(n,d)$及び$G_2(n,d)$ の枝連結度がｄ－１以上であることが解る。最小次数δは大抵の場合（すべてのG_1 及び点数が d+1の倍数でないG_2 ）はｄ－１であり、この場合は枝連結度は丁度ｄ－１となる。

３．３　直径最小グラフG_1、G_2 の連結度

３．２節では直径と連結度の関係を考察することにより、連結度を最大化する十分条件を導いた。この十分条件から直径最小グラフG_1、G_2 の枝連結度がｄ－１以上（

たいていの場合はちょうど$d-1$）であることが直接導かれたが、点連結度については十分条件を直接適用しても正しく見積れない。このような場合でも直径が小さいグラフにおいては、直径と連結度の関係を考察することは有効である。本章では、任意の点数に対してG_1、G_2 の点連結度が$d-1$以上であることを示す。

証明の準備として以下の定義を行なう。

<u>定義３．１</u>　グラフ$G=(V, E)$及び点部分集合$V' \subseteq V$において、$S(V')$をV'に含まれる点の子の集合、$P(V')$を親の集合とする。即ち、次のようにおく。

$S(V') = \{ v \mid u \in V' \text{かつ} (u,v) \in E \}$

$P(V') = \{ u \mid v \in V' \text{かつ} (u,v) \in E \}$

<u>定義３．２</u>　グラフ$G=(V, E)$及びある点$v \in V$において、vから長さmの道が存在する点の集合を$J_m(v)$、vへ長さmの道が存在する点の集合を$J_m^-(v)$とする。即ち、次のようにおく（$J_m(v)$については、定義２．１で既に定義している）。

$J_0(v) = \{v\}$　　$J_m(v) = S(J_{m-1}(v))$

$J_0^-(v) = \{v\}$　　$J_m^-(v) = P(J_{m-1}^-(v))$

［性質３．３］　直径準最小グラフ$G_1(n, d)$、$G_2(n, d)$及びこれに含まれる任意の点vにおいて、次式が成立する。

$$|J_m(v)| = d^m \tag{3.10}$$

$$|J_m^-(v)| = d^m \tag{3.11}$$

ただし、mはグラフの直径Dより小さい。

証明：式(3.10)については、２章［定理2.1］［定理2.2］で証明している。最初にグラフ$G_1(n, d) = (V, E)$において式(3.11)が成立することを示す。今、$J_s^-(v)$に含まれる点をu_sとする（$s=1,2,\ldots,m$）と、vとu_sの間には次式が成立する。

$$v \equiv u_1 \times d + a_1 \pmod{n}$$

$$v \equiv u_2 \times d^2 + a_1 \times d + a_2 \pmod{n}$$

$$v \equiv u_3 \times d^3 + a_1 \times d^2 + a_2 \times d + a_3 \pmod{n}$$

$$\vdots$$

$$v \equiv u_m \times d^m + a_1 \times d^{m-1} + \ldots + a_i \times d^{m-i} + \ldots a_{m-1} \times d + a_m \pmod{n}$$

ただし、a_iは０から$d-1$の自然数。

従って、$J_m^-(v)$ は次のように表わせる。

$$J_m^-(v) = \{ u \mid u \times d^m \equiv f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m) \pmod{n},$$
$$0 \leqq a_i \leqq d-1 \quad (i=1,2,\ldots,m) \}$$

ただし、$f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m) = v - \sum_{i=1}^{m} a_i \times d^{m-i}$

関数 f ( ) が$v-d^m+1$ (=f(d-1,d-1,...,d-1)) からv (=f(0,0,..,0)) までの任意の整数値を取ることは明らかである。従って、$u \in J_m^-(v)$ でありかつその時に限り、点 u は次の d^m 個の式のどれかを満たす。

$$\begin{aligned} d^m \times u &\equiv v - d^m + 1 \pmod{n} \\ d^m \times u &\equiv v - d^m + 2 \pmod{n} \\ &\vdots \\ d^m \times u &\equiv v \pmod{n} \end{aligned} \tag{3.12}$$

G_1 では、$n > d^D$ が成立し条件より $m < D$ であるから、$d^m \leqq d^{D-1} < n$ となる。従って、上記 d^m 個の式の右辺の値は全て異なる。

次に、上記 d^m 個の式を u に関する合同方程式と考え、その解の個数を見積る（解の個数は $J_m^-(v)$ の要素数に一致する）。一般に「合同方程式 $p \times x \equiv q \pmod{n}$ において、α を p と n の最大公約数とする。この合同方程式は、q が α の倍数かつその時に限り α 個の解を持つ」ことが知られている[40]。今、α を d^m と n の最大公約数とし、d^m / α を e とする（e は自然数）。上記 d^m 個の合同方程式の右辺は d^m 個の連続した整数値をとるから、d^m 個の合同方程式のうち e 個は α 個の解を持ち、他の $d^m - e$ 個は解を持たない。従って、$J_m^-(v)$ の要素数は $e \times \alpha = d^m$ となり、命題が成立する。

$G_2(n,d)$ の場合、

$$J_m^-(v) = \{ u \mid u \times d^m \equiv g(b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m) \pmod{n},$$
$$1 \leqq b_i \leqq d \qquad (i=1,2,\ldots,m) \}$$

ただし、$g(b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m) = v + \sum_{i=1}^{m} b_i \times (-d)^{m-i}$

となり、同様に証明できる。 ■

性質３．３より次の性質が導かれる。

［性質３．４］$G_1(n,d)$、$G_2(n,d)$において、もし点部分集合V'が$J_m(v)$に含まれ$m+1<D$であるなら、

$$|S(V')| = d \times |V'| \tag{3.13}$$

もし点部分集合V'が$J_m^-(v)$に含まれ$m+1<D$であるなら、

$$|P(V')| = d \times |V'| \tag{3.14}$$

証明：G_1、G_2の任意の点から出ている枝の数はちょうどdであることと性質３．３より明らか。 ■

［定理３．３］$G_1(n,d)$、$G_2(n,d)$において直径Dが４以上であるなら、点連結度κは$d-1$以上である。即ち、

$$\kappa(G_1(n,d)) = d-1$$

$$\kappa(G_2(n,d)) \begin{cases} = d-1 & (n\text{が}d+1\text{の倍数でない時}) \\ = d-1 \text{ または } d & (n\text{が}d+1\text{の倍数である時}) \end{cases}$$

証明：G_1の最小次数δは$d-1$、G_2は点数nが$d+1$の倍数のとき$\delta=d$、それ以外は$d-1$となるので、G_1及びG_2の点連結度が$d-1$以上であることを示せばよい。今、$G_1(n,d)$または$G_2(n,d)$を$G(n,d)=(V, E)$とし、定理３．１と同様にV_0、V_1、V_2、mを定義する。即ち、

① $V_0 \cup V_1 \cup V_2 = V$, $V_0 \cap V_1 = V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_0 = \phi$, $|V_0| = \kappa$

② どの点$v_1 \in V_1$から点$v_2 \in V_2$への任意の道にはV_0の点が１つ以上含まれる。

③ $m = \max_{v_1 \in V_1} \{dis(v_1, V_0)\}$

定理３．１の証明中で示したように次の不等式が成立する（Gの最大次数はd）。

$$|V_1| \leqq \kappa \times d\frac{d^m - 1}{d-1}, \tag{3.3}$$

$$n \leqq \kappa\left(d\frac{d^m-1}{d-1} + 1 + d\frac{d^{D-m}-1}{d-1}\right) \tag{3.5}$$

ただし、$1 \leqq m \leqq D-1$。

ここでは、連結度κが$d-2$以下と仮定し矛盾を導く。mの値を次の５つの

場合に分けて矛盾を導く。

（場合１）$m=1$：不等式(3.3) と$m=1$より$|V_1| \leqq \kappa \times d \leqq d^2 - 2d$となる。

今、$Q_i(v_1) = J_i(v_1) \cap V_1$とし、$v_1$ をV_1に含まれる点とする。V_1からV_2への枝は存在しないから、$S(Q_i(v_1)) \subseteq V_1 \cup V_0$となる。$|V_0| = \kappa \leqq d-2$であるから、

$$
\begin{aligned}
|S(Q_i(v_1)) \cap V_1| &= |S(Q_i(v_1))| - |S(Q_i(v_1)) \cap V_0| \\
&\geqq |S(Q_i(v_1))| - |V_0| \\
&\geqq |S(Q_i(v_1))| - d + 2
\end{aligned}
$$

となる。上記不等式と性質３．４より

$$
\begin{aligned}
|Q_{i+1}(v_1)| &= |J_{i+1}(v_1) \cap V_1| = |S(J_i(v_1)) \cap V_1| \\
&\geqq |S(Q_i(v_1)) \cap V_1| \geqq |S(Q_i(v_1))| - d + 2 \\
&= d \times |Q_i(v_1)| - d + 2 \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

となる（ただし$i+1<D$）。条件より$D \geqq 4$であり、次式が成立する。

$$|Q_0(v_1)| = |\{v_1\}| = 1$$

$$|Q_1(v_1)| \geqq d \times 1 - d + 2 = 2$$

$$|Q_2(v_1)| \geqq d \times 2 - d + 2 = d + 2$$

$$|Q_3(v_1)| \geqq d \times (d+2) - d + 2 = d^2 + d + 2$$

$Q_3(v_1)$はV_1に含まれるから、$|V_1| \geqq d^2 + d + 2$となる。しかしながら、$|V_1| \leqq d^2 - 2d$であり、矛盾する。

（場合２）$m=D-1$：場合１において、$J_i(\ )$を$J_i^-(\ )$, V_1をV_2, V_2をV_1, v_1 をv_2, $S(\ )$ を$P(\ )$ と置換えることにより同様に証明できる。

