The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	物体を過ぎる粘性流体の流れに関する研究
Author(s)	中林, 幸三郎
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2174
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

物体を過ぎる粘性流体の流れに関する研究

１９８９年１２月

中　林　幸三郎

目次

第１章　緒言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

1.1　序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

第２章　球，円柱を過ぎる粘性流に対するＯseen解の展開式と数値解 ・・ 5

2.1　序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5

2.2　球に対するＯseen方程式の厳密解 ・・・・・・・・・・・・・ 7

2.3　円柱に対するＯseen方程式の厳密解 ・・・・・・・・・・・・ 12

2.4　Ｏseen方程式の厳密解に対する展開式 ・・・・・・・・・・・ 16

2.4.1　球 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 16

2.4.2　円柱 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 19

2.5　Ｏseen解の数値解と考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 23

2.5.1　球 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 23

2.5.2　円柱 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 27

2.6　結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 29

第３章　球を過ぎる定常な粘性流の数値解 ・・・・・・・・・・・・・ 30

3.1　序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 30

3.2　基礎式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 31

3.3　境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 32

3.4　差分式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 35

3.4.1　流れ関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 35

3.4.2　渦度 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 37

3.4.3　計算手順 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 38

3.5　抗力係数の計算法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 39

3.6　計算結果 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 40

3.6.1　外側境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 40

3.6.2　抗力係数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 43

3.6.3 剥離角，双子渦，フローパターン ・・・・・・・・・ 43
3.7 結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 45

第４章 円柱を過ぎる定常な粘性流の数値解 ・・・・・・・・・・・・ 46
4.1 序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 46
4.2 基礎式と境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 49
4.3 差分方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 51
4.4 抗力係数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
4.5 計算結果と考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
4.5.1 差分解の誤差 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
4.5.2 外側境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 57
4.5.3 円柱周りの流れ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 62
4.6 結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 64

第５章 球，円柱を過ぎる定常な粘性流の解析解と数値解の比較 ・・・ 65
5.1 序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 65
5.2 球に対するＯseen解と数値解の比較 ・・・・・・・・・・・ 66
5.2.1 球周りのフローパターンの比較 ・・・・・・・・・・・ 66
5.2.2 抗力係数の比較 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 72
5.2.3 球上の圧力係数の比較 ・・・・・・・・・・・・・・・ 72
5.3 円柱に対するＯseen解と数値解の比較 ・・・・・・・・・ 73
5.3.1 円柱周りのフローパターンの比較 ・・・・・・・・・ 73
5.3.2 抗力係数の比較 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 74
5.3.3 円柱上の圧力係数の比較 ・・・・・・・・・・・・・・ 75
5.4 Ｏseen解によるＮavier-Ｓtokes方程式の逐次近似解 ・・・・ 75
5.5 結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 77

第６章 円柱，球を過ぎる定常な粘性流に対する逐次近似 ・・・・ 78
6.1 序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 78
6.2 円柱に対するＯseen方程式の解 ・・・・・・・・・・・・・ 79

6.3 Oseen解の展開 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 81
6.4 円柱を過ぎる一様流れのNavier-Stokes方程式への逐次近似 ・ 84
6.4.1 展開式の出発値 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 84
6.4.2 展開式の第２項 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 85
6.4.3 展開式の第３項 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 87
6.5 抗力係数の展開式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 90
6.6 球を過ぎる一様流れのNavier-Stokes方程式への逐次近似 ・ 91
6.6.1 展開式の出発値 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 93
6.6.2 展開式の第２項 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 94
6.7 Proudman-Pearsonと本章の結果の比較 ・・・・・・・・・ 96
6.8 結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 98

第７章 円柱を過ぎる粘性せん断流の数値解析 ・・・・・・・・・ 99
7.1 序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 99
7.2 基礎式と境界条件 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 101
7.2.1 基礎方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 101
7.2.2 差分式 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 102
7.2.3 抗力係数，揚力係数，モーメント係数 ・・・・・・ 104
7.2.4 圧力係数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 105
7.3 計算結果と考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 106
7.4 結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 114

第８章 低レイノルズ数で円柱を過ぎるせん断流の解析 ・・・・・ 115
8.1 序論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 115
8.2 基礎方程式の解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 116
8.2.1 速度の解析と展開式 ・・・・・・・・・・・・ 116
8.2.2 流れ関数と渦度の展開式 ・・・・・・・・・・・ 126
8.2.3 抗力係数，揚力係数，モーメント係数の展開式 ・・ 128
8.2.4 圧力係数の展開式 ・・・・・・・・・・・・ 129

8.3　展開式の数値結果と考察　・・・

第１章　緒　言

１．１　序論

物体を過ぎる粘性流体の問題を解明することは，流れ解析の基礎を知る一つとして古くから多くの研究者の関心を集めてきた．しかし，この運動を支配するNavier-Stokes方程式が非線形方程式であるために，数学的に極めてやっかいな問題に直面する．したがって，これまでの解析的な試みとしては，流れを代表とするレイノルズ数，Re数，が小さいときを考慮して，支配方程式の線形化を行なってきた．最初の試みは Stokes（１８５１）[1]がNavier-Stokes方程式の慣性項を無視したStokes近似を行い，Stokes方程式を導いた．しかし，この運動方程式を用いて球周りの流れを調べると，球前後の流れが対称になり実際の流れと相反することになり，また，円柱を過ぎる無限開放の流れの場合には，無限遠方での境界条件を満足する解が存在しないという”Stokesのパラドックス”が生じる．これらの問題を解消するために，Oseen（１９１０）[2]は慣性項の一部を考慮し，基礎方程式を線形化したOseen方程式を作りだした．この近似では，遠方における慣性項と粘性項の大きさの関係は完全にみたされているが，物体近傍では攪乱速度に関して二次の微小量である慣性項が一次の量になる．しかし，この誤差は，物体近傍では慣性項は粘性項よりはるかに小さいと考えると，Oseen近似は物体近傍でも妥当な近似と言える．これまでのOseen方程式を用いた物体を過ぎる一様流れの諸研究は，支配方程式の線形化の仮定が成り立つ遠方領域と流れが遅い場合の物体近傍の領域で行なわれてきた．前者の立場からFilon[3]，Goldstein[4]ら は，物体を囲んでいる十分大きい領域内の流体に対して運動量の法則を適用して物体に働く力を計算した．一方，後者の立場から，Tomotika-Aoi[5]はLamb[6]の解析を基にして円柱，球，そして楕円の流れ関数の厳密解を求め，それぞれの物体周りのフローパターンや渦度発生を調べた．しかし，彼らの結果は円柱についてはTomotika-Miyagi[7]，そして 球についてはPearcey-McHugh[8]とYosinobu[9]らによって修正されている．この他いくつかの研究が

Oseen方程式について行なわれてきたが，物体周りのフローパターン，抗力，圧力分布などを中間レイノルズ数の範囲で調べ，実験値や数値解と比較し，この範囲でのOseen方程式の適用範囲を具体的に示した報告はされていない．したがって，第２章で円柱，球を過ぎる一様流の厳密なOseen解を数値計算し，流れを特徴ずける円柱および球背後の双子渦の長さ，剥離角，そして円柱，球が流体から受ける流体力などを詳細に調べ，Oseenの運動方程式の適用範囲を吟味する．
また，これらの章では複雑なOseen方程式の解析解の数値計算を避けるため，解析解をRe数で展開し，低Re数領域で便利な展開式を求めた．

一方，上で述べた円柱，球を過ぎる無限開放の一様流れを支配する Navier-Stokes方程式の数値解は，Thom（１９３３）[10] あるいは Jenson（１９５９）[11]の先駆的論文に始まり数多くの報告がある．しかし，この流れ場の数値計算の精度にかなり影響があると思われる外側境界条件の報告は，円柱の場合について Dennis-Chang[12]，Fornberg[13]らが行なっているが，球についてはほとんどされていない．円柱の場合の彼らの方法についても一般性の説明は十分とは言えない．また，これらの流れに対する数値計算の精度は，基礎方程式の解析が困難なために，他の数値結果や実験結果の比較から確認されてきた．しかし，数値計算の精度を定量的に知るためには，Navier-Stokes方程式により近い方程式を数値計算と解析で解き，その結果を比較する必要がある．したがって，第３章，第４章の数値計算では最適な外側境界条件を得ることを主な目的とし，特性値については中間Re数領域だけでなく，あまり報告されていない低Re数領域についても詳細に調べる． さらに，これらの章の数値計算に用いた陰解法の”ＡＤＩ法”（Altrnative Direction Implicit）および ”ＳＬＯＲ法”（Successive Line Over Relaxation）の数値精度についても，これらの章で行なった数値計算の方法でOseen方程式を解き，その結果を解析解と比較し，数値解析の結果を定量的に調べる．

第５章ではいくつかの特性値に対して求めた第２章のOseen解と第３章，第４章で求めた数値解を詳細に比較し，これまで報告されていない円柱，球周りのフローパターンおよび円柱，球に作用する流体力の比較を低Re数から中間Re数の

範囲で示す．また，この章ではOseen方程式を基にしたNavier-Stokes方程式の数値による逐次近似を中間Re数で行い，球の場合の逐次解の結果を報告する．

一方，解析によるNavier-Stokes方程式への逐次近似は，Stokes方程式およびOseen方程式を基にして多くの研究が行なわれてきた．代表的な報告には，Stokes解を用いて球の逐次近似を行なったWhitehead（１８８９）[14]，あるいはOseen解を用いて行なったImai（１９５１）[15]の漸近展開などがある．Whiteheadの逐次解は不運にも無限で発散するという結果を導いたが，Imaiの漸近展開によるNavier-Stokes方程式への逐次解は，伴流と渦なし領域との相互作用を正しく取り入れ，１９２８以来問題となってきたFilon[3]のパラドックス（逐次解の発散）を巧妙な計算で除去し，円柱が流体から受ける力によい結果を与えた．しかし，著者が知る限りにおいては，Oseen解を用いて物体周りの逐次近似を行い，特性値の結果を調べた報告はされていない．したがって，第６章では，解析的な興味の他にOseen方程式を基にしてNavier-Stokes方程式への逐次近似を行い，円柱および球近傍の非線形項の効果について調べる．また，この章の最後で円柱の場合の解析方法と現在Navier-Stokes方程式に最も近い解と考えられているProudman-Pearson[16]の解析方法〔物体近傍の解（Stokes解）と物体から離れた解（Oseen解）をマッチングさせる〕と比較を行い，彼らの方法では円柱を過ぎる流れの展開式を求めることが非常にやっかいになることを示す．

第７章から第９章までは一様せん断流が静止円柱に当たる流れを考える．この流れは円柱周りで流れが非対称になるため，数値計算および解析がかなり複雑になる．したがって，この流れについての報告は余りされておらず，報告されている数値解や解析解についても疑問が残る．例えば，田村ら[17]によって報告された数値解は外側境界条件が十分に検討されていないため，流れ場で圧力が一価にならない．また，解析解にはStokes解を基にした川口の逐次解[18]があるが，この解析も円柱から離れた所ではポテンシャル流と仮定したので，十分な解析とは言えない．一方，この流れでは揚力は速い速度側に向くと一般的にはされていたが，Jordan-Fromm[19]はRe=400で数値計算を行い，揚力が速度の遅い側に向くことを示した．さらに，彼らはその報告の中で高いRe数では，揚力は遅い速度側

に向くが低Ｒe数では速い速度側に向くと言う説を述べている．しかし，壁近傍を落下する物体が壁効果よって壁に近ずくことや血液中の赤血球が中央より下側に集まることを考慮すれば，遅い流れに対する彼らの説が必ずしも正しいと思われない．したがって，第７章の数値計算は外側境界条件を若干工夫した値で固定し，流れ場で圧力が一価になるように円柱上の境界条件を繰り返しごとに修正し，数値計算を行ない，円柱周りの流れおよび円柱が流体から受ける力，特に，揚力ついて調べる．次に，第８章ではＯseen解を基にした逐次近似によって，一様せん断流が円柱にぶつかった場合に起こる円柱近傍の速度場を線形化した運動方程式に含まれるシアパラメーター，ε，をもつ項の効果を調べ，揚力が第７章の低Ｒe数の数値解と同じ傾向になるかどうかを吟味する．第７章の数値解および第８章の解析解で求めた結果は従来の数値解とかなり異なり，興味ある結果を与える．例えば，従来の数値解では ε にかかわらずマグナス効果は正とされて来たが，これらの章で求めた値は負になる．第９章の解析は，第８章で求めた逐次解の中に一様せん断流のポテンシャル解が含まれていることを考慮し，それらの解をＯseen方程式の非対称な一般解に加え，Ｏseen方程式の非対称な解を誘導し，”Ｇarstang[20] のパラドックス”を解消することを試みる．一方，この解析解は，円柱から離れた場所で良い近似を与える解になるので，無限開放のこの流れを数値計算するとき無限境界面の境界値として非常に有益である．また，低Ｒe数では第７章の数値解および第８章の解析解と定量的に一致し，中間Ｒe数の範囲でも円柱周りの定性的な流れを表わすことができる．

最後に，第１０章でこの論文の総括を行なう．

第２章　球，円柱を過ぎる粘性流に対するＯｓｅｅｎ解の展開式と数値解

２．１　序論

本章では最初に，球，円柱を過ぎる粘性流の支配方程式を線形化したOseen方程式から流れ関数Ψ，渦度ζ，抗力係数C_D　そして 圧力係数$P_1(1,\theta)$の厳密解を求め，それらをレイノルズ数，Re数，で展開し，低Re数の範囲で物体周りのフローパターンあるいは物体が流体から受ける力を調べる．次に，Ψ，ζ，C_D そして $P_1(1,\theta)$の厳密解を中間Re数の範囲で直接数値計算し，中間Re数でOseen方程式の有効性について調べる．

古くから知られているOseen方程式の研究は非常に多く報告されているが，球を過ぎる非圧縮粘性流の定常流に対するOseen方程式の厳密解をRe数で展開した報告は Van Dyke[21] の計算機を用いた数値による 抗力係数C_D の展開と，Yosinobu[9]によるRe数の１次の次数，O（Re），までのΨの展開式，そしてGoldstein[4]によるO（$R\hat{e}^5$）までのC_D の展開式だけである．ただし，Goldstein のO（$R\hat{e}^5$）の項は，のちに，Shanks[22]に よって修正されている．著者も Goldsteinの間違いはRe数の整理が不十分なために起こったことを確認している．また，円柱については Tomotika-Aoi[5]による抗力係数C_D の O（$R\hat{e}^3$）までの展開式，そしてTomotika-Miyagi[7] による流れ関数Ψの O（$R\hat{e}^4$）までの展開式が報告されている．しかし，Tomotika-Miyagi は展開式が繁雑になるため，実際には O（$R\hat{e}^3$）までしか具体的には示していない．

一方，Proudman-Pearson[16] が球の近傍の領域ではStokes方程式，そして十分離れた領域でOseen方程式が支配方程式になることを考慮し，それぞれの解の展開式を任意の距離で一致させることによってRe数による抗力の展開式を求めた．この結果は Goldstein の求めた C_D の展開式と第３項から違った結果にな

り，対数項を含むより複雑な展開式になる．この解析解がNavier-Stokes方程式に最も近い解析であると考えるならば Ψ，C_D，$P_1(1,\theta)$ のOseen解をより高次のRe数まで展開することはあまり有益でないと思う．しかし，Proudman-Pearson の方法で，流れ関数Ψを O（$R\mathring{e}\log Re$）まで拡張した Chester-Breach[23] の展開式は，必ずしも球周りのフローパターンを正確に与えているとは思われない．なぜなら，第5章の「球,円柱のOseen解と数値解の比較」で示すように，この展開式で求めた球周りの流線は Oseen解 よりも数値解と一致しない．また，円柱の場合には Proudman-Pearson の方法で展開することは非常にやっかいになり，小さいRe数の範囲で使用できるまで展開式を拡張することは不可能になる（第6章参照）．したがって，Oseen方程式はいろいろな流れの問題で Navier-Stokes方程式の近似式として使われるので，代表的な球，円柱について，Ψ，C_D，$P_1(1,\theta)$ の級数解をRe数で十分高次まで展開し，Oseen方程式の適用範囲を吟味しておくことは必要である．

§2.2 と §2.3 では球と円柱のOseen方程式に対する 流れ関数，抗力，圧力分布の解析を示すが，これらの詳細な説明はTomotika-Aoi[5] [24]らが行なっているのでここでは概略だけ説明する．また，球，円柱の Ψ，C_D，$P_1(1,\theta)$などの展開式の誘導は複雑なので，ここでは紙面の関係上それらの説明は省き，§2.4 で結果，そして§2.5 で展開式から求めた数値結果だけを示す．さらに，§2.5 では，従来報告のなかった球，円柱周りの速度，あるいは流線と等渦度線を中間Re数で求め，球および円柱周りのフローパターンを描く．

2．2　球に対するOseen方程式の厳密解

3次元の定常流に対するOseen方程式と連続の式はそれぞれ

$$U\frac{\partial}{\partial x}(u,\ v,\ w)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)P+\nu\nabla^2(u,\ v,\ w) \tag{2.2-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.2-2}$$

になる．ただし，Uは一様流，Pは圧力，ρは密度，νは動粘性係数，∇^2はラプラシアン を表わす．式(2.2-1)と式(2.2-2)を満足する攪乱速度（u，v，w）と圧力Pの解は $k=U/2\nu$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi \\ v&=-\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} \\ w&=-\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2.2-3}$$

$$P=\rho U\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{2.2-4}$$

になる．ここでのχ，ϕはそれぞれ次の方程式を満足する．

$$\nabla^2\chi-2k\frac{\partial\chi}{\partial x}=0,\qquad \nabla^2\phi=0$$

これらの式からχ，ϕの解を求め，球極座標（r，θ，ω）で書き表わせば

$$\chi = U e^{\mu\xi} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \chi_m(\xi) P_m(\mu) \quad , \quad \phi = U \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}}$$

になる．ただし，A_n，B_mは積分定数，そして$\xi = kr$，$\mu = \cos\theta$ である．
P_m はルジャンドル関数で，χ_m は変形ベッセル関数（K_m）を用いて表わすと

$$\chi_m(\xi) = (2m+1)\left(\frac{\pi}{2\xi}\right)^{1/2} K_{m+1/2}(\xi)$$

になる．χ，ϕを式(2.2-3)に代入し，半径速度 u_r と接線速度 v_θ を求めれば

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1)A_n}{r^{n+2}} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \Phi_{m,n}(\xi) \right\} P(\mu) \\ v_\theta &= U \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{r^{n+2}} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \Psi_{m,n}(\xi) \right\} P'_n(\mu) \end{aligned}\right\} \quad (2.2\text{-}5)$$

になる．ただし，

$$\Phi_{m,n}(\xi) = -\left\{ \frac{m}{2m-1} \chi_{m-1}(\xi) + \frac{m+1}{2m+3} \chi_{m+1}(\xi) \right\} f_{m,n}(\xi)$$

$$-\chi_m(\xi) \left\{ \frac{m}{2m+1} f_{m-1,n}(\xi) + \frac{m+1}{2m+1} f_{m+1,n}(\xi) \right\}$$

$$\Psi_{m,n}(\xi) = \left\{ \frac{1}{2m-1} \chi_{m-1}(\xi) - \frac{1}{2m+3} \chi_{m+1}(\xi) \right\} \left\{ f_{m,n}(\xi) - 2 g_{m,n}(\xi) \right\}$$

そして，関数 $f_{m,n}(\xi)$ と $g_{m,n}(\xi)$ はそれぞれ

$$e^{\mu\xi} P_m(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}(\xi) P_n(\mu)$$

$$e^{\mu\xi} P'_m(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{m,n}(\xi) P'_n(\mu)$$

の展開係数である．プライム ' は μ に関する微分を示し，$f_{m,n}(\xi)$ と $g_{m,n}(\xi)$ は次に示す関数である．

$$f_{m,n}(\xi) = (2n+1) \sum_{j=0}^{m} \frac{(2j)!(2m-2j)!(2n-2j)!}{(j!)^2(2m+2n-2j+1)!} \left\{ \frac{(m+n-j)!}{(m-j)!(n-j)!} \right\}^2 \phi_{m+n-2i}(\xi)$$

$$g_{m,n}(\xi) = \frac{4(2m+1)}{n(n+1)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(2j+1)!(2m-2j-1)!(2n-2j-1)!}{(j!)^2(2m+2n-2j)!} \times$$

$$\left\{ \frac{(m+n-j)!}{(m-j-1)!(n-j-1)!} \right\}^2 \frac{\phi_{m+n-2i-1}}{\xi}$$

ただし，

$$\phi_n(\xi) = (2n+1) \left(\frac{\pi}{2\xi} \right)^{1/2} I_{n+1/2}(\xi)$$

ここに $I_{n+1/2}$ は第１種変形ベッセル関数である．

式(2.2-5)の半径 および 接線速度に球上の粘着条件 $u_r = -U\cos\theta$，$v_\theta = U\sin\theta$ を適用すれば

$$\left.\begin{aligned} \frac{(n+1)A_n}{a^{n+2}} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} B_m \Phi_{m,n}(\xi_o) &= \begin{cases} -1 & (n=1) \\ 0 & (n=0,2,3,\ldots) \end{cases} \\ \frac{A_n}{a^{n+2}} - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} B_m \Psi_{m,n}(\xi_o) &= \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n=2,3,4,\ldots) \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (2.2\text{-}6)$$

となり，さらに，式(2.2-6) から積分定数 A_n を消去すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \lambda_{m,n}(\xi_o) = \left\{ \begin{matrix} -6 & (n=1) \\ 0 & (n=2,3,4,\ldots) \end{matrix} \right\} \qquad (2.2\text{-}7)$$

を得る．ただし，$\xi_o = (1/4)\,\mathrm{Re}$，そして $\lambda_{m,n}(\xi_o) = \Phi_{m,n}(\xi_o) + (n+1) \times \Psi_{m,n}(\xi_o)$である．この無限多元連立一次方程式を解けば積分定数 B_m が求まる

Stokesの流れ関数 ψ と速度 u_r の関係式

$$u_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$$

に式(2.2-5)の u_r を代入し，積分すれば

$$\psi = \frac{Ua^3}{r} \frac{P_2(\mu)}{3} - \frac{1}{2} U \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m \left\{ \frac{a^{n+2}}{r^n} \Phi_{m,n}(\xi_o) - r^2 \Phi_{m,n}(\xi) \right\}$$

$$\times \frac{P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)}{2n+1} + f(r)$$

になる．ここに f (r)は軸対称の条件を ψ に適用すれば求められる任意関数である．静止した球を過ぎる流れの流れ関数は ψ に球の場合の一様流の流れ関数を加えれば求まる．ここでは Uaで無次元化した流れ関数 Ψ を次に示す．

$$\Psi = \left(r^2 - \frac{1}{r} \right) \frac{P_o - P_2}{3} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m \left\{ \frac{1}{r^n} \Phi_{m,n}(R_1) \right.$$

$$\left. - r^2 \Phi_{m,n}(R_1 r) \right\} \frac{P_{n-1}(\mu) + P_{n+1}(\mu)}{2n+1} \qquad (2.2\text{-}8)$$

ただし，$\xi_0 = R_1 = (1/4)\,Re$.

一方，渦度（ξ，η，ζ）の成分は

$$\xi = 0,\quad \eta = -\frac{\partial \chi}{\partial z},\quad \zeta = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

で表わせるので，この式から無次元化した渦度ζを求めれば

$$\zeta = \frac{1}{r\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m\left[\chi_m^{I}(\xi)\,f_{m,n}(\xi) - \{\chi_m^{I}(\xi) + \mu\chi_m(\xi)\}\,g_{m,n}(\xi)\right]$$

$$\times\frac{n(n+1)}{2n+1}\{P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\} \qquad (2.2\text{-}9)$$

になる．ただし，

$$\chi_m(\xi) = -\left\{\frac{m}{2m+1}\chi_{m-1}(\xi) + \frac{m+1}{2m+3}\chi_{m+1}\right\}.$$

球が流体から受ける全抗力Dは，摩擦と圧力による抗力比が２：１になることがTomotika-Aoi[5]によって指摘されている．ここではRe数による展開式を求めるのに必要な式を示しておく．

$$C_D = \frac{32\pi}{Re^2}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)B_m \qquad (2.2\text{-}10)$$

ただし，C_D は D を $(1/2)\rho U^2 \pi a^2$ で無次元化した抗力係数の値である．

圧力についても同じように展開式を求めるのに必要な式を示す．

$$P_1(1,\theta) = \frac{P - P_\infty}{1/2\rho U^2}$$

$$=2-e^{R_1\mu}\sqrt{\frac{\pi}{2R_1}}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\{mK_{m-1/2}(R_1)P_{m-1}(\mu)+$$

$$(2m+1)K_{m+1/2}(R_1)P_m(\mu)+(m+1)K_{m+3/2}(R_1)P_{m+1}(\mu)\} \tag{2.2-11}$$

Re数によるΨ，C_D，そして $P_1(1,\theta)$ の展開式はそれぞれ 式(2.2-8)，式(2.2-10)，そして式(2.2-11)から求めたものであるが，これらの展開式を求めるのに要する複雑な計算の説明はここでは省き，結果だけを§2.4で示す．

2．3　円柱に対するOseen方程式の厳密解

球の場合と同様に解析の概略だけを述べる．２次元の定常流のOseen方程式と連続の式はそれぞれ次のように書ける．

$$U\frac{\partial}{\partial x}(u,\ v)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)P+\nu\nabla^2(u,\ v) \tag{2.3-12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.3-13}$$

ただし，記号は§２の球の場合と同じ意味を表わす．式(2.3-12)と式(2.3-13)を満足する撹乱速度（u，v）と 圧力 P の解は $k=U/2\nu$ とすれば

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial x}-\chi \\ v&=-\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2.3-14}$$

$$P=\rho U\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

になる．ここでの χ，ϕ はそれぞれ次の方程式を満足する．

$$\nabla^2\chi-2k\frac{\partial\chi}{\partial x}=0,\qquad \nabla^2\phi=0$$

上式から求めたχ，ϕの解を極座標（r，θ）で表わせば

$$\chi=Ue^{kr\cos\theta}\sum_{m=0}^{\infty}B_mK_m(kr)\cos m\theta,\quad \phi=UA_o\log r-U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\frac{\cos n\theta}{r^n}$$

になる．ただし，A_n，B_m は積分定数である．
χ，ϕ の解を式(2.3-14)に代入し，それらの速度を極座標に変換すれば 半径速度u_r，接線速度v_θ はそれぞれ次のように書くことができる．

$$u_r=-U\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}}-\frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\left\{\frac{2}{kr}+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{m,n}(kr)\cos n\theta\right\}$$

(2.3-15)

$$v_\theta=-U\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}}-\frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_m\Psi_{m,n}(kr)\sin n\theta \qquad (2.3\text{-}16)$$

ただし，

$$\Phi_{m,n}(kr)=(K_{m+1}+K_{m-1})(I_{m-n}+I_{m+n})+K_m(I_{m-n-1}+I_{m-n+1}+I_{m+n-1}+I_{m+n+1})$$

$$\Psi_{m,n}(kr)=(K_{m+1}-K_{m-1})(I_{m-n}-I_{m+n})+K_m(I_{m-n-1}-I_{m-n+1}-I_{m+n-1}+I_{m+n+1})$$

式(2.3-15)と式(2.3-16)に円柱上の粘着条件を適用すればただちに次式が求まる.

$$\frac{A_0}{a}+\frac{1}{2R_1}\sum_{m=0}^{\infty}B_m=0 \tag{2.3-17}$$

$$\frac{A_n}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\Phi_{m,n}(R_1)=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,\ldots)\end{cases} \tag{2.3-18}$$

$$\frac{A_n}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\Psi_{m,n}(R_1)=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,\ldots)\end{cases} \tag{2.3-19}$$

そして 式(2.3-18)と式(2.3-19)からA_nを消去すればB_mについて次のような無限多元連立一次方程式が求まる.

$$\sum_{m=0}^{\infty}B_m\lambda_{m,n}(R_1)=\begin{cases}4 & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,\ldots)\end{cases} \tag{2.3-20}$$

ただし, $\lambda_{m,n}(R_1)=I_{m-n}K_{m-1}+I_{m+n}K_{m+1}+I_{m-n+1}K_m+I_{m+n-1}K_m$.

撹乱の流れ関数 ψ は

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

の関係式に 式(2.3-15) の u_r を代入し, 積分すれば

$$\psi=-\frac{Ua^2\sin\theta}{r}+\frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_m\left\{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\Phi_{m,n}(R_1)-\Phi_{m,n}(kr)\right\}$$

$$\times\frac{r\sin n\theta}{n}$$

になる.

静止した円柱を過ぎる流れ関数は，上式の ψ に円柱の場合の一様流の流れ関数を加えれば求まる．ここでは，Ｕａで無次元化した流れ関数 Ψ を次に示す.

$$\Psi = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\theta + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_m \left\{ \Phi_{m,n}(R_1) - r^{n+1} \Phi_{m,n}(R_1 r) \right\} \times \frac{\sin n\theta}{n r^n} \qquad (2.3\text{-}21)$$

ただし，ｒは半径ａで無次元化されている.

一方，渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 2k \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

に χ，ϕ を代入し，若干の計算を行なえば次のような形に書くことができる.

$$\zeta = -\frac{R_1}{2} e^{R_1 r \cos\theta} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left\{ K_{m+1}(R_1 r) \sin(m+1)\theta - K_{m-1}(R_1 r) \sin(m-1)\theta \right\} \qquad (2.3\text{-}22)$$

円柱が流体から受ける 抗力Ｄ の一般解の誘導はTomotika-Aoi[5]が述べているのでここでは結果だけを示す.

$$C_D = \frac{D}{\rho U^2 d} = \frac{\pi}{2R_1} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \qquad (2.3\text{-}23)$$

式(2.3-23)の B_m は 式(2.3-20) から求められる積分定数である.

円柱上の圧力分布を求める一般解も抗力と同様にこの報告に必要な一般解だけを示す.

$$P_1(1,\theta)=\frac{P(1,\theta)-P(\infty,\pi)}{(1/2)\rho U^2}$$

$$=2-\frac{1}{2}e^{R_1\cos\theta}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\{K_{m-1}(R_1)\cos(m-1)\theta$$

$$+2K_m(R_1)\cos m\theta+K_{m+1}(R_1)\cos(m+1)\theta\} \quad (2.3\text{-}24)$$

2．4　Oseen方程式の厳密解に対する展開式

この節では，球については 流れ関数Ψ，抗力係数C_D，球上の圧力係数 $P_1(1,\theta)$，そして 円柱については 流れ関数Ψ，渦度ζ，抗力係数C_D，円柱上の圧力係数$P_1(1,\theta)$ をRe数で展開した展開式をそれぞれ示す.

2.4.1　球

流れ関数Ψ の展開式；

$$\Psi=\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{3}{4}r+\frac{1}{4r}\right)(1-\mu^2)+\left(-\frac{3}{8}r^2+\frac{3}{4}-\frac{3}{8r^2}\right)$$

$$\mu(1-\mu^2)R_1+\left\{\left(-\frac{1}{8}r^3-\frac{9}{32}r^2-\frac{63}{320}r+\frac{21}{320r}-\frac{1}{40r^3}\right)\right.$$

$$(1-\mu^2)+\left(\frac{1}{4}r^3-\frac{9}{32}r^2+\frac{3}{32r^2}-\frac{1}{16}\right)\mu(1-\mu^2)+\left(-\frac{1}{8}r^3+\right.$$

$$\frac{3}{8}r-\frac{1}{2r}-\frac{1}{4r^3})\mu^2(1-\mu^2)\}R_1^2+\{(\frac{5}{160}r^4-\frac{15}{160}r^3+$$

$$\frac{103}{640}r^2-\frac{173}{1280}r+\frac{51}{1280r}-\frac{1}{320r^3})(1-\mu^2)+(-\frac{21}{224}r^4+$$

$$\frac{3}{16}r^3-\frac{1281}{4480}r^2+\frac{2673}{6720}-\frac{15}{112r^3}-\frac{1143}{13440r^2}+\frac{3}{224r^4})\mu$$

$$(1-\mu^2)+(\frac{3}{32}r^4-\frac{3}{32}r^3-\frac{1}{32}r+\frac{1}{64r}+\frac{1}{64r^3})\mu^2(1-$$

$$\mu^2)+(-\frac{1}{32}r^4+\frac{1}{8}r^2-\frac{3}{16}+\frac{1}{8r^2}-\frac{1}{32r^4})\mu^3(1-\mu^2)\}$$

$$R_1^3+O(R_e^4) \qquad (2.4.1\text{-}25)$$

ただし，$\mu=\cos\theta$，$R_1=Re/4$.

抗力係数C_D の展開式；

$$C_D=\frac{3}{R_1}\{1+\frac{3}{4}R_1-\frac{19}{80}R_1^2+\frac{71}{320}R_1^3-\frac{30179}{134400}R_1^4$$

$$+\frac{122519}{537600}R_1^5+O(R_e^6)\} \qquad (2.4.1\text{-}26)$$

球上の 圧力係数$P_1(1,\theta)$ の展開式；

$$P(1,\theta)=-\frac{3}{2}\cos\theta\ \frac{1}{R_1}+\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{8}\cos\theta+\frac{3}{2}\cos 2\theta\right)+$$

$$\left(-\frac{1}{4}+\frac{57}{160}\cos\theta-\frac{3}{4}\cos 2\theta\right)R_1+\left(\frac{151}{560}-\frac{9}{20}\cos\theta+\right.$$

$$\left.\frac{453}{560}\cos 2\theta-\frac{25}{128}\cos 3\theta\right)R_1^2+\left(-\frac{219307}{739200}+\frac{49401}{92400}\right.$$

$$\left.\times\cos\theta-\frac{21769}{24640}\cos 2\theta+\frac{77990}{236544}\cos 3\theta-\frac{21}{640}\cos 4\theta\right)R_1^3$$

$$+O(R_e^4) \qquad (2.4.1\text{-}27)$$

2.4.2 円柱

流れ関数Ψ の展開式；

$$\Psi=\{-\frac{1}{2s}r+\frac{1}{2s}\frac{1}{r}+\frac{1}{s}r\log r\}\sin\theta+\{-\frac{1}{4}r^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{8s})$$

$$+(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8s})\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4s}r^2\log r\}\sin 2\theta R_1+[\{(\frac{1}{4}+\frac{5}{64s^2})r$$

$$-(\frac{1}{8}+\frac{1}{16s})r^3+(-\frac{1}{8}+\frac{1}{16s}-\frac{5}{64s^2})\frac{1}{r}+\frac{1}{8s}r^3\log r$$

$$+(\frac{1}{8s}-\frac{5}{32s^2})r\log r\}\sin\theta+\{(\frac{1}{8}-\frac{1}{32s})r$$

$$-(\frac{1}{24}-\frac{1}{144s})r^3-(\frac{1}{8}-\frac{1}{48s})\frac{1}{r}+(\frac{1}{24}+\frac{1}{288s})\frac{1}{r^3}$$

$$+\frac{1}{24s}r^3\log r\}\sin 3\theta]R_1^2+[\{(\frac{1}{4}s-\frac{1}{48}-\frac{1}{64s}+$$

$$\frac{5}{256s^2})-(\frac{1}{8}s-\frac{1}{24}-\frac{11}{384s})r^2-(\frac{1}{48s}+\frac{1}{24})r^4$$

$$+(-\frac{1}{8}s+\frac{1}{48}+\frac{1}{128s}-\frac{5}{256s^2})\frac{1}{r^2}+(\frac{1}{8}-\frac{5}{128s^2})$$

$$\times r^2\log r+\frac{1}{24s}r^4\log r\}\sin 2\theta+\{-(\frac{1}{32}-\frac{1}{192s})$$

$$+\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{192s}\right)r^2-\left(\frac{1}{192}-\frac{1}{768s}\right)r^4$$

$$+\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{384s}\right)\frac{1}{r^2}+\left(-\frac{1}{192}+\frac{1}{768s}\right)\frac{1}{r^4}$$

$$+\frac{1}{192s}r^4\log r\}\sin 4\theta]R_1^3+O(R_1^4) \qquad (2.4.2\text{-}28)$$

渦度ζの展開式；

$$\zeta=e^{R_1 r\cos\theta}\left[-\frac{2}{s}\frac{1}{r}\sin\theta+\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2}\sin 2\theta R_1+\left[\left\{r-\right.\right.\right.$$

$$\left(1-\frac{5}{16s^2}\right)\frac{1}{r}-\frac{1}{s}r\log r\}\sin\theta+\left\{-\left(1-\frac{1}{6s}\right)\frac{1}{r^3}\right\}\sin 3\theta]$$

$$\times R_1^2+\left[\left\{s+\frac{5}{12}-\frac{7}{48s}+\frac{5}{64s^2}\right)\frac{1}{r^2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8s}\right)\right\}\sin 2\theta$$

$$+\left\{-\left(\frac{1}{32s}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^4}\right\}\sin 4\theta]R_1^3+O(R_1^4)\Big] \qquad (2.4.2\text{-}29)$$

$$\zeta=-\frac{2}{s}\frac{1}{r}\sin\theta+\left\{-\frac{1}{s}+\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2}\right\}\sin 2\theta R_1+\left[\left\{\left(1-\frac{1}{4s}\right)\right.\right.$$

$$\times r+\left(-\frac{1}{4s}+\frac{5}{16s^2}\right)\frac{1}{r}-\frac{1}{s}r\log r\}\sin\theta+\left\{-\frac{1}{4s}r+\right.$$

$$\left(1-\frac{1}{4s}\right)\frac{1}{r}-\left(1-\frac{1}{6s}\right)\frac{1}{r^3}\Big\}\sin 3\theta]R_1^2$$

$$+[\{(-\frac{1}{2}+\frac{5}{32s^2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{12s})r^2+(-\frac{1}{12}+s-\frac{1}{16s}$$

$$+\frac{5}{64s^2})\frac{1}{r^2}-\frac{1}{2s}r^2\log r\}\sin 2\theta+\{(\frac{1}{4}-\frac{1}{16s})$$

$$-\frac{1}{24s}r^2+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12s})\frac{1}{r^2}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{32s})\frac{1}{r^4}\}$$

$$\times\sin 4\theta]R_1^3+O(R_1^4) \qquad (2.4.2\text{-}30)$$

抗力係数C_Dの展開式；

$$C_D=\frac{D}{\rho U^2 a}$$

$$=\pi\{\frac{2}{s}\frac{1}{R_1}-(1-\frac{1}{2s}+\frac{5}{16s^2})R_1-(\frac{s}{2}-\frac{1}{6}+\frac{7}{144s^2}$$

$$-\frac{25}{512s^3})R_1^3-(\frac{s^2}{4}+\frac{s}{12}-\frac{19}{288}+\frac{287}{8064s}$$

$$-\frac{727}{110592s^2}-\frac{55}{18432s^3}+\frac{125}{16384s^4})R_1^5$$

$$+O(R_1^7)\} \qquad (2.4.2\text{-}31)$$

円柱上の 圧力係数$P_1(1,\theta)$ の展開式；

$$P_1(1,\theta)=\frac{P(1,\theta)-P(\infty,\ \pi)}{(1/2)\rho U^2}$$

$$=-\frac{2}{s}\cos\theta\frac{1}{R_1}+\left(2-\frac{3}{2s}\right)\cos 2\theta+\left\{\left(1-\frac{1}{2s}+\frac{5}{16s^2}\right)\right.$$

$$\left.\times\cos\theta-\frac{1}{3s}\cos 3\theta\right\}R_1+\left\{\left(s-\frac{1}{12}-\frac{7}{48s}+\frac{15}{64s^2}\right)\cos 2\theta\right.$$

$$\left.-\frac{5}{96s}\cos 4\theta\right\}R_1^2+\left\{\left(16s-\frac{16}{3}+\frac{14}{9s^2}-\frac{25}{16s^3}\right)\cos\theta\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}s-\frac{17}{48}+\frac{1}{32s}+\frac{5}{96s^2}\right)\cos 3\theta-\frac{1}{160s}\cos 5\theta\right\}R_1^3$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{2}s^2+\frac{5}{12}s-\frac{133}{576}+\frac{127}{2304s}+\frac{1}{1536s^2}-\frac{75}{2048s^3}\right)\right.$$

$$\times\cos 2\theta+\left(\frac{1}{8}s-\frac{59}{480}+\frac{11}{640s}+\frac{25}{3072s^2}\right)\cos 4\theta$$

$$\left.-\frac{7}{11520s}\cos 6\theta\right\}R_1^4+O(R_1^5) \qquad (2.4.2\text{-}32)$$

２．５　Oseen解の数値解と考察

この節では §2.4 で示した展開式の数値結果と §2.2 あるいは §2.3で示した球および円柱の解析解を直接数値計算し，中間Re数の範囲で調べたフローパターン，抗力，圧力分布 などについて議論する．

2.5.1　球

球の流れ関数 Ψ の展開式から求めた Re=1 の場合の流線を 図２-１で示す．Ψ の展開式はOseen解（式(2.2-8)）を パラメーター R_1（R_1=Re／４）で展開し オーダー R_1^4（O（R_1^4））まで求めたが，この展開式の適用範囲のRe数ではO（Re^4）の項はほとんどΨに影響を与えない．したがって，式(2.4.1-25)では紙面の関係上 O（Re^3）までしか与えていない．展開式は Re<1 の範囲では球前後の非対称流れをよくあらわし，図２-１から解るように Re=1 でも満足な流線を描くことができる．しかし，Ψ の解（式(2.2-8)）は距離とRe数の積に依存しているために O（Re^4）までの展開式で求めた Re=3 の流線は球から離れた

