

Title	弾性表面波導波路の不連続部に関する研究
Author(s)	河崎, 善一郎
Citation	大阪大学, 1978, 博士論文
Version Type	VoR
URL	<a href="https://hdl.handle.net/11094/2184">https://hdl.handle.net/11094/2184</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

弾性表面波導波路の不連続部  
に関する研究

河崎善一郎

1977年12月

# 内 容 梗 概

本論文は、著者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）在学中に行なった弾性表面波導波路の不連続部に関する研究の成果をまとめたものであり、つぎの7章からなっている。

第1章は序論で、種々のマイクロ波回路素子小型化の機運と関連して、弾性表面波に関する研究が、通信工学の研究分野において活発に行なわれるようになった経緯を述べるとともに、本研究がこの分野において占める地位を明らかにする。

第2章では、6 mm クラス圧電性媒質における  $SH$  波の積分表示を導出する。まず半無限圧電性媒質中を境界面に沿って伝搬する  $SH$  タイプの表面波（いわゆる Bleustein-Gulyaev 波）及び Bulk-Shear 波について述べる。次に上記の媒質における  $SH$  タイプの波動に対するグリーン関数を、Fourier 変換を用いて求める。最後に求めたグリーン関数を用いて  $SH$  波の積分表示を導出する。尙本章で導出する積分表示を用いると、散乱 Bulk-Shear 波の評価も容易に出来、従って弾性波導波路の不連続問題の解析には、通常用いられている変分法・摂動法に比し、本章で導出する表示がより適しているものと考えることが出来る。

第3章では、磁性媒質における  $SH$  波の積分表示を導出する。積分表示導出のための手続きは、第2章のそれと類似しているが、磁気弾性波が有している非可逆性のため、通常の意味での Reciprocity が成立しない。従って考えている系との間で Reciprocity が成立する系を新たに導入する必要がある。両方の系の間で成立する相反関係を明らかにした上で求める積分表示を導出する。

第4章では、圧電性媒質の不連続部における、Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱の問題を、第2章で導出した積分表示を用いて近似的に解析する。不連続部の具体的な形状としては、ゆるやかなコーナ及び波長に比してあまり大きくないステップを仮定し、比較的簡単な形で、反射波、透過波及び散乱される Bulk-Shear 波を求める。更に数値計算例をあげて、

コーナ角度あるいはステップの大きさの入射 Bleustein-Gulyaev 波に及ぼす影響及び圧電性媒質の影響を、定量的に検討するとともに、本章で求める近似解の有効な範囲についても検討する。

第5章では、磁性媒質の不連続部における、 $SH$ タイプ磁気弾性表面波の反射、透過及び散乱の問題を、第3章で導出した積分表示を用いて近似的に解析する。不連続部の具体的な形状としては、前章同様コーナ及びステップを仮定し、比較的簡単な形で反射波、透過波及び散乱される Bulk-Shear波を求める。更に数値計算例をあげて前章と同様な考察を行ないあわせて、磁気弾性波が有している非可逆性の影響についても検討する。

第6章では、圧電性媒質の凹部による、Bleustein-Gulyaev波の反射、透過及び散乱の問題を、積分表示に境界条件を適用して導出される積分方程式に、モーメント法を適用して数值的に解析する。積分方程式法は、通常電磁波の散乱問題等の解析に用いられているが、本章で示す数値計算例より、弾性波導波路の不連続問題の解析にも有効であることが判る。

第7章は結論であって、本研究の成果を総括して述べている。

以上の各章を構成する研究内容は、すべて電子通信学会論文誌、電子通信学会マイクロ波研究会、同学会超音波研究会、同学会全国大会、電気学会電磁界理論研究会、Journal of Applied Physics, Applied Physics Letters 等においてすでに発表されたものである。

# 目 次

第 1 章	序 論	1
第 2 章	圧電性媒質における $SH$ 波の積分表示	5
2.1	緒 言	5
2.2	Bleustein-Gulyaev 波及び Bulk-shear 波	6
2.3	半無限圧電性媒質におけるグリーン関数	10
2.4	$SH$ 波の積分表示	14
2.5	結 言	17
第 3 章	磁性媒質における $SH$ 波の積分表示	19
3.1	緒 言	19
3.2	磁気弾性表面波	19
3.3	半無限磁性媒質におけるグリーン関数	23
3.4	相反定理	26
3.5	$SH$ 波の積分表示	27
3.6	結 言	30
第 4 章	圧電性媒質不連続部の解析	31
4.1	緒 言	31
4.2	コーナにおける Bleustein-Gulyaev 波の透過及 び散乱	31
4.3	ステップ状不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射, 透過及び散乱	39
4.4	数値計算例及び検討	44
4.4.1	コーナの場合	46
4.4.2	ステップの場合	48
4.5	結 言	49

第 5 章	磁性媒質不連続部の解析	5 1
5.1	緒 言	5 1
5.2	コーナにおける磁気弾性表面波の透過及び散乱	5 1
5.2.1	入射波が前進波の場合	5 1
5.2.2	入射波が後退波の場合	5 5
5.3	ステップ状不連続部における磁気弾性表面波の反射, 透過及び散乱	5 7
5.4	数値計算例及び検討	5 8
5.5	結 言	6 3
付 録	5 - I	6 4
第 6 章	導波路凹部による Bleustein-Gulyaev 波の反射, 透過及び散乱	6 7
6.1	緒 言	6 7
6.2	積分方程式の導出	6 8
6.3	反射波, 透過波及び散乱 Bulk-Shear 波	7 1
6.4	グレイティングによる反射と透過	8 0
6.4.1	凹部の等価回路	8 0
6.4.2	相互干渉を考慮した等価回路	8 4
6.4.3	グレイティングによる反射と透過	8 7
6.5	結 言	9 1
付 録	6 - I	9 4
第 7 章	結 論	9 5
謝 辞		9 7
文 献		9 8

# 第 1 章 序 論

弾性表面波は、表面における高いエネルギーの集中度と、電磁波に比してその速度が  $10^{-5}$  倍程度であることから、マイクロ波回路素子への応用という点で高い関心が寄せられ、各方面で活発な研究がなされるようになり<sup>(1)~(3)</sup>。特にここ数年の急速な進展ぶりには、目を見張らされるものがある。

歴史的に見ると、弾性表面波そのものは決して新しい現象でなく、1885年に有名な Lord Rayleigh が弾性表面波の典型であるレイリイ波の存在を理論的に証明し、また1905年には Lamb が、1911年には Love が、それぞれ今日ラム波、ラブ波と呼ばれている弾性表面波に関する研究を行っている。このような弾性表面波は、特に地震波と関連しているため、従来は主として地震学の分野において研究されていた<sup>(4)</sup>。

上記のような歴史的背景を有している弾性表面波に関する研究が、通信工学の分野において活発に行なわれるようになった第一の原因は、弾性表面波の特性が、電子応用素子の小型化から IC 化へと向う機運に合致していたことにある。更にその他の原因として

- i) 超音波増幅の実験的成功
- ii) 送受信電極の構成の容易さとホトエッチング技術の発達
- iii) 圧電及び磁性材量の進歩
- iv) 電子計算機の発達

などもあげることが出来、機能素子への応用に関する研究<sup>(5),(6)</sup>に加えて導波路に関する研究も数多くなされている<sup>(7)~(9)</sup>。

ところで弾性表面波導波路の不連続問題、すなわち導波路の表面不整あるいは導波路の接合部における弾性表面波の伝搬特性に関する問題は、弾性表面波をフィルター・遅延線などの信号処理素子に応用する際の基礎知識として極めて重要であると考えられる<sup>(5)</sup>。この種の問題は、厳密に解析することは容易でなく、これまで、変分法<sup>(10)</sup>、摂動法などの近似解法を用いて、レイリイ波及びラブ波導波路の種々の不連続部に関する報告がなされている<sup>(11)~(14)</sup>。更に境界条件を適当に近似することによりレイリイ波導波路の二三の不連続

問題も、Wiener Hopf法を用いて解析されている<sup>(15),(16)</sup>。

このように従来からよく知られているレイリイ波導波路の不連続部に関しては、数多くの研究がなされているが、1968年にJ.L.Bleustein等<sup>(17)~(19)</sup>によって見い出された圧電性媒質に存在するShear-Horizontalタイプの弾性表面波、いわゆるBleustein-Gulyaev波や、非可逆性を有しているShear-Horizontalタイプ磁気弾性表面波<sup>(20),(21)</sup>の導波路不連続部に関する研究報告は、あまりなく、たとえばBleustein-Gulyaev波に関し二、三なされているにすぎない<sup>(22)~(25)</sup>。Shear-Horizontalタイプの弾性表面波は、レイリイ波に比して媒質表面における質量効果の影響を受けにくいという利点があり<sup>(19)</sup>、従って種々の機能素子を実現した際のパッケージングがよりコンパクトに出来、素子小型化の機運に、レイリイ波よりも適しているといえる。

本論文では、以上に述べた理由で、弾性表面波導波路の不連続部を、特にShear-Horizontalタイプ弾性表面波導波路のそれに限り、理論的に解析する。

まず第2章においては、圧電性媒質におけるSH波の積分表示を導出する<sup>(26),(27)</sup>。同様な表示が、無限構造を有する境界のない圧電性媒質に対して、G.de Jong<sup>(28)</sup>により導出されているが、本論文で導出する表示はBleustein-Gulyaev波導波路の不連続部の解析を主たる目的とする表示である点がJongのそれとは異なっている。更に本表示によれば通常無視されているBulk-Shear波の評価も容易に出来、また第6章において示すように種々の形状をした不連続部の解析が、数値的に厳密に行なえる点が従来近似解法よりも秀れているといえる。

第3章においては、第2章と同様な手続きで磁性媒質におけるSH波の積分表示を行なう<sup>(29)~(31)</sup>。磁性媒質中を伝搬するいわゆる磁気弾性波は、非可逆性を有しており<sup>(20)</sup>、通常の意味での相反定理が成立しない。従って積分表示導出の手続に先立って、相反関係の成立する新たな系を考える必要があり、その点において第2章における手続よりも多少の困難が生じる。なお本章で導出する積分表示により種々の磁性媒質不連続部の解析が可能となるこ



とは前章と同じである。

第4章においては、圧電性媒質の不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱の問題を、第2章において導出する積分表示を用いて近似的に解析する<sup>(26), (27), (32)</sup>。不連続部の具体的な形状としては、ゆるやかなコーナ及び波長に比してあまり高くないステップを仮定し、比較的簡単な形で近似解を求める。このような問題は、これまでレイリイ波やラブ波<sup>(12), (33)</sup>に関し報告されており、特にレイリイ波については、H. S. Tuan 等<sup>(34)~(39)</sup>、L. Knopoff 等<sup>(12), (40)</sup>、K. Viswanathan 等<sup>(41), (42)</sup>及び米山等<sup>(15), (16)</sup>によってかなり詳しく考察されている。第4章では、圧電性弾性波導波路の形状の変化が、入射 Bleustein-Gulyaev 波に及ぼす影響を数値計算例をあげて定量的に検討する。更に散乱される Bulk-Shear 波の散乱パターンも明らかにする。

第5章においては、非可逆性を有する<sup>(20), (21), (43)</sup>磁気弾性表面波導波路の不連続問題を、第3章で導出する積分表示を用いて解析する<sup>(29), (30), (32), (44)</sup>。なお本章で取り上げる磁気弾性表面波は、Bleustein-Gulyaev 波と同様な粒子変位を有する Shear-Horizontal タイプの磁気弾性表面波であるが、現在までのところこの導波路不連続問題に関する報告はなされていない。これは弾性波が本来有している複雑な境界条件に加え非可逆性のため、より一層取り扱いが困難になるからであると考えられる。本章で取り上げる具体的な不連続部の形状は、前章同様コーナとステップで、特にコーナについては数値計算例をあげて非可逆性の影響を詳しく検討する。

第6章においては、圧電性弾性波導波路凹部による、Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱の問題を、積分表示式に境界条件を適用して導出される積分方程式に Moment 法<sup>(45)</sup>を適用して数值的に解析する<sup>(46)~(48)</sup>。積分方程式法は、通常電磁波の散乱問題等の解析に用いられており<sup>(49), (50)</sup>、必要とあらばいくらでも厳密解に近い解を得ることが出来ることが知られているが、この手法を弾性波導波路の不連続問題に適用した例は少ない<sup>(24)</sup>。

本章では、方形の凹部を考え数値計算例をあげて、凹部の幅及び深さが、入射 Bleustein-Gulyaev 波に及ぼす影響を定量的に検討する。

ところで積分方程式法の唯一の難点は，計算機に要する時間が決して少なくないことであり，従って多数の凹部における伝搬特性を数値的に求めるには適当な手法とは言えない．本章では，積分方程式法より得られる数値解を用いて，凹部を等価回路表示することにより，上記の難点を除去し，グレイティングによる Bleustein-Gulyaev 波の反射及び透過の様子を明らかにしている．

## 第 2 章 圧電性媒質における $SH$ 波の 積分表示<sup>(26),(27)</sup>

### 2.1 緒 言

半無限境界面を有する弾性媒質を伝搬する表面波として、古くよりレイリイ波<sup>(51)</sup>が知られているが、最近このレイリイ波とは全く異質であり、かつ純粋な弾性媒質には存在しない、 $SH$ タイプの表面波が、半無限圧電性媒質中を伝搬し得ることが明らかにされた<sup>(17)~(19)</sup>。この表面波は、発見者の名にちなんで Bleustein-Gulyaev 波 (以後単に  $BG$  波と略すことにする。)と呼ばれ、レイリイ波に比しその粒子変位が極めて簡単であることが一つの特徴である。すなわち粒子変位の方向が境界面に平行であることにより、媒質表面における質量効果の影響を、レイリイ波よりも受けにくいという利点があり<sup>(19)</sup>、従って  $BG$  波を用いた機能素子のパッケージングが、レイリイ波を用いた場合のそれよりも、よりコンパクトに出来ることが予想される。このような点で、実用的な観点からも高い関心がこの  $BG$  波に寄せられ、励振<sup>(52)</sup>、増幅<sup>(53)</sup>に関する基本的な報告のみならず、最近  $BG$  波を用いた機能素子も二三考案されている。しかしながら、 $BG$  波そのものの歴史は浅く、たとえば表面不整による  $BG$  波の散乱といった問題を含め、各種機能素子の実現にあたり基本的な問題となるであろう種々の問題が未だ十分な検討を受けていないのが現状である。

一方弾性波導波路の不連続問題は、パルス圧縮フィルタのグレーティング部における弾性表面波の散乱<sup>(5)</sup>の問題等に見られるように、実用上非常に重要な問題であると考えられる。しかしながら弾性表面波が本来有している複雑な境界条件のため、その厳密な解析は比較的困難で、レイリイ波、ラブ波等に関し、変分法<sup>(10)</sup>、摂動法等の近似解法を用いた報告がなされている<sup>(34)~(39)</sup>にすぎない。

こういった近似解法に加え、通常電磁波の散乱問題の解析に用いられている積分表示を用いる手法が、弾性波導波路の不連続問題の解析にも有効である<sup>(24)</sup>と考えられる。とりわけ  $BG$  波は、その簡単な粒子変位のため電磁波

との対比も比較的容易であり，従って積分表示を用いる手法は  $BG$  波導波路の不連続問題に有効であると考えられる。

本章では，まず  $6\text{ mm}$  クラス圧電性媒質を伝搬する， $BG$  波及び Bulk-Shear 波について述べ，次にこの系に適したグリーン関数を Fourier 変換を用いて求める。最後に，以後の  $BG$  波導波路不連続部の解析に用いる，圧電性媒質内の  $SH$  波に対する積分表示を導出する。

## 2.2 Bleustein-Gulyaev 波及び Bulk-Shear 波

圧電性媒質において成立する弾性波の基本方程式は，直角座標  $(x_1, x_2, x_3)$  において次式のようにテンソル形式で記述することができる<sup>(54)</sup>。

$$T_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \quad (2-1)$$

$$D_{i,i} = 0 \quad (2-2)$$

$$S_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2-3)$$

$$T_{ij} = C_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2-4)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k \quad (2-5)$$