（場合３）$m=2$：不等式(3.3) と仮定より$|V_1| \leqq d^3 - d^2 - 2d$となる。

今、v_1 をV_1に含まれる点で$dis(v_1, V_0) = 2$となる点の１つとすると、v_1 のd個の子$S(\{v_1\})$ はV_1に含まれる。従って、

$$|Q_1(v_1)| = d$$

式(3.6) より、

$$|Q_2(v_1)| \geqq d \times d - d + 2 = d^2 - d + 2$$

$$|Q_3(v_1)| \geqq d \times (d^2 - d + 2) - d + 2 = d^3 - d^2 + d + 2$$

となり、V_1の要素数は次のように見積れる。

$$|V_1| \geqq |Q_3(v_1)| \geqq d^3 - d^2 + d + 2 > d^3 - d^2 - 2d$$

これは、矛盾である。

（場合４）$m = D - 2$：場合３において、$J_i(\ )$を$J_i^-(\ )$,V_1をV_2, V_2をV_1, v_1 をv_2,$dis(v_1,V_0)=2$ を $dis(V_0,v_2)=2$, $S(\ )$ を$P(\ )$ と置換えることにより同様に証明できる。

（場合５）$3 \leqq m \leqq D - 3$：式(3.5) より

$$n \leqq (d-2)\left(d\frac{d^3-1}{d-1} + 1 + d\frac{d^{D-3}-1}{d-1}\right)$$

しかしながら、直径Ｄが「$\log_d n$」以下であることから$n > d^{D-1}$ であり矛盾する。 ■

３．４　むすび

本章では、直径を最小化する事が結果的に信頼度の評価尺度である連結度を最大化させることを示した。主な結果は次のとおりである。

① 任意のグラフＧの点数ｎ，最大次数Δ、最小次数δ、点連結度κ、枝連結度λ、直径Ｄに対し次の関係が成立する。

$$\kappa \geqq \frac{n(\Delta - 1)}{\Delta^D + \Delta^2 - \Delta - 1} \qquad \lambda \geqq \min\left\{\frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D-1} + \Delta^2 - 2},\ \delta\right\}$$

② ２章で構成法を示した直径最小グラフ$G_1(n,d)$及び$G_2(n,d)$の連結度は最大値ｄより高々１小さいだけである。

残された課題としては、G_1,G_2 と直径の値は同じで連結度が最大値ｄとなるグラフを求めることがある。これに関しては、特定の点数についてはPradhan がG_1 を変形することにより可能であることを示している。任意の点数についても同様の手法により可能である事が予想される。

また、無向グラフについても、直径と連結度の関係について検討することは、高信頼・高能率な網を構成する上で有効であると考えられる。

第４章　直径最小グラフの直径罹障度

前章では、直径最小グラフ$G_1(n,d)$、$G_2(n,d)$の連結度について、最大値ｄより高々１小さいだけであることを示した。つまり、G_1、G_2 は、いくつの点（枝）が障害になっても通信が可能かという意味では、ほぼ最適に近いことが解った。一般に障害時の迂回経路は平常時の経路（最短経路）に比べ長くなるため、網の処理能力が低下する。従って、グラフにおいて点（枝）が障害となった時の直径の値をできるだけ小さくすることは、網トポロジーを検討する上で重要な課題である。

本章では、G_1、G_2 の迂回経路の最大中継段数（即ち直径罹障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

(1) 直径罹障度の下界値は、最大次数Δと点数ｎの関数として導出できる。

(2) De Bruijnグラフ（G_1 で点数d^k、最大次数ｄ、直径ｋのグラフ）、Kautzグラフ（G_2 で点数d^k+d^{k-1}、最大次数ｄ、直径ｋのグラフ）の直径罹障度は、ｋ＋２以下である。また、この値は下界値に比べ高々１大きいだけである。

(3) 障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現できる。

４．１節で直径罹障度の下界値を導き、４．２節で De Bruijnグラフ及び Kautzグラフの性質について述べる。４．３節では上記２つのグラフの直径罹障度を導き、４．４節で下限値と比較する。４．５節では、４．３節の結果をもとにルーチングアルゴリズムの一例を示す。

なお、本章では点の障害についてのみ考察するが、枝の障害についても同様の議論が可能である。

４．１　直径罹障度の性質と下界値

本章では直径罹障度を定義し、最大次数Δと点数ｎが与えられた時の直径罹障度の下界値を導く。

４．１．１　直径罹障度(Diameter Vulnerability)とその性質

グラフG=(V,E) のs-直径罹障度K(s;G) とは、G=(V,E)より任意のｓ個の点を除去したグラフの直径の最大値である。

$$K(s;G) = \max_{|V_{sub}|=s} D(G-V_{sub}) \qquad \text{ただし、} V_{sub} \subseteq V。 \tag{4.1}$$

定義より、s＝0の時はGの直径D(G)と一致する。また、K(s;G)＝∞となる最小のsの値は、連結度と一致する。つまり、K(s;G)は、直径と連結度の二つの概念を統合したものと言える。

連結度の類推から『直径即ち距離を考慮してもMenger型の性質が成り立つか（つまり、K(s;G)≦αの時、グラフGの任意の2点間に長さα以下の道がs＋1本以上存在するか）否か』という問題が考えられる。無向グラフについては、一般に成立しないことが既に知られている[41]。また有向グラフについても同様に示せる。もちろん上記命題の逆（長さα以下の独立な道がs＋1本存在すればK(s;G)≦αとなる。）は明らかに成立する。また、直径罹障度が除去する点数sについて単調増加することは容易に証明できる。また、枝の障害を想定した評価尺度として枝直径罹障度$K_e(s;G)$が考えられる。

$$K_e(s;G) = \max_{|E_{sub}|=s} D(G-E_{sub}) \qquad \text{ただし、} E_{sub} \subseteq E \qquad (4.1)$$

直径罹障度と枝直径罹障度の間には次の関係が成立する。

［性質4．1］任意のグラフGに対して、

$$K_e(s;G) \leqq K(s;G) + 1 \qquad \text{ただし、} K_e(s;G) \neq \infty$$

（証明は略）

4．1．2　直径罹障度の下界値

グラフの最大次数Δが与えられた時、直径罹障度K(s;G)の下界値は次のように見積れる。

［性質4．2］　任意のグラフGの点数がn、最大次数がΔ、直径罹障度K(s;G)がmの時（ただしs＜Δ）、次式が成立する。

$$n \leqq \frac{\Delta^{m+1} - \Delta^2}{(s+1)(\Delta-1)} + \Delta + 1 \qquad (4.2)$$

証明：　Gにおいて出次数がΔの点をuとする。K(s;G)=mとすると、点uから隣接しない点（n-1-Δ個存在する）へ長さm以下の道（必ずしも独立とは限らない）がs＋1本以上存在する。一方最大次数Δのグラフにおいて長さmで到達できる点（長さ1は除く）の数は高々

$$\Delta^2 + \Delta^3 + \ldots + \Delta^m = \frac{\Delta^2(\Delta^{m-1}-1)}{\Delta-1}$$

である。従って、

$$(n-1-\Delta)(s+1) \leqq \frac{\Delta^2(\Delta^{m-1}-1)}{\Delta-1}$$

となる。これを変形することにより、式(4.2) が得られる。 ■

式(4.2) においてｓ＝０とした時、ｍは直径Ｄとなり、右辺は有向 Moore Bound (式(1.2))と一致する。

性質４．２より、

$$m \geqq \lceil \log_{\Delta}((s+1)(n-1-\Delta)(\Delta-1)+\Delta^2)\rceil -1 \qquad (4.3)$$

となる。ただし、「⌉ は切り上げを示す。

これより、s-直径罹障度の下界値$l(s,n,\Delta)$ は次のように定義できる。

$$l(s,n,\Delta) = \lceil \log_{\Delta}((s+1)(n-1-\Delta)(\Delta-1)+\Delta^2)\rceil -1$$

もし、あるグラフＧの直径罹障度$K(s;G)$ の値が$l(s,n,\Delta)$ と一致したならば、グラフＧは、点数ｎ最大次数Δのグラフの中でs-直径罹障度が最小であることが保証される。

４．２　De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの性質

２．５節で示したように$G_1(d^k,d)$ 、$G_2(d^k+d^{k-1},d)$は、各々 De Bruijnグラフ、Kautzグラフと一致し、２．２節の構成法以外に線グラフ変換及びシフトレジスタ表現により構成が可能である。上記２つのグラフは最大次数と直径を与えれば構成できるので、本章では De Bruijnグラフを$G_B(d,k)$、Kautz グラフを$G_K(d,k)$と記することにする。即ち、

$$G_B(d,k) = G_1(d^k,d)$$

$$G_K(d,k) = G_2(d^k+d^{k-1},d)$$

直径罹障度を求めるためにはシフトレジスタ表現が役立つ。

［<u>$G_B(d,k)$のシフトレジスタ表現</u>］

①点の名前：各点の名前をｋ桁ｄ進数$(a_1,a_2,\ldots,a_k)$で表現する。

ただし、$a_i \in \{0,1,...,d-1\}$。

②有向枝の付加：各点（$a_1,a_2,...,a_k$）から、d個の点（$a_2,...,a_k,s$）へ有向枝を付加する。　　ただし、$s=0,1,..,d-1$。

［$G_K(d,k)$のシフトレジスタ表現］

①点の名前：各点の名前をk桁d＋1進数($a_1,a_2,..,a_k$) で表現する。

ただし、$a_i \in \{0,1,...,d\}$　かつ$a_i \neq a_{i+1}$　$(i=1,2,...,k-1)$ 。

②有向枝の付加：各点（$a_1,a_2,...,a_k$）から、d個の点（$a_2,...,a_k,s$）へ有向枝を付ける。　　ただし、$s=0,1,..,d$　かつ $s \neq a_k$。