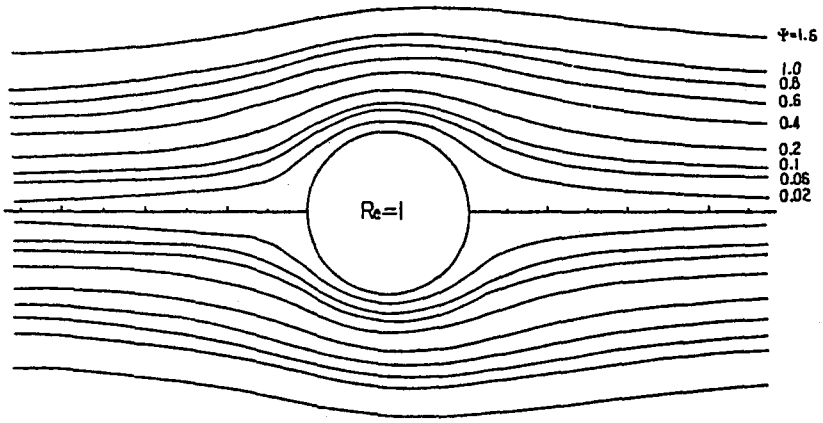


図２-１　展開式による球周りのフローパターン

表２-１　球の展開式の各オーダーの値

（r=1.2, θ=30°；上半分，r=1.2, θ=120°；下半分）

オーダー	1	R	R^2	R^3	R^4	Ψ
Re=0.1	0.01417	-0.00028	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00695
		0.00081	-0.00001	0.00000	-0.00000	0.00748
Re=1	0.01417	-0.00280	0.00044	-0.00008	0.00002	0.00587
		0.00811	-0.00117	0.00034	-0.00010	0.01067
Re=2	0.01417	-0.00560	0.00175	-0.00062	0.00026	0.00498
		0.01623	-0.00466	0.00268	-0.00162	0.01340
Re=3	0.01417	-0.00841	0.00393	-0.00208	0.00129	0.00445
		0.02434	-0.01049	0.00903	-0.00817	0.01444
Re=4	0.01417	-0.01121	0.00699	-0.00493	0.00408	0.00455
		0.03246	-0.01865	0.02141	-0.02584	0.01178

ところで不満足な流線になり数値が発散する．したがって，この展開式を球周りの流れに用いることができるRe数の範囲は Re<3 になる．球の前後の対称な位置［r=1.2, θ=30°；r=1.2, θ=120°］で調べた展開式の収束状態を 表２-１で示す．この数値結果では収束は死水内よりむしろ球前方の方が遅くなるので，球前方の攪乱が球後方より複雑になっていることがわかる．双子渦の発生については 式(2.2-8)と式(2.2-9) を直接数値計算し，その結果を外挿することによって求め，その場合の双子渦の成長を 図２-２ で示す．図から渦度発生は Re～7.8 になる．

一方，中間Re数のフローパターンは式(2.2-8)の Ψ と 式(2.2-9)の ζ の解を直接数値計算することによって求めた．それらの中から Re=20, 100 のフローパターンを図２-３(a)Re=20, (b)Re=100 で示す．二重級数になるΨ，ζ の解は中間Re数で非常にきびしい交項級数の数値になるが，この計算では各Re数でΨ，ζの値が十分収束するように吟味した．これらの結果とNavier-Stokes方程式の数値解から求

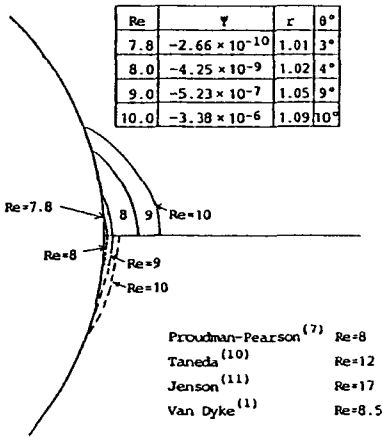


図２-２　球背後のΨ=0とζ=0の形

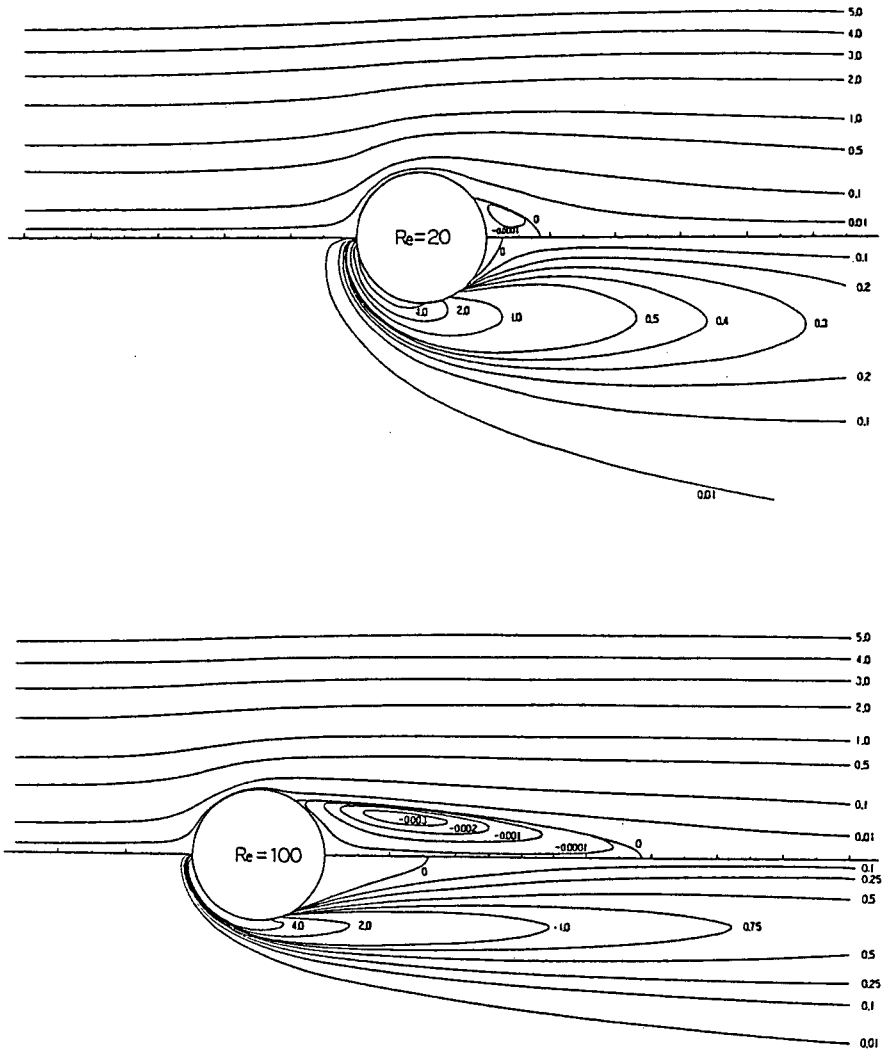


図２-３　球周りのフローパターン (a) Re=20　(b) Re=100

めた流れの比較は第５章で行ない議論する．図２-４ では式(2.2-5)からRe=60で求めた対称軸上の各断面の速度u（上半分），v（下半分）の速度輪郭を示す．これらの図は中間Re数でも球周り，特に，死水領域内のフローパターン，速度分布などをOseen解で定性的に描けることを示す．

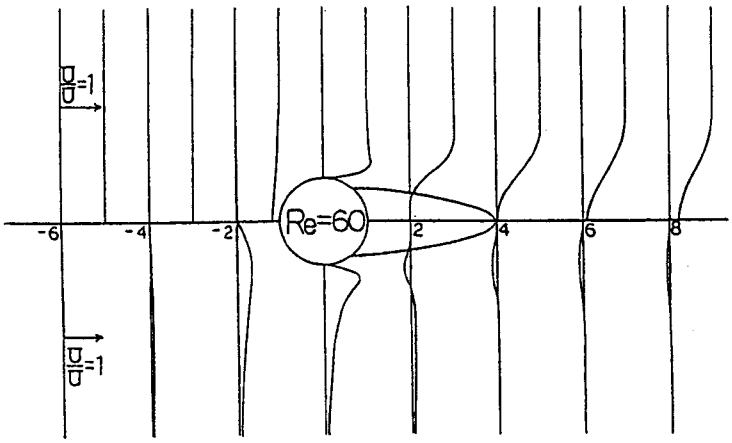


図2-4　u，vの速度分布（Re=60）

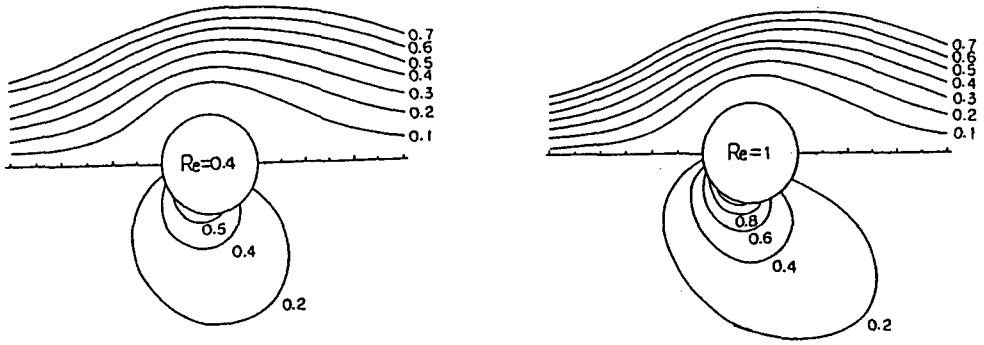
抗力係数C_Dに関しては第5章でNavier-Stokes方程式の数値解と詳細に比較するのでここでは結果を示すことを省く．ただし，Goldsteinの O（$R\overset{5}{e}$）の項を修正した抗力係数の展開式(2.4.1-26)がShanks[4]の結果と一致することを確認し，さらに，Goldsteinの間違いは式(2.2-7)のB_mの連立方程式を十分拡張しないで展開（3行3列）したために起こったことも調べた．

式(2.4.1-27)の圧力分布の展開式は流れ関数と同様に Re<3 で使用できる．また，Oseen解（式(2.2-11)）を直接数値計算し中間Re数の範囲（Re=10～100）で球上の圧力分布を求めたが，その結果は第5章の数値解で Re=1,40 の場合についてだけ示す．

2.5.2 円柱

流れ関数Ψ と 渦度ζ のOseen解（式(2.3-21),式(2.3-22)）に対する Re数の展開式はそれぞれ O（$R\hat{e}^5$）まで展開したが，球の場合と同じ理由で O（$R\hat{e}^3$）までを式(2.4.2-28) と 式(2.4.2-29,(30))で示す．これらの展開式から求めた Re=0.4, 1 のフローパターンを図２-５で示す．展開式から求めた流線の乱れは，球と同じ原因でRe～2位で起こる．渦度発生の臨界Re数は展開式に r=1.1, θ～0 の値を代入し調べたが，各オーダーの収束状態が悪くなり十分な結果が得られなかったので，渦度発生については展開式を若干修正し求めた．その結果は Re～ 2.4 になる．一方，渦度のOseen解を直接数値計算し求めた臨界値は，この値と若干異なりRe=3.08 になる．この原因は展開式の項数の不足によると思われる．

中間Re数のフローパターンは球の場合と同様にΨとζの厳密解（式(2.3-21),式(2.3-22)）を直接計算することによって求めた．その結果を 図２-６(a)Re=60,(b)Re=80 で示す．円柱の場合も数値解の収束には球と同様に十分注意して計算を行なった．これらの結果とNavier-Stokes方程式の数値解との比較は球と同様に第５章で行なう．ここでは，Re=60 の場合の対称軸上の任意の位置での断



（a）Re=0.4　　（b）Re=1

図２-５　展開式による円柱周りのフローパターン

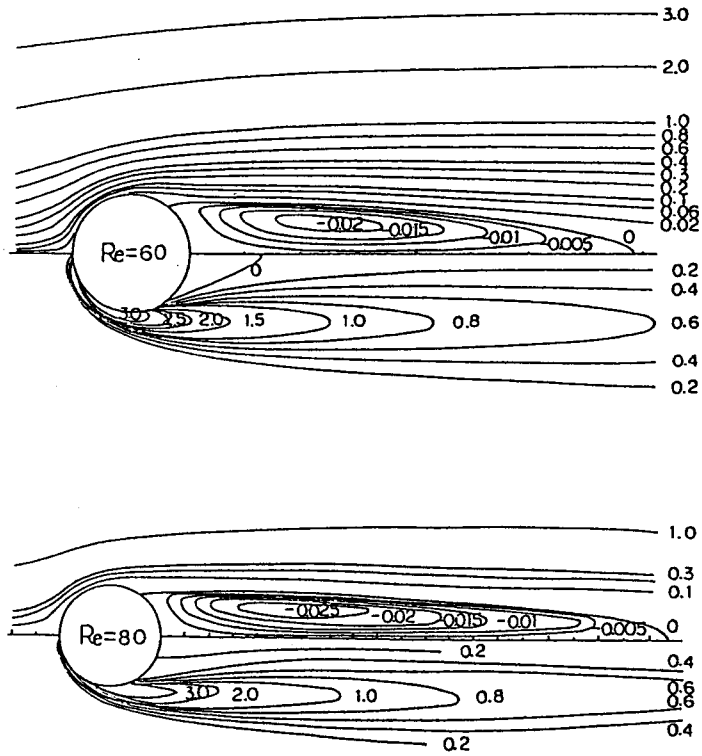


図2-6　円柱周りのフローパターン (a) Re=60 (b) Re=80

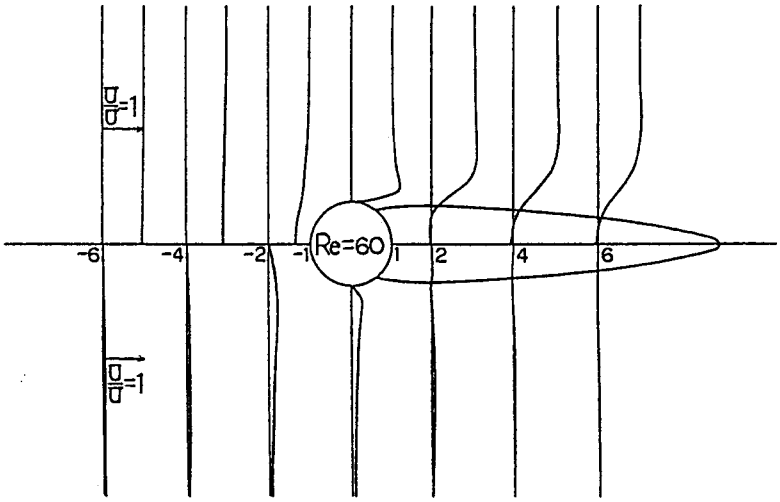


図2-7　u，vの速度分布（Re=60）

面上の速度分布を Re=60 について図2-7 で示し，一方，図2-8(a)，(b) では円柱周りの速度分布 u，v を Re=60 で示す．

抗力係数C_D の展開式(2.4.2-31)はRe～4まで，そして 圧力係数 $P_1(1,\theta)$ の展開式(2.4.2-32)はRe～3位 まで使用できる．

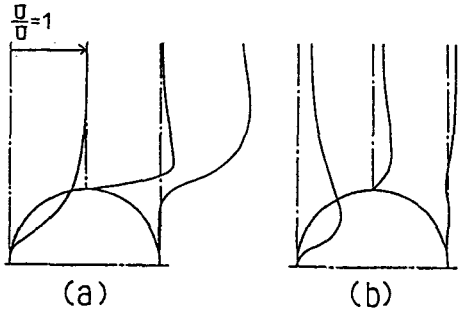


図2-8　u，vの円柱周りの速度分布
（Re=60；(a) u (b) v）

抵抗係数C_D，圧力係数$P_1(1,\theta)$ のOseen解（式(2.3-23)，式(2.3-24)）の数値については第5章で行なうNavier-Stokes方程式の数値解との比較で述べるのでここでは省略する．

2．6　結言

Oseen方程式の研究は方程式の性質上小さいRe数に限られていたが，Oseen解を直接数値計算することによって中間Re数でもかなりよい特性値の結果をOseen方程式が与えることを示すことができた．しかし，中間Re数になればOseen方程式が輸送速度をかなり大きく見積り，拡散効果を過小評価していることがわかる．したがって，これらの点を考慮してOseen方程式の改良を行なえば，中間Re数の範囲でも解析的にNavier-Stokes方程式の数値解に近ずくことが可能になる．ただし，低Re数の範囲ではここで示したRe数による展開式で十分よい結果が求まるので，低Re数の範囲の物理量の議論にはこれらの展開式を適用することは有益である．

最後に，双子渦の振動はTanedaの実験[25],[26]では円柱，球の場合それぞれRe=40,130位で始まると報告されているが，Oseen解 ではそのような傾向は見られずNavier-Stokes方程式の数値解と同様Re数と共に直線的に双子渦の長さは成長する．したがって，双子渦の成長に関してはどちらも実験結果と一致しない．

第３章　球を過ぎる定常な粘性流の数値解

３．１　序論

Navier-Stokesの式を解析的にとくことは，線形化が可能な低レイノルズ数流れの場合でも第２章で述べたように極めて大きな手数を要し，実用的観点からは遅い流れでも計算機による数値解のほうが有利なことがある．例えば，この章でも述べるように，Chester-Breach[23] は球周りの流れに対して Proudman-Pearson[16]の 特異摂動解を発展させて抵抗値に対して４項の級数解を求めたがそれでも結果はRe数の増加とともに急速に精度が低下する．任意形状の三次元物体周りの流れの場合には，Re>10 では完全な解析解は事実上不可能といってよい．

三次元物体の代表として球周りの流れが多く扱われるが，その数値解は Jenson[11] によって最初に報告が提出されて以来，Le Clar[27]，Dennis-Walker[28]，Pruppacherら[29]，Lin-Lee[30]ら が定常流れについて報告している．しかし，これらのすべての報告は，その位置を適当に定めた外側境界面上で，一様流れ（速度が一定で渦度が零）となる境界条件を用いている．第４章で述べる『円柱を過ぎる定常な粘性流の数値解析[31]』で，外側境界面上に仮定する境界条件に物体後流が作る速度ひずみをとり入れないときは計算領域を十分に大きく取る必要があることを示すが，三次元物体周りの流れについてはこのような配慮はその試みすらない．二次元物体では物体の流れ場に与える攪乱が大きく，ストークス流れが存在しないのに反して，三次元物体では攪乱が小さいことを反映しているものと考えられる．事実，円柱に比べて球のフローパターンの解析解（Oseen解）は数

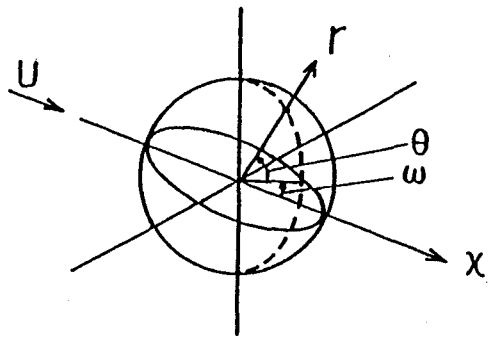


図３-１　球周りの流れ

値解とRe～1でよりよく一致する．この章では三次元物体の代表として球をとり上げ球周りの流れの数値解析に適当な外側境界条件と計算領域の大きさについて検討する．遠方場では物体形状の影響は消えるので，本章の結論は球以外の物体に対しても同様に有効である．

3．2　基礎式

一様流（速度U）の中に置かれた球（半径a）周りの軸対称流れを考える．図3-1のように原点をもつ球座標系（r，θ，ω）を考えると流れ場は次の基礎式を満足する．

$$\nabla_p^2 \Psi = -\zeta r \sin\theta \tag{3.2-1}$$

$$\frac{Re}{2}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\zeta}{r\sin\theta}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\zeta}{r\sin\theta}\right)\right]\sin\theta = \nabla_p^2(\zeta r \sin\theta) \tag{3.2-2}$$

ただし，

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

上式の Ψ，ζ，r はそれぞれ Ua^2，U／a，aで除して無次元化してある．

r－θ面内の流れを求めるために

$$r = e^z \tag{3.2-3}$$

によって動径座標を変換する．このとき式(3.2-1)，(3.2-2)は次式のように変換

される.

$$\zeta e^{3z}\sin\theta+\nabla_E^2\Psi=0 \tag{3.2-4}$$

$$\nabla_E^2 G+\frac{Ree^z\sin\theta}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{3.2-5}$$

ただし, $G=\zeta e^z\sin\theta$, $F=\zeta/(e^z\sin\theta)$ で,

$$\nabla_E^2=\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial z}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

である.

3.3 境界条件

球面上の流れの条件および軸対称流れの条件から次の自明な境界条件が得られる.

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \text{ で } \Psi=0,\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z}=0,\ \zeta=-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \\ \theta=0,\ \pi \text{ で } \Psi=0,\ \zeta=0 \end{array}\right\} \tag{3.3-6}$$

$z\to\infty$ では $\Psi\to\Psi_\infty$, $\zeta\to\zeta_\infty$ となるべきであるが Ψ_∞, ζ_∞ にはいくつかの選択が可能であり, それが数値解の精度に影響する. 本章の数値解では以下に述べる4種類の場合を検討した.

(1) Oseen解: 指定した外側境界 $r=r_\infty$ 上でOseen方程式の厳密解[5] $\Psi^\circ(r_\infty,\theta)$, $\zeta^\circ(r_\infty,\theta)$ を用いる.

（２）Oseen源を用いた近似解：一様流中の物体周りの流れは，Oseen式を用いる場合は物体中心に置いたOseen源とポテンシャル流れに対する高次の二重吹き出しの重ね合わせで表わされる．物体から遠く離れた点では，一様流に対する攪乱は物体の後流部分のみに現れOseen源の効果が支配的である．抗力 D の物体によって生じるOseen源は $4\pi\rho U$ の強さをもつのでそれらが作る流れ場は

$$\Psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta - \frac{C_D}{8}(1+\cos\theta)\{1-e^{-(Re/4)r(1-\cos\theta)}\}$$

$$\zeta = -\frac{Re}{16} C_D \left(\frac{Re}{4r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin\theta\, e^{-(Re/4)r(1-\cos\theta)} \qquad (3.3\text{-}7)$$

となる．ただし，$C_D = D/(1/2)\rho U^2 \pi a^2$ は抗力係数である．

（３）　一様流：無限遠で物体の影響は消えると仮定する．すなわち，

$$\Psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta$$

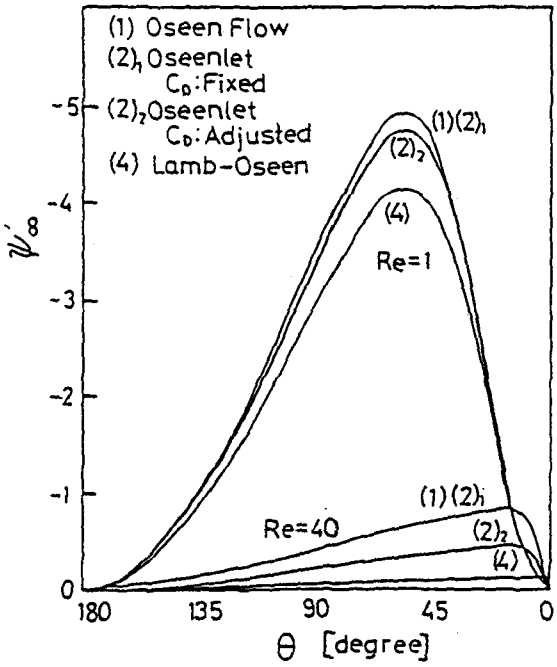
$$\zeta = 0 \qquad (3.3\text{-}8)$$

（４）　Lamb－Oseen解：Oseen源だけでなくポテンシャル流れの成分の影響を考慮する．すなわち，

$$\Psi = \frac{1}{4}\left(2r^2 + \frac{1}{r}\right)\sin^2\theta - \frac{3}{Re}(1+\cos\theta)$$

$$\times\{1-e^{-(Re/4)r(1-\cos\theta)}\} \qquad (3.3\text{-}9)$$

$$\zeta = -\left(\frac{3}{2r^2} + \frac{3Re}{8r}\right)\sin\theta\, e^{-(Re/4)r(1-\cos\theta)}$$



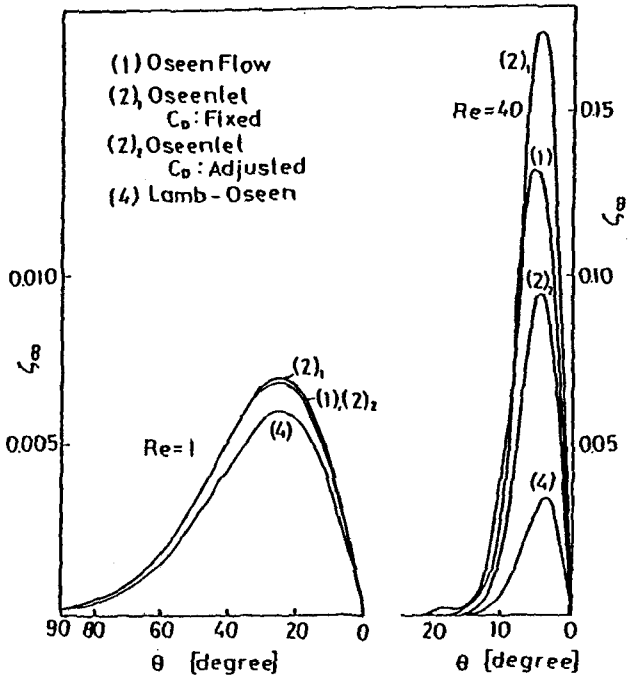


図3-2　外側境界面上の ψ_∞ , ζ_∞ の分布

前式の r は $r=r_\infty$ を適用する．式(3.3-7)は $C_D=24/Re$ とおけば Ψ の $\sin^2\theta/4r$ の項を除いて 式(3.3-9) と一致する．外側の境界面位置を $z_\infty=3$ (r_∞ ～20.1) に定めたときの各種境界条件が仮定する流れの分布は図3-2のようになる．ただし，流れ関数ψは一様流からの攪乱部分 ψ_∞ のみを示している．図3-2で，Oseen源を用いる場合のうち，C_D を固定する場合［$(2)_1$］は C_D の値はOseen方程式の厳密解[5] で定められる値を用いてある．また，C_D を修正する場合［$(2)_2$］は後述の差分計算の1サイクルごとに C_D の値を求め，その都度 式(3.3-7)を用いて流れを計算し直すもので，図3-2 は収束した場合である．この断面では Ψ でながめる限り低Re数ではどの条件の場合も大きな違いはないが，ψ においてはかなり違っていることが図からわかる．高Re数ではさらに大きく異なる．

3．4　差分式

3.4.1　流れ関数

差分式は中央差分式を用い ＳＬＯＲ法 によって解を求める．式(3.2-4)は次式のようになる．

$$\Upsilon_B\Psi^{n+1}_{i,j+1}+\Upsilon_0\Psi^{n+1}_{i,j}+\Upsilon_D\Psi^{n+1}_{i,j-1}=-\zeta^n_{i,j}e^{3z}\sin\theta-\Upsilon_A\Psi^n_{i+1,j}-\Upsilon_C\Psi^n_{i-1,j} \tag{3.4.1-10}$$

ただし，

$$\Upsilon_A=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{4}\right)\ (i=2),\quad \Upsilon_B=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{d}-\dfrac{\cot\theta}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2}\right)\ (i\neq 2),\quad \Upsilon_D=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{d}+\dfrac{\cot\theta}{2}\right)\end{cases}$$

$$\Upsilon_o = \begin{cases} -2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{d^2}\right)-\dfrac{1}{b} & (i=2) \\ -2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{d^2}\right) & (i\neq 2) \end{cases}$$

$$\Upsilon_c = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2} & (i=2) \\ \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{2}\right) & (i\neq 2) \end{cases}$$

また，$b=\Delta z$，$d=\Delta\theta$ で Δz，$\Delta\theta$ は格子間隔である．（i，j）はそれぞれz，θ方向で $i=1\sim I$（=61），$j=1\sim J$（=61）である．上式は $\Psi_{i,j}$ に関する連立方程式を与えるが，このようにして得られる $\Psi_{i,j}$ から緩和係数αを用いて

$$\bar{\Psi}^{n+1}_{i,j}=\Psi^{n}_{i,j}+\alpha\left(\Psi^{n+1}_{i,j}-\Psi^{n}_{i,j}\right) \qquad (3.4.1\text{-}11)$$

によって $\bar{\Psi}^{n+1}_{i,j}$ を求め，これをあらためて $\Psi^{n+1}_{i,j}$ に置き換えて（n+1）回目の値と定める．ここで α は 1.6 を用いた．また，渦度を求める際に（n+1/2）回目の流れ関数値が必要となるのでこれを次式で定める．

$$\Psi^{n+(1/2)}_{i,j}=\frac{1}{2}\left(\Psi^{n}_{i,j}+\Psi^{n+1}_{i,j}\right) \qquad (3.4.1\text{-}12)$$

さらに，球面上（z=0）ではz方向のΨの値の変化が大きく，未収束の段階で $\Psi^{n}_{1,j}=0$ の条件を用いると計算の精度が悪くなるので，i=2 のステップでは次式で定める仮の $\Psi_{1,j}$ を用いた．

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{1,j}^{*n+(1/2)} &= \frac{1}{2}\Psi_{3,j}^{n+(1/2)} - 2\Psi_{2,j}^{n+(1/2)} \\ \Psi_{1,j}^{*n+1} &= \frac{1}{2}\Psi_{3,j}^{n+1} - 2\Psi_{2,j}^{n+1}\end{aligned}\right\} \qquad (3.4.1\text{-}13)$$

上式を導くには $\Psi_{1,j}=0$ ，$(\partial\Psi/\partial z)_{i=1}=0$ の条件を用いているが，解が収束したときは上式の値はともに零に収束する．

3.4.2 渦度

渦度は ＡＤＩ法 で解く．このために式(3.2-5)を θ，z 方向の二つの差分式(3.4.2-14)，(3.4.2-15)で書き表わす．

$$\begin{aligned}&-\beta_B\zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} + (\beta_{o2}+\rho)\zeta_{i,j}^{n+(1/2)} - \beta_D\zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)} \\ &\quad = \beta_A\zeta_{i+1,j}^{n} - (\beta_{o1}-\rho)\zeta_{i,j}^{n} + \beta_C\zeta_{i-1,j}^{n}\end{aligned} \qquad (3.4.2\text{-}14)$$

$$\begin{aligned}&-\beta_A\zeta_{i+1,j}^{n+1} + (\beta_{o1}+\rho)\zeta_{i,j}^{n+1} - \beta_C\zeta_{i-1,j}^{n+1} \\ &\quad = \beta_B\zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} - (\beta_{o2}-\rho)\zeta_{i,j}^{n+(1/2)} + \beta_D\zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)}\end{aligned} \qquad (3.4.2\text{-}15)$$

ただし，

$$\beta_A = \frac{e^b}{b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\right) - \frac{Re}{8bde^{z+b}\sin\theta}\left(\Psi_{i,j+1}^{n+(1/2)} - \Psi_{i,j+1}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_B = \frac{\sin(\theta+d)}{d\sin\theta}\left(\frac{1}{d} - \frac{\cot\theta}{2}\right) + \frac{Re}{8bde^{z}\sin\theta} \times \left(\Psi_{i+1,j}^{n+(1/2)} - \Psi_{i-1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_C = \frac{e^{-b}}{b}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)+\frac{Re}{8bde^{z-b}\sin\theta}\left(\Psi_{i,j+1}^{n+(1/2)}-\Psi_{i,j+1}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_D = \frac{\sin(\theta-d)}{d\sin\theta}\left(\frac{1}{d}+\frac{\cot\theta}{2}\right)-\frac{Re}{8bde^{z}\sin\theta}$$

$$\times\left(\Psi_{i+1,j}^{n+(1/2)}-\Psi_{i-1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_{o1} = \frac{2}{b^2}+\frac{Re\cot\theta}{8be^{z}\sin\theta}\left(\Psi_{i+1,j}^{n+(1/2)}-\Psi_{i-1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_{o2} = \frac{2}{d^2}+\frac{Re\cot\theta}{8be^{z}\sin\theta}\left(\Psi_{i+1,j}^{n+(1/2)}-\Psi_{i-1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

ただし，ρ は加速係数で 3.0，2.5，2.0，1.5 の値を順に使用した．最初の半回のステップ（n+1/2）では 式(3.4.2-14) を用いて θ 方向に緩和し，後の半回のステップ（n+1）では 式(3.4.2-15) を用いて z 方向に緩和する．球面上の渦度 $\zeta_{1,j}$は 式(3.3-6) を次式に置き換える．

$$\zeta_{1,j}^{n+1} = \frac{1}{2b^2}\,\frac{\Psi_{3,j}^{n+1}-8\Psi_{2,j}^{n+1}}{\sin\theta}, \quad \zeta_{1,j}^{n+(1/2)} = \zeta_{1,j}^{n+1}. \qquad (3.4.2\text{-}16)$$

3.4.3 計算手順

Oseen解[5]を数値計算して，Ψ，ζ の値を各格子点上で与えた後，次の手順を繰り返して計算を進める．

（１） i＝２～（I-1）に対して順に式(3.4.1-10)を適用して$\Psi_{i,j}^{n+1}$を求め，式(3.4.1-11)で修正する．

（２） 得られた$\Psi_{i,j}^{n+1}$を用いて 式(3.4.1-12) より $\Psi_{i,j}^{n+(1/2)}$ を求める．

（３）　式(3.4.1-13)，(3.4.2-16)で球面上（i=1）の $\Psi^{*n+(1/2)}_{i,j}$，$\Psi^{*n+1}_{i,j}$ と $\zeta^{n+(1/2)}_{i,j}$，$\zeta^{n+1}_{i,j}$ を求める．

（４）　（２），（３）で求めた $\Psi^{n+(1/2)}_{i,j}$，$\zeta_{1,j}$ と $\zeta^{n}_{i,j}$ を用いて式(3.4.2-14) によりθ線上の $\zeta^{n+(1/2)}_{i,j}$を求める．

（５）　（４）と同様の計算を式(3.4.2-15)を用いて行いｚ線上で $\zeta^{n+(1/2)}_{i,j}$ を求める．このとき $\zeta^{n+(1/2)}_{i,j}$ は（４）で求めた値を用いる．

収束の判定は $(\zeta^{n+1}_{max}-\zeta^{n}_{max})/\zeta^{n}_{max}<10^{-5}$ が満たされた場合とした．この計算では $\Delta z=0.05$，$\Delta\theta=3^{\circ}$，$z_{\infty}=3$（$r_{\infty}\sim 20.1$）を標準とした．

３．５　抗力係数の計算法

球の抗力 D は $(1/2)U^2\pi a^2$ で無次元化して抗力係数 C_D で表わす．C_D は次式で求める．

$$C_D=-\frac{8}{Re}\int_0^{\pi}\zeta_o\sin^2\theta\,d\theta-\frac{2}{Re}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\zeta\right)_{z_o}\cos 2\theta\,d\theta \quad (3.5\text{-}17)$$

ただし，添字ｏは球面上の値を意味する．上式で右辺第１項は摩擦抗力係数C_{DF}，第２項は圧力抗力係数C_{DP} を表わす．圧力抗力係数は渦度の球面上での径方向微係数が必要となるので数値解の精度が低下する．差分解の誤差の程度は第４章で述べる円柱の場合[31]と同様の方法で調べ，円柱の場合と同程度であることを確かめた．

3．6　計算結果

3.6.1　外側境界条件

図3-3 に外側境界面上で与える境界条件の種類と境界面の位置によって計算結果の収束値がどのように変化するかを示す．図(b) の ζ_{max} は球面上に現れる渦度の最大値である．

図中 □，○ 印はOseen源を用いる場合［条件（２）］で，前者は C_D を固定する場合，後者は修正を加えつつ収束させる場合である．

図3-3より以下のことがわかる．

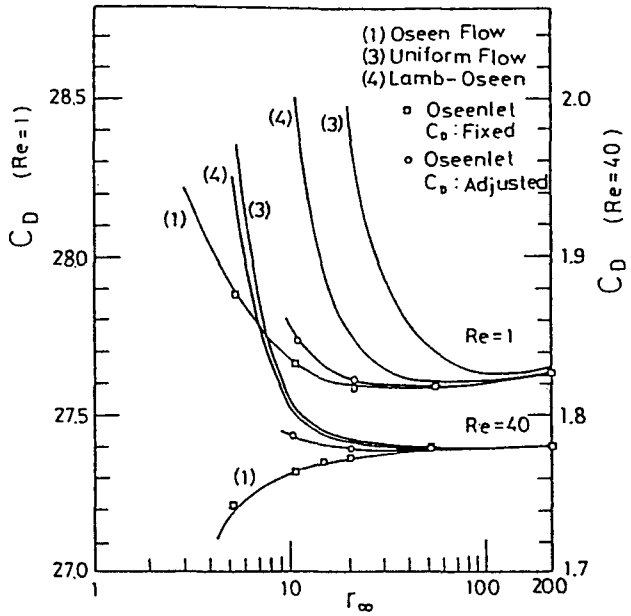
（１）　十分大きな計算領域をとるならば外側境界条件の種類は計算結果に影響しない．このことは第４章の円柱で求めた[31] 二次元流れの場合も同様である．

（２）　計算領域が最も小さくて済むのはOseen源を用いて遠方場を表わし，それに必要な抗力係数の値を修正しながら収束させる場合である．Lamb-Oseen の解はOseen源のみを用いる場合よりも遠方場の流れの精度は高いはずであるが（Re<1），式(3.3-7) は球に対する式であり，C_D 値を等価的に 24/Re に固定したことになっているために境界条件としては最適にならないものと考えられる．

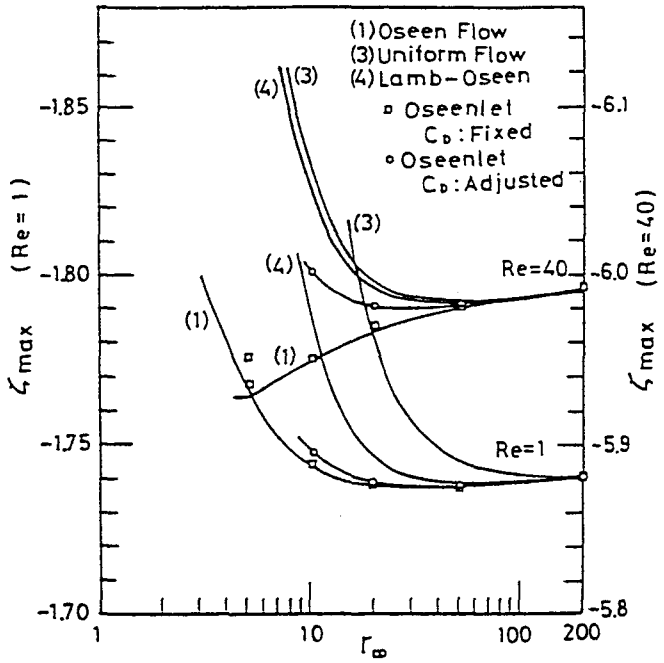
（３）　不適当な境界条件を用いた場合，Re数 が小さいほど計算領域は大きくとらねばならない．図3-2で外側境界面上の流れは Re＝1 の場合はほとんど違いがなく，Re＝40 の場合は極めて大きい．しかし，r_∞～ 20.1 における C_D，ζ_{max} の誤差は同程度である．

図3-3は球に対する結果ではあるが，遠方場は物体の形状の影響が消え，抗力Dの大きさが最も支配的である．したがって，Oseen源 のみを用いて表わした式(3.3-2)は C_D がわかれば球以外の三次元物体に対しても同様に有用である．C_D は計算途中で修正を加えつつ決定するものであるから 式(3.3-7) が境界条件として最も適当であるのは好都合である．

