Title	弾塑性問題に対する大ひずみ大変形の有限要素法とその応用に関する研究
Author(s)	冨田，佳宏
Citation	大阪大学，1973，博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2020
rights	
Note	

弾塑性問題に対する大ひずみ大変形の有限要素法とその応用に関する研究

昭和47年12月

冨 田 佳 宏

目　　次

緒　論 ……………………………… 1

第1章　大ひずみ大変形の増分理論 ……………………………… 9

1. 1　緒　言 ……………………………… 9

1. 2　運　動 ……………………………… 11

1. 3　ひずみ ……………………………… 13

1. 4　法線ベクトル，面積，体積の増分 ……………………………… 15

1. 5　2階のテンソルの増分 ……………………………… 17

1. 6　外力および応力 ……………………………… 18

1. 7　増分形の Cauchy の運動の法則 ……………………………… 20

1. 8　変形状態を基準にしたエネルギつりあい式 ……………………………… 21

1. 9　初期状態を基準にしたエネルギつりあい式 ……………………………… 23

1.10　結　言 ……………………………… 26

第2章　増分形有限要素法 ……………………………… 29

2. 1　緒　言 ……………………………… 29

2. 2　変位関数 ……………………………… 31

2. 3　増分形の有限要素の運動方程式の定式化 ……………………………… 33

2.3.1　3次元問題の場合 ……………………………… 33

2.3.2　軸対称問題の場合 ……………………………… 37

2.3.3　2次元問題の場合 ……………………………… 40

2. 4　単体要素モデルによる有限要素の運動方程式 ……………………………… 40

2. 5　初期状態を基準にした場合の有限要素の運動方程式 ……………………………… 46

2. 6　連続体の運動方程式の組立てについて ……………………………… 48

2. 7　境界条件について ……………………………… 51

2.7.1 力学的境界条件 …… 51

2.7.2 幾何学的境界条件 …… 54

2.7.3 混合境界条件（剛体からなる境界曲面によって物体の運動が拘束される場合） …… 54

2. 8 結 言 …… 57

第3章 弾塑性体の埋込み座標系を基準とした増分形の構成方程式 …… 61

3. 1 緒 言 …… 61

3. 2 弾性体の増分形の構成方程式 …… 62

3. 3 弾塑性体の構成方程式 …… 64

3.3.1 任意の塑性ポテンシャルから導かれる構成方程式 …… 65

3.3.2 吉村，Edelmann–Drucker の塑性ポテンシャルおよび移動硬化モデルから導かれる構成方程式 …… 68

3.3.3 Mises の塑性ポテンシャルから導かれる構成方程式 …… 70

3.3.3.1 3次元問題の場合 …… 70

3.3.3.2 平面問題の場合 …… 71

3.3.3.3 単軸引張り問題の場合 …… 74

3. 4 結 言 …… 76

第4章 大ひずみ大変形の増分形有限要素法の応用 …… 79

4. 1 緒 言 …… 79

4. 2 大きな単純せん断変形の解析 …… 80

4. 3 非線形弾性問題の解析（ポリウレタンラバーからなる有孔帯板の引張り問題の解析） …… 82

4. 4 弾塑性平面問題の解析 I（線形硬化弾塑性材の場合） …… 86

4.4.1 2方向から荷重を受ける有孔平板の解析 …… 86

4.4.2 引張りを受ける切欠きを有する帯板の解析 …… 86

4. 5 弾塑性平面問題の解析 II

（非線形硬化弾塑性体の場合および実験値との比較） ………… 90

4.5.1 引張りを受ける円孔および切欠きを有する帯板の解析 …… 91

4.5.2 実験値との比較 ………………………………………… 97

4. 6 結 言 ……………………………………………………… 102

第5章 モアレ法による大ひずみ大変形問題の実験的解析（有限要素モデルの応用） ……………………………………………… 105

5. 1 緒 言 ……………………………………………………… 105

5. 2 モアレじまと変位の関係 ………………………………… 107

5.2.1 正方形の基準格子を用いた場合 ………………………… 107

5.2.2 独立2方向の平行直線群からなる基準格子を用いた場合 … 110

5. 3 非定常問題の解析 ………………………………………… 113

5. 4 定常問題の解析 …………………………………………… 116

5. 5 実験例 ……………………………………………………… 118

5.5.1 実験例（I） 円孔および切欠きを有する帯板の引張り … 119

5.5.1.1 実験装置 ……………………………………………… 119

5.5.1.2 試験片 ………………………………………………… 119

5.5.1.3 実験および解析方法 ………………………………… 120

5.5.1.4 実験結果 ……………………………………………… 121

5.5.2 実験例（II） 平面ひずみ前方押出し …………………… 123

5.5.2.1 実験装置 ……………………………………………… 123

5.5.2.2 試験片 ………………………………………………… 123

5.5.2.3 実験および解析方法 ………………………………… 124

5.5.2.4 実験結果 ……………………………………………… 124

5. 6 結 言 …… 128
結 論 …… 129
付 録（Ⅰ） 有限要素の増分形の熱伝導方程式 …… 133
（Ⅰ）.1 エネルギつりあい式 …… 133
（Ⅰ）.2 有限要素の増分形熱伝導方程式の定式化 …… 135
付 録（Ⅱ） 有限要素法によるすべり線場解の有効性の検討（切欠き試験片の曲げ問題について） …… 137
（Ⅱ）.1 切欠き試験片の3点曲げ降伏のすべり線場解析 …… 137
（Ⅱ）.2 切欠き試験片の3点曲げの有限要素法による解析およびすべり線場解との比較 …… 142
文 献 …… 147

緒　　　　論

本論文の主要な目的は，大きな変形を伴う連続体の非線形問題を厳密に扱うことができる増分形の有限要素法を定式化し，これを大ひずみ大変形の弾塑性問題に適用して，それを解析することにある．

最近の科学技術の飛躍的な発展とあいまった機械の高速，高性能化，構造物の大型化に伴い，機械および構造物に課せられる作動条件が極度に過酷になっている．このような情勢に対応して，工学の幅広い分野において軽量化あるいは経済性，信頼性の面からの高度な設計法の開発および確立の必要性はますます増加している．

しかしながらこのような工学的な要請に対して，理論的な解析が十分納得のゆく解答を与えていないのが現状である．高度な設計法を確立するためには，幅広い研究，開発が必要であるが，その中でも応力，ひずみなどの解析において指導的な役割りをする構造解析の手法の確立が必要である．

ところで現在機械および構造部材として広く一般に使われているのは金属である．これは弾塑性的挙動をするもっとも代表的なものである．したがって，厳密な弾塑性解析は，設計の正確な基準になるという実用的な面での重要性に加えて，塑性加工，低サイクル疲労，延性破壊などの分野における研究の基礎となるもので，その解析方法および計算方法の早急な開発が望まれている．

いっぽう最近活発になってきている，連続体の非線形問題の解析には大別して解析的な手法と数値的な手法が用いられている．解析的な手法で厳密な閉形の解が得られるのは，理想化の条件がそろった特別な場合である．[(1),(2)]

しかし工学上遭遇する多くの問題は複雑であり，形状，材料特性，境界条件の極端な理想化によって閉形の解析解が得られたとしても，それが直接設計な

どに寄与するようなデータとならないことが多い．したがってより実際的に現象の把握ができるような解を得るためには数値的あるいは実験的な手法を用いることが重要となっている．

ところで，この数値的な解析方法には大別して二つの考え方がある．一つの方法は，連続体の運動を規定する厳密な方程式を定式化して数値的に近似解を求めようとするもので，数学的近似法と呼ぶことができるものである．これに対して他は，連続体を理想化したモデルで置きかえて解を求めようとするもので，物理的近似法と呼ぶことができるものである．

最近のように計算機の大型化，高速化が進んでいる時点において，連続体の非線形問題の組織的な解析に対して上述の二つの考え方を代表する解法はそれぞれ差分法と有限要素法である．

差分法は支配方程式の微分商を差分商でおきかえ，問題を近似的に有限個の未知数に関する連立方程式の解法に帰着する方法であり，歴史も古く数学的な基礎付けが十分行なわれている．いっぽう有限要素法は，連続体を有限個の要素に分割して，その要素個々の支配方程式の集合として連続体の運動を数値的に解析しようとするものである．この方法は差分法に比べて歴史は浅いにもかかわらず最近目ざましい発達をとげつつある．この理由の一つとして最近の計算機の大型化，高速化があげられるが，これにまして有限要素法は問題の記述がマトリックスあるいはテンソル記法によることができ，計算機のプログラムに適していること，任意形状に対して，境界条件の導入が簡単であること，一般に場の問題をはじめ，偏微分方程式の解析に対して応用できるというきわめて広い適用性をもつことなどのためであると考える．

有限要素法は J.L. Turner ら[(3)]の先駆的な論文につづいてそれ以降構造問題，連続体問題の解析において幅広い研究と応用がなされて，現在では線形問題の解析に対しては完成の域に達しており多くの著名な教科書[(4)~(7)]を手に

することができる．線形問題の解析における有限要素法の驚異的な発達の後，研究者および技術者の目標は非線形問題の解法へ向けられ，これらの方法の拡張が試みられている．

一般に上述の非線形性は，材料的および幾何学的な二つの要因によって生じることが知られている．前者はひずみがいわゆる弾性限を越えた後に示すような構成方程式の非線形性であり，後者は変形が大きくなった場合形状の変化および変位によって生じる支配方程式の非線形性である．

これら非線形問題の中において，微小変形の仮定のもとでの材料非線形問題の解析は，増分的な取り扱いによって構成方程式が線形化され各増分量に対して線形弾性問題の場合とまったく同じ計算方法で処理できるという簡易さから，P. V. Marcal ら[8]の荷重漸増法による弾塑性有限要素解析方法が発表されて以来非常に多くの研究が公表されている．[9]〜[17] いっぽう棒，板，かくのように微小ひずみの仮定のもとで大変形を考慮する幾何学的非線形問題[18]に対しては独自の近似的な解析方法が展開されている．[6], [19]〜[22]

ところが工学上遭遇する問題の多く，たとえば塑性加工，延性破壊，クリープ，超弾性問題などにおいては変形とともにひずみも大きくなり変形挙動はきわめて複雑な様相を呈する．このような問題に対しては連続体力学の分野においてその基礎が確立されている厳密な理論を導入して，理論的に正しい有限要素法の定式化を統一的に行なうのが正統であると考える．

J. T. Oden の研究[23]〜[28]はこのような考え方に立った一つの代表的なもので，連続体の非可逆過程の熱力学から構成方程式の非線形性および大ひずみを考慮した厳密な有限要素法の定式化が試みられている．しかしながら，ごく最近まで一部における評価[29],[30]を除いてこのような取り扱い方を，有限要素法の実用性のみを追求するあまり，一般に回避しようとする傾向[31]にあった．ところが，有限要素法の歴史を見ても明らかなように，従来困難とされて

いた計算が，数年もたたないうちに常識化してしまうことの繰返しであったことから，このような厳密な有限要素法もやがて常識化されることは疑う余地もないと考える．現に J. T. Oden らによる非線形弾性問題に対する有限要素法が契機となり厳密な理論に立脚した有限要素法の重要性が認識されてきており，本研究以外にも弾塑性問題に対して適用できる増分理論 (32), (33) による定式化が行なわれ，二，三の問題に対する解析結果も得られている．(34)〜(41)

ところで大ひずみ大変形問題に対しては，上述のような運動の面における厳密な取り扱いとともに有限要素法を実際の問題の解析に用いる上から大ひずみを取り扱う立場に立った構成方程式の議論が必要である．構成方程式については，非線形連続体力学の分野において高度な研究が行なわれている (42) にもかかわらず，その成果を工学上の実際の解析に使うことはきわめて困難な状況にある．たとえそれを解析の中に組み込むことができたとしても (26)〜(28) よほどの近似を導入しないかぎりほとんど計算のアルゴリズムに乗らないようである．実際の問題の解析を目的とする場合は，有限要素法の定式過程において矛盾なく導入できしかも材料特性を忠実に表現することが実証されているような構成方程式の研究を行なうこともあわせて重要である．

以上に概観したように，微小ひずみ問題を解析する有限要素法は活発な研究によってほぼ定着しているようである．しかし幾何学的非線形および材料非線形を伴う問題に対する厳密な解析方法に関する研究は始まったばかりである．

本研究においては，構造設計，加工および延性破壊などの分野において基礎となる弾塑性大ひずみ大変形問題に対して，運動を記述する座標系，構成方程式および計算方法を総合的に検討し，有限要素法を用いた厳密な解析方法を確立するとともに，これを用いて工学上基本的な二，三の問題の解析を行なう．また有限要素法をモアレ法のひずみ解析部分に取り入れた新しい大ひずみ大変

形問題の実験的解析方法を提案し，これを用いた解析例を示す．

有限要素法の定式化において，物体の運動を記述する座標系として，ある基準状態において空間座標を物体中に埋込み物体の変形とともに変形する埋込み座標系を用いる．この座標系は運動の記述が他の座標系に比べて簡単であること，応力，ひずみの取り扱いが容易であることから，大変形の研究にもっとも便利な座標系[43]として従来から大変形弾性問題に対して，しばしば用いられている.[1],[44] さらにこの座標系は弾塑性体のような，これを構成している物体粒子おのおのが異なった変形履歴の影響を受ける固体の構成方程式を記述する上において適している．

いっぽう解析手法としては，弾塑性体の構成方程式の性質および非線形問題の線形化の両面から考えて妥当な増分法を用いる．

第１章においては，厳密な増分形の有限要素法を導出するための力学的な面の基礎理論を展開する．増分形の有限要素法の誘導においては，増分変形後の幾何学的に未知な量を増分変形前の既知な状態を基準にして表示しなければならない．そこでまず増分変形前の埋込み座標系を基準座標系として増分形の有限要素法定式化に必要な増分量を表示する．つぎにこの関係式を用いて増分形のつりあい式，有限要素法導出の基礎となるエネルギつりあい式を導く．

第２章においては，第１章で導出した基礎関係式を用いて増分形の有限要素法を定式化する．このような変形状態の埋込み座標系を基準とした増分形の有限要素法では，変形していない状態の直交デカルト座標系を基準とした J. T. Oden ら[37], H. D. Hibbitt ら[34]の定式化と異なり初期変位によって生じる複雑な項を含まないので，要素の運動方程式は簡潔になる．そのうえ応力およびひずみの増分量の積分は加算で処理できるという特徴を有し増分変形前の固定した直交デカルト座標系を増分変形後の Lagrange 座標とする L. D. Hofmeister ら[35], Y. Seguchi ら[36] が示している計算方法に見られるよう

な，各増分ごとのテンソル量の座標変換の必要性はない．この章の後半では，特別な要素について具体的な計算のアルゴリズムを示す．この方法によると，微小変形の有限要素法の場合と同程度の計算量で厳密な解析を行なうことができる．

第3章においては，前章で導出した厳密な要素の増分形の運動方程式を実際の問題の解析と結びつけるために，従来から提案されあるいは使われその具体的な形がわかっている弾塑性材の構性方程式を，大ひずみ大変形問題に対して矛盾なく適用できるように，とくに応力およびひずみの増分量の定義に注意をはらって，修正を行ない埋込み座標系の応力増分とひずみ増分の間の線形関係として具体的な形を示す．このように修正した構成方程式は，客観性※(frame indifference) を有する点において，従来から大ひずみ大変形に用いられている有限要素法において使われている構成方程式よりも厳密である．

第4章においては，本論文において定式化した厳密な増分形有限要素法を，二，三の工学上基本的な2次元弾．塑性大ひずみ大変形問題の解析に適用することによって，その有効性を調べ，さらに実験結果と比較することによって解析結果の妥当性を検討する．また同じ問題を現在広く弾塑性問題に用いられている有限要素法によって解析し，その結果と比較を行なって，この方法が大ひずみ大変形問題に対して誤った結果を与えることを指摘する．

第5章においては，最近実験的ひずみ解析方法として注目を集めているモアレ法に，第3章までに導出した有限要素法のひずみ解析部分を取り入れ，有限要素法の場合と同様幾何学的非線形性に対して厳密な配慮をしたひずみ解析方法を提案する．この方法は現在多く行なわれているモアレじまのしま間隔の測定によってひずみを求める手法に比べてより簡潔なものである．なお議論は増

※ frame indifference に対する邦訳は見あたらなかったので，本論文では，客観性と呼ぶことにする．

分変位場の性質から定常，非定常にわけて行ない，定常変形に対して，物体座標を介した新しい問題の把握の方法を示す．解析例として，非定常変形に対しては，円孔および切欠きを有する帯板の引張りを，定常変形に対しては平面ひずみ前方押出し問題を扱う．

なお変位場と温度場が連成した場合の大ひずみ大変形の有限要素法についても同様に定式化できる．この考えは，流体などの非構造問題を解析するうえで重要になると考えられるが，この問題は本論文の範囲外のことでもあるので付録（Ⅰ）において扱うことにする．

さらに，付録（Ⅱ）においては，剛塑性体を仮定して構造物の降伏点を解析しようとするすべり線場解法の具体的な物理現象に対する近似度を検討するために有限要素法を用いて数値実験を行なった結果について述べる．

第１章　大ひずみ大変形の増分理論

1.1　緒　　言

連続体の運動問題の一般的な解析の目的は，質量保存則，運動量保存則，エネルギ保存則，構成方程式，初期条件および境界条件を満足する解を見つけることである。

このような連続体の運動を記述する方法は，大別して空間表示法と物体表示法の二つがある．前者は Euler 表示とも呼ばれ，絶対空間に固定した座標系を介してある定まった領域に流入あるいはそこから流出する物体の速度，圧力，密度などの時間的変化に注目する方法である．この表示法は固定壁が境界になる場合に便利であるので流体問題に対してよく使われる．

いっぽう後者は Lagrange 表示とも呼ばれ物体粒子個々の運動に注目する方法である．このなかである基準状態において空間座標を物体中に埋込み，物体の変形とともに変化する座標系を埋込み座標系と呼ぶ．この埋込み座標系を用いると，ひずみに関する情報はすべて座標系の計量テンソルの変化から得られる．また応力の定義も理解しやすく運動方程式の記述が簡単になる．このような理由から，固体力学の大変形論はこの座標系によって記述している場合が多い。(1),(44)

ところで本論文では，大ひずみ大変形の弾塑性問題の有限要素法による解析を行なうことを主要な目的としている．弾塑性体は履歴の影響を複雑にうける代表的な固体であって，個々の物体粒子の変形履歴が最終的な変形挙動を支配する．弾塑性体の構成方程式は通常物体粒子おのおのについて増分形式で表示するのが合理的である。(47),〜(49) このような構成方程式の性質および上述の運動の記述の簡明さ，ひずみ，応力の扱い易さから本論文では主として埋込み座標系を用いて増分形式の有限要素法を定式化する．

有限要素法の定式化において，はじめに述べた一般連続体問題の取り扱いと同様な手法を用いるが，それに先だち本章では A. E. Green と W. Zerna[(1)] のテンソル表記法を用いて増分形有限要素法の定式化に必要な諸増分量を定義しそれらの間の関係を明らかにする．

1.2節においては，埋込み座標系による物体点の増分的な運動のとらえ方を示し，増分変形後の基本ベクトル，計量テンソルを増分変形前を基準状態にして記述する．

1.3節においては，埋込み座標系のひずみ増分の取り扱い方について述べ，従来の空間表示のひずみ増分の取り扱い方の誤りを指摘する．

1.4節においては，増分変形前の埋込み座標系を基準にした，法線ベクトル，面積，体積の増分を求める．

1.5節においては，増分変形前の埋込み座標系を基準にした，任意の2階のテンソルの埋込み座標成分の増分量の性質およびこれら増分量と厳密な構成方程式を議論する場合に重要な、いわゆる客観性を有した変化率（rate）との関連性を調べる．これは第3章において有限要素法に用いる構成方程式を導出する際に重要な役割をする．

1.6節においては増分変形前後の応力，外力，体積力，慣性力を増分変形前の埋込み座標系を基準にして表示し，これを用いて1.7節では増分形のつりあい式を求める．

1.8節においては，前節までに導出した諸表示式を用いて増分変形前後の連続体のエネルギつりあい式を　増分変形前の埋込み座標系を基準にして表わし，第2章の有限要素法定式化の基礎式とする．

1.9節においては，1.8節までに示した関係式を変形していない状態における埋込み座標系を基準にして書き換え，2.5節における初期状態を基準にした有限要素法定式化の基礎式とする．

1.2 運動

ある一つの基準状態 C_0 における三次元連続体 B を考える．（必要であればこの状態を無ひずみ無応力状態に取ると便利である．）今 B 上の一つの注目する物体点 P_0 を θ^i $(i=1.2.3.)$ で表わす．θ^i は点 P_0 の物体座標と呼ばれるものである．この物体が C_0 にあるとき，θ^i は固定曲線座標系 x^i $(i=1.2.3.)$ に対して同じ座標値を有するものと考える．これは C_0 において B に曲線座標系 x^i を埋込むことに同じである．この連続体は運動し任意の時刻 $t=t$ において状態 C に移るとき，注目している物体点は P に移り，このときの固定座標系に対する座標値を x^i で表わすと，この物体点の運動は

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) \tag{1-1}$$

式（1－1）が連続体としての運動を表わすためには次式が成立しなければならない．

$$\det|\partial x^i/\partial\theta^j| > 0 \tag{1-2}$$

本論文で扱う問題はすべて式（1－2）が成立するものに限定をする．

C_0 において x^i 座標曲線と一致していた $\theta^i=\mathrm{const}$ である座標曲線は，連続体の運動とともに変形して，埋込み座標系を形成する．大ひずみ大変形の連続体力学を扱うとき，この埋込み座標系は，運動の記述が簡単であるので従来からよく用いられている．(1), (44) 本論文においてもこれにならい一貫して埋込み座標系によって記述をする．

図1－1に示すように，物体点 P_0 の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，運動（1－1）によって変位 $\boldsymbol{u}$ を生じた後の同じ物体点を P としその位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$，またその上に増分変位 $\varDelta\boldsymbol{u}$ をうけた後の同じ物体点の位置ベクトルを $\overline{\boldsymbol{R}}$ とする．そのとき変位 $\boldsymbol{u}$ および増分変位 $\varDelta\boldsymbol{u}$ はつぎのように表わされる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r} \\ \varDelta\boldsymbol{u} &= \overline{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R} \end{aligned} \tag{1-3}$$

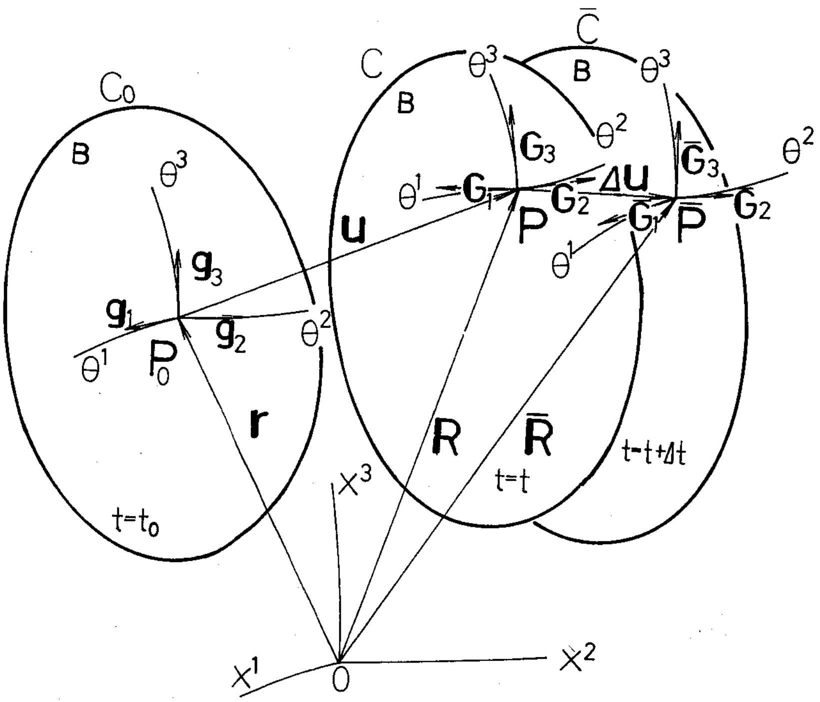


図1－1　変形

変位 $\boldsymbol{u}$ を C_0 における埋込み座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ によってつぎのように成分表示する．

$$\boldsymbol{u} = U^i \ \boldsymbol{g}_i = U_i \ \boldsymbol{g}^i \qquad (1-4)$$

また変位増分 $\Delta\boldsymbol{u}$ を，C における埋込み座標系の基本ベクトル $\boldsymbol{G}_i$ によってつぎのように成分表示する．

$$\Delta\boldsymbol{u} = \Delta u^i \ \boldsymbol{G}_i = \Delta u_i \ \boldsymbol{G}^i \qquad (1-5)$$

増分変形後 $\bar{C}$ の埋込み座標系の基本ベクトルを $\bar{\boldsymbol{G}}_i$ で表わすと，式（1－3）（1－4），（1－5）から基本ベクトル $\boldsymbol{G}_i$，$\bar{\boldsymbol{G}}_i$ は(50)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{G}_i &= (\ \delta^m{}_i + U^m|_i\ )\boldsymbol{g}_m \\ \bar{\boldsymbol{G}}_i &= (\ \delta^m{}_i + \Delta u^m\|_i\ )\boldsymbol{G}_m \end{aligned}\right\} \qquad (1-6)$$

ここで '$|_i$'，'$\|_i$' はそれぞれ $\boldsymbol{g}_i$ および $\boldsymbol{G}_i$ 基準の共変微分を表わす．なお基本ベクトル $\boldsymbol{G}_i$，$\bar{\boldsymbol{G}}_i$ に双対な反変ベクトル $\boldsymbol{G}^i$，$\bar{\boldsymbol{G}}^i$ は

$$G^i \cdot G_j = \delta^i_j \qquad ; \qquad \overline{G}^i \cdot \overline{G}_j = \delta^i{}_j$$

によって求めることができる．変位増分 Δu が無限小のときは近似的に次式が成立する．

$$\overline{G}^i = (\delta^i{}_m - \Delta u^i\|_m) G^m \tag{1-7}$$

C，$\overline{C}$ における埋込み座標系の計量テンソル G_{ij}，$\overline{G}_{ij}$，$\overline{G}^{ij}$ は式（1−6），（1−7）から，変位成分によって表示でき次式となる．

$$\left.\begin{aligned}
G_{ij} &= g_{ij} + U_i|_j + U_j|_i + U^m|_j U_m|_i \\
\overline{G}_{ij} &= G_{ij} + \Delta u_i\|_j + \Delta u_j\|_i + \Delta u^m\|_j \Delta u_m\|_i \\
&\cong G_{ij} + \Delta u_i\|_j + \Delta u_j\|_i \\
\overline{G}^{ij} &= G^{ij} - G^{im}\Delta u^j\|_m - G^{mj}\Delta u^i\|_m + G^{mn}\Delta u^i\|_m \Delta u^j\|_n \\
&\cong G^{ij} - G^{im}\Delta u^j\|_m - G^{mj}\Delta u^i\|_m
\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

〔ここで g_{ij} は C_0 における埋込み座標系の計量テンソルである.〕 ただし，変位増分は微小量として２次以上の項を無視している．

1.3　ひずみ

C_0，C，$\overline{C}$ における物体 B の点 P_0，P，$\overline{P}$ 付近の微小線素 dS_0，dS，$d\overline{S}$ を考える　それぞれの線素の２乗は，次式で表わされる.(51)

$$\left.\begin{aligned}
dS_0^2 &= g_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \\
dS^2 &= G_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \\
d\overline{S}^2 &= \overline{G}_{ij}\, d\theta^i d\theta^j
\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

着目している物体点付近の変形の測度として，線素の２乗差を用い

$$dS^2 - dS_0^2 = 2\gamma_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \tag{1-10}$$

とおく．ここで γ_{ij} は埋込み座標系のひずみテンソル(51)で，式（１−９）から

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}) \tag{1-11}$$

また

$$d\bar{S}^2 - dS^2 = 2\Delta\gamma_{ij}\, d\theta^i d\theta^j \qquad (1-12)$$

とおくと，式（１－９）から

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{G}_{ij} - G_{ij}) \qquad (1-13)$$

式（１－８）からひずみγ_{ij}，およびその増分$\Delta\gamma_{ij}$は変位成分によってつぎのように表わされる。

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(U_i|_j + U_j|_i + U_m|_i U^m|_j) \qquad (1-14)$$

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_i\|_j + \Delta u_j\|_i) \qquad (1-15)$$

後者を別の形で表示すると次式となる。

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta U_i|_j + \Delta U_j|_i + \Delta U_m|_i U^m|_j + U_m|_i \Delta U^m|_j) \qquad (1-16)$$

ひずみ増分$\Delta\gamma_{ij}$によって$\bar{C}$の計量テンソル$\bar{G}_{ij}$，$\bar{G}^{ij}$ およびクリストッフェル記号$\bar{\Gamma}^r_{ij}$ はつぎのように表示できる。

$$\left.\begin{aligned}
\bar{G}_{ij} &= G_{ij} + 2\Delta\gamma_{ij} \\
\bar{G}^{ij} &= G^{ij} - 2G^{im}G^{jn}\Delta\gamma_{mn} \\
\bar{\Gamma}^r_{ij} &= \Gamma^r_{ij} - G^{rm}G^{sn}\Delta\gamma_{mn}(G_{is,j} + G_{js,i} - G_{ij,s}) \\
&\quad + G^{rs}(\Delta\gamma_{is,j} + \Delta\gamma_{js,i} - \Delta\gamma_{ij,s})
\end{aligned}\right\} \qquad (1-17)$$

ここでΓ^r_{ij} はCにおける クリストッフェル記号で次式で与えられる。[52]

$$2\Gamma^r_{ij} = G^{rs}(G_{is,j} + G_{js,i} - G_{ij,s}) \qquad (1-18)$$

ところでvを物体点Pにおける速度ベクトルとして

$$v = v_i G^i = v^i G_i \qquad (1-19)$$

のように成分表示すると，ひずみ増分$\Delta\gamma_{ij}$は，変形速度テンソル

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(v_i\|_j + v_j\|_i) \qquad (1-20)$$

に微小時間間隔 Δt をかけたもので，後に述べる構成方程式において重要な役割をする。またひずみテンソルγ_{ij}は，式（１－１０），（１－１２）から明らかなように加算的な量であってひずみ増分$\Delta\gamma_{ij}$の総和として表わすことがで

きる．これもまた埋込み座標系による取り扱いの大きな長所である．

これに対して，テンソル変換

$$\Delta e_{mn}=\Delta \gamma_{ij}\frac{\partial \theta^i}{\partial x^m}\frac{\partial \theta^j}{\partial x^n} \qquad (1-22)$$

で得られるひずみ増分テンソル Δe_{mn} に対応する量を各変形段階ごとに加え合わせて

$$\tilde{e}_{mn}=\Sigma \Delta e_{mn} \qquad ※$$

を全ひずみと定義して，大ひずみ問題を増分理論を用いて解析を行なっている例[53]もあるが，一般的に言って，ひずみの主軸が回転する場合については，時々刻々変化する空間座標で定義されたひずみ増分の和は物理的意味をもたない．ただ伸びひずみのみが存在する場合，たとえばバルジ試験のような軸対称変形の特別な場合に対してはいわゆる対数ひずみになる．このような限定された問題に対して特別な解析方法を示した研究もある．[54][55] しかし一般には，ひずみ $\tilde{e}_{mn}$ は対数ひずみでもなくまた次のテンソル変換で与えられるひずみ e_{mn}

$$e_{mn}=\gamma_{ij}\frac{\partial \theta^i}{\partial x^m}\frac{\partial \theta^j}{\partial x^n} \qquad (1-23)$$

とも区別しなくてはならない．

1.4　法線ベクトル，面積，体積の増分

図１－１に示すように，C，$\overline{C}$ における物体 B の同じ物体座標を有する表面に立てた単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，$\overline{\boldsymbol{n}}$ で表わす．ベクトル $\boldsymbol{n}$，$\overline{\boldsymbol{n}}$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{n}=n_i G^i \quad , \quad \overline{\boldsymbol{n}}=\overline{n}_i \overline{G}^i \qquad (1-24)$$

※　ここでは，$e_{mn}=\gamma_{ij}\frac{\partial \theta^i}{\partial x^m}\frac{\partial \theta^j}{\partial x^n}$ と区別するため $\tilde{e}_{mn}$ とした

式（１－７）を用いると，ベクトル$\boldsymbol{n}$の増分量$\Delta\boldsymbol{n}$は

$$\Delta\boldsymbol{n}=\overline{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{n}$$
$$=\Delta n_i G^i - n_i \Delta u^i\|_m G^m \qquad (1-25)$$

ただし　$\overline{n}_i=n_i+\Delta n_i$

ここで計量テンソルG_{ij}, $\overline{G}_{ij}$ の行列式を$G=\det[G_{ij}]$，$\overline{G}=\det[\overline{G}_{ij}]$とおくと，変位増分$\Delta\boldsymbol{u}$が無限小のとき，式（１－６）から$G$および$\overline{G}$の関係式が得られ，

$$\overline{G}=(1+2\Delta u^m\|_m)G \qquad (1-26)$$

したがって，計量テンソルの行列式の増分量ΔGは

$$\Delta G=\overline{G}-G=2\Delta u^m\|_m G \qquad (1-27)$$

いっぽう単位法線ベクトルと微小面積素に関するNansonの関係式[56]から，増分変形前後に対して次式が成立する，

$$n_i\sqrt{G}\,dA=\overline{n}_i\sqrt{\overline{G}}\,d\overline{A} \qquad (1-28)$$

面ベクトルの増分量$\Delta(n_i\,dA)$は式（１－２７）を考慮するとつぎのようになる．

$$\Delta(n_i\,dA)=n_i\Delta u^m\|_m\,dA \qquad (1-29)$$

ここで関係式，$n_i n^i=1$ を用いると，式（１－２９）から微小面積素dAの増分量$\Delta(dA)$は

$$\Delta(dA)=(\Delta u^m\|_m-n^i\Delta n_i)\,dA \qquad (1-30)$$

点P，$\overline{P}$の近くの微小体積素を$d\tau$，$d\overline{\tau}$ で表わすと，質量保存則から次式が成立する．

$$\sqrt{\overline{G}}\,d\overline{\tau}=\sqrt{G}\,d\tau \qquad (1-31)$$

微小体積素の増分$\Delta(d\tau)$は，式（１－２７）を用いると

$$\Delta(d\tau)=d\overline{\tau}-d\tau=\Delta u^m\|_m\,d\tau \qquad (1-32)$$

となる．

1.5　2階のテンソルの増分

任意の2階のテンソル$\boldsymbol{A}$の埋込み座標θ^iにおける反変および共変成分をA^{ij}, A_{ij}, 固定座標系$\boldsymbol{x}^i$における反変成分を$\boldsymbol{a}^{ij}$, $\boldsymbol{a}_{ij}$で表わす. 両者はテンソル変換によってつぎのように関係付けられる。

$$A_{ij}=a_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\theta^i}\frac{\partial x^n}{\partial\theta^j},\qquad A^{ij}=a^{mn}\frac{\partial\theta^i}{\partial x^m}\frac{\partial\theta^j}{\partial x^n} \qquad (1-33)$$

これらテンソル量の増分をとると

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_{ij}&=(\Delta a_{mn}+a_{\ell n}\Delta U^\ell|_m+a_{m\ell}\Delta U^\ell|_n)\frac{\partial x^m}{\partial\theta^i}\frac{\partial x^n}{\partial\theta^j}\\ \Delta A^{ij}&=(\Delta a^{mn}-a^{\ell n}\Delta U^m|_\ell-a^{\ell m}\Delta U^n|_\ell)\frac{\partial\theta^i}{\partial x^m}\frac{\partial\theta^j}{\partial x^n}\end{aligned}\right\} \qquad (1-34)$$

またつぎのような増分量を定義する.

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathring{A}^{ij}&=\tfrac{1}{2}(\Delta A^{ij}+G^{im}G^{jn}\Delta A_{mn})\\ \Delta\mathring{A}_{ij}&=\tfrac{1}{2}(\Delta A_{ij}+G_{im}G_{jn}\Delta A^{mn})\end{aligned}\right\} \qquad (1-35)$$

上式に, 式(1－34), (1－13), (1－15)を考慮すると, 次式となる.

