不確実・不確定状況下での数理的意思決定の基礎的研究

1999年

片桐 英樹

目 次

第1章

緒論

1.1 背景と目的

現代の社会・経済環境は, 複雑・流動的かつ大規模化しており, 適確な**意思決定** (decision-making) がますます重要になりつつある. 意思決定を行うための方法としては, 従来から種々の数理的手法が提案されているが, 数理的に意思決定を行う場合には数理モデルを構築し, **数理計画問題** (mathematical programming problem) として定式化することが多い. 代表的なものとして, 線形計画問題が挙げられる. 線形計画問題とは, 決定変数に関して線形方程式や線形不等式で与えられる制約条件の下で, 線形の目的関数を最大あるいは最小にするという問題であり, 1947年にDantizigが発表した単体法の成果と電子計算機の発達に伴って急速に発展してきた. 通常の線形計画問題において, 制約式や目的関数の係数は確定値で与えられるが, 現実には確定的でない場合も多い. そのような状況下での数理的意思決定法としては, 確率論を基礎にした確率計画法が考えられ, 様々な最適化基準が提案されるとともに多くの意思決定問題に応用されている [70]. しかし, 確定的でない要素が存在する場合においてそれが常に確率的な現象として扱うことができるとは限らない. 例えば, 線形計画問題において目的関数や制約式の係数を考える場合に, コストや時間の制約などから十分に調査が行えず, 確定値で与えることが困難な場合がしばしば見られる. このような場合, 熟練者は経験や知識などからおおよその値の見積もりが可能であることも多いが, その値を確率変数として扱うことは適当ではないと思われる. また, その値を無理に確定値で表すことは熟練者が培った有益な情報を欠落させることになる. このような人間の知識や言葉など確率的な不確実さとは異なる不確定性を扱うのに有効な概念として**ファジィ理論**

(fuzzy theory) があり, その中心となる**ファジィ集合** (fuzzy set) は1965年にZadehによって提案された [81]. ファジィ理論は, 人間の知識, 経験, 意識, 選考, 評価, 思考過程などを, 自然言語を用いて表現し, 電子計算機などを用いて情報処理を行って専門家の優れた知識・経験を組み込んだモデルを作ろうとするものである. ファジィ理論の応用は制御や情報分野で盛んで多くの実用化が行われているが, 数理的意思決定ではとりまく環境の複雑・流動化, 不確実性そして価値基準の多様化にともない, その必要性が強まりつつある. このような状況の中, 数理計画問題, 一般に最適化問題にファジィ概念を導入する必要性があると考えられ, ファジィ数理計画法として多くの研究がなされている [23].

これまでの研究では, 確率的な不確実性と曖昧さを含む場合とが別々に考えられてきたが, 現実の意思決定問題においてはこれら2つを同時に含む場合も多いと思われる. 例えば, 従来, 確率現象における実現値は完全に知ることが出来るとしていたが, 実現値が完全にわかってから意思決定していては遅い場合や実現値が不完全にしかわからない場合, さらには測定能力の限界などでどうしても曖昧性が残る場合があると考えられる. また, そのような状況においては, 確率的な情報と曖昧性を含んだ情報を個別に切り放して扱えないことも多い. このような確率的な不確実性と人間の主観などに伴う曖昧性を同時に含む要素を表すための概念として, **ファジィランダム変数** (fuzzy random variable) がある. ファジィランダム変数は1978年にKwakernaak [43] によって定義され, その後Puriら [64] によって数学的な基礎が構築された. 応用面での研究はまだあまりなされていないが, 不確実性と曖昧さが同時に存在する状況下での意思決定問題を扱う上で有用な概念であり, これらを用いた数理計画法の研究は現実の意思決定に大いに貢献すると考えられる.

以上の観点から, 本研究では, 不確実・不確定要素を表すためにファジィランダム変数を導入し, いくつかの意思決定問題に応用する. 数理モデルにファジィランダム変数を導入した場合, 確率的な情報と曖昧な情報が同時に存在するため, 従来の意思決定法をそのまま用いることはできない. したがって, 新たな最適化基準を考える必要がある. 本研究では, これまでに考えられてきたファジィ数理計画法と確率計画法に基づき, 不確実・不確定状況下での有効な意思決定法として大きく分けて2つを考えている. 一つは, ファジィ数理計画法における可能性計画と確率計画法における機会制約条件計画に基づいた方法であり, もう一つはファジィランダム変数の期待値であるファジィ数の大小関係に基づいた解を定義しそれを求める方法である. 前者については第3章から第6章で扱っており, 後者については第7章で扱っている.

現実の意思決定問題に適用するためには，適切な意思決定法だけでなく，定式化された問題を効率的に解くアルゴリズムを考える必要がある．そのため，本研究では，考えた意思決定法をいくつかの問題に応用し，それぞれの問題固有の構造を利用した効率的な解法を構築する．

1.2 概要

本論文の構成は以下のとおりである．

第2章では，確率計画法, ファジィ数理計画法およびファジィランダム変数等, 本論文の基礎となる手法について概観する．

第3章では, 制約式の定数項あるいは目的関数の係数がファジィランダム変数である線形計画問題を考える．制約式の定数項がファジィランダム変数ある場合については, 制約式の両辺の差に対するファジィ目標を導入し, その可能性測度をと目的関数とを同時に最適化する問題として定式化する．また, 目的関数の係数がファジィランダム変数である場合においては, 目的関数値にファジィ目標に設定し，そのファジィ目標を満足する可能性測度に関する機会制約条件計画問題として定式化する．さらに制約式を等価確定条件に変形した後, 元の問題を解くために補助問題を導入し, 元の問題との関係を十分に利用した効率的なアルゴリズムを与える．この問題は多くの意思決定問題に応用が可能であり，第4章から第6章までの基盤となっている．

第4章では, ポートフォリオ問題において, 不確実性と不確定性が同時に存在する状況下での単一指数モデルを取り扱う．単一指数モデルのα値やβ値がファジィ数またはファジィランダム変数である場合の意思決定法を提案するとともに, 問題を解くための効率的アルゴリズムを開発し, 最後に数値計算の結果を示す．

第5章では, 重み係数がファジィランダム変数である場合の線形ナップサック問題を考える．決定変数が連続値をとる場合においては第3章のファジィランダム線形計画問題において述べた形で定式化されるが, ここでは, 問題の構造を十分に利用した効率的なアルゴリズムを与える．また決定変数が離散値をとる場合についても考察し, 動的計画法に基づいたアルゴリズムを構築する．

第6章では, 枝に付随するコストがファジィランダム変数であるスパニングツリー問題を考える．第3章のファジィランダム線形計画問題に基づいて定式化した後, 補助問題を導入し, 3目的問題との関係を利用した効率的なアルゴリズムを開発する．さらにボトルネッ

ク型スパニングツリー問題について2つのモデルを考える．まず，可能性測度最大化モデルにおいては，枝のコストに対しファジィ目標を設け，その可能性測度の最小値が最大になる問題として定式化し，パラメトリックスパニングツリーに対するアルゴリズムを拡張した多項式時間アルゴリズムを与える．また確率測度と可能性測度を同時に最大化するモデルについても考察し，ある条件下で多項式時間で解けることを示す．

第7章では，曖昧な費用をもつ腐敗しやすい商品の在庫管理問題を考える．費用がファジィ数である場合においては，利益関数はファジィランダム変数になり，通常の在庫管理問題のように最適発注政策は定まらない．従来の確率的在庫管理問題においては期待利益関数を最大化する問題として解かれることが多いが，本章ではファジィランダム変数の期待値がファジィ数になることを用いてファジィマックス順序[14]の概念を用いた非劣解を定義し，それらを求めるアルゴリズムを開発する．

第8章において本研究の総括を行い，その成果や意義をまとめるとともに，今後の課題について述べる．

第2章

不確実・不確定状況下において基礎となる数理計画法

2.1　確率計画法

現実社会においては不確実性が存在する状況下で意思決定をする場合が多いが，その手段として，数理計画の分野においては，従来，確率論を基にした確率計画法が考えられてきた．ここでは二段階問題, 機会制約条件計画問題についてのみ述べる．機会制約条件計画法が制約条件の満たされる確率を問題にしてるのに対し，二段階問題は制制約条件の目標に対する差を問題にしている．　以下ではまず二段階問題について最初に述べ，その後に機会制約条件問題を紹介する．

2.1.1　二段階問題

次の線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{a1}\ :\quad & \text{minimize} && \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\
& \text{subject to} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& && \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}
\end{aligned}
$$

ただし, $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$，そして $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とする．$\boldsymbol{b}$ のランダム性により両辺の差も確率変数となるが, その値に対する様々なペナル

ティ（リコース）と $\boldsymbol{cx}$ の和を最小にする決定変数 $\boldsymbol{x}$ を決めることが必要になる．そこで，Beale[1] と Dantzig[5] によって次のような定式化がなされた．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{a2}\ :\quad &\text{minimize} \quad \boldsymbol{cx} + E(\min_{\boldsymbol{y}}\ \boldsymbol{dy})\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Wy} = \boldsymbol{b}\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\end{aligned}$$

ただし，Eは期待値を表し，$\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$であり，$\boldsymbol{W}$は$m \times n$行列である．　非負の決定変数 $\boldsymbol{x}$ が決定され，確率変数 $\boldsymbol{b}$ の実現値が与えられたとすると，リコース変数 $\boldsymbol{y}$は次の第二段階目の計画問題において最適化される．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{a3}\ :\quad &\text{minimize} \quad \boldsymbol{dy}\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{Wy} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{y} \geq \mathbf{o}\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_{a3}$の最適値を $J(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b})$ とし，**実行可能解** (feasible solution) が下に有界でないとき $J(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}) = -\infty$，実行可能解が存在しないとき $J(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}) = \infty$ とする．そのとき，もとの二段階問題 $\mathbf{P}_{a2}$ は次の確定的な計画問題 $\mathbf{P}_{a4}$ と等価になる．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{a4}\ :\quad &\text{minimize} \quad \boldsymbol{cx} + J(\boldsymbol{x})\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\end{aligned}$$

ここで，$J(\boldsymbol{x}) = E(J(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}))$ である．

二段階問題 $\mathbf{P}_{a2}$が確定問題 $\mathbf{P}_{a4}$に変換されることを示したが，$\mathbf{P}_{a4}$ を解くことは一般的には非常に困難である．

2.1.2　機会制約条件問題

以下では，機会制約条件問題について本論文と深い関わりのある部分に限って簡単に説明する．

まず，単制約において制約式の係数が確率変数である場合を考える．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{b1}\ :\quad &\text{minimize} \quad \boldsymbol{cx}\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{ax} \geq b, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}\end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^t$とする.

いま, 右辺の bを平均 μ_0, 分散 σ_0をもつ確率変数とし, 制約式の左辺の係数a_i を平均 μ_i, 階数nの分散共分散行列$\boldsymbol{V}$をもつ多変量正規分布に従う確率変数とする. また, bとa_i は独立であるとする.

ここで, 制約式は常に満たされる必要はなく, ある確率レベルα以上で満たされれば良いとするのが, 機会制約条件であり, 次のようになる.

$$Pr\left(\sum_i^n a_i x_i \geq b\right) \geq \alpha$$

ただし, $Pr(\cdot)$は$(\cdot)$が成立する確率を表す. ここで, 正規分布の性質より

$$\frac{(b - \sum_i^n a_i x_i) - (\mu_0 - \sum_i^n \mu_i x_i)}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} + \sigma_0^2}}$$

は標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う. このことから,

$$Pr\left(\sum_i^n a_i x_i \geq b\right) \geq \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sum_i^n \mu_i x_i - \mu_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} + \sigma_0^2}}\right) \geq \alpha$$

$\Phi(\cdot)$は$\mathrm{N}(0,\ 1)$の分布関数で, $K_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$として, 等価確定条件にすると,

$$\sum_i^n \mu_i x_i - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} + \sigma_0^2} \geq \mu_0$$

よって, $\mathbf{P}_{b1}$は次の問題$\mathbf{P}_{b2}$と等価である.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{b2}\ : & \text{minimize} & \boldsymbol{cx} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_i^n \mu_i x_i - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} + \sigma_0^2} \geq \mu_0 \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

$\alpha > 1/2$のときは$K_\alpha > 0$となり, それぞれの制約不等式を満たすxの集合は凸集合となる. 次に目的関数の係数が確率変数である場合について述べる.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{b3}\ : & \text{maximize} & \boldsymbol{cx} \\ & \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

ただし, $\boldsymbol{c}$=$(c_1, \cdots, c_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^t$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)^t$とする. また, $\boldsymbol{A}$は$m \times n$行列$[a_{ij}]$である.

いま, 目的関数の係数 c_i を平均 ν_i, 階数 n の分散共分散行列 U をもつ多変量正規分布に従う確率変数とする. $\mathbf{P}_{b3}$ に対する意思決定モデルはいくつか考えることができるが, ここでは期待値をとる E モデル, 分散を最小にする V モデル, $\boldsymbol{cx}$ がある基準値以上である確率を最大化する確率最大化モデル, 反対に越える確率が与えられていて基準値を最大化する P モデル, さらには越える確率もコントロールできる変数として目標関数に組み込んだ一般化 P モデルについて紹介する.

1. ***E* モデル**

期待値の線形性から

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i$$

であり, 目的関数は $\boldsymbol{x}$ の線形関数となり, 次の問題と等価になる.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_{b4} & : & \text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \nu_i x_i \\ & & \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

2. ***V* モデル**

E モデルのように期待値が最大となってもそのばらつきが大きい場合には, 計画に不安定性が伴う. 期待値を大きくするよりもむしろ期待値一定のもとで, 分散が小さい確実性の高い決定が好ましい場合も多いと思われる. このような場合において次のようなモデルが考えられている.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_{b5} & : & \text{minimize} & \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} \\ & & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i}^{n} \nu_i x_i = r \\ & & & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

$\mathbf{P}_{b5}$ は2次計画問題となっている.

3. **確率最大化モデル**

在庫問題などで全コストがある一定値以下になる確率が最大になる決定変数を求める場合に次の問題が考えられる.

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_{b6} & : & \text{maximize} & Pr\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq f_0\right) \\ & & \text{subject to} & \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

これは目的関数がある特定の値f_0以下になる確率をもち，この確率を最大にする決定変数xを求めるモデルである．

正規分布の性質より

$$\frac{\sum_i^n c_i x_i - \sum_i^n \nu_i x_i}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}}$$

は標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う．$\Phi(\cdot)$を$N(0,\ 1)$の確率分布関数とすると，$\mathbf{P}_{b6}$の目的関数に関して次のことが示される．

$$\Phi\left(\frac{\sum_i^n \nu_i x_i - f_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}}\right) \to \text{最大}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_i^n \nu_i x_i - f_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}} \to \text{最大}$$

よって，$\mathbf{P}_{b6}$は次の$\mathbf{P}_{b7}$に変換することができる．

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{b7} & : & \text{maximize} \quad \dfrac{\sum_i^n \nu_i x_i - f_0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}} \\ & & \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

このモデルはDinkelbach[8]の方法など分数計画法の手法を用いて解くことができる．

4. P**モデル**

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{b8} & : & \text{maximize} \ \ f \\ & & \text{subject to} \ \ Pr\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq f\right) \geq \alpha \\ & & \qquad\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

これは確率レベルα一定のもとで基準値fを最大化する決定変数$\boldsymbol{x}$を求めるモデルであり，正規分布の性質を用いて制約式は次のように変形される．

$$\sum_i^n \nu_i x_i - f - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}} \geq \mathbf{o}$$

よって最大のfは

$$f = \sum_i^n \nu_i x_i - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}$$

となり，$\mathbf{P}_{b8}$ は次の問題 $\mathbf{P}_{b9}$ に変換される．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{b9}\ :\ \ &\text{maximize} && \sum_i^n \nu_i x_i - K_\alpha\sqrt{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}\\ &\text{subject to} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\geq\mathbf{o}\end{aligned}$$

$\alpha > 1/2$ のとき $K_\alpha > 0$ であるから凸計画問題となる．

5. **一般化 P モデル**

確率レベルαも決定変数として考えるモデルである．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{b10}\ :\ \ &\text{maximize} && f+\lambda\alpha\\ &\text{subject to} && Pr\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \geq f\right)\geq\alpha\\ &&& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\geq\mathbf{o}\end{aligned}$$

ここでλは正の定数である．a_iの同時分布関数を G とすると $\mathbf{P}_{b10}$ は $\mathbf{P}_{b11}$ と等価となる．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{b11}\ :\ \ &\text{maximize} && \sum_i^n \nu_i x_i - q\sqrt{\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}}+\lambda G(q)\\ &\text{subject to} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\geq\mathbf{o}\end{aligned}$$

この問題は Ishii ら [32] の方法を用いて解くことが出来る．

2.2　ファジィ数理計画法

2.2.1　ファジィ集合とファジィ理論

ファジィ集合の定義を述べる前に通常の集合について簡単に述べる．

全体集合 (universal set) X の通常の意味での部分集合を，ファジィ集合との対比で**クリスプ集合** (crisp set) と呼び，次のように定義される．

定義 2.1 (クリスプ集合)

Xにおけるクリスプ集合 A は

$$c_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

なる**特性関数** (charactaric function) c_Aによって定義される．

次にファジィ集合の定義を示す.

定義 2. 2 (ファジィ集合)

Xにおける**ファジィ集合** (fuzzy set) Aは

$$\mu_A : X \to [0,\ 1]$$

なる**メンバシップ関数** (membership function) μ_Aによって特性づけられた集合であり, メンバシップ関数 μ_A は Aにおけるxの**帰属度** (grade of membership) を表す. このとき $\mu_A(x)$の値が1に近ければxのAに属する度合いが大きく, 反対に0に近ければ, その度合いが小さいことを示している.

ここでメンバシップ関数 μ_Aが0か1しかとらない場合, Aはクリスプ集合となり, メンバシップ関数 $\mu_A(x)$は特性関数c_Aとなる. メンバシップ関数は特性関数の一般化であり, ファジィ集合は通常の集合概念の一般化であるといえる. ファジィ集合Aに対して次の基本的な用語が定義されている.

1. 台 : Aのメンバシップ関数が正であるような$x \in X$の集合を**台** (support) といい, $supp(A)$で表す.

2. 高さ : Aのメンバシップ関数のX上での上限を Aの**高さ** (height) といい, $hgt(A)$で表す.

3. 正規性 : Aの高さが1のとき, ファジィ集合 Aは**正規的** (normal) であるという.

2.2.2 ファジィ集合の演算

ファジィ集合における基本演算は, 次のように定義されている.

1. **相等**

   2つのファジィ集合A, Bが**等しい** (equal) ことを A=Bと書き, メンバシップ関数を用いて次のように定義する.

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x),\quad {}^{\forall}x \in X$$

2. **部分集合**

2つのファジィ集合A, Bに対して A が B の**部分集合** (subset) あることを$A \subseteq B$と書き, メンバシップ関数を用いて次のように定義する.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad {}^\forall x \in X$$

3. **共通集合**

2つのファジィ集合A, Bに対してA, Bの**共通集合**, あるいは**交わり** (intersection) を$A \cap B$と書き, メンバシップ関数を用いて次のように定義する.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

4. **和集合**

2つのファジィ集合A, Bに対してA, Bの**和集合**, あるいは**結び** (union) を$A \cup B$と書き, メンバシップ関数を用いて次のように定義する.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$$

5. **補集合**

ファジィ集合Aの**補集合** (complement) を$\bar{A}$と書き, メンバシップ関数を用いて次のように定義する.

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x)$$

2.2.3　拡張原理

次に述べるZadehの**拡張原理** (extension principles)[81] は, 2つの非ファジィ集合間における任意の数学的関係をファジィ集合に対して拡張するという, ファジィ理論における重要な概念である.

いま, 集合Xから集合Yへの写像または関数$f : X \to Y$を考える. このような写像は, Xの要素xをYの要素$y = f(x)$に対応させる規則であり, Xを定義域, Yを値域という. Xの部分集合Aに対して$f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\}$は$Y$における部分集合で, Aの fによる像という.

A, Bをファジィ集合とした場合に対する写像fの拡張は, 次に述べるZadehの拡張原理により一般化される.

定義 2.3 （拡張原理）

写像 $f : X \to Y$ を拡張して，X のファジィ集合 A の像 $f(A)$ を Y のファジィ集合として，そのメンバシップ関数を次のように定義する．

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x)} \mu_A(x), & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0, & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

ここで f が 1 対 1 の場合は $\mu_{f(A)}(y) = \mu_A(x)$ となるが，多対 1 の場合は一般に $y = f(x)$ となるような x は複数個存在するため，そのような x に対する μ_A の上限値を $\mu_{f(A)}(y)$ としている．

2.2.4 ファジィ数

「だいたい m ぐらいの数」や「だいたい n ぐらいの数」などは実数直線上のファジィ集合として表され，特に**ファジィ数** (fuzzy number) とよばれている．ここでは，Dubois と Prade[9] により導入されたファジィ数とその基本的演算，および ***L-R* ファジィ数** (*L-R* fuzzy number) について述べる．

定義 2.4 （ファジィ数）

実直線上で定義された正規かつ**凸ファジィ集合** (convex fuzzy set) で，特にメンバシップ関数が区分的に連続なものをファジィ数という．ただし，ファジィ集合 A が凸ファジィ集合であるとは $^\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$ と $0 \leq \lambda \leq 1$ なる任意の λ に対して，

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2))$$

が成立することをいう．

2 つのファジィ数 M, N のメンバシップ関数をそれぞれ $\mu_M(x)$, $\mu_N(x)$ とする．このとき，拡張原理により R^1 上の 2 項演算 $*$ を 2 つのファジィ数 M, N の 2 項演算へ拡張でき，その 2 項演算として $+$, $-$, $\times$, $/$ を考えれば，2 つのファジィ数 M, N の和，差，積，商を次のように拡張することができる．

1. 加法：$M \oplus N$

$$\begin{aligned} \mu_{M\oplus N}(z) &= \sup_{z=x+y} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x\in R^1} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(z-x)) \end{aligned}$$

2. 減法：$M \ominus N$

$$\begin{aligned} \mu_{M\ominus N}(z) &= \sup_{z=x-y} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x\in R^1} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(x-z)) \end{aligned}$$

3. 乗法：$M \otimes N$

$$\begin{aligned} \mu_{M\otimes N}(z) &= \sup_{z=x\times y} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(y)) \\ &= \begin{cases} \sup\limits_{x\in R^1} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(z/x)), & z \neq 0 \\ \max\{\sup\limits_{x\in R^1} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(0)), & \\ \quad \sup\limits_{y\in R^1} \min(\mu_M(0),\ \mu_N(y))\}, & z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. 除法：$M \oslash N$

$$\begin{aligned} \mu_{M\oslash N}(z) &= \sup_{z=x/y} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(y)) \\ &= \sup_{x\in R^1} \min(\mu_M(x),\ \mu_N(x/z)) \\ &= \sup_{y\in supp(N)} \min(\mu_M(z\cdot y),\ \mu_N(y)) \end{aligned}$$

Dubois と Prade はファジィ数の演算の効率化をはかるため, さらに次に示す L-Rファジィ数の概念を導入した.

定義 2.5　(L-Rファジィ数)

ファジィ数 M は

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m, \quad \alpha > 0 \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x \geq m, \quad \beta > 0 \end{cases}$$

のとき L-Rファジィ数とよばれる.

ここで m は**平均** (mean) と呼ばれ, α, β は左右の**広がり** (spread) を表すパラメータである. また, $L(\cdot)$ は**型関数** (shape function) と呼ばれ, 条件

1. $L(x) = L(-x)$

2. $L(0) = 1$

3. $L(x)$ は $[0, \infty)$ で非増加

を満たす. $R(\cdot)$ も $L(\cdot)$ と全く同様に定義されている.

定義2. 5 で定められたL-R ファジィ数は平均と広がりを用いて, 簡単に $M{=}(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR}$ と表す. このようなL-R ファジィ数の基本演算に関して, Dubois と Prade[9] は加法, 減法に対して次のことが成り立つことを示した.

1. 加法 : $(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \oplus (n,\ \gamma,\ \delta)_{LR} = (m+n,\ \alpha+\gamma,\ \beta+\delta)_{LR}$

2. 減法 : $(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} \ominus (n,\ \gamma,\ \delta)_{RL} = (m-n,\ \alpha+\delta,\ \beta+\gamma)_{LR}$

3. 定数倍 : $\lambda(m,\ \alpha,\ \beta)_{LR} = (\lambda m,\ \lambda\alpha,\ \lambda\beta)_{LR}$

また, 型関数 $R(\cdot)$ が $L(\cdot)$ と同じであるとき, 特に L ファジィ数とよばれ, $M = (m,\ \alpha)_L$ と表記する. L ファジィ数においても L-R ファジィ数と同様に加法, 減法の演算公式が成り立つ.

2.2.5 ファジィマックス順序

ファジィ数の順序関係である**ファジィマックス順序** (fuzzy max order) の定義を示す.

定義 2. 6 [14] (ファジィマックス順序)

2つのファジィ数 A, B に対して

$$A \preceq B \Leftrightarrow \begin{cases} (a) \quad m \le n \\ \text{or} \\ (b) \quad m \le^{\exists} d \le n : \\ \qquad\qquad \mu_A(x) \ge \mu_B(x), \quad {}^{\forall}x < d \\ \qquad\qquad \mu_A(x) \le \mu_B(x), \quad {}^{\forall}x > d \end{cases}$$

m, n はそれぞれ, ファジィ数 A, B の平均を表す. 上の定義は表現は異なるが, 一般に用いられている Dubois と Prade[9] が提案したファジィマックス順序と同値である.

定理 2.7 [14]　2つの L ファジィ数 $A=(m,\,\alpha)_L, B=(n,\,\beta)_L$ に対して

$$A \preceq B \Leftrightarrow n-m \geq t_0|\alpha-\beta|$$

ここで, t_0 は $\inf_{t>0,}\{t \mid L(t)=0\}$ として定義され, L の零点と呼ばれる.

2.2.6　様相測度

ある対象を評価する場合において, 人間の主観的判断の曖昧性を考慮した評価主体の曖昧な尺度として, 1972年に菅野は, 次のような**ファジィ測度** (fuzzy measure) の概念を導入した [71].

定義 2.8 (ファジィ測度)

集合 Ω の部分集合を閉区間 [0, 1] の数値に対応づける集合関数 g は, 次の公理を満たすとき, ファジィ測度とよばれる.

1. 有界性 : $g(\emptyset)=0,\quad g(\Omega)=1$
2. 単調性 : $A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B)\quad \forall A,\ B \subseteq \Omega$

単調性の条件 2. より,

$$\begin{aligned} g(A \cup B) &\geq \max(g(A),\ g(B)) \\ g(A \cap B) &\leq \min(g(A),\ g(B)) \end{aligned}$$

が成立する. 上の第1式の等号が成立するときの測度は, **可能性測度** (possibility measure) として, また第2式の等号が成立するときの測度は, **必然性測度** (necessity measure) として次のように定義される.

定義 2.9 (可能性測度)

集合 Ω の部分集合を区間 [0, 1] の数値に対応づける集合関数 Π は, 次の公理を満たすとき, 可能性測度とよばれる.

1. $\Pi(\emptyset)=0;\ \Pi(\Omega)=1$

2. $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A),\ \Pi(B))\ \forall A,\ B \subseteq \Omega$

メンバシップ関数 $\mu_E(\omega)$ から導かれる

$$\Pi_E(\omega)(A) = \sup\{\mu_E(\omega)|\ \omega\} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

は可能性測度の公理を満たし, 可能性測度を与える. μ_Eは Π_E の可能性分布であり, しばしばπ_Eと表される. これは基本事象の可能性がわかっているときの事象Aの起こる可能性を表していると解釈できる. このことによって, μ_Eを可能性分布 π_E と見なすことができる. Ω が有限集合のときは, Π の可能性分布は

$$\pi_E(\omega) = \Pi_E(\{\omega\}) = \mu_E(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

となる. さらに, 集合Aもファジィ集合Fの場合には, ファジィ集合の交わりの定義より,

$$\Pi_E(F) = \sup\{\min(\mu_E(\omega),\ \ \mu_F(\omega)|\omega \in \Omega\}$$

となる.

定義 2.10 (必然性測度)

集合Ωの部分集合を区間 [0, 1] の数値に対応づける集合関数$\mathcal{N}$は, 次の公理を満たすとき, 必然性測度とよばれる.

1. $\mathcal{N}(\emptyset) = 0;\ \mathcal{N}(\Omega) = 1$

2. $\mathcal{N}(A \cap B) = \min(\mathcal{N}(A),\ \ \mathcal{N}(B))\ \ \forall A,\ B \subseteq \Omega$

Aである必然性は「Aでないことが可能でない」度合いであり可能性測度Πが与えられると

$$\mathcal{N}(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$$

となる. このことから,

$$\Pi(A) \geq \mathcal{N}(A) \quad \forall A \subseteq \Omega$$

であることが容易にわかるので事象は必然になる前に可能になるという直感にも一致する. 可能性測度と同様, 可能性分布を使って必然性測度を表すと

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E(A) &= 1 - \Pi_E(\bar{A}) \\ &= \inf\{1 - \mu_E(\omega)|\omega \in \bar{A}\} \end{aligned}$$

となる. さらに, Aもファジィ集合の場合には, ファジィ集合の結びの定義より, 次のように拡張することが出来る.

$$\mathcal{N}_E(F) = 1 - \Pi_E(\bar{F}) = \inf\{\max(1 - \mu_E(\omega),\ \ \mu_F(\omega))|\omega \in \Omega\}$$

これらの測度と確率測度を比較すると確率測度はσ-加法性が成り立つのに対し, 可能性測度では成り立たない. 一般にファジィ測度は単調性のみ仮定しており, 加法性は成り立たない. すなわち, ファジィ測度は確率測度を一般化したものと考えることができる. Zadehは確率と可能性を次のように区別している.

確率･･･事象の生起に関するもの
可能性･･･事象生起能力に関するもの

したがって, 確率と可能性の関係は次のように整理できる.

確率が高い$\Longrightarrow$可能性も高い
可能性が低い$\Longrightarrow$確率も低い
可能性が高い$\not\Longrightarrow$確率も高い
確率が低い$\not\Longrightarrow$可能性も低い
必然性が高い$\Longrightarrow$確率も高い
確率が低い$\Longrightarrow$必然性も低い
確率が高い$\not\Longrightarrow$必然性も高い
必然性が低い$\not\Longrightarrow$確率も低い

Zadehはこれらの関係を**可能性/確率調和原理** (possibility/probability consistency principle) と呼んでいる. またDuboisとPradeはこの定性的な原理を次のような不等式で表している.

$$\mathcal{N}(A) \leq P(A) \leq \Pi(A) \quad (\forall A \subseteq X)$$

2.2.7 ファジィ数理計画法

数理計画による意思決定を行う場合, 係数や制約は必ずしも明確に与えられておらず, 曖昧な形で与えられる場合がある. このような係数や制約の曖昧さをファジィ集合で表現した数理計画問題はファジィ数理計画問題と呼ばれ, 1973年に, 田中ら[73]によりはじめて導入された. その後, ファジィ目標と ファジィ制約のある線形計画問題に対して, Zimmermann[85]

は意思決定者が主観的に決定するメンバシップ関数が線形の関数であると仮定してBellmanと Zadeh のファジィ決定に対する最大化決定を採用すれば, 通常の線形計画問題として解けることを示した. さらに, Negoita ら [55] は, Zimmermann のファジィ目標とファジィ制約のある線形計画問題に対して, 通常の線形計画問題の制約式の各係数がファジィ集合で表される場合を考察した. その後 Dubois ら [10] は, ファジィ数を制約式に含むようなファジィ線形計画問題を対象として, ファジィ係数を考慮した実行可能性の概念を可能性と必然性の観点から統一的に考察している. また坂和ら [67, 68] は, ファジィ数を制約式だけでなく目的関数にも含む多目的線形計画問題を扱っている.

ファジィ数理計画問題では, 制約や目標の**漠然性** (vagueness) および係数の**不明確さ** (ambiguity) が取り扱われているが, これらの曖昧さは本質的に異なっている. 目標や制約の曖昧さは, 意思決定者が要求する水準あるいは許容限度が明確に定められないことを表し, ファジィ目標やファジィ制約として扱っている. また, 係数の曖昧さは係数の値がはっきりとわからず, 係数のとりうる範囲しか与えられないことを表しており, 係数のファジィ集合を可能性分布として扱っている. 乾口 [21] は, 従来の主なファジィ数理計画法を取り扱われている曖昧さの相異から, 次の3つに分類している.

1. 目標や制約の漠然性を扱うファジィ数理計画問題
2. 係数の不明確さを 扱うファジィ数理計画問題
3. 目標や制約の漠然性と係数の不明確さを同時に扱うファジィ数理計画問題

最初の問題は, フレキシブル計画問題と呼ばれ, 目標や制約が"だいたい〜以上", "だいたい〜以下" などのように漠然と与えられる数理計画問題である [73, 85]. 2つめの問題は, 目標や制約は明確に与えられるが, 係数が"だいたい〜ぐらい" のように不明確に与えられる数理計画問題 [67, 72] であり, 係数のファジィ集合を可能性分布として解釈することから可能性計画問題と呼ばれている. 最後の問題は, 目標や制約式が"だいたい〜以上", "だいたい〜以下" というように漠然と与えられ, かつ係数についても"だいたい〜ぐらい" のように不明確に与えられる数理計画問題であり, 2つめの問題と同様, 可能性計画問題と呼ばれている.

確率計画法とファジィ数理計画法はそれぞれ不確実状況下と不確定状況下における有効な数理的意思決定法であるが, それらを比較した研究 [65, 66] や類似点を指摘した研究 [24] も行われている.

また，確率計画法において制約式の成り立つ確率レベルのフレキシビリティを考慮したモデル[80]も提案されている．

2.3 ファジィランダム変数

ファジィランダム変数は1978年に Kwakernaak [43] によって導入され, その後, Puri と Ralescu [64] によって理論的な土台が構築された．ファジィランダム変数とは確率変数の実現値がファジィ数である変数である．Kwakernaak による定義は多値論理の立場より導出されたものであり，ランダム集合を拡張した Puri-Ralescu による定義とは少し違いがあるが, Puri-Ralescu の定義のほうがより一般的である．また, 両者の定義がある条件の下では一致することが知られている [83].

ファジィランダム変数の定義にはその他にもいくつかある [13, 42, 45, 76] が，本研究では Watanabe [77] の定義を紹介することにする．この定義は従来のファジィランダム変数の包括的な定義であると同時に, 本研究で用いるファジィランダム変数と深い関わりを持っている.

定義 2. 11 [77](ファジィランダム変数)
Ω を標本空間, Λをファジィ集合の族とし，B_Ω, B_Λをそれぞれの$\sigma-$集合体, P を確率測度とする．(Ω, B_Ω, P), (Λ, B_Λ) をそれぞれ確率空間, 可測空間とするとき, Ω からΛへの可測写像Xをファジィランダム変数という.

このことは任意の $A \in B_\Lambda$に対して $\{\omega | X(\omega) \in A\} \in B_\Omega$ が成り立つことを意味する.

次の定理は定義 2. 11 の十分条件になっていることが示されている.

定理 2. 12 [77] x を確率空間 (Ω, B_Ω, P) から可測空間 (Γ, B_Γ) への可測写像とし，X をΩからΛへの写像とする．もし全単射$h : \Lambda \to \Gamma$が存在すれば, 可測空間 (Λ, B_Λ) と (Ω, B_Ω, P) から (Λ, B_Λ) への写像Xはファジィランダム変数である.

この定理から次の系が成り立つことが示されている.

系 2. 13 [77] X をΩ からΛへの写像とする. $\forall\omega \in \Omega$に対して, ファジィ集合$X(\Omega)$のメンバシップ関数 $\mu_{X(\omega)}$ がある関数$f(u;\theta)$に対して$\mu_{X(\Omega)}(u) = f(u; x(\omega))$ と表されるとする. ここでθに関して $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき $f(u;\theta_1) \neq f(u;\theta_2)$ が成り立つならばX はファジィランダム変数である.

ファジィ集合Xのメンバシップ関数がパラメータによって決定されxが確率変数ならば, 系2.13からXはファジィランダム変数である. 系2.13における条件はかなり強いが, これを満たすものは応用上有用であり, 本研究で導入するファジィランダム変数もこの条件を満たしている. また, Kaufmann と Gupta [40] によって導入されたハイブリット数やPuriとRalescu [63] による正規ファジィランダム変数もこの条件を満たす.