$G_B(d,k)$の点数はd^k,連結度はd－1、$G_K(d,k)$の点数はd^k+d^{k-1} 連結度はdであり、ともに直径はkである。図4．1に$G_B(3,2)$、図4．2に$G_K(2,2)$を示す。G_B内の自己ループは、通信網に適用する際は除去するが、議論の都合上自己ループを含んだものをDe Bruijn グラフと呼ぶことにする。　上記の表記法では、長さhの道はk＋h桁の系列で一意に表現できる。たとえば、$G_K(2,2)$において点(01)から点(20)への最短道（長さ２）は、[0120]となる。枝はk+1 桁の系列で表現できる。以下では、区別のため、点は（）、道は［］、枝は＜＞で括り、各々点表現、道表現、枝表現と呼ぶ。

k+h桁の道表現において、k桁(k+1桁) の部分系列は道に含まれる点（枝）を示している。たとえば、$G_K(2,2)$において、道[0120]に含まれる点は(01),(12),(20)であり、含まれる枝は<012>,<120> である。

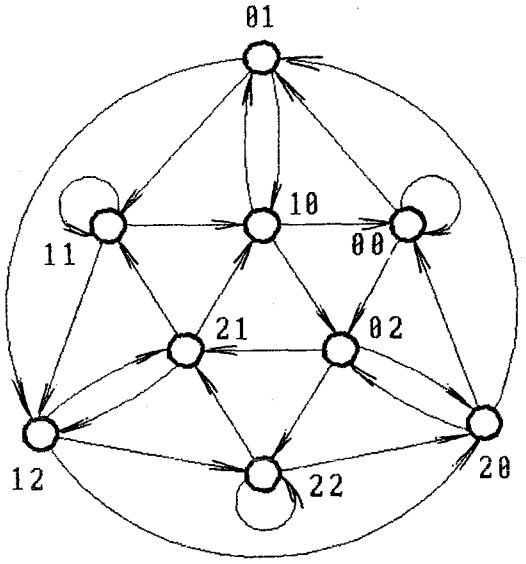
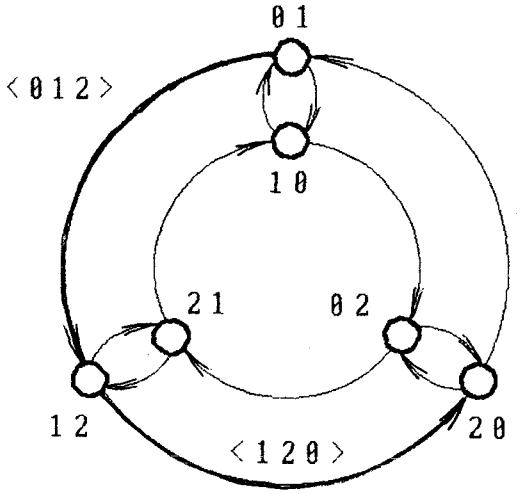


図4．1　$G_B(3,2)$　($G_1(9,3)$)



Thick lines: walk[0120]

図4．2　$G_K(2,2)$　($G_2(6,2)$)

4．3　De Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度

本章では、De Bruijn グラフ$G_B(d,k)$、 Kautzグラフ$G_K(d,k)$のs-直径罹障度について、

$$K(s;G_B(d,k)) = k+1 \quad (s=1,\ldots,d-2) \tag{4.4}$$

$$K(s;G_K(d,k)) \begin{cases} = k+1 & (s=1,\ldots,d-3) \\ \leqq k+2 & (s=d-2,d-1) \end{cases} \tag{4.5}$$

ただし、$k \geqq 2$.

となることを示す。これ以外のｓに対する直径罹障度については、直径がｋであることから

$K(0;G_B(d,k)) = k$　　$K(0;G_K(d,k)) = k$、

点連結度$\kappa(G_B(d,k))$ がｄ－１，$\kappa(G_K(d.k))$ がｄであることから

$K(s;G_B(d,k)) = \infty \quad (s \geqq d-1)$　　$K(s;G_K(d,k)) = \infty \quad (s \geqq d)$

となる。また、ｋ＝１の時は

$K(s;G_B(d,1)) = 2 \quad (s=1,\ldots,d-2)$　　$K(s;G_K(d,1)) = 2 \quad (s=1,\ldots,d-1)$

となる。

Esfanianらは De Bruijnグラフの枝の向きを除去した無向グラフG_B'について、

$$K(s;G_B'(d,k)) \begin{cases} \leqq k+3+\log_d k & (1 \leqq s \leqq d-2) \\ \leqq k+5+\log_d k & (d-1 \leqq s \leqq 2d-3) \end{cases}$$

を示した[28]。また、Kumar らは Kautzグラフの枝の向きを除去した無向グラフG_K'について、

$$K(s;G_K'(d,k)) \begin{cases} \leqq k+4s & (1 \leqq s \leqq d-1) \\ \leqq 3k+6s & (d \leqq s \leqq 2d-1) \end{cases}$$

を示した[29]。一般に枝の向きを除去した無向グラフの直径罹障度はもとの有向グラフの直径罹障度以下であり、本章の結果は(G_B については $1 \leqq s \leqq d-2$ の範囲で、G_Kについては $1 \leqq s \leqq d-1$ の範囲で）従来より優れた見積りである。

4．3．1　De Bruijn グラフの直径罹障度

隣接しない任意の２点ｕからｖへの距離をｈ（２≦ｈ≦ｋ）とすると、ｕ，ｖは次

のような点表現で表せる（直径kより、$h \leqq k$）。

$u = (a_h \ldots a_2 a_1 c_1 c_2 \ldots c_{k-h})$

$v = \qquad\qquad (c_1 c_2 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h)$

ただし、$a_1 \neq b_1$。

uからvへd－1本の道を次のようにとる。これらの道が互いに独立であれば、式(4.4)が成立する。

［<u>d－1本の道</u>］　今、uからvに対して1本の最短道P、d-2本の長さk+1の道Qsを次のようにとる。

$P = [a_h \ldots a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h]$

$Q_1 = [a_h \ldots a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-h} x_1 c_1 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h]$

$Q_2 = [a_h \ldots a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-h} x_2 c_1 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h]$

$\vdots$

$Q_s = [a_h \ldots a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-h} x_s c_1 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h]$

$\vdots$

$Q_{d-2} = [a_h \ldots a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-h} x_{d-2} c_1 \ldots c_{k-h} b_1 b_2 \ldots b_h]$

ただし、$a_1, b_1, x_1, x_2, \ldots, x_{d-2}$ は互いに異なる（これはd－1本の道上で最初に現れる枝同士及び最後に現れる枝同士が互いに異なることを意味する）。

まず、uからvへの距離が2（h＝2）となる2点u，vに対する道P、Qs(s=1,..,d-2)が互いに独立であることを示す。h＝2よりuからvへの道は、

$P = [a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-2} b_1 b_2]$

$Q_s = [a_2 a_1 c_1 \ldots c_{k-2} x_s c_1 \ldots c_{k-2} b_1 b_2]$

となる。

［補題4．1］グラフ$G_B(d,k)$ $(k \geqq 3)$の2点x，yが次の点表現となる時、xとyは異なる。

$x = (c_0 \quad c_1 \ldots c_{k-i-1} c_{k-i} \quad c_{k-i+1} \ldots c_{k-2} c_{k-1})$

$y = (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} \quad c_{k-1}' c_1 \ldots\ldots c_{i-2} c_{i-1})$

ただし、$k \geqq 3$、$2 \leqq i \leqq k-1$、$c_{k-1} \neq c_{k-1}'$。

証明：　今、ｘとｙが同じ点であると仮定して矛盾を導く。仮定(x=y) より次のｋ個の等式が成立する。

$$c_0=c_{i-1}, c_1=c_i, \ldots, c_{k-i-1}=c_{k-2}, c_{k-i}=c_{k-1}', \ldots, c_{k-2}=c_{i-2}, c_{k-1}=c_{i-1}$$

ここで、$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k-1}'$を点とし、上記ｋ個の等式を点間の有向枝（左辺の点から右辺の点への枝）で表したグラフを考える。以下では、このグラフを等号グラフ(Equivalence Relation Graph)と呼ぶ。等号グラフにおいて弱連結（枝の向きを除いた無向グラフにおいて連結）である点の値はすべて等しいことになる。

上記ｋ個の等式において、c_0とc_{k-1}は左辺に１回、c_{k-1}' は右辺に１回、c_{i-1}は左辺に１回右辺に２回現れる。それ以外の点は左辺に１回右辺に１回現われる。従って、等号グラフにおいてc_0とc_{k-1}は出次数１、c_{k-1}' は入次数１、c_{i-1}は入次数２出次数１、それ以外の点は入次数１出次数１となる。またc_0からc_{i-1}、c_{k-1}からc_{i-1}への枝がある（図４．３参照）。

$c_0, c_{i-1}, c_{k-1}, c_{k-1}'$以外の点は入次数１出次数１であることから$c_{i-1}$から$c_{k-1}'$ には必ず道がある。従って、c_{k-1}とc_{k-1}'に道が存在し、$c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ に矛盾する。

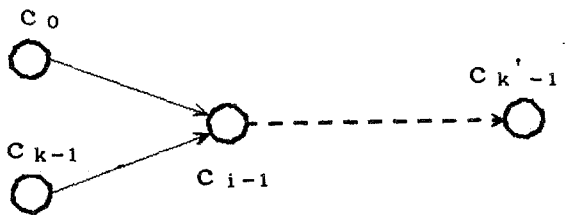


図４．３　等号グラフにおいて点c_{i-1} を含む連結成分の構造

■

［性質４．３］$G_B(d,k)$において、dis(u,v)=2なる点ｕからｖへの道Ｐと道Ｑs は独立である。

証明：　図４．４に示すように、道$P=[a_2a_1c_1\ldots c_{k-2}b_1b_2]$上の点をp 、道$Q_s = [a_2a_1c_1\ldots c_{k-2}x_sc_1\ldots c_{k-2}b_1b_2]$ 上の点を$q_{s,i}$ $(i=1,2,\ldots,k)$とすると、p と$q_{s,i}$の点表現は次のようになる。

$$p = (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1)$$

$$q_{s,i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} x_s) & i=1\text{の時} \\ (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} x_s c_1 \ldots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2,\ldots k-1\text{の時} \\ (x_s c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1) & i=k\text{の時} \end{cases}$$

