The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ステレオ法に基づく最小自乗法と幾何学的な解による小線源位置決定法
Author(s)	田伏, 勝義; 伊藤, 進; 砂倉, 瑞良 他
Citation	日本医学放射線学会雑誌. 1993, 53(4), p. 463-468
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/20485
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

日本医放会誌：53（4），463-468，1993（平5）

ステレオ法に基づく最小自乗法と幾何学的な解による小線源位置決定法

1）埼玉県立がんセンター放射線治療部
2）放射線医学総合研究所臨床研究部
3）本島病院
4）東京都立医療技術短期大学

田伏　勝義[1)]　伊藤　進[1)]　砂倉　瑞良[1)]　楮本　智子[1)]
中村　譲[2)]　飯沼　武[2)]　荒居　龍雄[3)]　入船　寅二[4)]

（平成4年7月1日受付）
（平成4年8月27日最終原稿受付）

Determination of the Point Position for Brachytherapy from the Shift-Projection Method Using the Least squares Method and Geometrical Solutions

Katsuyoshi Tabushi[1)], Susumu Itoh[1)], Mizuyoshi Sakura[1)], Tomoko Kazumoto[1)], Yuzuru Nakamura[2)], Takeshi Iinuma[2)], Tatsuo Arai[3)] and Toraji Irifune[4)]

1) Department of Radiotherapy, Saitama Cancer Center
2) Division of Clinical Research, National Institute of Radiological Sciences
3) Motojima Hospital
4) Metropolitan College of Allied Medical Sciences

Research Code No. : 200

Key Words : Shift-projection method, Brachytherapy, Sealed small source, Least squares method, Geometrical solution

We have derived formulas by the least squares method and six sets of geometrical solutions for calculating the position for brachytherapy from shift-projection images on one or two films. There are four types of expression for each coordinate in both methods, the shift-film technique with double exposures on a film and the stereo-shift technique with two films. Some geometrical solutions for the shift-film technique are equal to well-known conventional formulas. In the case of the stereo-shift technique, each conventional formula for the two coordinates is equal to the mean of the two geometrical solutions of each coordinate, and the one for the other coordinate is equal to one of the geometrical solutions. Formulas for the shift-film technique can be easily reduced to those for the stereo-shift technique. The error of the position calculated by the least squares method was the smallest among all the formulas for the shift-film technique in simulation.

1．緒　言

小線源治療における位置計算は，一般に正側2方向撮影法あるいはステレオ撮影法が用いられていた．正側2方向撮影法を用いた幾何学的な計算式は，従来から用いられていたものをも含め統一的な計算式の一群として，最小自乗法による計算

式とともに本誌にすでに報告した[1]．ステレオ撮影法についての論文，あるいは資料として真崎[2]，速水ら[3),4)]，尾内ら[5]，Godden[6]によるもの等がある．速水らは線源座標の入力にステレオ法を用いる時の誤差について，臨床とシミュレーション両方で検討して報告している．それらの文献によると，ステレオ撮影法は正側2方向撮影法よりも線源のマッチングが容易に行える．現在ステレオ撮影法を採用している施設は少ないと言われているが[7]，ステレオ法についても同様に，複数の幾何学的な計算式と最小自乗法による厳密解が得られたので報告する．これらのほとんどが今迄示されていない計算式である．ステレオ法は1枚のフィルムに二重曝射する方法と，2枚のフィルムに別々の像として撮影する方法がある．表示式が比較的簡単である前者を変換して後者は容易に得られる．その変換に必要な幾何学的な関係式も示す．さらに4つの像座標のみが誤差をもつとして，二重曝射法のシミュレーションで最小自乗法の解と幾何学的な計算式による誤差の伝播の比較を行う．

2. 幾何学的な解

X線はFig. 1のごとく，(0, 0, f)と$(2x_0, 2y_0, f)$の2点で曝射する．fはターゲットからフィルム面までの距離である．X線管はX座標で$2x_0$，Y座標で$2y_0$移動し，それぞれS_X，S_Yで表される．フィルムはXY面上にあるとする．

2.1. 二重曝射法 (Shift-film technique with double exposures)