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathring{A}^{ij}&=\Delta A^{ij}+\tfrac{1}{2}(G^{i\ell}A^{nj}+G^{j\ell}A^{in})\Delta G_{\ell n}\\ \Delta\mathring{A}_{ij}&=\Delta A_{ij}+\tfrac{1}{2}(G_{i\ell}A_{nj}+G_{j\ell}A_{in})\Delta G^{\ell n}\end{aligned}\right\} \qquad (1-36)$$

式$(1-34)_1$の(　)の中の項は, テンソル$\boldsymbol{a}^{mn}$の固定座標系$\boldsymbol{x}^i$におけるCotter－Rivlin の増分[57], $(1-34)_2$の(　)の中の項は, テンソル$\boldsymbol{a}_{mn}$の固定座標系$\boldsymbol{x}^i$におけるOldroyd の増分[57]である. したがってΔA^{ij}, ΔA_{ij}はそれぞれ埋込み座標系θ^iにおけるOldroyd, Cotter－Rivlinの増分である. また式(1－35)はJaumannの増分量[57]の埋込み座標系における値である. これをR. Hillは[56], "Rigid Body Derivative"と呼んでいる. これらのテンソルの増分量は, 客観性を有することはよく知られている.[57]

とくにテンソルA^{ij}, A_{ij}の代りに計量テンソルG^{ij}, G_{ij}を用いると

$$\Delta\mathring{G}^{ij}=\Delta\mathring{G}_{ij}=0 \qquad (1-37)$$

このように計量テンソルのJaumann の増分量は零であるのでテンソルのJaumann の増分量はもとのテンソルの反変，共変の区別と同様に扱うことができる．また式（1－37）から推測できるように，計量テンソルがG_{ij}の座標系における対称テンソルの不変量

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= G_{ij}A^{ij}, \quad I_2 = G_{ij}G_{\kappa\ell}A^{i\kappa}A^{j\ell} \\ I_3 &= G_{ij}G_{\kappa\ell}G_{mn}A^{im}A^{j\kappa}A^{\ell n} \end{aligned}\right\} \qquad (1-38)$$

の増分量をとるとき，Jaumann の増分量で表わすと

$$\left.\begin{aligned} \Delta I_1 &= G_{ij}\Delta\mathring{A}^{ij}, \quad \Delta I_2 = 2G_{ij}G_{\kappa\ell}A^{i\kappa}\Delta\mathring{A}^{j\ell} \\ \Delta I_3 &= 3G_{ij}G_{\kappa\ell}G_{mn}A^{im}A^{j\kappa}\Delta\mathring{A}^{\ell n} \end{aligned}\right\} \qquad (1-39)$$

計量テンソルの増分量が入ってこないので非常に簡単になる．

1.6 外力および応力

物体に作用する外力は2種類ある．一つは物体要素に働く物体力であり，他は物体の表面要素に作用する表面力である．いっぽう応力は物体内部の仮想的な面に作用する単位面積あたりの力として定義される．

ここでCにおける点Pを含む仮想的な面の単位面積あたりで定義したCの点Pにおける応力ベクトルをtで表わすとCauchyの定理によってつぎのように表示できる．(58)

$$t = n_i \tau^{ij} G_j \qquad (1-40)$$

$\overline{C}$の点$\overline{P}$における応力ベクトルを$\overline{C}$およびCにおける点$\overline{P}$およびPを含む仮想的な面の単位面積あたりで定義をして，それぞれ$\overline{t}$，${}_0\overline{t}$で表わすと

$$\left.\begin{aligned} t &= \overline{n}_i\overline{\tau}^{ij}\overline{G}_j = \overline{n}_i\overline{\pi}^{ij}G_j \\ {}_0t &= n_i\overline{s}^{ij}\overline{G}_j = n_i\overline{t}^{ij}G_j \end{aligned}\right\} \qquad (1-41)$$

となり，四種類の応力テンソルを定義することができる．これら4つの応力テンソルの間の関係は，式（1－6），（1－26）からつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{s}^{ij}=(1+\Delta u^m\|_m)\bar{\tau}^{ij}\\
&\bar{\pi}^{ij}=(\delta^j_\kappa+\Delta u^j\|_\kappa)\bar{\tau}^{i\kappa}\\
&\bar{t}^{ij}=(\delta^j_\kappa+\Delta u^j\|_\kappa)\bar{s}^{i\kappa}
\end{aligned}\right\} \tag{1-42}$$

上式において$\bar{\tau}^{ij}$は埋込み座標系における応力テンソル，$\bar{t}^{ij}$，$\bar{s}^{ij}$は 基準状態を増分変形前Cにとったと解釈するとそれぞれ第1および第2 Piola-Kirchhoffの応力テンソルに対応する。

変位増分Δuが微小であると考え，$\bar{P}$における応力テンソル$\bar{\tau}^{ij}$を つぎのようにおく。

$$\bar{\tau}^{ij}=\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij} \tag{1-43}$$

式（1－41）～（1～43）の関係および式（1－29）から増分変形後$\bar{C}$における応力ベクトルt，${}_0\bar{t}$はつぎのように増分変形前Cを基準にした形で表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{t}=n_i(\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}+\tau^{mj}\Delta u^i\|_m+\tau^{mi}\Delta u^j\|_m)G_j\\
&{}_0\bar{t}=n_i(\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}+\tau^{ij}\Delta u^m\|_m+\tau^{im}\Delta u^j\|_m)G_j\\
&\equiv n_i\tilde{\tau}^{ij}G_j
\end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

なお，これらの応力ベクトルは，連続体表面では物体に作用している表面力ベクトルS，$\bar{S}$，${}_0S$と等しい．したがって

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}&S=t\\&{}_0\bar{S}={}_0t\end{aligned}\right) &&C\text{における}B\text{の表面上で}\\
&S=\bar{t} &&\bar{C}\text{における}B\text{の表面上で}
\end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

これら表面力ベクトルをそれぞれの位置の基本ベクトル成分に分解をすると

$$S=S^iG_i \qquad {}_0\bar{S}={}_0\bar{S}^iG_i \qquad \bar{S}=\bar{S}^i\bar{G}_i \tag{1-46}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&S^i=n_j\tau^{ij}\quad,\quad \bar{S}^i=\bar{n}_j\bar{\tau}^{ij}\\
&{}_0\bar{S}^i=n_j(\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}+\tau^{ij}\Delta u^m\|_m+\tau^{im}\Delta u^j\|_m)=n_j\tilde{\tau}^{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{1-47}$$

表面力には，圧力，摩擦力，集中力などがあるが，その個々の場合の扱い方の具体的な説明は，2.7節において行なう．

いっぽう物体力ベクトル$\boldsymbol{F}$は物体単位質量あたりに作用する力である．また加速度ベクトル$\boldsymbol{f}$と物体の質量との積は慣性力になり，単位質量あたりの慣性力は$\boldsymbol{f}$に一致する．これらのベクトルの増分変形後の量を$\breve{\boldsymbol{F}}, \breve{\boldsymbol{f}}$で表わし，成分表示すると

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= F^i \boldsymbol{G}_i & \breve{\boldsymbol{F}} &= \breve{F}^i \breve{\boldsymbol{G}}_i \\ \boldsymbol{f} &= f^i \boldsymbol{G}_i & \breve{\boldsymbol{f}} &= \breve{f}^i \breve{\boldsymbol{G}}_i \end{aligned}\right\} \qquad (1-48)$$

なお，増分変形前後C，$\breve{C}$における点P，$\breve{P}$の速度ベクトルを$\boldsymbol{v}$，$\breve{\boldsymbol{v}}$で表わすと

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_i \boldsymbol{G}^i = v^i \boldsymbol{G}_i \\ \breve{\boldsymbol{v}} &= \breve{v}_i \breve{\boldsymbol{G}}^i = \breve{v}^i \breve{\boldsymbol{G}}_i \end{aligned}\right\} \qquad (1-49)$$

また

$$\boldsymbol{f} = \overset{\circ}{\boldsymbol{v}} \qquad \breve{\boldsymbol{f}} = \dot{\breve{\boldsymbol{v}}} \qquad (1-50)$$

ここで“・”は物体座標を一定としたときの時間微分を表わす．

さて，増分変形後の$\breve{F}^i$，$\breve{f}^i$が

$$\breve{F}^i = F^i + \Delta F^i \quad , \quad \breve{f}^i = f^i + \Delta f^i \qquad (1-51)$$

で表わされるとすると，式（1－48）中の増分変形後の物体力，慣性力ベクトル$\breve{\boldsymbol{F}}$，$\breve{\boldsymbol{f}}$は，式（1－6）を考慮すると増分変形前Cを基準とした形で書き改めることができる．

$$\left.\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{F}} &= (F^j + \Delta F^j + F^m \Delta u^j \|_m) \boldsymbol{G}_j \equiv \tilde{F}^j \boldsymbol{G}_j \\ \breve{\boldsymbol{f}} &= (f^j + \Delta f^j + f^m \Delta u^j \|_m) \boldsymbol{G}_j \equiv \tilde{f}^j \boldsymbol{G}_j \end{aligned}\right\} \qquad (1-52)$$

1.7　増分形のCauchy　の運動の法則

増分変形前後C，$\breve{C}$における各物体粒子に対して運動量保存則を適用して，

増分変形によって生じる応力増分量が満足すべきつりあい式を導出する。Cにおける物体の表面積，体積，密度をそれぞれA，τ，ρで表わすと，Cに対する物体Bの運動量保存則は[59]

$$\int_A t\,dA + \int_\tau \rho F\,d\tau = \int_\tau \rho f\,d\tau \tag{1-53}$$

またいっぽう$\overleftarrow{C}$に対しては表面積，体積，密度をそれぞれ$\overleftarrow{A}$，$\overleftarrow{\tau}$，$\overleftarrow{\rho}$で表わし，応力ベクトル${}_0\overleftarrow{t}$および質量保存則

$$\rho\,d\tau = \overleftarrow{\rho}\,d\overleftarrow{\tau} \tag{1-54}$$

を用いるとつぎのようになる．

$$\int_{A} {}_0\overleftarrow{t}\,dA + \int_\tau \rho\widetilde{F}\,d\tau = \int_\tau \rho\overleftarrow{f}\,d\tau \tag{1-55}$$

式(1−44)，(1−52)，(1−53)，(1−55)からGreen−Gauss の定理により，増分変形前後に対して局所的なつりあい式

$$\tau^{ij}\|_i + \rho F^j = \rho f^j$$
$$\overleftarrow{\tau}^{ij}\|_i + \rho\widetilde{F}^j = \rho\widetilde{f}^j \tag{1-56}$$

を得る．また式(1−56)$_2$に式(1−44)，(1−52)，(1−56)$_1$を考慮すると，増分量に対する局所的なつりあい式

$$\Delta\tau^{ij}\|_i + (\tau^{ij}\Delta u^m\|_m)\|_i + \tau^{im}(\Delta u^j\|_m)\|_i + \rho\Delta F^j = \rho\Delta f^j \tag{1-57}$$

を得る．上式第2，第3項は初期応力があるために生じる項であり，厳密な大ひずみ理論においては省略できない項である．またこれらの項を省略して，変形前後の座標系の区別をしない場合は，いわゆる無限小ひずみ理論によるつりあい式に対応する．

1.8 変形状態を基準にしたエネルギつりあい式

増分変形前後C，$\overleftarrow{C}$におけるエネルギつりあい式を導出する。増分変形前C

において連続体に作用する外力，すなわち体積力$\boldsymbol{F}$および表面力$\boldsymbol{S}$による仕事率Ωは，次式で与えられる．

$$\Omega=\int_{\tau}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}d\tau+\int_{A}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}dA \qquad (1-58)$$

一般に仕事の変化率は系のエネルギの変化に等しい．そのエネルギには二つの形態があり，その一つは物体の運動によって生じる運動エネルギκで

$$\kappa=\frac{1}{2}\int_{\tau}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}d\tau \qquad (1-59)$$

他は物体内部に蓄えられる内部エネルギUで

$$U=\int_{\tau}\rho\varepsilon d\tau \qquad (1-60)$$

ここでεはCにおける単位質量あたりの内部エネルギである．

熱発生を考えない場合，仕事率Ωは運動エネルギκと内部エネルギUの時間的変化割合に等しくなる．しかし一般的には変形にともなう熱発生（もしくは吸収）があり逆に温度変化が変形を引きおこす．また異なった温度の物体との接触により熱移動が生じる．したがってこれを考慮するためには，上述の量のほかに熱の出入を考えなくてはならない．

ここで熱源から物体の単位質量に与えられる熱量をhとし，単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$を有する面の単位面積あたりの熱流ベクトルを$\boldsymbol{q}$とすると，この面を介して物体内部に流入する熱量は$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}$となるので全流入熱量$Q$は

$$Q=\int_{\tau}\rho hd\tau+\int_{A}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}dA \qquad (1-61)$$

となる。熱力学の第１法則として知られているエネルギ保存則は

$$\mathring{\kappa}+\mathring{U}=\Omega+Q \qquad (1-62)$$

式（１－６２）の被積分関数が十分なめらかで連続性が保証される場合，局所形の熱力学の第１法則を導くことができる．なお本論文で扱う弾塑性体は熱の影響を考慮しないので，ここではQについては触れないことにして議論をすす

める.※

式(1−62)を成分表示して,つりあい式(1−56)$_1$を考慮すると

$$\rho\dot{\varepsilon}=\tau^{ij}v_j\|_i \qquad (1-63)$$

$\bar{C}$については,式(1−62)の各項に増分変形後$\bar{C}$における量を代入した式が成立する.これを前節までに示してきたように,増分変形前Cを基準にして表示を行なって,つりあい式(1−56)$_2$を考慮すると,次式で表わされる増分変形後の局所形の第1法則が導かれる.

$$\rho\dot{\bar{\varepsilon}}=(\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}+\tau^{ij}\Delta u^m\|_m+\tau^{im}\Delta u^j\|_m)\tilde{v}_j\|_i \qquad (1-64)$$

ここで$\tilde{v}_j$は$\bar{C}$における速度ベクトル$\bar{v}$の基本ベクトルG^j成分を表わす.

式(1−63),(1−64)を式(1−62)および増分変形後のエネルギ保存則に用いると,増分変形前Cに対して(26)

$$\int_\tau \rho f^j v_j d\tau+\int_\tau \tau^{ij}v_j\|_i d\tau=\int_A S^j v_j dA+\int_\tau \rho F^j v_j d\tau \qquad (1-65)$$

増分変形後$\bar{C}$に対して

$$\int_\tau \rho(f^j+\Delta f^j+f^m\Delta u^j\|_m)\tilde{v}_j d\tau$$

$$+\int_\tau(\tau^{ij}+\Delta\tau^{ij}+\tau^{ij}\Delta u^m\|_m+\tau^{im}\Delta u^j\|_m)\tilde{v}_j\|_i d\tau$$

$$=\int_A(S^j+\Delta S^j+S^m\Delta u^j\|_m)\tilde{v}_j dA$$

$$+\int_\tau \rho(F^j+\Delta F^j+F^m\Delta u^j\|_m)\tilde{v}_j d\tau \qquad (1-66)$$

式(1−65)もしくは(1−66)はCを基準にして表わしたエネルギつりあい式である.

1.9 初期状態を基準にした場合のエネルギつりあい式

前節までは変形状態Cの埋込み座標系を基準にしてとり扱った.ここでは初

※ Qを考慮した場合の定式化は付録(I)で示す.

期状態を基準にした場合について同様な議論を行なう．なお考え方の基本は前節までとおおむね同じであるので詳細は省略する．

初期状態 C_0 を基準にした場合，C_0 から C および C から $\overline{C}$ へ移ることによって生じる変位および増分変位，$\boldsymbol{u}$，$\Delta \boldsymbol{u}$ を成分表示すると

$$\left.\begin{aligned} u &= U^i g_i = U_i g^i \\ \Delta u &= \Delta U^i g_i = \Delta U_i g^i \end{aligned}\right\} \qquad (1-67)$$

C，$\overline{C}$ の埋込み座標系の基本ベクトル G_i，$\overline{G}_i$ は，C_0 の同じ基本ベクトル g_i によりつぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned} G_i &= (\delta^m{}_i + U^m|_i)\ g_m \\ \overline{G}_i &= \{\delta^m{}_i + (U^m + \Delta U^m)|_i\} g_m \end{aligned}\right\} \qquad (1-68)$$

上式において，変位成分 U^m は有限な大きさを有しているので，反変基本ベクトル G^i，$\overline{G}^i$ は，式（1－7）のような簡単な表示はできない．このように基本ベクトルを初期状態を基準にして表わすと，前節までに定義した量はつぎのように書き改めることができる．応力ベクトル $\boldsymbol{t}$，${}_0\boldsymbol{t}$，$\overline{\boldsymbol{t}}$，${}_0\overline{\boldsymbol{t}}$ は

$$\left.\begin{aligned} t &= n_i \tau^{ij} (\delta^m{}_j + U^m|_j) g_m \\ {}_0t &= {}_0n_i \sqrt{\frac{G}{g}}\, \tau^{ij} (\delta^m{}_j + U^m|_j) g_m \\ \overline{t} &= \overline{n}_i \overline{\tau}^{ij} \{\delta^m{}_j + (U^m + \Delta U^m)|_j\}\ g_m \\ {}_0\overline{t} &= {}_0n_i \sqrt{\frac{G}{g}} (1 + \Delta U^\ell|_\ell) \overline{\tau}^{ij} \{\ \delta^m{}_j + (U^m + \Delta U^m)|_j\} g_m \end{aligned}\right\}$$

$$(1-69)$$

ここでベクトル ${}_0\boldsymbol{t}$，${}_0\overline{\boldsymbol{t}}$ は関係式

$$t\, dA = {}_0t\, dA_0 \quad , \quad \overline{t}\, d\overline{A} = {}_0\overline{t}\, dA_0$$

を満す量である　表面力ベクトル ${}_0S$，${}_0\overline{S}$ は表面力が作用している面上で

$${}_0S = {}_0t \quad , \quad {}_0\overline{S} = {}_0\overline{t} \qquad (1-70)$$

ベクトル ${}_0S$，${}_0\overline{S}$ を成分表示すると

$$\left.\begin{aligned}
{}_0\mathcal{S} &= {}_0S^i\,(\,\delta^m_{\ i} + U^m|_i\,)\,g_m \\
{}_0\overline{\mathcal{S}} &= (\,{}_0S^i + \varDelta\,{}_0S^i\,)\,\{\delta^m_{\ i} + (\,U^m + \varDelta U^m\,)\,|_i\,\}\,g_m
\end{aligned}\right\} \qquad (1-71)$$

また物体力，慣性力ベクトルは

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F} &= F^i\,(\,\delta^m_{\ i} + U^m\,|_i\,)\,g_m \\
\overline{\mathcal{F}} &= (\,F^i + \varDelta F^i\,)\,\{\,\delta^m_{\ i} + (\,U^m + \varDelta U^m\,)\,|_i\,\}\,g_m \\
\boldsymbol{f} &= f^i\,(\,\delta^m_{\ i} + U^m\,|_i\,)\,g_m \\
\overline{\boldsymbol{f}} &= (\,f^i + \varDelta f^i\,)\,\{\delta^m_{\ i} + (\,U^m + \varDelta U^m\,)\,|_i\,\}\,g_m
\end{aligned}\right\} \qquad (1-72)$$

速度ベクトル $\boldsymbol{v}$，$\overline{\boldsymbol{v}}$ は

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= v_i\,G^i = v^i\,G_i = V_i\,g^i = V^i\,g_i \\
\overline{\boldsymbol{v}} &= \overline{v}_i\,\overline{G}^i = \overline{v}^i\,\overline{G}_i = \overline{V}_i\,g^i = \overline{V}^i g_i
\end{aligned}\right\} \qquad (1-73)$$

で表わされる。

さて，ここでふたたび状態 C，$\overline{C}$ における物体 B のエネルギ保存則（１－６５），（１－６６）を記述するとつぎのようになる。状態 C に対して

$$\int_{\tau_0} \rho_0\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau_0 + \int_{\tau_0} \sqrt{\frac{G}{g}}\,\tau^{ij}\,v_j\|_i\,d\tau_0 = \int_{A_0} {}_0\mathcal{S}\cdot\boldsymbol{v}\,dA_0 + \int_{\tau_0} \rho_0\,\mathcal{F}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau_0$$

（１－７４）

状態 $\overline{C}$ に対して

$$\int_{\tau_0} \rho_0\,\overline{\boldsymbol{f}}\cdot\overline{\boldsymbol{v}}\,d\tau_0 + \int_{\tau_0} \sqrt{\frac{\overline{G}}{g}}\,\overline{\tau}^{ij}\,\overline{v}_{j\,;\,i}\,d\tau_0$$

$$= \int_{A_0} {}_0\overline{\mathcal{S}}\circ\overline{\boldsymbol{v}}\,dA_0 + \int_{\tau_0} \rho_0\,\overline{\mathcal{F}}\circ\overline{\boldsymbol{v}}\,d\tau_0 \qquad (1-75)$$

ここで“$;\,i$”は $\overline{G}_i$ 基準の共変微分を表わす。

上の二つの式に対して，式（１－６７）～（１～７３）の関係および次式

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{v},_{\,i} &= v_j\|_i\,G^j = V_j\,|_i\,g^j \\
\overline{\boldsymbol{v}},_{\,i} &= \overline{v}_{j\,;\,i}\,\overline{G}^j = V_j\,|_i\,g^j
\end{aligned}\right\}$$

を考慮すると，C_0 を基準にしたエネルギ保存則を得る。

状態 C に対して

$$\int_{\tau_0} \rho_0 f^i (\delta^m{}_i + U^m|_i) V_m d\tau_0 + \int_{\tau_0} \sqrt{\frac{G}{g}} \tau^{ij} (\delta^m{}_i + U^m|_i) V_m|_j d\tau_0$$

$$= \int_{A_0} {}_0S^i (\delta^m{}_i + U^m|_i) V_m dA_0 + \int_{\tau_0} \rho F^i (\delta^m{}_i + U^m|_i) V_m d\tau_0 \tag{1-76}$$

状態 $\bar{C}$ に対して

$$\int_{\tau_0} \rho_0 (f^i + \Delta f^i) \{\delta^m{}_i + (U^m + \Delta U^m)|_i\} \bar{V}_m \, d\tau_0$$

$$+ \int_{\tau_0} \sqrt{\frac{G}{g}} (\tau^{ij} + \Delta \tau^{ij})(1 + \Delta U^\ell|_\ell) \{\delta^m{}_i + (U^m + \Delta U^m)|_i\} \bar{V}_m|_j d\tau_0$$

$$= \int_{A_0} ({}_0S^i + \Delta_0 S^i) \{\delta^m{}_i + (U^m + \Delta U^m)|_i\} \bar{V}_m dA_0$$

$$+ \int_{\tau_0} \rho_0 (F^i + \Delta F^i) \{\delta^m{}_i + (U^m + \Delta U^m)|_i\} \bar{V}_m d\tau_0 \tag{1-77}$$

これらエネルギ保存則以外の各式および量についても同様に求めることができる.

1.10 結　　言

本章においては，第2章における大ひずみ大変形の弾塑性問題を厳密に解析するための有限要素法定式化に先だちその基礎関係式を導出した．とくに，このような問題の解析に対して重要な座標系の選択にさいして，弾塑性体は変形の履歴を複雑に受ける固体であること，および運動の記述を簡単にし，ひずみ応力の取り扱いを容易にするとするということを考慮して，一つの基準状態において空間座標を埋込んだ埋込み座標系を用い，変形状態の埋込み座標系を基準にした定式化を行なった.

はじめに変形状態の埋込み座標を基準にした物体粒子の運動の記述を行ない，同じ座標系を用いた場合のひずみ，応力およびそれらの増分の取り扱い方法を示すと同時に，従来の空間座標表示のひずみ増分の取り扱い方に必ずしも正し

くない点があることを指摘した。

また同じ基準状態に対して，増分形の基礎式の定式化に必要な諸量を求めた。この中で2階のテンソルに対する増分量は，第3章の構成方程式の導出において重要な役割をする，いわゆる客観性を有する変化率（rate）の埋込み座標表示である。

このようにして求めた増分量を用いて，変形状態の埋込み座標系を基準にしたCauchyの運動の法則，エネルギつりあい式を導出した。前者は有限要素法に限らず，境界値問題の解析に応用できる。いっぽう後者は第3章において有限要素法定式化を行なうときの基礎式である。

本章の最後では，以上とは異って初期のLagrange 座標系を基準にしたエネルギつりあい式を導出した。この式を出発点として第3章において示すように初期状態を基準とした有限要素法の定式化をすることができる。

第２章　増分形有限要素法

２．１　緒　　　言

有限要素法は連続な分布系を離散系におきかえる手法の一つであって，ある関数が定義されている領域を要素と呼ばれる有限個の部分領域に分割し，その中に含まれる節点と呼ばれる有限個の点における関数値によって要素内部の近似関数を唯一的に表わし，それを寄せ集めて全領域を再構成して断片的に連続な関数でもとの関数を近似させる計算方法である．

弾塑性体を含む一般連続体の場合に対して，有限要素法のうち本論文で扱う変位法に限定をすると，離散モデルの構成はつぎのようにして行なわれる．はじめに連続体を有限個の要素に分割する．そして個々の要素を取り出し局所的なエネルギつりあい式を求め，それから要素の運動方程式および熱伝導方程式を導出する．つぎに求めたこれらの方程式を，連続体としてエネルギつりあい式を満たすように再構成を行ない連続体の運動方程式および熱伝導方程式を求める．

このように有限要素法においては，個々の要素がエネルギつりあい式を含む連続体問題の解析に必要な諸原理を満足するように要素の挙動をモデル化することがまず考えるべき重要な点である．

ところで有限要素法の定式化は通常変分原理あるいはエネルギつりあい式を用いて行なわれているが，これら二つの手法は原理的には同じものである．大ひずみ大変形を対象とした有限要素法の基礎理論を扱ったものとしては，非線形弾性問題に対するJ．T．Odenらの一連の研究，[23]～[28] 弾塑性問題の解析を目標にしたH．D．Hibbittら[34]，L．D．Hofmeisterら[35]，Y．SeguchiとA．Shindo，[36] O．C．ZienkiewiczとG．C．Nayak，[39]

J. H. Argyris とA. S. L. Chan [40], A. Needleman [41] の研究がある．この中でJ. T. Oden は変形していない状態の直交デカルト座標系を基準にした非線形問題の統一的な取り扱いをはじめて示した．すなわち，一つの要素について考えられる全エネルギを計算してそれをエネルギつりあい式に代入して要素の運動方程式および熱伝導方程式を求めている．この方法は，力学，熱力学の基本法則を直接有限要素法のモデル化に結びつけているという特徴を有し，変形の場と温度の場が熱力学的に連成する場合，各種のエネルギ消散がある場合に対して拡張できる．本章では，J. T. Oden の扱い方を発展させて前章で求めたエネルギつりあい式から要素の増分形の運動方程式を求める．

2．2節では，Lagrangeの内そう関数を変位関数に選び，要素内部の任意の物体点の変位成分を要素の節点における変位成分によって近似して，有限要素の増分形の運動方程式算出に必要な諸量をこの変位関数と要素の節点における変位成分によって記述する．

2．3節では，1．7節で求めたエネルギつりあい式を一つの要素に適用して，変形およびひずみの大きさに制限されない一般的な埋込み座標表示の増分形の運動方程式を導出する．そして埋込み座標系の応力増分とひずみ増分の間に線形関係が成立する場合に対して，いわゆるマトリックス形式の表示をする．この節で導出した運動方程式の係数マトリックスと他の研究者の厳密な理論によって求められたものとの比較検討を行なう．つぎにこの増分形の運動方程式を軸対称問題と平面問題に具体化する．

2．4節では，単体要素を用いた場合について，取り扱い方法および計算のアルゴリズムを例示すると同時に，それを用いて一般的な運動方程式を簡単化する．この手法を用いることにより，従来から用いられている微小変形の有限要素法の場合とほとんど同程度の容易さで厳密な大ひずみ大変形問題の解析が

可能になる．

2．5節では，初期状態を基準にした増分形の運動方程式を2．3節に準じて導出し，埋込み座標表示によるものとの比較を行なう．

2．6節では，前節までに求めた要素の座標系で記述された運動方程式から，連続体全体の運動方程式を組み立てる一般的な手法を提案し具体例によって説明する．

2．7節では，連続体問題の境界条件の有限要素法による表示を行なう．はじめに，荷重境界条件として境界上において応力成分および圧力が既知の場合について考察する．幾何学的境界条件の取り扱い方はO．C．Zienkiewiczらの方法[5]による．

また塑性加工においてもっともよく出合う．曲面によって弾塑性体の運動が拘束される場合に対して，具体的な境界条件の表示を行なう．

2．2 変 位 関 数

本論文では有限要素法のうち変位を未知数とする変位法と呼ばれる方法に限定をして議論をする．ここで行なう定式化は熱発生を考慮しないので，さきに述べた領域内の連続関数に変位を導入すればよい．なお付録(I)において取り扱うような熱発生を考慮に入れた有限要素法においては変位と温度を，また流体力学を扱う場合は速度，圧力，密度などを対応させるのが普通である．変位法では，要素の節点における変位の値によって，要素内部の変位が唯一的に決まるような適当な変位関数を選択しなければならない．ここではその関数にLagrangeの内そう関数を用いる．

さて，一有限要素内部の任意の点θ^m(m=1，2，3)における変位増分$\varDelta u$の埋込み座標系の基本ベクトルで定義した反変および共変成分をそれぞれ$\varDelta u^i$，

Δu_i で表わすと

$$\Delta u = \Delta u^i G_i = \Delta u_i G^i \qquad (2-1)$$

なお本章では，とくに断らない限りすべて特定の一つの要素について考えており，表示が複雑になるので要素を区別する記号はつけないことにする．

一つの要素内部の増分変位成分 Δu^i（あるいは Δu_i）を節点 N における増分変位成分 Δu_N^i（あるいは Δu_{iN}）で近似するためにつぎのような関数 $\phi_M(\theta^m)$ を導入する．

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^i &= \phi_M(\theta^m)\Delta u_M^i \\ \Delta u_i &= \phi_M(\theta^m)\Delta u_{iM} \end{aligned}\right\} \qquad (2-2)$$

式（2－2）において、Mについてもテンソルの総和規約を適用し，その範囲は要素に含まれる節点数とする．ところで式（2－2）の関数 $\phi_M(\theta^m)$ は Lagrange の内そう関数であり，この関数は要素内部でのみ定義され，座標値 θ^m が節点のそれと一致した場合1になるという性質を有しているものとする．このような性質を有する関数 ϕ_N の具体例については藤野(60), (61), J. T. Oden(62)が示している．

式（2－1），（2－2）から増分変位成分の G_i 基準の共変微分はつぎのように表わせる．

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_j \|_i &= (\phi_{N,i}\,\delta_j^r - \phi_N \Gamma_{ij}^r)\,\Delta u_{rN} \equiv {}_N\Psi_{ji}^r\,\Delta u_{rN} \\ \Delta u^j \|_i &= (\phi_{N,i}\,\delta_r^j + \phi_N \Gamma_{ri}^j)\,\Delta u_N^r \equiv {}_N\Phi_{ri}^j\,\Delta u_N^r \end{aligned}\right\} \qquad (2-3)$$

変位成分と同様，要素内部の速度成分 v_i, v^i 加速度成分 f^i, f_i は同じ内そう関数 ϕ_N によりつぎのように近似される．

$$\left.\begin{aligned} v^i &= \phi_N v_N^i, \quad v_i = \phi_N v_{iN} \\ f^i &= \phi_N f_N^i, \quad f_i = \phi_N f_{iN} \end{aligned}\right\} \qquad (2-4)$$

以上のように要素内部の変位増分および変位増分の共変微分が得られると，他の運動を記述するのに必要な量はただちに計算できる．
基本ベクトル，計量テンソル，計量テンソルの行列式は，式（１－６）～（１－８），（１－２６）からつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
\bar{G}_i &= (\delta_i^m + {}_N\Phi_{ri}^m\, \Delta u_N^r)\, G_m \\
\bar{G}^i &= (\delta_m^i - {}_N\Phi_{rm}^i\, \Delta u_N^r)\, G^m \\
\bar{G}_{ij} &= G_{ij} + ({}_N\Psi_{ji}^r + {}_N\Psi_{ij}^r)\, \Delta u_{rN} \\
\bar{G}^{ij} &= G^{ij} - G^{im} G^{jn} ({}_N\Psi_{mn}^r + {}_N\Psi_{nm}^r)\, \Delta u_{rN} \\
\bar{G} &= G(1 + 2\, {}_N\Phi_{rm}^m\, \Delta u_N^r)
\end{aligned}\right\} \quad (2-5)$$

またひずみ増分$\Delta\gamma_{ij}$は，式（１－１５）から次式で表わされる．

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}({}_N\Psi_{ji}^r + {}_N\Psi_{ij}^r)\,\Delta u_{rN} \qquad (2-6)$$

また体積素の増分$\Delta(d\tau)$は，式（１－３２）から

$$\Delta(d\tau) = {}_N\Phi_{rm}^m\, \Delta u_N^r\, d\tau \qquad (2-7)$$

２．３　増分形の有限要素の運動方程式の定式化

２．３．１　３次元問題の場合

ここでは，１．７節で導出したエネルギつりあい式を，２．２節で示した変位関数によって近似される増分変位場を有する一つの有限要素に適用して，これから要素の運動方程式を導く．なお式（１－６５），（１－６６）における積分領域は連続体全体であったが，２．１節で述べたように，ここではそれを一つの要素に取る．

さて，要素内部の変位場，変位増分場，速度場および加速度場が変位関数ϕ_Nと節点におけるこれらの値で近似された場合，一つの要素に対する，増分変形前後C，$\bar{C}$におけるエネルギつりあい式（１－６５），（１－６６）はつ

ぎのように記述される．Cに対して

$$\int_\tau \rho f^j \psi_N v_{jN} d\tau + \int_\tau \tau^{ik}{}_N \Psi^j_{ki} v_{jN} d\tau$$
$$= \int_A S^j \psi_N v_{jN} dA + \int_\tau \rho F^j \psi_N v_{jN} d\tau \qquad (2-8)$$

$\tilde{C}$に対して

$$\int_\tau \rho (f^j + \varDelta f^j + f^m{}_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N \tilde{v}_{jN} d\tau$$
$$+ \int_\tau (\tau^{ik} + \varDelta \tau^{ik} + \tau^{ik}{}_M \Phi^m_{rm} \varDelta u^r_M + \tau^{im}{}_M \Phi^k_{rm} \varDelta u^r_M) N \Psi^j_{ki} \tilde{v}_{jN} d\tau$$
$$= \int_A (S^j + \varDelta S^j + S^m{}_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N \tilde{v}_{jN} dA$$
$$+ \int_\tau \rho (F^j + \varDelta F^j + F^m{}_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N \tilde{v}_{jN} d\tau \qquad (2-9)$$

式（２－８），（２－９）において，被積分項に含まれる節点速度v_{jN}，$\tilde{v}_{jN}$は時間のみの関数であるから積分の外へ出すことができる．また式（２－８），（２－９）はエネルギつりあい式（熱力学第一法則）であり，要素の任意の運動に対して成立しなくてはならない．すなわち，任意の節点速度v_{jN}，$\tilde{v}_{jN}$に対して式（２－８），（２－９）が成立しなければならないことを考慮すると，式（２－８）から

$$\int_\tau \rho \psi_M f^j_M \psi_N d\tau + \int_\tau \tau^{ik}{}_N \Psi^j_{ki} d\tau$$
$$= \int_A S^j \psi_N dA + \int_\tau \rho F^j \psi_N d\tau \qquad (2-10)$$

式（２－９）から

$$\int_\tau \rho (\psi_M f^j_M + \psi_M \varDelta f^j_M + f^m_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N d\tau$$
$$+ \int_\tau (\tau^{ik} + \varDelta \tau^{ik} + \tau^{ik}{}_M \Phi^m_{rm} \varDelta u^r_M + \tau^{im}{}_M \Phi^k_{rm} \varDelta u^r_M) N \Psi^j_{ki} d\tau$$
$$= \int_A (S^j + \varDelta S^j + S^m{}_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N dA$$
$$+ \int_\tau \rho (F^j + \varDelta F^j + F^m{}_M \Phi^j_{rm} \varDelta u^r_M) \psi_N d\tau \qquad (2-11)$$

ところで増分量は微小であり，増分変形前に完全に式（２－１０）を満す諸量が求まっているものと仮定をして，式（２－１１）から（２－１０）を差し引き整理するとつぎのようになる．

$$m^M_N \Delta \ddot{u}^j_M + \int_\tau \Delta\tau^{ik}\, {}_N\Psi^j_{ki}\, d\tau + \left({}^{K}_{(G)}{}^{jM}_{rN} + {}^{K}_{(\sigma)}{}^{jM}_{rN} \right) \Delta u^r_M$$
$$= \Delta P^j_N + \Delta F^j_N \qquad (2-12) \quad ※$$

ここで上式の各マトリックスはつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
& m^M_N = \int_\tau \rho\, \psi_M \psi_N\, d\tau \\
& {}^{K}_{(G)}{}^{jM}_{rN} = \int_\tau \tau^{im}\, {}_N\Psi^j_{mi}\, {}_M\Phi^k_{rk}\, d\tau \\
& {}^{K}_{(\sigma)}{}^{jM}_{rN} = \int_\tau \tau^{ik}\, {}_N\Psi^j_{mi}\, {}_M\Phi^m_{rk}\, d\tau \\
& \Delta \bar{P}^j_N = \Delta P^j_N + {}^{R}_{(S)}{}^{jM}_{rN} \Delta u^r_M \\
& \Delta \bar{F}^j_N = \Delta F^j_N + {}^{R}_{(B)}{}^{jM}_{rN} \Delta u^r_M \\
& \Delta P^j_N = \int_A \Delta S^j\, \psi_N\, dA \qquad \Delta F^j_N = \int_\tau \Delta F^j\, \psi_N\, d\tau \\
& {}^{R}_{(S)}{}^{jM}_{rN} = \int_A S^m \psi_N\, {}_M\Phi^j_{rm}\, dA \\
& {}^{R}_{(B)}{}^{jM}_{rN} = \int_\tau \rho F^m \psi_N\, {}_M\Phi^j_{rm}\, d\tau
\end{aligned}\right\} \quad (2-13)$$

式（２－１２）は熱発生を考慮しない場合の有限要素に関する一般的な増分形の運動方程式であり，C_0からCへの変位の大きさ，ひずみの大きさに制限されず厳密に成立する．各項に含まれるマトリックス m^M_N，${}^{K}_{(\sigma)}{}^{jM}_{rN}$ ${}^{R}_{(S)}{}^{jM}_{rN}$はそれぞれ質量マトリックス(25)，(63) 初期応力マトリックス(20)，(26)，(34)，(64) 荷重修正マトリックス(26)，(34) と呼ばれているものに対応し，従来の厳密な理論においてすでに導出されているものと同じ意味をもっものであるが基準座標系の取り方が異なるので式の形が同一ではない．

いっぽうマトリックス${}^{K}_{(G)}{}^{jM}_{rN}$ はτ^{ij}の作用する面が増分変形によって，その大きさが変わるために生じてくる項であり，第２初期応力マトリックス，あるいは${}^{K}_{(\sigma)}{}^{jM}_{rN}$ と合わせて初期応力マトリックスと呼ぶことができるものである．このマトリックスは，埋込み座標系の応力τ^{ij}を用いた定式化で，とくに圧縮性の物体に対しては省略することができない項である．

※ $\Delta\ddot{u}^j$ は，関係式$\Delta\ddot{u}^j G_j = \Delta\ddot{U}^j g_j$を満たす量である．

マトリックス ${}_{(B)}R^{jM}_{\Gamma N}$は増分変形の間に体積力ベクトルを成分に分解している基本ベクトルが変化することによって生じる項であり，体積力修正マトリックスト呼ぶことにする.

マトリックス ${}_{(G)}K^{jM}_{\Gamma N}$, ${}_{(B)}K^{jM}_{\Gamma N}$ はこれまでに導出されていなかったもので，大変形問題を厳密に扱う場合は考慮しなければならない.

さて，式(2－12)において，これまでに導出された増分形の運動方程式と著しく異なる点は，上述の二つのマトリックスの他に，初期変位があるために生じるいわゆる，初期変位マトリックスが無いことである．埋込み座標系を基準とした定式化においては，各増分段階の計算において，その段階の変位増分が埋込み座標系の計量の変化の形で逐次考慮されていることになるのでこれが生じないのである．また式(2－13)におけるマトリックス$\Delta \bar{F}^{j}_{N}$とΔF^{j}_{N}および$\Delta \bar{P}^{i}_{N}$とΔP^{i}_{N}との違いも注意すべき点で，マトリックス$\Delta \bar{F}^{i}_{N}$および$\Delta \bar{P}^{i}_{N}$は増分変形前の既知の基本ベクトルG_{j}によって分解された成分であり，マトリックスΔF^{j}_{N}およびΔP^{j}_{N}は増分変形後の未知な基本ベクトル$\bar{G}_{j}$により分解された成分である.

式(2－12)の第2項は増分形の構成方程式の具体的な形が決まると，式(2－13)に示されたマトリックスと同じような形あるいは増分変位を非線形的に含んだ形になる．たとえば埋込み座標系の応力増分$\Delta \tau^{ij}$とひずみ増分$\Delta \gamma_{kl}$の間に線形関係が成立する場合については，つぎのように表現できる.

$$\Delta \tau^{ij} = E^{ijkl} \Delta \gamma_{kl} \qquad (2-14)$$

式(2－14)で表わされる構成方程式で記述される各種材料に対するE^{ijkl}の具体的な形については，第3章において詳細に議論をするが，そのような材料の例として，弾性，超弾性，亜弾性，弾塑性体などがある．E^{ijkl}は弾性体，超弾性体においては，弾性定数および変位成分を含み，亜弾性体ではそのうえ

に増分変形前の応力成分を含んだ形になる．

また弾塑性体の場合は，以上のほかに応力空間における応力ベクトルの位置および接線係数，ひずみ履歴を含んだ形となる．

さて，式（２－１４）のE^{ijkl}には応力およびひずみ増分$\Delta\tau^{ij}$，$\Delta\gamma_{kl}$の対称性からつぎの関係式が成り立つ．

$$E^{ijk\ell}=E^{ji\ell k}=E^{jikl}=E^{ijlk} \qquad (2-15)$$

式（２－１４）に式（１－１５），（２－１５）を考慮して，テンソルの連合則を用いると

$$\Delta\tau^{ij}=E^{ijkl}G_{k\mathrm{r}}\Delta u^{\mathrm{r}}\|_{l} \qquad (2-16)$$

上式の変位成分を，式（２－３）を用いて表わすとつぎのようになる．

$$\Delta\tau^{ij}=E^{ijkl}G_{ks}\,{}_{M}\Phi^{s}_{\mathrm{r}l}\,\Delta u^{\mathrm{r}}_{M} \qquad (2-17)$$

そうすると式（２－１２）の左辺第２項は次式のようにマトリックス形で表わすことができる．

$$\begin{aligned}K^{jM}_{\mathrm{r}N}\Delta u^{\mathrm{r}}_{M}&=\int_{\tau}\boldsymbol{\Delta\tau}^{\boldsymbol{ik}}\,{}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{\Psi}^{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{ki}}\,\boldsymbol{d\tau}\\&=\int_{\tau}E^{imkl}G_{ks}\,{}_{M}\Phi^{s}_{\mathrm{r}l}\,{}_{N}\Psi^{j}_{mi}\,d\tau\,\Delta u^{\mathrm{r}}_{M} \qquad (2-18)\end{aligned}$$

$K^{jM}_{\mathrm{r}N}$はいわゆる微小変形の場合の剛性マトリックス(5)に対応するが，変形による計量の変化を厳密に考慮している点で本質的に異なる．

以上で３次元の任意形状をもつ有限要素に対する大ひずみ大変形の増分形の運動方程式は求まった．後続の節では，この式を出発点として，軸対称，平面問題および特定の変位関数ψ_Nについての定式化を行なう．

２．３．２　軸対称問題の場合

軸対称問題においては，対称性から子午面内の二つの変位成分により完全に変形状態を規定できる．ただし半径方向変位により円周方向ひずみが生じ，円

周応力も零でない．したがってエネルギ式に円周方向のひずみおよび応力が入ってくることを考慮しなければならない．ここではこれを考慮して，２．３．１で求めた結果を軸対称問題に適用する．

変形していない状態において物体中に円柱座標系 θ^i を埋込む．この座標系の１，２，３方向はそれぞれ物体の半径，対称軸，円周方向に対応している．変形していない状態における θ^i 座標系の計量テンソルは次式で表わされる．

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta^1)^2 \end{bmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta^1)^{-2} \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

変形していない状態において零でないクリストッフェル記号は次に示す３個である．

$$\Gamma_{13}^{3} = 1/\theta^1, \quad \Gamma_{31}^{3} = 1/\theta^1, \quad \Gamma_{33}^{1} = -\theta^1 \qquad (2-20)$$

増分変形後の基本ベクトルは，式（２－５）からつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} \bar{G}_i &= (\delta_i^m + {}_N\Phi_{ri}^{m}\,\Delta u_N^r)\,G_m \\ \bar{G}^i &= (\delta_m^i - {}_N\Phi_{rm}^{i}\,\Delta u_N^r)\,G^m \\ \bar{G}_3 &= (1+\Gamma_{r3}^{3}\,\psi_N\,\Delta u_N^r)\quad G_3 \\ \bar{G}^3 &= (1-\Gamma_{r3}^{3}\,\psi_N\,\Delta u_N^r)\quad G^3 \end{aligned}\right\} \quad (2-21)$$

なお本節では，とくに断らないかぎり小文字の指標は１，２をとるものとし，大文字の指標の範囲は要素の節点数とする．また変形状態におけるクリストッフェル記号は，式（１－１８）からつぎのように表わされる．

$$\Gamma_{r3}^{3} = \frac{1}{2}G^{33}G_{33,r} \quad \Gamma_{33}^{r} = -\frac{1}{2}G^{sr}G_{33,s} \qquad (2-22)$$

ひずみ増分は，式（１－１５），（２－２２）により次式によって求めることができる．

$$\Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}({}_N\Psi_{ji}^{r} + {}_N\Psi_{ij}^{r})\,\Delta u_{rN} \qquad (2-23)$$

$$\Delta\gamma_{33} = G_{33}\Gamma^{3}_{r3}\psi_N \Delta u^{r}_{N}$$

式(2−3)で，指標に3を含むもので零でないものはつぎの二つである．

$$ {}_N\Psi^{r}_{33} = -\Gamma^{r}_{33}\psi_N \qquad {}_N\Phi^{3}_{r3} = \Gamma^{3}_{r3}\psi_N \qquad (2-24)$$