ここに式 (2.1) は Newton の運動方程式，式 (2.2) は電荷保存則，式 (2.3) はひずみと粒子変位の関係式，式 (2.4)，(2.5) は構成関係式である。ただし， $T_{ij}$ ， $u_i$ ， $D_i$ ， $S_{ij}$ ， $E_i$  はそれぞれ，応力，粒子変位，電束密度，及び電界の各成分， $\rho$  は考えている圧電性媒質の質量密度であり， $\dot{\quad}$  の記号は時間に関する微分を表わしている。更に式 (2.1) ~ (2.5) においてはアインシュタインの規約を用いている。また  $C_{ijkl}^E$ ， $e_{kij}$ ， $\epsilon_{ik}^S$  は各々媒質の弾性，圧電及び誘電率テンソルの各成分である。いま圧電性媒質中での弾性波の速度が，電磁波の速度に比べて十分に遅いことを考慮すると，Maxwell の方程式において準静電近似を用いることができ，従って電界  $E_i$  が電位  $\phi$  を用いて次式のように表わすことが出来る。

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (2.6)$$

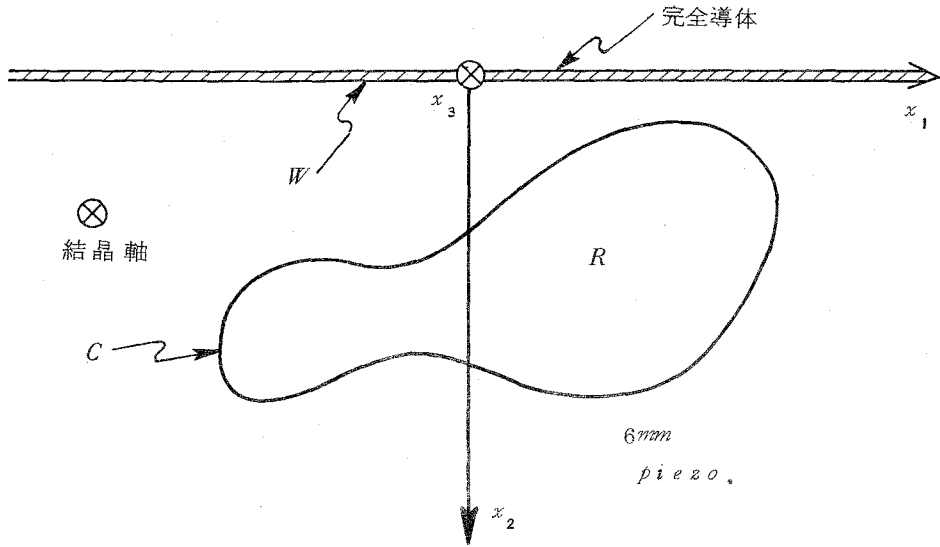


図 2 . 1 圧電性媒質と座標系

いま、図 2 . 1 に示すように 6 mm クラスの半無限圧電性媒質が、 $x_1-x_3$  面 ( $x_2=0$ ) に境界面を持ち、 $x_2>0$  の領域に存在する場合を考える。媒質の結晶軸を  $x_3$  軸方向にとり、かつ  $x_3$  軸方向に系の変化がないものとすれば、式 (2.4)、(2.5) 及び (2.6) を代入して式 (2.1) 及び (2.2) は以下に示す  $u_1$ 、 $u_2$  のみを含む方程式と、 $u_3$  及び  $\phi$  のみを含む方程式に分離することが出来る。

$$\rho \ddot{u}_1 = c_{11}^E u_{1,11} + c_{12}^E u_{2,21} + c_{66}^E u_{1,22} + c_{66}^E u_{2,12} \quad (2.7)$$

$$\rho \ddot{u}_2 = c_{66}^E u_{1,21} + c_{66}^E u_{2,11} + c_{12}^E u_{1,12} + c_{22}^E u_{2,22} \quad (2.8)$$

$$\rho \ddot{u}_3 = c_{44}^E u_{3,11} + c_{44}^E u_{3,22} + e_{15} \phi_{,11} + e_{15} \phi_{,22} \quad (2.9)$$

$$0 = e_{15} u_{3,11} + e_{15} u_{3,22} - \epsilon_{11}^S \phi_{,11} - \epsilon_{11}^S \phi_{,22} \quad (2.10)$$

但し各テンソル成分の下添字  $p$  ( $=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) は、各々 (11, 22, 33,

23, 31, 12) を置き換えたものである。式 (2.8) ~ (2.10) から明らか  
 なように、 $u_1$  及び  $u_2$  に関する式は、純粋な弾性波の式となるので、本論文  
 では取り扱わない。 $u_3$  に関する式は、圧電性媒質中で弾性波と電磁波が結合  
 した波動を表わしている。また式 (2.4) 及び (2.5) は次式のようになる。

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{12} = 0 \quad D_3 = 0 \quad (2.11)$$

$$T_{23} = c_{44}^E u_{3,2} + e_{15} \phi_{,2} \quad (2.12)$$

$$T_{31} = c_{44}^E u_{3,1} + e_{15} \phi_{,1} \quad (2.13)$$

$$D_1 = e_{15} u_{3,1} - \epsilon_{11}^S \phi_{,1} \quad (2.14)$$

$$D_2 = e_{15} u_{3,2} - \epsilon_{11}^S \phi_{,2} \quad (2.15)$$

いま系の時間変化を  $e^{-i\omega t}$  とすれば、式 (2.9) 及び (2.10) は次式のように  
 なる<sup>+</sup>。

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi + \rho \omega^2 u_3 = 0 \quad (2.16)$$

$$e_{15} \nabla^2 u_3 - \epsilon_{11}^S \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.17)$$

但し  $\nabla^2$  は二次元のラプラス演算子で、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  である。式 (2.16) 及  
 び (2.17) を満足する波動は、波の進行方向に垂直な粒子変位  $u_3$  のみを有し  
 ており、従って Shear Horizontal (SH) タイプの波動と呼ばれている。

いま無限境界面  $W$  ( $x_2 = 0$ ) が質量効果の無視出来る、無限に薄い完全導体  
 で覆われているものとすれば、 $u_3$  及び  $\phi$  は、媒質の境界面 ( $x_2 = 0$ ) におい  
 て、次式で表わされる境界条件を満足しなければならない。

$$T_{23} = c_{44}^E u_{3,2} + e_{15} \phi_{,2} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.18)$$

$$\phi \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.19)$$

---

<sup>+</sup> 以後系の時間変化  $e^{-i\omega t}$  は本論文中においては省略する。

ここに式(2.18)及び(2.19)は、圧電性媒質の表面で Shear 応力が零であること及び電位が零であることを表わしている。式(2.16)～(2.19)を満足する解のうちで、境界面から離れるにつれて指数関数的に減少する解が表面波を表わす。ここで、 $u$  及び  $\phi$  が次式で与えられるものと仮定する<sup>+</sup>。

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= A e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} \\ \phi(\mathbf{r}) &= B (e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} - e^{-\xi_1 x_2 + i \xi_1 x_1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

なお  $A$  及び  $B$  は一定の振幅を表わしているものとする。式(2.20)を式(2.16)及び(2.17)に代入すれば、次式の分散関係式が成立することが明らかになる。

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = \rho \omega^2 / \bar{c}_{44} = k_0^2 \quad (2.21)$$

但し、 $\bar{c}_{44} = c_{44}^E + e_{15}^2 / \epsilon_{11}^S$  であり、 $k_0$  は考えている圧電性媒質の固有波数である。更に境界条件式(2.18)及び(2.19)に式(2.20)を代入することにより、次式を導くことが出来る。

$$\begin{bmatrix} \bar{c}_{44} \xi_2 & -e_{15} \xi_1 \\ e_{15} / \epsilon_{11}^S & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

式(2.22)において  $A$ ,  $B$  が自明でない解を持つためには、この係数行列の行列式が零でなければならない。以上の議論より、 $\xi_1$  と  $\xi_2$  及び  $A$  と  $B$  の間には各々次式で示される関係が成立することが明らかとなる。

$$\xi_2 = K^2 \xi_1 \quad (2.23)$$

$$B = e_{15} / \epsilon_{11}^S A \quad (2.24)$$

但し  $K^2$  は電気機械結合係数と呼ばれる定数で、求める表面波の、表面への集

---

+ 本論文では  $SH$  波のみ取り扱っているため、以後  $u_3(\mathbf{r})$  を誤解のない限り単に  $u(\mathbf{r})$  と表わすことにする。

中度を表わしており、 $K^2 = \epsilon_{15}^2 / \epsilon_{44} \cdot \epsilon_{11}^S$  である。式(2.20)で与えられる表面波が、Bleustein-Gulyaev波<sup>(17)~(19)</sup> (以後本論文中ではBG波と略すことにする。)と呼ばれ、完全導体で覆われた半無限圧電性媒質の境界面に沿って伝搬するSHタイプの弾性表面波である<sup>+</sup>。なお式(2.21)及び(2.23)よりBG波は、従来より知られているレイリー波同様分散がないことが判る。

一方式(2.16)及び(2.17)を満足する波動として、次式で示される波動が存在する。

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= A e^{i k_1 x_1 + i k_2 x_2} \\ \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\epsilon_{15}}{\epsilon_{11}^S} A e^{i k_1 x_1 + i k_2 x_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

但し、 $k_1^2 + k_2^2 = k_0^2$  であり、 $A$  は粒子変位  $u(\mathbf{r})$  の一定振幅である。式(2.25)で示される波動はBulk-Shear波と呼ばれ、圧電性媒質内を伝搬するBulk弾性波である。

### 2.3 半無限圧電性媒質におけるグリーン関数

図2.2に示すような境界面( $x_2=0$ )が、前節同様質量効果の無視出来る、無限に薄い完全導体で覆われた、6mmクラスの圧電性媒質におけるSHタイプの波動に対するグリーン関数は、波源として機械源及び電荷源のいずれをも仮定することが出来、従って式(2.26)~(2.29)を満足する。

$$c_{44}^E \nabla^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \epsilon_{15} \nabla^2 G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho \omega^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.26)$$

$$\epsilon_{15} \nabla^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \epsilon_{11}^S \nabla^2 G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (2.27)$$

$$c_{44}^E \nabla^2 G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \epsilon_{15} \nabla^2 G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho \omega^2 G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (2.28)$$

$$\epsilon_{15} \nabla^2 G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \epsilon_{11}^S \nabla^2 G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.29)$$

+ 本節では、準静電近似のもとでBG波を導出したが、Maxwellの方程式を厳密に解くことによっても同様の結果が得られる。



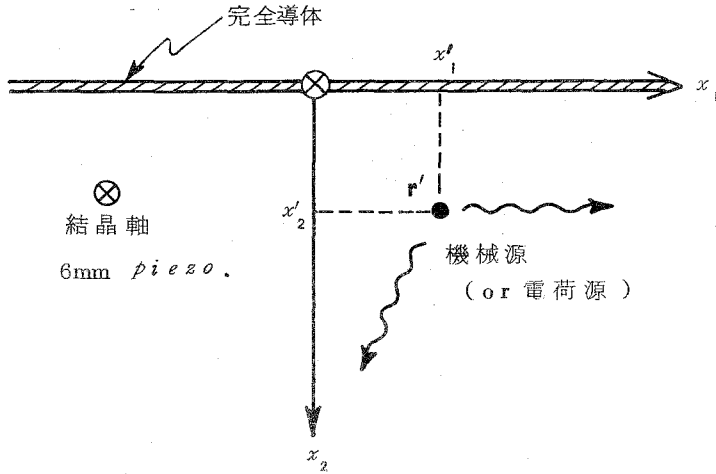


図 2. 2 無限長線波源

但し  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  は Dirac のデルタ関数であり、 $\mathbf{r}=(x_1, x_2)$  及び  $\mathbf{r}'=(x_1', x_2')$  は各々観測点及び点源の位置を表わすベクトルである。また各々のグリーン関数の表示式における上添字  $u$  及び  $\phi$  は、その対応する量が各々粒子変位及び電位であることを表わしており、下添字  $M, E$  は各々波源が機械源及び電荷源であることを表わしている。式 (2.26) ~ (2.29) から判かるように  $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  及び  $G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は各々、図 2. 2 に示す圧電性媒質中に波源として位置  $\mathbf{r}'$  に、無限長線機械源が存在する場合の  $SH$  タイプの波動の粒子変位及び電位であり、 $G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  及び  $G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は各々同様に、無限長線電荷源が存在する場合の  $SH$  タイプの波動の粒子変位及び電位である。従って、これらのグリーン関数を求めるには、圧電性媒質中に置かれた線波源からの放射の問題を解けばよいことが判る。なお上記のグリーン関数は、境界面 ( $x_2=0$ ) において次式で示される。式 (2.18), (2.19) と同様な Shear 応力零、電位零という境界条件を満足する。

$$c_{44}^E \frac{\partial G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.30)$$

$$c_{44}^E \frac{\partial G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2.31)$$

まず波源が機械源の場合には，式(2.26)，(2.27)は次式のように変形できる。

$$\bar{c}_{44} \nabla^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho \omega^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.32)$$

$$\nabla^2 G_M^\psi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (2.33)$$

但し

$$G_M^\psi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (2.34)$$

である。ここで  $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ， $G_M^\psi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  及びデルタ関数を，次式のように Fourier 変換で表わす。

$$G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U_M e^{i\mathbf{k}(x_1-x'_1)} d\mathbf{k} \quad (2.35)$$

$$G_M^\psi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_M e^{i\mathbf{k}(x_1-x'_1)} d\mathbf{k} \quad (2.36)$$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \delta(x_2-x'_2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}(x_1-x'_1)} d\mathbf{k} \quad (2.37)$$

式(2.35)～(2.37)を式(2.32)(2.33)に代入すれば次式を得ることが出来る。

$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial x_2^2} + h^2 U_M = \frac{1}{\bar{c}_{44}} \delta(x_2-x'_2) \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_M}{\partial x_2^2} - k^2 \psi_M = 0 \quad (2.39)$$

但し  $h^2 = k_0^2 - k^2$  である。従って式(2.38)，(2.39)の，図2.2に示した

領域 I 及び II における解は次式で与えられる。

$$(領域 I) \quad U_M = A_1 e^{ihx_2}, \quad \psi_M = A_4 e^{-|\kappa|x_2} \quad (2.40)$$

$$(領域 II) \quad \left. \begin{aligned} U_M &= A_2 e^{ihx_2} + A_3 e^{-ihx_2} \\ \psi_M &= A_5 e^{-|\kappa|x_2} + A_6 e^{|\kappa|x_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

ここに  $A_1 \sim A_6$  は、以下に議論する境界条件により決定される未定係数である。先ず式 (2.30) で示される境界面 ( $x_2 = 0$ ) における境界条件式を用いて次式を得る。

$$(ih\bar{c}_{44}) A_2 + (-ih\bar{c}_{44}) A_3 + (e_{15}|\kappa|) A_5 + (-e_{15}|\kappa|) A_6 = 0 \quad (2.42)$$

$$\left(\frac{e_{15}}{S}\right) A_2 + \left(-\frac{e_{15}}{S}\right) A_3 + A_5 + A_6 = 0 \quad (2.43)$$

更に  $x_2 = x'_2$  における境界条件より次式を得る。(55)

$$(e^{ihx'_2}) A_1 + (-e^{ihx'_2}) A_2 + (-e^{-ihx'_2}) A_3 = 0 \quad (2.44)$$

$$(e^{-|\kappa|x'_2}) A_4 + (-e^{|\kappa|x'_2}) A_5 + (-e^{-|\kappa|x'_2}) A_6 = 0 \quad (2.45)$$

$$(ih e^{ihx'_2}) A_1 + (-ih e^{ihx'_2}) A_2 + (ih e^{-ihx'_2}) A_3 = \frac{1}{\bar{c}_{44}} \quad (2.46)$$

$$(-|\kappa| e^{-|\kappa|x'_2}) A_4 + (-|\kappa| e^{|\kappa|x'_2}) A_5 + (|\kappa| e^{-|\kappa|x'_2}) A_6 = 0 \quad (2.47)$$

式 (2.42) ~ (2.47) を用いて  $A_1 \sim A_6$  が決定され、従って求めるグリーン関数  $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ,  $G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= -\frac{i}{4\pi\bar{c}_{44}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1}{h} e^{ih(x_2+x'_2)+i\kappa(x_1-x'_1)} d\kappa \\ &\quad - \frac{i}{4\bar{c}_{44}} H_0^{(1)}(\kappa_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{e_{15}}{2\pi\bar{c}_{44}\epsilon_{11}^S} \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{-|\mathbf{k}|x_2 + ihx_2' + i\mathbf{k}(x_1-x_1')} d\mathbf{k} \quad (2.49)$$

$$R_1 = \frac{ih - K^2 |\mathbf{k}|}{ih + K^2 |\mathbf{k}|} \quad R_2 = \frac{1}{ih + K^2 |\mathbf{k}|} \quad (2.50)$$