点Pの空間座標は(x, y, z)，投影1と2によるその像座標をそれぞれ(x_1, y_1)，(x_2, y_2)とする．点Pと投影1による点Pの像の座標面上の射影像より次の関係式が得られる．

$$yf+zy_1=y_1f \tag{1}$$

$$xf+zx_1=x_1f \tag{2}$$

$$xy_1-yx_1=0 \tag{3}$$

これらを1群とし，このうち任意の2式が独立で残りものはこの2式より得られる．

投影2より同様に各座標面上で，

$$yf-z(S_Y-y_2)=y_2f \tag{4}$$

$$xf-z(S_X-x_2)=x_2f \tag{5}$$

$$x(S_Y-y_2)-y(S_X-x_2)=x_2S_Y-y_2S_X \tag{6}$$

Table 1 Six sets of geometrical solutions for calculating the point coordinates using shift-film technique with double exposures

Combinations of geometrical equations	Equations for each coordinate based on combinations		
(1), (3), (4)	$X^{(1)}=\frac{X_1S_Y^*}{S_Y+(Y_1-Y_2)}$	$Y^{(1)}=\frac{Y_1S_Y}{S_Y+(Y_1-Y_2)}$	$Z^{(1)}=\frac{f(Y_1-Y_2)}{S_Y+(Y_1-Y_2)}$
(1), (3), (5)	$X^{(2)}=\frac{X_1S_X^*}{S_X+(X_1-X_2)}$	$Y^{(2)}=\frac{Y_1S_X}{S_X+(X_1-X_2)}$	$Z^{(2)}=\frac{f(X_1-X_2)}{S_X+(X_1-X_2)}$
(1), (3), (6)	$X^{(3)}=\frac{X_1(X_2S_Y-Y_2S_X)}{X_1(S_Y-Y_2)-Y_1(S_X-X_2)}$	$Y^{(3)}=\frac{Y_1(X_2S_Y-Y_2S_X)}{X_1(S_Y-Y_2)-Y_1(S_X-X_2)}$	$Z^{(3)}=f-\frac{f(X_2S_Y-Y_2S_X)}{X_1(S_Y-Y_2)-Y_1(S_X-X_2)}$
(1), (4), (5)	$X^{(4)}=\frac{S_X(Y_1-Y_2)+X_2S_Y}{S_Y+Y_1-Y_2}$	$Y^{(4)}=Y^{(1)}$	$Z^{(4)}=Z^{(1)}$
(2), (4), (5)	$X^{(5)}=X^{(2)}$	$Y^{(5)}=\frac{S_Y(X_1-X_2)+Y_2S_X}{S_X+(X_1-X_2)}$	$Z^{(5)}=Z^{(2)}$
(3), (4), (5)	$X^{(6)}=X^{(3)}$	$Y^{(6)}=Y^{(3)}$	$Z^{(6)}=\frac{f(X_2Y_1-X_1Y_2)}{X_1(S_Y-Y_2)-Y_1(S_X-X_2)}$

* $S_X=2x_0$, $S_Y=2y_0$

が得られる．これらを２群とし，任意の２式のみが独立である．位置 (x, y, z) は大別すると２つの方法で計算出来る．１つの方法は１群から２つの式を選び，２群から１つの式を使用する方法，もう１つの方法は１群から１つの式，２群から２つの式を選ぶ方法である．位置を計算するのに必要な３つの式の組み合わせは６組あり，得た計算式を表１に示した．x, y, z の表示式の数は４，４，４となっている．しかし，管球が x 軸あるいは Y 軸に平行に移動する場合，0/0のような不定形の解