必要な r_∞ の大きさは，Re数が大きいときは最も r_∞ が小さくて済む境界条件

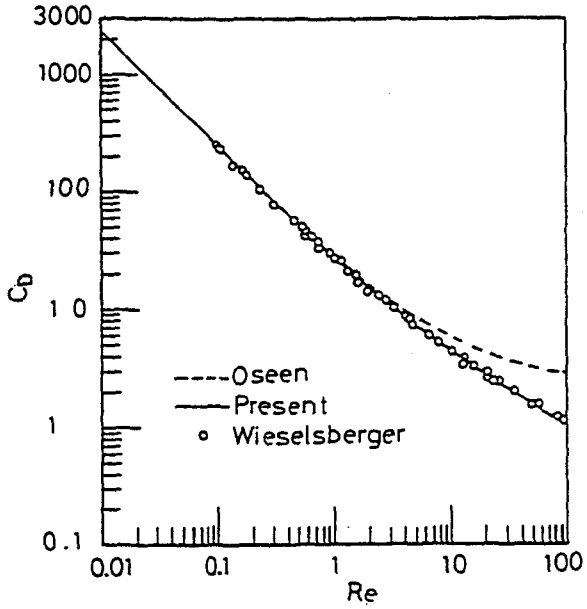


(a) C_D

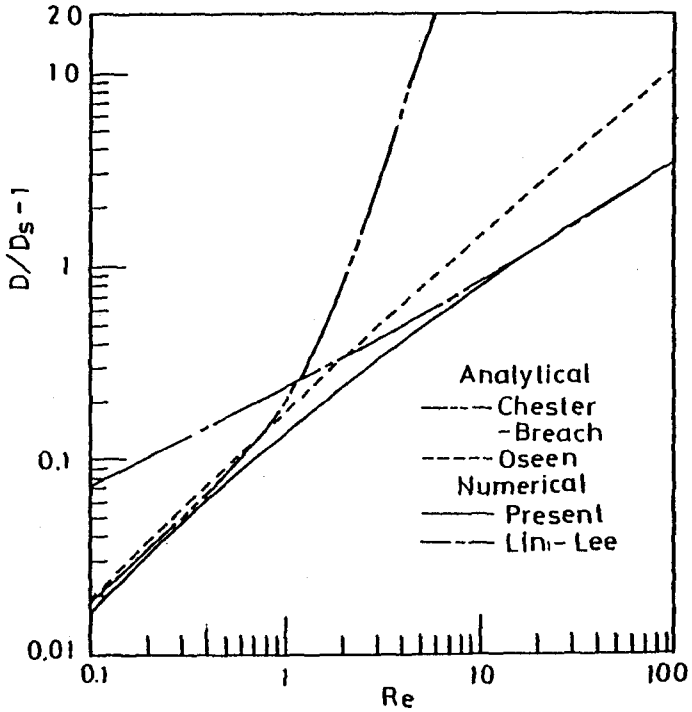


(b) ζ_{max}

図3-3　外側境界条件とその位置の影響



（a）C_D



（b）ストークス
近似からのずれ

図3-4　抗力係数 C_D

を用いるならば，二次元と三次元とで大きな差はない．Re数が小さいときは二次元の場合のほうが大きな計算領域を必要とする．また，r_∞ の大きさを r_∞ / C_D の形で表わせば二次元の場合のほうがはるかに大きい．物体が流れ場に与える攪乱が二次元のほうが大きくなるからであると考えられる．

3.6.2 抗力係数

図3-4 に本計算で得られた球の抗力係数 C_D と他の計算結果との比較を示す．図3-4 (a) は抗力係数そのものを，また，(b) はストークス近似で得られる抗力 D_s からの差を示している．○印 は実験値[32]であるが本計算が妥当な結果を与えていることがわかる．Lin-Lee[30] の数値解は外側境界条件として一様流れを仮定しているが，Re数が小さい領域で誤差が大きくなるのは格子が粗いことのほかに用いた外側境界条件としては計算領域が狭すぎたためと考えられる．特異摂動展開によって，4項まで拡張した Chester-Breach[23] の展開式はRe数の増加とともに発散的に誤差が大きくなる．

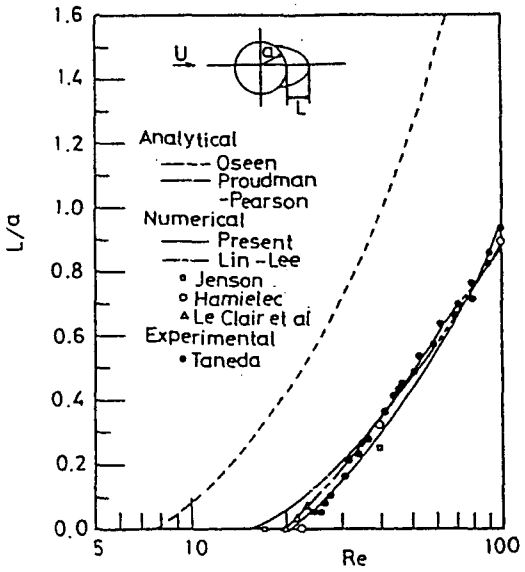


図3-5　双子渦の長さ

3.6.3 剥離角，双子渦の長さ，フローパターン

図3-5，3-6 は球の下流に生ずる双子渦の長さ L/a とその剥離流線の球面上の出発位置θを示す．図中●印は種田[25]の実験値であるが，この章の数値解は高Re数までよく一致している．図3-4で示したように複雑な解析解[31] は現在の項数では Re >1 で大きく数値からそれるが，

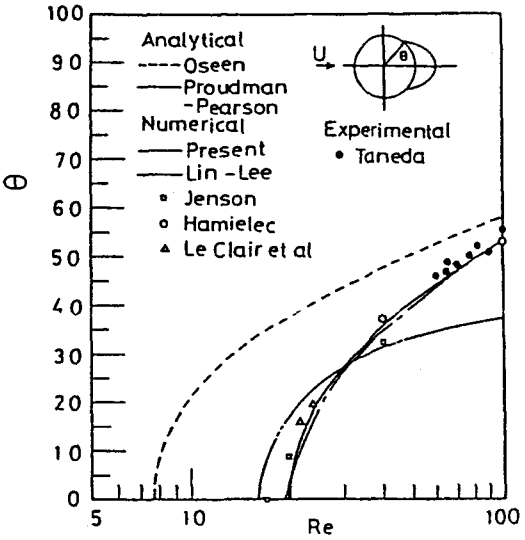


図3-6　剥離角

Oseen解は高Re数まで著しいくい違いは示さない．しかし，渦度の輸送速度を過大に評価し，拡散の効果が相対的に小さくなっているので物体周辺の流れについてはよい近似ではない．物体表面では局所的Re数が過大になっているから剥離も大きくなり，双子渦の長さも長くなる．これらの傾向は二次元流れの場合と同様である．また，三次元流れのほうが渦度の拡散面積が広いので双子渦の長さは二次元流れの場合よりはるかに小さくなり，物体の流れに対する攪乱はより物体の周辺に限られる．二次元流れの場合にはこれらフローパターンについては中間Re数領域でOseen近似が比較的よい近似となる領域があるが，三次元流れではOseen近似はよい近似にはならない．

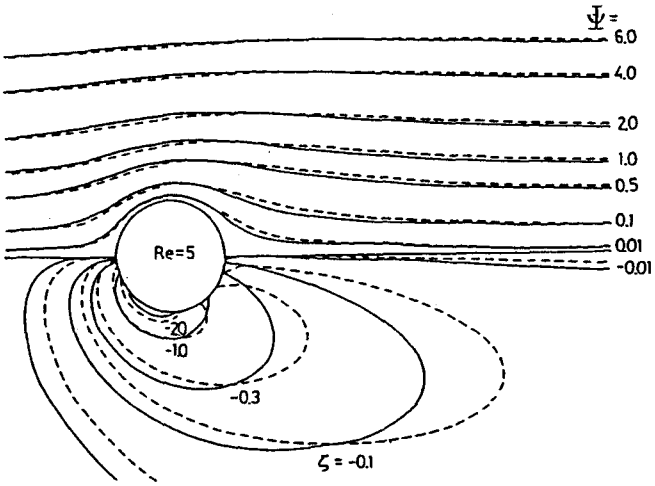


図3-7　球周りのフローパターン

図3-7 はOseen解（破線）とNavier-Stokes方程式の数値解（実線）との比較を示す．Re=1 の場合はほぼ一致するが図のように Re=5 ではすでにくい違いが大きくなる．

3．7 結言

以上に述べたように，本章は一様流中に置かれた三次元物体の周りの遅い流れを数値的に解く場合の計算領域の大きさと，外側境界面上で与えるに適した流れ場を検討したものである．

本章では，物体遠方の流れ場が物体形状でなく抗力の大きさで決まることに着目して流れ方向の抗力を与える単一のOseen源を用いることを提案し，それによって得られる流れ場を外側境界条件とするとき計算領域が最も小さくて済むことがわかった．数値計算は球を用いて行ったが，この結論は任意の三次元物体に対して有効で，好都合である．

第４章　円柱を過ぎる定常な粘性流の数値解

４．１　序論

物体周りの層流を出来るだけ大きいRe数まで，解析的にしろ数値的にしろ精度良く求めることは，流れ解析の基礎を試す問題の一つとして古くから多くの研究者の関心を集めてきた．流れはこの場合，楕円形方程式に支配されるので無限遠方の境界条件を指定することが必要であるが，その条件は物体形状によらず，物体が流れに与える力によって決まるので，代表的な物体として二次元流れでは円柱が取り上げられてきた．中間Re数の範囲（Re＝1～100）で円柱を過ぎる無限開放の粘性流を数値的に解く試みは定常と非定常の場合に分けられ，定常解については Thom[10]（Re＝10,20），Kawaguti[33]（Re＝40），Apelt[34]（Re＝40,44），Keller-Takami[35]（Re＝2,4,10,15），Takami-Keller[36]（Re＝1,7,20,30,40,50,60），Dennis-Chang[12]（Re＝5,7,10,20,40,　70），Fornberg[13]（Re＝2,4,10,20,40,100,200～300）ら，そして 非定常解については Payne[37]（Re＝40，100），Kawaguti-Jain[38]（Re＝10,20,30,40,50），Dennis-Chang[12]（Re＝70,100）ら の報告がある．これらの数値解はそれぞれ異なった外側境界条件と円柱上の渦度の差分式を用いて得られたにもかかわらず，いくつかの特性値の数値解が Re≦40 でよく一致する．　また，Taneda（渦の長さ）[26]，Tritton（抵抗値）[39]ら の実験値にもよく一致する．一方，Re＞100 では，運動方程式の解の不安定性から，収束した数値解を求めることは非常にやっかいになるが Fornberg は Re＜300 までの定常な流れの数値解を求め，そして Re～300 付近で死水領域の後ろから再循環が起こることを指摘した．無限開放の円柱を過ぎる定常な一様流の流れを数値計算するには
i）外側境界面上の境界値とその位置　ii）物体表面上の渦度の差分式　iii）収束速度と収束判定　iv）基礎方程式の適切な差分式（格子間隔も含む）などが問題になる．　ｉｖ）についてはDennis-Chang[12] が，基礎式に最も簡単な中心

差分を用いて求めた抵抗値の結果とより高次な中心差分を用いて求めた結果がほとんど変わらないことを報告している（Re=70, 100 で 3% 位の誤差）. ii）の表面上の渦度ζについては普通には $\nabla^2\psi=-\zeta$ の関係式に前進差分を用い，表面近くの 2〜3 の撹乱の流れ関数ψから計算される（Kawaguti, Takami-Keller, etc.）. Dennis-Chang は $\nabla^2\psi=-\zeta$ の関係式の ψ を級数解に展開し，円柱表面上の粘着条件と外側境界条件（$\zeta=0$, $\Psi=r\sin\theta$）を満足する表面上の ζ を決定する式を誘導し，表面上の ζ に外側の影響が取り入れられるように計算を行なった．しかし，この方法は繰り返しごとに円柱に作用する抗力を用いて外側の境界値を修正し，基礎式の渦度 あるいは 流れ関数の差分式から r および θ 方向の連立一次方程式を導き，それらを解く ＡＤＩ法 と本質的には同じになる．iii）の収束速度はよい初期値とよい緩和（加速）係数を与えることによって解決される。よい初期値とは差分解により近い値を意味している。一般には求めようとするRe数のもっとも近いRe数で既に求めた数値解が初期値として利用されるが，初期値を解析解で与えた例としては Re=40 をガラーキン法で解析し，数値計算した Kawaguti[33] の報告がある．iii）の収束速度を早める緩和（加速）係数は差分式あるいはRe数の大きさなどに影響されるために試行錯誤的に求めなければならない．Re=40 をＳＬＯＲ法を用いて数値計算した川口の差分式では 1.8 の緩和係数が最適であるとされている。他の報告では著者が知る限りでは加速（緩和）係数の具体的な値は示されていない。収束判定については通常特性値の値がｎ回とｎ＋１回目の値の差が十分零に近いと判定できれば収束とする．例えば，Takami-Keller[36]は抗力の差$C_D^{n+1}-C_D^{n}<2\times10^{-5}$で判定しているが抗力は特性値の中でもっとも収束しやすい量であるので，より収束しにくいと思われる表面上 あるいは 表面近くの過度の値と定在渦の中の ψ, ζ の値を用いて収束判定をする方がよいと思われる．ｉ）の無限遠の境界条件についてはTakaisi[40] が 渦度 ζ と 撹乱の流れ関数 ψ について

（ａ）ψ_∞ , ζ_∞ → Ｉmaiの漸近解（第１項）[15]とする場合

（ｂ）$\psi_\infty=0$, $\zeta_\infty=0$ と置く場合

について 0.5≦Re≦100 の範囲で ＳＬＯＲ法 を用いた差分解法で解を求め，いずれの境界条件でも 抗力係数C_D はほとんど差がないと述べているが，十分小さいRe数に対して数値解がOseen近似の厳密解とくい違うと結論しており，吟味の結果にやや疑問がのこる．また，Fornberg[13] は無限遠の境界条件を渦度についてはすべて $\partial\zeta/\partial r=0$ とし，攪乱の流れ関数 ψ の値については

i)　$\psi_\infty=0$

ii)　ψ_∞ ＝今井の漸近解（第１項）

iii)　$(\partial\psi/\partial r)_{r\to\infty}=0$

iv)　混合条件（(i)と(iii)）の組合せ ）

の４つの場合について，Re= 2, 40, 200 の場合に円柱表面上の渦度の最大値を比較することによってこれらの条件の適切さを調べている。その結果，外側境界面の位置を非常に大きくとれば（r_∞ ～ 4208）これらの境界条件の違いは結果に影響しないことを確かめ，外側境界面の位置を有限とするときは Re<40 では iii)，Re>40 では iv) の条件が適当であると結論している。しかし，これらの結論の一般性の説明は十分でなく必ずしも確立された結論とは言えない．

本章では，計算精度を低下させないでできるだけ小さい外側境界を設定するための条件と好適な外側境界条件を探索するために，円柱周りの流れをとり上げて検討した．数値計算は従来の報告に比べてより小さい差分格子を用い，解の収束の基準としても収束しにくいと考えられる円柱表面上の渦度と定在渦中の ψ，ζ の値の収束を用いて，差分解としては従来の解に比べて高い精度の解を求めて上記の条件を調べたものである．数値解の各Re数の初期値は Tomotika-Aoi[5] によって求められたOseen方程式の解析解から与えた。

4．2　基礎式と境界条件

円柱を過ぎる非圧縮粘性流体の定常な２次元の流れを解くため，円柱中心を原点とする極座標系（r，θ）を考える．ただし，長さ r は円柱半径で無次元化する．（r，θ）を

$$z=\log r,\quad \theta=\theta \tag{4.2-1}$$

を用いて（z，θ）座標系に変換する．一方，流れは無限上流で一様流速 U とし，流れ関数 Ψ を

$$\Psi=e^{z}\sin\theta+\psi(z,\theta) \tag{4.2-2}$$

と表わす．ただし，ψ は攪乱の流れ関数を意味し，Ψ,ψ は Ua でそれぞれ無次元化してある．この場合 ψと 渦度ζ（a／Uで無次元化）は次の関係式と運動方程式を満足することになる．

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=-e^{z}\zeta \tag{4.2-3}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{Re\,e^{z}}{2}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=\frac{Re}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) \tag{4.2-4}$$

流れはx軸に関して対称であるので境界条件は次のようになる．

$\theta=0,\pi$ 軸上で

$$\psi=\zeta=0 \tag{4.2-5}$$

$z=0$ で

$$\psi(0,\theta)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0}=-\sin\theta \tag{4.2-6}$$

$z=z_\infty$ で

$$\left.\begin{aligned}\psi(z_\infty,\theta)&=f(C_D\ ;\ z_\infty,\theta)\\ \zeta(z_\infty,\theta)&=g(C_D\ ;\ z_\infty,\theta)\end{aligned}\right\} \tag{4.2-7}$$

または,

$$\left.\begin{aligned}\psi(z_\infty,\theta)&=\psi^\circ(z_\infty,\theta)\\ \zeta(z_\infty,\theta)&=\zeta^\circ(z_\infty,\theta)\end{aligned}\right\} \tag{4.2-8}$$

ここに

$$f(C_D\ ;\ z,\theta)=\frac{C_D}{2}\left(\frac{\theta}{\pi}-\mathrm{erf}Q\right)-\frac{C_D^2Re}{16\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{P}\left[\sqrt{2}\left(\mathrm{erf}\sqrt{2}Q-1\right)-e^{-Q^2}\mathrm{erf}Q\right]+\frac{\sqrt{2}P}{P^2+Q^2}\right\} \tag{4.2-9}$$

$$g(C_D\ ;\ z,\theta)=-\frac{C_DRe}{4\sqrt{\pi}}\frac{Q}{r}e^{-Q^2}+\frac{C_D^2Re^2}{64\sqrt{\pi}\,r}+\left\{-\frac{1}{P}e^{-Q^2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}Qe^{-Q^2}+\left(2Q^2-1\right)\mathrm{erf}Q\right]+\frac{1}{P^3}\left[\sqrt{2}\left(\mathrm{erf}\sqrt{2}Q-1\right)-e^{-Q^2}\mathrm{erf}Q\right]\right\} \tag{4.2-10}$$

但し, $P=\sqrt{R_er/2}\cos(\theta/2)$, $Q=\sqrt{R_er/2}\sin(\theta/2)$, $\mathrm{erf}Q=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^Q e^{-s^2}ds$

である. 上式は Takami-Keller[36] が Imai[15] の死水内の漸近解を全流場に拡張したもので, f, g の第1項がOseen近似の漸近解である. ψ°, ζ° は

設定した外側境界面上のOseen流れの解析解から求められる流れ関数と渦度である．本章では $z=z_{\infty}$ でこれら二つの境界値を用いて計算し，それらの結果を吟味する．以下式(4.2-7)の境界条件を T．B．C．，式(4.2-8)を O．B．C．と略記する．これらの境界条件は物体の後流を考慮しており，採用すべき境界条件としてはさも妥当と考えられる．

4．3 差分方程式

差分式には最も簡単な中央差分式を用いる．高次精度の中央差分式の数値精度に対する効果はDennis-Chang[12]が検討しているが，抗力係数などの値にはほとんど差が生じないと報告している．

本章では，運動方程式に対応する渦度の式にADI法を用いて外側境界条件が流れの場内に速やかに影響しうるように配慮した．また，流れ関数には θ 方向にSLOR法を用いた．用いた差分式は次のとうりである．

流れ関数：

$$\alpha_B \psi^{n+1}_{i,j+1}+\alpha_D \psi^{n+1}_{i,j}+\alpha_D \psi^{n+1}_{i,j-1}=-e^{2(i+1)b}\zeta^{n}_{i,j}-\alpha_A \psi^{n}_{i+1,j}-\alpha_C \psi^{n}_{i-1,j} \tag{4.3-11}$$

ただし，$\alpha_A=\alpha_C=1/b^2$，$\alpha_B=\alpha_D=1/d^2$，$\alpha_D=-2\left[(1/b^2)+(1/d^2)\right]$，$b=\Delta z$，$d=\Delta\theta$ で添字(i, j) は格子点［$z=(i-1)b$，$\theta=(j-1)d$］を意味する．

渦度の差分式には $\psi^{n+(1/2)}$ が必要であるが，これらは次式で求めた．

$$\left.\begin{aligned}\psi^{n+1}_{i,j}&=\psi^{n}_{i,j}+K\left(\psi^{n+1}_{i,j}-\psi^{n}_{i,j}\right)\\ \psi^{n+(1/2)}_{i,j}&=\frac{1}{2}\left(\psi^{n}_{i,j}+\psi^{n+1}_{i,j}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.3-12}$$

ただし，K は緩和係数で本章では 1．6 に選んでいる．

渦度の式：最初の 1/2回 はθ方向に対して線緩和を次式を用いて行う．

$$\beta_B \zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} - (\beta_{o2}+\rho)\,\zeta_{i,j}^{n+(1/2)} + \beta_D \zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)}$$

$$= -\beta_A \zeta_{i+1,j}^{n} + (\beta_{o1}-\rho)\,\zeta_{i,j}^{n} - \beta_C \zeta_{i-1,j}^{n} \qquad (4.3\text{-}13)$$

ただし，

$$\beta_B = \frac{1}{d^2} + \frac{Ree^z}{4d}\sin\theta + \frac{Re}{8bd}\left(\psi_{i+1,j}^{n+(1/2)} - \psi_{i-1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_D = \frac{1}{d^2} + \frac{Ree^z}{4d}\sin\theta - \frac{Re}{8bd}\left(\psi_{i+1,j}^{n+(1/2)} - \psi_{i+1,j}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_{o1} = \frac{2}{b^2}\ ,\quad \beta_{o2} = \frac{2}{d^2}$$

$$\beta_A = \frac{1}{b^2} + \frac{Ree^z}{4b}\cos\theta - \frac{Re}{8bd}\left(\psi_{i,j+1}^{n+(1/2)} - \psi_{i,j+1}^{n+(1/2)}\right)$$

$$\beta_C = \frac{1}{b^2} + \frac{Ree^z}{4b}\cos\theta + \frac{Re}{8bd}\left(\psi_{i,j+1}^{n+(1/2)} - \psi_{i,j-1}^{n+(1/2)}\right)$$

後の 1/2回，すなわち（n+1）は次式を用いてｚ方向に線緩和を行った．

$$\beta_A \zeta_{i+1,j}^{n+1} - (\beta_{o1}+\rho)\,\zeta_{i,j}^{n+1} + \beta_C \zeta_{i-1,j}^{n+1}$$

$$= -\beta_B \zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} + (\beta_{o2}-\rho)\,\zeta_{i,j}^{n+(1/2)} - \beta_D \zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)} \qquad (4.3\text{-}14)$$

上式で ρ は加速係数で 3.0，2.5，2.0，1.5 の四つの値を順に使用した．

式(4.3-11)に対しては内側（物体上）境界で式(4.2-5)，(4.2-6)を，また，外側

境界面上で式(4.2-7)あるいは式(4.2-8)の ψ を用いた．また，式(4.3-12)，(4.3-14)に対して外側境界面上では式(4.2-7)あるいは式(4.2-8)のζを用いるが，内側境界面上では式(4.2-5)のほかに物体面上でのζの値が必要である．これは次式を用いて求めた．

$$\zeta_0 = -\left\{\frac{2(\psi_2+\sin\theta)}{b^2} + \frac{2\sin\theta}{b} + \sin\theta\right\}$$

または

$$\zeta_0 = \frac{1}{2b^2}\left\{\psi_3 - 8\psi_2 - (2b^2+6b+7)\sin\theta\right\} \qquad (4.3\text{-}15)$$

ただし，ψ の添字は差分格子のｚ方向の壁からの列の番号である．差分商の高い精度を基にしてつくった２番目の式は必ずしも最初の式よりよい結果をもたらさない．物体面上の渦度の評価には他に Dennis-Chang[12] らの方法があるが，本質的には 式(4.3-11)～式(4.3-15) で解いた本章の ζ_0 の評価と変わらない．収束までの計算時間を短くするためには初期値として与える ψ，ζ の分布は重要であるが，本章では第２章で述べたOseen方程式の厳密解を数値計算の初期値に用いた．

差分格子は $\Delta z=0.05$，$\Delta\theta=3°$ とし，z_∞ はその影響を調べる場合のほかは $z_\infty=3$ ($r_\infty=20.1$) に選んだ．ただし，Re＜１では z_∞ は大きくとることが必要なので $z_\infty=4.8$ (r_∞ ～121) とした．また，収束の判定は，物体近傍の死水内でもっとも収束しにくい位置の渦度の変化率が 10^{-4} 以下になったときを目安とした．

4．4　抗力係数

円柱の抗力D は $\rho U^2 a$ で無次元化して 抗力係数C_D で表わす．C_D は次式で求める．

$$C_D = -\frac{4}{Re}\int_0^{\pi}\zeta_o \sin\theta \, d\theta + \frac{4}{Re}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\sin\theta \, d\theta \qquad (4.4\text{-}16)$$

または

$$C_D = -\frac{4}{Re}\int_0^{\pi}\zeta_o \sin\theta \, d\theta - 2\int_0^{\pi} P_1(1,\theta)\cos\theta \, d\theta \qquad (4.4\text{-}17)$$

ただし，添字oは円柱表面上の値を意味し，$P_1(1,\theta)$は壁面上の無次元圧力である．上式の右辺第１項は摩擦抗力係数，第２項は圧力抗力係数を表わす．

4．5　計算結果と考察

4.5.1　差分解の誤差

従来の円柱周りの流れの数値解ではその精度を定量的に明示した報告はないが，本計算の数値精度を明らかにして置くために厳密な解析解が知られているOseen方程式を本章の差分法で解き解析解と比較した．

図4-1は誤差の精度を示すために円柱面上の渦度 ζ_o の誤差を求めたものである．図4-1中 r.m.s. は

$$r.m.s = \sqrt{\frac{\sum_N [(\zeta_o)_n - (\zeta_o)_a]^2}{N}} \qquad (4.5.1\text{-}18)$$

で，円柱面上の N＝６１ 個の格子点上の渦度の数値解 $(\zeta_o)_n$ と 解析解 $(\zeta_o)_a$ の差の総和を代表している．また，$\Delta\varepsilon = r.m.s. / |\zeta|$ で $|\zeta|$ は

表4-1　Oseen近似の C_D

	Re = 1		Re = 10		Re = 20		Re = 40	
C_{DF}	5.928	5.927	2.088	2.093	1.733	1.743	1.513	1.532
C_{DP}	5.928	5.922	2.088	2.104	1.733	1.757	1.513	0.944
C_{DT}	11.857	11.849	4.175	4.197	3.466	3.499	3.026	2.475

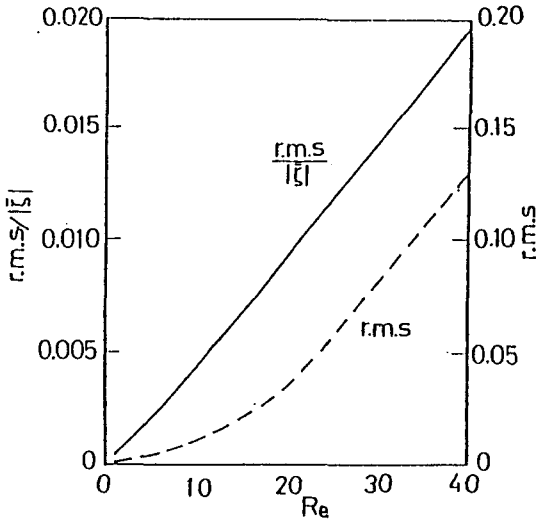


図4-1　数値解と解析解の誤差（Oseen式）

円柱面上の渦度（ζ_0）$_a$ の平均値である．誤差はRe数の増加とともにほぼ直線的に増加し，数値解の困難が増す．なを，外側境界面（円）の距離は r_∞ ～20.1である．

表4-1は 抗力係数C_D の比較で，C_{DF}，C_{DP}，C_{DT} はそれぞれ摩擦抗力係数，圧力抗力係数，全抗力係数である．それぞれの左欄は解析解，右欄は数値解である．解析解では C_{DF} と C_{DP} は等しくなる．C_D もまたRe数の増加とともに誤差が増大するが，その誤差は主として圧力抗力の誤差に起因している．円柱面上の圧力係数$P_1(1,\theta)$ は

$$P_1(1,\theta)=\frac{P(1,\theta)-P(r_\infty,\pi)}{\rho U^2/2}$$

$$=2+\frac{4}{Re}\int_0^\infty\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi}dz$$

$$-\frac{4}{Re}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)_0 d\theta+2\int_{\theta}^{\pi}\zeta_0\cos\theta\, d\theta \qquad (4.5.1\text{-}19)$$

で求められる．図4-2は$P_1(1,\theta)$の例で，実線は差分解，破線は解析解，一点鎖線は解析解の渦度ζを使用し，$P_1(1,\theta)$を差分式で求めた場合である．Re数の増加とともに円柱面上の圧力分布の精度は急速に低下する．しかし，C_Dは$\theta=\pi/2$の上流側と下流側でのある積分値の差になるので，誤差は打ち消し合い$P_1(1,\theta)$にあらわれるほどの誤差は生じない．$P_1(1,\theta)$の誤差は主として式(4.5.1-19)の第3項の渦度の壁面に垂直な方向の変化率による誤差に起因する．図4-3はRe=20の場合の r=1.00（円柱表面），1.05，1，1.105の円周上での渦度の分布で，実線は差分解，破線は解析解である．差分解の未知量として直接求められる渦度は図4-3のように誤差は十分に小さいが，渦度の大きさは壁から離れるにつれて速やかに減少するのでその微分を差分に置き換えるに際して誤差が大きくなる．しかし，図4-4に示すようにNavier-Stokes方程式の場合には壁近傍の渦度の変化率は壁にそう方向にも，垂直な方向にもOseen近似の場合よりはるかに小さい．Oseen近似はx軸方向への渦度の輸送速度を過大に見積る近似になるからである．したがって，Navier-Stokes方程式の場合には渦度の差分近似による誤差は図4-2に示すほどの誤差は与えないと考えられる．

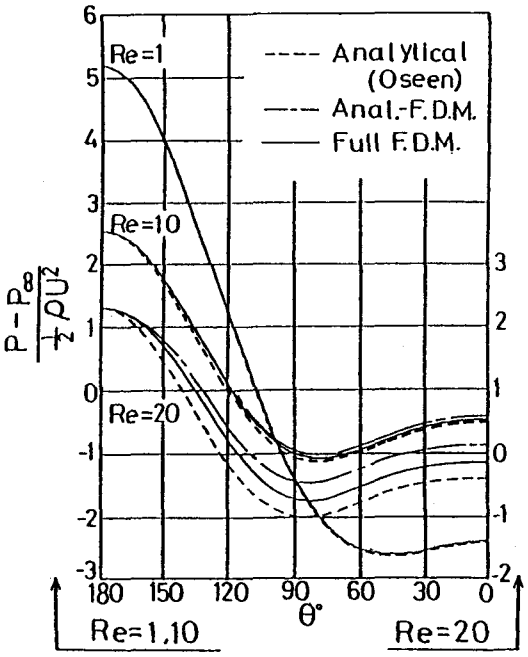


図4-2　円柱面の圧力分布（Oseen解）

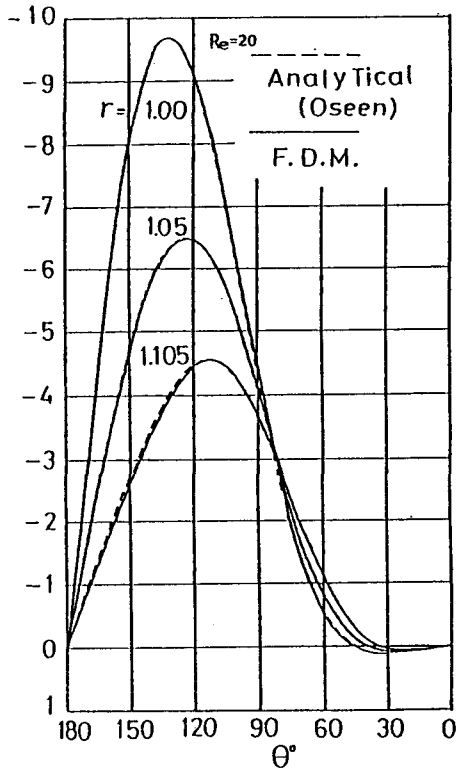


図4-3　円柱近傍の渦分布（Oseen解）

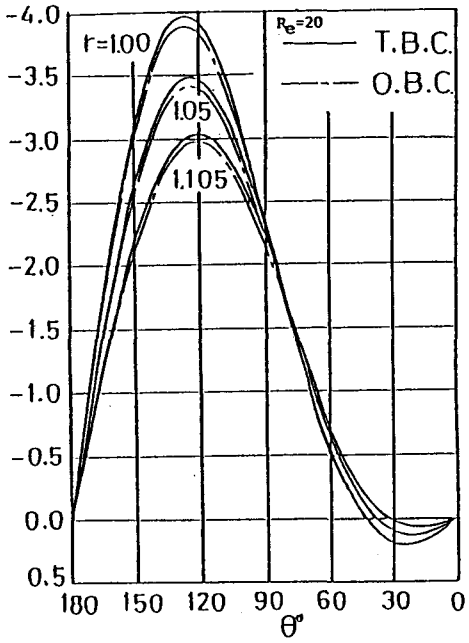


図4-4　円柱近傍の渦度分布（N-S式）

4.5.2　外側境界条件

図4-5は円柱が受ける抗力のRe数による変化の計算結果である．実線はT.B.C.，一点鎖線はO.B.C.を外側境界条件として r_∞ ～20.1 にとってNavier-Stokes方程式を数値的に解いた場合で，破線はOseen近似の解析解である．また，○印はTrittonの実験値[39]である．

4.5.1節に述べたようにいろいろな誤差の原因が考えられるにもかかわらず数値解の結果は十分大きいRe数まで，いずれの境界条件でも C_D は実験値と良く一致する．表4-2 は C_D のこれまでの報告を数値的にまとめて示したものである．Oseen近似は Re=40 ではかなり過大な C_D を与えるが，Re数が小さいときNavier-Stokes方程式はOseen近似で十分精度よく近似できると考えられるので

表4-2　円柱の抗力係数　$C_D=D/\rho U^2$

Reynolds number ...	0.01	0.05	0.1	1.0	4.0	10	20	40	60	80	100
OSEEN	380.366	100.536	58.312	11.857	5.842	4.175	3.466	3.026	2.850	2.750	2.688
PRESENT T.B.C.	——	——	54.248	10.050	4.430	2.769	2.018	1.517	1.298	1.176	1.093
PRESENT O.B.C.	379.494	100.221	57.925	10.556	4.444	2.728	1.966	1.462	1.243	1.121	1.038
TAKAMI & KELLER	——	——	——	10.283	4.437	2.754	2.003	1.536	1.325	——	——
DENNIS & CHANG	——	——	——	——	——	2.846	2.045	1.522	——	——	——
FORNBERG	——	——	——	——	——	——	2.000	1.498	——	——	1.058

図4-5にOseen近似による C_D すなわち C_{Doseen} とのくい違いを示した．O.B.C.の場合には$Re \leqq 0.1$ でOseen近似と1%以内 に近ずくが，T.B.C.の場合には食い違いが残る．また，Re数が大きいとき Re～4 を境に，Re数がそれ以上ではT.B.C.のほうが O.B.C. より小さい C_D 値を与え，それ以下では逆になる．なお，C_D はRe数の減少とともに 1／Re の程度で増大するので，T.B.C.では C_D を用いて外側境界条件を決めており，数値解の過程での繰り返しごとに修正を必要とするのでRe数が小さくなると C_D が大きいために収束が困難になる．本計算では Re=0.04 が下限であった．

r_∞ が十分大きいとき，外側境界条件は数値解の結果に大きな影響を与えない

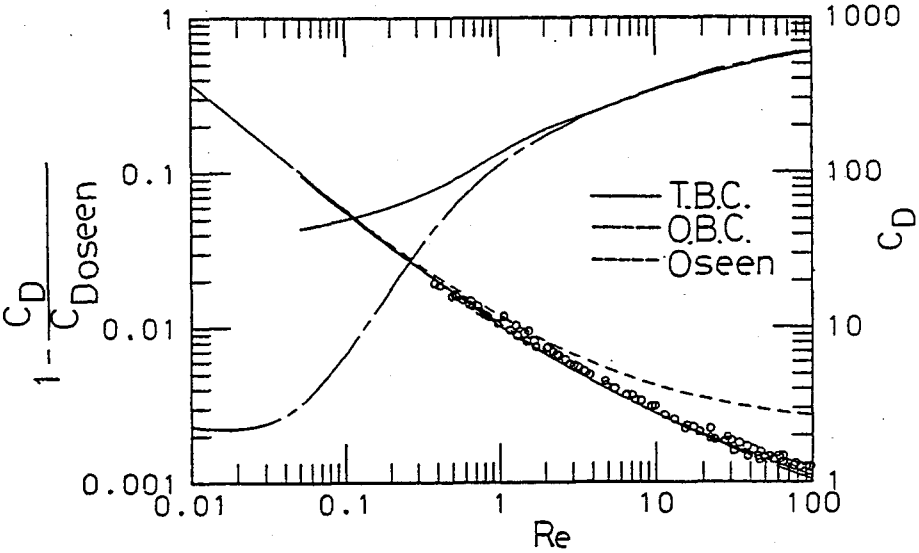
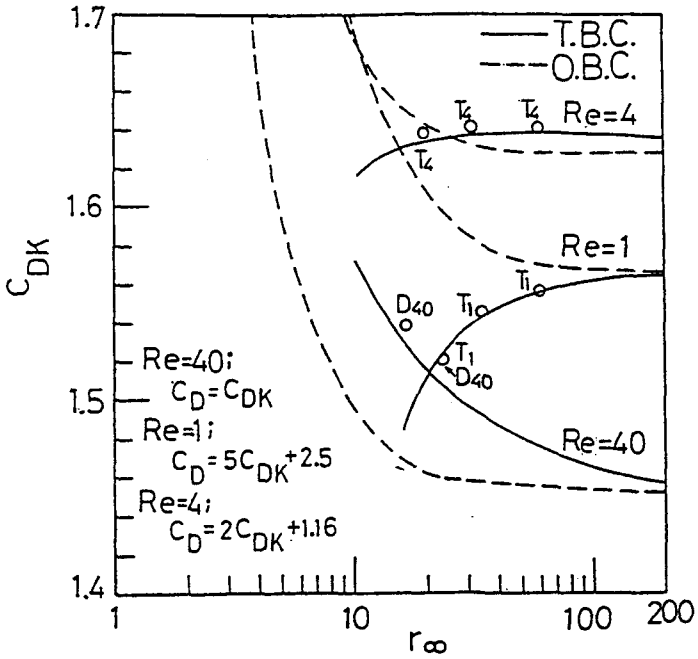
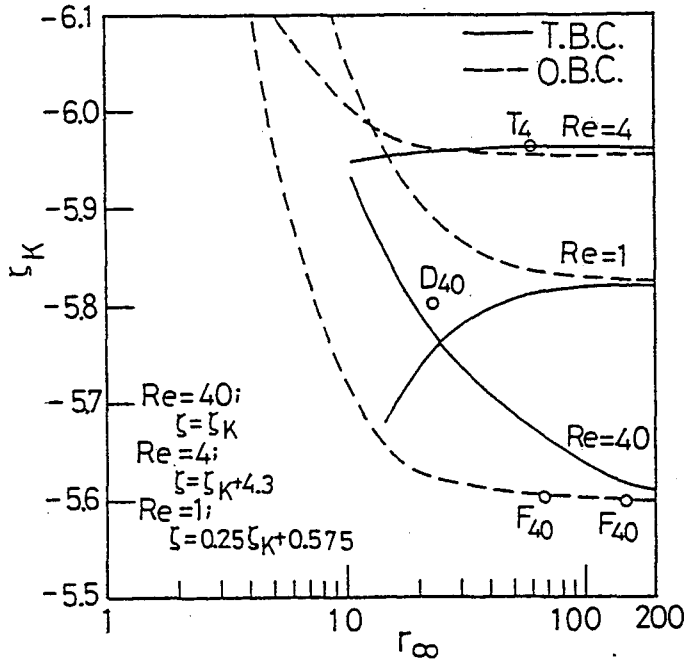


図4-5　円柱の抗力係数の計算値



(a) C_D



(b) ζ_{max}

図4-6　外側境界線の距離の影響

ことを Fornberg[13] が指摘している．このことを吟味するために C_D，ζ_{max} の収束値に対する r_∞ の距離の影響を調べた． 図4-6はその結果で，（b）の ζ_{max} は円柱表面上の渦度の最大値である．なお，図4-6では見やすくするために C_D，ζ_K は図中に示したようにそれぞれのRe数に対して定義したC_{DK}，ζ_K に変換して示した．また，図4-6 中の ○印 は表4-2に示したこれまでの報告の値で，T はTakami-Keller[36]，D は，Dennis-Chang[12] の計算値で，添字はRe数の値である．報告された値が必ずしも十分な r_∞ での値でないことがわかる．図4-6より以下のことが分かる．

