

Title	グラフ理論的手法によるネットに関する研究
Author(s)	白川, 功
Citation	大阪大学, 1968, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2008
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

グラフ理論的手法による
ネットに関する研究

1968年1月

白 川 功

内 容 梗 概

本論文は、筆者が大阪大学大学院工学研究科博士課程（電子工学専攻）の学生として尾崎研究室において行ったグラフ理論的手法によるネットに関する研究を三章にまとめたものである。

諸論では研究の現状、その工学上の意義、および本研究の新しい諸成果について概説している。

第1章では、トポロジ的複雑さを不変とし、かつ理想変圧器を含まない等価変換に関する二接近法を考察する。その一つは、与えられた Y または Z 行列を適当に線形変換してそれを理想変圧器を含まない回路網として実現する方法であり、他の一つは、与えられた回路網に並列または直列接続しても、全体として原回路網と同一の動作をするような付加的回路網を求める方法である。さらに、この等価変換における変換パラメータを、注目する回路網関数の各素子値の変動に対する素子感度を最小にするという条件で決定する問題に関して考察している。

第2章では、グラフの平面分解問題における特別の場合として、完全グラフおよび完全 Bipartite グラフについてその平面分解を論ずる。グラフの平面分解問題は多層印刷回路および多層集積回路の設計において重要であるが、その一般的なアルゴリズムは将来に待つとして、本章では、完全グラフおよび完全 Bipartite グラフについて、その平面分解における分解個数の最小値の上限を与え、かつそれに関連した分解アルゴリズムが示される。

第3章では、グラフの道の符号化問題とその応用について考察する。この問題の動機は、定期乗車券の自動改札化における通用径路の符号化およびその復号化問題によるものである。考察する問題をグラフ理論的に表わせば、与えられた節点または枝が指定された道の上にあるか否かの判定機構を容易にするような道の符号化の問題である。本章で考察する方法は、ある規準で木の枝に番号付けをし、与えられた任意の道をその両端の木枝の番号と通過する補木の枝により符号化するものであり、判定機構も与えられた道の符号をシリアルに調べて行えるという簡単な方法である。この問題の応用として、定期乗車券の通用径路の符号化のほかに、さらに輸送輸の区分け問題に関して考察している。

結論では、本研究で得られた結果と今後に残された問題について述べている。

グラフ理論的手法によるネットに関する研究

目 次

緒 論	1
第1章 トポロジー的複雑さを不変とする等価変換と 素子感度問題	4
1.1 緒 言	4
1.2 諸定義	5
1.3 付加的回路網の並列接続による等価変換	6
1.4 線形変換による等価回路網	10
1.5 等価変換における素子感度	18
1.6 結 言	21
第2章 完全グラフおよび完全 Bipartite グラフの 平面分解	22
2.1 緒 言	22
2.2 諸定義	22
2.3 完全グラフの平面分解	24
2.4 完全 Bipartite グラフの平面分解	38
2.5 結 言	49
第3章 グラフの道の符号化問題およびその応用	53
3.1 緒 言	53
3.2 道の表示法	53
3.3 道の符号化	55

3.4	枝に関する判定機構	58
3.5	判定機構の簡単化	61
3.6	節点に関する判定機構	67
3.7	定期乗車券の自動改札化への応用	68
3.8	輸送網の区分け問題への応用	70
3.9	結 言	71
結 論		72
謝 辞		74
文 献		75

緒 論

本研究は、回路網トポロジーの分野における三つの問題—等価変換問題、グラフの平面分解問題、およびグラフの道の符号化問題—に関するものである。

第1章では、発表論文〔1〕、〔2〕を中心に回路網の等価変換およびそれに関連した素子感度に関して論じられる。

回路網トポロジーの理論において、与えられた $n \times n$ 次の Y または Z 行列を $n+p$ ($p \geq 1$) 節点 n 端子対回路網として構成する問題が最も興味あるものの一つである。 $p=1$ に関しては完全に解決されたといえるが、 $p \geq 2$ に関してはまだ解決されていない。この場合の構成手法は、大勢として、与えられた行列を負の枝アドミタンスをも許して構成し、つぎにそれを連続的な変換パラメータで等価変換し、負の枝アドミタンスを除いていくという手順で行われている。このように連続的なパラメータによる等価変換は上の問題において不可欠な道具である。一方、等価変換は、実際面では Norton 変換、 $Y-\Delta$ 変換、Zobel 変換等として広く行われており、また、純理論的な立場からは、Cauer、Guillemin、および大野—安浦の各氏によりその一般論が展開されているが、これらにおいては理想変圧器が自由に用いられている。実用的観点からは、理想変圧器を用いない等価変換の一般論が要求されるが、これは回路網理論における未解決重要な問題である。本章では、そのなかでも特に回路網のトポロジ—的複雑さを不変に保つ等価変換について論ずる。これには二つの接近法が考えられ、その一つは、注目している端子対間の特性を不変に保ちつつ、 Y または Z 行列を適当に線形変換して理想変圧器を含まない回路網として実現する方法であり、他の一つは、与えられた回路網に並列または直列接続しても全体として原回路網と同一の動作をするような付加的な回路網を求める方法である。

さらに、この等価変換法と関連して、回路網の素子感度の問題に関しても若干の考察を行つている。

第2章では、発表論文〔3〕、〔4〕、〔5〕および発表予定論文〔6〕を中心に、グラフの平面分解問題を、特に完全グラフおよび完全 Bipartite グラフに着目して論じられる。

与えられた非平面グラフを最小個数の平面部分グラフに分解する問題は、多層印刷回路および多層集積回路の設計等において応用面をもち、回路網トポロジーにおける重要な問題である。本章では、この問題の特別の場合として、完全グラフおよび完全 Bipartite グラフに関して、その平面分解における分解個数の最小値の上限を与え、かつそれに関連した分解アルゴリズムが示される。完全グラフに関しては、節点数の少ない特別な場合について二三の考察が行われているが、本章ではそれが統一的に論じられる。また、完全 Bipartite グラフに関しては、すでに Beineke 等により考察されているが、本章では、それとは全く異なる見地から、その分解アルゴリズムが示される。

第3章では、発表論文〔7〕、〔8〕を中心に、グラフの道の符号化問題およびその応用について述べられる。

日本では欧米と異なり定期乗車券は通用径路上の任意の駅で、かつ通用期間中は何度でも使用することができる。この二つの事項がその自動改札化を困難にしている。本章で考察する問題は、特にこの前者の事項に関連して生じたものであり、グラフ理論的に表わせば、与えられた節点または枝が指定された道の上にあるか否かの判定機構を容易にするような道の符号化の問題である。本章で考察する方法は、ある規準で木を選びかつその木枝に番号付けをし、与えられた任意の道をその両端の木枝の番号と、通過する補木の枝により符号化するものであり、判定機構も与えられた道の符号をシリアルに調べて行えると

いう簡単な方法である。さらに、この問題を論送網の区分け問題に応用している。

関 連 発 表 論 文

- [1] 渡部・白川・尾崎、"回路網の等価変換に関する二三の考察"、信学会回路網理研資料、CT65・10-18、昭40。
- [2] 白川・尾崎・渡部、"回路網の等価変換における素子感度について"、昭41信学会全国大会予稿、31、昭41。
- [3] 白川・高橋・尾崎、"On the decomposition of a complete graph into planar subgraphs"、J. Franklin Inst., Vol.283, No.5, May 1967。
- [4] 白川・高橋・尾崎、"完全グラフの平面部分グラフへの分解"、信学誌、50巻、11号、昭42。
- [5] 白川・高橋・尾崎、"完全Bipartiteグラフの平面分解について"、信学誌、50巻、10号、昭42。
- [6] 白川・高橋・尾崎、"On the planar decomposition of a complete bipartite graph"、J. Soc. Indst. Appl. Math., to be published.
- [7] 白川・嵩・尾崎、"On the coding of the paths in a graph and some applications"、J. Soc. Indst. Appl. Math., Vol.15, No.4, Dec. 1967.
- [8] 白川・嵩・尾崎・小田・井上、"定期乗車券の自動改札における通用経路の符号化問題"、情報処理、6巻、2号、昭40。

第1章 トポロジー的複雑さを不変とする等価変換と素子感度問題

1.1 緒言

与えられた関数を回路網として実現する過程において、われわれは種々の制約を受ける。回路網構成の段階で得られた回路素子値が部品として実現するのにコストが大であるとかその体積が大き過ぎる、あるいは素子値のパラツキが所望の特性に大きく影響を与えるという場合がしばしば生ずる。そこで、与えられた関数を満たす回路網を設計する場合、その関数を満たす等価回路網の中からある規準にかなった最適のものを選び出すことは理論的にも実用的にも重要な問題である。

一方、現在回路網トポロジーの分野において、与えられた $n \times n$ 次の Y (または Z) 行列を $n + p$ ($p \geq 1$) 節点をもつ n 端子対回路網として実現する問題が最も興味あるものの一つである。 $p = 1$ に対する1種素子回路網の場合、問題は完全に解決されたといえる ([1] - [6])。 $p \geq 2$ に対する一種素子回路網については、いろいろと議論されている ([7] - [11])。この場合の構成手法は、大勢として、最初に与えられた Y または Z 行列を負の枝アドミタンスをも許して構成し、つぎにその等価回路を求めて負の枝アドミタンスを除いていくという手順で行われている。このように等価変換は回路網トポロジーの分野においても極めて重要な意味をもっている。

回路網の等価変換は、実際面では Norton 変換、 $Y-\Delta$ 変換、Zobel 変換等として広く行なわれている。一方、純理論的な立場からは、Cauer [12]、Guillemin [13]、[14]、および大野-安浦 [15]、[16] の各氏により考察されているが、これらにおいては理想変圧器が自由に用いられて

いる。しかしながら、実用的観点から理想変圧器を用いない等価変換の一般論が要求されるが、これは回路網理論における未解決重要な問題の一つである。

等価変換一般についての考察は将来に待つとして、まず回路網のトポロジー的複雑さを変えない、すなわち独立な節点の個数または独立な閉路の個数を不変に保つという条件の下での等価変換問題に対しては、つぎの二つの接近法が有効であろう。その一つは、注目している端子対間の特性を不変にしつつ、与えられた Y または Z 行列を適当に線形変換してそれを理想変成器を含まない回路網として実現する立場であり、回路網トポロジーの回路網構成論を前提としている。他の一つは、ある回路網に並列（または直列）接続しても全体として元の回路網と同じ特性を有するような付加的回路網を求める方法であり、この場合も回路網トポロジー的考察を前提としている。

本章では主として上述の二つの変換法について考察し、さらにこれに関連した回路網の素子感度について若干の考察を試みる。

1.2 諸定義

($n+p$)端子対回路網 N （ただし $p \geq 1$ ）の第 i 端子対（ $i=1, 2, \dots, n+p$ ）の電圧 V_i および電流 I_i をそれぞれ第 i 要素とする列ベクトル V および I 、 N の Y 行列 Y に対して次のように分割する。

$$\begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{array}{|c|} \hline V_2 \\ \hline \end{array}} \right\} p \end{array} \quad (1.1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \quad \underbrace{\hspace{10em}}_p$

いま、第 $n+1, n+2, \dots, n+p$ 端子対を開放し、はじめの n 個の端

子対に着目した場合、この回路網を $N^*(p)$ で表わす。 $N^*(p)$ の Y 行列 $Y^*(p)$ は

$$Y^*(p) = Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} \quad (1.2)$$

で与えられる。

〔定義 1.1〕 $Y \rightarrow Y^*(p)$ の操作を N の第 $n+1, n+2, \dots, n+p$ 端子対に関する p 端子対縮約という。

〔定義 1.2〕 与えられた n 端子対回路網 N_0 の Y または Z 行列と同一のものを有するすべての n 端子対回路網を N_0 の等価 n 端子対回路網という。

〔定義 1.3〕 $(n+p)$ 端子対回路網 N の最後の p 端子対に関する p 端子対縮約により得られる n 端子対回路網 $N^*(p)$ の Y 行列 $Y^*(p)$ が与えられた n 端子対回路網 N_0 の Y 行列 Y_0 と等しいとき、 $N^*(p)$ を N_0 の p 等価 n 端子対回路網という。

1.3 付加的回路網の並列接続による等価変換

Y 行列がそれぞれ Y, Y' である二つの $(n+p)$ 端子対回路網 N, N' を図 1.1 のように並列接続してできた $(n+p)$ 端子対回路網を $N+N'$ で表わし、この $N+N'$ の最後の p 端子対に関する p 端子対縮約により得られる n 端子対回路網を $(N+N')^*(p)$ で表わす。 n 端子対回路網 $N^*(p)$ および $(N+N')^*(p)$ の Y 行列 $Y^*(p)$ および $(Y+Y')^*(p)$ が相等しければ、 $(N+N')^*(p)$ は $N^*(p)$ の等価 n 端子対回路網である。以下、 $(Y+Y')^*(p) = Y^*(p)$ を満たす付加的回路網 N' について考察する。

N の最後の p 端子対を開放したとき、(1.1) 式において $I_2 = 0$ であるから、

$$V_2 = -Y_{22}^{-1} Y_{21} V_1 \quad (1.3)$$

1) $I_2 = 0$ は I_2 の各要素が 0 であることを表わす。

すなわち、 N の最初の n 端子対に V_1 なる電圧を加えたとき、最後の p 端子対には上式 (1.3) の電圧 V_2 が現われる。そこで、 N' の最後の p 端子対を開放しておき、最初の n 端子対に N と同一の電圧 V_1 を与えたとき、最後の p 端子対に (1.3) と同一な電圧 V_2 が現われたとすれば、

$$V_2 = - (Y'_{22})^{-1} Y'_{21} V_1 \quad (1.4)$$

このとき、 N と N' を図 1.1 のように並列接続し、最後の

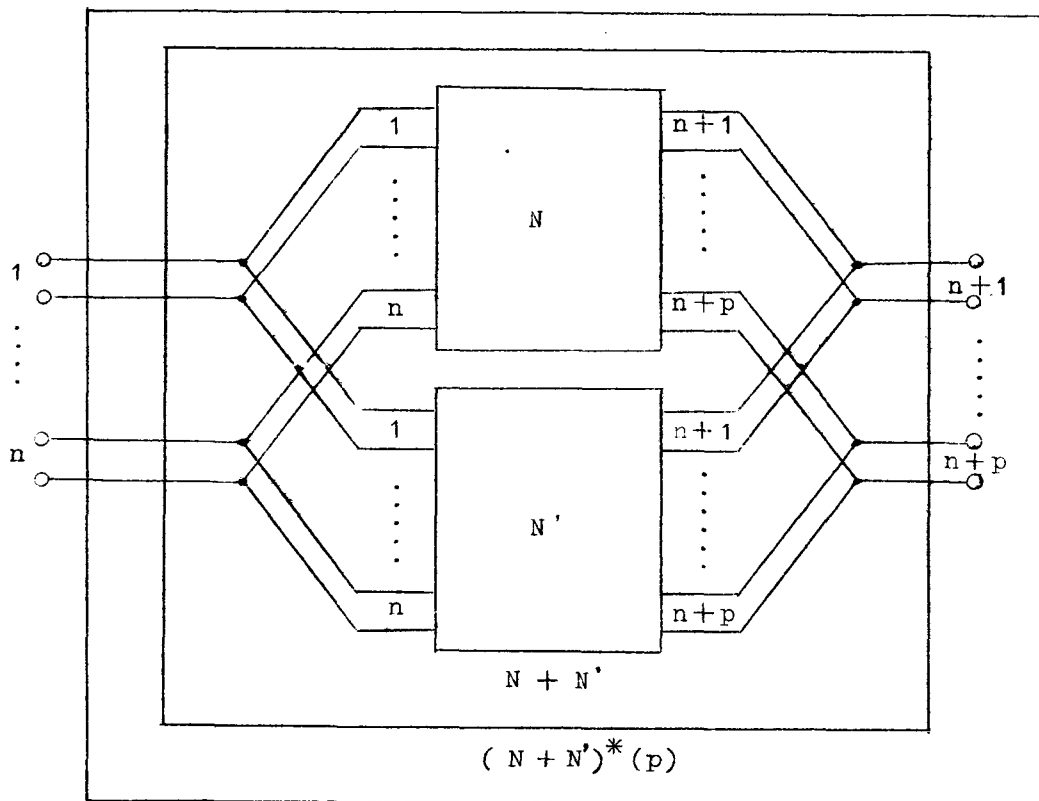


図 1.1 回路網 $N + N'$ および $(N + N')^*(p)$

p 端子対を開放し、最初の n 端子対に V_1 なる電圧を加えると、最後の P 端子対には (1.3) 式と同一の電圧が現われる。このとき、(1.3)、(1.4) 式から

$$(\mathbf{Y}'_{22})^{-1} \mathbf{Y}'_{21} = \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21}, \quad (1.5)$$

$$\therefore \mathbf{Y}'_{12} = \mathbf{Y}_{21}^T = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22}, \quad (1.6)$$

ただし、添字の T は転置を表わす。いま、 \mathbf{Y}'_{11} を

$$\mathbf{Y}'_{11} - \mathbf{Y}'_{12} (\mathbf{Y}'_{22})^{-1} \mathbf{Y}'_{21} = 0 \quad (1.7)$$

なるように定めると、(1.6) を用いて、

$$\mathbf{Y}'_{11} = \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \quad (1.8)$$

である。このように (1.6)、(1.8) を満たすように \mathbf{Y}' を定めると、n 端子対回路網 $(N + N')^*$ (p) の Y 行列は

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}')^* (p) &= \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \\ &\quad - (\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22}) (\mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}'_{22})^{-1} (\mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{12}) \end{aligned}$$

いま、(1.5) 式で

$$(\mathbf{Y}'_{22})^{-1} \mathbf{Y}'_{21} = \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} = \mathbf{K}^{-1} \quad (1.9)$$

とおけば、

$$\mathbf{Y}_{22} = \mathbf{Y}_{21} \mathbf{K}, \quad \mathbf{Y}'_{22} = \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \mathbf{K}$$

であるから

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}'_{22})^{-1} &= (\mathbf{Y}_{21} \mathbf{K} + \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \mathbf{K})^{-1} \\ &= \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21})^{-1} \\ &= \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} (\mathbf{Y}_{21} + \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21})^{-1} \end{aligned}$$

よつて、

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}')^* (p) &= \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \\ &\quad - (\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{Y}_{12} \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}'_{22}) \mathbf{Y}_{22}^{-1} \mathbf{Y}_{21} \end{aligned}$$

$$= Y_{11} - Y_{12} Y_{22}^{-1} Y_{21} = Y^*(P) \quad (1.10)$$

これから次の定理を得る。

〔定理 1.1〕 Y 行列 Y をもつ $(n+p)$ 端子対回路網 N に

$$Y' = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{12} Y_{22}^{-1} W & Y_{12} Y_{22}^{-1} W \\ \hline W & W \\ \hline \end{array} \quad (1.11)$$

を Y 行列とする $(n+p)$ 端子対回路網 N' を並列接続すれば、

$(Y+Y')^*(P) = Y^*(P)$ であり、 $(N+N')^*(P)$ は $N^*(P)$ の P 等価 n 端子対回路網である。ただし、 W は $P \times P$ 次の非特異対称行列である。

(例題 1.1) 図 1.2 (a) で与えられる一種素子 2 端子対回路網の等価回路網を定理 1 により求める。まず同図のように端子対(3)を考えると、その Y 行列は

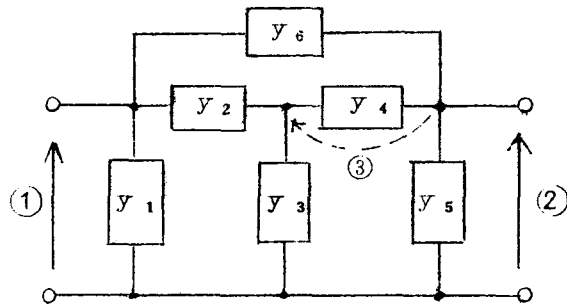
$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 + y_2 + y_6 & -(y_2 + y_6) & -y_2 \\ \hline -(y_2 + y_6) & y_2 + y_3 + y_5 + y_6 & y_2 + y_3 \\ \hline -y_2 & y_2 + y_3 & y_2 + y_3 + y_4 \\ \hline \end{array}$$

で表わされる。 N と同一構造をもつ付加的回路網 N' の Y 行列 Y' の第(3.3)要素を x とすれば、(1.11) から Y' は x をパラメータとして定まり、 N の各 y_i に対応する N' の各素子直 y_i' は次式で与えられる。

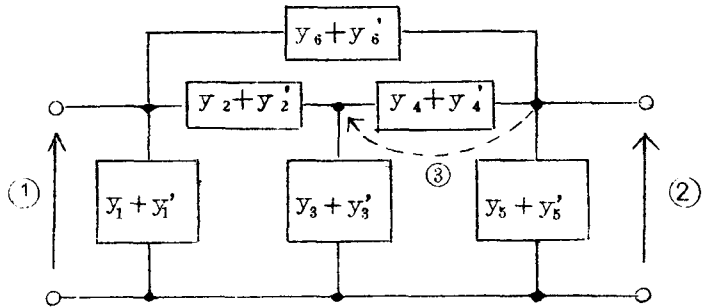
$$y_4' = \frac{-y_2 y_3 x}{(y_2 + y_3 + y_4)^2}, \quad y_2' = \frac{y_2 x}{y_2 + y_3 + y_4}, \quad y_3' = \frac{y_3 x}{y_2 + y_3 + y_4}$$

$$y_4' = \frac{y_4 x}{y_2 + y_3 + y_4}, \quad y_5' = \frac{-y_3 y_4 x}{(y_2 + y_3 + y_4)^2}, \quad y_6' = \frac{-y_2 y_4 x}{(y_2 + y_3 + y_4)^2}$$

