ラフ近似手法と双対的数理モデル

2002年

杉原 一臣

目 次

第1章　緒論

1.1　背景と目的

人間が知識を表現するとき，まず自身の持っている既存の知識に基いて，その知識を置換することで，その知識表現がなされる．例えば「金属」という知識を誰かに説明するとき，自身が知りえる「金属」という知識が持つ共通の性質を挙げたり，あるいは「金属」という言葉の具体例を並べるということが行われる．論理学では，前者を内包 (Intension)，後者を外延 (Extension) と呼ぶ [1, 2]．このように，保有している知識の2つの側面により置換して，知識は表出されている．しかし，人間の持つ知識は有限であるので，その限られた知識の組合せで知識を表現することになる．したがって，保有する知識の量が少なければ，知識を的確に表現することは困難である．すなわち，人間はある知識が与えられたとき，自身の持ちうる知識ではそれを近似することでしか把握できないといえる．知識表現は一種の情報近似であるとみなすことができる．

ラフ集合 [3, 4] は，1982年に Pawlak によって提案された情報近似のための理論的概念である．ラフ集合の研究は，データベースにおける情報の近似表現とその表現に最低限必要な属性の集合を求める方法である．前者では，同値関係と呼ばれる関係を用いてデータを分類し，あいまいな情報が与えられたときに，その分類により情報を近似的に表現する方法について述べられている．後者では，その近似表現をできるだけ保持しつつ，同値関係を構成する属性の集合を最小にするという観点から，データ簡略化のための手法が提案されている．ラフ集合の研究はデータマイニングの研究との関係から，その研究の応用として位置づけられ，知識発見やデータマイニングを専門とする研究者の間で広まっている [5, 6, 7, 8, 9]．例えば，データの同値関係による分類とエ

キスパートの判断による分類とを比較することによって，エキスパートの知識とデータ構造との関係が考察できるので，医療診断[10, 11]やマーケティング分析[12, 13, 14]など，これまでエキスパートの判断のみを頼りとしていた問題への応用がなされている．したがって，最近の研究も知識発見のための効率的なアルゴリズムの開発が中心である．その発展の経緯から，知識獲得のためのプロセスのみに脚光が当てられているが，それはラフ集合の適用可能な範囲を狭めていると考えられる．

本論文は，ラフ集合の研究を数理的意思決定へ拡張することが目的となっている．従来の意思決定理論では，人間の評価・価値判断を数理的な視点から取扱う枠組みとして効用関数[33]が用いられる．効用関数は，評価判断を結果の状態に対し効用値を出力する，評価・価値判断の1つの捉え方である．意思決定者の評価意識や選好構造を関数による数理モデルによって表現し，効率的な意思決定を行うことができると言われてきた．しかし，数理モデルによる表現を行うための制約が枷となって，人間の心的変化や判断のあいまいさにおける非一貫的な判断を取扱うには困難である．このような場合，厳密に1つの関数ではなく，そのあいまいさを概ね同定するようなモデルを構築した方が，現実の問題に適していると考えられる．そこでラフ集合の情報近似の概念を用いて，不確かな現象を大まかに近似するような数理モデルを提案する．また，IF-Thenルールによる表現は関数よりも柔軟な表現が可能であるので，人間の選好構造も関数ではなくIF-Thenルールによって表現することで多様な選好構造を表すことができると考えられる．そこで，関数によりデータ構造を表現していた統計的データ分析手法について，ラフ集合の概念に基いてデータ分析し，その構造をIF-Thenルールとして抽出するための手法を提案する．

また本論文では，ラフ集合の近似概念自体を従来の意思決定手法へ応用することも試みている．ラフ近似の概念は，直接理解できない情報を既知の情報で2つの観点から包含するという考え方である．従来の意思決定問題では与えられた情報から1つの決定を下せるような手法が多い．しかし，その情報が統計的に不十分であったり，人間のあいまいな判断が介している場合に，そこから何らかの判断を下すことは，決定

を誤る危険が高い．このような不確かな情報から意思決定を行う場合は，意思決定手法に1つの結論を求めるのではなく，幾つかの判断の候補を求めるべきであり，それに基づいてユーザ側が意思決定を行うべきである．そこで，こういった観点から意思決定を行なえるようなモデルを構築するために，ラフ近似の概念を適用している．本論文では，従来の意思決定手法に上近似・下近似というラフ近似の概念を適用し，それらの近似に対応した双対的数理モデル [15] と呼ぶモデルを構築することについて述べている．

1.2 概要

本論文は6章から構成されており，各章の内容は以下の通りである．

第1章では，本論文の概要および本研究の目的について述べる．

第2章では，従来のラフ集合の概略について述べる．特にラフ集合の特徴である上下近似について説明する．上下近似の概念はあいまいな情報が与えられたときに，そのデータを既知の情報で近似・包含するという考え方である．この上近似・下近似は，ファジィ理論 [16, 17, 18] における可能性と必然性の概念と一致していて，あいまいさを取扱う点でファジィ集合とラフ集合には類似性がある．本論文では，この近似を意思決定問題へ適用する上で，あいまいな現象を上近似関数と下近似関数とで表現する双対モデルへ拡張可能であることを示す．これらは，それぞれ Least Upper と Greatest Lower という概念で対応づけられている [15, 16].

第3章では，全体評価から各要因の部分効用を算出するコンジョイント分析 [33, 34] と呼ばれる多変量解析手法にラフ集合を適用し，各要因と全体評価との関係を IF-Then ルールで表現する方法を提案する．多変量解析は幾つかの項目間の関連性を統計的に分析し，現象を簡潔に要約する手法である [35, 36]．データ分析を行うという点では，ラフ集合と同じ目標を持っているが，データ分析で必要なモデルを数理的に表現するか、IF-Then ルールで表現するかという点で異なっている．コンジョイント分析 (Conjoint

Analysis) では，予め用意された諸要因の組合せに対する全体評価から各要因の部分効用を求め，更に各要因の部分効用から最も効果の高い要因の組合せを推定することができる．その最も代表的な手法に MONANOVA(Monotone Analysis of Variance) 法 [37, 38] がある．MONANOVA 法では部分効用値の和を全体評価とする加法モデルを仮定している．しかし，現実問題においては必ずしも加法モデルが成り立たない場合が存在する．また，数理モデルで表現を行うという制約により，データの持つ複雑な構造を取扱うのが困難であると考えられる．本章では，Dominance Relation[24, 25, 26] と呼ばれる順序関係によるラフ集合をコンジョイント分析に適用し，与えられたデータから IF-Then ルールを導出する方法を提案する．また Dominance Relation によるラフ集合では，各要因の要素間に順序関係があることが仮定されている．コンジョイント分析では質的データが取り扱われているので，質的データに順序関係を与える必要がある．そこで区間回帰分析 [16, 41] を用いて，質的データに順序関係を与える方法についても述べている．提案手法は従来の手法に比べると，IF-Then ルールでの記述により柔軟にデータ構造を表現できることと，効果の高い組合せを複数の候補を提示できることが利点となっている．

第4章・第5章では，意思決定者のあいまいな判断から各代替案の重要度を算出する AHP(Analytic Hierarchy Process)[45, 46, 47, 48] と呼ばれる代替案選択手法に，ラフ集合を適用した区間 AHP 手法を提案する．意思決定問題においては，長さや重さ・時間などの物理量では測定できない問題も多く存在する．このような場合，代替案を測定する尺度は人間の直感に頼らざるを得ない．人間の主観的であいまいな判断を用いて，各評価基準に対する重要度 (ウェイト) を求める方法に AHP がある．従来の手法ではその重要度を実数値で求めていたが，提案手法では判断のあいまいさをできるだけ重要度に反映するために，重要度を区間として得られるような AHP の双対的数理モデルを考えている．第2章で述べたラフ近似の概念に基づいて，意思決定者のあいまいな判断を2つの観点から近似し，2つの数理計画問題が定式化されている．また，区間 AHP の持つ性質について述べている．区間重要度により，代替案の選好関係が線

形順序のみではなく，半順序関係でも得ることができる．これは従来の手法に比べて，あいまいな現象に対してより柔軟な表現が可能となっている．意思決定者の判断はあいまいであるから，そこから推定される結果もある程度の幅を持たせておくべきであるという方針の下でそのモデルが構築されている．第4章では区間AHPモデルは線形計画問題として定式化されているが，第5章では区間AHPモデルを2次計画問題として定式化が可能であることを示し，線形計画モデルとの結果の比較を行っている．

最後に，第6章では本研究で得られた結果を総括している．

第2章　ラフ近似の概念

2.1　はじめに

Pawlak のラフ集合 [3, 4] はデータベースの情報が与えられ，その情報によってある集合の上近似と下近似を求めることが行われている．通常，何らかの知識が与えられたとき，人間は直接その知識を捉えることは難しい．人間の保有する知識が限られているためである．そこで，人間は自身の持つ有限の知識を用いて，与えられた知識を近似的に表現する．ラフ集合の情報近似概念というのは全く特異なものではなく，人間の知識獲得の過程でごく自然に行われている．また，属性値と決定とを含むデータベースのときには，この情報から決定ルールである IF-Then ルールが抽出できるので，知識表現の手段としてラフ集合が脚光を浴びている．特に，そのルール生成の過程で，近似表現を保持しつつルールを構成する属性の集合を最小にするいう，データ簡略化のためのアルゴリズム開発の研究に多くの研究者が傾倒している [31, 32]．上記で述べたように，ラフ集合理論は，上近似・下近似による情報の近似概念とルール生成におけるデータ簡略化のための手法という 2 つの特徴に分類される．しかし最近のラフ集合研究では，ラフ集合がデータ・マイニングの道具として取り上げられているため，データ簡略化の手法ばかりに注目が集まっている．これはラフ集合の適用可能性を狭めている．「2 つの観点から情報を近似する」という点で，ラフ集合の情報近似の概念は人間の感覚にも非常に適合しているので，情報近似の側面についてもっと注目すべきであると考えられる．情報近似の手法については，集合間の関係を同値関係以外の関係に基づいて新しい近似表現を行う研究 [21, 22, 23, 25, 26] がなされている．また，データベースは離散集合であるが，最近では集合と集合との関係のみから知識の内包と外

延とを取り扱う方法 [2] が提案されている．これは古典的なラフ集合概念の拡張であり，種々の広がりが試みられている．また，Pawlak によるラフ計算 [27, 28, 29, 30] では，実数関数を離散的にラフ近似し，これに基づく微分・積分などが提案されている．

本章では，ラフ集合の基本的な概念について説明する．更に，Pawlak のラフ近似の概念を拡張して，あいまいな現象を上近似関数と下近似関数とで表現する双対的数理モデルについて述べる．

2.2 ラフ集合

まず，ラフ集合の基本的記号を以下に示す．データベースのような情報システムは $S=(U,Q,V,f)$ で表現される．ただし，U は対象の有限集合であり，Q は属性の有限集合である．また，V_q は属性 q の属性値集合であり，f は $\forall q \in Q$ に関して $f: X \times Q \to V$ となる関数を表す．$f(x,q)$ は，対象 $x(\in U)$ の属性 q に関する属性値を示している．

任意の部分集合 $P \subseteq Q$ について，同値関係 (Indiscernibility Relation)R_P は次のように定義されている [3, 4].

$$R_P = \{(x,y) \in U^2 | f(x,q) = f(y,q),\ \forall q \in P\} \tag{2.1}$$

$(x,y) \in R_P$ は，"x と y が有限部分集合 P では識別できない"ということを意味している．

また，x に関する同値関係 R_P から次のような同値クラス $R_P(x)$ が定義される．

$$R_P(x) = \{y \in U | f(x,q) = f(y,q),\ \forall q \in P\} \tag{2.2}$$

ここで，部分集合 $X \subseteq U$ が与えられたとすると，同値関係 R_P による X の下近似・上近似集合は以下のように表される (図 2.1，図 2.2 参照)[3, 4]．なお特別に断りがない場合，以下では R_P を R と表し，部分集合 P 上であることを省略する．

$$\underline{R}(X) = \{x \in U | R(x) \subseteq X\} \tag{2.3}$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in U | R(x) \cap X \neq \phi\} \tag{2.4}$$

$x \in \underline{R}(X)$ は，"対象 x が確実に，部分集合 X に属しているということを意味している．すなわち，"x が X であることが必然である"ということを表している．また，"$x \in \overline{R}(X)$"は"対象 x が，部分集合 X に属しているかもしれない"ということを意味している．すなわち，"x が X であることが可能である"ということを表している．2つの近似集合は対象 X に対して，次のような包含関係を満たしている [3, 4].

$$\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X) \tag{2.5}$$

この包含関係から，上近似・下近似集合は対象 X の表現となっていることがわかる．また，上近似集合 $\overline{R}(X)$ から下近似集合 $\underline{R}(X)$ を除いた部分を境界集合 $BN_P(X)$[3, 4] といい，以下のように定義されている．

$$BN(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X) \tag{2.6}$$

もし $BN(X) = \phi$ であれば，$\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$ となり，$R(X)$ によって対象 X を完全に定義できる．このような場合，対象 X を明確 (exact) な集合であると呼ぶ．もし，$BN(X) \neq \phi$ であれば，$\underline{R}(X) \neq \overline{R}(X)$ となるので，X を R によって完全に定義することはできない．この場合，対象 X はあいまいな (inexact,rough) 集合と呼ぶ．ラフ集合の「ラフ」とは，ある知識 X が別の知識 R で定義できないあいまいさのことを指す．このように，対象 X 自身を把握することが困難である場合，上側と下側からそれに類似した集合を用いた近似により X を捉えようとするのが，ラフ集合の情報近似の概念である．また，上近似・下近似集合には次のような相補関係 [3, 4] が成り立っている．

$$\underline{R}(X) = U - \overline{R}(X^C) \tag{2.7}$$

$$\overline{R}(X) = U - \underline{R}(X^C) \tag{2.8}$$

ただし，X^C は X の補集合を表す．上記の相補関係が成り立つということは，上近似・下近似集合のいずれか一方を定義すれば，もう一方が必ず導出されることを表している．ここで，上近似・下近似集合についての性質を以下に示す．