ここに  $H_0^{(1)}(\mathbf{k}_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$  は、0次一種ハンケル関数を表わし、 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x_1-x_1')^2 + (x_2-x_2')^2}$  である。また波源が電荷源の場合も同様にしてグリーン関数を求めることができる。得られる結果のみを以下に示す。

$$G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{e_{15}}{2\pi\bar{c}_{44}\epsilon_{11}^S} \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{ihx_2 - |\mathbf{k}|x_2' + i\mathbf{k}(x_1-x_1')} d\mathbf{k} \quad (2.51)$$

$$G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi\epsilon_{11}^S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1}{|\mathbf{k}|} e^{-|\mathbf{k}|(x_2+x_2') + i\mathbf{k}(x_1-x_1')} d\mathbf{k} \\ + \frac{1}{2\pi\epsilon_{11}^S} \ln \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{K^2}{2\pi\epsilon_{11}^S} \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{-|\mathbf{k}|x_2 + ihx_2' + i\mathbf{k}(x_1-x_1')} d\mathbf{k} \quad (2.52)$$

## 2.4 SH波の積分表示

本節では図2.1に示した、圧電性媒質内において任意の閉曲線  $C$  によって囲まれた領域  $R$  内での  $SH$  波に対する積分表示を求める。いま考えているのは、弾性波と電磁波が結合した波動であり、従って積分表示の導出にあたっては、通常電磁波の積分表示に用いられているグリーンの定理は有効でなく以下のようにしなければならぬ。まず式(2.16)(2.17)と(2.26)(2.27)より次式が導かれる。

$$u(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = u(\mathbf{r}) \nabla \cdot \left\{ c_{44}^E \nabla G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + e_{15} \nabla G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right\} \\ - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla \cdot \left\{ c_{44}^E \nabla u(\mathbf{r}) + e_{15} \nabla \phi(\mathbf{r}) \right\} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
0 = & \phi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \{ e_{15} \nabla G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \epsilon_{11}^S \nabla G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} \\
& - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla \cdot \{ e_{15} \nabla u(\mathbf{r}) - \epsilon_{11}^S \nabla \phi(\mathbf{r}) \}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

ところで、前節で求めた2組のグリーン関数関には、次式で示される相反関係<sup>+</sup>が成り立っている。

$$\left. \begin{aligned}
G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= G_M^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}), \quad G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = G_E^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \\
G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= G_E^\phi(\mathbf{r}'|\mathbf{r})
\end{aligned} \right\} \tag{2.55}$$

式(2.53)(2.54)において、波源の位置 観測点の位置を交換するに当り上記の相反関係を用いれば、以下の式を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}') \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = & u(\mathbf{r}') \nabla' \cdot \{ c_{44}^E \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + e_{15} \nabla' G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} \\
& - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla' \cdot \{ c_{44}^E \nabla' u(\mathbf{r}') + e_{15} \nabla' \phi(\mathbf{r}') \}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \phi(\mathbf{r}') \nabla' \cdot \{ e_{15} \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \epsilon_{11}^S \nabla' G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} \\
& - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla' \cdot \{ e_{15} \nabla' u(\mathbf{r}') - \epsilon_{11}^S \nabla' \phi(\mathbf{r}') \}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

但し微分演算子に付したプライムの記号は、 $\mathbf{r}'$ に関する演算子であることを表わしている。これらの面 $R$ にわたる面積分は、ガウスの定理を用いることにより、線積分と面積分の和として以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) = & \oint_c \{ u(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T(\mathbf{r}') \} d l' \\
& - e_{15} \int_s \{ \nabla' u(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \nabla' \phi(\mathbf{r}') \} d s'
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$0 = \oint_c \{ \phi(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D(\mathbf{r}') \} d l'$$

---

+ この相反関係は、第3章で取り扱われる磁気弾性波のそれと類似しており、従って証明は、より複雑な3章にゆずる。

$$+ e_{15} \int_s \{ \nabla' u(\mathbf{r}') \cdot \nabla \cdot G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \nabla' \phi(\mathbf{r}') \} ds' \quad (2.59)$$

$$\left. \begin{aligned} T(\mathbf{r}') &= c_{44}^E \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n'} + e_{15} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ D(\mathbf{r}') &= e_{15} \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= c_{44}^E \frac{\partial G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} + e_{15} \frac{\partial G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= e_{15} \frac{\partial G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

ここに  $\partial/\partial n'$  は、境界面  $C$  上における法線方向外向きの微分を表わしている。式(2.58)(2.59)により、領域  $R$  内での粒子変位  $u(\mathbf{r})$  に関する積分表示は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \oint_C \{ u(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T(\mathbf{r}') \\ &\quad + \phi(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D(\mathbf{r}') \} dl' \end{aligned} \quad (2.62)$$

更に領域  $R$  内での電位  $\phi(\mathbf{r})$  に関する積分表示は、式(2.16)(2.17)及び式(2.28)(2.29)をより上記の議論と同様にして、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int_C \{ u(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T(\mathbf{r}') \\ &\quad + \phi(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D(\mathbf{r}') \} dl' \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\left. \begin{aligned} T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= c_{44}^E \frac{\partial G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} + e_{15} \frac{\partial G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \\ D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= e_{15} \frac{\partial G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} - \epsilon_{11}^S \frac{\partial G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n'} \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

式(2.62), (2.63)が求める積分表示であり、領域  $R$  内での粒子変位  $u(\mathbf{r})$  及び電位  $\phi(\mathbf{r})$  は、境界  $C$  上での粒子変位  $u(\mathbf{r}')$ , 電位  $\phi(\mathbf{r}')$ , 電荷  $D(\mathbf{r}')$ , shear 応力  $T(\mathbf{r}')$  によって表わすことが出来る。尚且電性媒質が半無限でな

く無限媒質であるときには、式(2.62), (2.63)はG. de Jong が導出した表示<sup>(28)</sup>と一致することを付記しておく。

## 2.5 結 言

本章では、質量効果の無視出来る、無限に薄い完全導体で覆われた6 mm クラス圧電性媒質中におけるSHタイプの波動を、Newtonの運動方程式と準静電近似を用いたMaxwellの方程式より求めた。すなわち弾性表面波としてBleustein-Gulyaev波を、Bulk弾性波としてBulk-shear波を導出した。次に波源として機械源及び電荷源を仮定した場合の系に適したグリーン関数を、Fourier変換を用いて求めた。最後にこのグリーン関数を用いてSHタイプの波動に対する積分表示を導出した。導出した積分表示は本論文の基礎となる表示であって、以下の4章、6章において示されているように、圧電弾性表面波導波路の種々の不連続問題の解析に有効であると考えられる。

### 第 3 章 磁性媒質における $SH$ 波の 積分表示<sup>(29)~(31)</sup>

#### 3.1 緒 言

磁性媒質中に、圧電性媒質における Bleustein-Gulyaev 波と同じ、Shear-Horizontal な粒子変位を有する弾性表面波の存在し得ることが、J. P. Parekh によって理論的に証明され<sup>(20)</sup>、その後の磁性材料に関する研究の成果<sup>(56)</sup>とあいまって、上記の磁気弾性表面波に関する種々の興味ある報告がなされている<sup>(21), (57) (58)</sup>。一般に磁性媒質中を伝搬する弾性表面波は、媒質表面で信号にアクセス可能であるという弾性表面波特有の性質に加え、外部磁界により伝搬特性を制御でき、且つ非可逆性を有している。従って可変遅延線・アイソレータなどの信号処理素子への広い応用が可能であると考えられる。

ところで弾性波導波路の不連続部における弾性表面波のふるまいに関する研究の重要性は、前章において述べたとおりであるが、磁気弾性波に関しては、弾性波本来の複雑な境界条件及び上記の非可逆性のためその取り扱いが一層困難であり、磁気弾性波導波路不連続問題についての報告は、筆者の知る限りこれまでのところ皆無である。

そこで本章では、磁気弾性波導波路の不連続問題を解析するのに有効であると考えられる積分表示を、Shear-Horizontal タイプの磁気弾性波について求める。積分表示導出のための手続きは、第 2 章のそれと類似しているが、磁気弾性波が有している非可逆性のため通常の意味での相反定理が成立せず、その点に関し多少の困難が生じる。従って相反定理が成立するような系を新たに導入する必要がある、もとの系と新たに導入した系の間の相反関係を理論的に明らかにした上で、求める積分表示を導出する。

#### 3.2 磁気弾性表面波

図 3.1 に示すように、半無限磁性媒質が  $x_1-x_3$  面 ( $x_2=0$ ) に境界面  $W$  を持ち、 $x_2>0$  の領域に存在するものとする。バイアス磁界が  $x_3$  軸方向に加えられているものとし、境界面  $W$  は無限に薄い完全導体で覆われているものと



する。又、 $x_3$  軸方向に系の変化がないものとし、且つスピン交換定数を無視し、更に系の時間変化が  $e^{-i\omega t}$  で表されるものとするれば、粒子の機械変位  $u$  が  $x_3$  軸方向成分のみを有する ( $u = i_3 u_3$ )  $SH$  タイプの磁気弾性波の基本式は、式 (3.1) ~ (3.3) で与えられる<sup>(20)</sup>。

$$c_{44} \nabla^2 u_3 + \left(\frac{b}{M}\right) \nabla \cdot m + \rho \omega^2 u_3 = 0 \quad (3.1)$$

$$\dot{m}_1 = -|\gamma| \left( \mu_0 H_i m_2 + b \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \mu_0 M h_2 \right) \quad (3.2)$$

$$\dot{m}_2 = |\gamma| \left( \mu_0 H_i m_1 + b \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \mu_0 M h_1 \right) \quad (3.3)$$

ここに  $\mu_0$  は、真空の透磁率、 $m (= i_1 m_1 + i_2 m_2)$ 、 $M (\simeq i_3 M)$  は、高周波磁化ベクトル及び直流飽和磁化ベクトルで、 $H_i$  はバイアス磁界による磁性体内部の磁界の強さ、 $h (= i_1 h_1 + i_2 h_2)$  は高周波磁界である。又、 $c_{44}$ 、 $b$ 、 $\gamma$ 、 $\rho$  は各々弾性定数、磁気弾性係数、磁気回転比および媒質の質量密度を表す。なお、 $\nabla$  は 2 次元の微分演算子で、 $\nabla = i_1 \partial / \partial x_1 + i_2 \partial / \partial x_2$  である。いま磁性媒質中において弾性波の速度が電磁波に比して極めて小さいことを考慮し、準静磁近似を適用すると、マクスウェルの方程式は次のようになる。

$$\nabla \times h = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.5)$$

$$B = \mu_0 (h + m) \quad (3.6)$$

式 (3.5) より磁束密度  $B$  は、ベクトルポテンシャル  $A$  を用いて次式のように表すことができる。

$$B = \nabla \times A \quad (3.7)$$

但し  $B$  の成分が  $x_1$ 、 $x_2$  軸方向のみで且つ  $x_3$  軸方向に変化がないことより、 $A$  はその成分が  $x_3$  軸方向成分のみであると考えられる ( $A = i_3 A_3$ )。

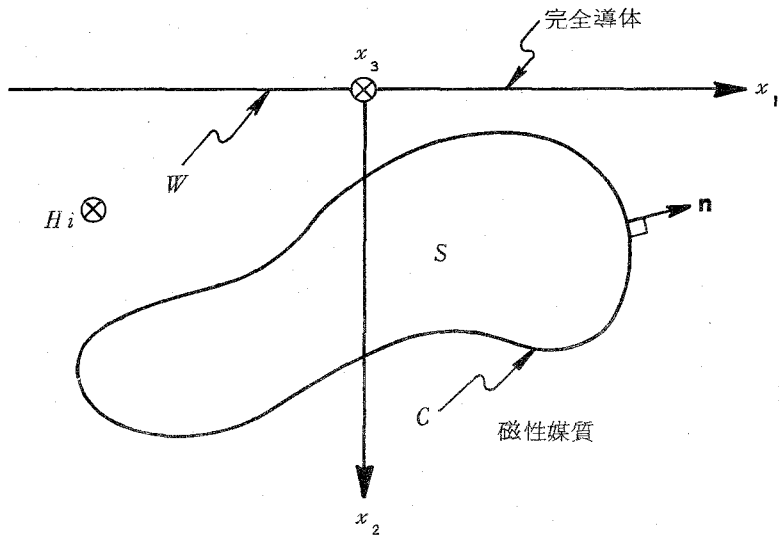


図 3. 1 磁性媒質とその座標系

ここで  $m$  は式 (3.6), (3.7) を用いて次式のように表すことができる。

$$m = \nabla \times P - \nabla \cdot q \quad (3.8)$$

$$P = \left(\frac{b}{M}\right) \alpha u + \beta A = i_3 P_3, \quad q = \left(\frac{b}{M}\right) \beta u_3 - \alpha A_3 \quad (3.9)$$

但し,

$$\alpha = i \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega \omega_s}{(\omega_r + \omega_s)^2 - \omega^2}$$

$$\beta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\omega_s (\omega_r + \omega_s)}{(\omega_r + \omega_s)^2 - \omega^2}$$

$$\omega_r = |\gamma| \mu_0 H_i, \quad \omega_s = |\gamma| \mu_0 M$$

式 (3.6), (3.8) を用いて式 (3.1), (3.4) を変形すると各々次式のようになる。

$$c_{eq} \nabla^2 u_3 + b_{eq} \nabla^2 A_3 + \rho \omega^2 u_3 + \left(\frac{b}{M}\right) \nabla \cdot \nabla \times P = 0 \quad (3.10)$$

$$-b_{eq} \nabla \times \nabla \times u + \frac{1}{\mu_{eq}} \nabla \times \nabla \times A + \nabla \times \nabla q = 0 \quad (3.11)$$

但し,  $c_{eq}$ ,  $b_{eq}$ ,  $\mu_{eq}$  は次式で示される定数である.

$$c_{eq} = c_{44} - \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{b}{M}\right)^2 \frac{\omega_r(\omega_r + \omega_s)}{(\omega_r + \omega_s)^2 - \omega^2}$$

$$b_{eq} = \left(\frac{b}{M}\right) \alpha, \quad \frac{1}{\mu_{eq}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega_r(\omega_r + \omega_s) - \omega^2}{(\omega_r + \omega_s)^2 - \omega^2}$$

式(3.10), (3.11)がフェライト媒質中を伝搬する  $SH$  タイプの磁気弾性波の諸量が満足すべき方程式である. いま, 式(3.10), (3.11)を波動方程式として解くには各々第4項, 第3項が恒等的に零であることを考慮せねばならない. 従って, これらは, J.L.Bleusteinら<sup>(17)~(19)</sup>によって明らかにされた6 mm クラス圧電媒質中を伝搬する  $SH$  タイプの弾性波を与える式と類似しており, 明らかに同様な取扱いが可能である. 一方  $u_3$  及び  $A_3$  が境界面  $W$  で満足すべき境界条件は,  $P$  及び  $q$  の項の影響を考慮せねばならず, 境界面で応力および磁束の垂直成分が零という条件は次式のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} B_2 = -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (A_3|_{x_2=0} = 0) \\ T_{23} = c_{44} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \left(\frac{b}{M}\right) \frac{\partial P_3}{\partial x_1} \left(\frac{b}{M}\right) \frac{\partial q}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

但し  $T_{23}$  は境界面  $W$  における Shear 応力である.

