病巣内線量分布の均等性の研究
(第 一 報)
不均等指数について

東北大学医学部放射線医学教室(主任 古賀良彦教授)
山 下 延 男

(昭和37年7月6日受付)

Studies on Homogeneity of Dose Distribution in Tumor (Ist Report) Heterogeneity Index

By

Nobuo Yamashita
Department of Radiology, Faculty of Medicine
University of Tohoku, Sendai
(Director: Prof. Y. Koga)

When the dose distribution in the tissue is studied, at least three factors, i.e. tumor dose, tumor volume dose ratio and distribution ratio of tumor dose, as Miyakawa pointed out, should be taken into consideration. Tumor dose and tumor volume dose ratio has been well studied. However, there is no report on the distribution ratio of tumor dose. In this study, the auther tried to get an information on this problem.

As the dose at various point in tumor is not homogeneous, it is disirable to have a simple measure of dose distribution in the tissue in order to get a better understanding of the circumstance. On this view point, the author tried to introduce a conception of "heterogeneity index" which indicate so as to say the deviation ratio of dose distribution in tumor.

Mathematially expressed, the location and volume of tumor can be shown as follows;

$$F(x.y,z) \leqq 0$$

Applying the theory of error in statistics, heterogeneity index can be defined as follows;

$$\sigma = \frac{1}{D_M} \sqrt{\frac{\iiint_{F(x,y,z) \leqq 0} \{R(x,y,z) - D_M\}^2 \, dxdydz}{\iiint_{F(x,y,z) \leqq 0} dxdydz}} \times 100$$

D_M: $\frac{\text{Volume Dose}}{\text{Volume}}$ (Mean Volume Dose)

$F(x,y,z) \leqq 0$: the Tumor function

$R(x,y,z)$: the Dose function at point $(P(x,y,z))$

But, as the above equation is very difficult to calculate as it is, the author has tried to obtain an approximate value of the heterogeneity index by integral calculation (section stereometry). The data will be reported in the next paper.

内容目次

I. 緒 言

放射線治療法で問題になる重要な点はいろいろあるが中でも空間的線量分布が最も大切であることはよく知られている．

宮川によれば，各種病巣に用いられる各種放射線術式の空間的線量分布を検討する場合，少くとも病巣深部率，病巣容積線量率，及び病巣線量分布均等率の三因子を問題にすべきだと述べている．

この内，病巣線量は古くからよく研究されており，又病巣容積線量率についても宮川等の報告があるが，病巣線量分布均等性に関する数量的な研究の報告は未だにない．

病巣線量分布の表現には“均等„だとか“不均等„だとか言う言葉は古くから使われているが定量的な表現法はなかつた．

病巣の位置，大きさ，照射条件等の違いによつて病巣内の線量分布の均等性の違いを数量的に表わす方法として誤差の理論を拡張して不均等指数を考えてみたので報告する．

II. 病巣の方程式

空間的拡がりを持つ病巣は Fig. 1 で示すような原点を 0とする三次元の直交軸をとるし，その表面を一般に次の函数で数学的に表現出来る．

$$F\ (x,y,z) = 0 \cdots\cdots\cdots (1)$$

但し，こゝで考えている凸面とは Fig. 2 A で示すような場合で凹面とは（B）に示す場合である．

Fig. 1.

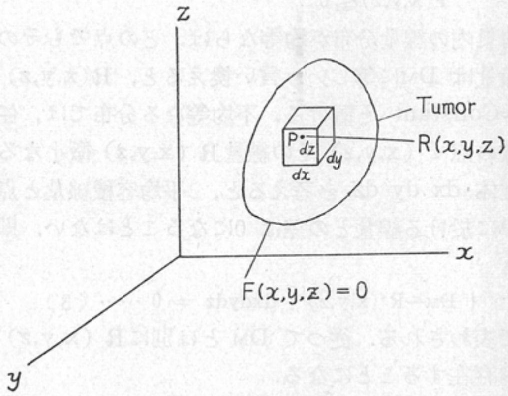
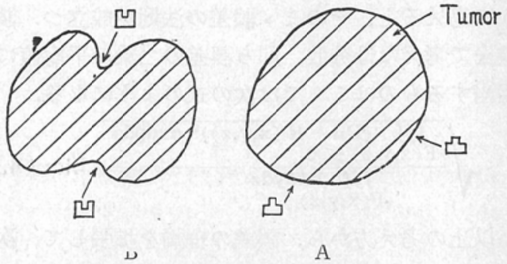


Fig. 2.