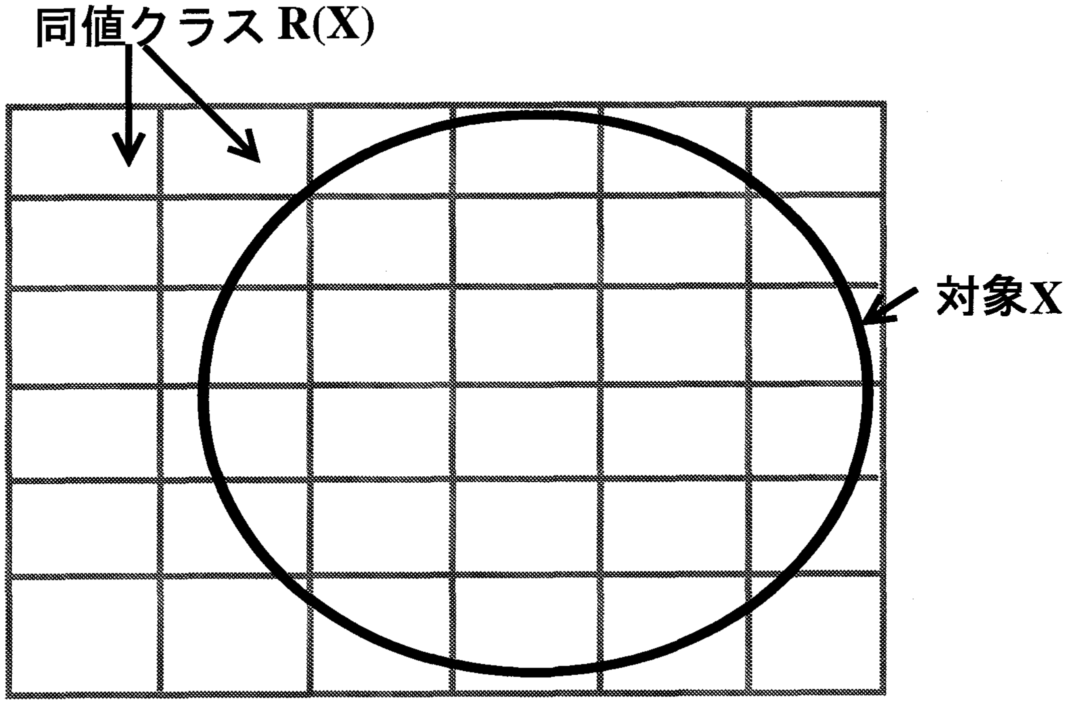

図 2.1: 同値クラス $R(X)$ による対象 X の近似 1

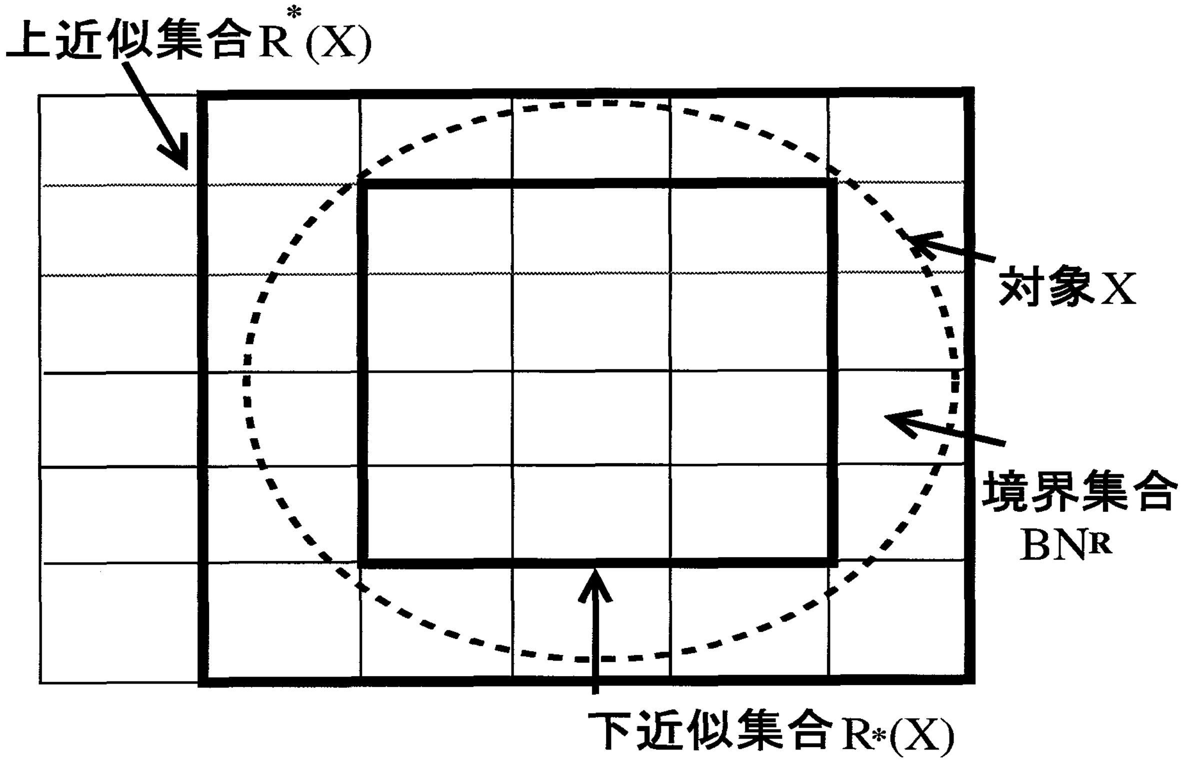

図 2.2: 同値クラス $R(X)$ による対象 X の近似 2

上近似・下近似集合の性質 [3, 4]

部分集合 $X, Y \subseteq U$ について，次のことが成り立つ．

$$\underline{R}(X) \subseteq X \subseteq \overline{R}(X) \tag{2.9}$$

$$\underline{R}(\phi) = \overline{R}(\phi) = \phi,\ \underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U \tag{2.10}$$

$$\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) \tag{2.11}$$

$$\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y) \tag{2.12}$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y),\ \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y) \tag{2.13}$$

$$\underline{R}(X) = U - \overline{R}(X^C) \tag{2.14}$$

$$\overline{R}(X) = U - \underline{R}(X^C) \tag{2.15}$$

$$\underline{R}(X \cup Y) \supseteq \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y) \tag{2.16}$$

$$\overline{R}(X \cap Y) \subseteq \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) \tag{2.17}$$

$$\underline{R}(\underline{R}(X)) = \overline{R}(\underline{R}(X)) = X \tag{2.18}$$

$$\overline{R}(\overline{R}(X)) = \underline{R}(\overline{R}(X)) = X \tag{2.19}$$

与えられた X の下近似集合 $\underline{R}_P(X)$ から，次のような IF-Then ルールが得られる．

$$\text{If } x \in \{R_P(y) | y \in \underline{R_P}(X)\},\ \text{then exactly } x \in X. \tag{2.20}$$

また，X の境界集合 $BN_P(X)$ から，次のような IF-Then ルールが得られる．

$$\text{If } x \in \{R_P(y) | y \in BN_P(X)\},\ \text{then possibly } x \in X. \tag{2.21}$$

なお，ラフ集合と同じようにあいまいさを取扱える集合としてはファジィ集合 (Fuzzy Sets)[17] がある．ファジィ集合は 1965 年に L.A.Zadeh によって提案された境界があいまいな集合のことである．ファジィ集合では，要素 x が集合 A に属する度合いをメンバーシップ値 $\mu : \{\mu_A(x) \to [0,1]\}$ として表し，このメンバーシップ値によりあいまいな概念を記述する．従来の集合では集合に属しているか属していないか，すなわち 2 値

論理における真理値が $0,1$ のみを考えていたが，ファジィ集合によるファジィ論理では区間 $[0,1]$ として拡張されている．ファジィ集合における主観的であいまいな概念の表現は，言語変数の導入を可能にし，情報処理における人間とコンピュータとのインターフェースを改善している．特に，ファジィ推論ではエキスパートの知識を IF-Then ルールを表現することで，より現実的な推論を可能にしている．その応用であるファジィ制御の分野では，幾つかの異なった原理の中からその状況に適応した原理で潤滑に制御可能にしている．

ファジィ集合とラフ集合との関係について述べる．ファジィ集合では各データの属する度合いを $[0,1]$ で表すのに対して，ラフ集合では上下近似の概念から，データはある集合に「確実に属している」・「確実に属していない」・「属している可能性がある」の3つの集合に分類されている．ファジィ集合に比べると，あいまいな情報の取扱いが粗雑である．また，あいまいな情報を表現するためにファジィ集合が用いられている [17] が，ラフ集合ではデータを分類すること [3, 4] が目的となっている．ラフ集合でのあいまいさは境界集合として表現され，その意味は「データの持つ矛盾」・「情報不足によるデータの不完全性」と解釈されている [3, 4]．このように，あいまいさを取扱う枠組みがファジィ集合とラフ集合では異なっている．したがってその適用領域も異なっていて，ファジィ理論の応用はデータ解析や推論・制御であるのに対し，ラフ集合はデータベースのように知識が蓄積されている情報検索やエキスパートシステムなどに応用されている．ファジィ集合とラフ集合との間には，理論的には類似する点が幾つか存在するが，あいまいさに対する捉え方に上記のような違いがある．また，互いの集合の特徴を活かしたファジィ・ラフ (Fuzzy Rough Sets) 集合やラフ・ファジィ集合 (Rough Fuzzy Sets) のような研究 [19, 21, 22, 23] もなされている．

Pawlak のラフ集合では，更に得られるルールの記述をできるだけ簡単することが考えられている．すなわち，求められた近似集合を保持しつつ，部分集合 P の属性数を最小限にする．このように，必要最小限の属性のみを抽出することを簡略化 (Reduction) と呼ぶ．また，その必要最小限の属性を縮約 (Reduct) という．この縮約を求める手法

については様々な手法 [3, 4, 31] が提案されているが，主に効率のよいアルゴリズムの開発に関心が集まっている．しかしラフ集合研究では，この縮約ではなく上近似・下近似による近似概念の方にその本質があると考えられる．本論文では，縮約についての説明は省略する．

2.3 ラフ近似と双対的数理モデル

通常のラフ集合において，ペアとして (下近似集合，上近似集合) が得られているが，この概念を拡張して，あいまいな現象の近似として，(下近似関数，上近似関数) となる 2 つの数理モデルを得る方法について考える．

ラフ集合では，あいまいな対象 X が与えられたとき，それを包含するような下近似・上近似集合が定義されている．このとき X は集合であるから，ラフ集合は離散データを取扱っている．しかし，あいまいな対象が集合であるとは必ずしも限らない．現実問題では，あいまいな現象が区間データとして表現される場合も多く存在する．このような場合，従来のラフ集合の概念を直接適用できない．すなわち，その概念を拡張することが求められる．乾口ら [23] は，(2.3) と (2.4) 式は以下のように書き換えることができることを示している．

$$\underline{R}(X) = \{x \in U | R(x) \subseteq X\} = \bigcup_{Y \subseteq X, Y \in R(X)} Y \tag{2.22}$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in U | R(x) \cap X \neq \phi\} = \bigcap_{Y \supseteq X, Y \in R(X)} Y \tag{2.23}$$

このことから，下近似・上近似集合を次のように言い換えることができる．すなわち，下近似集合は X に含まれている同値クラス R_P の和集合であり，下側から近似できる最大の集合を表す．また，上近似集合は X を含む同値クラスの積集合であり，上側から近似できる最小の集合を表す．この観点から，区間データを近似するための近似関数を定義する．与えられた区間データ $[X] = \left[\underline{X}, \overline{X}\right]$ について，

$$\underline{f}([X]) \subseteq [X] \subseteq \overline{f}([X]) \tag{2.24}$$

となるような，区間データ $[X]$ を近似する区間の近似関数を考える．下近似関数 $\underline{f}([X])$ は，区間データに包含されている中で最も大きな区間を取る (Greatest Lower) 関数である．一方，上近似関数 $\overline{f}([X])$ は区間データを包含する中で最小の区間を取る (Least Upper) 関数である．以後，簡単化のために下近似・上近似モデルと呼ぶ．また，下近似・上近似モデルという 2 つのモデルを双対的数理モデル [15] という．双対的であるとは下近似モデルから自動的に上近似モデルを定義でき，その逆も成り立つことを意味している [15]．

より複雑であいまいな現象の数理モデルを取り扱う場合，本章で述べたように，

$$\text{下近似モデル} \subseteq \text{あいまいな現象} \subseteq \text{上近似モデル}$$

という包含関係のもとに下からの近似モデルと上からの近似モデルとで，あいまいな現象を表現する双対的アプローチは有用になると思われる．提案されている手法はデータ解析の一種であるので，実際の問題に適用し，種々の改良を加える必要があると思われる．

第3章　ラフ集合による新しいコンジョイント分析の提案

3.1　はじめに

数理心理学の分野で開発されたコンジョイント分析 (Conjoint Analysis)[33, 34] は，予め用意された諸要因の組合せに対する全体評価から，各要因の部分効用を求める手法である．これは各要因の部分効用を求めることで，最も効果の高い要因の組合せを推定することが目的である．部分効用値を求める手法については，部分効用値から全体評価を構成するための結合法則に基づき，様々な手法が提案されているが，その最も代表的な手法に MONANOVA(Monotone Analysis of Variance) 法 [38, 40] がある．MONANOVA 法では部分効用値の和を全体評価とする加法モデルを仮定し，予め与えられた全体評価との誤差を最小化する効用値を推定している．しかし，現実問題においては必ずしも加法モデルが成り立たない場合が存在する．例えば，要因間に従属関係などがあるとすれば，加法モデルを仮定するのは困難である．諸要因と全体評価間の選好構造が未知である場合は，加法モデルという数理モデルの代わりに IF-Then ルールを用いた方がその構造を表現するのに適していると考えられる．

そこで，本論文ではラフ集合 (Rough Sets)[4] を用いたコンジョイント分析を試みる．ラフ集合はデータ解析のための近似概念である．ラフ集合では，質的データを含むデータベース（情報システム）から IF-Then 形式の相関ルールが抽出される．Pawlak のラフ集合 [4] は，識別不能関係という同値関係に基づき情報近似が定義されている．また，取り扱うデータや解析の用途により，同値関係によるラフ集合を拡張することが提案されている．例えば，多属性意思決定問題へ応用するためには，選好を表す順序関係

を取り扱う必要がある．Greco らは Dominance Relation[24, 25, 26] と呼ばれる弱順序関係によるラフ集合を提案している．コンジョイント分析の目的は，最も効果の高い要因の組合せを推定することであるので，一種の多属性意思決定問題として取り扱うことができる．そこで，Dominance Relation によるラフ集合をコンジョイント分析に適用し，与えられたデータから If-Then ルールを得ることが本論文の目的である．しかし Greco らのラフ集合では，各要因の要素間に順序関係があることが仮定されている．コンジョイント分析では質的データが取り扱われているので，質的データに順序関係を与える必要がある．このために，ここでは区間回帰分析 [16, 41] を用いて，質的データに順序関係を与える方法を提案する．区間回帰分析は，人間の主観的な判断が反映されているデータを含むシステムを分析するのに有効な手法である．すなわち，人間の判断が含まれている意思決定問題では，従来の回帰分析より区間回帰分析の方がコンジョイント分析で取り扱うデータを分析し，そのデータに順序関係を与えるのに適していると考えられる．区間回帰分析から得られる区間属性値を取扱うために Greco らの Dominance Relation を区間値における関係に拡張し，区間データに関する Dominance Relation を定義した．

3.2 コンジョイント分析

コンジョイント分析は，予め用意された諸要因の組合せに対する全体評価から各要因の個別の効用を求める手法である．通常，全体評価は順序関係で得られていると仮定し，この順序関係から各要因の効用値を算出する．

例えば，表1に示されているマーケティング問題を考える．ただし，スーパー，ディスカ，コンビに，ビジネスはスーパーマーケット，ディスカウントストアー，コンビニエンスストアー，ビジネス街の省略である．データは「立地」と「店舗形態」という2つの属性と，評価の基準となる売上金額とであり，表3.1には10店舗のデータが表されている．立地のカテゴリーとしては「駅ビル」･「郊外」･「住宅街」･「ビジネス街」が

表 3.1：マーケティング・データ

店舗	立地	形態	売上
1	駅ビル	スーパー	31 (百万円)
2	駅ビル	ディスカ	35
3	郊外	コンビニ	24
4	郊外	スーパー	27
5	郊外	ディスカ	34
6	住宅街	スーパー	37
7	住宅街	コンビニ	30
8	ビジネス	スーパー	21
9	ビジネス	コンビニ	29
10	ビジネス	ディスカ	25

ある．また，店舗形態のカテゴリーとしては「スーパーマーケット」・「ディスカウントストアー」・「コンビニエンスストアー」がある．コンジョイント分析では，これらのデータから，各要因の部分効用を算出する必要がある．ここでは，MONANOVA 法による部分効用値を求める方法を以下に示す．

効用値を算出する際には，各要因の効用から全体評価を構成する結合法則が必要となる．コンジョイント分析の代表的な手法である MONANOVA 法では，各要因の部分効用から全体評価 Z を構成する結合法則を次のように仮定している．

$$Z = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{b}_i^t \mathbf{x}_i \tag{3.1}$$

ここで，$\mathbf{b}_i^t = (b_{i1}, \cdots, b_{in_i})^t$ は属性 i の部分効用値ベクトル，M は属性数であり，$\mathbf{x}_i$ はそのサンプルに属性 i で該当している要因 $k_i \in (1, \cdots, n_i)$ の成分のみ 1 をとり，それ以外の値は 0 をとる 0-1 ベクトルである．ただし，n_i は属性 i の要因数を表わす．この加法的モデルの下で，次の $Stress$ と呼ばれる指標を最小にするような部分効用値を算出する．

$$Stress = \sqrt{\frac{\sum_j \left(z_j - \hat{Z}_j\right)^2}{\sum_j \left(\hat{Z}_j - \overline{\hat{Z}}\right)^2}} \tag{3.2}$$

z_j は予め与えられた全体評価，$\hat{Z}_j$ は (3.1) 式から得られる推定値である．また，$\overline{\hat{Z}}$ は $\hat{Z}_j$ の平均値ベクトルである．この $Stress$ 値の分子は予め与えられた全体評価と推定値との二乗誤差を表し，分母は推定値と平均推定値との二乗誤差を表している．すなわち $Stress$ 値を最小化するということは，推定評価値を予め与えられた全体評価に近づけつつ，各データの推定値の分散を大きくすることを意味している．この問題は，分数2次計画法によって解くことができる．

