

Title	Walsh-Hadamard, Haar関数によるX線断層像の高速合成法
Author(s)	佐藤, 一弘; 古村, 光夫; 入江, 五朗
Citation	日本医学放射線学会雑誌. 1977, 37(11), p. 1066-1075
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/20319
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

Walsh-Hadamard, Haar 関数による X 線断層像の高速合成法

北海道大学応用電気研究所ME部門 (主任: 吉本千禎教授)

佐藤 一弘

国際情報社会科学研究所

古村 光夫

北海道大学医学部放射線医学講座

入江 五朗

(昭和52年 5月19日受付)

(昭和52年 6月20日最終原稿受付)

High Speed Tomographic Image Reconstruction using Walsh-Hadamard and Haar Functions

Kazuhiro Sato

Department of Medical Electronics, Hokkaido University, Research Institute of Applied Electricity
(Director: Prof. Chiyoshi Yoshimoto)

Mituo Komura

International Institute for Advanced Study of Social Information Science

Goro Irie

Department of Radiology, Hokkaido University School of Medicine

Research Code No.: 208

Key Words: Image processing, CT, Tomography, Walsh-Hadamard function,
Haar function

Computer implementation of tomographic image reconstruction may be accomplished several ways.

This paper represents two new computing methods which basically resemble to the Fourier Convolution (FC) method (i.e. Filtered Back Projection method). These new methods are Walsh-Hadamard and Haar orthogonal transforms.

There are two major calculation processes in the FC-method: one is filtering (Fourier filtering or cyclic convolution filtering) process and the other is back projection. Both processes require a large number of arithmetic operations, so that large reconstruction times are required.

In this paper it is proved that the filtering process can also be accomplished equivalently by Walsh-Hadamard and Haar transforms with very short calculating times. We derived the relationship of filter matrix in the Fourier domain and that of Walsh-Hadamard and Haar domains. Filtered projections can be calculated with those filter matrices and fast transform algorithm which is equivalent to FFT (F-

ast Fourier Transform). The calculation times of these new methods are more than 6 to 14 times faster than Fourier filtering and 3 to 12 times faster than convolution filtering. These times are closely related to the combination of filter matrices and transformations.

By the computer simulation for several image sizes, ranging from 64×64 to 1024×1024 , Hadamard filtering was the fastest of all.

New filter function, which was obtained from computer simulations and inspection of computing times, was shown. Ramachandran et al., Shepp and Logan, Cho, Chesler and Tanaka et al. have shown the modified filter functions (weighting functions). For comparison, several phantom images (64×64) were reconstructed using Ramachandran's filter (F-1) Chesler's filter (F-2) and ours (F-3). Ringing of image reconstructed using F-3 was larger than F-2 and smaller than F-1.

I. 緒 言

X線と計算機を用いた全く新しい断層像撮影法 (Computed Tomography: CT) は、近年放射線医学の分野で大きな関心をもたれ、急速に普及しつつある。CT では人体の断面のX線吸収係数の2次元分布を、多方向の射影データから計算機を用いて再合成する。

CT による断層像再合成では像再合成のアルゴリズムが重要な役割をはたし、これには単純加算法、マトリクス法、逐次近似法 (Algebraic Reconstruction Technique: ART)、フーリエ変換法、Filtered Back Projection 法 (FBP 法と略する) および FBP 法におけるフィルタ処理を実空間でコンボルーション (cyclic convolution) 演算で行なうコンボルーション法 (重量積分法) などである^{1)~8)}。

さて、現在 CT における問題はいくつかあるが、1つに測定の高速度と共に像再合成アルゴリズムの高速度がある。現在のところ処理速度、再合成像の質および計算機の使用メモリなどの点から最も優れているのは総ての計算が実空間で実行できるコンボルーション法であると言われている^{1)~8)}。

コンボルーション法 (FBP 法) では射影に対する補正関数のコンボルーション演算 (フィルタ処理) と、処理後のデータの逆投影の計算過程がある。これらは全射影数 (測定方向数) だけの計算回数を必要とし、各々の計算量は非常に多いため、両方共かなりの計算時間を必要とする。

本論文は上述の2つの計算過程のうち FBP 法におけるフィルタ処理に対して、新しく Walsh-Hadamard, Haar の2種の直交変換を用いて計算の高速度を計り、コンボルーション法あるいは FBP 法よりもさらに高速度な断層像合成の可能性を検討したものである。