第3章

不確実・不確定要素を含む線形計画問題

3.1　緒言

本章では線形計画問題において制約式や目的関数にファジィランダム変数を含む場合の意思決定法および解法を考える．第2章で述べたように, 不確実性下の数理計画法として確率計画法が考えられ，また, 確率的な変動とは異なる曖昧さを扱う場合の手法としてファジィ数理計画法が考えられている．

しかし, 現実には, ランダム性とファジィ性が同時に現れることも多い．線形計画問題は数理的に意思決定を行う場合の代表的なモデルであり，ファジィランダム線形計画問題を扱うことは，不確実かつ不確定状況下での意思決定法を考えるにあたって不可欠であると同時に，他の多くの意思決定問題への拡張の可能性を孕んでいると言える．

3.2節では等式制約の定数項がファジィランダム変数である線形計画問題を扱い，ファジィ数理計画法における可能性計画と確率計画法における機会制約条件計画に基づいた意思決定法を考える．定式化された問題を等価確定問題に変換する過程について示した後，問題の解法を示すために代表的な確率分布の下での解を求める．この問題は例えば, ある商品の需要量が天候に依存し, それぞれの天候でおおまかな需要量がわかっており, それぞれの天候が確率的に生起する状況下で, 総需要量と生産量の差をなるべく小さくし, かつ利益を最大化する問題などに適用できる．

次に3.3節では目的関数における係数がファジィランダム変数である問題を考える．係数がファジィランダム変数であるために目的関数値もファジィ性とランダム性を含む．従って通常の最小化はできないため，目的関数値に対して曖昧な目標を設定し，その目標を満

足する可能性の度合いに関する機会制約条件計画問題として定式化する．等価確定問題に変換する過程について述べた後，その問題を解くために凸計画問題である補助問題を導入し，元の問題との関係を明らかにする．さらに補助問題を効率的に解くために，パラメトリック2次計画問題を導入し，元の問題を効率的に解くアルゴリズムを開発する．

3.2　制約式の定数項がファジィランダム変数である場合

次の線形計画問題を考える．

$$\mathbf{P}_{sc1} \ :\ \text{minimize } \boldsymbol{cx} \tag{3.1}$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{ax} = b \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \tag{3.3}$$

ただし，$\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_m), \boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_m), \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_m)^t$である．

上の不等式の右辺bを次のメンバシップ関数$\mu_{B(\omega)}$に特性づけられるファジイランダム変数$B(\omega)$とする．

$$\mu_{B(\omega)}(b) = \begin{cases} L\left(\dfrac{d(\omega)-b}{\alpha}\right) & (b \leq d(\omega)) \\ R\left(\dfrac{b-d(\omega)}{\beta}\right) & (b \geq d(\omega)) \end{cases} \tag{3.4}$$

ここで，$d(\omega)$ は確率密度関数 $f(x)$, 確率分布関数 $F(x)$ をもつ確率変数とする．またL, Rは次の条件を満たす上半連続非増加関数と仮定する．

$$L : [0, +\infty) \to [0, 1],\ L(0) = 1,\ L(r') = 0 \tag{3.5}$$

$$R : [0, +\infty) \to [0, 1],\ R(0) = 1,\ R(r') = 0 \tag{3.6}$$

このとき，$B(\omega)$ は系2.13の条件を満たすファジイランダム変数である．

制約式(3.2)において，bの不確実性のために制約等式を常に満たすxは存在しない．よって，左辺と右辺との差$y = b - \boldsymbol{ax}$ が生じるが，これもbを通してファジイランダム変数となり，拡張原理によって次のメンバシップ関数に特性づけられるファジイランダム変数$Y(\omega)$となる．

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \mu_{B(\omega)}(y + \boldsymbol{ax}) \tag{3.7}$$

制約等式の両辺の差 y の大きさは小さいほうが望ましいため, “だいたい f_0以下である”というファジイ目標Gを設定し, yに関する可能性分布$\mu_{Y(\omega)}$が与えられた下でGである可能性の度合い, すなわち、可能性測度を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\Pi_{Y(\omega)}(G) &= \sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y), \mu_G(y)\} &(3.8)\\ &= \sup_y \min\{\mu_{B(\omega)}(y+\boldsymbol{ax}), \mu_G(y)\} \ \in [0,1] &(3.9)\end{aligned}$$

yに関して不確定性のみが存在する場合には, 決定変数yが決まれば$\Pi_Y(G)$の値は一つの値に定まる. その場合は, Itoh ら [34] が行った可能性測度最大化問題となる. しかし, ここでは, yに関して不確定性だけでなく不確実性も存在するため, $\mu_{Y(\omega)}$にともない, $\Pi_Y(G)$も確率的に変動することになる. そこで$\mathbf{P}_{sc1}$の意思決定法として, 機会制約条件計画に基づいて次の$\mathbf{P}_{sc2}$を考える.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{sc2}\ :\quad &\text{maximize} \quad -\boldsymbol{cx}+Q(\Pi_Y(G)) &(3.10)\\ &\text{subject to} \quad Pr(\Pi_{Y(\omega)}(G)\geq h)\geq\theta &(3.11)\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x}\geq\mathbf{o} &(3.12)\end{aligned}$$

関数$Q(\cdot)$は $-\boldsymbol{c}^t\boldsymbol{x}$ と $\Pi_{Y(\omega)}(G)$の間の重みのバランスの役割を果たしており, 単調増加関数であるとする. $\Pi_{Y(\omega)}(G)\geq h$は次のように変形される.

$$\begin{aligned}&\sup_y \min\{\mu_{B(\omega)}(y+\boldsymbol{ax}), \mu_G(y)\}\geq h\\ \Leftrightarrow\ &\exists y:\mu_{B(\omega)}(y+\boldsymbol{ax})\geq h,\ \mu_G(y)\geq h\\ \Leftrightarrow\ &\exists y:L\left(\frac{d(\omega)-y-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}}{\alpha}\right)\geq h,\ R\left(\frac{y+\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}-d(\omega)}{\beta}\right)\geq h,\ l(y)\geq h,\ r(y)\geq h\\ \Leftrightarrow\ &\exists y:d(\omega)-y-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}\geq\alpha L^*(h),\ y+\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}-d(\omega)\leq\beta R^*(h),\ \mu_G^*(h)^-\leq y\leq\mu_G^*(h)^+\\ \Leftrightarrow\ &\exists y:\mu_G^*(h)^-\leq y\leq\mu_G^*(h)^+,\ y\leq d(\omega)-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}+\beta R^*(h),\ y\geq d(\omega)-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}-\alpha L^*(h)\\ \Leftrightarrow\ &\mu_G^*(h)^-\leq d(\omega)-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}+\beta R^*(h),\ \mu_G^*(h)^+\geq d(\omega)-\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}-\alpha L^*(h)\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}-\beta R^*(h)+\mu_G^*(h)^-\leq d(\omega)\leq\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x}+\alpha L^*(h)+\mu_G^*(h)^+\end{aligned}$$

ただし, $\mu_G(r)$ は$r<-f_0$ で非減少, $r>f_0$で単調増加, かつ$-f_0\leq r\leq f_0$で1である上半連続関数であるとする. また, $L^*(h)$, $R^*(h)$, $\mu_G^*(h)^-$ および $\mu_G^*(h)^+$は擬逆関数であり、次の条件を満たすものとする.

$$L^*(h)=\sup\{r|L(r)>h, r\geq 0\} \tag{3.13}$$

$$R^*(h) = \sup\{r | R(r) > h, r \geq 0\} \tag{3.14}$$

$$\mu_G^*(h)^- = \inf\{r | \mu_G(r) > h\} \tag{3.15}$$

$$\mu_G^*(h)^+ = \sup\{r | \mu_G(r) > h\} \tag{3.16}$$

便宜上，

$$t(\boldsymbol{x}, h) \triangleq \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} - \beta R^*(h) + \mu_G^*(h)^- \tag{3.17}$$

$$T(h) \triangleq \alpha L^*(h) + \beta R^*(h) + \mu_G^*(h)^+ - \mu_G^*(h)^- \tag{3.18}$$

と定義すると $\mathbf{P}_{sc2}$ は次の問題 $\mathbf{P}_{sc3}$ に変形される．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{sc3} \ : \quad & \text{maximize} && -\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + Q(h) && (3.19)\\ & \text{subject to} && Pr\left(t(\boldsymbol{x}, h) \leq d(\omega) \leq t(\boldsymbol{x}, h) + T(h)\right) \geq \theta && (3.20)\\ & && 0 \leq h \leq 1 && (3.21)\\ & && \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} && (3.22) \end{aligned}$$

次に $\mathbf{P}_{sc3}$ の制約式を機会制約条件計画の理論を用いて等価確定条件に変換することを考える．$T(h)$ は h の減少関数であり，積分区間の大きさを表している．$d(\omega)$ の確率分布関数 $F(x)$ を用いると制約式は

$$F(t+T) - F(t) \geq \theta \tag{3.23}$$

となる．次に，$s(t) = F(t+T) - F(t)$ とおき，$s(t) \geq \theta$ を満たす $s(t)$ の範囲を求める．$s(t)$ の導関数は

$$\frac{ds(t)}{dt} = f(t+T) - f(t) \tag{3.24}$$

となる．f は単峰関数，すなわち，$t < m$ では単調増加関数であり，$t \geq m$ では単調減少関数と仮定する．$ds(t)/dt = 0$ を満たす t を t_o とすると，t_o はただ一つに決まり，$s(t)$ の増減は次の表3.1のようになる．

表3.1

t	$-\infty$	$\cdots$	t_o	$\cdots$	$+\infty$
$s'(t)$	—	$+$	0	$-$	—
$s(t)$	0	↗	最大	↘	0

よって$s(t) \geq \theta$となる範囲は,

$$\gamma^*(h)^- \leq t(\boldsymbol{x}, t) \leq \gamma^*(h)^+ \tag{3.25}$$

すなわち

$$\gamma^*(h)^- \leq \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{x} - \beta R^{-1}(h) + \mu_G^*(h)^- \leq \gamma^*(h)^+ \tag{3.26}$$

となる. ただし,

$$\gamma^*(h)^- = \inf\{t | s(t) \geq \theta\} \tag{3.27}$$

$$\gamma^*(h)^+ = \sup\{t | s(t) \geq \theta\} \tag{3.28}$$

である. したがって, $\mathbf{P}_{sc3}$は次の問題$\mathbf{P}_{sc4}$と等価となる.

$$\mathbf{P}_{sc4}: \ \text{maximize} \quad -\boldsymbol{cx} + Q(h) \tag{3.29}$$

$$\text{subject to} \quad v_1(h) \leq \boldsymbol{ax} \leq v_2(h), \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \tag{3.30}$$

ここで

$$v_1(h) = \gamma^*(h)^- + \beta R^{-1}(h) - \mu_G^*(h)^- \tag{3.31}$$

$$v_2(h) = \gamma^*(h)^+ + \beta R^{-1}(h) - \mu_G^*(h)^- \tag{3.32}$$

である. 問題$\mathbf{P}_{sc4}$の最適解は, Itoh ら [34] の方法を用いて解くことにより得られる. そのためには v_1 と v_2 の符号の情報が必要であるが, それは確率分布に依存するので, 一般的には決定されない.

そこで, 次節では, いくつかの確率分布を与え, 問題の解法を具体的に示す.

例題

ある製品が2台の機械を使って生産されるとする. 機械 A は単位時間あたり5000円で 3 kg , 機械 B は単位時間あたり3000円で2 kg 生産する. 需要と供給の差は20kgより小さいほうが望ましい. 全体の費用を最小化するために各々の機械をどれだけの時間動かせばよいか.

需要量の確率分布については, ここでは, ベータ分布と正規分布の2つの場合について行う. 決定変数x_1, x_2 をそれぞれ機械1と機械2の稼働時間とすると, 問題は次のように定

式化される.

$$\mathbf{P}_{e1} \ : \quad \text{minimize} \quad 5x_1 + 3x_2 \tag{3.33}$$

$$\text{subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 = b \tag{3.34}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.35}$$

需要量bは前節で定義した形のファジィランダム変数$B(\omega)$に従うものとし, $L(t) = R(t) = 1 - t$かつ$\alpha = \beta = 1$を満たすものとする. $L(= R)$およびμ_Gは図3.2に図示される関数とする.

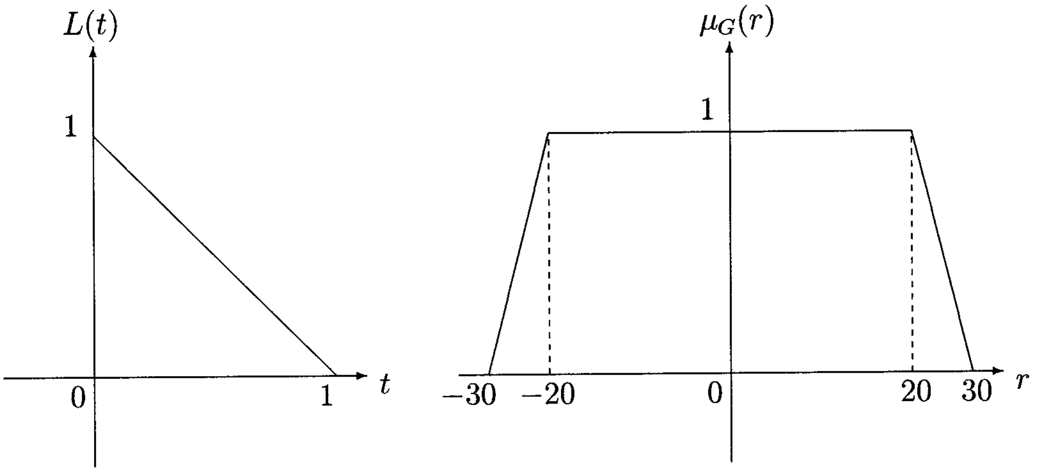

図3.2 Lおよびμ_Gの関数形

このとき, 擬逆関数の計算結果は次のようになる.

$$R^*(h) = -h + 1 \quad (0 \leq h \leq 1) \tag{3.36}$$

$$\mu_G^*(h)^- = 10h - 30 \quad (0 \leq h \leq 1) \tag{3.37}$$

制約式の差yに関するファジィ目標を“だいたい20以下である”とし, 満たすべき確率レベルθを0.9とする. 前節で考案した方法を適用すると$\mathbf{P}_{e1}$は次の$\mathbf{P}_{e2}$に変形される.

$$\mathbf{P}_{e2} \ : \quad \text{maximize} \quad -5x_1 - 3x_2 + Q(h) \tag{3.38}$$

$$\text{subject to} \quad Pr\left(\Pi_Y(G) \geq h\right) \geq 0.9 \tag{3.39}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{3.40}$$

$Q(h)=120h$ とし, $(d(\omega)-475)/50$ はベータ分布 $Be(2,2)$ に従う確率変数とする. $Be(2,2)$ の密度関数 $f(x)$ は $f(x)=6x(1-x)$ であるから $s(t)$ は次のように計算される.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_t^{t+T} 6x(1-x)dx \\ &= 6T\left(t-\frac{1-T}{2}\right)^2-\frac{1}{2}T(T^2-3) \end{aligned} \tag{3.41}$$

確率レベルは $\theta=0.9$ であるから, 方程式 $s(t)=\theta$ を t に関して解くことにより, $\gamma^*(h)^{\pm}$ が計算される.

$$\gamma^*(h)^{\pm}=\frac{(1-T)\pm\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}}}{2} \tag{3.42}$$

さらに $T(h)$ および $t(\boldsymbol{x},h)$ は次のようになる.

$$T(h) = \frac{2\sqrt{1-h}-2h+6}{5} \tag{3.43}$$

$$t(\boldsymbol{x},h) = \frac{3x_1+2x_2}{50}-\frac{T}{2}-\frac{475}{50} \tag{3.44}$$

以上の結果から, 解くべき問題は次の $\mathbf{P}_{e3}$ となる.

$$\mathbf{P}_{e3}\ :\ \text{maximize}\ -5x_1-3x_2+300-300T+60\sqrt{10T-70} \tag{3.45}$$

subject to

$$-50\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}}+500\le 3x_1+2x_2\le 50\sqrt{1-\frac{1}{3}T^2-\frac{3}{20T}}+500 \tag{3.46}$$

$$0\le h\le 1 \tag{3.47}$$

$$x_1,x_2\ge 0 \tag{3.48}$$

便宜上, $\mathbf{P}_{e3}$ では h のかわりに T を用いて表している. $\mathbf{P}_{e3}$ は伊藤ら [34] の方法を用いて解くことができ, 最適解および最適値はそれぞれ, $(x_1^*,\ x_2^*)=(0,\ 230.627)$, $h=0.999867$ となる.

次に $d(\omega)$ が正規分布 $N(500,20)$ に従う確率変数である場合を考える. 正規分布の擬逆関数を解析的に求めることはできないため, ここでは数値計算を行うことにより最適解を求めた. この場合, 最適解および最適値はそれぞれ, $(x_1^*,\ x_2^*)=(0,\ 252.333)$, $h=0.798566$ となる.

3.3　目的関数の係数がファジィランダム変数である場合

本節では目的関数の係数がファジィランダム変数である場合を扱う．以下では，次の問題を考える．

$$\mathbf{P}_{ob1} \; : \quad \text{minimize} \quad \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$
$$\text{subject to} \quad A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o} \tag{3.49}$$

ただし，$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$とし，$c_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ を次のメンバシップ関数$\mu_{C_j(\omega)}(c_j)$に特性づけられるファジィランダム変数$C_j(\omega)(j = 1, \ldots, n)$とする．

$$\mu_{C_j(\omega)}(c_j) = \begin{cases} L\left(\dfrac{c_j - d_j(\omega)}{\alpha_j}\right) & (c_j \ge d_j(\omega)) \\ R\left(\dfrac{d_j(\omega) - c_j}{\beta_j}\right) & (c_j \le d_j(\omega)) \end{cases} \tag{3.50}$$

ここで L は$[0, +\infty)$から$[0, 1]$への関数で$0 \le r \le r'$において狭義減少かつ$r' \ge r$において値0をとる連続関数とする．R に関しても同様の条件を満たすとする．α_jおよびβ_j はメンバシップ関数の広がりを表すパラメータであり，正の定数である．$d_j(\omega)$ は平均値m_jと分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$をもつ多次元正規分布に従う確率変数であるとし，$\boldsymbol{V}$は階数s をもつ$n \times n$の正定値行列$[v_{kl}]$とする．また，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列 (a_{ij})である．

簡略化のためにファジィランダム変数$C_j(\omega)$を以下では$(d_j(\omega),\ \alpha_j,\ \beta_j)_{LR}$と表すものとする．

拡張原理により，目的関数$y(= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x})$ は次の計算式によって導出されるメンバシップ関数によって特性づけられるファジィランダム変数$Y(\omega)$となる．

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \sup_{y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}} \{\mu_{C_1(\omega)}(c_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{C_n(\omega)}(c_n)\} \tag{3.51}$$

係数c_jは$L-R$ファジィ数の平均が確率変数になったものであるため，$L-R$ファジィ数の演算が適用でき，ファジィランダム変数$Y(\omega)$は次の形に表される．

$$Y(\omega) = \left(\sum_j^n d_j(\omega)x_j,\ \sum_j^n \alpha_j x_j,\ \sum_j^n \beta_j x_j\right)_{LR} \tag{3.52}$$

目的関数値に不確実性と不確定性が含まれるために，確定値の場合における意思決定法をそのまま適用することはできない．そこで，目的関数値に対し“だいたいf_0以下である”と

いうファジィ目標 G を設定する．ファジィ目標はメンバシップ関数 μ_G で特性付けられるファジィ集合で表すものとし，メンバシップ関数 $\mu_G(\cdot)$ は $y \geq 0$ で定義され，$0 \leq y \leq f_0$ において1であり，$y \geq f_0$ において単調減少な連続関数であるとする．さらに最適化基準として次の可能性測度 $\Pi_{Y(\omega)}$ を定義する．

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) = \sup_y \min\left\{\mu_{Y(\omega)}(y), \mu_G(y)\right\} \tag{3.53}$$

目的関数の係数が可能性変数で与えられる線形計画問題は乾口ら[21]に可能性測度最大化モデルや必然性測度モデルなどが考えれている．本節で扱う問題には，係数に不確定性だけでなく確率的な不確実性も含まれる．よって $\mathbf{P}_{ob1}$ の意思決定法として次の $\mathbf{P}_{ob2}$ を考える．

$$\mathbf{P}_{ob2} \ : \ \text{maximize} \ \ h \tag{3.54}$$

$$\text{subject to} \ \ Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq \alpha, \ \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \tag{3.55}$$

問題 $\mathbf{P}_{ob2}$ は乾口らのモデルを可能性測度に関する機会制約条件計画問題という形で拡張しており、確率的な情報と曖昧な情報を有効に利用する意思決定法の一つであると考えられる．$\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$ は次のように変形される．

$$\sup_y \min\left\{\mu_{Y(\omega)}(y), \ \mu_G(y)\right\} \geq h \tag{3.56}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists \, y : \mu_{Y(\omega)}(y) \geq h, \ \mu_G(y) \geq h \tag{3.57}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists \, y : L\left(\frac{y - \sum_{j=1}^n d_j(\omega)x_j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j}\right) \geq h, \ \mu_G(y) \geq h \tag{3.58}$$

$$\Leftrightarrow \ \exists \, y : y \geq \sum_{j=1}^n \{d_j(\omega) - L^*(h)\alpha_j\}x_j, \ y \leq \mu_G^*(h) \tag{3.59}$$

$$\Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^n \{d_j(\omega) - L^*(h)\alpha_j\}x_j \leq \mu_G^*(h) \tag{3.60}$$

ここで $L^*(h)$ および $\mu_{G^*}(h)$ は擬逆関数であり，次のように表される．

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup\{r | L(r) > h, \ r \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases} \tag{3.61}$$

$$\mu_G^*(h) = \sup\{r | \mu_G(r) \geq h\} \ \ (0 \leq h \leq 1) \tag{3.62}$$

したがって $\mathbf{P}_{ob2}$ は次の問題 $\mathbf{P}_{ob3}$ に変形される．

$$\mathbf{P}_{ob3}: \quad \text{maximize } h \tag{3.63}$$

$$\text{subject to } Pr\left(\sum_{j=1}^{n}\{d_j(\omega) - L^*(h)\alpha_j\}x_j \le \mu_G^*(h)\right) \ge \alpha \tag{3.64}$$

$$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o} \tag{3.65}$$

次に (3.64) を等価確定条件に変換することを考える．(3.64) において，$\sum_{j=1}^{n}\{d_j(\omega) - L^*(h)\alpha_j\}x_j \le \mu_G^*(h)$ は次のように変形される．

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} d_i x_i - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_i^2 x_i}} \le \frac{-\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j + L^*(h)\sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i + \mu_G^*(h)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_i^2 x_i}} \tag{3.66}$$

正規分布の性質より (3.66) の左辺

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} d_i x_i - \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_i^2 x_i}} \tag{3.67}$$

は標準正規分布に従う確率変数となることから，$\mathbf{P}_{ob3}$は次の等価確定問題 $\mathbf{P}_{ob4}$に変形される．

$$\mathbf{P}_{ob4}: \quad \text{maximize } \ h \tag{3.68}$$

$$\text{subject to } \ \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j + K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} \le \mu_G^*(h) \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o} \tag{3.70}$$

ここで K_αは$K_\alpha = F^{-1}(\alpha)$を満たす標準正規分布の$\alpha$分位点である．

以下では$\mathbf{P}_{ob4}$の解法について考える．まず，次の部分問題$\mathbf{P}_{ob}(h)$を導入する．

$$\mathbf{P}_{ob}(h) \ : \ \text{minimize } \ \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j + K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} \tag{3.71}$$

$$\text{subject to } \ \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \mathbf{o} \tag{3.72}$$

(3.71) は (3.69) の左辺に対応しており，hを与えたとき，$\mathbf{P}_{ob}(h)$は凸計画問題となる．$\mathbf{P}_{ob}(h)$の最適解，最適値をそれぞれ$\boldsymbol{x}(h)$，$z(h)$とする．$h=1$において$z(1) \le \mu_G(1)$が成り立つならば，$\mathbf{P}_{ob4}$の最適値は1であり，$\boldsymbol{x}(1)$が最適解となる．以下では，$\mathbf{P}_{ob4}$の最適値が$0 < h < 1$である場合を考える．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.1 $z(h)$ は h の単調増加関数である.

証明

$h > h'$ に対し

$$
\begin{aligned}
& z(h) - z(h') \\
= & \sum_{j=1}^{n} \{m_j - L^*(h)\alpha_j\} x_j(h) + K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}(h)} \\
& - \sum_{j=1}^{n} \{m_j - L^*(h')\alpha_j\} x_j(h') - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}(h')^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}(h')} \\
\geq & \sum_{j=1}^{n} \{m_j - L^*(h)\alpha_j\} x_j(h) + K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}(h)} \\
& - \sum_{j=1}^{n} \{m_j - L^*(h')\alpha_j\} x_j(h) - K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}(h)} \\
= & \{L^*(h') - L^*(h)\} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j(h) \\
> & 0
\end{aligned}
$$

証明終

さらに次の定理が成り立つ.

定理 3.2 部分問題 $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適値について $z(h) = \mu_G^*(h)$ が成り立つならば, $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解は元の問題の最適解と一致する.

証明

まず, $z(h) = \mu_G^*(h)$ を満たす $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解が元の問題の最適解であることを証明する.

h^0 を部分問題 $\mathbf{P}_{ob}(h)$ において $z(h^0) = \mu_G^*(h^0)$ を満たすパラメータの値とする.
また, $\boldsymbol{x}^0$ を h^0 に対応する最適解であるとする.

$$
\sum_{j=1}^{n} \{m_j - L^*(h^0)\alpha_j\} x_j(h^0) + K_\alpha \sqrt{\boldsymbol{x}(h^0)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}(h^0)} = \mu_G^*(h^0) \tag{3.73}
$$

が成り立つので, $\boldsymbol{x}(h^0)$ は制約式(3.69)を満たす. 制約式(3.70)は(3.72)に等しいので, $\boldsymbol{x}(h^0)$ は $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の制約式をすべて満たす. このことは, $z(h) = \mu_G^*(h)$ を満たす $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解が元の問題 $\mathbf{P}_{ob4}$ の実行可能解でもあることを示している. h' を実行可能解に対応する h の値とする. $h' > h^0$ と仮定するとすると, $z(h') > z(h) = \mu_G^*(h)$ が成り立つがこのことは制約式 (3.69) を満たすことに矛盾する. ゆえに $z(h) = \mu_G^*(h)$ を満たす部分問題 $\mathbf{P}_{ob}$ の最適解は $\mathbf{P}_{ob4}$ の最適解である.

次に $\mathbf{P}_{ob4}$ の最適値 h^* が条件式 $z(h^*) = \mu_G^*(h^*)$ を満たすことを示す.

まず, 次の条件式を満たすある正数 s が存在すると仮定する.

$$\mu_G^*(h^*) = \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h^*)\alpha_j\}x_j(h^*) + K_\alpha\sqrt{\boldsymbol{x}(h^*)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(h^*)} + s = \mu_G^*(h) \quad (3.74)$$

このとき, $\mu_G^*(h)$ は h の単調増加関数であるので, h^* より大きく, かつ次の条件式を満たすある h' が存在する.

$$\mu_G^*(h') = \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h^*)\alpha_j\}x_j(h) + K_\alpha\sqrt{\boldsymbol{x}(h^*)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(h^*)} = \mu_G^*(h) \quad (3.75)$$

このことは h^* が最適値であるという仮定に反する. s が負の値であるとすると制約式(3.69)は満たされないことになる. したがって, $s = 0$ であり, $z(\boldsymbol{x}, h^*) = \mu_G^*(h^*)$ も成り立つ.

証明終

部分問題 $\mathbf{P}_{ob}(h)$ を解くために, パラメータ r を含む次の補助問題 $\mathbf{P}_{ob}^r(h)$ を導入する.

$$\mathbf{P}_{ob}^r(h) \quad : \quad \text{minimize} \ \ r\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}\,x_j + \frac{1}{2}K_\alpha\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2 x_i \quad (3.76)$$

$$\text{subject to} \ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \ \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \quad (3.77)$$

ここで, $\mathbf{P}_{ob}^r(h)$ の実行可能領域は $\mathbf{P}_{ob}(h)$ と同じであることに注意する. $\mathbf{P}_{ob}^r(h)$ の最適解および最適値をそれぞれ $\boldsymbol{x}^r(h)$ および $z^r(h)$ で表すと次の定理が成り立つ.

定理 3.3　$\boldsymbol{x}^r(h)$ が次の条件

$$r^2 = \boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h) \quad (3.78)$$

を満たすならば $\boldsymbol{x}^r(h)$ は $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解 $\boldsymbol{x}(h)$ と一致する.

証明

$\mathbf{P}_{ob}(h)$ および $\mathbf{P}^r_{ob}(h)$ は共に凸計画問題であり，キューン・タッカー条件 $\mathbf{KTP}_{ob}(h)$, $\mathbf{KTP}^r_{ob}(h)$ は次のようになる．

$$\mathbf{KTP}^r_{ob}(h) \quad : \quad r\left\{m_j - L^*(h)\alpha_j\right\} + K_\alpha \sum_{k=1}^{n} v_{kj}x_j - \sum_{i=1}^{m} \nu_i a_{ij} - \lambda_j = 0$$

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i s_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$$

$$\nu_i, s_i \ (i = 1, \ldots, m), \ x_j, \lambda_j \ (j = 1, \ldots, n) \geq 0$$

$$\mathbf{KTP}_{ob}(h) \quad : \quad m_j - L^*(h)\alpha_j + K_\alpha \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}}} \sum_{k=1}^{n} v_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{m} \nu_i^{'} a_{ij} - \lambda_j^{'} = 0$$

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{s}^{'} = \boldsymbol{b}, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i^{'} s_i^{'} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^{'} x_j = 0$$

$$\nu_i^{'}, s_i^{'} \ (i = 1, \ldots, m), \ x_j, \lambda_j^{'} \ (j = 1, \ldots, n) \geq 0$$

$\boldsymbol{x}^r(h)$ が $r = \sqrt{\boldsymbol{x}^r(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^r(h)}$ を満たすならば，$\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解と $\mathbf{KTP}^r_{ob}(h)$ の最適解の間には次の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{X}(h) \quad : \quad \boldsymbol{x}(h) = \boldsymbol{x}^r(h), \ \boldsymbol{\lambda}(h) = \boldsymbol{\lambda}^r(h)/r$$

$$\boldsymbol{\delta}(h) = \boldsymbol{\delta}^r(h)/r, \ \boldsymbol{s}(h) = \mathbf{s}^r(h)/r$$

(3.87) を満たす $\mathbf{KTP}^r_{ob}(h)$ の解が $\mathbf{KTP}_{ob}(h)$ を満たすことは明らかである．したがって $\boldsymbol{x}^r(h)$ は $\mathbf{P}_{ob}(h)$ の最適解であることがわかる．

証明終

補題 3.4 $\sum_{j=1}^{n} \left\{m_j - L^*(h)\alpha_j\right\} x_j$ は r の非減少関数である．

証明

$r' < r$ に対して，$\boldsymbol{x}^r(h)$ の最適性から次の関係式が成立する．

$$r \sum_{j=1}^{n} \left\{m_j - L^*(h)\alpha_j\right\} x_j^r + \frac{1}{2} K_\alpha \boldsymbol{x}^r(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^r(h)$$

$$\leq \ r \sum_{j=1}^{n} \left\{m_j - L^*(h)\alpha_j\right\} x_j^{r'}(h) + \frac{1}{2} K_\alpha \boldsymbol{x}^{r'}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^{r'}(h)$$

即ち,

$$r\left[\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r - \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r\right]$$

$$+\ \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h) - \boldsymbol{x}^{r'}(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^{r'}(h)\right\} \le 0 \tag{3.79}$$

となる. 同様にして次の関係式が成立する.

$$r'\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^{r'} + \frac{1}{2}K_\alpha\boldsymbol{x}^{r'}(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^{r'}(h)$$

$$\le\ r'\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r(h) + \frac{1}{2}K_\alpha\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)$$

即ち,

$$r'\left[\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r - \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^{r'}(h)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h) - \boldsymbol{x}^{r'}(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^{r'}(h)\right\} \ge 0 \tag{3.80}$$

である. ゆえに(3.79), (3.80)を辺々引くことにより次の不等式が成り立つ.

$$(r-r')\left[\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r - \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^{r'}\right] \le 0 \tag{3.81}$$

$r < r'$より

$$\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r \le \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^{r'} \tag{3.82}$$

である.

証明終

補題 3.5　$\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)$ はrの非減少関数である.

証明

補題3.4より$r < r'$に対して

$$r'\left[\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^r - \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j^{r'}\right]$$

$$\ge\ \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{x}^{r'}(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^{r'}(h) - \boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)\right\}$$

であり,

$$\sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}\, x_j^r \le \sum_{j=1}^{n}\{m_j - L^*(h)\alpha_j\}\, x_j^{r'} \qquad (3.83)$$

が成り立つ. ゆえに次の不等式が成立する.

$$\boldsymbol{x}^{r'}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^{r'}(h) \le \boldsymbol{x}^{r}(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^{r}(h) \qquad (3.84)$$

(3.84) は$\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)$ の rに関する単調非減少性を示している.

証明終

$r(h) \triangleq \sqrt{\boldsymbol{x}(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(h)}$を定義する. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3. 6

1. $r > r(h) \iff r^2 - \{\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)\} > 0$
2. $r < r(h) \iff r^2 - \{\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)\} < 0$
3. $r = r(h) \iff r^2 - \{\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)\} = 0$

証明

補助問題$\mathbf{P}_{ob}^r(h)$ の実行可能領域は$\mathbf{P}_{ob}(h)$と同じであり, また明らかに有界であるため, $\sum_{j=1}^{n}\{m_jx_j - L^*(h)\alpha_j\}x_j > -\infty$ が成り立つ. したがって, $\boldsymbol{x}^r(h)$に対して$\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h) < \infty$ が成り立つ. ゆえに, $r > \bar{r}$($\bar{r}$は十分大きな値)に対して, および$\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)$は一定値になることがわかる. $\boldsymbol{x}^r(h)$ はrの連続関数なので, $\boldsymbol{x}^r(h)^t\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}^r(h)$も同様に$r$に関して連続である. ゆえに平均値の定理, 補題3. 5 およびそして$\boldsymbol{x}(h)$の唯一性から, 定理3. 6 が証明される.

証明終

hは一定であるから, $\boldsymbol{x}^r(h)$ はrに依存し, また基底行列$\boldsymbol{B}$もrに依存して決定される. 簡略化のために$L^*(h) = \theta$と置き換える. 基底行列$\boldsymbol{B}$に従って定められるベクトル$\boldsymbol{d}_B$, $\boldsymbol{g}_B$ および 区間$L_B(h) \le r \le U_B(h)$ により, $\boldsymbol{x}^r(h)$ は次のように表される.

$$\boldsymbol{x}^r(h) = r\boldsymbol{d}_B + \theta\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B \qquad (3.85)$$

以上の議論と

$$r^2 = \boldsymbol{x}^r(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^r(h) \tag{3.86}$$

が成り立つことから, 次の2次方程式の解の一つが区間 $[L_B(h), U_B(h)]$ に存在する.

$$(\boldsymbol{d}_B^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B - 1)r^2 + 2(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B r + (\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} (\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B) = 0 \tag{3.87}$$

(3.87) は次の2つの場合に分けられる.

1. $\boldsymbol{d}_B^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B = 1$ の場合

$$r = \frac{-(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} (\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)}{2(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B}$$

2. $\boldsymbol{d}_B^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B \neq 1$ の場合

$$r = \frac{-(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B \pm \sqrt{D}}{\boldsymbol{d}_B^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B - 1}$$

ただし,

$$D = \{(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B\}^2 - (\boldsymbol{d}_B^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{d}_B - 1)(\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B)^t \boldsymbol{V} (\theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B) \tag{3.88}$$

である.

分散共分散行列 $\boldsymbol{V}$ は正定値行列であり, $r^2 = \boldsymbol{x}^r(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^r(h)$ が成立するかどうかを調べるために $r \geq 0$ の場合だけに限ることにする. $K^h(r) \triangleq \boldsymbol{x}^r(h)^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}^r(h) - r^2$ とし, L_B, U_B をそれぞれ基底行列 $\boldsymbol{B}$ の下で r の下限値, 上限値とするとき, $K^h(L_B(h)) \geq 0$ かつ $K^h(U_B(h)) \leq 0$ ならば, 区間 $[L_B(h), U_B(h)]$ に2次方程式の解が存在する.

以上の考察より, 部分問題 $\mathbf{P}_{ob}(h)$ を解くアルゴリズムは次のようになる.

補助アルゴリズム

手順1 $r_l \leftarrow 0$,　$r_u \leftarrow M$ (M は十分大きな実数)　$r \leftarrow r_0(\geq r_l)$ とし, $P^r(h)$ を解き, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}_B$, $\boldsymbol{e}_B$, $\boldsymbol{g}_B$, $L_B(h)$ および $U_B(h)$ を求める. 手順2に進む.

手順2 $K(L_B(h)) > 0$ ならば, $r_u \leftarrow L_B(h)$, $r \leftarrow (r_l + r_u)/2$ として手順4に進む. $K(L_B(h)) = 0$ ならば, $\boldsymbol{x} = L_B(h)\boldsymbol{d}_B + \theta \boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B$ と設定し終了する.

$K(L_B(h)) < 0$ ならば, 手順3に進む.

手順3 $K(U_B(h)) > 0$ならば, 2次方程式の解r_a, r_bを求め, 手順5に進む.

$K(U_B(h)) = 0$ならば$\boldsymbol{x} = U_B(h)\boldsymbol{d}_B + \theta\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B$ として終了する.

$K(U_B(h)) < 0$ならば, $r_l \leftarrow U_B(h)$, $r \leftarrow (r_l + r_u)/2$ として手順4へ進む.

手順4 $\mathbf{P}_{ob}^r$ を解いて$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{d}_B$, $\boldsymbol{e}_B$, $\boldsymbol{g}_B$, $L_B(h)$ および$U_B(h)$を求め, 手順2へ戻る.

手順5 $r_a \in [L_B(h),\ U_B(h)]$ならば, $\boldsymbol{x} = r_a\boldsymbol{d}_B + \theta\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B$ として終了する.

$r_b \in [L_B(h),\ U_B(h)]$ならば, $\boldsymbol{x} = r_b\boldsymbol{d}_B + \theta\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B$ とし, 終了する.

定理 3.7 補助アルゴリズム によって部分問題の最適解は有限回の繰り返しで求めることができる.

証明

妥当性はアルゴリズムの終了条件より明らかである. また, 手順3が終わった時点で考えられる状態は以下の5つである.

(a) $K(L_B(h)) = 0$

(b) $K(U_B(h)) = 0$

(c) $K(L_B(h)) < 0 < K(U_B(h))$

(d) $K(L_B(h)) > 0$

(e) $K(U_B(h)) < 0$

(a)~(c)の場合は明らかにその時点で終了する. (d)および(e)の場合, 1回目の時を除いて$L_B(h) \leq \frac{r_l+r_u}{2} \leq U_B(h)$となることは明らかで$r_u - r_l$は必ず半減する. ゆえに, 有限回反復した後, $r(h) \in [L_B(h),\ U_B(h)]$となり終了する.

証明終

条件$h \in [L_B(h),\ U_B(h)]$かつ$\boldsymbol{x}(h) \geq 0$を満たすhの区間を$I(\boldsymbol{B})$で表す. また

$$\bar{h}_B \triangleq \sup\{h | h \in I(\boldsymbol{B})\},\quad \underline{h}_B \triangleq \inf\{h | h \in I(\boldsymbol{B})\} \tag{3.89}$$

証明

アルゴリズムの妥当性は終了条件が定理3.2を満たすことから明らかである．キューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}^{r}_{ob}(h)$の制約式における決定変数の非負性と相補条件を満たす基底行列の数は有限であり，2次計画問題の理論により$r(h)$は最適基底行列$\boldsymbol{B}(h)$に対応している．すなわち，hは基底行列によって決定された区間の集合$I(\boldsymbol{B})$に分割されるため，最適なhは有限回で求められ，同時に対応する最適解が求まる．

証明終

3.4 結言

本章では制約式や目的関数にファジィランダム変数を含む線形計画問題を考え，最適化基準を提案すると共に最適解を求める効率的アルゴリズムを開発した．線形計画問題は数理的意思決定において重要かつ基本的な問題であるため，本章で考えたファジィランダム線形計画問題をより一般化し，他のいろいろな意思決定問題への応用や拡張の可能性を探ることが必要であると思われる．

第4章

不確定状況下でのポートフォリオ選択問題

4.1 緒言

投資対象としていくつかの株があり, 資金をある割合で各株式に投資する場合, 最も望ましい投資割合を求める問題をポートフォリオ選択問題という. 今日, ポートフォリオ選択については様々なモデルが提案されているが, 数理的ポートフォリオを最初に提案したのはMarkowitzとされている[48]. Markowitsは株式等の金融商品の価格は確率的に変動するとして, 投資に対する収益率とリスクの相反する2つの要素の組み合わせによってポートフォリオを決定する理論を構築した. さらにTobin [74]は, Markowitsの理論に元本保証があり一定期間後に一定のリターンをもたらす無リスク証券を理論の中に取り入れることを提案した. MarkowitsとTobinのポートフォリオ理論には幅広く重要な問題が含まれており, 今日の理論形成の基本となっている. しかし, これらのモデルはコンピュータが急速に発展した現在でも, 現実問題に応用するには非常に多くの計算時間と手間を要する. そこでSharpe [69]は, 各銘柄の収益率が, たとえばGNPなどのある経済指標との関係で簡潔に表すことができるという単一指数モデルを提案した.

今日においては, 確率計画法や確率過程によるアプローチなど, 様々なモデルが提案されているが, 投資家の選好や専門家の知識を考慮に入れた研究はあまりなされていない. 現実には 専門家は投資を行う時点で, その後の株価の値動きに対する何らかの予測をもっていることもあり, しかも, 「かなり値上がりするであろう」, 「値下がりすることはまず無いであろう」といった曖昧さを含む場合も多い. また, 投資家についても目標とする総収益率が明確に定まっておらず, むしろ「だいたいこれぐらいの収益率であれば満足」といった場

合もある. これらの曖昧さは従来の確率変数で表されてきた不確実性とは本質的に異なるものであり, 確率変数を用いてモデル化することは適当でないと思われる. 単一指数モデルにおいて見積もられる係数の値は過去のデータから統計的に推測される値であるが, 今後もこのような値になることは確定的ではないため, 専門家による曖昧な予測を考慮に入れた意思決定モデルを構築する意味があると思われる. 本論文では単一指数モデルの収益率において, ある経済指標の比例定数(α値)や証券固有がもつ値(β値)をファジィ数, またはファジィランダム変数で表し, 期待収益率に関する可能性測度を最大化するポートフォリオ問題をファジィランダム数理計画モデルとして定式化した.