(1) r_∞ が十分大きければ外側境界条件の違いは計算結果には影響しない．その r_∞ の限界値はほぼ 200 である．

(2) T.B.C. の場合はRe数が大きいほど r_∞ の値は大きな値を要するが，O.B.C. の場合は反対にRe数が大きいほど r_∞ は小さくてよい．

(3) O.B.C.では r_∞ を大きくするにつれて C_D，ζ_{max} とも減少しながら

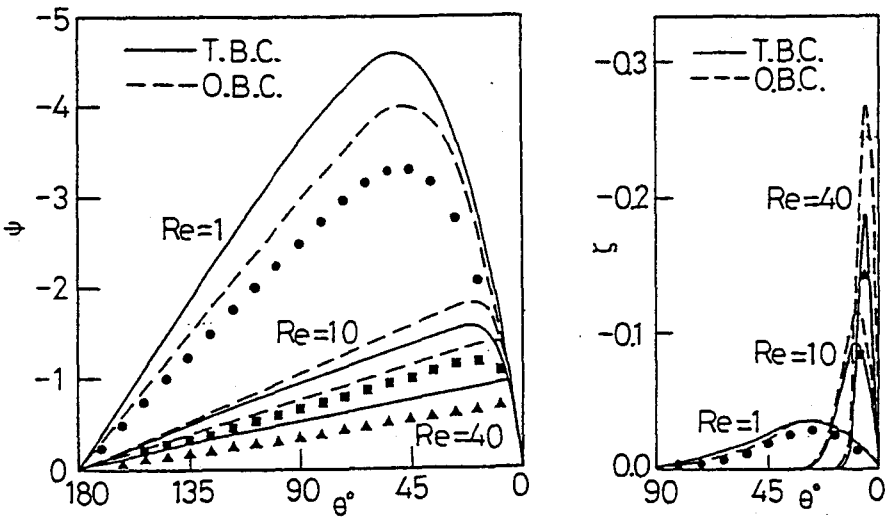


図4-7 外側境界円上での ψ，ζ の分布

飽和値に漸近する．一方，T.B.C.の場合にはRe数が4を境にRe数がそれ以上のときには減少しながら飽和値に漸近するが，それ以下では反対に増加しながら漸近する．図4-5の C_D の値のRe＝4付近でのいれかわりはこのことに対応している．以上より外側境界条件はO.B.C.を採用する方が有利であり，Re数が小さいほど r_∞ は大きくとることが必要であると結論される．Re数が小さいほど粘性拡散の効果が大きく，物体の存在の影響が遠方までおよぶからである．また，Re数が大きいほど物体が流れ場に与える攪乱は狭い後流域に限定されるようになり，遠方での後流域内部での分布誤差は大きな誤差を生じない．図4-7はT.B.C.とO.B.C.の場合の r_∞ ～20.1の外側境界上での境界値として与える ψ と ζ の分布である．

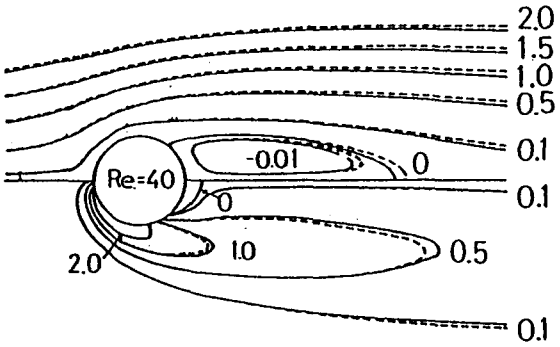


図4-8　円柱周りの流れ（O.B.C.とT.B.C.）

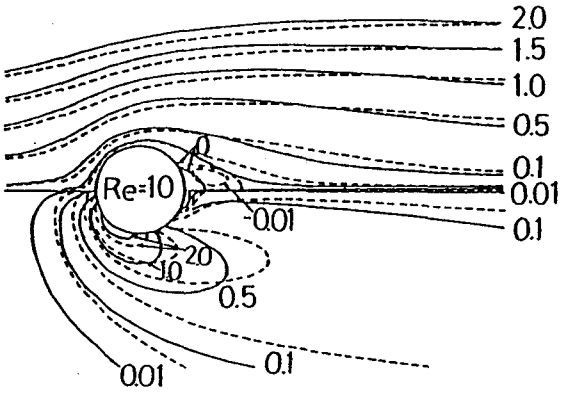


図4-9　円柱周りの流れ（Oseen解と数値解）

Re＝1ではOseen近似はより弱い攪乱流れを仮定することになるがRe＝10, 40ではより強い攪乱流れを仮定することになる．T.B.C.は式(4.2-9), (4.2-10)に示したように距離（r）の第2項までの漸近展開であるから有限な距離では必ずしも適当な流れを与えない，すなわち，図4-7の点（●：Re＝1，■：Re＝10，▲：Re＝40）は漸近解の第1項を示しているが，第2項までの解とはか

なり差がある．本計算例では円柱を扱っているのでOseen近似の厳密な解析解が得られている．しかし，任意の断面形状の場合にはOseen近似でも解析解は困難である．したがって，任意の断面形状の場合には距離を十分にとりＩmaiの漸近解（第１項）を外側境界条件として採用することが実用的と考えられる．

4.5.3 円柱周りの流れ

4.5.2節 では主として C_D に対する計算条件を述べた．本節では円柱周りの流れ，その他の流れの特徴をなす諸量について述べる．

図４-８は円柱周りの流れの流線（上半分）と等渦度線（下半分）の一例で，Re=40 の場合である．また，図４-９ は Re＝10 の場合の Navier-Stokes方程式 の O.B.C.の場合（実線）とOseen近似（破線）の場合の比較である．図４-８では先述の外側条件における攪乱流れの強さの違いのために，物体から遠方の流線，等渦度線に食い違いがあらわれるが，物体近傍ではほとんど違いがあらわれない．より小さいRe数ではくい違いはさらに小さくなる．これに反しOseen近似 は対流項の線形化の不都合が物体近傍でより強くあらわれるので流線，等渦度線は全流場で一様にくい違いが顕著になる．

図４-１０ は双子渦が発生する場合の剥離流線の出発位置θである．また，図４-１１は双子渦長さ L／a で，○印 は Taneda[26] の実験値である．θ はT.B.C.とO.B.C.とでは全く差が生じない．このことは図４-９で流れのくい違いが物体近傍で小さくなることと符号する．一方，Oseen近似は対流効果が過大になっているので物体近傍では局所的にRe数が大きくなったことと等価になり双子渦の発生がより低Re数で生じ，同じRe数では剥離領域が広くなる．双子渦の長さについても双子渦が接続するRe数範囲ではT.B.C.とO.B.C.の間の差は小さく，実験値とよく一致する．また，Oseen近似では渦が下流側へ強く輸送されるため双子渦はより長くなる．Oseen近似がNavier-Stokes方程式に対する十分な近似として成り立つのはRe数が 1 以下で，双子渦が発生するRe数の領域ではもはや定性的な議論しかできない．

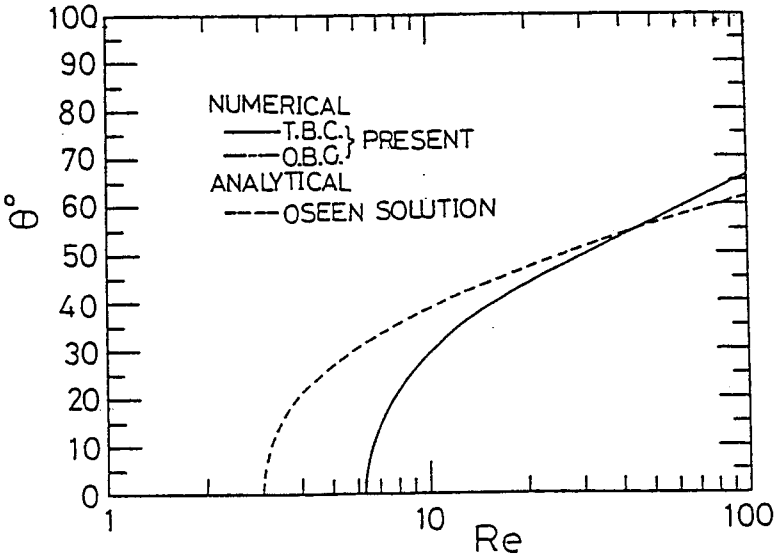


図4-10　円柱面上の剥離角

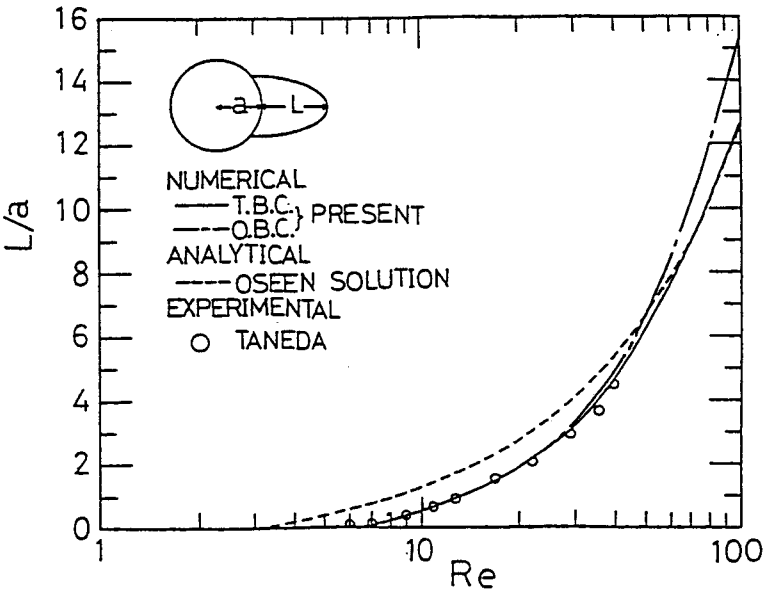


図4-11　双子渦の長さ

４．６　結言

以上述べたように本章では物体周りの遅い流れの数値解析における外側境界の大きさと，外側境界条件の設定に対して従来の研究では明確でなかった点について吟味し結論を得たものである．要約すると

（１）　外側境界を十分に遠方にとれば，外側境界条件の違いは物体近傍の流れには影響しない．

（２）　小さい外側境界を選ぶには外側境界条件としてＯseen近似流れを選ぶのがよい．Ｏseen流れが得られない場合にはＩmaiの漸近解が有用である．

（３）　Ｒe数が小さい領域では外側境界の位置は遠くにとる必要がある．

（４）　Ｏseen近似は十分小さいＲe数に対してはＮavier-Ｓtokes方程式に対する満足な近似になるが，そのＲe数の上限は　１　以下で，双子渦が生ずるＲe数の領域では定性的な議論になる．

第５章　球，円柱を過ぎる粘性流の解析解と数値解の比較

５．１　序論

基礎式に Oseen方程式 を用いた球，円柱を過ぎる定常な粘性流のこれまでの研究は，非常に小さいRe数（Re<1）に限られていた．なぜなら，この範囲のRe数ではNavier-Stokes方程式の慣性項と粘性項の次数を比較すれば線形化で無視した項の影響はほとんどないからである．しかし，この範囲のRe数でも解析解を数値解や実験値と明確に比較した資料はあまりない．ましてや Oseen方程式では不十分と思われている中間Re数の範囲（Re>10）で物理量をOseen方程式で求め，他の結果と比較した報告はほとんどない．したがって，この報告では中間Re数で求めた球，円柱の Oseen解 を数値解や実験値と比較し，中間Re数で調べたOseen解析の結果を報告する．

球に対する Oseen方程式の解 は Goldstein[4] の抗力の解析から始まり，Tomotika-Aoi[5]が流れ関数の解まで広げた．Goldsteinはさらに抗力の解析解をRe数で展開し，オーダー$R\mathring{e}^5$, O（$R\mathring{e}^5$），まで展開したが，のちに，O（$R\mathring{e}^5$）の項をShanks[22]によって修正されている．著者も第２章で述べたように Goldstein の間違いはRe数の整理が不十分なために起こったことを確認している．また，Van Dyke[41] は抗力の級数解を計算機を使って級数の打ち切りを十分にとり，広範囲のRe数で抗力の値を報告した．Tomotika-Aoi は抗力の解析結果から摩擦と圧力抗力の比が ２ ： １ になることを示し，さらに，二重級数の流れ関数Ψの解を m=0, n=2 で打ち切り，Re=1 の球周りの流線を描き，双子渦の存在を見つけた．しかし，Tomotika-Aoiの解を用いて Re=1, 4, 10 で球周りの接線および半径速度の輪郭を求めた Pearcey-McHugh[8]，そして 流れ関数をRe数の１次の次数まで展開した Yosinobu[9]らが Tomotika-Aoi の結果が間違っていることを指摘した．しかし，Re=10 でも球の背後に双子渦が存在し

ない Pearcey-McHugh の数値結果には疑問が残る.

一方，円柱の場合も Lamb の解析を基にしてTomotika－Aoi[5],[24]が抗力，圧力，流れ関数の厳密解を求め，Re=4 で円柱周りの流線を描き，双子渦の存在を示した．しかし，球の場合と同様に二重級数の解になる流れ関数 Ψ を m=3, n=3 で打ち切って計算したために充分な結果を与えることが出来ず，のちに，Tomotika-Miyagi[7] が積分方程式の流れ関数の解析解を直接数値計算することによって Re=4 の場合の円柱周りの流線を描き，この結果を修正した．また，彼らはその報告で円柱背後の渦度発生がOseen解では Re=3.2 で起こることを指摘した.

球と円柱の Oseen方程式 に対する解析と Navier-Stokes方程式 の数値解[42],[31]についてはすでに 第2～4章 で述べたので，ここでは具体的な説明は省き，解析解と数値解の数値比較を行なう．比較は主として球，円柱周りのフローパターンと双子渦の長さに着目する.

最後に，Oseen解を用いてNavier-Stokes方程式の逐次解を試みる． 小さいRe数の逐次近似については第6章[44]で詳細に行なうので，ここでは中間Re数の範囲でOseen解を基にした数値による逐次近似の説明を行なう.

5．2　球に対するOseen解と数値解の比較[43]

5.2.1　球周りのフローパターンの比較

これまでの解析解と数値解の比較は球が流体から受ける力（抗力D）に限られ，球周りの流れ，特に，流れ場を特徴ずける球背後の双子渦の長さおよび剥離角の比較はほとんどされていない．したがって，本章では広い範囲のRe数，Re＝0.01～120で求めた球周りのフローパターンをOseen方程式の解析解とNavier-Stokes方程式の数値解[42]で比較する．ただし，数値解[42]は流れ関数Ψ，渦度ζの外側境界をOseen方程式の解析解（Tomotika-Aoi[5]）で固定したものである．球周りの流れの比較は低Re数では重ね合わせ，そして 中間Re数では流線と

等渦度線を別々に描きそれらを対称軸の上下（上半分：解析解，下半分：数値解）で比較する．低Re数範囲で行った比較の中からRe＝1,5 の場合の比較図を図５-１で示す．Re<1 では両結果はよく一致するが，この図から解るように Re～1位になると少し等渦度線がずれ始める．しかし，Re～5 でも解析結果は十分よいフローパターンを与える．図5-2は，さらにこれらの結果に Proudman-Pearson[16]の解を拡張したChester-Breach[23]の結果を加えて，Re=1で比較

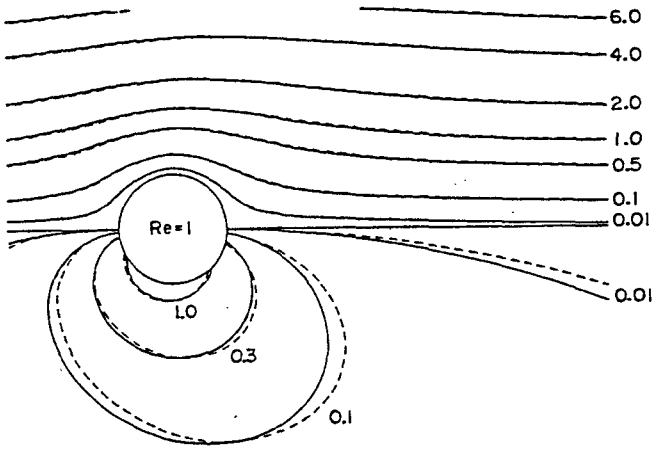


図５-１　球周りのフローパターンの比較；Re=1

（ —— ；数値解，　----- ；Oseen解）

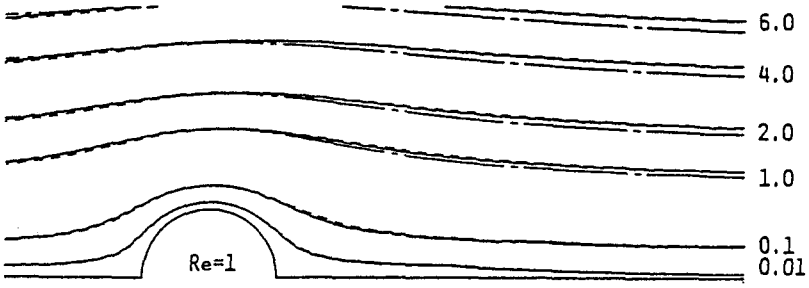
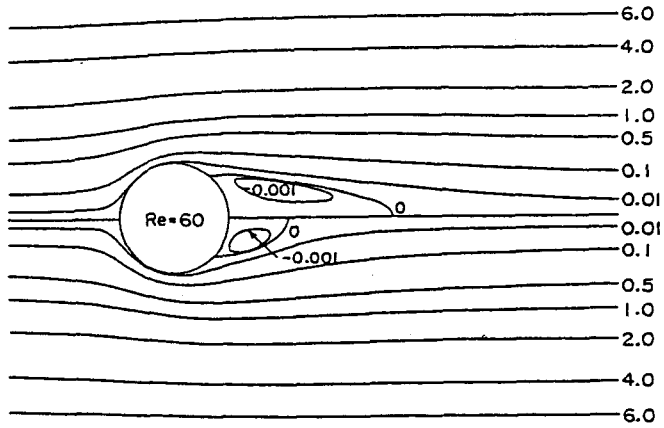
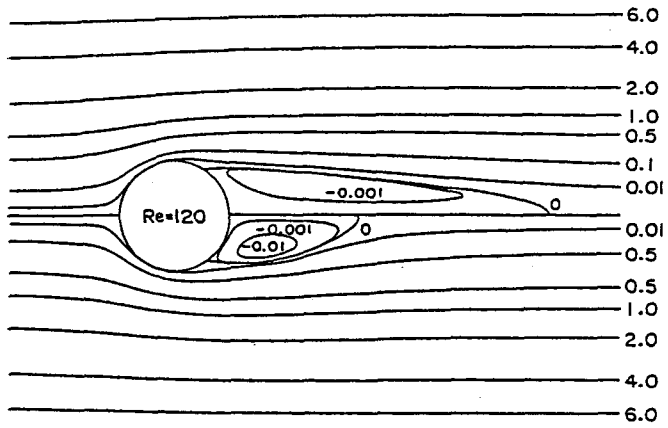


図５-２　球周りの等流線の比較；Re=1

（ —— ；数値解，　---- ；Oseen解，　------ ；C－B解）



（ａ）流線（Ｒe=60）



（ｂ）流線（Ｒe=120）

図５-３　球周りの流線の比較（上側；Ｏseen解，下側；数値解）

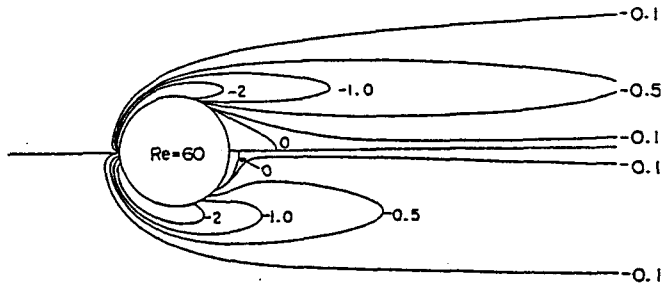


図５-４　球周りの等渦度線の比較（上側；Ｏseen解，下側；数値解）

した流線の図である．この図から分かるようにOseen解はChester-Breachの解より数値解により近い流線を与える（任意の低Re数でも同様）．

中間Re数の比較は Re=60, 120 で行い，図5-3(a),(b) で流線，そして図5-4でRe=60 の等渦度線の比較図を描く．従来，Oseen方程式はこの範囲のRe数では定性的な議論も難しいとされているが，数値解との比較結果を見れば十分ではないが，かなりの結果を与える．しかし，図5-5で示す Re=100 の球周りの渦度分布から知れるようにこれ位のRe数になれば，Oseen方程式は渦度の輸送速度を過大に評価し，拡散効果を相対的に小さくしていることが明らかである．したがって，この範囲のRe数でOseen方程式を用いるには非線形項の一部を近似的に考慮するか，技巧的に球上の粘着条件を緩和（弱い滑り）すればOseen方程式でもかなりの議論が行えると予想される．ただし，m，nの二重級数になるOseen方程式の厳密解 Ψ，ζ の数値解は各Re数で十分収束するまで考慮したが，この級数解は非常にきびしい交項級数になり，Re>130 になると4倍精度の計算を用いても求まらなくなる．

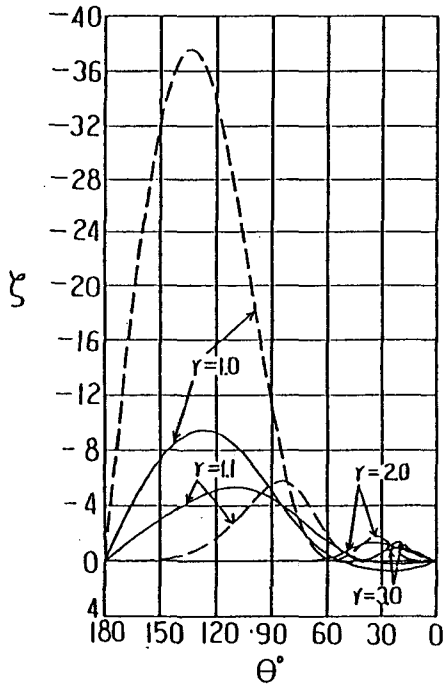


図5-5　球上と球周りの渦度分布
（Re=100）

次に，流れ場を特徴ずける球背後の双子渦の長さと剥離角の比較図は球の数値解で示したのでここでは省き，表5-1，5-2 でこれらの数値結果の比較を載せる．これらの結果を外挿して求めた渦度発生の臨界Re数（および剥離角）はOseen解では Re=7.7(4.6度)，数値解では Re=21.0(8.83度) になる．これまでの報告としては，Proudman-Pearson[16]とVan Dyke[21]の解析ではそれぞれ Re=8, Re=8.5, Taneda[25] の実験による Re=12，そして Jenson と Pruppacher-Le Clair-Hamielec の

表5-1　双子渦の長さ

Oseen解		N－S解		Lin-Leeの解[30]	
Re	L／a	Re	L／a	Re	L／a
7.6	---	1	---	1	---
7.7	0.005	10	---	5	---
7.8	0.007	20	---	10	---
8.0	0.016	21	0.029	15	---
9.0	0.058	22	0.047	19	---
10	0.083	23	0.064	20	0.068
20	0.419	25	0.099	24	0.200
30	0.705	30	0.182	30	0.34
40	0.972	40	0.337	40	0.66
50	1.228	50	0.482	50	0.96
60	1.477	60	0.619	60	1.20
70	1.720	70	0.754	70	1.36
80	1.959	80	0.889	80	1.52
90	2.195	90	1.010	90	1.64
100	2.428	100	1.175	100	1.80

表5-2　剥離角

Oseen解		N－S解		Lin-Leeの解[30]	
Re	θ^*	Re	θ^*	Re	θ^*
7.6	---	1	---	1	---
7.7	4.6	10	---	5	---
7.8	6.6	20	---	19.0	---
8.0	9.4	21	8.83	19.3	---
9.0	16.9	22	13.07	20.0	5.7
10	21.24	23	16.12	20.3	10.0
20	37.51	25	20.61	24.6	20.0
30	43.91	30	27.81	30	26.4
40	47.85	40	35.97	40	35.0
50	50.64	50	40.97	50	40.0
60	52.78	60	44.57	60	44.4
70	54.49	70	47.38	70	47.4
80	55.91	80	49.68	80	50.0
90	57.11	90	51.65	90	51.6
100	58.15	100	53.37	100	53.8

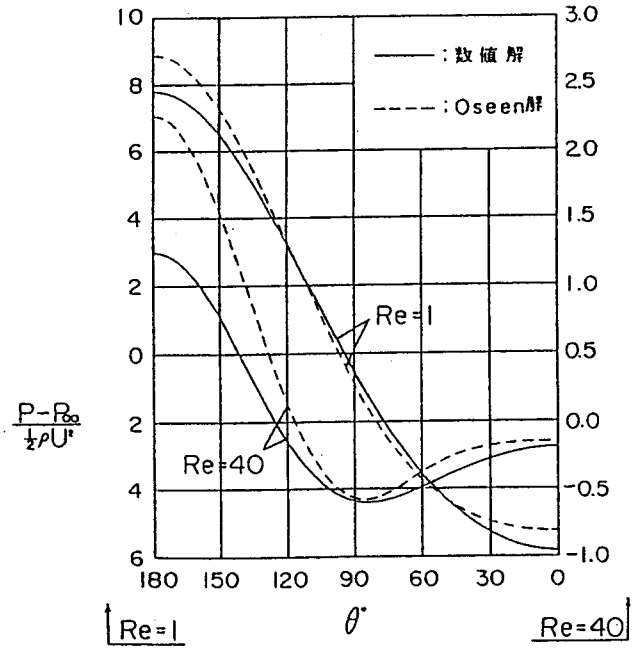


図5-6　球上の圧力分布；Re=1, 40

（ —— ；数値解，　----　；Oseen解）

表5-3　球の抗力係数 C_D （低Re数範囲）

Re	Oseen解	N－S方程式の数値解			Chester-Breachの展開式[23] C_D
	C_D	C_{DT}	C_{DF}	C_{DP}	
0.01	2404.496	2400.228	1604.175	796.053	2404.439
0.02	1204.493	1202.330	803.568	398.762	1204.396
0.03	804.489	803.011	536.686	266.325	804.360
0.04	604.486	603.343	403.239	200.104	604.328
0.05	484.482	483.534	323.165	160.369	484.298
0.06	404.479	403.654	269.777	133.877	404.271
0.07	347.333	346.591	231.640	114.952	347.103
0.08	304.472	303.790	203.033	100.757	304.222
0.09	271.135	270.495	180.781	89.714	270.866
0.1	244.465	243.857	162.977	80.880	244.178
0.2	124.432	123.888	82.794	41.095	124.011
0.3	84.400	83.807	56.003	27.804	83.897
0.4	64.370	63.714	42.571	21.143	63.821
0.5	52.340	51.626	34.490	17.136	51.777
0.6	44.312	43.546	29.088	14.458	43.762
0.7	38.571	37.750	25.218	12.541	38.062
0.8	34.259	33.408	22.308	11.100	33.819
0.9	30.901	30.015	20.038	9.977	30.556
1.0	28.210	27.293	18.217	9.076	27.990

表5-4　球の抗力係数 C_D （中間Re数の範囲）

Re	Oseen解	N－S方程式の数値解			Lin-Lee[30]の展開式
	C_D	C_{DT}	C_{DF}	C_{DP}	C_D
1	28.210	27.293	18.217	9.076	29.597
2	16.009	14.899	9.919	4.980	16.045
3	11.858	10.650	7.068	3.582	11.358
4	9.740	8.468	5.601	2.867	8.948
5	8.443	7.127	4.698	2.429	7.469
6	7.563	6.212	4.081	2.131	6.462
7	6.923	5.544	3.630	1.914	5.731
8	6.434	5.033	3.284	1.749	5.173
9	6.049	4.628	3.010	1.618	4.732
10	5.735	4.298	2.787	1.512	4.375
20	4.244	2.707	1.705	1.002	2.684
30	3.692	2.104	1.294	0.809	2.067
40	3.395	1.771	1.068	0.703	1.738
50	3.206	1.555	0.921	0.634	1.529
60	3.073	1.402	0.817	0.585	1.384
70	2.974	1.285	0.738	0.547	1.276
80	2.898	1.194	0.677	0.517	1.192
90	2.836	1.119	0.626	0.493	1.125
100	2.785	1.057	0.584	0.473	1.070
120	2.705	0.958	0.518	0.441	0.984

数値解[11],[29]ではそれぞれ Re＝17，Re＝20 などがある．また，これらの解析解と数値解の両結果は渦の成長が球背後の剥離からでなく淀み点から始まることを示す．

5.2.2 抗力係数の比較

Re数の広範囲で求めた抗力係数C_D の解析解と数値解の値を表５-３，５-４で示す（比較図は第３章を参照）．ただし，Lin-Lee[30]の数値は彼らの計算式を用いて求めた結果である．Oseen方程式 では 摩擦と圧力 による抗力係数の比は 2：1 になるが，数値解で摩擦と圧力による抗力係数の比が 2：1 になるRe数は表５-４ から Re～5位である．したがって，抗力係数に関してはこの範囲までのRe数がOseen方程式の適用範囲になると考えられるが，Re=5 の全抗力係数の値は解析と数値解ではかなりの違いになる．この原因は近似したOseen方程式にあるのか，あるいは数値計算に問題があるのか結論できていない．Re＞10 になれば数値解は圧力抗力係数が大きくなり，1：1 の関係に近ずく．

5.2.3 球上の圧力係数の比較

Oseen解と数値解で求めた Re=1 ,40 の球上の圧力分布の比較図を図５-６で示す．Re=1 に比べると Re=40 では両者の結果はかなりずれるが，比較からわかるようにRe数に伴う圧力分布の定性的な変化は中間Re数でも十分Oseen解で表わすことが出来る．

５．３　円柱に対するＯseen解と数値解の比較

5.3.1　円柱周りのフローパターンの比較

流れの比較は球の場合と同様に低Ｒe数では重ね合わせ，中間Ｒe数では流線 Ψ と渦度 ζ を別々に描きそれらを対称軸の上下（上半分：解析解，下半分：数値解）で比較する．低Ｒe数領域で比較した中から Ｒe＝1 の比較図を 図５-７で示す．解析解と数値解で求めた流線と等渦度線はこの図で示されるように球に比べてかなりずれる．これは輸送速度の押え込みが球に比べて円柱の場合が小さくなるためである．したがって，円柱では Re<0.5 でないとＯseen解と数値解のフローパターンは一致しない．一方，図５-８ で中間Ｒe数領域で比較した Ｒe=60 の流線と等渦度線示す．ただし，ここで用いた数値解は外側境界値がＴ．Ｂ．Ｃ．の場合（第４章参照）である．これらの結果は円柱周りの渦度分布も含めて球に比べて悪くなるが，定性的な議論は球同様十分に行なうことが出来る．したがって，球の場合と同様に輸送速度を小さくし，拡散効果が大きくなるようにＯseen方程式を修正出来れば円柱背後の死水領域内の議論がかなり正確に予想する事が出来る．一方，流れ場を特徴ずける円柱背後の双子渦の長さと剥離角の比

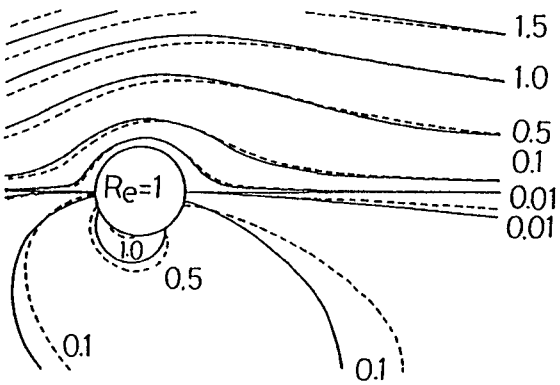
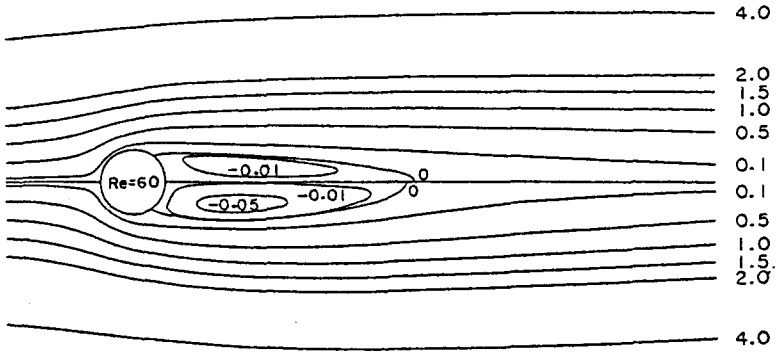
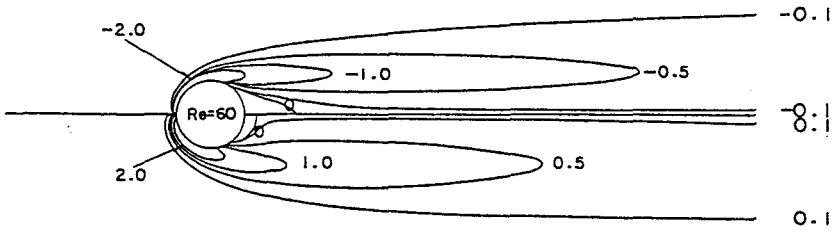


図５-７　円柱周りのフローパターン比較

（ —— ；数値解，　----- ；Ｏseen解）



（ａ）流線；Ｒｅ=60



（ｂ）等渦度線；Ｒｅ=60

図５-８　円柱周りの流線と等渦度線の比較（上側；Ｏseen解，下側；数値解）

較図は円柱の数値解（第４章参照）で示したのでここでは省くが，渦度発生の臨界Ｒe数はＯseen解では Ｒe=3.02，数値解では Ｒe=6.35 になる．これまでの報告としてはＴomotika-Ｍiyagi[6]のＯseen解による Ｒe=3.2，Ｄennis-Ｃhangと Ｔakami-Ｋeller の数値解[12],[36]による Ｒe＝6.2，Ｒe＝7.0，そして Ｔaneda[26] の実験による Ｒe＝5.0 などがある．双子渦の成長は球と同様に円柱背後の淀み点から始まる．

5.3.2　抗力係数の比較

Ｏseen解と数値解で求めた抗力係数 C_D の比較は第２章で示したのでここでは略すが，Ｏseen解では摩擦抗力係数と圧力抗力係数の比は 1：1 になる．

5.3.3 円柱上の圧力係数の比較

Oseen解と数値解で求めた円柱上の圧力係数は，フローパターンと同様に球の場合より数値解と解析解の一致は悪くなるが，Re数による圧力係数の変化は，球の場合と同様に数値解と解析解は定性的には一致する．

5．4 Oseen解によるNavier-Stokes方程式の逐次近似解[43]

この節では球に対するOseen解をNavier-Stokes方程式の非線形項に代入し，逐次近似を行う．解析による低Re数の逐次近似は第6章[43]で述べるので，ここでは中間Re数の逐次近似を差分解法を用いて行い，その結果を報告する．差分解法は第3章の球の場合と同じ基礎式と計算方法を用いているので，ここでは概略の説明だけ行なう．最初に，差分で解いた渦度の運動方程式，そして 流れ関数と渦度の関係式を次に示す．

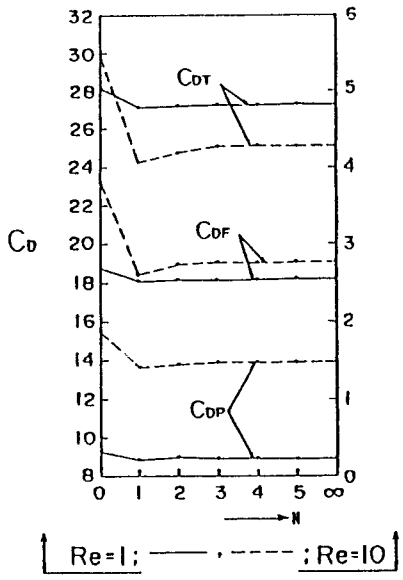
$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}-\cot\theta\frac{\partial G}{\partial \theta}+\frac{Re\,e^{3z}\sin^2\theta}{2}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}-\cos\theta\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{Re\,e^{z}\sin\theta}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) \qquad (5.4\text{-}1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}-\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}-\cot\theta\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}=-\zeta\, e^{3z}\sin\theta \qquad (5.4\text{-}2)$$

ただし，$z=\log r$，$G=\zeta e^{z}$，$F=\zeta/e^{z}\sin\theta$ である．

式(5.4-1)を中心差分を用いて差分式に書換え，右辺の非線形項にOseen解を代入し，左辺のOseen方程式の差分式をADI法を用いて解き，求めた ζ の値を式(5.4-2)に代入し，SLOR法で Ψ を求める．この過程の繰り返しを行い収束した値を第1近似とする，ただし，式(5.4-1)の繰り返し過程は左辺だけで右辺は



Oseen解で固定する．第２近似は第１近似で求めた Ψ，ζ の値を式(5.4-1)に代入し，これらを既知関数として第１近似と同様に差分式が収束するまで繰り返し，求めた値を第２近似にする．近似ごとの繰り返し数 n はこの範囲のRe数では 200 回 位で十分収束する．図５-９は Re=1，10 の第５近似までの抗力の結果，そして 図５-１０ では圧力係数の第１近似の結果を示す．フローパターンと抗力係数に関しては Re<20 では十分第１近似でNavier-Stokes方程式の数値解と一致するが，圧力分

図５-９　第５近似までの抗力

C_D の変化（C_{DT}；全抗力係数，C_{DF}；摩擦抗力係数，C_{DP}；圧力抗力係数）

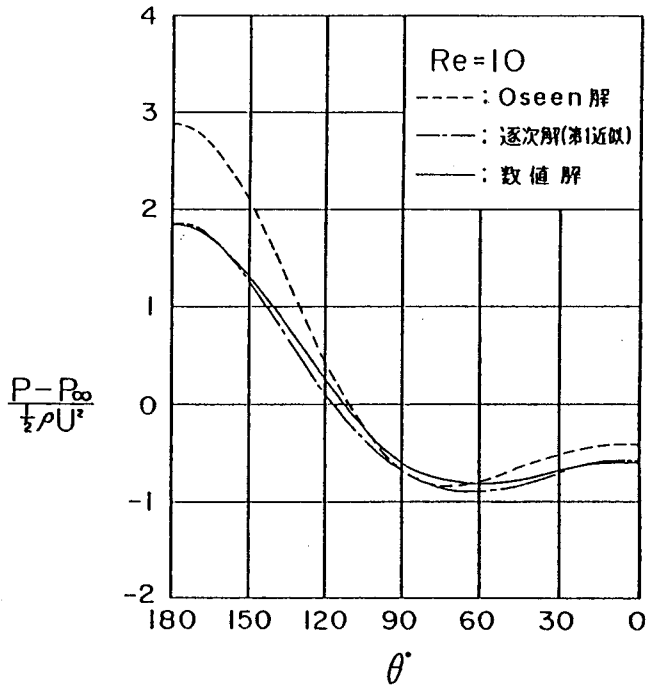


図５-１０　球上の圧力分布（第１近似）；Re=10

布に関しては Re～20位 になるとOseen解よりも数値解と一致しなくなる．さらに，Re>40 になればこの方法では式(5.4-1)が収束しなくなり，発散する．この原因は簡単な中心差分での置き換え，そして 数値解法に用いたＡＤＩ法とＳＬＯＲ法以外に，右辺の非線形項をOseen解で固定することが Re>40 では好ましくないことを示唆している．なぜなら，Oseen方程式を差分式（中心差分）で解けば Re～40 では十分解析解と一致するからである．

５．５　結言

中間レイノルズ数（Re≦120）の範囲まで Navier-Stokes方程式の数値解とOseen方程式の解析解を比較することによって，Oseen方程式が渦度の輸送速度を過大に評価し，拡散効果を相対的に小さくしていることが，球（円柱）周りの渦度分布，そして球（円柱）背後の流れや双子渦の変化などから明確に示すことができた．　また，低レイノルズ数（Re≦1）のフローパターンに関してはChester-Breach の解よりOseen解が数値解により近くなることを考慮すれば，流れ関数Ψ，抗力係数C_D，圧力係数$P_1(1,\theta)$の展開式はこの範囲のRe数では適切な数値を与える式として使用できる．

一方，Oseen解を基にした Navier-Stokes方程式 の数値による逐次近似は Re<20 までは可能であるが，Re～20 を越えると解が収束しない．したがって，Re>20になればこの繰り返しでNavier-Stokes方程式の数値解を求めることは有益でない．

第６章　円柱，球を過ぎる定常な粘性流に対する逐次近似

６．１ 序論

小さいRe数で円柱，球を過ぎる一様流の問題を逐次近似で精度を高める試みは多くの研究者によって行なわれてきた．最初に，Whitehead[14]はＳtokes解を基にして慣性項の効果を取入れ，Ｓtokes近似 を改良することを企てた．しかしながら，Whitehead の逐次解は無限で発散するパラドックスが生じた． 一方，Ｉmai[15]はＯseen解の漸近展開から出発し，円柱背後の死水領域内で Ｎavier-Ｓtokes方程式の逐次解を求め，円柱が流体から受ける力によい結果を与えた．しかし，物体近傍でＯseen解を用いた逐次近似についてはまだ報告されていない．したがって，本章では Ｏseen解の Ｒe数 による展開式（第２章参照）を用いてＮavier-Ｓtokes方程式の逐次近似を行い，円柱，球を過ぎる一様流の流れ場のより高い近似解を求め，流れを特徴ずける特性値について議論する．

ここで求める渦度 ζ と流れ関数 ψ の逐次解はそれぞれＯseen解の展開式と同じ形 $\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n(r,\theta)Re^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(r,\theta)Re^n$ に仮定し，展開の初期値はRe数によるＯseen展開の零次の次数とする．繰り返しの各段階はより低い次数の近似を用いてＮavier-Ｓtokes方程式の非線形項を逐次近似し，流れ関数 ψ と 渦度 ζ の逐次近似解を円柱，球についてそれぞれRe数の３次と１次の次数まで展開した．また，円柱については一般化したブラジウスの式[15]から抗力の展開式をRe数の１次の次数まで求めた[44]．

一方，Ｋaplun-Ｌagerstrom[45] あるいは Ｐroudman-Ｐearson[16]らは特異摂動によってＮavier-Ｓtokes方程式の解を求める方法を提案した（この手法はVan Dyke[46] の出版物でも紹介されている）．この方法では流れ場をＳtokes領域とＯseen領域に分け，それぞれの領域で進められた逐次近似解を任意の流れ場で一致さすことによって解が求められる．Chester-Ｂreach[23] はこの方法を