点 pと$q_{s,i}$が異なることを示せばよい。$b_1 \neq x_s$より点p と$q_{s,1}$は異なり、$a_1 \neq x_s$より点p と$q_{s,k}$は異なることが解る（$k=2$ の場合はこれ以外の点の組は存在せず証明は終り）。点p と$q_{s,i}$ $(i=2,\ldots,k-1)$については、a_1をc_0, b_1をc_{k-1}, x_sをc_{k-1}'と置くと$c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ となり、補題1より異なることが示せる。 ■

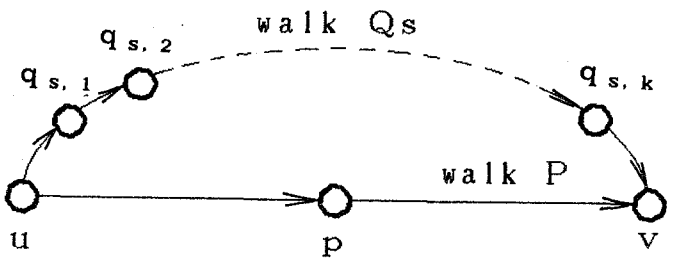


図4．4　道PとQ$_s$ の関係

［性質4．4］　$G_B(d,k)$において、$dis(u,v)=2$なるuからvへの道Qs とQt $(s \neq t)$は独立である。

証明：　Qs 上の点を$q_{s,i}$、Qt 上の点を$q_{t,j}$とすると点表現は次のようになる。

$$q_{s,i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} x_s) & i=1 \text{ の時} \\ (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} x_s c_1 \ldots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2,\ldots k-1 \text{ の時} \\ (x_s c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1) & i=k \text{ の時} \end{cases}$$

$$q_{t,j} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} x_t) & j=1 \text{ の時} \\ (c_{j-1} c_j \ldots c_{k-2} x_t c_1 \ldots c_{j-2} c_{j-1}) & j=2,\ldots k-1 \text{ の時} \\ (x_t c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1) & j=k \text{ の時} \end{cases}$$

$i \leqq j$としても一般性を失わない。$x_s \neq x_t$より$q_{s,i} \neq q_{t,i}$ $(i=1\ldots k)$となり、$a_1 \neq x_t$より$q_{s,1} \neq q_{t,k}$となる（$k=2$ の場合は証明終り）。点$q_{s,1} \neq q_{t,j}$ $(j=2,\ldots,k-1)$については、a_1をc_0, x_sをc_{k-1}, x_tをc_{k-1}' と置き補題1を適用して示せる。

$q_{s,i}$と$q_{t,j}$ $(i=2,\ldots k-1、j=2,\ldots,k-1、i<j)$については、補題1と同様に等号グ

ラフをつくる。x_sは出次数１、x_tは入次数１、その他の点は出次数１入次数１（ただしc_{i-1}からc_{j-1}へは２本の枝が存在する）となる。従って、x_sからx_tには道が存在し$x_s \neq x_t$に矛盾する。

$q_{s,i}$と$q_{t,k}$(i=2,..k-1) については、x_sをc_{k-1}'、x_tをc_0，b_1をc_{k-1}とし補題１より$q_{s,i} \neq q_{t,k}$となる。 ■

上記２つの性質から、距離が２となる点ｕからｖへのｄ－１本の道が互いに独立であることが示せた。これより任意の点間の道が互いに独立であることが示せる。

［定理４．１］De Bruijn グラフ$G_B(d,k)$（$k \geqq 2$）において、dis(u,v)≠１なる点ｕからｖへの道P 、Qs(s=1,2,...,d-2) は互いに独立である。すなわち、点直径罹障度について次式が成立する。

$$K(s;G_B) \leqq k+1 \quad (s=1,\ldots,d-2) \tag{4.6}$$

証明：　ｋに関する帰納法で示す。

①ｋ＝２の時：$G_B(d,2)$においてdis(u,v)≠１なる点ｕからｖへの距離は２であるから、性質２、３より成立する。

②ｋ＝ｍの時成立すると仮定し、ｋ＝ｍ＋１の時成立する事を示す。

$G_B(d,m+1)$においてdis(u,v)=m+1-h≧２(h≦m-1)なる任意の点ｕ、ｖの点表現を、次のようにする。

$$u = (a_{m+1-h}a_{m-h}\ldots a_1c_1c_2\ldots c_{h-1}c_h)$$

$$v = (c_1c_2\ldots\ldots c_hb_1b_2\ldots b_{m-h}b_{m+1-h})$$

G_B の直径はｍ＋１であり m+1-h≦m+1 となる。これとｈのとりかたより、０≦ｈ≦ｍ－１となる。

ⓐ　ｈ＝m-1 の時は、dis(u,v)=2となり性質２、３よりｄ－１本の道は独立である。

ⓑ　０≦ｈ≦m-2 の時

$G_B(d,m)$において、次の２点ｕ”、ｖ”を考える（ｕ”はｕの点表現の最左１桁を除きｍ桁としたもの、ｖ”はｖの最右１桁を除いたもの）。

$$u'' = (a_{m-h}\ldots a_2a_1c_1c_2\ldots c_h)$$

$$v'' = (c_1c_2\ldots c_hb_1b_2\ldots b_{m-h})$$

$h \leqq m-2$より、u”からv”への距離は2以上となる。

また、u”からv”へのd－1本の道をP"、Qs"(s=1,...d-2) とする。道の取り方より、P"の道表現はPの道表現より最左1桁及び最右1桁を除いたものとなり、Qs" の道表現はQsの道表現より最左1桁及び最右1桁を除いたものとなる。P 、Qs上の任意の2点をx，yとする。ただしxとyは、道の端点でなく同一の道上にない。x，yの点表現は、P"、Qs"上の枝表現（m＋1桁となる）の中に一致するものが必ず存在する（図4．5参照）。その枝をx”、y”とする。P"、Qs" が互いに独立であることから、x”とy”の枝表現は異なり、点xとyの点表現は異なる。従って、点x、yは異なりP 、Qsは互いに独立である。QsとQt(s≠t)が互いに独立であることも同様に示せる。 ■

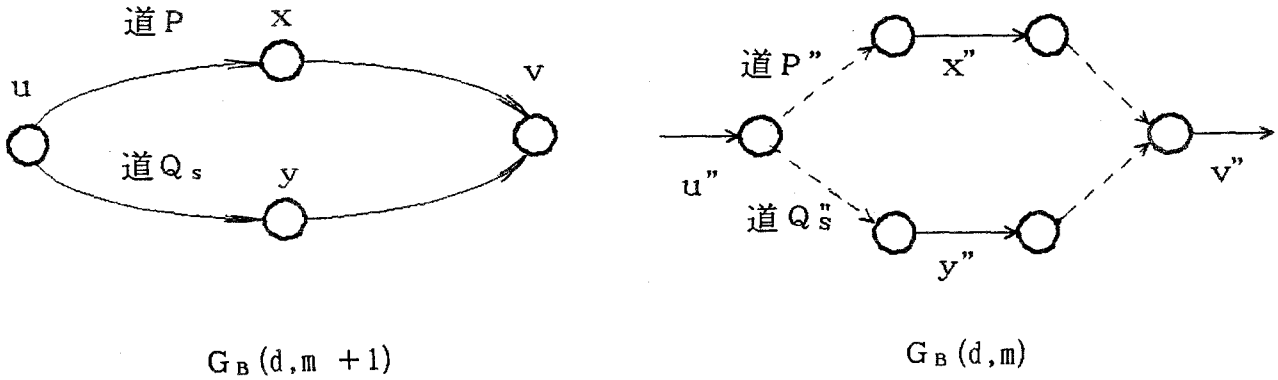


図4．5　$G_B(m+1,d)$の点と$G_B(m,d)$の枝の対応関係

4．3．2　Kautzグラフの直径罹障度

KautzグラフGK(d,k)の直径罹障度についてもDe Bruijn グラフとほぼ同様に示せる。ただ、点表現の隣合う桁が異なるため、道のとり方が異なる。

［d本の道］　点u＝$(a_h...a_2a_1c_1c_2...c_{k-h})$からv＝$(c_1c_2...c_{k-h}b_1b_2...b_h)$への道を次のようにとる。

$P=[a_h...a_1c_1...c_{k-h}b_1...b_h]$

$Qs=[a_h...a_1c_1...c_{k-h}x_sc_1...c_{k-h}b_1...b_h]$　　s=1,2,...,d-3

$Rt=[a_h...a_1c_1...c_{k-h}y_tz_tc_1...c_{k-h}b_1...b_h]$　　t=d-2,d-1

ただし、$b_1,c_{k-h},x_1,...,x_{d-3},y_{d-2},y_{d-1}$ は互いに異なり、$a_1,c_1,x_1,...,x_{d-3}$,

z_{d-2}, z_{d-1} も互いに異なる。まず、uからvへの距離が2（h＝2）となる2点u，vに対する道P、Qs、Rtについて、道上の点を各々$p, q_{s,i}, r_{t,j}$ とする。各点の点表現は次のようになる。

$$p = (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1)$$

$$q_{s,i} = \begin{cases} (a_1 c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} x_s) & i=1\text{の時} \\ (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} x_s c_1 \ldots c_{i-2} c_{i-1}) & i=2,\ldots k-1\text{の時} \\ (x_s c_1 c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1) & i=k\text{の時} \end{cases}$$

$$r_{t,j} = \begin{cases} (a_1 c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} y_t) & j=1\text{の時} \\ (c_{j-1} \ldots c_{k-2} y_t z_t c_1 \ldots c_{j-2}) & j=2,\ldots k\text{の時} \\ (z_t c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{k-2} b_1) & j=k+1\text{の時} \end{cases}$$