II. Walsh-Hadamard, Haar 変換による断層像合成

多数の射影から2次元画像を近似的に再現する最も簡単な方法は、各射影を元の方向に投影 (back projection: 逆投影) し、加算する方法である。しかしながら、この方法で得られる画像は原画像とはかなり異なり、原画像を $1/r$ なる2次元の重み関数でぼかした画像となる。ここで r は半径方向の距離である。今、原画像を f 、上述の単純逆投影加算により得られる像を g とすると、 g は f と $\frac{1}{r}$ とのコンボルーションで表わされる。

$$g = f * \frac{1}{r} \quad (1)$$

*はコンボルーション演算を表わす。

このことを周波数空間で考えると、上記原画像 f および合成像 g の2次元フーリエ変換を $F(\omega, \theta)$, $G(\omega, \theta)$ 、(極座標で表わす) とすると、 G は式 (2) で表わされる。

$$G = F \cdot \frac{1}{|\omega|} \quad (2)$$

これらの式の詳細な導出については種々の文献があるので^{1)~8)}、ここでは省略する。

式 (2) から、単純逆投影加算により得られる像 G は原画像 F に対して $\frac{1}{|\omega|}$ なるフィルタ (低周

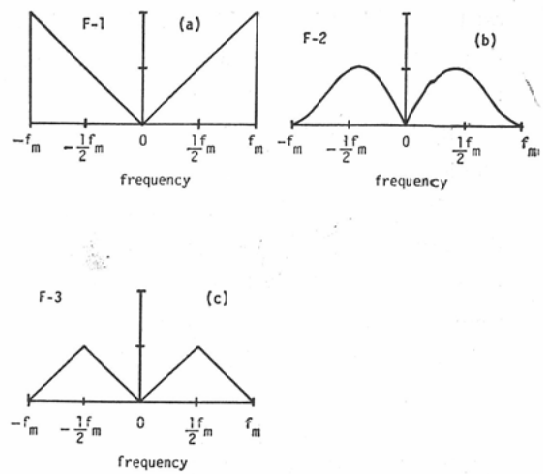
波ほど増強される一種の低域通過フィルタである) をかけた画像となり、低域が増強されるためぼけた画像となる。

このため正しい画像を復元するためには、式(1)あるいは式(2)から、逆投影像に対して $|\omega|$ のフィルタ処理を行なうか、あるいはそれを実空間で近似した r なる補正関数をコンボリューション演算すれば良い。

上述の方法では逆投影を行なった後の画像に対して2次元のフィルタ処理(2次元コンボリューション処理)を行なうが、もう1つ別な方法として逆投影を行なう前の各射影データに対して1次元のフィルタ処理(1次元コンボリューション処理)を行なう方法がある²⁾⁶⁾⁹⁾。現在のところ、この後者の方法のうち1次元コンボリューション処理を用いる方法が最も多く用いられている様である。これは他の方法に比べて画質が良いこと、すべての演算が実空間で行なえること、またコンボリューション演算はフーリエ変換によるフィルタ処理の場合の様な複素数を使わないことと、FFT(Fast Fourier Transform)¹⁹⁾²⁰⁾を用いる時に生じるサンプル点数についての制限(2ⁿ)が無いことなどによるものと思われる。しかしながら、筆者らは計算速度および $\frac{1}{|\omega|}$ の周波数フィルタを実領域へ変換する際に起こる近似誤差の問題が生じないことなどから、周波数空間におけるフィルタ処理の方が有利であると考えている。さらにここで述べる直交関数を使うことにより、FFT、コンボリューション演算よりも大幅な計算時間の短縮が計れ、また直交変換の計算においてはFFTの様な複素数および乗除算を使用せず実数の加減算で済むためミニコンピュータでも十分その利点が生かせる。

周波数 $\frac{1}{|\omega|}$ のフィルタ(補正関数)については再合成像の画質に直接影響するため、種々の研究がある^{2)6)~12)}。一般的には周波数の上限を適当なところでカットするフィルタが用いられている。これらのフィルタはほとんどすべて実空間のコンボリューション・フィルタ(補正関数)の形で用いられている。

本論文では比較のため、Ramachandran²⁾および



(a) F-1: Ramachandran (b) F-2: Chesler
(c) F-3: Ours

Fig. 1. Frequency domain plot of three filter functions.

Chesler¹⁰⁾のフィルタと、筆者らが実験的に高速計算を目的として求めたフィルタの3種を取り上げた。これらのフィルタの周波数特性をFig. 1に示す。ここではフーリエ空間でのフィルタ演算と同じ演算をWalsh-Hadamard, Haarの各直交空間で行なう方法と、各直交空間の間のフィルタ係数行列の関係を導く。なお、フーリエ空間におけるフィルタ処理が実空間でコンボリューション(cyclic convolution)で表わせる様に、Walsh-Hadamard, Haarにおけるフィルタ処理も実空間でコンボリューション(logical convolution)で表わせる¹³⁾。

1. Walsh-Hadamard 変換^{14)~18)}

処理を行なう射影データを列ベクトル X で表わし、フーリエ, Walshの各直交行列を F, W とする。ここで F, W は正規化行列とし、 F 行列の要素は式(3)で与える。

$$F(m, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \exp(-j \frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n) \right\} \quad (3)$$

$$m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, j = \sqrt{-1}$$

F は複素行列である。

Walsh 行列は一般に order のちがいににより3種に分類される。これらは各々、Walsh order (sequency order), Hadamard order (natural