4.2節ではポートフォリオ選択問題の中でも特に平均・分散モデルについて述べ, その後単一指数モデルについて述べる. 4.3節以降では単一指数モデルにおいて各個別銘柄の収益率に不確定性が含まれるモデルについて3つの場合に分けて考え, それぞれに対し最適なポートフォリオを求める効率的なアルゴリズムを構築する. さらに4.4節で数値例を挙げ, 最後の4.5節で本章についてまとめる.

4.2 ポートフォリオ選択問題と単一指数モデル

本節では, まずモデルにおける基本的仮定について述べる. さらにポートフォリオ理論の基礎となる有効フロンティアの概念について無リスク証券を含まない場合と含む場合に分けて説明した後, 本研究に関連の深い単一指数モデルについて簡単に説明する.

ポートフォリオにおける基本的仮定

ポートフォリオ理論の前提条件として次のことが挙げられる.

1. 個々の有価証券とその集合体である”ポートフォリオ”を問わず, 不確実性を伴う投資案はリターンとリスク両面の変数で評価すべきである.

2. 有価証券投資のリターンとリスクはそれぞれリターンの期待値と分散, または標準偏差で捉えることができる.

3. ポートフォリオを組成する個々の有価証券の効用は, ポートフォリオ全体に与える効果によって評価すべきである.

4. すべての証券のリターンに関して完全な相関関係がない限り, 分散投資によってポートフォリオ全体のリスク軽減が可能である.

5. リスクを伴う投資機会は, リスク回避の効用を最大化することによって評価される.

6. 組成対象銘柄のリターンの期待値, 分散及び共分散を与えると有効なポートフォリオは必ず存在する.

同じ期待収益率を与える有効ポートフォリオの中で, 最小の標準偏差を与えるポートフォリオの集合は有効フロンティアと呼ばれる. 有効フロンティアは, 同じ標準偏差を与える有効ポートフォリオの中で最大の期待収益率を与えるポートフォリオの集合（効率フロンティア）と, それ以外（非効率フロンティア）に分けられる.

無リスク証券を含まない場合

n 個の証券をもつ平均分散構造の1期間ポートフォリオ問題を考える.

$\boldsymbol{V}$ ：n 個の証券の収益率に対する分散共分散行列 $(n \times n)$
$\boldsymbol{r}$ ：証券の期待収益率のベクトル $(n \times 1)$
$\boldsymbol{x}$ ：配分ベクトル $(n \times 1)$
$\boldsymbol{e}$ ：単位ベクトル $(n \times 1)$
π ：分散投資による期待収益率
σ ：分散投資による標準偏差

とすると, 次の3つの関係式が得られる.

$$\sigma = \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}\ , \quad \pi = \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{r}\ , \quad 1 = \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{e}$$

ただし, $\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトルとする.

さらに

$$\alpha = \boldsymbol{r}^t \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r}, \quad \beta = \boldsymbol{r}^t \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e}\ , \quad \gamma = \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{e}$$

とおくと, 期待収益率とその期待収益率を与える最小の標準偏差との関係は次のようになり, 双曲線の一部の形になっていることがわかる.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma\pi^2 - 2\beta\pi + \alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}} \tag{4.1}$$

この双曲線の頂点$(\sigma_v,\ \pi_v)$, 漸近線は以下の通りである.

$$(\sigma_v,\ \ \pi_v) = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}},\ \frac{\beta}{\gamma}\right)$$

$$\pi = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\gamma} + \sigma\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}} \\ \\ \dfrac{\beta}{\gamma} - \sigma\sqrt{\dfrac{\alpha\gamma - \beta^2}{\gamma}} \end{cases} \tag{4.2}$$

無リスク証券を含む場合

次に無リスク証券を1つ加えた場合の1期間ポートフォリオ問題について考える.

$\mathbf{o}$　:要素すべてが0であるベクトル$(n \times 1)$

ρ　:無リスク証券の収益率

x_ρ　:無リスク証券への配分

とすると新しい分散共分散行列$\overline{\boldsymbol{V}}$, 期待収益率ベクトル$\overline{\boldsymbol{r}}$, 単位ベクトル$\overline{\boldsymbol{e}}$, 配分ベクトル$\overline{\boldsymbol{x}}$は次のように書きかえられる.

$$\overline{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^t & 0 \end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \rho \end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ 1 \end{bmatrix},\quad \overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_\rho \end{bmatrix}$$

無リスク証券が無い場合と同様に3つの関係式が得られる.

$$\sigma = \overline{\boldsymbol{x}}^t\overline{\boldsymbol{V}}\overline{\boldsymbol{x}}\ ,\quad \pi = \overline{\boldsymbol{x}}^t\overline{\boldsymbol{r}}\ ,\quad 1 = \overline{\boldsymbol{x}}^t\overline{\boldsymbol{e}}$$

さらに

$$\overline{\alpha} = \overline{\boldsymbol{r}}^t\overline{\boldsymbol{V}}^{-1}\overline{\boldsymbol{r}}\ ,\quad \overline{\beta} = \overline{\boldsymbol{r}}^t\overline{\boldsymbol{V}}^{-1}\overline{\boldsymbol{e}}\ ,\quad \overline{\gamma} = \overline{\boldsymbol{e}}^t\overline{\boldsymbol{V}}^{-1}\overline{\boldsymbol{e}}$$

とおくと標準偏差と期待収益率の関係は次のようになり, 2本の半直線であることがわかる.

$$\pi = \begin{cases} \rho + \sigma\sqrt{\gamma\rho^2 + 2\beta\rho + \alpha} \\ \rho - \sigma\sqrt{\gamma\rho^2 - 2\beta\rho + \alpha} \end{cases} \tag{4.3}$$

ρと$\frac{\beta}{\gamma}$の大小関係で以下の3つの場合に分けられる.

1. $\rho < \frac{\beta}{\gamma}$ のとき, (4.3) と (4.1) は効率フロンティアの一点 M' と接し, 線分 $\rho M'$ 上の任意のポートフォリオはポートフォリオ M' と安全証券 ρ の凸結合で表される. 半直線 (4.3) 上で線分 $\rho M'$ より上側の部分の任意のポートフォリオは安全証券 ρ を空売りし, その資金をリスクと収益が共に高いポートフォリオ M' に投資することを表している. 以降ポートフォリオ M' を市場ポートフォリオと呼ぶ. (図 4.1 参照)

2. $\rho = \frac{\beta}{\gamma}$ のとき, (4.3) と (4.2) は等しく (4.3) は (4.1) の漸近線となり, すべての証券のポートフォリオフロンティアは安全証券と危険証券のみのポートフォリオフロンティア上の 1 つのポートフォリオによって作ることができず, 安全証券にすべてを投資し危険証券の裁定ポートフォリオを保有することを意味している. (図 4.2 参照)

3. $\rho > \frac{\beta}{\gamma}$ のとき, (4.3) と (4.1) は非効率フロンティアの一点 M と接し, 効率フロンティアの方程式は半直線 (4.3) の上半分で表される. この場合接点 M は効率フロンティアに含まれない. (図 4.3 参照)

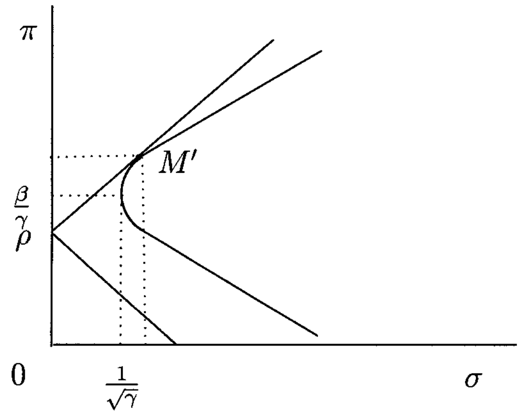

図 4.1　$0 < \rho < \frac{\beta}{\gamma}$ の場合

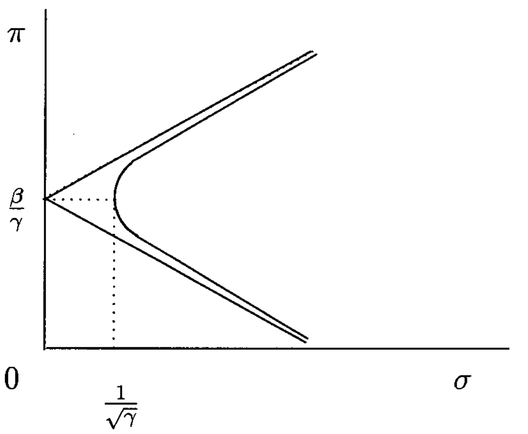

図 4.2　$\rho = \frac{\beta}{\gamma}$ の場合

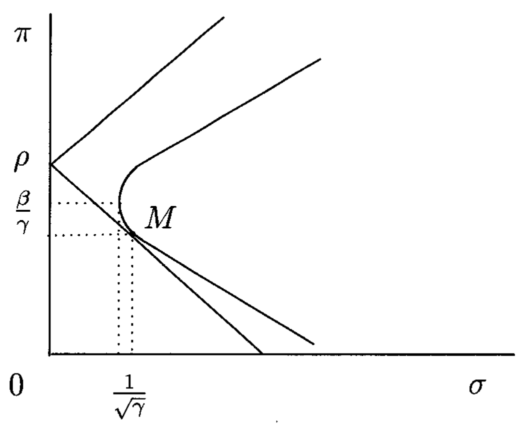

図 4.3　$\rho > \frac{\beta}{\gamma}$ の場合

単一指数モデル

Sharpe[69] は，各証券の収益率c_iが次のように市場ポートフォリオの期待収益率に比例する部分と，銘柄固有の部分に分けられとする単一指数モデルを提案した．

$$c_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f) + \varepsilon_i \qquad i = 1,\ 2, \ldots, n$$

ただし，記号は次のように定義されている．

c_i　：　個別銘柄iの期待収益率

α_i　：　個別銘柄iの α値
（市場の変化に独立な証券iの期待収益率）

β_i　：　個別銘柄iの β値
（個別銘柄iの市場ポートフォリオの期待収益率に対する感応度）

r_m　：　市場ポートフォリオの期待収益率

r_f　：　無リスク証券の収益率

ε_i　：　市場ポートフォリオ収益率と独立な誤差項

ここで，r_mは平均$\bar{r}_m$，分散σ_m^2をもつ正規分布$N(\bar{r}_m,\ \sigma_m^2)$に従う確率変数とし，同様に$\varepsilon_i$も正規分布$N(0,\ \sigma_{ei}^2)$に従う確率変数とする．

さらに簡単化のために $\alpha_i + r_f(1 - \beta_i) = \alpha_i'$ と書き換えると次のように書ける．

$$c_i = \alpha_i' + \beta_i r_m + \varepsilon_i$$

4.3 ファジィランダムポートフォリオ問題

4.3.1 α値がファジィ数である場合

次のポートフォリオ問題を考える.

$$\mathbf{P}_{fp0}: \quad \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i a_i x_i \tag{4.4}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \tag{4.5}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i \ , \ i = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

ただし，a_iを証券i の価格, x_i 証券をi を購入する個数, bを総資産とする. γ_iは意思決定者によって与えられる各証券の購入割合の上限の値を表し，$0 < \gamma_i < 1$とする. また，$c_i = \alpha_i \beta r_m + \epsilon_i$とし，4.2節で述べた単一指数モデルに従うものとする. 本節では証券iのα値が次のメンバシップ関数に制限されるファジィ数M_iである場合を考える.

$$\mu_{M_i}(\alpha_i) = L\left(\frac{\alpha_i - \nu_i}{\zeta_i}\right) \tag{4.7}$$

ここでLは型関数であり, 次で表される区分的線形関数とする.

$$L(t) = \max\left\{1 - \frac{t}{t_0},\ 0\right\} \tag{4.8}$$

ただし，t_0は正数とする.

このとき, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i x_i$ を表すファジィランダム変数$Y(\omega)$は拡張原理により次のように計算される.

$$Y(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m) a_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i\right)_L$$

α値がファジィランダム変数であるために総収益に不確実性と不確定性が含まれる. したがって，目的関数にファジィ目標G, “ だいたいd_o以上”, を設定し，次の区分的線形メンバシップ関数 $\mu_G(y)$に特性づけられるファジィ集合で表す.

$$\mu_G(y) = \begin{cases} 0 & (y < d_z) \\ \dfrac{y - d_z}{d_o - d_z} & d_z \leq y \leq d_o \\ 1 & y > d_o \end{cases}$$

総収益率$Y(\omega)$を特性づけるメンバシップ関数を可能性分布とみなすと，その可能性分布が与えられた下でGである可能性測度は次のように与えられる．

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) \triangleq \sup_{y} \min\left(\mu_{Y(\omega)}(y),\quad \mu_G(y)\right) \tag{4.9}$$

ここで，$\mathbf{P}_{fp0}$の意思決定法として次の問題を考える．

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{fp1}:\quad & \text{maximize} \quad h && (4.10)\\
& \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b && (4.11)\\
& \qquad 0 \leq x_i \leq \gamma_i,\ i = 1, \ldots, n && (4.12)\\
& \qquad Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq t && (4.13)
\end{aligned}$$

ただし，tは意思決定者によって与えられる確率レベルであり，$t > 1/2$を満たす固定値とする．

$\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$は次のように変形される．

$$\begin{aligned}
& \sup_{y} \min\left(\mu_{Y(\omega)}(y),\quad \mu_G(y)\right) \geq h \\
\Leftrightarrow\quad & \exists y : \mu_{Y(\omega)}(y) \geq h,\quad \mu_G(y) \geq h \\
\Leftrightarrow\quad & \exists y : L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m) a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i}\right) \geq h,\quad y \geq \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists y : y \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m)\, a_i x_i + L^*(h) \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i,\quad y \geq \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\quad & \mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m)\, a_i x_i + L^*(h) \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i
\end{aligned}$$

ただし，$\mu_G^*(h)$, $L^*(h)$は擬逆関数であり，次のように表される．

$$\begin{aligned}
L^*(h) &= (1-h)t_0 \\
\mu_G^*(h) &= hd_o + (1-h)d_z
\end{aligned}$$

したがって，$\mathbf{P}_{fp1}$は次の問題$\mathbf{P}_{fp2}$に変形される．

$$\mathbf{P}_{fp2}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{4.14}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \tag{4.15}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.16}$$

$$Pr\left(\mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m)\, a_i x_i + L^*(h) \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i\right) \geq t \tag{4.17}$$

r_mをそれぞれ正規分布$N(\bar{r}_m,\ \sigma_m^2)$に従う確率変数とすると，正規分布の性質より

$$\frac{r_m - \bar{r}_m}{\sigma_m}$$

は標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う．ゆえにK_{1-t}を$(1-t)$分位点とすると，制約条件

$$Pr\left(\mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n} (\nu_i + \beta_i r_m)\, a_i x_i + L^*(h) \sum_{i=1}^{n} \zeta_i a_i x_i\right) \geq t$$

は次の等価確定条件に変換される．

$$h \leq \frac{-d_z + \sum_{i=1}^{n} \{t_0 \zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\} a_i x_i}{d_o - d_z + \sum_{i=1}^{n} t_0 \zeta_i a_i x_i}$$

したがって，$\mathbf{P}_{fp2}$は次の問題$\mathbf{P}_{fp3}$と等価になる．

$$\mathbf{P}_{fp3}: \quad \text{maximize} \quad \frac{-d_z + \sum_{i=1}^{n} \{t_0 \zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\} a_i x_i}{d_o - d_z + \sum_{i=1}^{n} t_0 \zeta_i a_i x_i} \tag{4.18}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \tag{4.19}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.20}$$

問題$\mathbf{P}_{fp3}$は分数計画問題であり，以下では決定変数ベクトル$\boldsymbol{x}$が連続である場合と整数値をとる場合についてそれぞれ解法を考える．

1. $\boldsymbol{x}$が連続変数の場合

   $d_o > d_z$でかつ，t_0，ζ_i，a_i，$x_i \geq 0$ より $(d_o - d_z) + \sum_{i=1}^{n} t_0 \zeta_i a_i x_i > 0$ となるため，分母は必ず正となる．$\lambda(d_o - d_z) + \sum_{i=1}^{n} t_0 \zeta_i u_i = 1$ かつ $u_i = \lambda a_i x_i$ となる変数λ を導入

することで問題$\mathbf{P}_{fp3}$は次の線形計画問題に書きかえられる[3].

$$\mathbf{P}_{fp4}: \quad \text{maximize} \quad -d_z\lambda + \sum_{i=1}^{n}\{t_0\zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\}u_i \tag{4.21}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} u_i = \lambda b \tag{4.22}$$

$$\lambda(d_o - d_z) + \sum_{i=1}^{n} t_0\zeta_i u_i = 1 \tag{4.23}$$

$$0 \leq u_i \leq \gamma_i\lambda, \ i = 1, \ldots, n \tag{4.24}$$

この問題はシンプレックス法などの手法で解くことができる.

2. $\boldsymbol{x}$が整数値をとる場合

$\boldsymbol{x}$が連続変数の場合と同様に分母は必ず正となる．また$\boldsymbol{x}$が整数値をとる場合には次の定理が成り立つ.

定理 4. 1　最適解 $\boldsymbol{x}^*$において，$t_0\zeta_j + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_j - \nu_j \leq 0$である証券$j$に対応する割合$\boldsymbol{x}_j$に関して$x_j^* = 0$が成り立つ.

証明

最適解 $\boldsymbol{x}^*$において $t_0\zeta_j + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_j - \nu_j < 0$となる証券$j$に対して，$x_j^* \neq 0$であると仮定する.

$$\begin{aligned} & -d_z + \sum_{i=1}^{n}\{t_0\zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\}a_i x_i^* \\ < \ & -d_z + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\{t_0\zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\}a_i x_i^* \end{aligned}$$

かつ

$$d_o - d_z + \sum_{i=1}^{n} t_0\zeta_i a_i x_i^* > d_o - d_z + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} t_0\zeta_i a_i x_i^*$$

は明らかで,

$$\begin{aligned} & \frac{-d_z + \sum_{i=1}^{n}\{t_0\zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\}a_i x_i^*}{d_o - d_z + \sum_{i=1}^{n} t_0\zeta_i a_i x_i^*} \\ < \ & \frac{-d_z + \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n}\{t_0\zeta_i + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_i - \nu_i\}a_i x_i^*}{d_o - d_z + \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} t_0\zeta_i a_i x_i^*} \end{aligned}$$

となる．これは$\boldsymbol{x}^*$ の最適性に矛盾する．

証明終

定理4.1の結果から条件 $t_0\zeta_j + (\sigma_m K_{1-t} - \bar{r}_m)\beta_j - \nu_j \leq 0$ を満たす証券iについては，あらかじめ割合を0とすればよいことがわかる．問題$\mathbf{P}_{fp4}$は石井ら [26] の方法を用いて効率的に解くことができる．

4.3.2 α値がファジィランダム変数である場合

次のポートフォリオ選択問題を考える．

$$\mathbf{P}_{fp5}: \quad \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{4.25}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.26}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \ i = 1, \ldots, n \tag{4.27}$$

ここで，c_iは証券iの収益率を表し，

$$c_i = \alpha_i + \beta_i r_m$$

の形で表されるものとする．本節では，証券iの α 値がファジィランダム変数$\tilde{A}_i = (\alpha_i(\omega),\ \delta_i)_L$ である場合を考える．ただし，$\alpha_i(\omega)$ は正規分布 $N(\bar{\alpha}_i,\ \sigma_i^2)$ に従う確率変数とする．期待収益率 $y = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ を表すファジィランダム変数 $Y(\omega)$ は拡張原理を用いて計算すると次のようになる．

$$Y(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(\omega) + \beta_i r_m) x_i,\ \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \right)_L$$

さらに，前節と同様にして総収益率に対しファジィ目標 G を設定し，メンバシップ関数 $\mu_G(y)$ に特性づけられるファジィ集合で表す．メンバシップ関数 $\mu_G(\cdot)$ は$y \geq 0$で定義され，$\leq y \leq f_0$ (f'は$f' \geq 0$を満たすある実数) において単調増加であり，$y \geq f_0$において1をとる連続関数であるとする．期待収益率を表すファジィ集合のメンバシップ関数$\mu_{Y(\omega)}(y)$を可能性分布とみなすとき，$\mu_{Y(\omega)}(y)$ が与えられた下でGである可能性測度は次のように与えられる．

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) \triangleq \sup_y \min \left(\mu_{Y(\omega)}(y),\ \ \mu_G(y) \right)$$

問題$\mathbf{P}_{fp5}$の意思決定法として次の問題$\mathbf{P}_{fp6}$を考える.

$$\mathbf{P}_{fp6}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{4.28}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.29}$$

$$0 \le x_i \le \gamma_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.30}$$

$$Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \ge h\right) \ge t \tag{4.31}$$

第一制約式に関して$\Pi_{Y(\omega)}(G) \ge h$は次のように変形される.

$$\begin{aligned}
& \sup_y \min\left(\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\right) \ge h \\
\Leftrightarrow\ & \exists y: \quad \mu_{Y(\omega)}(y) \ge h,\ \mu_G(y) \ge h \\
\Leftrightarrow\ & \exists y: \quad L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(\omega) + \beta_i r_m)x_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i}\right) \ge h, \quad y \ge \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\ & \exists y: \quad y \le \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i(\omega) + \beta_i r_m\right) x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i, \quad y \ge \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\ & \mu_G^*(h) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i(\omega) + \beta_i r_m\right) x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ただし, $\mu_G^*(h)$, $L^*(h)$ は擬逆関数であり, それぞれ次のように表される.

$$\begin{aligned}
L^*(h) &= \begin{cases} \sup\{r | L(r) > h,\ r \ge 0\} & (0 < h \le 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases} \\
\mu_G^*(h) &= \inf\{r |\ \mu(r) \ge h\}
\end{aligned}$$

このとき, $\mu_G^*(h)$ は単調増加かつ連続で, $L^*(h)$ は単調減少かつ連続な関数である. (4.32) を (4.31) に代入すると, 問題$\mathbf{P}_{fp6}$は次の$\mathbf{P}_{fp7}$に変形される.

$$\mathbf{P}_{fp7}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{4.33}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.34}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \ i = 1, \ldots, n \tag{4.35}$$

$$Pr\left(\mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(\omega) + \beta_i r_m)\, x_i + L^*(h) \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i\right) \geq t \tag{4.36}$$

r_m, $\alpha_i(\omega)$ はそれぞれ正規分布 $N(\bar{r}_m,\ \sigma_m^2)$, $N(\bar{\alpha}_i,\ \sigma_i^2)$ に従う確率変数であり，正規分布の性質より

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \{\beta_i(r_m - \bar{r}_m) + \alpha_i(\omega) - \bar{\alpha}_i\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right)^2 \sigma_m^2}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数となる．ゆえに K_t を t 分位点とすると, 問題 $\mathbf{P}_{fp7}$ は次の等価確定問題に変換することができる．

$$\mathbf{P}_{fp}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{4.37}$$

$$\text{subject to} \quad \mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n} \{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}\, x_i \leq -K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right)^2 \sigma_m^2} \tag{4.38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.39}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \ i = 1, \ldots, n \tag{4.40}$$

元の問題 $\mathbf{P}_{fp}$ の最適解を $(\boldsymbol{x}^*,\ h^*)$ で表し, $\mathbf{P}_{fp}$ を解くために h 一定のもとで次の部分問題 $\mathbf{P}_{fp}(h)$ を導入する．

$$\mathbf{P}_{fp}(h): \quad \text{minimize} \quad -\sum_{i=1}^{n} \{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}\, x_i + K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\right)^2 \sigma_m^2} \tag{4.41}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.42}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i, \ i = 1, \ldots, n \tag{4.43}$$

部分問題 $\mathbf{P}_{fp}(h)$ の最適解を $\boldsymbol{x}(h)$, 最適値を $Z(h)$ で表すと, $\mathbf{P}_{fp}(h)$ は凸計画問題であり，目的関数は $\boldsymbol{x}$ の狭義凸関数であることから, $\boldsymbol{x}(h)$ はただ一つに決定される．

定理 4. 2 $Z(h)$は，h に関して単調増加である．

証明

$h > \acute{h}$に対して

$$
\begin{aligned}
& Z(h) - Z(\acute{h}) \\
= \ & -\sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\} x_i(h) + K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\acute{h})\delta_i\right\} x_i(\acute{h}) - K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(\acute{h})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(\acute{h})\right)^2 \sigma_m^2}
\end{aligned}
$$

解$x_i(\acute{h})$は$\mathbf{P}_{fp}(\acute{h})$の最適解であることから次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\geq \ & -\sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\} x_i(h) + K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\acute{h})\delta_i\right\} x_i(h) - K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
= \ & -\left\{L^*(h) - L^*(\acute{h})\right\}\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i(h) \\
> \ & 0
\end{aligned}
$$

証明終

最適値が$h=1$のとき，$Z(1) \leq -\mu_G^*(1)$が成り立つならば，そのときの解 $\boldsymbol{x}(1)$は最適解である． したがって，以下では，$0 < h < 1$に$\mathbf{P}_{fp}$の最適値がある場合のみを考える．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4. 3 $\mathbf{P}_{fp}(h)$の最適解が$\mathbf{P}_{fp}$の最適解と一致するための必要十分条件は最適値が$Z(h) = -\mu_G^*(h)$となることである．

証明

まず必要性を証明する．

$Z(h) = -\mu_G^*(h)$となるhをh^0，その最適解を$\boldsymbol{x}^0$とすると

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h^0)\delta_i\right\} x_i^0 + K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{02} + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^0\right)^2 \sigma_m^2} = -\mu_G^*(h^0)
$$

より制約条件(4.38)を満たす．また制約条件(4.42)(4.43)と制約条件(4.39)(4.40)は等しいため，$\mathbf{P}_{fp}$の制約条件を全て満たしている．$\acute{h} > h^0$ の $\acute{h}$ が$\mathbf{P}_{fp}$の解であると仮定する．$Z(h)$は単調増加関数であるから，$Z(\acute{h}) > Z(h^0) = -\mu^*_G(h^0)$となり 制約条件(4.38)に矛盾する．

次に十分性を証明する．

$$\mu^*_G(h) - \sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}x_i + s = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_ix_i\right)^2\sigma_m^2}$$

において$s > 0$で，最適解$(\boldsymbol{x}^*,\ h^*)$があると仮定すると，

$$\mu^*_G(h^*) - \sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h^*)\delta_i\}x^*_i + s = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2x_i^{*2} + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_ix^*_i\right)^2\sigma_m^2}$$

となり，$\mu^*_G(h)$が単調増加かつ連続であることから

$$\mu^*_G(\hat{h}) - \sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\hat{h})\delta_i\right\}x^*_i = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2x_i^{*2} + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_ix^*_i\right)^2\sigma_m^2}$$

を満たす$h^* < \hat{h}$となる $\hat{h}$ が存在する．これはh^*が最適解であることに矛盾する．また，$s < 0$では制約条件(4.38)は満たされないため$s = 0$となり，$Z(h^*) = -\mu^*_G(h^*)$となる．

証明終

部分問題$\mathbf{P}_{fp}(h)$を効率的に解くため，さらに次の補助問題$\mathbf{P}^R_{fp}(h)$を導入する．

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^R_{fp}(h):\quad \text{minimize}\quad & R\left\{-\sum_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i)\,x_i\right\} \\
& +\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2{x_i}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_ix_i\right)^2\sigma_m^2\right\} \qquad (4.44) \\
\text{subject to}\quad & \sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \qquad (4.45) \\
& 0 \le x_i \le \gamma_i,\ i = 1,\ldots,n \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

補助問題$\mathbf{P}^R_{fp}(h)$はRをパラメータとするパラメトリック2次計画問題であり，$\mathbf{P}^R_{fp}(h)$と$\mathbf{P}_{fp}(h)$の制約条件を満たす範囲は等しい．

問題$\mathbf{P}^R_{fp}(h)$の最適解を$\boldsymbol{x}^R(h)$，最適値を$Z^R(h)$で表すと次の定理が成り立つ．

定理 4.4　$Z^R(h)$ は h に関して単調増加である.

証明

$h > \acute{h}$ に対して補助問題の目的関数の値の差は次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
& Z^R(h) - Z^R(\acute{h}) \\
= \ & R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}\, x_i(h)\right\} + \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2\right\} \\
& -R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\acute{h})\delta_i\right\} x_i(\acute{h})\right\} - \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(\acute{h})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(\acute{h})\right)^2 \sigma_m^2\right\}
\end{aligned}
$$

$x_i(\acute{h})$ は $\mathbf{P}_{fp}(\acute{h})$ の最適解であることから次の計算式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\geq \ & R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}\, x_i(h)\right\} + \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2\right\} \\
& -R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\acute{h})\delta_i\right\} x_i(h)\right\} - \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2\right\} \\
= \ & -R\left\{L^*(h) - L^*(\acute{h})\right\}\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i(h) \\
> \ & 0
\end{aligned}
$$

証明終

定理 4.5　$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2\sigma_m^2}$ ならば $\mathbf{P}_{fp}^R(h)$ の最適解 $\boldsymbol{x}^R(h)$ は $\mathbf{P}_{fp}(h)$ の最適解 $\boldsymbol{x}(h)$ に一致する.

証明

部分問題 $\mathbf{P}_{fp}(h)$ に対するキューン・タッカー条件 $\mathbf{KTP}(h)$ は次のように表される.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{KTP}(h): \quad & -\left(\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\right) + K_t\frac{\sigma_i^2 x_i + \sigma_m^2\beta_i\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)^2\sigma_m^2}} \\
& -j_1 + j_2 - k_{1i} + k_{2i} = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 + m_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + m_2 = 1$$

$$x_i + m_{3i} = \gamma_i \qquad (1 \le i \le n)$$

$$j_1 m_1 + j_2 m_2 + \sum_{i=1}^{n} \{k_{1i} x_i + k_{2i} m_{3i}\} = 0$$

$$j_1,\ j_2,\ m_1,\ m_2,\ m_{3i},\ k_{1i},\ k_{2i},\ x_i \ge 0 \tag{4.47}$$

補助問題$\mathbf{P}_{fp}^{R}(h)$のキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}^{R}(h)$は次のように表される.

$$\mathbf{KTP}^{R}(h): \quad -R\left(\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\right) + K_t\left(\sigma_i^2 x_i' + \sigma_m^2 \beta_i \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i'\right)$$

$$-j_1' + j_2' - k_{1i}' + k_{2i}' = 0 \qquad (1 \le i \le n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' = 1 + m_1'$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' + m_2' = 1$$

$$x_i' + m_{3i}' = \gamma_i \qquad (1 \le i \le n)$$

$$j_1' m_1' + j_2' m_2' + \sum_{i=1}^{n} \{k_{1i}' x_i' + k_{2i}' m_{3i}'\} = 0$$

$$j_1',\ j_2',\ m_1',\ m_2',\ m_{3i}',\ k_{1i}',\ k_{2i}',\ x_i' \ge 0 \tag{4.48}$$

(4.47)と(4.48)を比較することにより$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2}$ならば$j_1' = Rj_1$，$j_2' = Rj_2$，$k_{1i}' = Rk_{1i}$，$k_{2i}' = Rk_{2i}$，$m_1' = m_1$，$m_2' = m_2$，$m_{3i}' = m_{3i}$，$x_i' = x_i$が成り立つことがわかる.

証明終

補題 4.6 $-\sum_{i=1}^{n} \{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\delta_i\}\, x_i(h)$は$R$に関して単調減少である.

証明

$\acute{R} < R$とする. $\boldsymbol{x}^R(h)$ は $\mathbf{P}^R_{fp}(h)$ の最適解であり, 解はただ一つであることから

$$R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)\right\}+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^R(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^R(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}$$

$$< \quad R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)\right\}+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{\acute{R}}(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\acute{R}}(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}$$

となり, 変形すると次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
&R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)\right\}-R\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h)\right\}\\
&+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\left(x_i^R(h)^2-x_i^{\acute{R}}(h)^2\right)+\sigma_m^2\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^R(h)\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\acute{R}}(h)\right)^2\right\}\right\}\\
&< 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

同様に $\boldsymbol{x}^{\acute{R}}(h)$ は $\mathbf{P}^{\acute{R}}_{fp}(h)$ の最適解であることから, 次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\acute{R}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)\right\}-\acute{R}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x^{\acute{R}}(h)_i\right\}\\
&+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\left(x_i^R(h)^2-x_i^{\acute{R}}(h)^2\right)+\sigma_m^2\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^R(h)\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\acute{R}}(h)\right)^2\right\}\right\}\\
&> 0
\end{aligned} \tag{4.50}$$

(4.49)(4.50) を辺々引くと次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
(\acute{R}-R)\Bigg\{&\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)\right)\\
&-\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h)\right)\Bigg\}>0
\end{aligned}$$

$(\acute{R}-R)<0$ より

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^R(h)<-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h)$$

が成り立つ.

証明終

補題 4. 7 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^R(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^R(h)\right)^2 \sigma_m^2$は$R$ に関して単調増加である．

証明

$\acute{R} < R$とすると $\boldsymbol{x}^{\acute{R}}(h)$ は $\mathbf{P}_{fp}^{\acute{R}}(h)$ の最適解であることから次の関係式が得られる．

$$
\begin{aligned}
& \acute{R}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i \bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h)\right\}+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{\acute{R}}(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\acute{R}}(h)\right)^2\sigma_m^2\right\} \\
< \ & \acute{R}\left\{-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i+\bar{r}_m\left(\beta_i+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{R}(h)\right\}+\frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{R}(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{R}(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}
\end{aligned}
$$

補題4. 6 から次のことが成り立つ．

$$
-\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\bar{r}_m\beta_i+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{R}(h) < -\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\bar{r}_m\beta_i+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h)
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
-\frac{K_t}{2}&\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{\acute{R}}(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x^{\acute{R}}(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}\right. \\
&\left.-\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i^{\acute{R}}(h)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\acute{R}}(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}\right\} > 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで$t > 1/2$より $K_t > 0$であるから

$$
\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x_i^{\acute{R}}(h) > \sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\alpha}_i+\beta_i\bar{r}_m+L^*(h)\delta_i\right)x^{\acute{R}}(h)
$$

証明終

定理 4. 8 $K(R) \triangleq R^2 - \left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(h)\right)^2\sigma_m^2\right\}$ とおくと，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
R^* > R \quad &\Leftrightarrow \quad K(R) < 0 \\
R^* < R \quad &\Leftrightarrow \quad K(R) > 0 \\
R^* = R \quad &\Leftrightarrow \quad K(R) = 0
\end{aligned}
$$

証明

$0 \leq R < +\infty$ は明らかであり，$\boldsymbol{x}^R(h)$ は R に関して連続であることから，$K(R)$ も R に関して連続であることがわかる．$S = \{\boldsymbol{x} | \sum_{i=1}^n a_i x_i = b,\ \ 0 \leq x_i \leq \gamma_i\ (i = 1 \ldots n)\}$ の有界性より $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i(h)\right)^2 \sigma_m^2 < +\infty$ であるため，$K(0) < 0 < K(+\infty)$ となり，最適値を与える $\boldsymbol{x}^{R(h)}$ はただ一つであることがわかる．

証明終

ある区間 $L_B(h) \leq R \leq U_B(h)$ での基底行列 $\boldsymbol{B}$ は，$\mathbf{KTP}^R$ にレムケ法 [44] などを用いることによって得られる．基底ベクトル $\boldsymbol{d}_B$，$\boldsymbol{e}_B$，$\boldsymbol{g}_B$ (d_{Bi}，e_{Bi}，g_{Bi}) をそれぞれ基底行列 $\boldsymbol{B}$ に対応する $\boldsymbol{x}$ (x_i) に関する部分とすると，$x_i^R(h)$ は次の形に表される．

$$x_i^R(h) = Rd_{Bi} + \theta e_{Bi} + g_{Bi}$$

ただし $L^*(h) = \theta$ とする．$K(R) = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 d_{Bi}^2 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k d_{Bi} d_{Bk}\right) R^2 \\
&\quad + \left\{-2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 D_i d_{Bi} + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k d_{Bi} d_{Bk} \left(D_k d_{Bi} + D_i d_{Bk}\right)\right\} R \\
&\quad + \left\{-\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 D_i^2 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k D_i D_k\right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.51}$$

が得られる．ただし D_i を次のように定義している．

$$D_i = \theta e_{Bi} + g_{Bi}$$

便宜上，(4.51) の係数を次の P_{ik}，Q_{ik}，S_{ik} を用いて表す．

$$\begin{aligned}
P_{ik} &= 1 - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 d_{Bi}^2 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k d_{Bi} d_{Bk} \\
Q_{ik} &= -2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 D_i d_{Bi} + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k d_{Bi} d_{Bk} \left(D_k d_{Bi} + D_i d_{Bk}\right) \\
S_{ik} &= -\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 D_i^2 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_i \beta_k D_i D_k
\end{aligned}$$

(4.51) は R に関する2次方程式であり，以下の2つの場合に分けられる．

1. $P_{ik}=0$ のとき

$$R=-\frac{S_{ik}}{Q_{ik}}$$

2. $P_{ik}\neq 0$ のとき

$$R=\max\left(\frac{-Q_{ik}+\sqrt{Q_{ik}^2-4P_{ik}S_{ik}}}{2P_{ik}},\frac{-Q_{ik}-\sqrt{Q_{ik}^2-4P_{ik}S_{ik}}}{2P_{ik}}\right)$$

いずれの場合においても R は一意に決定される．

以上の議論から，$\mathbf{P}_{fp}(h)$ を解くための補助アルゴリズムは次のようになる．

補助アルゴリズム

手順 1 $R_l \leftarrow 0$, $R_u \leftarrow M$ (Mは十分大きな正数)，$R \leftarrow R_0(\geq R_l)$ とする．$\mathbf{P}_{fp}^R(h)$ を解き B, $\boldsymbol{d}_B$, $\boldsymbol{e}_B$, $\boldsymbol{g}_B$, $L_B(h)$, $U_B(h)$ を求め，手順 2 へ進む．

手順 2 $K(L_B(h))>0$ ならば，$R_u \leftarrow L_B(h)$, $R \leftarrow R_l+R_u/2$ として手順 4 へ進む．$K(L_B(h))=0$ ならば，$\boldsymbol{x}=L_B(h)\boldsymbol{d}_B+\theta\boldsymbol{e}_B+\boldsymbol{g}_B$ として終了する．$K(L_B(h))<0$ ならば，手順 3 へ進む．

手順 3 $K(U_B(h))>0$ ならば，方程式の解 R_a, R_bを求め手順 5 へ進む．$K(U_B(h))=0$ ならば，$\boldsymbol{x}=U_B(h)\boldsymbol{d}_B+\theta\boldsymbol{e}_B+\boldsymbol{g}_B$ として終了する．$K(U_B(h))<0$ ならば，$R_l \leftarrow U_B(h)$, $R \leftarrow R_l+R_u/2$ として手順 4 へ進む．

手順 4 $\mathbf{P}_{fp}^R(h)$ を解き B, $\boldsymbol{d}_B$, $\boldsymbol{e}_B$, $\boldsymbol{g}_B$, $L_B(h)$, $U_B(h)$ を求める．手順 2 へ戻る．

手順 5 $R_a \in [L_B(h),\ U_B(h)]$ であれば，$\boldsymbol{x}=R_a\boldsymbol{d}_B+\theta\boldsymbol{e}_B+\boldsymbol{g}_B$として終了する．$R_b \in [L_B(h),\ U_B(h)]$ であれば，$\boldsymbol{x}=R_b\boldsymbol{d}_B+\theta\boldsymbol{e}_B+\boldsymbol{g}_B$として終了する．

定理 4.9 補助アルゴリズムは有限回反復して終了する．

証明

手順 3が終わった時点で考えられる状態は次の5つである．

(a) $K(L_B(h))=0$

(b) $K(U_B(h)) = 0$

(c) $K(L_B(h)) < 0 < K(U_B(h))$

(d) $K(L_B(h)) > 0$

(e) $K(U_B(h)) < 0$

(a)~(c) の場合は明らかにその時点で終了する. (d) および (e) の場合, 初回を除いて $L_B(h) \leq (R_l + R_u)/2 \leq U_B(h)$ となることは明らかであり, 反復するごとに $R_u - R_l$ は半減する. ゆえに, 有限回の反復で $R(h) \in [L_B(h),\ U_B(h)]$ が求められ, アルゴリズムは終了する.