式(2−23)，(2−24)を式(2−13)，(2−18)に代入すると，軸対称変形の場合の増分形の運動方程式の係数マトリックスが求まり，つぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
m^{M}_{N} &= \int_\tau \rho\,\psi_M \psi_N\, d\tau \\
K^{jM}_{rN} &= \int_\tau E^{imkl} G_{ks\,M}\Phi^{s}_{rl\,N}\Psi^{j}_{mi}\, d\tau \\
&\quad - \int_\tau E^{33kl} G_{ks\,M}\Phi^{s}_{rl}\,\Gamma^{j}_{33}\psi_N\, d\tau \\
&\quad - \int_\tau E^{3333} G_{33}\Gamma^{3}_{r3}\psi_M \Gamma^{j}_{33}\psi_N\, d\tau + \int_\tau E^{k\ell 33} G_{33}\Gamma^{3}_{r3}\psi_{M\,N}\Psi^{j}_{k\ell}\, d\tau \\
\underset{(G)}{K}{}^{jM}_{rN} &= \int_\tau \tau^{im}\,{}_N\Psi^{j}_{mi\,M}\Phi^{k}_{rk}\, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33}\Gamma^{j}_{33}\psi_{N\,M}\Phi^{k}_{rk}\, d\tau \\
&\quad + \int_\tau \tau^{im}\,{}_N\Psi^{i}_{mi}\,\Gamma^{3}_{r3}\psi_M\, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33}\Gamma^{j}_{33}\psi_N \Gamma^{3}_{r3}\psi_M\, d\tau \\
\underset{(\sigma)}{K}{}^{jM}_{rN} &= \int_\tau \tau^{ik}\,{}_N\Psi^{j}_{mi\,M}\Phi^{m}_{rk}\, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33}\,\Gamma^{j}_{33}\psi_N \Gamma^{3}_{r3}\psi_M\, d\tau \\
\Delta\bar{P}^{j}_{N} &= \Delta P^{j}_{N} + \underset{(S)}{R}{}^{jM}_{rN}\,\Delta u^{r}_{M} \\
\Delta\bar{F}^{j}_{N} &= \Delta F^{j}_{N} + \underset{(B)}{R}{}^{jM}_{rN}\,\Delta u^{r}_{M} \\
\underset{(S)}{R}{}^{jM}_{rN} &= \int_A S^{m}\psi_{N\,M}\Phi^{j}_{rm}\, dA \\
\underset{(B)}{R}{}^{jM}_{rN} &= \int_\tau \rho F^{m}\psi_{N\,M}\Phi^{j}_{rm}\, d\tau
\end{aligned}\right\}(2-25)$$

軸対称問題においてはリング要素を用いるので．式(2−25)の体積積分はリング要素について，面積積分はリング要素の表面について行なう．

2．3．3　2次元問題の場合

2次元の場合平面応力，平面ひずみの場合に限定すると面に垂直な方向のひずみあるいは応力は零であるから，エネルギ式の中に含まれる応力あるいはひずみ成分は面内成分のみである．したがってこの場合の有限要素の運動方程式は，式（2－12），（2－13），（2－18）において小文字の指標の範囲を1，2とした場合に対応する．なお平面ひずみ問題では，変形前に単位厚さの要素を考えると，上述の3式における要素の体積および表面積はそれぞれ要素の断面積および周囲長さに一致する．いっぽう平面応力の場合は，要素の厚さは時々刻々変化していることを考慮する必要がある．厚さ方向のひずみ増分$\Delta\gamma_{33}$は，式（2－14）の逆関係

$$\Delta\gamma_{ij} = A_{ijkl}\Delta\tau^{kl} \qquad A_{ijkl} = (E^{ijkl})^{-1}$$

から　$\Delta\gamma_{33} = A_{33kl}\,\Delta\tau^{kl}$　　（2－26）

として求まる．変形していない場合，厚さh_0であったとすると，ひずみγ_{33}が生じた後の厚さhは

$$h = h_0\sqrt{1+2\gamma_{33}} \qquad (2-27)$$

となる．

2．4　単体要素モデルによる有限要素の運動方程式

単体要素とは，図2－1に示すように，考えている空間の次元数より1だけ多い節点数を有しその節点を頂点とするような多面体要素を総称する．[62]
単体要素においては，要素内部の変位成分が物体座標の1次関数で表わされるのでデカルト座標系を基準とした単体要素の場合にはひずみ成分は要素内部で一様になる．したがって応力成分もまた一様になるその結果運動方程式の係数マトリックスは簡単に求めることができ．他の要素を用いた場合のように数値

積分を行なう必要はない．
また計算を行なう場合，多くの量が要素内部で一様であるから，それらの量を各要素について１個だけ記憶すれば十分であり，大幅な計算機の記憶場所の節約になる．

ここでは３次元問題に対して単体要素である４面体要素について２．３節で示した要素の運動方程式の具体的な計算のアルゴリズムを示す．なおこの要素は基本的なものであり計算の簡単さからよく用いられている．

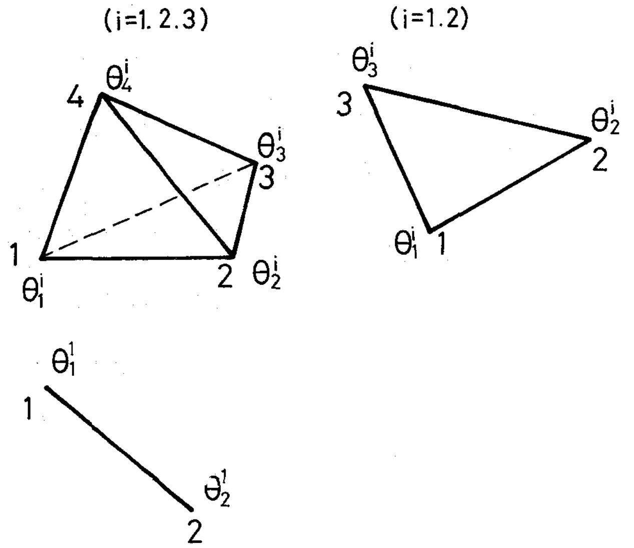


図２－１　単体要素．

図２－２に示すように空間固定の座標系として直交デカルト座標系 x^i（$i=1,\ 2,\ 3$）をとり変形前において埋込み座標系 θ^i（$i=1,\ 2,\ 3$）と一致しているとする．なおここでは論旨を

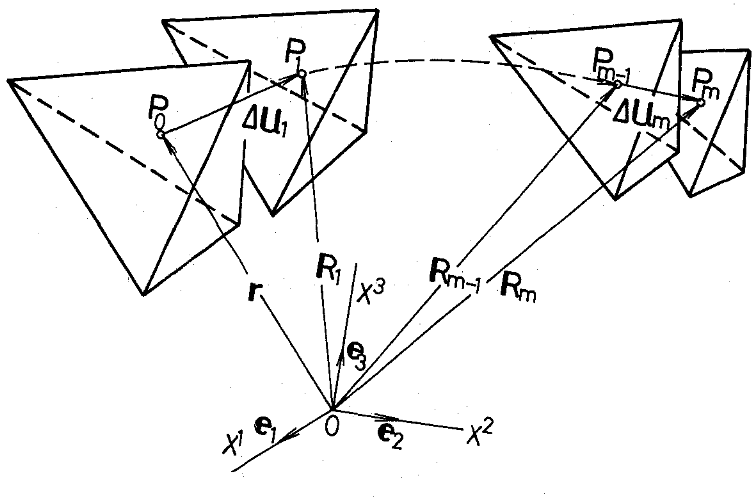


図２－２　有限要素の増分変形

明確にするために直角座標系を選んだが．これは斜交座標系についてもまったく同様である．また一般的な曲線座標系を選んだ場合においても．それを要素ごとに区分的に斜交座標系であると近似することによってまったく同様に扱うことができる．

ここで直交デカルト座標系の基本ベクトルを $e_i = e^i$ ($i=1, 2, 3$) で表わす．変形する前に連続体を構成している任意の要素の内部の点 P_0 の空間座標 θ^i が物体座標となる．連続体に加わる増分的な内的および外的な作用によって生じる連続体の運動とともに物体点の空間位置が P_0, P_1, P_2, ・・・P_m, P_{m+1}, ・・・ に移ったと考える．なお, $\overrightarrow{P_0 P_1}$, ・・・ $\overrightarrow{P_m P_{m+1}}$, ・・・は微少量であると仮定をする．点 P_1 の位置ベクトル $\mathcal{R}_1$ は次式で表わせる．

$$\mathcal{R}_1 = r + \Delta u_1$$

ここで

$$\Delta u_1 = \Delta \underset{1}{u}^k e_k = \Delta \underset{1}{u}_k e^k$$

基本ベクトルは, 式 (1 − 6), (1 − 7) からつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{G}_i &= (\delta_i^k + \Delta \underset{1}{u},_i^k) e_k \\ \underset{1}{G}^i &= (\delta_k^i - \Delta \underset{1}{u},_k^i) e_k \end{aligned}\right\} \qquad (2-28)$$

4 面体の頂点を節点とするような要素の場合変位関数 ψ_N はつぎのように表わされる．

$$\psi_N = \alpha_N + \beta_{Ni}\, \theta^i \qquad (2-29)$$

ここで α_N, β_{Ni} は要素の節点の座標 θ_I^i ($i=1, 2, 3$, $I = 1, 2, 3, 4$) によって表わされ[62]

$$\alpha_N = \frac{1}{36\tau_0} \epsilon_{NIJK}\, \epsilon_{ijk}\, \theta_I^i\, \theta_J^j\, \theta_K^k$$

$$\beta_{Nm} = \frac{-1}{36\tau_0} \epsilon_{NIJK}\, \epsilon_{ijk}\, b_{Ii(m)}\, b_{Jj(m)}\, b_{Kk(m)}$$

ただし ϵ_{NIJK}, ϵ_{ijk} は順列記号, $b_{Ii(m)}$ は $i=m$, $i \neq m$ のときそれぞれ

1， θ_I^i をとる定数であり，また τ_0 は4面体の変形をしていない状態における体積を表わす．

式（2－29）から，基本ベクトル（2－28）はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}\underset{1}{G}_i &= (\delta_i^k + \beta_{Ni} \Delta \underset{1}{u}_N^k) e_k \\ \underset{1}{G}^i &= (\delta_k^i - \beta_{Nk} \Delta \underset{1}{u}_N^i) e^k\end{aligned}\right\} \qquad (2-30)$$

単体要素の場合，式（2－30）に示されるように，変形後の要素の座標系の基本ベクトルは要素内部で一様になる．これは連続体全体の埋込み座標系を要素ごとに区分的なデカルト座標系の集合として近似していることを意味する．式（2－30）を導出した過程を繰返して行なうことによって，m 回目の増分後の要素の基本ベクトル $\underset{m}{G}_i$, $\underset{m}{G}^i$ をつぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}\underset{m}{G}_i &= \underset{m}{H}_i^{Km} \underset{m-1}{H}_{Km}^{Km-1} \cdots \underset{2}{H}_{K3}^{K2} \underset{1}{H}_{K2}^{K1} e_{K1} \\ &= \underset{m}{H}_i^{Km} \underset{m-1}{G}_{Km} \equiv \underset{m}{\bar{H}}_i^{K1} e_{K1} \\ \underset{m}{G}^i &= \underset{m}{\Omega}_{Km}^i \underset{m-1}{\Omega}_{Km-1}^{Km} \cdots \underset{2}{\Omega}_{K2}^{K3} \underset{1}{\Omega}_{K1}^{K2} e^{K1} \\ &= \underset{m}{\Omega}_{Km}^i \underset{m-1}{G}^{Km} \equiv \underset{m}{\bar{\Omega}}_{K1}^i e^{K1}\end{aligned}\right\} \qquad (2-31) \quad ※$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\underset{m}{H}_i^{Km} &= (\delta_i^{Km} + \beta_{Ni} \Delta \underset{m}{u}_N^{Km}) \\ \underset{m}{\bar{H}}_i^{K1} &= \underset{m}{H}_i^{Km} \cdots \underset{1}{H}_{K2}^{K1} \\ \underset{m}{\Omega}_{Km}^i &= (\delta_{Km}^i - \beta_{NKm} \Delta \underset{m}{u}_N^i) \\ \underset{m}{\bar{\Omega}}_{K1}^i &= \underset{m}{\Omega}_{Km}^i \cdots \underset{1}{\Omega}_{K1}^{K2}\end{aligned}\right\} \qquad (2-32) \quad ※$$

※ mについて和をとらない

また計量テンソルは

$$
\left.
\begin{array}{l}
{}_m G_{ij} = \overline{\textcircled{H}}{}_m{}^k{}_i \, \overline{\textcircled{H}}{}_m{}^k{}_j = \textcircled{H}{}_m{}^k{}_i \, \textcircled{H}{}_m{}^l{}_j \, {}_{m-1}G_{kl} \\
{}_m G^{ij} = \overline{\Omega}{}_m{}^i{}_k \, \overline{\Omega}{}_m{}^j{}_k = \Omega{}_m{}^i{}_k \, \Omega{}_m{}^j{}_l \, {}_{m-1}G^{kl} \\
\delta^j_i = \overline{\textcircled{H}}{}_m{}^k{}_i \, \overline{\Omega}{}_m{}^j{}_k
\end{array}
\right\} \qquad (2-33) \quad ※
$$

つぎに要素内部での計量の一様性を用いて２．３節で求めた要素の運動方程式を簡単化する．変位関数が式（２－２９）で表わされるとき，要素内部で基本ベクトルは一様であるから式（２－３）のクリストッフエル記号は零となりつぎのように簡単化できる．

$$
{}_N\Psi_j{}^r{}_i = \beta_{Ni}\,\delta^r_j \qquad {}_N\Phi_r{}^j{}_i = \beta_{Ni}\,\delta^j_r \qquad (2-34)
$$

これを式（２－１３），（２－１８）に用いると，要素の増分形の運動方程式の係数マトリックスはつぎのようになる．

$$
\left.
\begin{array}{l}
m^M_N = \rho_0 \int_{\tau_0} \psi_N \psi_M \, d\tau_0 \\
K^{jM}_{rN} = E^{ijkl}\, G_{kr}\, \beta_{Ml}\, \beta_{Ni} \circ \tau \\
\underset{(G)}{K}{}^{jM}_{rN} = \tau^{ij}\, \beta_{Ni}\, \beta_{Mr} \circ \tau \\
\underset{(\sigma)}{K}{}^{jM}_{rN} = \tau^{ik}\, \beta_{Ni}\, \beta_{Mk}\, \delta^j_r \circ \tau
\end{array}
\right\} \qquad (2-35)
$$

※　mについて和をとらない．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{(S)}{R}{}^{jM}_{rN} = \beta_{Mm}\,\delta^{j}_{r}\int_A S^m\,\psi_N\,dA\\
&\underset{(B)}{R}{}^{jM}_{rN} = \rho_0\,\beta_{Mm}\,\delta^{j}_{r}\int_{\tau_0} F^m\,\psi_N\,d\tau_0\\
&\Delta P^j_N = \int_A \Delta P^j\,\psi_N\,dA\\
&\Delta F^j_N = \rho_0\int_{\tau_0}\Delta F^j\,\psi_N\,d\tau_0\\
&\tau = \sqrt{G}\iiint_{\tau 0} d\theta^1\,d\theta^2\,d\theta^3 = \sqrt{G}\,\tau_0
\end{aligned}
\right\}
\quad (2-35)
$$

単体要素を用いて変形していない状態において要素ごとに計量が一様であるような座標系を選んだ場合，式（２－３２）から明らかなように大変形をした後もこの座標系の計量は一様である．これはまた要素内部のひずみ分布が一様であることに対応する．したがって，ここで示したような有限要素モデルを用いた場合，要素分割を細かくしてゆくと真の解に収束してゆくことが保証される．(5)

いっぽう平面問題においては，上式（２－３５）において小文字の指標の範囲を１，２として変位関数ψ_Nを次式で表わされるものに置き換えればよい．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2A_0}\begin{bmatrix}\theta^1_2\,\theta^2_3 - \theta^1_3\,\theta^2_2\\ \theta^2_1\,\theta^1_3 - \theta^1_1\,\theta^2_3\\ \theta^1_1\,\theta^2_2 - \theta^2_1\theta^1_2\end{bmatrix}\\
&\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\\ \beta_{31} & \beta_{32}\end{bmatrix} = \frac{1}{2A_0}\begin{bmatrix}\theta^2_2 - \theta^2_3 & \theta^1_3 - \theta^1_2\\ \theta^2_3 - \theta^2_1 & \theta^1_1 - \theta^1_3\\ \theta^2_1 - \theta^2_2 & \theta^1_2 - \theta^1_1\end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\}
\quad (2-36)
$$

ここでA_0は変形前の要素の面積を表わす．

軸対称問題の場合は，２次元の単体要素を対称軸のまわりに回転してできるいわゆる３角形リング要素を用いるのが普通である．この場合も変位関数は，式（２－３６）で表わされ，式（２－２５）はつぎのようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
m^M_N &= \int_{\tau_0} \rho_0 \psi_M \psi_N \, d\tau_0 \\
K^{jM}_{rN} &= \int_\tau E^{ijkl} G_{kr} \beta_{Ml} \beta_{Ni} \, d\tau \\
&\quad - \int_\tau E^{33kl} G_{kr} \beta_{Ml} \Gamma^j_{33} \psi_N \, d\tau \\
&\quad - \int_\tau E^{3333} G_{33} \Gamma^3_{r3} \psi_M \Gamma^j_{33} \psi_N \, d\tau + \int_\tau E^{ij33} G_{33} \psi_M \Gamma^3_{r3} \beta_{Ni} \, d\tau \\
\overset{K}{(G)}{}^{jM}_{rN} &= \int_\tau \tau^{ij} \beta_{Ni} \beta_{Mr} \, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33} \Gamma^j_{33} \psi_N \beta_{Mr} \, d\tau + \int_\tau \tau^{ij} \beta_{Ni} \Gamma^3_{r3} \psi_M \, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33} \Gamma^j_{33} \psi_N \Gamma^3_{r3} \psi_M \, d\tau \\
\overset{K}{(\sigma)}{}^{jM}_{rN} &= \int_\tau \tau^{ik} \beta_{Ni} \beta_{Mk} \delta^j_r \, d\tau \\
&\quad - \int_\tau \tau^{33} \Gamma^j_{33} \psi_N \Gamma^3_{r3} \psi_M \, d\tau \\
\overset{R}{(S)}{}^{jM}_{rN} &= \int_A S^m \psi_N \beta_{Mm} \delta^j_r \, dA \\
\overset{R}{(B)}{}^{jM}_{rN} &= \int_{\tau_0} \rho_0 F^m \psi_N \beta_{Mm} \delta^j_r \, d\tau_0
\end{aligned}
\right\}
\qquad (2-37)
$$

（２－３７）

２．５　初期状態を基準にした場合の有限要素の運動方程式

基準座標系を埋込み座標系に取った場合と同様に，初期状態の座標系の基本ベクトル方向に分解した変位，速度成分を２．２節で示したと同じ変位関数ψ_N

で表わす．いっぽう，初期状態を基準にした場合，構成方程式（２－14）はつぎのように書き改められる．

$$\Delta\tau^{ij}=E^{ijkl}\left(\Delta U_k|_l+U^m|_k\,\Delta U_m|_l\right) \qquad (2-38)$$

つぎにこれらの関係式を，増分変形前後のエネルギつりあい式（１－７６），（１－７７）に代入すると増分形の要素の運動方程式が求まる．

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\int_{\tau_0}\sqrt{\frac{G}{g}}\left[\tau^{ij}\ {}_M\Phi^k_{si}+\left\{E^{ijkl}\left(g_{kn}+{}_R\Phi^m_{gk}\,U^g_R\,g_{mn}\right){}_M\Phi^n_{sl}\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\tau^{ij}\ {}_M\Phi^l_{sl}\right\}\left(\delta^p_i+{}_T\Phi^p_{qi}\,U^q_T\right)\right]\ {}_N\Psi^r_{pj}\ d\tau_0\\&\qquad\left.-\int_{A_0}{}_0P^m\ {}_M\Phi^r_{sm}\,\psi_N\,dA_0\right\}\Delta U^s_M=\Delta P^r_N\\&\Delta P^r_N=\int_{A_0}\Delta P^m_0\left(\delta^r_m+{}_M\Phi^r_{sm}\,U^s_M\right)\psi_N\,dA_0\end{aligned}\right\}\ (2-39)$$

上式は任意の初期座標系を基準にした増分形の運動方程式で，導出にあたり物体力および慣性力によって生じる項は，表面力によって生じる項とほとんど同様な形になるためここでは記述を省略した．式（２－３９）中変位U^i_Nを含んだ項がいわゆる初期変位があるために生じる項で，増分形の運動方程式を非常に複雑ならしめている．

基準座標として直交デカルト座標系を選ぶと式（２－３９）はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\int_{\tau_0}\sqrt{G}\left[\tau^{ij}\ \psi_{M,i}\,\delta^r_s+\left\{E^{ijkl}\left(\delta^k_s+\psi_{R,k}\,U^s_R\right)\psi_{M,l}\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\tau^{ij}\ \psi_{M,s}\right\}\left(\delta^r_i+\psi_{T,i}\,U^r_T\right)\right]\psi_{N,j}\,d\tau_0\\&\left.-\int_{A_0}{}_0P^m\ \psi_{M,m}\,\delta^r_s\,\psi_N\,dA_0\right\}\Delta U^s_M=\Delta P^r_N\end{aligned}\right\}\ (2-40)$$

$$\Delta P_N^r = \int_{A_0} \Delta P_0^m \, (\delta_m^r + \psi_{M,m} U_M^r) \, \psi_N \, d A_0 \qquad (2-40)$$

式(2－40)は，J．T．Odenが導出した増分形の運動方程式[37]に対応する．式(2－40)に対して単体要素を用いると，簡単化されてつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} & \Big[\int_{\tau_0} \sqrt{G} \, \big[\tau^{ij} \beta_{Mi} \delta_s^r + \{ E^{ijkl} (\delta_s^k + \beta_{Rk} U_R^s) \beta_{Ml} + \tau^{ij} \beta_{Ms} \} \\ & \quad \times (\delta_i^r + \beta_{Ti} U_T^r) \big] \, \beta_{Nj} \, d\tau_0 - \int_{A_0} P^m \beta_{Mm} \delta_s^r \psi_N \, d A_0 \Big] \, \Delta U_M^s \\ & \qquad = \Delta P_N^r \\ & \Delta P_N^r = \int_{A_0} \Delta P_0^m \, (\delta_m^r + \beta_{Mm} U_M^r) \, \psi_N \, d A_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-41)$$

2．6 連続体の運動方程式の組立てについて

前節までに要素個々のエネルギつりあい式から有限要素の増分形の運動方程式を導出した．連続体はこのようにして特徴付けられた個々の要素の集合としてモデル化される．ここで連続体としてエネルギつりあい式を満すように，これら要素の運動方程式を構成して連続体の運動方程式を求める．

一般に，要素ごとに異なった座標系(局所座標系)で要素の運動方程式が記述されていると，連続体中では同じ節点であっても，そこで結合されている要素個々の運動方程式中の変位および節点力ベクトルの成分は異なった座標系の基本ベクトルで成分表示されていることとなる．とくに本論文で取り扱っている座標系では局所座標系の計量テンソルも異なっているので通常行なわれている方法[5]で要素の運動方程式から連続体の運動方程式を組み立てることはできない．このような場合に対して，一般的な連続体の運動方程式の組み立て方を

示す．

まずつぎの指標を定義する．

N_E： 連続体に含まれる要素の数

N, M： 総和規約に従い，その範囲は要素の節点数

k, l, j, r： 総和規約に従い，その範囲は節点の自由度

K, S： 総和規約に従い，その範囲は連続体に含まれる節点数

そして要素に対する量には小文字を，連続体に対する量には大文字を用いて区別する．

要素の節点Nにおけるベクトルの成分$\overset{(e)}{\upsilon}{}^k_N$はつぎの変換によって連続体の節点$S$におけるベクトルの成分$V^k_S$へ移される．

$$V^k_S = \overset{(e)}{D}{}^N_S \overset{(e)}{\upsilon}{}^k_N \qquad (2-42)$$

あるいはその逆変換は

$$\overset{(e)}{\upsilon}{}^l_M = \overset{(e)}{d}{}^{\boldsymbol{K}}_M V^l_{\boldsymbol{K}} \qquad (e) = 1,\ 2,\ \cdots,\ N_E \qquad (2-43)$$

ここで要素から連続体あるいは逆に連続体から要素への変換をを$\overset{(e)}{D}{}^N_S$および$\overset{(e)}{d}{}^K_M$で表わしている．また$\overset{(e)}{D}{}^N_S$, $\overset{(e)}{d}{}^K_M$にはつぎの性質がある．

$$\overset{(e)}{D}{}^N_S = \delta^N_S \qquad \overset{(e)}{d}{}^K_M = \delta^K_M \qquad (2-44)$$

および

$$\overset{(e)}{D}{}^N_S \overset{(e)}{d}{}^K_{\boldsymbol{N}} = \delta^K_S \qquad (2-45)$$

前節までに導出した要素の運動方程式を，改めてつぎのように書く．

$$\overset{(e)}{\kappa}{}^{jM}_{rN} \overset{(e)}{\varDelta u}{}^r_M = \overset{(e)}{\varDelta p}{}^j_N \qquad (2-46)$$

上式で示される各要素ごとに異なった座標系で記述された運動方程式を，連続体の共通座標系へ変換を行なって最終的に連続体の運動方程式を組み立てることを考える．この共通座標系としてここでは，変形していない状態における物体座標系を選ぶことにする．式（２－３１）を考慮して式（２－４６）を共通座標系へ変換すると

$$ {}^{(e)}\hat{\kappa}^{kM}_{lN}\, {}^{(e)}\Delta\hat{u}^{l}_{M} = {}^{(e)}\Delta p^{k}_{N} \qquad (2-47) $$

ここで

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(e)}\Delta u^{r}_{M} &= {}^{(e)}\bar{\Omega}^{r}_{l}\, {}^{(e)}\Delta\hat{u}^{l}_{M} \\ {}^{(e)}\Delta\hat{p}^{k}_{N} &= {}^{(e)}\bar{H}^{k}_{j}\, {}^{(e)}\Delta\bar{p}^{j}_{N} \\ {}^{(e)}\hat{\kappa}^{kM}_{lN} &= {}^{(e)}\bar{H}^{k}_{j}\, {}^{(e)}\bar{\kappa}^{jM}_{rN}\, {}^{(e)}\bar{\Omega}^{r}_{l} \end{aligned}\right\} \qquad (2-48) $$

つぎにJ．T．Oden[65]が行なったと同様の手法で要素の運動方程式を再構成して連続体の運動方程式を組立てる．ここで連続体の任意の節点Kにおける変位増分，速度および節点力増分の基準座標の基本ベクトル方向の成分をそれぞれΔU^{k}_{K}，$\dot{U}_{kK}$，ΔP^{k}_{K}で表示すると，節点において節点力増分ΔP^{k}_{K}のなす仕事率Ωは次式で表わせる．

$$ \Omega = \Delta P^{k}_{K}\, \dot{U}_{kK} \qquad (2-49) $$

これはまた各要素の節点力増分${}^{(e)}\Delta\hat{p}^{k}_{N}$がなす仕事率の総和に等しい．すなわち次式で表わされるエネルギつりあい式を得る．

$$ \sum_{(e)=1}^{N_E} {}^{(e)}\Delta\hat{p}^{k}_{N}\, {}^{(e)}\dot{\hat{u}}_{kN} = \sum_{(e)=1}^{N_E} {}^{(e)}\Delta\hat{p}^{k}_{N}\, {}^{(e)}d^{K}_{N}\, \dot{U}_{kK} $$

$$ = \Delta P^{k}_{K}\, \dot{U}_{kK} \qquad (2-50) $$

上式で示されるつりあい式がつねに満足されるためにはつぎの関係式が成立しなければならない．

$$K^{k\,S}_{l\,K}\,\Delta U^{l}_{S} = \Delta P^{k}_{K} \qquad (2-51)$$

ここで

$$K^{k\,S}_{l\,K} = \sum_{(e)=1}^{N_E} \overset{(e)}{\hat{\kappa}}{}^{kM}_{lN}\,\overset{(e)}{d}{}^{S}_{M}\,\overset{(e)}{d}{}^{K}_{N}$$

$$\Delta P^{k}_{K} = \sum_{(e)=1}^{N_E} \overset{(e)}{D}{}^{N}_{K}\,\Delta \overset{(e)}{\hat{p}}{}^{k}_{N}$$

式（2－51）は連続体の運動方程式である．

2．7 境界条件について

境界条件は一般に力学的境界条件，幾何学的境界条件，混合境界条件の3種類に分類される．この節では上述のような3種類の境界条件に対する有限要素法について述べる．

2．7．1 力学的境界条件

図2－3に示すように物体の表面上の物体点Pに作用する表面力ベクトルを$\mathcal{S}$，増分変形後同じ物体点$\bar{P}$に作用する表面力ベクトルを$\bar{\mathcal{S}}$とする．物体表面に作用する応力成分をt^{ij}，$\bar{t}^{ij}$とすると，表面力ベクトルはつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{S} &= n_i\, t^{ij}\, G_j \\ \bar{\mathcal{S}} &= \bar{n}_i\, \bar{t}^{ij}\, \bar{G}_j = (n_i + \Delta n_i)\,(t^{ij} + \Delta t^{ij})(G_j + \Delta G_j) \end{aligned}\right\}(2-52) \quad ※$$

※ 式（1－41）の t^{ij}とは別なものである．

増分変位Δuが生じる間に変化する表面力を，式（１－６），（１−29），（２－５２）を用いて増分変形前後の微小面積dAについて表わすと

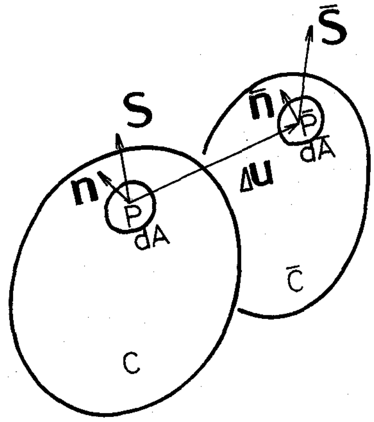


図２－３　力学的境界条件

$$\bar{S}\,d\bar{A} - S\,dA = n_i\{\Delta t^{ij} + t^{ij}\Delta u^m\|_m + t^{im}\Delta u^j\|_m\}G_j\,dA \quad (2-53)$$

ここで

$$T^j = n_i t^{ij} \quad , \quad \Delta T^j = n_i \Delta t^{ij}$$

とおくと式（２－５３）はつぎのようになる．

$$\bar{S}\,d\bar{A} - S\,dA = (\Delta T^j + T^j\Delta u^m\|_m + T^m\Delta u^j\|_m)G_j\,dA \quad (2-54)$$

つぎに上述と同じ物体表面に圧力が作用する場合を考える．圧力は常に変形状態の物体の表面に垂直に作用する．したがって表面力ベクトルはその状態における単位法線ベクトルのスカラー倍になる．増分変形前後の圧力の大きさを，p，$\bar{p}$で表わすと，表面力ベクトルは

$$S = p\,n_i G^{ij} G_j$$

$$\bar{S} = \bar{p}\,\bar{n}_i \bar{G}^{ij}\bar{G}_j \quad (2-55)$$

$$= (p+\Delta p)(n_i+\Delta n_i)(G^{ij}+\Delta G^{ij})(G_j+\Delta G_j)$$

式（１－６），（１－８），（１－２９）および上式から，増分変位Δuが生

じる間の圧力変化によって表面積dAあたりの表面力変化はつぎのようになる．

$$\bar{S}\, d\bar{A} - S\, dA = n_i \{ \Delta p G^{im} + p \Delta u^k \|_k G^{im} - p G^{km} G^{in} G_{nr} \Delta u^r \|_k \}$$
$$\times\, \mathcal{G}_m dA \qquad (2-56)$$

ここで

$$P^m = n_i G^{im} p, \quad \Delta P^m = n_i G^{im} \Delta p$$

とおくと，式（２－５６）はつぎのようになる．

$$\bar{S} d\bar{A} - S dA = (\Delta P^m + P^m \Delta u^k \|_k - P^m G^{km} G_{nr} \Delta u^r \|_k) \mathcal{G}_m dA$$
$$(2-57)$$

以上のように表面で分布している外力の増分的変化をさきに有限要素法の定式化で行なったと同様の手法によって等価な節点力に置きかえる．すなわち式（２－５４）については

$$\left.\begin{aligned} \Delta \bar{P}^j_N &= \Delta T^j_N + \underset{(S)}{R}{}^{jM}_{rN} \Delta u^r_M \\ \Delta T^j_N &= \int_A \Delta T^j \psi_N dA \\ \underset{(S)}{R}{}^{jM}_{rN} &= \int_A (T^j{}_M \Phi^m_{rm} + T^m{}_M \Phi^j_{rm}) \psi_N dA \end{aligned}\right\} (2-58)$$

式（２－５７）については

$$\left.\begin{aligned} \Delta \bar{P}^j_N &= \Delta P^j_N + \underset{(p)}{R}{}^{jM}_{rN} \Delta u^r_M \\ \Delta P^j_N &= \int_A \Delta P^j \psi_N dA \\ \underset{(p)}{R}{}^{jM}_{rN} &= \int_A (P^j{}_M \Phi^m_{rm} - P^n G_{mm} G^{kj}{}_M \Phi^m_{rk}) \psi_N dA \end{aligned}\right\} (2-59)$$

となる．

2．7．2 幾何学的境界条件

境界上で変位成分が既知である場合の取り扱いは，運動方程式中の未知変位を既知変位でおきかえる形で処理ができ．力学的境界条件に比べて簡単である．ただし数値計算上の処理に多少の工夫が必要である．一般的な方法は，式（2－51）で表わされている連続体の運動方程式を既知変位を含む部分と未知変位を含む部分に分割して解く方法である．この方法では，運動方程式の順序を変えることになり，通常の有限要素法において重要視されるマトリックス K_{dS}^{kK} のバンド幅が大きくなるか，あるいはバンドマトリックスとしての取り扱いができなくなる．

これに対してO．C．Zinkiewiczら[5]の方法は，既知変位に対応するマトリックスK_{lS}^{kK}の対角要素に大きな数を乗じ，また同時に対応する外力の項を新しく形成した対角要素と既知変位の積で置き置える方法で，もとのマトリックスK_{lS}^{kK}のバンド幅は変化しない．このようにこの手法は，連立方程式解法としてきわめて効果的な方法である．

2．7．3 混合境界条件（剛体からなる境界曲面によって物体の運動が拘束される場合）

塑性加工における軸対称押出し，引き抜き，平面ひずみ条件下における圧延，帯板の鍛造および2次元切削などにおいては 加工材あるいは被削材の運動が，ダイス，ロールあるいはバイトなどによって拘束される．この場合のタイス，ロールあるいはバイト表面上における境界条件を考える．このような境界条件の3次元の場合の一般的な取り扱いは困難であるので，実際によく使われている2次元および軸対称変形の場合を取り扱う．

空間に固定された曲面は，固定座標系による表示方法が他の方法に比べて便

利である．

図２－４に示すような空間曲面を，x^i座標系を用いて表示する．一般になめらかな曲面は次式で表わすことができる．(66)

$$H(x^i)=0 \qquad (2\text{-}60)$$

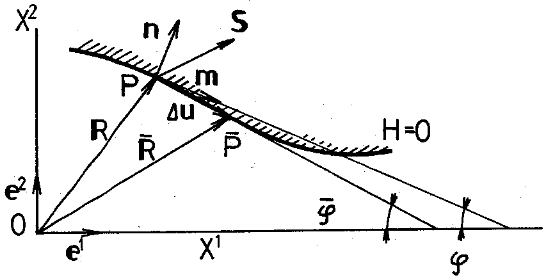


図２－４　剛体からなる境界曲面によって物体の運動が拘束される場合の境界条件

物体の運動を拘束している曲面と物体との間にすき間ができないものと仮定すると，図に示すよう任意の時刻において曲面上にあった点Pが．増分変形によってΔuだけ変位をして移った点，$\bar{P}$もまた曲面H上になくてはならない．したがってΔuは面Hに拘束されることになる．この条件は，増分変位Δuを

$$\left.\begin{aligned}\Delta u&=\Delta u_i G^i=\Delta u^i G_i\\&=\Delta U_i e^i=\Delta U^i e_i\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}61)$$

で表わすと，

$$H(x^i)=H(x^i+\Delta U^i) \qquad (2\text{-}62)$$

変位増分ΔU^iが微小量の場合，上式をTaylor展開して第１次の微小項までとると

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}\Delta U^i=0 \qquad (2\text{-}63)$$

あるいは式(２－３１)，(２－６１)から上式は

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} \quad \bar{\textcircled{H}}{}^{i}_{m}\, \Delta u^{m} = 0 \qquad (2-64)$$

式(2－63)あるいは(2－64)は一つの未知変位成分を含む一つの条件式である．残りの条件式は外力の項で表わされる．通常ここで扱うような問題では直接，外力を与えることはできない．この場合アモントンの摩擦の法則を適用すると，面に垂直方向および接線方向の外力の成分が一定値になる．しかし摩擦係数は一般に一定値でなく(67)，圧力，速度，表面のあらさ，潤滑剤などによって影響を受けて変化することが知られている．そうであるからこれらの変化はなめらかである場合に対して，微小増分変形の間摩擦係数は一定であると仮定する．

ここで図2－4に示すように曲面の接線が加工材またわ被削材の運動方向と平行なx^1軸となす角を$\phi\ (x^i)$で表わし，その点における法線および接線方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$で表わすものとする．

$$\boldsymbol{n} = n_i\, e_i \quad , \qquad \boldsymbol{m} = m_i\, e_i \qquad (2-65)$$

図の幾何学的関係から

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 = \sin\phi & n_2 = \cos\phi \\ m_1 = \cos\phi & m_2 = -\sin\phi \end{array}\right\} \qquad (2-66)$$

点Pに作用する外力を$\mathcal{S}$で表わし，x^i座標成分に分解すると

$$\mathcal{S} = S_i\, e_i \qquad (2-67)$$

面に垂直方向の力と接線方向の力の大きさの比をfで表わすと

$$f = S_k n_k / (S_l m_l) \qquad (2-68)$$

あるいは

$$S_1 \sin\phi + S_2 \cos\phi = f\,[\,S_1 \cos\phi - S_2 \sin\phi\,] \qquad (2-69)$$

式(2－66)，(2－69)から，増分変形に対してfは変化しないものと

しているから,

$$\Delta S_1(\sin\phi - f\cos\phi) + \Delta S_2(\cos\phi + f\sin\phi)$$
$$+\{S_1(\cos\phi + f\sin\phi) + S_2(f\cos\phi - \sin\phi)\}\Delta\phi = 0 \qquad (2-70)$$

ここで

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Delta U^i \qquad (2-71)$$

を考慮すると,式(2-70)は

$$\Delta S_1(\sin\phi - f\cos\phi) + \Delta S_2(\cos\phi + f\sin\phi)$$
$$+\{S_1(\cos\phi + f\sin\phi) + S_2(f\cos\phi - \sin\phi)\}$$
$$\times\{\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\Delta U^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\Delta U^2\} = 0 \qquad (2-72)$$

また式(2-63)を関数ϕを用いて表わすと

$$\Delta U^2 = -\Delta U^1 \tan\phi \qquad (2-73)$$

式(2-72),(2-73)中の外力増分,変位増分を要素の節点における値と考えて,これらを連続体の増分形の運動方程式に代入することによって未知変位および未知外力を求めることができる.なおここでは,一定方向にすべりが生じる場合に対する取り扱い方であってfが一定としたが,そうでない場合は複雑であり,そういう問題に対する取り扱いはまだ解決していない.