式(3.12)を考慮して境界面に沿って伝搬する表面波を求めると次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= u e^{-\xi_2^\pm x_2 + i(\xi_1^\pm x_1 - \omega t)} \\ A_3 &= b_{eg} \cdot \mu_{eg} u (e^{-\xi_2^\pm x_2} - e^{-|\xi_1^\pm| x_2}) e^{i(\xi_1^\pm x_1 - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

なお  $u$  は機械変位の一定振幅であり， $\xi_1^\pm$ ， $\xi_2^\pm$  は次式で示される分散関係式を満足する。

$$\xi_2^\pm = K^\pm \xi_1^\pm \quad (3.14)$$

但し，

$$K^\pm = \frac{1}{\bar{c}_{44}} \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{b}{M} \right)^2 \frac{\omega_r \bar{\omega}}{\omega_r + \omega_s \mp \omega} \cdot \frac{\omega_s \omega}{\omega_r (\omega_r + \omega_s) - \omega^2}$$

$$\bar{c}_{44} = c_{eg} + b_{eg}^2 \cdot \mu_{eg}$$

なお式 (3.14) における複号は，上段の符号が前進波 ( $x_1$  軸の正方向へ伝搬する波動) に対応し，下段の符号が後退波 ( $x_1$  軸の負方向へ伝搬する波動) に対応している。更に  $K^\pm$  は，圧電弾性波の電気機械結合係数に相当する量で，以後磁気機械結合係数と呼ぶことにする。

### 3.3 半無限磁性媒質におけるグリーン関数

図 3.1 のフェライト媒質において，式 (3.15)，(3.16) 及び式 (3.17)，(3.18) を満足する 2 組のグリーン関数  $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ， $G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  及び  $G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ， $G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  を考える。

$$\begin{aligned} c_{eg} \nabla^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + b_{eg} \nabla^2 G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho \omega^2 G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ + \left( \frac{b}{M} \right) \nabla \cdot \nabla \times G_M^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} -b_{eg} \nabla \times \nabla \times G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_{eg}} \nabla \times \nabla \times G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ + \nabla \times \nabla G_M^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$c_{eg} \nabla^2 G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + b_{eg} \nabla^2 G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho\omega^2 G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ + \left(\frac{b}{M}\right) \nabla \cdot \nabla \times G_J^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \quad (3.17)$$

$$-b_{eg} \nabla \times \nabla \times G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_{eg}} \nabla \times \nabla \times G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ + \nabla \times \nabla G_J^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \mathbf{i}_3 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (3.18)$$

但し  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  はディラックのデルタ関数で、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$  は各々観測点および点源の位置ベクトルである。又、グリーン関数の表示式における上添字  $u$ ,  $A$  は、その対応する量が各々の機械変位およびベクトルポテンシャルであることを示し、下添字  $M$ ,  $J$  は、各々考えている系の波源が、機械源および電流源であることを示すものとする。又  $G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は、 $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  の  $x_3$  軸方向成分を表すものとし、他のグリーン関数も同様に次式の関係満足するものとする。

$$\left. \begin{aligned} G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \mathbf{i}_3 G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \mathbf{i}_3 G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

更に  $G_{M(J)}^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ,  $G_{M(J)}^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は、式(3.9)の  $P$ ,  $q$  に対応する量で次式で与えられる。

$$G_{M(J)}^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \left(\frac{b}{M}\right) \alpha G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \beta G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ = \mathbf{i}_3 G_{M(J)}^{P_3}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (3.20)$$

$$G_{M(J)}^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \left(\frac{b}{M}\right) \beta G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \alpha G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (3.21)$$

又、上記のグリーン関数が境界面  $W$  で満足すべき境界条件は、式(3.12)で示される境界条件と同様であり、次式で表される。

$$-\left. \frac{\partial G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_1} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (G_{M(J)}^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')|_{x_2=0} = 0) \quad (3.22)$$

$$c_{44} \frac{\partial G_{M(J)}^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} - \left(\frac{b}{M}\right) \frac{\partial G_{M(J)}^{P_3}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_1} - \left(\frac{b}{M}\right) \left. \frac{\partial G_{M(J)}^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 \quad (3.23)$$

式(3.15)~(3.23)を満足するグリーン関数は、前章同様フーリエ変換により次のように求められる。

$$G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{1}{i 4\pi \bar{c}_{44}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_1}{h} e^{i h(x_2+x_2') + i k(x_1-x_1')} d k + \frac{1}{i 4 \bar{c}_{44}} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \quad (3.24)$$

$$G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = b_{eq} \mu_{eq} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{2\pi \bar{c}_{44}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{-|k|x_2 + i h x_2' + i k(x_1-x_1')} d k \quad (3.25)$$

$$G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = b_{eq} \mu_{eq} G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{2\pi \bar{c}_{44}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{i h x_2 - |k|x_2' + i k(x_1-x_1')} d k \quad (3.26)$$

$$G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = b_{eq} \mu_{eq} G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}^2}{2\pi \bar{c}_{44}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 e^{-|k|x_2 + i h x_2' + i k(x_1-x_1')} d k + \frac{\mu_{eq}}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\mu_{eq}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_3}{|k|} e^{-|k|(x_2+x_2') + i k(x_1-x_1')} d k \quad (3.27)$$

但し,

$$R_1 = \frac{i \left\{ h \bar{c}_{44} + \kappa b_{eq} \left( \frac{b}{M} \right) \right\} - b_{eq}^2 \mu_{eq} |\kappa|}{i \left\{ h \bar{c}_{44} - \kappa b_{eq} \left( \frac{b}{M} \right) \right\} + b_{eq}^2 \mu_{eq} |\kappa|}$$

$$R_2 = \frac{\bar{c}_{44}}{i \left\{ h \bar{c}_{44} - \kappa b_{eq} \left( \frac{b}{M} \right) \right\} + b_{eq}^2 \mu_{eq} |\kappa|}$$

$$R_3 = \frac{i \left\{ h \bar{c}_{44} - \kappa b_{eq} \left( \frac{b}{M} \right) \right\} - b_{eq}^2 \mu_{eq} |\kappa|}{i \left\{ h \bar{c}_{44} - \kappa b_{eq} \left( \frac{b}{M} \right) \right\} + b_{eq}^2 \mu_{eq} |\kappa|}$$

又,  $H_0^{(1)}(\kappa_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  は, 0 次一種ハンケル関数を表し,  $h^2 = \rho \omega^2 / \bar{c}_{44} - \kappa^2$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$  である.

### 3.4 相反定理

3.2 節の議論において示したように, これまで考えて来た系は非可逆性を有しており, 通常の意味での Reciprocity は成立しない. いま外部磁界のみを反転させた系を考えると, 通常系とそのような系の間 Reciprocity が成立することが考えられる. 式 (3.15), (3.16) で表される系において外部磁界のみを反転させた系を考えると, そのような系は次式で表されることが容易に分かる.

$$\begin{aligned} c_{eq} \nabla^2 \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - b_{eq} \nabla^2 \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \rho \omega^2 \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ - \left( \frac{b}{M} \right) \nabla \cdot \nabla \times \tilde{G}_M^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} b_{eq} \nabla \times \nabla \times \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_{eq}} \nabla \times \nabla \times \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ + \nabla \times \nabla \tilde{G}_M^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}_M^P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \left(\frac{b}{M}\right) \alpha \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \beta \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ \tilde{G}_M^q(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \left(\frac{b}{M}\right) \beta \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + \alpha \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

但し～の記号は、外部磁界を反転させた系のグリーン関数であることを表す。更に式(3.15)～(3.18)で表される系と、式(3.28), (3.29)で表される系の間には、次式で与えられる相反関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = -G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ \tilde{G}_J^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) &= -G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), \quad \tilde{G}_J^A(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

なお式(3.27)の相反関係は次のようにして証明される。いま式(3.24)において波源の位置を $\mathbf{r}''$ とし式(3.15), (3.16)及び式(3.24), (3.26)にガウスの定理を適用すれば次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \oint_C \left\{ \tilde{G}_M^u(\mathbf{r}''|\mathbf{r}) T_u(G'') \right. \\ &\quad - G_M^u(\mathbf{r}''|\mathbf{r}') \tilde{T}_u(G) + H_u(G') \times \tilde{G}_M^A(\mathbf{r}''|\mathbf{r}) \\ &\quad \left. - H_u(G) \times G_M^A(\mathbf{r}''|\mathbf{r}') \right\}_n dl'' \end{aligned} \quad (3.32)$$

但し $''$ の記号は $\mathbf{r}''$ に関する演算を表す。 $C$ として境界面 $\mathcal{W}$ 及び原点を中心とする十分大きな円弧で囲まれる領域を考えれば、式(3.32)の右辺は境界条件により恒等的に零となる。従って次式の相反関係が証明される。

$$\tilde{G}_M^u(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) = G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (3.33)$$

式(3.31)の他の相反関係も全く同様にして証明される。

### 3.5 SH波の積分表示

本節では、図3.1に示した磁性媒質内において、任意の閉曲線 $C$ によっ



て囲まれた領域  $R$  内での  $SH$  波に対する積分表示を，前章と同じようにして以下のように求める。

式 (3.10), (3.28) にガウスの定理を適用し，式 (3.31) を用いれば，領域  $S$  内での機械変位  $u_3(\mathbf{r})$  は次式のように表すことができる。

$$u_3(\mathbf{r}) = \oint_c \left\{ u_3(\mathbf{r}') \mathbf{T}_u(\mathbf{G}) - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \right\}_n d l' - S_a + S_b \quad (3.34)$$

但し，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}') &= c_{eq} \nabla' u_3(\mathbf{r}') + b_{eq} \nabla' A_3(\mathbf{r}') \\ &\quad + \left(\frac{b}{M}\right)^2 \alpha \nabla' \times \mathbf{u}(\mathbf{r}') + \left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_u(\mathbf{G}) &= c_{eq} \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + b_{eq} \nabla' G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\ &\quad - \left(\frac{b}{M}\right)^2 \alpha \nabla' \times \mathbf{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' \times \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \end{aligned}$$

$$S_a = b_{eq} \int_s \left\{ \nabla' u_3(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \nabla' A_3(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right\} d s'$$

$$S_b = \left(\frac{b}{M}\right) \beta \int_s \left\{ \nabla' u_3(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \cdot \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') \right\} d s'$$

但し演算子に付した  $'$  の記号は， $\mathbf{r}'$  に関する演算を表し，添字  $n$  は境界  $C$  上における各ベクトルの法線方向成分を表す。なお  $\mathbf{T}(\mathbf{r}')$ ， $\mathbf{T}_u(\mathbf{G})$  は Stress テンソルの Shear 成分に対応するベクトルである。又，上記の議論と同様にして，式 (3.11), (3.29) より次式が導かれる。

$$0 = \oint_c \left\{ \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') - \mathbf{H}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right\}_n d l' - S_a + S_b \quad (3.35)$$

ここに  $\mathbf{H}(\mathbf{r}')$ ， $\mathbf{H}_u(\mathbf{G})$  は磁界に対応するベクトルで次式で示される。

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}') = b_{eq} \nabla' \times \mathbf{u}(\mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_{eq}} \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' u_3(\mathbf{r}') + \alpha \nabla' A_3(\mathbf{r}') \\
\mathbf{H}_u(\mathbf{G}) = & b_{eq} \nabla' \times \mathbf{G}_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_{eq}} \nabla' \times \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\
& + \left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \alpha \nabla' G_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

式(3.34)より式(3.35)を差し引いて機械変位  $u_3(\mathbf{r})$  の積分表示は次式で示すように求められる。

$$\begin{aligned}
u_3(\mathbf{r}) = & \oint_C \left\{ u_3(\mathbf{r}') \mathbf{T}_u(\mathbf{G}) - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right\}_n d l' \quad (3.36)
\end{aligned}$$

更にベクトルポテンシャル  $A_3(\mathbf{r})$  についても全く同様にして次式のように積分表示することができる。

$$\begin{aligned}
A_3(\mathbf{r}) = & \oint_C \left\{ u_3(\mathbf{r}') \mathbf{T}_A(\mathbf{G}) - G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_A(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right\}_n d l' \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_A(\mathbf{G}) = & c_{eq} \nabla' G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') + b_{eq} \nabla' G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\
& - \left(\frac{b}{M}\right)^2 \alpha \nabla' \times \mathbf{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' \times \mathbf{G}_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_A(\mathbf{G}) = & b_{eq} \nabla' \times \mathbf{G}_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_{eq}} \nabla' \times \mathbf{G}_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \\
& + \left(\frac{b}{M}\right) \beta \nabla' G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \alpha \nabla' G_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

式(3.35), (3.37)が求める積分表示であり, 領域  $S$  内での  $SH$  タイプの磁気弾性波の諸量は, 境界  $C$  上での機械変位, ベクトルポテンシャル, 磁界および Stress によって表すことができる。

### 3.6 結 言

本章では、質量効果の無視できる、無限に薄い完全導体で覆われた磁性媒質中における  $SH$  タイプの波動に対する積分表示を、前章と同様な手続きのもとに導出した。但し、磁性媒質中の波動、いわゆる磁気弾性波は非可逆性を有しており、従って通常の意味での相反定理は成立しない点が、前章で取り扱った圧電性媒質中の弾性波との相異点であった。そこで考えている系との間に相反定理が成り立つような系を新に導入した後積分表示を導出した。なおこの積分表示は、磁気弾性波導波路の種々の不連続問題への適用が可能であるものと考えられる。

## 第 4 章 圧電性媒質不連続部の解析<sup>(26), (27), (32)</sup>

### 4.1 緒 言

弾性波導波路の不連続問題，すなわち導波路の表面不整ないし導波路の接合部における弾性表面波の伝搬特性に関する問題は，従来主として地震学の分野で取り扱われてきたが<sup>(40)~(42)</sup>，弾性表面波のマイクロ波回路素子への応用の可能性<sup>(2), (3)</sup>と関連して，この種の問題はマイクロ波の研究分野における重要な課題の一つと考えられるようになり，最近活発な研究がなされている<sup>(59), (60)</sup>．特に非圧電性媒質におけるレイリイ波については，変分法<sup>(10)</sup>，摂動法<sup>(34)~(38)</sup>，積分方程式法<sup>(24)</sup>，Wiener-Hopf 法<sup>(15), (23)</sup>等を用いて，種々の形状をした不連続部に関する詳しい検討がなされている．

しかしながら，圧電性媒質の不連続部に関する研究は，その境界条件が一層複雑になるため取り扱いが容易でなく，これまでのところ Bleustein-Gulyaev 波導波路の不連続部について二，三報告されているにすぎない<sup>(22)~(24)</sup>．

そこで本章では，第 2 章において導出した積分表示を用いることによって，圧電性媒質の不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射，透過及び散乱の問題を近似的に解析する．不連続部の具体的な形状としては，ゆるやかなコーナ及び波長に比してあまり大きくないステップを仮定し，比較的簡単な形で反射係数，透過係数等を求める．更に数値計算例をあげて種々の定量的検討をするとともに，本章で求める近似解の有効範囲についても検討する．

### 4.2 コーナにおける Bleustein-Gulyaev 波の透過及び散乱

図 4.1 に示すように，境界面  $S_1 (x_2=0)$  及び境界面  $S_2 (X_2=0)$  によって作られるコーナの角度が， $180^\circ$  よりも小さい ( $\theta > 0^\circ$ ) ような 6 mm クラスの圧電性媒質を考え，式 (4.1) で与えられる BG 波がこのコーナに， $x_1 = -\infty$  から面  $S_1$  に沿って  $x_1$  軸の正方向に入射するものとする．尚結晶軸の方向は  $x_3$  軸方向と一致しており，更に面  $S_1$  及び  $S_2$  はいずれも，質量効果の

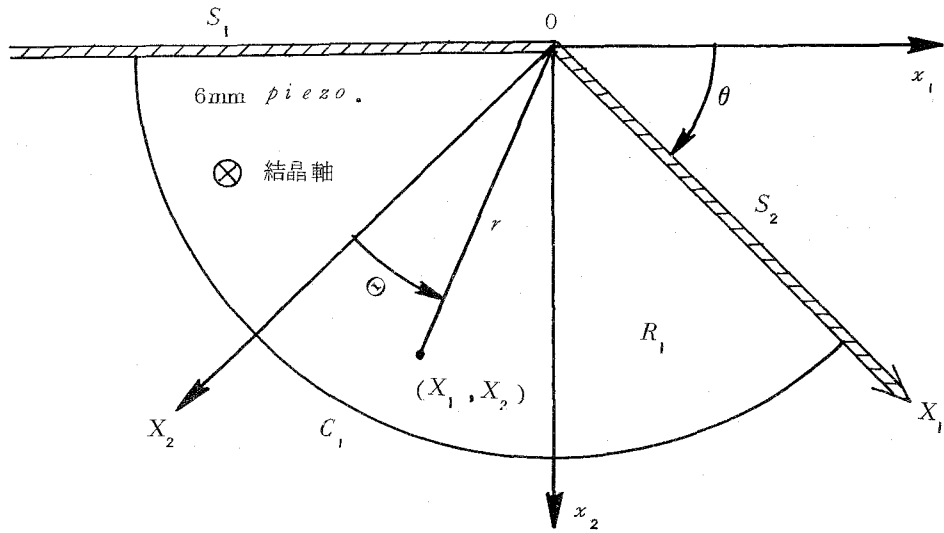


図 4. 1 圧電性媒質コーナ ( $\theta > 0^\circ$ )