証明終

$[L_B(h)\ ,\ \ U_B(h)]$, かつ $\boldsymbol{x}(h) \geq \mathbf{o}$ を満たす h の範囲を $I(\boldsymbol{B})$ で表し,

$$\bar{h}_B \triangleq \sup\{h | h \in I(\boldsymbol{B})\},\quad \underline{h}_B \triangleq \inf\{h | h \in I(\boldsymbol{B})\}$$

と定義する. さらに次の記号を定義する.

$\bar{h}$:　h^* の上限

$\underline{h}$:　h^* の下限

h_c:　現在の h

$\boldsymbol{B}_c$:　現在の基底行列 $\boldsymbol{B}$

このとき, $\mathbf{P}_{fp}$ を解くためのアルゴリズムは次のようになる.

主アルゴリズム

手順1 $\mathbf{P}_{fp}(1)$ を補助アルゴリズム を用いて解き, $\boldsymbol{x}(1)$, $Z(1)$ を求める. $Z(1) \leq -\mu_G^*(1)$ ならば, $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}(1)$ で終了する. $Z(1) > 0$ ならば, $\bar{h} \leftarrow 1$, $\underline{h} \leftarrow 0$, $h_c \leftarrow h$ ([0, 1] の任意の値), $R_0 \leftarrow 0$ として手順 2へ進む.

手順2 $\mathbf{P}_{fp}(h_c)$ を補助アルゴリズム を用いて解き, $\boldsymbol{x}(h_c)$, $\boldsymbol{B}_c$, $I(\boldsymbol{B}_c)$ を求める.

$Z(\underline{h}_{B_c}) \leq -\mu_G^*(h_c) \leq Z(\bar{h}_{B_c})$ ならば, $Z(h_B^*) = -\mu_G^*(h_B^*)$ の h_B^* を求め,

$\boldsymbol{x}^* \leftarrow R(h_B^*)\boldsymbol{d}_B + h_B^*\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{g}_B$ として終了する. $Z(\bar{h}_{B_c}) < -\mu_G^*(h_c)$ ならば手順 3へ進む.

$Z(\underline{h}_{B_c}) > -\mu_G^*(h_c)$ ならば手順 4へ進む.

手順 3 $\mathbf{P}_{fp}(h^{R(\bar{h}_B)})$ を解き $Z(h^{R(\bar{h}_B)})$ を求める．$Z(h^{R(\bar{h}_B)}){=}{-}\mu_G^*(h^{R(\bar{h}_B)})$ ならば，$\boldsymbol{x}^*{\leftarrow}\boldsymbol{x}(h^{R(\bar{h}_B)})$ で終了する．$Z(h^{R(\bar{h}_B)}){<}{-}\mu_G^*(h^{R(\bar{h}_B)})$ かつ

$\{\bar{h}_{B_c}Z(\bar{h})-\bar{h}Z(\bar{h}_{B_c})\}/\{Z(\bar{h})-Z(\acute{h}_{B_c})\}<h^{R(\bar{h}_B)}$ ならば，$h_c{\leftarrow}h^{R(\bar{h}_B)}$, $\underline{h}{\leftarrow}\bar{h}_{B_c}$ として手順 2 へ戻る．それ以外は，$h_c{\leftarrow}\ \{\bar{h}_{B_c}Z(\bar{h})-\bar{h}Z(\bar{h}_{B_c})\}/\{Z(\bar{h})-Z(\acute{h}_{B_c})\}$, $\underline{h}\ {\leftarrow}\bar{h}_{B_c}$ として手順 2 へ戻る．

手順 4 $\mathbf{P}_{fp}(h^{R(\underline{h}_B)})$ を解いて $Z(h^{R(\underline{h}_B)})$ を求める．$Z(h^{R(\underline{h}_B)}){=}{-}\mu_G^*(h^{R(\underline{h}_B)})$ ならば，$\boldsymbol{x}^*{\leftarrow}\boldsymbol{x}(h^{R(\underline{h}_B)})$ で終了する．$Z(h^{R(\underline{h}_B)}){>}\ {-}\mu_G^*(h^{R(\underline{h}_B)})$ かつ

$h^{R(\underline{h}_B)}{<}\{\underline{h}_{B_c}Z(\underline{h})-\underline{h}Z(\underline{h}_{B_c})\}/\{Z(\underline{h})-Z(\underline{h}_{B_c})\}$ ならば，$h_c{\leftarrow}\ h^{R(\underline{h}_B)}$, $\bar{h}{\leftarrow}\underline{h}_{B_c}$ として手順 2 へ戻る．それ以外は，$h_c{\leftarrow}\{\underline{h}_{B_c}Z(\underline{h})-\underline{h}Z(\underline{h}_{B_c})\}/\{Z(\underline{h})-Z(\underline{h}_{B_c})\}$, $\bar{h}{\leftarrow}\underline{h}_{B_c}$ として手順 2 へ戻る．

定理 4.10 主アルゴリズムは有限回反復して終了する．

証明

すべての h に対して $\mathbf{P}_{fp}^R(h)$ のキューン・タッカー条件は (4.48) の形に書くことができる．また，変数の数は有限であるため非負かつ相補性を満たす基底行列 $\boldsymbol{B}$ の数も有限である．$R(h)$ は 1 つの基底行列 $\boldsymbol{B}(h)$ に対応し，h は基底行列 $\boldsymbol{B}(h)$ によって決定される $I(\boldsymbol{B})$ に分割されている．主アルゴリズムはそれぞれの $I(\boldsymbol{B})$ を多くとも一度しか探索しないため，有限回反復後に最適解を求めて終了する．

証明終

4.3.3 β値がファジィ数である場合

本節では証券 i の β 値が次に表されるファジィ数 B_i である場合について考察する．

$$B_i=(\beta_i,\ \xi_i)_L$$

$z=\sum_{i=1}^n c_ix_i$ を表すファジィランダム変数 $U(\omega)$ は拡張原理により

$$U(\omega)=\left(\sum_{i=1}^n(\alpha_i+\beta_ir_m+\varepsilon_i)x_i,\ \sum_{i=1}^n\xi_ir_mx_i\right)_L$$

で表すことができる．前節と同様にしてファジィ目標Gをメンバシップ関数μ_Gで特性付けられるファジィ集合とし，可能性分布μ_Gの下でGである可能性測度を次の$\Pi_{U(\omega)}$で与える．

$$\Pi_{U(\omega)}(G) = \sup_z \min\left(\mu_{U(\omega)}(z),\ \mu_G(z)\right)$$

次の問題を考える．

$$\mathbf{P}_{\beta 1}:\quad \text{maximize}\quad h \tag{4.52}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.53}$$

$$0 \le x_i \le \gamma_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{4.54}$$

$$Pr\left(\Pi_{U(\omega)}(G) \ge h\right) \ge t \tag{4.55}$$

$\Pi_{U(\omega)}(G) \ge h$を変形すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sup_z \min\left(\mu_{U(\omega)}(z),\ \mu_G(z)\right) \ge h \\
\Leftrightarrow\ &\exists z : \mu_{U(\omega)}(z) \ge h,\ \mu_G(z) \ge h \\
\Leftrightarrow\ &\exists z : L\left(\frac{z - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_m \xi_i x_i}\right) \ge h,\ z \ge \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\ &\exists z : z \le \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)\, x_i + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i,\ z \ge \mu_G^*(h) \\
\Leftrightarrow\ &\mu_G^*(h) \le \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)\, x_i + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i
\end{aligned}$$

よって問題$\mathbf{P}_{\beta 1}$は次の問題$\mathbf{P}_{\beta 2}$となる．

$$\mathbf{P}_{\beta 2}:\quad \text{maximize}\quad h \tag{4.56}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.57}$$

$$0 \le x_i \le \gamma_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{4.58}$$

$$Pr\left(\mu_G^*(h) \le \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)\, x_i + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\right) \ge t \tag{4.59}$$

正規分布の性質より

$$\frac{(r_m - \bar{r}_m)\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\right\} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i}{\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_i^2}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うことから，問題 $\mathbf{P}_{\beta 2}$ の制約式は次の等価確定条件に変換できる．

$$\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i$$
$$\leq -K_t \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_i^2}$$

よって $\mathbf{P}_{\beta 2}$ は次の確定問題と等価となる．

$$\mathbf{P}_\beta: \quad \text{maximize} \quad h \tag{4.60}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.61}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{4.62}$$

$$\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i$$
$$\leq -K_t \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_i^2} \tag{4.63}$$

問題 $\mathbf{P}_\beta$ は h 一定のとき，凸計画問題となり，制約条件を満たす集合が有界凸集合になっていることに着目して次の部分問題 $\mathbf{P}_\beta(h)$ を導入する．

$$\mathbf{P}_\beta(h): \quad \text{minimize} \quad -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i$$
$$+K_t \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_i^2} \tag{4.64}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{4.65}$$

$$0 \leq x_i \leq \gamma_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{4.66}$$

問題 $\mathbf{P}_\beta(h)$ は明らかに $\boldsymbol{x}_\beta$ の狭義凸関数であり, $\mathbf{P}_\beta(h)$ の最適解を $\boldsymbol{x}_\beta(h)$, 最適値を $Z_\beta(h)$ で表すと $\boldsymbol{x}_\beta(h)$ はただ一つに決まる. また, このとき次の定理が成り立つ.

定理 4.11　$Z_\beta(h)$ は, h に関して単調増加である.

証明

$h > \acute{h}$ に対して次の計算式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& Z_\beta(h) - Z_\beta(\acute{h}) \\
= \; & -\sum_{i=1}^{n} \{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\xi_i\} x_{\beta_i}(h) + K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{\beta_i}(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
& + \sum_{i=1}^{n} \left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(\acute{h})\xi_i\right\} x_{\beta_i}(\acute{h}) - K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}(\acute{h})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{\beta_i}(\acute{h})\right)^2 \sigma_m^2}
\end{aligned}$$

$x_{\beta_i}(\acute{h})$ は $\mathbf{P}_\beta(\acute{h})$ の最適解であるから

$$\begin{aligned}
\geq \; & -\sum_{i=1}^{n} \{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(h)\xi_i\} x_{\beta_i}(h) + K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{\beta_i}(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
& + \sum_{i=1}^{n} \left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i \bar{r}_m + L^*(\acute{h})\xi_i\right\} x_{\beta_i}(h) - K_t \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_{\beta_i}(h)\right)^2 \sigma_m^2} \\
= \; & -\left\{L^*(h) - L^*(\acute{h})\right\} \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_{\beta_i}(h)
\end{aligned}$$

$L^*(h)$ の単調非増加性から

$$> \; 0$$

証明終

次に部分問題と元の問題との関係について考察する. まず, $h = 1$ のとき, $Z(1) \leq \mu_G^*(1)$ が成り立つならば, そのときの解 $\boldsymbol{x}(1)$ は最適解であること明らかである. よって以下では, $0 < h < 1$ に $\mathbf{P}_\beta$ の最適値がある場合のみを考える. この場合には次の定理が成り立つ.

定理 4.12　$\mathbf{P}_\beta(h)$ の最適解が $\mathbf{P}_\beta$ の最適解と一致するための必要十分条件は最適値が $Z_\beta(h) = -\mu_G^*(h)$ となることである.

証明

まず必要性を証明する. $Z_\beta(h) = -\mu_G^*(h)$ となる h を h^0, その最適解を $\boldsymbol{x}_\beta^0(h)$ とすると

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h^0)\xi_i\right\} x_{\beta_i}^0(h)$$

$$+K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^0(h)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{\beta_i}^0(h)\right)^2 \sigma_m^2} = -\mu_G^*(h^0)$$

より制約条件 (4.63) を満たす. また制約条件 (4.65)(4.66) と制約条件 (4.61)(4.62) は等しいため, $\mathbf{P}_\beta$の制約条件を全て満たしている. $\acute{h} > h^0$ の $\acute{h}$ が $\mathbf{P}_\beta$の解であると仮定する. $Z_\beta(h)$ は単調増加であるため, $Z_\beta(\acute{h}) > Z_\beta(h^0) = -\mu_G^*(h^0)$ となり 制約条件 (4.63) に矛盾する.

次に十分性を証明する.

$$\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h)\xi_i\} x_{\beta_i} + s = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{\beta_i}\right)^2 \sigma_m^2}$$

において $s > 0$ で, 最適解 $(\boldsymbol{x}_\beta^*,\ h^*)$ があると仮定すると,

$$\mu_G^*(h^*) - \sum_{i=1}^{n}\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(h^*)\xi_i\} x_{\beta_i}^* + s = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 {x_{\beta_i}^*}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{\beta_i}^*\right)^2 \sigma_m^2}$$

となり, $\mu_G^*(h)$ が単調増加かつ連続であることから

$$\mu_G^*(\hat{h}) - \sum_{i=1}^{n}\left\{\bar{\alpha}_i + \beta_i\bar{r}_m + L^*(\hat{h})\xi_i\right\} x_{\beta_i}^* = -K_t\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 {x_{\beta_i}^*}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_{\beta_i}^*\right)^2 \sigma_m^2}$$

を満たす $h^* < \hat{h}$ となる $\hat{h}$ が存在する. これは h^* が最適解であることに矛盾する. また, $s < 0$ であるとすると, 制約条件 (4.63) を満たさない. したがって $s = 0$ であり, $Z_\beta(h^*) = -\mu_G^*(h^*)$ となる.

証明終

問題 $\mathbf{P}_\beta(h)$ を解くため, さらに次の補助問題 $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ を導入する.

$$\mathbf{P}_\beta^R(h): \quad \text{minimize} \quad R\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - \bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_i\right)$$

$$+\frac{K_t}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\,x_i\right)^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2x_i^2\right\} \tag{4.67}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=1 \tag{4.68}$$

$$0\le x_i\le\gamma_i,\ i=1,\ldots,n \tag{4.69}$$

補助問題$\mathbf{P}_\beta^R(h)$ はRをパラメータとするパラメトリック2次計画問題となっており, $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ と$\mathbf{P}_\beta(h)$の制約条件を満たす範囲は等しいことに注意する．補助問題 $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ の最適解を $\boldsymbol{x}_\beta^R(h)$, 最適値を$Z_\beta^R(h)$とするとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.13 $R=\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\,x_{\beta_i}(h)\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2x_{\beta_i}^2(h)}$ ならば$\mathbf{P}_\beta^R(h)$の最適解 $\boldsymbol{x}_\beta^R(h)$ は$\mathbf{P}_\beta(h)$ の最適解 $\boldsymbol{x}_\beta(h)$ に一致する.

証明

部分問題 $\mathbf{P}_\beta(h)$に対するキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}_\beta(h)$は次のように表される.

$$\begin{aligned}
\mathbf{KTP}_\beta(h):\quad & -\{\alpha_i+\bar{r}_m(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\}\\
&+K_t\frac{\sigma_m^2(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\,x_i\right\}+\sigma_{ei}^2x_i}{\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\,x_i\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2x_i^2}}\\
&\qquad -p_1+p_2-q_{1i}+q_{2i}=0\qquad(1\le i\le n)\\
&\sum_{i=1}^{n}x_i=1+s_1\\
&\sum_{i=1}^{n}x_i+s_2=1\\
&x_i+s_{3i}=\gamma_i,\ i=1,\ldots,n\\
&p_1s_1+p_2s_2+\sum_{i=1}^{n}\{q_{1i}x_i+q_{2i}s_{3i}\}=0\\
&p_1,\ p_2,\ q_{1i},\ q_{2i},\ s_1,\ s_2,\ s_{3i},\ x_i\ge0
\end{aligned}\tag{4.70}$$

補助問題 $\mathbf{P}_\beta^R(h)$のキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}_\beta^R(h)$は次のように表される.

$$\mathbf{KTP}_\beta^R(h):\quad -R\{\alpha_i+\bar{r}_m(\beta_i+L^*(h)\xi_i)\}$$

$$+K_t\left[\sigma_m^2\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_i'\right\}+\sigma_{ei}^2{x_i'}^2\right]$$

$$-p_1'+p_2'-q_{1i}'+q_{2i}'=0,\ i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i'=1+s_1'$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i'+s_2'=1$$

$$x_i'+s_{3i}'=\gamma_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

$$p_1's_1'+p_2's_2'+\sum_{i=1}^{n}\{q_{1i}'x_i'+q_{2i}'s_{3i}'\}=0$$

$$p_1',\ p_2',\ q_{1i}',\ q_{2i}',\ s_1',\ s_2',\ s_{3i}',\ x_i'\geq 0 \tag{4.71}$$

(4.70) と (4.71) を比較することにより

$$R=\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_i(h)\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2x_i^2(h)}$$

ならば$p_1'=Rp_1$, $p_2'=Rp_2$, $q_{1i}'=Rq_{2i}$, $s_1'=s_1$, $s_2'=s_2$, $s_{3i}'=s_{3i}$, $x_i'=x_i$ が成り立つ.

証明終

補題 4.14 $-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\beta_i}-\bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}$ はRに関して単調減少である.

証明

$\acute{R}<R$に対し, $\boldsymbol{x}_\beta^R(h)$ が $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ の最適解であることから次の不等式が成り立つ.

$$R\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\beta_i}^R-\bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^R\right)$$

$$+\frac{K_t}{2}\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^R(h)\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2{x_{\beta_i}^R}^2(h)\right\}$$

$$<\ R\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\beta_i}^{\acute{R}}-\bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}\right)$$

$$+\frac{K_t}{2}\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2{x_{\beta_i}^{\acute{R}}}^2(h)\right\}$$

変形すると次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} & R\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)-x_{\beta_i}^{R}(h)\right)+\bar{r}_m\left(\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}\right.\right. \\ & \left.\left.-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}\right)\right\}+\frac{K_t}{2}\sigma_m^2\left\{x_i^R(h)^2-x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)^2\right\} \\ & <0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

同様にして $\boldsymbol{x}_{\beta}^{\acute{R}}(h)$ が $\mathbf{P}_{\beta}^{\acute{R}}(h)$ の最適解であることから次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} & R\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)-x_{\beta_i}^{R}(h)\right)+\bar{r}_m\left(\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}\right.\right. \\ & \left.\left.-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}\right)\right\}+\frac{K_t}{2}\sigma_m^2\left\{x_{\beta_i}^R(h)^2-x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)^2\right\} \\ & >0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

(4.72)(4.73) を辺々引くと次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} & (R-\acute{R})\times\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)-x_{\beta_i}^{R}(h)\right)\right. \\ & \left.+\bar{r}_m\left(\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}\right)\right\}<0 \end{aligned}$$

$(R-\acute{R})>0$ より

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\beta_i}^{R}(h)-\bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{R}(h) \\ < \quad & -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)-\bar{r}_m\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h) \end{aligned}$$

証明終

補題 4.15　$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i+L^*(h)\xi_i\right)x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}^2\sigma_m^2+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^{R}(h)^2$ はRに関して単調増加である．

証明

$\acute{R} < R$に対し，$\boldsymbol{x}_{\beta}^{\acute{R}}(h)$が$\mathbf{P}_{\beta}^{\acute{R}}(h)$の最適解であることから，次の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& \acute{R}\left(\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{\beta_i}^{R}(h) - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{R}(h)\right) \\
& \qquad + \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{R}(h)^{2} \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^{R}(h)^2\right\} \\
< \ & \acute{R}\left(\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h) - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right) \\
& \qquad + \frac{K_t}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)^{2} \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^{R}(h)^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.74}
$$

また，補題4. 14から次の不等式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{\beta_i}^{R}(h) - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{R}(h) \\
< \ & -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h) - \bar{r}_m \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)
\end{aligned} \tag{4.75}
$$

(4.74), (4.75)から次の不等式が導かれる．

$$
\begin{aligned}
& -\frac{K_t}{2}\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^2\right\} \\
> \ & -\frac{K_t}{2}\left\{\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^2\right\}
\end{aligned}
$$

となる．$K_t > 0$より，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{\acute{R}}(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^2 \\
< \ & \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_{\beta_i}^{R}(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_{\beta_i}^2
\end{aligned}
$$

証明終

定理 4. 16

$$
K(R) \triangleq R^2 - \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i + L^*(h)\xi_i\right) x_i^{R}(h)\right\}^2 \sigma_m^2 - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_i^{R}(h)^2
$$

とおくと

$$R^* > R \quad \Leftrightarrow \quad K(R) < 0$$

$$R^* < R \quad \Leftrightarrow \quad K(R) > 0$$

$$R^* = R \quad \Leftrightarrow \quad K(R) = 0$$

証明

明らかに $0 \leq R < +\infty$ であり，$\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i^R(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_i^R(h)^2$ が R に関して連続であることから，$K(R)$ も Rに関して連続であることがわかる．また，$S = \{\boldsymbol{x} | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ 0 \leq x_i \leq \gamma_i\ (i = 1 \dots n)\}$ の有界性より

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i + L^*(h)\xi_i)\, x_i^R(h)\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 x_i^R(h)^2 < +\infty$$

であることから $K(0) < 0 < K(+\infty)$ となる．最適値を与える $x_i^R(h)$ はただ一つであるため，補題4. 15 と平均値の定理から定理4. 16 が成り立つことがわかる．

証明終

ある区間 $L_C(h) \leq R \leq U_C(h)$ での基底行列$\boldsymbol{C}$は，$\mathbf{KTP}^R$にレムケ法 [44] などを適用して解くことにより得られ，$\boldsymbol{d}_C'$，$\boldsymbol{e}_C'$，$\boldsymbol{g}_C'$ (d_{Ci}'，e_{Ci}'，g_{Ci}')をそれぞれ基底行列$\boldsymbol{C}$の$\boldsymbol{x}^R(h)$ ($x_i^R(h)$) に関する部分とすると，$\boldsymbol{x}^R(h)$ は次の形で表される．

$$\boldsymbol{x}^R(h) = R\boldsymbol{d}_C' + \tau \boldsymbol{e}_C' + \boldsymbol{g}_C'$$

ただし，$\tau = L^*(h)$ とする．$K(R) = 0$ より

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k d_{Ci}' d_{Ck}' - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 {d_{Ci}'}^2\right) R^2 \\
&\quad - \left\{\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k \left(F_k d_{Ci}' + F_i d_{Ck}'\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 F_i d_{Ci}'\right\} R \\
&\quad - \left(\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k F_i F_k + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 F_i^2\right) \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

が得られる．ただし，E_i，F_i を次のように定義する．

$$E_i = \beta_i + \tau \xi_i$$

$$F_i = \tau e'_{Ci} + g'_{Ci}$$

便宜上, (4.76) の係数を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
P'_{ik} &= \left(1 - \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k d'_{Ci} d'_{Ck} - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 {d'_{Ci}}^2\right) \\
Q'_{ik} &= -\left\{\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k \left(F_k d'_{Ci} + F_i d'_{Ck}\right) + 2\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 F_i d'_{Ci}\right\} \\
S'_{ik} &= -\left(\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E_i E_k F_i F_k + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ei}^2 F_i^2\right)
\end{aligned}$$

(4.76) はRに関する2次方程式であり, 以下の2つの場合に分けられる.

1. $P'_{ik} = 0$のとき
$$R = -\frac{S'_{ik}}{Q'_{ik}}$$

2. $P'_{ik} \neq 0$のとき
$$R = \frac{-Q'_{ik} \pm \sqrt{{Q'_{ik}}^2 - 4P'_{ik}S'_{ik}}}{2P'_{ik}}$$

いずれの場合においてもRは一意に決定される.

以上のことから補助問題$\mathbf{P}_\beta(h)$を解くためのアルゴリズムは次のようになる.

補助アルゴリズム 2

手順 1 $R_l \leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2}$, $R_u \leftarrow M$(Mは十分大きな正数), $R \leftarrow R_0(\geq R_l)$ とする. $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ を解き C, $\boldsymbol{d}'_C$, $\boldsymbol{e}'_C$, $\boldsymbol{g}'_C$, $L_C(h)$, $U_C(h)$ を求める. 手順 2へ進む.

手順 2 $K(L_C(h)) > 0$ ならば, $R_u \leftarrow L_C(h)$, $R \leftarrow (R_l + R_u)/2$として手順 4へ進む. $K(L_C(h)) = 0$ ならば, $x_i = d'_{Ci}L_C(h) + e'_{Ci}\tau + g'_{Ci}$ として終了する. $K(L_C(h)) < 0$ ならば, 手順 3へ進む.

手順 3 $K(U_C(h)) > 0$ならば, 方程式の解R'_a, R'_bを求め手順 5へ進む. $K(U_C(h)) = 0$ ならば, $x_i = d'_{Ci}U_C(h) + e'_{Ci}\tau + g'_{Ci}$ として終了する. $K(U_C(h)) < 0$ ならば, $R_l \leftarrow U_C(h)$, $R \leftarrow (R_l + R_u)/2$として手順 4へ進む.

手順 4 $\mathbf{P}_\beta^R(h)$ を解き C, $\boldsymbol{d}'_C$, $\boldsymbol{e}'_C$, $\boldsymbol{g}'_C$, $L_C(h)$, $U_C(h)$を求める. 手順 2へ戻る.

手順5 R'_a が $[L_C(h)\ ,\ \ U_C(h)]$ の中にあれば, $x_i = d'_{Ci}R'_a + e'_{Ci}\tau + g'_{Ci}$ として終了する. R'_b が $[L_C(h)\ ,\ \ U_C(h)]$ の中にあれば, $x_i = d'_{Ci}R'_b + e'_{Ci}\tau + g'_{Ci}$ として終了する.

定理 4.17 アルゴリズム2は有限回反復して終了する.

証明

手順3が終わった時点で考えられる状態は次の5つである.

(a) $K(L_C(h)) = 0$

(b) $K(U_C(h)) = 0$

(c) $K(L_C(h)) < 0 < K(U_C(h))$

(d) $K(L_C(h)) > 0$

(e) $K(U_C(h)) < 0$

(a)~(c) の場合は明らかにその時点で終了する. (d) または (e) の場合, 初回を除いて $L_C(h) \leq (R_l + R_u)/2 \leq U_C(h)$ となることは明らかであり, $R_u - R_l$ は反復するごとに必ず半減する. ゆえに, 有限回反復した後 $R(h) \in [L_C(h),\ U_C(h)]$ が求められ, アルゴリズムは終了する.

証明終

$[L_C(h),\ U_C(h)]$, $\boldsymbol{x}(h) \geq 0$ を満たす h の範囲を $I(\boldsymbol{C})$ で表し,

$$\underline{h}_C \triangleq \inf\{h | h \in I(\boldsymbol{C})\}$$

と定義し, さらに次の記号を導入する.

h_c:　現在の h

$\boldsymbol{C}_c$:　現在の基底行列 $\boldsymbol{C}$

このとき次の定理が成り立つ.

定理 4.18 基底行列 $\boldsymbol{C}$ すべての集合を T とすると, $\varepsilon < \min\{\bar{h}_C - \underline{h}_C | C \in T\}$ を満たす ε が存在する.

証明

すべてのhに対して$\mathbf{P}_\beta^R(h)$のキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}_\beta^R(h)$は等しい．また，変数の数は有限であり，また非負かつ相補性を満たす基底行列$\boldsymbol{C}$の数も有限であることから明らかである．

証明終

以上の議論から，$\mathbf{P}_\beta$を解くアルゴリズムは次のようになる．

主アルゴリズム 2

手順 1 $\mathbf{P}_\beta(1)$を補助アルゴリズム 2 を使って解き，$\boldsymbol{x}_\beta(1)$，$Z_\beta(1)$，$I(\boldsymbol{C}_c)$を求める．$Z_\beta(1) \leq -\mu_G^*(1)$ならば，$\boldsymbol{x}_\beta^* \leftarrow \boldsymbol{x}_\beta(1)$で終了する．$Z_\beta(1) > -\mu_G^*(1)$ならば，$I(\boldsymbol{C}_c)$で$Z_\beta(h) > -\mu_G^*(h)$となる$h'$を求め，存在するならば，その$h'$の中で最大の$h'$を$h^*$とし，$\boldsymbol{x}_\beta^* \leftarrow \boldsymbol{x}_\beta(h^*)$として終了．存在しなければ手順 3 へ進む．

手順 2 $\mathbf{P}_\beta(h_c)$を補助アルゴリズム 2 を使って解き，$\boldsymbol{x}_\beta(h_c)$，基底行列$\boldsymbol{C}_c$，$I(\boldsymbol{C}_c)$を求める．$I(\boldsymbol{C}_c)$で$Z_\beta(h) > -\mu_G^*(h)$となる$h'$を求め，存在するならばその$h'$の中で最大の$h'$を$h^*$とし，$\boldsymbol{x}_\beta^* \leftarrow \boldsymbol{x}_\beta(h^*)$で終了する．存在しなければ手順 3 へ進む．

手順 3 $h_C \leftarrow \underline{h}_C - \varepsilon$ (εは十分小さな正数) として手順 2 へ戻る．

上記のアルゴリズムに対して次の定理が成り立つ．

定理 4.19 主アルゴリズムは有限回反復して終了する．

証明

基底行列$\boldsymbol{C}$の個数は有限で，$R(h)$はある 1 つの基底行列$\boldsymbol{C}(h)$に対応し，hは基底行列$\boldsymbol{C}(h)$によって決定される$I(\boldsymbol{C})$に分割されている．主アルゴリズム 2 はそれぞれの$I(\boldsymbol{C})$を多くとも一度しか探索しないため，有限回反復した後，最適解を求めて終了する．

証明終

4.4 数値計算結果

本節では, 次ページに挙げる29銘柄の証券と無リスク証券としてのコールを用いて, 計30銘柄で数値解析を行った結果について示す. モデルは4.3.2節におけるα値がファジィランダム変数とした場合を用いた. 市場ポートフォリオにはTOPIXを採用し, 1995年4月から1998年11月までの, 1ヶ月あたりの収益率をもとに各証券の α値, β 値, 及び標準偏差 σ を最小二乗法によって求めた. またファジィランダム変数の広がりδ については, 日経金融新聞 (1999年1月4日21面) を参考に決定した. 各銘柄の α 値, β 値, 標準偏差 σ, ファジィ数の広がりδ の比, 及び1998年12月30日の終値は次のページの表4.1に示した通りである.

各証券の上限 γ_i はすべて0.1とした. 29銘柄の証券の中で最大の幅 δ_m を 5, 10 としたとき, 及び従来のモデルを用いたときの資金配分比率とそのときの期待収益率及び満足度を表2に示す.

さらに, 各証券の1998年12月30日から1ヶ月間の収益率及び, その期間に表4.2の資金配分比率で投資した場合の総収益率を表4.3に示す.

表 4.1　　銘柄別のパラメータの値

	α値	β値	σ	δの比	1株あたりの価格
日本水産	-1.80497	0.932422	8.767480009	0	130
帝国石油	-0.428606	0.976273	6.457055769	0	335
大林組	0.492654	1.27447	7.759428381	0	542
アサヒビール	1.6072	0.570617	4.291593876	0	1665
東洋紡	-0.323271	0.893237	7.369162883	1	146
王子製紙	-0.559481	0.809141	6.159332894	0	587
武田薬品工業	3.29359	0.538911	5.700195567	0	4350
富士写真フィルム	2.28389	0.836798	5.747526546	1	4200
日本石油	0.0120876	1.07727	7.270296823	0	394
ブリヂストン	2.09664	0.98034	5.024454398	0	2565
日本板硝子	-0.0795978	1.18429	8.92359023	1	318
新日本製鉄	-0.374059	1.05065	5.677126298	0	205
住友電気工業	0.808931	0.777289	4.95682828	0	1271
東京製鋼	-1.10535	1.6686	8.171833454	1	152
コマツ	0.753897	0.843487	5.98233579	1	593
富士通	1.34497	0.701	7.300603869	3	1505
トヨタ自動車	1.54391	0.708127	6.338197883	0	3070
シチズン時計	1.43847	1.14912	7.746386764	1	680
凸版印刷	1.07845	1.04804	6.623752116	0	1380
三菱商事	0.0516997	1.28218	6.394647574	1	650
東京三菱銀行	0.169057	1.50046	8.25010912	2	1170
三井不動産	0.616252	1.25433	5.934590483	1	855
東京急行電鉄	-0.624011	1.21694	5.210556266	0	297
日本郵船	-0.431323	0.536759	5.985803338	0	357
全日本空輸	-1.27171	0.792111	7.530350629	0	383
三菱倉庫	0.378093	1.03002	6.693239694	0	1328
国際電話電信	-0.496652	0.727398	8.99778381	2	3990
東京電力	0.345168	0.116522	3.789647134	0	2790
東映	-0.112267	1.33576	6.783452815	1	334
コール（1ヶ月）	0.54	0	0	0	100

表4.2　　最適資金配分比率

	$\delta_m = 5$	$\delta_m = 10$	従来のモデル
日本水産	0.000	0.000	0.000
帝国石油	0.000	0.000	0.017
大林組	0.000	0.000	0.010
アサヒビール	0.068	0.053	0.075
東洋紡	0.033	0.045	0.023
王子製紙	0.005	0.000	0.026
武田薬品工業	0.100	0.100	0.100
富士写真フィルム	0.089	0.100	0.066
日本石油	0.000	0.000	0.016
ブリヂストン	0.043	0.004	0.055
日本板硝子	0.012	0.014	0.006
新日本製鉄	0.000	0.000	0.014
住友電気工業	0.035	0.004	0.049
東京製鋼	0.000	0.000	0.000
コマツ	0.059	0.085	0.043
富士通	0.100	0.100	0.059
トヨタ自動車	0.053	0.030	0.063
シチズン時計	0.044	0.061	0.031
凸版印刷	0.016	0.000	0.034
三菱商事	0.010	0.012	0.004
東京三菱銀行	0.022	0.074	0.000
三井不動産	0.024	0.032	0.015
東京急行電鉄	0.000	0.000	0.000
日本郵船	0.030	0.000	0.045
全日本空輸	0.000	0.000	0.015
三菱倉庫	0.005	0.000	0.025
国際電話電信	0.069	0.100	0.028
東京電力	0.082	0.073	0.086
東映	0.002	0.001	0.000
コール（1ヶ月）	0.097	0.097	0.097
期待収益率	0.000	0.451	0.000
満足度	0.000	0.090	0.000

表4.3 実際の収益率

	収益率	$\delta_m = 5$	$\delta_m = 10$	従来のモデル
日本水産	-0.77	0.000	0.000	0.000
帝国石油	-0.30	0.000	0.000	-0.005
大林組	-0.18	0.000	0.000	-0.002
アサヒビール	-5.83	-0.396	-0.309	-0.437
東洋紡	4.79	0.026	0.216	0.110
王子製紙	2.90	0.015	0.000	0.075
武田薬品工業	-4.60	-0.460	-0.460	-0.460
富士写真フィルム	2.14	0.190	0.214	0.141
日本石油	-4.06	0.000	0.000	-0.065
ブリジストン	-0.58	-0.025	-0.002	-0.032
日本板硝子	13.21	0.159	0.185	0.079
新日本製鉄	0.49	0.000	0.000	0.001
住友電気工業	3.46	0.121	0.014	0.167
東京製鋼	7.24	0.000	0.000	0.000
コマツ	3.37	0.199	0.286	0.145
富士通	1.20	0.120	0.120	0.071
トヨタ自動車	-0.33	-0.017	-0.010	-0.021
シチズン時計	13.68	0.602	0.834	0.424
凸版印刷	-1.23	-0.020	0.000	-0.042
三菱商事	2.46	0.025	0.030	0.010
東京三菱銀行	18.12	0.399	1.341	0.000
三井不動産	8.19	0.197	0.262	0.123
東京急行電鉄	0.67	0.000	0.000	0.000
日本郵船	-3.36	-0.101	0.000	-0.151
全日本空輸	-3.39	0.000	0.000	-0.051
三菱倉庫	6.06	0.030	0.000	0.152
国際電話電信	0.25	0.017	0.025	0.007
東京電力	-9.50	-0.817	-0.694	-0.817
東映	15.57	0.031	0.016	0.000
コール（1ヶ月）	0.54	0.052	0.052	0.052
総収益率		0.647	2.120	-0.454

東京三菱銀行への資金配分比率に注目すると, 従来のモデルでは 0.000 であったのに対し, 本研究のモデルにおいてδ_m を 5, 10 と増加するにつれ, 0.022, 0.074, と増加する傾向にある. また, トヨタ自動車への資金配分比率に関しては, 従来では 0.063 であったのに対し, 0.053, 0.030, と減少する傾向にある. 一般に, δ_m の値が大きいほど資金配分比率は増加する傾向にある.

武田薬品工業や, 東京製鋼は資金配分比率が δ_m の値によらない. これは前者は α 値が大きいのに対し, 分散が小さくなっており, 一方後者に関してはα値が小さいのに対し, 分散が大きいという性質があるためと考えられる.

また, 期待収益率に対し満足度が 0.000 又は 0.090 と低くなったのは期待収益率が0の点を満足度0と設定したためであり, 当時のわが国の経済状態の厳しさを反映しているものと思われる.

4.5 結言

本章ではポートフォリオ選択問題における単一指数モデルにおいて熟練者の知識を考慮に入れたモデルを提案し, 効率的なアルゴリズムの開発を行い, 最後に数値例を示した. 提案したモデルは可能性測度のみを最大化するモデルであるが, 最適基準として必然性測度を用いたほうが適当である場合も考えられる. 必然性測度最大化モデルを考えると同時に, 今後, 多くの数値計算を行ってモデルの検証し, さらに改良を進めることが必要である. そのことにより年金運用などの現実の問題に適用が可能になると思われる.

第5章

不確実・不確定な係数を含むナップサック問題

5.1 緒言

本章では, 不確実・不確定な係数を含む線形ナップサック問題を扱う. ナップサック問題とは, ある制約の下で総価値を最大にする部分集合を選択する問題であり, 重量制限があるナップサックが与えられている時に, どの品物をナップサックに詰めるべきかを決定する問題から名前が付けられている. 例としては, いくつかのプロジェクトがあり, それぞれのプロジェクトに対する費用が与えられているときに, 予算制約内で価値の総和が最大になるプロジェクトの部分集合を選択する問題がある. Ishiiら[26]は線形ナップサック問題において目的関数の係数が確率変数で表される場合について意思決定法を考え, 効率的な解法を示している. この問題は, 経済や状況の確率的な変動によって, それぞれのプロジェクトの価値が変化する場合に適用できるが, 現実の問題においては, それぞれの事象において価値がはっきりと知ることができず, 熟練者によっておおよその値が見積もられる場合もあると考えられる. そのような場合, 係数は不確実・不確定な値になり, ファジィランダム変数で表すことができる.