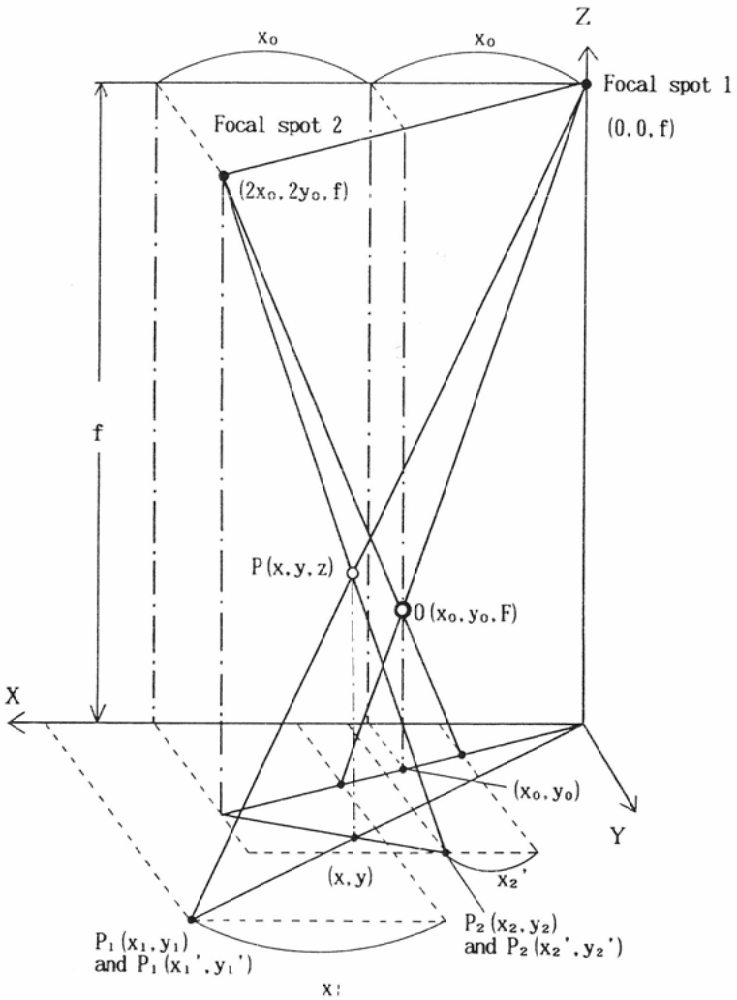

Fig. 1　The shift-projection method for the shift-film technique with double exposures on a film or the stereo-shift technique with two films

(X, Y, Z) is an orthogonal coordinate system. f represents the distances between the XY plane with film(s) and two focal spots. F is the distance between the XY plane and marker. Point P(x, y, z) is projected on the XY plane as image $P_1(x_1, y_1)$ by focal spot I at position (0, 0, f) and as image $P_2(x_2, y_2)$ by focal spot II at position $(2x_0, 2y_0, f)$. Marker $0(x_0, y_0, F)$ is also projected on the XY Plane by focal spots I and II. Points (x, y) and (x_0, y_0) are the mapped points on the XY plane for point P(x, y, z) and marker $0(x_0, y_0, F)$, respectively. x_1' and y_1' are the X and the Y coordinates of $P_1(x_1, y_1)$ measured from the point of the marker projected on the XY plane by focal spot I, respectively. x_2' and y_2' are defined similary to x_1' and y_1', respectively.

が生じるため，管球の動きと平行な座標の表示式のうち使用可能な数は2となり，残りの座標についてはそれぞれ3となる．$x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$は尾内ら[5]の報告に見られる．それ以外のは報告されていないと思われる．

2.2. フィルム2枚法（Stereo-shift technique with two films）

1枚のフィルムに二重曝射しないで各曝射毎に1枚のフィルムを使う方法では，焦点1と2の中間に相当する位置に基準マークを置き撮影する．Fig. 1ではマークの位置が$O(x_0, y_0, F)$である．曝射1によるマークの像をO_1，曝射2によるものをO_2とする．P点の像の座標はO_1あるいはO_2を原点としたものとする．曝射1によるものは$P_1(x_1', y_1')$，曝射2によるものは$P_2(x_2', y_2')$とする．フィルム2枚法に関係する座標や計算式には右肩に'の印を添える．次の関係式が図より得られる．

$$x_1 = x_1' + \frac{x_0 f}{(f-F)} \tag{7}$$

$$y_1 = y_1' + \frac{y_0 f}{(f-F)} \tag{8}$$

$$x_2 = x_2' + S_X - \frac{x_0 f}{(f-F)} \tag{9}$$

$$y_2 = y_2' + S_Y - \frac{y_0 f}{(f-F)} \tag{10}$$

(7)−(10)式を(1)−(6)式に代入して，あるいはTable 1の解に代入してフィルム2枚法の解は得られ，それらをTable 2に示した．右手系とした時，真崎[2]，速水ら[3),4)]，尾内ら[5]のxとy座標の計算式は，フィルム2枚法の$x^{(1)\prime}$と$x^{(4)\prime}$の平均，$y^{(2)\prime}$と$y^{(5)\prime}$の平均にそれぞれ等しい．