用いて球の場合に $R\hat{e}^3 \cdot \log Re$ の次数までProudman-Pearsonの流れ関数の展開式を拡張した．本章の結果とProudman-Pearsonの結果の比較は §6.7 で行なう．

6．2　円柱に対するOseen方程式の解

非圧縮粘性流体の２次元の定常な運動は次のような運動方程式と連続の式で支配される．

$$(u \cdot \mathrm{grad})\, u = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) P + \nu \nabla^2 (u, v) \tag{6.2-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{6.2-2}$$

ただし，∇^2 は $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ を表わし，u は速度ベクトルを意味する．半径a の円柱を過ぎる x-軸 に平行な速さ U の一様な流れ場では，流れ関数Ψ は

$$\Psi = U y + \psi \tag{6.2-3}$$

になる．ただし，ψは攪乱の流れ関数を示す．速度成分は $u = \partial\Psi/\partial y$ と $v = -\partial\Psi/\partial x$，そして 渦度 ζ は次式から求める．

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \Psi \tag{6.2-4}$$

式(6.2-1)から圧力の項を消去し，すべての変数を無次元化すれば次のようになる．

$$\nabla^2 \zeta^* - 2R_1 \frac{\partial \zeta^*}{\partial x^*} = -\frac{2R_1}{r^*} \frac{\partial(\psi^*, \zeta^*)}{\partial(r^*, \theta)} \tag{6.2-5}$$

$$\nabla^2 \psi^* = -\zeta^* \tag{6.2-6}$$

ただし，ψ^*，ζ^* はそれぞれ $\psi^* = \psi / Ua$，$\zeta^* = a\zeta / U$，そして x^*, r^* は $x^* = x/a$，$r^* = r/a$ を表わす．R_1は $Re/4$ で定義する．ここからの数式は記号の複雑さを避けるために無次元量を示す肩文字 ＊ は省略する．

次に，式(6.2-5)の左辺の渦度ζを次のように置く．

$$\zeta = e^{R_1 r\cos\theta} H(r, \theta) \tag{6.2-7}$$

上式を式(6.2-5)の左辺に代入すれば

$$(\nabla^2 - R_1^2)\ H(r, \theta) = -\frac{2R_1}{r}\ e^{-R_1 r\cos\theta}\ \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(r, \theta)} \tag{6.2-8}$$

になる．さらに，

$$H(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \sin n\theta \tag{6.2-9}$$

と置き，式(6.2-8)に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ g_n''(r) + \frac{1}{r} g_n'(r) - \left(\frac{n^2}{r^2} + R_1^2 \right) g_n(r) \right\} \sin n\theta$$

$$= -\frac{2R_1}{r}\ e^{-R_1 r\cos\theta}\ \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(r, \theta)} \tag{6.2-10}$$

になる．ただし，ダッシュ，’，はｒの微分を意味する．式(6.2-10)の右辺を零とおいた式は偏角$R_1 r$をもつ ｎ次の変形ベッセル方程式 である．したがって，式(6.2-5)の右辺を零とおいた方程式（Oseen方程式）の解は

$$\zeta = e^{R_1 r\cos\theta} \sum_{n=1}^{\infty} C_n K_n(R_1 r)\sin n\theta \qquad (6.2\text{-}11)$$

になり，$r\to\infty$ で $\zeta\to 0$ の条件を満足する．ただし，C_n は積分定数，そして $K_n(R_1 r)$ は n 次の変形ベッセル関数である．

ところで，Oseen方程式の流れ関数Ψの厳密解はTomotika-Aoi[5]によってすでに求められているので，ここではかれらの解析を進めることによって求めた式(2.3-22)の渦度ζだけを次に示す．

$$\zeta = -\frac{R_1}{2}\, e^{R_1 r\cos\theta} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \{ K_{m+1}(R_1 r)\sin(m+1)\theta - K_{m-1}(R_1 r)\sin(m-1)\theta \} \qquad (6.2\text{-}12)$$

ただし，B_mは積分定数である．式(6.2-11)と式(6.2-12)は等価であるので，ここでは式(6.2-12)を基にして次の節で示すような逐次近似を行なう．

6．3　Oseen解の展開

式(6.2-10)の同次方程式の解を

$$G_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+n-1,n}(r) R_1^{2m+n-1} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (6.3\text{-}13)$$

と置き，代入すれば式(6.2-10)の同次方程式は次式のように書くことができる．

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{ \ddot{a}_{2m+n-1,n}(r) + \frac{1}{r}\dot{a}_{2m+n-1,n}(r) - (\frac{n^2}{r^2} + R_1^2)\, a_{2m+n-1,n}(r) \} R_1^{2m+n-1} = 0 \qquad (6.3\text{-}14)$$

上式の $n=1$ の場合を示すと，次のようになる．

$$\ddot{a}_{0,1}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{0,1}(r)-\frac{1}{r^2}a_{0,1}(r)+\{\ddot{a}_{2,1}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{2,1}(r)-\frac{1}{r^2}a_{2,1}(r)$$

$$-a_{0,1}(r)\}R_1^2+\{\ddot{a}_{4,1}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{4,1}(r)-\frac{1}{r^2}a_{4,1}(r)-a_{2,1}(r)\}$$

$$\times R_1^4+\ldots=0 \qquad (6.3\text{-}15)$$

式(6.3-15)は各Re数で成り立たなければならないことから，次のような同次方程式が求まる．

$$\ddot{a}_{0,1}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{0,1}(r)-\frac{1}{r^2}a_{0,1}(r)=0 \qquad (6.3\text{-}15a)$$

$$\ddot{a}_{2m,1}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{2m,1}(r)-\frac{1}{r^2}a_{2m,1}(r)=a_{2(m-1),1}(r) \quad (m=1,2,\ldots)$$

(6.3-15b)

上式の同次方程式の解は

$$a_{2m,1}(r)=c^1_{2m,1}r+c^2_{2m,1}\frac{1}{r} \qquad (m=0,1,2,\ldots) \qquad (6.3\text{-}16)$$

になる．ただし，$c^1_{2m,1}$ ，$c^2_{2m,1}$ は積分定数である．式(6.3-16)の定数は渦度 ζ のOseen解を直接Re数で展開した式の $R_1^{2m}\sin\theta$ をもつ r と $1/r$ の係数と一致するように決める．例えば，式(6.3-16)の 零次 あるいは R_1^2 の次数に相応する $a_{2m,1}$ の $c^1_{2m,1}$，$c^2_{2m,1}$ の値は $c^1_{0,1}=0$，$c^2_{0,1}=-2/s$，$c^1_{2,1}=1$，

そして $c^2_{2,1}=-1+5/16s^2$ になる．次に，$a_{2m,1}$の特殊解は同次解を式(6.3-15b)の非同次項に代入し，定数変化法で求める．この結果，方程式(6.3-15b)の一般解は方程式(6.3-16)の同次方程式の解と特殊解を加えたものになる．$n \geqq 2$ の場合も上の処置を繰り返し行なうことによってたやすく解が求まる．また，このようにして求めた解はOseen解（式(6.2-12)）を直接Re数で展開した式と一致する．

次に，流れ関数と渦度の関係式から攪乱の流れ関数ψを誘導する．

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \tag{6.3-17}$$

方程式(6.3-17)からψの解を求めるために，次式のようにψを仮定する．

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r)\sin n\theta \tag{6.3蔚郡-18}$$

ここに

$$f_n(r)=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+n-1,n}(r)R_1^{2m+n-1} \tag{6.3-19}$$

である．$b_{2m+n-1,n}(r)$の同次方程式は方程式(6.3-15a)と(6.3-15b)の解を求めるのに使用した方法と同じ方法で求める．同次解は次式のように書くことができる．

$$b_{2m+n-1,n}(r)=d^1_{2m+n-1,n}r^n+d^2_{2m+n-1,n}r^{-n} \tag{6.3-20}$$

ただし，$d^1_{2m+n-1,n}$，$d^2_{2m+n-1,n}$ は積分定数である．一方，$b_{2m+n-1,n}(r)$ の特殊解はζを求めたのと同じ方法で求める．式(6.3-20)の積分定数は円柱表面上の粘着条件，すなわち，

$$\psi(1,\theta)=-\sin\theta, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=1}=-\sin\theta. \tag{6.3-21}$$

から決める．このようにして求めたψは

$$\psi=\{-(1+\frac{1}{2s})r+\frac{1}{2s}\frac{1}{r}+\frac{1}{s}r\log r\}\sin\theta+\ldots, \qquad (6.3\text{-}22)$$

になる．ただし，$s=1/2-\gamma-\log(R_1/2)$，そして γ（=0.57721...）はオイラー定数である．これらの解はζの場合と同様にOseen解（式(6.2-12)）をRe数で展開した式と一致する．この考え方に基ずいて Navier-Stokes方程式(6.2-5)の逐次近似を進めていく．

6．4　円柱を過ぎる一様流れのNavier-Stokes方程式への逐次近似

渦度ζと撹乱の流れ関数ψの展開式を次のような形に仮定する．

$$\zeta=\zeta_0+\zeta_1R_1+\zeta_2R_1^2+\zeta_3R_1^3+\ldots \qquad (6.4\text{-}23)$$

$$\psi=\psi_0+\psi_1R_1+\psi_2R_1^2+\psi_3R_1^3+\ldots \qquad (6.4\text{-}24)$$

6.4.1 展開の出発値

方程式(6.2-5)の逐次解の出発値はRe数に独立した形で次のように与える．

$$\zeta_0=-\frac{2}{s}\frac{1}{r}\sin\theta \qquad (6.4.1\text{-}25)$$

$$\psi_0=\{-(1+\frac{1}{2s})r+\frac{1}{2s}\frac{1}{r}+\frac{1}{s}r\log r\}\sin\theta \qquad (6.4.1\text{-}26)$$

これらの展開はOseen解をRe数で展開した 零次 の項である．

6.4.2 展開式の第２項

第２近似を求めるために，方程式(6.2-10)の右辺に式(6.4.1-25)と式(6.4.1-26)の ζ_0 と ψ_0 を代入し，Re数の次数で整理すれば次のように書くことができる．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\ddot{g}_n(r)+\frac{1}{r}\dot{g}_n(r)-(\frac{n^2}{r^2}+R_1^2)\ g_n(r)\}\sin n\theta$$

$$=(-\frac{4}{s}\ \frac{1}{r^2}+\frac{4}{s^2}\ \frac{1}{r^2}\log r)\sin 2\theta R_1+O(R_1^2))$$

(6.4.2-27)

さらに，式(6.3.13)を式(6.4.2-27)の左辺に代入し，両辺の $R_1\sin 2\theta$ の項を等しいと置いたならば，

$$\ddot{a}_{1,2}(r)+\frac{1}{r}\dot{a}_{1,2}(r)-\frac{4}{r^2}a_{1,2}(r)=-\frac{4}{s}\ \frac{1}{r^2}+\frac{4}{s^2}\frac{1}{r^2}\log r$$

(6.4.2-28)

になる．上式の同次解は

$$a_{1,2}(r)=c_{1,2}^1 r^2+c_{1,2}^2\frac{1}{r^2} \qquad (6.4.2\text{-}29)$$

になる．ただし，$c_{1,2}^1$, $c_{1,2}^2$ は積分定数，そして これらの定数は式(6.3-16)の場合と同様に決められ，$c_{1,2}^1=0$，$c_{1,2}^2=2-1/2s$ になる．また，式(6.4.2-28)の特殊解は定数変化法から次のように求まる．

$$a_{1,2}(r)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\log r \qquad (6.4.2\text{-}30)$$

式(6.4.2-29),(6.4.2-30)の結果から R_1 までの次数のζの逐次解は次のように書くことができる.

$$\zeta = e^{R_1 r\cos\theta}\left[-\frac{2}{s}\frac{1}{r}\sin\theta + \left\{\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\log r\right\}\right.$$

$$\left.\times\sin 2\theta R_1 + O\left(R_1^2\right)\right]$$

上式の指数をさらににRe数で展開すれば,ζに対する展開式の第2項(ζ_1)は次のようになる.

$$\zeta_1 = \left\{\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\log r\right\}\sin 2\theta \qquad (6.4.2\text{-}31)$$

一方,ζ_1に相応する流れ関数ψ_1は §6.3 で説明した方法で次式から求める.

$$\nabla^2\psi_1 = -\zeta_1$$

$$= -\left\{\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\log r\right\}\sin 2\theta \qquad (6.4.2\text{-}32)$$

式(6.3.18),(6.3.19),(6.4.2-32)を用いて $b_{1.2}(r)$ の方程式を求めると

$$\ddot{b}_{1.2}(r) + \frac{1}{r}\dot{b}_{1.2}(r) - \frac{4}{r^2}b_{1.2}(r) = -\left(2-\frac{1}{2s}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}\log r$$

(6.4.2-33)

になり,この方程式の一般解は

$$b_{1.2}(r) = d_{1.2}^1 r^2 + d_{1.2}^2\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8s}\right) - \frac{1}{16s^2}r^2\log r$$

$$+\frac{1}{8s^2}r^2(\log r)^2 \qquad (6.4.2\text{-}34)$$

になる．ただし，積分定数 $d^1_{1.2}$ と $d^2_{1.2}$ は円柱表面上の境界条件(6.3-21)から求める．このようにして求めたψ_1の項，すなわち，O（Re）は次のようになる．

$$\psi_1=\{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16s}+\frac{1}{16s^2})r^2+(\frac{1}{2}-\frac{1}{8s})+(-\frac{1}{4}+\underline{\frac{1}{16s}}$$

$$-\frac{1}{64s^2})\frac{1}{r^2}-\frac{1}{16s^2}r^2\log r+\frac{1}{8s^2}r^2(\log r)^2\}\sin 2\theta$$

(6.4.2-35)

上式の強調文字はOseen解，そして 下線の項はOseen解と特殊解が重なった項を示し，その他の項は残りの特殊解になる．

6.4.3 展開式の第３項

§6.4.2 と同じ繰り返しを行なえば次のように第３項の逐次解ζ_2，ψ_2が求まる．

$$\zeta_2=\{(1+\underline{\frac{1}{4s}})r+(-\frac{1}{4s}+\frac{5}{16s^2})\frac{1}{r}+(-\frac{1}{4s}+\frac{1}{16s^2}$$

$$+\frac{1}{64s^3})\frac{1}{r^3}+\frac{1}{16s^3}r\log r+(-\frac{1}{s}+\frac{1}{4s^2})\frac{1}{r}\log r-\frac{1}{4s^3}\frac{1}{r}\times$$

$$(\log r)^2+\frac{1}{8s^3}r(\log r)^2-\frac{1}{3s^3}r(\log r)^3\}\sin\theta$$

$$+\{(\underline{\frac{1}{4s}}-\frac{1}{16s^2}-\frac{13}{64s^3})r+(-\underline{\frac{1}{2s}}+\frac{1}{8s^2}+\frac{1}{32s^3})\frac{1}{r}$$

$$-\left(1-\frac{1}{6s}\right)\frac{1}{r^3}-\frac{3}{16s^3}\,r\log r+\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{8s^3}\right)\frac{1}{r}\log r$$

$$-\frac{3}{8s^3}\,r\,(\log r)^2\}\sin 3\theta, \qquad (6.4.3\text{-}36)$$

$$\psi_2=\{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{32s}-\frac{17}{256s^3}\right)r^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16s}+\frac{1}{32s^2}\right.$$

$$\left.+\frac{9}{256s^3}\right)r+\left(-\frac{1}{8}-\frac{5}{32s}-\frac{1}{32s^2}+\frac{8}{256s^3}\right)\frac{1}{r}$$

$$+\frac{1}{8s^3}\,r^3\log r+\left(-\frac{1}{8s}-\frac{3}{32s^2}+\frac{1}{16s^3}\right)r\log r+\left(-\frac{1}{8s}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32s^2}+\frac{1}{128s^3}\right)\frac{1}{r}\log r-\frac{7}{64s^3}r^3(\log r)^2+\left(\frac{1}{4s}-\frac{1}{16s^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16s^3}\right)r\,(\log r)^2+\frac{1}{24s^3}\,r^3(\log r)^3+\frac{1}{24s^3}\,r(\log r)^3\}\times$$

$$\sin\theta+\{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{576s^2}-\frac{91}{6912s^3}\right)r^3+\left(-\frac{1}{32s}+\frac{1}{128s^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{128s^3}\right)r+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{48s}\right)\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{96s}-\frac{7}{1152s^2}\right.$$

$$\left.+\frac{37}{6912s^3}\right)\frac{1}{r^3}+\left(-\frac{1}{24s}+\frac{1}{96s^2}+\frac{37}{1152s^3}\right)r^3\log r$$

$$+\left(\frac{1}{8s}-\frac{1}{32s^2}+\frac{1}{64s^3}\right) r\log r+\frac{1}{192s^3}r^3(\log r)^2$$

$$+\frac{1}{48s^3}r^3(\log r)^3\}\sin 3\theta \qquad (6.4.3\text{-}37)$$

ただし，上式の強調文字，下線，残りの項は式(6.4.2-35)と同じ意味を表わす．

ここまでの ψ，ζ の展開式は $r^{\pm 1}$，$r^{\pm 3}$ の係数の値はほとんどOseen解で支配され，$r^m(\log r)^n$ の項，すなわち，対流項は非線形項の効果によって増加していることがわかる．

§6.4.2 で述べた方法で ζ と ψ の展開式をそれぞれ $O(R_e^3)$ まで求めたが，その結果はかなり複雑で長くなるのでここではそれらの展開式を示すことを省く．ただし，$O(R_e^3)$ までの ζ と ψ の展開式の収束状態を調べると，

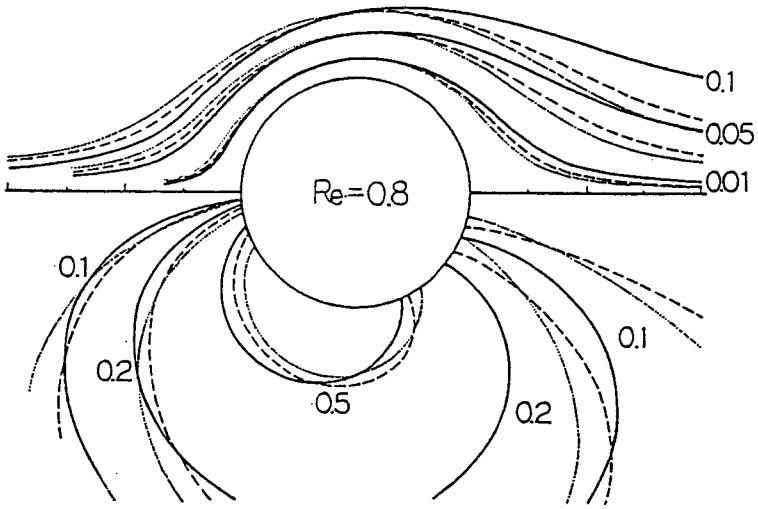


図6-1　円柱を過ぎるフローパターン（Re=0.8）

（ —— ；逐次解，　----- ；Oseen解，……；数値解）

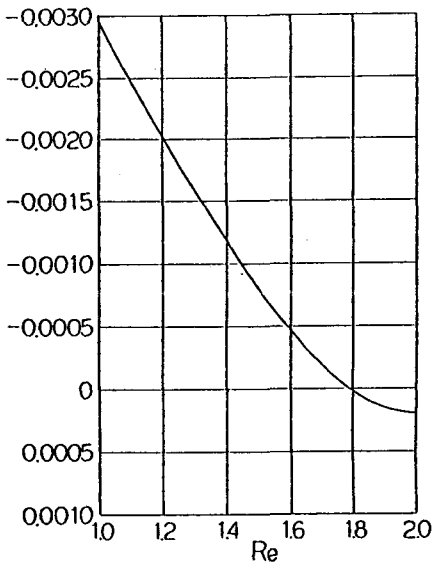


図6-2　円柱背後の淀み点近くのζの値

Re<1 では十分収束することが分かる．

ここではRe数の1次の次数までの展開式Ψ，ζを用いて円柱周りのフローパターンを Re=0.8 の場合について求め，その結果をNavier-Stokes方程式の数値解 およびOseen解と図6-1で比較する．また，渦度発生についてはζの展開式に r=1，sinnθ～nθ を代入し，Re数に伴うζの符号の変化を調べた．その結果は 図6-2 に示す．この図から判断すると円柱背後の双子渦の臨界Re数は 1.8 位になる．

6．5　抗力係数の展開式

一般化したブラジウスの式[15]から求めた抗力係数 C_D は次のようになる．

$$C_D=D/\rho U^2 a=r_D\int_0^{\pi}\Big[\Big\{\Big(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\sin\theta\Big)^2-\frac{1}{r_D^2}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+r_D\cos\theta\Big)^2\Big\}$$

$$\times\cos\theta-\frac{2}{r_D}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\sin\theta\Big)\cdot\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+r_D\cos\theta\Big)\sin\theta\Big]\,d\theta$$

$$-2r_D\int_0^{\pi}\zeta\sin\theta\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+r_D\cos\theta\Big)\,d\theta+\frac{4r_D}{Re}\int_0^{\pi}\Big(r_D\frac{\partial\zeta}{\partial r}$$

$$-\zeta\Big)\sin\theta\,d\theta \qquad (6.5\text{-}38)$$

ただし，r_D は円柱を囲む任意の円の半径である．

抗力係数の展開式は §6.4 で求めた ψ，ζ の展開式を式(6.5.38)に代入すれば求まる．ただし，上式の第１項と第２項の積分は円柱上では零になる．したがって，第３項から求めた抗力係数C_D の積分は

$$C_D=\pi\left\{\frac{2}{s}\frac{1}{R_1}-\left(1-\frac{3}{8s}+\frac{5}{16s^2}\right)R_1+O\left(R_1^3\right)\right. \tag{6.5-39}$$

になる．一方，Oseen解から直接求めた抗力係数C_D^o の展開式は

$$C_D^o=\pi\left\{\frac{2}{s}\frac{1}{R_1}-\left(1-\frac{1}{2s}+\frac{5}{16s^2}\right)R_1+O\left(R_1^3\right)\right\} \tag{6.5-40}$$

であるから，式(6.5-39) と 式(6.5-40) の $O(R_1)$ までの差は

$$C_D^o-C_D=\pi\frac{1}{8s}R_1+O\left(R_1^3\right) \tag{6.5-41}$$

になる．したがって，展開式(6.5-39)は，C_D の値が Tritton[39]の実験値やこれまでの数値結果より大きくなるOseen解より好ましい結果を与えていることがわかる．

６．６　球を過ぎる一様流れのNavier-Stokes方程式への逐次近似

本節では球のNavier-Stokes方程式の逐次近似を円柱の場合と同じ方法で行なう．最初に，流れ関数Ψ を

$$\Psi=\frac{1}{2}r^2\left(1-\mu^2\right)+\psi \tag{6.6-42}$$

と置く．ここでは $\mu=\cos\theta$，そして Ψ，ψ，r には通常の無次元化が行なわれている．式(6.6-42)の右辺の第１項は一様流を表わし，ψ は一様流からの乱れを表わす．式(6.6-42)をNavier-Stokes方程式に代入すれば

$$\{D_r^4-2R_1\left(\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial D_r^2}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial D_r^2}{\partial r}\right)\}\psi$$

$$=2R_1\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\psi,D_r^2\psi)}{\partial(r,\mu)}+\frac{2}{r^2}D_r^2\psi L_r\psi\right\} \tag{6.6-43}$$

なる．ただし，

$$D_r^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}$$

$$L_r=\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}$$

渦度ζは次式で定義される．

$$D_r^2\psi=-\zeta r\sin\theta \tag{6.6-44}$$

式(6.6-43)の非線形項を消去したOseen方程式から求めた解の展開式は第２章で述べたので，ここでは逐次近似に必要な次数までの結果，すなわち，O（Re）までの展開式を次ぎに示す．

$$\psi=\left(-\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}\frac{1}{r}\right)(1-\mu^2)+\left\{\left(\frac{3}{8}r^2-\frac{9}{16}r+\frac{3}{16}\frac{1}{r}\right)(1-\mu^2)\right.$$

$$-\left(\frac{3}{8}r^2-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\frac{1}{r^2}\right)\mu(1-\mu^2)\}R_1+O(R_1^2) \qquad (6.6\text{-}45)$$

また，逐次方法も§6.3および§6.4 で述べた円柱の場合と同じように行なうことができるので，ここでは逐次近似の概略だけを説明する．

最初に，展開式を次のように置く．

$$X=X_0+X_1R_1+\ldots, \qquad (6.6\text{-}46)$$

$$\psi=\psi_0+\psi_1R_1+\ldots, \qquad (6.6\text{-}47)$$

ただし，$X=D_r^2\psi=-\zeta r\sin\theta$.

6.6.1 展開式の出発値

式(6.6-46)の出発値 X_0 はOseen解の展開式(6.6-45)を式(6.6-44)に代入すれば求まる．したがって，出発値は次のようになる．

$$X_0=X_0^o=\frac{3}{2}\frac{1}{r}(1-\mu^2) \qquad (6.6.1\text{-}48)$$

$$\psi_0=\psi_0^o=\left(-\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}\frac{1}{r}\right)(1-\mu^2). \qquad (6.6.1\text{-}49)$$

ただし，肩文字 o はOseen展開を意味する．

6.6.2 展開式の第２項

式(6.6.1-48)と式(6.6.1-49)を方程式(6.6-43)に代入すれば，ψ_1の方程式は

$$D_r^4\psi_1+\frac{9}{r^2}\mu(1-\mu^2)=\left(\frac{27}{2}\frac{1}{r^3}-\frac{9}{2}\frac{1}{r^5}\right)\mu(1-\mu^2) \tag{6.6.2-50}$$

なる．次に，方程式(6.6.2-50)を次のように分解する．

$$D_r^2X_1+\frac{9}{r^2}\mu(1-\mu^2)=0 \tag{6.6.2-51}$$

$$D_r^2X_1=\left(\frac{27}{2}\frac{1}{r^3}-\frac{9}{2}\frac{1}{r^5}\right)\mu(1-\mu^2) \tag{6.6.2-52}$$

方程式(6.6.2-51)のOseen解，X_1^o，は式(6.6-45)を考慮すれば次のように書くことができる．

$$X_1^o=\left(C_1r^2+C_2\frac{1}{r}\right)(1-\mu^2)+\left(C_3r^3+\frac{3}{2}+C_4\frac{1}{r^2}\right)\mu(1-\mu^2) \tag{6.6.2-53}$$

一方，方程式(6.6.2-52)の特殊解，X_1^s，は

$$X_1^s=\left(-\frac{27}{8}\frac{1}{r}-\frac{3}{4}\frac{1}{r^3}\right)\mu(1-\mu^2) \tag{6.6.2-54}$$

になる．ただし，C_n は積分定数である．式(6.6.2-53) は 式(6.6-45)を式(6.6-44)に代入し求めた R_1 の次数の係数に等しくなるから，各係数，C_n，は $C_1=0$，$C_2=9/8$，$C_3=0$，$C_4=-9/2$ になる．したがって，X_1の解は次のように書くことができる．

$$X_1 = \frac{9}{8}\frac{1}{r}(1-\mu^2) + \left(\frac{3}{2} - \frac{27}{8}\frac{1}{r} - \frac{9}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{r^3}\right)\mu(1-\mu^2)$$

さらに，ψ_1 は方程式(6.6-44)から次のような形で求まる．

$$\psi_1 = \left(D_1 r^2 - \frac{9}{16}r + D_2\frac{1}{r}\right)(1-\mu^2) + \left(D_3 r^3 - \frac{3}{8}r^2 + \frac{9}{16}r\right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\frac{1}{r} + D_4\frac{1}{r^2}\right)\mu(1-\mu^2) \qquad (6.6.2\text{-}55)$$

上式の積分定数，D_n，は球上の粘着条件；$\psi_1(1,\theta)=(\partial\psi_1/\partial r)_{r=1}=0$，から求まる．ここに R_1 の次数までの流れ関数Ψを示すと次のようになる．

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2r}\right)(1-\mu^2) + \left\{\left(\frac{3}{8}r^2 - \frac{9}{16}r + \frac{3}{16}\frac{1}{r}\right)\times\right.$$

$$(1-\mu^2) + \left(-\frac{3}{8}r^3 - \frac{3}{8}r^2 + \frac{9}{16}r + \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\frac{1}{r} - \frac{3}{4}\frac{1}{r^2}\right)\times$$

$$\left.\mu(1-\mu^2)\right\} R_1 \qquad (6.6.2\text{-}56)$$

上式の r^{-2}，r^0 の係数は Proudman-Pearson[16] の結果とことなり，また，r^3 の項は彼らの展開式には含まれていない．

より高次の ψ と ζ の展開式は§6.6.2で述べた方法と同じ方法で求めることができる．

6．7　Proudman-Pearsonと本章の結果の比較

本節では円柱の場合について Proudman-Pearson の結果と比較する．まず，著者と彼らの方法との比較を分かりやすくするために，式(6.7-57)と式(6.7-58)で示すStokes方程式とOseen方程式についてそれぞれ述べる．

$$\nabla^4 \Psi = 0 \tag{6.7-57}$$

$$\left(\nabla^2 - 2R_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi = 0 \tag{6.7-58}$$

方程式(6.7-57)の一般解は

$$\Psi = \left\{ b_1 \left(2r\log r - r + \frac{1}{r} \right) + c_1 \left(r^3 - 2r + \frac{1}{r} \right) \right\} \sin\theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ b_n \left(r^{n+2} - (n+1) r^{2-n} + n \frac{1}{r^n} \right) + c_n \left(r^n - n r^{2-n} \right.\right.$$

$$\left.\left. + (n-1) \frac{1}{r^n} \right) \right\} \sin n\theta \tag{6.7-59}$$

なる．ただし，b_n と c_n （$n \geqq 1$）は積分定数である．

Proudman-Pearson の方法ではStokes展開の出発値は式(6.7-59)をOseen変数（ρ=Re・r）で表わし，Oseen展開の出発値である一様流にStokes展開を一致させる．また，Stokes展開のより高い次数の項，O（$(\log Re)^n$），は（$\log Re$）$^{-n}$ の級数をもつOseen展開の逐次項に一致させて求める．この方法で求めた彼らの結果を示すと次のようになる．

$$\Psi=-\frac{1}{\log Re}\left\{1+\frac{z}{\log Re}+O\left(\left(\frac{1}{\log Re}\right)^2\right)\right\}\psi_o+O\left(Re^n(\log Re)^{\beta_n}\right) \tag{6.7-60}$$

ただし，$\psi_o=1/2(1/r-r+2r\log r)\sin\theta$，$z=1/2-\gamma+\log 8$，そして β_nは定数である．本章の展開は §6.2，§6.3，§6.4 で述べたように，渦度の展開は，より低いRe数の次数の展開をNavier-Stokes方程式の非線形項に代入して逐次を進め，積分定数はOseen方程式の解をRe数展開した結果と一致するように決めた．一方，流れ関数の一般解は $\nabla^2\psi=-\zeta$ の関係式から求め，積分定数は物体表面上の粘着条件から求めた．展開式の出発値はOseen展開の第１項，すなわち，

$$\zeta^\circ=-\frac{2}{s}\frac{1}{r}\sin\theta+O(Re) \tag{6.7-61}$$

$$\Psi^\circ=\frac{1}{2s}\left(\frac{1}{r}-r+2r\log r\right)\sin\theta+O(Re) \tag{6.7-62}$$

である．したがって，上式を初期値にする限り展開式にはs（$=1/2-\gamma-\log Re/8$）の負のベキ が含まれる．いま，Re＜1 とき，1/s をさらにRe数で展開すれば次のように書くことができる．

$$\frac{1}{s}=-\frac{1}{\log Re}\left\{1+\frac{z}{\log Re}+\left(\frac{z}{\log Re}\right)^2+O\left(\left(\frac{1}{\log Re}\right)^3\right)\right\} \tag{6.7-63}$$

式(6.7-63)を式(6.7-62)に代入すれば

$$\Psi^\circ=-\frac{1}{\log Re}\left\{1+\frac{z}{\log Re}+\left(\frac{z}{\log Re}\right)^2+O\left(\left(\frac{1}{\log Re}\right)^3\right)\right\}\psi^\circ+O(Re) \tag{6.7-64}$$

なる．式(6.7-64)の展開式の第１項と第２項は式(6.7-60)の展開式と一致する．

また，Proudman-PearsonのStokes展開で $(\log Re)^{-1}$ を持つ項も式(6.7-64)と同じ形になる．一方，本章で求めた $O(Re^3)$ までの流れ関数の展開式に含まれる $1/s$，$1/s^2$，$1/s^3$ の項をさらに式(6.7-63)のように展開し，$Re^n(\log Re)^{\beta_n}$ の級数に整理すれば，$\beta_0=0$，$\beta_1=\cdots\beta_n=0$ になる．一方，Proudman-Pearson は $\beta_0=-1$，そして β_1，β_2，$\cdots\beta_n$ の値は整数になると推測した．本章の結果とProudman-Pearsonの結果の違いは展開方法による．すなわち，本章の展開では $Re^n\cdot\alpha_n$ 級数に展開したが，Proudman-Pearsonの展開は $Re(\log Re)^{\beta_n}$ に展開されている．

6．8　結言

Oseen方程式の解を基にしたNavier-Stokes方程式の逐次近似の効果を円柱および球で具体的に示すことができ，逐次で求めた流れ関数Ψおよび抗力係数C_Dの展開式は十分小さいRe数ではNavier-Stokes方程式の近似式として有益である．

また，ここで述べた展開方法はNavier-Stokes方程式の解により近い近似をもとめるのに便利である．Proudman-Pearsonの方法では球の場合には問題はないが§6.7 で述べたように円柱の場合にはStokes展開に慣性の効果が取り入れられるまで展開することは非常にやっかいな計算を必要とし，実際には不可能と思われる．

第７章 円柱を過ぎる粘性せん断流の数値解析

７．１ 序論

一様せん断流の中におかれた無限に長い円柱が受ける力，流れの様子を広い範囲のＲe数で調べることは，せん断流の基礎を知るうえで重要である．この古典的な課題については，理論的（低Re数），数値的（高Ｒe数）にいくつか報告されているが，中間Re数（Ｒe<40）までの詳細な数値解の報告はまだされていない．この範囲の一様せん断流を精度よく数値計算するには（１）外側境界の位置（有限距離）と境界条件（２）外側境界（または 円柱表面上）の流れ関数を固定したとき，円柱表面上（または 外側境界）の流れ関数に含まれる定数（Ｃ）などの決めかたが重要になる．また，流れの場では流れ関数Ψ，渦度ζの数値解は周期条件（流れ場で一価）を課して求めなければならないので，用いた差分解法での周期解の精度も問題になる．田村ら[17]は両境界を固定し［円柱表面上：$\Psi=0$，外側境界：$\Psi=U(y+1/2\cdot\varepsilon y^2)$］，Re=40,80 について非定常な数値計算を行い，いくつかの特性値（抗力係数；C_D，揚力係数；C_L，モーメント係数；C_M，etc.）を求めているが，流れ場で圧力が一価になる条件を満足させていないために十分な時間（$t\to\infty$）が経過しても特性値（C_D，C_L，C_M）の値が定常値に収束していない．流れ場で圧力が一価になる条件を数値計算上にとり入れる方法は，Matida－Kuwahara－Takami[47] によって平行平板内のポァズーイ流内におかれた角柱が下壁に近づくときの流れを調べるときに具体的に示されている．著者も Matidaら の方法を用い，同じ流れを詳細に数値計算し，流れ場の圧力の一周積分，$\oint_c dp=0$，による物体表面上の流れ関数（Ψ_s）の決定が適切な数値結果を与えることを報告した．[48] また，大宮司[49]は$\oint_c dp=0$を具体的な式（Ψ，ζ）で示し，平行平板内で振動する平板まわりの流れ問題で平板上の Ψ_s を流れ場で近似的に $\oint_c dp=0$ を満足するように決定し，数値計算を行なっている．Jordan－Fromm[19] は円柱表面上で流れ関数を固定し（$\Psi=0$），無限遠

方で一様せん断流に伴う定数（C）を外側境界面より１格子前の位置で，差分計算の繰返しで得られる流れ関数とその位置の一様せん断流との差（撹乱の流れ関数）をθ方向の各格子で加え，それらを格子数で割った値を外側境界の一様せん断流に加えることによって決定した．そして Re＝400 の数値計算を行ない，揚力が下向きになることを示し，一般的には低いRe数（Re≪１）では揚力は上向き，高いRe数では下向きと結論している．興味ある説ではあるがあまりにも予測的であるので，より具体的なRe数領域と シアパラメーター（ε）の依存性を揚力については示す必要があるように思う．

7.2節では基礎式と境界条件について述べるが，この計算で課した外側境界のΨは，一様せん断流に一様流のOseen方程式の厳密解を加えた流れ関数で固定し，円柱表面上の Ψ_s（＝C） は流れ場で圧力が一価になる条件を満足するように数値計算の繰返しごとに修正し求めた．差分計算の ＡＤＩ法 と ＳＬＯＲ法 については 第３章（第４章）で詳細に述べたのでここでは概略だけを示す． 7.3節では円柱を過ぎる一様せん断流を中間Re数（Re＝1～40）で６種類のシアパラメーター，ε，を用いて数値計算し，Re数とεによる 力の特性値（C_D，C_L，C_M）の変化，流れの様子を調べ，揚力についてはＪordanら[19]の説を具体化している．周期解の精度については Ψ，ζ の周期条件（流れ場で一価）を用いて一様流を全場で数値計算し，その結果を軸対称の境界で解いた一様流の結果と比較して調べた．

7．2．　基礎式と境界条件

7.2.1 基礎方程式

一様せん断流の中におかれた円柱（半径：a）周りの流れを数値計算するために，渦度（ζ）の運動方程式 および ζ と流れ関数（Ψ）の関係式を極座標（r，θ）を用いて表わし，さらに，それらの式に $z=\log r$，$\theta=\theta$ の変換を行なえばそれぞれ次のように書くことができる．

$$\nabla^2\zeta + \frac{2}{Re}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) = 0 \qquad (7.2.1\text{-}1)$$

$$\nabla^2\Psi = -\zeta \qquad (7.2.1\text{-}2)$$

ただし，$\nabla^2=\partial^2/\partial z^2+\partial^2/\partial\theta^2$ であり，Ψ，ζ，r はそれぞれ Ua，U／a，a で除して無次元化し，Uは$\theta=0$，π での外側境界の一様な速度である．流れ関数の外側境界条件は，一様せん断流に一様流のOseen方程式の厳密解（かく乱の流れ関数：ψ°）[5]を加えた値とし，その位置は第４章の数値解[31]で適切とした距離 $z_\infty\sim 3(r_\infty\sim 20.1)$に固定した．この場合外側境界条件は次のようになる．

$$z=z_\infty\ :\ \Psi= e^z\sin\theta+\frac{1}{4}\varepsilon e^{2z}(1-\cos 2\theta)+\psi^\circ \qquad (7.2.1\text{-}3)$$

$$z=z_\infty\ :\ \zeta= -\varepsilon+\zeta^\circ \qquad (7.2.1\text{-}4)$$

ただし，ε（$=\frac{a}{U}\cdot\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$ ：u_∞は外側境界の速度）はシアパラメーターを

表わし，ζ° は一様流のOseen方程式の渦度の解[5]を示す．円柱表面上の境界条件は次式を使用した．

$$\Psi=\Psi_s\ (=\mathrm{constant}),\qquad \partial\Psi/\partial n=0 \tag{7.2.1-5}$$

ただし，添字 S は円柱表面，n は法線方向を示し，Ψ_s は流れ場で圧力が一価になる条件を課して求める．

7.2.2 差分式

基礎式(7.2.1-1),(7.2.1-2) の差分化には中心差分を用い，渦度と流れ関数の差分解法にはそれぞれ ＡＤＩ法，ＳＬＯＲ法 を使用した．これらの解法については第３章（第４章）[31]で詳細に述べたのでここでは概略だけを説明する．格子幅を $\Delta z=b$，$\Delta\theta=d$ とした 式(7.2.1-1),(7.2.1-2) の差分式を次に示す．

渦度の式；

$$\beta_A\zeta_A+\beta_B\zeta_B+\beta_C\zeta_C+\beta_D\zeta_D+\beta_o\zeta_o=0 \tag{7.2.2-6}$$

ただし，

$$\beta_A=\frac{1}{b^2}-\mathrm{Re}\frac{(\Psi_B-\Psi_D)}{8bd}\qquad \beta_B=\frac{1}{d^2}+\mathrm{Re}\frac{(\Psi_A-\Psi_C)}{8bd}$$

$$\beta_C=\frac{1}{b^2}+\mathrm{Re}\frac{(\Psi_B-\Psi_D)}{8bd}\qquad \beta_D=\frac{1}{d^2}-\mathrm{Re}\frac{(\Psi_A-\Psi_C)}{8bd}$$

$$\beta_o=-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{d^2}$$

式(7.2.2-6) を z，θ 方向にそれぞれ線緩和を用いて解くときに使用した加速係数 ρ は Re= 1～10 では 1.3～1.5 の範囲，Re>10 では 3.0 とする．

流れ関数；

$$\alpha_A\Psi_A+\alpha_B\Psi_B+\alpha_C\Psi_C+\alpha_D\Psi_D+\alpha_o\Psi_o+\zeta_o e^{2z}=0 \qquad (7.2.2\text{-}7)$$

ただし，$\alpha_A=\alpha_C=1/b^2$，$\alpha_B=\alpha_D=1/d^2$，

$$\alpha_o=-2\,(1/b^2+1/d^2).$$

式(7.2.2-7) をθ方向にＳＬＯＲ法を用いて求めた$\Psi^{n+1}_{i,j}$［添字（ｉ，ｊ）は格子の位置］は緩和係数 α を用いて

$$\Psi^{n+1}_{i,j}=\Psi^{n}_{i,j}+\alpha\,(\Psi^{n+1}_{i,j}-\Psi^{n}_{i,j}) \qquad (7.2.2\text{-}8)$$

から修正した$\Psi^{n+1}_{i,j}$ を求め，この値を (n+1)回目 の値とした．
この計算では $\alpha=1.8$（Re=1～10），$\alpha=1.6$（Re>20）とした．

次に，式(7.2.1-5) の円柱上の流れ関数（Ψ_s）の差分式を示す．

$$\Psi^{n+1}_{s}=\Psi^{n}_{s}+\lambda\sum_{C}\Delta p \qquad (7.2.2\text{-}9)$$

ただし，λは緩和係数であり，$\sum_{C}\Delta p$は$\oint_c dp$を意味する．この計算の一周積分は円柱から ５メッシュ 離れた周回上で行なう．$\oint_c dp$ の数値計算はNavier-Stokes方程式から直接求めてもよいが，それらを若干変換した大宮司[49]の式を用いても求められる．また，数値の収束が困難にならない限りλの値は 0.02 を使用する．円柱表面上の渦度の差分式は式(7.2.1-2)より

$$\zeta^{n+1}_{1,j}=-\frac{2}{b^2}\,(\Psi^{n+1}_{2,j}-\Psi^{n+1}_{1,j}) \qquad (7.2.2\text{-}10)$$

となる．$\zeta_{1,j}$，$\Psi_{1,j}$ は円柱表面上の値を示す．無限遠方（z_∞～3）の境界値

（Ψ，ζ）はそれぞれ 式(7.2.1-3)，(7.2.1-4) を直接使用する．格子間隔は $\Delta z=0.05$，$\Delta\theta=3^\circ$ とし，収束判定はブラジウスの一般式[15]を用いて任意の円周上で求めた C_D，C_L，C_M が少なくとも 3桁位まで収束することを条件とする．

7.2.3 抗力係数，揚力係数，モーメント係数

これまで述べてきた 抗力係数C_D，揚力係数C_L，モーメント係数C_M はそれぞれ$\rho U^2 a$，$\rho U^2 a$，$2\rho U^2 a^2$ で除して無次元化している．今井によって一般化されたブラジウスの式[15]から求めた C_D，C_L，C_M の式を次に示す．

$$C_D=\int_0^{2\pi}\Big[-e^z\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sin\theta+\frac{1}{2}e^{-z}\Big\{\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2-\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\Big)^2\Big\}\cos\theta-e^{-z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sin\theta\Big]d\theta+\frac{2e^z}{Re}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\zeta\Big)\sin\theta\,d\theta \qquad (7.2.3\text{-}11)$$

$$C_L=\int_0^{2\pi}\Big[e^z\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\cos\theta+\frac{1}{2}e^{-z}\Big\{\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2-\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\Big)^2\Big\}\sin\theta+e^{-z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\cos\theta\Big]d\theta-\frac{2e^z}{Re}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\zeta\Big)\cos\theta\,d\theta \qquad (7.2.3\text{-}12)$$

$$C_M=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\Big\{e^{2z}\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\Big\}d\theta+\frac{e^{2z}}{Re}\int_0^{2\pi}\Big(\zeta-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)d\theta$$

$$+\frac{2}{Re}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,d\theta \qquad (7.2.3\text{-}13)$$

7.2.4 圧力係数

円柱上の圧力係数C_Pは次式から求めた.

$$C_P=\frac{P(0,\theta)-P(\infty,\pi)}{(1/2)\rho U^2}$$

$$=1+\frac{4}{Re}\int_\pi^\theta\left[\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{z=0}d\theta$$

$$+\frac{4}{Re}\int_0^\infty\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right]_{\theta=\pi}dz+2\int_0^\infty\left[\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right]_{\theta=\pi}dz$$

(7.2.4-14)

上式で求めた圧力係数が $\theta=0,\ 2\pi$ で何けた一致するかは本章の数値計算の精度の指標になる.