まず, 5.2節では決定変数が連続である場合の意思決定法を示すと共に問題の構造を十分に利用したアルゴリズムを構築する. 次に5.3節で, ナップサック問題本来の決定変数が離散的である場合を扱い, 動的計画法を基にした効率的な解法を示し, 最後の5.4節で本章についてまとめる.

5.2　決定変数が連続値をとる場合

次のナップサック問題を考える．

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{knc1} \;:\quad & \text{maximize} \quad \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\; 0 \le x_j \le b_j,\; j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{5.1}$$

ただし，$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ であり，c_jは次のメンバシップ関数によって特性づけられるファジィランダム変数$C_j(\omega)$とする．

$$\mu_{C_j(\omega)}(c_j) = \begin{cases} L\left(\dfrac{d_j(\omega) - c_j}{\alpha_j}\right) & (c_j \le d_j(\omega)) \\[2ex] R\left(\dfrac{c_j - d_j(\omega)}{\beta_j}\right) & (c_j \ge d_j(\omega)) \end{cases}$$

L は$[0, +\infty)$から$[0, 1]$への関数で$0 \le r \le r'$において狭義減少かつ$r' \ge r$において値0をとる連続関数とし，Rも同様の条件を満たすものとする．また$d_j(\omega)$は平均m_j, 分散σ_j^2の正規分布に従う確率変数であるとし，α_j, β_jはそれぞれ左右の広がりを表すパラメータとする．

それぞれc_j, $j = 1, \ldots, n$は$L-R$ファジィ数において中心が確率変数となっているファジィランダム変数である．したがって，$L-R$ファジィ数の演算を用いて計算すると，目的関数$y(= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x})$を表すファジィランダム変数$Y(\omega)$は次のようになる．

$$Y(\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j(\omega) x_j,\; \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j,\; \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j \right)_{LR}$$

目的関数に対して，“だいたいf_1以上である” というファジィ目標を設定し，メンバシップ関数μ_Gで特性づけられるファジィ集合で表す．メンバシップ関数 μ_G は$y \ge 0$で定義され，$y \le f_0$において0，$f_0 \le y \le f_1$において単調増加，$f_1 \le y$において1をとる連続関数であるとする．目的関数値の可能性分布μ_Gの下でだいたいf_1以上である可能性測度は次のようになる．

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) = \sup_{y} \min \left\{ \mu_{Y(\omega)}(y) \mu_G(y) \right\}$$

問題$\mathbf{P}_{knc1}$の意思決定法として次の問題$\mathbf{P}_{knc2}$を考える．

$$\mathbf{P}_{knc2} \;:\; \text{maximize} \;\; h \tag{5.2}$$

$$\text{subject to}\ \ Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq \alpha \tag{5.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\ 0 \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.4}$$

ただし，αは意思決定者によって与えられる確率レベルで$\alpha > 1/2$を満たす確定値とする．

制約式において $\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$ は次のように変形される．

$$\sup_y \min\left\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\right\} \geq h \tag{5.5}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y : \mu_{Y(\omega)}(y) \geq h,\ \mu_G(y) \geq h \tag{5.6}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y : R\left(\frac{y - \sum_{j=1}^{n} d_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j}\right) \geq h,\ \mu_G(y) \geq h \tag{5.7}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y : y \leq \sum_{j=1}^{n} \{d_j(\omega) + R^*(h)\beta_j\} x_j,\ y \geq \mu_G^*(h) \tag{5.8}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \{d_j(\omega) + R^*(h)\beta_j\} x_j \geq \mu_G^*(h) \tag{5.9}$$

ここで $R^*(h)$ と $\mu_{G^*}(h)$ は擬逆関数であり次のように表される．

$$R^*(h) = \begin{cases} \sup\{t | R(t) > h,\ t \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\mu_G^*(h) = \inf\{t | \mu_G(t) \geq h\}\ \ (0 \leq h \leq 1) \tag{5.11}$$

(5.9) を (5.3) に代入すると次の$\mathbf{P}_{knc3}$となる．

$$\mathbf{P}_{knc3} :\ \ \text{maximize}\ \ h \tag{5.12}$$

$$\text{subject to}\ \ Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \{d_j(\omega) + R^*(h)\beta_j\} x_j \geq \mu_G^*(h)\right) \geq \alpha \tag{5.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,\ \ 0 \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.14}$$

正規分布の性質により $\{\sum_{j=1}^{n} d_j(\omega) x_j - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j\}/\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2}$ は標準正規分布に従う確率変数である．よってK_αを標準正規分布の確率分布関数におけるα分位点としたとき，

$K_{1-\alpha} = -K_\alpha$ が成り立つことに注意すると，問題 $\mathbf{P}_{knc3}$ は次の等価確定問題 $\mathbf{P}_{knc4}$ に変換される．

$$\mathbf{P}_{knc4}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{5.15}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}\{m_j + R^*(h)\beta_j\}x_j - K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} \geq \mu_G^*(h) \tag{5.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \quad 0 \leq x_j \leq b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.17}$$

問題 $\mathbf{P}_{knc4}$ を解くために次の部分問題を導入する．

$$\mathbf{P}_{knc}(h) \ : \ \text{minimize} \quad -\sum_{j=1}^{n}\{m_j + R^*(h)\beta_j\}x_j + K_\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} \tag{5.18}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \quad 0 \leq x_j \leq b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.19}$$

便宜上 $R^*(h) = q, \ y_j = a_j x_j, \ \hat{b}_j = a_j b_j, \ \hat{m}_j = m_j/a_j, \ \hat{\sigma}_j^2 = K_\alpha^2 \sigma_j^2/a_j^2, j = 1, 2, \ldots, n$ とおき，次の問題を考える．

$$\mathbf{P}'_{knc}(q) \ : \ \text{minimize} \quad -\sum_{j=1}^{n}\left\{\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j\right\}y_j + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2 y_j^2} \tag{5.20}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = b, \quad 0 \leq y_j \leq \hat{b}_j, \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.21}$$

問題 $\mathbf{P}'_{knc}(q)$ の最適解を $\boldsymbol{y}(q)$，最適値を Z_q とする．また，h^* を $\mathbf{P}_{knc4}$ の最適値とし，$q^* = R^*(h^*)$ とする．さらに $\boldsymbol{y}^*$ を $\mathbf{P}_{knc}$ の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ に対応する解とするとき，次の定理が成り立つ．

定理 5. 1　$\boldsymbol{y}(q) = \boldsymbol{y}^*$ となるための必要十分条件は $Z_q = -\mu_G^*(R(q))$ が成り立つことである．

証明

$Z_{q^*} = -\mu_G^*(R(q^*))$ でないと仮定する．このとき，q^* における $\boldsymbol{y}^*$ の実行可能性より $Z_{q^*} < -\mu_G^*(R(q^*))$，すなわち

$$-\sum_{j=1}^{n}\{m_i + q^*\beta_i\}y_i^* + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2 y_j^*} < -\mu_G^*(R(q^*)) \tag{5.22}$$

が成り立つ．ところがμ_G^*の単調非減少性と連続性からZ_qに対して$q^* > q'$を満たすq'が存在する．このことはq^*の最適性に矛盾する．

逆に$\mathbf{P}_{knc}(q)$の最適解を$\boldsymbol{y}^*$とし，最適値をq^*とする．$Z_{q^*} = -\mu_G^*(R(q^*))$を満たすものとする．これが$\mathbf{P}_{knc}$の最適解でないとすると，次の関係式を満たす$(\boldsymbol{x}', q')$が存在する．

$$q^* > q' \tag{5.23}$$

かつ

$$-\sum_{j=1}^{n}\{m_i + q\beta_i\} y_j' + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j^2 y_i'} \leq -\mu_G^*(R(q')) \tag{5.24}$$

ところが$\boldsymbol{y}^*$の最適性とμ_G^*の単調非減少性により次の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
-\mu_G^*(R(q')) &< -\mu_G^*(R(q^*)) = -\sum_{j=1}^{n}\{m_j + q^*\beta_j\} y_j^* + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j^2 y_j^*} \\
&< -\sum_{j=1}^{n}\{m_j + q^*\beta_j\} y_j' + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j^2 y_j'} \\
&< -\sum_{j=1}^{n}\left\{m_j + q'\beta_j\right\} y_j' + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j^2 y_j'}
\end{aligned}$$

これは(5.24)式に矛盾する．

証明終

確率レベルは$\alpha > 1/2$であるから，$K_\alpha > 0$が成り立つ．よって，$\mathbf{P}'_{knc}(q)$は凸計画問題であり，最適解$\boldsymbol{y}(q)$は次のキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}_{knc}(q)$を解くことによって得られる．

$$\mathbf{KTP}_{knc}(q) \quad : \quad \frac{\hat{\sigma}_j^2 y_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \hat{\sigma}_j^2 y_j^2}} - \hat{m}_j - q\hat{\beta}_j + u_j - v_j + \lambda = 0 \tag{5.25}$$

$$v_j y_j = 0,\ u_j(y_j - \hat{b}_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = b,\ 0 \leq y_j \leq \hat{b}_j,\ u_j, v_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.27}$$

問題$\mathbf{P}'_{knc}(q)$は非線形の項を含んでいるため，効率良く解くために次の補助問題$\mathbf{P}^{\gamma}_{knc}(q)$を導入する．

$$\mathbf{P}^{\gamma}_{knc}(q) \;:\; \text{minimize} \quad -\sum_{j=1}^{n}\gamma\left\{\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j\right\}y_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2 y_j^2 \tag{5.28}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = b,\ \ 0 \le y_j \le \hat{b}_j,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{5.29}$$

問題$\mathbf{P}^{\gamma}_{knc}(q)$は凸2次計画問題であり，最適解$y^{\gamma}$は次のキューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}^{\gamma}_{knc}(q)$を解くことによって得られる．

$$\mathbf{KTP}^{\gamma}_{knc}(q) \;:\; \hat{\sigma}_j^2 y_j - \gamma\left\{\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j\right\} + u_j - v_j + \lambda = 0 \tag{5.30}$$

$$v_j y_j = 0,\ u_j(y_j - \hat{b}_j) = 0,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{5.31}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = b,\ 0 \le y_j \le \hat{b}_j,\ u_j,\ v_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n \tag{5.32}$$

$\mathbf{KTP}_{knc}(q)$および$\mathbf{KTP}^{\gamma}_{knc}(q)$の最適解それぞれ，$(\boldsymbol{y}(q), \boldsymbol{u}(q), \boldsymbol{v}(q), \lambda(q))$，$(\boldsymbol{y}^{\gamma}(q), \boldsymbol{u}^{\gamma}(q), \boldsymbol{v}^{\gamma}(q), \lambda^{\gamma}(q))$とするとき，次の定理が成り立つ．

定理 5.2　$\gamma^2 = \sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2(y_j^{\gamma})^2$が成り立つならば，$(\boldsymbol{y}(q), \boldsymbol{u}(q), \boldsymbol{v}(q), \lambda(q))$と$(\boldsymbol{y}^{\gamma}(q), \boldsymbol{u}^{\gamma}(q), \boldsymbol{v}^{\gamma}(q), \lambda^{\gamma}(q))$の間には次の関係が成り立つ．

$$\boldsymbol{y}(q) = \boldsymbol{y}^{\gamma}(q),\ \boldsymbol{u}_j(q)/\gamma,\ \boldsymbol{v}_j(q) = \boldsymbol{v}_j^{\gamma}(q)/\gamma,\ j = 1,2,\ldots,n,\ \lambda(q) = \lambda^{\gamma}(q)/\gamma \tag{5.33}$$

証明

キューン・タッカー条件$\mathbf{KTP}_{knc}(q)$，$\mathbf{KTP}^{\gamma}_{knc}$を比較するとわかるように，(5.26), (5.27)はそれぞれ，(5.31), (5.32)に対応している．よって(5.25)および(5.30)から，$\gamma^2 = \sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2(y_j^{\gamma})^2$が成立する$\boldsymbol{y}^{\gamma}(q)$は$\boldsymbol{y}(q)$に等しいことがわかる．

証明終

また，$T^q(\gamma) \triangleq \gamma - \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\hat{\sigma}_j^2(y_j^{\gamma}(q))^2}$とおくと，定理5.2から$T^q(\gamma) = 0$を満たす$\boldsymbol{y}^{\gamma}(q)$は$\mathbf{P}'_{knc}(q)$の最適解であることがわかる．$T^q(\gamma) = 0$を満たす$\gamma$を$\gamma(q)$で表すとき，次の定理が成立する．

定理 5.3

1. $T^q(\gamma) < 0 \Longleftrightarrow \gamma < \gamma(q)$

2. $T^q(\gamma) = 0 \Longleftrightarrow \gamma = \gamma(q)$

3. $T^q(\gamma) > 0 \Longleftrightarrow \gamma > \gamma(q)$

証明については定理3.6と同様にして示される．Helgason[18]の方法を適用することにより，$\mathbf{KTP}^{\gamma}_{knc}(q)$の解は次のようになる．

$$u_j^{\gamma}(\lambda) = \max\left\{\gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j) - \lambda - \hat{\sigma}_j^2\hat{b}_j,\ 0\right\} \tag{5.34}$$

$$v_j^{\gamma}(\lambda) = \max\left\{\lambda - \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j),\ 0\right\} \tag{5.35}$$

$$y_j^{\gamma}(\lambda) = \begin{cases} \hat{b}_j & \left(\lambda \le -\hat{b}_j\hat{\sigma}_j^2 + \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j)\right) \\ \{\gamma(\hat{m}_j + q\hat{\alpha}_j) - \lambda\}/\hat{\sigma}_j^2 & \left(-\hat{b}_j\hat{\sigma}_j^2 + \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j) < \lambda \le \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j)\right) \\ 0 & \left(\lambda > \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j)\right) \end{cases} \tag{5.36}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{\gamma}(\lambda) = b \tag{5.37}$$

ここで$g^{\gamma}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{\gamma}(\lambda)$とすると，$g^{\gamma}(\lambda)$は$\lambda$の非増加関数となる．このとき，$g^{\gamma}(\lambda) = b$を満たす$\boldsymbol{y}^{\gamma}(\lambda)$は同時に$\boldsymbol{y}^{\gamma}$に等しくなる．$\gamma$と$q$を固定したときの$-\hat{b}_j\hat{\sigma}_j^2 + \gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j)$および$\gamma(\hat{m}_j + q\hat{\beta}_j)$をそれぞれ$t_j^{\gamma}$, s_j^{γ}とおき，非減少順に並べた結果を次のように表す．

$$w_1^{\gamma} < w_2^{\gamma} < \cdots < w_{m(\gamma)}^{\gamma}$$

ただし，$m(\gamma)$はt_j^{γ}, s_j^{γ}の異なる値をもつ個数を表している．

補助問題$\mathbf{P}^{\gamma}_{knc}(q)$を解くアルゴリズムは次のようになる．

補助アルゴリズム

手順1 $i \leftarrow 1$, $j \leftarrow m(\gamma)$, $l \leftarrow \lceil (i+j)/2 \rceil$とおき，$\lambda \leftarrow w_l^{\gamma}$として手順2へ進む．

手順2 $g^\gamma(\lambda) < b$ならば, $j \leftarrow l$として手順3へ進む. $g^\gamma(\lambda) = b$ならば手順5へ進む. また, $g^\gamma(\lambda) > b$ならば, $i \leftarrow l$として手順3へ進む.

手順3 $j - i = 1$ならば, 手順4へ進む. $j - 1 \neq 1$ならば$l \leftarrow \lceil (i+j)/2 \rceil$とし, $\lambda \leftarrow w_l^\gamma$として手順2へ進む.

手順4 $g^\gamma(\lambda)$となる$\lambda = \lambda^\gamma$を求め, $\boldsymbol{y}^\gamma \leftarrow \boldsymbol{y}^\gamma(\lambda)$として終了する.

手順5 $\lambda^\gamma \leftarrow w_l^\gamma$, $\boldsymbol{y}^\gamma \leftarrow \boldsymbol{y}^\gamma(\lambda)$として終了する.

定理 5.4 補助アルゴリズムによって補助問題$\mathbf{P}_{knc}^\gamma$の最適解$\boldsymbol{y}^\gamma$は$O(n \log n)$の計算時間で求められる.

証明

（妥当性） g^γはy_j^γの関数であり, $w_1^\gamma, \ldots, w_m^\gamma$において関数の形が変わる. 補助アルゴリズムは$g^\gamma(\lambda)$の単調性を利用して$g^\gamma(\lambda) = b$となる可能性をもつ区間についてすべて調べている. ゆえに手順4および手順5 の終了条件によって補助アルゴリズムの妥当性は保証される.

（計算複雑度） t_i^γ, s_j^γの個数が$O(n)$であり並べ替えに$O(n \log n)$の計算時間を要するため, $w_1^\gamma, \ldots, w_m^\gamma$ を求めるための計算時間は全体で$O(n \log n)$となる. 手順1での計算時間は明らかに$O(n)$である. また, 手順2および手順3における繰り返しの回数は$O(\log n)$であり, 各繰り返しにおいて, それぞれ$O(n)$, $O(1)$の計算時間を要する. したがって全体で$O(n \log n)$の計算時間を要する. 手順4においては, 方程式$g^\gamma(\lambda) = b$ をλについて解く作業と$\boldsymbol{y}^\gamma \leftarrow \boldsymbol{y}^r(\lambda^\gamma)$を行うための時間にそれぞれ$O(n)$だけ要する. また手順5での計算時間は明らかに$O(n)$である. したがって補助アルゴリズムにより, $\mathbf{P}_{knc}^\gamma(q)$の最適解は全体で$O(n \log n)$の計算時間で求められる.

証明終

次にある固定されたqに対し, 部分問題$\mathbf{P}_{knc}(q)$を解くためのアルゴリズムについて考察する. まず$t_i^\gamma = s_j^\gamma$を満たすγとqをそれぞれγ_{ij}, q_{ij}で表すとそれらの関係は2次元における直線で与えられる. $t_k^\gamma = s_l^\gamma$を満たすγ, qも同様にしてγ_{kl}, q_{kl}と表すと, γ_{kl}, q_{kl}の関係も直

線で与えられる．よってtとsに関して大小関係が入れ替わるγとqはγ-q平面における2つの直線の交点で与えられる．それらをすべて計算し，qとγについて次のように並べ替える．

$$0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_m < q_{m+1} = R(0) \tag{5.38}$$

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_m < \gamma_{m'+1} = \infty \tag{5.39}$$

ここでm, m'はともに，それぞれの異なる値をもつ個数を表す．Γ, Qをそれぞれγ^*, q^*を含む区間とし，$\bar{\Gamma}$, $\bar{Q}$をそれぞれΓ, Qの閉包とする．また，LB, UBをそれぞれ$\gamma(q)$の上限，下限とするとき，$\mathbf{P}_{knc}(q)$を解くためのアルゴリズムは次のようになる．

補助アルゴリズム2

手順1 $\mathbf{P}^{\gamma_1}_{knc}(q)$および$\mathbf{P}^{\gamma_{m'}}_{knc}(q)$を解く． $T^q(\gamma_1) = 0$ならば，$\boldsymbol{y}(q) \leftarrow \boldsymbol{y}^{\gamma_1}(q)$として終了する． $T^q(\gamma_0) < 0$ かつ$T^q(\gamma_{m'+1}) > 0$ならば$LB \leftarrow 1$, $UB \leftarrow m'$とし，さらに$l \leftarrow \lceil (LB + UB)/2 \rceil$として手順2へ進む．$T^q(\gamma_1) > 0$ならば$\Gamma \leftarrow (0, \gamma_1)$として手順4へ進む．$T^q(\gamma_{m'}) < 0$ならば$\Gamma \leftarrow (\gamma_{m'}, \infty)$として手順4へ進む．

手順2 $T^q(\gamma_l) = 0$ならば$\boldsymbol{y}^* \leftarrow \boldsymbol{y}^{\gamma_l}$ として終了する．$T^q(\gamma_l) < 0$ならば，$LB \leftarrow l$として手順3へ進む．$T^q(\gamma_l) > 0$ならば$UB \leftarrow l$として手順3へ進む．

手順3 $LB - UB = 1$ならば$\Gamma \leftarrow (\gamma_{LB}, \Gamma_{LB+1})$ として手順4へ進む．$LB - UB \neq 1$ならば$l \leftarrow \lceil (LB + UB)/2 \rceil$ として手順2へ戻る．

手順4 以下の(1) ~ (4)の手続きを行う．

(1) $k \leftarrow 1$として(b)へ進む．

(2) $\lambda \in [w^\gamma_k, w^\gamma_{k+1}]$に対して$\boldsymbol{y}^\gamma(\lambda)$および$g^\gamma(\lambda)$を計算し，$g^\gamma(\lambda) = b$を解いて$\lambda = d_k\gamma + h_k$を求める．さらに不等式

$$w^\gamma_k \leq d_k\gamma + h_k \leq w^\gamma_{k+1}$$

を$\gamma \in \Gamma$に関して解き，解集合Γ_kを求める．$\Gamma_k = \emptyset$ならば$\overline{\Gamma}_k = [e_k, e^k]$を計算し，(3)へ進む．

(3) $T^q(e^k) = 0$ならば$\lambda_k \leftarrow d_k e^k + h_k$とし$\boldsymbol{y}(q) \leftarrow \boldsymbol{y}^{e^k}(\lambda_k, q)$として終了する．$T^q(e_k) = 0$ならば$\lambda_k \leftarrow d_k e_k + h_k$とし$\boldsymbol{y}(q) \leftarrow \boldsymbol{y}^{e_k}(\lambda_k, q)$として終了する．$T(e_k) < 0$かつ$T(e^k) > 0$ならば(4)に進む．$T^q(e_k) > 0$ もしくは$T^q(e^k) < 0$ならば(5)に進む．

(4) $\lambda = d_k\gamma + h_k$を$\boldsymbol{y}^{\gamma}(\lambda)$に代入し，$\gamma(q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j y_j^{\gamma(q)}}(\lambda) = 0$ を満たすγ^*を求め，$\boldsymbol{y}(q) \leftarrow \boldsymbol{y}^{\gamma(q)}$として終了する．

(5) $k \leftarrow k+1$として(4)へ戻る．

補助アルゴリズム2に対して次の定理が成り立つ．

定理 5.5 補助アルゴリズム2によって$\mathbf{P}_{knc}(q)$の最適解$\boldsymbol{y}(q)$は$O(n^4 \log n)$の計算時間で求められる．

証明

上記の議論から妥当性は明らかであるため計算時間についてのみ示す．まず，s_{ij}およびt_{kl}の個数は$O(n^4)$で抑えられ，並べ替えるのに$O(n^4 \log n)$の計算時間を要するため，$\gamma_1, \ldots .\gamma_m$の計算には$O(n^4 \log n)$の計算時間が必要である．それぞれの$\gamma_i$，$i = 1, \ldots, m$のおいて補助アルゴリズムを利用しているが，その計算時間は定理5.4から$O(n \log n)$である．また，$T^q(\gamma_1)$および$T^q(\gamma_m)$の正負を調べるのに$O(n)$の計算時間が必要なため，手順1における計算時間は$O(n \log n)$となる．手順2および手順3での繰り返し回数は$O(\log n)$であり，それぞれの繰り返しにおける計算時間は$O(n \log n)$である．ゆえに手順2および手順3に必要な計算時間は$O(n^2 \log n)$である．手順4において調べる区間の個数は$O(n)$であり，また，調べるのにそれぞれ$O(n)$の計算時間が必要なため，全体として$O(n^2)$の計算時間を要する．以上のことから，補助アルゴリズム2での計算時間は$O(n^4 \log n)$となる．

証明終

q^*を探索するために，qの添字の上限と下限をそれぞれ，UB, LBとする．このとき，元の問題$\mathbf{P}_{knc}$を解くアルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム

手順1 $LB \leftarrow 0$とし，$\mathbf{P}_{knc}(q_0)$を解く．$\mu_G(Z_{q_0}) \geq R(q_0)$ならば$\boldsymbol{y}^* \leftarrow \boldsymbol{y}^{(0)}$として終了する．

そうでなければ手順2へ進む．

手順2 $UB \leftarrow n(p)+1$ とし，$\mathbf{P}_{knc}(q_{n(p)+1})$ を解く．$\mu_G(Z_{q_{n(p)+1}}) < R(q_{n(p)+1})$ ならば $\boldsymbol{y}^* \leftarrow \boldsymbol{y}^{(n(p)+1)}$ として終了する．そうでなければ手順3へ進む．

手順3 $UB - LB = 1$ ならば $\boldsymbol{y}^* \leftarrow \boldsymbol{y}^{(LB)}$ として終了する．そうでなければ $k \leftarrow \lceil (LB + UB)/2 \rceil$ として手順4へ進む．

手順4 $\mathbf{P}_{knc}(q_k)$ を解く．$\mu_G(Z_{q_k}) > R(q_k)$ ならば $UB \leftarrow k$ として手順3へ戻る．$\mu_G(Z_{q_k}) < R(q_k)$ ならば $LB \leftarrow k$ として手順3へ戻る．$\mu_G(Z_{q_k}) = R(q_k)$ ならば $\boldsymbol{y}^* \leftarrow \boldsymbol{y}^{(k)}$ として終了する．

定理 5.6 上記のアルゴリズムによって $\mathbf{P}'_{knc}$ の最適解は $O(n^4 \log^2 n)$ の計算時間で求められる．

証明

（妥当性）手順3および手順4においては値 q^* を2分探索によって求めている．定理5.1より上記のアルゴリズムの終了条件が妥当であることが示される．

(計算複雑度) 手順1および手順2においては固定された q に対して最適解を補助アルゴリズム2を実行しているため，計算時間は $O(n^4 \log n)$ で抑えられる．手順4における繰り返し回数は $O(\log n)$ であり，それぞれの繰り返しにおいて補助アルゴリズム2を実行しているため，計算時間は $O(n^4 \log^2 n)$ となる．よって，全体としては $O(n^4 \log^2 n)$ となる．

証明終

5.3 決定変数が離散値をとる場合

本節ではナップサック問題の決定変数 $\boldsymbol{x}$ が離散値をとる場合について考察する．

$$\mathbf{P}_{knd1} \ : \quad \text{maximize} \quad \boldsymbol{cx}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.40}$$

$$x_j, \ j = 1, \ldots, n \ \text{は整数} \tag{5.41}$$

記号の定義については$\mathbf{P}_{knc}$と同様であるとする．$\mathbf{P}_{knd1}$の意思決定法として次の問題を考える．

$$\mathbf{P}_{knd2} \quad : \quad \text{maximize} \quad h \tag{5.42}$$

$$\text{subject to} \quad Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq \alpha, \tag{5.43}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.44}$$

$$x_j,\ j = 1, \ldots, n \text{ は整数} \tag{5.45}$$

αは意思決定者によって与えられる確率レベルで$\alpha > 1/2$とする．問題$\mathbf{P}_{knc2}$と同様にして，$\mathbf{P}_{knd2}$は次の$\mathbf{P}_{knd3}$に変形される．

$$\mathbf{P}_{knd3}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{5.46}$$

$$\text{subject to} \quad Pr\left(\sum_{j=1}^{n}\{d_j(\omega) + R^*(h)\beta_j\}x_j \geq \mu_G^*(h)\right) \geq \alpha \tag{5.47}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.48}$$

$$x_j,\ j = 1, \ldots, n \text{ は整数} \tag{5.49}$$

正規分布の性質を利用することにより，$\mathbf{P}_{knc3}$と同様にして問題$\mathbf{P}_{knd3}$は次の等価確定問題に変換される．

$$\mathbf{P}_{knd4}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{5.50}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}\{m_j + R^*(h)\beta_j\}x_j - K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_i^2 x_i} \geq \mu_G^*(h) \tag{5.51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.52}$$

$$x_j,\ j = 1, \ldots, n \text{ は整数} \tag{5.53}$$

問題$\mathbf{P}_{knd4}$を解くために，$q = R^*(h)$として次の部分問題を導入する．

$$\mathbf{P}_{knd}(q) \quad : \quad \text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n}\{m_j + q\beta_j\}\, x_j - K_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2} \tag{5.54}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.55}$$

$$x_j,\ j=1,\ldots,n \ \text{は整数} \tag{5.56}$$

部分問題$\mathbf{P}_{knd}(q)$の最適解を$\boldsymbol{x}(q)$, 最適値をZ_qとする．また，h^*を$\mathbf{P}_{knd4}$の最適値とし，$q^* = R^*(h^*)$とすると定理5.1と同様にして次の定理が成り立つ．

定理 5.7 $\boldsymbol{x}(q) = \boldsymbol{x}^*$となるための必要十分条件は$Z_q = -\mu_G^*(R(q))$が成り立つことである．

証明については定理5.1と同様にして示される．

部分問題$\mathbf{P}_{knd}(q)$を効率的に解くためにさらに次の補助問題$\mathbf{P}_{knd}^{\gamma}(q)$を導入する．

$$\mathbf{P}_{knd}^{\gamma}(q) \quad : \quad \text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma \{m_j + q\beta_j\} x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \tag{5.57}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.58}$$

$$x_j,\ j=1,\ldots,n \ \text{は整数} \tag{5.59}$$

問題$\mathbf{P}_{knd}^{\gamma}(q)$の最適解を$\boldsymbol{x}^{\gamma}(q)$とし，$T^q(\gamma) \triangleq \gamma - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 (x_j^{\gamma}(q))^2}$を定義する．さらに$T^q(\gamma) = 0$を満たす$\gamma$を$\gamma(q)$で表すとき，次の定理が成立する．

定理 5.8

1. $T^q(\gamma) < 0 \Longleftrightarrow \gamma < \gamma(q)$
2. $T^q(\gamma) = 0 \Longleftrightarrow \gamma = \gamma(q)$
3. $T^q(\gamma) > 0 \Longleftrightarrow \gamma > \gamma(q)$

証明については定理5.3と同様にして示される．$\gamma q = q'$とおいて次の問題を考える．

$$\mathbf{P}_{knd}^{\gamma}(q') \quad : \quad \text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} \{\gamma m_j + q'\beta_j\} x_j - \frac{1}{2}K_{\alpha}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \tag{5.60}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \tag{5.61}$$

$$x_j,\ j=1,\ldots,n \ \text{は整数} \tag{5.62}$$

この問題の最適解は，以下で示すパラメトリックな動的計画法を繰り返し解くことにより得ることができる．$f_k^{\gamma q}(y)$をk番目までの品物を用いて合計yだけ詰め込んだときの目的関数の最適値とする．このとき，一般に次のことが成り立つ．

$$f_k^{\gamma q}(y) = \max_{x_k=0,1,\ldots,[y/a_k]} \left\{ (\gamma m_k + q'\beta_k)x_k - \frac{1}{2}K_\alpha \sigma_k^2 x_k^2 + f_{k-1}^{\gamma q}(y - a_k x_k) \right\} \tag{5.63}$$

上の漸化式を満たす最適解$x_k^{\gamma q}$は次のようになる．

$$x_k^{\gamma q} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_k^{\gamma q}(y) = f_{k-1}^{\gamma q}(y) \tag{5.64}$$

$$x_k^{\gamma q} > 0 \quad \Rightarrow \quad f_k^{\gamma q}(y) = \gamma m_k + q'\beta_k - \frac{1}{2}k_\theta \sigma_k^2 + f_k^{\gamma q}(y - a_k) \tag{5.65}$$

$f_0^{\gamma q}(y) = 0,\ y = 0, 1, \ldots, b$が成り立つことから，

$$\begin{aligned} f_k^{\gamma q}(y) \quad &= \quad \max\left\{ f_{k-1}^{\gamma q}(y),\ \gamma m_k + q'\beta_k - \frac{1}{2}K_\alpha \sigma_k^2 + f_k^{\gamma q}(y - a_k) \right\}, \\ & \qquad y = 0, 1, \ldots, b, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

アルゴリズムを構築するための準備として次の指示関数を$p_k^{\gamma q}(y)$を定義する．

$$p_k^{\gamma q}(y) = \begin{cases} 0, & f_k^{\gamma q}(y) = f_{k-1}^{\gamma q}(y) \text{のとき} \\ 1, & f_k^{\gamma q}(y) > f_{k-1}^{\gamma q}(y) \text{のとき} \end{cases}$$

このとき，問題$\mathbf{P}_{knd}(q)$を解く補助アルゴリズムは次のようになる．

補助アルゴリズム

手順1 $k = 0$，また$y = 0, 1, \ldots, b$に対して$f_0^{\gamma q}(y) = 0$とし，手順2へ進む．

手順2 $k = k + 1$とし，$y < a_k$を満たすすべてのyに対し，$f_k^{\gamma q}(y) = f_{k-1}^{\gamma q}(y)$, $p_k^{\gamma q}(y) = 0$とする．$y = a_k$として手順3へ進む．

手順3 $V = \gamma m_k + q'\beta_k - \frac{1}{2}K_\alpha \sigma_k^2 + f_k^{\gamma q}(y - a_k)$を計算する．$V > f_{k-1}^{\gamma q}(y)$ならば$f_k^{\gamma q}(y) = V$とし，$p_k^{\gamma q}(y) = 1$とする．そうでなければ$f_k(y) = f_{k-1}(y)$とし，$p_k(y) = 0$とする．手順4へ進む．

手順4 $y < b$ならば，$y = y + 1$として手順3へ戻る．$y = b$ならば手順5へ進む．

手順5 $k < n$ならば手順2へ戻る．$k = n$ならば$z = 0$とし手順6に進む．

手順6 $p_k^{\gamma q}(y)=1$ ならば $z=z+1$ とし, 手順7に進む. $p_k^{\gamma q}(y)=0$ ならば手順8に進む.

手順7 $y=y-a_k$ とし, 手順6に戻る.

手順8 $z=x_k^{\gamma q}$ とし, $z=0$ とする. $k>1$ ならば $k=k-1$ とし, 手順6に戻る. $k=1$ ならば終了する.

次に元の問題を解くアルゴリズムを考える. LB, UB をそれぞれ $\gamma(q)$ の上限, 下限とするとき, $\mathbf{P}_{knd}(q)$ を解くアルゴリズムは次のようになる.

アルゴリズム

手順1 $LB \leftarrow 0$ とし, $\mathbf{P}_{knd}(q_0)$ を解く. $\mu_G(-Z_{q_0}) \geq R(q_0)$ ならば $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(0)}$ として終了する. そうでなければ手順2へ進む.

手順2 $UB \leftarrow n(p)+1$ とし, $\mathbf{P}_{knd}(q_{n(p)+1})$ を解く. $\mu_G(-Z_{q_{n(p)+1}}) < R(q_{n(p)+1})$ ならば $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(n(p)+1)}$ として終了する. そうでなければ手順3へ進む.

手順3 $UB-LB=1$ ならば $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(LB)}$ として終了する. そうでなければ $k \leftarrow \lceil (LB+UB)/2 \rceil$ として手順4へ進む.

手順4 $\mathbf{P}_{knd}(q_k)$ を解く. $\mu_G(-Z_{q_k}) > R(q_k)$ ならば $UB \leftarrow k$ として手順3へ戻る. $\mu_G(-Z_{q_k}) < R(q_k)$ ならば $LB \leftarrow k$ として手順3へ戻る. $\mu_G(-Z_{q_k}) = R(q_k)$ ならば $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(k)}$ として終了する.

上記のアルゴリズムでは, 補助問題 $\mathbf{P}_{knd}(q)$ を動的計画法を用いて繰り返し解いている. 反復が進むにつれて最適な q の存在する範囲が徐々に小さくなり, 有限回で手順3の終了条件を満たす最適解が求まる.

5.4 結言

本章では目的関数の係数がファジィランダム変数で与えられるナップサック問題において, 可能性測度に関する機会制約条件計画問題を考えた. まず, 決定変数が連続値をとる場合についてHelgasonおよびIshiiらの方法を拡張した効率的なアルゴリズムを構築した. 次に決定変数が離散値をとる場合について考察した. まず, 補助問題を導入し, 元の問題と

の関係を示すと共に，問題の構造を十分に利用した効率的なアルゴリズムを構築した．このアルゴリズムは動的計画法に基づいているが，不確実・不確定性が同時に存在する状況下における様々な組合せ最適化問題に拡張が可能であると考えられる．

第6章

不確実・不確定なコストをもつスパニングツリー問題

6.1　緒言

本章ではネットワークにおいて枝に付随するコストがファジィランダム変数であるスパニングツリー問題を考える．スパニングツリー問題とはネットワーク上の全ての点を相互に結ぶ最小限の枝の集合を求める問題であり，コスト最小化を目的とする場合には，最小スパニングツリー問題と呼ばれる問題となる．例としては，有線テレビのケーブル配線や地域冷暖房の配管のように既存の道路に沿ってしか配線・配管ができず，またコストが配線・配管の長さに比例する場合におけるコスト最小化問題が挙げられる．最小スパニングツリー問題はスパニングツリー問題の中でも最も基本的かつ重要な問題であり，コストが確定値で与えられている場合の解法については，いくつかの効率的なアルゴリズムが与えられている [2, 15, 41, 62, 78]．また，コストが確率変数で与えられている場合については，Ishiiらによって意思決定法および効率的な解法が与えられており，総和コストに関する機会制約条件計画問題として定式化したモデル [32] や目標値とともに確率レベルも同時に最大化しようとするモデル [40] が提案されている．さらに, コストが可能性変数で表される場合における解法は伊藤ら [34] によって導入され, 特にコストがファジィ数で与えれる場合については著者らによってより効率的なアルゴリズムが提案されている [36].

これまではコストが確率変数もしくはファジィ集合で表される場合のみが考えられてきたが, 現実にはランダム性とファジィ性の両方が情報として与えられることもある．例えば,

コストが景気のよし悪しによって変動し, その景気の状態変化が確率的だとすれば, 景気のよし悪しというファジィな状態とその状態のランダムな変化により, コストはファジィランダム変数で表すことができる. まず, 6.2節ではそのような状況下での意思決定問題としてファジィランダムスパニングツリー問題を考える. 次に, 6.3節ではボトルネック型スパニングツリー問題を扱う. ボトルネック型スパニングツリー問題とはスパニングツリーを構成する枝のコストの最大値を最小化する問題で, コストが確定値で与えられる場合には通常の最小スパニングツリー問題のアルゴリズムを用いて解くことが可能である. また, Ishiiらによってコストが確率変数であるの意思決定法および解法が提案されている [33]. この問題は情報量が確率的に変動する場合の通信網の設計に有効であるが, 現実には, 情報量が確率的に変動する場合でも実現値がはっきりとはわからず, 熟練者によっておおよその値がわかっていることもある. ここでは, 可能性測度最大化問題と可能性・確率測度同時最大化問題の2つのモデルを提案し, それぞれに対して効率的なアルゴリズムを構築する. 最後に6.4節で本章における研究をまとめる.

6.2　ファジィランダムスパニングツリー問題

$G=(N,E)$を点集合$N=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$と枝集合$E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}\subset N\times N$からなる無向グラフとし, e_iにはコストc_iが設定されているものとする. Gにおけるスパニングツリー$T=T(N,S)$は$S\subseteq E$かつ閉路を含まない連結部分グラフである.