故に病巣の方程式は F (x,y,z) ≦ 0で表わされる．腫瘍の表面の一部でも凹面より出来ている時は，F (x,y,z) ≦ 0がすべての内部の点のみ表わすとは限らない．こゝでそう言う場合を除いて考えることにする．

III. 密度が一定の病巣内の不均等指数

病巣平均線量の概念

病巣の密度（ρ）一定でその空間的拡がりがF (x,y,z) ≦ 0なる方程式で表わされる病巣内の任意の点 P (x,y,z) の線量R (x,y,z) で表わすと，点Pに於ける微小なる立体 dx dy dz の容線量積函数は $dD=\rho R\ (x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ で示される．従つて病巣全体では容積線量

$$D=\iiint_{F(x,y,z)\leqq 0} R\ (x,y,z)\ dxdydz$$ （但し ρは1と見做す）又，病巣の容積（V）は $V=\iiint_{F(x,y,z)\leqq 0}$

dxdydzで表わされる．

而して，平均容積線量 $\frac{D}{V}$ ，即ち病巣内の平均線量 D_M をとすれば，上式を代入して

$$D_M=\frac{\iiint\limits_{F(x,y,z)\leqq 0} R(x,y,z)\ dxdydz}{\iiint\limits_{F(x,y,z)\leqq 0} dxdydz}\ \cdots\cdots\ (2)$$

病巣内の線量分布が均等ならば，どの点でもその線量は D_M に等しい．言い換えると，$R(x,y,z)=\text{Constant}$ と置ける．不均等なる分布では，任意の点 $P(x,y,z)$ その線量 $R(x,y,z)$ 微小なる立体 dx dy dz を考えると，平均容積線量と点Pに於ける線量との差は 0になることはない．即ち

$$\{D_M-R(x,y,z)\}\ dxdydz \neq 0\ \cdots\cdots\ (3)$$

で表わされる．従つて D_M とは別に $R(x,y,z)$ が存在することになる．

今，(3)式に示す統計学に於ける誤差と同じように考えると，そのまゝ誤差の法則が成立つ．誤差論で考えた母分散，即ち誤差の二乗の平均値に相当するものはこゝでは次の式のようになる．

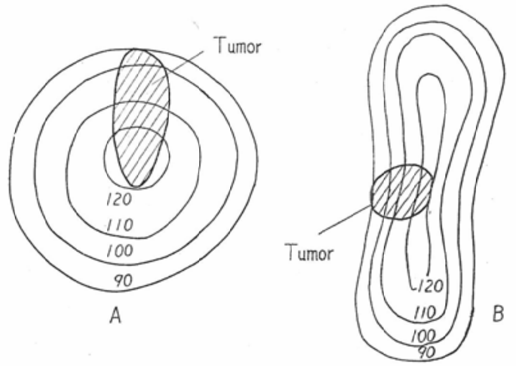
$$\sqrt{\frac{\iiint\limits_{F(x,y,z)\leqq 0}\{D_M-R(x,y,z)\}^2\ dxdpdz}{\iiint\limits_{F(x,y,z)} dxdydz}}\ \cdots\cdots (4)$$

以上の考え方から，誤差の理論を拡張して，次式ので示すような ∂ を不均等指数と定義した．

$$\partial=\frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\iiint\limits_{F(x,y,z)\leqq 0}\{R(x,y,z)-D_M\}^2\ dxdydz}{\iiint\limits_{F(x,y,z)\leqq 0} dxdydz}}\times 100\quad (\%)$$

Dessauer (1923) が初めて癌に対して均等なる線量の必要性を強張した．しかし Holzknecht (1924) は厳密な意味での均等なる線量を限局せる癌に理論的には考える事は出来るが，実際には非常に不正確な測定方法で正確に均等な病巣線量を作ることは疑わしい．又，絶対的均等は放射線の性質からあり得ない点を指摘した．実際に均等の表現の詳しい分析は測定技術の進歩と等量曲線をX線に応用することによつてのみ可能だと Ungar (1943) は述べている．

Ungar の均等性の表現は病巣内の最高の線量を D^t_{mix} 最小を D^t_{min} とし ($D^t_{max}-D^t_{min}$) を"hetero-



geneity factor" とよんでいる．併し，この方法は数学的に厳密な病巣の線量分布の均等性を示していない．例えば上の図A，Bの如く Ungar の heterogenity factor ともに30%で同一値を示しているが，しかし明らかに均等性が違つている．

今日では昔と違つて，放射線の測定技術も進歩し，色々照射術式の空間的線量分布の研究もなされ，等量曲線或いは深部率表の型で多くの報告が見られる．これらの Data から，色々な照射術式の均等性を考える事は可能である．