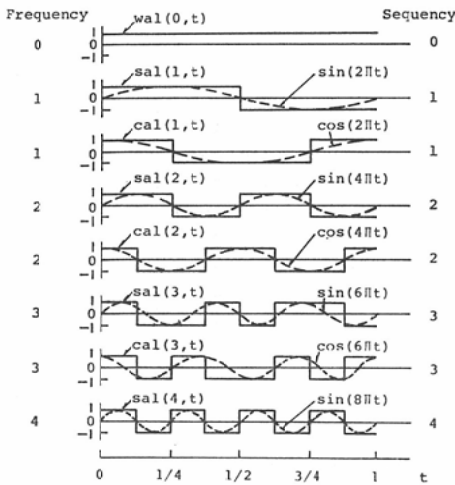


Fig. 2. Walsh functions and Fourier harmonics, N=8.

order), Paley order (dyadic order) と呼ばれており¹⁴⁾¹⁵⁾, 以下の式においてWの代りにおき換えればよいので, 以下 Walsh order との関係で進めていく. また, ここでは Walsh と Hadamard 行列を取り上げた. 8 次の Walsh 関数 (連続関数形) の例を Fig. 2 に示す. Fig. 2 で sequency は frequency に対応するものであり, 単位時間内の零交叉数の1/2である. また, wal(0,t) は直流成分に, sal(i,t) は sine 関数, cal(i,t) は cosine 関数に対応する. また, Fig. 2 の離散関数形である8次の Walsh および Hadamard 行列を Fig. 3 に示す.

フーリエ空間でのフィルタ行列を G_F , Walsh でのそれを G_W とすると, フィルタ処理後の結

果 Y は式 (4), (5) で表わせる.

$$Y_F = F^{-1} \cdot G_F \cdot F \cdot X \quad (4)$$

$$Y_W = W^{-1} \cdot G_W \cdot W \cdot X \quad (5)$$

ただし Y の添字は処理を行なった空間を示す. ここで処理後の結果が等しいという仮定のもとに G_F と G_W の関係を求めると式 (6) の様になる.

$$F^{-1} \cdot G_F \cdot F = W^{-1} \cdot G_W \cdot W \quad (6)$$

Walsh 行列は対称であるから, $W^{-1} = W$ となる (Hadamard, Paley も同じである). 式 (6) から G_W または G_F は各々次の様になる.

$$G_W = W \cdot F^{-1} \cdot G_F \cdot F \cdot W = B^* \cdot G_F \cdot B \quad (7)$$

$$G_F = F \cdot W \cdot G_W \cdot W \cdot F^{-1} = B \cdot G_W \cdot B^* \quad (8)$$

ただし $B = F \cdot W$ とおいた. F は複素行列であり, $F^{-1} = F^*$ (complex conjugate transpose) である. また, $W^{-1} \cdot W = W \cdot W = I$ (単位行列) であるから, $B^* = W F^* = W F^{-1}$ である. G_W は一般に実行列となる.

一般にフーリエ変換によるフィルタ処理では, フーリエ・スペクトラムの個々の要素 (周波数成分) に対して重み係数を乗ずることによりフィルタ処理を行なうため, フーリエフィルタ行列 G_F は主対角要素にのみ値をもつ行列 (scalar filter) となる. Walsh 変換によるフィルタ処理においても同様な処理がある (sequency scalar filter) が, フーリエ・フィルタと同一の結果は得られない. 同一の結果を得るため, 式 (7) から得られる行列 G_W は主対角要素以外にも値をもつフィルタ行列 (ベクトル・フィルタ) になる場合が多い. これは Fig. 2 に示した様に, フーリエと Walsh

$$W(8) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Walsh ordering

$$H(8) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Hadamard ordering

Fig. 3. Discrete Walsh-Hadamard functions, N=8.

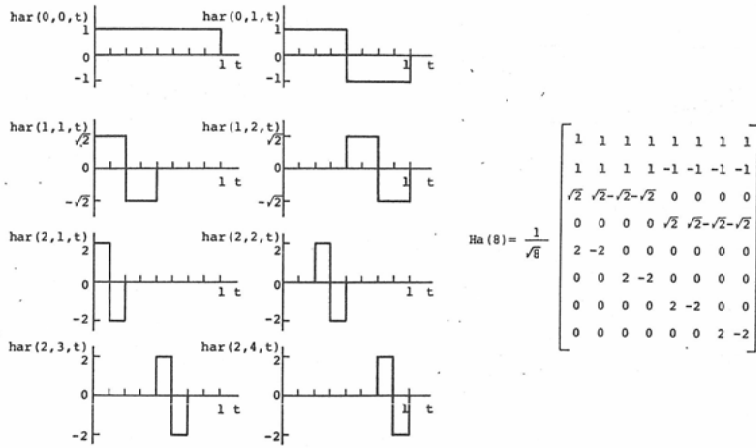


Fig. 4. Continuous and discrete Haar functions, N=8.