Tは次のように0-1変数の$x_1,x_2,\dots,x_m$で表すことができる.

$$\begin{aligned} T\ :\ \ & x_i=1,\ \ e_i\in S \\ & x_i=0,\ \ e_i\notin S \end{aligned}$$

以下ではXを$T(N,S)$に対応する0-1ベクトルの集合とし, Xをスパニングツリーの集合とみなす. このとき, 最小スパニングツリー問題は次のように定式化される.

$$\mathbf{P}_{st1}:\quad \text{minimize}\ \ \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \tag{6.1}$$

$$\text{subject to}\ \ \boldsymbol{x}\in X \tag{6.2}$$

ここで, $\boldsymbol{c}=(c_1,\dots,c_m)$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)^t$であり, それぞれの$c_i$は次のメンバシップ関数

$\mu_{C_i(\omega)}$で特性づけられるファジィランダム変数であるとする.

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i) = \max\left\{L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\alpha_i}\right),\ 0\right\} \tag{6.3}$$

ただし，Lは$\mathbf{R} \to [0,\ 1]$である単調減少連続関数で$L(x) = L(-x)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$ かつ $L(0) = 1$を満たすものとする. また, $d_i(\omega)$は平均μ_i, 分散σ_i^2をもつ正規分布に従う互いに独立な確率変数とする. すなわち, ファジィ数において中心が確率変数になっている場合であり, $d_i(\omega)$に伴って$\mu_{C_i(\omega)}(c_i)$も確率的に変動する.

$y = \boldsymbol{cx}$とおくと，yは次のメンバシップ関数で特性づけられるファジィランダム変数$Y(\omega)$となる.

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \max\left\{L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{m} d_i(\omega)x_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}\right),\ 0\right\} \tag{6.4}$$

次に目的関数に関する目標値を “だいたいy_1以下である” とし, それをメンバシップ関数μ_Gで特性づけられるファジィ集合Gで表す. ただし，μ_Gは$0 \leq y \leq y_1$で1であり，$y \geq y_1$において単調減少である連続関数とする. 総コストを表すファジィランダム変数$Y(\omega)$のメンバシップ関数$\mu_{Y(\omega)}(y)$を可能性分布とみなすとき，$\mu_{Y(\omega)}(y)$の下でGである可能性測度は次のように与えられる.

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) \triangleq \sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\} \tag{6.5}$$

問題$\mathbf{P}_{st1}$の意思決定法として次の$\mathbf{P}_{st2}$を考える.

$$\mathbf{P}_{st2}:\quad \text{maximize}\ \ h \tag{6.6}$$

$$\text{subject to}\ Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h\right) \geq \alpha \tag{6.7}$$

$$\boldsymbol{x}\ \in\ X \tag{6.8}$$

ここでPrは確率測度を表し, 確率レベルαは$1/2 < \alpha < 1$を満たす確定値とする. $\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$を変形すると

$$\sup_y \min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\} \geq h \tag{6.9}$$

$$\Leftrightarrow\quad \exists\, y : \mu_{Y(\omega)}(y) \geq h,\ \mu_G(y) \geq h \tag{6.10}$$

$$\Leftrightarrow\quad \exists\, y : L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{m} d_i(\omega)x_i}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i}\right) \geq h,\ \mu_G(y) \geq h \tag{6.11}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, y : y \geq \sum_{i=1}^{m} d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i,\ y \leq \mu_G^*(h) \tag{6.12}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i \leq \mu_G^*(h) \tag{6.13}$$

よって，(6.13) を (6.7) に代入すると，$\mathbf{P}_{st2}$は次の$\mathbf{P}_{st3}$になる．

$$\mathbf{P}_{st3}: \quad \text{maximize} \ \ h \tag{6.14}$$

$$\text{subject to} \quad Pr\left(\sum_{i=1}^{m}\{d_i(\omega) - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i \leq \mu_G^*(h)\right) \geq \alpha \tag{6.15}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \tag{6.16}$$

ただし, $L^*(\cdot)$および$\mu_G^*(\cdot)$は擬逆関数であり次のように表される.

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup\{r | L(r) > h, r \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases} \tag{6.17}$$

$$\mu_G^*(h) = \sup\{r | \mu_G(r) \geq h\} \tag{6.18}$$

正規分布の性質から

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} d_i x_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i}} \tag{6.19}$$

は標準正規分布N(0,1) に従う確率変数となる．K_αをα分位点とすると (6.7) は次の等価確定条件に変換される．

$$\sum_{i=1}^{m}\{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i + K_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} - \mu_G^*(h) \leq 0 \tag{6.20}$$

となる．ゆえに$\mathbf{P}_{st2}$は次の確定問題$\mathbf{P}_{st}$と等価になる．

$$\mathbf{P}_{st}: \quad \text{maximize} \ \ h \tag{6.21}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m}\{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i + K_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2 x_i} \leq \mu_G^*(h) \tag{6.22}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \tag{6.23}$$

解法の便宜上, $L^*(h) = q$とおいた次の問題を考える.

$$\mathbf{P}'_{st}: \quad \text{minimize} \ \ q \tag{6.24}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - q\alpha_i\} x_i + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i} \leq \mu_G^*(L(q)) \tag{6.25}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \tag{6.26}$$

$L(\cdot)$ の単調非増加性より $L(q)$ を最大化するためには q を最小化すればよいことになる．問題 $\mathbf{P}_{st}^{'}$ を解くために次の部分問題を導入する．

$$\mathbf{P}_{st}^{q}: \quad \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - q\alpha_i\} x_i + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i} \tag{6.27}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in X \tag{6.28}$$

問題 $\mathbf{P}_{st}^{q}$ の最適解を $\boldsymbol{x}(q)$ とし，最適値を $z(\boldsymbol{x}, q)$ とする．また，$\mathbf{P}_{st}$ の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とし，最適値を q^* とする．このとき，部分問題 $\mathbf{P}_{st}^{q}$ と元の問題 $\mathbf{P}_{st}$ に対して次の補題が成り立つ．

補題 6.1 問題 $\mathbf{P}_{st}^{q}$ の最適解が $\mathbf{P}_{st}$ の最適解である必要十分条件は $\mathbf{P}_{st}^{q}$ における最適解 $\boldsymbol{x}(q)$ に対して $z(\boldsymbol{x}^*,\ q^*) = \mu_G^*(L(q^*))$ が成り立つことである．

証明

$z(\boldsymbol{x}^*, q^*) = \mu_G^*(L(q^*))$ でないと仮定する．このとき，q^* における $\boldsymbol{x}^*$ の実行可能性より $z(\boldsymbol{x}^*,\ q^*) < \mu_G^*(L(q^*))$，すなわち

$$\sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(q^*)\alpha_i\} x_i^* + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^*} < \mu_G^*(L(q^*)) \tag{6.29}$$

が成り立つ．ところが L^* と μ_G^* の単調減少性と連続性から $z(\boldsymbol{x}^*,\ q)$ に対して $q^* > q^{'}$ が存在する．このことは q^* の最適性に矛盾する．

逆に $\mathbf{P}_{st}^{q}$ の最適解を $(\boldsymbol{x}^*,\ q^*)$ とし，$z(\boldsymbol{x}^*,\ q^*) = \mu_G^*(L(q^*))$ を満たすものとする．これが $\mathbf{P}_{st}$ の最適解でないとすると，次の関係式を満たす $(\boldsymbol{x}^{'},\ q^{'})$ が存在する．

$$q^* > q^{'} \tag{6.30}$$

かつ

$$\sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - q\alpha_i\} x_i^{'} + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^{'}} \leq \mu_G^*(L(q^{'})) \tag{6.31}$$

ところが $(\boldsymbol{x}^*,\ q^*)$ の最適性と L^*, μ_G^*の単調減少性により次の関係式が成り立つ.

$$\mu_G^*(L(q')) < \mu_G^*(L(q^*)) = \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - q^*\alpha_i\} x_i^* + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^*} \quad (6.32)$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - q^*\alpha_i\} x_i' + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i'} \quad (6.33)$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \left\{\mu_i - q'\alpha_i\right\} x_i' + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i'} \quad (6.34)$$

これは (6.31) 式に矛盾する.

証明終

問題$\mathbf{P}_{st}^q$は目的関数に非線形の項を含んでいるが, この問題を解くために, 次のパラメータλを導入した問題を考える.

$$\mathbf{P}_{st}(q,\lambda): \quad \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_i - q\alpha_i + \lambda K_\alpha \sigma_i^2\right) x_i \quad (6.35)$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in X \quad (6.36)$$

q一定のとき, $\mathbf{P}_{st}(q,\lambda)$ は一つのパラメータλをもつパラメトリック最小スパニングツリー問題となり, Fernandez-Baca ら [12] による効率的な解法が提案されている. しかし, 本問題ではqも探索する必要があるためにそのまま適用することはできない. そこで, 次に$\mathbf{P}_{st}$の解法を考える. まず, 次の 3 目的問題を考える.

$$\mathbf{P}_{3opt}: \quad \text{minimize} \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i \quad (6.37)$$

$$\text{maximize} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \quad (6.38)$$

$$\text{minimize} \sum_{i=1}^{m} K_\alpha \sigma_i^2 x_i \quad (6.39)$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{x} \in X \quad (6.40)$$

任意の q, λに対して $\mathbf{P}_{st}(q,\lambda)$ の最適解は$\mathbf{P}_{3opt}$の非劣解集合に属する. また, Geetha ら [16] によって非劣解のうち目的空間において凸包の端点に相当するものだけが $\mathbf{P}_{st}$の最適解の候

補になることが示されている．したがって，まず$\mathbf{P}_{3opt}$の非劣解集合を求めるアルゴリズムを考える．次に示すアルゴリズムはGeethaら[16]の方法が基になっており，それを応用した伊藤ら[35]の方法を3目的計画問題に拡張したものである．

非劣解集合を求めるアルゴリズム

手順1 $k=1$とする．$z_1^{(1)}=\min_{x\in X}\sum_{i=1}\mu_i x_i$を求め，対応する$z_2^{(1)}=\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$，$z_3^{(1)}=\sum_{i=1}^m K_\alpha \sigma_i^2 x_i$を計算する．$(z_1^{(1)},z_2^{(1)},z_3^{(1)})$と対応するスパニングツリー$\boldsymbol{x}^{(1)}$を保持する．$k=2$とし，同様にして$z_2^{(2)}=\max_{\boldsymbol{x}\in X}\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$と対応する$z_1^{(2)}=\sum_{i=1}^m \mu_i x_i$，$z_3^{(2)}=\sum_{i=1}^m K_\alpha \sigma_i^2 x_i$とその時の解$\boldsymbol{x}^{(2)}$を求める．保持して手順3へ進む．$k=3$とし，また同様に，$z_3^{(3)}=\min_{\boldsymbol{x}\in X}\sum_{i=1}^m K_\alpha \sigma_i^2 x_i$と対応する$z_1^{(3)}=\sum_{i=1}^m \mu_i x_i$，$z_2^{(3)}=\sum_{i=1}^m K_\alpha \sigma_i^2 x_i$を求め，その時の解$\boldsymbol{x}^{(3)}$を求める．集合$DS=\{1,2,3\}$を定義して手順2へ進む．

手順2 $k=k+1$とする．ある$\boldsymbol{x}^{(s)},\boldsymbol{x}^{(t)},\boldsymbol{x}^{(u)}$を選択し，

$$q_{(s,t,u)} = \frac{(z_1^{(t)}-z_1^{(u)})(z_3^{(s)}-z_3^{(t)})-(z_1^{(s)}-z_1^{(t)})(z_3^{(t)}-z_3^{(u)})}{(z_2^{(t)}-z_2^{(u)})(z_3^{(s)}-z_3^{(t)})-(z_2^{(s)}-z_2^{(t)})(z_3^{(t)}-z_3^{(u)})} \tag{6.41}$$

$$\lambda_{(s,t,u)} = \frac{(z_1^{(t)}-z_1^{(u)})(z_2^{(s)}-z_2^{(t)})-(z_1^{(s)}-z_1^{(t)})(z_2^{(t)}-z_2^{(u)})}{(z_2^{(t)}-z_2^{(u)})(z_3^{(s)}-z_3^{(t)})-(z_2^{(s)}-z_2^{(t)})(z_3^{(t)}-z_3^{(u)})} \tag{6.42}$$

を計算し，次の問題を解く．

$$\mathbf{P}^{(s,t,u)}: \quad \text{minimize} \quad \sum_{i=1}^m \left(\mu_i - q_{(s,t,u)}\alpha_i + \lambda_{(s,t,u)} K_\alpha \sigma_i^2\right) x_i \tag{6.43}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{x}\in X \tag{6.44}$$

この問題の最適解を$\boldsymbol{x}^{(k)}$とする．$\boldsymbol{x}^{(s)}$がこの問題の最適解ならば$\boldsymbol{x}^{(k)}$を放棄し，$DS=DS\backslash\{(s,t,u)\}$として手順3へ進む．そうでなければ

$$DS=DS\cup\{(s,t,k),(s,k,u),(k,t,u)\}\backslash\{(s,t,u)\}$$

として$\boldsymbol{x}^{(k)}$を保持して手順3へ進む．

手順3 $DS=\emptyset$なら，終了する．そうでなければ手順2へ戻る．

上記のアルゴリズムは目的空間の凸包の端点に対応する非劣解を順に効率良く求めているが，この非劣解の個数は3次元におけるk-集合問題と深い関わりがある．k-集合問題とはユークリッド空間において，ある点集合をk個とそれ以外の点に分割ときの場合の数を求める問題であり，本問題においては，非劣解の個数がn個の点をm個と$n-m$個に分割するときの場合の数に対応している．$T_{MST}(n,m)$をスパニングツリーを求めるための計算時間とし，$N_{kset}(m)$をm-集合の個数の上界とするとき次の定理が成り立つ．

定理 6.2　上記のアルゴリズムによって非劣解集合は$O(T_{MST}\cdot N_{kset}(m))$の計算時間で求めることができる．

証明

上記の議論から妥当性は明らかであるため，計算時間についてのみ示す．手順1においては3つの目的関数のうちある一つの目的を最適化するスパニングツリーを求めているため，通常のスパニングツリーのアルゴリズムを用いればよい．ゆえに手順1での計算時間は$O(T_{MST}(m,n))$である．手順2での繰り返し回数は3次元目的空間の3次元におけるm-集合の個数，即ち，$N_{kset}(m)$で抑えられる．ゆえに全体で$O(T_{MST}\cdot N_{kset}(m))$となる．

証明終

Dey [6]によってm-集合の個数の上界は$O(m^{8/3})$であることが示されており，Yaoら[4]などのアルゴリズムによってスパニングツリーを求めるならば非劣解を求めるアルゴリズムの計算時間は全体で$O(m^{11/3}\log n\log\log n)$となる．

求められた非劣解の個数を$n(s)$とする．$\boldsymbol{x}^{(k)}, i=1,\ldots,n(s)$に対して次の値を計算する．

$$
\begin{aligned}
a^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i^{(k)} + K_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2 x_i^{(k)}} \\
b^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i^{(k)}
\end{aligned}
$$

さらに次の関数を定義する．

$$
\begin{aligned}
y^{(k)}(q) &= a^{(k)} - qb^{(k)} \\
f(q) &= \min_k y^{(k)}(q)
\end{aligned}
$$

$y^{(k)}$がqの線形関数であるから$f(q)$はqに関して区分的線形かつ狭義減少であることがわかる．$f(q)$の区分点を求め，次のように非減少順に並べ替える．

$$0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_{n(p)} < q_{n(p)+1} = L^*(0)$$

ここで$n(p)$は求めた区分点の個数を表す．また，$f(q_l)$, $l = 0, \ldots, n(p)+1$ を与えるyに対応する非劣解を$\boldsymbol{x}^{(l)}$, $l = 0, \ldots, n(p)+1$として改めて番号付けする．求めたqの集合をQとし，LB, UBをそれぞれ求めたlの下限と上限とすると，$\mathbf{P}_{st}$を解くアルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム

手順1 非劣解集合を求め，集合Qを求める．

手順2 $LB \leftarrow 0$とし，$\mu_G(f(q_0)) \geq L(q_0)$ならば$\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(0)}$として終了する．

そうでなければ手順3へ進む．

手順3 $UB \leftarrow n(p)+1$とし，$\mu_G(f(q_{n(p)+1})) < L(q_{n(p)+1})$ ならば終了する．そうでなければ手順4へ進む．

手順4 $UB - LB = 1$ならば$\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(LB)}$として終了する．そうでなければ$k \leftarrow \lceil (LB + UB)/2 \rceil$として手順5へ進む．

手順5 $\mu_G(f(q_k)) > L(q_k)$ ならば$UB \leftarrow k$として手順4 へ戻る．$\mu_G(f(q_k)) < L(q_k)$ならば$LB \leftarrow k$として手順4へ戻る．$\mu_G(f(q_k)) = L(q_k)$ならば$\boldsymbol{x}^* \leftarrow \boldsymbol{x}^{(k)}$として終了する．

定理 6.3 上記のアルゴリズムによって$\mathbf{P}_{st}$の最適解は多くとも$O(T_{MST} \cdot N_{kset}(m))$の計算時間で求められる．

証明

上記の議論からアルゴリズムの妥当性は明らかである．手順1において非劣解集合を求めるのに必要な時間は定理6.2から$O(T_{MST} \cdot N_{kset}(m))$であり，$Q$を求めるのに必要な計算時間はMegiddo [49] の方法により$O(m \log n)$である．手順3から5においては，集合Qの中から二分探索によってq^*を求めているが，Q

の個数は$O(m)$であることから計算時間は$O(\log m)$で抑えられる．よって，全体の計算時間は

$$\max\{O(T_{MST}\cdot N_{kset}(m)), O(m\log n)\} = O(T_{MST}\cdot N_{kset}(m))$$

となる．

証明終

6.3　ボトルネック型ファジィランダムスパニングツリー問題

本節では次のようなボトルネック型スパニングツリー問題を考える．

$$\mathbf{P}_{bs}: \quad \text{minimize } \max_i c_i x_i \tag{6.45}$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{x} \in X \tag{6.46}$$

ここで，c_i は次のメンバシップ関数に制限されるファジィランダム変数とする．

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i) = L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\alpha_i}\right) \tag{6.47}$$

ただし，L は型関数で次の区分的線形関数である．

$$L(t) = \max\left\{0,\ 1 - \frac{t}{t_0}\right\} \tag{6.48}$$

t_0は正数であり，それぞれの$d_i(\omega)$は平均μ_j, 分散σ_j^2をもつ正規分布に従う互いに独立な確率変数であるとする．

スパニングツリーを形成する枝のコストの最大値に対して“だいたいf_1以下である”というファジィ目標を設定し, メンバシップ関数μ_Gで特性づけられるファジィ集合で表す．ここでμ_Gは次の条件を満たす区分的線形関数とする．

$$\mu_G(c_i) \;=\; \begin{cases} 1 & (c_i \le f_1) \\ \dfrac{c_i - f_1}{f_0 - f_1} & (f_1 < c_i < f_0) \\ 0 & (c_i \ge f_0) \end{cases} \tag{6.49}$$

コストc_iを表すファジィ集合のメンバシップ関数を可能性分布と見なすとき，可能性分布$\mu_G(y)$の下でだいたいf_1以下である可能性測度は次のように与えられる．

$$\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(G) = \sup_{c_i} \min\{\mu_{C_i(\omega)}(c_i)\ \mu_G(c_i)\} \tag{6.50}$$

以下では可能性測度最大化問題と可能性・確率測度最大化問題の2つのモデルを扱う．

6.3.1 可能性測度最大化問題

本節では次の可能性測度最大化問題を考える．

$$\mathbf{P}_{pm1}: \quad \text{maximize} \quad h \tag{6.51}$$

$$\text{subject to} \quad Pr[\min\{\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i)|e_i \in S\} \geq h] \geq \alpha \tag{6.52}$$

制約条件における確率レベルαは意思決定者によって与えられる値で$1/2 < \alpha < 1$を満たす固定値とする．制約式は次のように変形される．

$$Pr\left[\min\{\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i)|e_i \in T\} \geq h\right] \geq \alpha \;\Leftrightarrow\; Pr\left[\bigcap_{e_i\in S}\left\{\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h\right\}\right] \geq \alpha \tag{6.53}$$

$$\Leftrightarrow \prod_{e_i\in S} Pr(\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h) \geq \alpha \tag{6.54}$$

$\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h$ を変形すると

$$\sup_y \min\{\mu_{C_i(\omega)}(c_i),\ \mu_G(c_i)\} \geq h \tag{6.55}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : \mu_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h,\ \mu_G(c_i) \geq h \tag{6.56}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\alpha_i}\right) \geq h,\ \mu_G(c_i) \geq h \tag{6.57}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : c_i \geq d_i(\omega) - L^*(h)\alpha_i,\ c_i \leq \mu_G^*(h) \tag{6.58}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_i(\omega) - L^*(h)\alpha_i \leq \mu_G^*(h) \tag{6.59}$$

ここで$\mu_G^*(\cdot)$ および $L^*(\cdot)$ は擬逆関数であり次のように表される．

$$L^*(h) = t_0(1-h) \tag{6.60}$$

$$\mu_G^*(h) = h(f_1 - f_0) + f_0 \tag{6.61}$$

$Pr(d_i(\omega) \leq L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h)) = Pr[(d_i(\omega) - \mu_i)/\sigma_i \leq (L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i)/\sigma_i]$ であり，また $(d_i(\omega) - \mu_i)/\sigma_i$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数であるから，次の計算式によって等価確定条件に変換される．

$$\prod_{e_i\in S} Pr(d_i(\omega) \leq L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h)) \geq \alpha \tag{6.62}$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{e_i \in S} F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) \geq \alpha \tag{6.63}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{e_i \in S} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) \geq \log\alpha \tag{6.64}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log\alpha \tag{6.65}$$

ただし，F は標準正規分布の確率分布関数である．以上から，$\mathbf{P}_{pm1}$は次の等価確定問題$\mathbf{P}_{pm2}$に変形される．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{pm2}: \quad & \text{maximize} \quad h \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log\alpha && (6.66) \\ & \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in X && (6.67) \end{aligned}$$

式(6.60)および(6.61)を式(6.66)に代入することにより，$\mathbf{P}_{pm2}$ は次の問題$\mathbf{P}_{pm3}$に変形される．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{pm3}: \quad & \text{maximize} \quad h && (6.68) \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log\alpha && (6.69) \\ & \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in X && (6.70) \end{aligned}$$

問題$\mathbf{P}_{pm3}$を解くためにパラメータ h を含む部分問題$\mathbf{P}_{pm}^{h}$を考える．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{pm}^{h}: \quad & \text{maximize} \\ & \qquad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i && (6.71) \\ & \text{subject to } \boldsymbol{x} \in X && (6.72) \end{aligned}$$

簡略化のために，$c_i(h) = (h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i)/\sigma_i$と表すと $f_1 - f_0 - \alpha_i t_0 < 0$であることから $c_i(h)$ はh の減少関数になる．問題$\mathbf{P}_{pm}^{h}$ は通常の最大スパニングツリー問題であり，これまでに開発されているアルゴリズムを用いて効率的に解くことができる．X^h およびZ_h をそれぞれ$\mathbf{P}_{pm}^{h}$ の最適解および最適値とする．

補題 6. 4

Z_h は h の単調増加関数である.

証明

$h_1 < h_2$ に対して, X^{h_2} の最適性から次に計算式が成り立つ.

$$Z_{h_1} = \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_1))x_i^{h_1} \geq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_1))x_i^{h_2} \tag{6.73}$$

$$> \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_2))x_i^{h_2} = Z_{h_2} \tag{6.74}$$

ここで最後の不等号は $F(c_i(h))$ が h に関して単調性をもっていることから導かれる.

証明終

さらに (X^*, h^*) を元の問題 $\mathbf{P}_{pm}$ の最適解としたとき, 次の定理が成り立つ.

定理 6. 5

1. $Z_h > \log \alpha \Longleftrightarrow h^* > h$
2. $Z_h = \log \alpha \Longleftrightarrow h^* = h$
3. $Z_h < \log \alpha \Longleftrightarrow h^* < h$

証明

まず Z_h が h に関して連続であることは明らかである.

(1) $\Longrightarrow$

$Z_h = \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^h > \log \alpha$ ならば $\log F(\cdot)$ の連続性と単調性から $h < h_1$ を満たす h に十分近い h_1 に対して次のことが成立する.

$$\sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^h > \sum_{i=1}^{m} F(c_i(h_1))x_i^h \geq \log \alpha \tag{6.75}$$

上記の関係式は (X^h, h_1) が $\mathbf{P}_{pm}$ に対する実行可能解であることを示している. すなわち $h < h_1 \leq h^*$ である.

(1) $\Longleftarrow$

$F(c_i(h))$ の単調性と (X^*, h^*) の実行可能性から

$$\log\alpha \leq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h^*))x_i^* < \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^* \leq Z_h \tag{6.76}$$

(3) $\Longrightarrow$

明らかに

$$\sum_{i=1}^{m} \log\alpha > Z_h \geq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^* \tag{6.77}$$

が成立することと $F(c_i(h))$ 単調性とから $h^* < h$ であることがわかる.

(3) $\Longleftarrow$

$h^* > h$ に対して $Z_h > \log\alpha$ が成り立つと仮定すると $(X^h,\ h)$ が実行可能解であることになり, h^*が最適値であることに矛盾する.

(2) (1) および (3) が示されたことから明らかである.

証明終

それぞれの枝 e_i と $v_k \in N$に対して新たに $g_k(h) = \max\{c_i(h)|e_i = (v_k, v_l) \in E\}$ を定義する. このとき, $c_i(h)$ が h の線形関数であることから $g_k(h)$ が h の区分的線形関数であることがわかる. コスト $c_i(h)$, $i = 1, \ldots, n$ の任意の2つの関数における交点を計算し, 次のように昇べきの順に並べ替える.

$$h_0 = 0 < h_1 < \ldots < h_s < h_{s+1} = 1 \tag{6.78}$$

ここで s は計算された交点の h の中で異なるものの個数である.

問題を解くアルゴリズムを構築するためにSollin [2] のアルゴリズムを拡張することを考える. Z_h はCheritonら[4] あるいはYaoら[78] などのアルゴリズムによって計算可能であり, また 手順2で計算する $g_k(h)$ および手順4で計算する $g^i(h)$ の交点はMegiddo[49] の方法を用いることによって計算される. LB, UBをそれぞれ h^*の上限, 下限とする.

アルゴリズム

手順1 $Z_{h_l} > \log\alpha$を満たす最小のlを求め, $LB \leftarrow h_l$, $UB \leftarrow h_{l+1}$とし, 手順2へ進む.

手順2 区間 $[LB, UB]$ において, $v_k \in N$に対し $g_k(h)$ を与えるような枝 e_i を用いて部分木の集合 $(T_1, T_2, \ldots, T_t)$ を形成する. ここで t は部分木の個数を表すものとする. 手順 3 へ進む.

手順3 $t = 1$ ならば, 次の条件を満たす X^* は最適解である.

$$X^*: \quad x_i^* = 1, \quad e_i \in T_1$$
$$x_i^* = 0, \quad e_i \notin T_1$$

また最適値 h^* は次の計算式から求められる.

$$h^*: \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h^*))x_i^* = \log \alpha \tag{6.79}$$

$t \neq 1$ ならば手順 4へ進む.

手順4 T_iに対して

$$g^i(h) = \max\{c_j(g) | e_j \text{によって} T_i \text{が他の部分木と連結している}\} \tag{6.80}$$

および区間 $[LB, UB]$ に存在する交点を計算する. $g^1(h), \ldots, g^t(h)$ について交点を計算し, 次のように昇べきの順に並べる.

$$h_0 = LB < h_1 < \ldots < h_r = UB \tag{6.81}$$

手順 5に進む.

手順5 $Z_{h_j} > \log \alpha$を満たす最小の h_jを求め, $LB \leftarrow h_j$, $UB \leftarrow h_{j+1}$とする. 次に $h \in [LB, UB]$ に対し $g^i(h)$ を与えるような枝を付け加えることにより, 部分木の集合 $(T_1, T_2, \ldots, T_t)$ を更新し, 手順 3に戻る.

定理 6.6 上記のアルゴリズムによって元の問題の最適解 (X^*, h^*) は $O(m \log^2 n \log\log n)$ の計算時間で求まる.

証明

(妥当性) 定理1 によって手順1と 手順4で行われる LBと UBの更新が妥当であることがわかる. 更新の回数は明らかに有限であり, 各繰り返しにおいて Sollin

[2]のアルゴリズムを適用している．アルゴリズムを繰り返しが進むにつれて，最適値h^*を含む探索区間の大きさが小さくなると同時にスパニングツリーを形成する基となる部分木の数も減少していく．また，各繰り返しにおいて，部分木の集合を形成する枝は欲張り法によって選択される．ゆえに手順3における終了条件を満たす解は最適解である．

(計算時間) Sollinのアルゴリズムは$O(\log n)$回繰り返されるため，手順4と手順5の手続きは$O(\log n)$回なされることになる．各繰り返しにおいて，$g^i(h)$のすべての交点を導出するのに$O(m\log n)$の計算時間を必要とする．h_iを探索することは同時に$O(\log n)$回の最大スパニングツリーのテストを行っていることになり，もし最大スパニングツリーの計算にCheritionら[4]あるいはYaoら[78]のアルゴリズムを用いるとすると全体で$O(m\log n\log\log n)$の計算時間を必要とする．手順1-3を実行するのに必要な計算時間は明らかに手順4と手順5を実行する計算時間に及ばないので，最適解(X^*, h^*)を求めるための計算時間は$O(m\log^2 n\log\log n)$となる．

証明終

6.3.2　可能性・確率測度同時最大化問題

本節では可能性測度だけでなく確率測度も同時に最大化する次の問題を考える．

$$\mathbf{P}_{rm1}:\quad \text{maximize}\quad h+g(\alpha) \tag{6.82}$$

$$\text{subject to}\quad Pr\left(\min\{\mathcal{P}_{C_i}(c_i)|e_i\in S\}\geq h\right)\geq\alpha \tag{6.83}$$

$$\frac{1}{2}<\alpha<1,\quad 0\leq h\leq 1 \tag{6.84}$$

$$\boldsymbol{x}\in X \tag{6.85}$$

ここで$g(\alpha)$はαに関して非減少かつ微分可能な関数であるとする．前節で述べたモデルにおいては機会制約条件において確率測度一定の下で可能性測度最大化問題として定式化したが，$\mathbf{P}_{rm1}$は可能性測度だけでなく確率測度も同時に最大化する問題に拡張されている．機会制約条件(6.83)は次のように変形される．

$$Pr\left(\min\{\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i)|e_i\in S\}\geq h\right)\geq\alpha \tag{6.86}$$

$$\Leftrightarrow \quad Pr\left(\bigcap_{e_i \in S}\left\{\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h\right\}\right) \geq \alpha \tag{6.87}$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{e_i \in S} Pr\left(\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h\right) \geq \alpha. \tag{6.88}$$

$\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h$ を変形すると次のようになる.

$$\sup_{c_i} \min\{\mu_{C_i(\omega)}(c_i),\ \mu_G(c_i)\} \geq h \tag{6.89}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : \mu_{C_i(\omega)}(c_i) \geq h,\ \mu_G(c_i) \geq h \tag{6.90}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\beta_i}\right) \geq h,\ \mu_G(c_i) \geq h \tag{6.91}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, c_i : c_i \geq d_i(\omega) - L^*(h)\beta_i,\ c_i \leq \mu_G^*(h) \tag{6.92}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_i(\omega) - L^*(h)\beta_i \leq \mu_G^*(h) \tag{6.93}$$

ここで $\mu_G^*(\cdot)$ および $L^*(\cdot)$ は次のように定義される擬逆関数である.

$$L^*(h) \quad = \quad t_0(1-h) \tag{6.94}$$

$$\mu_G^*(h) \quad = \quad h(f_1 - f_0) + f_0 \tag{6.95}$$

$Pr\left(d_i(\omega) \leq L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h)\right) = Pr\left[(d_i(\omega) - \mu_i)/\sigma_i \leq (L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i)/\sigma_i\right]$ であり, また $(d_i(\omega) - \mu_i)/\sigma_i$ は標準正規分布に従う互いに独立な確率変数である. よって F を標準正規分布の分布関数とするとき, (6.83) は次の計算式によって等価確定条件に変形される.

$$\prod_{e_i \in S} Pr(d_i(\omega) \leq L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h)) \geq \alpha \tag{6.96}$$

$$\Leftrightarrow \quad \prod_{e_i \in S} F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) \geq \alpha \tag{6.97}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{e_i \in S} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) \geq \log \alpha \tag{6.98}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log \alpha \tag{6.99}$$

ゆえに $\mathbf{P}_{rm1}$ は次の $\mathbf{P}'_{rm1}$ と等価になる.

$$\mathbf{P}'_{rm1}: \qquad \text{maximize} \quad h + g(\alpha) \tag{6.100}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{L^*(h)\beta_i + \mu_G^*(h) - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log \alpha \tag{6.101}$$

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad 0 \leq h \leq 1 \tag{6.102}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \tag{6.103}$$

(6.94) および (6.95) を (6.101) に代入した問題を $\mathbf{P}_{rm}$ とする.

$$\mathbf{P}_{rm}: \quad \text{maximize} \quad h + g(\alpha) \tag{6.104}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \geq \log \alpha \tag{6.105}$$

$$\boldsymbol{x} \in X \tag{6.106}$$

問題 $\mathbf{P}_{rm}$ を解くためにパラメータ h を含んだ次の部分問題 $\mathbf{P}_{rm}^h$ を導入する.

$$\mathbf{P}_{rm}^h: \quad \text{maximize} \quad \sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \tag{6.107}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in X \tag{6.108}$$

簡略化のために, $c_i(h) \triangleq (h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i)/\sigma_i$ と定義する. このとき, $f_0 > f_1$ かつ t_0, β_i, $\sigma_i > 0$ であるから, $c_i(h)$ は h の狭義増加関数であることがわかる. $\mathbf{P}_{rm}^h$ は枝 e_i のコストが $\log F(c_i(h))$ である通常の最大スパニングツリー問題であり, これまで提案されてきた解法で解くことができる. X^h および Z_h をそれぞれ $\mathbf{P}_{rm}^h$ の最適解および最適値とする. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 6.7　Z_h は h について狭義減少関数である.

証明

$h_1 < h_2$ に対して X^{h_2} の最適性から

$$Z_{h_2} = \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_2)) x_i^{h_2} \geq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_2)) x_i^{h_1} > \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_1)) x_i^{h_1} = Z_{h_1} \tag{6.109}$$

式 (6.109) において最後の不等号は, $F(c_i(h))$ が h に関して狭義減少関数であることから示される.

証明終

さらに, (X^*, h^*, α^*) を $\mathbf{P}_{rm}$の最適解としたとき, 次の定理が成り立つ.

定理 6.8

1. $Z_h > \log \alpha^* \Longleftrightarrow h^* > h$
2. $Z_h = \log \alpha^* \Longleftrightarrow h^* = h$
3. $Z_h < \log \alpha^* \Longleftrightarrow h^* < h$

証明

明らかに Z_h は h の連続関数である.

(1) $\Longrightarrow$

$Z_h = \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^h > \log \alpha^*$ならば$\log F(\cdot)$ の連続性と単調性から, h より大きく, 十分近いh_1に対して次の不等式が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^h > \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h_1))x_i^h \geq \log \alpha^* \tag{6.110}$$

このことは (X^h, h_1, α) が $\mathbf{P}_{rm}$の実行可能解であることを示している. したがって $h < h_1 \leq h^*$が成り立つ.

(1) $\Longleftarrow$

$F(c_i(h))$ の単調性と (X^*, h^*, α^*) の実行可能性から, $h < h^*$に対して

$$\log \alpha^* \leq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h^*))x_i^* < \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^* \leq Z_h \tag{6.111}$$

(3) $\Longrightarrow$

$$\log \alpha^* > Z_h = \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^h \geq \sum_{i=1}^{m} \log F(c_i(h))x_i^* \tag{6.112}$$

であることに注意すると, この関係式と $F(c_i(h))$ の単調性から $h^* < h$ であることは明らかである.

(3) $\Longleftarrow$

$Z_h > \log \alpha^*$ が成り立つならば(X^h, h, α^*)が実行可能解となり, $h > h^*$ となるのでh^* の最適性に矛盾する.

(2) (1)および(3)の結果から明らかである.

証明終

定理6.8は$\sum_{i=1}^{m} \log F\left(c_i(h)\right) x_i^h = \log\alpha$を満たす実行可能解$(X^h,\ h,\ \alpha)$の中に最適解$(X^*, h^*, \alpha^*)$が含まれることを示している. $t = \log\alpha$とすると$\alpha = e^t$であり, 上の関係式より$t = \sum_{i=1}^{m} \log F((c_i(h))x_i^h$ が成り立つ.

性質 6.9　t はhに関して狭義減少かつ連続関数である.

証明

t が固定されたhに対する最小スパニングツリーの総コストであることに注意すると, c_i が狭義減少かつ連続で, Fと対数関数が狭義増加かつ連続であることから$\log F(c_i(h))$ は狭義減少かつ連続であることがわかる. 枝のコストの順序が決定されれば最大スパニングツリーも求めることができ, また, 順序が変化しない限り最適解も変化しない. 枝e_iおよびe_jに付随するコストの大小関係は$\log F(c_i(h_{ij})) = \log F(c_j(h_{ij}))$ を満たすh_{ij}を境に逆転し, またそのようなh_{ij}はただ一つ存在する. ゆえにスパニングツリーを形成する枝集合が変化するところを調べるには, せいぜいすべてのh_{ij}について調べることで十分である. ここでh_{ij} は次のように計算される.

$$h_{ij} = \{\sigma_i(\beta_j t_0 + f_0 - \mu_j) - \sigma_j(\beta_i t_0 + f_0 - \mu_i)\}/\{\sigma_j(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) - \sigma_i(f_1 - f_0 - \beta_j t_0)\} \tag{6.113}$$

さらに区間$(0, 1)$ にあるh_{ij} をつぎのように非減少順に順に並べる.

$$0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_s < h_{s+1} = 1 \tag{6.114}$$

ここでs は異なる値をもつh_{ij}の個数である. 仮にすべてのh_{ij}が0以下または1以上であるならば区間$[0, 1]$においてはコストの順序は変化しないため, 最適なスパニングツリーはただ一つに求まる. すなわち, 区間(h_i, h_{i+1})においては最適解は変化しないため, t は明らかに減少かつ連続な関数になる. 区間の端においては一対のコストの順序のみが逆になるため, tは区間の境界点においても連続関数であることは明らかである. ゆえにt は狭義減少かつ連続な関数である.