$N+N'$ は図 1.2 (b) で与えられ、端子対(1)、(2)に関して N と $N+N'$ は



(a) 原回路網 N



(b) 回路網 $N + N'$

図1.2 等価2端子対回路網

等価である。ただし、各素子値の非負の条件から変換パラメータ x の取り得る値の範囲は、

$$-(y_2 + y_3 + y_4) \leq x \leq \left[\min \left(\frac{y_1}{y_2 y_3}, \frac{y_5}{y_3 y_4}, \frac{y_6}{y_2 y_4} \right) \right] (y_2 + y_3 + y_4)^2$$

1.4 線形変換による等価回路網

($n + p$) 端子対回路網 N の最後の p 端子対に P 端子対回路網 N_0 を並列接続してできる ($n + p$) 端子対回路網を \tilde{N} とする。 N, N_0, \tilde{N} の Y 行列をそれ

それ Y , Y_0 , \tilde{Y} とおけば、

$$\tilde{Y} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} + Y_0 \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \\ p \end{array} \quad (1.12)$$

いま、変成比が $p \times p$ 次の非特異行列 X および X^{-1} で表わされる 2 個の 2 P 端子対理想変圧器 T および T' を図 1.3 で示すように T と T' との間に縦続に挿入する。端子対電圧および電流のなすベクトルを図のように $V_1, I_1; V_2, I_2; V'_2, I'_2; V''_2, I''_2$ とおけば、

$$V_2 = X V'_2, \quad I'_2 = X^T I_2 \quad (1.14)$$

(1.1), (1.14) 式から

$$\begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I'_2 \\ \hline \end{array} = Y_X \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V'_2 \\ \hline \end{array}, \quad (1.15)$$

$$Y_X = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} X \\ \hline X^T Y_{21} & X^T Y_{22} X \\ \hline \end{array} \quad (1.16)$$

この Y_X は図 1.3 で示される $(n+p)$ 端子対回路網 N_X の Y 行列である。ところで、

$$V'_2 = X^{-1} V''_2, \quad I''_2 = (X^T)^{-1} I'_2 \quad (1.17)$$

$$I''_2 = Y_0 V''_2 \quad (1.18)$$

$$\therefore I'_2 = Y_{0X} V'_2, \quad Y_{0X} = X^T Y_0 X \quad (1.19)$$

この Y_{0X} は図 1.3 の P 端子対回路網 N_{0X} の Y 行列である。いま、 N_X の最後の P 端子対と N_{0X} の端子対を並列接続した $(n+p)$ 端子対回路網 \tilde{N}_X の Y 行列を \tilde{Y}_X とおけば、 \tilde{Y}_X は次式で与えられる。

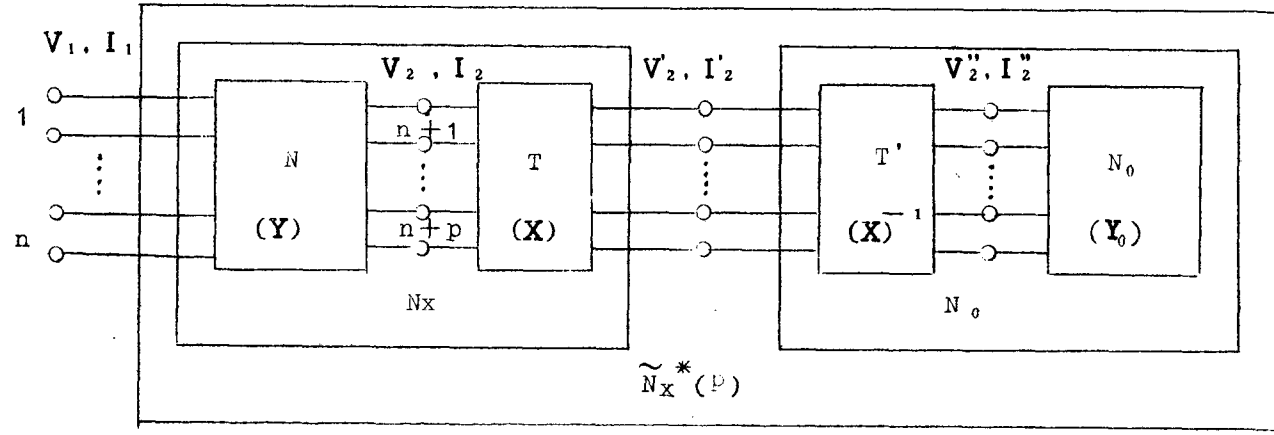


图 1. 3 n 端子对回路网 $\tilde{N}_X^*(p)$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \mathbf{X} \\ \hline \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{X}^T (\mathbf{Y}_{22} + \mathbf{Y}_0) \mathbf{X} \\ \hline \end{array} \quad (1.20)$$

したがって、任意の非特異行列 \mathbf{X} に対して、

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}}^*(P) = \tilde{\mathbf{Y}}^*(P) \quad , \quad (1.21)$$

すなわち、 $\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}}^*(P)$ と $\tilde{\mathbf{N}}^*(P)$ は等価 n 端子対回路網である。このことから次の定理を得る。

〔定理 1.2〕 $(n+p)$ 端子対回路網 N の最後の P 端子対に P 端子対回路網 N_0 を並列接続してできる $(n+p)$ 端子対回路網 \tilde{N} に対して、 N と N_0 の間に 2 個の $2P$ 端子対理想変圧器 T, T' (変成比はそれぞれ非特異行列 $\mathbf{X}, \mathbf{X}^{-1}$) を連続に挿入しても $\tilde{\mathbf{Y}}^*(P)$ は不変であり、これらは最初の n 端子対に関して等価 n 端子対回路網である。

上の議論では線形変換の手段として理想変圧器の助けを借りたが、等価回路網を実際に求める手続きにおいては理想変圧器を用いずに、与えられた $\tilde{\mathbf{Y}}$ を (1.20) 式のように線形変換して得られる $\tilde{\mathbf{Y}}_{\mathbf{X}}$ を Y 行列とする回路網を構成する問題に帰着され、理想変圧器は単なる線形変換の仲介となるだけである。

2 種素子回路網においていずれかの 1 種素子の個数を増さないという条件下でその等価回路網をあるパラメータの連続的变化に対して求めることは実用上、有用である。定理 1.2 の線形変換による等価回路網はこの要求に必ずやという意味で重要である。以下、LC n 端子対回路網の L 素子の個数不変な等価変換について考察する。

与えられた LC n 端子対回路網を C のみから成る回路網 N と L のみから成る N_0 に分解したとき、

(I) N は $(m+p)$ 端子対回路網で、与えられた回路網の注目する n 端子対が N の最初の m 端子対に含まれること、ただし $m \geq n$ 、

(II) N_0 は P 端子対回路網で N の最後の p 端子対と並列接続されること、および

(III) N_0 の Y 行列が対角行列であること、
 の条件を満たすとき、与えられた回路網の L 素子の個数が不変の等価変換が可能である。

上の条件を満たすとき、 N および N_0 の Y 行列 Y および Y_0 を

$$Y = sC = s [c_{ij}] \quad (1.22)$$

$$Y_0 = s\Gamma = s \text{diag} [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p] \quad (1.23)$$

とする。²⁾ 特に X が実対角行列

$$X = \text{diag} [x_1, x_2, \dots, x_p] \quad (1.24)$$

で与えられるとき、 $Yx = sCx$ は Y の第 $m+i$ 行、 $m+i$ 列 ($i=1, 2, \dots, p$) にそれぞれ x_i をかけることにより得られ、 $Y_0x = s\Gamma_x$ は第 i 行、 i 列にそれぞれ x_i をかけることにより得られる。結局、上の場合等価回路網を求める手続きは上の C_x, Γ_x で表わされるアドミタンス行列を満たす回路網構成の問題に帰着される。

Γ_x を満たす P 端子対回路網の構成は容易であるが、 C_x を満たす ($m+p$) 端子対回路網の構成は一般には容易ではない。

特殊な場合として、第 $m+1, m+2, \dots, m+p$ 端子対がそれぞれ $m+p$ 個の端子対のなす木の端枝³⁾ である場合、 C_x をアドミタンス行列とする回路網構成は容易である。

(定理 1.3)⁴⁾ 実行列 $G = [g_{ij}]$ を Y 行列とする ($n+p$) 端子対回路網を Gx を満たす回路網に変換する場合、もし第 $n+i$ 端子対 ($i=1,$

$$2) \text{diag} [a_1, a_2, \dots, a_p] \text{ は第 } (i, i) \text{ 要素 } (i=1,$$

$2, \dots, p)$ を a_i とする対角行列を表わす。

2, ..., p) が Port structure の 木 の 端枝 であれば、その変換手続きは、次の操作を順次 $i = 1, 2, \dots, p$ に対して行えばよい。

(i) 第 $n+i$ 端子対の端点を v_{n+i} および v'_{n+i} とし、 v_{n+i} を の 端点とする。 v_{n+i} につながる各枝 (v_{n+i}, v_k) に対して、その枝コンダクタンス $g(v_{n+i}, v_k)$ を x_i 倍する。

(ii) 上の各 $v_k (= v'_{n+i})$ に対して、 v_k と v'_{n+i} の間にそれぞれ枝コンダクタンス $(1-x_i) g(v_{n+i}, v_k)$ を加える。

(iii) v_{n+i} と v'_{n+i} の間に枝コンダクタンス $(x_i^2 - x_i) \Delta_{n+i}$ を加える。ただし、

$$\Delta_{n+i} = \sum_k g(v_{n+i}, v_k) \quad (1.25)$$

(証明略) この定理を用いた等価変換の例題を考える。

(例題 1.2) 図 1.4(a) で与えられる LC 1 端子対回路網は同図(b)のように分解され、上の定理の条件を満たす。

$$C = \begin{array}{|c|c|} \hline C_1 & -C_1 \\ \hline -C_1 & C_1 + C_2 \\ \hline \end{array} \rightarrow Cx = \begin{array}{|c|c|} \hline C_1 & -xC_1 \\ \hline -xC_1 & x^2(C_1 + C_2) \\ \hline \end{array}$$

と変換すると $\Gamma \rightarrow x^2 \Gamma$ となる。定理の変換操作を行なうと、与えられた回路網の等価 1 端子対回路網は図 1.5 で与えられる。各素子値の非負の条件から x の値の範囲は

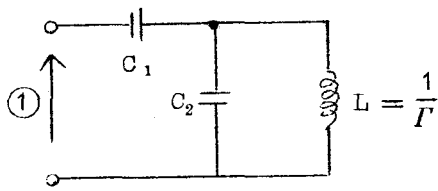
$$C_1 / (C_1 + C_2) \leq x \leq 1$$

である。これは Norton 変換としてよく知られている。

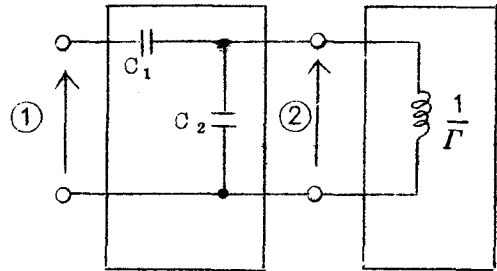
(例題 1.3) 図 1.6(a) の 2 端子対回路網 (帯域濾波器) は同図(b)のように

o) 木の端枝とは、木における線度 (degree) が 1 である節点を端点とする枝をいう。

4) 文献 [9]、定理 7 に負う。



(a) 1 端子対回路網



(b) (a)の分解

図 1 . 4 与えられた回路網とその分解

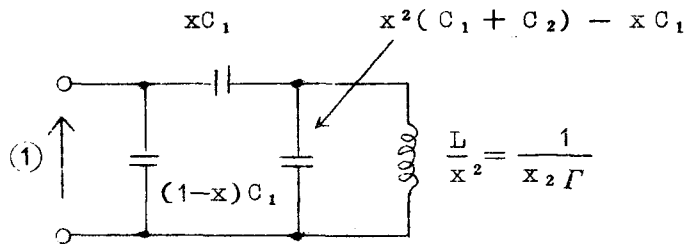
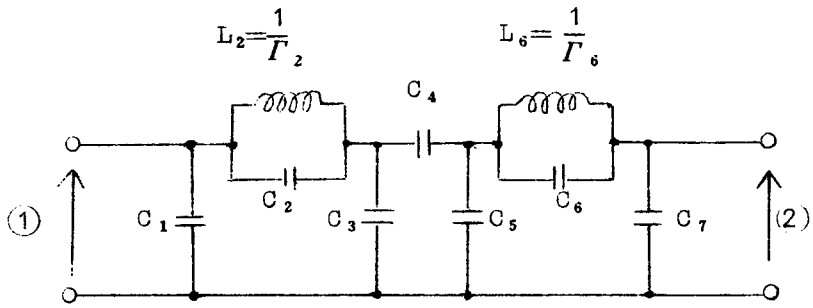


図 1 . 5 図 1 . 4 の等価回路網

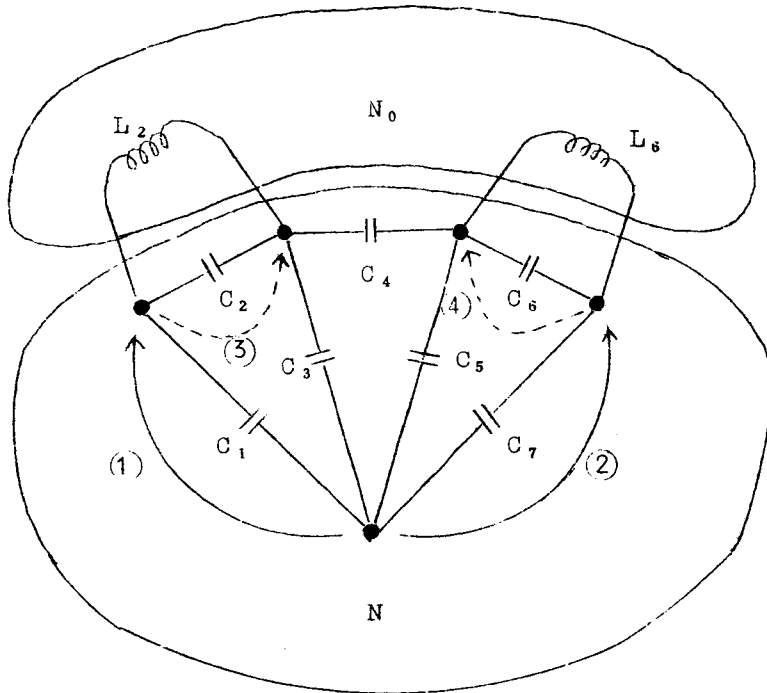
N , N_0 に分解できる。これは定理の条件を満たすから、 C の第 3 行、第 3 列に x_1 を、第 4 行、第 4 列に x_2 をそれぞれかけ、 $\Gamma_2 \rightarrow x_1^2 \Gamma_2$, $\Gamma_6 \rightarrow x_2^2 \Gamma_6$ と変換して、変換手続きを行えば、この等価 2 端子対回路網は図 1 . 7 のようになる。ただし、各素子値の非負の条件から、 x_1 および x_2 のとり得る値の範囲は

$$\frac{C_3 + C_4}{C_2 + C_3 + C_4} \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{C_4 + C_5}{C_4 + C_5 + C_6} \leq x_2 \leq 1$$

である。

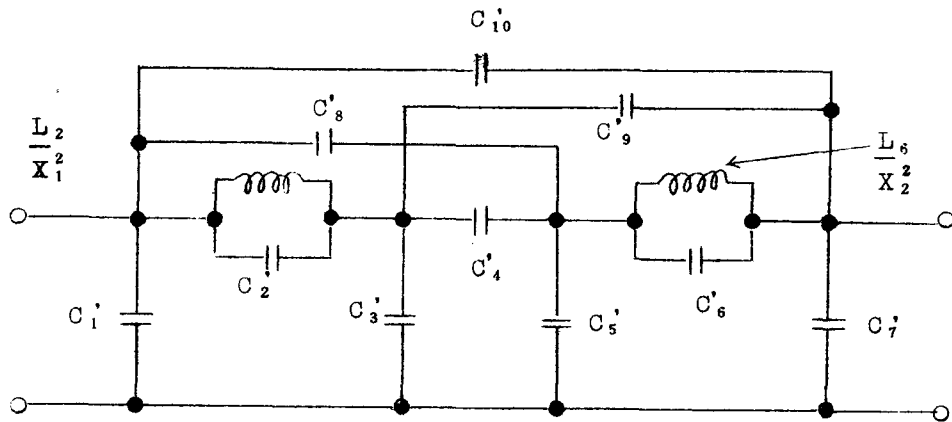


(a) 帯域濾波器



(b) (a)の分解

図1.6 与えられた帯域濾波器



$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1 = C_1 + (1 - X_1) C_3, \quad C'_2 = X_1^2 (C_2 + C_3 + C_4) - X_1 (C_3 + C_4) \\ C'_3 = X_1 C_3, \quad C'_4 = X_1 X_2 C_4, \quad C'_5 = X_2 C_5, \\ C'_6 = X_2^2 (C_4 + C_5 + C_6) - X_2 (C_4 + C_5), \quad C'_7 = C_7 + (1 - X_2) C_5, \\ C'_8 = X_2 (1 - X_1) C_4, \quad C'_9 = X_1 (1 - X_2) C_4, \\ C'_{10} = (1 - X_1) (1 - X_2) C_4 \end{array} \right.$$

図 1.7 図 1.6 の等価回路網

1.5 等価変換における素子感度

回路網の設計において注目する回路網関数が素子値の設計値からのズレにより大きく変動しないことが望ましい。この意味で、回路網の等価変換パラメータを、注目する回路網関数の各素子値の変動に対する感度を最小にするという条件で決定することは重要な問題である。この問題に対して Schoeffler [17] および Leed-Urgon [18] が考察を試みているが、本節では前節の線形等価変換における素子感度についてこの問題を取り扱う。いま、対照とする n 端子対回路網は $(n + p)$ 端子対回路網 N の最後の p 端子対に関する p 端子対縮約により得られる $N^*(p)$ で与えられるとする。この $N^*(p)$ の注目する回路網関数

を f とする。 f は一般に $N^*(P)$ の各素子のアドミタンス y_k ($k=1, 2, \dots, m$) と周波数 $\omega = j\omega$ の関数である。いま、アドミタンス y_k をもつ素子の回路網関数 f に対する素子感度 $S_f(y_k)$ を次式で定義し、

$$S_f(y_k) = \frac{d(\ln f)}{d(\ln y_k)} = \frac{y_k}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k} \quad (1.25)$$

目標関数 W を、 w_k を第 k 素子の重みとして、

$$W = \sum_{k=1}^m w_k |S_f(y_k)|^2 \quad (1.26)$$

で与える。以下、前節の線形変換による等価回路網について考察する。与えられた $(n+p)$ 端子対回路網 N_0 に対して、(1.24) 式で与えられた \mathbf{X} を線形変換パラメータとして等価変換された回路網を N とする。 N の各素子値の非負の条件から各 X_i ($i = 1, 2, \dots, p$) に対して、

$$\alpha_i \leq X_i \leq \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (1.27)$$

なる制限式が与えられる。ただし、各 α_i 、 β_i は原回路 N_0 の素子値 $y_h^{(0)}$ により決定される定数である。変換された N に関して、 $W = W(x_1, x_2, \dots, x_p, \omega)$ となるが、いま X_i ($i = 1, 2, \dots, p$) を P 次元ユークリッド空間の第 i 座標を表わすものとして、(1.27) 式を満たす点の集合を R とするとき、われわれの問題は、

$$W_0 = \min_{P \in R} \max_{\omega \in \Omega} W(x_1, x_2, \dots, x_p, \omega) \quad (1.28)$$

を与える点 $P = P_0$ を求めることである。ただし、 Ω は着目する周波数域である。経験的には多くの場合、 W がある周波数 $\omega = \omega_0$ で最小であれば、他のすべての ω でも大よそ最小であるので ([18] 参照)、(1.28) 式を

$$W_0 = \min_{P \in R} W(x_1, x_2, \dots, x_p, \omega_0) \quad (1.29)$$

と置きかえても実用的には有用である。ただし、 ω_0 は任意の固定した周波数

である。

実用的見地から、特に2端子対回路網 ($n=2$) $N^*(P)$ に限定し、 $N^*(P)$ の縦続行列の各要素を A, B, C, D として、

$$T = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D \quad (1.30)$$

で定義される T を考える。この T は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のとり方により種々の伝送関数を表わす。いま、原回路網 N_0 の縦続行列の各要素 A_0, B_0, C_0, D_0 、およびそれらに対する T を T_0 とおけば、 $A = A_0, B = B_0, C = C_0, D = D_0$ であるから、 $T = T_0$ である。したがって、(1.25) 式で $f = T$ とおけば、

$$S_T(y_k) = \frac{y_k}{T} \frac{\partial T}{\partial y_k} = \frac{y_k}{T_0} \frac{\partial T}{\partial y_k} \quad (1.31)$$

である。これに対する W について (1.29) 式を求めることが当面の問題であるが、パラメータ x_i の個数が2以上の場合、一般には困難である。

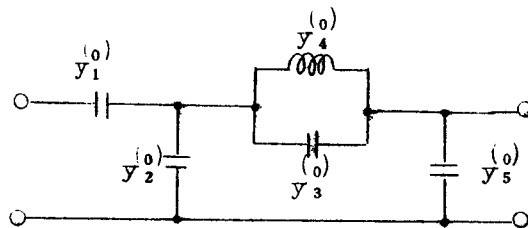
(例題1.4) 図1.8(a)で示される2端子対回路網 $N_0^*(P)$ ($n=2, m=1$) に対して、その等価回路網 $N^*(P)$ を構成すると図1.8(b)のようになる。