2.8 結　言

本章では.大ひずみ大変形の弾塑性問題を厳密に扱うために第1章において求めた,増分変形をしようとしている時刻tにおける埋込み座標系を基準にしたエネルギつりあい式を基礎として,熱の影響を考慮しない場合の有限要素の一般的な増分形の運動方程式を導いた.そして埋込み座標系における応力増分とひずみ増分の間に線形関係がある場合に対して具体的な要素の運動方程式の

係数マトリックスを示した．その結果導出された要素の運動方程式の係数マトリックスは，質量，剛性，第1，第2初期応力，荷重修正，物体力修正の6個のマトリックスから構成されている．この中で質量および剛性マトリックスのみが無限小ひずみの有限要素法で用いられているものに対応し，第1初期応力および荷重修正マトリックスは他の厳密な有限要素法においてすでに指摘されているものに対応するが，第2初期応力および物体力修正マトリックスが必要なこと，時刻 t における埋込み座標系を基準とした有限要素法の定式化においては初期変位があるために生じてくる修正マトリックスは現われず運動方程式が簡単になることを本章においてはじめて指摘した．そしてこのようにして求めた一般的な3次元有限要素法から軸対称および平面問題の有限要素法を誘導した．

つぎに一般的な要素の運動方程式を単体要素を用いて簡単化を行なって具体的な計算のためのアルゴリズムを示した．これによると微小変形の場合とほとんど同程度の容易さで厳密に変形を考慮した有限要素法の計算ができる．この要素については，微小変形の場合と同様大きく変形した後も計量が一様であって，ひずみの適合条件が保証されているのでその結果解の収束性が保証されることがわかった．またこのようにして導出した要素の運動方程式と比較するために，基準状態を初期の埋込み座標系にもってきた場合の要素の運動方程式を求めた．その結果前者に比べて初期変位があるために運動方程式の形が複雑になることがわかった．

他方これまでに要素個々について独立に求めた運動方程式から連続体の運動方程式を成分表示の形で組み立てる方法として，節点で変位を共通な基本ベクトル方向に分解して重ね合わせる方法を提案した．

おわりに実際の問題を解析する場合に問題となる境界条件の取り扱い方につ

いて．大変形を考慮した立場から．力学的，幾何学的および混合境界条件の各場合について．これらの境界条件を境界上の節点における条件式として有限要素表示した．

本章において定式化した増分形の有限要素法は，運動学的には厳密なものであり，増分形の構成方程式が与えられると，その材料の複雑な非線形挙動の解析を可能にするものである．

第 3 章　弾・塑性体の埋込み座標系を基準とした増分形の構成方程式

3.1　緒　　　言

材料固有の性質を表わす構成方程式を求めるときの諸前提および方法については，連続体力学関係の教科書(57),(68)に詳しく記されており，それに従って大ひずみ大変形を考慮した構成方程式も数多く提案されている．しかしながら，ごく一部の特別なものを除いて，大部分は実験的検討がなされておらず具体的な形が示されていないので実際の問題を解析することを目的とした有限要素法に直接用いることはできない．

いっぽう，従来から弾・塑性解析に用いられている構成方程式は　その導出過程において応力．ひずみの定義およびそれらの増分量が客観性を有すべきことなどについては明確ではなかった．

このように，第2章において行なった運動に対する厳密な取り扱いと同程度な近似で，しかも実際の計算に直接用いることができる構成方程式は，今のところ見あたらない．

本章においては，上述の応力，ひずみの定義およびその増分量が有すべき性質を考慮に入れた上で，従来から提案されている構成方程式を修正．一般化しそれを増分形の有限要素法に直接適用できるような形で表示する．

3.2節では，等方均質の弾性体のうち亜弾性体と超弾性体の埋込み座標系における応力増分とひずみ増分の関係を求める．

3.3節では，弾塑性体に対して，弾性ひずみが十分小さく大ひずみ域においても弾性ひずみと塑性ひずみの連成効果は現われず，全ひずみ増分は，弾性および塑性ひずみ増分の和であるという仮定のもとに，弾性ひずみ増分に対して

はHookeの法則を，塑性ひずみ増分に対しては塑性ポテンシャルと流れ法則を適用して埋込み座標系における増分形の応力−ひずみ関係式を導出する．

3.2　弾性体の増分形の構成方程式

本節では，均質等方性の弾性体について埋込み座標系の応力増分とひずみ増分との間の関係式を求める．

与えられた応力状態において応力速度の成分が変形速度の成分の同次線形関数

$$ {}_J\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = C^{ijk\ell} V_{k\ell} \qquad (3-1) $$

である場合，その物体は亜弾性体と呼ばれる．(69)

なお，上式において ${}_J\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}$ および $V_{k\ell}$ はそれぞれ固定直交デカルト座標系に対するJaumannの応力変化率および変形速度テンソルを示す．また $C_{ijk\ell}$ は，一般に応力の関数として表わされる．ここでは，式(3−1)を埋込み座標系 θ^i へ変換をして埋込み座標系のJaumannの応力増分 $\Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ とひずみ増分 $\Delta\gamma_{k\ell}$ の間の線形関係として表わす．

まず，式(3−1)の両辺に微小時間間隔 δt を乗じて速度を増分量に置きかえる．つぎに式(1−20)，(1−22)を考慮して，これらの増分量を埋込み座標系へ変換すると，式(3−1)はつぎのようになる．

$$ \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{mn} = B^{mnrs}\,\Delta\gamma_{rs} \qquad (3-2) $$

ここで

$$ \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{mn} = {}_J\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}\,\delta t\,\frac{\partial\theta^m}{\partial x^i}\,\frac{\partial\theta^n}{\partial x^j} $$

$$ \Delta\gamma_{rs} = V_{k\ell}\,\delta t\,\frac{\partial x^k}{\partial\theta^r}\,\frac{\partial x^\ell}{\partial\theta^s} $$

$$ B^{mnrs} = C_{ijk\ell}\,\frac{\partial\theta^m}{\partial x^i}\,\frac{\partial\theta^n}{\partial x^j}\,\frac{\partial\theta^r}{\partial x^k}\,\frac{\partial\theta^s}{\partial x^\ell} $$

$C_{ijk\ell}$ が応力の１次線形結合によって表わされる場合[69] について，B^{mmrs} の具体的な形を求めるとつぎのようになる．

$$B^{mmrs} = \lambda G^{mn} G^{rs} + \mu (G^{mr} G^{ns} + G^{ms} G^{nr})$$

$$+ \nu \tau^{mn} G^{rs} + \lambda' \tau^{\ell}_{\cdot\ell} G^{mn} G^{rs}$$

$$+ \mu' \tau^{\ell}_{\cdot\ell} (G^{mr} G^{ns} + G^{ms} G^{nr}) + \lambda'' G^{mn} G^{rs}$$

$$+ \nu' (G^{mr} \tau^{ns} + G^{ms} \tau^{nr} + G^{nr} \tau^{ms} + G^{ns} \tau^{mr}) \qquad (3-3)$$

ここで λ，μ，ν，λ'，μ'，λ''，ν' は材料定数を示し，λ，μ 以外の定数を零とすると，

$$B^{mnrs} = \lambda G^{mn} G^{rs} + \mu (G^{mr} G^{ns} + G^{ms} G^{nr}) \qquad (3-4)$$

この場合，λ，μ をラメの定数（$\lambda = {}^{2\nu\mu}/(1-2\nu)$，$\nu$：ポアソン比）とすると式（３－２）は埋込み座標系の場合の増分形の Hooke の法則を表わす．

構成方程式が（３－１）で示される亜弾性体に対して，内部エネルギ（ひずみエネルギ）が変形前の状態から現段階までに生じた Green のひずみ γ_{ij} の解析関数として表わされる材料を超弾性体と呼ぶ．均質等方超弾性体においては．ひずみエネルギ W はひずみの不変量 I_1，I_2，I_3，の関数として表わされる．この場合構成方程式は次式となる．[70]

$$\tau^{ij} = \sqrt{\frac{g}{G}} \; \frac{\partial W(I_1, I_2, I_3)}{\partial \gamma_{ij}} \qquad (3-5)$$

ここで，超弾性体の非線形挙動を増分形の有限要素法によって解析するために必要な，式（３－５）の増分形を求める．式（３－５）の増分をとるとつぎのようになる．

$$\Delta \tau^{ij} = B^{ijk\ell} \Delta \gamma_{k\ell} \qquad (3-6)$$

ここで

$$B^{ijk\ell} = \sqrt{\frac{g}{G}} \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{k\ell}} - \tau^{ij} G^{k\ell}$$

式(3－6)においてひずみエネルギ関数Wの具体的な形が与えられるとその材料の$B^{ijk\ell}$が求まる．

このように，弾性体について，増分形の応力－ひずみ関係(3－3)，(3－4)，(3－6)が求まると，その材料の非線形挙動を，第2章で定式化した増分形の有限要素法によって解析を行なうことができる．

3.3 弾塑性体の構成方程式

弾塑性体の構成方程式の理論は，大きくわけて応力増分がひずみ増分の関数であらわされるとする考え方と，応力がひずみの関数であるとする考え方の2種類がある．前者はいわゆるひずみ増分理論であって，現在の弾塑性論および解析はほとんどこの増分理論によっている．これは，弾塑性境界があらかじめ既知でないことに対する困難さを避ける上で有効である．いっぽう後者は，いわゆる全ひずみ理論であって，弾塑性体は本来ひずみ履歴を受ける材料であるから特別な場合[71]を除くと一般的に厳密な定式化を行なうことはきわめて困難となる．このような弾塑性体の構成方程式に関する文献の解説およびリストは，進藤，[72]，[73]瀬口と北川[30]の解説および展望記事に記されている．

ところで大ひずみ大変形を考慮した弾塑性体の構成方程式に対する研究は多く行なわれるようになり，A. E. GreenとP. M. Naghdi[49]，[74]L. I.

Sedov[75], A. C. Pipkin と R. S. Rivlin[76] らの研究は代表的なものであるが，それらはいずれも弾塑性体の構成方程式として可能な形を示したものであって，これを実際に工学上遭遇する問題の解析と結びつけるまえに，あらかじめなされなければならない実験的な検証およびそれによる構成方程式の具体化はほとんど行なわれていない．

そこで本節では，塑性ポテンシャルと流れ法則から導かれる弾塑性材の構成方程式を大ひずみ大変形問題に対して適用できるように修正し一般化する．なお弾性ひずみが十分小さいと仮定するが，これは高速変形する場合などを除いて一般的に十分成立する．そうすると E. H. Lee および D. T. Liu[77],[78] が弾性ひずみが大きい場合に対して示した弾性ひずみと塑性ひずみの連成効果については無視できる．

3.3.1 任意の塑性ポテンシャルから導かれる構成方程式

一般に大ひずみ大変形を考える場合，応力およびひずみの定義を明確にする必要がある．本節においても前章までと同様，埋込み座標系の応力 τ^{ij} とひずみ γ_{ij} を用いる．これらの増分量 $\varDelta\tau^{ij}$, $\varDelta\gamma_{ij}$ は，式（1－22），（1－34）から明らかなように，客観性を有した量であるが，つぎに述べる二つの理由によって，弾塑性材の構成方程式においては埋込み座標系における Jaumann の応力増分 $\varDelta\overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ を導入し，これをひずみ増分 $\varDelta\gamma_{ij}$ と関連させることにする．

第1に，3．3.3.3 で示すように単軸の相当応力－対数ひずみ曲線の多軸の構成方程式への一般化が，$\varDelta\overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ と $\varDelta\gamma_{ij}$ を関連させることにより容易になる．

第2に Jaumann の応力増分が零のとき式（1－39）から明らかなように，

応力の不変量は停留するという性質を有しており，等方弾塑性材のように,応力の不変量によって構成方程式を表現する場合には応力増分 $\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ を用いることが推奨されている．[79]
一般に応力増分として $\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ を用いた場合，降伏条件の記述も簡単になる．

ところで，式（１－３６）から明らかなようにＪaumann の応力増分 $\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ はＯldroydの応力増分 $\Delta \tau^{ij}$ と次式で関係付けられる．

$$\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij} = \Delta \tau^{ij} + F^{ijk\ell} \Delta \gamma_{k\ell} \qquad (３－７)$$

ここで

$$F^{ijk\ell} = \frac{1}{2} \left(G^{j\ell} \tau^{ki} + G^{kj} \tau^{\ell i} + G^{ik} \tau^{j\ell} + G^{i\ell} \tau^{jk} \right)$$

ここでは増分理論にもとずく弾塑性材の構成方程式を，応力増分 $\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ とひずみ増分 $\Delta \gamma_{k\ell}$ との間の線形関係

$$\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij} = D^{ijk\ell} \Delta \gamma_{k\ell} \qquad (３－８)$$

の形で表現して，$D^{ijk\ell}$ の具体的な形を求めることにする．$D^{ijk\ell}$ が求まると，式（３－７）から式（２－１４）の $E^{ijk\ell}$ はつぎのようになる．

$$E^{ijk\ell} = D^{ijk\ell} - F^{ijk\ell} \qquad (３－９)$$

さて，弾性ひずみ $\gamma_{ij}{}^{(e)}$ と塑性ひずみ $\gamma_{ij}{}^{(p)}$ の間に連成はないと仮定すると，全ひずみ増分 $\Delta \gamma_{ij}$ は

$$\Delta \gamma_{ij} = \Delta \gamma_{ij}{}^{(e)} + \Delta \gamma_{ij}{}^{(p)} \qquad (３－１０)$$

で表わされる．ここで $\Delta \gamma_{ij}{}^{(e)}$ および $\Delta \gamma_{ij}{}^{(p)}$ はそれぞれ弾性および塑性ひずみ増分である．弾性ひずみ増分および応力増分は．一般に

$$\left.\begin{aligned}\Delta\gamma_{ij}{}^{(e)} &= A_{ijk\ell}\Delta\mathring{\tau}^{k\ell}\\ \Delta\mathring{\tau}^{ij} &= B^{ijk\ell}\ \Delta\gamma_{k\ell}\end{aligned}\right\}\qquad(3-11)$$

とおくことができる．等方体の場合Hookeの法則が成立するものと仮定すると，$B^{ijk\ell}$ および $A_{ijk\ell}$ は，式（３－４）およびその逆関係から次のようになる．

$$B^{ijk\ell} = \mu\left\{G^{ik}G^{j\ell}+G^{i\ell}G^{jk}+\frac{2\nu}{1-2\nu}G^{ij}G^{k\ell}\right\}$$

$$A_{ijk\ell}=\frac{1}{2\mu}\left\{(G_{ik}G_{j\ell}+G_{i\ell}G_{jk})/2-\frac{\nu}{1+\nu}G_{ij}G_{k\ell}\right\}\qquad(3-12)$$

いっぽう塑性ひずみ増分は流れ法則[47]によって次式で与えられる．

$$\Delta\gamma_{ij}{}^{(p)} = T_{ij}\ \Delta\lambda\ ,\ T_{ij} = \partial f/\partial\tau^{ij}\qquad(3-13)$$

ここで f は塑性ポテンシャルであり，各瞬間において塑性仕事 $W^{(p)}$ のみによって定まる[48]と考えて

$$f(\tau^{ij},\ \gamma_{ij}{}^{(p)}) = F(W^{(p)})\qquad(3-14)$$

とおく．このとき式（３－１３）中のスカラー定数 $\Delta\lambda$ はつぎのようになる．

$$\Delta\lambda = (T_{mn}\Delta\mathring{\tau}^{mn}+R^{mn}\ \Delta\gamma_{mn}{}^{(p)})/(F'\ \tau'^{ij}\ T_{ij})\qquad(3-15)$$

ここで

$$\begin{aligned}R^{mn} &= \partial f/\partial\gamma_{mn}{}^{(p)},\quad F' = dF/dW^{(p)}\\ dW^{(p)} &= \tau^{ij}d\gamma_{ij}{}^{(p)},\quad \tau'^{ij} = \tau^{ij}-\frac{1}{3}G^{ij}G_{rs}\tau^{rs}\end{aligned}\qquad(3-16)$$

式（３－１０）（３－１１）（３－１５）から $\Delta\lambda$ をつぎのように書き改めることができる．

$$\Delta\lambda = T_{ij}B^{ijk\ell}\Delta\gamma_{k\ell}/\{F'\ \tau'^{mn}+B^{mnrs}T_{rs}-R^{mn}\}T_{mn}\qquad(3-17)$$

式（３－１７），（３－１１），（３－１３），（３－１０）から$D^{ijk\ell}$は次のようになる．

$$D^{ijk\ell}=B^{ijk\ell}-T_{vw}T_{pq}B^{vwij}B^{pqk\ell}/\{F'\tau'^{mn}+B^{mnrs}T_{rs}-R^{mn}\}/T_{mn} \qquad (3-18)$$

3.3.2　吉村，Edelman－Druckerの塑性ポテンシャルおよび移動硬化モデルから導かれる構成方程式

式（３－１８）は任意の塑性ポテンシャルfに対して成立するものである．まず吉村の塑性ポテンシャル(48)について考えると

$$\left.\begin{aligned}
f&=\frac{1}{2}C_{ijk\ell}\tau'^{k\ell}\tau'^{ij}-B\gamma_{ij}^{(p)}\tau'^{ij}\\
C_{ijk\ell}&=g_{ijk\ell}+AL_{ijk\ell}+A^2M_{ijk\ell}\\
g_{ijk\ell}&=\frac{1}{2}(G_{ik}G_{j\ell}+G_{i\ell}G_{jk})\\
L_{ijk\ell}&=\frac{1}{2}(G_{ik}\gamma_{j\ell}^{(p)}+G_{j\ell}\gamma_{ik}^{(p)}+G_{i\ell}\gamma_{jk}^{(p)}+G_{jk}\gamma_{i\ell}^{(p)})\\
M_{ijk\ell}&=\frac{1}{2}(\gamma_{ik}^{(p)}\gamma_{j\ell}^{(p)}+\gamma_{i\ell}^{(p)}\gamma_{jk}^{(p)})
\end{aligned}\right\} \qquad (3-19)$$

なおAは異方性パラメーターで塑性仕事$W^{(p)}$のスカラー関数で変形経路によって異なった値を取る．BはBauschinger効果を表わすパラメーターである．式（３－１９）を用いると$D^{ijk\ell}$中のT_{ij}，R^{ij}はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}
T_{ij}&=\{C_{ijk\ell}-\frac{1}{3}C_{mnk\ell}G_{ij}G^{mn}\}\tau'^{k\ell}-B\gamma_{ij}^{(p)}\\
R^{ij}&=AG_{mk}\tau'^{mi}\tau'^{kj}+A^2\gamma_{mk}^{(p)}\tau'^{im}\tau'^{jk}-B\tau'^{ij}
\end{aligned}\right\} \qquad (3-20)$$

つぎにEdelman－Druckerの塑性ポテンシャル(80)について考える．これ

は次式で表わされる．

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\hat{C}_{ijk\ell}(\tau'^{ij} - mg^{ijpq}\gamma^{(p)}_{pq})(\tau'^{k\ell} - mg^{k\ell rs}\gamma^{(p)}_{rs}) \\ g^{ijk\ell} &= \frac{1}{2}(G^{ik}G^{j\ell} + {}^{i\ell}G^{jk}) \end{aligned}\right\} \quad (3-21)※$$

ここでmはBauschinger効果を表わすパラメータである．この場合T_{ij}，R^{ij}はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} T_{ij} &= \hat{C}_{ijk\ell}(\tau'^{k\ell} - mg^{k\ell rs}\gamma^{(p)}_{rs}) \\ &\quad - \frac{1}{3}G^{pq}G_{ij}\hat{C}_{pqk\ell}(\tau'^{k\ell} - mg^{k\ell rs}\gamma^{(p)}_{rs}) \\ R^{ij} &= \partial f / \partial \gamma_{ij}^{(p)} \end{aligned}\right\} \quad (3-22)$$

W. Pragerが提案して(81) H. Zieglerが(82)修正一般化した移動硬化（Kinematic Hardening）のモデルを用いた場合の構成方程式を導出する．※※直交デカルト座標系を基準とする塑性ポテンシャル(83)を埋込み座標系に書き改めると次式となる．

$$f = \frac{1}{2}(\tau'^{ij} - \alpha'^{ij})(\tau'_{ij} - \alpha'_{ij}) = \frac{1}{3}\sigma_0^{2} \quad (3-23)$$

ここで，$\alpha'^{ij} = \alpha^{ij} - \frac{1}{3}G^{ij}G_{rs}\alpha^{rs}$

α^{ij} は，原点を中心にした初期降伏曲面が後続の塑性変形によって移動した場合の中心の移動量を表わし，σ_0 は初期降伏応力である．このとき降伏曲面の移動量は

$$\Delta\alpha^{ij} = \Delta\mu(\tau^{ij} - \alpha^{ij}) \quad (3-25)$$

で表わされる．$\Delta\mu$は$\Delta f = 0$という条件から求まるスカラー量で次式で与えら

※ 式（3－21）は原論文の式を埋込み座標系に変換したものである．

※※ Bauschinger 効果を考慮する弾塑性体のモデルとしては簡単であるので，この移動硬化モデルは実際の実用的な計算によく使われている．(87)

れる．

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\mu = V_{ij}\Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{ij} \;\Big/\; (\tau^{mn}-\alpha^{mn})V_{mn} \\ V_{ij} = \tau'_{ij} - \alpha_{ij} \end{array}\right\} \qquad (3-26)$$

移動硬化の場合も流れ法則は式（３－１３）で表わされるが，スカラー定数 $\Delta\lambda$ は式（３－１５）とは別の形となる．直交デカルト座標系の場合(83)の $\Delta\lambda$ は埋込み座標系で表わすと，

$$\Delta\lambda = \frac{1}{c}\,\frac{V_{ij}\;\Delta\overset{c}{\tau}{}^{ij}}{V^{rs}\;V_{rs}} \qquad (3-27)$$

ここで c は硬化を表わすパラメータで，単軸引張りのとき，式（３－４９）で与えられる F' に等しくなる．(84)この場合 $D^{ijk\ell}$ はつぎのようになる．

$$D^{ijk\ell} = B^{ijk\ell} - \frac{V_{vw}V_{pq}B^{ijvw}B^{pqk\ell}}{cV^{rs}V_{rs} + B^{mnrs}V_{mn}V_{rs}} \qquad (3-28)$$

3.3.3.　Misesの塑性ポテンシャルから導かれる構成方程式

3.3.3.1　３次元問題の場合

Misesの塑性ポテンシャルは，式（３－１９）の特別な場合として導かれ，次式で表わされる．

$$f = \frac{1}{2}\tau'^{ij}\tau'_{ij} \qquad = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 \qquad (3-29)$$

この場合比例定数 $\Delta\lambda$（３－１７）は簡単化されて次式となる．

$$\Delta\dot{\lambda}=\tau'^{ij}\Delta\gamma_{ij}\Big/\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2(F'/_{2\mu}+1) \qquad (3-30)$$

したがって$D^{ijk\ell}$はつぎのようになる．

$$D^{ijk\ell}=B^{ijk\ell}-\frac{2\mu\tau'^{ij}\tau'^{k\ell}}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2(F'/2\mu+1)} \qquad (3-31)$$

式（３－３１）は直交デカルト座標系において微小変形の仮定のもとにR.Hill[85]がPrandtl−Reussの式を逆変換して求めたものに対応している．※

3.3.3.2　平面問題の場合

ここでは，平面問題を解析する場合に都合がよいようにマトリックス形の応力−ひずみ関係を求める．平面問題では，埋込み座標系 θ^i の θ^3 方向は θ^1 ～ θ^2 面に常に垂直である．したがって

$$G_{13}=G^{13}=G_{23}=G^{23}=0 \qquad (3-32)$$

平面応力の場合は式（３－３２）の他に次式が成立する．

$$\Delta\gamma_{13}=\Delta\gamma_{23}=\Delta\tau^{13}=\Delta\tau^{23}=\Delta\tau^{33}=0 \qquad (3-33)$$

この場合の応力−ひずみ関係式は式（３－３３）を式（３－８）に代入して求めることができるが，計算がひじょうに複雑になるので直接求めるほうが簡単である．なお以下の議論において，とくに断らない限り指標の変化範囲は１，２とする．また記述を簡単にするためにつぎの表示を使う．

※　現在，微小変形弾塑性問題の解析に広く使われている山田の弾塑性マトリックス[86]はR.Hill のものと同じである．

$$
\left.\begin{aligned}
&\{\varDelta\gamma_{ij}\}^T=\{\varDelta\gamma_{11}\ \varDelta\gamma_{22}\ \varDelta\Gamma_{12}\} \qquad \varDelta\Gamma_{12}=\varDelta\gamma_{12}+\varDelta\gamma_{21}\\
&\{\varDelta\mathring{\tau}^{ij}\}^T=\{\varDelta\mathring{\tau}^{11}\ \varDelta\mathring{\tau}^{22}\ \varDelta\mathring{\tau}^{12}\}\\
&\{\varDelta\tau^{ij}\}^T=\{\varDelta\tau^{11}\ \varDelta\tau^{22}\ \varDelta\tau^{12}\}
\end{aligned}\right\} \tag{3-34}
$$

弾性ひずみ$\varDelta\gamma_{ij}{}^{(e)}$はHookeの法則（３－１２）から

$$
\{\varDelta\gamma_{ij}\}=A\{\varDelta\mathring{\tau}^{ij}\} \tag{3-35}
$$

ここで

$$
A=\frac{1}{2\mu(1+\nu)}\begin{bmatrix} G_{11}G_{11} & (1+\nu)G_{12}G_{12}-\nu G_{11}G_{22} & 2G_{11}G_{12}\\ & G_{22}G_{22} & 2G_{22}G_{12}\\ \text{対称} & & 2\{(1+\nu)G_{11}G_{22}+(1-\nu)G_{12}G_{12}\}\end{bmatrix}
$$

式（３－３５）を逆変換すると次式となる．

$$
\{\varDelta\mathring{\tau}^{ij}\}=B\{\varDelta\gamma_{ij}{}^{(e)}\} \tag{3-36}
$$

ここで

$$
B=\frac{2\mu}{1-\nu}\begin{bmatrix} G^{11}G^{11} & (1-\nu)G^{12}G^{12}+\nu G^{11}G^{22} & G^{11}G^{12}\\ & G^{22}G^{22} & G^{22}G^{12}\\ \text{対称} & & \frac{1}{2}\{(1-\nu)G^{11}G^{22}+(1+\nu)G^{12}G^{12}\}\end{bmatrix}
$$

式（３－３６）は平面応力の場合のHookeの法則を埋込み座標系で表示したものである．

つぎに塑性ひずみについて考える．まず流れ法則（３－１３）における比例定数　$\varDelta\lambda$　はつぎのようになる．

$$\Delta\lambda=(S_1\Delta\gamma_{11}+S_2\Delta\gamma_{22}+S_3\Delta\Gamma_{12})/S \qquad (3-37)$$

ここで

$$S=\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\ F' + S_1\tau'_{11}+S_2\tau'_{22}+2S_3\tau'_{12}$$

$$\{S_1\ S_2\ S_3\}^T=\mathbf{B}\{\tau'_{11}\ \tau'_{22}\ 2\tau'_{12}\}^T$$

結局弾塑性体の場合の増分形の応力ひずみ関係は

$$\{\Delta\tau'^{ij}\}=\mathbf{D}\{\Delta\gamma_{ij}\} \qquad (3-38)$$

ここで

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}-\frac{1}{S}\begin{bmatrix} S_1{}^2 & S_1S_2 & S_1S_3 \\ \text{対称} & S_2{}^2 & S_2S_3 \\ & & S_3{}^2 \end{bmatrix}$$

となる．また式（３－９）はつぎのようになる．

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}-\mathbf{F} \qquad (3-39)$$

ここで

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 2\tau^{11}G^{11} & 2\tau^{12}G^{12} & \tau^{12}G^{11}+\tau^{11}G^{12} \\ \text{対称} & 2\tau^{22}G^{22} & \tau^{22}G^{12}+\tau^{21}G^{22} \\ & & \tau^{12}G^{12}+(\tau^{11}G^{22}+\tau^{22}G^{11})/2 \end{bmatrix}$$

平面ひずみの場合は，式（３－３２）の他に次式が成立する．

$$\Delta\tau^{13}=\Delta\tau^{23}=\Delta\gamma_{13}=\Delta\gamma_{23}=\Delta\gamma_{33}=0 \qquad (3-40)$$

この条件式を，式（３－８）に代入すると平面ひずみの場合の増分形の応力－

ひずみ関係式が求まりつぎのようになる．

$$\{\Delta \overset{\circ}{\tau}{}^{ij}\} = D'\{\Delta \gamma_{ij}\} \qquad (3-41)$$

ここで $D' = 2\mu$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu}G^{11}G^{11} & G^{12}G^{12}+\frac{\nu}{1-2\nu}G^{11}G^{22} & \frac{1-\nu}{1-2\nu}G^{11}G^{12} \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu}G^{22}G^{22} & \frac{1-\nu}{1-2\nu}G^{22}G^{12} \\ \text{対称} & & (G^{11}G^{22}+G^{12}G^{12})/2 + \frac{\nu}{1-2\nu}G^{12}G^{12} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{2\mu}{S}\begin{bmatrix} \tau'^{11}\tau'^{11} & \tau'^{11}\tau'^{22} & \tau'^{11}\tau'^{12} \\ & \tau'^{22}\tau'^{22} & \tau'^{22}\tau'^{12} \\ \text{対称} & & \tau'^{12}\tau'^{12} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\,(F'/2\mu+1)$$

また式（３－３９）のマトリックスFは平面応力の場合に一致する．

3.3.3.3　単軸引張り問題の場合

ここでは，Misesの塑性ポテンシャルを用いた場合の応力－ひずみ関係式（３－３１）におけるF'を単軸引張り試験のデータから決定する方法について考える．単軸応力状態では相当応力$\bar{\sigma}$はつぎのようになる．

$$\bar{\sigma} = G_{11}\tau^{11} \qquad (3-42)$$

全ひずみ増分は式（３－１０），（３－１１），（３－１３）から求まりつぎのようになる．

$$\Delta\gamma_{11} = G_{11} G_{11} \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{11} / E_t \qquad (3-43)$$

ここで

$$1/E_t = {}^1/2\mu(1+\nu) + {}^1/\tfrac{3}{2}F' \qquad (3-44)$$

式(3－42)の増分は式(1－36)，(1－39)からつぎのようになる．

$$\Delta\bar{\sigma} = G_{11}\Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{11} = G_{11}\Delta\tau^{11} + 2\tau^{11}\Delta\gamma_{11} \qquad (3-45)$$

他方，対数ひずみ $\bar{\varepsilon}$ とその増分量は

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln(1+2\gamma_{11}) \qquad (3-46)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\gamma_{11}}{1+2\gamma_{11}} = \frac{\Delta\gamma_{11}}{G_{11}} \qquad (3-47)$$

式(3－45)，(3－47)を式(3－43)に代入すると次式が得られる．

$$\Delta\bar{\sigma} = E_t \Delta\bar{\varepsilon} \qquad (3-48)$$

ここで E_t は単軸引張りにおける相当応力 $\bar{\sigma}$ －対数ひずみ $\bar{\varepsilon}$ 曲線の勾配である．式(3－44)から F' は

$$F' = \frac{2}{3}\left\{\frac{2\mu E_t(1+\nu)}{2\mu(1+\nu)-E_t}\right\} \qquad (3-49)$$

上式に示すように F' は単軸引張り試験のデータと関連付けることができた．また多軸の構成方程式において埋込み座標系に対する Jaumann の応力増分とひずみ増分の間に線形関係があるという仮定は，単軸引張り試験において相当応力増分と対数ひずみ増分の間に線形関係があることと同一である．

したがって，単軸引張り試験結果の多軸の構成方程式への一般化に式（3－8）を用いることの正当性は示されたことになる．

3.4 結　　言

本章では，弾．塑性体に対して第2章で定式化した要素の増分形の運動方程式に直接用いることができるような，埋込み座標標系を基準とした増分形の応力－ひずみ関係式を導出した．

この増分形の応力－ひずみ関係式は，応力，ひずみを定義している基準座標系を明確にしている点およびそれらの増分量については，いわゆる客観性を有するものを用いた点において，従来の微小変形の場合の構成方程式と異なる．

はじめに亜弾性，超弾性体の構成方程式を埋込み座標系を基準として求めた．前者については，埋込み座標系のJaumannの応力増分とひずみ増分の関係として表わし，後者については，ひずみエネルギ関数から導出した．

弾塑性体に対しては，大ひずみ領域においても弾性ひずみは十分小さいと仮定して，弾性および塑性ひずみ増分間の連成は生じないと考え，全ひずみ増分は二つのひずみ増分の和で与えられるとした．そして埋込み座標系におけるJaumannの応力増分と全ひずみ増分の間の線形関係として構成方程式を求めるために弾性ひずみ増分に対してHookeの法則を塑性ひずみ増分に対しては，塑性ポテンシャルと流れ法則を適用した．とくに吉村，Edelman－Druckerの塑性ポテンシャルおよび移動硬化（Kinematic Hardening）モデルに対しては具体的な増分形の応力－ひずみ関係を示した．またMisesの塑性ポテンシャルに対しては，平面問題のマトリックス形の増分形の応力－ひずみ関係も示した．最後にこの増分形の応力－ひずみ関係を単軸引張り試験に適用して，材

料定数を決定すると同時に，通常一般に行なわれている単軸の相当応力増分と対数ひずみ増分の間に線形関係があるとする仮定を，多軸状態に一般化すると，埋込み座標系のＪａumannの応力増分とひずみ増分の間の線形関係になることを確認した．

第4章　大ひずみ大変形の増分形有限要素法の応用

4. 1　緒　言

緒論において概観したように，2次元弾塑性問題は解析し易いこと，工学上重要な問題の多くは2次元問題として扱うことができることなどから多数の研究が行なわれ有用な結果も得られている．ところが従来の解析法で大変形，大ひずみを考慮したと言われているものの多くは，微小ひずみ問題の延長と考え，微小ひずみの仮定のもとに定式化された有限要素法を各増分段階ごとに要素の節点の空間座標のみを変えるように修正して，それを用いて計算している．[53] このとり扱いは，暗に微小変形の仮定が含まれているので，基準座標の取り方，応力およびひずみの定義が明確でないこと，それらの増分量が構成方程式と結び付ける上で適当でないことなどの点で厳密さを欠く．以下このような有限要素法を従来法と呼び本論文で示した厳密な有限要素法（以下厳密法と呼ぶ）と区別する．

本章では，厳密法を工学上基本的な二，三の問題の解析に適用して得た結果を従来法によって得た結果および実験による結果と比較検討し，この方法の有効性について調べる．

ここでは材料は等方体であると仮定し，弾性ひずみ増分には Hooke の法則を，塑性ひずみ増分には Mises の塑性ポテンシャルと流れ法則をそれぞれ適用し，単純せん断，2方向から負荷された有孔板，円孔および切欠きを有する帯板の引張り問題に対して，荷重漸増法を用いて大きなひずみ域まで弾。塑性計算を行なう．なお1段あたりの荷重増分の大きさは，弾性問題では全要素の相当ひずみ増分が一定値以下になるように，弾塑性問題ではこれと要素を1個ずつ降伏させる方法[9] とを併用して決定し，1段あたりの変位増分が大きくなることによる誤差の発生を防止する．そして有限要素モデルとしては，計算

の簡易さから単体モデルを用いることにする.

4.2節では，第3章で示した弾塑性材の構成方程式の妥当性を，大きな単純せん断変形を例に数値的に検討を行なう.

4.3節では，非線形弾性問題の例としてポリウレタンラバーからなる有孔帯板の引張りを扱い，A. J. Durelli ら[88]が行なった実験結果との比較を行なう.

4.4節では，線形硬化弾塑性問題の例として切欠きを有する帯板の引張り問題を解析し従来法による結果との比較検討を行なう.

4.5節では，非線形硬化弾塑性問題の例として円孔および切欠きを有する帯板の引張り問題を解析し，これと従来法による結果および実験結果との比較検討を行なって，厳密法の有効性について調べる.

4. 2 大きな単純せん断変形の解析

弾塑性材の構成方程式で，単軸引張りの応力―ひずみ関係（3－48）を多軸へ一般化した構成方程式（3－8）において，応力増分として Jaumann の応力増分 $\Delta\mathring{\tau}^{ij}$ の代りに他の応力増分がよく用いられている[89]が，これは3.3.3.3.において示したように厳密には誤りである．本節では，大きな単純せん断変形を例にとり，構成方程式（3－8）の妥当性を示すとともに Jaumann の応力増分 $\Delta\mathring{\tau}^{ij}$ 以外の応力増分の例として Oldroyd の応力増分 $\Delta\tau^{ij}$を 構成方程式（3－8）に用いた場合，変形（回転を伴なう変形）が非常に大きくなった場合，降伏条件を満さなくなることを示す.

図 4.1 に示すように空間座標系 x^i と埋込み座標系 θ^i を用いる．$x^1 \sim x^3$ 面が基準点からの x^2 方向の距離に比例して移動するような単純せん断変形をしたとき，埋込み座標系 θ^i の計量テンソル G_{ij}，G^{ij}，ひずみ成分 γ_{ij} およびひずみ増分 $\Delta\gamma_{ij}$ はつぎのように表わされる．

$$
\left.
\begin{aligned}
& G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & U & 0 \\ U & 1+U^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G^{ij} = \begin{pmatrix} 1+U^2 & -U & 0 \\ -U & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & U & 0 \\ U & U^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Delta U & 0 \\ \Delta U & 2\Delta U U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\right\} \quad (4-1)
$$

この場合，式（３－８）から Jaumann の応力増分 $\Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{ij}$ はつぎのようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
& \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{11} = \Delta\tau^{11} + \{(1-U^2)\tau^{12} - U\tau^{11}\}\Delta U \\
& \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{22} = \Delta\tau^{22} + \{\tau^{12} + U\tau^{22}\}\Delta U \\
& \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{12} = \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{21} = \Delta\tau^{12} + \{\tau^{11} + (1-U^2)\tau^{22}\}\Delta U/2 \\
& \Delta\overset{\circ}{\tau}{}^{33} = \Delta\tau^{33}
\end{aligned}
\right\} \quad (4-2)
$$

この例においては，増分形の応力－ひずみ関係として式（３－３１）の $D^{ijk\ell}$ を用いた．なお，単軸引張りの相当応力 σ －対数ひずみ $\bar{\varepsilon}$ 関係を図４－２に示す．

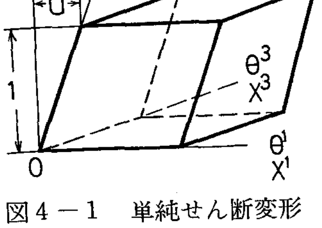


図４－１　単純せん断変形

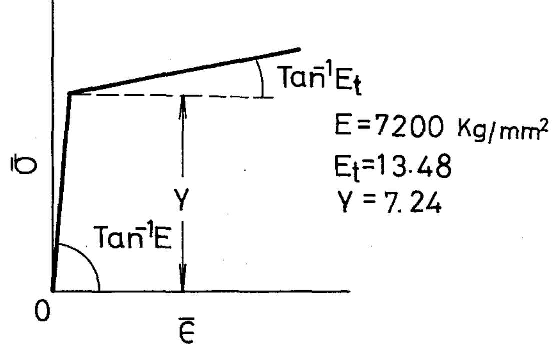


図４－２　単軸引張りの相当応力 $\bar{\sigma}$ －対数ひずみ $\bar{\varepsilon}$ 関係

図４－３は Jaumann の応力増分 $\Delta\mathring{\tau}^{ij}$ とひずみ増分 $\Delta\gamma_{ij}$ を関係付けた構成方程式（３－８）を用いた場合と，式（３－８）の Jaumann の応力増分の代りに Oldroyd の応力増分 $\Delta\tau^{ij}$ を用いた場合の両者について図４－２から求めた相当応力値 $\bar{\sigma}$ と式（３－２９）を用いて計算した相当応力値 $\sqrt{\frac{3}{2}}\{\tau'^{ij}\,\tau'_{ij}\}^{1/2}$ の差 $\Delta\bar{\sigma}$ を示したものである．本来計算誤差がない場合は両者は一致して $\Delta\bar{\sigma}$ は零になるべきものである．ところで図から明らかなように Oldroyd の応力増分を用いた場合は変形とともにその差は大きくなっている．いっぽう Jaumann の応力増分を用いた場合 $\Delta\bar{\sigma}$ はほとんど零である．

このごくわずかな差は数値計算によって生じる誤差であると思われる．

他の応力増分については検討を行なわなかったが，応力増分間の関係からみて，ほかのものについても，ここで示したと同程度の誤差を伴なうものと考える．

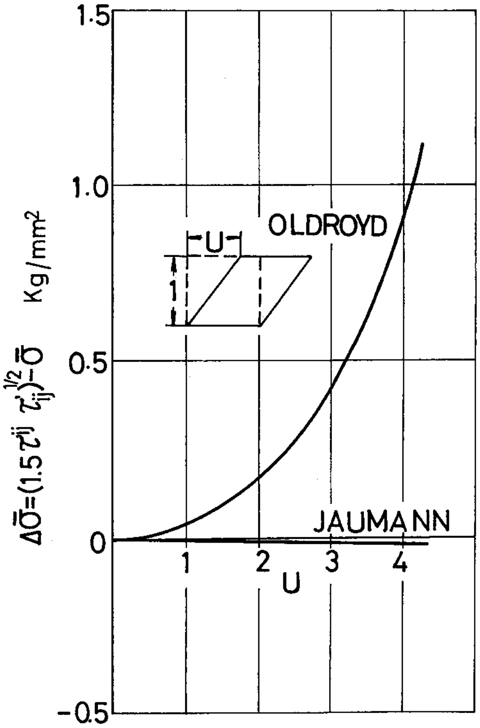


図４－３　相当応力の誤差

４．３　非線形弾性問題の解析（ポリウレタンラバーからなる有孔帯板の引張り問題の解析）

本節では，ポリウレタンラバーからなる円孔および楕円孔を有する帯板の引

張り問題を解析する．後者についてはA. J. Durelli[88]らの実験結果と比較検討する．

円孔および楕円孔を有する帯板を図４－４に示すように要素分割を行なう．ポリウレタンラバーの構成方程式としては，A. J. Durelli[88]らが実験によって得た単軸引張りの相当応力$\bar{\sigma}$とLagrange　のひずみε^Lの関係式を式（３－２）を用いて多軸へ一般化したものを用いる．なおこの応力ひずみ関係を図４－５に破線で示す．ところで，構成方程式（３－２）は単軸引張りの場合の応力増分－ひずみ増分関係式（３－４８），すなわち，相当応力増分$\Delta\bar{\sigma}$と対数ひずみ増分$\Delta\bar{\varepsilon}$の間の線形関係を一般化したものであるので，図４－５の破

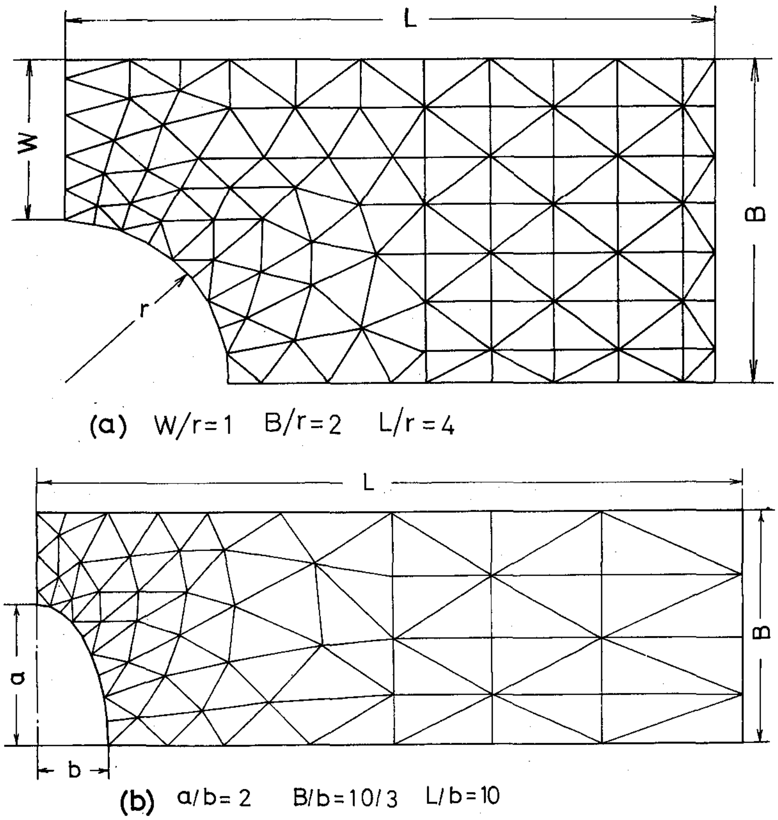


図４－４　要素分割
(a) 円孔を有する帯板
(b) 楕円孔を有する帯板

線の関係を相当応力$\bar{\sigma}$と対数ひずみ$\bar{\varepsilon}$の関係に変換して対応させねばならない．すなわち

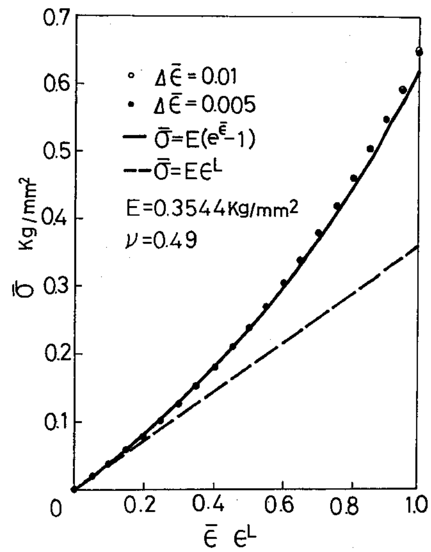


図4－5　最大ひずみ要素の相当応力$\bar{\sigma}$ —相当ひずみ$\bar{\varepsilon}$ 関係

$$\bar{\sigma} = E\,\varepsilon^{L}$$
$$= E\,(e^{\bar{\varepsilon}}-1) \qquad (4-3)$$