［補題4．2］グラフ$G_K(d,k)$ $(k \geqq 3)$の2点x，yが次の点表現となる時、xとyは異なる。

$$x = (c_0 \quad c_1 \ldots c_{k-i-1} c_{k-i} \quad c_{k-i+1} \ldots c_{k-2} c_{k-1})$$

$$y = (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} \quad c_{k-1}' c_1 \ldots\ldots c_{i-2} c_{i-1})$$

ただし、$c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ かつ$2 \leqq i \leqq k-1$。

証明：補題1と同様に証明できる。 ■

［補題4．3］グラフ$G_K(d,k)$ $(k \geqq 2)$の2点x，yが次の点表現となる時、xとyは異なる。

$$x = (c_0 \quad c_1 \ldots c_{k-i-1} c_{k-i} \quad c_{k-i+1} c_{k-i+2} \ldots c_{k-1})$$

$$y = (c_{i-1} c_i \ldots c_{k-2} \quad c_{k-1}' c_0' \quad c_1 \ldots\ldots c_{i-2})$$

ただし、$c_0 \neq c_0', c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ かつ$2 \leqq i \leqq k$。

証明：k＝2の時は明らかであり、k≧3とする。x＝yと仮定し矛盾を導く。xの各桁をc_p $(p=0,1\ldots k-1)$ とすると、仮定より次のk個の等式が成立する。

$p=k-i, k-i+1$ の時 $c_p = c_q'$

$p \neq k-i, k-i+1$ の時 $c_p = c_q$

ただし $p+(i-1) \equiv q \pmod{k}$ (4.7)

上記k個の等式x＝yを表現する等号グラフを考えると、点c_0とc_{k-1}は出次数1、c_0'とc_{k-1}'は入次数1、その他の点は入次数1出次数1となる。等号

グラフの各点の次数から、$c_0, c_0', c_{k-1}, c_{k-1}'$ の等号関係は次の２つの場合に限られる。

（場合１）$c_0 = c_0' \neq c_{k-1} = c_{k-1}'$

$c_0 \neq c_0'$ に矛盾する。

（場合２）$c_0 = c_{k-1}' \neq c_0' = c_{k-1}$

c_0とc_1、 c_0'とc_1は各々ｘ、ｙの点表現で隣接するから $c_0' \neq c_1$, $c_0 \neq c_1$である。従って、c_0, c_0', c_1 は互いに異なり、等号グラフは３つ以上の連結成分が存在する。その１つは、$c_0, c_0', c_{k-1}' c_{k-1}$は含まず$c_1$を含み入次数１出次数１の点のみで構成されており、有向ループとなる。等号グラフの点数はk+2 であり、有向ループ上の点数はk-2 以下である。有向ループ上の点をc_x、ループ上の点数をｍとすると、式(4.6) より

$$x + (i-1) \cdot m \equiv x \pmod{k}$$

$$(i-1) \cdot m \equiv 0 \pmod{k} \qquad (4.8)$$

が成立する。また、$c_{k-1} = c_0'$ よりある値ｍ' が存在し、

$$k - 1 + (i-1) \cdot m' \equiv 0 \pmod{k}$$

$$(i-1) \cdot m' \equiv 1 \pmod{k}$$

が成立し、ｉ－１とｋの最大公約数は１となる。　従って、式(4.7) より

$$m \equiv 0 \pmod{k}$$

が導かれ、ループ上の点数ｍがｋの倍数となる。これは、ループの点数がk-2 以下であることに矛盾する。 ■

［性質４．５］$G_K(d,k)$において、dis(u,v)=2なる点ｕからｖへの道Ｐと道Qsは独立である。

証明：性質４．３と同様。 ■

［性質４．６］$G_K(d,k)$において、dis(u,v)=2なる点ｕからｖへの道ＰとRtは互いに独立である。

証明：点 pと点$r_{t,j}$(j=1..k+1)が異なることを示せばよい。両者の点表現は次のとお

りである。

$p = (a_1 c_1 c_2 \ldots c_{k-2} b_1)$

$$\begin{cases} r_{t,1} = (a_1 c_1 \ldots c_{k-2} y_t) \\ r_{t,j} = (c_{j-1} \ldots c_{k-2} y_t z_t c_1 \ldots c_{j-2}) & j=2,..k\text{の時} \\ r_{t,k+1} = (z_t c_1 \ldots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$b_1 \neq y_t$より $p \neq r_{t,1}$、$a_1 \neq z_t$より $p \neq r_{t,k+1}$となる。 $p \neq r_{t,j}(j=2\ldots k)$については、$a_1$を$c_0$、$b_1$を$c_{k-1}$、$y_t$を$c_{k-1}'$、$z_t$を$c_0'$ と置けば、$c_0 \neq c_0'$、$c_{k-1} \neq c_{k-1}'$ となり補題３より示せる。 ■

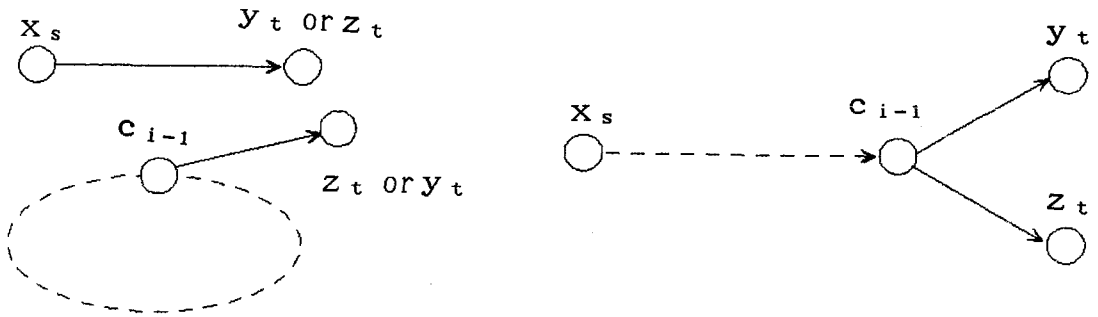
［性質４．７］$G_K(d,k)$において、$dis(u,v)=2$なる点ｕからｖへの道Q_sとR_tは独立である。

証明：点$q_{s,i}$と$r_{t,j}(i=1\ldots k, j=1\ldots k+1)$ が異なることを示せばよい。

$$\begin{cases} q_{s,1} = (a_1 c_1 \ldots c_{k-2} x_s) \\ q_{s,i} = (c_{i-1} \ldots c_{k-2} x_s c_1 \ldots c_{i-1}) & i=2,..k-1 \\ q_{s,k} = (x_s c_1 \ldots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{t,1} = (a_1 c_1 \ldots c_{k-2} y_t) \\ r_{t,j} = (c_{j-1} \ldots c_{k-2} y_t z_t c_1 \ldots c_{j-2}) & j=2,..k \\ r_{t,k+1} = (z_t c_1 \ldots c_{k-2} b_1) \end{cases}$$

$q_{s,1} \neq r_{t,j}$、$q_{s,k} \neq r_{t,j}(j=1\ldots k+1)$ については、各々x_sをb_1に、x_sをa_1に置換え性質４．６と同様に示せる（ｋ＝２の時は証明終り）。また、$q_{s,i} \neq r_{t,1}$ $(i=2..k-1)$については、x_sをc_{k-1}' 、a_1をc_0、y_tをc_{k-1}とし補題４．２より導ける。$q_{s,i} \neq r_{t,k+1}(i=2..k-1)$についても、同様に補題４．２より導ける。従って、$q_{s,i} \neq r_{t,j}(i=2\ldots k-1, j=2\ldots k)$ を示せばよい。$q_{s,i} = r_{t,j}$と仮定し等号グラフを作る。x_sは出次数１、y_tとz_tは入次数１、c_{i-1}は入次数１出次数２その他の点は入次数１出次数１となり、x_s，c_{i-1}を含む等号グラフの連結成分は図４．６に示す２つの場合に限られる。従って、x_sからy_t（またはz_t）への道が存在し$x_s \neq y_t$（または$x_s \neq z_t$）に矛盾する。 ■



場合　1　　場合　2

図４．６　等号グラフにおいて点X_sと点c_{i-1}を含む連結成分の構造

［性質４．８］ $G_I(d,k)$において、dis(u,v)=2なるｕからｖへの道QsとQt（ｓ≠ｔ）は独立である。

証明：性質４．４と同様。 ■

［性質４．９］　dis(u,v)=2なるｕからｖへの道RsとRt（ｓ≠ｔ）は独立である。

証明：点$r_{s,i}$と$r_{t,j}$(i=1...k+1,j=1...k+1) が異なることを示せばよい。

$$\begin{cases} r_{s,1} = (a_1c_1....c_{k-2}y_s) \\ r_{s,i} = (c_{i-1}...c_{k-2}y_sz_sc_1...c_{i-2}) & i=2,..k\text{の時} \\ r_{s,k+1} = (z_sc_1....c_{k-2}b_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{t,1} = (a_1c_1....c_{k-2}y_t) \\ r_{t,j} = (c_{j-1}...c_{k-2}y_tz_tc_1...c_{j-2}) & j=2,..k\text{の時} \\ r_{t,k+1} = (z_tc_1....c_{k-2}b_1) \end{cases}$$

ｉ≦ｊと仮定しても一般性を失わない。$r_{s,1} \neq r_{t,j}$(j=1...k+1) はy_sをb_1と置けば性質４．６と同様に証明できる。$r_{s,i} \neq r_{t,i}$(i=2...k) は$y_s \neq y_t$より導ける。$r_{s,i} \neq r_{t,j}$(i=2...k,j=2...k+1,i<j) は，y_sをc_{k-1}、z_sをc_0、y_tをc_{k-1}'、z_tをc_0'と置き換え両者の点表現をｋ－ｉ桁左へシフトする事により、補題４．３より導出できる。また、$r_{s,k+1} \neq r_{t,k+1}$は$z_s \neq z_t$より導出できる。