表-1 の例について，MONANOVA 法を用いて各要因の部分効用値を求める．まず，(3.1) 式に対応するモデルは次のようになる．

$$
\begin{aligned}
Z &= \mathbf{b}_1^t\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_2^t\mathbf{x}_2 \\
&= b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{13}x_{13} + b_{14}x_{14} \\
&\quad + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} + b_{23}x_{23}
\end{aligned}
$$

分数2次計画法によって求められた部分効用値は次のように得られている．

$$
\begin{aligned}
&b_{11} = 22.97(\text{駅ビル}) && b_{12} = 17.39(\text{郊外}) \\
&b_{13} = 28.03(\text{住宅街}) && b_{14} = 12.69(\text{ビジネス}) \\
&b_{21} = 8.49(\text{スーパー}) && b_{22} = 16.23(\text{ディスカ}) \\
&b_{23} = 6.36(\text{コンビニ})
\end{aligned}
$$

ただし，解の唯一性は保証されていないが，解の順序性は保証されているので，以下の解析結果には影響はない．

以上の結果から，立地の属性に関しては住宅街・駅ビル・郊外・ビジネスの順で，また営業形態の属性についてはコンビニ・スーパー・ディスカの順に効用が高いことがわかる．また最も効果の高い組合せは (3.1) 式の加法的モデルより，各属性の中で最も効用の高い要因同士の組合せとなるので,「住宅街」と「ディスカ」となる．このように，各要因の部分効用が分かれば，それらから最も効果の高い組合せを推定することが可能となる．

MONANOVA 法では加法モデルを仮定することにより，統計的観点からのパラメータ推定法が提案されている．しかし，現実の問題では加法モデルが必ずしも成り立っているとは限らない．この結合法則に関しては様々な議論がなされているが，現実の問題に遭遇したときに，各要因と全体評価との間の構造関係が明確であることは稀である．したがって，どのようなモデルが妥当であるかを議論することは難しい．また，効用関数モデルでは得られる推定値に対して，意思決定者が何らかの解釈を与える必要性が出てくる．このような意思決定問題においては，データ構造を意思決定者が理解しやすい形で表現することが必要であると考える．このような立場から，効用関数を求めるより，データから IF-Then ルールで抽出した方がより多くの特徴が得られると考えられる．本章では，コンジョイント分析で扱われる問題から IF-Then 形式の特徴を抽出する方法を提案する．

3.3 ラフ集合を用いたデータ分析

ラフ集合は Pawlak によって提案された様々な種類のデータを近似するための基本概念である．識別不能関係と呼ばれる同値関係を用いて，あいまいな分類に対して上界と下界という 2 つの側から近似が行われる．また，表 1 のようの全体評価のような決定に関わる属性を含んでいる場合は，これらの近似から IF-Then ルールを獲得できる．同値関係によるラフ集合では共通の値を持つデータ同士がクラスを形成し，そのクラスに基づき上・下近似が行われる．しかし，共通の値を持たないデータの場合，データが孤立するので，同値関係によるラフ集合では分析を行うことは難しい．そこで取扱うデータにより，同値関係より弱い関係，すなわち類似関係などを用いたラフ集合への拡張がなされている．立地や形態などの属性に順序関係がある場合は，多基準意思決定問題とみなせる．多基準意思決定問題を取扱うラフ集合の拡張としては，Greco らの Dominance Relation と呼ばれる順序関係によるラフ集合ある．彼らのラフ集合は「より良い指標を持つものは，より高く評価される」という観点から定義されていて，

ラフ集合により取扱える問題の範囲を大幅に広げていると思われる．Greco らのラフ集合では，属性の値に順序関係を持つデータのみが取扱われている．しかし，以下の方法を用いることにより，各要因間に順序関係を持たない質的データに順序関係を与えられ，コンジョイント分析に Dominance Relation によるラフ集合を用いることができる．

3.3.1 順序関係をもつデータへの変換

区間回帰分析を用いて，与えられた質的データに順序関係を与える方法 [43, 44] を説明する．そのため，以下のような区間回帰モデルを考える．

$$Z = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \tag{3.3}$$

ただし，属性 i に関する区間効用値ベクトルを $\mathbf{A}_i = (\mathbf{a}_i^t, \mathbf{c}_i^t)$ $(i = 1, \cdots, M)$ で表す．中心ベクトルと幅ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in_i})^t$ と $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \cdots, c_{in_i})^t$ で表す．また，$\mathbf{x}_i$ は属性 i の要因ベクトルであり，これは要因 $k_i \in (i = 1, \cdots, n_i)$ の成分のみ 1 をとり，それ以外の値は 0 をとる 0-1 ベクトルである．n_i は属性 i の要因数であり，M は属性の数である．区間演算により区間出力 Z は以下のように表すことができる．

$$Z = (\sum_{i=1}^{M} \mathbf{a}_i^t \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^{M} \mathbf{c}_i^t \mathbf{x}_i) \tag{3.4}$$

J 個の入力データ $\mathbf{x}_{ij}$ と出力データ (評価値)z_j が与えられたとき，z_j を包含し，区間線形モデルの幅の合計が最小となる区間係数 $\mathbf{A}_i$ を求めることになる．この問題は次の線形計画問題 [16, 41] に帰着される．

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i} \quad & \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{M} \mathbf{c}_i^t \mathbf{x}_{ij} \\ s.t.) \quad & \sum_{i=1}^{M} \mathbf{a}_i^t \mathbf{x}_{ij} - \mathbf{c}_i^t \mathbf{x}_{ij} \leq z_j \\ & z_j \leq \sum_{i=1}^{M} \mathbf{a}_i^t \mathbf{x}_{ij} + \mathbf{c}_i^t \mathbf{x}_{ij} \\ & \mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i \geq \mathbf{0} \ (i = 1, \cdots, M) \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) 式を解くことから，区間効用値 $\mathbf{A}_i = (\mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i)$ が得られる．これにより，属性の各カテゴリーに大小関係が以下のように定義できる．すなわち，区間の順位づけには以下の区間選好関係の定義 [42] を用いる．区間値 $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ が与えられたとき，

$$A \succeq B \leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b},\ \overline{a} \geq \overline{b}. \tag{3.6}$$

と定義する．

次に意思決定者が出力データ z_j を幾つかのクラスに分類する．これは意思決定者が理解しやすくするために IF-Then 形式のルールで知識を表現しようとすると，連続値よりは意思決定者の把握できる範囲でクラス分けする方が望ましいと考えられるからである．R 個のクラスに分類したときの r 番目のクラスを $Cl_r (r = 1, 2, \cdots, R)$ と表わし，以下の性質を満たしているとする．

$$\begin{aligned} & z_j \in Cl_r,\ \exists\, r, \forall\, j \\ & Cl_s \cap Cl_t = \phi,\ \forall\, s, t (s \neq t) \\ & Cl_R \succeq \cdots \succeq Cl_r \succeq \cdots \succeq Cl_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ただし，上式の $\succeq$ は出力データの順序関係に基いたクラスの選好関係を表している．

以上の操作により，各属性のデータが順序関係を持ち，出力のデータを意思決定者の判断によって R 個に分類された．これらの変換データを用いて，Dominance Relation によるラフ集合を用いて，与えらたデータから知識を抽出する方法を以下に述べる．

3.3.2 Dominance Relation によるラフ集合を用いたデータ分析

Dominance Relation によるラフ集合を用いて，作成された情報システムのデータ分析を行う．Dominace Relation は Greco ら [24, 25, 26] によって以下のように定義されている．

属性の集合 P について，"y が x を支配している"という関係を yD_Px と表し，以下のように定義する．

$$yD_Px \leftrightarrow \ \forall\, q \in P,\ f(y,q) \geq f(x,q) \tag{3.8}$$

ただし，$f(x,q)$ はデータ x が持つ属性 q の属性値を表している．

本論文では，$f(x,q)$ が区間効用値として得られているので，拡張された Dominance Relation を次のように定義する．

定義 3.1.

属性の集合 P について，"y が x を支配している"という関係を yD'_Px と表し，以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
& yD'_Px \leftrightarrow \\
& \forall\, q \in P,\ f(y,q) \succeq f(x,q) \leftrightarrow \\
& \min_{u \in f(y,q)} u \geq \min_{v \in f(x,q)} v,\ \ \max_{u' \in f(y,q)} u' \geq \max_{v' \in f(x,q)} v'
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ただし，$f(x,q)$ が区間値であるので，(3.8) 式を拡張した (3.9) 式で定義されている．

D'_P より，x に対する支配集合 $D'^{+}_P(x)$ と被支配集合 $D'^{-}_P(x)$ が次のように定義できる．

$$D'^{+}_P(x) = \{y \in U | yD'_Px\} \tag{3.10}$$

$$D'^{-}_P(x) = \{y \in U | xD'_Py\} \tag{3.11}$$

次に，意思決定者によって分類されたクラスの累積集合を定義する．

定義 3.2. 累積集合 (Cumulative set[24, 25, 26])

$$Cl^{\geq}_t = \bigcup_{s \geq t} Cl_s \tag{3.12}$$

$$Cl^{\leq}_t = \bigcup_{s \leq t} Cl_s \tag{3.13}$$

$Cl_t^{\geq}$ と $Cl_t^{\leq}$ をそれぞれ上方累積集合 (Upward cumulative set), 下方累積集合 (Downward cumulative set) と呼ぶ.

累積集合はそれぞれ以下のように解釈されている.

$x \in Cl_t^{\geq} \leftrightarrow$ "x は少なくともクラス t に属している"

$x \in Cl_t^{\leq} \leftrightarrow$ "x はたかだかクラス t に属している"

$D_P'^{+}(x)$ と $D_P'^{-}(x)$ により累積集合 $Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq}$ を近似する. $D_P'^{+}(x)$ による $Cl_t^{\geq}$ の上・下近似集合は以下の通りである.

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq}) = \{x \in U | D_P'^{+}(x) \subseteq Cl_t^{\geq}\} \tag{3.14}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq}) = \bigcup_{x \in Cl_t^{\geq}} D_P'^{+}(x) \tag{3.15}$$

上記の上・下近似集合の意味は次のようになる. 属性集合 P について, $\underline{P}(Cl_t^{\geq})$ は x を支配する対象集合の評価が確実にクラス t 以上に属しているような x の集合を表し, $x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})$ は x を支配する対象集合の中にクラス t 以上に属している対象が存在していることを意味する. この下近似集合から, $\underline{P}(Cl_t^{\geq})$ に属している x を支配するデータは必ずクラス t 以上に属しているというルールが導かれる. すなわち, ある $x^* \in Cl_t^{\geq}$ について, 次のような IF-Then ルールが得られる.

- If $f(x, q_1) \succeq f(x^*, q1)$ and $f(x, q_2) \succeq f(x^*, q2)$, $\cdots$ and $f(x, q_M) \succeq f(x^*, qM)$, then $x \in Cl_t^{\geq}$.

同様に, $D_P'^{-}(x)$ による $Cl_t^{\leq}$ の上・下近似集合は以下の通りである.

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq}) = \{x \in U | D_P'^{-}(x) \subseteq Cl_t^{\leq}\} \tag{3.16}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq}) = \bigcup_{x \in Cl_t^{\leq}} D_P'^{-}(x) \tag{3.17}$$

$D_P'^{-}(x)$ による $Cl_t^{\leq}$ の上・下近似集合の意味は次のようになる. 属性集合 P について, $\underline{P}(Cl_t^{\leq})$ は x に支配されているデータ集合が確実にクラス t 以下に属しているような x

の集合を表し，$x \in \overline{P}(Cl_t^{\leq})$ は x に支配されている対象集合の中にクラス t 以下に属している対象が存在していることを意味している．この下近似集合から，$x \in \underline{P}(Cl_t^{\leq})$ である x に支配されている対象は必ずクラス t 以下に属しているというルールが導かれる．すなわち，ある $x^* \in Cl_t^{\leq}$ について，次のようなIF-Thenルールが得られる．[24, 25, 26]

- If $f(x, q_1) \preceq f(x^*, q1)$ and $f(x, q_2) \preceq f(x^*, q2)$,
  $\cdots$ and $f(x, q_M) \preceq f(x^*, qM)$, then $x \in Cl_t^{\leq}$.

また，上近似集合から次のようなIF-Thenルールが得られる．

- If $f(x, q_1) \succeq f(x^*, q_1)$ and $f(x, q_2) \succeq f(x^*, q2)$,
  $\cdots$ and $f(x, q_{p'}) \succeq f(x^*, q_{p'})$ and
  $f(x, q_{p'+1}) \preceq f(x^{**}, q_{p'+1})$ and $f(x, q_2) \preceq f(x^{**}, q2)$ $\cdots$ and $f(x, q_M) \preceq f(x^{**}, q_M)$,
  then $x \in Cl_s \cup Cl_{s+1} \cup \cdots Cl_t$.

ただし，$O = \{q_1, \cdots, q_{p'}\}$，$O' = \{q_{p'+1}, \cdots, q_M\}$ とすると，$O \cup O' = C$ かつ $O \cap O' \neq \phi$ である．ただし，C は属性の全体集合である．また，x^*, x^{**} は得られるルールを支持するデータを表す．

3.4 数値例

まず表3.1から，区間回帰分析を用いて各属性の要因の区間部分効用値を算出する．表3.2，3.3は立地と店舗形態のそれぞれの要因の区間効用値が表されている．また，意思決定者が売上について表3.4のような4つのクラスに分類したとする．ただし，売上の範囲を0から100までと仮定している．表3.2，表3.3から各属性の要因について，次のような順序関係が得られる．ただし，形態に関する部分効用値は区間ではなく実数値として得られる．

$$\text{立地：}\quad \text{住宅街} \succeq \text{駅ビル} \succeq \text{郊外},$$
$$\text{住宅街} \succeq \text{ビジネス}$$

表 3.2：立地に関する
区間部分効用値

カテゴリー	区間部分効用値
駅ビル	10
郊外	$[6, 9]$
住宅街	$[12, 16]$
ビジネス	$[0, 11]$

表 3.3：店舗形態に関する
区間部分効用値

カテゴリー	区間部分効用値
スーパー	21
コンビニ	18
ディスカ	25

表 3.4：意思決定者による
クラス分類

クラス	範囲
Cl_4	$[35, 100]$
Cl_3	$[30, 35)$
Cl_2	$[25, 30)$
Cl_1	$[\ 0, 25)$

$$\text{形態：}\quad \text{ディスカ} \succeq \text{スーパー} \succeq \text{コンビニ}$$

これらの順序関係から得られる $D_P'^{+}(x), D_P'^{-}(x)$ により，分割したクラスの累積集合 $Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq}$ の上・下近似は以下の通りである．

$$\underline{P}(Cl_2^{\geq}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 10\}$$

$$\underline{P}(Cl_3^{\geq}) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

$$\underline{P}(Cl_4^{\geq}) = \{2, 6\}$$

$$\overline{P}(Cl_2^{\geq}) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\overline{P}(Cl_3^{\geq}) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

$\overline{P}(Cl_4^{\geq}) = \{2, 6\}$

$\underline{P}(Cl_1^{\leq}) = \{3\}$

$\underline{P}(Cl_2^{\leq}) = \{3, 4, 8, 9, 10\}$

$\underline{P}(Cl_3^{\leq}) = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{P}(Cl_1^{\leq}) = \{3, 8, 9\}$

$\overline{P}(Cl_2^{\leq}) = \{3, 4, 8, 9, 10\}$

$\overline{P}(Cl_3^{\leq}) = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

下近似集合から得られる全てのルールを表3.5と表3.6に示す．例えば表3.5のルール1，すなわち"立地：$\succeq$ 駅ビル，店舗形態：$\succeq$ スーパー，売上：$Cl_3^{\geq}$"は"立地が駅ビルより良く店舗形態がスーパーより良い組合せであれば，その売上は少なくともクラス3である"というルールを表している．MONANOVA法と同様に，これらのルールより表3.1に存在しないデータについてのクラスの推定を行うことができる．

表3.5，表3.6から，個々のデータについて注目すると，一番高いクラスであるクラス4についてのルールは以下の4つが挙げられる．

- If $f(x, \text{立地}) \succeq$ 駅ビル and
  $f(x, \text{形態}) \succeq$ ディスカ， then $x \in Cl_4^{\geq}$ (A)

- If $f(x, \text{立地}) \succeq$ 住宅街 and
  $f(x, \text{形態}) \succeq$ スーパー， then $x \in Cl_4^{\geq}$ (B)