関数のちがいがから来るものである。逆に言うと、Walsh フィルタ行列が主対角のみ値をもつ行列であつても、対応するフーリエ・フィルタ行列はスカラ・フィルタ行列にならないことが多い。式(7)、(8)から、フーリエ空間でフィルタ係数を与えれば Walsh 空間で等価な係数行列が得られ、逆も可能である。

Walsh-Hadamard 変換に対しても FFT と同様に Cooley-Tukey 形の高速変換アルゴリズム FWHT (Fast Walsh-Hadamard Transform) がある¹⁴⁾¹⁵⁾¹⁶⁾。その場合、サンプル数 N に対して演算は $N \log_2 N$ の加減算で済むため、複素数の乗算を用いる FFT に比べてかなり高速である。さらに FWHT (Hadamard order) の方がビット反転演算が不要であるため、FWHT (Walsh order) よりも高速となる。

2. Haar 変換^{14)~16)}

1 と同様に、Haar 空間のフィルタ行列 G_{Ha} が式(9)で得られる。

$$G_{Ha} = Q^* \cdot G_f \cdot Q \tag{9}$$

ただし $Q = F \cdot Ha$ であり、Haar 行列では $Ha^{-1} \equiv Ha$ である。8 次の Haar 関数の連続形と離散形を Fig. 4 に示す。

Haar 変換の計算については 2 種の高速アルゴリズム FHT (Fast Haar Transform) がある¹⁵⁾。1 つは $2(N-1)$ 回の実数の加減算で済む An-

drews のアルゴリズムであり、もう 1 つはさらに $\log_2 N$ 回のビット反転演算を必要とする Cooley-Tukey 形のアルゴリズムである。計算時間からみると Andrews のアルゴリズムが有利であるが、後者を使う場合は FFT, FWHT, FHT が 1 つのハードウェア・プロセッサにより計算可能であるという利点がある。

以上の 3 種の直交変換の計算速度の比較のため

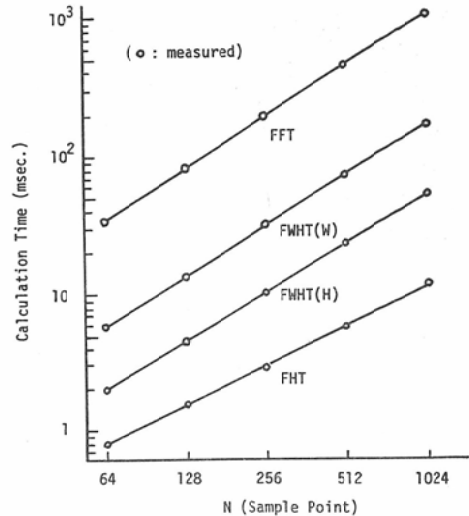


Fig. 5. Relationship between computing times and the number of sampled data for three orthogonal transforms. (Computed at Hokkaido University Computing Center.)

データ数 $N=64\sim 1,024$ について計算速度を実測した例を Fig. 5 に示す。ただし FHT は Andrews のアルゴリズムを用いた。これら 3 種の直交変換のうち、FHT が $2(N-1)$ 回の加減算で済むため最も高速であることがわかる。

III. シミュレーション

ここでは実際に計算機によりシミュレーションを行ない、再合成像の質および処理速度の点を検討した結果について述べる。シミュレーションでは計算機内で 64×64 の大きさの画像を作り、それを等角度で回転して 30 方向 (6° ステップ) からその射影を計算し、得られた射影を前記 3 種の直交変換を用いて処理を行ない、逆投影して再合成

像を得るという方法を用いた。ただし、各空間でのフィルタ行列は Fig. 1 のフーリエ空間の特性から式 (7), (9) を用いて別に計算で求めておく。

Fig. 1 のフィルタを他の直交空間に変換したフィルタ行列は前述した様に、主対角以外にも非零要素をもつ。 32×32 の行列の場合の各空間でのフィルタ行列を Fig. 6 に示す。Fig. 6 で空白および \cdot は零要素を示し、 $+$ は ± 1 を意味するのではなく、単に要素の符号を表わすだけである。フィルタ処理は射影の直交変換ベクトルとこの行列との積を計算するため、計算速度の点からは行列の非零要素の数ができるだけ少ないフィルタの方