3. 最小自乗法の厳密解

x_1, y_1, x_2, y_2の測定値x_{1m}, y_{1m}, x_{2m}, y_{2m}には誤差が一般に含まれ，x, y, zの6組の解にそれが伝播されている．4つの全ての測定値を用いて，誤差の影響を小さくできる最小自乗法でx, y, zを求める．

$$\delta x_1 = x_1(x, y, z) - x_{1m}$$
$$\delta y_1 = y_1(x, y, z) - y_{1m}$$
$$\delta x_2 = x_2(x, y, z) - x_{2m}$$
$$\delta y_2 = y_2(x, y, z) - y_{2m}$$

とし，二重曝射されたフィルム上の座標読み取りの重みをそれぞれw_1, w_2, w_3, w_4として

$$\delta^2 = w_1(\delta x_1)^2 + w_2(\delta y_1)^2 + w_3(\delta x_2)^2 + w_4(\delta y_2)^2$$

を最小にするx, y, zは次の如くになる．

Table 2　Six sets of geometrical solutions for calculating the point coordinates using stereo-shift technique with two films

$$X^{(n)} = \frac{\Delta x^{(n)}}{\Delta^{(n)}}, \quad Y^{(n)} = \frac{\Delta y^{(n)}}{\Delta^{(n)}}, \quad Z^{(n)} = \frac{\Delta z^{(n)}}{\Delta^{(n)}}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(1)} = S_Y f + (y_1' - y_2')(f-F) \\ \Delta x^{(1)} = S_Y\{x_1'(f-F) + x_0 f\}, \quad \Delta y^{(1)} = S_Y\{y_1'(f-F) + y_0 f\}, \quad \Delta z^{(1)} = f\{S_Y F + (y_1' - y_2')(f-F)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(2)} = S_X f + (x_1' - x_2')(f-F) \\ \Delta x^{(2)} = S_X\{x_1'(f-F) + x_0 f\}, \quad \Delta y^{(2)} = S_X\{y_1'(f-F) + y_0 f\}, \quad \Delta z^{(2)} = f\{S_X F + (f-F)(x_1' - x_2')\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(3)} = \{y_1'(f-F) + y_0 f\}\{x_2'(f-F) - x_0 f\} - \{x_1'(f-F) + x_0 f\}\{y_2'(f-F) - y_0 f\} \\ \Delta x^{(3)} = (f-F)\{x_1'(f-F) + x_0 f\}(x_2' S_Y - y_2' S_X), \quad \Delta y^{(3)} = (f-F)\{y_1'(f-F) + y_0 f\}(x_2' S_Y - y_2' S_X) \\ \Delta z^{(3)} = f[\{y_1'(f-F) + y_0 f\}\{x_2'(f-F) - x_0 f\} - \{x_1'(f-F) + x_0 f\}\{y_2'(f-F) - y_0 f\} - (f-F)^2(x_2' S_Y - y_2' S_X)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(4)} = \Delta^{(1)} \\ \Delta x^{(4)} = 2x_0 y_0 f + S_X(f-F)(y_1' - y_2') + S_Y x_2'(f-F), \quad \Delta y^{(4)} = \Delta y^{(1)}, \quad \Delta z^{(4)} = \Delta z^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(5)} = \Delta^{(2)} \\ \Delta x^{(5)} = \Delta x^{(2)}, \quad \Delta y^{(5)} = 2x_0 y_0 f + S_Y(f-F)(x_1' - x_2') + S_X y_2'(f-F), \quad \Delta z^{(5)} = \Delta z^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^{(6)} = \Delta^{(3)} \\ \Delta x^{(6)} = \Delta x^{(3)}, \quad \Delta y^{(6)} = \Delta y^{(3)} \\ \Delta z^{(6)} = f[\{y_1'(f-F) + y_0 f\}\{x_2'(f-F) - x_0 f\} - \{x_1'(f-F) + x_0 f\}\{y_2'(f-F) - y_0 f\} - (f-F)^2(x_1' S_Y - y_1' S_X)] \end{cases}$$