- If $f(x, \text{立地}) \preceq$ 駅ビル and
  $f(x, \text{形態}) \preceq$ ディスカ， then $x \in Cl_4^{\leq}$ (C)

- If $f(x, \text{立地}) \preceq$ 住宅街 and
  $f(x, \text{形態}) \preceq$ スーパー， then $x \in Cl_4^{\leq}$ (D)

表 3.5:$D_P'^{+}$ による下近似集合から得られる IF-Then ルール

ルール	立地	店舗形態	売上
1	$\succeq$ 駅ビル	$\succeq$ スーパー	$Cl_3^{\geq}$
2	$\succeq$ 駅ビル	$\succeq$ ディスカ	$Cl_4^{\geq}$
3	$\succeq$ 郊外	$\succeq$ コンビニ	$Cl_1^{\geq}$
4	$\succeq$ 郊外	$\succeq$ スーパー	$Cl_2^{\geq}$
5	$\succeq$ 郊外	$\succeq$ ディスカ	$Cl_3^{\geq}$
6	$\succeq$ 住宅街	$\succeq$ スーパー	$Cl_4^{\geq}$
7	$\succeq$ 住宅街	$\succeq$ コンビニ	$Cl_3^{\geq}$
8	$\succeq$ ビジネス	$\succeq$ スーパー	$Cl_1^{\geq}$
9	$\succeq$ ビジネス	$\succeq$ コンビニ	$Cl_1^{\geq}$
10	$\succeq$ ビジネス	$\succeq$ ディスカ	$Cl_2^{\geq}$

表 3.6:$D_P'^{-}$ による下近似集合から得られる IF-Then ルール

ルール	立地	店舗形態	売上
1	$\preceq$ 駅ビル	$\preceq$ スーパー	$Cl_3^{\leq}$
2	$\preceq$ 駅ビル	$\preceq$ ディスカ	$Cl_4^{\leq}$
3	$\preceq$ 郊外	$\preceq$ コンビニ	$Cl_1^{\leq}$
4	$\preceq$ 郊外	$\preceq$ スーパー	$Cl_2^{\leq}$
5	$\preceq$ 郊外	$\preceq$ ディスカ	$Cl_3^{\leq}$
6	$\preceq$ 住宅街	$\preceq$ スーパー	$Cl_4^{\leq}$
7	$\preceq$ 住宅街	$\preceq$ コンビニ	$Cl_3^{\leq}$
8	$\preceq$ ビジネス	$\preceq$ スーパー	$Cl_2^{\leq}$
9	$\preceq$ ビジネス	$\preceq$ コンビニ	$Cl_2^{\leq}$
10	$\preceq$ ビジネス	$\preceq$ ディスカ	$Cl_2^{\leq}$

ルール(A)と(C)とを同時に考えると次のルールが得られる．

- 立地：駅ビル，形態：ディスカ $\rightarrow Cl_4$ (E)

また，ルール(B)と(D)から次のルールが得られる．

- 立地：住宅街，形態：スーパー $\rightarrow Cl_4$ (F)

さらに，ルール(E)と"住宅街$\succeq$駅ビル"という関係，あるいは"ルール(F)とディスカ$\succeq$スーパー"という関係を用いると，次のルールを導くことができる．

- 立地：住宅街，形態：ディスカ $\rightarrow Cl_4$

MONANOVA法の結果と比較すると，3番目の結論は，MONANOVA法で得られる結果と一致していることがわかる．その一方で提案手法では，1番目と2番目の組合せについてもクラス4に属しているので有望な組合せとみなしている．加法モデルを仮定しているMONANOVA法では，全ての組合せを線形順序で並べ替えることができる．しかし，現実の問題を加法モデルとして仮定できるかどうかの判断が難しい場合，より多くの効果のありそうな組合せを挙げられるという点で，提案手法の方が適していると考えられる．

3.5 おわりに

本章では，ラフ集合を用いてコンジョイント分析を行う手法を提案した．すなわち，区間回帰分析を用いて，質的データに順序関係を与えることで，GrecoらのDominace Relationを区間値に拡張したラフ集合分析が可能となっている．従来の統計的手法では，予め何らかの数理モデルを仮定する必要がある．その数理モデルに基づいてパラメータの推定を行い，データの持っている特徴が表現される．一般的には線形モデルが仮定されるが，現実の問題において仮定したモデルが妥当であるかどうかを検討することは困難である．また，こういった手法はデータ全体の特徴を調べるのには適し

ているが，データの細かい特徴を表現するのには適していない．コンジョイント分析においても線形モデルを仮定しているため，推定された部分効用の高い要因同士を組合わせが最も効果的な組合せであると考えられている．しかし現実の問題では，必ずしも加法性が成り立つとは限らない．組合せによっては，互いの効用を高め合うような相乗現象や互いの効用を打ち消しあう相殺現象が起こりうる．またそういった現象を記述するのに，数理モデルを用いることは不十分である．ラフ集合では，データの特徴をIF-Thenルールで表現できるため，意思決定者にとってデータ構造からの知識がより明確になっていると思われる．また，前述のような現象を表現するのにIF-Thenルールでの表現は適している．

本提案手法では，ラフ集合の概念に基づき，データ間の関係を用いて分析を行っているのでパラメータの推定を必要としない．従来のラフ集合では，同値関係に基づいて分析がなされている．しかし，取扱うデータや問題によって，分析に用いられる関係は見直すべきである．コンジョイント分析では，最も効果的な組合せを推定するという目的から，同値関係よりはむしろ順序関係のようにデータ構造に何らかの方向性がある関係を用いた方がより厳密に分析できると考えられる．Dominance Relationによるラフ集合は，こういった点でコンジョイント分析に適用しやすい．しかし，各属性の値同士に順序関係が常にあるとは限らないので，順序関係を何らかの手段によって与えなければならないという問題点がある．本手法では区間回帰分析を用いて，属性値間に順序関係を与える手法を示したが，この点については議論の余地があると考えられる．

本章では，IF-Thenルールによってデータ構造が表現できるということと，1つの結論ではなく得られた結果から有望な組合せの候補を提示しているという点で，コンジョイント分析に新しい枠組みを構築したといえる．

第4章 線形計画問題による区間AHPモデル

4.1 はじめに

意思決定で複数の代替案の評価を行うときには，評価基準を明確にし，各評価基準の重要度を設定しておく必要がある．しかし一般社会においては，長さや重さ・時間などの物理量では測定できない問題も多く存在する．このような場合，代替案を測定する尺度は人間の直感に頼らざる得ない．人間の主観的であいまいな判断を用いて，各評価基準に対する重要度 (ウェイト) を求める方法に AHP(Analytic Hierarchy Process)[45] がある．AHP の研究はその後，一対比較法を改良した絶対評価法が提案された．また各評価基準間や各代替案間に従属関係がある場合の内部従属 (Inner Dependence) 法や，評価基準と代替案の間に従属関係がある場合の外部従属 (Outer Dependence) 法も提案された．現在では，これらの従属関係をネットワーク上で表現した ANP(Analytic Network Process)[46] と呼ばれる手法が確立されている．これらについての解説は文献 [47, 48] に示されている．

AHP の重要度算出法ついて簡単に説明する．まず一対比較評価を，X_i の X_j に対する一対比較評価を a_{ij} とし，これは「X_i が X_j より何倍重要か」を表す．ここで，X_i は代替案 i を表している．$a_{ij}=1$ は同等を意味し，その選好の強さに応じて，a_{ij} はより大きな値をとる．a_{ji} は X_j が X_i より重要である度合を表わし，これは a_{ij} の逆数 $a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$ によって定義されている．全ての一対比較評価を行い，一対比較行列 A が形成される．EV(Eigen Vector) 法 [45] では，ウェイト算出のために一対比較行列 A より

次の固有値問題を解く.

$$Aw = \lambda w \tag{4.1}$$

この問題の最大固有値に対する固有ベクトル w を各代替案の重要度とする. また, 一対比較評価の整合度 (Consistency Index) は, 得られた最大固有値を用いて以下の式で計算される.

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda - n}{n - 1} \tag{4.2}$$

ただし, n は代替案の数を表す.

一般に意思決定者の下す判断は必ずしも一貫していないので, 評価の整合性の問題が存在する. EV 法では, このように最大固有値を利用して, 整合度と呼ばれる一対比較評価の整合性の度合を示す指標が得られるという特徴がある. 他方, ウェイトを推定する手法としては, データに含まれる誤差を考慮し与えられたデータと推定値の間の誤差二乗和や対数誤差二乗和を最小にするウェイト推定を行う LS(Least Square) 法 [45, 49] や LLS(Least Logarithmic Square) 法 [45, 50] などが提案されている. さらに意思決定者の不確実性を区間値や確率変数として求める方法が提案されている [51, 52, 53]. Saaty と Vagas[51] は, 一対比較値に一様分布を仮定して, シミュレーションにより各代替案のウェイトの平均・分散を算出する方法を提案した. また Arbel らは, シミュレーションを行わずに区間一対比較値を用いて選好順位を決定する手法として, Prefernce Programming[53] を提案している [52]. この手法は, 区間データを包含し, かつウェイトの総和が 1 となる実行可能領域を求め, その各端点の値から選好順位を決定するというものである. このようにウェイトを区間や確率変数として求める手法では, 一対比較値は区間値や確率変数で与えられる. またウェイトを区間値や確率変数として求めるので, これらを用いて順位逆転 (Rank Reversal) 確率を算出する方法なども提案されている [51, 53]. 不確実性を考慮したモデルでは,「推定値を示す区間や分布の中に適当な一対比較値が存在していれば整合性を満たしている」と解釈されている [54].

一般に AHP での整合性の問題は推移律との関係がある. Arbel は推移律が弱推移律

(Weak Transitivity) と強推移律 (Strong Transitivity) に分けられることを述べている [52]. 弱推移律は「X_A が X_B より選好し，X_B が X_C より選好されるならば，X_A は X_C より選好される」という関係であり，これは

$$X_A \succeq X_B, X_B \succeq X_C \Rightarrow X_A \succeq X_C \tag{4.3}$$

と表現できる．一方強推移律は,「X_A が X_B より 3 倍選好され，X_B が X_C より 2 倍選考されるなら，X_A は X_C より 6 倍選好される」というものである．これは AHP における完全整合性 (Perfect Consistency) を表し，

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj},\ \forall\, i, j, k \tag{4.4}$$

と表現できる．ただし，a_{ij} は一対比較行列の要素である．

強推移律が成立する場合は，EV 法の推定値は与えられた一対比較値と一致する．経験的に，弱推移律が成立する場合は，EV 法における整合度が高くなる傾向にある．EV 法ではウェイトが実数値で求められるので全順序関係が得られる．弱推移律のみが成立する場合は，得られる全順序関係が与えられた弱推移関係に反することがある．これを順位の逆転関係といい，この場合には矛盾した結果が得られる．

以上のような現象は与えられたデータの不整合性から生じている．したがって，このデータの不整合性を表現するために区間モデルを用いて，データのあいまいさを区間に反映する区間 AHP モデルを提案する．ここでは，区間ウェイトにより評価のあいまいさを反映し，区間ウェイトは評価の不整合性を示していると解釈している．すなわち本論文では，区間ウェイトを推定する区間 AHP モデルを定式化する．ただし，区間 AHP モデルという概念はすでに文献 [52, 56] で，述べられている．文献 [55] では，区間一対比較行列が与えられ，区間の幾何平均からウェイトの区間を算出している．提案モデルでは，従来の区間 AHP とは異なり，数理計画問題として定式化がなされている [57, 61, 62, 63].

まず通常の実数値の一対比較データを取り扱う．一対比較行列に整合性がない場合でもデータの不整合性を反映した区間推定ができる区間 AHP モデルを定式化する．この

モデルは田中ら [41] の可能性回帰モデルの定式化の概念に基づいたものである．データの可能性を考慮し，それら全ての一対比較値を包含するような区間 AHP モデルを提案する．この区間 AHP モデルの区間ウェイト推定問題は，線型計画 (Linear Programming) 問題に帰着できる．提案モデルの数値例から以下のことがいえる．与えられたデータが強推移律を満たすと，提案モデルから得られる推定値は実数になり，完全にデータを復元できる．与えられたデータが弱推移律を満たせば，区間に関する全順序関係が得られる．弱推移律が成立しない場合は，半順序関係となる．このように，データの不整合性が区間として表現できるので，評価が半順序関係で得られる．データの不整合性を半順序関係で表現する方が全順序関係で表現するより，より実体にあっていると考えられる．例えば，グループ意思決定問題において，各個人の一対比較データを統合した実数値の一対比較値を考えると，ウェイトは半順序関係として得られることが多いと考えられる．区間 AHP モデルはデータに依存して全順序関係または半順序関係が得られることが他の手法と異なり，これが提案モデルの特徴である．また線形計画問題に帰着させているので，解が容易に得られる [57, 61]．

次に人間の感覚をより的確に表現する手段として，一対比較値に区間判断を許した場合の区間 AHP モデルを提案する．提案モデルは複数人の意思決定者の判断を統合して，得られる区間一対比較値を取り扱うこともできる．区間データを扱うので，可能性推定と必然性推定として，「上近似モデル」と「下近似モデル」が定式化できる．これらは 2 つの線形計画問題に帰着できるので，解が容易に得られる．上近似・下近似モデルという概念は，Pawlak[3, 4] の提案したラフ集合の概念に類似している．すなわち，あいまいな現象は下近似モデルと上近似モデルとによって近似できるということである．なお，提案モデルより得られる区間ウェイトの順序関係は，よく知られた区間の半順序関係 [42] を用いることにより得られる．一般には，区間ウェイトであるので，半順序関係が得られる．

最後に簡単な数値例を用いて，提案したモデルについての妥当性を検討している．

4.2 実数値データによる区間 AHP モデル

まず一対比較値が従来のように実数値で与えられる場合について，区間ウェイトを推定する区間 AHP モデルを提案する．田中らの区間回帰分析 [41] では，観測されたデータにはすべて可能性があると考えて，観測データ全てを包含するように推定区間回帰モデルを定式化している．そこでこの概念を用い，一対比較値すべてに可能性があると考えて区間 AHP モデルを定式化し，これを $< IAHPC$(Interval AHP for Crisp Data)$>$ と表す．

まず代替案 X_i の区間ウェイトを $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と表わす．ただし，$\overline{w_i} \geq \underline{w_i} \geq \epsilon$ であり，ϵ は微小な正数を表す．ここで，評価基準 i の評価基準 j に対する推定区間ウェイト比を W_{ij} で表わすと，区間ウェイト $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ との関係は次のように表される．

$$\forall i, j\,(i \neq j) \;\; W_{ij} = \left[\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}}, \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}}\right] \tag{4.5}$$

ここでの問題は，与えられた一対比較値 a_{ij} に関して

$$\forall i, j\,(i \neq j) \quad a_{ij} \in W_{ij} \tag{4.6}$$

となるように，区間ウェイト $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ を推定することである．なお，w_i が正でかつ非零であることから，(4.6) 式を変形すると以下のようになる．

$$\forall i, j\,(i \neq j) \;\; a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i}, \; a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \tag{4.7}$$

与えられたデータを包含するような可能性区間のうち，各推定ウェイト幅 $\left(\overline{w_i} - \underline{w_i}\right)$ の和を最小にするような $\underline{w_i}, \overline{w_i}$ を求めることにする．

次に区間ウェイトの制約について考える．固有ベクトル法では，最大固有値 λ_{max} に対応する固有ベクトルはウェイトの総和が 1 になるように正規化されている．これは一種の確率測度への変換であり，各評価基準に対する選好確率とみなせる．そこで以下のような区間密度関数 [58, 59, 60] の定義を用いて区間ウェイトの正規化を提案する．

$$\sum_i \overline{w_i} - \max_j \left(\overline{w_j} - \underline{w_j}\right) \geq 1 \tag{4.8}$$

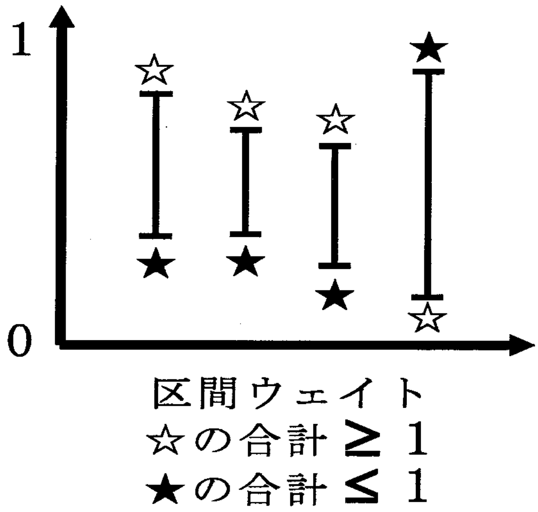

図 4.1: 区間密度関数の説明

$$\sum_i \underline{w_i} + \max_j \left(\overline{w_j} - \underline{w_j} \right) \leq 1 \tag{4.9}$$