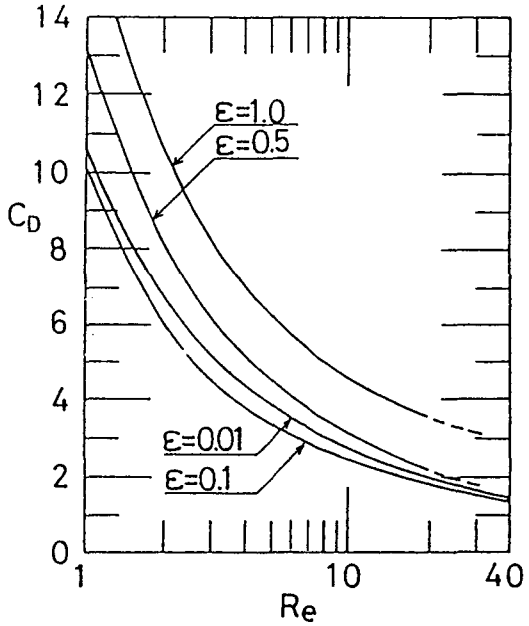
7．3　計算結果と考察

シアパラメーター　$\varepsilon=0.01$, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0 の一様せん断流の中で円柱が受ける力，流れの様子をRe数 1～40 の範囲で数値計算した結果を報告する．計算に用いた主なパラメーターは格子幅 Δz，$\Delta\theta$ をそれぞれ 0.05, 3°，そして 外側境界の位置 z_∞を 3（r_∞ ～20.1）とし，外側境界値と円柱上の流れ関数の値には それぞれ 式(7.2.1-3)と式(7.2.1-5) を用いる．ただし，式(7.2.1-5)の Ψ_s は式(7.2.2-9)から求める．力は 式(7.2.3-11)～(7.2.3-13)を使用し流れ場全体の任意の円周上で求め，どの円周上においても少なくとも繰り返しの結果が２けた以上一致することを収束の目安とする．

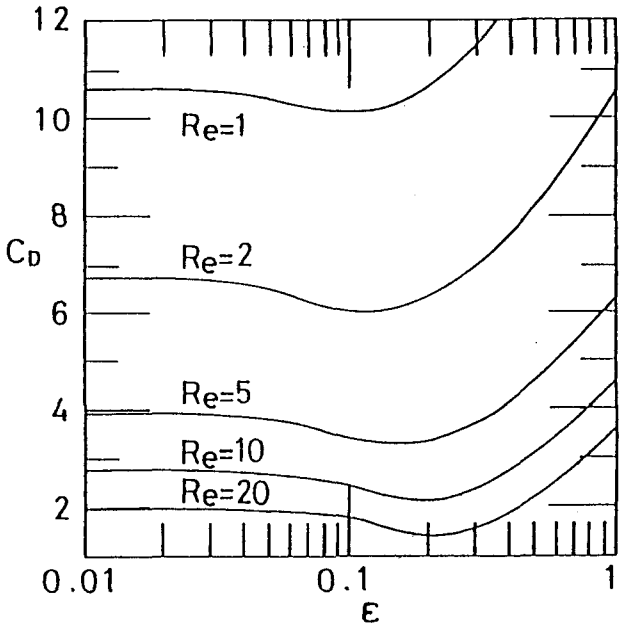
表7-1　C_D, C_L, C_M, Ψ_S　の値

Re	ε	C_D	C_L	C_M	Ψ_s
1	0.00	10.604	0.000	0.000	0.000
	0.01	10.596	-0.008	-0.039	0.256
	0.05	10.415	0.007	-0.194	1.278
	0.10	10.156	0.367	-0.400	2.366
	0.20	10.717	1.865	-0.910	3.218
	0.50	13.118	5.037	-2.639	4.084
	1.00	16.188	8.232	-5.505	5.440
2	0.00	6.748	0.000	0.000	0.000
	0.01	6.741	-0.047	-0.017	0.245
	0.05	6.546	-0.235	-0.083	1.284
	0.10	6.057	-0.286	-0.162	2.695
	0.20	6.381	0.710	-0.304	3.710
	0.50	8.188	3.107	-1.104	4.704
	1.00	10.608	5.566	-2.540	6.038
5	0.00	3.941	0.000	0.000	0.000
	0.01	3.937	-0.045	-0.005	0.198
	0.05	3.839	-0.229	-0.026	1.028
	0.10	3.419	-0.467	-0.054	2.415
	0.20	3.365	-0.215	-0.095	3.748
	0.50	4.576	1.384	-0.358	5.001
	1.00	6.331	3.143	-0.882	6.417
10	0.00	2.741	0.000	0.000	0.000
	0.01	2.739	-0.036	-0.002	0.167
	0.05	2.683	-0.182	-0.010	0.855
	0.10	2.442	-0.376	-0.022	1.930
	0.20	2.156	-0.494	-0.038	3.513
	0.50	3.127	0.648	-0.122	4.815
	1.00	4.571	2.073	-0.375	6.347
20	0.00	1.975	0.000	0.000	0.000
	0.01	1.974	-0.029	-0.001	0.146
	0.05	1.938	-0.143	-0.003	0.739
	0.10	1.808	-0.284	-0.008	1.568
	0.20	1.445	-0.470	-0.022	3.267
	0.50	2.206	0.191	-0.020	4.464
	1.00	3.577	1.472	-0.137	6.012
40	0.00	1.469	0.000	0.000	0.000
	0.01	1.467	-0.023	-0.000	0.134
	0.05	1.441	-0.114	-0.001	0.677
	0.10	1.351	-0.222	-0.002	1.411

表7-1 は上で述べた パラメーター のもとで求めた円柱に働く力（抗力係数；C_D，揚力係数；C_L，モーメント係数；C_M）と円柱表面上の流れ関数（Ψ_s）の数値結果である．この計算ではRe＝40の$\varepsilon\geqq 0.2$ になれば収束値を求めることが困難になる．図7-1 (a)はεを 0.01, 0.1, 0.5, 1.0 にそれぞれ固定し，Re数による抗力係数 C_D の変化を示す．C_D－曲線は ε が 0.01～0.2 までは一様流（ε=0）の曲線より下降し，ε が 0.2 以上になると上昇し始め ε= 0.5 では ε＝0 の曲線より上になり，それ以後 εが大きくなるにしたがって上昇する．図7-1 (b) は

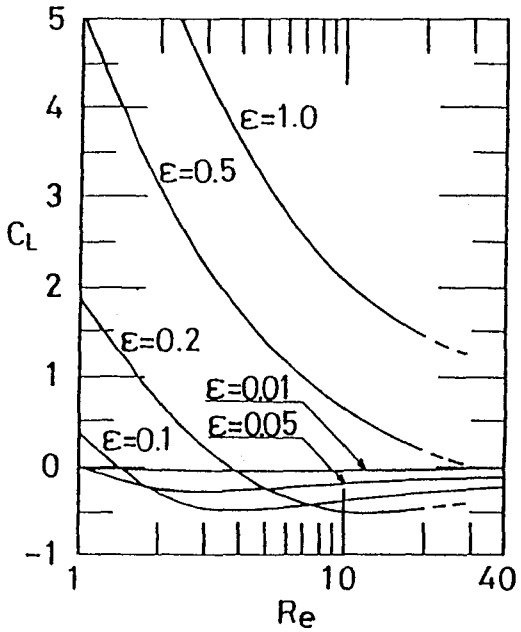


（ａ） Re数による抗力係数 C_D の変化

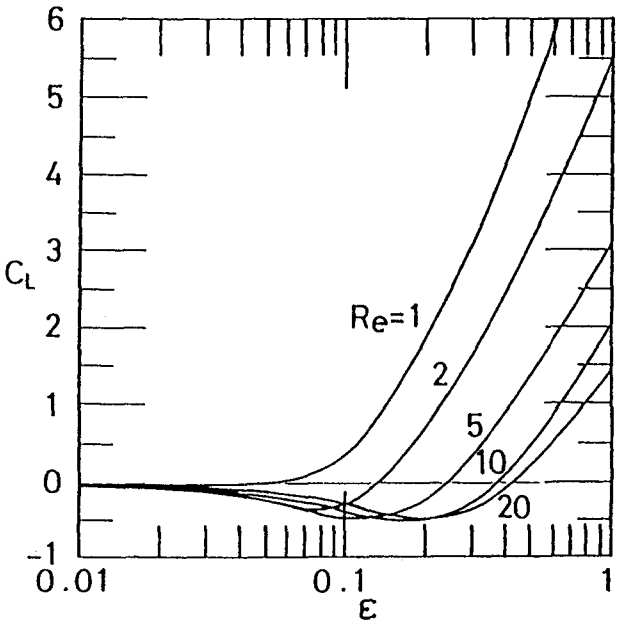


（ｂ） εによる抗力係数 C_D の変化

図７－１　抗力係数 C_D

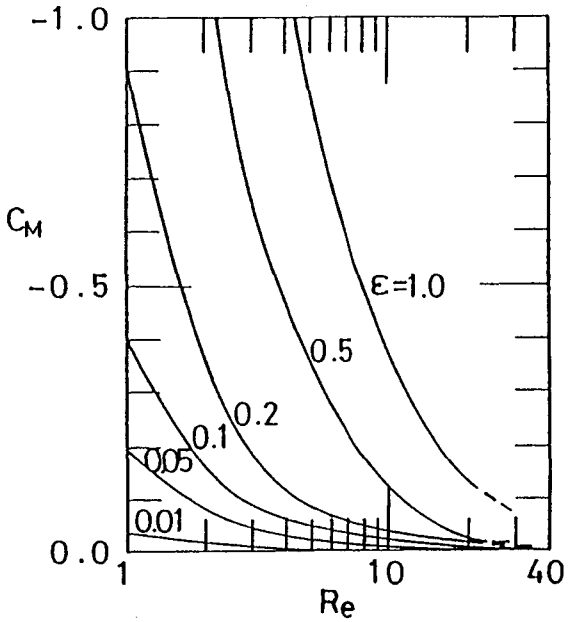


（ａ） Re数による揚力係数 C_L の変化

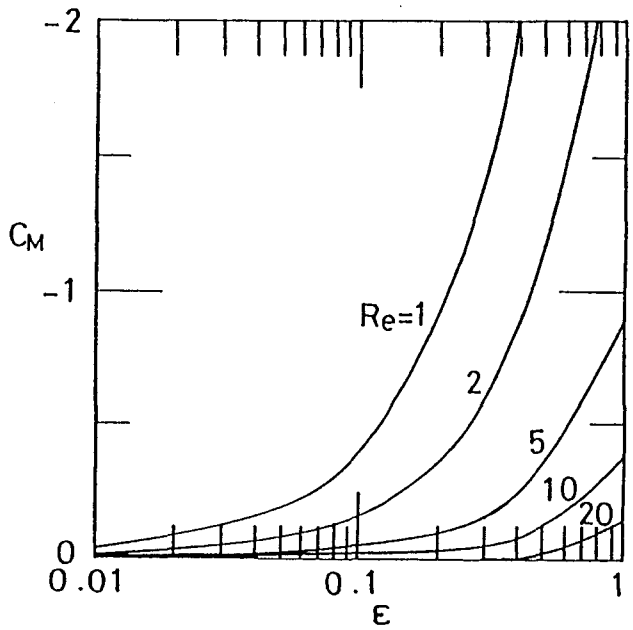


（ｂ） εによる揚力係数 C_L の変化

図７－２　揚力係数 C_L



（a） Re数によるモーメント係数 C_M の変化



（b） εによるモーメント係数 C_M の変化

図7-3 モーメント係数 C_M

$\varepsilon=0.01\sim 1.0$ までのεによる C_D の変化を示す．各Re数のC_D－曲線は極小値まではゆるやかに下がり，それ以後かなり急激に大きくなる．この範囲のRe数では C_D の極小値はほぼ ε が 0.1～0.3 の範囲にあり，Re数が大きくなるにしたがって ε－軸の右位置に移動する．図7-2(a)は各εのRe数による C_L の変化を示す．ε が 0.01 では C_L－曲線 はすべて負になるが，0.1，0.2 になれば正の値から負の極小値までゆるやかに下がり，それ以後 $C_L=0$ の軸に近づく．Jordanら[19]の結果（Re=400）より予測すれば，この近づきは Re数が大きくなるにしたがって $C_L=0$ の軸に漸近して行くと考えられる．$\varepsilon\geqq 0.5$ になればすべて C_L－曲線 は正になり，一様流の抗力係数のC_D－曲線とよく似た傾向を示す．図7-2(b)で示すεによるC_L－曲線の変化は 図7-1(b) の C_D－曲線と同じ傾向を示し，負の極小値まではゆるやかであるがそれ以後急激に大きくなる．図7-3(a) のC_M－曲線はεが大きくなるにしたがって急激に下がり，$C_M=0$ 軸に漸近する．図7-3(b)で示すεによる各Re数のC_Mの変化は下に凸な放物線となり，Re数が大きくなるにしたがって曲線の曲率を大きくしている．

表7-2　$\Psi_s=0$，C で求めた C_D，C_L，C_M の比較（ε=0.1）

境界設定	Re	1	2	5	10	20
Ψs=0	抗 力	10.647	6.514	3.674	2.576	1.922
	揚 力	2.334	1.757	1.112	0.779	0.536
	モーメント	-1.231	-0.844	-0.510	-0.344	-0.223
	Δp	0.628	0.638	0.569	0.508	0.418
Ψsの値 (Δp=0)	抗 力	10.156	6.057	3.419	2.442	1.808
	揚 力	0.367	-0.286	-0.467	-0.376	-0.284
	モーメント	-0.400	-0.162	-0.054	-0.022	-0.008
	Ψs	2.366	2.695	2.415	1.930	1.568

表7-3　全場，上半分で求めた C_D の比較（ε=0）

Re	1	2	5	10	20	40
CD(π)	10.548	6.713	3.922	2.728	1.966	1.462
CD(2*π)	10.604	6.748	3.941	2.741	1.975	1.469

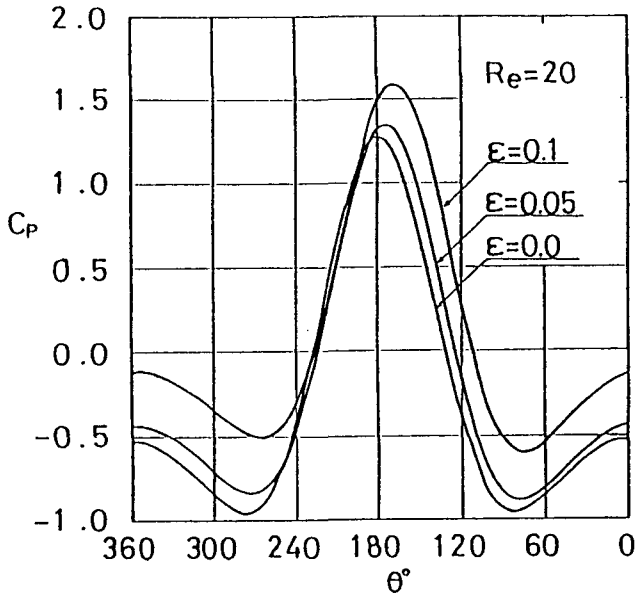


図7-4　円柱表面上の圧力係数 C_P；Re=20

図7-4では Re=20 に固定した $\varepsilon=0,\ 0.05,\ 0.1$ の円柱上の圧力分布を示す．ε が大きくなるにしたがって圧力分布の極大および極小値の値は大きくなりその位置は円柱の0°側に移動するので圧力分布はより非対称になる．$\theta=0, 360°$ の圧力の値は流れ場で圧力が一価になる条件を満足させているので，この範囲のRe数では 2〜3 けたぐらいまでは一致する．図7-5 は ε を固定した場合のRe数による円柱表面上の流れ関数 Ψ_s の変化を示す．Ψ_s－曲線は ε が大きくなるにしたがって上向きの放物線に変化していく．

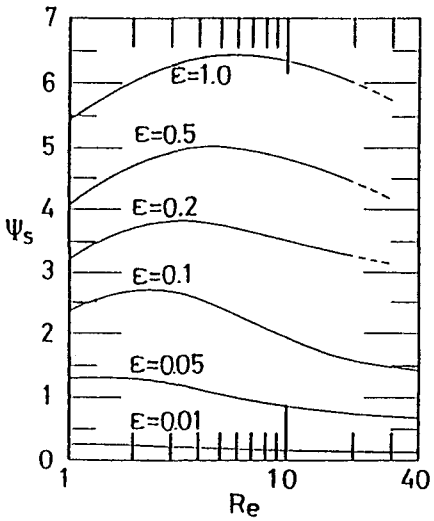
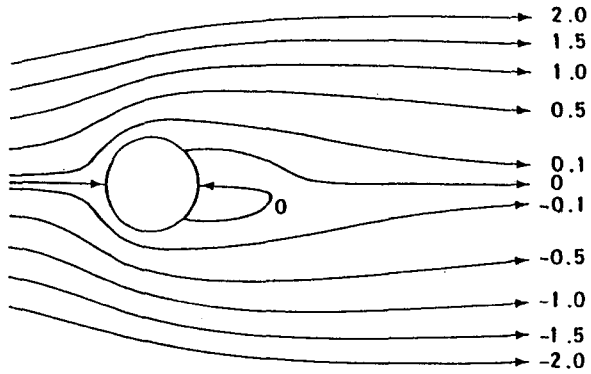
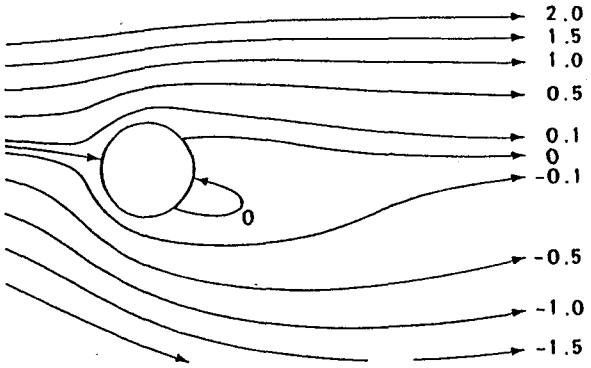


図7-5　円柱表面上の流れ関数 Ψ_s



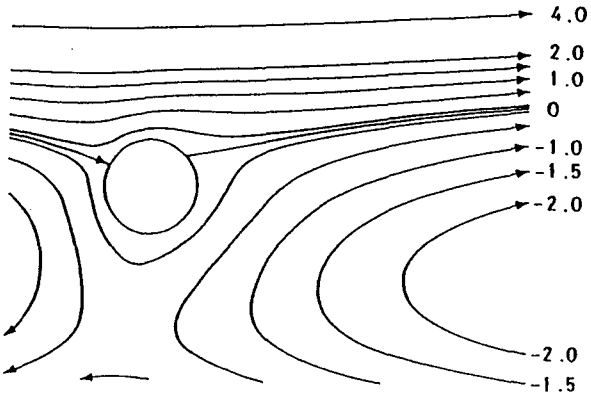
(a)

ε =0.01



(b)

ε =0.1



(c)

ε =0.5

図7-6　円柱周りの流線；Re=20

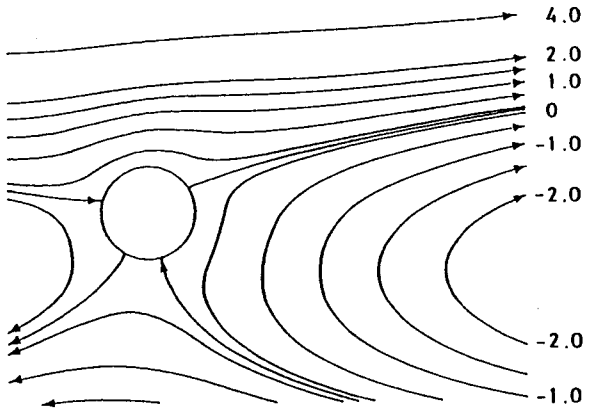


図7-7　円柱周りの流線
（Re=2，ε=0.5）

次に，§3 で述べたパラメーターと同じ値を使用し，固定した境界値（r_∞；一様せん断流，r＝a；Ψ＝0）のもとで Re数 1～20 の範囲で数値計算した ε＝0.1 の結果と上で報告した結果との比較を表7-2で示す．表7-2 の ⊿P は円柱表面上で一周積分を行なったとき，θ＝0，2πでの圧力のずれを示す．固定境界で行なわれた結果では揚力の値はすべて正になり，円柱表面上の圧力分布はθ＝0 で一価にならない（田村ら[17]の Re＝ 40，80 の結果も同様）．流れ場で圧力が一価になるように円柱表面上の Ψ_s を求めた結果では Re＝1（ε＝0.01）ですでに揚力の値は負になる．この結果に対する格子幅の影響についてはより粗い格子幅を用いて数値計算しても揚力の値が負になることを確認している．

表7-3は周期条件のもとで求めた数値解の精度を確認するために一様流の問題を対称な境界条件（上半分）と周期条件（全場）で解いた抗力係数 C_D の比較を示す．この表からわかるようにこの範囲のRe数ではよく一致する．

図7-6 (a)～(c)にεが 0.01，0.1，0.5 で求めた Re＝20 のフローパターンを示す．数値解で求めた流れ関数はこの図の Ψ に円柱表面上の Ψ_s（＝const.）を加えたものであるが，フローパターンを見やすくするために，円柱表面上で Ψ＝0 とする．ε が 0.01 では双子渦がこわれ，下側の渦だけが閉じた形で残る．さらに，εが大きくなるにしたがってこの渦はななめに傾いていき，ε＝ 0.5 では消滅し（分岐点は２箇所）円柱の下側の近傍ではゆるやかな主流と反対方向の

流れが形成される．図7-7はεが 0.5 で求めた Re=2 のフローパターンである．円柱上の分岐箇所が四つになるこのフローパターンは川口の解析解[18]と定性的には一致する．

7．4 結　言

円柱を過ぎる無限開放の一様せん断流を中間Re数で数値計算する場合，外側境界値を一様せん断流，そして円柱表面上の流れ関数を $\Psi_s=0$ に固定して数値計算を行なった場合と，同じ外側境界を用い，円柱表面上の流れ関数に $\Psi_s=C$〔流れ場で圧力が一価になる条件より求める：式(7.2.2-9) 参照〕を課して数値計算を行なった場合の結果では特性値（C_D，C_L，C_M）にかなりの差ができる．両境界でのΨの値を固定した数値計算では揚力係数C_L の値は，この範囲のRe数ではすべて正になる（円柱表面上の圧力分布は$\theta=0$ で一価にならない）がこの報告ように $\Psi_s=C$ を用いて数値計算を行なえば，Re=1（$\varepsilon=0.01$）でも揚力係数の値は負になる．フローパターンについても両結果にかなりの差がみられる．$\Psi_s=C$ を用いて解いた流線は円柱の下側に入り込み，円柱後方の渦の長さを $\Psi=0$ で解いた結果よりかなり長くする．物体を過ぎる一様せん断流を現在の差分法で数値計算する場合，外側境界の位置，格子幅にかかわらず円柱表面上で $\Psi_s=C$ を課す限り，揚力の値は中間Re数の範囲でも負になると結論できる．また，この計算で得られた Re数 と ε による C_D－，C_L－，C_M－曲線 の変化 および ε による Re=20 のフローパターンの変化などは，物理的にも興味ある結果を与えているので今後解析的な数値の確認も要求される．

第８章 低レイノルズ数で円柱を過ぎるせん断流の解析

８．１ 序論

低レイノルズ数で円柱を過ぎる一様せん断流の解析および数値解析は，工学的に問題になるポアズーイ流内あるいは壁近傍に置かれた物体周りの流れや物体に作用する力を調べる基礎的な準備として重要である．この流れの解析は古くから関心がもたれているが，解析の困難さからあまり報告されていない．本章では遅い流れで無限開放の円柱を過ぎる一様せん断流の解析を試みる．

これまでの報告としては川口の解析解[18]がある．その方法はNavier-Stokes方程式の流れ関数の解を Re数 展開で仮定し，非対称なストークス解を初期値とし，非線形項への逐次を進め第２近似まで求めた．近似式の未定係数は円柱上の粘着条件とポテンシャル流で解いた一様せん断流の流れ関数に任意の有限な距離で一致させることによって求めている．Re=2，シアパラメーター $\varepsilon=0.5$ の流線の形は定性的にはよい結果を与えているが，流体が円柱に作用する力（抗力，揚力，モーメント,圧力）についてはあまりよい結果を与えていない．その理由は外側境界面の位置とその面上の境界値に問題があるのと，この展開の項数では Re=2 の値が大きく，特性値の結果に収束しないためである．

円柱を過ぎる一様せん断流の数値解についてはかなり報告[17],[19]されているが，第７章[50]で指摘したようにこれらの数値結果にはかなり疑問がもたれる．すなわち，［Ⅰ］両境界を固定した場合と，［Ⅱ］円柱表面上の流れ関数に含まれる定数を流れ場で圧力が一価になるように数値計算した場合では，流れの様子，力，圧力分布にかなりの違いが生じる．［Ⅰ］の場合には揚力はεにかかわらず各Re数で正の値になるのに反して，［Ⅱ］の場合には 各Re数（1～40）で負の揚力が生じる（ただし，$\varepsilon>0.5$ では揚力は正の値）．また，流れの様子でも［Ⅰ］の場合では円柱の下側に流れ込む流線は考えられないが，［Ⅱ］の場合では円柱の下に流れ込む流線が生じる．

本章では一様せん断流の解析的な興味の他に解析結果が上で述べた［Ｉ］，［Ⅱ］のどちらの数値結果になるかを調べる．解析は一様せん断流が円柱にぶつかって起こす攪乱速度場の基礎方程式に含まれるε-係数の項をOseen解で逐次し，その解をOseen方程式の非対称解に加え，それらの一般解が粘着条件を満足するように解く．

８．２　基礎方程式の解析

8.2.1　速度の解析と展開式

図８-１で示すような半径 ａ の円柱の中心に原点をもつ直角座標軸 ｘ，ｙ をとり，無限遠で一様せん断速度（シアパラメーター；ε）をもってｘ軸の正の方向に流れるせん断流が静止円柱にぶつかるものとする．この場合，流場内の任意点におけるｘとｙ方向の速度成分は $u=U(1+\varepsilon y/a)+u'$，$v=v'$ になり，u'，v' は攪乱の微小速度を表わし，無限遠で零になる．

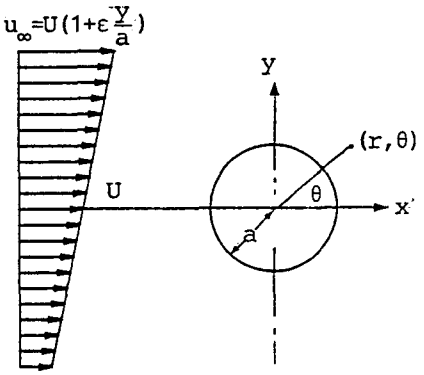


図８-１　流れの形状

流れの運動を支配する Navier-Stokes方程式にこれらの速度を代入し，u'，v' の二次の量を無視すれば次のような線形化された方程式が求まる．

$$U\frac{\partial u'}{\partial x}+\varepsilon U\frac{y}{a}\frac{\partial u'}{\partial x}+\varepsilon\frac{U}{a}v'=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\nabla^2 u'$$

(8. 2. 1-1)

$$U\frac{\partial v'}{\partial x}+\varepsilon U\frac{y}{a}\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\nabla^2 v'$$

前式は $\varepsilon \to 0$ で Oseen速度場の方程式 になる．ただし，ε $(=(a/U)\times(\partial u_\infty / \partial y)$ は シアパラメーター を表わす．

式(8.2.1-1)から渦度ζの式を求めれば

$$(\nabla^2 - 2R_1\frac{\partial}{\partial x})\ \zeta = \varepsilon\, 2R_1 y\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (8.2.1\text{-}2)$$

なる．

ここでは式(8.2.1-1)を直接解くかわりに式(8.2.1-2)で $\varepsilon = 0$ とした一様せん断流の渦度ζのOseen解（実際には "Garstangのパラドックス"で知られるように非対称解は求まらない）を $R\hat{e}$ の次数，O（$R\hat{e}$），までRe数展開した式を用いて式(8.2.1-2)のε-項に対する逐次近似を行い，特殊解$\zeta^{\varepsilon'}$の O（$R\hat{e}$）までの展開式を最初に求めた．次に，その展開式を $\Delta\Psi = -\zeta$ の関係式に用い$\psi^{\varepsilon'}$を求め，その $\psi^{\varepsilon'}$から ε－効果 による攪乱速度 $u_r^{\varepsilon'}$， $v_\theta^{\varepsilon'}$を求めた．特殊解 $\zeta^{\varepsilon'}$，$\psi^{\varepsilon'}$の誘導は第６章の解析で行ったOseen方程式の渦度の解を基にしたNavier-Stokes方程式への逐次近似[44]と同じ方法で進めた．単調だが非常にやっかいな逐次近似で求めた ε-効果 による攪乱速度の近似解は紙面の関係上具体的に示さず，それらの解を $u_r^{\varepsilon'}$，$v_\theta^{\varepsilon'}$と表わす．この場合，極座標に変換した式(8.2.1-1)の速度場に対する一般解は，非対称なOseen解と特殊解（$u_r^{\varepsilon'}$，$v_\theta^{\varepsilon'}$）の重ね合わせになる．したがって，円柱を過ぎる一様せん断流の速度 u_r，v_θ はこれらの解に一様せん断流の速度を加えれば求まり，次のように書くことができる．

$$u_r = U\cos\theta + \frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a}\sin 2\theta - \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi\cos\theta + u_r^{\varepsilon'}$$

(8.2.1-3)

$$v_\theta = -U\sin\theta + \frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a}(\cos 2\theta - 1) - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{2kr}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}$$

$$+\chi\sin\theta + v_\theta^{\varepsilon'}$$

(8.2.1-4)

ただし，u_r, v_θの第２項までが一様せん断流，そしてε-効果の速度 $u_r^{\varepsilon'}$, $v_\theta^{\varepsilon'}$ を除く項が非対称なOseen解である．また，式(8.2.1-3), (8.2.1-4)の ϕ, χ が満足する方程式は それぞれ

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{8.2.1-5}$$

$$\left(\nabla^2 - 2k\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi = 0 \tag{8.2.1-6}$$

であり，上式の ϕ, χ の非対称な解は次のように書くことができる．

$$\phi = \phi^{I} + \phi^{II}$$
$$= UA_0^{I}\log r - U\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{I}\frac{\cos n\theta}{n r^n} + UA_0^{II}\theta + U\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{II}\frac{\sin n\theta}{n r^n}$$

(8.2.1-7)

$$\chi = \chi^{I} + \chi^{II}$$
$$= Ue^{kr\cos\theta}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^{I}K_m(kr)\cos m\theta + Ue^{kr\cos\theta}\sum_{m=1}^{\infty}B_m^{II}K_m(kr)\sin m\theta$$

(8.2.1-8)

ただし，kは $U/2\nu$，A_n，B_m は積分定数，肩文字 I，II は Oseen方程式の対称，非対称の解をそれぞれ意味する．式(8.2.1-7)，(8.2.1-8) の ϕ，χ の非対称な解を 式(8.2.1-3)，(8.2.1-4) に代入すれば，u_r，v_θ の一般解は次のようなる．

$$u_r = U\cos\theta - U\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{I}\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{I}\left\{\frac{2}{kr} + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{m,n}^{I}(kr)\cos n\theta\right\}$$

$$+\frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a}\sin 2\theta + u_r^{\varepsilon'}$$

$$-U\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{II}\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{II}\Phi_{m,n}^{II}(kr)\sin n\theta \qquad (8.2.1\text{-}9)$$

$$v_\theta = -U\sin\theta - U\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{I}\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{I}\Psi_{m,n}^{I}(kr)\sin n\theta$$

$$-\frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a}(1-\cos 2\theta) + v_\theta^{\varepsilon'}$$

$$-U\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{II}\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{II}\left\{-\frac{4m}{kr}K_m(kr)\,I_m(kr)\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{m,n}^{II}(kr)\cos n\theta\right\} \qquad (8.2.1\text{-}10)$$

ただし，

$$\Phi_{m,n}^{II} = (K_{m+1}+K_{m-1})(I_{m-n}+I_{m+n}) + K_m(I_{m-n-1} - I_{m+n+1} - I_{m+n-1} + I_{m-n+1})$$

$$\Psi_{m,n}^{II} = (K_{m-1}+K_{m+1})(I_{m-n}+I_{m+n}) + K_m(I_{m+n-1} - I_{m-n-1} - I_{m+n-1} + I_{m-n+1})$$

前式の I_m, K_m は第２種変形ベッセル関数を表わす．肩文字Ｉは対称なOseen解を表わすが形式的な解と展開式は既に求められているので[5],[43]，これらに関係する解の誘導については割愛する．

式(8.2.1-9),(8.2.1-10) の u_r, v_θ の解は自動的に無限遠（r_∞）の条件を満足するので，積分定数A_n，B_mは円柱表面上の粘着条件（$r=a$；$u_r=v_\theta=0$）から決定する．式(8.2.1-9),(8.2.1-10) にこの条件を適用すれば肩文字Ｉ，ⅡのB$_m$ とA$_n$ の関係式は次のような形で書き表わすことができる．

肩文字Ｉ；

$$\frac{A_0^I}{a}+\frac{1}{2ka}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^I=0$$

$$\frac{A_n^I}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^I\Phi_{m,n}^I(ka)=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,4,\ldots)\end{cases} \qquad (8.2.1\text{-}11)$$

$$\frac{A_n^I}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}B_m^I\Psi_{m,n}^I(ka)=\begin{cases}-1 & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,4,\ldots)\end{cases}$$

肩文字Ⅱ；

$$\frac{A_0^{II}}{a}-\frac{1}{ka}\sum_{m=1}^{\infty}m\,B_m^{II}K_m(ka)\,I_m(ka)=\varepsilon\left\{-\frac{1}{2}-\frac{5}{32s}R_1^2+\ldots\right\}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{3}{32s}R_1+O(R_1^3) & n=1\\[2ex] \dfrac{1}{2}-\dfrac{13}{144s}R_1^2+O(R_1^4) & n=2\end{cases}$$

$$\frac{A_n^{II}}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}B_m^{II}\Phi_{m,n}^{II}(R_1)=\varepsilon\times\begin{cases}\left(\frac{9}{64}-\frac{515}{6144s}\right)R_1^3+O(R_1^5) & n=3\\ \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{48s}\right)R_1^2+O(R_1^4) & n=4\\ \left(\frac{5}{384}-\frac{25}{4608}\right)R_1^3+O(R_1^5) & n=5\\ 0 & n=6,7,8,\ldots\end{cases}$$

$$\frac{A_n^{II}}{a^{n+1}}+\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}B_m^{II}\Psi_{m,n}^{II}(R_1)=\varepsilon\times\begin{cases}-\frac{5}{32s}R_1+O(R_1^3) & n=1\\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{23}{144s}\right)R_1^2+O(R_1^4) & n=2\\ \frac{1}{24s}R_1+O(R_1^3) & n=3\\ \left(\frac{1}{24}+\frac{1}{192s}\right)R_1^2+O(R_1^4) & n=4\\ \left(\frac{7}{384}-\frac{43}{23040s}\right)R_1^3+O(R_1^5) & n=5\\ 0 & n=6,7,8,\ldots\end{cases}$$

(8.2.1-12)

ただし，$s=1/2-\log(Re/8)-\gamma$ （γ；オイラー定数）

さらに，式(8.2.1-11)，(8.2.1-12) から A_n^{I}，A_n^{II} を消去すれば B_m^{I}，B_m^{II} の無限連立一次方程式が求まるが，ここでは B_m^{II} だけを次に示す．

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{II} \cdot \lambda_{m,n}^{II}(R_1) = \varepsilon D_n \qquad (n=1,2,3,\ldots) \qquad (8.2.1\text{-}13)$$