いま、 y_1, y_4, y_6 の3個の素子について素子感度を求めると、

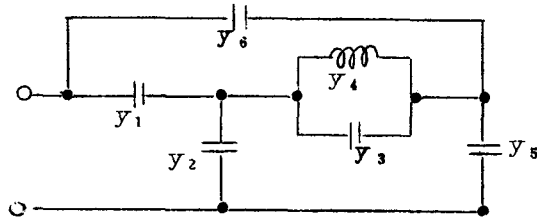
$$S_T(y_1) = \frac{ax^2 + bx + c}{x y_1^{(0)} (y_3^{(0)} + y_4^{(0)})^2}$$

$$S_T(y_4) = S_T(y_4^{(0)}), \quad S_T(y_6) = (x - 1) Q.$$

ただし、 a, b, c 、および Q は原回路網を構成する素子値により決定される定数。



(a) $N_0^*(P)$



(b) $N^*(P)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x y_1^{(0)}, \quad y_2 = x y_2^{(0)}, \quad y_3 = x^2 (y_1^{(0)} + y_2^{(0)} + y_3^{(0)}) - x (y_1^{(0)} + y_2^{(0)}), \\ y_4 = x^2 y_4^{(0)}, \quad y_5 = y_5^{(0)} + (1-x) y_2^{(0)}, \quad y_6 = (1-x) y_1^{(0)} \end{array} \right\}$$

図1.8 原回路網 $N_0^*(p)$ とその等価回路網 $N^*(p)$ ($p=1$)

1.6 結 言

実用的見地から理想変圧器を用いないトポロジー的複雑さ不変の等価変換に関して考察した。与えられた $(n+p)$ 端子対回路網 N の $N^*(p)$ についての q 等価 n 端子対回路網 ($q > p$) を求める問題は、 $n \times n$ 次の Y 行列を $n+r$ ($r \geq 2$) 節点 n 端子対回路網として実現する問題に帰着され、これは今後の発展を待たなければならない。一方、素子感度の問題に関して、パラメータが 2 変数以上の場合、最適解を得るのは困難であるが、この方法は一応の目安を与える点で有効である。

第2章 完全グラフおよび完全 Bipartite グラフの平面分解

2.1 緒言

与えられた非平面グラフを最少個の平面部分グラフに分解する問題は、多層印刷回路および多層集積回路の設計において極めて重要である。本節では、この一般のグラフに対してではなく、この問題の初歩的段階として、特に完全グラフおよび完全 Bipartite グラフに着目し、その平面分解問題について論ずる。

Tutte [19] , Auslander - Parter [20] , Fisher - Wing [21] , [22] 等は与えられたグラフが平面的であるか否かの問題をアルゴリズム的に論じている。一方、与えられたグラフを平面部分グラフに分解する問題は、上述のように実用上重要であるが、特に完全 Bipartite グラフに関して論じられたに過ぎない ([23] , [24])。

本節では、まず完全グラフの平面分解における分解個数の最少値の上限を与え、それに関連して平面分解のアルゴリズムを示す。つぎに完全 Bipartite グラフについて同様の考察を行なう。

2.2 諸定義

線形グラフ G を $G = [V(G); E(G)]$ で表わす。各 $v_i \in V(G)$ および $(v_i, v_j) \in E(G)$ はそれぞれ G の節点および枝である。以下、 $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ なる方向のない枝のみから成るグラフについて考える。

(定義 2.1) 二つのグラフ G_1, G_2 に対して、

$$V(G_1) \supseteq V(G_2) \quad , \quad E(G_1) \supseteq E(G_2) \quad (2.1)$$

のとき、 G_2 は G_1 の部分グラフであるという。

(定義2.2) 二つのグラフ G_1, G_2 の和および積をそれぞれ

$$G_1 \cup G_2 = [V(G_1) \cup V(G_2); E(G_1) \cup E(G_2)] \quad (2.2)$$

$$G_1 \cap G_2 = [V(G_1) \cap V(G_2); E(G_1) \cap E(G_2)] \quad (2.3)$$

で定義する。

(定義2.3) 与えられたグラフ G に対して、

$$G = \bigcup_{i=1}^M G_i, \quad \text{ただし} \quad V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset, \quad \text{かつ}$$

$$E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset \quad (i \neq j) \quad (2.4)$$

であるとき、 G は M 個の部分グラフに分解されるという。

(定義2.4) グラフ G の相異なる節点 $v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l$ に対して、

$$C = [\{v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l\}; \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{l-1}, v_l), (v_l, v_1)\}] \quad (2.5)$$

で定義される G の部分グラフ C を G の閉路といい、特に $V(C) = V(G)$ のとき、この C を G のHamilton閉路(以下H閉路と略す)と呼ぶ。

いま、与えられたグラフ G の幾何学的平面 P の中への1対1写像 f を次のように定める。各 $v_i \in V(G)$ に対して $f(v_i)$ は P 上の1点であり、各 $(v_i, v_j) \in E(G)$ に対して $f((v_i, v_j))$ は2点 $f(v_i), f(v_j)$ を結ぶ P 上の連続な線分である。ただし、 $f((v_i, v_j))$ は端点 $f(v_i), f(v_j)$ のいずれをも含まないものとする。

(定義2.5) グラフ G に関して、各枝 $(v_i, v_j) \in E(G)$ に対して $f(v_i) \cup f(v_j) \cup f((v_i, v_j))$ が他のどの点 $f(v_h)$ (ただし、 $h \neq i, j$)、

他のどの線分 $f((v_k, v_l))$ (ただし、 $(v_k, v_l) \neq (v_i, v_j)$) とも交点を有しないような上述の写像 f が見出し得るとき、 G を平面グラフであるという。

2.3 完全グラフの平面分解

本節では、完全グラフの平面分解について考察する。

(定義 2.6) 完全グラフ K_n とは、 $|V(K_n)| = n$ であり、かつ $E(K_n) = \{(v_i, v_j) \mid v_i \neq v_j \in V(K_n)\}$ であるようなグラフをいう。ただし、 $|X|$ は集合 X の元の個数を表わす。

いま、完全グラフ K_n の任意の H 閉路 H_1 上の節点を順に $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(1)}$ とすれば、 $E(H_1) = \{(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}), (v_2^{(1)}, v_3^{(1)}), \dots, (v_n^{(1)}, v_1^{(1)})\}$ である。そこで、 K_n の枝の集合 $E_k^{(1)}$ をつぎのように定義する。

$$E_k^{(1)} = \{(v_i^{(1)}, v_j^{(1)}) \mid j - i \equiv \pm k \pmod{n}, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i, j \leq n\} \quad (2.6)$$

このとき、 $E_k^{(1)} = E_{n-k}^{(1)}$ であるから、

$$E(K_n) = \bigcup_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} E_k^{(1)}, \quad (2.7)$$

ただし、 $\lfloor x \rfloor$ は x より大でない最大の整数である。

(定義 2.7) 二つの整数 m_1, m_2 の最大公約数を $\rho(m_1, m_2)$ で表わす、

[補題 2.1] $\rho(k, n) = 1$ のとき、グラフ $[V(K_n); E_k^{(1)}]$ は K_n の一つの H 閉路である。

証明は容易であるから略す。いま、 H 閉路 $[V(K_n); E_h^{(1)}]$ ($\rho(h, n) = 1, 1 \leq h \leq n$) を H_h で表わすことにする。ただし、

$$v_i^{(h)} = v_j^{(1)}, \quad j \equiv 1 + h(i-1) \pmod{n} \quad (2.8)$$

である。 $E(H_n) = \{(v_1^{(h)}, v_2^{(h)}), (v_2^{(h)}, v_3^{(h)}) \cdots (v_n^{(h)}, v_1^{(h)})\}$ であるから、 $E_k^{(1)}$ と同様に枝の集合

$$E_k^{(h)} = \{(v_i^{(h)}, v_j^{(h)}) \mid j - i \equiv \pm k \pmod{n}, 1 \leq i, j \leq n\} \quad (2.9)$$

を定義する。このとき (2.7) と同様に

$$E(K_n) = \bigcup_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} E_k^{(h)} \quad (2.10)$$

が成立する。

[補題 2.2] $\rho(k, n) > 1$ ($1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor$) のとき、 H 閉路 H_n に対して定義されるグラフ $[V(K_n); E_k^{(h)}]$ は $\rho(k, n)$ 個の部分グラフ $[(V_k^{(h)})_i; (E_k^{(h)})_i]$ ($i = 1, 2, \dots, \rho(k, n)$) に分解される。

すなわち

$$[V(K_n); E_k^{(h)}] = \bigcup_{i=1}^{\rho(k, n)} [(V_k^{(h)})_i; (E_k^{(h)})_i], \quad (2.11)$$

ただし、

$$(V_k^{(h)})_i = \{v_{i_p}^{(h)} \mid i_p \equiv i + k(P-1) \pmod{n}\}, \quad (2.12)$$

$$(E_k^{(h)})_i = E_k^{(h)} \cap \{(V_k^{(h)})_i \times (V_k^{(h)})_i\} \quad (2.13)$$

である。また、もし $P(k, n) < n/2$ であれば、各グラフ $[(V_k^{(h)})_i; (E_k^{(h)})_i]$ は $t = n/P(k, n)$ 個の枝をもつ閉路である。

(証明) まず、 $(v_{i_t}, v_{i_1}) \in (E_k^{(h)})_i$ ($i = 1, 2, \dots, \rho(k, n)$) であることを示す。 $1 \leq r < s \leq t$ に対して、 $k \leq k(s-r) \leq k(t-1) < kt$ 。一方、 kt は k, n の最小公倍数であるから、 $i_s - i_r = k(s-r) \not\equiv 0 \pmod{n}$ 。すなわち、 $v_{i_s}^{(h)} \neq v_{i_r}^{(h)}$ 。ところが $i_{t+1} = i + kt \equiv i \pmod{n}$ であるから、

$$(E_k^{(h)})_i = \{ (v_{i_1}^{(h)}, v_{i_2}^{(h)}), (v_{i_2}^{(h)}, v_{i_3}^{(h)}), \dots, (v_{i_t}^{(h)}, v_{i_1}^{(h)}) \} \quad (2.14)$$

もし $\rho(k, n) < n/2$ であれば、 $|(E_k^{(h)})_i| = t > 2$ で各 $\{(V_k^{(h)})_i; (E_k^{(h)})_i\}$ ($i=1, 2, \dots, P(k, n)$) は t 個の枝をもつ閉路である。(証明終)

(定義 2.8) グラフ G の閉路 C に対して、

$$(v_a, v_b) \in E(G) - E(C), \quad v_a, v_b \in V(C) \quad (2.15)$$

で定義される枝 (v_a, v_b) を C の橋枝と呼ぶことにする。

(定義 2.9) $(v_a, v_b), (v_c, v_d)$ が閉路 C の橋枝でかつこの 4 点が C 上で v_a, v_c, v_b, v_d の順で位置しているとき、この 2 個の枝は C に関して互いに交差するという。

(定義 2.10) グラフ G の部分グラフ G' および閉路 C に対して、

$V(G') \subseteq V(C), E(G') \cap E(C) = \emptyset$, かつ G' には C に関して互いに交差する枝の対が存在しないとき、 G' は C に接するといひ、 $C \parallel G'$ で表わす。

(定義 2.11) 3 個の閉路 C_1, C_2, C_3 に対して、 $C_1 \parallel C_2, C_1 \parallel C_3$ でかつ C_2 の任意の枝と C_3 の任意の枝とが C_1 に関して互いに交差するとき、閉路 C_2, C_3 は C_1 に関して互いに交差するという。

閉路の集合 $\{C_i, i=1, 2, \dots, l \mid C_1 \parallel C_2, C_2 \parallel C_3, \dots, C_{l-1} \parallel C_l\}$ に対して、 $C_1 \parallel C_2 \parallel \dots \parallel C_l$ と書く。

[補題 2.3] 閉路 $C, \{C_{a_i}, i=1, 2, \dots, r\}, \{C_{b_j}, j=1, 2, \dots, s\}$ に対して、グラフ $C \cup \{\bigcup_{i=1}^r C_{a_i}\} \cup \{\bigcup_{j=1}^s C_{b_j}\}$ は平面的である。また C, C_1, C_2, C_3 に対して、 $C \parallel C_1, C \parallel C_2, C \parallel C_3$ でかつ C_1, C_2, C_3 のどの二つも C に関して互いに交差するとき、 $C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ は非平面的で

ある。

(証明) C の幾何学的平面 P 中への前述のような写像 f で、どの一對の枝の像も P 上で交わらないようなものを見出すことができる。Jordan の曲線定理により閉路 C の f による像 $f(C)$ は $P - f(C)$ を二つの領域に分割し、 $f(C)$ をその共通の境界とする。有界な領域を $f(C)$ の内部 $I(C)$ 、他を $f(C)$ の外部 $O(C)$ という。 C_{a_1} の $I(C)$ 中への写像 g_1 で $g_1(C \cap C_{a_1}) = f(C \cap C_{a_1})$, $g_1(C_{a_1} - C) \in I(C)$, かつ C_{a_1} のどの一對の枝の像も交差しないようなものを見出すことができる。全く同様に写像の集合 $\{g_i, i = 2, 3, \dots, r\}$ で $g_i(C_{a_i-1} \cap C_{a_i}) = g_{i-1}(C_{a_i-1} \cap C_{a_i})$, $g_i(C_{a_i} - C_{a_{i-1}}) \in I(C_{a_{i-1}})$ かつ C_{a_i} のどこ一對の枝の像も交差しないような g_i を順次見出すことができる。同様の手続きを $\{C_{b_j}, j = 1, 2, \dots, s\}$ に対して行ない、 $O(C)$ に写像することができる。よつて、 $C \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^r C_{a_i} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^s C_{b_j} \right\}$ は平面的である。

一方、 C, C_1, C_2, C_3 に対しては、上述の方法で $C \cup C_1 \cup C_2$ の f による像においてどの一對の枝も交わらないようにできる。いま、写像 g で、 $g(C_3 \cap C) = f(C_3 \cap C)$, $g(C_3 - (C \cup C_1 \cup C_2)) \in I(C) \cap I(C_1) \cap I(C_2)$ または $O(C) \cap O(C_1) \cap O(C_2)$ なるものが存在するとすれば、 $C_1 \parallel C_3$ または $C_2 \parallel C_3$ がそれぞれ成立し、仮定に反する。よつて、 $C \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ は非平面的である。(証明終)

(定義 2.12) 2 整数 m_1, m_2 に対して、 $m_1 \mid m_2$ は m_1 が m_2 で割り切れることを表わすものとする。

[補題 2.4] $\rho(h, n) = 1 (1 \leq h \leq [n/2])$, $n \mid 1 (1 \leq l < n)$ かつ $h \equiv \pm k \pmod{n} (1 \leq k \leq [n/2])$ を満たす h, l , および k

に対して、 $H_h \parallel \{ (V_k^{(i)})_i ; (E_k^{(i)})_i \} (i=1, 2, \dots, l)$ であり、 $\{ \{ (V_k^{(i)})_i ; (E_k^{(i)})_i \}, i=1, 2, \dots, l \}$ におけるどの二つのグラフも H_h に関して互いに交差する。

(証明) $n \mid 1$ および $\rho(h, n) = 1$ から、 $\rho(1, n) = \rho(k, n) = 1$ である。補題 2.2 から、グラフ $\{V(K_n) ; E_1^{(h)}\}$ は l 個のグラフ $\{ (V_1^{(h)})_i ; (E_1^{(h)})_i \} (i=1, 2, \dots, l)$ に分解できる。ただし、

$$(V_1^{(h)})_i = \{ v_{i_p}^{(h)} \mid i_p = i + 1(p-1), p=1, 2, \dots, t = n/1 \},$$

$$(E_1^{(h)})_i = \{ (v_{i_1}^{(h)}, v_{i_2}^{(h)}), (v_{i_2}^{(h)}, v_{i_3}^{(h)}), \dots, (v_{i_t}^{(h)}, v_{i_1}^{(h)}) \},$$

である。ここで $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ であることから、 $H_h \parallel \{ (V_1^{(h)})_i ; (E_1^{(h)})_i \} (i=1, 2, \dots, l)$ である。つきに、 $E_1^{(h)} = E_k^{(1)}$ を示そう。

$v_q^{(h)} = v_r^{(1)}$, $r \equiv 1 + h(q-1) \pmod{n}$ であり、かつ $ip = i + 1(p-1) (1 \leq p \leq t)$, $r_p \equiv 1 + h(ip-1)$ すなわち、

$r_p \equiv 1 + h(i-1) + h1(p-1) \pmod{n}$ に対して、 $v_{i_p}^{(h)} = v_{r_p}^{(1)}$ である。よつて、 $r_{p+1} - r_p \equiv h1 \pmod{n}$ 。仮定により、 $h1 \equiv \pm k \pmod{n}$

であるから、 $r_{p+1} - r_p \equiv \pm k \pmod{n}$ 、それゆえ、 $(v_{i_p}^{(h)}, v_{i_{p+1}}^{(h)}) = (v_{r_p}^{(1)}, v_{r_{p+1}}^{(1)}) \in E_k^{(1)}$ 。すなわち、 $j \equiv 1 + h(i-1) \pmod{l}$

$(1 \leq j \leq l)$ に対して、 $(E_1^{(h)})_i = (E_k^{(1)})_j$ である。よつて、 $H_h \parallel \{ V((V_k^{(1)})_i ; (E_k^{(1)})_i) (i=1, 2, \dots, l) \}$ 。明らかにグラフ $\{ (V_k^{(1)})_i ; (E_k^{(1)})_i \}, \{ (V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j \} (i \neq j)$ は H 閉路 H_h

に関して互いに交差する。(証明終)

[補題 2.5] $\rho(k_2, n) > \rho(k_1, n) > 1$ および $\rho(k_2, n) \mid \rho(k_1, n)$ を満たす $k_1, k_2 (1 \leq k_1, k_2 \leq \lfloor n/2 \rfloor)$ に対して、 $H_h \parallel \{ (V_{k_1}^{(1)})_i ; (E_{k_1}^{(1)})_i \}$

$(i = 1, 2, \dots, \rho(k_1, n)), H_h \parallel [(V_{k_2}^{(1)})_j; (E_{k_2}^{(1)})_j] (j=1, 2, \dots, \rho(k_2, n))$ が成立するとき、 $[(V_{k_1}^{(1)})_i; (E_{k_1}^{(1)})_i] \parallel [(V_{k_2}^{(1)})_j; (E_{k_2}^{(1)})_j], j \equiv i \pmod{\rho(k_1, n)}$ である。ただし、 $\rho(h, n) = 1, 1 \leq h \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 。

(証明) 前補題から、 $hl_1 \equiv \pm k_1 \pmod{n}, hl_2 \equiv \pm k_2 \pmod{n}$ を満たす l_1, l_2 が存在して、 $E_{l_1}^{(h)} = E_{k_1}^{(1)}, E_{l_2}^{(h)} = E_{k_2}^{(1)}$ であることがわかる。

$[(V_{l_1}^{(h)})_i; (E_{l_1}^{(h)})_i]$ および $[(V_{l_2}^{(h)})_j; (E_{l_2}^{(h)})_j]$ が H_h に接するという条件から $n \mid l_1, n \mid l_2$, すなわち $p(l_1, n) = p(k_1, n) = l_1,$

$\rho(l_2, n) = \rho(k_2, n) = l_2$ である。また、 $\rho(k_2, n) \mid \rho(k_1, n)$ から

$l_2 \mid l_1$ である。いま、 $(V_{l_1}^{(h)})_i = \{v_{i_p}^{(h)} \mid i_p = i + l_1(p-1), p=1, 2,$

$\dots, t_1 = n/l_1\}$ かつ $(V_{l_2}^{(h)})_j = \{v_{j_q}^{(h)} \mid j_q = j + l_2(q-1), q=1,$

$2, \dots, t_2 = n/l_2\}$ とおけば、 $(V_{l_1}^{(h)})_i = \bigcup_j (V_{l_2}^{(h)})_j, j \equiv i \pmod{l_1}$,

である。しかも、 $i_1 < i_2 < \dots < i_{t_1}, j_1 < j_2 < \dots < j_{t_2}$ であるから

$[(V_{l_1}^{(h)})_i; (E_{l_1}^{(h)})_i] \parallel [(V_{l_2}^{(h)})_j; (E_{l_2}^{(h)})_j], j \equiv i \pmod{l_1}$

である。(証明終)

これら上述の定義および補題を用いて、 K_n の平面分解における分解個数に関するつぎの定理を得る。

[定理 2.1] 完全グラフ K_{4m} (m : 整数) は m 個の平面部分グラフに分解できる。

(証明) $m=1$ に対しては明らかに成立する。任意の $m (\geq 2)$ に対して、

$$m = 2^{\theta_0} p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} \dots p_r^{\theta_r} \quad (2.16)$$

と素因数に分解する。ただし、各 p_i は素因数で $2 < p_1 < p_2 < \dots < p_r$

である。まず、このときつぎの補題を証明する。

[補題 2.6] $n = 4m$ に対して、 $\rho(k_0, n) = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_r^{i_r} (0$

$1 \leq i_s \leq \theta_s, s = 1, 2, \dots, r$ なる k_0 を考える。

$1 \leq k_0 \leq m$ のとき、 $\rho(2m - k_0, n) = \rho(k_0, n)$ である。また、 $\theta_0 \geq 1$ のとき、 $1 \leq k_0 \leq m/2^i (1 \leq i \leq \theta_0)$ なる k_0 に対して、 $\rho(jm/2^{i-1} \pm k_0, n) = \rho(k_0, n)$ が $j = 1, 2, \dots, 2^i - 1$ に対して成立する。

(証明) $1 \leq k_0 \leq m$ のとき、 $\rho(2k_0, n) = 2\rho(k_0, n)$ かつ

$\rho(2(2m - k_0), n) = 2\rho(k_0, n)$ である。よつて、 $\rho(k_0, n) = \rho(2m - k_0, n)$ 。もし $\theta_0 \geq 1$ のとき、 $1 \leq k_0 \leq m/2^i (1 \leq i \leq \theta_0)$ に対して、 $\rho(2^{i+1}k_0, n) = 2^{i+1}\rho(k_0, n)$ かつ $\rho(2^{i+1}(jm/2^{i-1} \pm k_0),$