無視できる無限に薄い完全導体で覆われているものとする。

$$\left. \begin{aligned} u_{in}(\mathbf{r}) &= A e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} \\ \phi_{in}(\mathbf{r}) &= \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} A (e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} - e^{-\xi_1 x_2 + i \xi_1 x_1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ここに下添字  $in$  は入射波であることを表わすものとする。

いまグリーン関数として、2.3節における無限境界面が境界面  $S_2$  に一致する  $G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ,  $G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ ,  $G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  及び  $G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  を用い、閉領域  $R_1$  として図 4.1 に示されているように、面  $S_1$ ,  $S_2$  及びコーナの節点  $O$  に中心を置き十分大きな半径を持つ円弧  $C_1$  で囲まれる領域を考える。閉領域  $R_1$  内での Total-Fields  $u(\mathbf{r})$  及び  $\phi(\mathbf{r})$  に対する積分表示は、式 (2.62), (2.63) において積分路  $C$  を、 $C = C_1 + S_1 + S_2$  と置けばよく、更に同じ領域  $R_1$  内の入射  $BG$  波  $u_{in}(\mathbf{r})$  及び  $\phi_{in}(\mathbf{r})$  も同じグリーン関数を用いて積分表示でき、得られる結果は各々次式のようになる。

$$u_{\text{Total}}(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_{\text{Total}}(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.2)$$

$$\phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_{\text{Total}}(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.3)$$

$$u_{in}(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dl \quad (4.4)$$

$$\phi_{in}(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dl \quad (4.5)$$

ここに  $T_{in}(\mathbf{r}')$  及び  $D_{in}(\mathbf{r}')$  は、入射  $BG$  波による境界上の Shear 応力及び電荷密度である。Total-Fields から入射波を差し引いたものは、面  $S_2$  に沿って  $X_2$  軸の正方向に伝搬する透過  $BG$  波 ( $u_t, \phi_t$ )、面  $S_1$  に沿って入射波と逆方向に伝搬する反射  $BG$  波 ( $u_r, \phi_r$ ) 及び散乱される Bulk-Shear 波 ( $u_b, \phi_b$ ) の和を表わすものと考えられ、これらの和を  $u_s(\mathbf{r})$ 、 $\phi_s(\mathbf{r})$  で表わせば

$$\left. \begin{aligned} u_s(\mathbf{r}) &= u_{\text{Total}}(\mathbf{r}) - u_{in}(\mathbf{r}) \\ \phi_s(\mathbf{r}) &= \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}) - \phi_{in}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

で与えられる。更に境界面  $S_1$  及び  $S_2$  における境界条件

$$\left. \begin{aligned}
& \text{面 } S_1 \text{ 上において } (x'_2=0) \\
& \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}')=0, \quad T_{\text{Total}}(\mathbf{r}')=0 \\
& \phi_{in}(\mathbf{r}')=0, \quad T_{in}(\mathbf{r}')=0 \\
& \text{面 } S_2 \text{ 上において } (X'_2=0) \\
& \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}')=0, \quad T_{\text{Total}}(\mathbf{r}')=0 \\
& G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0, \quad G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0 \\
& T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0, \quad T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')=0
\end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

を考慮すると、式(4.6)を用いて  $u_{3s}(\mathbf{r})$ ,  $\phi_s(\mathbf{r})$  は次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
u_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_1} \{ u_s(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \} dl' \\
& + \int_{S_2} \{ G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} dl' \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_1} \{ u_s(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \} dl' \\
& + \int_{S_2} \{ G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} dl' \quad (4.9)
\end{aligned}$$

但し、 $D_s(\mathbf{r}') = D_{\text{Total}}(\mathbf{r}') - D_{in}(\mathbf{r}')$  であり、 $u_s(\mathbf{r}')$ ,  $\phi_s(\mathbf{r}')$  の  $C_1$  上の積分は、放射条件により零になることを用いた。式(4.8), (4.9) は、面  $S_1$  上における粒子変位  $u_s(\mathbf{r}')$  及び電荷密度  $D_s(\mathbf{r}')$  を未知数とする連立積分方程式に帰着できるが、厳密に解くことは容易でない。そこで次のような近似を用いて近似解を求めることにする。いまコーナが非常にゆるやか、いかえれば  $\theta$  が小さい時は、面  $S_1$  上を  $x_1$  軸の負方向に進行する反射 BG 波は非常に少なく、また面  $S_1$  の方向に向う散乱 Bulk-Shear 波も非常に少ないと考えることが出来る。従って面  $S_1$  上における  $u_s$  及び  $\phi_s$  はほとんど無視することが出来、次式が成り立つものと考えられる。

$$\text{面 } S_1 \text{ 上において } (x'_2=0)$$

$$u_s(\mathbf{r}') \simeq 0, \quad D_s(\mathbf{r}') \simeq 0 \quad (4.10)$$

式(4.10)を式(4.8),(4.9)に代入することにより次式を得る.

$$u_s(\mathbf{r}) = \int_{S_2} \{ G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} dl' \quad (4.11)$$

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \int_{S_2} \{ G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \} dl' \quad (4.12)$$

従って  $u_s(\mathbf{r})$  及び  $\phi_s(\mathbf{r})$  面  $S_2$  上における入射波  $T_{in}(\mathbf{r}')$  及び  $\phi_{in}(\mathbf{r}')$  によって表わすことが出来る。また(2.48),(2.49)及び(2.51),(2.52)において示されているグリーン関数の表式中の無限積分は、複素積分の手法<sup>(55)</sup>を用いて以下のように計算する。すなわち図4.2に示す極の回りの積分の寄与が表面波を表わし、Branch-Cutに沿う積分の寄与がBulk-Shear波を表わす。従って面  $S_2$  に沿って  $X_1$  軸の正方向に伝搬する透過BG波 ( $u_t, \phi_t$ ) は、式(4.11),(4.12)において、グリーン関数の値として式(2.48),(2.49)及び(2.51),(2.52)の正の極における留数積分を行なったものを用いれば

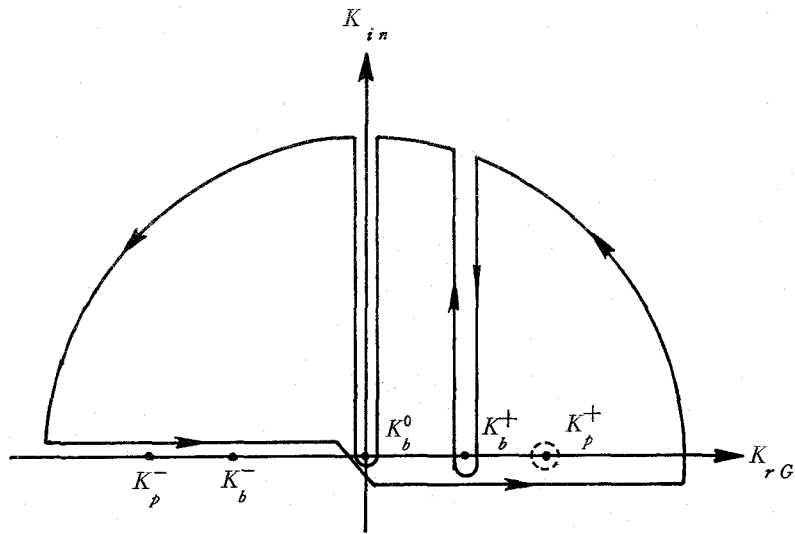


図4.2 グリーン関数の積分路



よい。更に式(4.1)で与えられる入射BG波を式(4.11),(4.12)に代入して面 $S_2$ に沿う積分を実行すれば、 $u_i(\mathbf{r})$ ,  $\phi_i(\mathbf{r})$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= T \cdot A \cdot e^{-\xi_2 X_2 + j \xi_1 X_1} \\ \phi_i(\mathbf{r}) &= T \cdot \frac{e^{15}}{\epsilon_{11}^S} A (e^{-\xi_2 X_2 + j \xi_1 X_1} - e^{-\xi_1 X_2 + j \xi_1 X_1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

但し $T$ は振幅透過係数で次式で与えられる。

$$T = \frac{K^2}{K^2 + i \tan \frac{\theta}{2}} \quad (4.14)$$

また散乱Bulk-Shear波の $u_b(\mathbf{r})$ ,  $\phi_b(\mathbf{r})$ は、式(4.11),(4.12)においてグリーン関数の値としてBranch-Cutに沿う積分したものをを用いればよい。Branch-Cutに沿う積分を近似的に鞍部点法を用いて求めると、 $u_b(\mathbf{r})$ ,  $\phi_b(\mathbf{r})$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_b(\mathbf{r}) &= B \cdot A \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\ \phi_b(\mathbf{r}) &= \frac{e^{15}}{\epsilon_{11}^S} u_b(\mathbf{r}) \quad (k_0 r \gg 1) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{\cos \theta}{K^2 |\sin \theta| + i \cos \theta} \cdot (B_1 - B_2) \\ B_1 &= \frac{K^2 (\cos \theta - \sqrt{1 - K^4} |\sin \theta|) + i K^2 \sin \theta}{-\sin \theta + i (\cos \theta - \sqrt{1 - K^4} \sin \theta)} \\ B_2 &= \frac{K^2 (\cos \theta - \sqrt{1 - K^4} |\sin \theta|) + i \sin \theta}{-K^2 \sin \theta + i (\cos \theta - \sqrt{1 - K^4} \sin \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

なお $r$ 及び $\theta$ は図4.1に示すとおりである。

一方圧電性媒質のコーナ角度が図4.3に示すように $180^\circ$ より大きい場合( $\theta < 0^\circ$ )には、入射B-G波に対する透過BG波及び散乱Bulk-Shear

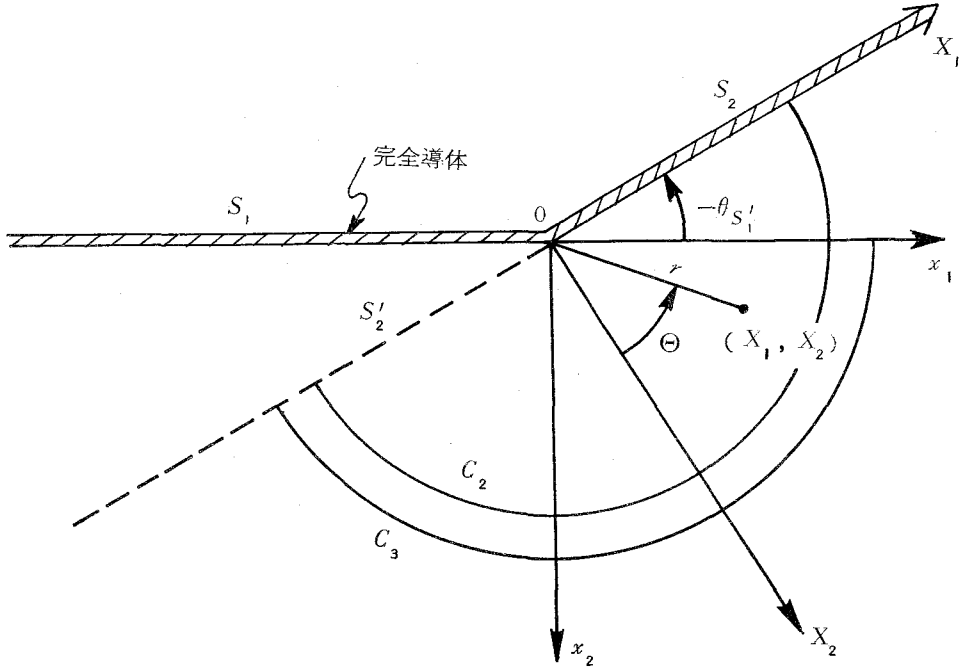


図 4 . 3 圧電性媒質コーナ ( $\theta < 0^\circ$ )

波は、次のようにして求めることが出来る。まずコーナ角度が  $180^\circ$  より小さい場合の時同様に、無限境界面が面  $S_2$  に一致するグリーン関数を用い、Total Fields ( $u_{\text{Total}}, \phi_{\text{Total}}$ ) に対する領域  $R_2$  として図 4 . 3 に示されているように、面  $S_2, S'_2$  及びコーナの節点  $O$  を中心とする、十分大きな半径を持つ円弧で囲まれた領域を考える。従って領域  $R_2$  内での  $u_{\text{Total}}(\mathbf{r}), \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r})$  の積分表示は、式 (2.62), (2.63) において積分路  $C$  を  $C = S_1 + S'_2 + C_2$  とおいたもので与えられる。入射  $BG$  波 ( $u_{in}, \phi_{in}$ ) に対する領域としては、図 4 . 3 で示されているような面  $S'_1, S'_2$  及び  $C_3$  で囲まれた領域  $R_3$  を考えれば、 $R_3$  内での入射  $BG$  波の積分表示は、式 (2.62), (2.63) において積分路  $C$  を  $C = S'_1 + S'_2 + C_3$  と置いたもので与えられる。従って透過  $BG$  波 ( $u_t, \phi_t$ ), 反射  $BG$  波 ( $u_r, \phi_r$ ) 及び散乱 Bulk-Shear 波 ( $u_b, \phi_b$ ) の和  $u_s(\mathbf{r}), \phi_s(\mathbf{r})$  は、式 (4.6) と同じ操作により次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
u_s(\mathbf{r}) = & - \int_{S'_1} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dl' \\
& + \int_{S'_2} \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_s(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \phi_s(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_s(\mathbf{r}) = & - \int_{S'_1} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dl' \\
& + \int_{S'_2} \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_s(\mathbf{r}') \right. \\
& \left. + \phi_s(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.18)
\end{aligned}$$

ここに式(4.17), (4.18)の導出にあたっては,  $C_2$ 及び $C_3$ 上における $u_s(\mathbf{r}')$ ,  $\phi_s(\mathbf{r}')$ の放射条件, また面 $S_1$ 上及び面 $S_2$ 上における, 応力が零, 電位が零という境界条件を用いている。式(4.17), (4.18)も式(4.8), (4.9)同様面 $S'_2$ 上での $u_s(\mathbf{r}')$ ,  $\phi_s(\mathbf{r}')$ あるいは $T_s(\mathbf{r}')$ ,  $D_s(\mathbf{r}')$ の二個を未知数とする連立積分方程式に帰着できる。これも直接解くことは容易でなく, 式(4.10)と同様な条件のもとで近似解を求める。すなわちコーナが比較的ゆるやかで反射波が少ないという範囲では, 面 $S'_2$ 上における $u_s(\mathbf{r}')$ 及び $\phi_s(\mathbf{r}')$ は非常に小さく, 次式が成り立つと考えられる。

$$\left. \begin{aligned}
& \text{面 } S'_2 \text{ 上において } (X'_2 = 0) \\
& u_s(\mathbf{r}') \simeq 0, \quad \phi_s(\mathbf{r}') = 0 \\
& T_s(\mathbf{r}') \simeq 0, \quad D_s(\mathbf{r}') = 0
\end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

このようにすれば, 式(4.17)及び(4.18)における面 $S'_2$ に沿う積分は零となり, 面 $S'_1$ 上における入射BG波のみで $u_s(\mathbf{r})$ ,  $\phi_s(\mathbf{r})$ を求めることが出来る。面 $S_2$ 上を $X_1$ 軸の正方向に伝搬する透過BG波は, グリーン関数を留数積分により求め, 式(4.17), (4.18)に代入して面 $S'_1$ に沿う積分を実行する

ことにより次式のように求められる。

$$u_z(\mathbf{r}) = T \cdot A e^{-\xi_2 X_2 + i \xi_1 X_1}$$

$$\phi_z(\mathbf{r}) = T \cdot \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} A \cdot (e^{-\xi_2 X_2 + i \xi_1 X_1} - e^{-\xi_1 X_2 + i \xi_1 X_1}) \quad (4.20)$$