上式は図4－5の実線で表わされる。この場合接線係数E_tは次式となる

$$E_t = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} = E e^{\bar{\varepsilon}} \qquad (4-4)$$

各変形段階における接線係数E_tおよび図4－5に示したポアソン比νを構成方程式（3－2）に用いて演算を進めてゆく．このようにして計算した円孔および楕円孔周辺の最大ひずみ要素の相当応力$\bar{\sigma}$と相当ひずみ$\bar{\varepsilon}$の関係を図4－5に，“○”“●”で示している．各増分において全要素の相当ひずみ増分が0.01および0.005 以下になるようにして2種類の荷重増分に対して計算を行なった．増分量が小さくなるほど真の応力－ひずみ関係に近付いている．しかし本例題のような場合，両者の差はほとんどなくまた真の応力－ひずみ関係によく一致しているので，計算の各増分段階について相当ひずみ増分が0.01以下にすると十分な精度が得られるものと考える．

図4－6は増分1段あたりの各要素の相当ひずみ増分を0.01以下にして計算を行なった場合の荷重変位関係を示したものである．

図4－7は円孔および楕円孔の各変形段階における形状変化を示したものである．楕円孔については，A. J. Durelliら[88]の実験結果もあわせて図示した．この図から明らかなように計算結果と実験結果との一致は良好であることがわかる．

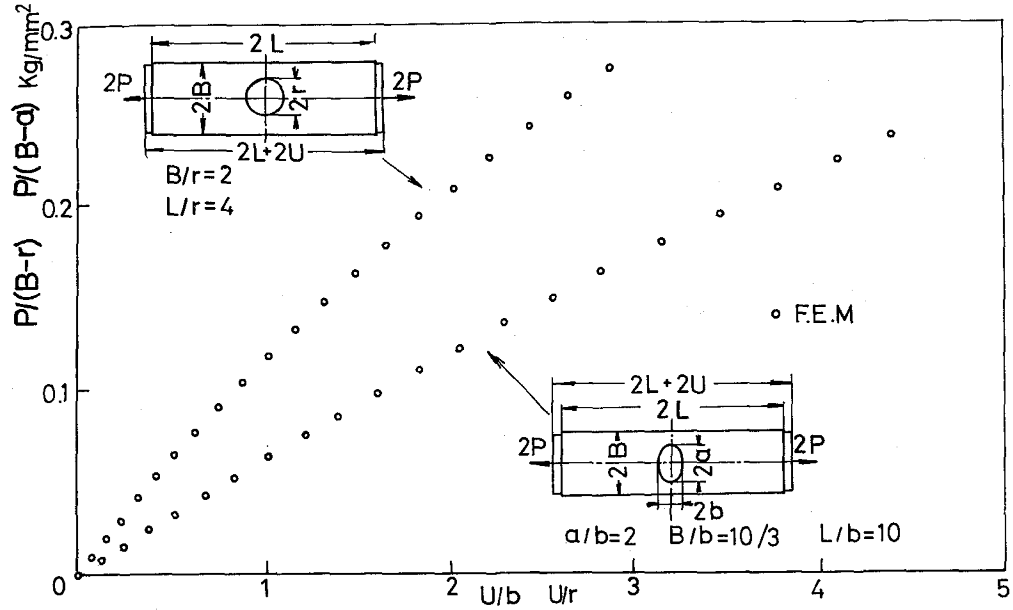
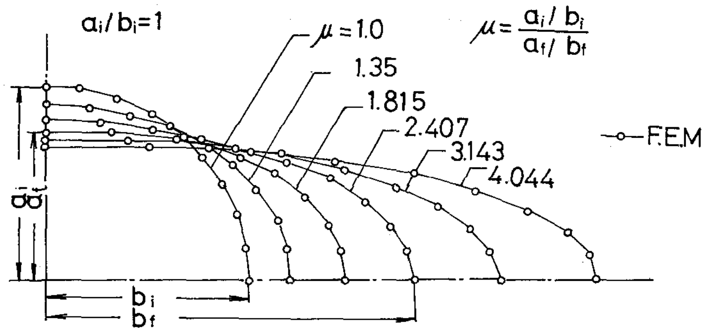
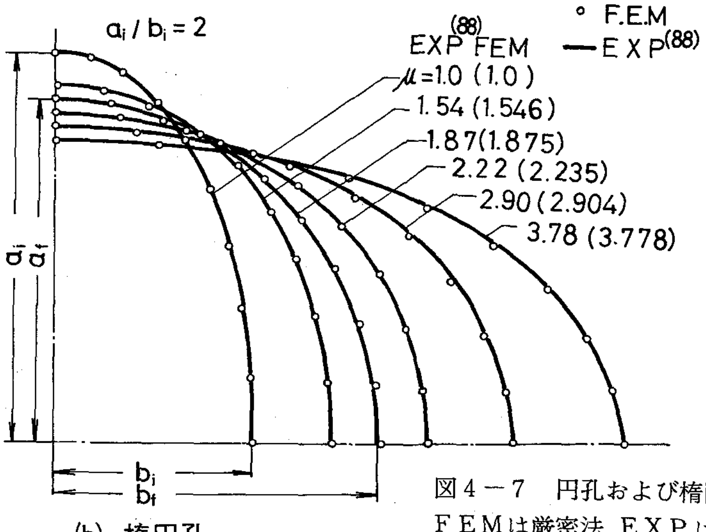


図４－６　荷重変位関係 ○印は増分５段ごとの値を示す



(a) 円孔



(b) 楕円孔

図４－７　円孔および楕円孔の形状変化
ＦＥＭは厳密法，ＥＸＰは実験(88)による結果を示す

4.4 弾塑性平面問題の解析Ⅰ（線形硬化弾塑性材の場合）

本節では，単軸引張りの相当応力 $\bar{\sigma}$ －対数ひずみ $\bar{\varepsilon}$ 関係が図4－2で表わされるような材料（線形硬化弾塑性材）からなる円孔を有する板および切欠きを有する帯板の解析を行なった結果について述べる。

4.4.1 2方向から荷重を受ける有孔平板の解析

図4－8（b）に示すように平板の中央に円孔があり一方から圧縮，他方から引張り荷重が作用している場合の平面応力状態での解析を（a）の要素分割を用いて計算した．（c）は弾塑性境界の進展状態を示している．円孔の対称軸上（圧縮側および引張り側）で現われた塑性域は徐々に広ろがりやがてそれらが結合して円孔まわりは塑性域で囲まれるが，この板のかどの部分は弾性状態を保っている．これは（d）に示した変形状態においても現われており，かどの部分はほとんど変形していないことがわかる。

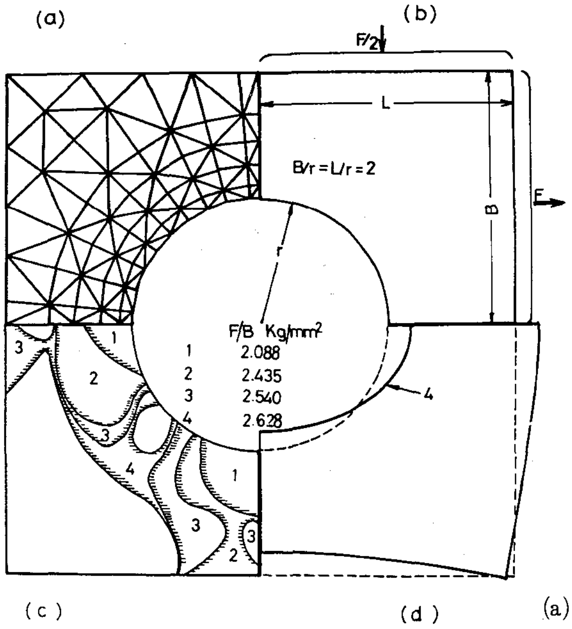


図4－8　2方向から負荷を受ける円孔を有する板

(a) 要素分割　(b) 寸法
(c) 弾塑性境界の進展状態
(d) 板の変形形状（×4）

4.4.2 引張りを受ける切欠きを有する帯板の解析

ここでは一方向から引張りを受ける切欠きを有する帯板問題を解析し，従来法によって得た結果と比較する．

切欠きを有する帯板の寸法および計算に用いた有限要素分割を図4－4（a）

に示す。大きい変形を取り扱うことおよび切欠き半径が大きいことから比較的あらい要素分割とした。

図4－9に荷重変位関係を示す。実線は厳密法に，破線は従来法によって計算した結果を示す。図中の番号は後続の図の説明のためにつけたものである。この問題において，平面応力，平面ひずみの場合とも，厳密法によると，従来法よりも物体の剛性が小さく計算され，同じ荷重で比較すると変位がつねに大きく出る結果を与えその傾向は変位（荷重）が大きくなるとともに増加している。このように変位，荷重のような全体的な量に対しても厳密法と従来法との間に顕著な差がでてくることに注目すべきである。

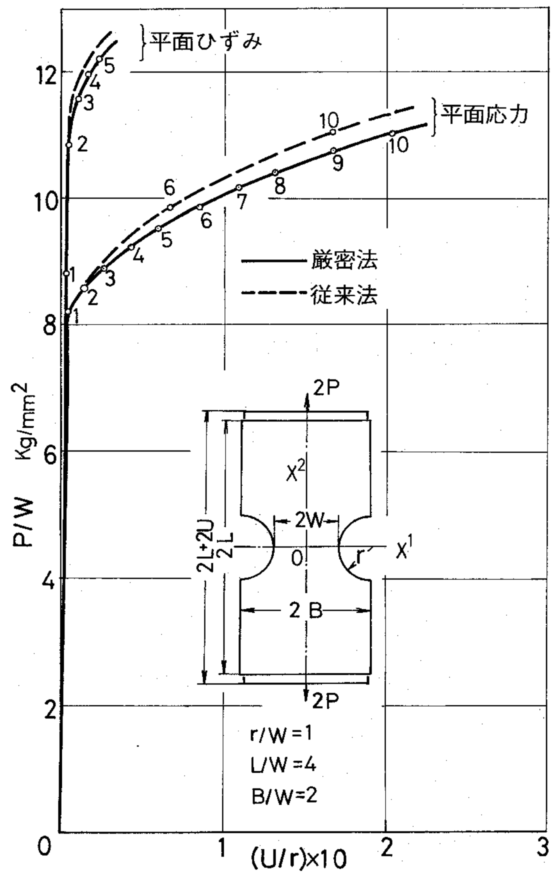


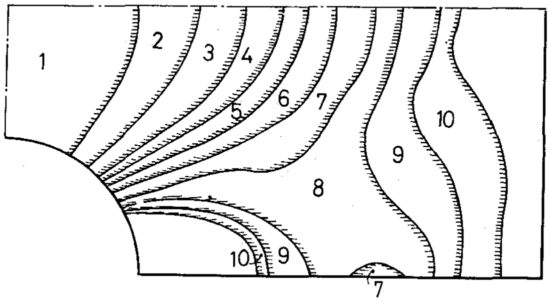
図4－9　荷重変位関係

荷重を増加してゆく，各増分段階の諸量の増分量を求めるのに用いたEuler 法の精度を検討するためにHalf－Step 法を用いて同じ計算を行なった。この方法は増分1段あたりの計算量は約2倍になるが，いわゆる反復型の解法による結果と比較して十分精度がよいことが示されている。(90)本問題の場合Half－Step 法によって得た結果とEuler 法によって得た結果との差はほとんどなかった。※したがってここで扱ったような，系全体の荷重に対する変位の応答が急変しない問題に対しては，

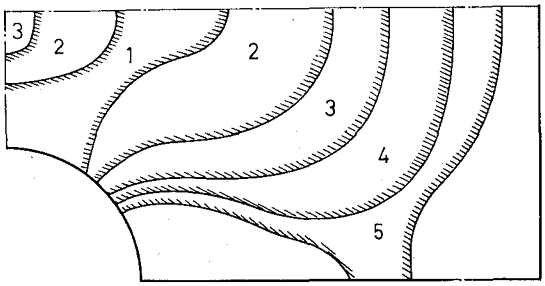
※　次項の脚注参照．

各段階の増分量を小さくとると，大きい変形まで Euler 法によって計算を行なうことができると考える。

図4－10は弾塑性境界の進展状態を示し，番号は荷重変位関係図4－9に示した番号に対応している。(a)の平面応力の場合には比較的変形が大きいところにおいても塑性域が切欠き周辺にとどまるのに対して，(b)の平面ひずみの場合は変形が小さいところにおいてほとんど帯板全面に塑性域がひろがっている。また平面ひずみの場合，平面応力の場合よりも小さい変形で塑性域が切欠き側面へひろがっている。これは平面応力の場合板厚の減少によって剛性の低下した箇所はますます変形が大きくなるのに対して，平面ひずみの場合は板厚変化はないので局所的な剛性の低下が顕著でないから変形は帯板全面に及びそれにより塑性域も全体にひろがることによるものであると説明することができる。



(a) 平面応力



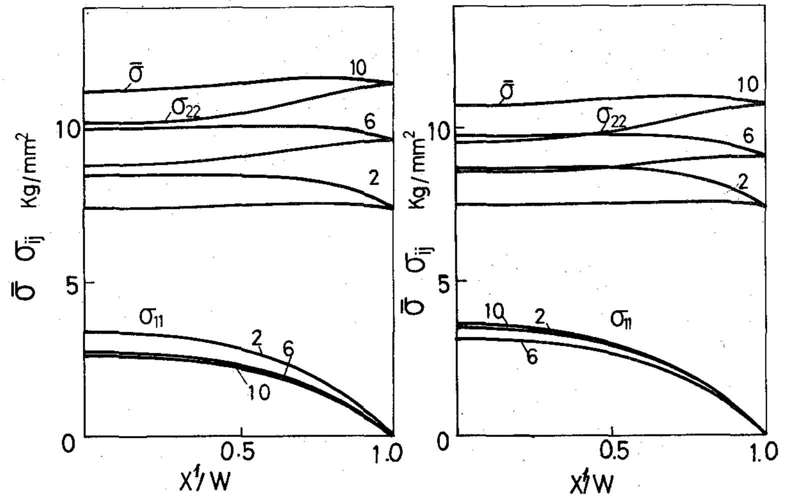
(b) 平面ひずみ

図4－10　弾塑性境界の進展状態

図4－11は厳密法と従来法によって求めた切欠き最小断面（厳密には切欠き最小断面上にある要素の重心の位置）の応力分布を表わす。番号2, 6, 10は

※ たとえば変位 $(U/r)=0.01882$ のとき Euler 法によって求めた結果は，荷重 $P/W=8.722\,\mathrm{Kg}/mm^2$，切欠き底はある要素の軸方向応力 $\sigma_{22}=8.100\,\mathrm{Kg}/mm^2$，軸方向ひずみ $\gamma_{22}=0.05045$ である。これに対して Half－Step 法によって求めた結果は $P/W=8.711\,\mathrm{Kg}/mm^2$，$\sigma_{22}=8.098\,\mathrm{Kg}/mm^2$，$\gamma_{22}=0.05024$ であり両者はよく一致している。

図４－９の番号に対応する．厳密法で求めた応力は真の応力※であるが，従来法によって求めた応力は各増分ごとに異なった測度で測られた応力増分を加算

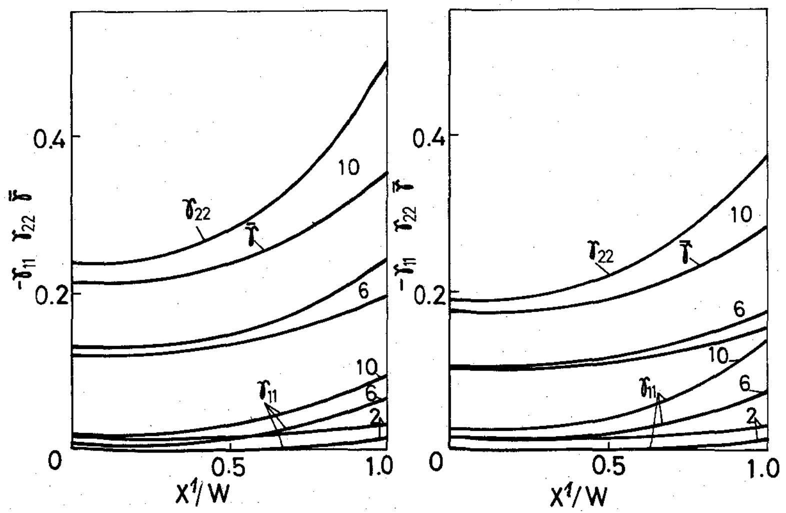


(a) 厳密法　　　(b) 従来法

図４－11　切欠き最小断面上の応力分布

した結果得られたものである．変形が大きくなるにともなって両者の間の差は大きくなっている．

図４－１２は切欠き最小断面のひずみ分布を示している．(a)においてγ_{ij}は



(a) 厳密法　　　(b) 従来法

図４－12　切欠き最小断面上のひずみ分布

※　埋込座標系θ^iの応力成分τ^{ij}を直交座標系x^iの応力成分σ^{ij}に変換している．

Green のひずみ，$\bar{\gamma}$は相当ひずみを表わす．(b)においてγ_{ij}は空間固定の直交デカルト座標系に対して計算されたひずみ増分Δe_{ij}を加算した結果得られたひずみ$\tilde{e}_{ij}$を※Green のひずみに変換したものを表わしている．(a)，(b)両図に示されている軸方向ひずみγ_{22}を比べると従来法による結果は厳密法による結果よりもかなり小さな値になっており，相当誤差を含むことがわかる．

4．5 弾塑性平面問題の解析II（非線形硬化弾塑性材の場合および実験値との比較）

前節では切欠きを有する帯板の引張り問題を厳密法と従来法によって解析を行なったが，その結果両者には明らかな差異が認められた．これは従来法そのものが本来微小変形問題解析のために定式化されたものであって，これを大ひずみ問題に適用したために生じてくる不合理性によるものであると考える．

本節においては，実験結果と比較を行なうために軟鋼材からなる円孔および切欠きを有する帯板の引張り問題の解析を行なう．そして構成方程式としては，図4－13に示す軟鋼材の単軸引張り試験によって求めた応力－ひずみ関係を式（3－31）によって多軸の応力－ひずみ関係に一般化を行なったものを用いる．なお図中の応力－ひずみ関係の近似式は，弾性および塑性域において応力はそれぞれひずみの1次式および5次式で近似されると仮定し，その係数を実験値から最小2乗法によって求めたものである．ただし引張り試験では，対数ひずみが0.14付近になるとくびれが生じ，試験片断面の応力分布が一様でなくなり真の応力－ひずみ関係を得ることはできなくなったので，くびれを生じて測定できなくなった以後の接線係数は一定であると仮定しその値を上述の

※ 13節で述べたように，ひずみ主軸が回転しない最小断面上では，$\tilde{e}_{ij}$ は対数ひずみになる．

近似式の対数ひずみが0.12のところの値とした。

つぎに，このようにして解析を行なって得た結果と同じ材料を用いて行なった実験結果との比較検討を行なう。

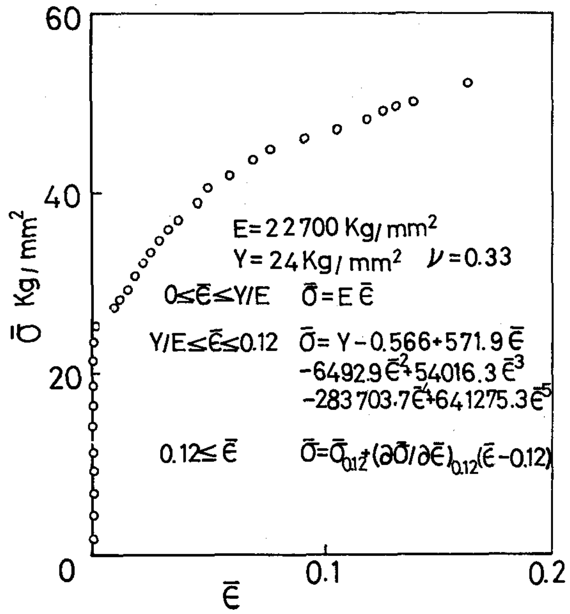


図4－13　軟鋼材の単軸引張りの相当応力$\bar{\sigma}$—対数ひずみ$\bar{\epsilon}$関係

4.5.1　引張りを受ける円孔および切欠きを有する帯板の解析

解析を行なった円孔および切欠きを有する帯板の寸法と計算に用いた要素分割を図4－14に示す。円孔および半円切欠きを有する帯板の場合は同じ要素分割とした。

図4－15は荷重変位関係を示している。図中の番号は後続の図の説明の便宜上つけたものである。円孔を有する帯板については従来法による結果もあわせて図示している。この場合も線形硬化の場合と同様，厳密法による結果は剛性が低く計算されている。そして変形が大きくなると両者の差は急に大きくなり前節で扱った線形硬化の場合よりもその差は著しい。これは非線形硬化の場合，接線係数が相当ひずみの大きさに依存しているために，ひずみの大きさに差があるとこれが間接的にこの帯板の剛性の差として現われる。これが線形硬化の場合に比べて両者の差をより大きくする原因の一つであると考える。

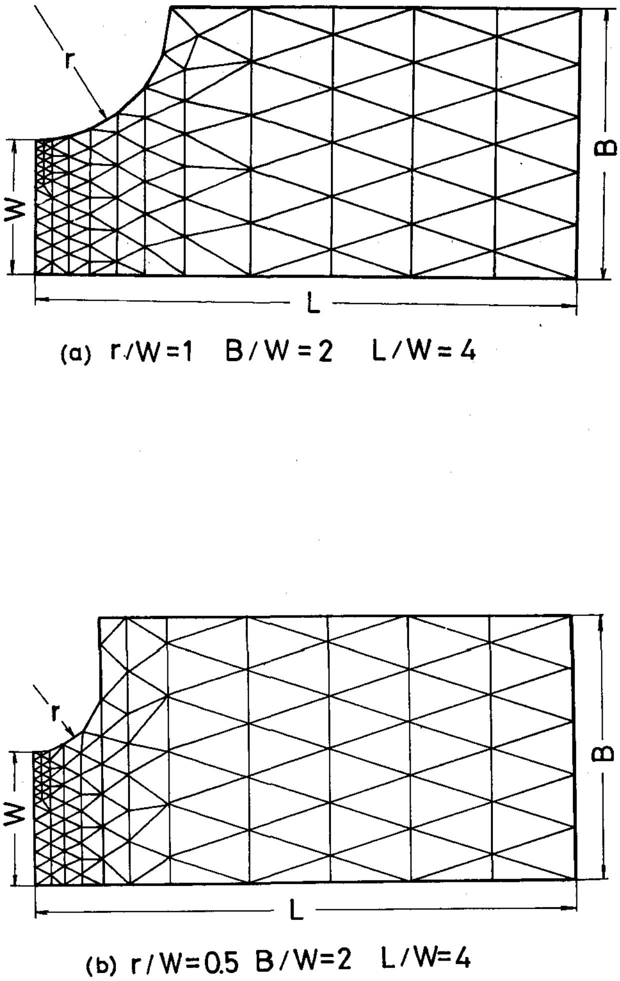
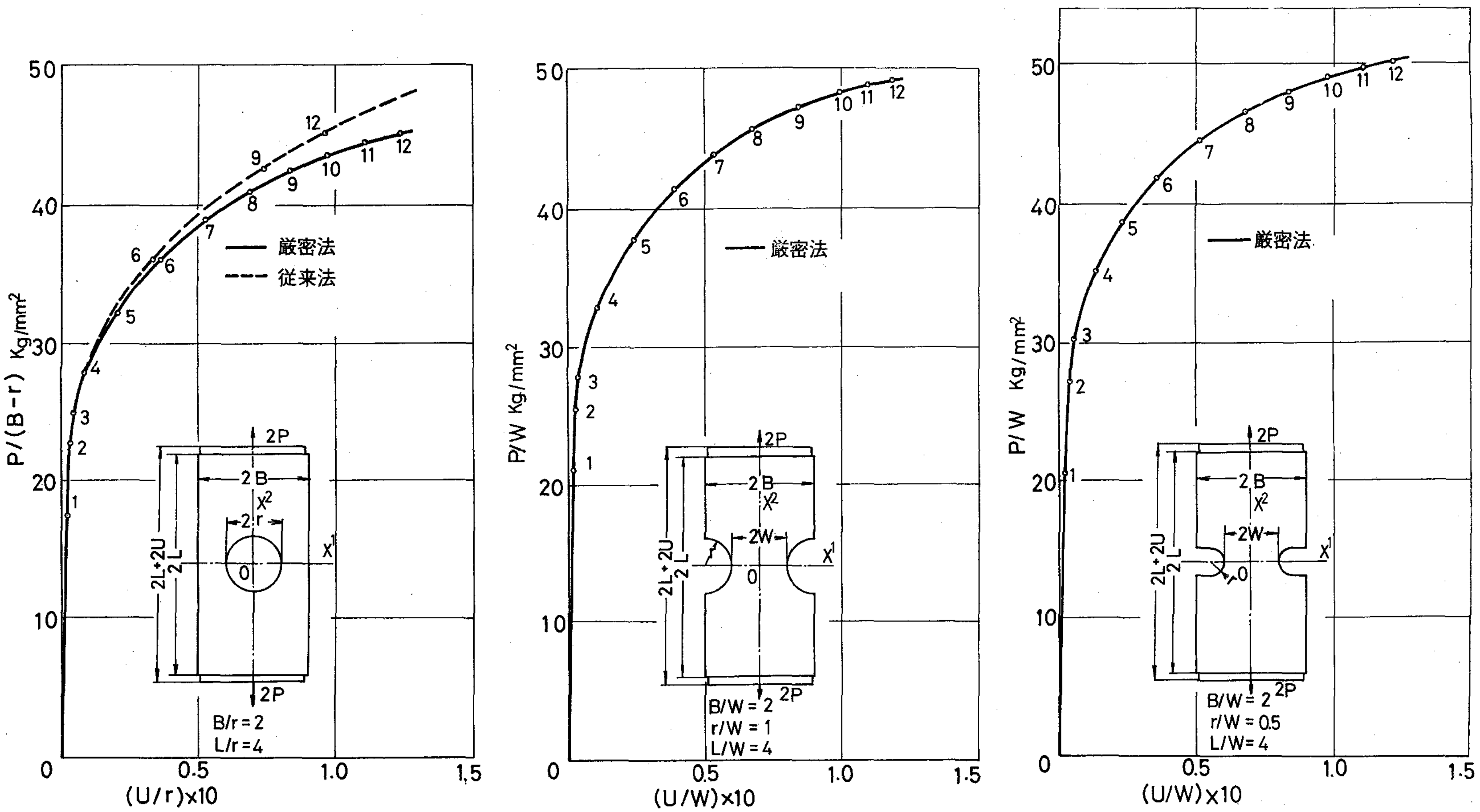


図4 —14 要素分割

(a) 円孔および半円切欠きを有する帯板

(b) U型切欠きを有する帯板

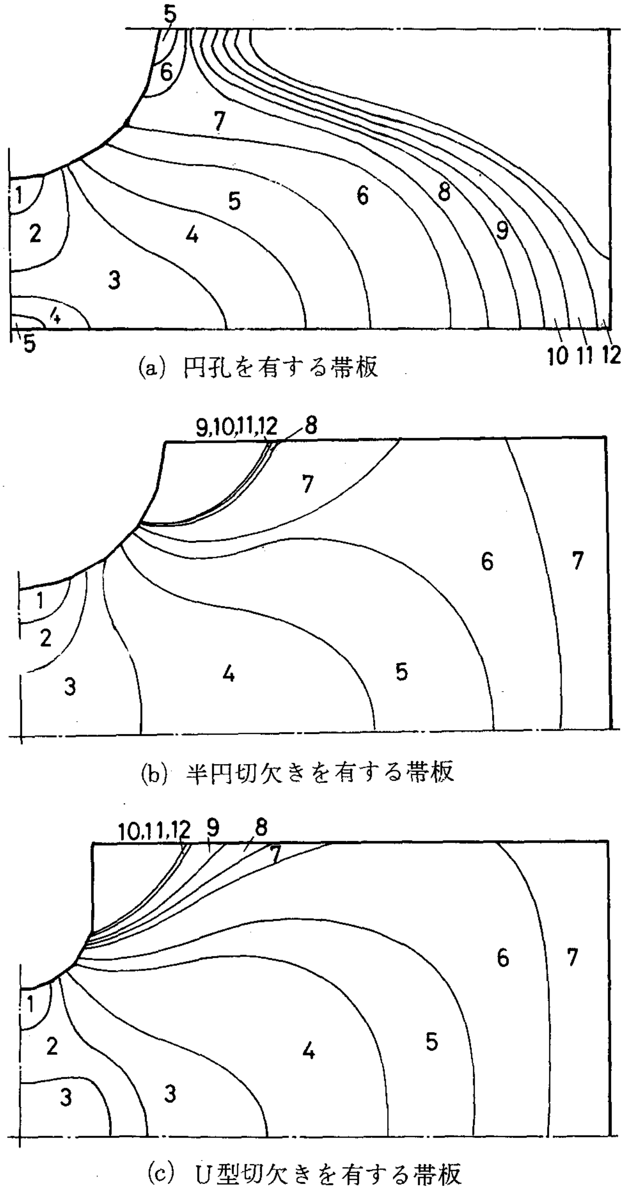


(a) 円孔を有する帯板　　(b) 半円切欠きを有する帯板　　(c) U型切欠きを有する帯板

図4 −15　荷重変位関係

図４−１６は弾塑性境界の進展状況を示したもので，図中の番号は荷重変位関係図４−１５中の番号に対応している。円孔を有する帯板の場合の塑性域のひろがり方は，他の場合に比べてゆるやかで，帯板の両端の変位が同じ所で比較すると，円孔を有する帯板の塑性域が一番小さい．したがってこの帯板では局所的に変形が大きくなっていると考えられる。

図４−１７は円孔および切欠きを有する帯板の最小断面上（厳密には最小断面上にある要素の重心の位置）における応力分布※を示している。円孔を有する帯板の場合については従来法によって得た結果もあわせて図示している。なお図中の番号は荷重変位曲線の番号である。厳密法で求めた応力は真の応力を表わしているが，従来法で求めた応力は各増分ごとに異なった測度で測られた応力増分を加え合わせたものであるので注意すべきである。円孔を有する帯板の場合，３ではまだ弾性域が残存しているので，6, 9, １２とは異なった応力分布形状とな



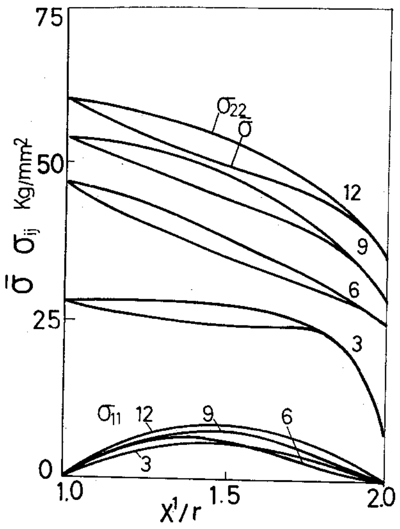
(a) 円孔を有する帯板

(b) 半円切欠きを有する帯板

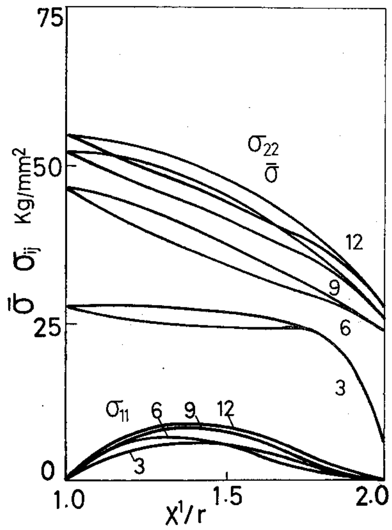
(c) U型切欠きを有する帯板

図４−16　弾塑性境界の進展状態

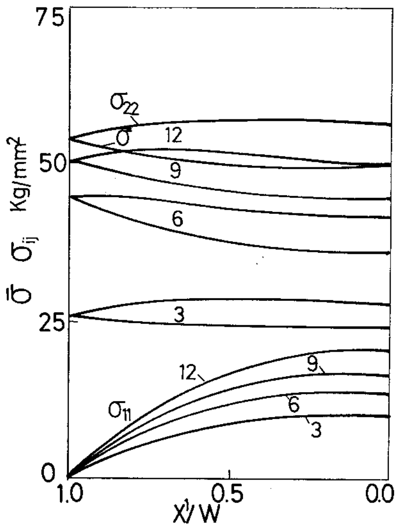
※８９項の脚注参照．



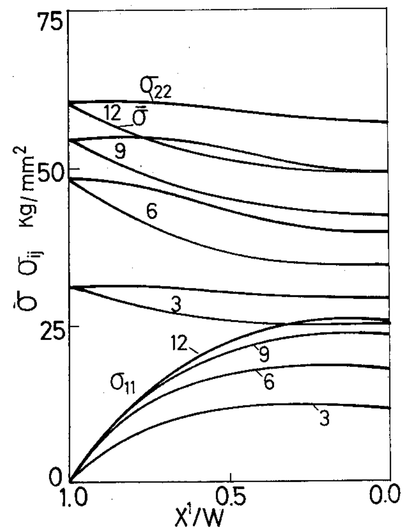
(a—1) 厳密法 円孔を有する帯板



(a—2) 従来法 円孔を有する帯板



(b) 半円切欠きを有する帯板

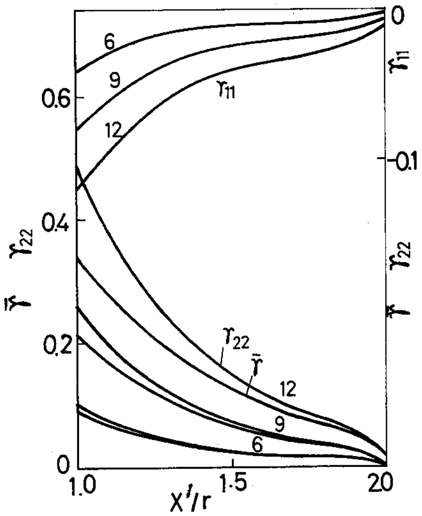


(c) U型切欠きを有する帯板

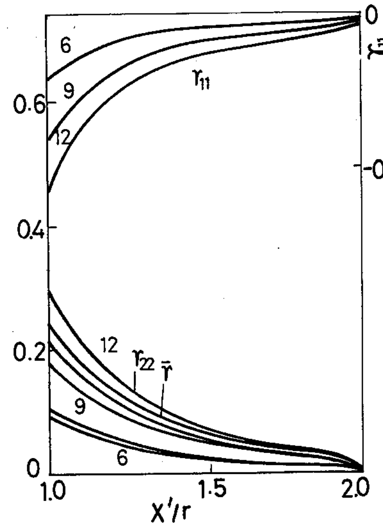
図4—17 最小断面上の応力分布

っている。そして1方向の応力の最大値が生じる位置は変形とともに動くが，変形が大きくなると最小断面の中央付近にとどまるようである。半円およびU型切欠きを有する帯板の応力分布については(b)，(c)に図示している。

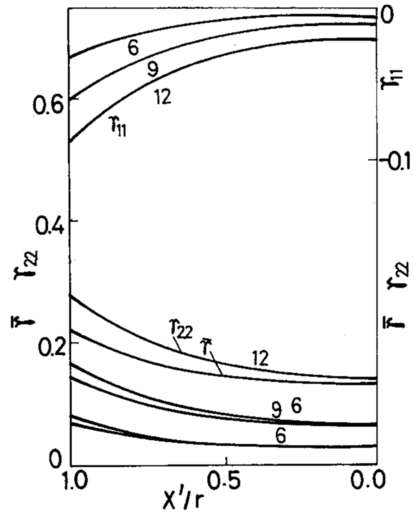
図4－18は最小断面上のGreen のひずみ分布を図示したものである。円孔を有する帯板の場合については，従来法によって得た最小断面上のひずみを4.4.2の場合と同様にGreen のひずみに変換を行なってあわせて図示してい



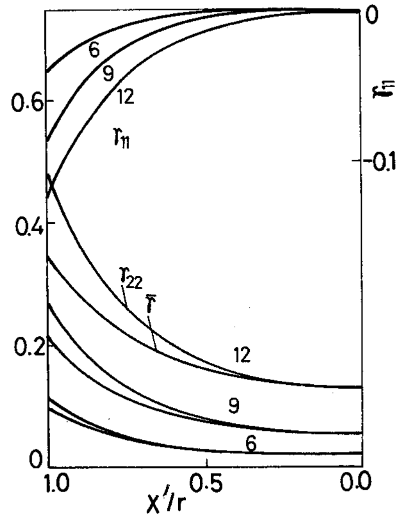
(a—1) 厳密法　　円孔を有する帯板



(a—2) 従来法　円孔を有する帯板



(b) 半円切欠きを有する帯板



(c) U型切欠きを有する帯板

図４－18　最小断面上のひずみ分布

る．この場合変形が大きい所で，線形硬化の場合に比べて両者の差は非常に大きくなっている．これは荷重変位曲線の場合と同様，ひずみの大きさが接線係数に及ぼす影響によるものであると考える．さらにこの図から，同じ荷重状態では厳密法によって求めた相当ひずみの値は従来法によって求めた値よりもつねに大きくなっていることがわかる．したがって同じ荷重では厳密法によると

従来法に比べて単軸引張りの接線係数がより小さな値になる．従来法による結果が非線形硬化の場合とくに大きな誤差を含むのはこの点に原因の一つがあると考える．(b)，(c)は半円，U型切欠きを有する帯板のひずみ分布を示している．

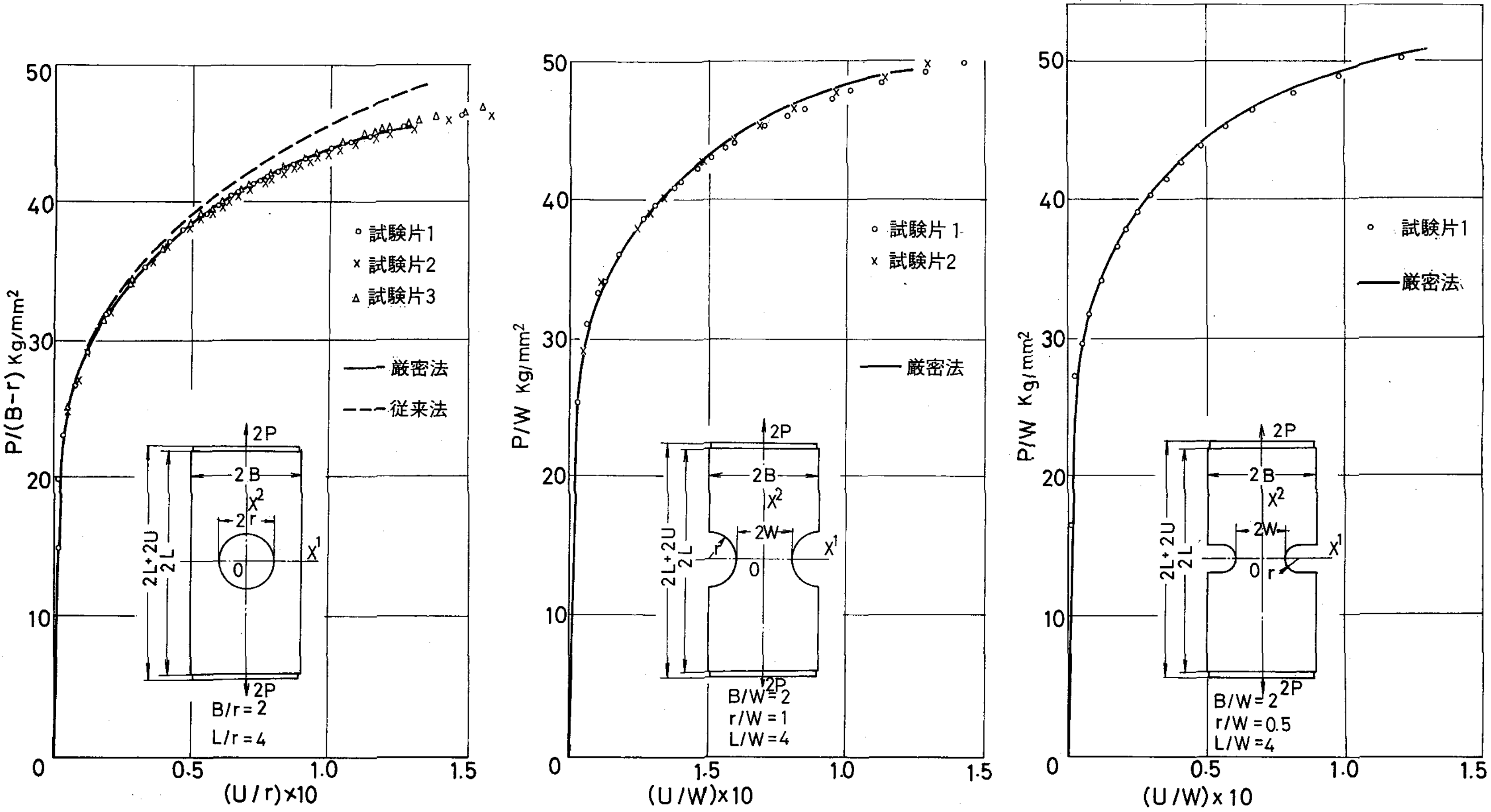
4.5.2　実験値との比較

ここでは本論文で示した有限要素法の有効性の検討を行なう目的で4.5.1で解析した結果と実験結果との比較を行なう．なお円孔および切欠きを有する帯板に関する実験例はいくつかあるが，それらは材料特性が明記されていなかったり，ひずみの整理の方法が不明あるいは異なっているので厳密法による計算結果との比較はできなかった．