$2^{i+1}k_0 \pmod n)$ 。ゆえに、 $\rho(jm/2^{i-1} \pm k_0, n) = \rho(k_0, n)$ 、
 $j = 1, 2, \dots, 2^i - 1$ 。(証明終)

以下に、 K_{4m} を m 個の平面グラフに分解するアルゴリズムを述べる。

[段階 u] ($u = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_r^{i_r}; 0 \leq i_s \leq \theta_s, s = 1, 2, \dots, r$)

いま、 $\rho(k, n) = u, 1 \leq k \leq [n/2] = 2m$ を満たす任意の k を $k(u)$ で表わす。 $G(k(u)) = [V(K_n); E_{k(u)}^{(1)}]$ とおけば、各 $k(u)$ は明らかに平面的である。 $u = 1$ であれば $G(k(1))$ は補題 2.1 から H 閉路であり $u > 1$ であれば $G(k(u))$ は u 個の部分グラフ $\{(V_{k(u)}^{(1)})_i; (E_{k(u)}^{(1)})_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, u$) に分解される。

(操作 1) $k = 2k(u), 1 \leq k(u) \leq m$ を満たす各 k に対して、 $G(k(u)) \cup [V(K_n); E_k^{(1)}]$ とし、これを改めて $G(k(u))$ とする。すなわち、

$G(k(u)) \rightarrow G(k(u)) \cup [V(K_n); E_k^{(1)}]$ とする。

補題 2.5 により上のような k に対して、 $\{(V_{k(u)}^{(1)})_i; (E_{k(u)}^{(1)})_i\} \parallel \{(V_k^{(1)})_j; (E_k^{(1)})_j\}$ ($j = i, i + u; i = 1, 2, \dots, u$) である。補題 2.3 により上で得られた $G(k(u))$ は平面的である。

(操作 2) $k = 4k(u), 1 \leq k(u) \leq m/2$ を満たす各 k に対して、

$$G(k(u)) \rightarrow G(k(u)) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{2u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(2m - k(u)) \rightarrow G(2m - k(u)) \cup$$

$$\left\{ \bigcup_{j=2u+1}^{4u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\}$$

とする。

補題 2. 2 により、 $k = 4k(u)$ に対して、

$$[V(k_n) ; E_k^{(1)}] = \bigcup_{i=1}^{4u} [(V_k^{(1)})_i ; (E_k^{(1)})_i].$$

いま、 $u = 1$ であるとすれば、 $\rho(k(1), n) = \rho(2m - k(1), n) = 1$ であり、補題 2. 4 が $h = k(u)$ 、または $2m - k(u)$ 、 $l = 4$ に対して成立し、補題 2. 5 が $k_1 = 2k(1)$ 、 $k_2 = k = 4k(1)$ 、および $h = k(1)$ に対して成立する。それゆえ、この場合上の $G(k(1))$ および $G(2m - k(u))$ はともに平面的である。 $u > 1$ の場合も全く同様にして、 $G(k(u))$ 、 $G(2m - k(u))$ が平面的であることがわかる。

もし $\theta_0 = 0$ であれば、段階 u の手続きを終え、他の可能な段階 $u' (\neq u)$ へ移る。 $\theta_0 \neq 0$ であれば、つぎの操作を続ける。

(操作 $i + 2$) ($i = 1, 2, \dots, \theta_0$) $k = 2^{i+2} k(u)$ ($1 \leq k(u) \leq m/2^{i+1}$) なる各 k に対して、

$$G(k(u)) \rightarrow G(k(u)) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^{2u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(2m - k(u)) \rightarrow G(2m - k(u)) \cup \left\{ \bigcup_{j=2u+1}^{4u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(m - k(u)) \rightarrow G(m - k(u)) \cup \left\{ \bigcup_{j=4u+1}^{6u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(m + k(u)) \rightarrow G(m + k(u)) \cup \left\{ \bigcup_{j=6u+1}^{8u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\}.$$

$$(E_k^{(1)})_j \} .$$

..... ,

$$G (m/2^{i-1} - k(u)) \rightarrow G (m/2^{i-1} - k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=2^{i+1}u+1}^{(2^{i+1}+2)u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\} .$$

$$G (m/2^{i-1} + k(u)) \rightarrow G (m/2^{i-1} + k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=(2^{i+1}+2)u+1}^{(2^{i+1}+4)u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\}$$

$$G (3m/2^{i-1} - k(u)) \rightarrow G (3m/2^{i-1} - k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=(2^{i+1}+4)u+1}^{(2^{i+1}+6)u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\} .$$

$$G (3m/2^{i-1} + k(u)) \rightarrow G (3m/2^{i-1} + k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=(2^{i+1}+6)u+1}^{(2^{i+1}+8)u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\} .$$

..... ,

$$G ((2^i - 1) m/2^{i-1} - k(u)) \rightarrow G ((2^i - 1) m/2^{i-1} - k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=(2^{i+2}-4)u+1}^{(2^{i+2}-2)u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\} .$$

$$G ((2^i - 1) m/2^{i-1} + k(u)) \rightarrow G ((2^i - 1) m/2^{i-1} + k(u)) U$$

$$\left\{ \bigcup_{j=(2^{i+2}-2)u+1}^{2^{i+2}u} [(V_k^{(1)})_j ; (E_k^{(1)})_j] \right\} .$$

操作 2 と同様の理由で、上に得られた各グラフは平面的である。

可能なすべての $u = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_r^{i_r}$ ($0 \leq i_s \leq e_s, 1 \leq s \leq r$)
 に対して、上の段階 u の全操作を行なう。

上の手続きをすべて遂行した結果得られる各平面グラフ $G(\alpha_p)$ の添数字
 α_p の集合 $\{\alpha_p\}$ は、1 と $2m-1$ の間の m 個の奇数の集合と一致し、
 $K_{4m} = \bigcup_p G(\alpha_p)$ であるから、 K_{4m} は m 個の平面グラフに分解される。
 (証明終)

(例題) 完全グラフ K_{24} の平面分解について考えよう。この場合、 $m=2 \times 3$
 であり、したがって $u = 3^{i_1}$, $0 \leq i_1 \leq 1$ であるから、可能な段階は $u=1$
 および $u=3$ である。

[段階 1] $\rho(k, n) = 1$ なる $k = k(1)$ ($1 \leq k(1) \leq 12$) は $k(1) = 1, 5, 7, 11$
 である。この各 $k(1)$ に対して、 $G(k(1)) = [V(K_{2k(1)}); E_{k(1)}^{(1)}]$ とおく。

(操作 1) $k = 2k(1)$ ($1 \leq k(1) \leq 6$) を満たす k は、 $k(1) = 1, 5$ に対して
 与えられる。したがって、

$$G(1) \rightarrow G(1) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^2 [(V_2^{(1)})_j; (E_2^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(5) \rightarrow G(1) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^2 [(V_{10}^{(1)})_j; (E_2^{(1)})_j] \right\},$$

とする。

(操作 2) $k = 4k(1)$ ($1 \leq k(1) \leq 3$) なる k は、 $k(1) = 1$ に対して得られ
 る。

$$G(1) \rightarrow G(1) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^2 [(V_4^{(1)})_j; (E_4^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(11) \rightarrow G(11) \cup \left\{ \bigcup_{j=3}^4 [(V_4^{(1)})_j; (E_4^{(1)})_j] \right\},$$

とおく。

(操作3) $k = 8$ $k(1)$ ($1 \leq k(1) \leq 3/2$) なる k は $k(1) = 1$ に対してのみ得られる。

$$G(1) \rightarrow G(1) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^2 [(V_8^{(1)})_j; (E_8^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(11) \rightarrow G(11) \cup \left\{ \bigcup_{j=3}^4 [(V_8^{(1)})_j; (E_8^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(5) \rightarrow G(5) \cup \left\{ \bigcup_{j=5}^6 [(V_8^{(1)})_j; (E_8^{(1)})_j] \right\},$$

$$G(7) \rightarrow G(7) \cup \left\{ \bigcup_{j=7}^8 [(V_8^{(1)})_j; (E_8^{(1)})_j] \right\},$$

段階1はここで終る。最終的に得られた4個のグラフ $G(1)$, $G(5)$, $G(7)$, $G(11)$ は図2.1に示す。残る可能な操作は段階3のみである。

[段階3] $\rho(k, n) = 3$ となるのは $k = k(3)$ は、3, 9のみである。

$k(3) = 3, 9$ に対して、 $G(k(3)) = [V(K_{24}); E_{k(3)}^{(1)}]$ とする。

(操作1) $k = 2 k(3)$ ($1 \leq k(3) \leq 6$) は $k(3) = 3$ に対してのみ得られる。

$$G(5) \rightarrow G(3) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^6 [(V_8^{(1)})_j] \right\},$$

とする。

(操作2) $k = 4 k(3)$ ($1 \leq k(3) \leq 3$) は $k(3) = 3$ に対してのみ与えられる。

$$G(3) \rightarrow G(3) \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^6 [(V_{12}^{(1)})_j; (E_{12}^{(1)})_j] \right\},$$

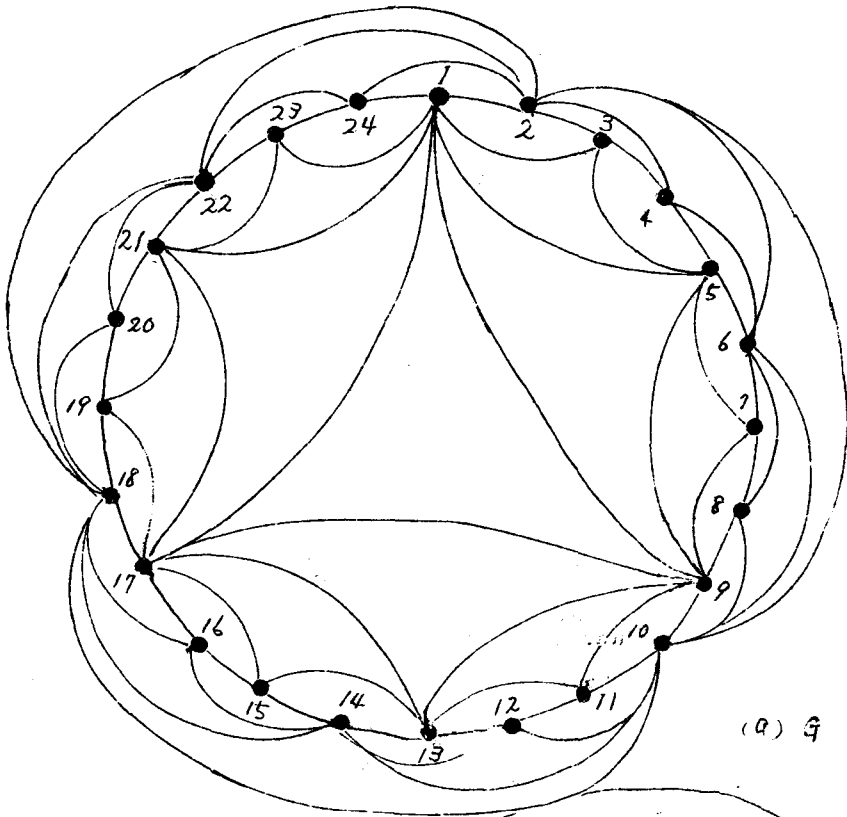
$$G(9) \rightarrow G(9) \cup \left\{ \bigcup_{j=7}^{12} [(V_{12}^{(1)})_j; (E_{12}^{(1)})_j] \right\},$$

とする。

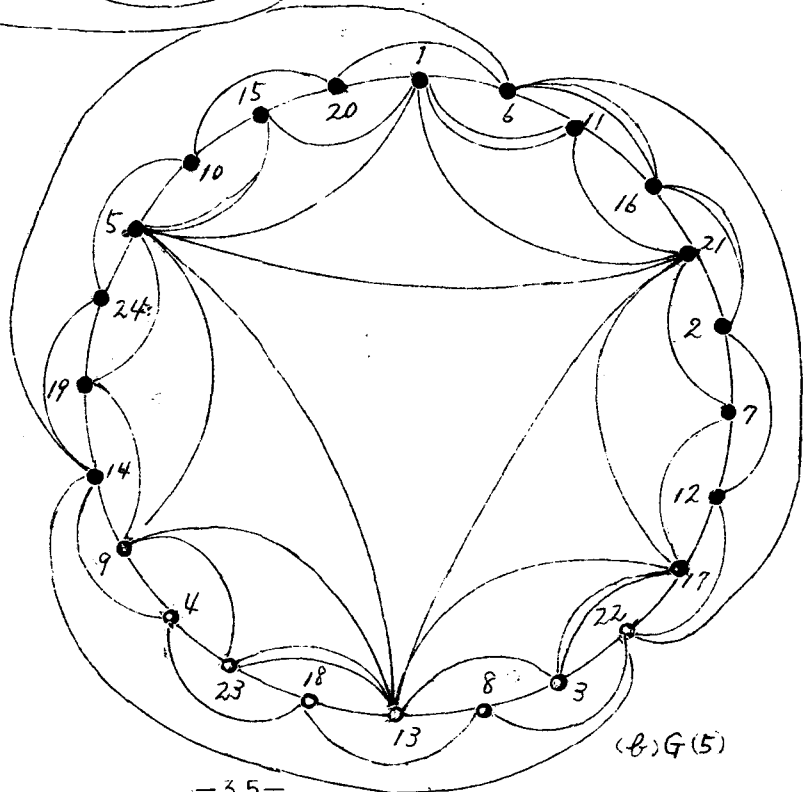
この段階3はここで終る。得られた2個のグラフ $G(13)$ および $G(9)$ は図2.1に示す。二つの段階で合計6個の平面部分グラフに分解される。

[定理2.2] 完全グラフ K_n の平面分解における分解個数の最小値を $d(n)$ で表わせば、

$$\left\langle \frac{n(n-1)}{6(n-2)} \right\rangle \leq d(n) \leq \left\langle \frac{n}{4} \right\rangle \quad (2.17)$$



(a) $G(1)$



(b) $G(5)$

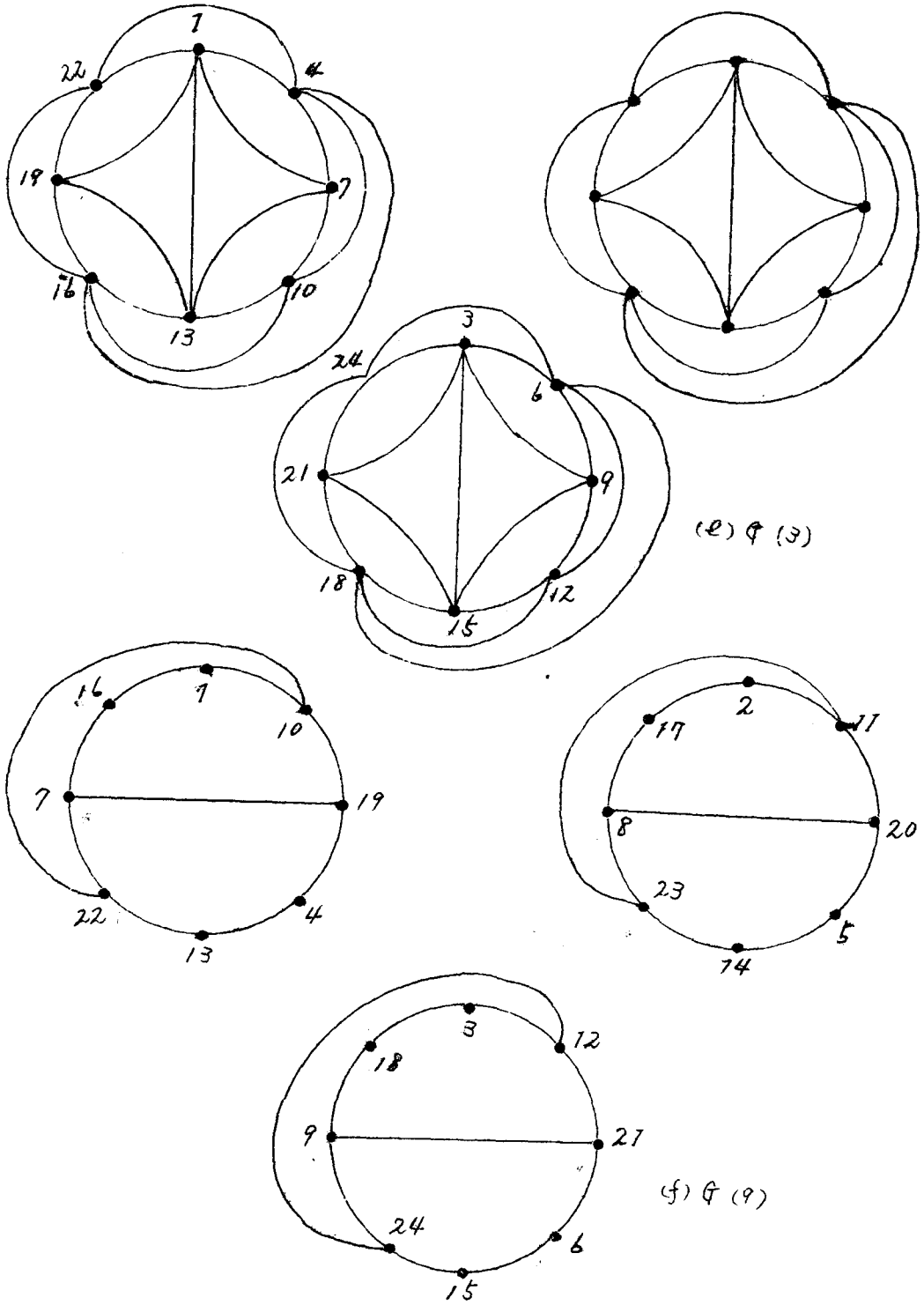


図 2 . 1 K_{24} の平面分解

である。ただし $\langle x \rangle$ は x より小でない最小の整数を表わす。

(証明) K_n は $n(n-1)/2$ 個の枝をもち、かつ n 個の節点をもつ平面グラフはたかだか $3n-6$ 個の枝しか持ち得ない。よつて、 $d(n) \geq \langle n(n-1)/6(n-2) \rangle$ である。一方、上の定理から、 $4m-3 \leq n \leq 4m$ なる n に対して、完全グラフ K_n は、多くとも $m = \langle n/4 \rangle$ 個の平面グラフに分解され得る。すなわち、 $d(n) \leq \langle n/4 \rangle$ である。(証明終)。

$n = 13, 17, 21$, および 25 に対して、上述の手続きによらないで、 K_n を $\langle n/4 \rangle - 1$ 個の平面部分グラフに分解することができる。

例えば、 $n = 13$ に対して、 K_{13} は図 2. 2 に示すように 3 個の平面部分グラフに分解することができる。したがつて、 n のような推論が可能である。

(推論) $n = 4m + 1$ ($m \geq 3$) に対して完全グラフ K_n は m 個の平面部分グラフに分解される。

2. 4 完全 Bipartite グラフの平面分解

本節では完全 Bipartite グラフの平面分解における分解個数の最少値を与え、その分解手法を示す。

(定義 2. 1 3) $V(G_{S,T}) = S \cup T$ ($S \cap T = \phi$)、かつ $E(G_{S,T}) = \{(s_i, t_j) \mid s_i \in S, t_j \in T\}$ であるグラフ $G_{S,T}$ を Bipartite グラフといい、B グラフと略記することにする。

(定義 2. 1 4) B グラフ $G_{S,T}$ で $E(G_{S,T}) = \{(s_i, t_j) \mid s_i \in S, t_j \in T\}$ なる $G_{S,T}$ を完全 B グラフといい $K_{S,T}$ で表わす。

(定義 2. 1 5) B グラフ $G_{S,T}$ に対して、各要素 c_{ij} が、

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 : (s_i, t_j) \in E(G_{S,T}), \\ 0 : (s_i, t_j) \notin E(G_{S,T}), \end{cases} \quad (2. 1 8)$$