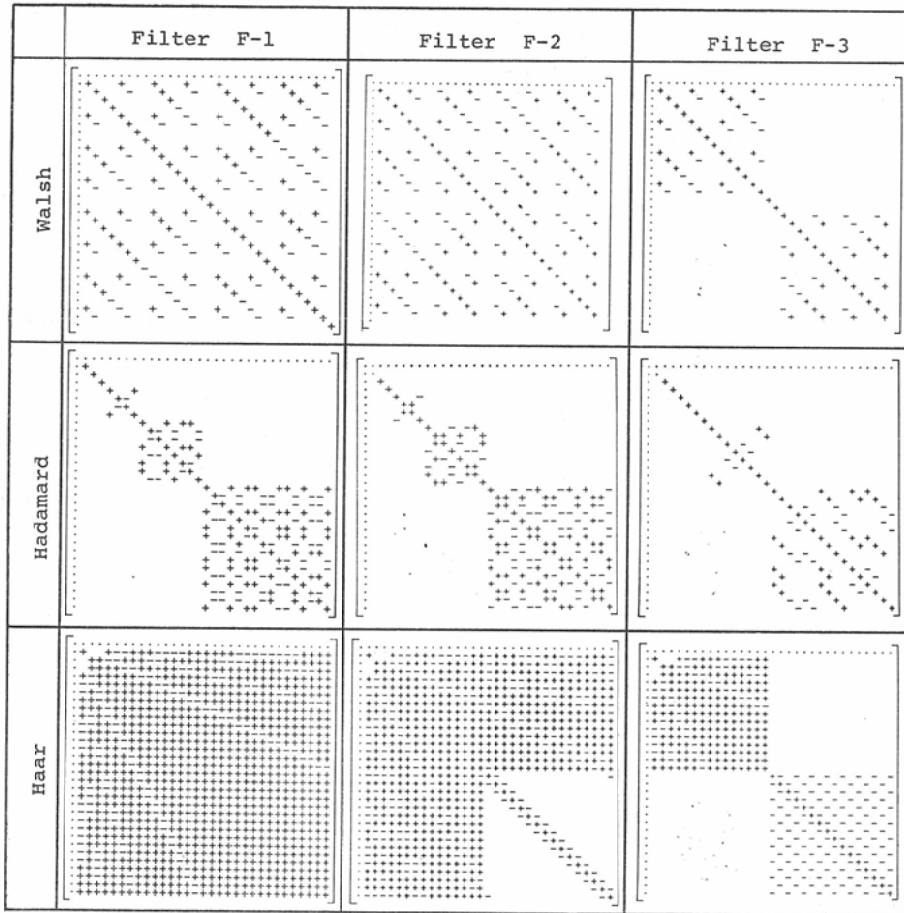


Fig. 6. Example of Walsh-Hadamard and Haar filter matrices, $N^2=32\times 32$. Blank and dot denote zero element, $+$ and $-$ denote sign of element.

Table 1. Ratio of non-zero elements to total elements for three filter matrices.

Orthogonal domain	Filter F-1	Filter F-2	Filter F-3
Walsh-Hadamard	0.166	0.166	0.084
Haar	0.935	0.731	0.356

が乗算回数が少ないため速い。しかし、これは再合成像の質も含めて判断しなければならない。これらの行列の非零要素の割合を Table 1 に示す。この割合は行列のサイズに関係なく一定である。

1. 計算時間の比較

再合成像を得るには、全射影に対して1度射影を直交変換し、フィルタ行列を乗じ逆変換し、それを逆投影する。計算時間の比較はフィルタ処理(変換→行列の乗算→逆変換)の部分だけであり、逆投影の計算過程はすべての方法とも共通である。計算時間の測定値を Fig. 7 に示す(計算は北海道大学大型計算機センター FACOM 230-

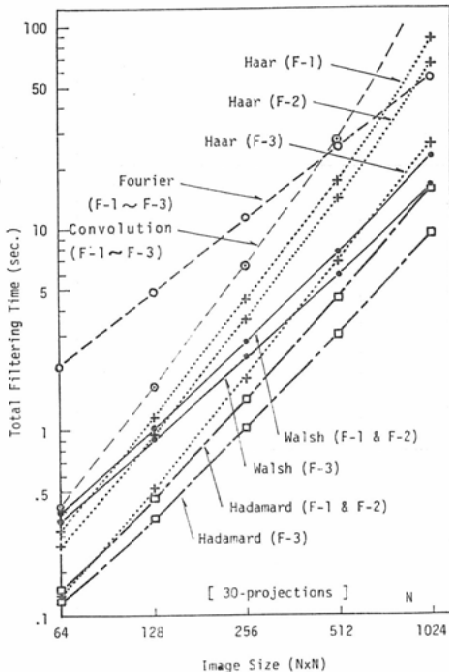


Fig. 7. Comparison of total filtering times for several image sizes and three orthogonal transforms. Filter F-1, F-2 and F-3 are shown in Fig. 1.

75で行なつた)。Fig. 7 の128×128以上のサイズは Table 1 の結果をもとにしてフィルタ処理の計算を行ない、時間を測定した結果である。

Fig. 7 からフィルタ F-1, F-2, F-3 とも Hadamard 変換による処理が速く、その中でも F-3 が最も速い。逆に、Haar 変換による処理が Fig. 5 の変換—逆変換のみの時間に比べて非常に遅くなっているのは、フィルタ行列の非零要素の数が Walsh-Hadamard フィルタに比べてかなり多く、そのためフィルタ行列の乗算に時間がかかっているためである。変換—逆変換だけの演算ではサンプル数を N とすると、FFT は $2N \log_2 N$ (複素数) 回の乗算が必要なのに対して FWHT では $2N \log_2 N$ (実数) 回の加減算、FHT では $2(N-1)$ (実数) 回の加減算で済むため¹⁵⁾¹⁸⁾、FHT が最も高速である。しかしながらフィルタ行列との乗算ではフーリエ変換では(複素数)回の乗算で済むのに対し、他の2つは KN^2 (K は Table 1 の値である) (実数) 回の乗算が必要である。コンボリューション法では N^2 回の乗算が必要であるから、計算時間は FWHT, FHT の方が速い。このことから画像サイズが大きくなるにつれて FFT に比べて Walsh-Hadamard, Haar 変換による処理が不利になる(コンボリューション法も同じ)。このことは Fig. 7 から明らかである。しかしながら実用上の範囲である $1,024 \times 1,024$ 程度までならば、Walsh-Hadamard による処理が最も高速であり、しかも変換が加減算で済むことを考えると本方法による処理が有利である。