証明終

f を標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数とする．t はそれぞれの区間 (h_j, h_{j+1}), $j = 1, 2, \ldots, s$ において微分可能である．

$$\frac{dt}{dh} = \sum_{i=1}^{m} \frac{f\left(c_i(h)\right)}{F\left(c_i(h)\right)} \cdot \frac{f_1 - f_0 - \beta_i t_0}{\sigma_i} x_i^h = \sum_{i=1}^{m} \frac{\exp[-\frac{1}{2}\left\{c_i(h)\right\}^2]}{F\left(c_i(h)\right)} \cdot \frac{f_1 - f_0 - \beta_i t_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} x_i^h < 0$$

$$\frac{d^2t}{dh^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{-f(c_i(h))\left\{c_i(h)F(c_i(h)) + f(c_i(h))\right\}}{F\left(c_i(h)\right)^2} \times \left(\frac{f_1 - f_0 - \beta_i t_0}{\sigma_i}\right)^2 x_i^h < 0$$

$\prod_{e_i \in T} F(c_i(h)) \geq \alpha > 1/2$ かつ $f_1 - f_0 - \beta_i t_0 < 0$ であることから $c_i(h) > 0$ が成り立つ．したがって t はそれぞれの区間で h に関して狭義減少な凹関数である．$\alpha = e^t$ を $g(\alpha)$ に代入し，$v(t) = g(e^t)$ とする．さらに $u(h)$ を次のように定める．

$$u(h) = h + g(\alpha) = h + v(t) = h + v\left(\sum_{i=1}^{m} \log F\left(c_i(h)\right) x_i^h\right) \tag{6.115}$$

$u(h)$ を最大化する h^* を求めると $(X^*, h^*, \tilde{\alpha})$ は $\mathbf{P}_{rm}$ の最適解となる．ここで $\tilde{\alpha}$ は h^* に対応する α である．すなわち，$g(\tilde{\alpha}) = u(h^*) - h^*$ となる．従って次の計算式が成り立つ．

$$\frac{du}{dh} = 1 + \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dh} \tag{6.116}$$

$$\frac{d^2u}{dh^2} = \frac{dv}{dt}\frac{d^2t}{dh^2} + \frac{d^2v}{dt^2}\left(\frac{dt}{dh}\right)^2 \tag{6.117}$$

以上の議論から $dv/dt < 0$ かつ $d^2v/dt^2 > 0$ ならば，u はそれぞれの区間において h の凸関数であり部分区間 $[h_j,\ h_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, s$ の中に最適値 h^* が存在する．一方 $dv/dt > 0$ かつ $d^2v/dt < 0$ ならば u は各々の部分区間において凹関数であり部分区間の端点もしくは $(dv/dt)(dt/dh) = -1$ を満たす h の中に最適解が含まれている．以下では $u(h)$ が凹関数になるような $h(\alpha)$ の中で，$g(\alpha) = \lambda \log \alpha$ である場合と $g(\alpha) = -\lambda/\alpha$ である場合について詳しく考察し，その性質と効率的な解法を示す．ここで，λ は正の定数である．

1. $g(\alpha) = \lambda \log \alpha$ の場合

   この場合 $u(h) = h + \lambda \log \alpha = h + \lambda t$ となり，各々の部分区間 $[h_{k-1},\ h_k]$, $k = 1, \ldots, s+1$ において，$u(h)$ は次のように表される．

$$u(h) = u_k(h) = h + \lambda \sum_{i=1}^{m} \log F\left(c_i(h)\right) x_i^h, \quad (h \in [h_{k-1},\ h_k],\ k = 1,\ \ldots,\ s+1) \tag{6.118}$$

   $u(h)$ を各々の部分区間 (h_{k-1}, h_k) において h で微分すると

$$\frac{du}{dh} = 1 + \lambda \frac{dt}{dh}, \quad \frac{d^2u}{dh^2} = \lambda \frac{d^2t}{dh^2} < 0 \tag{6.119}$$

最後の不等号は$d^2t/dh^2 \leq 0$かつ$\lambda > 0$から導かれる．ゆえに$u(h)$は各部分区間で凹関数である．したがって$u(h)$を最大化する候補となる点は$h_1, \ldots, h_s$または$dt/dh = -1/\lambda$を満たす点である．

2. $g(\alpha) = -\lambda/\alpha$ の場合

この場合

$$u(h) = h - \frac{\lambda}{\alpha} = h - \lambda e^{-t} \tag{6.120}$$

となり，各部分区間$[h_{k-1},\ h_k]$, $k = 1, \ldots, s+1$に対して$u(h)$は次のように表される．

$$u(h) = u_k(h) = h - \lambda \prod_{e_j \in S^h} \frac{1}{F(c_j(h))}, \quad (h \in [h_{k-1},\ h_k],\ k = 1, \ldots, s+1) \tag{6.121}$$

ここでS^hはある固定されたhに対する最大スパニングツリーを形成する枝集合である．すなわち，$\prod_{e_j \in S^h} 1/F(c_j(h))$は$x_j^h = 1$に対して$F(c_j(h))$の積になる．各部分区間$(h_{k-1}, h_k)$において$u(h)$を微分すると次の計算式になる．

$$\frac{du}{dh} = 1 + \lambda e^{-t} \frac{dt}{dh}, \tag{6.122}$$

$$\frac{d^2u}{dh^2} = -\lambda e^{-t} \left(\frac{dt}{dh}\right)^2 + \lambda e^{-t} \frac{d^2t}{dh^2} < 0 \tag{6.123}$$

最後の不等号は$d^2t/dh^2 < 0$ かつ $\lambda > 0$ことから導かれる．上の結果から$u(h)$は区分的に凹関数であることがわかる．ゆえに$u(h)$を最大化する点の候補としては$h_1, \ldots, h_s$もしくは$dt/dh = -(1/\lambda)e^t$を満たす点となる．

以上の2つの場合において次の性質が成り立つ．

性質 6.10　各部分区間(h_j, h_{j+1})において，$du/dh = 0$となる点hは多くとも一つである．

証明

各区間においてdu/dhは$d^2u/dh^2 < 0$であることから狭義減少関数であり，また連続関数である．$du/dh|_{h_{k-1}+0} > 0$かつ$du/dh|_{h_k-0} < 0$が成り立つならば，平均値の定理から$du/dh = 0$となる点はただ一つである．

証明終

前述したように t は$h_1,\ldots,h_s$において微分不可能である．以上の議論から解を求めるアルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム

手順1 任意の2つのコスト関数に対する交点を$h_1,\ldots,h_s$を求める．次にdu/dhの右微分係数および左微分係数を求め，$L_r = du/dh|_{h_r+0}$，$R_r = du/dh|_{h_r-0}\ h_r$，$r=1,\ldots,s$とする．

手順2 $R_r > 0$ かつ $L_{r+1} < 0$を満たす区間$[h_r,\ h_{r+1}]$ を求め，それぞれの区間において，$du/dh = 0$ を満たすh_r^λ を求める．

手順3 $Q_\lambda = \{h_r^\lambda | dt/dh = -1/\lambda\}$ とおく．$u(h_r^\lambda)$，$h_r^\lambda \in Q_\lambda$ と$u(h_k)$，$k=1,\ldots,s$ を比較し，$h \in Q_\lambda \cup \{h_1,\ldots,h_s\}$の中から$u(\cdot)$を最大化する$h^*$を求める．$(X^{h^*}, h^*, t(h^*))$ は$\mathbf{P}_{rm}$の最適解である．

n，mをそれぞれ点の個数，枝の個数としたときのスパニングツリーを求める計算時間を$T_{MST}(n,m)$ としたとき次の定理が成り立つ．

定理 6.11 h_r^λ が$O(T_{MST}(n,m))$ の計算時間で求まるならば，提案した手続きによって問題$\mathbf{P}_{rm}$の最適解は$O(m^2 T_{MST}(n,m))$ の計算時間で求まる．

証明

アルゴリズムの妥当性は上記の議論から明らかであるため，計算時間についてのみ示す．計算した結果得られる$h_1,\ldots,h_s$の個数は$O(m^2)$ であるから並べ替えの計算時間は$O(m^2 \log m)$ であり，$|Q_\lambda|$ の個数は$O(m^2)$で抑えられL_r，R_r は多くとも$O(m)$で計算できる．スパニングツリーを求めるのに要する計算時間は$O(\log m)$ に満たないため，全体の計算時間は$\max\{O(m^2\log m)$，$O(m^2)\cdot T_{MST}(n,m)\} = O(m^2 T_{MST}(n,m))$ である．

証明終

6.4　結言

本章では, コストがファジィランダム変数で与えられる場合のスパニングツリー問題を扱い, 意思決定法を示すと共に効率的なアルゴリズムを構築した.

6.2節では通常の最小スパニングツリー問題の拡張となるモデルを考えたがこの問題は3次元における k-集合問題と深く関わっており, アルゴリズムの計算時間も k-集合の個数の上界に依存している. 2次元の k-集合問題は応用範囲が広いため早くから多くの研究が行われており, 最近になってDey [7] らの研究によりオーダーが改善されている. 3次元の k-集合問題についてはこれまで応用する問題が見当たらないこともあり, あまり研究されてこなかったが, 今後, 研究が進むにつれてアルゴリズムの計算時間は改良されると思われる.

6.3節ではファジィランダム変数をコストにもつボトルネック型スパニングツリー問題を扱った. 可能性測度最大化問題ではパラメトリックスパニングツリー問題の解法を応用して効率的なアルゴリズムを開発した. 可能性・確率測度最大化問題では典型的な形の重み関数に対し効率的なアルゴリズムを構築したが, 解法は関数の形に依存するため, 別の関数形についてもさらに検討する必要があると思われる.

第7章

不確定状況下での確率的在庫管理問題

7.1 緒言

本章では費用の曖昧性を考慮した腐敗しやすい商品の在庫管理問題を考える．商品を売る現場においては，在庫商品が少なすぎると顧客を逃し，逆に，抱える在庫が多すぎれば保管費用がかかるために利益が損なわれるという状況が常に発生する．このような場合において，どれだけの在庫をもつべきかを考えるのが在庫管理問題であり，これまでに様々な状況に対する意思決定法が考えられてきた．

本章で扱う腐敗しやすい商品とは血液, 薬, フィルムなどのように, 期間が経つにつれ価値が下がり, ある時点で価値を失うものを指す. 腐敗しやすい商品に対する在庫問題の研究はPrastacos [61] の品切れ費用と廃棄費用のみを考慮したモデルに始まり, その後, 様々なモデルが考えられている. Nose ら [57] は在庫管理問題の一つである配分問題において品切れ費用, 廃棄費用, 輸送費用を考慮してモデル化し, 最適発注方策を求めている.

在庫管理の現場において, 元来, 品切れ費用は見積もりが難しく, 確定値として与えることは困難であるとされてきた. Ishii ら [27] は新聞売り子の問題において品切れコストの曖昧性を考慮に入れたモデルを考え，ファジィマックス順序を基にした意思決定法を提案し，曖昧性を考慮に入れた場合には一般的に発注量は多くすべきであるという結果を得ている．腐敗しやすい商品を扱った在庫管理問題においては費用の曖昧さを考慮に入れたモデルはこれまで考えられていないが，商品の腐敗性によって顧客を逃したときの見積もりはさらに難しくなる場合もあり，品切れ費用の曖昧性はさらに大きくなる可能性がある．また廃棄費用についても, 廃棄が将来のことであれば不確定である場合が多い. また，これら複数

の費用の曖昧性が存在する場合に，それらが解にどのような影響を与えるのかという問題も生じる．費用が不確定である場合には，期待利益にも曖昧性が含まれるため，通常の在庫管理問題における解の概念をそのまま適用することはできない．

そこで，本章では費用に不確定性が含まれた場合において，ファジィマックス順序を基にした非劣解を定義し，それらのいくつかをもとめる方法を提案する．まず，7.2節では，品切れ費用の曖昧性を考慮に入れた配分問題において非劣転送配分方策を定義し，それらのいくつかを求める解法を示す．次に7.3節では，品切れ費用と廃棄費用が共にファジィ数で表される在庫管理問題を扱い，非劣発注量を求めると共に2つの費用の曖昧さが解にどのような影響を与えるかについて考察する．最後の7.4節において結論を述べる．

7.2　ファジィ品切れ費用をもつ腐敗しやすい商品の在庫管理問題

本節ではn個の配分点をもつ配分問題について周期的在庫モデルを考える．注文は期間の最初に起こるとし，費用は期間中にかかるものとする．さらに次の仮定を設ける．

1. 商品の寿命は一定でM期間である．
2. 在庫はLIFO方策に従って，期間の最初に需要によって払い出される．
3. 各々の期間の最後に残っている在庫は，一度中央センターへ戻され，次の期間で再配分される．
4. 商品がM期間経っても払い出されなければ，廃棄処分する．
5. 各々の配分点kでは，次の費用がかかるものとする．

$\tilde{s}_k$　:　配分点kで品切れが起こった場合の単位あたりの品切れ費用
w_k　:　配分点kで廃棄する場合の単位あたりの廃棄費用
u_k　:　配分点kから中央センターへまたはその逆に輸送する場合の単位あたりの輸送費用（ここでは$u_k > w_k$とする）

ここで$\tilde{s_k}$は次のメンバシップ関数に特性づけられるLファジィ数とする．

$$\mu_{\tilde{s_k}}(t) = \max\left\{L\left(\frac{t-m_k}{\alpha_k}\right), 0\right\} \tag{7.1}$$

6. 配分点kにおける需要は確率分布関数F_k, 密度関数f_kをもつ互いに独立な確率変数とする.

さらに以下の記号を導入する.

N_k : 配分点kにおける残りの寿命がMから2までの商品の在庫量
B_k : 配分点kにおける残りの寿命が1である商品の在庫量
$\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_n),\ \boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$
$N = \sum_{k=1}^{n} N_k,\ B = \sum_{k=1}^{n} B_k$

商品の在庫量がそれぞれ$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}$単位である時の, 全体の費用の期待値$\tilde{C}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$はNoseら[57]の結果を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}) \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \left\{ \tilde{s}_k \int_{N_k+B_k}^{\infty} (x - N_k - B_k) dF_k(x) + w_k \int_{N_k}^{N_k+B_k} (N_k + B_k - x) dF_k(x) \right. \\ &\left. + w_k B_k F_k(N_k) + (N_k + B_k) u_k + u_k \int_{0}^{N_k} (N_k - x) dF_k(x) \right\} \qquad (7.2)\end{aligned}$$

品切れ費用$\tilde{s}_k$はLファジィ数$(m_k, \alpha_k)_L$であるから, 拡張原理により$\tilde{C}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$は次のメンバシップ関数$\mu_{\tilde{C}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})}(t)$に特性づけられる$L$ファジィ数になる.

$$\mu_{\tilde{C}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})}(t) = \max \left\{ L\left(\frac{t - m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})}{\alpha(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})} \right), 0 \right\} \qquad (7.3)$$

ここで$m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$, $\alpha(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$は次のように表される.

$$\begin{aligned}m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}) \ &= \ \sum_{k=1}^{n} \left\{ m_k \int_{N_K+B_k}^{\infty} (x - N_k - B_k) dF_k(x) + w_k \int_{N_k}^{N_k+B_k} (N_k + B_k - x) dF_K(x) \right. \\ &\left. + w_k B_k F_k(N_k) + (N_k + B_k) u_k + u_k \int_{0}^{N_k} (N_k - x) dF_k(x) \right\} \qquad (7.4)\end{aligned}$$

$$\alpha(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{N_k+B_k}^{\infty} (x - N_k - B_k) dF_k(x) \qquad (7.5)$$

総費用がファジィ数であるため, 通常の在庫管理問題で用いられる方法をそのまま適用することはできない. よって, ファジィマックス順序に基づいた非劣転送配分方策を次に定義し, 以下ではそれらを求める解法を示す.

定義 7.1 (非劣転送配分方策)
2つの転送配分方策 $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ と $(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')$ に対して条件 $\tilde{C}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}) \preceq \tilde{C}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')$ かつ $\tilde{C}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}) \neq \tilde{C}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')$ が成り立つならば, 転送配分方策 $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ は $(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')$ に優越するという. また, 転送配分方策 $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ に対して優越する方策がないとき, $(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ は非劣転送配分方策であるという.

ここで $\tilde{C}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}) \preceq \tilde{C}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')$ は定理2.7 のファジィマックス順序を用いて次のようになる.

$$t_0|\alpha(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')-\alpha(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})| \leq m(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{B}')-m(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}) \tag{7.6}$$

すなわち, 次のことが成り立つことと同値である.

$$\begin{aligned}
&t_0\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left\{\int_{N_k+B_k}^{\infty}(x-N_k-B_k)dF_k(x)-\int_{N_k+B_k}^{\infty}(x-N_k'-B_k')dF_k(x)\right\}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}m_k\left\{\int_{N_k'+B_k'}^{\infty}(x-N_k'-B_k')dF_k(x)-\int_{N_k+B_k}^{\infty}(x-N_k-B_k)dF_k(x)\right\} \\
&+\sum_{k=1}^{n}\left[w_k\left\{\int_{N_k'}^{N_k'+B_k'}(N_k'+B_k'-x)dF_k(x)-\int_{N_k}^{N_k+B_k}(N_k+B_k-x)dF_k(x)\right\}\right. \\
&+w_k\left\{B_k'F_k(N_k')-B_kF_k(N_k)\right\}+u_k\{(N_k'+B_k')-(N_k+B_k)\} \\
&\left.+u_k\left\{\int_0^{N_k'}(N_k'-x)dF_k(x)-\int_0^{N_k}(N_k-x)dF_k(x)\right\}\right]
\end{aligned} \tag{7.7}$$

次に非劣転送配分方策をいくつか求める. まず, 次の定理が成り立つ.

定理 7.2 $m(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$ を最小にする転送配分方策 $(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)$ は非劣転送配分方策である.

証明

方策 $(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)$ が非劣転送配分方策でないと仮定すると次の条件を満たす方策 $(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o)$ が存在することになる.

$$t_0|\alpha(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)-\alpha(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o)| \leq m(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)-m(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o) \tag{7.8}$$

$$(m(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*),\alpha(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)) \neq (m(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o),\alpha(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o)) \tag{7.9}$$

ところが, $m(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*) \neq (\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o)$ のとき,

$$t_0|\alpha(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)-\alpha(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o)| \geq 0 > m(\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{B}^*)-m(\boldsymbol{N}^o,\boldsymbol{B}^o) \tag{7.10}$$

であるが，これは $m(\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*)$ が最小であることに矛盾する．

また，$m(\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*) = m(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$ のとき，$\alpha(\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*) = \alpha(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$ が成り立つため，

$(m(\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*), \alpha(\boldsymbol{N}^*, \boldsymbol{B}^*)) \neq (m(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o), \alpha(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o))$ に矛盾する．

証明終

$m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ の最小化問題は Nose ら [57] の方法を用いて解くことができ，また，彼らのモデルにおいて品切れ費用を m_k とした場合には最適解も一致する．しかし，状況によっては意思決定者は曖昧性を最小にする解を求めたいと考えることもある．すなわち $\alpha(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$ を最小化する次の問題 **PA** を考える．

$$\mathbf{PA} : \text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{N_k+B_k}^{\infty} (x - N_k - B_k) dF_k(x) \tag{7.11}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{n} N_k = N, \ \sum_{k=1}^{n} B_k = B \tag{7.12}$$

$$N_k \geq 0, \ B_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, n \tag{7.13}$$

簡略化のために $\alpha^k(N_k, B_k)$ を次のように定義する．

$$\alpha^k(N_k, B_k) \equiv \alpha_k \int_{N_k+B_k}^{\infty} (x - N_k - B_k) dF_k(x), k = 1, 2, \ldots, n \tag{7.14}$$

ここで $\alpha_k > 0$ とする．仮に $\alpha_k \leq 0$ とすると $\alpha^k(N_k, B_k) = 0$ となり，このとき，$\alpha(N, B)$ から除く．$\alpha^k(N_k, B_k)$ の定義より，以下の計算式が成り立つ．

$$\frac{\partial \alpha^k(N_k, B_k)}{\partial N_k} = \alpha_k F_k(N_k + B_k) - \alpha_k \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial \alpha^k(N_k, B_k)}{\partial B_k} = \alpha_k F_k(N_k + B_k) - \alpha_k \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^k(N_k, B_k)}{\partial N_k^2} = \alpha_k f_k(N_k + B_k) \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^k(N_k, B_k)}{\partial B_k^2} = \alpha_k f_k(N_k + B_k) \tag{7.18}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^k(N_k, B_k)}{\partial N_k \partial B_k} = \alpha_k F_k(N_k + B_k) - \alpha_k \tag{7.19}$$

ここで

$$\frac{\partial^2\alpha_k(N_k,B_k)}{\partial N_k^2}\cdot\frac{\partial^2\alpha_k(N_k,B_k)}{\partial B_k^2}-\left(\frac{\partial^2\alpha_k(N_k,B_k)}{\partial N_k\partial B_k}\right)^2=0 \tag{7.20}$$

より, $\alpha_k(N_k,B_k)$は凸関数であることがわかる. ゆえに, その和である$\alpha(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$も凸関数であり, **PA**は凸計画問題であることがわかる. 問題**PA**を解くために, 次のラグランジュ関数を導入する.

$$L(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})\equiv\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{N_k+B_k}^{\infty}(x-N_k-B_k)dF_k(x)+\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}N_k-N\right)+\mu\left(\sum_{k=1}^{n}B_k-B\right)$$

このとき, **PA**の最適解は次のキューン・タッカー条件**KT**を満たす.

KT :

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})}{\partial N_k}=\alpha_kF_k(N_k+B_k)-\alpha_k+\lambda\geq 0 \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})}{\partial B_k}=\alpha_kF_k(N_k+B_k)-\alpha_k+\mu\geq 0,\ k=1,\ldots,n \tag{7.22}$$

$$\sum_{k=1}^{n}N_k=N,\sum_{k=1}^{n}B_k=B, \tag{7.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_k}\cdot N_k=0,\ \frac{\partial L}{\partial B_k}\cdot B_k=0,\ k=1,\ldots,n \tag{7.24}$$

KTにおいて, $N=0(B=0)$が成り立つ場合には, $N_k(B_k)=0,k=1,\ldots,n$であるので, $N=B=0$となる. したがって, $N=B=0$ならば, **PA**の最適解は$N_k=B_k=0,k=1,\ldots,n$である.

以下では, NがBのどちらか一方のみが0であるときの解法について示す. ここでは$B=0$の場合のみについて示し, $N=0$の場合においても同様に解くことができる. $B=0$のとき, $B_k=0,\ k=1,\ldots,n$であり, **KT**は次の問題**KT'**となる.

KT′ :

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{N})}{\partial N_k}=\alpha_kF_k(N_k)-\alpha_k+\lambda\geq 0 \tag{7.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial N_k}\cdot N_k=0,k=1,\ldots,n \tag{7.26}$$

$$\sum_{k=1}^{n}N_k=N,N_1,N_2,\ldots,N_n\geq 0 \tag{7.27}$$

次の手続き**PKT**は**KT'**の解を求める.

PKT

手順1 まず, n個の配分点を$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$となるように, 番号付けを行う. さらに$I \equiv (\alpha_i, \alpha_{i+1}), i = 0, \ldots, n-1$ とし, 手順2へ進む. ここで$\alpha_0 \equiv \alpha_1(1 - F_1(N))$とする.

手順2 $i = 0$として手順3に進む.

手順3 $\lambda \in I_i$とすると$N_k = 0, \quad k = 1, \ldots, i, \quad N_k = F_k^{-1}(1 - \lambda/\alpha_k), \ k = i+1, \ldots, n$ が成り立つ. もし, $\sum_{k=i+2}^{n} F_k^{-1}(1 - \alpha_{i+1}/\alpha_k) > N$ならば, 手順4に進む. そうでなければ, $\sum_{k=i+1}^{n} F_k^{-1}(1 - \lambda/\alpha_k) = N$を満たす$\lambda_0$を求め, $N_k = F_k^{-1}(1 - \alpha_{i+1}/\alpha_k)(k = i+1, \ldots, n), N_k = 0(k = 1, \ldots, i)$として終了する.

手順4 $i = i + 1$とし, 手順3に戻る.

定理 7.3 $B = 0$の場合には手続き**PKT**によって**PA**の最適解が求められる.

<u>**証明**</u>

KT'から, $\lambda < \alpha_k$ならば, またそのときに限り N_kは正であることは明らかである. ゆえに, 手続き**PKT**によって**PA**の最適解が求められる.

証明終

次にNとBが正の場合を考える. まず, $T_k \equiv N_k + B_k, k = 1, \ldots, n$そして, $T \equiv N + B$とする. **PA**の目的関数は$T_1, T_2, \ldots, T_n$の関数であることに注意すると, **PA**は次の問題**PAT**に変換される.

$$\textbf{PAT} : \quad \text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{T_k}^{\infty} (x - T_k) dF_k(x) \tag{7.28}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{n} T_k = T \tag{7.29}$$

$$T_k \geq 0, k = 1, \ldots, n \tag{7.30}$$

次の連立一次方程式**SLP**を解くことによって, **PAT**の最適解$T_k^o, k = 1, 2, \ldots, n$が得られ, それから, **PA**の最適解が得られる.

$$\textbf{SLP} : \quad N_k + B_k = T_k^o \ \ k = 1, \ldots, n, \ \sum_{k=1}^{n} N_k = N, \sum_{k=1}^{n} B_k = B \tag{7.31}$$

$$N_k, \ B_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, n \tag{7.32}$$

問題**SLP**は変数が$2n$個であり，制約等式が$(n+2)$本あるため，$n=1$の場合を除いて**PA**の解は容易に求めることができる．一般に自由度は$(n-1)$であるため，**PA**の最適解のうち$m(\boldsymbol{N},\boldsymbol{B})$を最小にする解を求めることができる．ゆえに，次のような問題**PAM**を考える．

$$\textbf{PAM}\ :\quad \text{minimize}\quad C+\sum_{k=1}^{n}\left\{w_k\int_{N_k}^{T_k^o}(T_k^o-x)dF_k(x)\right.$$
$$\left.+w_k(T_k^o-N_k)F_k(N_k)+u_k\int_0^{N_k}(N_k-x)dF_k(x)\right\} \qquad (7.33)$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{k=1}^{n}N_k=N, 0\le N_k\le T_k^o, k=1,\ldots,n \qquad (7.34)$$

ここで, Cは定数項であり, 次のように表される．

$$C\equiv\sum_{k=1}^{n}\left\{m_k\int_{T_k^o}^{\infty}(x-T_k^o)df_k(x)+u_kT_k^o\right\} \qquad (7.35)$$

簡単な計算によって, **SLP**の制約式$N_k+B_k=T_k^o, N_k, B_k\ge 0$の制約から, **PAT**の制約式$0\le N_k\le T_k^o$が導かれるため, **PAM**の制約式は**SLP**の制約式に等しい．

次に, **PAT**の解を求める手続きを示す．$\boldsymbol{T}\triangleq(T_1,T,2,\ldots,T_n)$とし, **PAT**に関するラグラジアンを次のように定義する．

$$L(\boldsymbol{T},\gamma)\equiv\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{T_k}^{\infty}(x-T_k)dF_k(x)+\gamma\left(\sum_{k=1}^{n}T_k-T\right) \qquad (7.36)$$

$L(\boldsymbol{T},\gamma)$から次のキューン・タッカー条件**KTT**が得られる．

$$\textbf{KTT}\ :\quad \frac{\partial L}{\partial T_k}=\alpha_k(F_k(T_k)-1)+\gamma\ge 0, \qquad (7.37)$$

$$T_k\ge 0, k=1,\ldots,n,\quad \sum_{k=1}^{n}T_k=T \qquad (7.38)$$

PATは凸計画問題であり, **KTT**の解は**PAT**の最適解となる．**KTT**において$\boldsymbol{T}$を$\boldsymbol{N}$で置き換えた問題は, **KT'**と等しくなる．よって, **KTT**の手続きを省略し, **PAT**の最適解が求まったとして, **PAM**の解を見つける方法のみ示す．ここで**PAT**の目的関数は次の$\hat{m}(\boldsymbol{N})$に変換されることに注意する．ここで定数項Cは省略している．

$$\hat{m}(\boldsymbol{N})\equiv\sum_{k=1}^{n}\{w_k\int_{N_k}^{T_k^o}F_k(x)dx+u_k\int_0^{N_k}(N_k-x)dF_k(x)\} \qquad (7.39)$$

$T^o_k, k=1,\dots,n$が正と仮定しても一般性を失わない．なぜなら，あるk'に対して$T^o_{k'}$ならば$N_{k'}=0$とし，そのようなk'を除いて新たにkを数え直して$n=n'$とすればよいからである．また，$u_k > w_k$より，

$$\frac{\partial^2 \hat{m}}{\partial N_k^2} = (u_k - w_k) f_k(N_k) \geq 0 \tag{7.40}$$

であるから，$\hat{m}(\boldsymbol{N})$は凸関数である．よって，次のようなキューン・タッカー条件**KTM**を満たす解は**PAM**の最適解である．

KTM : $\sum_{k=1}^{n} N_k = N$
各々の$k, u_k \geq 0$に対して(a), (b), (c)のいずれかの条件が成り立つ．

(a) $N_k = 0, (u_k - w_k)F_k(0) - \lambda \geq 0$

(b) $N_k = T^o_k, (u_k - w_k)F_k(T^o_k) - \lambda + u_k \leq 0$

(c) $T^o_k > N_k > 0, (u_k - w_k)F_k(N_k) - \lambda = 0$

次に示される手続き**PKTM**を実行することによって**PAM**の最適解が得られる．

PKTM

手順1 $a_1 = (u_1 - w_1)F_1(T^o_1), \dots, a_n = (u_n - w_n)F_n(T^o_n), b_1 = (u_1 - w_1)F_1(0), \dots, b_n = (u_1 - w_1)F_n(0)$とし，$a_k, b_k, k=1,\dots,n$に関して$c_1 < c_2 < \cdots < c_{\hat{n}}$となるようにソートする．ここで$\hat{n}$は$a_k, b_k, k=1,\dots,n$の異なる値の個数である．$J_k = (c_k, c_{k+1}), k = 1,\dots,\hat{n}-1$として，手順2に進む．

手順2 $A_i = \{k | a_k \leq c_i\}, E_i = \{k | b_k \geq c_{k+1}\}, G_i = \{1,2,\dots,n\} - A_i - E_i$とする．さらに，$k \in A_i$に対して$N_k = T^o_k$, $k \in E_i$に対して$N_k = 0$, $k \in G_i$に対して$N_k = F_k^{-1}(\frac{\lambda}{u_k - w_k})$とする．もし，$\sum_{k \in G_i} N_k = N - \sum_{k \in A_i} T^o_k$を満たす$\lambda = \lambda^i \in J_i$が存在するならば，**PAM**の最適解を$k \in G_i$に対して$N_k = F_k^{-1}\left(\frac{\lambda^i}{u_k - w_k}\right)$, $k \in E_i$に対して$N_k = T^o_k$として終了する．そうでなければ，手順3に進む．

手順3 $i = i+1$として，手順2に戻る．

PAMの最適解を$\mathbf{N}^o$で表すと$\mathbf{N}^o$に伴って次の式を満たす$\mathbf{B}^o$が求まり，**PA**の最適解が求まる.

$$B_k^o = T_k^o - N_k^o, k = 1, \ldots, n \tag{7.41}$$

定理 7.4　$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$は$m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$を最小にする**PA**の最適解になる.

証明

もし，λが全ての$b_k, k = 1, \ldots, n$以下であるなら，**KTM**のキューン・タッカー条件より$N_k = 0, k = 1, \ldots, n$が成り立つ．これは，条件$N \neq 0$に反する．さらに，分布関数の単調性から，$c_1$はある$b_k$に一致する．そこで**KTM**の解$\lambda$の範囲を調べる．**KTM**の(a), (b), (c)の条件また$\mu_k \geq 0$から，もし$\lambda \geq a_k$ならば，$N_k = T_k^0$であり，$\lambda \leq a_k$ならば$N_k = 0$である．さらにλがa_kとb_kの間に存在するならば，$N_k = F_k^{-1}\left(\frac{\lambda}{u_k - w_k}\right)$とする．$B > 0, N < T(= \sum_{k=1}^n T_k^0)$であるから，$\lambda$は$c_{\hat{n}}$以下である．よって，**PKTM**は$i = \hat{n}$となる前に終了する．このことは**PKTM**によって**PAM**の最適解が求まることを示している．ゆえに，$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$は$m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$を最小化する**PA**に最適解である.

証明終

定理 7.5　$(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u)$は上の問題の最適解であり，もし，$m(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u) \geq m(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$を満たすならば$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$も非劣転送配分方策となる.

証明

$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$が非劣転送配分方策でないと仮定すると，$\sup\{t > 0 | L((t - m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}))) > 0\} = m(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B})$であることから，次の条件を満たす$(\boldsymbol{N}^d, \boldsymbol{B}^d)$が存在する.

$$m(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o) > m(\boldsymbol{N}^d, \boldsymbol{B}^d) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}^d, \boldsymbol{B}^d) \tag{7.42}$$

$$\geq m(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u) \tag{7.43}$$

$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$と$(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u)$はそれぞれ**PA**と**PMA**の極小解である．$(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$は**PA**の非劣転送配分方策であり，$m(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o) \leq m(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u)$であるから，上の不等式は

成り立たない. もし, $(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u)$ が極小でないなら, 次の条件を満たす解 $(\boldsymbol{N}^v, \boldsymbol{B}^v)$ が存在する.

$$m(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u) > m(\boldsymbol{N}^v, \boldsymbol{B}^v) + t_0\alpha(\boldsymbol{N}^v, \boldsymbol{B}^v) \tag{7.44}$$

(7.44) は $(\boldsymbol{N}^u, \boldsymbol{B}^u)$ が **PMA** の最適解であることに矛盾する.

証明終

定理 7.5 は $(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$ がファジィマックス順序の意味では必ずしも最小になるとは限らないことを示している. しかし, 意思決定者が曖昧性の最小にする解を希求する場合には, $(\boldsymbol{N}^o, \boldsymbol{B}^o)$ は望ましい解であると思われる.

7.3 ファジィ費用と2種類の需要をもつ腐敗しやすい商品の在庫管理問題

次の在庫管理問題を考える.

1. 1期間, 1種類の腐敗しやすい商品を考える.

2. 発注は期間のはじめに行われ, 単位当たりの仕入れ値を c で表す.

3. 商品の使用期限は m 期間である.

4. 最も新鮮な商品 (使用期限の残りが m) のみ購入する客 (タイプ H と, 新しい商品と比べて値段が安ければ古い商品を購入する客 (タイプ L) とする. まずタイプ H の需要が優先され, 次に残った在庫でタイプ L の需要に応じる. タイプ L に対しては先入れ先出し方策を使用するものとする.

5. m 期間過ぎても売れ残っている在庫は廃棄処分される. 単位当たりの廃棄費用は次のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{\theta}}(t)$ で特性づけられる L ファジィ数 $\tilde{\theta}$ とする.

$$\mu_{\tilde{\theta}}(t) = \max\left\{L\left(\frac{t - m_\theta}{\alpha_\theta}\right), 0\right\}$$

ここで, L は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への型関数で, 次の条件を満足するものとする.

(a) $L(-t) = L(t), \quad t \in R$

(b) $L(t) = 1, \quad t = 0$のときのみ

(c) $L(\cdot)$は$[0, +\infty)$の範囲で非増加

(d) t_0はLの零点

ここで費用の性質から，一般性を失うことなく $m_\theta - t_0\alpha_\theta > 0$ と仮定することができる．

6. 在庫は期間の最初に起こる需要によって払い出される．モデルは1期間で求める．

7. それぞれの期間におけるタイプHの需要量を表す確率変数をD_j^Hとし，確率分布関数および確率密度関数をそれぞれ$F_j^H(\cdot)$，$f_j^H(\cdot)$とする．また，D_j^Hは互いに独立な非負の確率変数とし，$F_j^H(0) = f_j^H(0) = 0, j = 1, 2, \ldots, m$ であり0以外で連続であるものとする．

   また，それぞれの期間におけるタイプLの需要量を表す確率変数をD_j^Lとし，確率分布関数と密度関数をそれぞれ $F_j^L(\cdot)$, $f_j^L(\cdot)$ とする．確率変数および分布関数の満たす条件についてはタイプHと同様であるとする．

8. タイプHの需要, タイプLの需要に対する単位当たりの品切れ費用は, それぞれLファジィ数 $\tilde{p}_H = (m_{p_H}, \alpha_{p_H})_L$, $\tilde{p_L} = (m_{p_L}, \alpha_{p_L})_L$ として表される．ここで, $\tilde{p}_H \succeq \tilde{p}_L$とし, また, 単位当たりの保管費用を$h$とする．

9. 使用期限がk 残っている商品は単位当たりR_k, $k = 1, 2, \ldots, m$で売られ, $R_{k+1} \geq R_k$ とする．

モデルの定式化を行うにあたって次の記号を導入する．

x_i　:　i期間後に腐敗する手持在庫量

x　:　使用期限が$1 \sim m-1$残っている商品の量の合計

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} x_i$$

X_p　:　P期間後まで腐敗する手持ちを表すベクトル

$$X_p = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad 1 \leq p \leq m-1$$

$$X_0 = \phi$$

B_j	:	j期間後に腐敗する商品が全部払い出された後の満足されない全需要量
		$B_j = [D_j^L + B_{j-1} - x_j]^+,\ \ 1 \leq j \leq m-1$
		$B_0 = 0$
		但し, $[a]^+ = \max\{a,\, 0\}$
q_n	:	Q_nの確率密度関数
K	:	利益
		(売り値) − (必要経費)
L	:	必要経費
		(仕入れ値) + (廃棄費用) + (品切れ費用) + (保管費用)
$Q_n(u : X_{n-1})$	:	$Pr\{D_n^L + B_{n-1} \leq u\},\ 1 \leq n \leq m$

このとき, それぞれの費用および発注量は次のようになる.

1. 仕入れ値

単位当たりの仕入れ値と発注量との積に等しいことからcy となる.

2. 廃棄量

廃棄処分する商品の数をRとし, 1期間目の後の一番新しい商品の在庫量をWとするとNahmiasら[54]の結果より,

$$W = \begin{cases} y - D_1^H & (y > D_1^H) \\ 0 & (y \leq D_1^H) \end{cases} \tag{7.45}$$

となるため, Rの期待値$E(R)$は,

$$\begin{aligned} E(R) &= \int_0^y f_1^H(v)dv \int_0^{y-v} Q_m(u : X_{m-1})du \\ &= \int_0^y F_1^H(v) Q_m(y-v : X_{m-1})dv \end{aligned} \tag{7.46}$$

となる.

3. 品切れ量

(a) タイプHの品切れ量の期待値

$$\int_0^\infty (v-y) f_1^H(v)dv = \int_y^\infty v f_1^H(v)dv - y\{1 - F_1^H(y)\} \tag{7.47}$$

(b) タイプ L の品切れ量の期待値

$$\int_0^y f_1^H(v)\int_{y+x-v}^{\infty}(u+v-x-y)f_1^L(v)du\,dv$$
$$+\{1-F_1^H(y)\}\int_x^{\infty}(u-x)f_1^L(u)du \tag{7.48}$$

4. 保管量

保管する商品の量を G とすると,

$$G=\begin{cases}[y+x-D_1^H-D_1^L]^+ & (D_1^H<y)\\ [x-D_1^L]^+ & (D_1^H\geq y)\end{cases} \tag{7.49}$$

となるため, G の期待値 $E(G)$ は,

$$\begin{aligned}E(G) &= \int_0^y f_1^H(v)\int_0^{x+y}(x+y-u-v)f_1^L(u)du\,dv\\ &\quad+\{1-F_1^H(y)\}\int_0^x(x-u)f_1^L(u)du\end{aligned} \tag{7.50}$$

5. 売上量

使用期限が k 残っている商品の売り上げ量を U_k とし, 使用期限が k 以上残っている商品の売り上げ量を $\overline{U}_k$ とする.

まず D_1^H の値に関して場合分けをする.

(a) $D_1^H\geq y$ の場合

1期間目で全て売れるため, $U_m=y$, $U_k=0$, $k\neq m$ である.