(4.8) 式と (4.9) 式を変形すると，以下のように書き換えることができる．

$$\forall j \quad \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 \tag{4.10}$$

$$\forall j \quad \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 \tag{4.11}$$

ただし，$\Omega = \{1, \ldots, n\}$ である．

(4.10) 式は，j 以外の $n-1$ 個のウェイトが区間の上限値を取ったときに $1 - \sum \overline{w_i}$ が残る1つの区間の下限を上回らないことを意味する．同様に，(4.11) 式は j 以外の $n-1$ 個のウェイトが区間の下限値を取ったときに $1 - \sum \underline{w_i}$ が残る1つの区間の上限を下回らないことを意味する (図 4.1 参照)．すなわち，上記2式は区間の冗長性に関する制約式である．

以上の区間ウェイトに関する制約条件と (4.7) 式の制約条件，および区間ウェイトの幅の合計を最小にするという目的関数を考えると，区間 AHP モデルは次の線形計画問題になる．

$$< IAHPC >$$

$$\min_{\overline{w_i}, \underline{w_i}} \quad J = \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) \tag{4.12}$$

$$subject\ to \tag{4.13}$$

$$
\begin{aligned}
\forall\, i, j\,(i \neq j) & \qquad a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \\
\forall\, i, j\,(i \neq j) & \qquad a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i} \\
\forall j & \qquad \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 \\
\forall j & \qquad \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 \\
\forall i & \qquad \overline{w_i} \geq \underline{w_i} \\
\forall i & \qquad \underline{w_i}, \overline{w_i} \geq \epsilon
\end{aligned}
$$

<IAHPC> の最適解について，以下のことがいえる．

定理 4.1 線形計画問題 $< IAHPC >$ の最適解は存在する．

(証明)

すべての i に対して，$W_i = \left[\underline{w_i},\ \overline{w_i}\right] = [\epsilon,\ 1]$ とすれば，$< IAHPC >$ の制約条件を満足するので，実行可能解が存在する．したがって実行可能基底解が存在し，その中に目的関数 J を最小にする解が存在する．与えられた一対比較行列がどんなものであっても，$< IAHPC >$ によって最適なウェイトが得られる．　(証明終)

区間ウェイトに関する正規化の制約条件がなければ，最適解 W_i^* が $[\epsilon,\ \epsilon]$ となり，意味のない解になる．したがって，正規化の制約条件は必要なものである

評価者がウェイトに関して $w = (w_1, \cdots, w_n)$ の値を持っていると仮定し，この評価者が一対比較値として $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ を与えたとする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.2 一対比較行列として $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ が与えられたとすると，$< IAHPC >$ の最適解は $W_1 = [w_1,\ w_1], \cdots, W_n = [w_n,\ w_n]$ となり，元のデータが復元できる．

(証明)

$< IAHPC >$ の制約条件にすべての i に関して，$w_i = \underline{w_i} = \overline{w_i}$ を代入すれば，この解は可能解であることがわかる．またこの解は $J = 0$ であるので，最適解である．

(証明終)

ここで，上記モデルより得られる推定値は区間 $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ となるので，区間順序関係を以下のように定義する．いま2つの区間ウェイト $A = [\ \underline{a}, \overline{a}\ ]$ $B = [\ \underline{b}, \overline{b}\ ]$ が与えられるとすると，区間ウェイトの半順序関係 [15] は以下のような選好関係によって定義する．

$$A \succeq B \leftrightarrow A \sqcap B = B \tag{4.14}$$

$$A \succeq B \leftrightarrow A \sqcup B = A \tag{4.15}$$

ただし，演算子 $A \sqcap B$，$A \sqcup B$ の定義を以下に示す．

$$A \sqcap B = \{a \wedge b \mid a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\} \tag{4.16}$$

$$A \sqcup B = \{a \vee b \mid a \in [\underline{a}, \overline{a}], b \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\} \tag{4.17}$$

ただし，$\wedge$ と $\vee$ はそれぞれ min と max 演算である．選好関係が成り立つときの例を図4.2に，また選好関係が成り立たない場合を図4.3に示す．(4.14) 式と (4.15) 式とは等価であることは図4.2から明らかである．

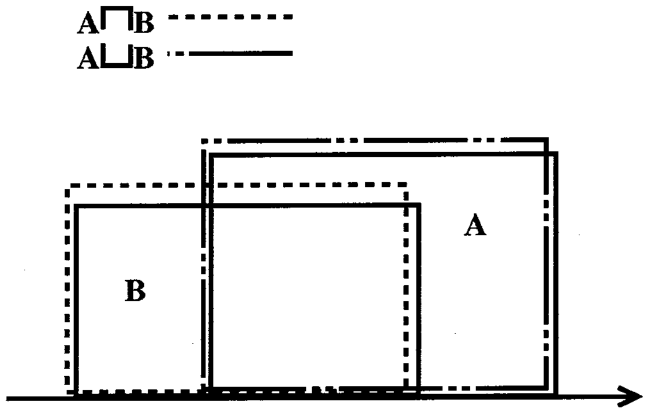

図 4.2: 区間の選好関係が成り立つ場合の例

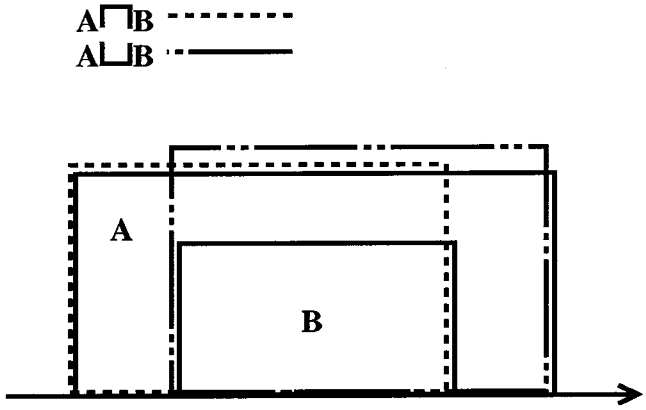

図 4.3: 区間の選好関係が成り立たない場合の例

数値例 1

区間 AHP モデルを用いた数値例を示す．一対比較行列 A の評価のパターンの代表例として，次の3つの場合を取り上げ，それぞれに対する一対比較行列の例を示す．

(a) 強推移律が成立している場合

強推移律を満たす行列を以下とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 弱推移律のみが成立している場合

次の弱推移律の関係を満たす一対比較行列の例を以下とする．

$$\forall\, i, j, k,\ a_{ij} \geq 1 \text{ and } a_{jk} \geq 1 \ \rightarrow\ a_{ik} \geq 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) 循環関係が存在している場合

循環関係は，強推移律も弱推移律も満たしていない状態を表している．循環関係が含まれている一対比較行列の例を以下とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

上記の数値例**(a)(b)(c)** を (4.12)，(4.13) 式に適用し，得られる区間推定ウェイトを表4.1，表4.2，表4.3 にそれぞれ示す．ただし，区間推定ウェイトは IAHPC 欄に，EV

表 4.1:数値結果

代替案	EV(C.I.=0.0)	IAHPC
W_1	0.5333	0.5333
W_2	0.2667	0.2667
W_3	0.1333	0.1333
W_4	0.0667	0.0667

表 4.2:数値結果

代替案	EV(C.I.=0.1497)	IAHPC
W_1	0.5515	0.6269
W_2	0.1943	$[0.1791, 0.2090]$
W_3	0.1986	$[0.1045, 0.1478]$
W_4	0.0556	$[0.0164, 0.0896]$

表 4.3:数値結果

代替案	EV(C.I.=0.3623)	IAHPC
W_1	0.3307	$[0.2000, 0.5333]$
W_2	0.3128	0.2667
W_3	0.1564	0.1333
W_4	0.2001	$[0.0667, 0.4000]$

法による推定値はEV欄にそれぞれ示されている．EV法では，与えられた一対比較行列を以下のような固有値問題を解き，その最大固有値 λ_{max} の固有値ベクトルを代替案のウェイトとする．$C.I.$ はEV法の整合度であり，与えられた一対比較評価の整合性を表す指標である． まず完全に整合性がある (a) の一対比較行列については，EV法による結果と全く同じになることがわかる (表4.1参照)．すなわち強推移律が成り立っているので評価に一貫性があり，あいまいさが存在していないといえる．次に弱推移律が成立する場合について考える．(b) の一対比較行列をみると明らかに順序関係は $1 \succeq 2 \succeq 3 \succeq 4$ であり，評価の選好関係は一貫している．しかし，例えば $a_{34} = 9$ であるが，$a_{31}a_{14} = \frac{7}{5}$，$a_{32}a_{24} = 1$ であるので，やや選好度合に矛盾があり強推移律が成立していない．EV法の結果は評価の選好関係と一致していないので，評価の逆転現象が起こっていることがわかる．しかし提案モデルの結果は選好関係と一致しているので，

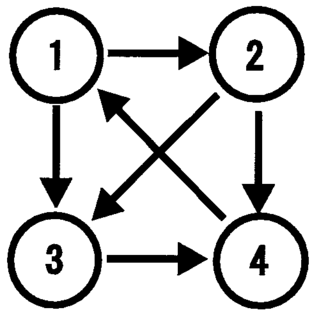

図 4.4: (c) の循環関係

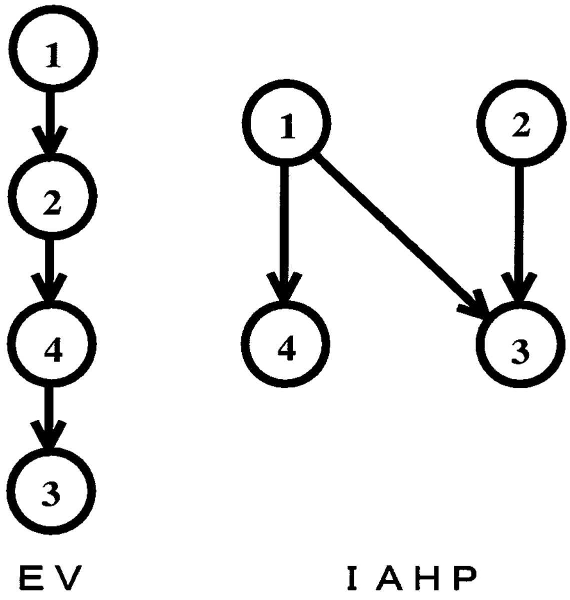

図 4.5: (c) の EV 法と IAHPC による選好結果

意思決定者の評価に沿った結果が得られているといえる．また選好度合の矛盾を反映して，ウェイト W_2, W_3, W_4 に幅が存在している (表 4.2 参照)．最後に循環関係がある場合について考える．(c) の行列では，ほとんどが $1 \succeq 2 \succeq 3 \succeq 4$ という関係を支持しているのに対して a_{14} のみが正反対の選好を示しているため，循環関係が存在し，これを図 4.4 に示す．ただし，① → ② は 1 が 2 を選好していることを示す．EV 法の結果は $1 \succeq 2 \succeq 4 \succeq 3$ となっているが，提案モデルでは 1 と 2，2 と 4，3 と 4 の間で順序関係がない (図 4.5 参照)．このように循環関係が存在している場合，評価にあいまいさが

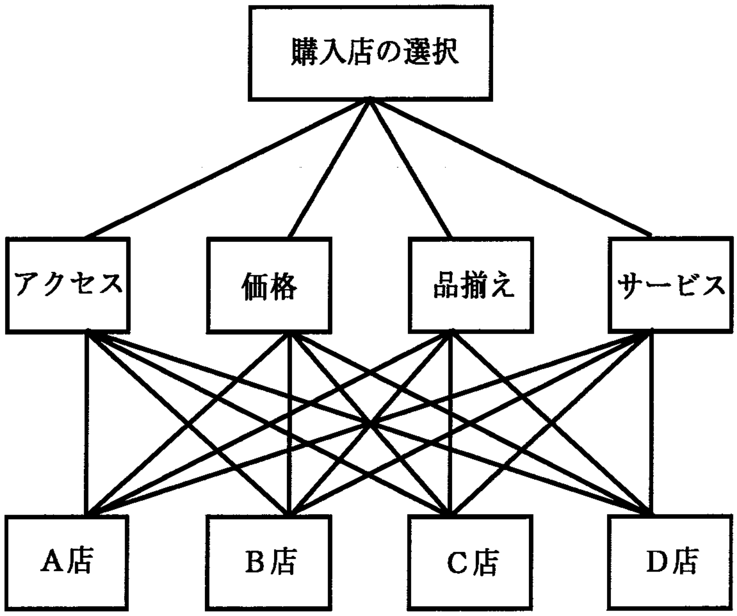

図 4.6: 問題の階層構造

あるので代替案のウェイト間で半順序関係が得られる．また整合度が悪くなると，それだけ評価にあいまいさが存在すると考えられるので区間の幅が大きくなるという性質がある．

数値例 2

ここである製品の購入店選択問題について，その数値例を紹介する．購入店選択の評価項目については，4 項目 (交通アクセス，価格，品揃え，サービス) を，代替案としてはA 店から D 店の 4 店舗を取り上げた．この階層図を図 4.6 に示す．表 4.4 は評価項目についての一対比較行列であり，それぞれの評価基準での一対比較値のデータを表 4.5 ～表 4.8 に示す．与えられた一対比較データを (4.12)，(4.13) 式の $< IAHPC >$ に適用し，得られる結果を表 4.9 ～表 4.13 に示す．

表 4.4:評価基準に関する一対比較表

	ア	価	品	サ
ア	1	3	5	5
価	1/3	1	3	5
品	1/5	1/3	1	2
サ	1/5	1/5	1/2	1

表 4.5:交通アクセスに関する一対比較表

	A	B	C	D
A	1	2	3	3
B	1/2	1	1	1/3
C	1/3	1	1	2
D	1/3	3	1/2	1

表 4.6:価格に関する一対比較表

	A	B	C	D
A	1	3	7	9
B	1/3	1	2	5
C	1/7	1/2	1	1
D	1/9	1/5	1	1

表 4.7:品揃えに関する一対比較表

	A	B	C	D
A	1	2	3	3
B	1/2	1	1	1
C	1/3	1	1	1
D	1/3	1	1	1

表 4.8:サービスに関する一対比較表

	A	B	C	D
A	1	3	3	5
B	1/3	1	1	2
C	1/3	1	1	3
D	1/5	1/2	1/3	1

表 4.9:評価基準についての数値結果

評価基準	IAHPC
アクセス	0.6019
価格	$[0.2006, 0.2315]$
品揃え	$[0.0772, 0.1204]$
サービス	$[0.0463, 0.1204]$

表 4.10:アクセスついての数値結果

代替案	IAHPC
A 店	0.5000
B 店	$[0.0833, 0.2500]$
C 店	0.1667
D 店	$[0.0833, 0.2500]$

表 4.11:価格についての数値結果

代替案	IAHPC
A 店	0.6383
B 店	0.2128
C 店	$[0.0745, 0.1064]$
D 店	$[0.0426, 0.0745]$

表 4.12:品揃えについての数値結果

代替案	IAHPC
A 店	0.4615
B 店	$[0.1795, 0.2308]$
C 店	$[0.1538, 0.1795]$
D 店	$[0.1538, 0.1795]$

表 4.13:サービスについての数値結果

代替案	IAHPC
A 店	0.5357
B 店	0.1786
C 店	$[0.1786, 0.2143]$
D 店	$[0.0714, 0.1071]$

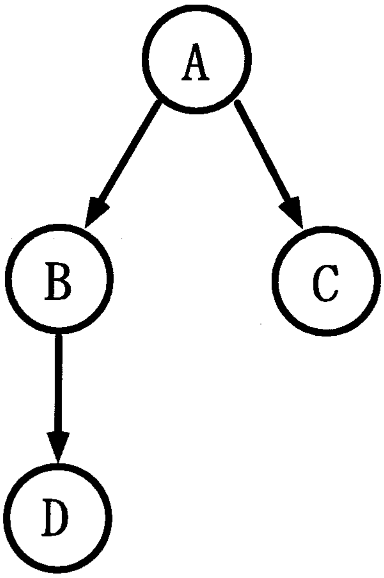

図 4.7: 総合ウェイトによる選好関係

表 4.14:区間演算による総合結果

代替案	総合ウェイト	順位
A 店	$[0.4894, 0.5687]$	1
B 店	$[0.1150, 0.2490]$	2-3
C 店	$[0.1354, 0.1723]$	2-4
D 店	$[0.0739, 0.2022]$	3-4

次にウェイトの統合化を行う．区間総合値 Y_i は区間演算により次式から求められる．

$$\begin{aligned} Y_i = \{y_i | y_i = \sum_j w_j x_{ij}, \\ \underline{w_j} \leq w_j \leq \overline{w_j}, \underline{x_{ij}} \leq x_{ij} \leq \overline{x_{ij}}\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

ただし，$\underline{w_i}$, $\overline{w_i}$ は各評価基準についての区間ウェイトの上限と下限であり，$\underline{x_{ij}}$, $\overline{x_{ij}}$ は評価基準 j に関する代替案 i の区間ウェイトの上限と下限である．(4.18) 式により区間総合値を計算し，これを表 4.14 に示す．ただし，順位 $2-3$ は B 店の総合評価は 2 番か 3 番であることを示している．区間選好関係を用いて得られる代替案の半順序関係を図 4.7 に示す．この図から A 店が一番選好されていることがわかる．評価問題にはあいまいさが存在するので，全順序関係より半順序関係の方がより現実の関係に近い

と考えられる.