2. 直交変換による再合成像の差

射影データを直交変換することは、フーリエでは sine, cosine 関数系、Walsh-Hadamard では Fig. 2, 3, Haar では Fig. 4 の関数系で展開近似することであるから、次数(サンプル数)一定の場合射影データの形により近似度が異なる。1次元で考えた場合、一般的に滑らかに変化する波形に対してはフーリエによる展開が近似度が良く、逆に矩形波に近い様な波形に対しては Walsh-Hadamard あるいは Haar 関数系の方が近似度

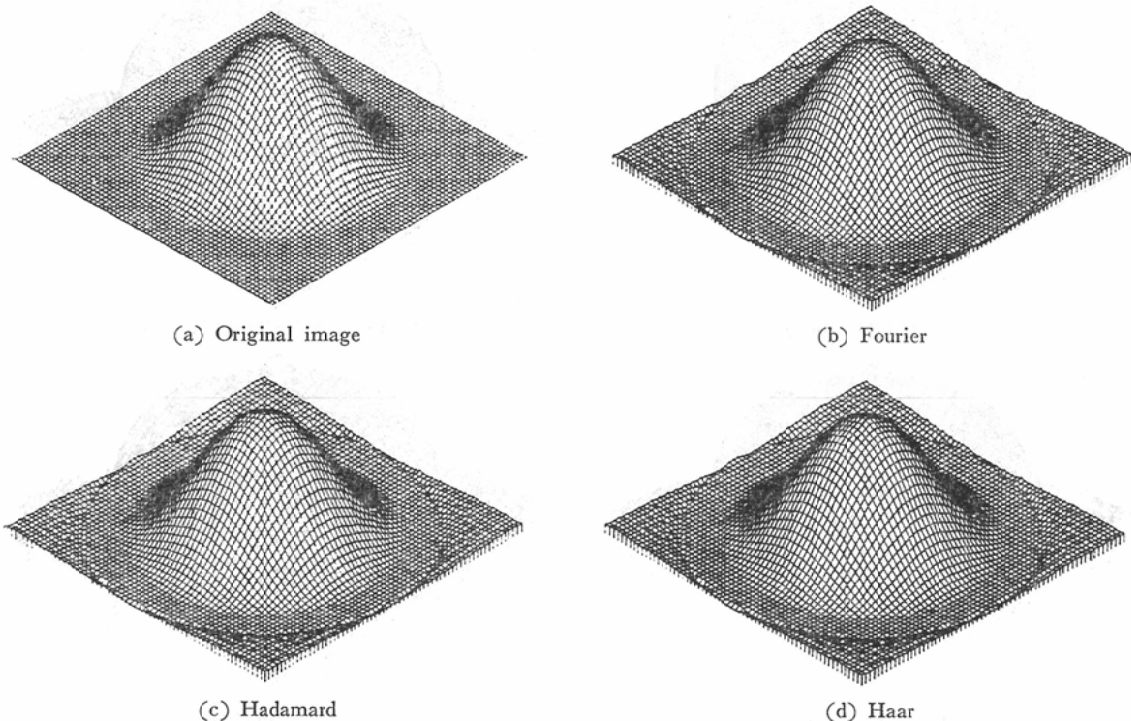


Fig. 8. Reconstructed images by Fourier, Hadamard and Haar transforms with same filter (F-3), $N^2=64 \times 64$. Projection number $N_\theta=30$.

が良くなる。同じことが2次元のデータ(画像など)に対しても言える。このことから、同一フィルタに対して直交変換により再合成像に差が出てくるかを検討した。非常に滑らかに変化する図形を phantom image として使い、3種の直交変換(フーリエ, Hadamard, Haar)を用いて再合成した結果を Fig. 8に示す。

Fig. 8の原画像はその中心断面が $1 + \cos(\pi R)$ (R :半径)で表わされる画像であり、フーリエ関数系による近似度が最も良く、他の直交関数による近似の方が悪くなると考えられる。Fig. 8では3種の変換による再合成像の間には差異は全く認められない。このことは、式(7)、(9)の関係によりフィルタ行列を求めた結果であり、ベクトルフィルタの効果である。画像のサイズを小さくした場合には差異が現われてくると考えられるが、 64×64 以下では実用上意味が無いであろう。

3. フィルタによる再合成像の差

FBP法やコンボリューション法ではフィルタの形が再合成像の画質に対して大きな影響を及ぼす。フィルタによる再合成像の差異を調べるため、Fig. 1に示した3種のフィルタを用いて phantom image の再合成を行なった結果を Fig. 9に示す。Fig. 9の射影数は30方向(6° ステップ)であり、再合成の計算には Hadamard 変換を用いた。Fig. 9から、フィルタ F-1が半径方向のリングングが最も大きく、以下 F-2, F-3の順に少なくなっているのが分かる。3種とも像の円周方向にリップルがあるのは射影数が30方向と少ないためであり、このリップルは射影数を増すことにより減少する。F-3を用いて、射影数を30, 60, 90, 180と増した時の再合成像を Fig. 10に示す。Fig. 10では見やすくするため、画像マトリクス(64×64)に内接する円の外側を零にした。