■

上記５つの性質より、距離が２となる点ｕからｖへｄ本の道が互いに点独立であることが示せた。これより、次の定理が導かれる。

［定理４．２］　Kautzグラフ$G_K(d,k)$（$k \geqq 2$）において、$dis(u,v) \neq 1$なる点uからvへの道P 、Qs、Rtは互いに独立である。また、点直径罹障度について次式が成立する。

$$K(s;G_K(d,k)) \leqq k+1 \quad (s=1,\ldots,d-3)$$

$$K(s;G_K(d,k)) \leqq k+2 \quad (s=d-2,d-1) \tag{4.9}$$

証明：定理１と同様。 ■

４．４　下界値の比較

本節では、４．１．２章で導いた下界値$l(s,n,d)$と前節で導いた直径罹障度を比較する。

De Bruijn グラフ$G_B(d,k)$の点数はd^k、Kautzグラフ$G_K(d,k)$の点数はd^k+d^{k-1}であり、これらの点数の時の直径罹障度の下界値を求めると、次のようになる。

$$l(s,d^k,d) = \lceil \log_d((s+1)(d^k-1-d)(d-1)+d^2) \rceil -1$$

$$= \lceil \log_d(d^{k+1}+sd^k(d-1-1/s-1/d^{k-1}+(s+1)/sd^k)) \rceil -1 \quad (= \lceil k+1+\epsilon \rceil -1)$$

$$= \lceil \log_d(d^{k+1}(1+s-s/d-1/d-(ds-s-1)/d^{k+1})) \rceil -1 \quad (= \lceil k+2-\epsilon \rceil -1)$$

$$= k+2-1 = k+1 \quad (\text{ただし } d \geqq 3、1 \leqq s \leqq d-2)$$

$$l(s,d^k+d^{k-1},d) = \lceil \log_d((s+1)(d^k+d^{k-1}-1-d)(d-1)+d^2) \rceil -1 \quad (= \lceil k+1+\epsilon \rceil -1)$$

$$= \lceil \log_d(d^{k+1}+sd^k(d-1/d-1/sd-1/d^{k-1}+(s+1)/sd^k)) \rceil -1 \quad (= \lceil k+2-\epsilon \rceil -1)$$

$$= \lceil \log_d(d^{k+1}(1+s-1/d^2-(ds-s-1)/d^{k+1})) \rceil -1$$

$$= k+2-1 = k+1 \quad (\text{ただし } d \geqq 2、1 \leqq s \leqq d-1)$$

従って、定理４．１、４．２内の式(4.6),(4.9) より、

$$K(s;G_B(d,k)) = l(s,d^k,d) \qquad s=1,..d-2$$

$$K(s;G_K(d,k)) = l(s,d^k+d^{k-1},d) \qquad s=1,..d-3$$

$$\leqq l(s,d^k+d^{k-1},d)+1 \qquad s=d-2,d-1$$

となり、De Bruijn グラフおよび Kautzグラフの直径罹障度は下界値に比べ高々１大きいだけである。

また、下界値と一致した場合は、式(4.6),(4.9) の不等号は成立せず式(4.4),(4.5) が導かれる。

４．５　ルーチングアルゴリズム

計算機網においては、通信のための径路選択（ルーチング）アルゴリズムが必要となる。特にビルディングブロック型のマルチプロセッサシステムでは各点（マイクロプロセッサ）の処理能力が小さいため、簡単なルーチング・アルゴリズムでなければならない。

De Bruijn グラフ及び Kautzグラフでは、４．３節の検討より簡単なルーチング・アルゴリズムが導ける。以下ではこれを示す。

各点は、前述の点表現$(a_1 \ldots a_k)$ で表現する。
また、点$(a_1 a_2 \ldots a_k)$ より点$(a_2 \ldots a_k s)$への枝はｓで表現する。

メッセージは図４．７に示すように発信アドレス(sender address)、着信アドレス(receiver address)、メッセージが通過する道を示すタグ(tag) 、及びメッセージ(message) で構成される。タグは道表現の先頭ｋ桁を取り除いたものであり、タグの桁数は道の長さに一致する。

S A	R A	TAG	M A
sender address	receiver address	tag	message

図４．７　メッセージの形式

［メッセージ組み立て］　発信点では、発信アドレス、着信アドレス以外にメッセージが通過する道を指定するためのタグを作る必要がある。道は、前章で述べたｄ本の道P 、Rs、Qtのうち最も短い道P をまず選択する。もし、道P によりメッセージ転送ができない時は、残りの中で最も短い道を選択する（迂回選択）。この迂回選択を繰返すことにより、De Bruijn グラフではｄ－２個、 Kautzグラフではｄ－１個以下の障害点がグラフに含まれても、通信が可能である。

［メッセージ転送中継］　メッセージが送られてきた点は、着信アドレスと自アドレスを比較し、自分に送られてきたメッセージか中継するメッセージかを判断する。もし、中継するメッセージの時は、タグの先頭桁で指定される枝にメッセージを送出する。その際、タグは左に１桁シフトする。各中継点が、この動作を行うことにより、メッセージは、発信点で指定した道を通って着信点に届く。

図４．８は、 Kautzグラフ$G_K(2,2)$ における点(01)から点(20)へのメッセージ転送の様子を示している。発信点(01)では、最初に第１経路（道P＝[0120]）を選択しタグを20**としメッセージを組み立てる（メッセージ形式でタグのために用意する桁数は最大の道の長さｋ＋２あり、＊は適当な数でよいことを示す）。次に、点(01)はメッセージ転送動作に移る。タグの先頭桁が２であることから枝２にメッセージを送出する。この際、タグを左へ１桁シフトし0***とする。メッセージを受取った点(12)は、着信アドレスが自アドレスと異なる事およびタグの先頭桁が０である事から枝０にメッセージを送出する。もし第１方路でメッセージ転送が不可能な場合は、迂回経路として道Q_t=[01020] を選択しタグを 020とする。

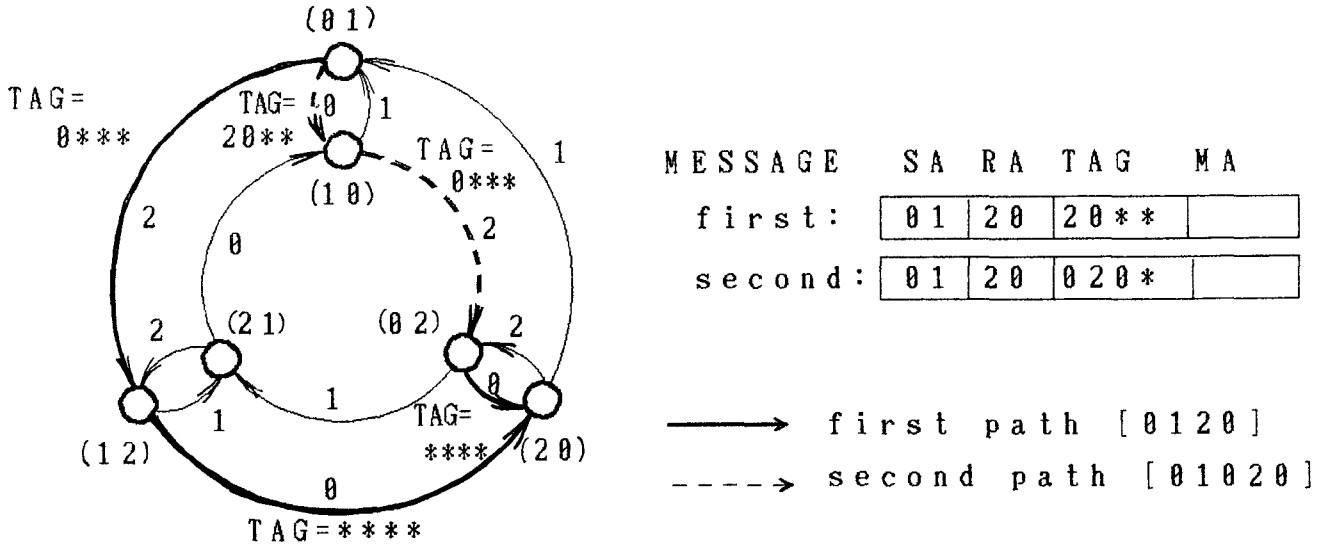


図４．８　Ｋａｕｔｚグラフにおけるメッセージ転送例

４．６　むすび

De Bruijn グラフ及び Kautzグラフが、第１経路だけでなく迂回経路も準最小であることを示した。また、簡単なルーチングアルゴリズムが存在する事を示した。

点（枝）の障害時、迂回経路が特定の点または枝に集中すると、大幅なデータ転送遅延が起こる（これはボトルネック問題と呼ばれる）。De Bruijn グラフ及び Kautz グラフでは、迂回による負荷の増大はグラフ全体に均一になると予想され、この問題を解決する一構成法となる可能性がある。今後、これを定量的に見積る予定である。また、実際に適用する際は、障害点の検出及び通知法、障害時のメセージ再送法についても検討する必要がある。

本章の結果は、線形構成法で構成されるグラフの中で特定の点数の場合に対して直径罹障度を明らかにしたものであり、すべての点数については解っていない。計算機による計算結果から、任意の点数についても直径罹障度は下界値に近い事が予想される。これを示す事は今後残された課題である。

第５章　結　論

本研究では、高信頼度通信網を構成する上でいかなる網トポロジーを基本にするかが重要な問題であるという着眼点から、グラフ理論の立場から直径最小グラフが通信網を考える上での基本となる三つの評価尺度（即ち直径、連結度、直径罹障度）すべてに対し優れた性質を持つことを示した。つまり、直径最小グラフを基本として網を構成することにより、高信頼度・高能率な網を構成可能であることを示している。