(b) $D_1^H<y$ の場合

D_1^H の値に関してさらに次のように場合分けをする.

$$U_m=\begin{cases}D_1^H & (D_1^L\leq x)\\ D_1^H+D_1^L-x & (x<D_1^L<x+y-D_1^H)\\ y & (D_1^H+D_1^L\geq x+y)\end{cases} \tag{7.51}$$

したがって $\overline{U}_k$ の期待値 $E(\overline{U}_k)$ は, 次に表される関数となる.

$$E(\overline{U}_k)=\int_0^y\left\{(y-v)-\int_0^{y-v}Q_{m-k+1}\left(u+\sum_{j=m-k+1}^{m-1}x_j:X_{m-k}\right)du\right\}f_1^H(v)dv \tag{7.52}$$

ゆえに，U_kの期待値$E(U_k)$は(7.52)の結果を用いて次のように計算される.

$$\begin{aligned} E(U_k) &= E(\overline{U}_k) - E(\overline{U}_{k+1}) \quad (k \neq m) \\ &= \int_0^y f_1^H(v) \int_0^{y-v} \left\{ Q_{m-k} \left(u + \sum_{j=m-k}^{m-1} x_j : X_{m-k-1} \right) \right. \\ & \left. -Q_{m-k-1} \left(u + \sum_{j=m-k+1}^{m-1} x_j : X_{m-k} \right) \right\} du\, dv \end{aligned} \tag{7.53}$$

また, $k=m$の場合のU_mの期待値$E(U_m)$は次のようになる.

$$E(U_m) = y - \int_0^y f_1^H(v) \int_x^{x+y-v} F_1^L(u) dudv \tag{7.54}$$

以上の結果から, 期待利益$\tilde{K}$は, 次の形で表される.

$$\begin{aligned} \tilde{K}(y : X_{m-1}) &= \sum_{k=1}^{m-1} R_k \int_0^y f_1^H(v) \int_0^{y-v} \left\{ Q_{m-k} \left(u + \sum_{j=m-k}^{m-1} x_j : X_{m-k-1} \right) \right. \\ & \left. -Q_{m-n+1} \left(u + \sum_{j=m-k+1}^{m-1} x_j : X_{m-k} \right) \right\} dudv \\ & +R_m \left\{ y - \int_0^y f_1^H(v) \int_x^{x+y-v} F_1^L(u) dudv \right\} \\ & - \left[cy + h \left\{ \int_0^y f_1^H(v) \int_0^{x+y-v} (x+y-u-v) f_1^L(u) dudv \right. \right. \\ & \left. + (1 - F_1^H(y)) \int_0^x (x-u) f_1^L(u) du \right\} \\ & +\tilde{p_H} \left\{ \int_y^\infty v f_1^H(v) dv - y(1 - F_1^H(y)) \right\} \\ & +\tilde{p_L} \left\{ \int_0^y f_1^H(v) \int_{y+x-v}^\infty (u+v-x-y) f_1^L(u) dudv \right. \\ & \left. +(1 - F_1^H(y)) \int_x^\infty (u-x) f_1^L(u) du \right\} \\ & \left. + \tilde{\theta} \int_0^y F_1^H(v) Q_m(y-v : X_{m-1}) dv \right] \end{aligned} \tag{7.55}$$

廃棄費用, 品切れ費用がLファジィ数であるから, 拡張原理により$\tilde{K}(y : X_{m-1})$もLファジィ数$(m(y : X_{m-1}), \alpha(y : X_{m-1}))_L$となる. ここで, $m(y : X_{m-1})$および$\alpha(y : X_{m-1})$は次に表

される関数である.

$$\begin{aligned}
m(y:X_{m-1}) &= \sum_{k=1}^{m-1} R_k \int_0^y f_1^H(v) \int_0^{y-v} \left\{ Q_{m-k}\left(u + \sum_{j=m-k}^{m-1} x_j : X_{m-k-1}\right) \right. \\
&\quad \left. - Q_{m-n+1}\left(u + \sum_{j=m-k+1}^{m-1} x_j : X_{m-k}\right)\right\} du\, dv \\
&\quad + R_m \left\{ y - \int_0^y f_1^H(v) \int_x^{x+y-v} F_1^L(u) du\, dv \right\} \\
&\quad - \left[cy + h\left\{ \int_0^y f_1^H(v) \int_0^{x+y-v} (x+y-u-v) f_1^L(u) du\, dv \right.\right. \\
&\quad \left. + (1 - F_1^H(y)) \int_0^x (x-u) f_1^L(u) du \right\} \\
&\quad + m_{p_H} \left\{ \int_y^\infty v f_1^H(v) dv - y(1 - F_1^H(y)) \right\} \\
&\quad + m_{p_L} \left\{ \int_0^y f_1^H(v) \int_{y+x-v}^\infty (u+v-x-y) f_1^L(u) du\, dv \right. \\
&\quad \left. + (1 - F_1^H(y)) \int_x^\infty (u-x) f_1^L(u) du \right\} \\
&\quad \left. + m_\theta \int_0^y F_1^H(v) Q_m(y-v : X_{m-1}) dv \right]
\end{aligned} \tag{7.56}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(y:X_{m-1}) &= \alpha_{p_H} \left\{ \int_y^\infty v f_1^H(v) dv - y(1 - F_1^H(y)) \right\} \\
&\quad + \alpha_{p_L} \left\{ \int_0^y f_1^H(v) \int_{y+x-v}^\infty (u+v-x-y) f_1^L(u) dudv \right. \\
&\quad \left. + (1 - F_1^H(y)) \int_x^\infty (u-x) f_1^L(u) du \right\} \\
&\quad + \alpha_\theta \int_0^y F_1^H(v) Q_m(y-v : X_{m-1}) dv
\end{aligned} \tag{7.57}$$

廃棄費用と, 品切れ費用はファジィ数であり大小関係が定められていないため, 最適な発注量は一般的には存在しない. そこで前節と同様に, ファジィマックス順序を基礎にした非劣発注量を次に定義し, それらを求める方法を考える.

定義 7.6 次の条件を満たす$\hat{y}$ が存在しないとき, 発注量$\tilde{y}$ は非劣発注量と呼ばれる.

$$\tilde{K}(\tilde{y}:X_{m-1}) \preceq \tilde{K}(\hat{y}:X_{m-1})$$

$m(y:X_{m-1})$ を最大にする発注量 y^m と, $m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})$ を最大にする発注量 y^o は共に非劣発注量である. 次の定理からそれらは共にただ一つに決定されることがわかる.

定理 7.7 $m(y:X_{m-1})$ および $m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})$ は $y=0$ を除いて y に関する狭義凹関数である.

証明

狭義凸関数であることを証明するためには, $y=0$ を除いて

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 m(y:X_{m-1})}{\partial y^2}<0\\ \dfrac{\partial^2\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}}{\partial y^2}<0\end{array}\right. \tag{7.58}$$

であることを示せば十分である. まず, $m(y:X_{m-1})$ の y に関する1次偏導関数および2次偏導関数の計算結果は次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial m(y:X_{m-1})}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{m-1} R_k\int_0^y f_1^H(v)\left\{Q_{m-k}\left(y-v+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\right)\right.\\
&\quad\left.-Q_{m-k+1}\left(y-v+\sum_{j=m-k+1}^{m-1}x_j:X_{m-k}\right)\right\}dv\\
&\quad+R_m\left\{1-\int_0^y F_1^L(x+y-v)f_1^H(v)dv\right\}\\
&\quad-m_\theta\int_0^y F_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv-c\\
&\quad-h\int_0^y\int_0^{x+y-v} f_1^L(u)f_1^H(v)du\,dv-m_{p_H}(F_1^H(y)-1)\\
&\quad-m_{p_L}\int_0^y f_1^H(v)\{F_1^L(x+y-v)-1\}dv\end{aligned} \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 m(y:X_{m-1})}{\partial y^2} &= \sum_{k=1}^{m-1} R_k f_1^H(y)\left\{Q_{m-k}\left(\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\right)\right.\\
&\quad\left.-Q_{m-k+1}\left(\sum_{j=m-k+1}^{m-1}x_j:X_{m-k}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$+\int_0^y f_1^H(v)dv\left\{q_{m-k}\left(y-v+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j : X_{m-k-1}\right)\right.$$

$$\left.-q_{m-k-1}\left(y-v+\sum_{j=m-k+1}^{m-1}x_j : X_{m-k}\right)\right\}-R_m\left\{F_1^L(x)f_1^H(y)\right.$$

$$\left.+\int_0^y f_1^L(x+y-v)f_1^H(v)dv\right\}$$

$$-m_\theta\int_0^y f_1^H(v)q_m(y-v : X_{m-1})dv-m_{p_H}f_1^H(y)$$

$$-h\left\{F_1^L(x)f_1^H(y)+\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv\right\}$$

$$-m_{p_L}\left\{\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv+f_1^H(y)(F_1^L(x)-1)\right\} \quad (7.60)$$

ここで, $Q_1(u:\phi)$, $q_1(u:\phi)$ の定義より, 次のことが成り立つ.

$$Q_1(x:\phi) \;=\; P_r(D_1^L+B_0\le x)=\int_0^x f_1^L(u)du=F_1^L(x) \quad (7.61)$$

$$q_1(x+y-v:\phi) \;=\; \frac{dQ_1(u:\phi)}{du}\Big|_{u=x+y-v}=f_1^L(x+y-v) \quad (7.62)$$

よって, (7.60) において次の計算式が成り立つ.

$$R_m\{F_1^L(x)f_1^H(y)+\int_0^y f_1^L(x+y-v)f_1^H(v)dv\}$$

$$= R_m\{Q_1(x)f_1^H(y)+\int_0^y q_1(x+y-v:\phi)f_1^H(v)dv\} \quad (7.63)$$

(7.63) を (7.60) に代入し, まとめると次の形になる.

$$\frac{\partial^2 m(y:X_{m-1})}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{m-1}(R_k-R_{k+1})f_1^H(y)\left[Q_{m-k}\left(\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j : X_{m-k-1}\right)\right.$$

$$\left.+\int_0^y f_1^H(v)dv\left\{q_{m-k}\left(y-v+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j : X_{m-k-1}\right)\right\}\right]$$

$$-m_\theta\int_0^y f_1^H(v)q_m(y-v : X_{m-1})dv$$

$$-h\left\{F_1^L(x)f_1^H(y)+\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv\right\}$$

$$-f_1^H(y)\{m_{p_H}-m_{p_L}+m_{p_L}F_1^L(x)\}$$

$$-m_{p_L}\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv \tag{7.64}$$

売値に関する仮定$R_{k+1} \geq R_k$より第1項は負であり，後の項についてもそれぞれ係数が負であることから，全体としては負になる．すなわち，

$$\frac{\partial^2 m(y:X_{m-1})}{\partial y^2} < 0 \tag{7.65}$$

が成り立つ．次に$\alpha(y:X_{m-1})$のyに関する第2次偏導関数を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \alpha(y:X_{m-1})}{\partial y^2}\\
&= \alpha_\theta \int_0^y f_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv + \alpha_{p_H} f_1^H(y)\\
&\quad +\alpha_{p_L}\left\{\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv + f_1^H(y)(F_1^L(x)-1)\right\}
\end{aligned} \tag{7.66}$$

(7.60)および(7.66)を用いると次の計算式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}}{\partial y^2}\\
&= \sum_{k=1}^{m-1}(R_k-R_{k+1})f_1^H(y)\left[Q_{m-k}\left(\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\right)\right.\\
&\quad \left.+\int_0^y f_1^H(v)dv\left\{q_{m-k}\left(y-v+\sum_{j=m-k}^{m-1}x_j:X_{m-k-1}\right)\right\}\right]\\
&\quad -(m_\theta-t_0\alpha_\theta)\int_0^y f_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv\\
&\quad -h\left\{F_1^L(x)f_1^H(y)+\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv\right\}\\
&\quad -\{(m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H})-(m_{p_L}-t_0\alpha_{p_L})\}f_1^H(y)\\
&\quad -(m_{p_L}-t_0\alpha_{p_L})F_1^L(x)f_1^H(y)\\
&\quad -(m_{p_L}-t_0\alpha_{p_L})\int_0^y f_1^H(v)f_1^L(x+y-v)dv
\end{aligned} \tag{7.67}$$

ここで，

$$\tilde{p}_H \geq \tilde{p}_L,\quad m_\theta - t_0\alpha_\theta > 0,\quad m_{p_L}-t_0\alpha_{p_L} > 0,\quad m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H} > 0 \tag{7.68}$$

なる仮定から，

$$\frac{\partial^2\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}}{\partial y^2}<0 \tag{7.69}$$

となることがわかる．

証明終

定理7.7より y^m, y^o がただ一つ存在することがわかる．

定理 7.8　y^m が $[0,\infty)$ の範囲に存在する．

$$y^m=\begin{cases}\hat{y} & (R_m+m_{p_H}-c>0)\\ 0 & (R_m+m_{p_H}-c\leq 0)\end{cases}$$

ただし，$\hat{y}$ は $\partial m(y:X_{m-1})/\partial y=0$ の解である．

同様に，y^o が $[0,\infty)$ の範囲に存在する．

$$y^o=\begin{cases}\tilde{y} & (R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c>0)\\ 0 & (R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c\leq 0)\end{cases}$$

ただし，$\tilde{y}$ は $\partial\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}/\partial y=0$ を満たす解である．

証明

まず，$y=0$ において次の計算式が成り立つことがわかる．

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial m(y:X_{m-1})}{\partial y}=R_m+m_{p_H}-c=\begin{cases}>0 & (R_m+m_{p_H}-c>0)\\ \leq 0 & (R_m+m_{p_H}-c\leq 0)\end{cases} \tag{7.70}$$

次に，$y=\infty$ において次のことが示される．

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty}\frac{\partial m(y:X_{m-1})}{\partial y} &= \lim_{y\to\infty}\{-c-m_\theta\int_0^y F_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv\\ &\quad -h\int_0^y\int_0^{x+y-v} f_1^L(u)f_1^H(v)du\,dv\}\\ &= -c-h-m_\theta\lim_{y\to\infty}\int_0^y f_1^H(v)Q_m(y-v:X_{m-1})dv\\ &= -c-h-m_\theta\int_0^\infty f_1^H(v)dv\\ &= -c-h-m_\theta<0\end{aligned}$$

これは定理7.8の前半部分を証明している．$m(y:X_{m-1})$ のグラフは図7.1, 図7.2で表される．後半部分も同様に証明される．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t_0\alpha(y:X_{m-1})}{\partial y}\\
&= t_0[\alpha_\theta\int_0^y F_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv\\
&\quad +\alpha_{p_H}(F_1^H(y)-1)+\alpha_{p_L}\int_0^y f_1^H(v)\{F_1^L(x+y-v)-1\}dv] \qquad (7.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+0}\frac{\partial t_0\alpha(y:X_{m-1})}{\partial y} &= -t_0\alpha_{p_H} &(7.72)\\
\lim_{y\to\infty}\frac{\partial t_0\alpha(y:X_{m-1})}{\partial y} &= t_0\alpha_\theta &(7.73)
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to+0}\frac{\partial\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}}{\partial y}\\
&= R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c=\begin{cases} >0 & (R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c>0)\\ \le 0 & (R_m+m_{p_H}-t_0\alpha_{p_H}-c\le 0)\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty}\frac{\partial\{m(y:X_{m-1})+t_0\alpha(y:X_{m-1})\}}{\partial y} &= -c-h-m_\theta+t_0\alpha_\theta\\
&= -c-h-(m_\theta-t_0\alpha_\theta)
\end{aligned}$$

仮定より $m_\theta-t_0\alpha_\theta>0$ であるから，$-c-h-(m_\theta-t_0\alpha_\theta)<0$ である．

証明終

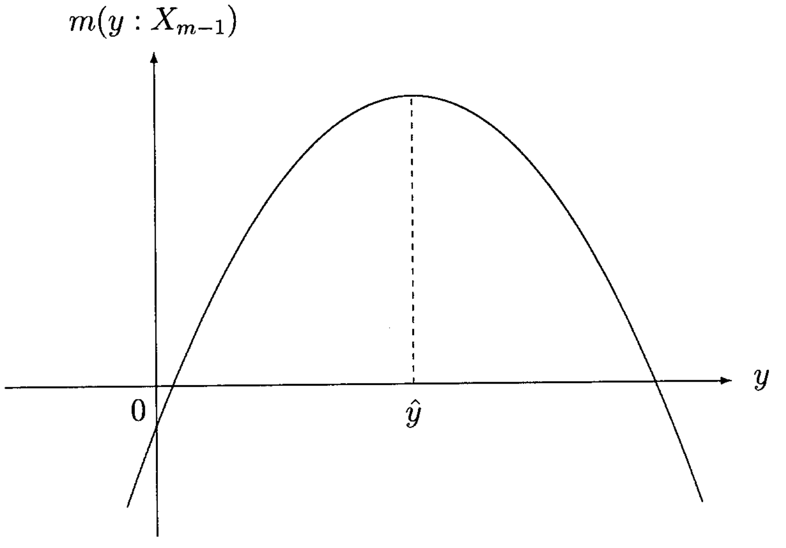

図7.1　$m(y : X_{m-1})$のグラフ　（$R_m + m_{p_H} - c > 0$の時）

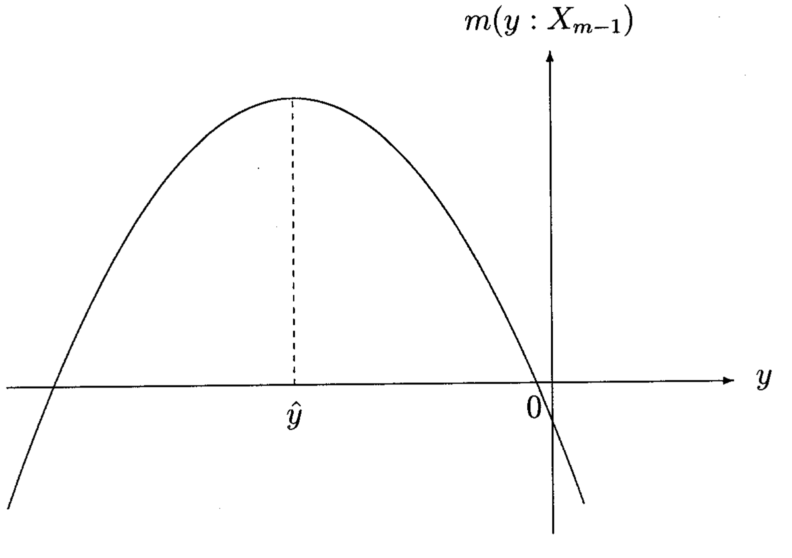

図 7.2　$m(y : X_{m-1})$のグラフ　（$R_m + m_{p_H} - c \leq 0$の時）

定理 7. 9 廃棄費用の曖昧性のみを考慮した場合は$R_m + m_{p_H} - c > 0$のとき $y^o > y^m$ であり, その他の場合には $y^o = y^m = 0$ である.

証明

$m(y : X_{m-1}) + t_0\alpha(y : X_{m-1})$の$y$に関する第1次導関数の計算式は次で表される.

$$\frac{\partial\{m(y : X_{m-1}) + t_0\alpha(y : X_{m-1})\}}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial m(y : X_{m-1})}{\partial y} + t_0\alpha_\theta \int_0^y F_1^H(v) q_m(y - v : X_{m-1}) dv \tag{7.74}$$

$y > 0$において

$$t_0\alpha_\theta \int_0^y F_1^H(v) q_m(y - v : X_{m-1}) dv > 0 \tag{7.75}$$

であることから明らかである.

証明終

定理7. 9は, 廃棄費用の曖昧さが含まれるときには発注量を増やすべきであるということを示している.

定理 7. 10 品切れ費用の曖昧性のみを考慮した場合は$R_m + m_{p_H} - c > 0$のとき$y^o < y^m$であり, その他の場合には $y^o = y^m = 0$ である.

証明

$$\frac{\partial\{m(y : X_{m-1}) + t_0\alpha(y : X_{m-1})\}}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial m(y : X_{m-1})}{\partial y} + t_0 \left[\alpha_{p_H}(F_1^H(y) - 1) + \alpha_{p_L} \int_0^y f_1^H(v)\{F_1^L(x + y - v) - 1\} dv\right]$$

であり, $y > 0$ 即ち$R_m + m_{p_H} - t_0\alpha_{p_H} - c > 0$のとき,

$$t_0 \left[\alpha_{p_H}(F_1^H(y) - 1) + \alpha_{p_L} \int_0^y f_1^H(v)\{F_1^L(x + y - v) - 1\} dv\right] < 0 \tag{7.76}$$

であることから明らかである. また, $c - m_{p_H} \le R_m \le c - m_{p_H} + t_0\alpha_{p_H}$ のとき, $0 = y^0 < y^m$である. ゆえに $R_m + m_{p_H} - c > 0$のとき, $y^0 < y^m$が成り立つ.

証明終

定理7.10は，品切れ費用の曖昧さが含まれるときには発注量を減らすべきであるということを示している．廃棄費用と品切れ費用の二つの曖昧さを同時に考慮に入れる場合には一般にはどちらとも言えず，

$$t_0\left[\alpha_{p_H}(F_1^H(y)-1)+\alpha_{p_L}\int_0^y f_1^H(v)\{F_1^L(x+y-v)-1\}dv+\alpha_\theta\int_0^y F_1^H(v)q_m(y-v:X_{m-1})dv\right]$$

の正負によって決まる．

7.4 結言

本章では在庫管理問題において費用の曖昧性を考慮に入れたモデルを考えた．費用の曖昧性のために期待利益もまた確定値ではなくファジィ数として表される．この場合，期待利益を最大化する解を求める従来の方法をそのまま適用することはできないため，ファジィマックス順序の基づいた非劣解を定義し，それらのいくつかを求める解法を示した．本章では品切れ費用と廃棄費用の曖昧性についてのみ考慮したが現実には，その他の費用も曖昧であることが多い．Ishiiら[29]は，倉庫の制約量や固定発注費用についても考えているが，それらの要因に曖昧さを導入したモデルについても考えていく必要がある．さらに，調達期間は交通事情等によって変化するため確定的ではないと考えられ，その曖昧さを考慮したモデルについて検討することにより，より現実に近い問題の定式化を行うことができると思われる．

第8章

結論

本研究では不確実性と不確定性が同時に存在する状況下での意思決定問題において，ファジィランダム変数を用いた有効な意思決定法を提案し，効率的な数理的解法を構築した．

第2章で述べたように，これまで不確実性や不確定性が存在する状況下での意思決定法は，それぞれ確率計画法，ファジィ数理計画法といった形で別々に扱われており，不確実性と不確定性を同時に考慮した研究はあまり行われてこなかった．本研究で提案した意思決定法はランダム性とファジィ性に関する情報を有効に利用したものであり，様々な問題に対し応用できるものと考える．第3章以降で提案した意思決定法は可能性測度に関する機会制約条件計画であるが，必然性測度に関しても同様に考えることができる．これらの意思決定法は確率計画法とファジィ数理計画法の中の特に可能性計画法を拡張したものになっているが，どちらかといえば確率計画法からの発展とみなすことができる．意思決定問題における価値基準の多様化にともない，ファジィ性とランダム性の2つの情報を十分に生かすことのできる新たな意思決定法を考えていくことが今後の課題の一つである．第4章では第3章で定式化したファジィランダム線形計画法を基にポートフォリオ問題における単一指数モデルに対しファジィランダム変数の導入を行った．このモデルによって各証券の収益率がもつ確率的な情報だけでなく，熟練者の経験や直感などを反映した意思決定を行うことができる．これからの高齢化社会を支える年金は生命保険，信託銀行等に預託され，市場で運用されており，今後より現実的なモデルを構築していく必要があると思われる．

第5章および第6章ではそれぞれ，組合せ最適化問題への応用としてナップサック問題とスパニングツリー問題を扱い，問題の構造を十分に利用した効率的なアルゴリズムを開発した．組合せ最適化問題に対するファジィランダム変数の応用は我々が知る限り皆無で

あるが, 最短経路問題, シェアリング問題, 輸送問題などについても研究を進める必要がある. ファジィランダムスパニングツリー問題に対するアルゴリズムでは組合せ幾何学における3次元のk-集合問題と深く関わっている. 3次元のk-集合問題はこれまで主だった応用が見当たらないこともあり, あまり研究されてこなかったが, 応用を見出したという点で本研究の成果がその分野の発展に寄与できるものと考える.

第7章では曖昧なコストをもつ腐敗しやすい商品の在庫問題を扱った. ある一定の期間が経つと価値を失うという点で, 流行商品や情報なども腐敗しやすい商品として扱うことができるものと思われる.

不確実・不確定性を同時に存在する状況下での意思決定法に関する研究はまだ始まったばかりであるが, 現代における社会システムの複雑化, 意思決定者の選好の多様化などにより今後さらなる研究が必要と思われる. システムに内在する不確実性を考慮し, 同時に熟練者の有用な知識を利用することは, 費用や時間の観点からも合理的であり, 現実の問題を解くための有効な方法の一つであると考える. そういった意味でファジィランダム変数の果たす役割は大きく, 今後ますます研究が必要であると思われる. 不確実性・不確定性を考えることによって従来のモデルに比べ, モデルの複雑性が増大することは避けられないが, それらが解にどのような影響を与えるかについて調べることはモデルを構築する上で非常に重要なことであり, より現実的なモデルを考える上で不可欠である. 本研究での成果はその意味でも重要であり, また, さらに発展させていく必要があると思われる.

謝 辞

本論文は大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻において著者が在学中に行った研究の成果をまとめたものである.

著者がこの分野に興味をもち, 研究室を訪ねたとき以来, 様々な面で直接, 御指導御助言を頂きました本学大学院工学研究科教授 石井博昭先生に厚く御礼申し上げます.

本学大学院工学研究科教授 伊東一良先生, 河田聡先生, 同助教授 大中幸三郎先生, 同講師 菅誠一郎先生には本論文作成にあたり細部にわたり御指導頂き，また貴重な御助言を頂きましたことに心より感謝申し上げます.

本学大学院工学研究科講師 齋藤誠慈先生，同助手 都田艶子先生には本研究の遂行，及び本論文の作成において，終始適切な御指導御助言をいただきました．ここに深く感謝申し上げます.

神戸学院大学教授 塩出省吾先生，鹿児島大学助教授 新森修一先生, 流通科学大学講師 伊藤健先生, 神戸学院大学講師 毛利進太郎先生には本学大学院工学研究科在籍時より, 本研究の遂行において適切な御指導御助言を頂きました．ここに厚く御礼申し上げます.

学友でもあり良き先輩でもありました本学大学院工学研究科 小出武氏を始めとする石井研究室の皆様には貴重なご意見を頂きました．ここに心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] E.M. Beale, On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities, *Journal of Royal Statistical Society SER. B* **17** (1955) 173-184.

[2] C. Berge and A. Ghouila-Hour, *Programming, Games and Transportation in Networks*, John Wiley (1965).

[3] A. Charnes and W.W. Cooper, Programming with Linear Fractional Functionals, *Information and Control* **8** (1962) 338-353.

[4] D. Cherition and R.E. Tarjan, Finding Minimum Spanning Trees, *SIAM Journal of Computing* **5** (1976) 724-742.

[5] G.B. Dantzig, Linear Programing under Uncertainty, *Management Science* **1** (1955) 197-206.

[6] T.K. Dey, On counting triangulations in d dimensions, *Discrete and Computational Geometory* **12** (1994) 281-289.

[7] T.K. Dey, Improved bounds for planar k-set and related problems,*Discrete and Computational Geometry* **19** (1998) 373-382.

[8] H. Dinkelbach, Nonlinear Fractional Programming, *Management Science* **13** (1967) 492-498.

[9] D. Dudois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press, (1980).

[10] D. Dubois and H. Prade, Systems of Linear Fuzzy Constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, **3** (1980) 37-48.

[11] D. Dubois and H. Prade, *Possibility Theory, an Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum (1988).

[12] D. Fernadez-Baca, G. Slutzki and D. Eppstein, Using Sparsification for Parametric Minimum Spanning Tree Problems, *Nordic Journal of Computing* **3** (1996) 352-366.

[13] T. Fukuda, On a Class of Fuzzy Random Vectors, *Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems* **10** (1998) 499-505.

[14] N. Furukawa, A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem, *Optimization* **10** (1994) 367-377.

[15] H.N. Gabow, Z. Galil, T. Spencer and R.E. Tarjan, Efficient Algorithms for Finding Minimum Spanning Trees in Undirected and Directed graphs, *Combinatorica* **6** (1986) 109-122.

[16] S. Geetha and K.P.K. Nair, On Stochastic Spanning Tree Problem, *Networks* **23** (1993) 675-679.

[17] M.A. Gil, M. Lopez-Daiz and H. Lopez-Garcia, The Fuzzy Hyperbolic Inequality Index Associated with Fuzzy Random Variables, *European Journal of Operational Research* **110** (1998) 377-391.

[18] Helgason, J. Knennington and H. Lall, A Polynomially Bounded Algorithm for A Singly Constrained Quadratic Program, *Mathematical Programming* **18** (1980) 338-343.

[19] S. Hulsuker, M.P. Biswal and S.B. Sinha, Fuzzy Programming Approach to Multi-objective Stochastic Linear Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems* **88** (1997) 173-181.

[20] C.-M. Hwang and J.-S. Yao, Independent Fuzzy Random Variables and Their Application, *Fuzzy Sets and Systems* **82** (1996) 335-350.

[21] 乾口雅弘, ファジィ数理計画問題の可能性理論に基づく体系的定式化法, 大阪府立大学博士論文 (1991).

[22] M. Inuiguchi, Relationships between modality constrained programming problems and various fuzzy mathematical programming problems, *Fuzzy Sets and Systems* **49** (1992) 243-259.

[23] M. Inuiguchi, Fuzzy linear programming : What, Why and How ?, *Tatra Moutains Mathematical Publications* **13** (1997) 123-167.

[24] M. Inuiguchi and M. Sakawa, A possibilistic linear program is equivalent to a stochastic program in a special case, *Fuzzy Sets and Systems* **76** (1995) 309-317.

[25] H. Ishii, Perishable inventory problem with two types of customers and different selling prices, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **36** (1993) 199-205.

[26] H. Ishii, T. Ibaraki and H. Mine, Fractional Knapsack Problems, *Mathematical Programming* **13** (1977) 255-271.

[27] H. Ishii and T. Konno, A Stochastic Inventory Problem with Fuzzy Shortage Cost, *European Journal of Operational Research* **106** (1998) 90-94.

[28] H. Ishii and T. Nishida, Stochastic bottleneck spanning tree problem, *Networks* **13** (1983) 443-449.

[29] H. Ishii and T. Nose, Perishable Inventory Control with Two Types of Customers and Different Selling Prices under the Warehouse Capacity Constraint, *International Journal of Production Economics* **44** (1996) 167-176.

[30] H. Ishii, T. Nose, S. Shiode and T. Nishida, Perishable inventory management subject to stochastic lead-time, *European Journal of Operational Research* **8** (1981) 76-85.

[31] H. Ishii, S. Shiode and T. Nishida, Chance constrained spanning tree problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **24** (1981) 147-157.

[32] H. Ishii, S. Shiode, T. Nishida and K. Iguchi, An Algorithm for Partially Constrained E-Model, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **22** (1979) 233-256.

[33] H. Ishii, S. Shiode, T. Nishida and Y. Namasuya, Stochastic spanning tree problem, *Discrete Applied Mathematics* **3** (1981) 263-273.

[34] T. Itoh and H. Ishii, Fuzzy Two-stage Problem by Possibility Measure, *MATHEMATICA JAPONICA* **46** (1997) 279-288.

[35] 伊藤健, 石井博昭, 必然性測度に基づくファジィ・スパニング・ツリー問題の一解法, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **39** (1996) 247-256.

[36] H. Katagiri and H. Ishii, Fuzzy Random Bottleneck Spanning Tree Problem, *In Proceedings of Distributed Computer Communication Networks : Theory and Applications* (1997) 101-111.

[37] H. Katagiri and H. Ishii, Some Inventory Problem with Fuzzy Shortage Costs, *Fuzzy Sets and Systems* **111** (1999) 87-97.

[38] H. Katagiri and H. Ishii, Chance Constrained Bottleneck Spanning Tree Problem with Fuzzy Random Edge Costs, *Journal of the Operations Research Society of Japan* (accepted).

[39] H. Katagiri and H. Ishii, Linear Programming Problem with Fuzzy Random Constraint, *MATHEMATICA JAPONICA* (accepted).

[40] A. Kaufmann and M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*, Van Nostrand (1985).

[41] J. B. Jr. Kruskal, On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem. *Proceedings of AMS* **7** (1956) 45-50.

[42] R. Kruse and K. D. Meyer, *Statistics with Vague Data*, D. Reidel (1987).

[43] H. Kwakernaak, Fuzzy random variable-1. Definitions and theorems, *Information Sciences* **15** (1978) 1-29.

[44] C.E. Lemke, Bimatrix Eqilibrium Points and Mathematical Programming, *Management Science* **11** (1965) 681-689.

[45] S. Li and Y. Ogura, Fuzzy random rariables, conditional expectations and fuzzy valued martingales, *Journal of Fuzzy Mathematics* **4** (1996) 905-927.

[46] M. K. Luhandjula, Linear programming under randomness and fuzziness, *Fuzzy Sets and Systems* **10** (1983) 45-55.

[47] M.K. Luhandula, Fuzziness and randomness in an optimization framework, *Fuzzy Sets and Systems* **77** (1996) 291-297.

[48] H. Markowits, *Portfolio Selection*, A Cowles Foundation Monograph (1959).

[49] N. Megiddo, Combinatorial optimization with rational objective function, *Mathematics of Operations Research* **4** (1979) 414-424.

[50] R.H. Mohamed, A chance-constrained fuzzy goal program, *Fuzzy Sets and Systems* **47** (1992) 183-186.

[51] S. Nahmias, *Optimal and approximate ordering policies for a perishable product subject to stochastic demand*, Doctoral Dissertation, University of Northwestern (1972).

[52] S. Nahmias, Optimal Ordering Policies for Perishable Inventory-2, *Operations Research* **23** (1975) 735-749.

[53] S. Nahmias, Perishable inventory theory: A review, *Operations Research* **30** (1982) 680-708.

[54] S. Nahmias and W. Pierskalla, Optimal Ordering Policies for a Product that Perishes in Two Periods subject to Stochastic Demand, *Naval Research Logistics Quarterly* **20** (1973) 207-229.

[55] C. V. Negoita and M. Sularia, On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning, *ECECSR Journal* **1** (1976) 3-14.

[56] T. Nose, H. Ishii and T. Nishida, Some properties of perishable inventory control subject to stochastic lead-time, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **24** (1981) 110-135.

[57] T. Nose, H. Ishii and T. Nishida, LIFO allocation problem for perishable commodities, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **26** (1983) 135-145.

[58] Z. Oiao, Y.Zhang and G. Wang, On fuzzy random linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* **65** (1994) 31-49.

[59] G.P. Prastacos, Optimal myopic allocation of a product with fixed lifetime, *Journal of the Operational Research Society* **29** (1978) 905-913.

[60] G.P. Prastacos, LIFO distribution systems, *Journal of the Operational Research Society* **30** (1979) 539-546.

[61] G.P. Prastacos, Allocation of perishable product inventory, *Operations Research* **29** (1981) 95-107.

[62] R.C. Prim, Shortest connection networks and some generalizations, *The Bell System Technical Journal* **36** (1957) 1389-1401.

[63] M.L. Puri and D. A. Ralescu, The concept of normality for Fuzzy random variables, *The Annals of Probability* **13** (1985) 1373-1379.

[64] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Fuzzy random variables, *Journal of Mathematiccal Analysis and Application* **114** (1986) 409-422.

[65] M. Robens and J. Teghem Jr., Comparison between multiobjective fuzzy linear programming and multiobjective stochastic programming, *in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **310** (1988) 240-265.

[66] M. Roubens and J. Teghem Jr., Comparison of methodologies for fuzzy and stochastic multi-objective programming, *Fuzzy Sets and Systems* **46** (1991) 119-132.

[67] M. Sakawa, H. Yano and T. Yumine, An Interactive fuzzy Satisficing Method for Multiobjective Linear-Programming Problems and Its Applications, *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics* **17** (1987) 654-661.

[68] 坂和正敏，矢野均，ファジィパラメータを含む多目的線形計画問題に対する統一的アプローチ，電子情報通信学会誌，**71** (1988) 1569-1575.

[69] W.F. Sharpe, A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science* **9** (1963) 277-293.

[70] I.M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company (1984).

[71] 菅野道夫, ファジィ測度とファジィ積分, 計測自動制御学会論文集, **8** (1972) 218-226.

[72] H. Tanaka, H. Ichihashi and K. Asai, A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem Based on Comparison of Fuzzy Numbers, *Control and Cybernetics* **30** (1984) 185-194.

[73] 田中英夫, 奥田徹示, 浅井喜代治, ファジィ数理計画法, 計測自動制御学会論文集, **9** (1973) 607-623.

[74] J. Tobin, Liquidity preference as behavior towards risk, *Revolution of Economical Studies* **25** (1959) 65-87.

[75] G. Wang and Z. Oiao, Linear programming with fuzzy random variable coefficient, *Fuzzy Sets and Systems* **57** (1993) 295-311.

[76] G. Wang and Y. Zhang, The theory of fuzzy stochastic process, *Fuzzy sets and Systems* **51** (1992) 161-178.

[77] N. Watanabe, Fuzzy Random Variables and Statistical Inference, *Journal of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems* **8** (1996) 126-135.

[78] A. C. Yao, An $O(|E| \log\log |V|)$ algorithm for finding minimum spanning trees, *Information Processing Letters* **4** (1975) 21-23.

[79] A. V. Yazenin, Fuzzy and Stochastic Programming. *Fuzzy Sets and Systems* **22** (1987) 171-180.

[80] 横山哲男，太田英一，山口俊和，ファジィ目標を用いた多目的確率制約条件計画問題, 日本ファジィ学会 **6** (1994) 1193-1201.

[81] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control* **8** (1965) 338-353.

[82] L.A. Zadeh, Probability measures of fuzzy events, *Journal of Mathematical Analysis and Application* **23** (1968) 421-427.

[83] C. Zhong and Z. Guohua, The equivalence of two definitions of fuzzy random variable, *Preprints of Second IFSA Congress* (1986) 59-62.

[84] Q. Zhong and G.-Y. Wang, On solutions and distribution problems of the linear programming with fuzzy random variable coefficients, *Fuzzy Sets and Systems* **58** (1993) 155-170.

[85] H.J. Zimmermann, Description and Optimization of Fuzzy Systems, *International Jounal of General Systems* **2** (1976) 209-215.

著者発表論文

1. Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, Some Inventory Problem with Fuzzy Shortage Costs, *Fuzzy Sets and Systems* **111**(1) (2000) 87-97.

2. Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, Chance Constrained Bottleneck Spanning Tree Problem with Fuzzy Random Edge Costs, *Journal of the Operations Research Society of Japan* (accepted).

3. Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, Linear Programming Problem with Fuzzy Random Constraint, *MATHEMATICA JAPONICA* (accepted).

4. Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, Fuzzy Inventory Problem with Perishable Commodity, *European Journal of Operationnal Research* (投稿中).

5. Hideki Katagiri and Hiroaki Ishii, Fuzzy Random Bottleneck Spanning Tree Problem, *Fuzzy Sets and Systems* (投稿中).

6. Hiroaki Ishii and Hideki Katagiri, Fuzzy Random Knapsack Problem, *Fuzzy Sets and Systems* (投稿準備中).