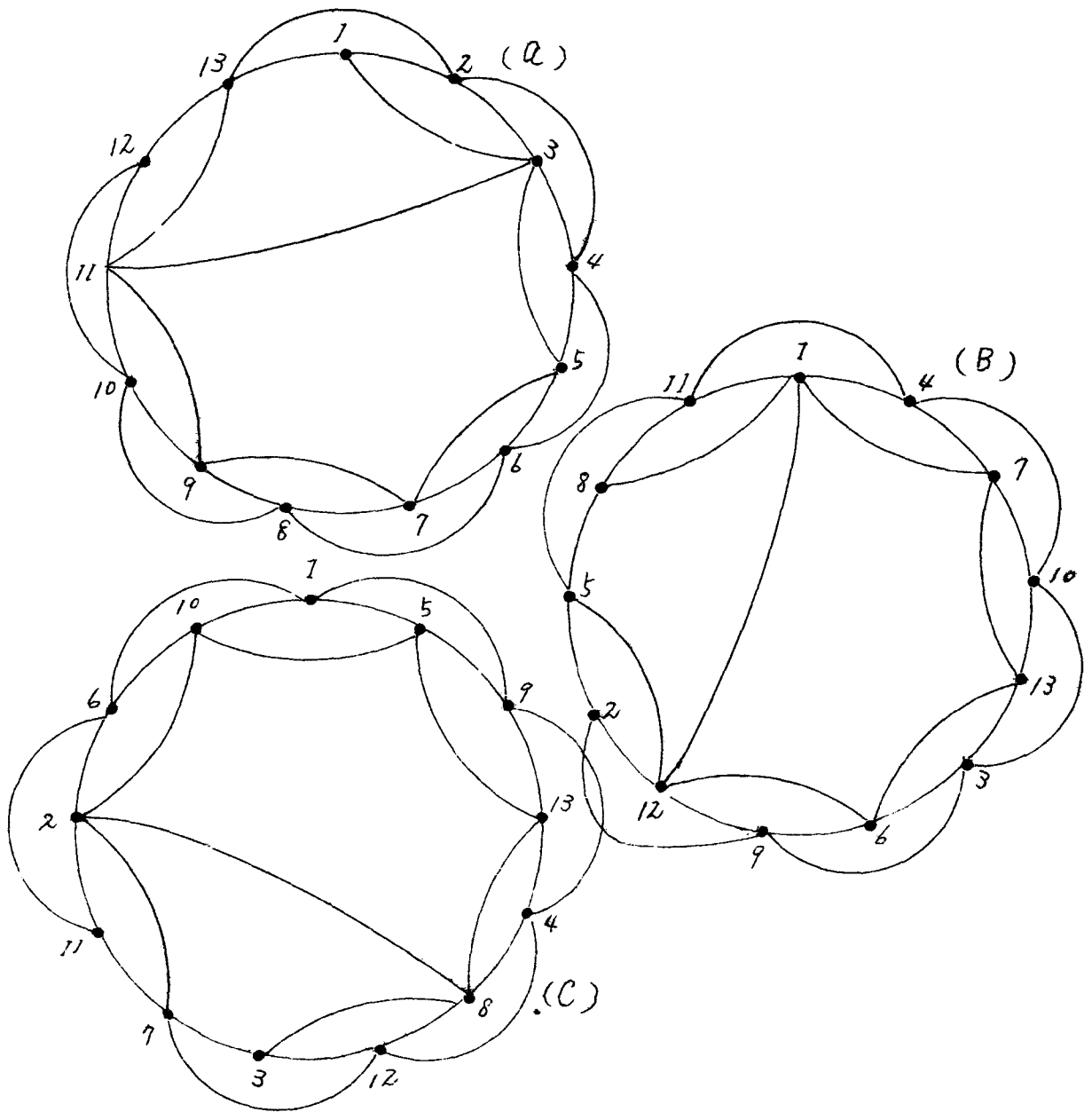


図 2. 2 K_{13} の平面分解

(a) $E_1^{(1)} \cup \{E_2^{(1)} - (1, 12)\} \cup \{(3, 11)\}$

(b) $E_3^{(1)} \cup \{E_6^{(1)} - (1, 8)\} \cup \{(1, 12)\}$

(c) $E_4^{(1)} \cup \{E_5^{(1)} - (3, 11)\} \cup \{(2, 8)\}$

なる $|S| \times |T|$ 次の行列 $C = [c_{ij}]$ を $G_{S, T}$ の結合行列という。

[補題 2.7] B グラフ $G_{S, T}$, $|S| = |T| = 4k$ ($k \geq 2$), の結合行列が P_{4k} (k : 偶数), (2.19) 式、または Q_{4k} (k : 奇数), (2.20) 式、のとき、このグラフは平面的である。

$$P_{4k} = \begin{array}{cccc} W_1 & U & & \\ U & V_1 & U & \\ & U & V_2 & U \\ & & U & V_1 & U \\ & & & \dots & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & U & V_2 & U \\ & & & & & U & W_2 \end{array}, (2.19)$$

$$Q_{4k} = \begin{array}{cccc} W_1 & U & & \\ U & V_1 & U & \\ & U & V_2 & U \\ & & U & V_1 & U \\ & & & \dots & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & U & V_1 & U \\ & & & & & U & W_3 \end{array}, (2.20)$$

ただし、ここで U は 4×4 次の単位行列であり、 W_1, W_2, W_3 , および V_1, V_2 は次式で与えられる。

$$W_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$W_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$W_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$V_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

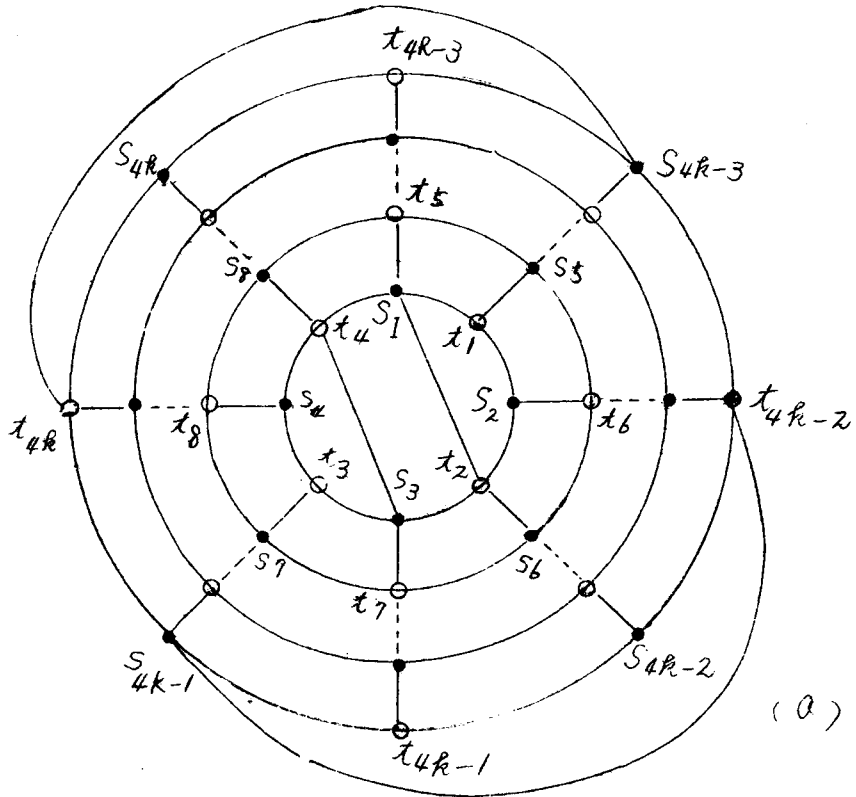
$$V_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(証明) $k (\geq 2)$ が偶数 (奇数) のとき、 $P_{4k} (Q_{4k})$ を結合行列とするグラフ $G_{S,T}$ は図 2.3(a) (図 2.3(b)) で示される。図では各 $s_i \in S$ および $t_j \in T$ はそれぞれ $P_{4k} (Q_{4k})$ の第 i 行および第 j 列に対応する。図から明らかのように、いずれの場合もグラフは平面的である。(証明終)

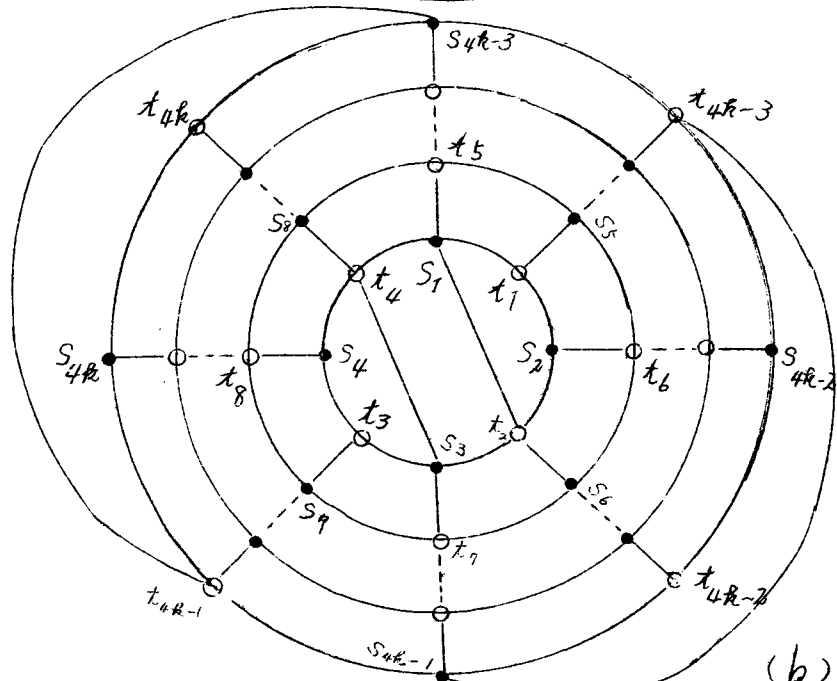
さて、 $4k (k \geq 2)$ 次元ベクトル x をつぎのように定義する。

$$X = \{ \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{4k}] \mid \{x_i, i=1, 2, \dots, 4k\} = \{1, 2, \dots, 4k\} \} \quad (2.21)$$

いま、任意の $\mathbf{x} \in X$ に対して、 $\mathbf{x}_{(i)} = [x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}, x_{4i}] (i=1, 2, \dots, k)$ とし、 X の置換の集合 $\{f_i, i=0, 1, 2, \dots, k-1\}$ をつぎのよ



(a)



(b)

図 2 . 3 P_{4k} および Q_{4k} をもつグラフ

うに定義する。

任意の $\mathbf{x} = [x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}] \in X$ に対して、

$$f_0(\mathbf{x}) = [x_{(2)}, x_{(3)}, \dots, x_{(k)}, x_{(1)}] \quad (2.22)$$

$$f_i(\mathbf{x}) = [x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(k)}] \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (2.23)$$

ただし、 $x_{(i)} = [x_{4i-2}, x_{4i-1}, x_{4i}, x_{4i-3}]$

(定義 2.16) 任意の $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{4k}]$, $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_{4k}] \in X$ に対して、 P_{4k} (k : 偶数) および Q_{4k} (k : 奇数) をそれぞれ結合行列とする B グラフ $G_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ および $G_q(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ をつぎのように定義する。すなわち、グラフ $G_p(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ($G_q(\mathbf{y}, \mathbf{z})$) の各 $s_{y_i} \in S$ ($i=1, 2, \dots, 4k$) および各 $t_{z_j} \in T$ ($j=1, 2, \dots, 4k$) は P_{4k} (Q_{4k}) の第 i 行および第 j 列にそれぞれ対応するものとする。

さて、 $\{f_i, i=0, 1, \dots, k\}$ で合成される置換 F を

$$F = \left\{ \begin{array}{l} f_0 f_1^h f_2^2 f_3 \cdots f_{2i}^2 f_{2i+1} \cdots f_{k-1} f_k^2 \quad (k: \text{偶数}) \\ f_0 f_1^h f_2^2 f_3 \cdots f_{2i}^2 f_{2i+1} \cdots f_{k-1} f_k \quad (k: \text{奇数}) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

で定義する。ただし、 h は $h + \frac{3}{2}k - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ (k : 偶数) または $h + \frac{3}{2}(k-1) \equiv 0 \pmod{4}$ なる $0 \leq h \leq 3$ の整数である。例えば $k=4$ に対しては、 $h=3$ であり、 $F(\mathbf{x}) = f_0(f_1^3(f_2^2(f_3(f_4(\mathbf{x})))))$ である。

[補題 2.8] k (2) が偶数 (奇数) のとき、任意の $\mathbf{x} \in X$ に対して、 $\{G_p(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x})), r=0, 1, \dots, k-1\}$ ($\{G_q(\mathbf{y}, F^r(\mathbf{y})), r=0, 1, \dots, k-1\}$) に含まれるどの二つのグラフも共通の枝を有しない。ただし、 F^0 は恒等置換を表わす。

(証明) $f_0^k = f_0^0$, すなわち、 f_0^k は恆等置換である。また、 F における各 f_i ($i = 1, 2, \dots, k$) の指数の総和は、 $h + \frac{3}{2}k - 1$ (k : 偶数) または $h + \frac{3}{2}(k-1)$ (k : 奇数) であり、仮定によりいずれも 4 の倍数であるから、 $F^k = F^0$ であることがわかる。いま、 P_{4k} または Q_{4k} の第 i 行に対応する節点 s_{x_i} 、例えば、 P_{4k} の第 1 列に対応する s_{x_1} に着目する。

s_{x_1} が各グラフ $G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x}))$ ($r = 0, 1, \dots, k-1$) において枝を共有する節点を調べると、 $G_P(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ では $\{t_{z_1}, t_{z_2}, t_{z_4}, t_{z_5}\}$ 、 $G_P(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}))$ では $\{t_{z_6}, t_{z_7}, t_{z_8}, t_{z_{10}}\}$ 、 $G_P(\mathbf{x}, F^2(\mathbf{x}))$ では $\{t_{z_9}, t_{z_{11}}, t_{z_{12}}, t_{z_{16}}\}, \dots$ 、であり、どの t_{z_j} も 2 度と現われないう、同様のことが他のどの s_{x_i} に対しても成立する。したがって、 $E(G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x}))) \cap E(G_P(\mathbf{x}, F^{r'}(\mathbf{x}))) = \phi$ がどの $0 \leq r < r' \leq k-1$ に対しても成立する。全く同様に、 $E(G_Q(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x}))) \cap E(G_Q(\mathbf{x}, F^{r'}(\mathbf{x}))) = \phi$ 、 $0 \leq r < r' \leq k-1$ が成立することがわかる。(証明終)

[定理 2.3] 完全 B グラフ $K_{S, T}$ ($|S| = |T| = 4k$) に対して、
 $d(K_{S, T}) = k + 1$

(証明) $k = 1$ に対しては定理は明らかに成立する。以下、 $k \geq 2$ が偶数の場合に限って証明しよう。 k が奇数の場合は同様に証明できるからである。いま、 $\mathbf{x} = [1, 2, \dots, 4k]$ とし、 $K_{S, T}$ ($|S| = |T| = 4k$) に関して次式で定義されるグラフ H_{S_0, T_0} を考える。

$$S_0 = \{s_2, s_4, s_{4k-2}, s_{4k}\}$$

$$T_0 = T = \{t_j, j=1, 2, \dots, 4k\}$$

$$E(H_{S_0, T_0}) = E(K_{S, T}) - \bigcup_{r=0}^{k-1} E(G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x})))$$

この H_{S_0, T_0} が平面的であれば、 $d(K_{S, T}) \leq k + 1$ であることがわかる。なぜならば、各グラフ $G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x}))$, $r = 0, 1, \dots, k-1$, は補題 2.7

から平面的であり、かつ補題 2.8 から $E(G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x}))) = E(G_P(\mathbf{x}, F^{r'}(\mathbf{x}))) = \emptyset$, $0 \leq r < r' \leq k-1$, であるからである。そこで、 H_{S_0, T_0} が平面的であることを証明しよう。結合行列 P_{4k} において、第 1, 3, $4k-2, 4k$ 行および第 1, 3, $4k-3, 4k-1$ 列のみが他の行、列と異なり、3 箇所しか 1 をもたない。したがって、

$$E(H_{S_0, T_0}) = \{ (s_2, ty_3), (s_4, ty_1), (s_{4k-2}, ty_{4k-3}), (s_{4k}, ty_{4k-1}) \mid \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{4k}] = F^r(\mathbf{x}), r=0, 1, \dots, k-1 \}$$

である。もし、 $h + \frac{3}{2}k - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ を満たす h ($0 \leq h \leq 3$) が 0 であれば、 $\mathbf{y} = F^r(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = F^{r+1}(\mathbf{x})$ ($r=0, 1, \dots, k-2$) に対して、

$$[z_{4k-3}, z_{4k-2}, z_{4k-1}, z_{4k}] = [y_1, y_2, y_3, y_4]$$

であり、したがって、

$$E(H_{S_0, T_0}) = \{ (s_2, ty_3), (s_4, ty_3), (s_{4k-2}, ty_1), (s_{4k}, ty_3) \mid \mathbf{y} = F^r(\mathbf{x}), r=0, 1, \dots, k-1 \},$$

であり、 H_{S_0, T_0} を図示すると図 2.4(a) のようになり、平面的である。

$h=2$ の場合も全く同様にして、 H_{S_0, T_0} が平面的であることがわかる。

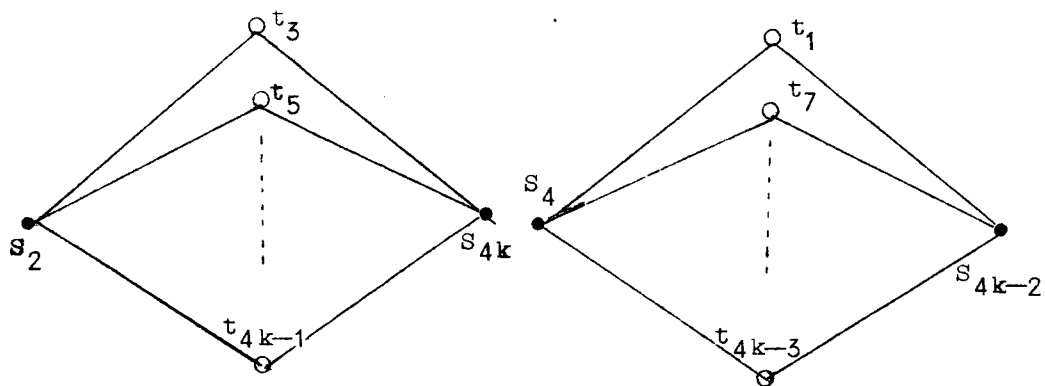
$h=1$ の場合、 $\mathbf{y} = F^r(\mathbf{x})$, $\mathbf{z} = F^{r+1}(\mathbf{x})$ ($r=0, 1, \dots, k-1$) に対して、

$$[z_{4k-3}, z_{4k-2}, z_{4k-1}, z_{4k}] = [y_2, y_3, y_4, y_1].$$

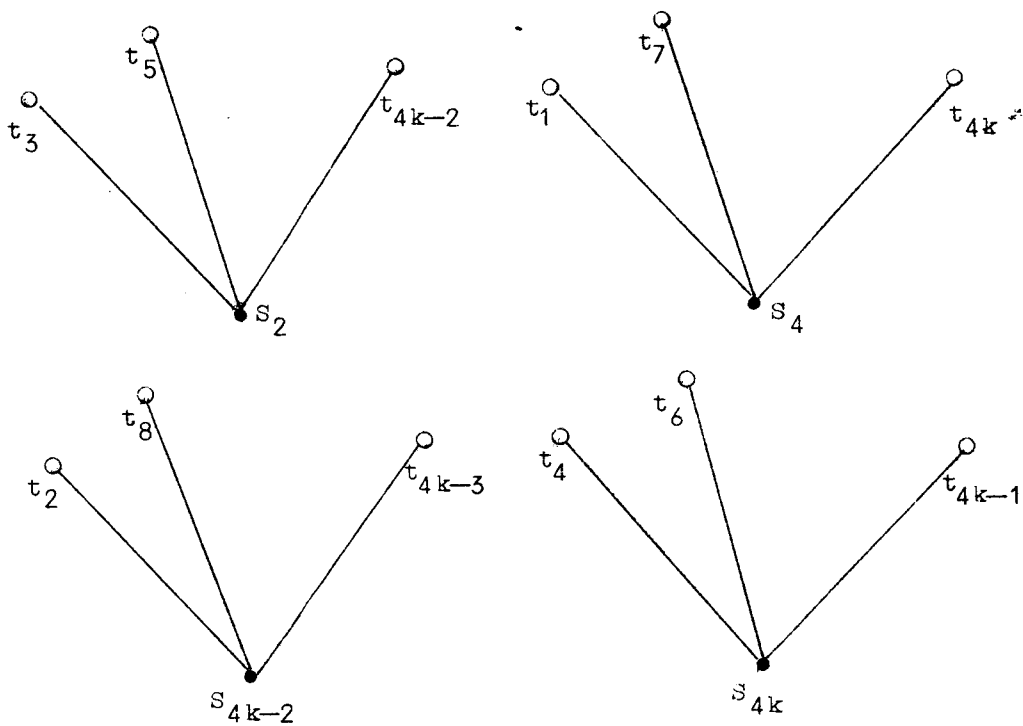
それゆえ、

$$E(H_{S_0, T_0}) = \{ (s_2, ty_3), (s_4, ty_1), (s_{4k-2}, ty_2), (s_{4k}, ty_4) \mid \mathbf{y} = F^r(\mathbf{x}), r=0, 1, \dots, k-1 \}$$

であり、 H_{S_0, T_0} はこのとき図 2.4(b) のように表わされ、平面的である。



(a) $h = 0$ の場合



(b) $h = 1$ の場合

図 2 . 4 グラフ H_{S_0, T_0}

$n=3$ のときも同様である。したがって、この $K_{S, T} (|S|=|T|=4k)$ に対して、

$$K_{S, T} = \bigcup_{r=0}^{k-1} G_P(\mathbf{x}, F^r(\mathbf{x})) \cup H_{S_0, T_0} \quad (2.25)$$

であり、 $K_{S, T}$ は $k+1$ 個の平面部分グラフに分解される。つぎに $d(K_{S, T} (|S|=|T|=4k))$ は $16k^2$ 個の枝をもっている。一方、 $|S|=|T|=4k$ なる B グラフ $G_{S, T}$ はたかだか $4(4k-1)$ 個の枝だけもち得る。よつて、

$$d(K_{S, T}) < \frac{16k^2}{4(4k-1)} > = k+1 \quad (2.26)$$

以上により、 $d(K_{S, T})=k+1$ が示された。(証明終)

[定理 2.4] 完全 B グラフ $K_{S, T} (|S|=|T|=n)$

に対して、

$$\left\langle \frac{n^2}{4(n-1)} \right\rangle \leq d(K_{S, T}) \leq \left\langle \frac{n}{4} \right\rangle + 1 \quad (2.27)$$

(証明) この $K_{S, T}$ は n^2 個の枝をもつから

$$\left\langle \frac{n^2}{4(n-1)} \right\rangle \leq d(K_{S, T})$$

は明らかである。いま、 $4k-3 \leq n \leq 4k (k=1, 2, \dots)$ の場合を考えると、 $K_{S, T} (|S|=|T|=n)$ は $K_{S', T'} (|S'|=|T'|=4k)$ の部分グラフであり、かつ後者は $k+1 = \langle n/4 \rangle + 1$ 個の平面部分グラフに分解され得る。したがって、 $d(K_{S, T}) \leq \langle n/4 \rangle + 1$ 。

(証明終)