但し  $T$  は、式 (4.14) で与えられるものであり、式 (4.10) 及び (4.19) の近似のもとでは、 $\theta < 0^\circ$  の振幅透過係数は  $\theta > 0^\circ$  の場合のその、複素共役で表わされることが判る。更に散乱される Bulk-Shear 波 ( $u_b, \phi_b$ ) は、グリーン関数を鞍部点法により求めることにより、次式のように得られる。

$$u_b(\mathbf{r}) = A \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r}} \cdot e^{i(k_0 r - \pi/4)} \cdot B'_i \quad \phi_b(\mathbf{r}) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} u_b(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

$$B'_i = i \sqrt{1-K^4} \left\{ B'_1 \cos(\theta+\Theta) - B'_2 \cos(\theta-\Theta) + B'_3 K^2 (\sin\Theta \cdot \sin\theta - i |\sin\Theta| \cos\theta) \right\}$$

$$+ K^2 (B'_1 + B'_2 - B'_3)$$

$$B'_1 = \frac{1}{2} \frac{\cos\Theta + i K^2 |\sin\Theta|}{\{1 - \sqrt{1-K^4} \sin(\theta+\Theta)\} \{\cos\theta - i K^2 |\sin\Theta|\}}$$

$$B'_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \sqrt{1-K^4} \sin(\theta-\Theta)}$$

$$B'_3 = \frac{\cos\Theta}{(i \cos\Theta + K^2 |\sin\Theta|) \{-\sqrt{1-K^4} |\sin\Theta| \sin\theta - i (1 - \sqrt{1-K^4} \sin\Theta \cdot \cos\theta)\}}$$

(4.22)

#### 4.3 ステップ状不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱

前節では、6 mm クラス圧電性媒質のコーナにおける BG 波の伝搬を近似的に解析しているが、本節では図 4.4 に示すようなステップ状不連続部における BG 波の伝搬の問題を取り上げて解析する。尚圧電性媒質の表面は前節同様すべて無限に薄い完全導体で覆われているものとし、結晶軸の方向はやはり  $x_3$  軸方向と一致しているものとする。

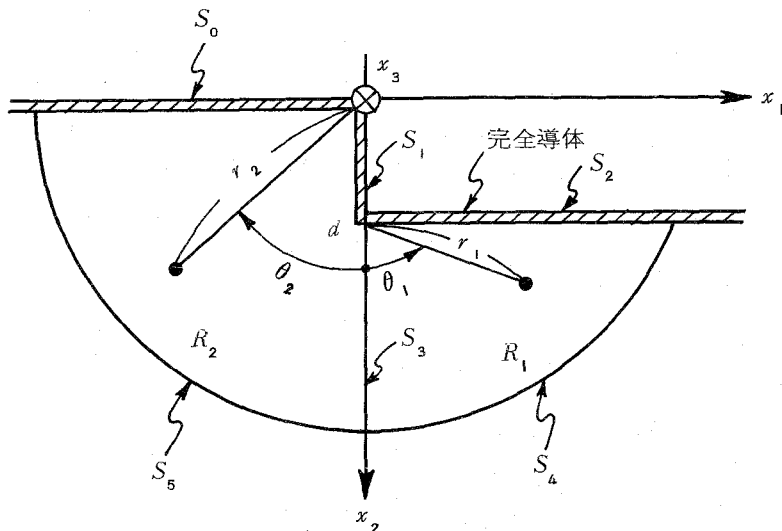


図 4 . 4 圧電性媒質ステップ

今面  $S_0$  に沿って  $x_1 = -\infty$  から  $x_1$  軸の正方向に式 (4.1) で表わされる  $BG$  波が, 図 4.4 に示す圧電性媒質のステップ<sup>+</sup>に入射するものとする. グリーン関数として無限境界面が面  $S_2$  に一致するものを用いれば, 図 4.4 に示す領域  $B_1$  における粒子変位  $u(\mathbf{r})$  及び電位  $\phi(\mathbf{r})$  は, 式 (2.62), (2.63) において積分路  $C$  を  $C = S_2 + S_3 + S_4$  とおくことにより積分表示される. 但し  $S_4$  は十分大きな半径を持つ円弧である. このようにして積分表示された  $u(\mathbf{r})$ ,  $\phi(\mathbf{r})$  は, 面  $S_2$  に沿って  $x_1$  軸の正方向に伝搬する透過  $BG$  波 ( $u_t, \phi_t$ ) 及び領域  $R_1$  内に散乱される Bulk-Shear 波 ( $u_{bR_1}, \phi_{bR_1}$ ) の和と考えることが出来る. ここで次式で与えられる境界条件

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{面 } S_2 \text{ 上において } (x_2' = d) \\
 & \phi(\mathbf{r}') = 0, \quad T(\mathbf{r}') = 0 \\
 & G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0, \quad T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \\
 & G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0, \quad T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

+ 本論文で取り扱うステップは, いわゆる Down step であるが, Up step の場合にも同様な取り扱いが可能である.

及び面  $S_4$  上における放射条件を考慮することにより，面  $S_3$  上における  $u(\mathbf{r}')$ ， $\phi(\mathbf{r}')$  または  $T(\mathbf{r}')$ ， $D(\mathbf{r}')$  を未知数とする連立積分方程式に帰着することが出来る。いまステップの高さ  $d$  が入射  $BG$  波の波長に比してあまり高くないと仮定すれば，面  $S_3$  上における  $u(\mathbf{r}')$ ， $\phi(\mathbf{r}')$  は近似的に入射波に等しいと考えることができる。従って領域  $R_1$  内の  $u(\mathbf{r})$  及び  $\phi(\mathbf{r})$  は近似的に次式より求めることができる。

$$u_3(\mathbf{r}) = \int_d^{\infty} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dx'_2 \quad (4.24)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_d^{+\infty} \left\{ u_{in}(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{in}(\mathbf{r}') \right\} dx'_2 \quad (4.25)$$

前節同様グリーン関数は留数積分及び鞍部点法により決定することが出来，従って透過  $BG$  波及び領域  $R_1$  に散乱される Bulk-Shear 波は各々次式のよりに求められる。

$$u_t(\mathbf{r}) = T \cdot A e^{-\xi_2(x_2-d) + i\xi_1 x_1} \\ \phi_t(\mathbf{r}) = T \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} A \left\{ e^{-\xi_2(x_2-d) + i\xi_1 x_1} - e^{-\xi_1(x_2-d) + i\xi_1 x_1} \right\} \quad (4.26)$$

$$T = \frac{K^2}{1-K^4} \left( \frac{1}{K^2} e^{-\xi_2 d} - K^2 e^{-\xi_1 d} \right) \quad (4.27)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bR_1}(\mathbf{r}) &= B_{R_1} A \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r_1}} e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\ \phi_{bR_1}(\mathbf{r}) &= \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} u_{bR_1}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

$$B_{R_1} = \frac{K^2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 - i K^2 \sin \theta_1} (e^{-\xi_2 d} - e^{-\xi_1 d}) \quad (4.29)$$

また  $(r_1, \theta_1)$  は、図 4.4 の座標系に示すとおりである。

一方無限境界面が面  $S_0$  に一致するグリーン関数を用いれば、図 4.4 に示す領域  $R_2$  における Total-Fields  $u_{\text{Total}}(\mathbf{r})$ ,  $\phi_{\text{Total}}(\mathbf{r})$  は、式 (2.62), (2.63) において積分路  $C$  を  $C = S_0 + S_1 + S_3 + S_5$  と置くことにより次式のように積分表示される。但し  $S_5$  は十分大きな半径を持つ円弧である。

$$u_{\text{Total}}(\mathbf{r}) = \oint_{S_0+S_1+S_3+S_5} \left\{ u_{\text{Total}}(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.30)$$

$$\phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}) = \oint_{S_0+S_1+S_3+S_5} \left\{ u_{\text{Total}}(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_{\text{Total}}(\mathbf{r}') \right\} dl' \quad (4.31)$$

更に式 (4.1) の入射  $BG$  波も同じグリーン関数を用いて同様な積分表示が可能である。式 (4.30), (4.31) から入射  $BG$  波を差し引いて得られる積分表示は、面  $S_0$  に沿って入射  $BG$  波と逆方向、 $x_1$  軸の負方向に伝搬する反射  $BG$  波 ( $u_r, \phi$ ), 領域  $R_2$  内に散乱される Bulk-Shear 波 ( $u_{bR_2}, \phi_{bR_2}$ ) の和  $u_s(\mathbf{r})$ ,  $\phi_s(\mathbf{r})$  を表わすものと考えることが出来る。ここで次式で示される境界条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{面 } S_0 \text{ 上において } (x'_2 = 0) \\ \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') = 0, \quad T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') = 0 \\ G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0, \quad T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \\ G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0, \quad T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \\ \text{面 } S_1 \text{ 上において } (x'_1 = 0, \quad 0 \leq x'_2 \leq d) \\ \phi_{\text{Total}}(\mathbf{r}') = 0, \quad T_{\text{Total}}(\mathbf{r}') = 0 \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

及び放射条件を考慮することにより，式(4.30)，(4.31)は面 $S_1$ 上及び $S_3$ 上の $u_s(\mathbf{r}')$ ， $D_s(\mathbf{r}')$ を未知数とする連立積分方程式に帰着することができる。ここで前述の，ステップの高さが入射BG波の波長に比してあまり大きくないという仮定を考慮すると，面 $S_3$ に沿う積分が領域 $R_2$ 内のField， $u_s(\mathbf{r})$ 及び $\phi_s(\mathbf{r})$ ，にほとんど寄与しないと考えることができる。更に面 $S_3$ における入射BG波の反射係数を，第一次近似としてBulk平面波の無限境界面における反射係数で近似すれば，領域 $R_2$ 内における粒子変位及び電位の近似解は次式より求めることができる。

$$u_s(\mathbf{r}) = \int_0^d \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_u^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right. \\ \left. + G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - G_E^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \right\} dx' \quad (4.33)$$

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \int_0^d \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') - \phi_{in}(\mathbf{r}') D_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right. \\ \left. - G_M^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_{in}(\mathbf{r}') - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D_s(\mathbf{r}') \right\} dx' \quad (4.34)$$

グリーン関数を複素積分の手法を用いて決定し，反射BG波( $u_r$ ， $\phi_r$ )及び領域 $R_2$ 内に散乱されるBulk-Shear波( $u_{bR_2}$ ， $\phi_{bR_2}$ )は各々次式のように求められる。

$$u_r(\mathbf{r}) = R \cdot A e^{-\xi_2 x_2 - i \xi_1 x_1} \quad (4.35)$$

$$\phi_r(\mathbf{r}) = R \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} A (e^{-\xi_2 x_2} - e^{-\xi_1 x_2}) e^{-i \xi_1 x_1}$$

$$u_{bR_2}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \kappa_0 r_2}} A e^{i(\kappa_0 r_2 - \pi/4)} B_{R_2} \quad (4.36)$$

$$\phi_{bR_2}(\mathbf{r}) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} u_{bR_2}(\mathbf{r})$$

$$R = \frac{2K^4}{(1-K^4)(1+K^2)} \left\{ e^{-(\xi_1 + \xi_2)d} - 1 \right\} + \frac{1}{1-K^2} \left\{ K^2(1 - e^{-2\xi_1 d}) + 1 - e^{-2\xi_2 d} \right\} \quad (4.37)$$



$$\begin{aligned}
B_{R_2} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1-K^4}{1+K^4} \sqrt{1-K^4} \cdot \sin \theta_2 - 1 \right) \\
& \cdot \left\{ \frac{e^{-(\xi_2 + i k_0 \cos \theta_2)d} - 1}{K^2 + i \sqrt{1-K^4} \cos \theta_2} - \frac{\cos \theta_2 - i K^2 \sin \theta_2}{\cos \theta_2 + i K^2 \sin \theta_2} \right. \\
& \cdot \left. \frac{e^{(-\xi_2 + i k_0 \cos \theta_2)d} - 1}{-K^2 + i \sqrt{1-K^4} \cos \theta_2} \right\} + \frac{K^2 \cos \theta_2}{\cos \theta_2 + i K^2 \sin \theta_2} \\
& \cdot \left[ \frac{2}{1+K^4} \sqrt{1-K^4} \cdot \sin \theta_2 \frac{e^{(-\xi_2 + k_0 \sin \theta_2)d} - 1}{-K^2 + \sqrt{1-K^4} \sin \theta_2} \right. \\
& \left. - \left\{ \sqrt{1-K^4} \sin \theta_2 + \frac{1-K^4}{1+K^4} \right\} \frac{e^{(-\xi_1 + k_0 \sin \theta_2)d} - 1}{-1 + \sqrt{1-K^4} \cdot \sin \theta_2} \right] \\
& + \frac{K^6}{1+K^4} \left\{ \frac{e^{-(\xi_1 + i k_0 \cos \theta_2)d} - 1}{1 + i \sqrt{1-K^4} \cos \theta_2} - \frac{\cos \theta_2 - i K^2 \sin \theta_2}{\cos \theta_2 + i K^2 \sin \theta_2} \right. \\
& \cdot \left. \frac{e^{(-\xi_1 + i k_0 \cos \theta_2)d} - 1}{-1 + i \sqrt{1-K^4} \cos \theta_2} \right\}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

#### 4.4 数値計算例及び検討

圧電性媒質における，準静電近似のもとでの弾性波のエネルギー関係式は，圧電弾性波のポインティングベクトルを  $P$  として，次式のように表わすことが出来る<sup>(61)</sup>。

$$P = \frac{1}{2} R_e \left[ i \omega \int_0^\infty (\phi \cdot D_1^* - T_{31} u_3^*) dx_2 \right] \tag{4.39}$$

但し \* の記号は，複素共役を表わす。

式(4.41)を用いて，不連続部がコーナ及びステップの場合の，入射  $BG$  波に対する各電力係数は各々以下のように求めることが出来る。すなわち各場合の振幅透過係数を  $T$ ，振幅反射係数を  $R$  とすれば，電力透過係数  $\Gamma_T$ ，電力反射係数  $\Gamma_R$  は，各々次式で与えられる。

$$\Gamma_T = |T|^2 \quad (4.40.a)$$

$$\Gamma_R = |R|^2 \quad (4.40.b)$$

更に散乱 Bulk-Shear 波の振幅  $B(\theta)$  と散乱電力  $\Gamma_B$  の関係は次式のようになる。

$$\Gamma_B = Q \int_{\theta_1}^{\theta_2} |B(\theta)|^2 d\theta \quad (4.41)$$

但し  $\theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ) は散乱される角度<sup>+</sup>であり、 $Q$  は次式で与えられる。

$$Q = \frac{K^2(1+K^2)}{\pi \{1+K^2(2-3K^2)\}} \quad (4.42)$$

また散乱 Bulk-Shear 波の散乱パターン  $P_{at}(\theta)$  は、次のように表わされる。

$$P_{at}(\theta) = Q |B(\theta)|^2 \quad (4.43)$$

すなわち、式(4.13)～(4.16)ないし式(4.20)～(4.22)に式(4.40)～(4.43)を適用すれば、コーナ状不連続部に  $BG$  波が入射する場合の電力透過係数、入射  $BG$  波の電力に対する散乱電力比及び Bulk-Shear 波の散乱パターンを求めることが出来る。更に式(4.26)～(4.29)及び(4.35)～(4.38)に式(4.40)～(4.43)を適用すれば、ステップ状不連続部に  $BG$  波が入射する場合の電力透過係数、電力反射係数、散乱電力比及び散乱パターンを求めることが出来る。

上記の二つの場合に対する数値計算を、圧電性媒質として  $CdS$  ( $K^2=0.0355$ ),  $ZnO$  ( $K^2=0.1000$ ) 及び  $PZT-4$  ( $K^2=0.4937$ ) の三つを仮定し、4.2節、4.3節で解析した、コーナ及びステップ状不連続部について行なり。

---

+ 散乱される角度とは、たとえば角度  $\theta'$  のコーナの場合は  $\theta_1 = (\theta' - 90)^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$  であり、ステップの場合には  $\theta_1 = -90^\circ$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$  となる。

#### 4.4.1 コーナの場合

(4.40) ~ (4.43) を用いて行なった数値計算例を示す前に、式 (4.13) ~ (4.16), 式 (4.20) ~ (4.22) で求めた透過 *BG* 波及び散乱 Bulk-Shear 波が近似解として有効なコーナ角度の範囲を求めておかねばならない。式 (4.10), (4.19) の近似は  $|\theta|$  が大きくなれば当然成り立たなくなる。ここで適当な実験結果が見当たらないので、この近似が成り立つための  $\theta$  の範囲を次のようにエネルギー関係式を用いて一応の目安とする。もし  $|\theta|$  が比較的小さく、式 (4.10), (4.19) の近似が有効なら、透過 *BG* 波及び散乱 Bulk-Shear 波のエネルギーの和は、入射 *BG* 波のエネルギーに等しくなるものと考えられ、従って次式が成り立つものと考えられる<sup>+</sup>。

$$\Gamma_T + \Gamma_B = 1 \quad (4.44)$$

*CdS*, *ZnO*, *PZT-4* の3つの媒質における、コーナ角度  $\theta$  に対する  $\Gamma_T + \Gamma_B$  の数値例を表4.1に示す、表4.1より媒質により程度の違いはあるが、