$$\Delta = w_1 w_2 (w_3 + w_4) x_0 (x_{1m} - x_{2m} + 2x_0) + w_3 w_4 (w_1 + w_2) y_0 (y_{1m} - y_{2m} + 2y_0)$$

$$\Delta_X = 2(w_1 x_{1m} + w_2 x_{2m}) w_3 w_4 y_0^2 + 2 w_1 w_2 (w_3 + w_4) x_0^2 x_{1m} + 2(y_{1m} - y_{2m}) w_2 w_3 w_4 x_0 y_0$$

$$\Delta_Y = 2(w_3 y_{1m} + w_4 y_{2m}) w_1 w_2 x_0^2 + 2 w_3 w_4 (w_1 + w_2) y_0^2 y_{1m} + 2(x_{1m} - x_{2m}) w_1 w_2 w_4 x_0 y_0$$

$$\Delta_Z = (x_{1m} - x_{2m}) w_1 w_2 (w_3 + w_4) x_0 + (y_{1m} - y_{2m}) w_3 w_4 (w_1 + w_2) y_0$$

$$x^{(L)} = \frac{\Delta_X}{\Delta},\quad y^{(L)} = \frac{\Delta_Y}{\Delta},\quad z^{(L)} = \frac{\Delta_Z}{\Delta}$$

添え字(L)は最小自乗法の解であることを示している．直角２方向撮影の場合とは異なり，ステレオ撮影の最小自乗法の厳密解が得られた．二重曝射法のこの計算式に含まれる x_{1m}, y_{1m}, x_{2m}, y_{2m} を(7)−(10)式によりフィルム２枚法の測定値 x_{1m}', y_{1m}', x_{2m}', y_{2m}' に置き換えると，フィルム２枚法の最小自乗法の厳密解になる．

4．誤差の伝播

ここでは以下の条件の時の二重曝射法の誤差の伝播をシミュレーションで調べる．

$f = 100\text{cm}$,

$S_X(=2x_0) = 30\text{cm}$

$S_Y(=2y_0) = 30\text{cm}$

とする．管球はフィルムより100cm離れたところで約42.4cm移動することになる．点P(20, 22, 20)の位置を再現する時の誤差の伝播を調べる．フィルム上の像座標は $P_1(x_1, y_1) = (25, 27.5)$, $P_2(x_2, y_2) = (17.5, 20)$ となる．像座標の読み取り時の誤差のみに注目して，その誤差を，$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta y_1 = \delta y_2 = K$ とし，重みは $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$ とする．f の誤差 δf を考慮しても位置のＺ座標のみに影響し，しかもその程度は最小自乗法も幾何学的な解も全て同じになる．Table 3 は最小自乗法と幾何学的な解により位置を計算した時の位置と各座標の誤差を示している．位置の誤差は

$$\delta R = \{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2\}^{1/2}$$

と表される．ただし，計算された各座標の誤差をそれぞれ δx, δy, δz とした．

位置の誤差の比較は以下の如くである．

$$\delta R^{(L)} < \delta R^{(4)} < \delta R^{(2)} < \delta R^{(1)} < \delta R^{(5)} < \delta R^{(3)} < \delta R^{(6)}$$

Ｘ座標の各計算式の誤差の比較をすると，

$$\delta x^{(4)} < \delta x^{(L)} < \delta X^{(2)} = \delta X^{(5)} < \delta x^{(1)} < \delta x^{(3)} = \delta X^{(6)}$$

Ｙ座標の場合は，

$$\delta y^{(L)} < \delta y^{(1)} = \delta y^{(4)} < \delta y^{(2)} <$$

Table 3　Comparisons of errors propagated by least squares method and geometrical solutions using shift-film technique with double exposures in simulation

		Least squares method	Six sets of geometrical solutions					
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
		x K*	x K	x K	x K	x K	x K	x K
Error of position	(δR)	2.282	3.271	3.239	7.295	3.104	3.425	45.422
Error of X	(δX)	0.551	1.100	0.597	5.232	0.377	0.597	5.232
Error of Y	(δY)	0.596	0.624	1.016	4.916	0.624	1.508	4.916
Error of Z	(δZ)	2.133	3.017	3.017	1.292	3.017	3.017	44.851

*: $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta y_1 = \delta y_2 = K$

$\delta y^{(5)} < \delta y^{(3)} = \delta y^{(6)}$

Z座標の場合は,

$\delta z^{(3)} < \delta z^{(L)} < \delta z^{(1)} = \delta z^{(2)} =$

$\delta z^{(4)} = \delta z^{(5)} < \delta z^{(6)}$

になった.