そこで，第5章において有限要素法の考え方を応用した大ひずみ大変形のモアレ法を用いて解析した，円孔および切欠きを有する帯板の実験結果と4.5.1で解析を行なった数値計算結果との比較を行なう．なお実験の詳細については5.5.1において述べるので省略してその結果のみを用いる．

実験には図5－7に示す形状の試験片を用いた．試験片の材質は市販のSS41で，単軸引張りに対して図4－13のような応力－ひずみ関係を示す．

図4－19は荷重変位関係の計算値および実験値を示している。計算結果と対応させるために，変位は標点距離間隔80㎜で測定を行なっている．円孔および切欠きを有する帯板とも，試験片によって多少の差はあるがだいたい同じ結果を与えている．そしてこれらの実験値は図中に実線で示した厳密法による計算値とはとんどの所においてよく一致している．これに対して円孔を有する帯板の従来法による計算結果は，変形が少し大きくなると，急に実験結果からはなれてくる．ところで厳密法によって計算した結果は，いずれの場合も変形が大きい所において，荷重変位曲線の勾配が実験のそれよりもごくわずか小さ

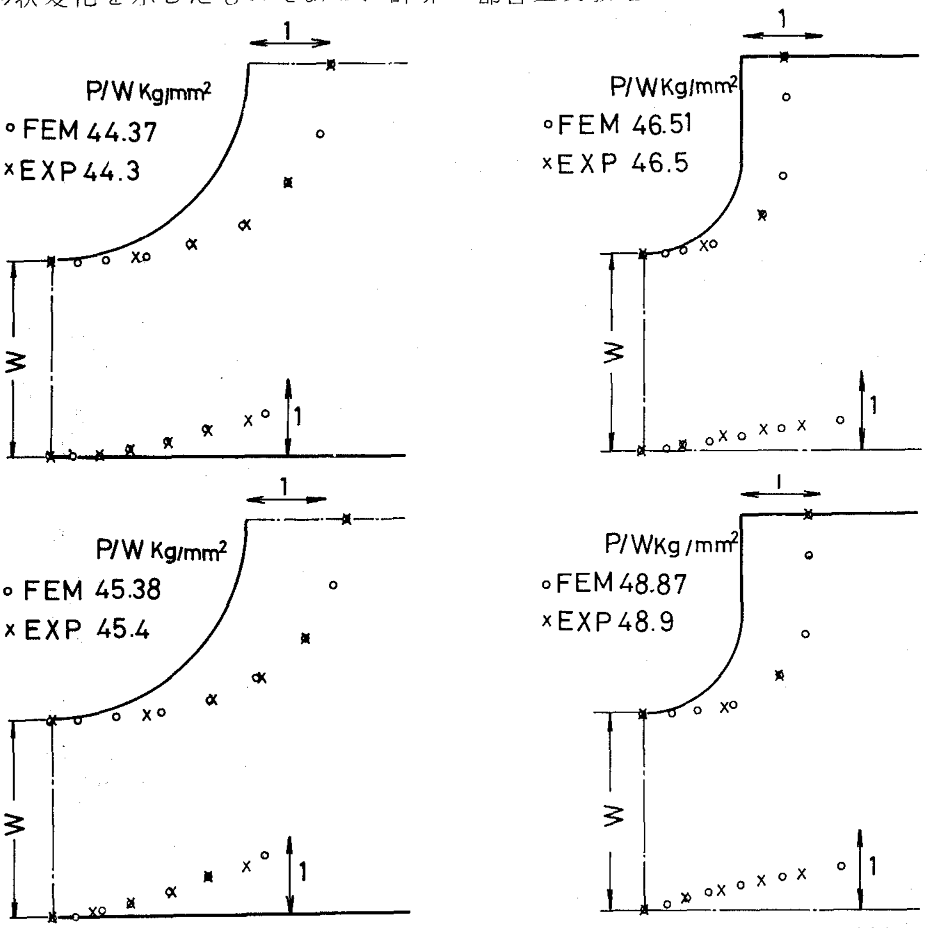


(a) 円孔を有する帯板　　(b) 半円切欠きを有する帯板　　(c) U型切欠きを有する帯板

図4－19　荷重変位関係

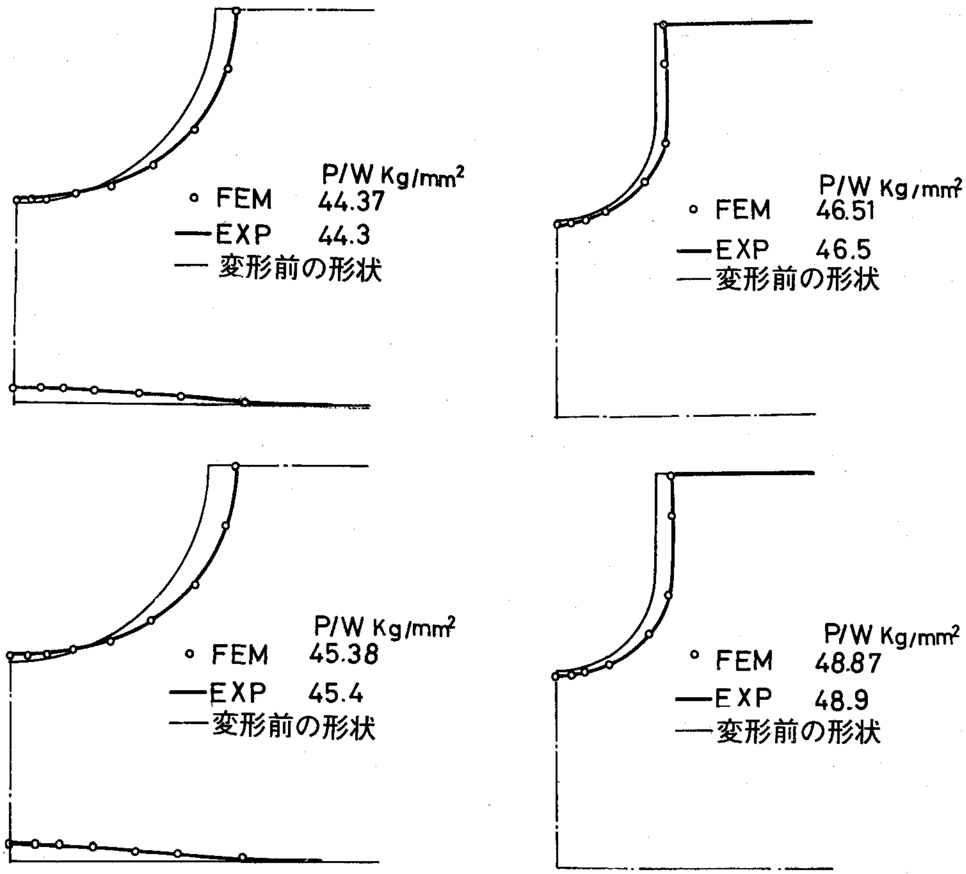
くなっている。これは単軸引張り試験において，ひずみが大きくなるとくびれが生じ，真の応力ーひずみ関係が求められなくなることから 4.5.1 の計算においては対数ひずみ 0.1 2 の所の接線係数でそれ以上のひずみ域の接線係数を代表させたが，これが真の材料特性を表わしていない可能性があること，および大きな変形による異方性[91]が生じたことなどの材料の構成方程式に関するものが原因であると考える。

図４－２０はモアレじまから計算した軸方向の変位成分 U^2 の分布を，円孔および切欠きに沿って図示したものである。図４－２１は円孔および切欠きの形状変化を示したものである．計算の都合上実験結



(a) 円孔を有する帯板　　(b) U型切欠きを有する帯板

図４－20　円孔および切欠きに沿う軸方向の変位U²の分布，(U²/W)×10
FEMは厳密法，EXPは実験による結果を示す



(a) 円孔を有する帯板　　　　　　(b) U型切欠きを有する帯板

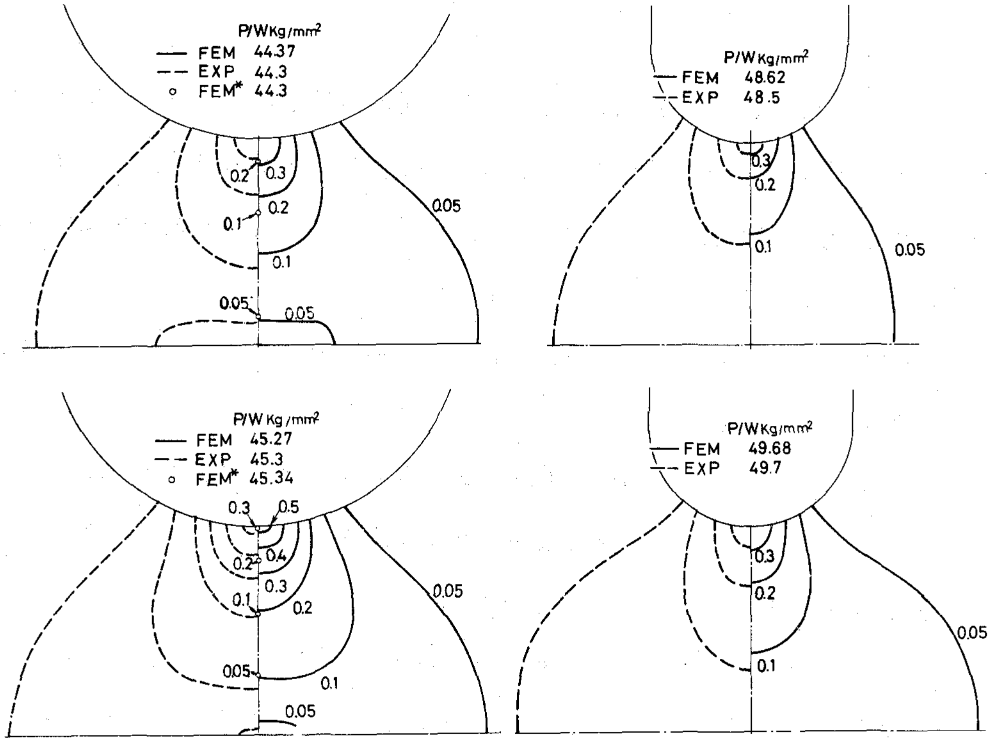
図４−21　円孔および切欠きの形状変化ＦＥＭは厳密法，ＥＸＰは実験による結果を示す

果とまったく同じ荷重において比較することができなかったので，両者の値がもっとも近い所で比較を行なっている　他の図においても同様である．これら両図において実験値と計算値の一致は良好である．

図４−２２は円孔および切欠きを有する帯板の最小断面付近のGreen のひずみγ_{22}の分布を示している．板厚方向にくびれが生じるほど変形が大きくなると，モアレ法によって求めたひずみは真の表面ひずみを与えないが，※ここで示した例はいずれも板厚方向にくびれを起していないのでその問題を考える必要はない．ひずみは変位を１回微分することによって得られるので小さな測定誤差も大きく拡大されて出てくる．このことを考慮すると，実験結果は厳密

※このことは5.5.1.4において述べる．

法で求めた計算結果を十分裏付けているものと考える．円孔を有する帯板の場合の最小断面上の“○”印は従来法による結果を示している．従来法によるひ



(a) 円孔を有する帯板　　(b) U型切欠きを有する帯板

図4－22　最小断面付近のGreenのひずみ分布ＦＥＭは厳密法，ＦＥＭ*は従来法，ＥＸＰは実験による結果を示す

ずみの定義は不明確であり全領域について厳密法で求めたと同じ定義のひずみに変換することはできないので，ひずみの分布は図示しなかった．ただ，最小断面上では従来法によるひずみは対数ひずみになるので，※これをGreen のひずみに変換したものを図示している．従来法による結果はすべて実験値から

※　９０項の脚注参照．

大きくはなれており，この方法によって大ひずみ域におけるひずみ分布を予測することはできないようである．

4. 6 結 言

本章では前章までに定式化した大ひずみ大変形の増分形の有限要素法の有効性を調べるために，例として工学上基本的な二，三の問題の弾性および塑性解析を行なった．解析は荷重漸増法を用い，構成方程式としては前章において埋込み座標系の場合に一般化したものを用いた．

まず大きな単純せん断変形の解析例によって用いた構成方程式（３－８）の妥当性を数値的に示した．

弾性問題の例としてA. J. Durelli らの実験結果と比較するために，ポリウレタンラバーの応力－ひずみ関係を用いて有孔帯板の引張りの解析を行なった．その結果はＡ．J. Durelli らのものとよく一致した．

弾塑性問題に対しては，（Ⅰ）線形硬化および（Ⅱ）非線形硬化の二つの場合について解析した．（Ⅰ）では２方向から負荷された円孔を有する板および切欠きを有する帯板の引張り問題を扱い，後者については従来法によっても解析を行なって比較した．その結果は，荷重変位のような全体的な量に対しても明確な差異が生じ，とくにひずみについては大きな差が現われた。（Ⅱ）では，実験で求めた軟鋼の単軸引張りの応力－ひずみ関係を用いて円孔および切欠きを有する帯板の引張りの解析を行ない，モアレ法によって求めた実験結果との比較検討をした．その結果，荷重変位関係および変位分布に対しては，厳密法による結果と非常によく一致した．いっぽうひずみについても，実験値の誤差を考慮すると，厳密法による計算結果は，この実験結果をおおむね裏付けているとの結論を得た．これに対して従来法による計算結果は，荷重一変位関係についても，変位が大きくなると実験値から大きく離れてしまうことが判明した．

またひずみについても実験値から大きく離れる結果を得た。

以上のことから，従来法による解析は大きな誤差を含むことが判明し，厳密法は大ひずみ大変形問題に対して良好な結果を与えるということが結論できた。

第 5 章　モアレ法による大ひずみ大変形問題の実験的解析（有限要素モデルの応用）

5.1 緒　　言

一般に2組の細かい平行線群を重ね合わせるとモアレじまができ，双方の間に相対的な移動および回転を生ぜしめると，これに応じてこのしまは移動する．このモアレじまの現象を利用して，変位やひずみの測定を行なうのがモアレ法である．このモアレ現象については古くから知られていたが，モアレ測定に関する技術上の進歩と従来では解析できなかった問題への適用の可能性を有することなどによって，最近になって多くの研究が行なわれるようになった．

モアレ法の主な長所としては，多くの解説記事[92]~[94]に述べられているように，原理が簡単で実験もとくに高度な装置を必要としないで2次元的にひろがった面全体の変位，ひずみ場が測定できること，変位の情報がモアレじまの濃淡の形で与えられるので，これを電気的な信号に変えて測定の精度向上，自動化が可能であること，実物実験ができることなどがあげられる．

ところで，モアレじまの分布からひずみを解析する方法としては，モアレじまの間隔および傾きを測定してそれとひずみの幾何学的な関係を用いる方法が広く一般に使われている．[93],[96],[98]~[102] さらに2枚の同じ変形格子を相対的にずらして重ね合わせる方法，[92],[103] モアレのモアレを作る方法，[92],[103] 基準格子の回転角と主ひずみの関係を用いる方法，[95] モアレじまから変位成分を求めてそれを関数近似してその近似関数の微分によってひずみを求める方法[104]など数多く提案されている．このような多くのひずみ解析方法の中で，精度，労力の点から最後の方法が他の諸法に比べて有利であると考える．

本章においては，塑性変形している材料の解析という観点から変形を増分的に追求することに焦点を合わせ，前章までに定式化し，実際の問題解析に適用してきた，大ひずみ大変形に対して厳密に成り立つ物体座標表示と増分形の関係式をモアレ法に取り入れ，有限要素法と結合した一つの実験的ひずみ解析方法を示す．

5.2節では，物体上に格子を描き変形させた後基準格子としてもとの変形していない格子を選び重ね合わせてできるモアレじまは等変位線を表わすという考え方を一般化して，測定しやすい適度な密度のモアレじまが得られる任意の間隔，任意の角度を有した基準格子を用いた場合に対して，任意の基準状態および変形状態における同一物体点のモアレじまのしま次数の差と変位の関係を求める．これはW. Bossaertら(104)の考え方を一般化したものに相当する．この関係式を用いると，基準格子に1方向の平行線からなる単線格子を用いて鮮明なしまが得られる二つの回転方向およびそのときのモアレじまから変位を求めることが可能になり，また直角2方向のモアレじまから変位を求める従来の解析方法において，単線からなる基準格子の直交性に誤差がある場合に見かけ上のせん断ひずみを排除することができる．

5.3節では，このようにして各物体点において変位成分（変位増分）が求まった後，前章までに定式化を行なった有限要素法を活用したひずみ解析方法を示す．

5.4節では，今までほとんど格子法によって解析されてきた押出し，引き抜き，圧延，切削などの定常塑性加工を解析する目的で，定常変形状態では流線は物体粒子の軌跡であることに着目し，定常変形を物体座標を介してとらえ，モアレ法と結合したひずみ解析方法を提案する．

5.5節では，前節までに示した実験的ひずみ解析方法の適用例として，円孔

および切欠きを有する帯板の引張り問題および平面ひずみ前方押出し問題を選びそのひずみ解析を行なう．

5.2　モアレじまと変位の関係

図5－1に示すように変形していない状態において，注目している物体点Pの原点Oに対する位置ベクトルをXで表わす．そしてXの変形していない状態の試料格子線の基本ベクトル方向e_i成分をθ^i（$i=1, 2$）とする．物体の変形により，この物体点はUだけ変位して位置ベクトル$\bar{X}$の点Rに移ったと考える．ここでは変位Uとモアレじまのしま次数の変化の関係を求める．

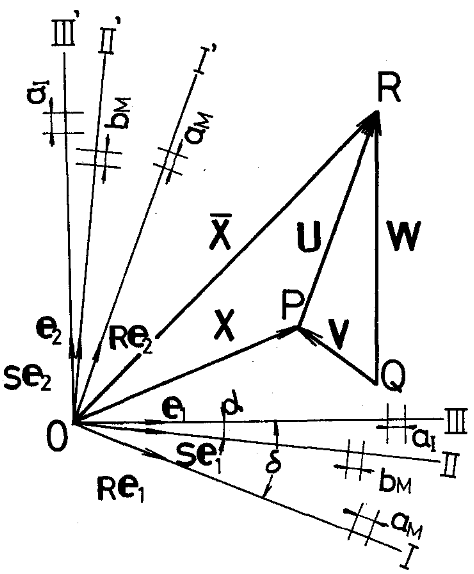


図5－1　モアレじまと変位の関係
OⅠⅠ′，OⅡⅡ′は基準格子を，OⅢⅢ′は変形していない状態の試料格子を示す

なお本章では基準格子は一様な平行線からなるものと仮定するが，以下の議論を局所的にあてはめれば一様でない基準格子に対しても拡張できる．

5.2.1　正方形の基準格子を用いた場合

基準格子と変形していない試料格子の間にピッチと回転のくい違い，すなわちミスマッチ，ミスアライメントがある場合を考える．

図5－1に変形していない状態における二つの格子の相対的位置を示す．相対回転角δは，変形していない試料格子線に対して時計方向を正値とする．二つの格子線に平行な方向の単位ベクトルをそれぞれ$\mathscr{R}e_1$，$\mathscr{R}e_2$，e_1，e_2，で表わし，変形していない状態の試料格子線を基準座標系に選んだとき，これら

を成分表示するとつぎのようになる．

$$\left.\begin{array}{l} e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ ,\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ ,\quad \mathcal{R}e_1=\begin{pmatrix}\cos\delta\\-\sin\delta\end{pmatrix} \\ \mathcal{R}e_2=\begin{pmatrix}\sin\delta\\ \cos\delta\end{pmatrix} \end{array}\right\}\quad (5-1)$$

ただし

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix}\cos\delta & \sin\delta\\ -\sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}$$

基準格子と試料格子の格子間隔をそれぞれ a_M, a_I で表わしその比をβとすると

$$\beta=a_M/a_I \qquad (5-2)$$

変形していない状態において，基準格子にミスマッチβ，ミスアライメントδを与えることにより物体点Pはみかけ上，位置ベクトル$\beta\mathcal{R}\mathcal{X}$の$Q$点にあるように見える．※ここでベクトル$\overrightarrow{QP}=\mathcal{V}$，$\overrightarrow{QR}=\mathcal{W}$とすると

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{V}=\mathcal{X}-\beta\mathcal{R}\mathcal{X} \\ \mathcal{W}=\bar{\mathcal{X}}-\beta\mathcal{R}\mathcal{X} \end{array}\right\}\qquad (5-3)$$

ベクトル$\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$を成分表示すると

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{V}=V_i e_i=\hat{V}_i\mathcal{R}e_i \\ \mathcal{W}=W_i e_i=\hat{W}_i\mathcal{R}e_i \end{array}\right\}\qquad (5-4)$$

モアレじまの性質から，点P，Rのモアレじま次数（N_1，N_2）および（$\bar{N}_1$，$\bar{N}_2$）に基準格子の格子間隔a_Mをかけた量は，点P，RのQに対する相対位置ベクトル$\mathcal{V}$，$\mathcal{W}$の基準格子の格子線の基本ベクトル$\mathcal{R}e_i$方向成分に等しく

※　変形していない状態で二つの格子に同じものを用いると，変形状態のモアレじまは，基準格子の格子線に垂直方向の等変位線を表わす．変形していなくてもミスマッチβ，ミスアライメントδを与えるとモアレじまができるが，このモアレじまは見かけ上，基準格子と同じ試料格子を均質変形と剛体回転によって，現在の試料格子に変形させた場合のモアレじまに対応する．また変形していない試料格子に不規則格子を用いた場合も，上述と同様な考え方で処理できる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{V}_i &= a_M N_i \\
\hat{W}_i &= a_M \bar{N}_i
\end{aligned}
\right\} \qquad (5-5)
$$

式（５－３）～（５－５）の関係を用いると，変形していない状態における点Pのしま次数はつぎのようになる．

$$
\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_M} \begin{bmatrix} \cos\delta-\beta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta-\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \qquad (5-6)
$$

いっぽう変位$\mathcal{U}$を成分表示すると

$$
\mathcal{U} = U_i\, e_i = \hat{U}_i \mathcal{R}\, e_i \qquad (5-7)
$$

式（５－３）～（５－５），（５－７）から

$$
\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = a_M \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N}_1 - N_1 \\ \bar{N}_2 - N_2 \end{pmatrix} \qquad (5-8)
$$

上式に式（５－６）を代入すると

$$
\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = a_M \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{pmatrix}
- \begin{bmatrix} 1-\beta\cos\delta & -\beta\sin\delta \\ \beta\sin\delta & 1-\beta\cos\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \qquad (5-9)
$$

式（５－８）は変形前後の同じ物体点のしま次数と変位の関係を与える．またこの式より，任意の基準状態（任意の変形状態）およびその上に変形が加わった後の状態の同じ物体点のしま次数の変化と変位の関係を求めることができる．

式（５－９）は，変形後のしま次数$\bar{N}_i$と物体座標θ^iから変位成分を求める式で，全変位を求める場合に適している．以上は物体座標表示のモアレじまと変位の関係式である．つぎに変形していない試料格子の格子線と一致させた空間座標x^iによって関係式を導出する．

点Rの空間座標x^iは，物体座標θ^iと変位成分U_iにより

$$x^i = \theta^i + U_i \qquad (5-10)$$

式（５－１０）を（５－９）に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = a_I \begin{pmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \cos\delta - \beta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta - \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad (5-11)$$

全変位U_iは空間座標によっても容易に求めることができるが，変形過程における同じ物体粒子の位置を明確にすることは困難であるので，式（５－１１）により同じ物体点の増分変位を求めるのは適当でない．

5.2.2　独立２方向の平行直線群からなる基準格子を用いた場合

図５－１に示すように任意の角度をなすOⅡ，OⅠ′を２群の基準格子の格子線に垂直な方向に選んだ場合のモアレじまのしま次数と変位の関係は，ミスアライメントδ，αを有し，格子間隔がそれぞれa_M，b_Mの２種類の基準格子に対するモアレじまと変位の関係式から求めることができる．格子間隔がb_Mの基準格子を用いた場合，点P，Rにおけるモアレじまのしま次数を（M_1，M_2），（$\bar{M}_1$，$\bar{M}_2$）で表わすと，式（５－６）から

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_M} \begin{bmatrix} \cos\alpha - \gamma & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \qquad (5-12)$$

ここで

$$\gamma = b_M / a_I \qquad (5-13)$$

変形していない試料格子方向の変位成分は

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = b_M \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_1 - M_1 \\ \bar{M}_2 - M_2 \end{pmatrix} \qquad (5-14)$$

式(5－8)，(5－14)は同一変位を表わしているので，両式から($\bar{N}_2-N_2$)，($\bar{M}_1-M_1$)を消去すると

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\delta-\alpha)} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\delta \\ -\sin\alpha & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_M\,(\bar{N}_1 - N_1) \\ b_M\,(\bar{M}_2 - M_2) \end{bmatrix} \qquad (5-15)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\delta-\alpha)} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\delta \\ -\sin\alpha & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_M \bar{N}_1 \\ b_M \bar{M}_2 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{\cos(\delta-\alpha)} \begin{bmatrix} \cos(\delta-\alpha) - \beta\cos\alpha & -\gamma\sin\delta \\ \beta\sin\alpha & \cos(\delta-\alpha) - \gamma\cos\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

$$(5-16)$$

式(5－15)，(5－16)は独立2方向の平行線からなる基準格子を用いた場合のしま次数と変位の関係を表わす式で，$\alpha=\delta$とおくと直交格子の基準格子を用いた場合のしま次数と変位の関係を表わし，さらに$\alpha=\delta$，$a_M=b_M$とおくと，式(5－8)，(5－9)に一致する．なお式(5－16)を用いる

と，物体点 θ^i の近傍でモアレじまに特異性がないような場合，変位勾配は次式によって計算できる．

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta U_1}{\Delta\theta^1} & \dfrac{\Delta U_1}{\Delta\theta^2} \\ \dfrac{\Delta U_2}{\Delta\theta^1} & \dfrac{\Delta U_2}{\Delta\theta^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos(\delta-\alpha)} \begin{bmatrix} \cos\alpha \sin\delta \\ \\ -\sin\alpha \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_M/d_{11} & a_M/d_{12} \\ b_M/d_{21} & b_M/d_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
-\frac{1}{\cos(\delta-\alpha)} \begin{bmatrix} \cos(\delta-\alpha)-\beta\cos\alpha & -\gamma\sin\delta \\ \beta\sin\alpha & \cos(\delta-\alpha)-\gamma\cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5\text{-}17)
$$

ただし，図５－２に示すように２群のモアレじまによって切断される物体座軸の切片をそれぞれ d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} で表わし，物体座標の正方向に進むときモアレじまのしま次数が増加する場合を正とする．

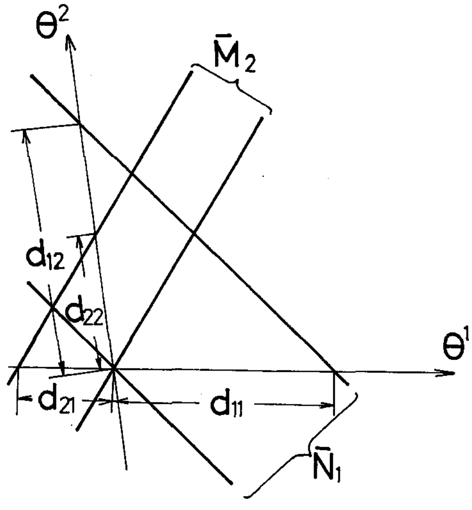


図５－２　記号の説明

微小変形の場合に対しては近似的に物体座標と空間座標の区別をする必要はなくなる．そのような場合に対して，従来から上式の θ^i を空間座標と考えてひずみ解析に使っている例もある．(93)※

※　$\delta=\alpha$　，　$a_M=b_M$　の場合

5.3 非定常問題の解析

モアレ法では被測定材全面にわたり変位およびひずみ分布が得られることが特徴であるが，実際は代表測定点でデータを取りそれ以外の部分の値を関数近似するのが普通である．

この方法では変位場に特異性がない場合に対して，関数形を適当に選ぶことにより十分な精度でもとのデータが再現できる．ここでは，複数個の測定点を含む領域を全体の部分領域と考え，測定点におけるデータを用いてそれ以外の点の値を内そう法により計算をする．この考え方は有限要素法において各節点の値から要素内部の値を求めることに対応する．したがって，前節で述べた手法によって各物体点における変位（変位増分）が求まった後のひずみ計算には第２章の有限要素法のひずみ解析部分を応用することができる．本章においても，第２章の議論を直接応用できるように，ひずみ増分はGreenのひずみ γ_{ij} とその増分量 $\varDelta\gamma_{ij}$ を用いる．

任意の変形状態とそれに付加した増分変形後の状態のモアレじまのしま次数の変化から式（５－１５）により，変形していない状態の試料格子の格子線方向の増分変位 $\varDelta U_i$ が求まる．変形していない状態および変形状態の試料格子線の基本ベクトルをそれぞれ e_i，e^i および G_i，G^i とおくと，増分変位 $\varDelta U$ はこれらの基本ベクトルに対してつぎのように成分表示できる．

$$
\begin{aligned}
\varDelta U &= \varDelta u^i G_i = \varDelta u_i G^i \\
&= \varDelta U_i e_i = \varDelta U_i\, e^i
\end{aligned}
\qquad (5-18)
$$

ただし i，j＝１．２とする．ひずみ増分は，式（１－１５）から

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\Delta u_i \|_j + \Delta u_j \|_i\right) \\
\Delta\gamma_{33} &= \frac{1}{2} G_{33,\,m}\Delta u^m \quad (\text{軸対称の場合})
\end{aligned}\right\} \qquad (5-19)
$$

いま有限要素モデルとして，2.4節で示した単体モデルを選ぶと，この場合3角形要素となる．式(2－31)から，要素の変形前後の基本ベクトルの間にはつぎの関係が成立する．

$$
\left.\begin{aligned}
\mathcal{G}_i &= \overline{\textcircled{H}}{}_i^k\, e_k \\
\mathcal{G}^i &= \overline{\Omega}{}_k^i\, e_k
\end{aligned}\right\} \qquad (5-20)
$$

したがって式(5－18)，(5－20)から，変形状態における要素の基本ベクトル方向の増分変位の反変成分 Δu^i は，つぎのように表わされる．

$$
\Delta u^i = \overline{\Omega}{}_k^i \Delta U_k \qquad (5-21)
$$

ところで，要素内部の点 θ^i の変位成分 Δu^i は，要素の節点における変位成分 ΔU_{kR} (R=1，2，3)により表わすことができる．すなわち

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta u^i &= \psi_R\, \overline{\Omega}{}_k^i\, \Delta U_{kR} \\
\psi_R &= \alpha_R + \beta_{Ri}\,\theta^i
\end{aligned}\right\} \qquad (5-22)
$$

ここで α_R, β_{Ri} は式(2－36)によって与えられる．

このモデルでは，要素内部の変位成分は物体座標の1次式で表わされるので，要素内部で計量は一様である．したがって式(5－19)は

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\beta_{Ri} G_{mj} + \beta_{Rj} G_{mi}\right) \overline{\Omega}{}_k^m \Delta U_{kR} \\
\Delta\gamma_{33} &= \frac{1}{2} G_{33,\,m}\, \psi_R\, \overline{\Omega}{}_k^m\, \Delta U_{kR} \ (\text{軸対称の場合})
\end{aligned}\right\} (5-23)※
$$

※　このひずみ増分の性質については1．3節参照

なお上式の計量テンソルの微分$G_{33,m}$は，式（２－１９），（２－２１），（５－２１），（５－２２）を用いるとつぎのように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}
\overset{(n)}{G}_{33,\,r} &= \overset{(n-1)}{G}_{33,\,r} + \overset{(n-1)}{G}_{mr}\,\overset{(n)}{\Delta u}{}^{m} + \overset{(n-1)}{A}_{m}\,\beta_{Nr}\,\overset{(n)}{\Delta u}{}^{m}_{N} \\
\overset{(0)}{A}_{r} &= 2\delta^{1}_{r}\,\theta^{1} \\
\overset{(n)}{A}_{r} &= \overset{(n-1)}{A}_{r} + \overset{(n-1)}{C}_{mr}\,\overset{(n)}{\Delta u}{}^{m} + \overset{(n-1)}{A}_{m}\,\beta_{Nr}\,\overset{(n)}{\Delta u}{}^{m}_{N} \\
\overset{(0)}{C}_{rs} &= 2\,\delta^{1}_{r}\,\delta^{1}_{s} \\
\overset{(n)}{C}_{rs} &= \overset{(n-1)}{C}_{rs} + (\overset{(n-1)}{C}_{mr}\,\beta_{Ns} + \overset{(n-1)}{C}_{ms}\,\beta_{Nr})\,\overset{(n)}{\Delta u}{}^{m}_{N}
\end{aligned}\right\} \qquad (5-24)$$

上式の（n）は増分変形の段数を表わす．

このようにしてモアレしま次数の差からひずみ増分が求まると，第３章で示した弾塑性材の構成方程式によって応力増分を計算することも可能である．※

求めたひずみ増分$\Delta\gamma_{ij}$から増分変形後のひずみγ_{ij}は

$$\gamma_{ij} = {}_{0}\gamma_{ij} + \Delta\gamma_{ij} \qquad (5-25)$$

ここで${}_{0}\gamma_{ij}$は増分変形前の状態のひずみを表わす．全変位U_iからGreenのひずみγ_{ij}を求める場合は次式による．

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\{\beta_{Rj}U_{iR} + \beta_{Ri}U_{jR} + \beta_{Ri}\beta_{Sj}U_{mR}U_{mS}\} \qquad (5-26)$$

式（５－２２），（５－２３），（５－２６）では，単体要素モデルの場合を扱ったが，他の要素モデルについても同様の議論を行うことができる．

※　正しいひずみ場が求まるとつりあい式を用いることなく応力ーひずみ関係から応力場が唯一的に決まるが，実験で求めたひずみ場には誤差が含まれているのでそれによって求めた応力場は必ずしもつりあい式を満足しない．つりあい式を用いてそのような応力場を修正する方法が考えられるが，今のところよい方法は見つかっていない．

5.4　定常問題の解析

定常変形過程を実験的に解析する方法として，格子法およびモアレ法が有力である．格子法についてはE. G. Thomsen[105]らはVisio-Plasticityと称して多くの解析例を示している．ほかに格子法に関する研究として，流れ関数を導入したA. Shabaikらの研究[106][107]格子点の速度成分を，体積一定の条件を満足させるように最小2乗近似する加藤ら[95]の方法がある．いっぽうモアレ法を用いた研究は，加藤ら[95]のものがあるが，定常変位場から増分変形量を解析するモアレ法の一般的な研究は行なわれていない．

本節では，定常変形の上に増分変形を加えるいわゆる増分モアレ法[95]を用いないで，定常変形のモアレじま※からその増分変位場，増分ひずみ場を求める手法を示す．

図5.3に示すように定常変形をしている物体上の任意の二つの物体点のある時刻 $t=t_0$ における位置 O_0, P_0, 時刻 $t_0+l\Delta t$ ($l=1, 2, \cdots n-1, n, n+1 \cdots$) における空間位置をそれぞれ $O_l\,P_l$ で表わす．曲線 $O_0\,O_1\,O_2\cdots$, $P_0\,P_1\,P_2\cdots$ は物体点 O, P の運動軌跡を表わし流線となる．任意の点 P_{n+1} の P_n に対する相対位置ベクトル $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ はつぎのように表わせる．

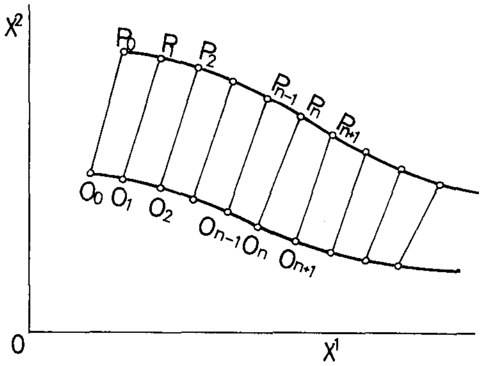


図5－3　定常変形による物体粒子の軌跡

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \overrightarrow{O_{n-1}\,O_{n+1}} - \overrightarrow{O_{n-1} O_n} + \overrightarrow{O_{n+1} P_{n+1}} - \overrightarrow{O_n P_n} \tag{5-27}$$

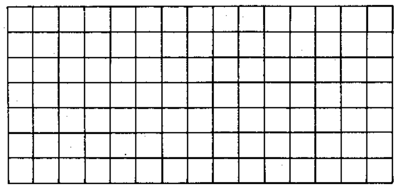
$P_n P_{n+1}$ は物体点 P_n において，単位時間 Δt の間に生じる増分変位を表わし

※　定常モアレと略称する．

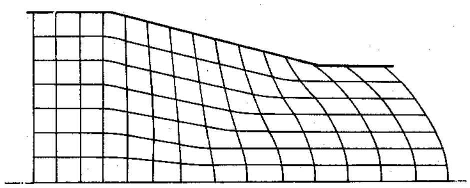
ている．

つぎに物体点の空間座標を読むことなしに定常モアレから増分変位場を導出する．ここでは後で扱う押出し問題を例として説明する．

図5－4(a)のように押出し軸線に平行および垂直な物体座標格子をモアレ用の格子とともに焼きつけた試験片に定常変形を加えた場合物体座標線が(b)のように変形したと考える．図において押出し軸線に平行であった座標線は流線を形成している．定常変形においては，流線は物体点の軌跡であって流線に沿って変形を追ってゆくと，任意の位置にある物体粒子の一連の変形過程履歴を知ることができる．したがって変形していない状態において軸線に垂直な格子線を等間隔に焼きつけておくと，一様変形状態のところで1格子間隔押出すに要する時間 Δt 内に流線上の相隣り合った格子点は図5－3の O_n が O_{n+1} にあるいは P_n が P_{n+1} に移動するのに対応して変位する．定常変形は，変形前に押出し軸線に垂直な2本の格子線によってはさまれた領域がつぎの領域へ移るときの増分変形を積分することによって解析できる．もちろん不等間隔の物体格子を用いても解析できるが，そのときは格子点が同じ物体点に対応しないので増分量の加え方に注意が必要である．本節ではすべて等間隔格子を用いる．



(a) 変形前



(b) 定常変形状態

図5－4　物体座標

図5－5は一様変形領域および I，$I+1$ 番目の領域を格子番号1のところを重ねて示している．任意の物体点 m を考え，領域 I，$I+1$ の物体点 m のしま次数を $\overset{I}{N}{}^{i}_{m}$，$\overset{I+1}{N}{}^{i}_{m}$ で表わし物体点1に対する相対しま次数 $\overset{I}{M}{}^{i}_{m}$，$\overset{I+1}{M}{}^{i}_{m}$ を次の

ように定義する．

$$\left.\begin{aligned} {}^{I}M^{i}_{m} &= {}^{I}N^{i}_{m} - {}^{I}N^{i}_{1} \\ {}^{I+1}M^{i}_{m} &= {}^{I+1}N^{i}_{m} - {}^{I+1}N^{i}_{1} \end{aligned}\right\} \quad (5-28)$$

したがって領域 I の物体点 m が領域 $I+1$ の物体点 m に移る間に生じる格子点１に対する相対的な増分変位の変形していない試料格子の格子線方向の成分は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} \Delta {}^{I}U^{1}_{m} &= a_M \Delta {}^{I}M^{1}_{m} \\ \Delta {}^{I}U^{2}_{m} &= b_M \Delta {}^{I}M^{2}_{m} \\ \Delta {}^{I}M^{i}_{m} &= {}^{I+1}M^{i}_{m} - {}^{I}M^{i}_{m} \end{aligned}\right\} \quad (5-29)$$

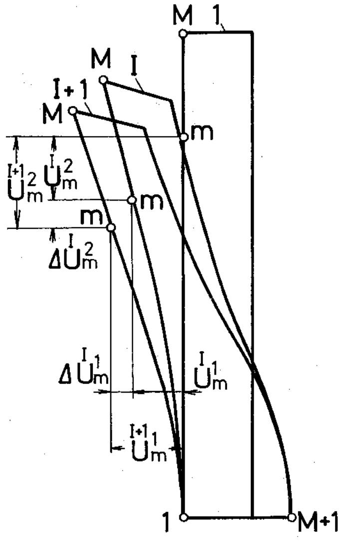


図５－５　増分変形

ここではミスマッチのみでミスアライメントがない基準格子を選んだが，ミスアライメントがある場合も同様に扱うことができる．

式（５－２９）で増分変位成分が求まると，ひずみ増分，全ひずみなどの解析方法は，前節と同様にして求めることができる．式（５－２９）は基準点１に対する変位増分を表わしているが，式（５－２７）を考慮すると，m 点の空間座標 x^i を求めることができつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} {}^{I}x^{1}_{m} &= {}^{I-1}x^{1}_{m} + \Delta {}^{I-1}U^{1}_{m} + {}^{I-1}x^{1}_{M+1} - {}^{I-1}x^{1}_{1} \\ {}^{I}x^{2}_{m} &= {}^{I-1}x^{2}_{m} + \Delta {}^{I-1}U^{2}_{m} \end{aligned}\right\} \quad (5-30)$$

5.5　実験例

本節では，これまでに述べたモアレ法を大きなひずみ領域での円孔および切欠きを有する帯板の平面応力状態下における引張りおよび平面ひずみ前方押出

しの実験例に対して適用をする.