表4.1  $\Gamma_T + \Gamma_B$

$\theta^\circ$	$\Gamma_T + \Gamma_B$		
	<i>CdS</i>	<i>ZnO</i>	<i>PZT-4</i>
-20°	0.970	0.947	0.980
-10°	0.973	0.970	0.995
-5°	0.981	0.989	0.999
-4°	0.985	0.992	0.999
-3°	0.989	0.996	1.000
-2°	0.994	0.998	1.000
-1°	0.998	0.999	1.000
0°	1.000	1.000	1.000
1°	0.998	0.999	1.000
2°	0.994	0.996	1.000
3°	0.989	0.996	1.000
4°	0.985	0.992	0.999
5°	0.981	0.989	0.999
10°	0.973	0.970	0.995
20°	0.970	0.947	0.990

+ 通常は  $\Gamma_T + \Gamma_R + \Gamma_B = 1$  であるが、ここでは反射電力がほとんど0という近似のもとで計算しているので、式 (4.44) のようになる。

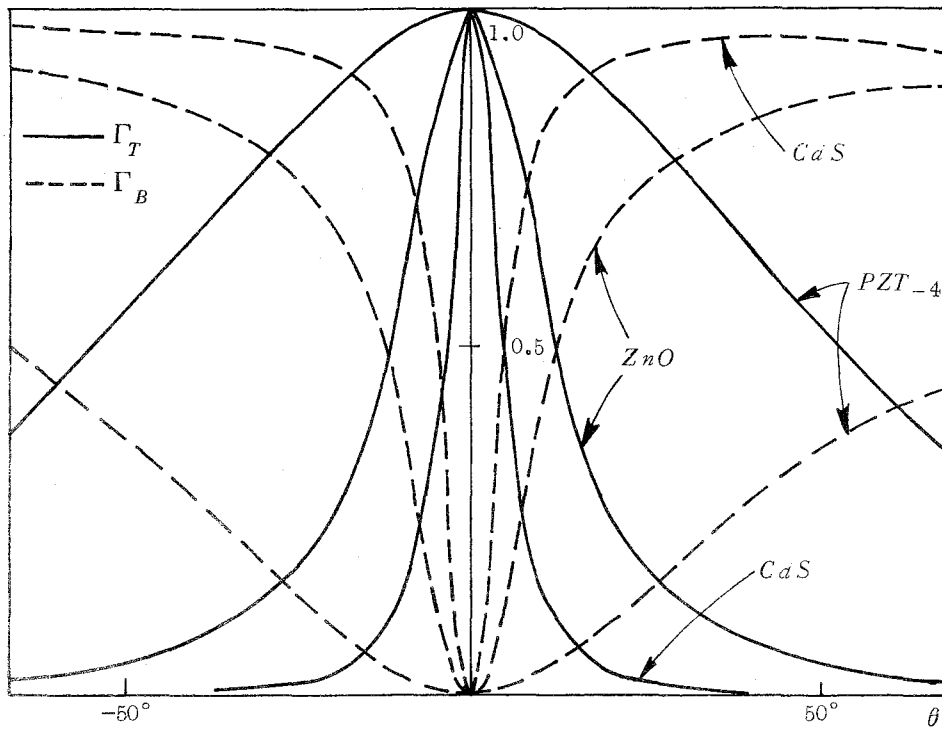


図 4 . 5 電力透過係数及び散乱電力比

各媒質とも  $-10^\circ < \theta < 10^\circ$  の範囲でエネルギー関係式を比較的よく満しており、この範囲で近似解としてほぼ有効であると考えることが出来る。

図 4 . 5 に電力透過係数及び散乱 Bulk-Shear 波の対入射電力比の数值計算例を、図 4 . 6 に Bulk-Shear 波の散乱パターンをコーナ角度をパラメータとして示す。図

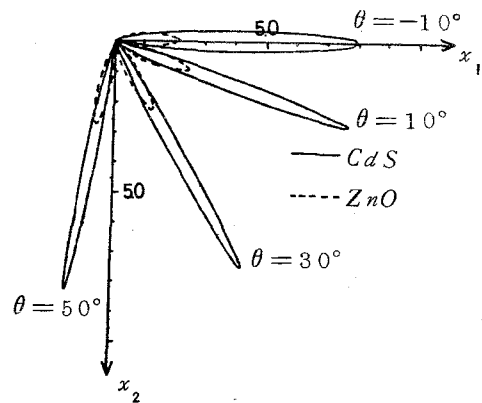


図 4 . 6 コーナにおける Bulk-Shear 波の散乱パターン

4.5 から、コーナ角度が  $180^\circ$  よりずれるにつれて、いかえれば  $|\theta|$  が  $0^\circ$  からずれるにつれて、入射  $BG$  波が散乱 Bulk-Shear 波として散乱される割合が急速に増加していくことが判る。また電気機械結合係数  $K^2$  が大きい程、すなわち表面への  $BG$  波の集中度が高いもの程、透過  $BG$  波の散乱 Bulk-Shear 波に対する割合が大きくなることが判る。これは、 $K^2$  が大きい程、 $BG$  波がコーナにおいて、散乱されにくく透過されやすいことを示している。さらに図 4.6 より Bulk-Shear 波の散乱パターンは、 $\theta > 0^\circ$  の場合幾何光学的な反射方向でピーク値を取り、 $\theta < 0^\circ$  の場合は入射  $BG$  波の進行方向でピーク値を取ることも判る。

#### 4.4.2 ステップ状不連続の場合

コーナの場合同様式 (4.26) ~ (4.29) 及び式 (4.35) ~ (4.38) に式 (4.40) ~ (4.43) を適用することにより、 $\Gamma_T$ ,  $\Gamma_R$ ,  $\Gamma_{BR_1}$  及び  $\Gamma_{BR_2}^+$  を求めることができる。式 (4.26) ~ (4.29) 及び式 (4.35) ~ (4.38) が近似解として有効な範囲は、コーナの場合同様エネルギー関係式を検討することにより一応の目安とする。すなわち電力係数の和を  $\Gamma$  で表わすものとすれば、前節で求めた近似解が有効な範囲内で次式が成り立つものと考えることが出来る。

$$\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_R + \Gamma_{BR_1} + \Gamma_{BR_2} = 1 \quad (4.45)$$

4.4.1 の場合と同様  $CdS$ ,  $ZnO$ ,  $PZT-4$  の 3 つを用いた場合の各電力係数の数値計算例を、ステップの高さ  $d$  を入射  $BG$  波の波長で規格した値を変数として図 4.7 に示す。また Bulk-Shear の散乱パターンの一例を、媒質として  $CdS$  を用いた場合について図 4.8 に示す。

図 4.7 より媒質として  $CdS$ ,  $ZnO$  を仮定した場合は、得られた結果がステップの高さが  $0 \sim 1.5$  波長の範囲で有効であると考えられる。しかしながら媒質として  $PZT-4$  を仮定した場合には得られた近似解はあまり適当であるといえないことも判る。これは電気機械結合係数  $K^2$  が大きい程  $BG$  波の表

---

+  $\Gamma_{BR_1}$  は領域  $R_1$ , すなわちステップ後方への散乱電力比であり、 $\Gamma_{BR_2}$  は領域  $R_2$  への散乱電力比である。

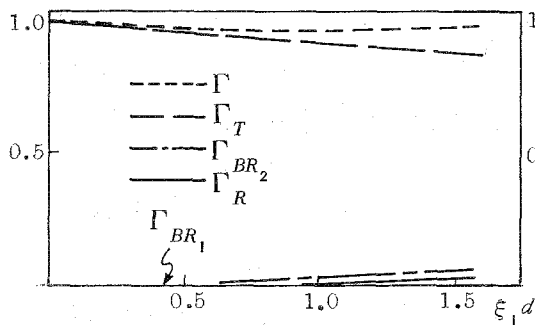


図 4.7 a  $\Gamma, \Gamma_T, \Gamma_R, \Gamma_{BR_1}$  及び  $\Gamma_{BR_2}$   
(媒質  $CdS$ )

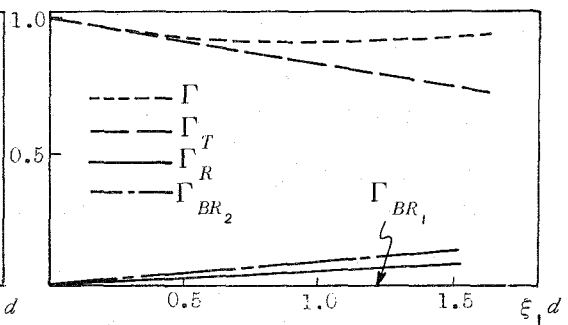


図 4.7 b  $\Gamma, \Gamma_T, \Gamma_R, \Gamma_{BR_1}$  及び  $\Gamma_{BR_2}$   
(媒質  $ZnO$ )

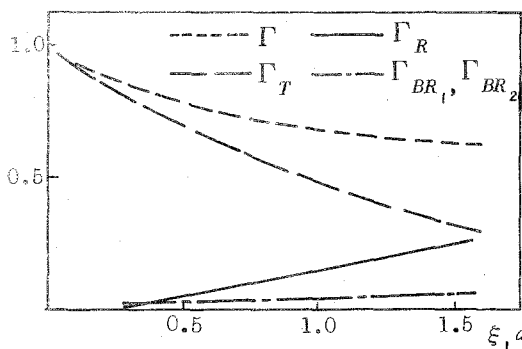


図 4.7 c  $\Gamma, \Gamma_T, \Gamma_R, \Gamma_{BR_1}$  及び  $\Gamma_{BR_2}$   
(媒質  $PZT-4$ )

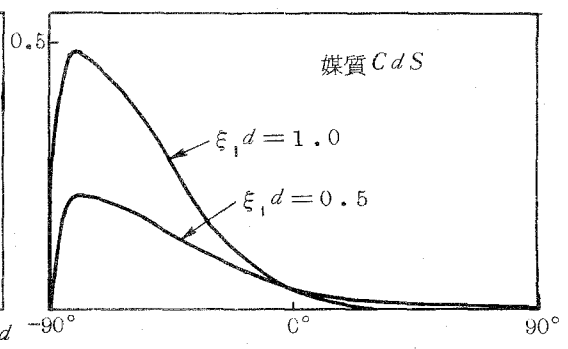


図 4.8 ステップにおいて散乱される  
Bulk-Shear波のパターン

面への集中度が高く、表面不整の影響を受けやすいためであると考えられ、前節で用いた近似が成り立たなくなるからであると考えられる。

また  $K^2$  が大きい程  $BG$  波はステップ状不連続部(Down step)において透過しにくく反射されやすいことも判る。更に Bulk-Shear波として散乱される割合も後方への散乱電力に比して、前方への散乱電力の方がはるかに大きいことが、図 4.7, 4.8 より判る。

#### 4.5 結 言

本章では、圧電性媒質の不連続部における  $BG$  波の反射、透過及び散乱の問題を、第 2 章で導出した積分表示を用いて近似的に解析し、数値計算例を

あげて定量的に検討した。なお不連続部の具体的な形状としては、ゆるやかなコーナ及び波長に比してあまり高くない Down step を仮定している。また近似解として有効な範囲は、エネルギー関係式を検討することにより一応の目安として求めている。その結果以下のことが明らかになった。

(i) コーナにおいては、電気機械結合係数の高い媒質程、入射  $BG$  波は散乱されにくく透過しやすい。

(ii) ステップ状不連続部においては、逆に電気機械結合係数の高い媒質程、入射  $BG$  波はより影響を受け、反射されやすく、散乱もされやすい。これは、電気機械結合係数が高い程  $BG$  波の表面への集中度が高いためであり、従って本章で得られる近似解が有効な範囲は、結合係数の高い媒質程、狭いと言える。

最後に、これまで経験的に処理されてきた Bulk 波に対しても、散乱パターンを求めることにより定量的に考察を行なった。

## 第 5 章 磁性媒質不連続部の解析<sup>(29),(30),(32),(44)</sup>

### 5.1 緒 言

弾性表面波導波路の不連続問題に関する研究の必要性は、これまでに繰返し述べてきたとおりである。更にいくつかの困難さがあるにもかかわらず、不連続問題が様々の観点から取り上げられ研究されていることもこれまでに述べてきたとおりである。

ところで、磁気弾性表面波は、非可逆性を有し且つ外部磁界により伝搬特性を容易に制御でき<sup>(21)</sup>、非圧電及び圧電弾性表面波等に比し、より広い応用が考えられる<sup>(57)</sup>。しかしながら、その非可逆性のため不連続問題の取り扱いが容易でなく、磁気弾性波導波路の不連続問題の報告は見当たらない。従って今後、磁気弾性表面波を種々の機能素子へ応用していく上で、不連続問題は解析されねばならない問題のひとつであると考えられる。

本章においては、第 3 章において導出した積分表示を用いることによって磁性媒質不連続部における磁気弾性表面波の、反射、透過及び散乱の問題を近似的に解析する。具体的な不連続部の形状として、前章と同様の不連続部を考え、同様な解析、検討を行なう。更に磁気弾性波が有している非可逆性に及ぼす不連続部の影響についても検討する。

### 5.2 コーナにおける磁気弾性表面波の透過及び散乱

第 3 章において求めた  $SH$  タイプの磁気弾性波の積分表示を、図 5.1 に示すコーナにおける  $SH$  タイプの磁気弾性表面波の透過と散乱の問題に適用し、入射波が前進波の場合と後退波の場合の 2 つの場合について近似解を求める。

#### 5.2.1 入射波が前進波の場合

図 5.1 に示すように面  $S_1$  ( $x_2=0$ ) 及び面  $S_2$  ( $X_2=0$ ) によって作られる、コーナの角度が  $180^\circ$  よりも小さいフェライト媒質を考え、 $x_1=-\infty$  から面  $S_1$  に沿って  $x_1$  軸の正方向に  $SH$  タイプの磁気弾性表面波が入射するものとする。更に面  $S_1$ ,  $S_2$  は無限に薄い完全導体で覆われているものとする。面  $S_1$



に沿って進行する入射磁気弾性表面波は、粒子変位の振幅を  $u_i$  とし、次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= u_i \cdot e^{-\xi_2^+ x_2 + i \xi_1^+ x_1} \\ A_i(\mathbf{r}) &= b_{eg} \cdot \mu_{eg} u_i (e^{-\xi_2^+ x_2} - e^{-\xi_1^+ x_2}) e^{i \xi_1^+ x_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

いまグリーン関数として第3章における無限境界面  $W$  が面  $S_2$  に一致するものを用い、領域  $S$  として  $S_1$ ,  $S_2$  及びコーナの頂点  $0$  を中心とする十分大きな円弧  $C_1$  で囲まれる領域を考えれば、式(3.36), (3.37)を用いて入射波は次のように積分表示される。

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_i(\mathbf{r}') T_u(\mathbf{G}) - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}') \right\} dV' \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$A_i(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_i(\mathbf{r}') T_A(\mathbf{G}) - G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') \right\}$$

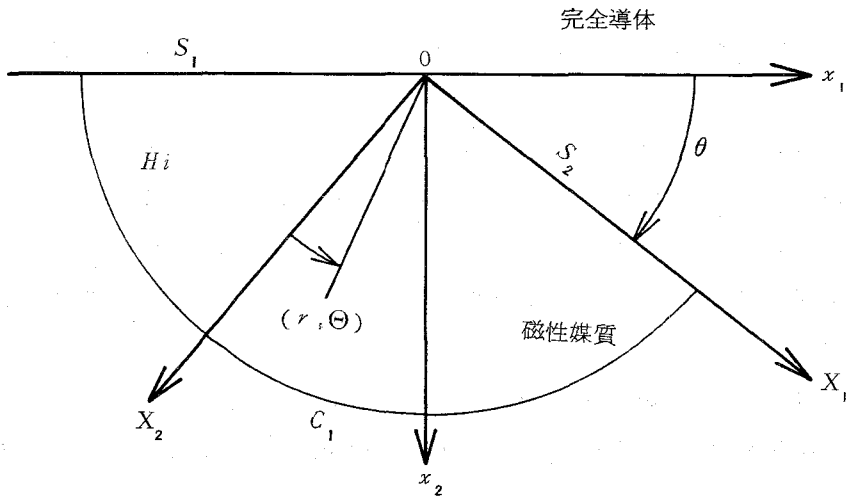


図 5.1 コーナの座標系

$$+ \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_A(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}') \Big\}_n dl' \quad (5.3)$$