計算時間の点からは Fig. 7に示した様に F-3による処理が最も高速であり、画質も F-1と F-2

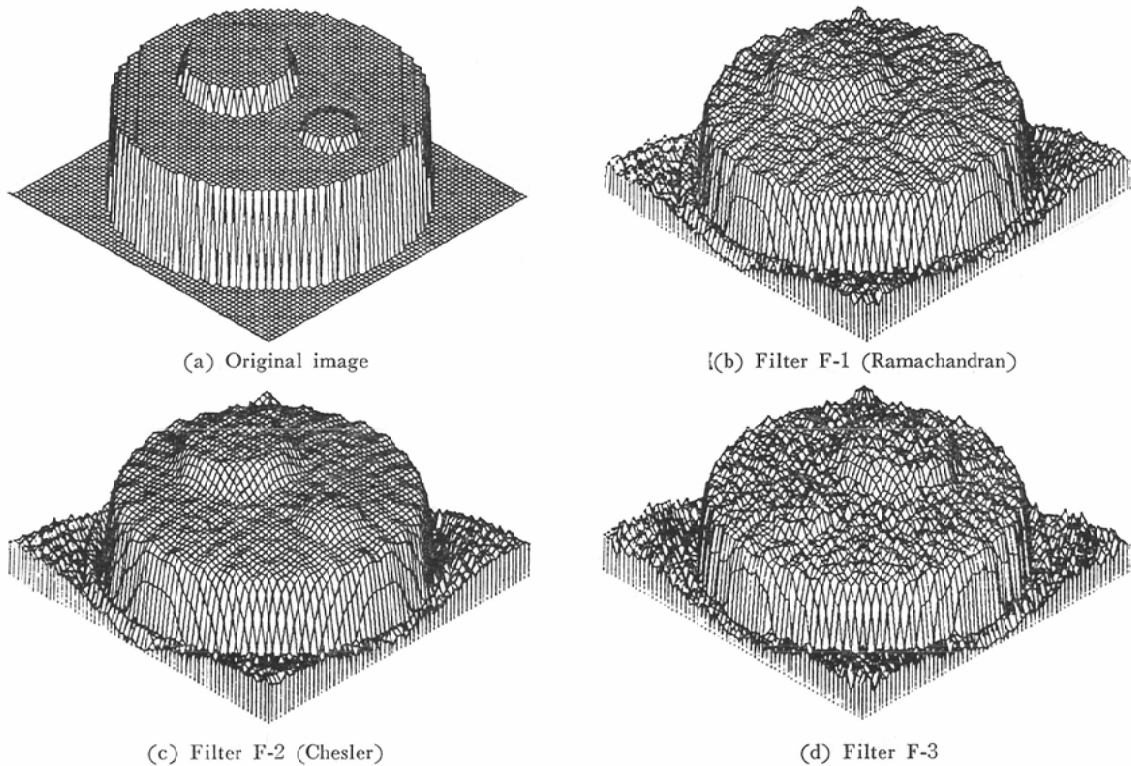


Fig. 9. Reconstructed images by three different filters (F-1, F-2 and F-3) with Hadamard transform, $N^2=64 \times 64$. Projection number $N_\theta=30$.