最小自乗法は,位置とY座標の誤差が計算式全体の中で一番小さく,XとZ座標は二番目に小さい.幾何学的な解による位置の誤差は$\delta R^{(4)}$が一番小さく,$\delta R^{(2)}$がその次に小さい.最も大きいのが$\delta R^{(6)}$である.

5. 考　察

直角2方向撮影もステレオ撮影も2回の曝射で像を得て位置を求める関係上,似た方法で幾何学的な解と最小自乗法の計算式を得た.両方法とも幾何学的な6組の解が得られ,しかも各座標の計算式はどちらも4つの型がある.しかしステレオ撮影の場合,管球が座標軸に平行に移動する場合は3つあるいは2つの型になる.最小自乗法では,直角2方向撮影で厳密解は得られず,非線形の方程式を解かねばならなかったが,ステレオ撮影の場合は厳密解が得られた.それ故,最小自乗法と幾何学的な解の誤差の伝播の比較ができた.当然の結果であると言えるが,最小自乗法による位置の計算の誤差が最も小さくなった.

真崎[2],速水ら[3),4)],尾内ら[5)]のフィルム2枚法の計算式は幾何学的な解の2つの平均であり,特に管球がYZ面上をY軸に平行にあるいはXZ面上をX軸に平行に移動する場合は,重みを等しくした最小自乗法の解と同じになる.尾内らの二重曝射法での式は幾何学的に得られた解の1つで,最小自乗法で得た式とは異なる.

ステレオ法を使用している施設が少なくなったと言われているが,これには種々の理由があると思われる.その1つに計算で得た位置の誤差が大きいと言われていることも挙げられる.今回報告した最小自乗法の式を使えばより小さな誤差が期待される.フィルム2枚法で注意を要するのはマーカの位置である.真崎,速水ら,尾内ら,本報告の場合は,マーカの位置と管球の2回の曝射位置は二等辺三角形をなし,その三角形はフィルム面に垂直でなければならない.Goddenによる方法では二等辺三角形をなす必要はない.

多くの人々により位置の計算式が示されてきたが,系統だてて整理したところ,今迄報告されていないと思われる最小自乗法と幾何学的な解が得られた.ここで得た種々の計算式は正しく,像座標等の測定値に誤差が無ければそれらにより求められた位置は全て一致する.測定値に誤差がある場合,誤差の伝播が大きすぎて使えない式もあるので注意を要する.

御協力頂きました埼玉県立がんセンターの放射線治療部横山俊副技師長,川村耕治主任技師,種々の助言を頂きました大阪大学の速水博士に深く感謝いたします.

本研究の要旨は,第61回日医放物理部会大会(京都),第63回日医放物理部会大会(横浜),ICMP(第9回IOMP・京都)にて報告した.

文　献

1) 田伏勝義,伊藤　進,砂倉瑞良,他:最小自乗法と幾何学的な解による直角2方向X線写真に基づく位置決定法,日本医放会誌,50:846−851, 1990
2) 真崎規江:電子計算機を用いて放射線治療を合理化する一方法,日本医放会誌,23:197−204, 1963
3) 速水昭宗,大関修治,森　嘉信,他:ステレオ撮影法による小線源座標の誤差,日本医放会誌,39, 493−498, 1979
4) 速水昭宗,ステレオ法による線源位置取得.JARSモノグラフ・No.1.RALSの線量計算基準—子宮頸癌治療を中心として.佐方周防,川島勝弘編,41−44, 1987,放射線治療システム研究会,東京
5) 尾内能夫,入船寅二:線源位置の同定法.放射線医学大系,34巻,放射線物理学.田坂　晧編,中山書店.235−237, 1984
6) Godden T J: Physical Aspects of Brachytherapy. Medical Physics Handbooks 19. Adam Hilger, 232−260, 1988
7) Sakata S, Tabushi K: Survey on the state of arts in the use of computers in radiation therapy. Proceedings of 7th ICCR (Kawasaki and Tokyo) 107, 1980