本論文で示した結果を要約すると次のようになる。

（１）　第２章では、２つの直径最小グラフ構成法を示した。本構成法は、任意の点数ｎ及び最大次数Δに対して構成が可能であり、構成されたグラフの直径は下界値に比べ高々１大きいだけである。また、平均距離についても下界値より高々０．３程度大きいだけであることが計算結果より期待できる。

（２）　第３章では、直径を最小化する事が結果的に信頼度の評価尺度である連結度を最大化させることを示した。主な結果は次の通りである。

①　任意のグラフＧの点数ｎ、最大次数Δ、最小次数δ、直径Ｄ、点連結度κ枝連結度λに対し次の関係が成立する。

$$\kappa \geqq \frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D}+\Delta^{2}-\Delta-1} \qquad \lambda \geqq \min\left\{\frac{n(\Delta-1)}{\Delta^{D-1}+\Delta^{2}-2},\ \delta\right\}$$

②　第２章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの連結度は最大値Δより高々１小さいだけである。

（３）　第４章では、迂回経路の最大中継段数（即ち直径罹障度）について考察しており次の点を明らかにしている。

①　直径罹障度の下界値は、最大次数Δと点数ｎの関数として導出できる。

②　第２章で示した線形構成法により構成される直径最小グラフの部分集合となるDe Bruijn グラフ及び Kautzグラフの直径罹障度は、下界値に比べ高々１大きいだけである。

③　上記グラフでは、障害対策用のルーチングアルゴリズムが簡単に実現出来る。

今後の課題として残された問題は数多くあるが、最も重要なものは「構成するための複雑さを如何に評価するか」である。本論文で扱った３つの尺度はいずれも構成されたトポロジーを評価するものである。しかし、現実に網を構成するための困難さ（例えば通信網では建設コスト、建設時間など。プロセッサ相互結合網では配線長など。）を加味してどの網構成にするか判断すべきである。現状では網を構成するための複雑さを反映するグラフ評価尺度はなく、この種の研究が盛んになることが望まれる。

本論文の結果は、高信頼・高能率な網を構成するためのバックボーンを与えたものである。特に、企業内通信網、計算機網、プロセッサ相互結合網など各種の網に共通した技術基盤となるものを主に検討した。実際に網を構成する場合は、そのアプリケーションに依存した各種の解決すべき問題があると考えるが、本論文の成果が役立つものと確信している。

謝　辞

本研究をまとめるに際し、懇切なる御指導並びに御助言を頂いた大阪大学基礎工学部嵩忠雄教授に心から感謝の意を表します。また、御助言と励ましを頂いた大阪大学基礎工学部藤沢俊男教授、都倉信樹教授、鳥居宏次教授、谷口健一教授に厚く感謝致します。

本研究は、日本電信電話株式会社基礎研究所における研究業務の一環として担当したものであり、この間御指導、御鞭撻頂いた東京工科大学畔柳功芳教授（もと情報通信基礎研究部長）、立石電機梶原正聿氏（もと情報通信基礎研究部第五研究室長）、情報通信基礎研究部岡田桂治第五研究室長に心から御礼申上げます。

また、本研究の過程で、貴重な御意見を頂いた故大阪大学高島堅助教授、東京工業大学梶谷洋司教授、大阪大学白川功助教授、神戸商科大学加藤直樹助教授、東京工業大学上野修一助手に感謝致します。

さらには、本研究を進めるに当たり、有益な討論、協力を頂いた日本電信電話株式会社基礎研究所情報通信基礎研究部曽根岡昭直研究主任、伊藤正樹主任研究員、市川晴久主任研究員、第一通信網研究所吉田靖之主任研究員に心から感謝致します。

本研究の遂行、本論文の執筆は以上の方々をはじめとする関係各位の多くの方々により支えられてきました。ここに心から感謝の意を表します。

参考文献

[１] 秋山　稔：『通信網工学』　コロナ社　(1981).

[２] R.S.Wilkov: "Analysis and Design of Reliable Computer Networks",IEEE Trans. Commun. , COM-20, no.3, pp.660-678 (1972) .

[３] K.P.Eswaran and R.E.Tarjan: "Augmentation problems", SIAM J.Comput., vol.5, no.4, pp.653-665 (1976) .

[４] 増澤、萩原、和田、都倉："k- 頂点連結性に関する有向２進木の拡大構成問題"，信学論，J67-D, no.1, pp.77-84 (1984).

[５] 渡辺、中村："辺の付加によるk - 辺連結グラフ構成問題"，信学技報，AL83-90, pp.115-122 (1984) .

[６] S.Ueno, Y.Kajitani and H.Wada: "The minimum augmentation of a tree to a k-edge-connected graph", Networks 誌投稿中.

[７] F.Harary: "The maximum connectivity of a gragh", Proc. Nat. Acad. Sci., vol.48, pp.1142-1146 (July 1962).

[８] A.M.Farley: "Networks immune to isolated failures", Networks, vol.11, pp.255-268 (1981) .

[９] 椎塚："グラフの堅固さの尺度とＩＬＦＩネットワークについて"，信学技報，CAS83-112, pp.17-22 (1983).

[１０] F.T.Boesch, F.Harary and J.A.Kabell: "Graphs as models of communication network vulnerability:connectivity and persistence", Networks, vol.11, pp. 57-63 (1981).

[１１] J.A.Bondy and P.Hell: "Counter examples to theorems of Menger type for the diameter", Discrete Math., vol.44, pp.217-220 (1983) .

[１２] B.Elspas: "Topological construction on interconnection limited logic", Switching Theory Logic Des., vol.S-164, pp.133-147 (Oct. 1964) .

[１３] A.J.Hoffman and R.R.Singleton: "On Moore graphs with diameter 2 and3", IBM J. of Res. Development, vol.4, pp.497-504 (1960) .

[１４] H.D.Friedman: "On the impossibility of certain Moore graphs", J.of Combinatorial Theory, vol.B-10, pp.245-252 (1971) .

[15] E.Bannai and T.Ito: "On finite Moore graphs", J. Fac. Sci., Tokyo Univ., pp.191-208 (1973) .

[16] W.G.Bridge and S.Toueg: "On the impossibility of directed Moore graphs", J. Combinatorial Theory, series B29, pp.339-341 (1980) .

[17] H.Friedman: "A design for (d,k) graphs", IEEE Trans. Electron.Comput., vol. EC-14, p.488 (June 1965).

[18] I.Korn: "On (d,k) graphs", IEEE Trans. Electron. Comput., vol.EC-16, p.90 (Feb. 1967) .

[19] S.Toueg and K.Steiglitz: "The design of small-diameter network by local search", IEEE Trans. Comput., C-28, pp.537-542 (July 1979).

[20] B.W.Arden and H.Lee: "A regular network for multicomputer systems", IEEE Trans. Comput., C-31, pp.60-69 (1982) .

[21] G.Memmi and Y.Roillard: "Some new results about the (d,k) graph problem", IEEE Trans. Comput., C-31, pp.784-791 (Aug. 1982) .

[22] J.C.Bermond and B.Bollobas: "The diameter of graphs- A survey", Congressus Numeratium, vol.32, pp.3-27 (1981) .

[23] R.M.Storwick: "Improved constructions techniques for (d,k)graphs",IEEE Trans. Comput., C-19, pp.1214-1216 (1970) .

[24] C.Delorme and G.Farhi:"Large graphs with given degree and diameter- Part I", IEEE Trans. Comput., vol.C-33, no.9 (Sept. 1984) .

[25] J.C.Bermond, C.Delorme and J.J.Quisquater: "Tables of large graphswith given degree and diameter", Information Processing Letters,vol.15, no.1, pp.10-13 (Aug. 1982) .

[26] J.C.Bermond, J.Bond, M.Paoli and C.Peyrat: "Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability", Survey in Conbinatorics London Math. Soci. Lecture Notes, no.82, pp.1-30(1983) .

[27] D.K.Pradhan and S.M.Reddy: "A fault-tolerant communication architecture for distributed systems", IEEE Trans. Comput., C-31,no.9 (Sept. 1982) .

[28] A.H.Esfahanian and S.L.Hakimi: "Fault-tolerant routing in De Bruijn communication networks", IEEE Trans. Comput.,C-43,no.9, pp.777-788(Sept. 1985).

[２９] U.D.Kumar and S.M.Reddy: "A class of graphs for fault-tolerant processor interconnections", Proc. 5th Int. Conf. Distributed Computing Systems, pp. 137-147 (Oct. 1984).

[３０] 田中、秋山："非階層多段中継通信網の構成"，信学論Ｂ，J66-B, no.12, pp.1494-1501 (1983).

[３１] U.S.R.Murty and K.Vijayan: "On accessibility in graphs", Sankhya Ser. A, no.26, pp.299-302 (1964).

[３２] H.Enomoto and Y.Usami:"Minimum number of edges in graphs with given diameter and connectivity, I", to be published to J. of Comb. Theory, Ser. B (1983).

[３３] B.Bollobas and S.Eldridge: "On graphs with diameter two", J.Combinatorial Theory, B-21, pp.201-205 (1976).

[３４] M.A.Schlumberger: "Connectivity of de Bruijn graphs", Univ.Grenoble, France, Research Report 146 (Oct. 1978).

[３５] S.M.Reddy, D.K.Pradhan and J.G.Kuhl: "Directed graphs with minimal diameter and maximal connectivity", School Eng., Oakland Univ., Rochester, MI, Technical Report (July 1980).

[３６] S.M.Reddy, J.G.Kuhl and S.H.Hosseini: "On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity", in Proc. 20th Annu. Allerton Conf, pp.1018-1026 (Oct .1982).

[３７] F.Harary and R.Z.Norman: "Some properties of line digraphs", Rend.Circ. Mat. Palermo, vol.9, pp.161-168 (1961)

[３８] N.G.De Bruijn: "A combinatorial problem", in Proc. Akademe Van Weteschappen, vol.49, part2, pp.758-764 (1946).