(例題) 完全 B グラフ $K_{S, T} (|S|=|T|=16)$ の平面分解について、

14 15 16 13 3 4 1 2 8 5 6 7 11 12 9 10 $\leftarrow F^3(\mathbf{x})$
 12 9 10 11 16 13 14 15 2 3 4 1 6 7 8 5 $\leftarrow F^2(\mathbf{x})$
 7 8 5 6 10 11 12 9 15 16 13 14 4 1 2 3 $\leftarrow F(\mathbf{x})$
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 $\leftarrow \mathbf{x}$

1	1	1	1	1												
2	1	1			1											
3		1	1	1		1										
4			1	1				1								
5	1				1	1			1							
6		1				1	1			1						
7			1				1	1			1					
8				1	1				1			1				
9					1				1			1	1			
10						1			1	1				1		
11							1			1	1				1	
12								1			1	1				1
13									1					1	1	1
14										1					1	1
15											1				1	1
16												1	1			1

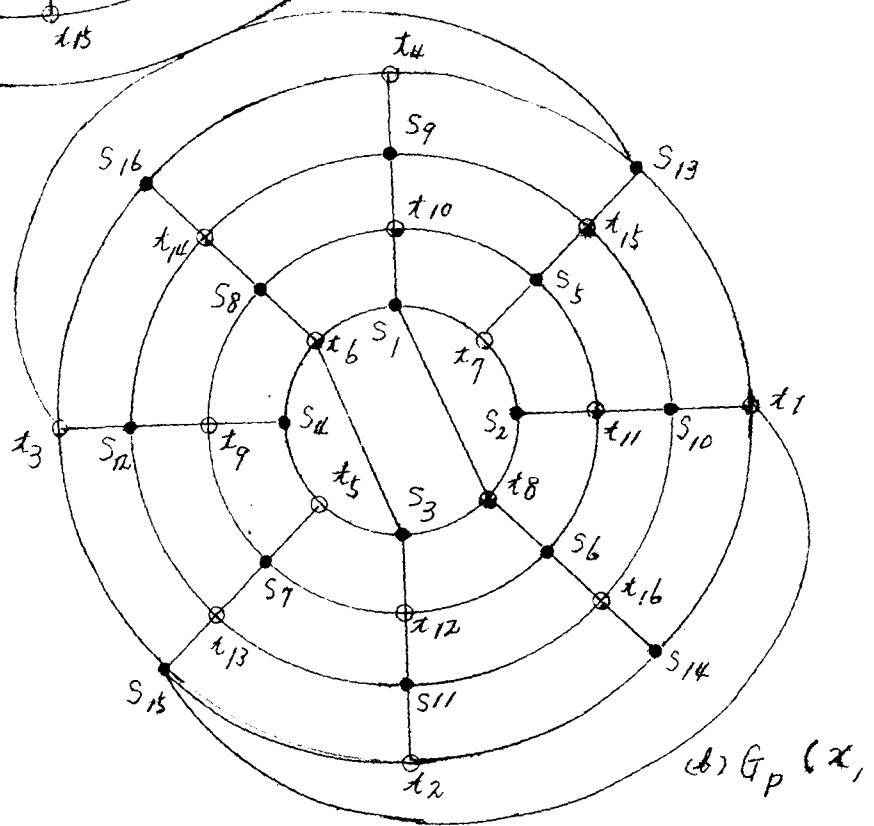
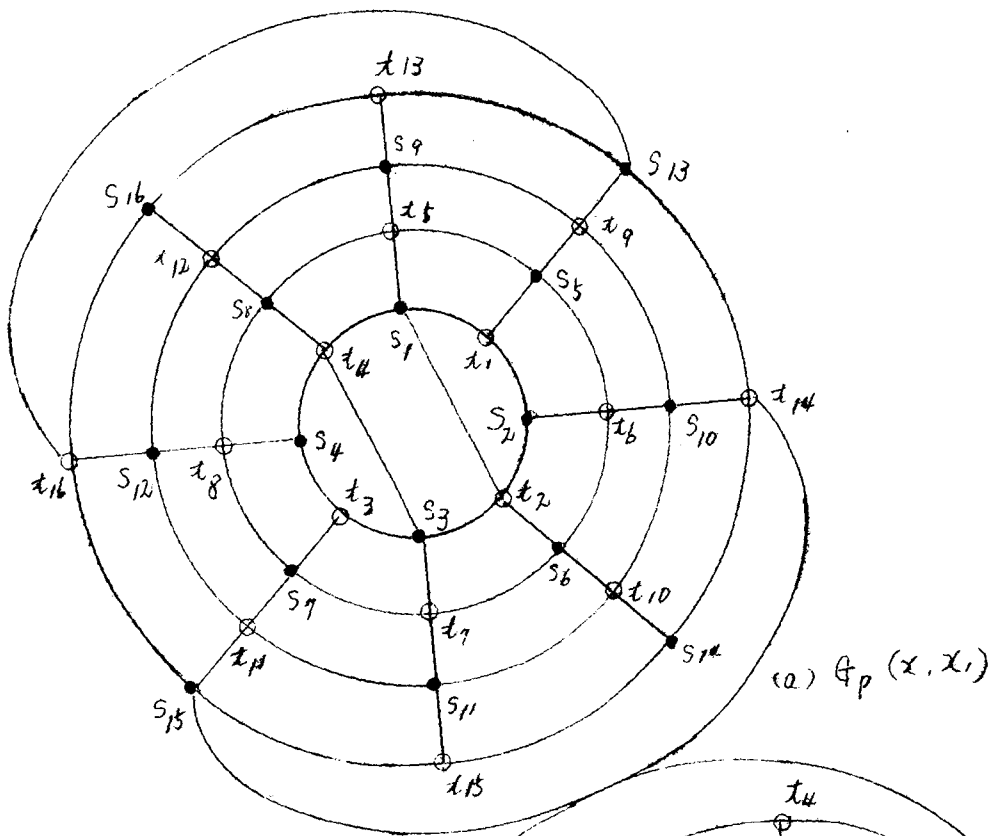
図 2 . 5 P_{16} および $F^r(\mathbf{x})$, $r = 0, 1, 2, 3$,

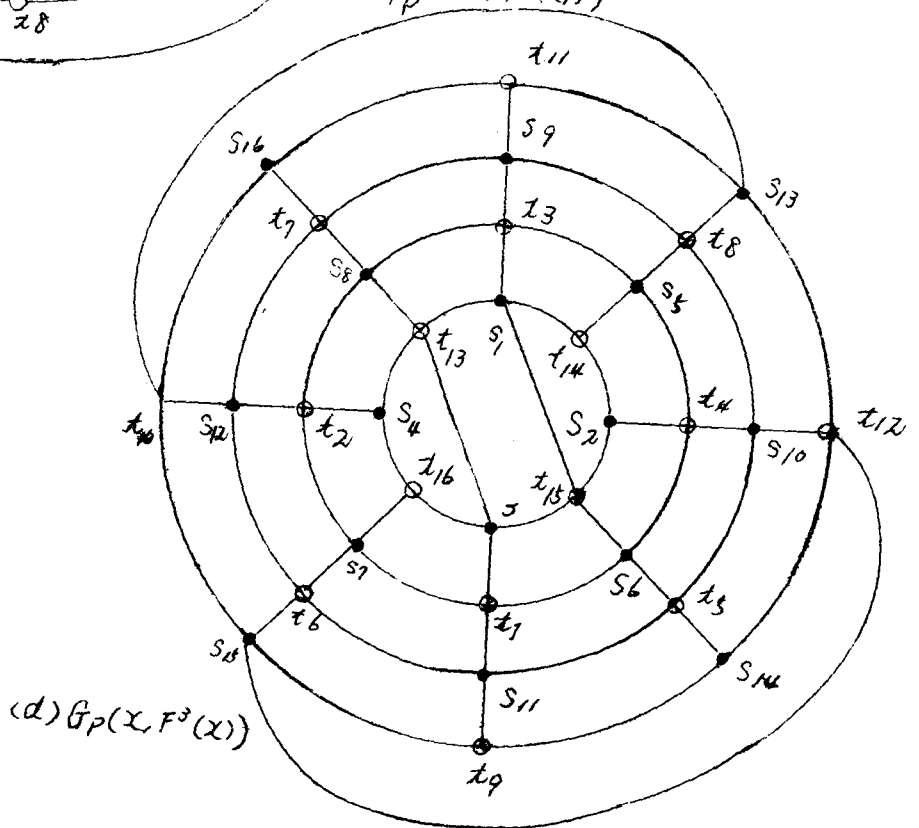
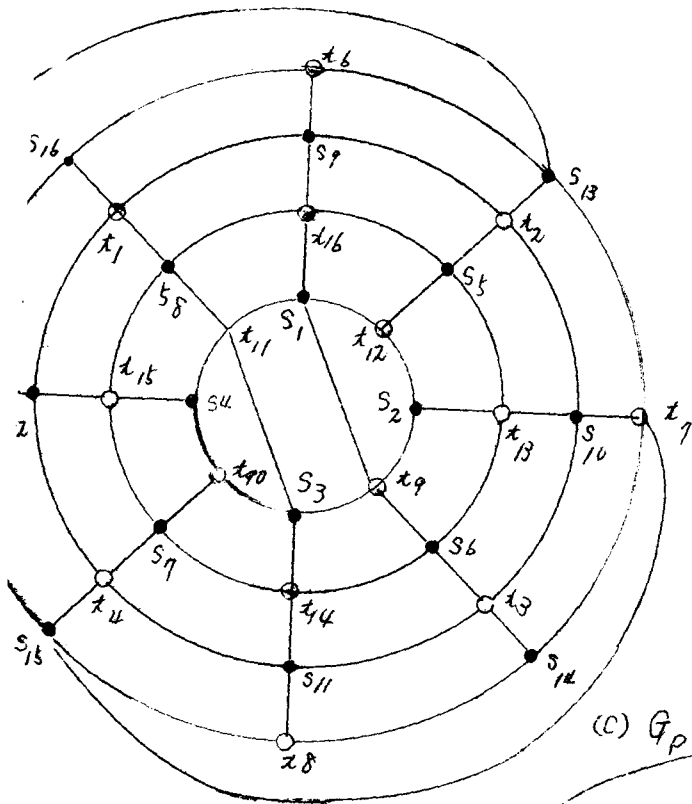
上述の操作を実際に行つてみる。この場合、 $k=4$ 、 $h=3$ であり、結合行列 P_{16} は図 2.5 のようになる。ただし、図中では $\mathbf{x} = [1, 2, \dots, 16]$ とし、各 $t_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, 16$) に対応するベクトルの集合 $\{\mathbf{x}, F(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), F^3(\mathbf{x})\}$ が示されてある。定理 2.3 の証明で述べた操作により、4 個の平面部分グラフ $G_P(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, $G_P(\mathbf{x}, F(\mathbf{x}))$, $G_P(\mathbf{x}, F^2(\mathbf{x}))$, $G_P(\mathbf{x}, F^3(\mathbf{x}))$, および H_{S_0, T_0} , 合計 5 個の平面部分グラフが得られ、それらを図 2.6 で示す。

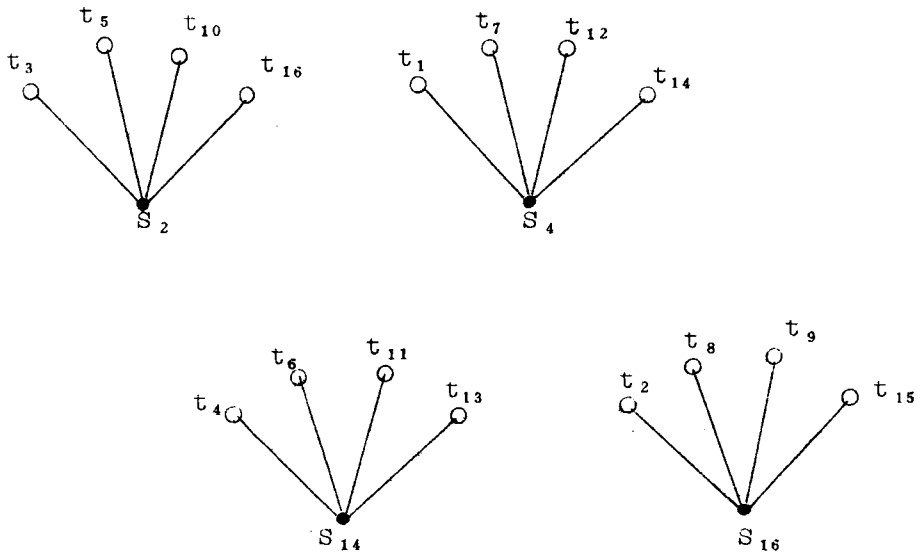
2.5 結 言

本章では、完全グラフおよび完全 B グラフの平面分解における分解個数の最少値の上限を与え、それに関連して平面分解の手続きを考察した。完全グラフ K_n については、部分的な改良、すなわち、特定の n に対して、 $\langle n/4 \rangle$ より小なる $d(K_n)$ の上限が見出され得るという可能性があるが、完全 B グラフ $K_{S, T}$ ($|S| = |T|$) に対しては、本質的な改良は不可能であろう。ただし、 $K_{S, T}$ ($|S| \leq |T|$) の場合、 $\{23\}$, $\{24\}$ の方法がすぐれており、その分解法は最も有効であろう。

平面分解問題の応用面は、多層印刷回路あるいは多層集積回路の設計において有用であり、本章で考察した問題は、まだその初歩的段階にすぎない。したがって、一般の任意に与えられたグラフに対して、それをできるだけ少数個の平面部分グラフに分解する問題は、応用および理論の両面において重要かつ興味ある問題である。これは今後の発展を待たなければならない。







(e) H_{S_0, T_0}

図 2.6 $K_{S, T} (|S| = |T| = 16)$ の平面分解

第3章 グラフの道の符号化問題およびその応用

3.1 緒言

欧米とは異なり、日本では定期乗車券は

(I) 通用径路上の任意の駅で、かつ

(II) 通用期間中は何度でも

使用することができる。特にこのうちの(I)の事項が、その自動改札化を困難にしている。本章は、このような動機のもとに、自動改札化に適するグラフの道の符号化問題を考察する。

グラフ理論的に表わせば、上の問題は、グラフのすべての道の符号化を、与えられた節点または枝が指定された道の上にあるか否かの判定を機構的に行い易くするという条件下で求めるという問題である。

グラフ中の可能な道の数を n 個とすれば、それらを符号化するのに、少なくとも N ビット (bit) ($N : 2^x \geq n$ を満たす最小の x) 必要であるが、 N ビットで符号化すれば一般に判定機構が極めて複雑となる。道の符号化に要するビット数が N より少々増しても、その判定機構が簡単化される方が実用的には望ましい。

本章では、この道の符号化に要するビット数が N より少し大となるが、判定機構が簡単化された符号化の一方法を考察し、さらに応用例として、定期乗車券の自動改札化および輸送網の区分け問題について考察する。

3.2 道の表示法

連結したグラフにおける2節点 n_1, n_2 を両端とする道 $P(n_1, n_2)$ の符号化、復号化を考慮する際には、有効な道の表示法を考えなければならない。

本節では、その目的のために、道 $P(n_1, n_2)$ をある木 T に関する木道をを用いて表示することを考える。

n 個の節点と m 個の枝とから成る連結グラフ G において、一つの木 T を選んでその補木を C_T として、 C_T に含まれる枝を c_1, c_2, \dots, c_μ とする。ただし、 μ は G の退化次数 $m - n + 1$ である。補木の枝 c_i ($i=1, 2, \dots, \mu$) と c_i の両端点間の T に関する木道により決定される閉路を L_i とすれば $\{L_i, i=1, 2, \dots, \mu\}$ は閉路の基本系をなす。〔25〕,〔26〕
 G の指定された道 $P(n_1, n_2)$ が通る補木の枝を $\{c_{ik} | k=1, 2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, \mu\}\}$ とし、 c_{ik} に対応する基本閉路を L_{ik} とする。いま、

$$L = L_{i_1} \oplus L_{i_2} \oplus \dots = \bigcup_k L_{ik} \quad (3.1)$$

で定義される部分グラフ L を考える。ただし、 \oplus は集合論的排他和を表わす。

明らかに、 L は一つの閉路であるか、または同一の枝を共有しないいくつかの閉路から成るグラフである。また、 n_1, n_2 の間の T に関する木道を $P^T(e_1, e_2)$ で表わす。ただし、 e_1, e_2 はこの木道の両端の枝であり、 e_1, e_2 はそれぞれ n_1, n_2 の端点とする。このとき、

$$P(n_1, n_2) = P^T(e_1, e_2) \oplus L \quad (3.2)$$

となる。したがって、与えられた任意の枝 e に対して、 e が道 $P(n_1, n_2)$ 上にあるか否か、すなわち、 $e \in P(n_1, n_2)$ かどうかの判定の問題は、 $e \in P^T(e_1, e_2)$ か否か、および $e \in L$ か否かの問題に帰せられる。いずれか一方のみ成立するときに限り $e \in P(n_1, n_2)$ である。

ところで、自動収札などの問題では、一般にどの枝もごく少数の基本閉路にしか属さないから、 $e \in L$ の判定の機構化は容易である。以下に $e \in L$ の判定法を示す。

道 $P(n_1, n_2)$ が補木のどの枝を通るかを示すために、 μ 個のビット $A_i, i=$

1, 2, ..., μ , を設け、各 i について、

$$A_i = \begin{cases} 1 : P(n_1, n_2) \text{ が } c_i \text{ を通るとき} \\ 0 : \text{そうでないとき} \end{cases} \quad (3.3)$$

とする。G の任意の枝 θ に対して、その θ の属する基本閉路の組を $\{L_{j_h}, h=1, 2, \dots, j_h \in \{1, 2, \dots, \mu\}\}$ とするとき、 $P(n_1, n_2)$ に対する L に関して、 $\theta \in L$ であるのは、

$$\sum_h A_{j_h} \equiv 1 \pmod{2} \quad (3.4)$$

が成立するとき、かつそのときに限る。前述のように、一般に一つの θ に対して $\{L_{j_h}\}$ の閉路の数は少数であるから、この判定は容易である。

3.3 道の符号化

前節の終りで述べたように、 $\theta \in L$ の判定の問題は一般に少数の手数で容易に行える。残る主題は、 $\theta \in P^T(n_1, n_2)$ の判定を能率良く行えるような $P^T(\theta_1, \theta_2)$ の符号化の問題である。この目的のために、まず各枝の番号付を考察する。

(1) グラフ G のできるだけ長い道を見出す。ただし、道の長さはその道の上にある枝の数とする。この道を含む木 T で、T の補木 C_T の各枝が G における線度¹⁾ (degree) が 3 以上の節点 (以下このような節点を G の分岐点という) につながる枝の組に属するようなものを選ぶ。このように T を選ぶ理由は、後述するように、T を選ぶ理由は、後述するように、判定操作の手数を軽減するためである。

(2) T の最長の道を T の幹と呼ぶことにし、T を樹枝状グラフで表わす。

脚註 1) ある節点の線度とは、その節点につながる枝の数をいう。

図3.1参照。

(3) T における分岐点 v_1 と v_2 ,または分岐点 v_1 と端点²⁾ v_2 の間の木道 $P^T(v_1, v_2)$ で、その上には v_1, v_2 以外には T の分岐点を含まないものを T の大枝と呼ぶことにする。幹の端点の一つを木 T の根といい、 T の各枝に、根から遠ざかる向きに矢印を付す。 T のある要素 x 、すなわち T の節点 x 、枝 x 、または大枝 x から出発して矢印の方向の道をたどつて達し得る T の部分グラフを Γ_x で表わす。ただし、 $x \in \Gamma_x$ とする。また、任意の T の要素 x に対して

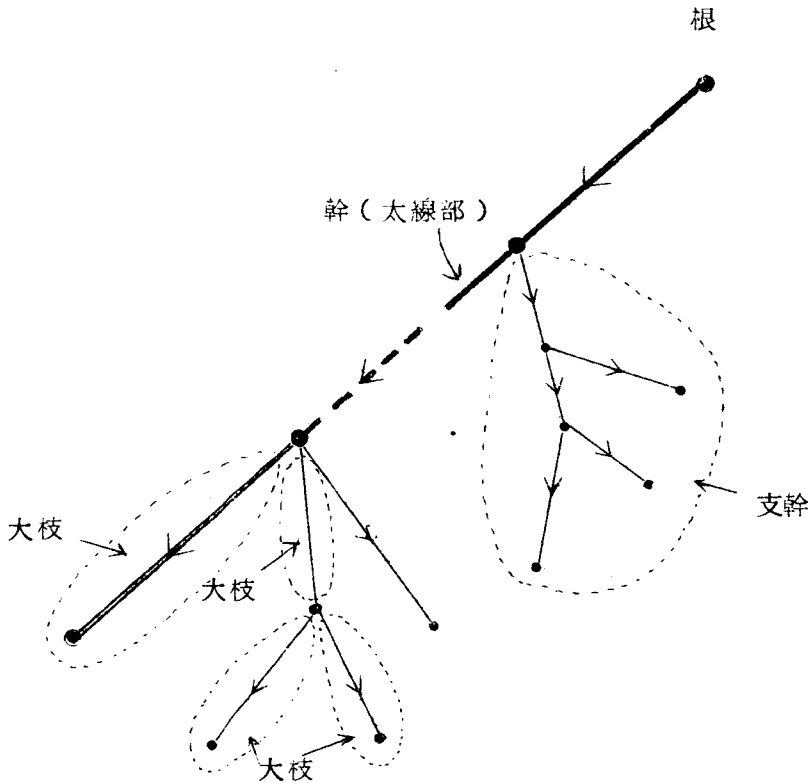


図3.1 Tの樹枝状グラフ

脚註 2) T の端点とは、 T 上の節点で、 T における線度1なるものをいう。

$\Gamma^{-1}x = \{y \mid x \in \Gamma y\}$ とする。いま、幹から出る枝 θ に対して、 $\Gamma\theta$ なる部分グラフを支幹という。図 3.1 参照。