4.3 区間一対比較値を用いた区間 AHP モデル

ここではより人間の直感的感覚を一対比較値に取り入れるために，区間データを取り扱う．まず一対比較値の区間表現は

$$[A_{ij}] = \left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right] \tag{4.19}$$

と表し，A_{ij} と A_{ji} との逆数の関係については，区間の両端が対応関係を持つように，

$$a_{ij}^L = \frac{1}{a_{ij}^U},\ a_{ij}^U = \frac{1}{a_{ij}^L} \tag{4.20}$$

と定義されている [52, 56]．ただし，行列の対角要素は $[A_{ii}] = [1,\ 1]$ とする．区間一対比較行列を $[A]$ と表す.

ここで，一対比較区間データについて，次の 2 つの観点から推定区間 W_{ij} を求めることにする．一つは「推定区間ウェイト比が，与えられた区間一対比較値に包含されている」という観点であり，もう一つは「推定区間ウェイト比が，与えられた区間一対比較値を包含する」という観点である [57, 61, 62, 63]．これを数式で表現すると，次のようになる.

$$W_{ij*} \subseteq [A_{ij}] \longleftrightarrow \text{下近似} \tag{4.21}$$

$$W_{ij}^* \supseteq [A_{ij}] \longleftrightarrow \text{上近似} \tag{4.22}$$

ただし，W_{ij*}, W_{ij}^* は推定下近似区間，推定上近似区間である．下近似区間 W_{ij*} は Greatest Lower であり，上近似区間 W_{ij}^* は Least Upper である．これは双対的数理モデルの概念に基づいている．区間一対比較値というあいまいなデータから「下近似モデル」と「上近似モデル」という 2 つの近似モデルが考えられる．この概念を図 4.8 に示す．下近似モデルにより推定される区間ウェイトを $W_{i*} = \left[\underline{w_{i_*}}, \overline{w_{i*}}\right]$，上近似モデルにより推定される区間ウェイトを $W_i^* = \left[\underline{w_i}^*, \overline{w_i}^*\right]$ と表すと，上記の制約条件 (4.21),(4.22) 式は

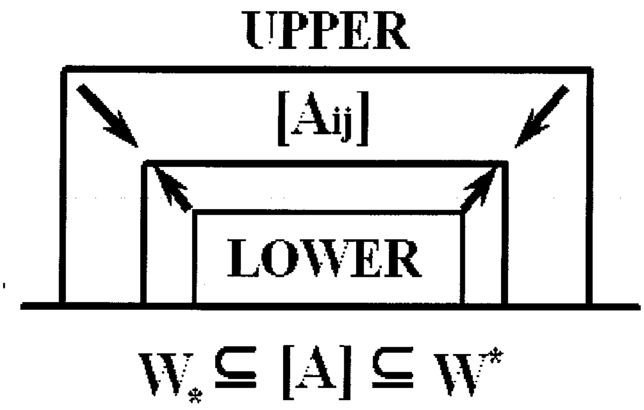

図 4.8: 一対比較値の上下近似

以下のように書き換えることができる.

$$
\begin{aligned}
& W_{ij*} \subseteq [A_{ij}] \quad \forall i, j\,(i \neq j) \\
& \leftrightarrow a_{ij}^{L} \leq \frac{\underline{w_{i*}}}{\overline{w_{j*}}} \leq \frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j*}}} \leq a_{ij}^{U} \\
& \leftrightarrow a_{ij}^{U}\underline{w_{j*}} \geq \overline{w_{i*}},\ a_{ij}^{L}\overline{w_{j*}} \leq \underline{w_{i*}}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

$$
\begin{aligned}
& W_{ij}^{*} \supseteq [A_{ij}] \quad \forall i, j\,(i \neq j) \\
& \leftrightarrow \frac{\underline{w_i}^{*}}{\overline{w_j}^{*}} \leq a_{ij}^{L} \leq a_{ij}^{U} \leq \frac{\overline{w_i}^{*}}{\underline{w_j}^{*}} \\
& \leftrightarrow a_{ij}^{U}\underline{w_j}^{*} \leq \overline{w_i}^{*},\ a_{ij}^{L}\overline{w_j}^{*} \geq \underline{w_i}^{*}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

下近似モデルを $< Lower >$ と表わし，区間一対比較行列 $[A]$ を下から近似することを考える．推定区間ウェイト比を W_{ij*} と表し，これが区間一対比較行列 $[A]$ に下から近づくために幅の合計が最大になるように決める問題となる (Greatest Lower)．すなわち，下近似モデルは (4.23) 式の拘束条件を考慮して，以下の線形計画問題として定式化できる．

$$< Lower >$$

$$\max_{\underline{w_i}_*, \overline{w_i}_*} \quad J_* = \sum_i \left(\overline{w_i}_* - \underline{w_i}_* \right) \tag{4.25}$$

$$\textit{subject to} \tag{4.26}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^U \underline{w_j}_* \geq \overline{w_i}_* \\
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^L \overline{w_j}_* \leq \underline{w_i}_* \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i}_* + \underline{w_j}_* \geq 1 \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i}_* + \overline{w_j}_* \leq 1 \\
\forall i & \overline{w_i}_* \geq \underline{w_i}_* \\
\forall i & \underline{w_i}, \overline{w_i}_* \geq \epsilon
\end{array}$$

上近似モデルを $< Upper >$ と表わし，区間一対比較行列 $[A]$ を上から近似することを考える．推定区間ウェイト比を W_{ij}^* と表わし，これが区間一対比較行列 $[A]$ に上から近づくために幅の合計が最小になるように決める問題となる (Least Upper)．すなわち，上近似モデルは (4.24) 式の拘束条件を考慮して，以下の線形計画問題として定式化できる．

$$< Upper >$$

$$\min_{\underline{w_i}^*, \overline{w_i}^*} \quad J^* = \sum_i \left(\overline{w_i}^* - \underline{w_i}^* \right) \tag{4.27}$$

$$\textit{subject to} \tag{4.28}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^U \underline{w_j}^* \leq \overline{w_i}^* \\
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^L \overline{w_j}^* \geq \underline{w_i}^* \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i}^* + \underline{w_j}^* \geq 1 \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i}^* + \overline{w_j}^* \leq 1 \\
\forall i & \overline{w_i}^* \geq \underline{w_i}^* \\
\forall i & \underline{w_i}^*, \overline{w_i}^* \geq \epsilon
\end{array}$$

$< Upper >$ と $< Lower >$ の最適解について次のことが成立する．

定理 4.3　線形計画問題 $< Upper >$ には常に最適解が存在する．

(証明)

すべての i に対して，$W_i^* = [\epsilon, 1]$ とすれば，制約条件を満たしているので，これは実行可能解である．ゆえに，最適解が常に存在する．　(証明終)

定理 4.4　線形計画問題 $< Lower >$ には常に最適解が存在するとは限らない．

(証明)

すべての i に対して，$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, $\forall\, i, j$ となるウェイト w_i^* が，区間ウェイト W_i の中に存在しなければ最適解は存在しない．　(証明終)

各代替案の区間ウェイト $W_1^o = \left[\underline{w_1}^o, \overline{w_1}^o\right], \cdots, W_n^o = \left[\underline{w_n}^o, \overline{w_n}^o\right]$ が事前に与えられていて，それらが区間ウェイトの正規化の条件を満たしているとすると，与えられた区間一対比較行列 $[A]$ は区間ウェイト $W^o = (W_1^o, \cdots, W_n^o)$ に基づいて次のように形成される．

$$a_{ij}^L = \frac{\underline{w_i}^o}{\overline{w_i}^o},\ a_{ij}^U = \frac{\overline{w_i}^o}{\underline{w_i}^o} \tag{4.29}$$

定理 4.5　(4.29) 式を満たす区間一対比較行列の下近似モデルの解と，上近似モデルの解は以下のようになる．

$$W_* = W^* = W^o \tag{4.30}$$

(証明)

ここでは下近似モデルのみ証明する．与えられたデータ

$$a_{ij}^L = \frac{\underline{w_i}^o}{\overline{w_i}^o},\ a_{ij}^U = \frac{\overline{w_i}^o}{\underline{w_i}^o}$$

を用いると，下近似モデルの制約条件を次のように書き換えることができる．

$$\frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j*}}} \leq \frac{\underline{w_i^o}}{\overline{w_j^o}},\ \frac{\overline{w_i^o}}{\underline{w_j^o}} \leq \frac{\underline{w_{i*}}}{\overline{w_{j*}}}. \tag{4.31}$$

したがって，$\underline{w_{i*}} = \underline{w_i^o}, \overline{w_{i*}} = \overline{w_i^o}$ は，全ての i について全制約条件を満たす許容解となっている．もし，$\underline{w_{i*}} = \underline{w_i^o}, \overline{w_{i*}} = \overline{w_i^o}$ であれば，(4.31) 式が等号で成立することになる．全ての i について，$\underline{w_{i*}} = \underline{w_i^o}, \overline{w_{i*}} = \overline{w_i^o}$ よりも目的関数を大きくする

$$\sum_i \left(\overline{w_i^o} - \underline{w_i^o}\right) < \sum_i \left(\overline{w_i'} - \underline{w_i'}\right). \tag{4.32}$$

となる別の解 $\underline{w_{i*}'}, \overline{w_{i*}'}$ が存在すると仮定する．この場合，

$$\overline{w_i^o} - \underline{w_i^o} < \overline{w_i'} - \underline{w_i'}. \tag{4.33}$$

となる区間ウェイトが少なくとも 1 つの i について存在することになる．これは，制約条件 (4.31) 式に矛盾する．したがって，$W_* = W^o$ が最適解である．上近似モデルについても，同様のことがいえる．　　　　(証明終)

次に，< *Lower* > に解が存在するかどうかを調べるために以下の線形計画問題を考える．

< Conjunction >

$$\min_{\overline{w_i},\underline{w_i}} \quad J_C = \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i}) \tag{4.34}$$

$$subject\ to \tag{4.35}$$

$$\begin{array}{rl}
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^L \underline{w_j} \leq \overline{w_i} \\
\forall\, i,j\,(i \neq j) & \underline{w_i} \leq a_{ij}^U \overline{w_j} \\
\forall j & \displaystyle\sum_{i \in \Omega - \{j\}} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 \\
\forall j & \displaystyle\sum_{i \in \Omega - \{j\}} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 \\
\forall i & \underline{w_i} \leq \overline{w_i},\ \underline{w_i} \geq \epsilon
\end{array}$$

この線形計画問題は，$\left[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U\right] \cap \left[\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}},\ \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}}\right] \neq \phi$ という制約条件のもとに構成されている．したがって，<Upper> 問題の制約条件より緩くなっているので，常に <Conjunction> 問題の解は存在する．

定理 4.6 線形計画問題 $< Lower >$ に解が存在するための必要十分条件は <Conjunction> 問題の $J_C = 0$ である．

(証明)

$J_C = 0$ ならば，最適解は区間ではなく実数値 $w_i^* = \underline{w_i} = \overline{w_i}$ である．したがって，与えられた区間一対比較値 $\left[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U\right]$ の中に $\frac{w_i^*}{w_j^*}$ となるウェイトベクトル w^* が存在する．したがって $< Lower >$ 問題に許容解が存在することになるので，$< Lower >$ に解が存在する．逆も同様に説明することができる．　(証明終)

数値例 3

5 つの代替案について次のような区間一対比較行列 $[A]$ が与えられたとする．

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & [1,4] & [1,5] & [1,4] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{3},3\right] & [2,4] \\ \left[\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{5},1\right] & \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & [1,2] \\ \left[\frac{1}{9},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{2},1\right] & 1 \end{pmatrix}$$

上述の区間値行列データ $[A]$ を $< Lower >$ と $< Upper >$ とに適用し，得られる結果を表 4.15 に示す．

(4.14) 式または (4.15) 式の半順序関係を表 4.15 の数値結果に適用すると，図 4.9 の結果が得られる．この例では，下近似モデルの解は全順序関係であり，上近似モデルの解は半順序関係である．これは上近似モデルの区間ウェイトの幅が下近似モデルの幅より広くなっているためと考えられる．いいかえると，下近似モデルでは必然性推定として，区間データを整合性に重点を置いた分析がなされているため，得られる順序関係は全順序関係となる傾向がある．一方，上近似モデルでは可能性推定として，区間データの可能性を考慮した分析がなされているため，得られる順序関係は半順序関係となる傾向がある．区間ウェイトに関する包含関係ではなく，図 4.8 のような比に関する包含関係が得られている．

表 4.15:数値結果

代替案	Lower	Upper
w_1	$[0.4225, 0.5343]$	$[0.2941, 0.4118]$
w_2	$[0.1781, 0.2817]$	$[0.1373, 0.2941]$
w_3	0.1408	$[0.0458, 0.1765]$
w_4	$[0.0763, 0.0845]$	$[0.0588, 0.1373]$
w_5	0.0704	$[0.0441, 0.1373]$

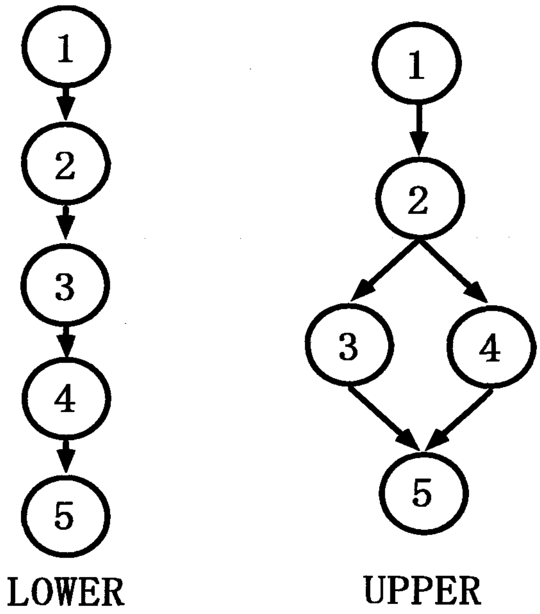

図 4.9: 表 15 の区間ウェイトの順序関係

4.4 おわりに

本章では区間ウェイトを推定する区間 AHP モデルを提案した．まず実数値の一対比較データを扱う場合は，データの可能性を考慮して評価の不整合性を区間ウェイトに反映するモデルを定式化した．また区間一対比較値が用いられる場合,「上近似モデル」と「下近似モデル」という 2 つの評価モデルを線形計画問題として定式化した．ラフ集合の観点から本研究をみると，あいまいなデータを下近似モデルと上近似モデルとで包含したといえる．いいかえると，あいまいな現象は 2 つの集合で近似できるというラフ集合の概念と本研究の 2 つのモデル化とが対応している．このような観点から，提案したモデルは従来の意思決定手法に適用できる可能性があると考えられる．