[３９] W.H.Kautz: "Bounds on directed (d,k)-graphs", In Theory of Cellular Logic Networks and Machines, AFCRL-68-0668, SRI proj.7258, Final Report(1968).

[４０] B.L.van der Waerden:"Algebra",Berlin,Springer-Verlag,pp.63-65 (1964).

[４１] S.M.Boyles:"A counterexample to a conjecture on paths of bounded length", J. of Graph theory,vol.6,pp.205-209(1982)

[４２] M.Imase,M.Itoh:"Design to minimize diameter on building-block network",IEEE Trans.Comput.,vol.C-30,no.6,pp.439-442 (1981.6).

[４３] 今瀬、伊藤、岡田：”直径が準最小な正則有向グラフ構成法」信学技法，ＣＡＳ82-84 (1982).

[４４] 伊藤、今瀬、吉田：「準最小な直径を持つ正則有向グラフ構成法」信学論vol.J66-A, no.1,pp48-55(1983).

[４５] 岡田、今瀬、市川：「グラフ理論を用いた高信頼度網構成法」５８年信学会総合全国大会,no.1620.

[４６] 今瀬、岡田、市川、：「高信頼度通信網構成のグラフ理論的検討」信学論vol.J66-B, no.3,pp.337-344(1983).

[４７] 曽根岡、今瀬、岡田：「グラフ理論を用いた高信頼度網構成」５８年信学会情報・システム部門全国大会，no.409 (1983).

[４８] 今瀬、曽根岡、市川：「拡大完全グラフにおける節点除去時の直径増加量とルーチング」信学技法，ＣＡＳ83-114(1983).

[４９] 曽根岡、今瀬、岡田：「直径が小さい正則有向グラフの連結度について」信学技法，ＣＡＳ83-114(1983).

[５０] M.Imase,M.Itoh:"A Design Method for Directed Graphs with MinimumDiameter", IEEE Trans.Comput.,vol.C-32,no.9(1983)-Correspondence.

[５１] 曽根岡、今瀬：「り障に強い網トポロジーの一検討」５９年信学会総合全国大会,no.1825.

[５２] M.Imase,T.Soneoka,K.Okada:"Connectivity of Regular Graphs with Small Diameter", IEEE Trans.Comput., vol.C-34, no.3, pp.267-273 (1985).

[５３] 今瀬、曽根岡、岡田、：「障害耐力のあるプロセッサ相互結合ネットワーク」信学論，vol.J-66-D,no.8,pp.1449-1456 (1985).

著者の発表論文一覧表

論　文　誌

[1] 岡田、今瀬、市川 「マイクロプロセッサによるビルディングブロック型通話路構成法の検討」,
信学論, vol.J63-B, no.2, pp.105-112 (1980.2).

[2] M.Imase, M.Itoh "Design to minimize diameter on building-block network",
IEEE Trans. Comput., vol.C-30, no.6, pp.105-112 (1980.2).

[3] K.Mase, M.Imase "An adaptive capacity allocation scheme in telephone networks", --concise paper
IEEE Trans.Comm., vol.COM-30, no.2, pp.354-359 (1982.2)

[4] 間瀬、川嶋、今瀬、梶原 「ＳＳ／ＴＤＭＡを用いた斜回線可変設定方式」
信学論, vol.J65-B, no.12, pp.1491-1498 (1982.12).

[5] 伊藤、今瀬、吉田 「準最小直径を持つ正則グラフ構成法」
信学論, vol.J66-A, no.1, pp.48-55 (1983.1)

[6] 今瀬、岡田、市川 「高信頼度通信網構成のグラフ理論的検討」
信学論, vol.J66-B, no.3, pp.337-344 (1983.3).

[7] M.Imase, M.Itoh "A design method for directed graphs with minimum diameter",--correspondence
IEEE Trans. Comput., vol.C-32, no.9, pp.782-784 (1983.9)

[8] N.Shimizu, M.Ikeda, M.Imase, K.Okada "A guide-wave optical arbiter circuit",
IEEE J.Lightwave, vol.LT-1, no.2, pp.424-428 (1983.6).

[9] 間瀬、川嶋、今瀬、梶原 「ＳＳ／ＴＤＭＡを用いた斜回線可変設定方式」
NTT 研究実用化報告, vol.33, no.1, pp.155-168 (1984.1)

[10] M.Imase, T.Soneoka, K.Okada "Connectivity of regular graphs with small diameter",
IEEE Trans.Comput., vol.C34, no.3 (1985.3).

[11] T.Soneoka, H.Tanaka, M.Imase, C.Peyrat "Sufficient conditions for maximally connected dense graph", Discrete Mathematics, accepted as a paper.

[12] 今瀬、曽根岡、岡田 「障害耐力のあるプロセッサ相互結合ネットワーク」
信学論, vol.J68-D, no.8, pp.1449-1456 (1985.8).

[13] M.Iwashita, M.Imase, T.Soneoka, H.Nakanishi "A graph-theoretic approach to the construction of highly reliable trasmission line network",--Letter
IECE of Japan, vol.E69no.4,pp.347-348 (1986.4).

国　際　会　議

[1] K.Okada, M.Imase H.Ichikawa "New architecture and the traffic aspects of switching network using microprocessor", Int.Teletraffic Conf.9, (1979.10).

[2] M.Imase, Y.Hirakawa K.Okada, M.Kajiwara "Functional programming language for switching description and its hardware architecture", Int. Switching Symposium'84,13C-2 (1984.5).

[3] T.Soneoka, H.Tanaka, M.Imase "Sufficient condition for dense graphs", ISCAS'85, pp.811-814 (1985.5).

[4] T.Soneoka, M.Imase K.Okada "CANDY:Computer aided network design system for highly reliable networks", Network'86, S8-4 (1986.6).

全　国　大　会

[1] 岡田、今瀬 「制御機能内蔵型時分割メモリスイッチの実現法」 ５３年度信学会総合全国大会,S12-7.

[2] 今瀬、市川、岡田 「インテリジェントスイッチによる通話路構成法」 ５３年度信学会通信部門全国大会,no.192.

[3] 市川、今瀬 「個別制御交換方式の一構成法」 ５４年度信学会全国大会,S15-11.

[4] 今瀬、市川、伊藤、吉田 「ハードスケジューラを持つ交換用プロセッサの提案」 ５５年度信学会通信部門全国大会,no.140.

[5] 平川、今瀬、吉田 「状態遷移図にもとずく機能分散法」 ５７年度信学会総合全国大会,no.1560.

[6] 今瀬、市川、岡田 「分散制御交換機のアービタ構成」 ５７年度信学会通信部門全国大会,no.210.

[7] 岡田、今瀬、市川 「グラフ理論を用いた高信頼度網構成法」 ５８年度信学会総合全国大会,no.1620.

[8] 清水、池田、今瀬、岡田 「光導波路型アービタ回路」 ５８年度信学会総合全国大会,no.1036.

[9] 曽根岡、今瀬、岡田 「グラフ理論を用いた高信頼度通信網構成法」 ５８年度信学会情報・システム部門全国大会,no.409.

[10] 今瀬、岡田 「パターンマッチによる関数起動型交換用言語」 ５８年度信学会情報・システム部門全国大会,no.460.

[11] 平川、川嶋、今瀬 「関数型言語の交換システムへの応用」 ５９年度信学会総合全国大会,no.1922.

[12] 曽根岡、今瀬 「り障に強い網トポロジーの一検討」
５９年度信学会総合全国大会,no.1825.

[13] 志村、上野、梶谷、今瀬 「非分離度によるネットワークの信頼性評価」
６０年度信学会総合全国大会,S7-4.

[14] 岩下、今瀬、曽根岡、中西 「グラフ理論による高信頼化線路網構成の一検討」
６０年度信学会総合全国大会，no.2051.

研　究　会

[1] 市川、今瀬 「個別制御交換方式ＳＰＩＣＥの概要」
信学会交換研究会，SE79-73 (1979.9)

[2] 今瀬、市川、岡田 「制御機能融合型スイッチによるビルディングブロック交換システム（ＰＨＥＮＩＸ）の試作・検討」信学会交換研究会,SE80-11

[3] 今瀬、市川、吉田 「ハードスケジューラを持つ通信制御用プロセッサ」
信学会電子計算機研究会，EC81-60 (1981.12).

[4] 今瀬、伊藤、岡田 「直径が準最小正則有向グラフ構成法」
信学会回路とシステム研究会，CAS82-84 (1982.10).

[5] 梶原、岡田、市川、今瀬、石飛 「分散制御交換システムに関する一検討」
信学会交換研究会，SE82-76 (1982.11).

[6] 平川、今瀬、岡田 「状態遷移図分解とそのプログラム構成への応用」
信学会交換研究会，SE83-45 (1983.7).

[7] 今瀬、曽根岡、岡田 「拡大完全グラフにおける節点除去時の直径増加量とルーチング」信学会回路とシステム研究会，CAS83-115 (1983.9).

[8] 曽根岡、今瀬、岡田 「直径が小さい正則有向グラフの連結度について」
信学会回路とシステム研究会，CAS83-114 (1983.9).

[9] 平川、川嶋、今瀬、岡田 「交換用関数型プログラミング言語ＬＡＮ－ＦＭ」
信学会交換研究会，SE84-24 (1984.5).

[10] 今瀬、曽根岡 「ＭＤＦスイッチ回路網に関する一考察」
信学会オートマトンと言語研究会，AL84-28 (1984.9).

[11] 曽根岡、今瀬、岡田 「高信頼度通信網設計システムＣＡＮＤＹ」
信学会情報ネットワーク研究会，IN85-51 (1985.8).

[12] 曽根岡、井上、真鍋、今瀬 「二重化構造を持つトポロジーの信頼性」
信学会回路とシステム研究会，CAS85-92 (1985.10).