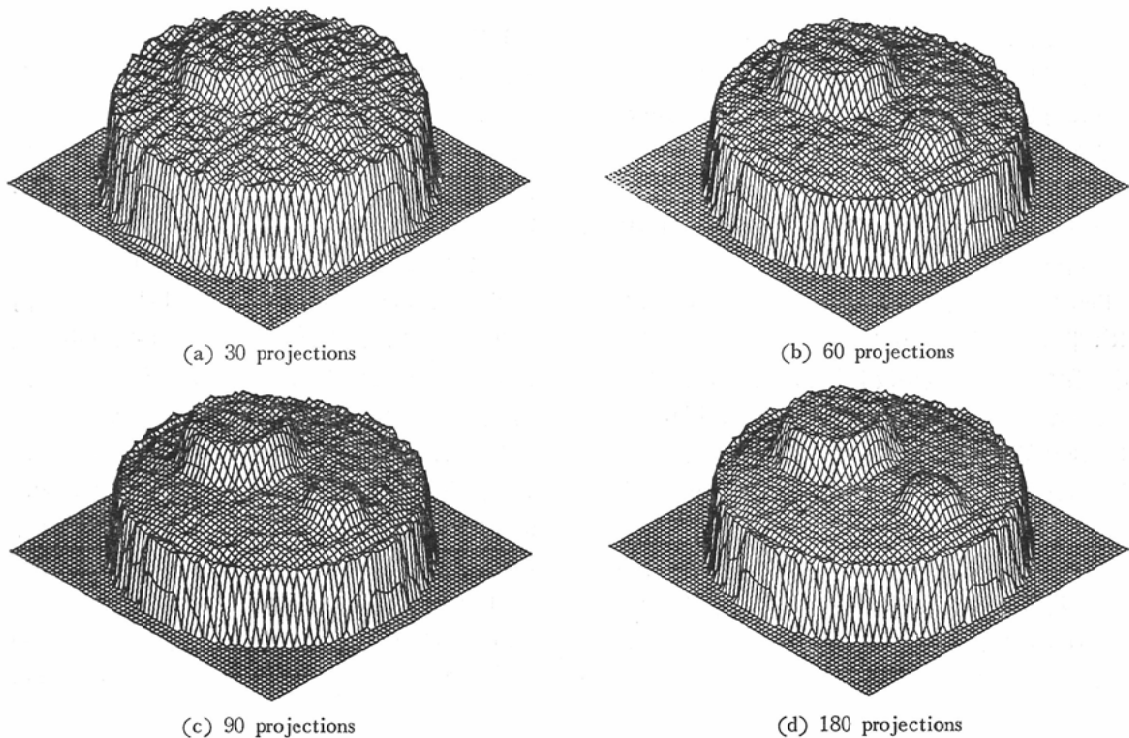


Fig. 10. Reconstructed images with 30, 60, 90 and 180 projections, $N^2=64 \times 64$. Hadamard transform and filter F-3.

の中間の様な再合成像であり、十分実用に耐えると考えている。

IV. 結 語

本論文ではFBP法による断層像合成を、Walsh-Hadamard および Haar の2つの直交変換を用いて高速で計算する方法について検討し、その可能性を示した。

さらにコンピュータ・シミュレーションにより高速計算の観点から求めた新しいフィルタ関数を提案した。従来提案されている関数のうち2種類の関数 (Ramachandran, Chesler) を取り上げ、phantom image を用いて比較を行ない、新しい関数が高速計算に適した画質も十分実用になることを確認した。

最後に、ここでは逆投影の過程を取り上げなかったが、この部分も非常に多くの計算量と計算時間を必要とする。本論文において述べたフィルタ処理の高速化とともに、逆投影の計算時間の短縮も大きな問題である。

参考文献

- 1) Brooks, R.A. and DiChiro, G.: Principles of Computer Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging, *Phys. Med. Biol.*, 21, 5, p. 689—732, 1976
- 2) Ramachandran, G.N. and Lakshminarayan, A.V.: Three-dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A.*, 68, 9, p. 2326—2240, Sept. 1971
- 3) Bracewell, R.N. and Riddle, A.C.: Inversion of Fan-Beam Scans in Radio Astronomy, *The Astrophysical Journal*, 150, p. 427—434 Nov. 1967
- 4) Crowther, R.A., DeRosier, D.J. and Klug, A.: The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy, *Proc. Roy. Soc. Lond., A*, 317, p. 319—340 1970
- 5) Kay, D.B. Keys, J.W. and Simon, W.: Radionuclide tomographic image reconstruction using Fourier Transform Techniques, *J. Nucl. Med.*, 15, p. 981—986, 1974
- 6) Cho, Z.H. and Ahn, I.S.: Computer Algorithm for the Tomographic Image Reconstruction with X-ray Transmission Scans, *Computers and Biomedical Research*, 8, p. 8—25, 1975
- 7) Cho, Z.H. and Chan, J.K.: A Comparative Study of 3-D Image Reconstruction algorithms with Reference to Number of Projections and Noise Filtering, *IEEE Trans., NS-22*, p. 344—358 Feb. 1975
- 8) Mersereau, R.M. and Oppenheim, and A.V.: Digital Reconstruction of Multidimensional Signals From Their Projections, *Proc. IEEE*, 62, 10, p. 1319—1388 Oct. 1974
- 9) Shepp, L.A. and Logan, B.F.: The Fourier Reconstruction of a Head Section, *IEEE Trans., NS-21*—43 1974
- 10) Chesler, D.A. and Riederer, S.J.: Ripple Suppression during Reconstruction in Transverse Tomography, *Phys. Med. Biol.*, 20, 4, p. 632—636 1975
- 11) Tanaka, E. and Inuma, T.: Correction Functions for Optimizing the Reconstructed Image in Transverse Section Scan, *Phys. Med. Biol.*, 20, 4, p. 789—798 1975
- 12) Cho, Z.H., Ahn, I. and Bohn, C.: Computerized image reconstruction method with photon/X-ray transmission scanning, *Phys. Med. Biol.*, 19, p. 511—522 1974
- 13) Robinson, G.S.: Logical Convolution and Discrete Walsh and Fourier Power Spectra, *IEEE Trans., AU-20*, 4, p. 271—280 Oct. 1972
- 14) Harmuth, H.F.: Transmission of Information by Orthogonal Functions, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1972
- 15) Ahmed, N. and Rao, K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1975
- 16) Shore, J.E.: On the Application of Haar Functions, *IEEE Trans., Communications* p. 209—216 1973
- 17) Ahmed, N., Rao, K.R. and Abdussattar, A.L.: BIFORE or Hadamard Transforms, *IEEE Trans., AU-19*, 3, p. 225—234 Sept. 1971.
- 18) Manz, J.W.: A Sequency-Ordered Fast Walsh Transform, *IEEE Trans., AU-20*, 3, p. 204—205 Aug. 1972
- 19) Rabiner, L.R. and Rader, C.M.: Digital Signal Processing, IEEE Press, New York, 1972
- 20) Gold, B. and Rader, C.M.: Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, New York, 1969