(4) 各大枝を次の手順で名前付けをする。

(I) 幹上の大枝 b で $\Gamma b = b$ なるものを b_1 とする。

(II) すでに名前が付けられた大枝の組を $\{b_k, k=1, 2, \dots, M\}$ とする。 T から $\{b_k\}$ を除いた T の部分グラフ、 $T - \bigcup_{k=1}^M b_k$ において、もし b_M と同じ分岐点から出る道が見出し得るとき、そのような道で最長のものを選び、その道の上の大枝で $b = b$ なるものを b_{M+1} とする。そのような道が見出し得ないとき、 $T - \bigcup_{k=1}^M b_k$ にある大枝で、 b_M と同一節点を共有するものを b_{M+1} とする。

以上の操作を繰り返して T のすべての大枝に名前付けを行なう。図 3.2 はその一例を表わす。

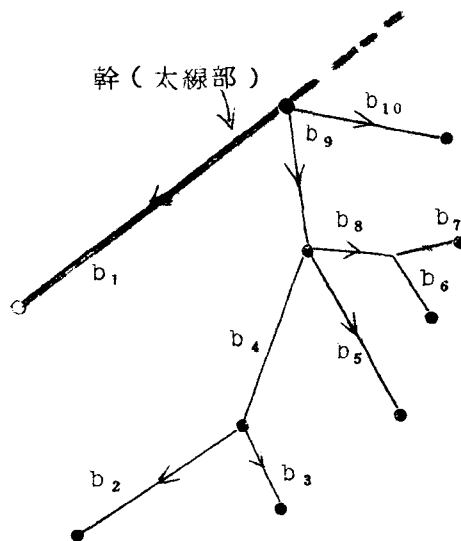


図 3.2 大枝の名前付け

(5) 各枝に次の手順で番号付けを行なう。

- (I) b_1 の枝 e で $\Gamma e = e$ なるものに番号 0 を与える。
- (II) 大枝 b_k において、枝 e_{k_i} がすでに番号 $N(e_{k_i})$ が与えられたとき、 $\Gamma^{-1}e_{k_i}$ の枝で、 e_{k_i} と同一節点をもつ b_k の枝 e_{k_j} に $N(e_{k_j}) = N(e_{k_i}) + 1$ なる番号を与える。
- (III) b_k の枝上位の枝 e_p , すなわち $\Gamma e_p \supseteq b_k$ なる枝に番号 $N(e_p)$ が与えられているとき、 b_{k+1} の枝下位の枝 e_q , Γ すなわち $\Gamma^{-1}e_q \supseteq b_{k+1}$ なる枝に番号 $N(e_q) = N(e_p) + 1$ を与える。

以上の操作によりすべての T の枝に番号を付けると、任意の G の道 $P(n_1, n_2)$ は前節の μ 個のビット $\{A_i, i = 1, 2, \dots, \mu\}$ と $P^T(e_1, e_2)$ に対応する $N(e_1), N(e_2)$ により符号化される。いま、 T の枝の総数 $n-1$ に対して、 $2^X \geq n-1$ を満たす最小の整数 X を s とすれば、 G の各道の符号化に要するビットは、上の方法では少なくとも $2s + \mu$ ビットである。

3.4 枝に関する判定機構

本節では任意の枝 $e \in T$ が与えられた道 $P(n_1, n_2)$ に対する木道 $P^T(e_1, e_2)$ の上にあるか否かの判定機構を考察する。

(1) 幹上の枝に対する判定機構

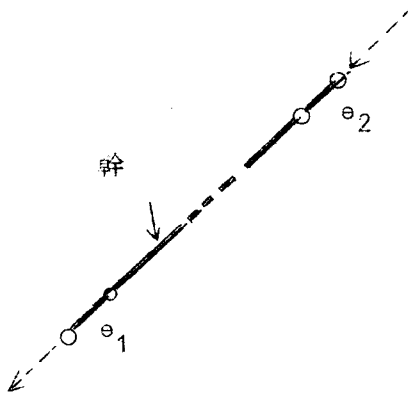
与えられた枝 e が T の幹の上にあるとき、この判定機構は簡単である。以下、任意の $P^T(e_1, e_2)$ に対して、 $N(e_1) \leq N(e_2)$ とする。

【定理 3.1】 幹上の枝 e が、任意の $P^T(e_1, e_2)$ に対して $e \in P^T(e_1, e_2)$ であるための必要十分条件は、

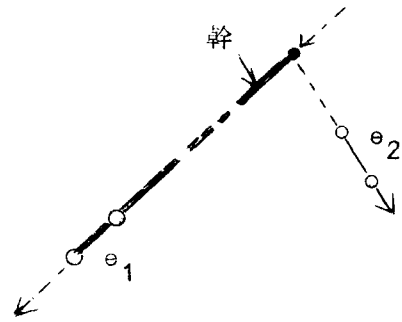
$$N(e_1) \leq N(e) \leq N(e_2) \quad (3.4)$$

である。

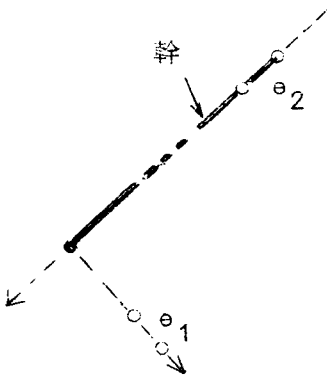
(証明) 幹上の枝 θ に対して、 $N(\theta_1) \leq N(\theta) \leq N(\theta_2)$ であれば、 θ は図 3.3 の各場合において太線上にある。逆に、幹上の枝 θ に対して、 $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ を満たすのは図 3.3 の各場合の太線上にある場合で、このとき明らかに $N(\theta_1) \leq N(\theta) \leq N(\theta_2)$ である。(証明終)



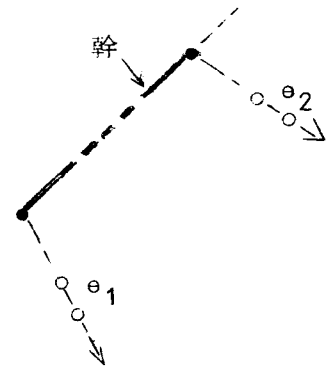
(a) θ_1, θ_2 が幹上にあるとき



(b) θ_1 のみが幹上にあるとき



(c) θ_2 のみが幹上にあるとき



(d) θ_1, θ_2 が幹上にないとき

図 3.3 $N(\theta_1) \leq N(\theta) \leq N(\theta_2)$ を満たす幹上の枝 (太線部)

以上のように、 $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ の判定機構は、この場合、問題としてい
る枝 θ の番号 $N(\theta)$ と、与えられた道の符号に含まれる $N(\theta_1)$, $N(\theta_2)$ との比
較のみである。

(2) 幹以外の枝に対する判定機構

幹以外にある枝 θ に対して、 θ の属する大枝を ρ とする。 $\Gamma_\rho = T(\theta)$ で定義
される T の部分グラフの中で、最小の枝番号を θ に対して $\varphi(\theta)$ で表わす。この
 $\varphi(\theta)$ を用いてこの場合の判定機構は次のように表わされる。

〔定理 3.2〕 幹以外の枝 θ が、任意の $P^T(\theta_1, \theta_2)$ に対して、 $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ であるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} N(\theta_1) < \varphi(\theta), \text{ かつ} & (3.5) \\ \varphi(\theta) \leq N(\theta_2) \leq N(\theta) & (3.6) \end{cases}$$

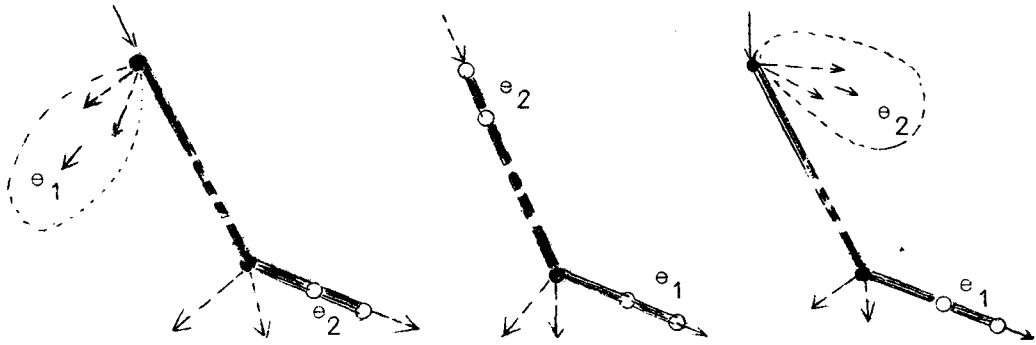
または

$$\begin{cases} \varphi(\theta) \leq N(\theta_1) \leq N(\theta), \text{ かつ} & (3.7) \\ N(\theta) \leq N(\theta_2) & (3.8) \end{cases}$$

のいずれかが成立することである。

(証明) 幹上以外の枝 θ に対して、(3.5), (3.6) の両式が成立する
とする。(3.6) は Γ_θ , $\varphi(\theta)$ の定義から、 θ_2 が T の部分グラフ $\Gamma_\theta (\subseteq T(\theta))$ に属することを示し、しかも (3.5) は θ_1 が Γ_θ にないことを示す
から、このとき、 $P^T(\theta_1, \theta_2)$ は θ を通る。(3.7), (3.8) が成立す
るときも同様にして $P^T(\theta_1, \theta_2)$ が θ を通ることが示される。逆に、幹上以外
の枝 θ に対して、 $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ であるとき、 $\theta \in \Gamma^{-1}\theta_2 - \Gamma^{-1}\theta_1$, または
 $\theta \in \Gamma^{-1}\theta_1 - (\Gamma^{-1}\theta_2 - \theta_2)$ である。前者のとき、 θ は図 3.4(a) で示す
太線部の上であり (3.5), (3.6) 式が成立する。後者のとき、 θ は同
図(b)の各場合の太線部の上であり、(3.7), (3.8) の両式が成立する。

(証明終)



(a) $I^{-1}e_2 - I^{-1}e_1$ の枝
(太線部)

(b) $I^{-1}e_1 - (I^{-1}e_2 - e_2)$ の枝
(太線部)

図 3 . 4 (3.5), (3.6); (3.7), (3.8)
を満たす枝

したがって、この場合の判定機構は、問題としている枝 θ に対して、 $N(\theta)$ および $\varphi(\theta)$ と、与えられた道の符号中の $N(e_1)$, $N(e_2)$ とを比較して、(3.5) ~ (3.8) が成立しているか否かを調べることである。

この判定法から明らかなように、(1)の場合の判定が(2)の場合のそれよりも簡単である。前節の番号付けの手順中の(1)で、 T として G のできるだけ長い道を含むように選んだのは、この理由による。

3.5 判定機構の簡単化

前節の(2)の場合の判定において、 $N(\theta)$, $\varphi(\theta)$, $N(e_1)$, $N(e_2)$ の間の比較をシリアル (serial) に行なう場合、その比較操作の手数を軽減するため、次の手順で各枝の番号を割り当てる。

(1) 各大枝 b_k に重み $w(b_k)$ を次のように割り当てる。

- (I) 幹以外の大枝 b_k で、 T の端点を含むようなものに対して、 $w(b_k) = 2^{q_k}$ とする。ただし、 q_k は $2^{q_k} \geq m(b_k)$ ($m(b_k)$; b_k の枝の数) なる最小の整数である。
- (II) 幹以外の大枝 b_k で、 Γ_{b_k} 中の b_k 以外のすべての大枝に重みが与えられたとき、それらの和を $W(\Gamma_{b_k} - b_k)$ とする。このとき、 $w(b_k) = 2^{q_k} - W(\Gamma_{b_k} - b_k)$ とする。ここで、 q_k は $2^{q_k} \geq m(b_k) + W(\Gamma_{b_k} - b_k)$ なる最小の整数であり、したがって、 $W(\Gamma_{b_k}) = W(\Gamma_{b_k} - b_k) + w(b_k) = 2^{q_k}$ となる。
- (III) 第3.3節の(4)の操作と同じ手順で各大枝に名前をつけ直す。ただし、(II)における最長の道を見出す際、その道の大枝の重みのうち最大なものをもって最長の道とする。
- (IV) 幹上の大枝を $b_{t_1} (= b_1), b_{t_2}, \dots, b_{t_u}$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_u$) とする。
- (i) b_{t_1} と同じ分岐点から出る支幹のうちで最長の道を含むものを τ_1 とする。 τ_1 の重み $W(\tau_1) = \sum_{b_i \in \tau_1} w(b_i)$ で割り切れかつ $m(b_{t_1})$ より小でない最小の整数を $w(b_{t_1})$ に割り当てる。
- (ii) $b_{t_{i-1}}$ ($2 \leq i \leq u-1$) に重みが与えられたとき、 b_{t_i} と同じ分岐点から出る支幹の中で最長の道を含むものを τ_i とする。 $w(b_{t_i})$ としては、 $m(b_{t_i})$ よりも小でなく、かつ $w(b_{t_i}) + W(b_{t_i} - b_{t_{i-1}})$ が $W(\tau_i)$ で割り切れるような最小の $w(b_{t_i})$ を選らぶ。
- (v) $w(b_{t_u}) = m(b_{t_u})$ とする。
- (2) 各枝 θ_i の番号 $N(\theta_i)$ を次の手順で与える。
- (I) 大枝 b_1 の最下位の枝に 0 を与える。
- (II) 大枝 b_k ($k \geq 2$) の最下位の枝 θ_{k-1} には $N(\theta_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} w(b_i)$ を与

える。

(Ⅳ) 大枝 b_k の枝 e_{k-1} に $N(e_{k-1})$ が与えられたとき、 e_{k-1} に入るすぐ上の枝 e_{k_j} に $N(e_{k_j}) = N(e_{k-1}) + 1$ を与える。

以上の操作により T の各枝に番号を与えると、幹以外の大枝 b_k の枝 θ に対して、 $\mathcal{T}(\theta)$ の重み $W(\mathcal{T}(\theta)) = \sum_{b_i \in \mathcal{T}(\theta)} w(b_i)$ は、 q を適当な整数として、 $W(\mathcal{T}(\theta)) = 2^q$ で表わされる。また $\tilde{\varphi}(\theta) + W(\mathcal{T}(\theta)) - 1 = \varphi(\theta) + 2^q - 1$ と定義すれば、 $\tilde{\varphi}(\theta) + 1$ は b_{k+1} の最下位の枝の番号となる。

$\varphi(\theta)$ と $\tilde{\varphi}(\theta)$ の間の関係に関する次の定理が成り立つ。

[定理 3.3] $\varphi(\theta)$, $\tilde{\varphi}(\theta)$ の 2 進表示 (s けた) において、上位から $s - q$ (≥ 2) けたの内容は同一であり、かつ $\mathcal{T}(\theta)$ の枝の番号にかぎり、その 2 進表示の上位の $s - q$ けたが $\varphi(\theta)$, $\tilde{\varphi}(\theta)$ のそれと一致し、それ以外の枝の番号は一致しない。ただし、 s は $2^s \geq \sum_{b_i \in T} w(b_i)$ を満たす最小の整数であり、 $W(\mathcal{T}(\theta)) = 2^q$ とする。

(証明) まず、 $\varphi(\theta)$ は P を適当な整数として、 $\varphi(\theta) = P \cdot 2^q$ で表わされることを示す。幹上の大枝 b_{t_i} ($1 \leq i \leq u-1$) と同じ分岐点から出る支幹のうち、重みの最大なもの τ_i に対して、もし $\varphi(\theta)$ がその τ_i の上の最小の枝番号であれば、割り当ての方法から $\varphi(\theta) = P_i W(\tau_i) = P_i 2^{q_i}$ で表わされる。ただし、 $W(\tau_i) = 2^{q_i}$ とおき、 P_i は適当な整数である。 $\mathcal{T}(\theta) \subseteq \tau_i$ であるから $q \leq q_i$ 。したがって、 $\varphi(\theta) = P_i 2^{q_i - q} \cdot 2^q \equiv P 2^q$ で表わされる。もし $\varphi(\theta)$ が τ_i の最小の枝番号でないとき、 $\theta \in b$ なる大枝 b に対して、 $\Gamma b = \mathcal{T}(\theta) \subseteq \Gamma b' = \mathcal{T}'$ を満たすような T の部分グラフを $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ ($\mathcal{T}(\theta) \subset \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subset \dots$) とする。また、 $\mathcal{T}(\theta), \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$ のそれぞれと同じ分岐点から出る T の部分グラフで、 $\varphi(\theta)$ より小の枝番号をもつようなものを順に $\mathcal{T}' = \tau_i, \mathcal{T}'', \dots, \mathcal{T}^{(r)}$ とする。ただし、 $\mathcal{T}^{(k)}$ の最小の枝番号は $\mathcal{T}^{(k+1)}$ のそれより

も小であるとする。図3.5参照。いま、 $J', J'', \dots, J^{(r)}$ の重みはそれぞれ $2^{q'}, 2^{q''}, \dots, 2^{q^{(r)}}$ ($q \leq q^{(r)} \leq \dots \leq q'' \leq q'$) で表わされる。

上の最小の枝番号は $P_i 2^{q^i}$ ($= P_i 2^{q'}$) で表わされるから、

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = & P_i 2^q i + 2^{q'} + 2^{q''} + \dots + 2^{q^{(r)}} = (P_i 2^{q^i - q} + 2^{q' - q} \\ & + \dots + 2^{q^{(r)} - q}) 2^q \equiv P \cdot 2^q \end{aligned} \quad (3.9)$$

と表わされる。よつて、いずれの場合も、 $\varphi(\theta) = P \cdot 2^q$ で表わされる。したがつて、 $\tilde{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta) + W(J(\theta)) - 1 = P \cdot 2^q + 2^q - 1 = (P + 1) 2^q - 1$

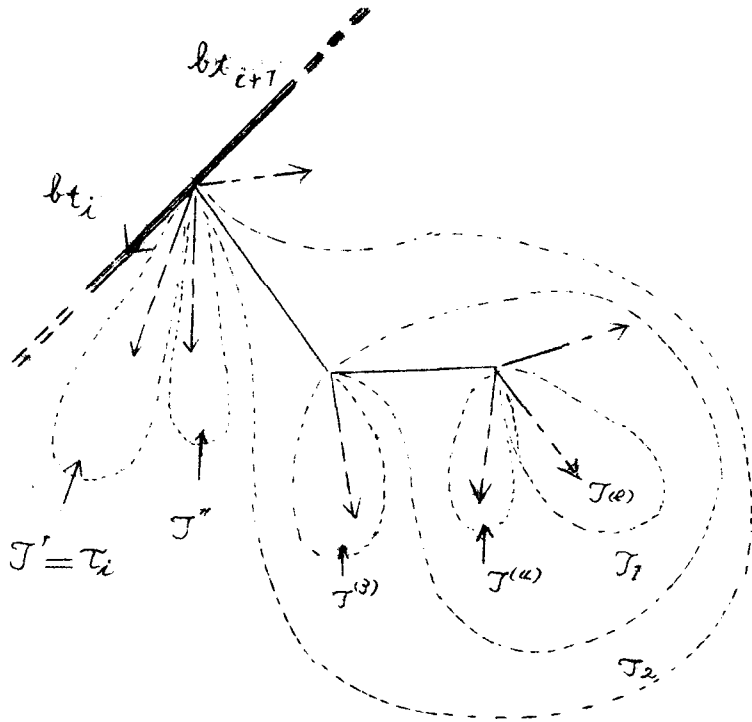


図3.5 Tの部分グラフ $J(\theta) \subset J_* \subset J_2$
および $J', J'', J^{(3)}, J^{(4)}$

となり、 $\varphi(\theta)$ と $\tilde{\varphi}(\theta)$ の2進表示において上位から最初の $s - q$ けたは一致する。また、 $P 2^1 + 2^q < 2^s$ から $q + 1 < s$ 、すなわち、 $s - q \geq 2$ 。また、 $\varphi(\theta) \leq X \leq \tilde{\varphi}(\theta)$ なる X のみについて、その2進表示における上位の $s - q$ けたが $\varphi(\theta)$ および $\tilde{\varphi}(\theta)$ のそれに一致し、それ以外のものについては一致しない。
(証明終)

幹以外のTの枝 θ に対して、 $\varphi(\theta)$ の上位の初めの $s - q = 1$ けたの内容を $1\{\varphi(\theta)\}$ で表わせば、 $P(\theta) = 1\{\varphi(\theta)\} = 1\{\tilde{\varphi}(\theta)\}$ で定義される $P(\theta)$ を $N(\theta)$ のプレフィクス(prefix)ということにする。プレフィクスに関して次の定理が成立する。

[定理3.4] 幹上にない任意の一対の枝 θ_1, θ_2 に対して、 $\mathcal{J}(\theta_1) \supseteq \mathcal{J}(\theta_2)$ であるとき、かつそのときにかぎり $P(\theta_1)$ は $P(\theta_2)$ に含まれる。すなわち、 $P(\theta_1), P(\theta_2)$ のけた数をそれぞれ、 l_1, l_2 とおけば $l_1 \leq l_2$ であり、かつ $P(\theta_1) = 1_{l_1}\{P(\theta_2)\}$ である。

(証明) $\mathcal{J}(\theta_1) \supseteq \mathcal{J}(\theta_2)$ であるとき、 $\varphi(\theta_1) \leq \varphi(\theta_2) \leq \tilde{\varphi}(\theta_2) \leq \tilde{\varphi}(\theta_1)$ であるから、明らかに $P(\theta_1) = 1_{l_1}\{P(\theta_2)\}$ 。

一方、 $P(\theta_1) = 1_{l_1}\{P(\theta_2)\}$ であれば、 $l_2 \geq l_1$ である。

前定理により、最初の l_1 けたの内容が $P(\theta_1)$ である番号は $\mathcal{J}(\theta_1)$ の枝にのみ割り当ててあるから、 $\mathcal{J}(\theta_2) \subseteq \mathcal{J}(\theta_1)$ である。(証明終)

上の二つの定理で述べた性質を用いれば、幹以外のTの枝 θ に対する $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ の判定の操作は前節で述べたものよりはるかに簡単となる。その手続きを以下に示す。ただし、 $P(\theta)$ のけた数を1とする。

(操作1) $N(\theta_1), N(\theta)$ の上位の最初の1けたをシリアルに比較する。
 $1\{N(\theta_1)\} < 1\{N(\theta)\}$ であれば、次の操作2へ、 $1\{N(\theta_1)\} = 1\{N(\theta)\}$ であれば操作3へそれぞれ移る。いずれでもなければ、 $\theta \notin P^T$

(θ_1, θ_2) .