ただし，$\lambda_{m,n}^{II}(R_1) = I_{m-n}K_{m+1} - I_{m+n}K_{m-1} - I_{m+n+1}K_m + I_{m-n-1}K_m$,

$$D_1 = \frac{1}{8s}R_1 + \left(-\frac{1}{16} + \frac{23}{72s} - \frac{5}{256s^2}\right)R_1^3 + O(R_1^5)$$

$$D_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{36s}\right)R_1^2 + \left(-\frac{1}{4}s - \frac{131}{768} + \frac{723}{4608s} - \frac{25}{1152s^2}\right)R_1^4 + O(R_1^6)$$

$$D_3 = -\frac{1}{12s}R_1 + \left(-\frac{1}{16} + \frac{103}{4608s} + \frac{5}{384s^2}\right)R_1^3 + O(R_1^5)$$

$$D_4 = \left(\frac{1}{12} - \frac{5}{96s}\right)R_1^2 + \left(\frac{s}{24} - \frac{31}{720} + \frac{1109}{144000s} + \frac{25}{3072s^2}\right)R_1^4 + O(R_1^6)$$

$$D_5 = -\left(\frac{1}{96} + \frac{41}{5760s}\right)R_1^3 + O(R_1^5)$$

$$D_6 = \left(\frac{1}{960} - \frac{13}{11520s}\right) R_1^4 + O(R_1^6)$$

$$D_n = 0 \qquad (n=7,8,9,\ldots)$$

式(8.2.1-13)より B_m^{II} が決定されるが，B_m^{I} の場合と同様に $m=1,2,3,\ldots$ に対し，Re数の一次の次数から二乗とびになる係数 B_m^{II} の展開式を$R\hat{e}^3$，$R\hat{e}^5$，．．．まで正確に求めるには三行三列，四行四列，．．．の行列式を解かなければならない．したがって，速度u_r，v_θをそれぞれ $O(R\hat{e}^4)$ まで展開するのに必要な係数 B_m^{II} の展開式をこの方法で求めたが，ここでは，展開についての説明を記すことを省く．次に，Bm と An の関係式を式(8.2.1-9)，(8.2.1-10)に適用し，一様流 U，半径 a を用いて無次元化すれば u_r，v_θ は次のようになる．

$$u_r = u_r^{I} + \frac{1}{2}\varepsilon r \sin 2\theta - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} J_n \frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} + u_r^{\varepsilon\prime}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{II} \{ \Phi_{m,n}^{II}(R_1) - r^{n+1}\Phi_{m,n}^{II}(R_1 r) \} \frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} \qquad (8.2.1\text{-}14)$$

$$v_\theta = v_\theta^{I} + \frac{1}{2}\varepsilon r (\cos 2\theta - 1) - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{\cos n\theta}{r^{n+1}} + v_\theta^{\varepsilon\prime}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{II} \{ \Phi_{m,n}^{II}(R_1) - r^{n+1}\Psi_{m,n}^{II}(R_1 r) \} \frac{\cos n\theta}{r^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{R_1 r} \sum_{m=1}^{\infty} m B_m^{II} \{ K_m(R_1 r) I_m(R_1 r) - K_m(R_1) I_m(R_1) \} \qquad (8.2.1\text{-}15)$$

ただし，

$$J_0=-\frac{1}{2}-\frac{5}{32s}R_1^2-\left(\frac{1}{8}s+\frac{11}{192}+\frac{1}{36s}-\frac{15}{1024s^2}\right)R_1^4$$

$$+O(R_1^6)$$

$$J_1=-\frac{3}{32s}R_1+\left(-\frac{5}{64}-\frac{43}{1152s}+\frac{15}{1024s^2}\right)R_1^3+O(R_1^5)$$

$$J_2=\frac{1}{2}-\frac{13}{144s}R_1^2+\left(-\frac{317}{3072}-\frac{755}{36864s}+\frac{65}{4608s^2}\right)R_1^4$$

$$+O(R_1^6)$$

$$J_3=\left(\frac{9}{64}-\frac{515}{6144s}\right)R_1^3+O(R_1^5)$$

$$J_4=\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{48s}\right)R_1^2+\left(\frac{s}{24}+\frac{179}{2880}-\frac{43}{1152s}+\frac{5}{1536s^2}\right)$$

$$R_1^4+O(R_1^6)$$

$$J_5=\left(\frac{5}{384}-\frac{25}{4608s}\right)R_1^3+O(R_1^5)$$

$$J_6=\left(\frac{11}{3840}-\frac{1}{960s}\right)R_1^4+O(R_1^6)$$

$$J_n=0 \qquad (n=7,8,\ldots)$$

上式の $u_r^{\varepsilon'}$，$v_\theta^{\varepsilon'}$ は遅い流れの範囲でしか適用できないので，式(8.2.1-13)で求めた B_m と $\Phi_{m,n}$，$\Psi_{m,n}$ のRe数による展開式を用いて，u_r，v_θ の展開式を

それぞれO（R_e^4）まで正確に求めた．しかし，u_r については以下の流れ関数，渦度の誘導には直接関係しないので割愛し，ここでは O（R_e^2）までの v_θ の展解式だけを次に示す．

$$v_\theta = v_\theta^{I} + v_\theta^{II}$$

$$= v_\theta^{I} + \frac{\varepsilon}{16}\left[\left\{-8\left(r-\frac{1}{r}\right)+8\left(r-\frac{1}{r^3}\right)\cos 2\theta\right\}\right.$$

$$+\left[\left\{-\frac{5}{2s}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{6}{s}r^2\log r\right\}\cos\theta+\frac{2}{3s}\left(r^2-\frac{1}{r^4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{s}r^2\log r\right\}\cos 3\theta\Big]R_1+\left[\left\{-\frac{5}{2s}\left(r^3-\frac{1}{r}\right)+\frac{2}{s}r^3\log r\right\}+\right.$$

$$\left\{-\frac{14}{9s}r^3+\left(4-\frac{1}{s}\right)r+\left(-4+\frac{23}{9s}\right)\frac{1}{r^3}+\left(8-\frac{2}{s}\right)r\log r\right.$$

$$\left.+\frac{16}{3s}r^3\log r\right\}\cos 2\theta+\left\{\frac{1}{4s}r^3+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6s}\right)r-\frac{1}{9s}\frac{1}{r^3}+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{36s}\right)\frac{1}{r^5}+\frac{1}{s}r^3\log r\right\}\cos 4\theta\Big]R_1^2+O(R_1^3) \qquad (8.2.1\text{-}16)$$

ただし，v_θ^{II} は非対称なOseen解と $v_\theta^{\varepsilon'}$ を重ねた解の展開式を意味する．この展開式の v_θ^{I} と v_θ^{II} はそれぞれが円柱表面上の粘着条件を満足している．

8.2.2 流れ関数Ψと渦度ζの展開式

接線速度 v_θ と流れ関数Ψの定義式 $v_\theta = -\partial\Psi'/\partial r$ から無次元化した $\Psi\ (=\Psi/Ua)$ を求めれば

$$\Psi(r,\theta)=\int_1^r v_\theta(r,\theta)\,dr \tag{8.2.2-17}$$

になる．上式に式(8.2.1-16)の v_θ を代入し，積分を行って Ψ の $O(R\hat{e}^4)$ までの展開式を求めた．この展開式については $O(R\hat{e}^2)$ までを次に示す．

$$\Psi=\Psi^{I}+\Psi^{II}$$

$$=\Psi^{I}+\frac{\varepsilon}{16}[\{4(r^2-1)-8\log r+(-4r^2+8-\frac{4}{r^2})\cos 2\theta$$

$$+\{(\frac{3}{2s}r^3-\frac{4}{s}+\frac{5}{2sr}-\frac{2}{s}r^3\log r)\cos\theta+(\frac{2}{9s}-\frac{2}{9sr^3}$$

$$-\frac{2}{3s}r^3\log r)\cos 3\theta\}R_1+[\{\frac{3}{4s}(r^4-1)-\frac{5}{2s}\log r$$

$$-\frac{1}{2s}r^4\log r\}+\{\frac{13}{18s}r^4+(2-\frac{2}{s})+(-2+\frac{23}{18s})\frac{1}{r^2}$$

$$+(-4+\frac{1}{s})r^2\log r-\frac{4}{3s}r^4\log r\}\cos 2\theta+\{(-\frac{1}{3}+\frac{1}{12s})r^2$$

$$+(\frac{1}{2}-\frac{5}{144s})-\frac{1}{18sr^2}+(-\frac{1}{6}+\frac{1}{144s})\frac{1}{r^4}$$

$$-\frac{1}{4s}r^4\log r\}\cos 4\theta]R_1^2+\quad(R_1^3) \tag{8.2.2-18}$$

次に，渦度と流れ関数の関係式 $\Delta\Psi=-\zeta$ から式(8.2.2-18)のΨを用いて，無次元化したζ（$=a\zeta/U$）を O（$R\hat{e}^4$）まで展開した．この展開式の結果は Ψ と同様に O（$R\hat{e}^2$）までを次に示す．

$$\zeta=\zeta^{I}+\zeta^{II}$$

$$=\zeta^{I}-\varepsilon\left(1-\frac{2}{r^2}\cos 2\theta\right)+\frac{\varepsilon}{16}\left[\left\{-\frac{4}{sr^2}+\frac{16}{s}r\log r\right)\right.$$

$$\cos\theta+\left(\frac{4}{s}r+\frac{2}{sr^2}\right)\cos 3\theta\}R_1+\left[\left(-\frac{8}{s}r^2+\frac{8}{s}r^2\log r\right)+\right.$$

$$\left\{\frac{2}{s}r^2+\left(16-\frac{4}{s}\right)+\left(8-\frac{8}{s}\right)\frac{1}{r^2}+\frac{16}{s}r^2\log r\right\}\cos 2\theta+$$

$$\left\{\frac{2}{s}r^2+\left(-4+\frac{1}{s}\right)+\left(8-\frac{5}{9s}\right)\frac{1}{r^2}-\frac{2}{3sr^4}\right\}\cos 4\theta\Big]R_1^2$$

$$+O(R_1^3) \tag{8.2.2-19}$$

式(8.2.2-18)，(8.2.2-19)の Ψ^{II}，ζ^{II} は非対称なOseen 解と $v_\theta^{\varepsilon'}$ に対する $\Psi^{\varepsilon'}$，$\zeta^{\varepsilon'}$ に一様せん断流をそれぞれに重ね合わせた解を表わす．上式の対称なOseen解の展開式（ Ψ^{I} ，ζ^{I} ）は第２章で O（$R\hat{e}^3$）まで示した．

8.2.3 抗力係数，揚力係数，モーメント係数の展開式

一般化したブラジウスの式[15]より求めた円柱が流体から受ける抗力係数 C_D ($=D/\rho U^2 a$)，揚力係数 C_L ($=L/\rho U^2 a$)，モーメント係数 C_M ($=M/1/2\rho U^2 a^2$) は円柱表面上 ($r=a$) ではそれぞれ次のようになる．

$$C_D=\frac{1}{2R_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\zeta\right)_{r=1}\sin\theta\,d\theta \tag{8.2.3-20}$$

$$C_L=\frac{1}{2R_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\zeta\right)_{r=1}\cos\theta\,d\theta \tag{8.2.3-21}$$

$$C_M=\frac{1}{R_1}\int_0^{2\pi}\left(\zeta-\frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)_{r=1}d\theta \tag{8.2.3-22}$$

上式に ζ の展開式(8.2.2-19)を代入すれば C_D，C_L，C_M の $O(R_e^4)$ までの展開式が求まり，次のようになる．

$$C_D=C_D^I-\varepsilon^2\frac{\pi}{16s}R_1+\ldots \tag{8.2.3-23}$$

$$C_L=-\frac{\varepsilon\pi}{16}\left\{\frac{16}{s}+\left(\frac{63}{4}-\frac{29}{16s}-\frac{35}{16s^2}\right)R_1^2+O(R_1^5)\right. \tag{8.2.3-24}$$

$$C_M=-\frac{2\varepsilon\pi}{R_1}\left\{1+\frac{1}{4s}R_1^2+\left(\frac{15}{32}-\frac{85}{384s}-\frac{5}{128s^2}\right)R_1^4\right.$$

$$\left.+O(R_1^6)\right\} \tag{8.2.3-25}$$

ここでの C_D^I は対称なOseen解を意味し，非対称な C_D^{II} は式(8.2.2-19)の渦度 ζ から求めると零になる．そこで，本章の解析とは別にOseen解のRe数展開を基にして方程式(8.2.1-2)の ε-項への逐次近似を形式的に三回繰り返し求めた ζ を使用し，式(8.2.3-20)から 抗力係数 C_D を求めて，C_D に対する影響を調べた．その効果はRe数に伴う C_D-曲線をごく僅か下げる．式(8.2.3-23)の C_D はその場合の展開式を示す．また，この方法で行なった C_L の展開式は式(8.2.3-24)と一致しないが Re数 に対する数値結果はほとんど変わらない．一方，C_M の展開式は式(8.2.3-25)と一致する．

8.2.4 圧力係数の展開式

Ψ，ζ を使用し，圧力係数 $C_P\,[=\{P(1,\theta)-P(r_\infty,\pi)\}/\rho U^2]$ を求める式を次に示す．

$$C_P=\frac{1}{2R_1}\int_\pi^\theta\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)_{r=1}d\theta+\frac{1}{2R_1}\int_1^\infty\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)_{\theta=\pi}dr$$

$$+\int_1^\infty\left(\zeta\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)_{\theta=\pi}dr+\frac{1}{2} \qquad (8.2.4\text{-}26)$$

上式にΨ，ζの展開式を代入し，求めたO（Re）までの圧力係数の展開式を次に示す．

$$C_P=C_P^I+C_P^{II}$$

$$=C_P^I-\varepsilon\sin2\theta\,\frac{1}{R_1}+\frac{\varepsilon}{32}\left[\frac{24}{s}+\frac{8}{s}\,|\,\theta-\pi\,|+\left(-8+\frac{18}{s}\right)\times\right.$$

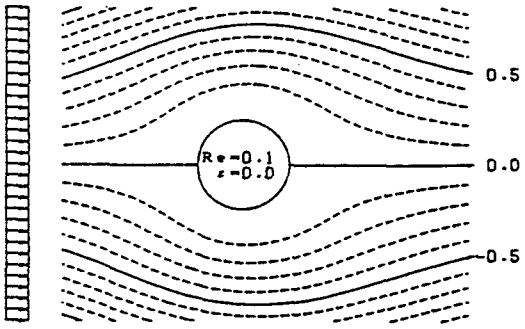
$$\sin 2\theta + \left(-4 + \frac{35}{18s}\right)\sin 4\theta\} R_1 + O(R_1^2)$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{16}\left[\left(-8 + \frac{12}{r_\infty^2} - \frac{4}{r_\infty^4} + 8\log r_\infty\right) + O(R_1)\right] \qquad (8.2.4\text{-}27)$$

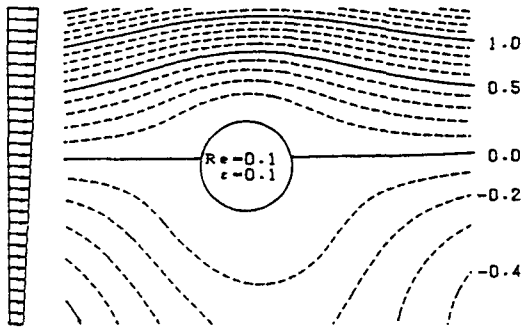
ただし，C_P^{II} はε-効果による圧力分布の展開式である．r_∞ は $\theta=\pi$ 軸上の無限の位置を示す．ここでは $r_\infty = 3$ として数値計算したが，それらを含む項の値は圧力の結果にほとんど影響しない．

8．3　展開式の数値結果と考察

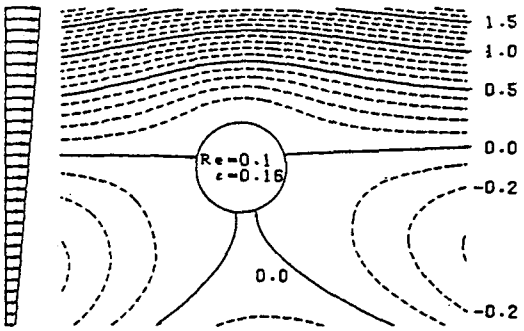
式(8.2.2-18)のΨの展開式を用いて求めたRe=0.1の流線を図8-2(a),(b),(c),(d)で示す．ただし，図(a),(b),(c),(d) のεはそれぞれ 0.0, 0.1, 0.16, 0.5 である．図8-3 は流線の図8-2(b)に対応するように式(8.2.2-19)から求めた等渦度線である．これらの図はε-効果による流れの変化をよくあらわしている．ε=0.1 では一様流(ε=0)の円柱周りの流線とかなり違いが生じる．一様流の流線は円柱の上下でゆるやかに対称的に膨らむのに対しε=0.1の流れでは円柱の上側の流線は円柱に沿うようになり，下側の流線は一様流に比べてゆるやかに膨らんだ形になる．同じεのせん断流では，Re数が小さくなるにしたがって円柱上



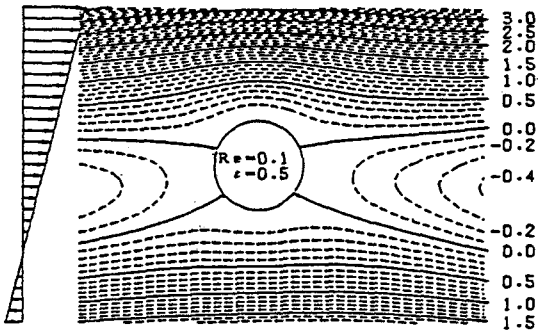
(a) Re=0.1, ε=0



(b) Re=0.1, ε=0.1



（ｃ）Re=0.1, ε=0.16



（ｄ）Re=0.1, ε=0.5

図８-２　円柱周りの流線

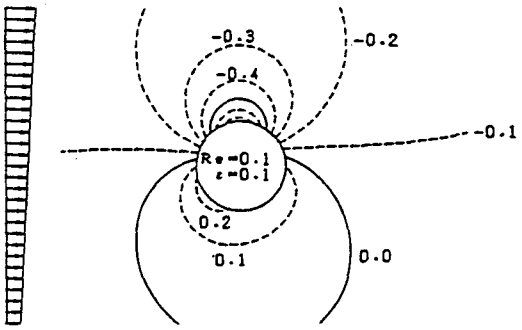


図８-３　円柱周りの等渦度線（Re=0.1, ε=0.1）

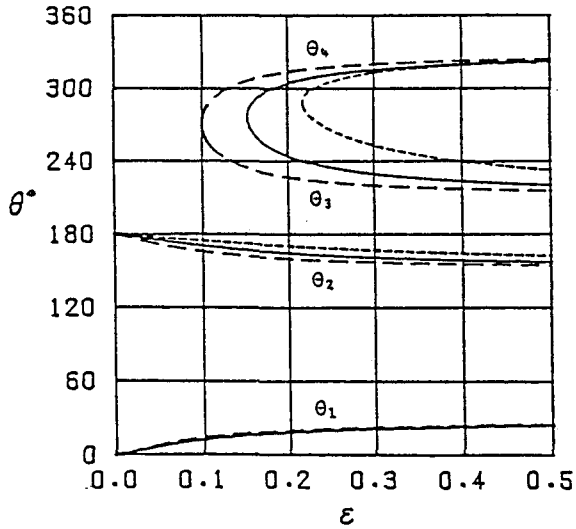


図8-4　εによる円柱上の淀み点（Ψ=0）の変化

（Re=0.01；-----，Re=0.1；——，Re=0.4；-----）

下の非対称性は大きくなる．また，円柱前後の淀み点の位置も一様流に比べてかなり上側にずれ，そのずれは後方がより大きくなる．一方，一様流の場合には対称軸と一致するζ=0の等過度線は図8-3で示したように円柱前後の淀み点から下側に膨らみ円のようになって閉じ，負の等渦度線によって包括される．ε=0.16なると円柱上下の相対的な流れが強くなり，円柱上に4つの淀み点（Ψ=0 の分岐点）をもつ流れになり，円柱前後で逆向きの流れを形成する．その場合，ζ=0 の等渦度線は円柱の下側で瓢箪型になり，その中に2つの正の等渦度線ができる．ε=0.5 では円柱の上下および前方と後方でよく似た逆向きの流れになり，円柱周りで4つの違った流れを形成する．また，εによる Ψ=0 の流線の変化はεが増加するにしたがって一様流の対称軸より上側にあがり，ε=0.15～0.16 で主流と逆向きの流れの Ψ=0 の流線が円柱の下側から付着し，ε>0.16 になれば円柱前後および上下でそれぞれ逆向きの流れをもつようになる．この付着するとき（4つのΨ=0の分岐点）のεの臨界値を Re=0.01，0.1，0.5 で調べた結果を図8-4で示す．ただし，付着点の位置はθ方向の順に $\theta_1, \ldots \theta_4$ とする．この図のRe=0.01，0.1,0.5 に対する ε の臨界値はそれぞれ 0.11，0.16，0.22 であり，

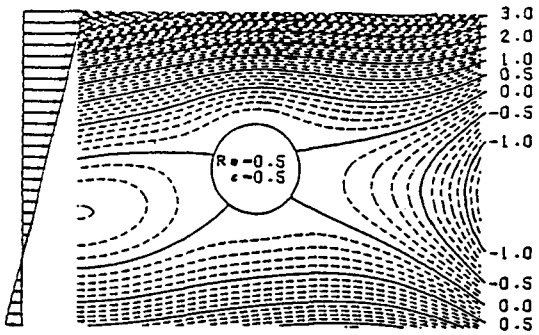


図８-５　円柱周りの流れ；Re=0.5，ε=0.5

Re数が大きくなるにしたがってその値を大きくする．θ_1 の角度の変化はRe数にほとんど関係なくε＝0〜0.5 の範囲で 0°〜26° 位になるが，θ_3の変化はεだけでなくRe数にもかなり依存して動くため，Re数が大きくなると 点θ_2 と点θ_3 の幅は 点θ_1 と 点θ_4 に比べて広くなる．この結果は Re〜１位 になれば数値結果と逆になる．この原因は円柱後方の逆向きの流れに非線形項の影響が増し，対流効果によってその幅が広げられるからである．この様子を示すためにRe=0.5, ε=0.5 の結果を図８-５で示す．この図からわかるようにRe数とεに依存する Ψ，ζ の展開式(8.2.2-18)，(8.2.2-19)から描けるフローパターンはRe=0.5, ε=0.5位 が限界値になる．ただし，ε＜0.5 では Re〜1.0位 までフローパターンを描くことができる．

図８-６に抗力の展開式(8.2.3-23)から求めた数値結果を示すが，結果は一様流の結果とほとんど変わらない．しかし，せん断流では僅かではあるが抗力の値が一様流より下がることは興味がある．

図８-７に揚力の展開式(8.2.3-24)から求めた ε=0.01〜1.0 までの数値結果を示す．揚力の値はRe数あるいはεの値にかかわらずすべて負になり，その絶対値はRe数あるいはεに比例して大きくなる．ただし，Re＞1 で急に C_L が大きくなるのは展開式の項数が不足しているためである．

図８-８にモーメントの展開式(8.2.3-25)から求めた ε=0.01〜1.0 までの数値結果を示す．Re数に伴う各εのC_M-曲線はRe数が大きくなるにしたがって急激

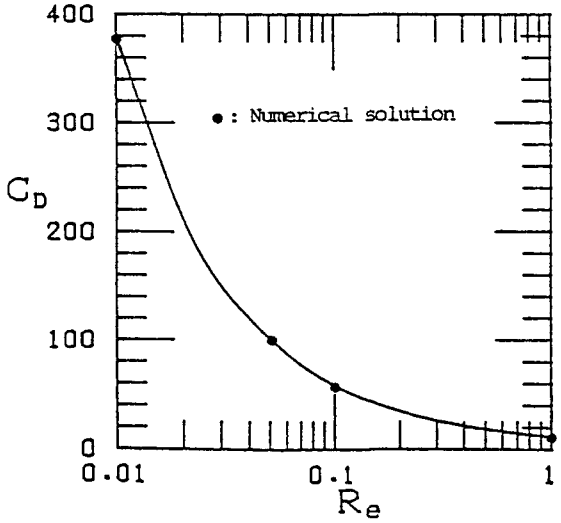


図8-6　抗力係数 C_D

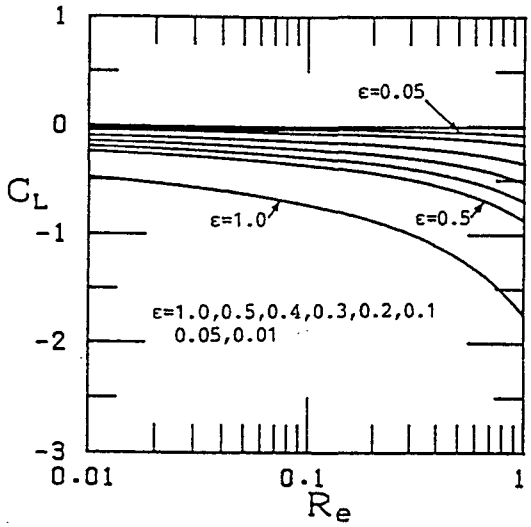


図8-7　揚力係数 C_L

に減衰する.

図8-9 に円柱表面上の 圧力係数の展開式(8.2.4-27) から求めた Re=0.1 (ε=0.01～1.0) の結果を示す. これらの圧力係数はε-効果による円柱上下の非対称な分布を良く表わしている.

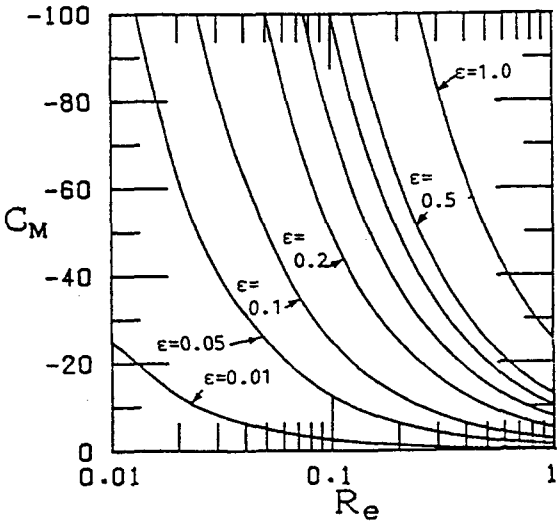


図8-8　モーメント係数 C_L

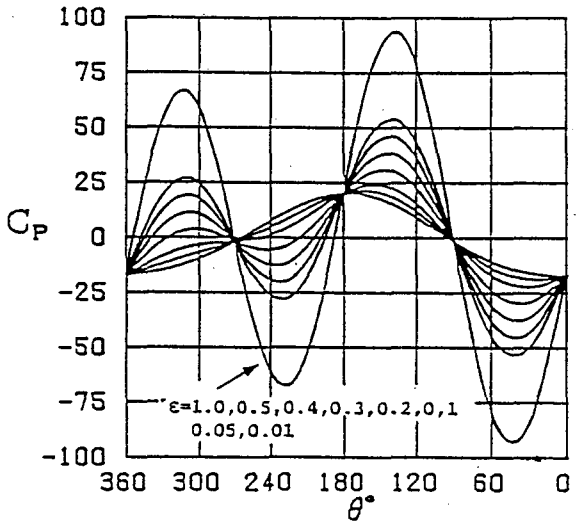


図8-8　円柱表面上の圧力係数（Re=0.1）

上で述べてきた展開式から求めたフローパターンおよび円柱が流体から受ける力（C_D，C_L，C_M）の結果は第7章で行った『数値解』の結果と定性的には一致する．例えば，$\varepsilon<0.2$ のとき求めたRe数による C_L-，C_M-曲線 の変化は『数値解』と同じ傾向を示す．特に，C_Lの値が両結果とも負になることは外側境界面

上を$\Psi=U(y+1/2\varepsilon y^2)$，そして 円柱表面上を $\Psi=0$ に固定した従来の数値計算では得られない結果である．しかし，『数値解』ではεが大きく（$\varepsilon>0.5$）なればC_Lの値はRe数にかかわらずすべて正の値になるが，ここで求めたRe数の展開式ではこのような結果は得られず，εが大きくなっても，C_L の負の値はεに比例して大きくなる．この原因の一つは展開の項数の不足から起こるものと考えられるが，Re数とεがいずれも小さいとき両結果が異なるのは『数値解』の外側境界面上の位置と境界条件が不十分であることと，円柱表面上の流れ関数に含まれる定数の決め方による．したがって，適切な外側境界条件を求め，第７章の数値解で行なった定数の決め方が適切であるかどうか調べる必要がある．適切な境界値については第９章の解析解で解決する．

８．４　結言

一様せん断流が円柱にぶつかって起こる撹乱速度場のε-項をOseen解を用いた逐次近似で求め，その速度解を非対称なOseen 方程式の解に加え，円柱上の境界条件を満足するように求めた解析結果は，Re数の小さい範囲（$Re\leqq0.5$）ではフローパターンおよび円柱が流体から受ける力の係数（C_D，C_L，C_M）に良い結果を与え，非対称解にはε－項を考慮する必要があることを示すことができた．特に，力に関しては第７章の『数値解』と同様に揚力の値が負になることを示し，従来の数値解における境界値に問題があることを指摘することができた．また，ε－項まで考慮した方程式の解に一様せん断流のポテンシャル解が含まれていることを示すことができた．

第９章　円柱を過ぎる粘性せん断流の近似的な解析解

９．１　序論

第８章で述べたように，非一様な流れ場に置かれた物体が受ける力および物体周りの流れの解析は一様流に比べてかなり複雑になるため，第７章の数値解[50]および第８章の解析解[51]で報告した結果は従来の結果とかなり異なる．例えば，従来の報告はシアパラメーター，ε，や Re数 の値に関わらず 揚力係数C_L は正になるとされてきたが，第７章で求めた C_L の数値解[50]は ε が小さいとき中間Re数の範囲では負になり，第８章の解析[51]では ε に関係なくRe数が小さいとき C_L は負の値になる．第８章で解析した式は一様せん断流が円柱にぶつかって起こす攪乱速度の二次の量を無視した線形方程式であるが，これらの解析（Re数による展開式）から求めたフローパターンと円柱が流体から受ける力（揚力係数；C_L，モーメント係数；C_M，圧力係数；C_P）は，Re＜ 0.5 では第７章で求めたNavier-Stokes方程式の数値解と定性的に一致する．しかし，数値解は円柱から十分離れた外側境界面上の境界値（一様なOseen解＋ポテンシャル流による一様せん断流の解）に少し問題があり，小さいRe数の数値結果については外側境界面上の境界値をより正確に求め，それらのもとで数値計算を行い，特性値を吟味する必要がある．

よく似た流れ（純せん断流）の厳密な解析には Bretherton[52] の純せん断流内を円柱が動く（対称軸上）場合と Robertson-Acrivos[53] の円柱が静止回転する場合などがある．彼らの解析方法は，一様流内に置かれた球を過ぎる流れで提案された Proudman-Pearson[16] の方法に基ずいている．すなわち，流れ場を二つの領域（円柱近傍；Stokes領域，円柱から十分はなれたところ；Oseen領域）に分け，任意の距離でそれぞれの解を一致さすことによって解を求める方法である．この流れにおいても一様せん断流の場合と同様に Oseen領域 では Garstang[20]のパラドックスで知られるように非対称解は求まらない．　この問

題を解消するために Bretherton は円柱から十分離れた外側の境界値に人工的な速度を加え，Robertson-Acrivos は円柱を回転させることによって非対称解を存在させている．しかし，回転効果による非対称性は考慮されているが純せん断流による攪乱の効果が取り入れられていないので，Kossack-Acrivos[54] の数値解と非常に遅い流れの場合しか一致しない．したがって，純せん断流においてもOseen領域内の非対称解を求めることは重要である．

本章では一様せん断流内に置かれた円柱を過ぎる流れをOseen方程式で解いた場合におこる" Garstang のパラドックス" を解消し，数値計算に必要な外側境界値および純せん断流の解析で必要なOseen領域の非対称解の誘導を行う．また，この解析から求めた特性値を第８章の解析解あるいは第７章の数値解と比較する．

９．２　Oseen方程式の解析

9.2.1　Oseen速度場の解析

この章の議論を分かりやすくするために，第８章の図８－１の流れの形状から求めた円柱近傍の速度場の方程式(8.2.1-1)を次に示す．

$$U\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\nabla^2 u' - \varepsilon\frac{U}{a}\left(y\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\right)$$

(9.2.1-1)

$$U\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\nabla^2 v' - \varepsilon\frac{U}{a}y\frac{\partial v'}{\partial x}$$

ただし，記号は式(8.2.1-1)と同じ意味を表わす．第８章で述べたように上式で $\varepsilon\to 0$ とすればOseenの運動方程式になり，この方程式を直接 図８-１の境界条件の基で解けば " Garstang のパラドックス" で知られるように非対称解は求まらない．第８章[50]では ε －係数をもつ項の効果を調べたがOseen方程式の非対

称解の存在については議論していない．すなわち，Garstang のパラドックスは解決されていない．本章の解析ではOseen方程式の非対称解を生みだすために，一様流の攪乱速度の一般解（Tomotika－Aoi[5]）がポテンシャル流と粘性効果をもつ流れから構成されていることに着目し，式(9.2.1-1)の解にもOseen方程式の非対称な一般解と一様せん断流のポテンシャル解が含まれていると仮定し（第８章[50]の逐次解で確認），Oseen方程式から速度場の非対称解を誘導する．
すなわち，Oseen方程式の非対称な一般解に重み（一様せん断流のポテンシャル解）を加え，半径と接線方向の速度 u_r，v_θ をそれぞれ次のように置く．

$$u_r = U\cos\theta + \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r,\theta)\,R_1^n - \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{2k}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi\cos\theta \qquad (9.2.1\text{-}2)$$

$$v_\theta = -U\sin\theta - \frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a} + \frac{U}{2}\varepsilon\left(\frac{r}{a} + \frac{a^3}{r^3}\right)\cos 2\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{2kr}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \chi\sin\theta \qquad (9.2.1\text{-}3)$$

上式の第１項は一様流，ε－係数をもつ項が一様せん断流のポテンシャル解，そして残りのϕ，χで表わした解がOseen方程式の非対称解になる．$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r,\theta)R_1^n$ は円柱上（$r=a$）で零になる任意関数であり，k は $U/2\nu$ を表わす．ϕ，χの方程式および一般解は第８章で詳細に述べたのでここでは説明を省き，ϕ，χを式(9.2.1-2)，(9.2.1-3)にそれぞれ代入し，求めた u_r，v_θ を次に示す．

$$u_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta - U\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{I}\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty} B_m^{I}\left\{\frac{2}{kr} + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_{m,n}^{I}(kr)\right.$$

$$\left.\times\cos n\theta + \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r,\theta)R_1^n - U\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{II}\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{II}\Phi_{m,n}^{II}(kr)\right.$$

$$\times \sin n\theta \qquad (9.2.1\text{-}4)$$

$$v_\theta = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta - U\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{I}\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} - \frac{U}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_m^{I}\Psi_{m,n}^{I}(kr)\times$$

$$\sin n\theta - \frac{U}{2}\varepsilon\frac{r}{a} + \frac{U}{2}\varepsilon\left(\frac{r}{a}+\frac{a^3}{r^3}\right)\cos 2\theta - U\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{II}\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}}$$

$$-\frac{U}{4}\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{II}\left\{-\frac{4m}{kr}K_m(kr)I_m(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_{m,n}^{II}(kr)\cos n\theta\right\} \qquad (9.2.1\text{-}5)$$

ただし，A_n，B_m は積分定数，肩文字のⅠ，Ⅱは対称および非対称解を意味し，対称解は Lamb[6]，Tomotika-Aoi[5] ら の解と同じになる．

上式の積分定数 A_n，B_m は円柱上の粘着条件

$$u_r = v_\theta = 0 \qquad (9.2.1\text{-}6)$$

を適用して求められるが，以下の説明では肩文字Ⅰの結果は一様流の場合と同じになるのでここでは省き，非対称な結果を表わす肩文字Ⅱの結果だけを示す．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_0^{II}}{a} - \frac{1}{ka}\sum_{m=1}^{\infty} m B_m^{II} K_m(ka) I_m(ka) = -\frac{\varepsilon}{2} \\
&\frac{A_n^{II}}{a^{n+1}} + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{II}\Phi_{m,n}^{II}(ka) = \begin{cases} 0 & (n=2) \\ 0 & (n=1,3,4,\ldots) \end{cases} \\
&\frac{A_n^{II}}{a^{n+1}} + \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty} B_m^{II}\Psi_{m,n}^{II}(ka) = \begin{cases} \varepsilon & (n=2) \\ 0 & (n=1,3,4,\ldots) \end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad (9.2.1\text{-}7)$$

ただし，$\Phi^{II}_{m,n}=(K_{m+1}+K_{m-1})(I_{m-n}-I_{m+n})+K_m(I_{m-n-1}-I_{m+n+1}$
$-I_{m+n-1}+I_{m-n+1})$

$\Psi^{II}_{m,n}=(K_{m-1}-K_{m+1})(I_{m-n}+I_{m+n})+K_m(I_{m+n+1}-I_{m-n-1}-I_{m+n-1}$
$+I_{m-n+1})$

式(9.2.1-7)の第2式と第3式から A^{II}_n を消去すれば B^{II}_m に対して次のような無限多元連立一次方程式が求まる．

$$\sum_{m=0}^{\infty} B^{II}_m \lambda^{II}_{m,n}(R_1) = \begin{cases} -2\varepsilon & (n=2) \\ 0 & (n=1,3,4,\ldots) \end{cases} \qquad (9.2.1\text{-}8)$$

ただし，$\lambda^{II}_{m,n}(R_1)=I_{m-n}(R_1)K_{m+1}(R_1)-I_{m+n}(R_1)K_{m-1}(R_1)$
$-I_{m+n+1}(R_1)K_m(R_1)+I_{m-n-1}(R_1)K_m(R_1)$

一方，式(9.2.1-7)から A^{II}_n と B^{II}_m の関係式を考慮すれば，式(9.2.1-4)，(9.2.1-5)の u_r，v_θ は次のように書くことができる．

$$u_r=u^I_r+u^{II}_r$$

$$=u^I_r+\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r,\theta)R_1^n+\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B^{II}_m\{\Phi^{II}_{m,n}(R_1)-r^{n+1}\Phi^{II}_{m,n}(R_1r)\}$$
$$\times\frac{\sin n\theta}{r^{n+1}} \qquad (9.2.1\text{-}9)$$

$$v_\theta=v^I_\theta+v^{II}_\theta$$

$$=v^I_\theta-\frac{1}{2}\varepsilon r+\frac{1}{2}\varepsilon\left(r+\frac{1}{r^3}\right)\cos 2\theta+\frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{r}+\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B^{II}_m\times$$

$$\{\Phi^{II}_{m,n}(R_1)-r^{n+1}\Psi^{II}_{m,n}(R_1r)\}\frac{\cos n\theta}{r^{n+1}}+\frac{1}{rR_1}\sum_{m=1}^{\infty}mB^{II}_m\{K_m(R_1r)I_m(R_1r)$$

$$-K_m(R_1)\,I_m(R_1)\}\qquad(9.2.1\text{-}10)$$

上式の u_r, v_θ は一様流 U と半径 a をもちいて無次元化されており，u_r^{I}, v_θ^{I} は対称解 そして u_r^{II}, v_θ^{II} は非対称解を意味する．

ここでは，小さいRe数の範囲で意味のある u_r, v_θ の解を求めるために，式(9.2.1-9), (9.2.1-10)をRe数で展開することを試みる．最初に，v_θ をRe数の４乗の次数まで展開するのに必要な B_m の展開式を式(9.2.1-8)から求めたが，B_m の展開方法については第８章[51]で述べたので，ここでは結果だけを次に示す．

$$B_1^{II}=\frac{3\varepsilon}{4}\{R_1^3+\frac{5}{72}R_1^5+O(R_1^7)\}$$

$$B_2^{II}=-\frac{\varepsilon}{4}\{R_1^3+\frac{11}{24}R_1^5+\frac{5}{1152}R_1^7+O(R_1^9)\}$$

$$B_3^{II}=-\frac{\varepsilon}{48}\{R_1^5+\frac{23}{96}R_1^7+O(R_1^9)\}$$

$$B_4^{II}=\frac{-\varepsilon}{16\cdot 96}\{R_1^7+\frac{13}{80}R_1^9+O(R_1^{11})\}\qquad(9.2.1\text{-}11)$$

$$B_5^{II}=\frac{\varepsilon}{24\cdot 3840}\{R_1^9+O(R_1^{11})\}$$

$$B_6^{II}=-\frac{\varepsilon}{36\cdot 64\cdot 3840}\{R_1^{11}+O(R_1^{13})\}$$

上式の B_m を用いて式(9.2.1-10)の v_θ をRe数の４乗の次数（$O(R_e^4)$）ま

で正確に展開したが，ここでは紙面の関係上やっかいな展開過程については説明を省き非対称解になる接線速度 v_θ^{II} を O（R_e^4）までに展開した式だけを次に示す（以下流れ関数 Ψ，渦度 ζ も同様）．

$$v_\theta^{II}=\frac{\varepsilon}{16}\Big[\Big\{-8\Big(r-\frac{1}{r}\Big)+8\Big(r-\frac{1}{r^3}\Big)\cos 2\theta\Big\}-2\Big(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4}\Big)\cos 3\theta R_1+\frac{4}{3}\Big(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^5}\Big)\cos 4\theta R_1^2+\Big\{-\Big(3s-\frac{49}{12}\Big)\Big(1-\frac{1}{r^2}\Big)\cos\theta+\Big(-\frac{1}{2}-\frac{5}{12r^2}+\frac{11}{12r^4}\Big)\cos 3\theta+\Big(\frac{1}{12}+\frac{1}{6r^2}-\frac{3}{8r^4}+\frac{1}{8r^6}\Big)\cos 5\theta\Big\}R_1^3+\Big\{\Big(\frac{13}{12}-3s\Big)\Big(r-\frac{1}{r}\Big)-\Big(\frac{s}{2}-\frac{11}{16}\Big)\Big(r-\frac{1}{r^3}\Big)\cos 2\theta+\Big(-\frac{1}{4}r+\frac{11}{72r^3}+\frac{7}{72r^5}\Big)\cos 4\theta+\Big(\frac{1}{48}r-\frac{1}{16r^3}+\frac{1}{15r^5}-\frac{1}{40r^7}\Big)\cos 6\theta\Big\}R_1^4+O(R_1^5)\Big] \qquad (9.2.1\text{-}12)$$

9.2.2 流れ関数 Ψ

接線速度 v_θ と流れ関数Ψの関係式 $v_\theta=-\partial\Psi/\partial r$ から，Ψを求めれば

$$\Psi(r,\theta)=-\int_1^r u_\theta(r,\theta)\,dr \qquad (9.2.2\text{-}13)$$

になる．式(9.2.1-12)の v_θ^{II} の展開式を式(9.2.2-13)に代入し，積分すれば

$O(R_e^4)$ までの $\Psi^{II}(r,\theta)$ の展開式が求まり，次のように書くことができる．

$$\Psi^{II}=\frac{\varepsilon}{16}\Big[\Big\{-4\left(1-r^2+2\log r\right)-4\left(r^2-2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta\Big\}+$$

$$\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{r}+\frac{2}{3r^3}\right)\cos 3\theta R_1+\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3r^2}-\frac{1}{3r^4}\right)\cos 4\theta R_1^2+$$

$$\Big\{\left(3s-\frac{49}{12}\right)\left(r-2+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{1}{2}r-\frac{7}{18}-\frac{5}{12r}+\frac{11}{36r^3}\right)$$

$$\times\cos 3\theta+\left(-\frac{1}{12}r+\frac{1}{60}+\frac{1}{6r}-\frac{1}{8r^3}+\frac{1}{40r^5}\right)\cos 5\theta\Big\}R_1^3+\Big\{\Big(\frac{3s}{2}$$

$$-\frac{13}{24}\Big)\left(r^2-1-2\log r\right)+\left(\frac{s}{4}-\frac{11}{32}\right)\left(r^2-2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+$$

$$\left(\frac{1}{8}r^2-\frac{65}{288}+\frac{11}{144r^2}+\frac{7}{288r^4}\right)\cos 4\theta+\Big(-\frac{1}{96}r^2+\frac{7}{240}$$

$$-\frac{1}{32r^2}+\frac{1}{60r^4}-\frac{1}{240r^6}\Big)\cos 6\theta\Big\}R_1^4+O\left(R_1^5\right)\Big] \qquad (9.2.2\text{-}14)$$

したがって，式(9.2.2-14)の Ψ^{II} と一様流のOseen解に対する展開式 Ψ^{I} を重ね合わせた結果が一様せん断流が円柱を過ぎる流れの流れ関数 Ψ の $O(R_e^4)$ までの展開式になる．ここでは略記した形で次のように表わす．

$$\Psi(r,\theta)=\Psi^{I}(r,\theta)+\Psi^{II}(r,\theta) \qquad (9.2.2\text{-}15)$$

ただし，$\Psi^{I}(r,\theta)$ の展開式は Aoi-Nakabayashi[44] で $O(R_e^3)$ まで示した．

一方，式(9.2.1-9)の u_r に含まれる $\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} f_n(r,\theta)R_1^n$ は

$u_r=-\partial\Psi/r\,\partial\theta$ の式に式(9.2.2-15)の Ψ の展開式を代入し，求めた u_r の展開式と式(9.2.1-9)を直接展開した u_r の展開式を等しいと置き求めた．

このようにして求めた u_r^4 の $O(Re)$ までの展開式は以下で述べる議論に直接関係しないのでここでは割愛する．

9.2.3 渦度 ζ

渦度ζの展開式は流れ関数Ψと渦度ζの関係式

$$\zeta=-\nabla^2\Psi \tag{9.2.3-16}$$

に直接式(9.2.2-15)の展開式を代入して求めた．その結果はΨと同様に次のように略記した形で示す．

$$\zeta=\zeta^{I}+\zeta^{II} \tag{9.2.3-17}$$

ただし，肩文字 I，II は速度の場合と同じ意味を表わし，ここでも 紙面の関係上 $O(R_e^4)$ までの ζ^{II}の展開式だけを次に示す．

$$\zeta^{II}=-\varepsilon\left(1-\frac{2}{r^2}\cos 2\theta\right)+\frac{\varepsilon}{16}\left[\left(\frac{12}{r^2}-\frac{16}{r^3}\right)\cos 3\theta R_1+\left(-\frac{16}{3r^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{8}{r^4}\right)\cos 4\theta R_1^2+\left\{\left(-6s+\frac{49}{6}\right)\frac{1}{r^2}\cos\theta+\left(\frac{4}{r}-\frac{7}{2r^2}-\frac{10}{3r^3}\right)\right.$$

$$\times\cos 3\theta+\left(-\frac{2}{r}+\frac{5}{12r^2}+\frac{4}{r^3}-\frac{2}{r^5}\right)\cos 5\theta\}R_1^3+\{(6s-\frac{13}{6})+(-2s+\frac{11}{4})\frac{1}{r^2}\cos 2\theta+\left(\frac{3}{2}-\frac{65}{18r^2}+\frac{11}{12r^4}\right)\cos 4\theta+$$

$$\left(-\frac{1}{3}+\frac{21}{20r^2}-\frac{1}{r^4}+\frac{1}{3r^6}\right)\cos 6\theta\}R_1^4+O(R_1^5)\ ] \qquad (9.2.3\text{-}18)$$

上式の展開式は速度と渦度の関係式から求めてもその結果は一致する.