AHP では一対比較による相対評価を行い，意思決定者の主観的な判断を反映する．しかし，その主観的な判断にはあいまいさが含まれている場合が多く存在する．この種のあいまいさは評価の整合性に影響を与え，矛盾した評価として表面化する．本章で提示した数値例のように，EV 法では弱推移律が成り立っている場合でさえ，順序関係が逆転する可能性を持っている．実数値で重要度を推定する手法では，意思決定者

の判断の揺らぎの影響をまともに受けることが欠点となっている．こういったことから，区間値で重要度を求めることは重要であると考えられる．すなわち，区間重要度を推定することにより，推定意思決定者の判断のあいまいさを表現することが可能となる．また，区間値による順位づけは意思決定者の判断の揺らぎにも影響されないので，AHP による重要度算出手法の頑健性を高めることになる．

数値結果では，特定の重要度に区間が偏っていることがわかる．これは区間 AHP モデルは線形計画問題として定式化されているためである．線形計画問題では，その最適解が実行可能領域の端点に存在するので，このような解が得られる．この結果に対して,「ある特定の代替案に対する評価にあいまいさが存在している」という解釈ができる．しかし，意思決定者の判断のあいまいさが特定の評価対象のみに反映されるという現象が，実際に起こりうるかどうかについては議論の余地がある．本章では区間 AHP モデルが線形計画問題として定式化されているが，区間の幅の二乗和を最小化する 2 次計画問題への拡張が考えられる [61, 62, 63]．そこで次章では，その定式化したモデルによって得られた結果の比較を行い，意思決定者の判断のあいまいさがどのように反映されるかを検討する．

第5章　2次計画問題による区間AHPモデル

5.1　はじめに

AHP[45, 46] は多基準意思決定問題において有用な手法であり，様々な分野の問題に適用されている．AHP の特徴は，意思決定問題の階層構造への再構築，一対比較と呼ばれる相対評価，そして重要度の計算手法に分けられる．特に，一対比較による評価法とその評価から重要度を得るための計算手法について多くの研究がなされている．AHP では，相対評価によって人間の主観的な評価にある程度の客観性を持たせることを試みている．しかし，ウェイト算出のための数学的な基礎を先に構築されてしまったために，一対比較評価法とウェイトの算出法の間に矛盾が生じている．その例として，強推移律と弱推移律 [52] が挙げられる．強推移律は全ての一対比較評価に対して，

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \forall\, i, j, k \tag{5.1}$$

となる選好関係を満たしている状態を表す．これは，Saaty の提案した EV 法から派生した選好関係である．すなわち，意思決定者の判断が完全に一貫していれば，各々代替案のウェイト w_i で一対比較評価が以下のように復元できる [45].

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \ \forall\, i, j \tag{5.2}$$

しかし，強推移律は非常に厳しい条件である．意思決定者が一対比較評価をする際に，選好関係のみではなく選好の強さにまで一貫性を持たせるということは非常に難しい．したがって，選好関係は一貫していても，選好度合が一貫していないという状況はかなり存在しうると考えられる．弱推移律はこの選好関係のみを満たしている状況を指

す．こういった場合に，EV 法のように実数値でウェイトを算出すると，一対比較評価で与えられた選好関係に反した結果が得られる可能性がある．

前章では，意思決定者の判断のあいまいさを区間ウェイトに反映するための AHP モデルとして，区間 AHP モデルを提案した．ラフ集合の概念を用いて，あいまいなデータを必然性と可能性の概念から近似し，下近似モデルと上近似モデルという2つの双対的数理モデルが定式化されている．その際，それぞれの区間ウェイトの幅を最小化することで，データを最も上手く近似するよう試みた．したがって，区間 AHP モデルは2つの線形計画問題として帰着している．しかし，用いる目的関数を変更することで，異なる近似表現が可能ではないかと考える．

そこで本章では，区間 AHP モデルを2次計画 (QP:Quadratic Programming) 問題として定式化し，線形計画問題によるモデルとの比較を行う．

5.2 2次計画問題への拡張

まず一対比較値が従来のように実数値で与えられる場合について，区間ウェイトを推定する区間 AHP モデルを考える．前章と同様に，一対比較値すべてに可能性があると考えて区間 AHP モデルを定式化する．

代替案 X_i の区間ウェイトを $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と表わす．ただし，$\overline{w_i} \geq \underline{w_i} \geq \epsilon$ であり，ϵ は微小な正数を表す．ここで，評価基準 i の評価基準 j に対する推定区間ウェイト比を W_{ij} で表わすと，区間ウェイト $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ との関係は次のように表される．

$$\forall i, j\,(i \neq j)\;\; W_{ij} = \left[\frac{\underline{w_i}}{\overline{w_j}}, \frac{\overline{w_i}}{\underline{w_j}}\right] \tag{5.3}$$

ここでの問題は，与えられた一対比較値 a_{ij} に関して

$$\forall i, j\,(i \neq j) \quad a_{ij} \in W_{ij} \tag{5.4}$$

となるように，区間ウェイト $\left[\underline{w_i}, \overline{w_i}\right]$ を推定することである．なお，w_i が正でかつ非

零であることから，(5.4) 式を変形すると以下のようになる．

$$\forall i, j\,(i \neq j)\;\; a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i},\; a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \tag{5.5}$$

与えられたデータを包含するような可能性区間のうち，各推定ウェイト幅 $\left(\overline{w_i} - \underline{w_i}\right)$ の二乗の和を最小にするような $\underline{w_i}, \overline{w_i}$ を求めることにする．

これに区間ウェイトに関する制約条件を加味して，実数値による一対比較評価に対する区間 AHP モデルは，以下のような 2 次計画問題として定式化される．

$< IAHPCQP >$

$$\min_{\overline{w_i}, \underline{w_i}} \quad \sum_i (\overline{w_i} - \underline{w_i})^2 \tag{5.6}$$

$$subject\ to \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\forall\, i, j\,(i \neq j) &\quad a_{ij}\underline{w_j} \leq \overline{w_i} \\
\forall\, i, j\,(i \neq j) &\quad a_{ij}\overline{w_j} \geq \underline{w_i} \\
\forall j &\quad \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i} + \underline{w_j} \geq 1 \\
\forall j &\quad \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i} + \overline{w_j} \leq 1 \\
\forall i &\quad \overline{w_i} \geq \underline{w_i} \\
\forall i &\quad \underline{w_i}, \overline{w_i} \geq \epsilon
\end{aligned}$$

次に，区間一対比較値による区間 AHP モデルについて考える．

一対比較値の区間表現は

$$[A_{ij}] = \left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right] \tag{5.8}$$

と表し，A_{ij} と A_{ji} との逆数の関係については，区間の両端が対応関係を持つように，

$$a_{ij}^L = \frac{1}{a_{ij}^U},\; a_{ij}^U = \frac{1}{a_{ij}^L} \tag{5.9}$$

と定義されている．ただし，行列の対角要素は $[A_{ii}] = [1,\ 1]$ とする．区間一対比較行列を $[A]$ と表す．

ここで，次の2つの観点から推定区間 W_{ij} を求める．

$$W_{ij*} \subseteq [A_{ij}] \longleftrightarrow \text{下近似} \tag{5.10}$$

$$W_{ij}^{*} \supseteq [A_{ij}] \longleftrightarrow \text{上近似} \tag{5.11}$$

下近似モデルにより推定される区間ウェイトを $W_{i*} = \left[\underline{w_{i}}_{*}, \overline{w_{i*}}\right]$，上近似モデルにより推定される区間ウェイトを $W_{i}^{*} = \left[\underline{w_i}^{*}, \overline{w_i}^{*}\right]$ と表すと，上記の制約条件 (5.10),(5.11) 式は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
&W_{ij*} \subseteq [A_{ij}] \quad \forall i, j\,(i \neq j) \\
&\leftrightarrow a_{ij}^{L} \leq \frac{\underline{w_{i}}_{*}}{\overline{w_{j}}_{*}} \leq \frac{\overline{w_{i*}}}{\underline{w_{j}}_{*}} \leq a_{ij}^{U} \\
&\leftrightarrow a_{ij}^{U}\underline{w_{j}}_{*} \geq \overline{w_{i*}},\ a_{ij}^{L}\overline{w_{j}}_{*} \leq \underline{w_{i}}_{*}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
&W_{ij}^{*} \supseteq [A_{ij}] \quad \forall i, j\,(i \neq j) \\
&\leftrightarrow \frac{\underline{w_i}^{*}}{\overline{w_j}^{*}} \leq a_{ij}^{L} \leq a_{ij}^{U} \leq \frac{\overline{w_i}^{*}}{\underline{w_j}^{*}} \\
&\leftrightarrow a_{ij}^{U}\underline{w_j}^{*} \leq \overline{w_i}^{*},\ a_{ij}^{L}\overline{w_j}^{*} \geq \underline{w_i}^{*}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

下近似モデルを $< LowerQP >$ と表わし，区間一対比較行列 $[A]$ を下から近似することを考える．推定区間ウェイト比を W_{ij*} と表し，これが区間一対比較行列 $[A]$ に下から近づくために幅の二乗和が最大になるように決める問題となる (Greatest Lower)．すなわち，下近似モデルは (5.12) 式の拘束条件を考慮して，以下の2次計画問題として定式化できる．

$< LowerQP >$

$$\max_{\underline{w_i}_*, \overline{w_i}_*} \quad J_* = \sum_i \left(\overline{w_i}_* - \underline{w_i}_*\right)^2 \tag{5.14}$$

$$subject\ to \tag{5.15}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^U \underline{w_j}_* \geq \overline{w_i}_* \\
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^L \overline{w_j}_* \leq \underline{w_i}_* \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i}_* + \underline{w_j}_* \geq 1 \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i}_* + \overline{w_j}_* \leq 1 \\
\forall i & \overline{w_i}_* \geq \underline{w_i}_* \\
\forall i & \underline{w_i}, \overline{w_i}_* \geq \epsilon
\end{array}$$

上近似モデルを $< UpperQP >$ と表わし，区間一対比較行列 $[A]$ を上から近似することを考える．推定区間ウェイト比を W_{ij}^* と表わし，これが区間一対比較行列 $[A]$ に上から近づくために幅の二乗和が最小になるように決める問題となる (Least Upper)．上近似モデルは (5.13) 式の拘束条件を考慮して，以下の 2 次計画問題として定式化できる．

$< UpperQP >$

$$\min_{\underline{w_i}^*, \overline{w_i}^*} \quad J^* = \sum_i \left(\overline{w_i}^* - \underline{w_i}^*\right)^2 \tag{5.16}$$

$$subject\ to \tag{5.17}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^U \underline{w_j}^* \leq \overline{w_i}^* \\
\forall\, i,j\,(i \neq j) & a_{ij}^L \overline{w_j}^* \geq \underline{w_i}^* \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \overline{w_i}^* + \underline{w_j}^* \geq 1 \\
\forall j & \sum_{i \in \Omega - j} \underline{w_i}^* + \overline{w_j}^* \leq 1 \\
\forall i & \overline{w_i}^* \geq \underline{w_i}^* \\
\forall i & \underline{w_i}^*, \overline{w_i}^* \geq \epsilon
\end{array}$$

5.3 数値例

数値例 1

次の3つの代表的な場合について，提案モデルを適用する．

(a) 強推移律が成立している場合

強推移律を満たす一対比較行列の例を以下とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 弱推移律のみが成立している場合

次の弱推移律の関係を満たしている一対比較行列の例を以下とする．

$$\forall\, i, j, k,\ a_{ij} \geq 1 \text{ and } a_{jk} \geq 1 \ \rightarrow\ a_{ik} \geq 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) 循環関係が存在している場合

循環関係は，強推移律も弱推移律も満たしていない状態を表している．循環関係が含まれている一対比較行列の例を以下に表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 8 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

上記の数値例(a)(b)(c) を (5.6)，(5.7) 式に適用し，得られる区間推定ウェイトを表

表 5.1:(a) の数値結果

代替案	QP	LP
W_1	0.5333	0.5333
W_2	0.2667	0.2667
W_3	0.1333	0.1333
W_4	0.0667	0.0667

表 5.2:(b) の数値結果

代替案	QP	LP
W_1	$[0.6336, 0.6372]$	0.6087
W_2	$[0.1810, 0.2112]$	0.2029
W_3	$[0.1056, 0.1267]$	$[0.1014, 0.1696]$
W_4	$[0.0141, 0.0905]$	$[0.0188, 0.0870]$

表 5.3:(c) の数値結果

代替案	QP	LP
W_1	$[0.0414, 0.4517]$	$[0.2000, 0.5333]$
W_2	$[0.2259, 0.4623]$	0.2667
W_3	$[0.1129, 0.2590]$	0.1333
W_4	$[0.1156, 0.3312]$	$[0.0667, 0.4000]$

5.1，表 5.2，表 5.3 にそれぞれ示す．ただし，2 次計画問題による区間推定ウェイトは QP 欄に，前章の線形計画問題による推定値は LP 欄にそれぞれ示されている．まず完全に整合性がある (a) の一対比較行列については，線形計画問題による結果と全く同じになることがわかる (表 5.1 参照)．すなわち強推移律が成り立っていて評価に一貫性があるので，目的関数が異なっていたとしても，その結果は変わらないことがわかる．次に弱推移律が成立する場合について考える．(b) の一対比較行列をみると順序関係は $1 \succeq 2 \succeq 3 \succeq 4$ であり，推定ウェイトから得られる選好関係は全く一致している．しかし，線形計画問題による結果ではある一部分のウェイトに区間が形成されているが，2 次計画問題による結果によると全てのウェイトが区間値となっている．同様のことが，循環関係を持つ (c) の一対比較行列についても言える．また，(c) については推定ウェイトから得られる順序関係に違いが生じていることがわかる．すなわち，線形計画問

題による結果からは1と2，2と4，3と4の間で順序関係がない．しかし，2次計画問題による結果では，1と3，1と4の間で順序関係が存在しないことを支持している．このように循環関係が存在している場合，ウェイトの算出方法が異なると，そこから得られる順序関係も全く異なっていることがわかる．

数値例 2

次の区間一対比較行列に提案モデルを適用する．

$$[A_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & [1,4] & [1,5] & [1,4] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{5},5\right] & [2,4] \\ \left[\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{5},1\right] & \left[\frac{1}{5},5\right] & 1 & [1,2] \\ \left[\frac{1}{9},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{2},1\right] & 1 \end{pmatrix}$$

2つの近似モデルを用いると，表5.4のような結果が得られる．下近似モデルでは代替

表5.4：上記の区間一対比較行列から得られる推定ウェイト

代替案	LowerQP	UpperQP
W_1	$[0.3531, 0.4219]$	$[0.2942, 0.4172]$
W_2	$[0.1875, 0.3531]$	$[0.1391, 0.2942]$
W_3	$[0.0375, 0.1875]$	$[0.0981, 0.2045]$
W_4	$[0.0375, 0.1875]$	$[0.0589, 0.2175]$
W_5	$[0.0469, 0.1875]$	$[0.0589, 0.2175]$

案の順序関係として$1 \succeq 2 \succeq 5 \succeq 3, 4$となる線形順序が得られているが，一方で上近似モデルでは$1 \succeq 2 \succeq 3$及び，$1 \succeq 2 \succeq 4, 5$となる順序関係が得られるが，3と4，3と5の間で選好関係がないことが表5.4からわかる．

5.4 おわりに

本章では，前章で線形計画問題として定式化した区間 AHP モデルを2次計画問題として拡張した．あいまいなデータを近似する際に用いる目的関数を変更することによって，データの近似表現が異なるため，得られる区間ウェイトやその選好関係にも変化

を与える．また，線形計画問題による区間 AHP モデルでは一部のウェイトに区間が反映されるが，2 次計画問題による区間 AHP モデルでは全てのウェイトに区間表現がなされるという特徴がある．この特徴の解釈としては,「意思決定者の判断にあいまいさがあれば，全ての重要度に区間が反映される」となる．AHP では，代替案同士の全組合せの相対評価を行う．したがって，現実の問題ではどの相対評価にあいまいさが存在しているのか特定することができない．全ての重要度に区間を与えるというのは，最もリスクの少ない評価方法であるといえる．線形計画問題と 2 次計画問題で得られた結果は区間の幅の与え方が異なっているが，あいまいさの解釈にも様々な見解があり，これらの関係については今後の課題である．

第6章　結論

本論文ではラフ集合の意思決定問題への応用を試みた．ラフ集合の特徴としては，あいまいな情報を近似するための情報近似概念とIF-Then形式によるルール生成ための手法が挙げられるが，これらの特徴を適用可能であると思われる意思決定への応用手法について提案した．本論文で得られた成果と今後の課題を要約すると以下のようになる．