(操作2) $N(\theta_2)$ と $P(\theta)$ とを上位から一けたごとに比較して、 $\lfloor\{N(\theta_2)\}\rfloor = P(\theta)$ ならば、さらにそれ以下のけたを比較する。 $\lfloor\{N(\theta_2)\}\rfloor$ より下位の内容をそれぞれ $\lfloor\{N(\theta_2)\}\rfloor, \lfloor\{N(\theta)\}\rfloor$ として、 $\lfloor\{N(\theta_2)\}\rfloor \leq \lfloor\{N(\theta)\}\rfloor$ であれば、 $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ であり、それ以外の場合は、 $\theta \notin P^T(\theta_1, \theta_2)$.

(操作3) $N(\theta_1), N(\theta)$ の $\lfloor\{N(\theta_1)\}\rfloor$ より下位の内容についてけたごとく比較する。 $\lfloor\{N(\theta_1)\}\rfloor \leq \lfloor\{N(\theta)\}\rfloor$ であれば、つぎに $N(\theta), N(\theta_2)$ を比較して $N(\theta) \leq N(\theta_2)$ であれば $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ で、それ以外の場合 $\theta \notin P^T(\theta_1, \theta_2)$ 。

このように、プレフィックスの性質を用いた場合、そうでない場合に比して手数がかなり軽減される。

さて、上のようにプレフィックスの性質を用いて符号化した場合、その符号化に要するビット数がそうでない場合に比してたかだか何ビット増すか検討してみよう。

前に定義した各 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, u-1)$ において、 T の端点を含む大枝の集合を $B_i^{(1)}$ 、 $\tau_i - B_i^{(1)}$ 上の $T - B_i^{(1)}$ の端点を含む大枝の集合を $B_i^{(2)}$ とし、順次 $B_i^{(3)}, \dots, B_i^{(r_i)}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
 W(\tau_i) < \sum_{b_k \in B_i^{(1)}} 2^{r_i} m(b_k) + \sum_{b_k \in B_i^{(2)}} 2^{r_i-1} m(b_k) + \dots \\
 \dots + \sum_{b_k \in B_i^{(r_i)}} 2 m(b_k) \equiv X_i \qquad (3.10)
 \end{aligned}$$

ところで、

$$W(b_{t_i}) < m(b_{t_i}) + X_i, \qquad (3.11)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\sum_{b_k \in T} w(b_k) &= \sum_{i=1}^{u-1} \{W(r_i) + w(b_{t_i})\} + w(b_{t_u}) \\
&< \sum_{i=1}^{u-1} \{m(b_{t_i}) + 2X_i\} + w(b_{t_u}) \\
&= \sum_{i=1}^{u-1} \{m(b_{t_i}) + 2^{r_i+1} \sum_{b_k \in B_i(1)} m(b_k) + 2^{r_i} \sum_{b_k \in B_i(2)} m(b_k) \\
&\quad + \dots + 2^2 \sum_{b_k \in B_i(r_i)} m(b_k)\} + m(b_{t_u}), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

ゆえに、 $\sum_{b_k \in T} w(b_k)$ は $\sum_{b_k \in T} m(b_k)$ に対して、たかだか $\max_i(r_i) + 1$ ビットだけ増加する。

3.6 節点に関する判定機構

節点 n が与えられた道 $P(n_1, n_2)$ の上にあるのは、 n に接続する枝の少なくとも1個がその道の上にあるときかつそのときに限る。したがって $v \in P(n_1, n_2)$ の判定の問題は $n \in P(n_1, n_2)$ のそれに帰せられる。しかし分岐点 n については、その位置の特殊生を活用して、その判定機構は以下に考えるように簡単化される。

いま、木の分岐点 n に接続する補木の枝を $\{e_{j_k}, k=1, 2, \dots, r_n\}$ 、木枝の組を $\{e_{j_h}, h=1, 2, \dots, s_n\}$ とする。任意の $P(n_1, n_2)$ に対して、その符号の中で $A_i = 1$ なる i がどれかの j_k と一致すれば、すなわち $\{L_i \mid A_i = 1\}$ のどれか一つが $\{L_{j_k}\}$ に含まれておれば、 $n \in P(n_1, n_2)$ である。そうでなければ、各 e_{j_k} に対して、 $e_{j_h} \in P^T(e_1, e_2)$ および $e_{j_h} \in L$ かどうか、前述の操作を用いて調べればよいのであるが、 $e_{j_h} \in P^T(e_1, e_2)$ の操作は軽減される。それは、 $e_{j_h} \in P^T(e_1, e_2)$ であるのは次の三つのうちいずれか一つが成立することであるからである。

- (1) $e_1 \in \Gamma e_{j_h}$, かつ $e_2 \in \Gamma e_{j_h}$

(II) $\theta_1 \notin \Gamma^{\theta_{jh}}$, かつ $\theta_2 \in \Gamma^{\theta_{jh}}$

(III) $\theta_1, \theta_2 \in \Gamma^{\theta_{jh}}$, かつ $N(\theta_{jn}) = N(\theta_2)$

もし θ_{jn} が幹の上になれば、上の(I)、(II)、(III)の θ_1, θ_2 が θ_{jh} にあるか否かの判定は $P(\theta_{jh})$ とそれに対応する $N(\theta_1), N(\theta_2)$ の各けたを比較するだけでよい。

3.7 定期乗車券の自動改札への応用

鉄道網 R とは、各駅を節点とし、駅と駅を結ぶ路線を枝とするグラフであるが、この R 上の任意の節点が指定された道の上にあるか否かの判定をする場合、前節まで述べた手続きをそのまま R に適用すれば、その節点につながるすべての枝について判定しなければならなくなる。そこで、この手数を軽減するために、 R に対応するグラフ G_R をつくり、 R の線度が 2 以下の節点を G_R の枝に対応づける。その対応のさせ方を図 3.6 に示す。このように R 上での問題を G_R 上で考えれば、 R の線度が 2 である節点に対する判定において、その節点につながる二つの枝に対して調べる必要がなくなり、単にその節点に対応する G_R の枝について調べるだけでよい。しかし、 R の T における分岐点は G_R でも分岐点であるから、判定の手続きは同じである。

さて、グラフ G_R に対して、前述の方法で各道の符号化を行ない、図 3.7 のように表示する。 G_R の分岐点につながらない T の枝に対応する R の節点(駅)における自動改札機には前述の $\theta \in P^T(\theta_1, \theta_2)$ の判定機構をもたせ、 G_R の分岐点に対応する駅における自動改札機には、前節の $n \in P(n_1, n_2)$ の判定機構をもたせる。

近畿日本鉄道の場合について、実際に応用してみたところ、大枝の重みの総和は 377 であり、基本閉路が 3 個あるので、すべての道の符号化に要するピ

ツト数は $9 \times 2 + 3 = 21$ であつた。しかるに、この鉄道網の可能なすべての道の総数は 17 万個余りあり、これらの符号化には最低 18 ビット要することになる。われわれの方法では、これよりも 3 ビット増したが、判定機構が極めて簡単化されたことになる。

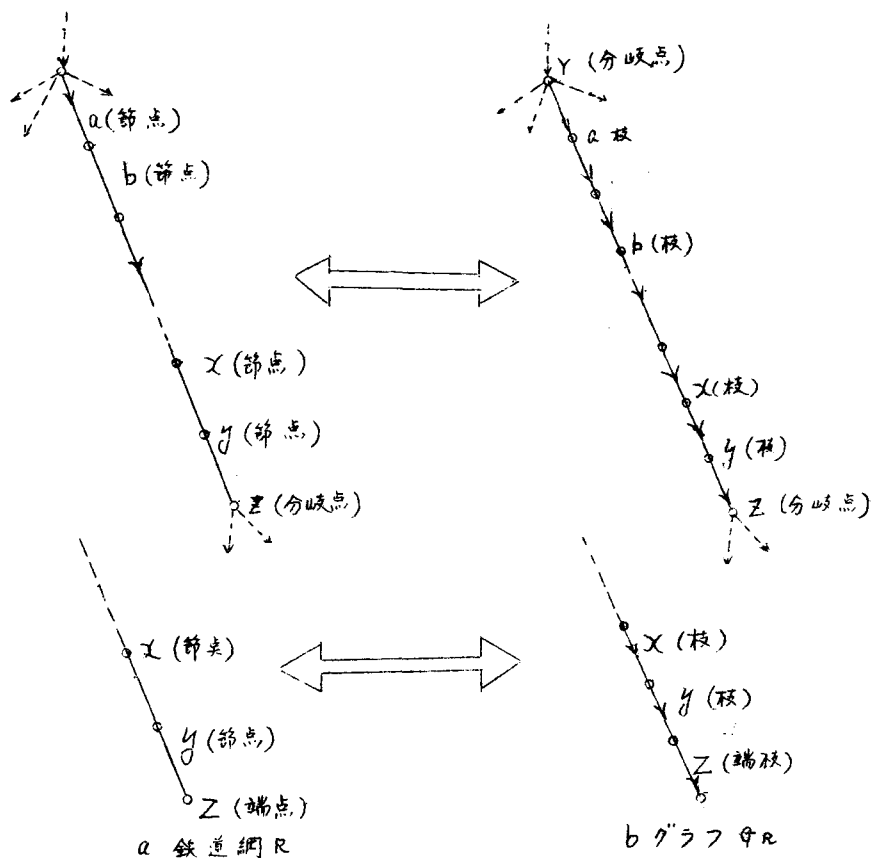


図 3. 6 R と G_R の対応関係

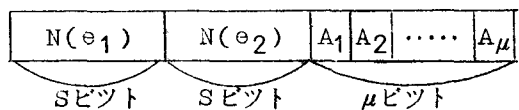


図 3. 7 道の符号化

3.8 輸送網の区分け問題への応用

輸送網 N とは、各中継局を節点とし、中継局間を結ぶ輸送路を枝とするグラフのことを意味する。 N における中継局 n_1 から n_2 へ向かう指定された径路を通つて、ある品物を輸送する際、途中の分岐点にある各中継局ではその品物が指定された径路を通つて輸送されるように区分けする必要がある。この輸送網の区分け問題に前に考察した道の符号化問題が応用される。

まず、 N に対応するグラフ G_N を前節の G_R と同様につくり、 G_N に対してその木枝に番号を割り当てる。各分岐点にある中継局に設置される区分け機の機能は、そこに送り込まれる品物を指定された径路に区分けすること、あるいはその中継局で品物を止めることである。自動收札機の場合と異なり、この場合には区分けを行なう分岐点にある中継局は、そこに送り込まれる品物の指定された径路の上にあることがはじめからわかっている。もし区分け機が品物がどの枝を通つてその中継局に入ったかを記憶することができれば、区分けする操作は容易となり、 $P(n_1, n_2)$ の上にあるもう一方の枝を捜すこととなる。しかるに、区分け機がその記憶装置をもたないものとする場合、まず $P(n_1, n_2)$ 上にありかつその中継局に接続する枝を第 3.6 節の機構で捜し出す。もしそのような枝が 1 個であれば、品物をその中継局で停止する。2 個の場合、送り出されるべき枝を捜し出さなければならない。このために、前もつて補木の枝に方向付けをしておき、前で考察した $N(\theta_1)$, $N(\theta_2)$, $\{A_i, i=1, 2, \dots, \mu\}$ の他に、 $\{B_i, i=1, 2, \dots, \mu\}$, X の $\mu+1$ 個のビットを設け、

$$B_i = \begin{cases} 1 : P(n_1, n_2) \text{ が補木の枝 } C_i \text{ を与えられた方向に通るとき} \\ 0 : \text{それ以外するとき} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$X = \begin{cases} 1 ; N(\theta_1) < N(\theta_2), \\ 0 ; \text{それ以外のとき,} \end{cases} \quad (3.14)$$

とする。もし2個の枝がともに $P^T(\theta_1, \theta_2)$ の上にあるとき、それらを θ_i, θ_j ($N(\theta_i) > N(\theta_j)$) とし、 $X=1$ に対しては θ_i へ、 $X=0$ に対しては θ_j へそれぞれ送り出す。2個の枝がともに $P^T(\theta_1, \theta_2)$ 上にないとき、少なくとも1個は補木の枝である。その補木の枝を c_k とする。いま、考えている中継局 n において、

$$f_n(B_i) = \begin{cases} B_i & ; c_i \text{ が } n \text{ から出る方向のとき,} \\ \widetilde{B}_i & ; \text{そうでないとき,} \end{cases} \quad (3.15)$$

なる関数を定義する。ただし \widetilde{B}_i は B_i の内容の否定を表わす。このとき、もし $A_k f_n(B_k) = 1$ であれば品物をその c_k へ送り出す、もし $A_k f_n(B_k) = 0$ であれば、 c_k の他の枝へ送り出す。このようにして、道の符号化問題で考察した手法の一部が輸送網の区分け問題に応用される。

3.9 結 言

本節ではグラフの道の符号化問題を、定期乗車券の自動改札化への目的のために考察し、さらに輸送網の区分け問題へと応用した。ここで考察した符号化の方法の特色は、最低必要なビット数より数ビット余分にふえるが、判定機構が簡単化された点にある。特に判定機構においては、ビットごとの比較をシリアルに行えばよいので、比較回路が主要な部分を占める。しかるに、自動改札化においてはさらに適用期間等のチェックをも合せて行わなければならないことを考慮に入れれば、比較回路を用いる方が能率的であり、その点でも上に述べた道の符号化およびその判定機構は効果的である。

結 論

本研究によつて得られた主な結果、および今後に残された問題を簡単にまとめるとつぎようである。

第1章では、回路網の等価変換に関して、実用的見地から理想変圧器を用いない二つの方法について考察した。いずれの場合も、与えられた $(n+p+1)$ 節点 $(n+p)$ 端子対回路網 N の枝の p 端子対に関する p 端子対縮約により得られる $N^*(p)$ の p 等価 n 端子対回路網を求める手法であり、回路網のトポロジ的複雑さは不変である。この $N^*(p)$ に対して、その q 等価 n 端子対回路網 $(q>p)$ を求める問題は $n+r$ $(r\geq 2)$ 節点 n 端子対回路網の構成問題に帰着され、これは今後の発展に待たなければならない。また、等価変換に関連した素子感度問題において、変換パラメータの個数が2個以上になると、その解法は極めて困難となる。これも今後に残された重要な問題である。

第2章では、グラフの平面分解に関して、特に完全グラフおよび完全Bipartite グラフに着目して考察した。いずれも、その分解個数の最小値の上限を与えている。 n 個の節点をもつ完全グラフ K_n は $\langle n/4 \rangle \sim n/4$ 個の平面部分グラフに分解されること、および、 $2n$ 個の節点をもつ完全Bipartite グラフ $K_{S,T}$ $(|S|=|T|=n)$ についても、 $\langle n/4 \rangle + 1 \sim n/4$ 個の平面部分グラフに分解されることを示した。多層印刷回路および多層集積回路の設計等の応用面を考えると、平面分解問題はさらに一般の非平面グラフに関して解決されなければならない。これは未解決重要な課題である。

第3章では、定期乗車券の自動改札化への応用を動機として、グラフの道の符号化問題に関して考察した。ここで採用した符号化法は、比較的少数のヒットで容易に符号化でき、かつ必要とする判定機構も複雑にならないという点に

特色をもつ。この応用としては、定期乗車券の通用径路の符号化、復号化の問題のほかに、輸送網の区分け問題があり、さらに、複雑化した有料道路の料金徴集システムにも応用されよう。

謝 辞

本研究の全過程を通じて、直接理解ある御指導を賜わり、つねに励ましていただいた尾崎弘教授、ならびに基礎工学部高忠雄教授に心から深謝する。また樹下行三助教授には適切な御指導、御討論をいただき、心から感謝する。

大学院修士、博士両課程において御指導御教示を賜わった電子工学教室の菅田栄治教授、喜田村善一教授、宮脇一男教授、中井順吉教授、寺田正純教授、基礎工学部 山口次郎教授、電子ビーム研究施設 裏 克己教授、産業科学研究所 松尾幸人教授ならびに中村勝吾教授に対し厚く御礼申し上げる。

第1章について適切な御教示、御助言をいただいた日本電気株式会社の渡部和博士、第3章について御助言、御援助をいただいた近畿車輛株式会社の中井実部長、井上和夫氏、小田博基氏に厚く感謝する。

本研究に關し、基礎工学部深田豊講師、電々公社電気通信研究所橋本昭洋氏、通産省電気試験所鳥居宏次氏、基礎工学部藤井護助手、日立中央研究所藤本好司氏には本学大学院在学中に有益な御助言、御討論をいただき、心から感謝する。

筆者の所属している尾崎研究室の谷口慶治助手、二宮和子助手、大学院学生の都倉信樹氏、村上伸一氏、谷口建一氏、高橋浩光氏、河田亨氏、大川正尋氏、山本勝氏、細見輝政氏、また同研究室の高岡美智子氏には種々の面で御協力いただいた。ここに記して感謝する次第である。

以 上

文 献

- [1] Y.Yasuda, T.Kasami, H.Ozaki, H.Watanabe, "Synthesis of Passive N-Port with N+1 Nodes," ICMCI, C5-6, Sept. 1964.
- [2] M. Iri, "A System of Programms for Topological Synthesis of Networks," ICMCI, C5-5, Sept. 1964.
- [3] C.C.Halkias, I.Cederbaum, W.H.Kim, "Synthesis of Resistive N-Port Networks with N+1 Nodes," IRE Trans. on CT, Vol. CT-9, pp. 69-73; March 1962.
- [4] E.A.Guillemin, "On the Analysis and Synthesis of Single-element-kind Networks," IRE Trans. on CT, Vol.CT-7, pp.303-312; Sept. 1960.
- [5] G.Biorci, P.P.Civalleri, "On the Synthesis of Resistive N-Port Networks," IRE Trans. on CT, Vol.CT-8, pp. 22-28; March 1961.
- [6] F.T.Boesch and D.C.Youla, "Synthesis of N+1 Node Resistor N-Ports," IEEE Trans. on CT. Vol.CT-12, pp.515-520; Dec. 1965.
- [7] E.A.Guillemin, "On the Realization of an Nth-Order G Matrix," IRE Trans. on CT, Vol CT-8, pp. 318-323; Sept. 1961.
- [8] G.Biorci, P.P.Civalleri, "About a Basic Theorems on Resistive Networks," 1963 IEEE International Convention Record, Pt. 2, pp. 83-90; 1963.
- [9] H.Watanabe, "On the Synthesis of Conductive N-Port with

N+2 Nodes," ICMCI, C5-3, Sept. 1964.

[10] I.Cederbaum, "Equivalence and Realization of Resistive N-Port Networks," ICMCI, C5-2, Sept. 1964.

[11] F.J.Lupo, C.C.Halkias, "Synthesis of n-Port Networks on Two-Tree Port-Structures," IEEE Trans. on CT, Vol.CT-12, PP. 571-577; Dec. 1965.

[12] W.Cauer, "Synthesis of Communication Networks," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1958 (Trans. by G.E.Knausenberger); ch. 10.

[13] E.A.Guillemin, "Communication Networks," Vol. II, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1935, ch. VI.

[14] E.A.Guillemin, "Synthesis of Passive Networks," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957, ch. 5.

[15] 大野、安浦、"S行列による多端子網構成理論"、信学誌、36、10、PP. 564-570; 昭28-10。

[16] Y.Oono, "Application of Scattering Matrices to the Synthesis of N Ports," IRE Trans. on CT, Vol. CT-3, pp.111-121, : June 1965.

[17] J.D.Schoeffler, "The Synthesis of Minimum Sensitivity Networks," IEEE Trans. on CT, Vol. CT-11, pp. 271-276; June 1964.

[18] J.V.Leeds, Jr., G.I.Ugron, "Simplified Multiple Parameter Sensitivity Calculation and Continuously Equivalent Networks," IEEE Trans. on CT, Vol. CT-14, pp.188-191;

June 1967..

[19] W.T.Tutte, "An Algorithm for Determining Whether Given Binary Matroid is Graphic," Proc. American Math. Soc., Vol. 11, p.905; Dec. 1960.

[20] L. Auslander, S.V. Parter, "On Imbedding Graphs in the Sphere," J. Math. and Mech., Vol. 10, 3, p.517; 1961.

[21] G.J.Fisher, O.Wing, "An Algorithm for Testing Planar Graphs from the Incidence Matrix," Proc. Seventh Midwest Symp. on Circuit Theory, pp.67-75; May 1964.

[22] G.J.Fisher, O.Wing, "Computer Recognition and Extraction of Planar Graphs from the Incidence Matrix," IEEE Trans. on CT, Vol. CT-13, pp.154-163; June 1966.

[23] L.W.Beineke, F.Harary, J.W.Moon, "On the Thickness of the Complete Bipartite Graph," Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 60, 1964.

[24] L.W.Beineke, "Complete Bipartite Graphs: Decomposition into Planar Subgraphs," A Seminar on Graph Theory, edited by F. Harary, Holt, Rinehart and Winston, ch. 7, 1967.

[25] S.Seshu, M.B.Leed, "Linear Graphs and Electrical Networks," Addison-Wesley Pub. Co., Inc., Reading, Mass., 1961.

[26] C.Berge, "The Theory of Graphs and Its Applications," John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962 (Trans. by A. Doig.)