5. 5. 1　実験例(I)－円孔および切欠きを有する帯板の引張り－

5. 5. 1. 1　実　験　装　置

試験片に加える引張り荷重は島津製作所製の万能試験機を用いて負荷した.図5－6に試験機に実験装置を取り付けた状態を示す.荷重は偏心しないように,球座およびピンを介して負荷する.試験片①の標点間に取りつけられた二つのダイヤルゲージ②を用いて伸びの測定を行なう.また③は試験片上のモアレ格子と物体点および試験片形状

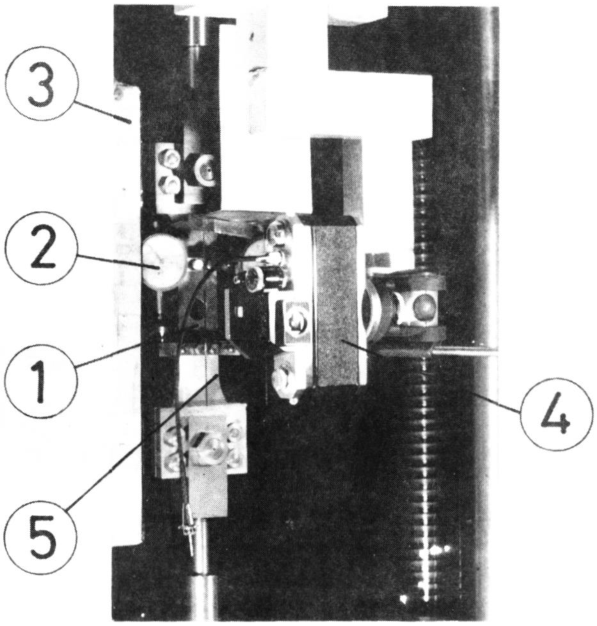


図5－6　実験装置

1　試験片
2　ダイヤルゲージ
3　光源
4　カメラ
5　ハーフミラー

変化を35 *mm* カメラ④で撮影するときの光源であり,⑤は光源からの光が直接レンズに入ることを防ぐためのハーフミラーである.

5. 5. 1. 2　試　　験　　片

図5－7に完成した試験片形状を示す.この試験片はつぎの順序で加工を行なう.

(1)　素材作製:同じロッドのSS41板材の同圧延方向から90×30の試験片素材を取り,表面を仕上げる.

(2)　モアレ格子の焼付け(94)(108)(109):(1)で作製した試験片表面のモ

アレ格子焼付け部分をエメリーペーパ（＃800程度）て研摩して脱脂後感光液（KMER[※1]とKMERT[※2]の混合比３：７の液）を回転塗布機で一様厚さに塗布した後十分乾燥させる．つぎに１５０本／インチのモアレ用格子および２㎜間隔の物体点の原板フイルムをこの上に重ねて真空装置で十分密着させて水銀灯で感光させる．これをKMERD[※3]で現像した後水洗いをして未感光部分を除去する．そして塩化第２鉄溶液（２０℃ ４０ボーメ）を用いてエッチングによりモアレ用格子及び物体点を浮彫りにする．

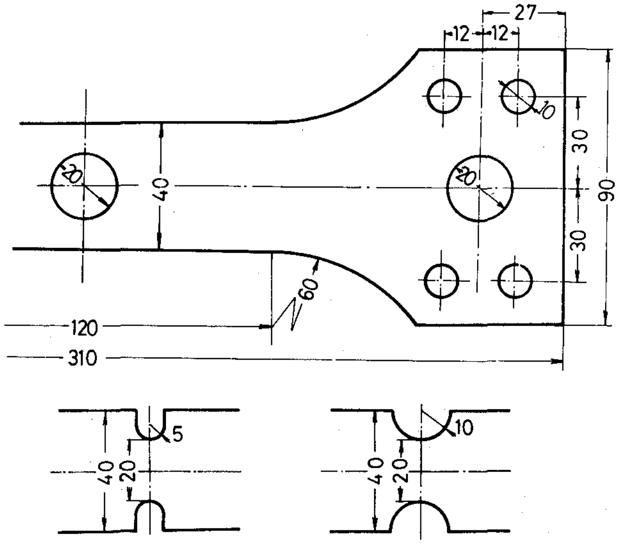


図５－７　試験片

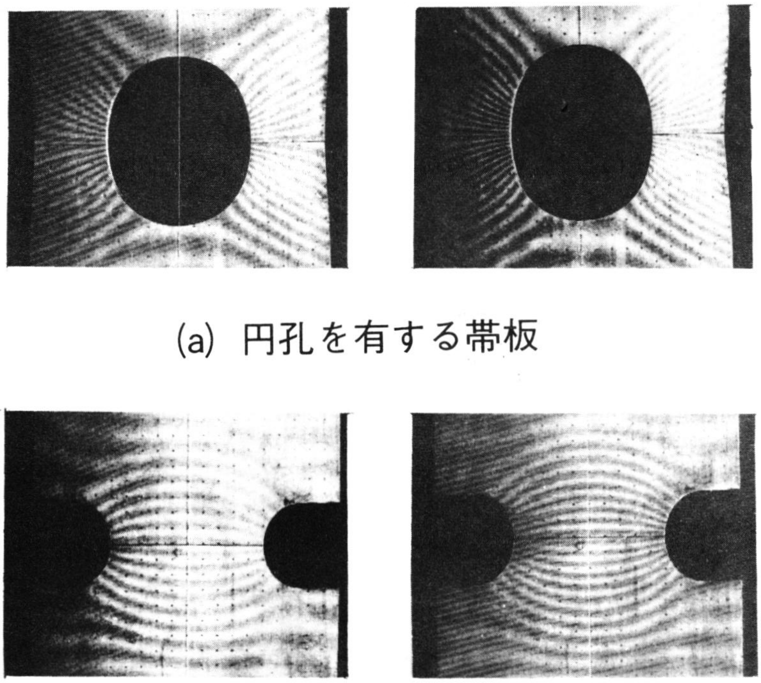
(3)　試験片の再加工：(2)で作製した試験片を図５－７の試験片形状に加工する．このときモアレ用格子面を合わせ面になるように２枚の試験片を重ねて加工すると，その面に傷がつかないので都合がよい．

5. 5. 1. 3　実験および解析方法

作製した試験片を実験装置に取りつけ万能試験機によって荷重をかける．適当な荷重間隔で，試験片表面の変形モアレ格子を３５㎜カメラで接写[※4]すると同時にダイヤルゲージの目盛を読み取る．変形が大きくなった所では，荷重の変化量が小さくなるので，ダイヤルゲージの読みによって適当な変位間隔における写真撮影と荷重の読み取りを行なう．

※　1　Kodak Metal Etch Resist　※2 Kodak Metal Etch Resst Thinner
※　3　Kodak Metal Etch Restst Developer．
※　4　フイルムは伸縮しないようフジミニコピー使用．

モアレじまはこのようにして撮影した変形格子を引き伸し機で拡大して，この拡大像と基準格子を重ね合わせることによって作る．この方法は永井[94]によるもので，実験途中で基準格子を回転したり交換する必要はなく，常に最良のモアレじまを得ることができる．



(a) 円孔を有する帯板

(b) U型切欠きを有する帯板

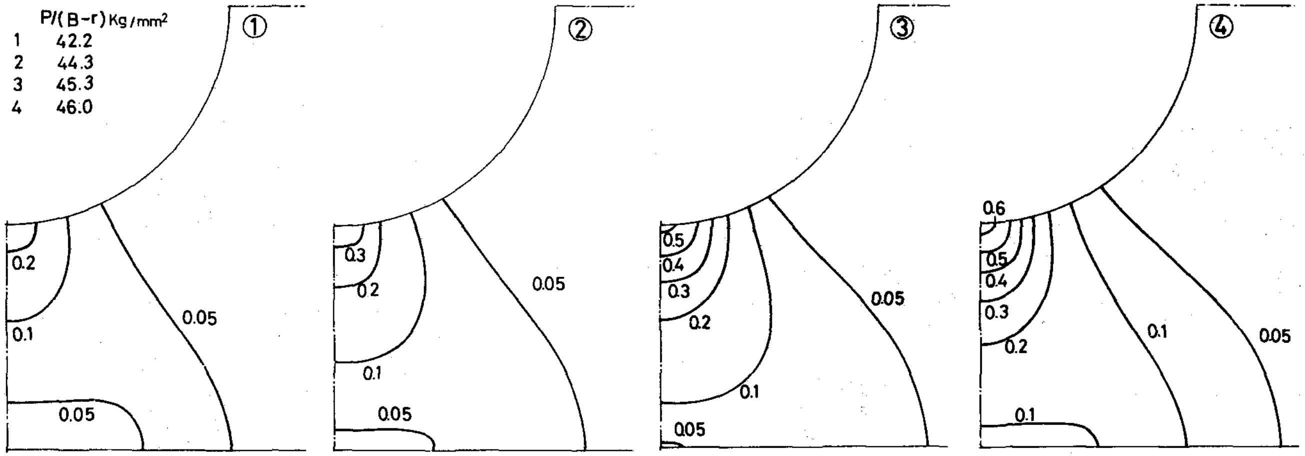
図5－8　モアレじま

モアレじまの一例を図５－８に示す．

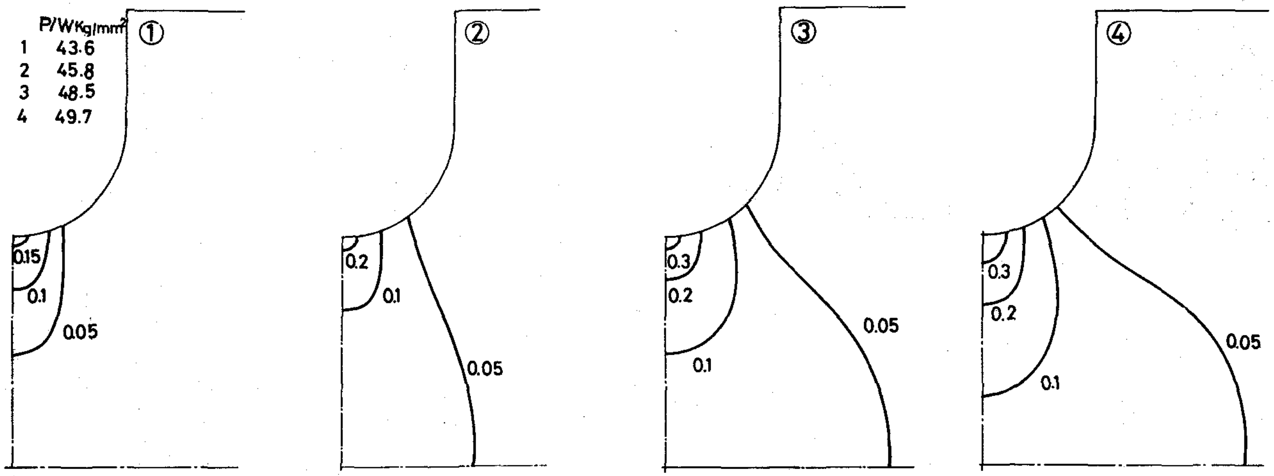
つぎにあらかじめエッチングしておいた物体点におけるモアレじまのしま次数を読み取った領域を多数の部分領域（各領域をオーバラップさせる）に分割してその領域ごとにしま次数を多項式近似してデータを平滑化する．この多項式を用いて図４－１５に示す有限要素の節点におけるしま次数を計算する．節点の変位成分は，式（５－１６）によって求め，ひずみ成分は式（５－２３）によって計算する．

5.5.1.4　実　験　結　果

図５－９は円孔および切欠き付近の軸方向のGreenのひずみγ_{22}の分布を



(a) 円孔を有する帯板



(b) U型切欠きを有する帯板

図５－９　最小断面付近の Green のひずみ分布

示したものである．いずれの場合も板厚方向にネッキングを起していない．したがってカメラと試料格子の距離の変化および変形していない試料格子に対する変形状態の試料格子の傾き角は小さく，これらが実際のひずみ分布に及ぼす影響は小さいと考える．

この図から，円孔を有する帯板については，いずれの変形段階においても側面におけるひずみは最小断面上で最大値をとらず，ある程度はなれた所においてそれが生じること，比較的ひずみの大きい箇所は円孔付近にとどまり変形は帯板のごくわずかな領域で非常に大きくなっていることがわかる．

他方，U型切欠きを有する帯板については，円孔を有する帯板の場合よりもいっそう局所的な変形が大きくなっている．これは切欠き材の強度を考える上で十分に考慮しなければならない点である．

5.5.2 実験例(II)－平面ひずみ前方押出し－

5.5.2.1 実験装置

圧縮荷重を与えるために島津製作所製の万能試験機を用いた．図５－１０に試験機に実験装置を取り付けた所を示す．荷重が偏心しないように球座②を介してラム④を移動させる．試験片⑦はダイス⑧によって所要の押出し比に加工される．なおラムの移動量はダイヤルゲージ③によって測定を行なう．

5.5.2.2 試験片

図５－１１に完成した試験片形状を示す．試験片の材質はＡ１０５０ＢＥ－Ｆ材で同じロッドから４０×２０の４角柱を削り出し5.5.1.2で示した方法によってモアレ格子および物体点を表面に焼きつけエッチングする．ただし，この場合のエッチング条件はＳＳ４１材の場合とは異なり５０℃４０ボーメの塩化第２鉄溶液を使用し，また試験片温度も５０℃とする．つぎに焼きつけた格子面を一方の合わせ面として，図５－１１の試験片形状に再加工をする．いずれ

の試験片に対してもノーズをつける．

5.5.2.3　実験および解析方法

作製した試験片を実験装置に取りつけ二硫化モリブデンで潤滑を行なって前方押出しをする．十分な量押出した後取り出し変形格子と基準格子を重ね合わせてモアレじまを作る．つぎにあらかじめエッチングしておいた物体点におけるモアレじまのしま次数を読み取り，これを5.5.1.3と同様に多項式で近似平滑化を行ない，任意の物体点におけるしま次数が計算できるようにする．このようにして求めたしま次数および式（5－28）（5－29），（5－23）（5－30）によって各変形段階における変位増分，ひずみ増分，全ひずみ増分，相当ひずみおよび格子点の空間座標を計算する．

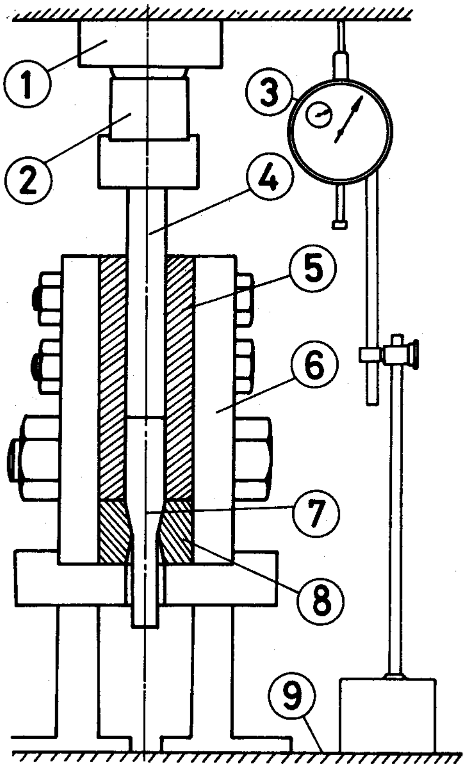


図5－10　平面ひずみ前方押出し装置

1　万能試験機クロスヘッド
2　球座
3　ダイヤルゲージ
4　ラム
5　コンテナ
6　保持板
7　試験片
8　ダイス
9　万能試験機ベッド

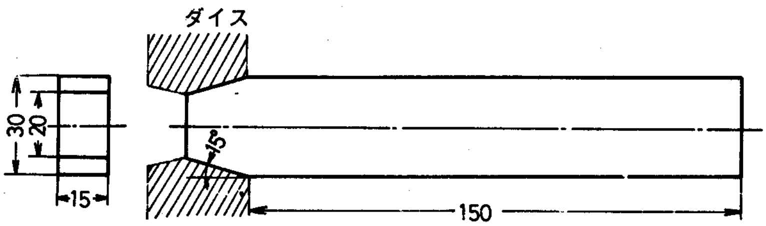


図5－11　試験片

5.5.2.4　実験結果

図5－12は変形状態の2方向の変位成分を表わすモアレじまである．図5－13はこのモアレじまから式（5－30）を用いて計算した格子線（破線）と試験片上にあらかじめエッチングしておいた物体点から求めた格子線（実線）

である．両者はよく一致している．また上で求めた流線の入口および出口における流れ関数の値もよく一致している．※

図５－１４は相当ひずみ増分の分布を示している．相当ひずみ増分は，入口，出口および軸線上の等ひずみ線の密度が高い部分を結んだ領域上で急に変化している．

図５－１５は相当ひずみの分布図で，上流では中心部が，下流では中心から離れた部分がより大きな値になっている．これは図５－１４から推測される，

図５－１６はGreenのひずみγ_{ij}の分布図である．出口側の相当ひずみ増分が大きい領域の近くてγ_{11}の等高線の密度が高くひずみが急変している．

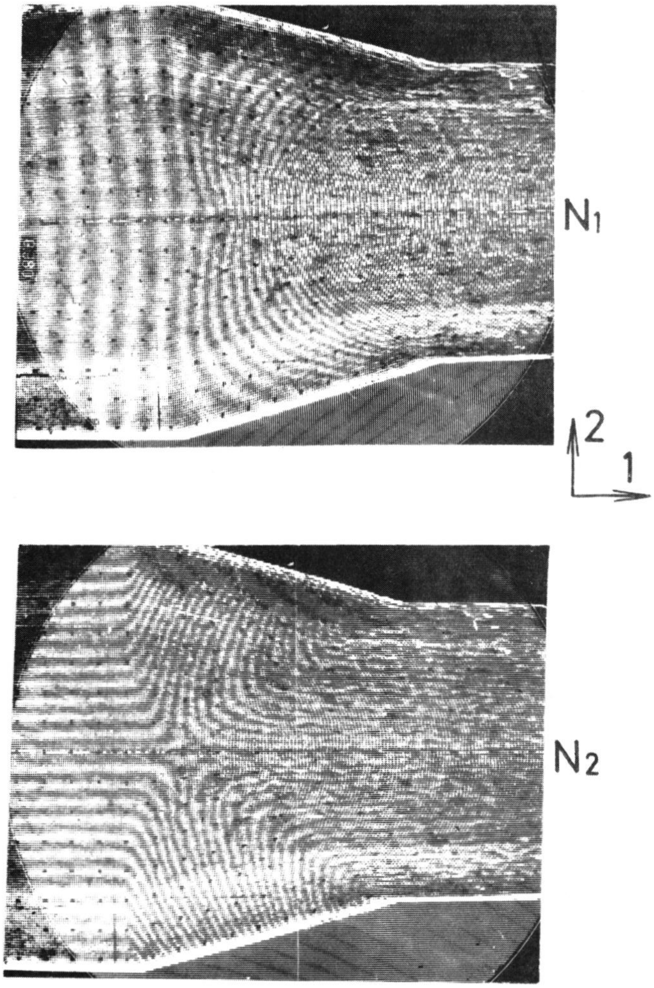


図5－12　モアレじま

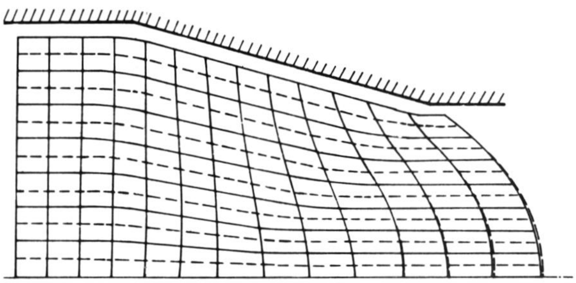


図5－13　流線
——物体点の軌跡
------モアレじまから求めた流線

※　体積一定の条件を満足していることを意味する．

またγ_{12}はこの領域をすぎるとほとんど一定値に落ちつくようである．γ_{22}は中心軸線に近いところでは負値を，離れたところでは正値をとっている．これは軸線に垂直であった格子線が，軸線付近では圧縮され，離れると引張られていることを意味しており，図５－１３の変形格子の形状から推察できる．

図５－１７はGreenのひずみγ_{ij}をテンソル変換して求めたAlmansiのひずみe_{ij}の分布を示したものである．

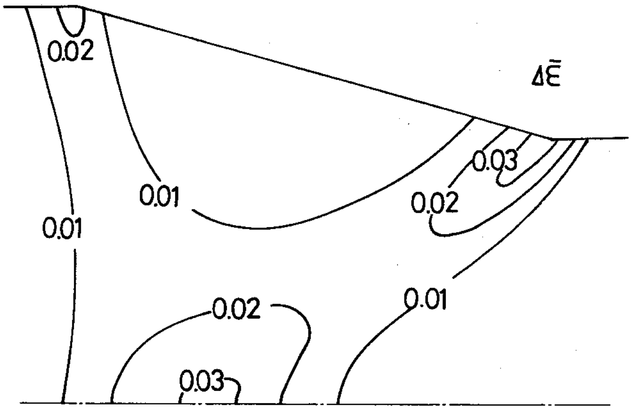


図５－14　相当ひずみ増分の分布

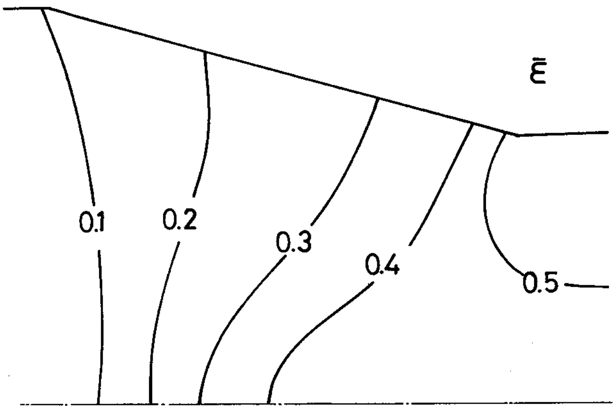


図５－15　相当ひずみの分布

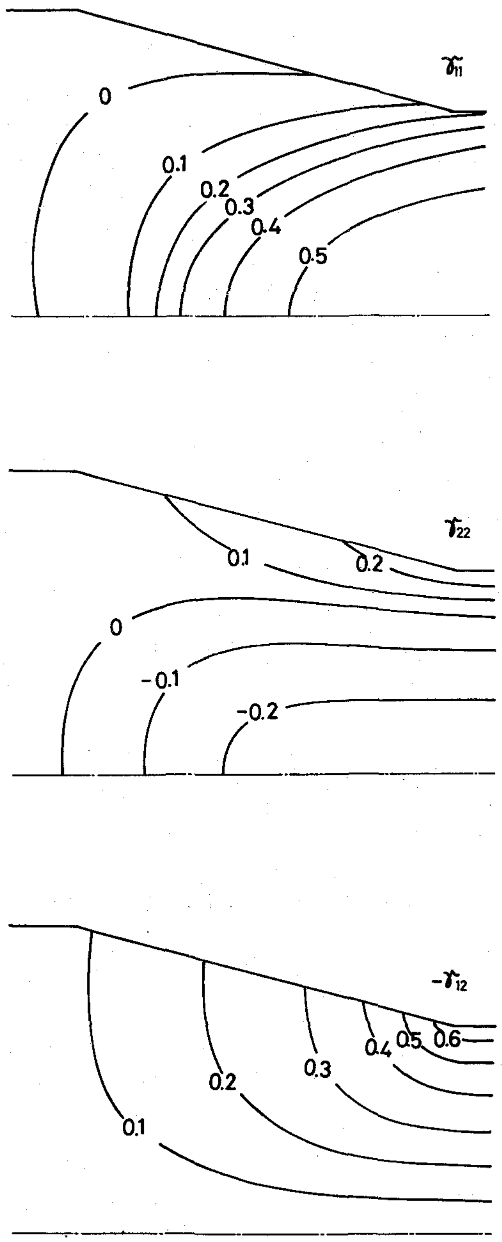


図５－16　Greenのひずみ分布

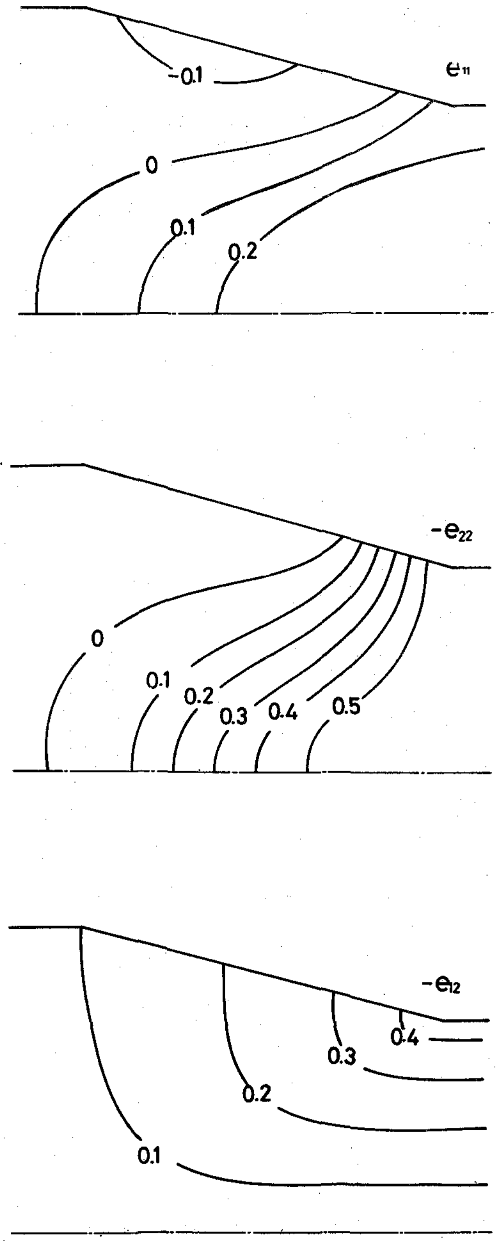


図５－17　Almansiのひずみ分布

5.6 結　　言

本章では，大ひずみ大変形問題を実験的に解析するために物体座標表示のモアレ法について論じた．とくに塑性問題に対して応力解析と結びつけられるように増分的な取り扱いを行なった．定常変位場に対しては，1枚の全変位を与えるモアレじまの写真から増分変位場を求める方法を提案した．

はじめにミスマッチ，ミスアライメントがない場合のモアレじまと変位の関係式を，それらが任意にふくまれている場合に拡張し，さらに任意の独立2方向の平行直線群からなる基準格子を用いた場合に一般化して，同じ物体点におけるある基準状態およびそれに付加された変形後のモアレじまと変位の関係式を導出した．変位増分からGreenのひずみ増分を求める過程に，第2章で定式化した有限要素法のひずみ解析部分を導入し，Greenのひずみ，相当ひずみなどの計算はいずれも有限要素法の場合と同じ計算手法を用いた．またモアレ法があまり用いられていない定常変形（とくに定常塑性加工問題）に対して流線が物体粒子の軌跡であることを利用し，定常モアレから全ひずみ，空間座標を計算する手法を示した．この方法によると増分モアレ法のように定常変形に加えた増分変形を定常変形の延長として実現することの困難さは排除できる．

ここで提案した理論を基礎として，大ひずみ域における円孔および切欠きを有する帯板の引張りと平面前方押出し問題の変位・ひずみ解析を行なった．

結　　　論

本論文においては，大ひずみ大変形弾・塑性問題を正確に解析するために，増分理論による運動学的関係および弾・塑性体の構成方程式について研究し，それにもとずく有限要素法を確立した．そしてその方法を平面弾・塑性問題の解析に適用することによって，その有効性を示すとともに従来から行なわれている微小変形の有限要素法を用いた大ひずみ大変形の解析法の根本的な誤りを指摘した．

さらにこの有限要素モデルをモアレ法に応用して一つの新しいひずみ解析方法を提案し，この方法を定常および非定常大ひずみ大変形問題の解析に適用した．得られた結果の考察および結論は各章において述べたが，ここではそれを要約する．

第１章においては，大ひずみ大変形の増分理論を展開した．このような解析においては，座標系の選択が重要であるが，本論文では弾・塑性体の構成方程式，運動の記述の簡潔さ，応力，ひずみの取り扱い易さおよび数値計算を行なうことなどを考慮した上で，埋込み座標系を選んだ．そして，変形状態の埋込み座標系を基準座標として各種増分量，運動方程式，エネルギつりあい式などを導出した．これらの議論は直接には第２章において増分形有限要素法の定式化を目的として行なったものであるが，これに限らず，境界値問題の解析に対しても応用できるものである．またほかに，変形していない状態の埋込み座標系を基準とした定式化も行なった．

第２章においては，第１章で求めたエネルギつりあい式を一つの要素に適用して，増分形の有限要素法を定式化した．求めた要素の増分形の運動方程式の

係数マトリックスは，本論文で新しく導出した2つを含めて合計6つの部分から成立していること，変形状態の埋込み座標系を基準とした定式化においては，初期変位があるために生じてくる複雑な修正マトリックスは現れず簡単になることを示した．そしてこの増分形の運動方程式から軸対称および平面問題の運動方程式を誘導した．

つぎに単体要素モデルを用いた場合について簡潔な計算のアルゴリズムを示した．これによって厳密な大ひずみ大変形の解析を手軽に行なうことが可能になった．またこれとは別に，比較のために変形していない状態を基準とした増分形の運動方程式も算出したが，形が非常に複雑になることがわかった．このようにして求めた個々の有限要素モデルから，節点で変位を共通な基本ベクトル方向に分解して重ね合わせて，連続体モデルを組立てる一般的な方法を示した．おわりに境界条件の有限要素表示を行なった．

第3章においては，弾・塑性体の変形状態の埋込み座標系を基準とした増分形の構成方程式を導出した．この構成方程式は，第2章における要素の増分形の運動方程式に直接応用し，実際の問題の解析に使うことを目的としたものである．導出にあたり，応力，ひずみの定義を明確にし，それらの増分量には客観性を有するものを用いた．

弾性体については，亜弾性と超弾性の場合に増分形の応力－ひずみ関係を示した．

弾塑性体については，埋込み座標系におけるJaumannの応力増分とひずみ増分の間の線形関係として構成方程式を示した．そして各種塑性ポテンシャルに対して具体的な関係を求めた．とくにMisesの塑性ポテンシャルに対しては，平面問題の場合の増分形の応力－ひずみ関係のマトリックス形をも示した．お

わりにこの構成方程式を単軸引張りに適用して，これが相当応力増分と対数ひずみ増分の線形関係を一般化したものであることを確認した.

第4章においては，第3章で定式化した増分形の有限要素法の適用性および有効性を検討するために，2次元弾性および塑性問題の解析にこれを適用した.

はじめに用いた構成方程式の妥当性を大きな単純せん断変形の解析を例として，数値的に検討した.

非線形弾性問題の例としてポリウレタンラバーからなる有孔帯板の引張りを解析した. そして得た結果をD. J. Durelliらの実験値と比較し，よく一致することを示した.

弾塑性問題の例として，線形硬化の場合に対して，2方向から荷重を受ける有孔平板と切欠きを有する帯板の引張りを扱い，従来法による結果と比較した. その結果，従来法による結果には相当誤差が含まれることがわかった. さらに軟鋼の単軸引張り実験によって求めた応力－ひずみ関係を用いて，円孔および切欠きを有する帯板の引張りを扱かい，モアレ法による実験結果と比較した. その結果，荷重，変位はよく一致し，ひずみについても計算結果を十分裏付けるようなデータを得た. これに対して同じ問題を従来法によって解析した結果は実験値から大きくはなれたものとなった.

以上から，第2章で定式化した有限要素法により，大ひずみ大変形の弾性および塑性解析に対して厳密な取扱いを，実用性を損うことなく実行することが可能になったと考える.

第5章においては，有限要素モデルをモアレ法のひずみ解析に適用した新しいひずみ解析方法を示した.

はじめに，2枚の同じ格子の一方を変形させて重ね合わせたときにできるモ

アレじまは等変位線になるという考え方を一般化して，独立2方向の平行線からなる基準格子を用いた場合に対して，物体座標表示によるしま次数の変化と変位の間の関係式を示した．そして求めた変位場（増分変位場）からひずみ（ひずみ増分）を求めるときに第2章で示した有限要素モデルを用いた．このひずみ解析方法は，従来のしま間隔の測定によってひずみを求める方法に比べてより簡単なものである．さらにこの手法を基礎とし，定常変形を物体座標を介してとらえる新しいひずみ解析方法を提案した．

実験例としては，円孔および切欠きを有する帯板の引張り，平面ひずみ前方押出し問題を選び，ひずみ解析を行なった．

以上本研究によって，増分形の有限要素法による大ひずみ大変形の正確な解析法が確立され，実際の問題に対する応用によりこの解法の有効性を示すことができた．さらに，この有限要素モデルをモアレ法に応用して，効果的な実験的ひずみ解析方法を提案した．

今後，計算機の大型化，高速化に伴なって，この種の厳密な解法は構造解析はもちろん塑性加工問題その他のいわゆる境界領域のより複雑な非構造問題の有力な解析方法としてその適用性を広め，広く一般に用いられるようになると考える．

終りに臨み，研究を遂行するにあたって終始懇切なるご指導と激励を賜った，大阪大学浜田実教授，北川浩助教授に対して謹しんで深甚の感謝をささげます．

また有益なる御討論，御助言を賜った，大阪大学菊川真教授，大路清嗣教授，福岡秀和教授，神戸大学進藤明夫教授，瀬口靖幸助教授，実験に際して御援助をいただいた大阪大学井上豊助手，有益なる御助言をいただいた大阪大学中村喜代次助手，斉藤正克助手，モアレ格子焼付けを御教授下さった大阪大学冨田康光助手，実験に協力をいただいた大阪大学羽田均，阿久根俊幸，井村修司の諸氏に対して併せて厚く感謝致します．

付録(I)　有限要素の増分形の熱伝導方程式

本文第２章では熱的現象との連成を考慮しない増分形の有限要素法の定式化を行なった．ここでは，座標系，変形，ひずみおよび応力などに対して，第1,2章とまったく同様な取り扱い方をして，力学的および熱力学的現象が連成する問題に用いることができる増分形の有限要素法を定式化する．

(I). 1.　エネルギつりあい式

図１－１に示すように，ある初期状態 C_0 から既知な変形をした後の状態を C，その上に増分変形が加わった後の状態を $\breve{C}$ で表わす．C に対するエネルギつりあい式は，式（１－６２）で表わされる．すなわち

$$\mathring{\kappa} + \mathring{U} = \Omega + Q \qquad (1-62)$$

上式は局所的な形では次式となる．(2)

$$\rho\mathring{\varepsilon} = \tau^{ij} v_j \|_i + q^i \|_i + \rho h \qquad (\mathrm{I}-1)$$

ここで $q = q^i G_i$ は単位面積あたり流入する熱流ベクトルであり，ε は単位質量あたりの内部エネルギ，ρ は密度，h は単位質量に与えられる熱量を表わす．

さらに φ を単位質量あたりの自由エネルギ，η をエントロピ，σ を C の単位体積あたりの内部消散，θ を絶対温度とすると，これらの量の間には，つぎの関係が成立する．(26)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varepsilon - \eta\theta \\ \sigma &= \tau^{ij} v_i \|_j - \rho(\mathring{\varphi} + \eta\mathring{\theta}) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}-2)$$

式（Ｉ－２）を用いると，式（Ｉ－１）はつぎの形に書きかえられる．

$$\rho\theta\mathring{\eta} = q^i \|_i + \rho h + \sigma \qquad (\mathrm{I}-3)$$

ところで，$\breve{C}$ における量に対して"－"をつけて表わすと，熱量 $\breve{Q}$ は次式で

表わせる.

$$\bar{Q} = \int_{\bar{\tau}} \bar{\rho}\, \bar{h}\, d\bar{\tau} + \int_{\bar{A}} \bar{q}^i\, \bar{n}_i\, d\bar{A} \qquad (\mathrm{I}-4)$$

ここで

$$q = \bar{q}^i \bar{G}_i \qquad (\mathrm{I}-5)$$

式(I－4)をCを基準状態にして表わすためにつぎの量を定義する.

${}_0\bar{q}$: Cの単位面積で定義した$\bar{C}$における熱流ベクトル

${}_0\bar{\sigma}$: Cの単位体積で定義した$\bar{C}$の内部消散

なお式(I－5)のqと上述の${}_0\bar{q}$の間にはつぎの関係がある.

$${}_0\bar{q} \cdot n\, dA = \bar{q} \cdot \bar{n}\, d\bar{A} \qquad (\mathrm{I}-6)$$

${}_0\bar{q}$ をつぎのように成分に分解をする

$${}_0q = {}_0\tilde{q}^i G_i \qquad (\mathrm{I}-7)$$

この関係式と，質量保存則(I－54)を式(I－4)に用いると$\bar{Q}$はつぎのように表わされる.

$$\bar{Q} = \int_{\tau} \rho\, \bar{h}\, d\tau + \int_{A} {}_0\tilde{q}^i n_i\, dA \qquad (\mathrm{I}-8)$$

したがって$\bar{C}$に対してつぎの局所的なエネルギつりあい式を得る.

$$\rho \dot{\bar{\varepsilon}} = \tilde{\tau}^{ij} \tilde{v}_{i\|j} + {}_0\tilde{q}^i\|_i + \rho \bar{h} \qquad (\mathrm{I}-9)$$

$\bar{C}$において，単位質量あたりの自由エネルギ，エントロピを$\bar{\varphi}$および$\bar{\eta}$で，単位体積あたりの内部消散を$\bar{\sigma}$で表わすと，これらの量の間には式(I－2)と同様，つぎの関係式が成立する.