第2章では，ラフ集合の特徴である情報近似の概念について示した．あいまいな情報が与えられたときに，既存の知識により上側と下側から包含するように情報が近似される．これは，従来のファジィ理論における可能性と必然性の概念に対応している．また，これまでの集合近似概念を関数近似概念へと拡張することにより，従来数理モデルを通して取扱ってきたような意思決定問題について，ラフ集合の近似の概念を適用した．すなわち，あいまいな区間データが与えられたときに，その区間を包含する最小の区間を求める上近似関数と，区間に包含される最大の区間を求める下近似関数により，区間を上側と下側から近似する双対的モデルを提案した．このような下近似・上近似という2つの観点からデータを近似するという双対的数理モデルという概念はあまり研究されていない．今後，様々な問題についてその適用可能性を検討する．

第3章では，統計的手法であり，従来データ構造を関数モデルで表現していたコンジョイント分析について，その構造をIF-Then形式で抽出するための分析手法について提案した．コンジョイント分析の目的は，最も効果的な組合せを推定することである．コンジョイント分析では，予め線形モデルのような関数モデルを仮定されている．しかし，現実の問題との妥当性を議論することが不可能であり，またデータの詳細な

分析をすることが難しいので，関数モデルによるデータ表現には難点がある．IF-Then形式によるデータ構造の表現は，関数モデルに比べて理解しやすく柔軟性があり，相乗効果や相殺効果といった特別な組合せに個別に対応することができる．また，コンジョイント分析の目的である効果的な組合せの推定も可能であり，その組合せが幾つかの候補という形で提示される．コンジョイント分析は統計的手法ではあるが，その目的から組合せ最適化問題としての様相を持ち合わせている．そこで，ラフ集合の概念を組合せ最適化のアプローチへ展開可能であると考えられる

第4章及び第5章では，第2章で述べた双対的数理モデルの応用例として区間AHPモデルを示した．一対比較と呼ばれる相対評価は，人間の主観的な判断に基づいて与えられる．しかし，主観的な判断にはあいまいさが含まれている場合があり，従来の実数値によるウェイト算出法では順位逆転など様々な問題が指摘されている．そこで提案手法では，そのあいまいなデータを区間重要度により推定する方法を提案した．区間値で推定する利点としては，意思決定者のあいまいさを区間に反映できることと，意思決定者の判断に揺らぎがある場合にもその順位関係が安定していることである．AHPのように人間の主観的判断をデータとして取扱う場合，このような上下近似の概念に基づく数理モデルは有効であると考えられるが，5章では述べたように，その近似手法のためのモデル構築には様々な選択肢があり，その近似表現も多く存在しうると考えられので，議論の余地も多く残されている．

ラフ集合の研究自体がまだ始まったばかりで，国内でもその認知度はまだまだ低い．しかし，それだけ今後の展開が期待できる．ラフ集合の適用例としては，データ・マイニングや専門家の知識をベース化するためのエキスパートシステム構築などが挙げられるが，更にラフ集合について研究を深めることで，実際の意思決定行動への活用に繋げていきたい．

謝辞

本論文は大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻において，著者が行った研究の成果を取りまとめたものである．

本研究を遂行するにあたり，終始多大なる御指導と懇切なる御鞭撻を賜りました本学大学院工学研究科教授 石井博昭先生に感謝の意を表し深く御礼申し上げます．

本大学大学院工学研究科教授 伊東一良先生，谷田純先生，同助教授 森田浩先生，本学産業科学研究所助教授 柏原昭博先生には，本論文作成の上で細部にわたる御指導，また貴重な御意見を頂きましたことを心より御礼申し上げます．

本学大学院工学研究科助教授 斎藤誠慈先生，同助手 都田艶子先生には本研究を進めるにあたり，有益な御教示ならびに暖かな御配慮を頂きました．ここに深く感謝申し上げます．

広島国際大学教授 田中英夫先生には大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程在籍時より，本研究の遂行において終始適切な御指導御鞭撻を賜りました．ここに厚く御礼申し上げます．

また本大学大学院工学研究科博士後期課程在籍時に，あらゆる面で貴重な御意見御助力を頂いた石井研究室の皆様に心より感謝申し上げます．

最後に，今日まで物心両面で支援してくれた家族に感謝致します．

参考文献

[1] 戸田山和久：「論理学をつくる」，名古屋大学出版会 (2000).

[2] Z. Bonikowski, E. Bryniarski and U.Wybraniec Skaradowska : Extensions and intentions in the rough set theory, *Information Sciences*, Vol.107, pp.149-167 (1998).

[3] Z.Pawlak : Rough sets, *International Journal of Information Computer Sciences*, Vol.11, No.5, pp.341-356 (1982).

[4] Z.Pawlak : Rough Classification, *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol.20, 469-483 (1984).

[5] Fayyad, U. M., et al. (eds) : *Adavances in Knowledge Discovery and Data Mining*, AAAI Press (1996).

[6] L.Polkowski and A.Skowron : *Rough Sets in Data Mining*, I and II, Physica-Verlag (1998).

[7] N.Zhong : Rough Sets in Knowledge Discovery and Data Mining, 日本ファジィ学会誌 (2001).

[8] Z.Pawlak : Rough sets approach to knowledge-base decision support, *European Journal of Operational Research*, Vol.99, pp.48-57 (1997).

[9] M.Kryszkiewicz : Rough Set approach to incomplete information systems, *An International Journal of Information Sciences*, Vol.112, pp.39-49 (1998).

[10] S.Tsumoto : Automated Induction of Medical Expert System Rules from Clinical Databases based on Rough Set Theory, *Information Sciences*, Vol.112, pp.67-84 (1998).

[11] S.Tsumoto : Automated discovery of positive and negative knowledge in clinical database, *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, Vol.19, No.4, pp.56-62 (2000).

[12] R.Slowiski, C.Zopunidis and A.I.Dimitras : Prediction of company acquisition in Greece by means of the rough set approach, *European Journal of Operational Research*, Vol.100, pp.1-15 (1997).

[13] A.I.Dimitras, R.Slowinski, R.Susmaga and C. Zopounidis : Business failure prediction using rough sets, *European Journal of Operational Research*, Vol.114, pp.263-280 (1999).

[14] C.Zopounidis and M.Doumpos : A preference disaggregation decision support system for financial classification problems, *European Journal of Operational Research*, Vol.130, pp.402-413 (2001).

[15] 田中英夫，杉原一臣：ラフ近似による双対的数理モデル，日本ファジィ学会学会誌，Vol.13，No.6，pp.44- 51 (2002).

[16] 田中英夫：「ファジィモデリングとその応用」, システム制御学会編, 朝倉書店 (1990).

[17] L.A.Zadeh : Fuzzy Sets, *Information and Control*, Vol.8, No.3, pp.338-353 (1965).

[18] D.Dubois and H.Prade : *Fuzzy Sets and Systems - Theory of Applications*, Academic Press (1980).

[19] D.Dubois and H.Prade : Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets, *International Journal of General Systems*, Vol.17, pp.191-200 (1990).

[20] Z.Pawlak : Rough sets and fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.17, pp.99-102 (1985).

[21] D.Dubois and H.Prade : Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, *International Journal of General System*, Vol.17, pp.191-209 (1990).

[22] R.Slowinski and D.Vanderpooten : A generalized definition of rough approximation based on similarity, *IEEE Tran. on Knowledge and Data Engineering*, Vol.12, No.2, pp.331-336 (2000).

[23] M.Inuiguchi and T.Tanino : On rough sets under generalized equivalence relations, *Bulletin of International Rough Set Society*, Vol.5, No.1/2, pp.167-171 (2001).

[24] S.Greco, B.Matarazzo and R.Slowinski : Rough approximations of preference relations by dominance relations, *European Journal of Operational Research*, Vol.117, pp.63-83 (1999).

[25] S.Greco, B.Matarazzo and R.Slowinski : Rough Sets Theory for Multicriteria Decision Analysis, *European Journal of Operational Research*, Vol.129, pp.1-47 (2001).

[26] S.Greco, B.Matarazzo and R.Slowinski : New developments in the rough set approach to multi attribute decision analysis, *Bulletin of International Rough Set Society*, Vol.2, No.2/3, pp.57-87 (1998).

[27] Z.Pwalak : Rough Functions, *Bull. PAS*, Tech. Ser. 35, Vol.5-6, pp.249-251 (1987).

[28] Z.Pawlak : Rough Sets, Rough Real Functions, *ICS WUT Report*, pp.50-94 (1994).

[29] Z.Pawlak : On Some Issues Connected With Roughly Continuous Functions, *ICS WUT Report*, pp.21-95 (1995).

[30] Z.Pawlak : On Rough Derivatives, Rough Integrals and Rough Differential Equations, *ICS WUT Report*, pp.41-95 (1995).

[31] A.Skowron and C.M.Rauser : The Discerniblity Matrix and Functions in Information Systems, in R.Slowinski (ed) *Intelligent Decision Support. Handbook of Application and Advances of the Rough Set Theory*, Kluwer Academic Publishers, pp.331-362 (1992).

[32] J.Stefanowski : Rough sets theory and discriminant methods as tools for analysis of information systems. A comparative study, *Foundations of Computing and Decision Sciences*, Vol.17, pp.81-98 (1992).

[33] P.C.Fishburn : Methods for estimating additive utilities, *Management Science*, Vol.13, pp.435-453 (1967).

[34] P.C.Fishburn : Nontransitive additive conjoint measurement, *Journal of Mathematical Psychology*, Vol.13, pp.1-40 (1991).

[35] 河口至商：多変量解析入門 I, 森北出版株式会社 (1978).

[36] 河口至商：多変量解析入門 II, 森北出版株式会社 (1978).

[37] J.B.Kruskal : Multidimensional Scaling by Optimizing Goodness of Fit to a Nonmetric Hypothesis, *Psychometrika*, Vol.29, No.1 (1964).

[38] J.B.Kruskal : Analysis of Factorial Experiments by Estimating Monotone Transformations of the Data, *J. Royal Statist. Soc.*, Series B, Vol.27:2, pp.251-263 (1965).

[39] P.A.Green and V.R.Rao : Conjoint Measurement for Quantifying Judgemental Data, *Journal of Marketing Research*, VIII, pp.355-363 (1971).

[40] J.B.Kruskal and F.J.Carmone : MONANOVA, A Fortran-IV Program for Monotone Analysis of Variance (Non-Metric Analysis of Factorial Experiments), *Behav. Sci.*, Vol.14, pp.165-166 (1969).

[41] H.Tanaka and P.Guo : *Possibilistic Data Analysis for Operations Research*, Physica-Verlag(A Springer-Verlag Company), Heidelberg (1999).

[42] D.Dubois and H.Prade : Systems of Linear Fuzzy Constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.3, pp.37-48 (1980).

[43] K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Conjoint Analysis Based on Rough Approximations by Dominance Relations Using Interval Regression Analysis, *2002 World Congress on Computational Intelligence*, pp.763-766, May 2002, Hawaii Honolulu, USA.

[44] 杉原一臣，石井博昭，田中英夫，ラフ集合による新しいコンジョイント分析の提案，日本ファジィ学会学会誌 (投稿中).

[45] T.L. Saaty : *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill (1980).

[46] T.L. Saaty : *The Analytic Network Process*, RWS Publications (1996).

[47] 木下 栄蔵 : AHP の発展経過と諸問題, オペレーションズ・リサーチ, Vol.44, No.1, pp.8-12 (1999).

[48] 高橋 磐郎 : AHP から ANP への諸問題 I ～ V, オペレーションズ・リサーチ, Vol.42, No.1-6 (1998).

[49] K.O.Cogger and P.L.Yu : Eigenweight vectors and least distance approximation for revealed preference in pairwise weight ratios, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.46, pp.483-491 (1985).

[50] G.Crawford and C.A.Williams : A note on the analysis of subjective judgement matrices, *Journal of Mathmatical Psychology*, Vol.29, pp.387-405 (1985).

[51] T.L.Saaty and L.G.Vargas : Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, Vol.32, pp.107-117 (1987).

[52] A.Arbel : Approximate articulation of preference and priority derivation, *European Journal of Operational Research*, Vol.43, pp.317-326 (1989).

[53] A.Arbel and L.G.Vargas : Preference simulation and preference programming, robustness issues in priority derivation, *European Journal of Operational Research*, Vol.69, pp.200-209 (1993).

[54] M.S.Zahir : In corporating the uncertainty of decision judgements in the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, Vol.53, pp.206-216 (1991).

[55] 倉重 賢治, 亀山 嘉正, 宮崎 茂次 : AHPにおける対数型ファジィ数を用いた相対的重要度決定法, 日本経営工学会学会誌, Vol.50, No.4, pp.216-225 (1999).

[56] 小沢 知裕, 山口 俊和, 福川 忠昭 : 区間AHPを用いるDEA改良型領域限定法, オペレーションズ・リサーチ, Vol.38, No.9, pp.471-476 (1993).

[57] K.Sugihara, H.Tanaka and Y.Maeda : Interval Evaluation by AHP with Rough Sets Concept, *The 7th International Work shop, New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing*, pp.375-381, November 1999, Yamaguchi, Japan.

[58] 前田 豊, 田中 英夫 : 区間密度関数による非加法的確率測度, 日本ファジィ学会誌, Vol.11, No.4, pp.667-676 (1999).

[59] H.Tanaka, K.Sugihara and Y.Maeda : Non-Additive Measures by Interval Probability Functions, *Proceedings of International Workshop on Rough Set Theory and Granular Computing*, pp.63-67 (2001).

[60] H.Tanaka and K.Sugihara : Interval Probability and Its Application to Decision Problems, *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp.952-955 (2001).

[61] K.Sugihara, H.Tanaka and H.Ishii : On Interval AHP Models, *The 4th Asian Fuzzy Systems Symposium*, pp.251-254, June 2000, Tsukuba, Japan.

[62] K.Sugihara, H.Tanaka and H.Ishii : On Interval AHP models by quadratic programming, *The 17th European Conference on Operational Research*, July 2000, Budapest, Hungary.

[63] K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Interval Evaluations to Inconsistent Judgments in Analytic Hierarchy Process, *Proceedings of 3rd Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, pp.97-102, October 2000, Osaka, Japan.

発表論文一覧

発表原著論文

1. K.Sugihara and H.Tanaka : Interval Evaluations in the Analytic Hierarchy Process by Possiblity Analysis, *An International Journal of Computational Intelligence*, Vol.7, No.3, pp.567-579 (2001).

2. K.Sugihara, H.Tanaka and Y.Maeda : Interval Evaluation by AHP with Rough Sets Concept, *Lecture Notes in Artificial Intelligence 1711, New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing*, pp.375-381 (1999).

3. K.Sugihara, H.Tanaka and H.Ishii : On Interval AHP Models, *The 4th Asian Fuzzy Systems Symposium*, pp.251-254 (2000).

4. K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Conjoint Analysis Based on Rough Approximations by Dominance Relations Using Interval Regression Analysis, *2002 World Congress on Computational Intelligence*, pp.763-766 (2002).

5. K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : On Conjoint Analysis by Rough Approximations based on Dominance Relations, *International Journal of Intelligent Systems* (accepted).

6. K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Interval Priorities in AHP by Interval Regression Analysis, *European Journal of Operational Research* (投稿中).

7. 杉原一臣，石井博昭，田中英夫，ラフ集合による新しいコンジョイント分析の提案，日本ファジィ学会学会誌 (投稿中).

解説

1. 田中英夫，杉原一臣：ラフ近似による双対的数理モデル，日本ファジィ学会学会誌，Vol.13，No.6，pp.44-51 (2002).

研究発表等

1. 杉原一臣，田中英夫：区間 AHP モデルによる区間評価，第 15 回ファジィシステムシンポジウム論文集，pp.211-212，1999 年 5 月，大阪.

2. K.Sugihara, H.Tanaka and H.Ishii : On Interval AHP models by quadratic programming，The 17th European Conference on Operational Research，July 2000，Budapest，Hungary.

3. K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Interval Evaluations to Inconsistent Judgments in Analytic Hierarchy Process，The 3rd Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty，pp.97-102，October 2000，Osaka，Japan.

4. K.Sugihara, H.Ishii and H.Tanaka : Fuzzy AHP with Incomplete Information，Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference，pp.2730-2733，July 2001，Vancouver，Canada.