著者の定義した不均等指数は三重積分を含み，このまゝでは計算はむづかしいが等量曲面の性質でより簡単に定義される場合について次に述べ

Fig. 3. After Johns

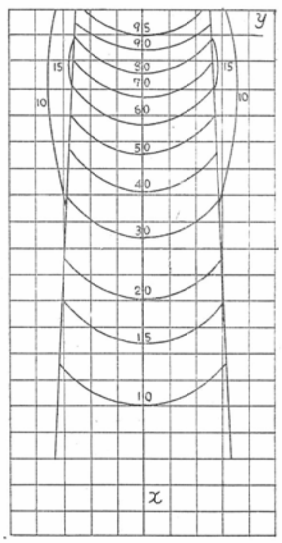


Fig. 4. After Johns

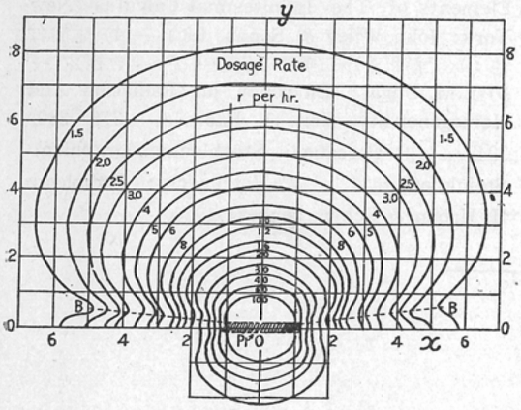
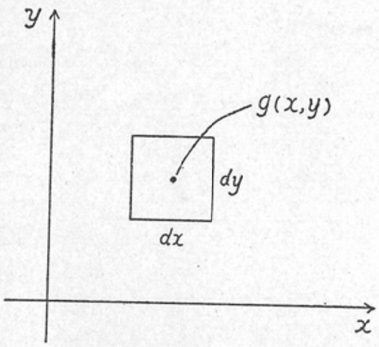


Fig. 5.



る.

（イ）等量曲面が一つの廻転軸を持つ場合

例えば Fig. 3 で示すような経皮照射で照射野が円形で Beam の軸が廻転軸となる等量曲面でその線量分布が表わされる場合や病巣の中心が Beamの軸上にある時，又はFig.4で示すRadiumの組織内照射で病巣と Radium の中心が一致した場合等がこれである.

Fig. 5 でX軸を廻転軸とした等量曲面 $F(x,y)=0$とすれば 6 は次式のようになる.

$$\partial = \frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\iint_{(A)} y\{g(x,y)-D_M\}^2\,dxdy}{\iint_{(A)} y\,dxdy}} \times 100 \quad \cdots(6)$$

（但し，（A）は積分の範囲一般に $F(x,y) \leqq 0$）

（ロ）等量曲面が球になる場合

例えば球の中心にある点線源の線量分布がこれである．極座標で線量を表わすと g(r) となる.

$$\partial = \frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\int_0^a r^2\{g(r)-D_M\}^2\,dr}{\int_0^a r^2\,dr}} \times 100 \quad \cdots\cdots(7)$$

（但し，a：腫瘍半径）

（ハ）病巣を二次元で考えてよい場合（病巣の拡がりを平面のみで考えて十分なる場合）

例えば皮膚科領域の疾患の治療の場合で病巣の厚さを無視して考えられる.

$$\partial = \frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\iint_{(A)} \{g(x,y)-D_M\}^2\,dxdy}{\iint_{(A)} dxdy}} \times 100 \quad \cdots(8)$$

A：積分の範囲 $F(x,y) \leqq 0$

D_M：この場合は特に次のように定義する.

$$D_M = \frac{\text{Area Dose of Tumor}}{\text{Area of Tumor}}$$

IV. 密度が一定でない病巣内の不均等指数

実際に考えられる被照射体の密度は一定でない．密度分布を函数 $\rho(x,y,z)$ と考えると，不均等指数は次のようになる.

$$\partial = \frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\iiint_{F(x,y,z)\leqq 0} \{g(x,y,z)\rho(x,y,z)-D_M\}^2\,dxdydz}{\iiint_{F(x,y,z)\leqq 0} \rho(x,y,z)\,dxdydz}} \times 100 \quad \cdots\cdots(9)$$

（但し，D_M は密度を考慮した平均容積約量）

V. 近似計算法（図式法）

以上の定義で示した積分はそのままでは計算出来ないので数値積分か図式計算によつてはじめて近似的に求めることが可能である.

近似式を次のような式で示すことが出来る.

$$\partial \fallingdotseq \frac{1}{D_M}\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{i}\sum_{n=1}^{j}\sum_{n=1}^{k} \{g(x_i, y_i, z_k)-D_M\}^2 \Delta x\Delta y\Delta z}{\sum_{n=1}^{i}\sum_{n=1}^{j}\sum_{n=1}^{k} \Delta x\Delta y\Delta z}} \times 100 \quad \cdots\cdots(10)$$

以下同様である.

上の近似式により病巣の微小なる区画（立体）に分けその一つ一つについて，数値積分（区分求積法）や図式計算法によつて積分する.

VI. 結　語

以上は主に不均等指数について，積分式でいろいろな場合について定義した.

この指数は完全な均等分布に対して $\sigma=0$ で不

均等の度合が増すにつれてσは大きな値を示す．

種々なる照射術式の不均等指数は次に報告する

（尚本論文の要旨は，第21回日本医学放射線学会総会で発表した．）

VII 文　献

1）宮川正：第15回日本医学会総会学術集会記録第5巻 865～872, 1959. — 2）宮川正，飯野祐：放射線治療の空間的線量分布（第一編）日医放誌第20巻1205～1213, 1960. — 3)G.H. Chandler M.A.: Elements of The Infinitesimal Calculus (New York: John Wiley & Sonns Inc). — 4）本間仁他：次元解析最小二乗法と実験式（コロナ社）. — 5) E.M. Ungar: Efficiency off Radiation And Homogeneneity. Brit. J. Rad. 16, 376—380, 1943. — 6) Dessauer: Strahlenmonographien, Steinkopff, 1923. — 7) Holzknecht: Radiologie II, Urban & Schwarzenberg 1924.