流れ関数Ψと渦度ζの展開式の吟味は，式(9.2.1-10)の v_θ の無限級数を十分にとり式(9.2.2-13)から求めた流線，そして $\nabla^2\Psi=-\zeta$ の関係式から数値計算で求めたζの等渦度線が，展開式から求めた流線および等渦度線と一致するかどうかを調べて確認した.

9．3　抗力係数，揚力係数，モーメント係数，圧力係数の展開式

一般化したブラジウスの式から求めた円柱表面上の抗力係数C_D（$D/\rho U^2 a$）揚力係数C_L（$L/\rho U^2 a$），モーメント係数C_M（$M/1/2\rho U^2 a^2$）の式は第８章[51]で述べたので，ここでは式(9.2.3-18)の渦度ζを用いてそれらの式から求めた展開式の結果を示す.

$$C_D^{II}=0 \qquad (9.3\text{-}19)$$

$$C_L^{II}=-\varepsilon\pi\left(\frac{9}{16}s-\frac{147}{192}\right)R_1^2+\cdots \qquad (9.3\text{-}20)$$

$$C_M^{II}=-\varepsilon\pi\left\{\frac{2}{R_1}+\left(-\frac{3s}{4}+\frac{13}{48}\right)R_1^3+\cdots\right\} \qquad (9.3\text{-}21)$$

$$C_P^{II}=-\varepsilon\sin 2\theta\frac{1}{R_1}+\frac{\varepsilon}{16}[4\sin 3\theta-\frac{8}{3}\sin 4\theta R_1+\{(6s-\frac{49}{6})\sin\theta+\frac{13}{6}\sin 3\theta-\frac{1}{12}\sin 5\theta\}R_1^2+\{(S-\frac{11}{8})\sin 2\theta+\frac{4}{9}\sin 4\theta-\frac{1}{120}\sin 6\theta\}R_1^3+O(R_1^4)]+\frac{\varepsilon}{16}[(\frac{10}{3}r_\infty-\frac{22}{3}+\frac{4}{r_\infty}-8\log r_\infty+8r_\infty\log r_\infty)R_1+\cdots]+\frac{\varepsilon^2}{16}[(-8+\frac{12}{r_\infty^2}-\frac{4}{r_\infty^4}+$$

$$+8\log r_\infty)+\cdots] \qquad (9.3\text{-}22)$$

ただし，肩文字IIは非対称解から求めた結果，そして r_∞ は円柱から十分離れた距離を意味する．一様せん断流のポテンシャル解に支配される C_M^{II}，C_P^{II} の展開式の第一項は第８章の展開式[51]と一致するが，Oseen方程式の非対称性から求めた C_L^{II} の値は第８章の結果と異なり，ε－効果よりかなり小さい値になる．しかし，その結果は第８章の結果と同様に Re数 や ε にかかわらず負になる．

9．4　非対称なOseen解による逐次解

9.4.1　渦度ζと流れ関数Ψ

式(9.2.1-1)から渦度ζの式を求めれば

$$\left(\nabla^2 - 2R_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta = \varepsilon 2R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{9.4.1-23}$$

になる．ここでは §9.2で求めた非対称解（式(9.2.3-18)）を用いて，式(9.4.1-23)のε－項に対する逐次近似を一様流の問題で行った非線形項の逐次近似[44]と同じ方法で行った．ここでは概略だけを述べる．式(9.2.3-17)の ζ を用いて式(9.4.1-23)の ε－項 に逐次近似を行う場合，ζ^{I} のε－項への逐次近似の結果は第８章[51]で示したので，ここでは ζ^{II} で行なった逐次近似の結果 $\zeta^{II\,s}$ だけを次に示す．

$$\begin{aligned}\zeta^{II\,s} = \varepsilon\,[\,&\left(-\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)R_1 + \left\{\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}r - r\log r\right)\sin\theta\right.\\ &+\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8}r + \frac{3}{8r}\right)\sin 3\theta + \left(\frac{1}{24}r + \frac{3}{40} - \frac{1}{8r}\right)\sin 5\theta\Big\}R_1^2 +\\ &\Big\{\left(-\frac{7}{32}r^2 + \frac{3}{8}r - \frac{13}{48} - \frac{5}{8}r^2\log r\right)\sin 2\theta + \left(-\frac{1}{12}r^2 - \frac{3}{40}r\right.\\ &\left.+\frac{5}{24} - \frac{1}{6r^2}\right)\sin 4\theta + \left(\frac{1}{192}r^2 + \frac{3}{280}r - \frac{7}{144} + \frac{1}{16r^2}\right)\times\\ &\sin 6\theta\Big\}R_1^3 + O(R_1^4)\,]\end{aligned} \tag{9.4.1-24}$$

上式の展開式は $O(R_e^4)$ まで求めたが，ここでは紙面の関係上から $O(R_e^3)$ までを示した．

一方，ζ^{II^s} に対する流れ関数 Ψ^{II^s} は $\nabla^2\Psi=-\zeta$ の関係式に式(9.4.1-24)の ζ^{II^s} を代入し，第8章[51]と同様にして Ψ^{II^s} を求めた．その結果は

$$\Psi^{II^s}=\varepsilon\,[\,\{(-\frac{1}{16}r^2+\frac{1}{16r^2}+\frac{1}{4}r^2\log r)\sin 2\theta+(-\frac{1}{64}r^4$$

$$+\frac{1}{48}r^2-\frac{1}{192r^4})\sin 4\theta\}R_1+\{(-\frac{1}{32}r^3-\frac{1}{16}r+\frac{7}{32r}$$

$$-\frac{1}{8r^2}+\frac{1}{8}r^3\log r)\sin\theta+(-\frac{1}{20}r^2+\frac{3}{64}r+\frac{1}{320r^3}+$$

$$\frac{1}{16}r^3\log r)\sin 3\theta+(-\frac{49}{33600}r^5+\frac{1}{384}r^3+\frac{1}{280}r^2$$

$$-\frac{1}{192}r+\frac{11}{22400r^5})\sin 5\theta\}R_1^2+\{(-\frac{19}{1152}r^4-\frac{3}{40}r^3$$

$$+\frac{17}{192}r^2+\frac{17}{5760r^2}+\frac{13}{192}r^2\log r+\frac{5}{96}r^4\log r)\sin 2\theta+$$

$$(\frac{7}{26880}r^4-\frac{3}{280}r^3+\frac{5}{288}r^2-\frac{1}{96}+\frac{283}{80640r^4}+\frac{1}{96}r^4$$

$$\times\log r)\sin 4\theta+(-\frac{179}{483840}r^6+\frac{1}{3840}r^4+\frac{1}{2520}r^3-$$

$$\frac{7}{4608}r^2+\frac{1}{576}-\frac{61}{120960r^6})\sin 6\theta\}R_1^3+O(R_1^4)]$$

(9.4.1-25)

になる.

式(9.4.1-23)のζおよびΨの逐次近似解の結果は具体的に示すことは紙面の関係上から割愛し，略記した形で次のように表わす.

$$\zeta=\zeta^{I}+\zeta^{II}+\zeta^{I^s}+\zeta^{II^s} \tag{9.4.1-26}$$

$$\Psi=\Psi^{I}+\Psi^{II}+\Psi^{I^s}+\Psi^{II^s} \tag{9.4.1-27}$$

ただし，肩文字I，I^s は第8章[44],[51]で示したOseen解と逐次解の展開式である.

9.4.2 抗力係数，揚力係数，モーメント係数

式(9.4.1-26)の渦度ζを使い，§9.3 で述べた方法と同様にして求めた C_D，C_L，C_M の展開式を次に示す.

$$C_D=C_D^{I}+\varepsilon\pi\{-\frac{11}{16}R_1-(\frac{3S}{32}+\frac{23}{192})R_1^3+\ldots\} \tag{9.4.2-28}$$

$$C_L=C_L^{II}+C_L^{I^s} \tag{9.4.2-29}$$

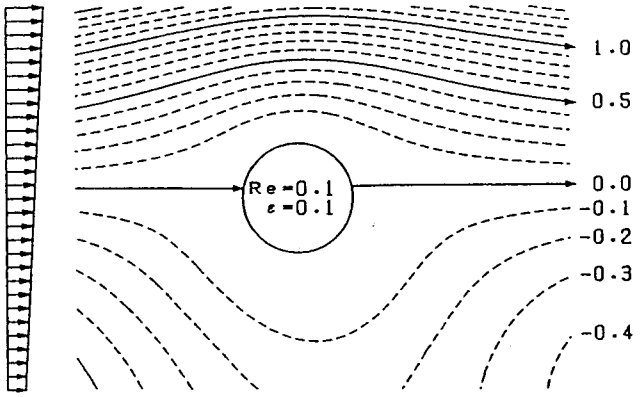
$$C_M=C_M^{II}+C_M^{I^s}-\varepsilon\pi\frac{2}{R_1} \tag{9.4.2-30}$$

ただし，C_L^{II}，C_M^{II} は式(9.3-20),(9.3-21)，そして $C_L^{I^s}$，$C_M^{I^s}$ は第8章[51]で示

したのでここでは記することを省く．式(9.4.2-29)の C_L^{II} の値は $C_L^{I\,s}$ に比べてかなり小さい値になる．したがって，この報告で求めた非対称な Oseen解は揚力C_L に関してはほとんど影響しない．

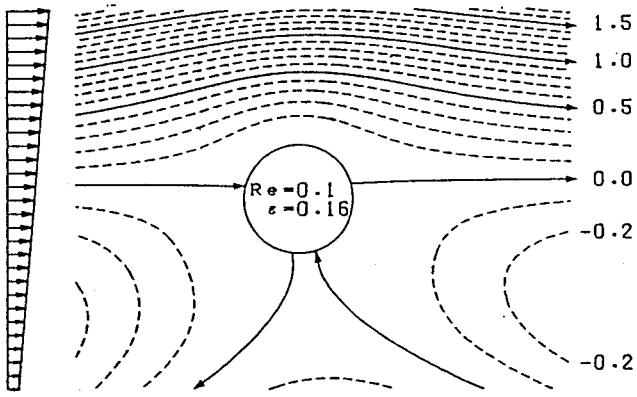
9．5　展開式の数値結果と考察

式(9.2.2-15)の流れ関数Ψと式(9.2.3-17)の渦度ζの展開式を使い，Re=0.1 の場合の ε=0.1, 0.16, 0.5 について数値計算を行い，図9-1(a),(b),(c) そして 図9-2(a),(b),(c) にそれぞれ流線と等渦度線を示す．これらの図は ε による円柱周りの流れの変化を良くあらわす．ε=0.1 の場合には円柱上下でゆるやかな非対称流れになり，円柱上の前後の淀み点の位置（Ψ=0）が一様流より上側にずれ，そのずれは後方がより大きくなる．したがって，対称軸と一致する一様流の Ψ＝0 の流線が円柱前後で非常にゆるやかな曲線になる．一方，ζ＝0 の等渦度線は円柱前後の淀み点から下側に湾曲し，円のようになって閉じる．ε～0.16 位になると上下の相対的な流れの影響が強くなり，円柱上に４つの淀み点（Ψ=0 の分岐点）をもつ流れになり，ε=0.5 では主流の他に円柱前後に一定の幅に成長した逆向きの流れを形成する．この流れに相応する渦度分布は 図9-2(c) からわかるように円柱上の両側に閉じた ζ=0 の円弧を描く．これらのフローパターンを求めた展開式（(9.2.2-15),(9.2.3-17)）は Re≦0.2 では ε にかかわらず第８章の逐次解[51]と非常に良く一致する．しかし，Re～0.5 位になれば ε の小さい値（ε≦0.1）では良く一致するが，ε が大きくなれば円柱前後に形成される逆向きの流れが異なり始める．この違いは非線形項以外にこの解析で無視した方程式(9.2.1-1)に含まれるε－項の効果が影響しているものと思われる．図9-3は４つの Ψ=0 を形成し，フローパターンを変える ε の臨界値を Re= 0.01,0.1,0.5 で調べた結果である．ただし，θ方向の順にθ_1，θ_2，θ_3，θ_4 とする．図における各Re数の ε の臨界値はそれぞれ 0.11, 0.16, 0.23 になる．



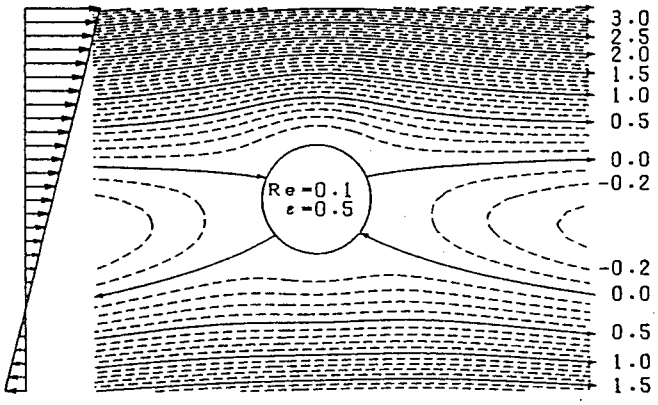
（a）流線；

Re=0.1, ε=0.1



（b）流線；

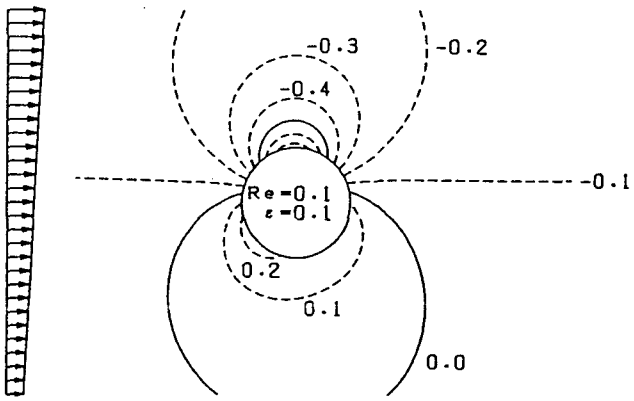
Re=0.1, ε=0.16



（c）流線；

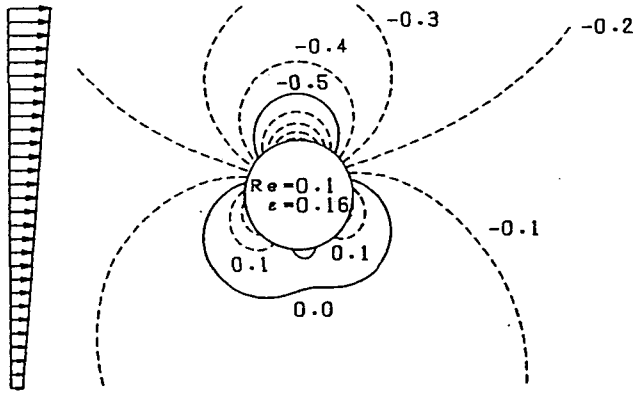
Re=0.1, ε=0.5

図9-1　円柱周りの流線



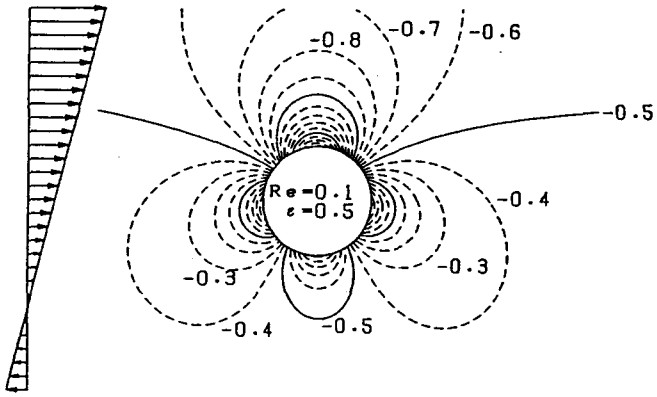
（a）等渦度線；

Re=0.1, ε=0.1



（b）等渦度線；

Re=0.1, ε=0.16



（c）等渦度線；

Re=0.1, ε=0.5

図9-2　円柱周りの等渦度線

式(9.2.3-17)の渦度ζを使い，§9.3で求めた揚力係数C_L，モーメント係数C_M，圧力係数C_P の展開式を数値計算し，第８章[51] の数値と比較すれば展開式の第一項が一様せん断流のポテンシャル解で支配されるモーメント，圧力分布などの結果は本質的にはあまりかわらないが，Oseen方程式の非対称性の効果から求まる揚力は第８章の結果に比べてかなり小さい値になる．しかし，その値は第８章の場合と同様に負の値になる．

次に，Oseen方程式の非対称解を用い，第６章[44]の方法でε－項への逐次近似を行って求めた式(9.4.1-27)の流れ関数Ψの展開式はRe<0.3ではεにかかわらず式(9.2.2-15)で求めたフローパターンと非常に良く一致するが，Re=0.5，ε=0.5 では，図９-４(a),(b) で示すように後方の流れがかなり異なる．これはε－項の影響を入れることによって後方の対流の強さが増したためと思われる．一方，式(9.4.1-26)のζの展開式を用いて §9.4.2 の流体力 C_D，C_L，C_M の展開式を使い数値を求めたが，結果は 第８章[51]の結果とほとんど変わらないのでここでは図を示すことを省く．しかし，僅かではあるが Re数に伴う C_D－曲線がOseen解の非対称性から一様流より下降したことは興味があり，この傾向は

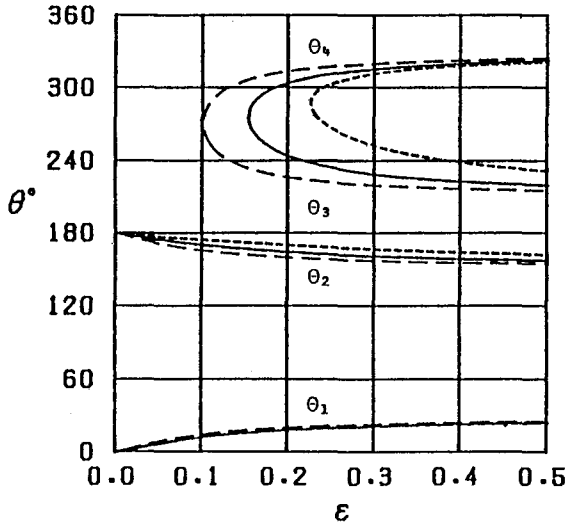
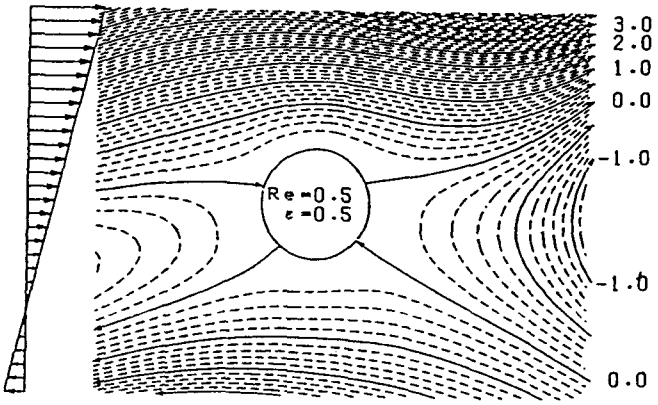
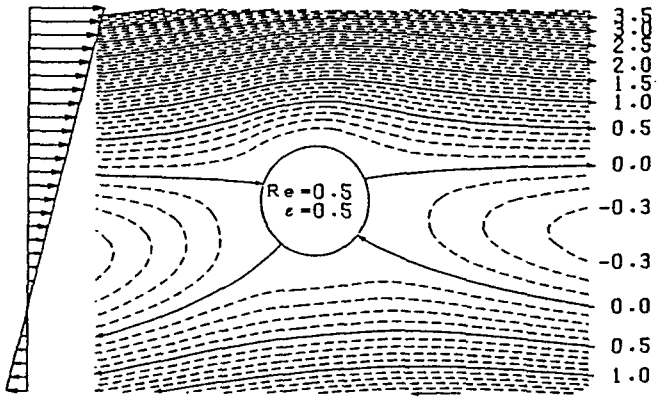


図９-３　εによる円柱上の淀み点（Ψ=0）の変化

（Re=0.01；　-----，Re=0.1；　——，Re=0.5；　-----）



（ａ）式(9.4.1-27)
から求めた流線；
Re=0.5, ε=0.5



（ｂ）式(9.2.2-15)
から求めた流線；
Re=0.5, ε=0.5

図９-４　円柱周りの流線

第７章[48]の数値結果と一致する．

Ｒe数とεに依存する§9.3，9.4 の展開式の使用範囲は Re<1.0，ε≦1.0 であるが，§9.2で求めた式(9.2.1-10)の v_θ を式(9.2.2-13)の v_θ に代入し，無限級数の項を十分とって積分すれば中間Ｒe数の範囲まで定性的にフローパターンを描くことが出来る．また，これらの解は円柱から十分離れた所ではこの範囲のＲe数でも十分意味をもつので，Ｎavier-Ｓtokes方程式の数値計算を行うときに十分な外側の境界値としてもちいることできる．また，これらのフローパターンを初期値とし，数値計算すれば早い収束で数値計算が可能である．

9．6　結　言

一様せん断流のポテンシャル解をOseen方程式の非対称解に加え，それらの効果によってOseen方程式の非対称解を誘導し，”Garstangのパラドックス”を解消した．本章の解析から得た主な結果は次のようにまとめられる．．

（1）Re≦0.2 の範囲では，§9.2.2 の Ψ そして §9.2.3 の ζ の展開式から求めたフローパターンは，第8章の解析[51]およびNavier－Stokes方程式の数値解と ε によらず非常に良く一致する．一方，式(9.2.1-10)の接線速度を式(9.3-20)に代入し，無限級数の項を十分とれば中間Re数の範囲まで定性的なフローパターンを描くことができる．この結果は円柱から十分は離れた所では定量的にも満足すると考えられるので，この値は数値計算の外側境界値に用いることができ，内部値にも初期値として用いればより早い収束で数値計算が可能である．

（2）一様せん断流のポテンシャル解を含む流れ場の関数（u，v，Ψ，ζ）と流体力（C_M, C_P）に対する展開式の第1項が第8章[51]で述べた結果と一致する．

（3）§9.3 で求めた揚力，すなわち，Oseen方程式の非対称解から求めた揚力は，逐次で求めた第8章[51]の結果に比べてかなり小さい値になるが，その値は ε にかかわらず負の値になる．

（4）一様流では対称軸と一致する Ψ=0 の流線は ε が大きくなれば，第7章の数値計算[50]ではRe数にかかわらず r_∞～21，$\theta=\pi$ の位置では Ψ～C（定数）の値を持ったが，この解析結果でもその位置ではΨの値が存在する．したがって，この範囲の領域で数値計算を行なうには，円柱上あるいは外側境界面上で 定数Cを考慮する必要性を示唆することが出来た．

（5）この章の解析によって一様せん断流に対するOseen方程式の”Garstangのパラドックス”が解消され，小さいRe数の範囲で十分意味のあるOseen方程式の非対称解が求められた．

第１０章　総括

基礎的な研究として古くから関心が持たれて来た物体を過ぎる粘性流の問題の中で，取扱の困難さから残されてきた課題をこの論文では取り上げ解明することを試みて来た．本論文は，第２章から第６章で円柱，球を過ぎる一様流の解析解と数値解，第７章から第９章で円柱を過ぎる一様せん断流の解析解と数値解を行なった．各章で研究した成果を本章で総括する．

第２章ではOseen方程式を用いて一様流内に置かれた球，円柱を過ぎる無限開放の流れの問題を解析的に議論した．最初に，球，円柱の複雑な解析解を直接数値計算する困難さを避けるために解析解をRe数で展開し，球の場合には流れ関数Ψ，抗力係数C_D，圧力係数$P_1(1,\theta)$の解をそれぞれ $O(Re^5)$，$O(Re^5)$，$O(Re^4)$まで，そして 円柱の場合には 流れ関数Ψ，渦度ζ，抗力係数C_D，圧力係数$P_1(1,\theta)$の解をそれぞれ $O(Re^5)$まで展開した．これらの展開式は，$Re<1$で十分定量的な結果になる．次に，Oseen方程式の解析解を直接数値計算し，中間Re数の範囲で球および円柱周りのフローパターン，そして 球，円柱が流体から受ける力を詳細に調べた．その結果，Oseen方程式の性質からほとんど不可能と思われていた中間Re数でも，特性値に対する定性的な議論が可能であることを示すことができた．実際に，任意の中間Re数で求めたフローパターンを第３章と第４章の数値計算に初期値として利用し，早い収束で計算を行なうことができた．一方，流れ関数Ψ と 渦度ζ の展開式は第６章から第９章までの逐次近似解の基礎に利用し，それぞれの流れの特性値についての展開式の精度を高めた．

第３章と第４章では，一様流内に置かれた球あるいは円柱を過ぎる流れを数値計算する場合，数値精度に大きく依存する外側境界値の問題を主に議論した．その結果従来よりすぐれた境界値を見いだし，それらの境界値を用いて，低Re数から中間Re数（$Re=0.01\sim120$）まで広い範囲のRe数で球，円柱周りのフローパターン，そして球，円柱が流体から受ける力を詳細に求めた．また，外側境界値に複雑なOseen解の使用を避けるときは，円柱の場合には今井の漸近解，そして

球の場合には単一のOseen源を使用することを提案した．

第５章では，第２章のOseen解と第３章，第４章で求めた数値解の比較を行い，Oseen方程式の適用領域を明確にし，中間Re数領域でもOseen方程式で定性的な議論が可能であることを示した．一方，この章で行なったOseen解からの数値計算による逐次近似の試みも，従来，報告のなかった事柄であり，逐次近似の成果についても興味ある結果を報告することができた．例えば，Re≦20 ではOseen解を基にした数値による逐次近似は有効で，Navier-Stokes方程式を直接数値解で求めるより早く収束する．しかし，Re数がより大きくなればOseen解で非線形項を固定すれば，数値が発散し求まらなくなる．

第６章のOseen解を基にした非線形項への逐次近似ではNavier-Stokes方程式の逐次近似解法の一つを与え，Proudman-Pearson[16]のOseen領域の展開に一つの展望を示した．特に，円柱の場合，彼らの方法で非線形項の効果を展開式に取り入れるまで展開式を拡張することは実際には不可能になることを示唆できた．また，この章で行なったOseen解を用いた非線形項への逐次効果は，円柱周りのフローパターンおよび抗力係数の値がNavier-Stokes方程式の数値解に近ずいたことで，逐次近似解の有効性を示すことができた．

第７章の一様せん断流の流れで行なった数値計算，すなわち，流れ場で圧力が一価になる条件を境界条件に反映させる方法では，従来の数値計算の結果とかなり違った特性値の結果を与えた．特に，シアパラメーター，ε， が小さいとき円柱に働く 揚力係数C_L の値が負になり，逆マグナス効果になることはこれまでに報告されていない興味ある結果である．

第８章の一様せん断流れで，速度場に含まれる ε－係数の項 をOseen解で逐次近似し，調べた結果では，小さいRe数の範囲ではあるが第７章で述べた数値計算による特性値の結果を十分裏付けている．しかし，揚力係数に関しては ε にかかわらずこの解析では負の値になり，小さいRe数のときの第７章の数値解と異なる．この違いは数値計算の精度（特に，低Re数のとき）によるのか，あるいは解析近似によるのかはこの論文では結論できない．この解決にはより精度の高い数値解，あるいは解析解が必要である．

第９章の解析成果は，第８章のε-係数をもつ項の働きにポテンシアル流の一様せん断流の解が含まれていることを考慮し，それらの解を Ｏseen解 に加えてＯseen方程式の非対称な解を誘導し”Ｇarstang[20]のパラドックス”を解消できたことである．一方，この解析解は一様せん断流のポテンシャル解にＯseen方程式の攪乱速度を加えたものであるから，円柱から十分離れた所ではかなり厳密な解になるものと思われる．事実，この解析の流れ関数Ψを数値計算すれば 中間Ｒe数領域でも円柱周りの定性的な流れを描くことができる．したがって，第７章の数値計算で問題になる外側境界値もこの解析で解決することができた．

第７章から第９章で行なってきた一様せん断流の解析あるいは数値解から得た逆マグナス効果の結果は，血液中の赤血球が適当なＲe数範囲では中心軸ではなく少し中心から離れた所に集まるという実験結果に定性的な解釈を与えているものと思われる．

最後に，第７章で述べた流れ場で圧力が一価になる条件を物体表面上の流れ関数に反映さす方法の吟味は，工学的に興味のある平行平板内に置かれた正方形角柱を過ぎる流れに[48]適用して調べたが，物体周りのフローパターンおよび物体が流体から受ける力に良い結果を与えることができた．

文 献

(1) Stokes, G. G., Camb. Phil. Tras. 9(1851)8.

(2) Oseen, C. W., Ark. Math. Ast. Fys., 6(1910)29.

(3) Filon, L. N. G., Proc. Roy. Soc. London, A113(1927)7.

(4) Goldstein, S., Proc. Roy. Soc. Ser. A123, 225-235(1929)156.

(5) Tomotika, S. & Aoi, T., Q. J. Mech. Appl. Math. 3-2(1950)140.

(6) Lamb, H., Hydorodynamics, 6th ed. Cambridge Univ. Press., London and New York. (1932)13, 164.

(7) Tomotika, S. & Miyagi, T., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 30(1962)1.

(8) Pearcey, T & McHugh, B., Phil. Mag. 7-46(1955)783.

(9) Yosinobu, H. Read at the 11th Annual Meeting of the Physical Society of Japan(Sendai, July 1956). (Unpublished)

(10) Thom, A., Proc. R. Soc. Ser. A 141(1933)651.

(11) Jenson, V. G., Proc. Roy. Soc. Ser, A249, 346-366(1959)160.

(12) Dennis, S. C. R. & Chang, G, Z., J. Fluid Mech. 42-3(1970)471.

(13) Fornberg, B., J. Fluid Mech. 98-4(1980)819.

(14) Whitehead, A. N. Quart. J. Math. 23(1889)143.

(15) Imai, I., Proc. R. Soc. Ser. A 208(1951)487.

(16) Proudman, I. & Pearson, J. R. A., J. Fluid Mech. 2-3(1956)237.

(17) 田村, ほか２名, 日本機械学会論文集 B 46-404 (1980) 555.

(18) 川口, 東京大学理工学部研究所報告 第６巻第２号(1952)85.

(19) Jordan, S. K. & Fromm, J. E., Phys. Fluid 15-6(1972)972.

(20) Garstang, T. E., Proc. Roy. Soc. 759(1936)26.

(21) Van Dyke, M., J. Fluid Mech. 44-2(1970)365.

(22) Shanks, D., F. Math. & Phys. 34(1955)1-42.

(23) Chester, W. & Breach, R.D., J. Fluid Mech. 4-37(1969)751.

(24) Tomotika, s. & Aoi, T., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 24(1950)9.

(25) Taneda, S., Rep. Res. Inst. App. Mech. 4-16(1956)99.

(26) Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan. 11-3(1956)302.

(27) Le Clair, B.P., Hamielec, A.E. & Pruppacher, H, R., J. Atomos. Sci., 27(1970)308.

(28) Dennis, S.C.R. & Walker, J.D.A., J. Fluid Mech. 48-4(1971)771.

(29) Pruppacher, H.R., Le Clair, B.P. & Hamielec, A.E. J. Fluid Mech. 44-4(1970)781.

(30) Lin, C.L. & Lee, S.C., Comput. Fluid, 1-3(1973)235.

(31) 中林, ほか1名, 日本機械学会論文集 B 51-467(1985)2351.

(32) Wieselsberger, G., Phys. Z. 22(1921)321.

(33) Kawaguti, M., J. Phys. Soc. Jpn. 8-6(1953)747.

(34) Apelt, C., J., Aeronaut. Res. Council, Rep. Mem. No. 3175(1961).

(35) Keller, H.B. & Takami, H., (Greenspan, D. 偏), Numerical Studies of Steady Viscous Flow about Cylinder (1966)115.

(36) Takami, H. & Keller, H.B., Phys. Fluids Suppl. II(1969)51.

(37) Payne, R.B., J. Fluid Mech. 4-81(1958)81.

(38) Kawaguti, M. & Jain, P., J. Phys. Soc. Japan 21(1966)2055.

(39) Tritton, D.J., J. Fluid Mech. 6-4(1959)547.

(40) Takaisi, Y. Phys. Fluids Suppl. II(1969)86.

(41) Van Dyke, M.D., J. Fluid Mech. 44-2(1970)365.

(42) 中林, ほか2名, 日本機械学会論文集 B 51-472(1985)4208.

(43) 中林, 青井, ながれ 8(1989)48.

(44) Aoi, T. & Nakabayashi, K., J. Phys. Soc. Japan. 53-7 (1984) 2242.

(45) Kaplun, S. & Lagerstrom, P. A., J. Math. Mech. 6 (1957) 585.

(46) Van Dyke, M. D., Perturbation Method in Fluid Mechanics (Academic Press New York, 1964) Chap. 8.

(47) Matida, Y., Kuwahara, K. & Takami, H., J. Phys. Soc. Japan 385 (1975) 1522.

(48) 中林, ほか１名, 日本機械学会論文集 B 53-485 (1987) 49.

(49) 大宮司, 日本機械学会論文集 B 44-378 (1978) 555.

(50) 中林, ほか２名, 日本機械学会論文集 B 53-493 (1987) 2756.

(51) 中林, ほか２名, 日本機械学会論文集 B 54-507 (1988) 3069.

(52) Bretherton, F. P., J. Fluid Mech. 12 (1962) 591.

(53) Robertson, C. R. & Acrivos, A., J. Fluid Mech. 40-4 (1970) 685.

(54) Kossack C. A., & Acrivos, A., J. Fluid Mech. 66-2 (1974) 353.

関連発表論文

（１）　T. Aoi and K. Nakabayashi

「Successive Approximations for the Navier-Stokes Equations for Flows Past a Circular Cylinder and a Sphere」

J. Phys. Soc. Jpn., 53-7 (1984) P. 2242-2252.

（２）　中林，三宅，青井

「物体のまわりの低レイノルズ数流れの数値解析」

日本機械学会論文集　B　51-467 (1985) P. 2351-2357.

（３）　中林，三宅，青井

「球のまわりの遅い流れの数値解析」

日本機械学会論文集　B　51-472 (1985) P. 4208-4213.

（４）　中林，青井

「平行壁内の角柱まわりの流れの数値解析」

日本機械学会論文集　B　53-485 (1987) P. 49-54.

（５）　中林，吉田，青井

「円柱まわりの粘性せん断流の数値解析」

日本機械学会論文集　B　53-493 (1987) P. 2756-2761.

（６）　中林，青井，吉田

「低レイノルズ数で円柱を過ぎるせん断流の解析」

日本機械学会論文集　B　54-507 (1988) P. 3069-3075.

（７）　中林，青井

「球を過ぎる粘性流の解析解と数値解の比較」

ながれ　8 (1989) P. 48-55.

（８）　中林，青井

「粘性せん断流に対する近似的な解析解」

日本機械学会論文集に投稿中（論文No. 89-0609A）

謝　辞

本研究は著者が大阪工業大学の大学院生から博士過程の９年間をへて昭和５７年まで，大阪工業大学一般教育科の 青井 忠正教授 の基で研究してきた課題を，昭和５８年から 大阪大学工学部 三宅 裕教授 の御指導を仰ぎながらさらに研究を進め，論文発表を行いそれらの結果をまとめたものであります．
このような研究の機会を与えて頂き，寛容に学位論文にまとまるまでに多くの御指導御鞭撻を賜りました 三宅 裕教授 に，心から深く感謝の意を表わします．
また，この分野の研究に導きと，長きにわたり指導していただいた 青井 忠正教授 に深く感謝いたします．

本論文をまとめるにあたり，大阪大学工学部の 中村 喜代次教授，辻 裕教授より校閲と有益なご意見を賜りましたことを感謝いたします．

本論文の遂行の際には，終始懇切な御指導，御教示を頂いた大阪工業大学一般教育科 尾崎 一彦教授，並びに，計算などに御尽力頂いた 吉田 直行氏 に深謝の意を表します．