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \bar{\varepsilon} - \bar{\eta}\, \bar{\theta} \\ \bar{\sigma} &= \bar{\tau}^{ij} \bar{v}_{j;i} - \bar{\rho}\,(\dot{\bar{\varphi}} + \bar{\eta}\, \dot{\bar{\theta}}) \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}-10)$$

ところで，$\bar{\sigma}$と${}_0\bar{\sigma}$には

$$\int_{\bar{\tau}} \bar{\sigma}\, d\bar{\tau} = \int_{\tau} {}_0\bar{\sigma}\, d\tau$$

の関係があるので

$$ {}_0\breve{\sigma} = \breve{\tau}^{ij}\tilde{\upsilon}_i\|_j + \rho(\overset{\circ}{\breve{\varphi}} + \breve{\eta}\dot{\breve{\theta}}) \qquad (\text{I}-11) $$

式（Ⅰ－9）は，上式を用いるとつぎのように書き改められる．

$$ \rho\breve{\theta}\dot{\breve{\eta}} = {}_0\tilde{q}^i\|_i + \rho\breve{h} + {}_0\breve{\sigma} \qquad (\text{I}-12) $$

ここで，増分変形は微小であると仮定をして $\breve{C}$ に関する量を C に関する量とその増分によってつぎのように表わす．

$$ \left.\begin{array}{ll} \breve{q}^i = q^i + \varDelta q^i & \breve{\theta} = \theta + \varDelta\theta \\ \breve{\eta} = \eta + \varDelta\eta & \breve{h} = h + \varDelta h \\ {}_0\breve{\sigma} = \sigma + \varDelta\sigma & \end{array}\right\} \qquad (\text{I}-13) $$

この関係式および式（1－27），（1－28）を用いると，式（Ⅰ－7）の ${}_0\tilde{q}^i$ はつぎのようになる．

$$ {}_0\tilde{q}^i = q^i + \varDelta q^i + q^i\varDelta u^m\|_m \qquad (\text{I}-14) $$

以上で増分変形前後に対して C を基準にした局所的なエネルギつりあい式は求まった．つぎにこれら2つの式（Ⅰ－1），（Ⅰ－12）を用いて有限要素の増分形熱伝導方程式を導出する．なお運動方程式については本文第2章で求めたものと同じ形になる．

(Ⅰ). 2　有限要素の増分形熱伝導方程式の定式化

ここでは，任意の一つの要素の増分形の熱伝導方程式を導出する．要素内部の温度 θ の分布は，変位の場合と同様，要素の節点温度 θ_N から Lagrange の内そう関数 φ_N によって唯一的に決められるものと考えて

$$ \theta = \varphi_N\theta_N \quad , \quad \varDelta\theta = \varphi_N\varDelta\theta_N \qquad (\text{I}-15) $$

エネルギつりあい式に対して，式（2－12）に対応する関係式を求めるために，一般化されたGalerkin法[27]を用いる．すなわち，式（Ⅰ－3），（Ⅰ－12）に対して温度変分 $\delta\theta$，$\delta\breve{\theta}$ をかけて要素について積分を行なうと，次式を得る．

$$\int_\tau \rho\theta\overset{\circ}{\eta}\delta\theta\, d\tau+\int_\tau q^i\,\delta\theta,_i d\tau=\int_A n_i q^i\delta\theta\, dA+\int_\tau \rho h\delta\theta\, d\tau+\int_\tau \sigma\delta\theta d\tau$$

$$\int_\tau \rho\overline{\theta}\overset{\circ}{\overline{\eta}}\delta\theta\, d\tau+\int_{\tau_0}\widetilde{q}^i\,\delta\overline{\theta},_i d\tau=\int_A n_i\widetilde{q}^i\delta\overline{\theta}dA+\int_\tau \rho\overline{h}\delta\overline{\theta}d\tau+\int_{\tau_0}\overline{\sigma}\delta\overline{\theta}d\tau$$

（Ⅰ－１６）

上式の$\delta\theta$，$\delta\overline{\theta}$に対して式（Ⅰ－１５）を用いると，

$$\delta\theta=\phi_N\delta\theta_N$$
$$\delta\overline{\theta}=\phi_N\delta\overline{\theta}_N$$

（Ⅰ－１７）

式（２－１２）を導出した場合とまったく同様にして有限要素に対する増分形の熱伝導方程式を得る．すなわち，

$$\int_\tau \rho\phi_M\theta_M\phi_N\varDelta\overset{\circ}{\eta}\, d\tau+\int_\tau \rho\phi_M\phi_N\overset{\circ}{\eta}\, d\tau\varDelta\theta_M$$

$$+\int_\tau \phi_{N,i}\varDelta q^i d\tau+\int_\tau q^i{}_M\varPhi^m{}_{rm}\phi_{N,i}d\tau\varDelta u^r{}_M$$

$$=\int_A n_i\varDelta q^i\phi_N dA+\int_A n_i q^i{}_M\varPhi^m{}_{rm}\phi_N dA\varDelta u^r{}_M$$

$$+\int_\tau \rho\varDelta h\phi_N\, d\tau+\int_\tau \varDelta\sigma\phi_N\, d\tau$$

（Ⅰ－１８）

上式中の変位増分の項が，運動方程式と連成する項である．式（２－１２），（Ⅰ－１８）に対して構成方程式が導入されると，この二つの方程式を連立させて連続体の熱力学的過程を解析することができる．

付録(II)　有限要素法によるすべり線場解の有効性の検討(切欠き試験片の曲げ問題について)

本文緒論において述べたように，最近の有限要素法の発達はめざましく，非常に広く用いられている．ところが，有限要素法によると問題の種類に関係なく現実に即した解析を行なうことが可能である反面計算量が一般に多くなるという欠点がある．

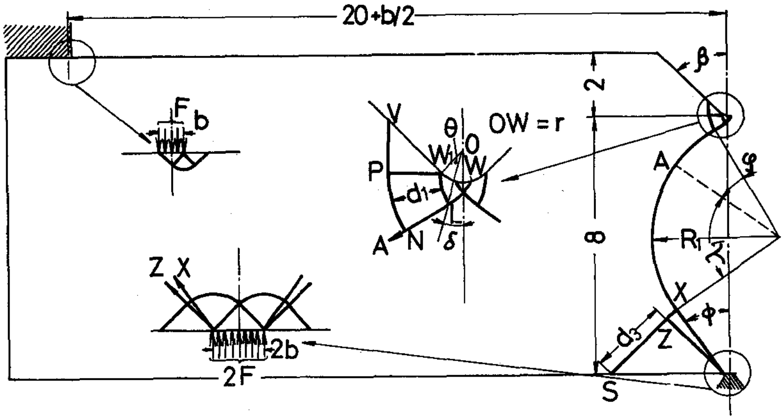
これに対して塑性問題に対しては，変形途中の状態を考えずに降伏点荷重のみを取り扱うリミット・アナリミスの手法が研究されている．この手法は，平面ひずみ問題，簡単な形状の軸対称かくの塑性解析に用いられてきており，特別な問題に対してはきわめて簡潔に解が得られるという長所を有している反面，解を得るために定まった算法がなく直観と経験にたよる部分が多いという欠点があること，およびこの手法が適用できるのは多くの場合剛塑性材料のみであり，変形を考慮していない点は実際の現象を解析するうえでは十分な近似になり得ない場合があることに注意すべきである．

ここでは切欠き深さによって塑性域の広がり方に顕著な差がでてくる切欠き試験片の3点曲げ降伏問題を，すべり線場解法と有限要素法によって解析し，両解を比較することによりすべり線場解の有効性を検討する．なお変形が小さい初期降伏状態を問題としているので，有限要素法による解析は従来法によって行なう．

(II)．1　切欠き試験片の3点曲げ降伏のすべり線場解析

ここでは図II−1のように，切欠きみぞを持つ試験片が3点曲げを受けた場合の初期降伏のすべり線場解を求める．※ただし試験片は紙面に垂直の方向に

※　切欠き形状以外はシャルピ衝撃試験の場合と同じである．



図Ⅱ－1　切欠き試験片形状と深い切欠きのすべり線場

十分な厚さを持ち，平面ひずみ状態が保持されているものと仮定をする。

この切欠き試験片が降伏曲げモーメントを受けた場合のすべり線場は，切欠きが十分深く変形する塑性域が切欠き最小断面付近にとどまる場合と切欠きがある限界の深さよりも浅くなってそれが切欠き側の表面まで広がる場合によって異なったものとなることが知られている。(45), (110) ここでは，これまでにすべり線場解が明らかにされていない後者について解析を行なう。

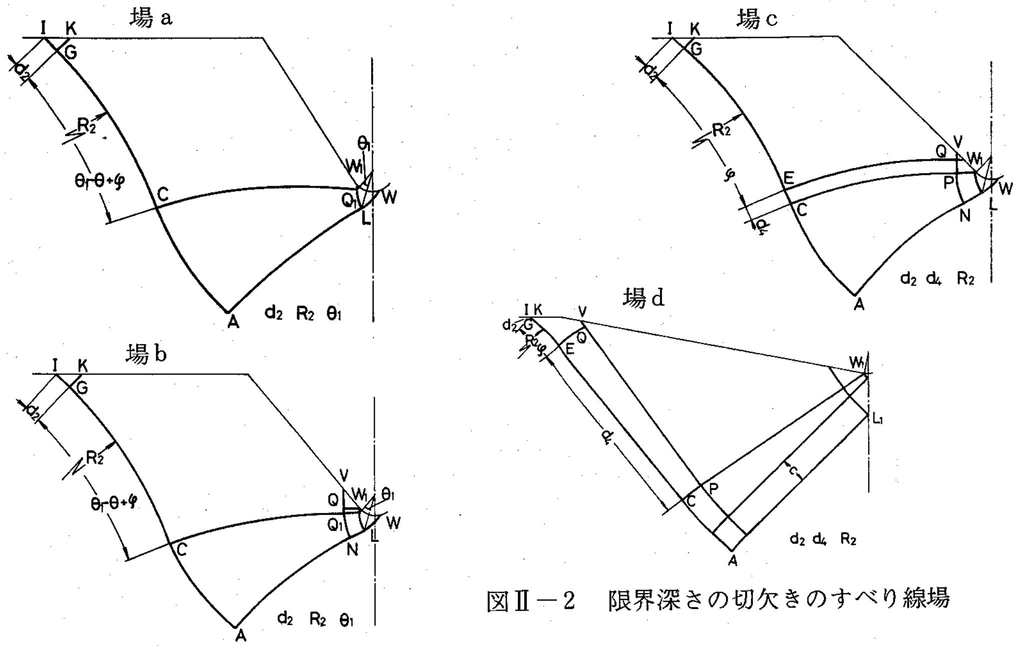
図Ⅱ－1に示すような深い円弧底V切欠きを有する試験片の3点曲げに対しては，図中に示すようなすべり線場解が成立する。※ (111) このような深い切欠きのすべり線場が成立するために必要な限界の切欠き深さおよびその切欠き深さにおけるすべり線場は，図Ⅱ－1の深い切欠きのすべり線場を切欠き側の表面へ拡張することによって求めることができる。※※

図Ⅱ－2に切欠き底半径 r および切欠き角度 β を変化させたときに成立する

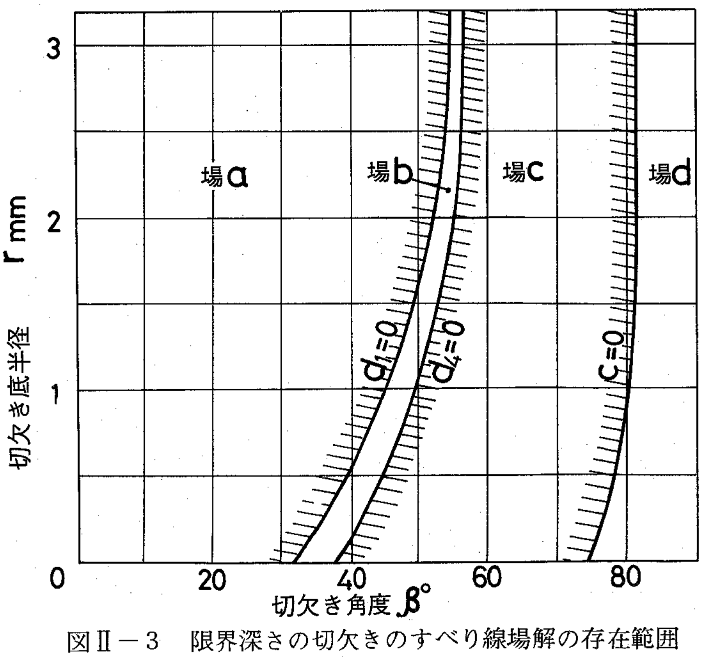
※　他の切欠き形状に対する深い切欠きのすべり線場解についてはA. shindo とT. So (111) を参照。

※※　詳細については進藤，富田 (112) 参照。

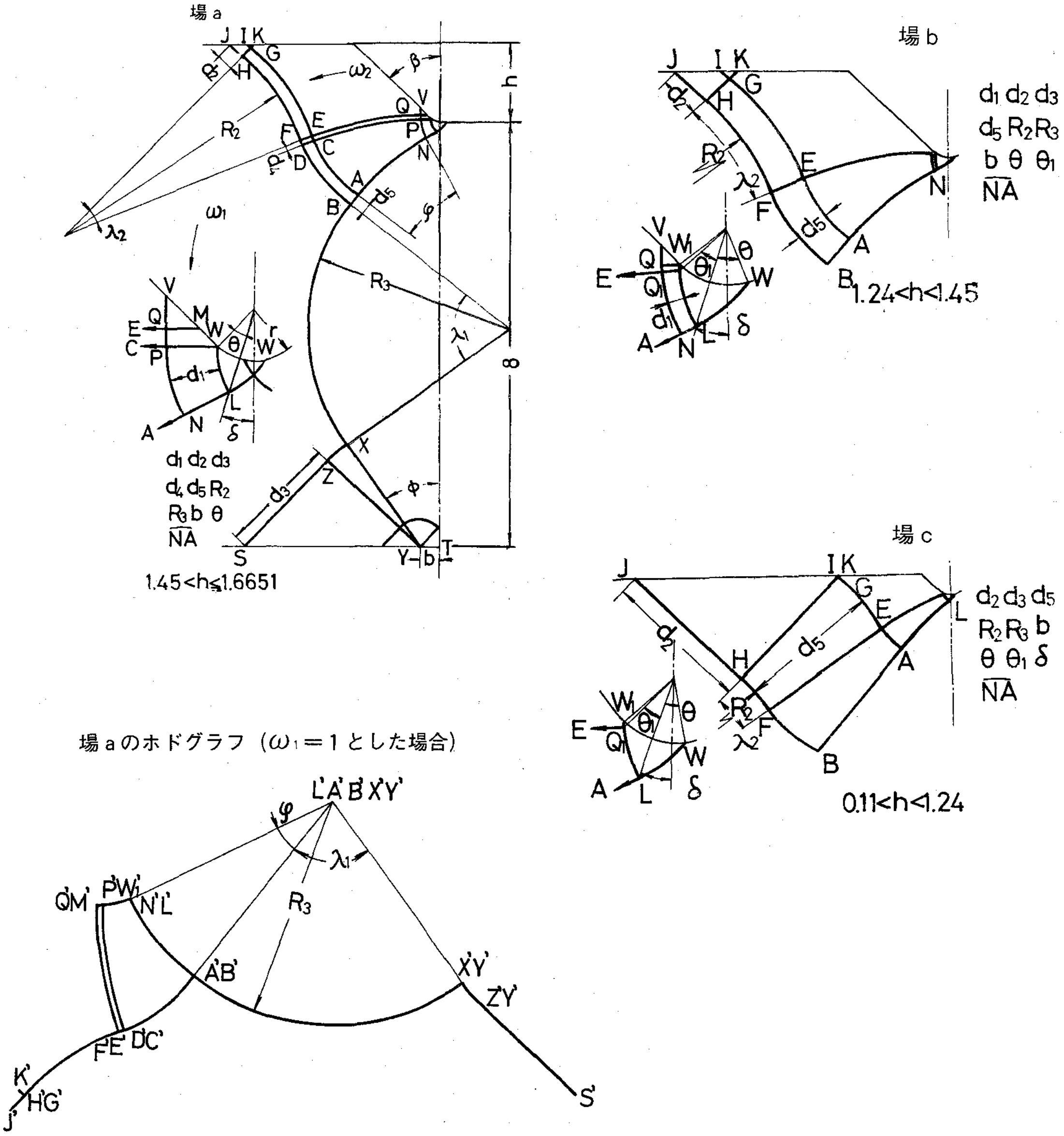
各限界深さの切欠きのすべり線場解を，図Ⅱ－3にそれらの解の存在範囲を示す．いずれのすべり線場も，図Ⅱ－1に対応した深い切欠きのすべり線場をあらかじめ求めておきそれを切欠き側の表面へ拡張することにより求めたもので，切欠き表面へ拡張した部分のすべり線場は，図中に示している三つの独立な未



図Ⅱ－2　限界深さの切欠きのすべり線場



図Ⅱ－3　限界深さの切欠きのすべり線場解の存在範囲



図II－4　浅い切欠きのすべり線場とホドグラフ

知パラメータによって決まる．この三つの未知パラメータは，図II－2の拡張した全すべり線場境界に作用するせん断応力と静水圧成分によって生じる２方向の力およびモーメントに関する合計三つのつりあい式が満たされるように決定する．なおAC部分に働く力およびモーメントの計算にはべき級数法[46]を用いた．そして三つのパラメータはつりあい式からNewton–Raphson 法を用いて決定した．

切欠き深さが限界深さよりも浅くなると，図II－4に示す浅い切欠きのすべり線場が成立する．これはすべり線QEとホドグラフ上の特性曲線$Q'\ E'$の曲率半径の大きさの比ω_1/ω_2(二つの剛体部分の回転角速度比で，$\omega_1=1$としたとき$(R_2+d_5)/R_2$に等しい）と図中に示した９個の独立な未知パラメータによって唯一的に決定される不静定なすべり線場で，１９５６年A. P. Green とB. B. Hundy[45]が純曲げ実験によってこの種の場があることを示して以来はじめて数値的に解析したものである．つぎに場aを例に，その計算手順の概要を示す．※

はじめに，すべり線場におけるべき級数法[45]をホドグラフ面へ拡張し，ホドグラフ上の特性曲線$Q'E'$の曲率半径をすべり線場の未知パラメータと，未知すべり線NAの曲率半径をべき級数に展開したときの未知係数の項で表わす．そして以下に示すように，この未知係数と未知パラメータを決定しすべり線場を求める．

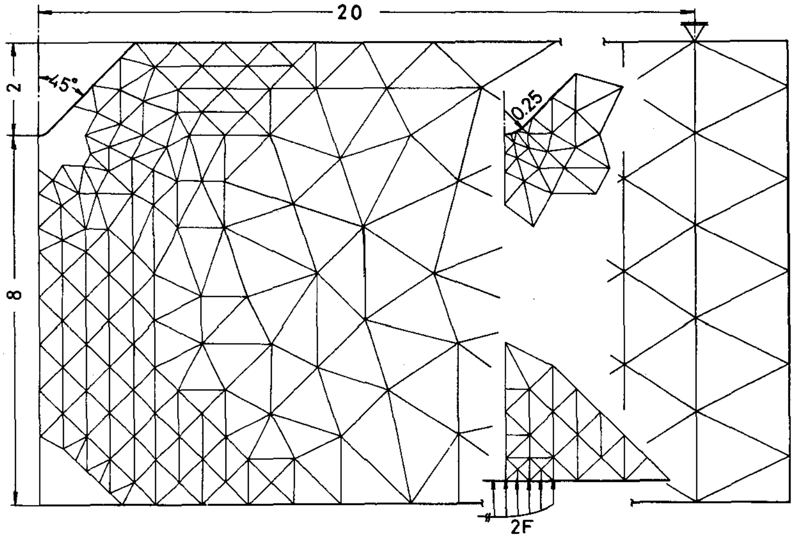
未知係数は，すべり線QEと特性曲線$Q'E'$の対応する点における曲率半径の大きさの比がω_1/ω_2の値と等しくなるように，さらに９個の未知パラメータは，切欠き形状および深さ，すべり線場の幾何学的な関係，すべり線場境界に作用するせん断応力と静水圧成分によって生じる力およびモーメントが満たすべきつりあい関係から導出される９個の条件式を満足するように決定をする．このようにして求めたパラメータから$(R_2+d_5)/R_2$を計算して，この値が前

※ 詳細については，進藤，冨田[113]参照．

回の繰り返しで求めた値に十分近付くまで，上述の未知係数および未知パラメータを求める操作を繰返し行なう．

II－2　切欠き試験片の3点曲げの有限要素法による解析およびすべり線場解との比較

すべり線場解と比較するために，図II－1に示したと同寸法の切欠き試験片で，切欠き深さがそれぞれ2，1.6651，1㎜の3種類の場合について，平面ひずみ状態を仮定して解析を行った．※図II－5に切欠き深さが2㎜の場合の要素分割を示す．これ以外の切欠き深さの場合は，2㎜の場合の切欠き表面



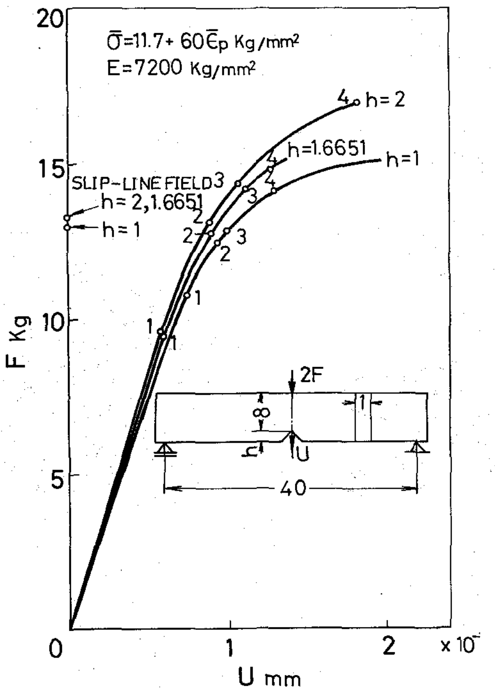
図II－5　要素分割

付近にある要素の形状を変えてそれぞれの切欠き深さになるようにプログラミングを行なって処理した．荷重点における荷重は分布荷重として図II－5に示すように節点に振り分けた．いっぽう支点部分は1節点ですべり支えとした．

材料の構成方程式として，図II－6中に示した単軸引張りの相当応力$\bar{\sigma}$と相当塑性ひずみ$\bar{\varepsilon}_p$の関係をPrandtle−Reussの式によって多軸へ一般化したものを用いた．

図II－6に荷重と切欠き底の垂直方向変位との関係を，図II－7に塑性域の

※ それぞれの切欠き深さは，すべり線場解の深い切欠きの場合，限界深さの切欠きの場合および浅い切欠きの場合に対応する．

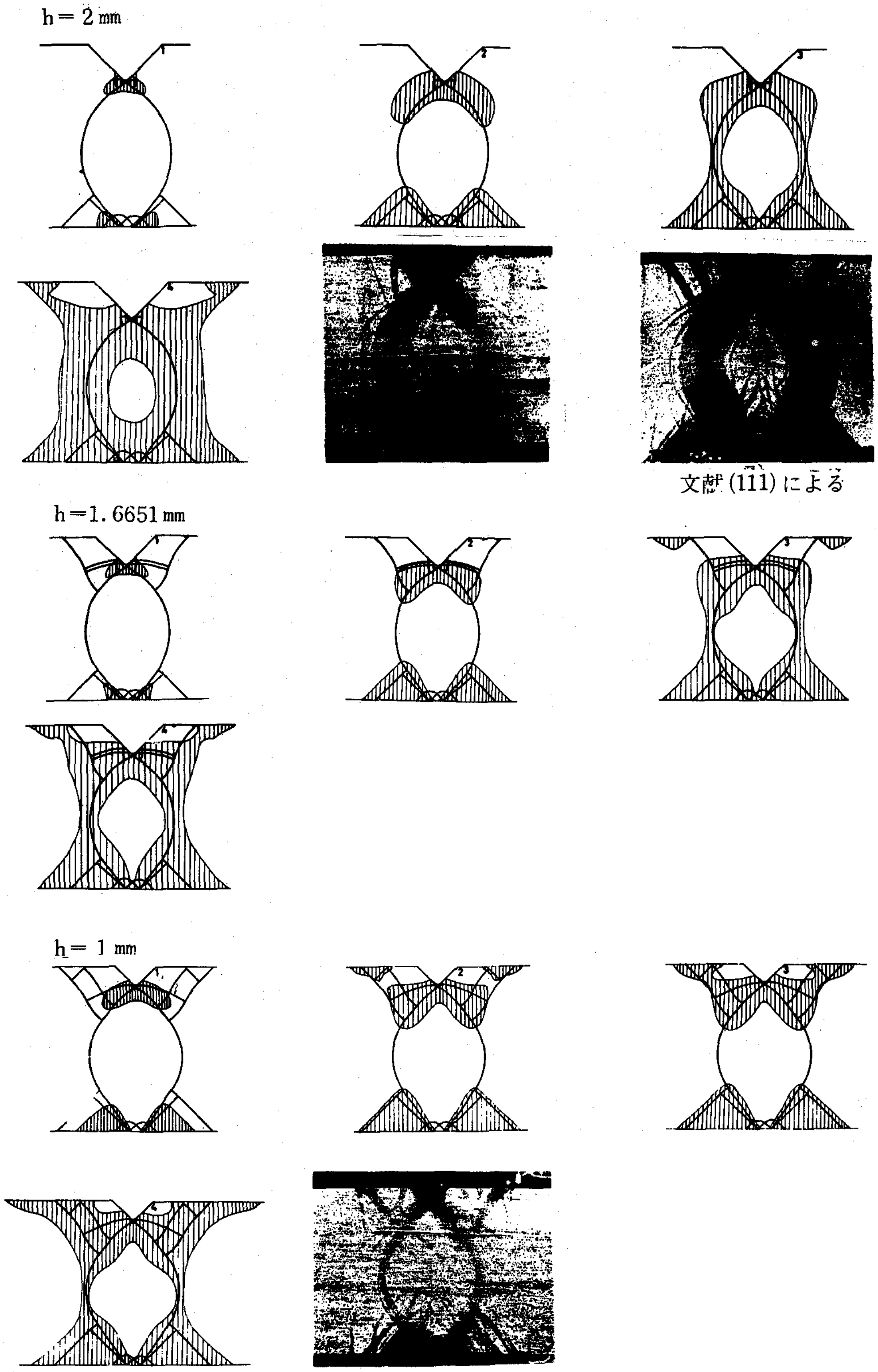


図Ⅱ－6　荷重変位関係

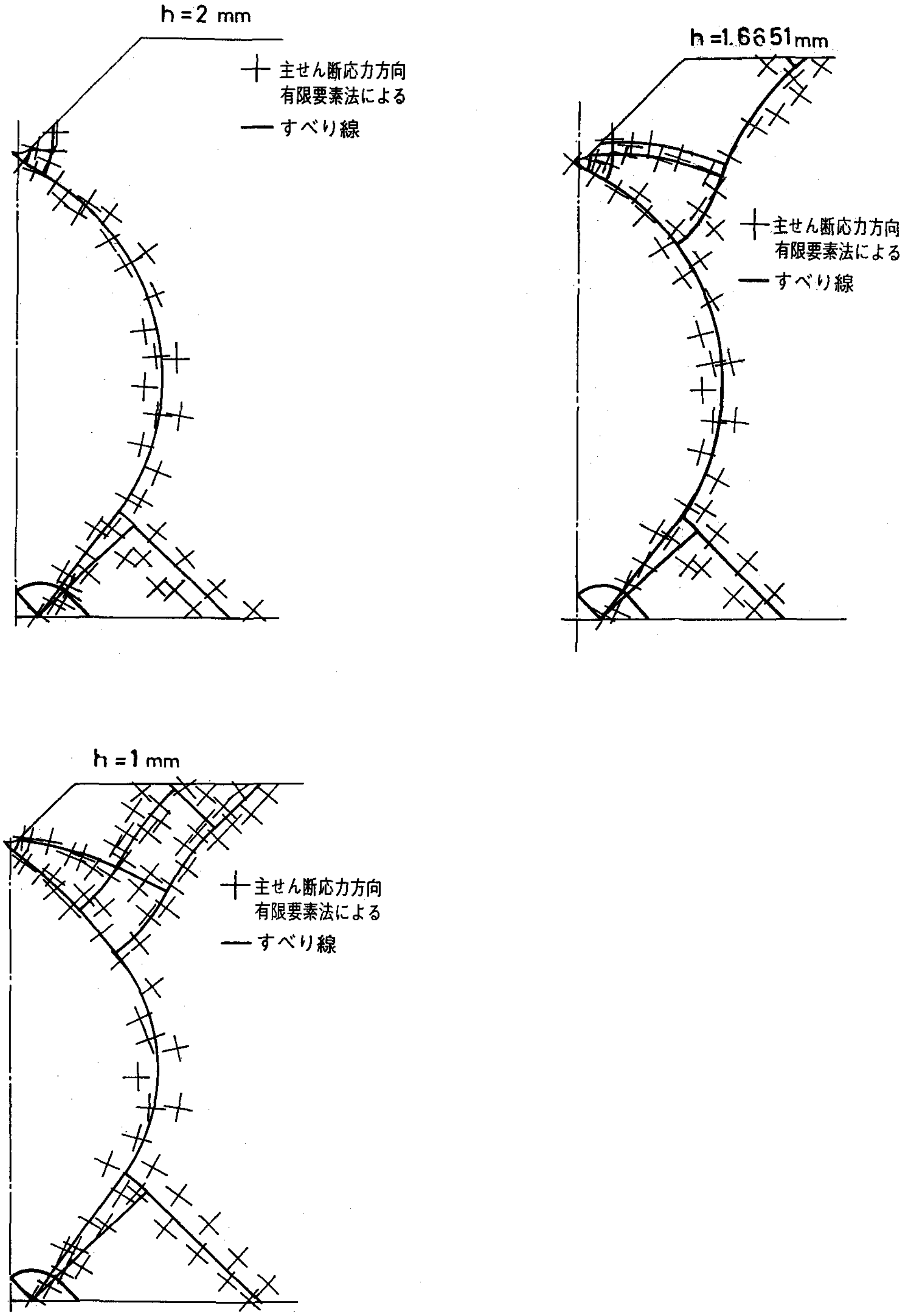
進展状態を示す．図中の番号は，図Ⅱ－7の説明の便宜上つけたもので，切欠き深さが2，1．6651，1㎜の場合それぞれ3，3，4において切欠き底および荷重点から広がった二つの塑性域が結合している．また図中縦軸上の‘○’印はすべり線場解による切欠き試験片の降伏点荷重を示す．この降伏点荷重と塑性域が結合したときの荷重は相当よく一致しており，両者の値の間に存在する差は材料に完全剛塑性体と線型硬化弾塑性体の違いがあることおよびすべり線場では変形（弾性変形）を考慮していないことによるものであると考える。

さらに，すべり線場解においては2㎜の深い切欠きと1．6651㎜の限界深さの切欠きの場合は同じ降伏点荷重となるのに対して，有限要素法の場合は二つの切欠き深さの差が，荷重変位関係にも現われている点に注意すべきである．

図Ⅱ－7は，各切欠き深さにおいて成立するすべり線場と塑性域の進展状態を示している．$h=2$㎜ の深い切欠きの場合は，切欠き底と荷重点から広がってきた塑性域が結合した後さらに負荷された場合に対してこの塑性域は切欠き側の表面で成長した塑性域と結合する．$h=1.6651$㎜ の限界深さの切欠きの場合は，変形が小さいときの塑性域の広がり方は，深い切欠きの場合と同様である．しかし，切欠き底および荷重点から広がってきた二つの塑性域が結合したとき，すでに切欠き側の表面において塑性域が発生している．この点におい



図Ⅱ－7　塑性域の進展状態



図Ⅱ－8　すべり線付近の主せん断応力方向

て，深い切欠きの場合と相違している．これに対して$h=1$㎜の浅い切欠きの場合は，はじめに切欠き底および荷重点から塑性域が生じ，つぎに切欠き側の表面においても塑性域が発生する．そして切欠き底および切欠き側の表面から広がった塑性域が結合した後に，さらに荷重を加えるとこれらの塑性域は荷重点から広がってきた塑性域と結合する．これが浅い切欠きと深い切欠きの場合の相違点であり，限界深さの切欠きの場合は，両者の中間的な様相を呈している．

切欠き部および荷重点から広がった塑性域が結合した時点における塑性域は，図中に実線で示したすべり線場およびエッチングによるひずみ模様とよく対応している．

図II－8は，すべり線付近に位置する要素の主せん断力方向を図示したものである．等方材料では，応力の主軸と塑性ひずみ速度の主軸は一致する．したがって，これはまた塑性せん断ひずみ速度の主軸方向を表わしていることになる．この方向は，図中に実線で示したすべり線の方向（主せん断ひずみ速度方向）とよく一致している．

以上，切欠き試験片の三点曲げの初期降伏のすべり線場解と有限要素法による弾塑性解とを比較した．その結果，すべり線場解析によって求めた降伏点荷重，切欠き深さの違いによって現われる塑性域の分布における顕著な差およびひずみ速度の分布については，弾塑性解析の結果においても同じような形で表われることが明らかになった．

文　　　献

(1) Green, A. E and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, (1968), Oxford.

(2) Eringen, A. C., *Continuum Mechanics*, (1968), John Wiley&Sons.

(3) Turner, M. J, Clough, R. W, Martin, H. C and Topp, L. J., *J. aeronaut. Sci.* 23(1956), 805.

(4) Veubeke, B・F・, *Matrix Method of Structural Analysis*, (1964), Pergamon Press.

(5) Zienkiewicz, O・C and Cheung, Y・K・, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, (1967), McGraw-Hill・

(6) Przeminiecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, (1968), Mcgraw-Hill.

(7) Martin, H. C., *Introduction to Matrix Method of Structural Analysis*, (1965), Mcgraw-Hill.

(8) Marcal, P. V and King, I., *Int. J. Mec. Sci* 9(1967), 143.

(9) Yamada, Y, Yoshimura, N and Sakurai, T., *Int. J. Mec. Sci*, 10(1968), 343.

(10) Zienkiewicz, O. C, Valliappan, S and King, I. P., *Int. J. Num Method in Engng*, 1(1969), 75.

(11) Armen, H, Isakson, G and Pifko, A., *Int. J. Num Method in Engng*, 2(1970), 189.

(12) Akyuz, F. A and Merwin, J. E., *AIAA. J*, 6(1968), 1825.

(13) Lee, C. H and Kobayashi, S., *Int. J. Mec. Sci.* 12(1970), 349.

(14) Hardy, C, Badonet, C, N and Tordion, G. V.,
Int. J. Num Method in Engng., 3(1971), 451

(15) 長松，室田，神馬.，機論，36(1970), 528, 536, 1256.

(16) Griffiths, J. R and Owen, D. R. J., *J. Mech. Phys. Solid.* 19 (1971), 491.

(17) Luxmoore, A. R, Gardner, N, A and Wyatt, P. J.,
J. Mech. Phys. Solids, 19(1971), 395.

(18) 微小ひずみで回転が大きい場合についての解説は，たとえば上田，機誌. 74−629（昭46−6），681および八巻.，同上，690にある.

(19) Martin, H. C., *Proceedings Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics.*, AFFDL−TR−66−80, Wright−Patterson AFB Ohio, 1966.

(20) Agyris, J. H., *AIAA. J*, 3(1965), 45.

(21) Zienkiwicz, O. C., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* (1967), Mcgraw−Hill.

(22) Marcal, P. V., (Gallagher, R. H., ほか編) *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design,* (1971), Univ. Alabama.

(23) Oden, J. T and Sato, T., *Int. J. Solids Structures,* 3(1967), 471.

(24) Oden, J. T., *Int. J. Num Method. Engng.* 1(1969), 247.

(25) Oden, J. T and Raminez, G. A., *Int, J. Solids Structures,* 5(1969), 1077.

(26) Oden, J. T., (Gallagher, R. H., ほか編) *Recent Advances in*

Matrix Methods of Structural Analysis and Design, (1971), Univ. Alabama.

(27) Oden, J. T and Key, J. E., *Int. J. Solids Structures*, 6 (1970), 497.

(28) Oden, J. T., *Finite Element Approximation in Nonlinear Thermovisco-Elasticity*, *NATO Advanced Study Institution Finite Element Methods in Continuun Mechanics*, Lisbon.

(29) 川井.，機誌.，74-629(昭46-6)，17.

(30) 瀬口，北川.，機誌.，75-639(昭47-4)，1.

(31) 山田.，機誌. 74-629(昭46-6)，9.

(32) Washizu, K., *Variational Method in Elasticity and Plasticity*, (1968), Pergamon.

(33) Neale, K.W., *Int.J.Solids Structures*, 8(1972), 865.

(34) Hibbitt, H.D, Marcal, P.V and Rice, J.R., *Int, J.Solids Structures*, 6(1970), 1069.

(35) Hofmeister, L.D, Greenbaum, G.A and Evensen, D.A., *AIAA.J.* 9(1971), 1248.

(36) Seguchi, Y and Shindo, A., *Proc.20th Japan Natl Cong Appl Mech*, (1971), 36.

(37) Oden, J.T and Key, J.E., *Nucl.Engng & Des.* 15(1971), 121.

(38) 北川，日本機械学会関西支部第52回講習会教材(1972-10). 141.

(39) Zienkiewicz, O. C and Nayak, G. C., *3rd Conf.Matrix Method in Structural Mech.* Wright-Patterson, (1971-10).

(40) Argyris, T.H and Chan, A.S.L., *Ing-Arch.* 41(1972), 235.

(41) Needleman, A., *J.Mech.Phys.Solids* 20(1972), 111.

(42) 構成方程式についての展望および解説は文献(30)参照

(43) Fung, Y.C.,(大橋，ほか2名訳)固体の力学／理論 .(昭45),培風館 .

(44) Green, A.E and Adkins, J.E., *Large Elastic Deformation*, (1960), Oxford.

(45) Green, A. P and Hundy, B. B., *J. Mech. Phys. Solids*, 4(1956), 128.

(46) Ewing, D. J. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 15(1967), 105.

(47) R. ヒル., 塑性学，(鷲津はか2名訳)(昭和40)，培風館.

(48) Yoshimura, Y., *Aero, Res. Inst. Univ. Tokyo Report, No.* 439 (1959), 221.

(49) Green, A. E and Naghdi, P. M., *Arch, Rational Mech. Anal*, 18(1965), 251.

(50) 文献(1)の66頁

(51) 文献(1)の56頁

(52) 文献(1)の26頁

(53) たとえば，文献(13),(15), Lee, C. H and Kobayashi, S., *Trans. ASME., Ser. B*, 93-2(1971), 445. Iwata, K, Osakada, K and Fujino, S., *Trans. ASME., Ser. B*, 94(1972), 697.

(54) 山田，青木，塑性と加工，7(1966-8), 393.

(55) 山田，横内，塑性加工学会春季講演会講演論文集，(昭45-5)，159.

(56) Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 7(1959), 219.

(57) Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuum Media*. (1962), Mcgraw-Hill.

(58) 文献(1)の60頁

(59) 文献(1)の58頁

(60) 藤野.,熱伝導と熱応力(昭47)，培風館.

(61) 藤野.,機誌, 74−629(昭46−6). 51.

(62) Oden. J. T., *Int. J. Solid Structures*, 5(1969), 205.

(63) Archer, J. S., *AIAAJ.*, 3(1965), 1910.

(64) Martin, H. C., *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, (1971), Univ. Alabama.

(65) Oden, J. T., *Finite Element Method of Nonlinear Continua*, (1972), Pergamon.

(66) 寺沢., 数学概論, (1968), 岩波書店

(67) 日本機械学会編., 機械工学便覧, (1968).

(68) Leigh, D. C., *Nonlinear Continuum Mechanics*, (1968), Mcgraw−Hill.

(69) Prager, W., *Introduction to Mechanics of Continua*, (1960), Ginn. Chapter III.

(70) 文献(1)の63頁

(71) Budiansky, B., *Trans. ASME, Ser E.* 26(1959), 2.

(72) 進藤, 機械の研究 20−2(1968), 11.

(73) 進藤., 塑性と加工, 12(1971−6), 417.

(74) Green, A. E and Naghdi, P. M., *Proc IUTAM Symp, On Irrerversible Aspects of Continuum Mechanics*, (1968), 117. Springer.

(75) Sedov, L. I., *Foundations of the Nonlinear Mechanics of Continua* (1966), Pergamon.

(76) Pipkin, A. C and Rivlin, R. S., *Z. Angew, Math. u. Phys.* 16 (1965), 313.

(77) Lee, E. H and Liu, D.T., *J. Appl. Phys*, 38(1967), 19.

(78) Lee, E. H., *Trans. ASME, Ser E*, **36**−1 (1969−3), 1.

(79) Prager, W., *Quart. Appl. Math.* **18** (1962), 403.

(80) Edelman, F and Drucker, D. C., *J. Franklin Inst*, **251** (1951), 581.

(81) Prager, W., *Trans. ASME*, 78 (1956), 493.

(82) Ziegler, H., *Quart. Appl. Math.* **17** (1959), 55.

(83) Shield, R. T and Ziegler, H., *Z. Angew. Math. u. Phys.* **9a** (1958), 260.

(84) Mroz, Z., *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967), 163.

(85) 文献(47)の67頁.

(86) 山田., 生産研究, **19**−3 (1967−3), 21.

(87) たとえば文献(11), 浜田, 田中., 機論 **38**−305 (昭46−1), 36.

(88) Durelli, A. J, Parks, V. J and Lopado, V. J., *Int. J. Non−Linear Mech*, **5** (1970), 397.

(89) たとえば文献(35), (53)

(90) 浜田, 北川., 機論 **33**−256 (昭42−12), 1923.

(91) 横堀, 材料強度学., (1968) 岩波書店 P95.

(92) Durelli, A. J and Parks, V. J., *Moire Analysis of Strain*, (1970), Prentice Hall.

(93) 山田., 機械の研究 **19**−8 (1967), 1047.

(94) 永井., 溶接学会誌, **40**−3 (1971), 172.

(95) 加藤, 室田, 神馬., 機論, **34**−262 (昭43−6), 1066.

(96) 山田, 輪竹., 生産研究, **22**−5 (1970), 247.

(97) 永井, 大塚, 小川., 造論, **124** (1968), 355.

(98) Vinckier, A and Dechaene, R., *Trans ASME Ser. D*, **82** (1960) 426.

(99) Riley, W. F., *Exp. Mech*, 7(1967), 19.

(100) Post, D., *Exp Mech.*, 5(1965), 368.

(101) Martin, L. P and Ju, F. D., *Trans ASME, Ser, E*, 36(1969), 901.

(102) Chiang, F. P., *Proc. ASCE*, 91-EM1(1965), 137.

(103) Parks, V. J and Durelli, A. J., *Trans ASME, Ser, E*, 33 (1966), 901.

(104) Bossaert, W, Dechane, R and Vinckier. A *J. Strain Analysis*, 13(1968), 65.

(105) Thomsen, E. G, Yang, C and Kobayashi, S., 工藤訳., 金属塑性加工の力学, (昭42), コロナ社.

(106) Shabaik, A. H and Thomsen, E. G., *Trans ASME, Ser. B*, 90 (1968), 343.

(107) Shabaik, A. H and Kobayashi, S., *Trans. ASME, Ser. B*, 89 (1967), 339.

(108) Vafiadakis, A. P and Lamble, J. H., *J. Strain Analysis*, 12(1967), 99.

(109) 古閑., フオトエッチング, (昭44), 日刊工業新聞社.

(110) Green, A. P and Hundy, B. B., *J. Mech. Phys. Solids*, 4(1956), 128.

(111) Shindo, A and So, T., *Proc. 16th NCTAM*, (1966), 194.

(112) 進藤, 富田., 機論, 38-314(昭47-10), 2457.

(113) 進藤, 富田., 機論, 37-297(昭46-5), 852.

関連発表論文

(1) Y. Seguchi, H. Kitagawa, Y. Tomita and A. Shindo, （第1章）
Note on an Incremental Theory of Large Strain and Large Displacement.
Mem. Fac. of Engng, Kobe Univ. No. 17 (1971), 51.

(2) 北川，瀬口，冨田 （第1.2章）
大ひずみ大変形の増分理論とそれによる有限要素法
機論 38−307(昭47−3)，479．

(3) H. Kitagawa, Y. Seguchi and Y. Tomita, （第1.2章）
An Incremental Theory of Large Strain and Large Displacement Problems and Its Finite Element Formulation.
Ing. Arch, 41 (1972), 213.

(4) H. Kitagawa and Y. Tomita, （第3章）
Note on Incremental Stress−Strain Relations of Elasto−Plastic Materials Referred to a Convected Coordinate Systems. ZAMM. 52−3 (1972), 183.

(5) H. Kitagawa and Y. Tomita, （第4章）
An Incremental Finite Element Analysis of Two−Dimensional Large Strain and Large Displacement Problem for Elasto−Plastic Material.
Proc. 21*th Japan Natl, Cong. Appl. Mech,* (1972), *in press.*
同邦文
大ひずみ大変形の平面弾塑性問題の増分形有限要素法による解析
機論掲載予定

(6) H. Kitagawa, Y. Tomita and Y. Seguchi （付録−I）
An Incremental Finite Element Formulation for Thermo−dynamical Process.
Tech. Repts. Osaka Univ, 22−2 (1972), *No.* 1080.

(7) 北川，冨田，浜口，羽田，阿久根， （第5章）
モアレ法による大変形大ひずみ問題の解析法について
機論投稿中

(8) 進藤，冨田 （付録−II）
浅い切欠き棒の三点曲げ降伏のすべり線場解析（限界深さの場合）
機論 38−314(昭47−10)，2457．

(9) 進藤，冨田，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(付録－II)

浅い切欠き棒の三点曲げ降伏のすべり線場解析（浅い切欠きの場合）

機論 37－297（昭46－5），852。

同英文

Slip-Line Field Solution of Shallow Notched Bar Due to Three Point Loading (The Case of Shallow Notch Depth)

Bull. J. S. M. E 15－79 (1972), 11.