但し  $\mathbf{T}_i(\mathbf{r}')$ ,  $\mathbf{H}_i(\mathbf{r}')$  は、各々入射波の Shear Stress 及び磁界である。  
更に領域  $S$  内での Total-Fields ( $u_3(\mathbf{r})$ ,  $A_3(\mathbf{r})$ ) も同じグリーン関数を用いて、次式のように積分表示される。

$$u_3(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_3(\mathbf{r}') \mathbf{T}_u(\mathbf{G}) - G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right\}_n dl' \quad (5.4)$$

$$A_3(\mathbf{r}) = \oint_{S_1+S_2+C_1} \left\{ u_3(\mathbf{r}') \mathbf{T}_A(\mathbf{G}) - G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \mathbf{T}(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_A(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_J^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right\}_n dl' \quad (5.5)$$

Total-Fields から入射波を差し引いて得られる積分表示は、面  $S_2$  に沿って伝搬する透過表面波 ( $U_i(\mathbf{r})$ ,  $A_i(\mathbf{r})$ ), 面  $S_1$  に沿って入射波と逆方向に伝搬する反射表面波 ( $u_r(\mathbf{r})$ ,  $A_r(\mathbf{r})$ ) 及び散乱される Bulk-Shear 波 ( $u_b(\mathbf{r})$ ,  $A_b(\mathbf{r})$ ) の和を表すものと考えられる。いまこれらの和を  $u_s(\mathbf{r})$ ,  $A_s(\mathbf{r})$  で表せば、 $u_s(\mathbf{r})$ ,  $A_s(\mathbf{r})$  は次式で与えられる。

$$u_s(\mathbf{r}) = u_3(\mathbf{r}) - u_i(\mathbf{r}), \quad A_s(\mathbf{r}) = A_3(\mathbf{r}) - A_i(\mathbf{r}) \quad (5.6)$$

更に面  $S_1$  上 ( $x_2=0$ ), 面  $S_2$  上 ( $X_2=0$ ) において成り立つ境界条件

$$\left. \begin{array}{l} \text{面 } S_1 \text{ 上で } A_3(\mathbf{r}') = 0, \quad \{ \mathbf{T}(\mathbf{r}') \}_n = 0 \Big|_{x'_2=0} \\ \quad \quad \quad A_i(\mathbf{r}') = 0, \quad \{ \mathbf{T}_i(\mathbf{r}') \}_n = 0 \Big|_{x'_2=0} \\ \text{面 } S_2 \text{ 上で } A_3(\mathbf{r}') = 0, \quad \{ \mathbf{T}(\mathbf{r}') \}_n = 0 \Big|_{X'_2=0} \\ \quad \quad \quad G_J^{u(A)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0, \quad \{ \mathbf{T}_{u(A)}(\mathbf{G}) \}_n = 0 \Big|_{X'_2=0} \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

を考慮し、 $C_1$  に沿う積分が放射条件により零となることを用いれば、式 (5.6) より  $u_s(\mathbf{r})$ ,  $A_s(\mathbf{r})$  は次のように積分表示される。

$$\begin{aligned}
u_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_1} \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_u(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_j^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') \right\}_n dl' \\
& + \int_{S_2} \left\{ G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') - \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) \right\}_n dl' \quad (5.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_1} \left\{ u_s(\mathbf{r}') T_A(\mathbf{G}) - \mathbf{G}_j^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') \right\}_n dl' \\
& + \int_{S_2} \left\{ G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') - \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_A(\mathbf{G}) \right\}_n dl' \quad (5.9)
\end{aligned}$$

但し  $\mathbf{H}_s(\mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{r}') - \mathbf{H}_i(\mathbf{r}')$  である。式 (5.8), (5.9) は面  $S_1$  における機械変位  $u_s(\mathbf{r})$  及び磁界  $\mathbf{H}_s(\mathbf{r})$  を未知関数とする連立積分方程式であるが、厳密に解析することは困難である。いまコーナが非常に緩やかな場合には、反射波および面  $S_1$  に向う散乱 Bulk-Shear 波が非常に小さいと考えることができ、次式の近似が成立するものと考えることができる。

$$\text{面 } S_1 \text{ 上で } u_s(\mathbf{r}') \simeq 0, \quad \mathbf{H}_s(\mathbf{r}') \simeq 0 \Big|_{x_2'=0} \quad (5.10)$$

すなわち式 (5.10) の近似の下で式 (5.8), (5.9) は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
u_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_2} \left\{ G_M^u(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') - \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_u(\mathbf{G}) \right\}_n dl' \\
A_s(\mathbf{r}) = & \int_{S_2} \left\{ G_M^A(\mathbf{r}|\mathbf{r}') T_i(\mathbf{r}') - \mathbf{A}_i(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}_A(\mathbf{G}) \right\}_n dl'
\end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

以上の議論より  $u_s(\mathbf{r})$ ,  $A_s(\mathbf{r})$  は、面  $S_2$  における入射波の Shear 応力およびベクトルポテンシャルによって表すことができる。すなわち式 (3.24) ~ (3.27) のグリーン関数を式 (5.11) に代入し面  $S_2$  に沿う積分を行えば、 $u_s(\mathbf{r})$  及び  $A_s(\mathbf{r})$  が求められる。なおグリーン関数の表式中の無限積分は、複素積分の手法を用いて以下のように計算する。すなわち図 4.2 に示す極の回りの積分の寄与が表面波を表し、Branch-Cut に沿う積分の寄与が Bulk-Shear 波を表す。従って  $X_1$  軸の正方向に伝搬する透過波は、グリーン関数を図 4.2 に示す正の極の回りの留数積分で決定し、式 (5.11) に代入して求める。又、散乱 Bulk-Shear 波はグリーン関数を図 4.2 に示す Branch-Cut に沿う積分で決定し、式 (5.11) に代入して求める。なお

Branch-Cut に沿う積分は、近似的に鞍部点法により求めることができる。得られる結果を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} u_c(\mathbf{r}) &= T \cdot u_i e^{-\xi_2^+ X_2 + i \xi_1^+ X_1} \\ A_c(\mathbf{r}) &= T \cdot b_{eq} \mu_{eq} u_i (e^{-\xi_2^+ X_2} - e^{-\xi_1^+ X_2}) e^{i \xi_1^+ X_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} u_b(\mathbf{r}) &= S_c \cdot u_i \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\ A_b(\mathbf{r}) &= b_{eq} \cdot \mu_{eq} u_b(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

但し、 $k_0 = \sqrt{\rho \omega^2 / C_{44}}$ 、 $k_0 r \gg 1$  である。又、 $T$  (透過係数)、 $S_c$  は次式に示すとおりである。

$$\begin{aligned} T &= \frac{K^+}{K^+ + i \tan \theta/2} \quad (5.14) \\ S_c &= \frac{\cos \theta}{K^\pm \sin \theta + i \cos \theta} \left\{ \frac{S_{c1} + i S_{c2}}{K^+ \sin \theta + i S_{c3}} - \frac{S_{c1} + i S_{c4}}{\sin \theta + i S_{c3}} \right\} \\ S_{c1} &= -\frac{\omega_s}{\omega_r - \omega} K^+ \cos \theta + K^\pm \sqrt{1 - (K^+)^2} \cdot \frac{\omega_s}{\omega_r \mp \omega} \cdot \sin \theta \\ S_{c2} &= \left\{ 1 - \frac{\omega_r + \omega_s - \omega}{\omega_r - \omega} \cdot (K^+)^2 \right\} \sin \theta \\ S_{c3} &= \sqrt{1 - (K^+)^2} \cdot \sin \theta - \cos \theta, \quad S_{c4} = K^+ \cdot \frac{\omega_s}{\omega_r - \omega} \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (5.15)$$

なお  $r$ 、 $\theta$  は図 5.1 に示すとおりであり、式 (5.15) 中の複号は上段の符号が  $\theta > 0$  の領域に対応し、下段の符号が  $\theta < 0$  の領域に対応する。

### 5.2.2 入射波が後退波の場合

図 5.1 に示すコーナに、次式で与えられる後退波が入射する場合も、前

節の議論と全く同様にして透過波および散乱 Bulk-Shear 波の近似解が求められる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= u_i e^{-\xi_2^- x_2 - i\xi_1^- x_1} \\ A_i(\mathbf{r}) &= b_{eq} \mu_{eq} \cdot u_i (e^{-\xi_2^- x_2 - |\xi_1^-| x_2}) e^{-i\xi_1^- x_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

得られる結果のみを示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= T_B \cdot u_i e^{-\xi_2^- X_2 - i\xi_1^- X_1} \\ A_i(\mathbf{r}) &= b_{eq} \cdot \mu_{eq} T_B \cdot u_i (e^{-\xi_2^- X_2 - |\xi_1^-| X_2}) \cdot e^{-i\xi_1^- X_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} u_b(\mathbf{r}) &= S_{cB} u_i \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r}} \cdot e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\ A_b(\mathbf{r}) &= b_{eq} \cdot \mu_{eq} u_b(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$T_B = \frac{K^-}{K^- - \tan \theta/2} \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{cB} &= \frac{\cos \theta}{-K^- \sin \theta + i \cos \theta} \left\{ \frac{S_{cB1} + i S_{cB2}}{-K^- \sin \theta + i S_{cB3}} - \frac{S_{cB1} + i S_{cB4}}{\sin \theta + i S_{cB3}} \right\} \\ S_{cB1} &= -\frac{\omega_s}{\omega_r + \omega} K^- \cos \theta + K^- \sqrt{1 - (K^-)^2} \cdot \frac{\omega_s}{\omega_r + \omega} \cdot \sin \theta \\ S_{cB2} &= -\left\{ 1 - \frac{\omega_r + \omega_s + \omega}{\omega_r + \omega} \cdot (K^-)^2 \right\} \sin \theta \\ S_{cB3} &= \sqrt{1 - (K^-)^2} \cdot \sin \theta - \cos \theta, \\ S_{cB4} &= -K^- \frac{\omega_s}{\omega_r + \omega} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

なお式 (5.20) 中の複号は前節同様、上段の符号が  $\theta > 0$  の領域に対応し下段の符号が  $\theta < 0$  の領域に対応する

最後に、 $180^\circ$ 以上の角度を持つコーナに、磁気弾性表面波が入射する場合の振幅透過係数は、圧電性媒質のコーナの場合同様、 $180^\circ$ 以下の場合の振幅透過係数の複素共役となることを付記しておく。

### 5.3 ステップ状不連続部における磁気弾性表面波の反射、透過及び散乱

前章に示した図4.4と同じ形状のDown stepに、式(5.1)で与えられる磁気弾性表面波が入射する場合について考える。この場合も前章4.3と同様の、ステップの高さが入射波の波長に比してあまり高くないという仮定のもとで、前章4.3と同様の議論により磁性媒質におけるSH波の積分表示式(3.36)、(3.37)を用いて、透過表面波( $u_t, A_t$ )、反射表面波( $u_r, A_r$ )、領域 $R_1$ に散乱されるBulk-Shear波( $u_{bR_1}, A_{bR_1}$ )及び領域 $R_2$ に散乱されるBulk-Shear波( $u_{bR_2}, A_{bR_2}$ )の近似解を求めることが出来る。得られる結果のみを示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_t(\mathbf{r}) &= T \cdot u_i e^{-\xi_2^+(x_2-d) + i\xi_1^+ x_1} \\ A_t(\mathbf{r}) &= T \cdot b_{eq} \mu_{eq} u_i \left\{ e^{-\xi_2^+(x_2-d)} - e^{-|\xi_1^+(x_2-d)|} \right\} \cdot e^{i\xi_1^+ x_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bR_1}(\mathbf{r}) &= B_{R_1} \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r_1}} \cdot u_i e^{i(k_0 r_1 - \pi/4)} \\ A_{bR_1}(\mathbf{r}) &= b_{eq} \mu_{eq} u_{bR_1}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r(\mathbf{r}) &= R u_i e^{-\xi_2^- x_2 - i|\xi_1^-| x_1} \\ A_r(\mathbf{r}) &= R b_{eq} \mu_{eq} u_i \left\{ e^{-\xi_2^- x_2} - e^{-|\xi_1^-| x_2} \right\} \cdot e^{-i|\xi_1^-| x_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bR_2}(\mathbf{r}) &= B_{R_2} \sqrt{\frac{1}{2\pi k_0 r_2}} u_i e^{i(k_0 r_2 - \pi/4)} \\ A_{bR_2}(\mathbf{r}) &= b_{eq} \mu_{eq} u_{bR_2}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

ただし

$$T = \frac{K^+}{1-K^+} \left[ \left\{ \frac{1}{K^+} + i \frac{b_{eg}}{c_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) (1 + \beta \mu_{eg}) \right\} e^{-\xi_2^+ d} \right. \\ \left. - \frac{b_{eg} \mu_{eg}}{c_{44}} \left\{ b_{eg} + i \left( \frac{b}{M} \right) \beta \right\} e^{-\xi_1^+ d} \right]$$

$$B_{R1} = \frac{b_{eg} \mu_{eg}}{c_{44}} \left\{ b_{eg} + i \left( \frac{b}{M} \right) \beta \right\} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_1 - i K^+ \sin \theta_1} \cdot (e^{-\xi_2^+ d} - e^{-|\xi_1^+| d})$$

なお  $R$  及び  $B_{R2}$  の具体的な表示は、若干冗長であり、従って付録において示すことにする。また本節で取り上げたのは特に Down step の場合でかつ入射波が前進波に限られているが、Up step あるいは入射波が後退波の場合についても同様に議論できるものと考えられる。これらについての検討は、更に高次の近似解と併せて今後の課題とする予定である。

#### 5.4 数値計算例及び検討

前節において指摘したように、ステップ状不連続部についてはまだ検討されるべき点が残されており、従って本節においては、磁性媒質のコーナにおける磁気弾性表面波の伝搬に関し、数値例を上げて検討する。

磁性媒質中における準静磁近似の下でのエネルギー関係式

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i \omega \int_0^{+\infty} (A_3 H_2^* + T_{31,23}^*) dx_2 \right\} \quad (5.25)$$

を用いて、電力透過係数  $\Gamma_T$  及び入射波の電力に対する散乱電力比  $\Gamma_B$  は各々次式のように求めることができる。但し \* の記号は、複素共役を表す。

$$\Gamma_T = |T|^2 \quad \text{もしくは} \quad \Gamma_T = |T_B|^2 \quad (5.26)$$

$$\Gamma_B = Q_+ \cdot \int_{\theta-90^\circ}^{90^\circ} |s_c|^2 d\theta \quad \text{もしくは} \quad \Gamma_B = Q_- \cdot \int_{\theta-90^\circ}^{90^\circ} |s_{cB}|^2 d\theta \quad (5.27)$$

$$Q_{\pm} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\omega_s \omega}{\omega_r (\omega_r + \omega_s) - \omega^2} \left\{ \frac{\omega_r}{\omega} \left( \frac{\omega_r + \omega_s \mp \omega}{\omega_r \mp \omega} \right) \frac{3K^{\pm} \pm 1}{K^{\pm} \pm 1} \right. \right. \\ \left. \left. \mp \frac{K^{\pm} \pm 3}{K^{\pm} \pm 1} \right\} K^{\pm} + \frac{1 - (K^{\pm})^2}{K^{\pm}} + \frac{\omega_s}{\omega_r \mp \omega} \cdot \frac{-(K^{\pm})^2 \mp K^{\pm} + 2}{K^{\pm} \pm 1} \right]^{-1} \quad (5.28)$$

但し式(5.28)中の複号は、上段の符号は前進波、下段の符号は後退波に各々対応している。いまフェライト媒質としてGa-YIG( $c_{44} = 7.64 \times 10^{10} \text{Nm}^2$ ,  $\gamma = 1.76 \times 10^{11} \text{m}^2/\text{wb} \cdot \text{sec}$ ,  $b = 7.40 \times 10^5 \text{J/m}^2$ ,  $\mu_0 M = 0.03 \text{wb/m}^2$ )を用いた場合で、 $\mu_0 H_s = 0.02 \text{wb/m}^2$ のときの $\Gamma_T$ の数値計算例を、 $\theta$ を変数周波数をパラメータとして図5.2に示す。なお周波数 $\omega$ としては、 $\omega = \sqrt{\omega_r(\omega_r + \omega_s)}$ 近傍(0.94GHz)、 $\omega = \omega_r + \omega_s$ 近傍(1.345GHz)及び両者の中間値(1.165GHz)を選んだ。又、式(5.27)における $Q_{+}|S_c|^2$ 、すなわち入射波が前進波

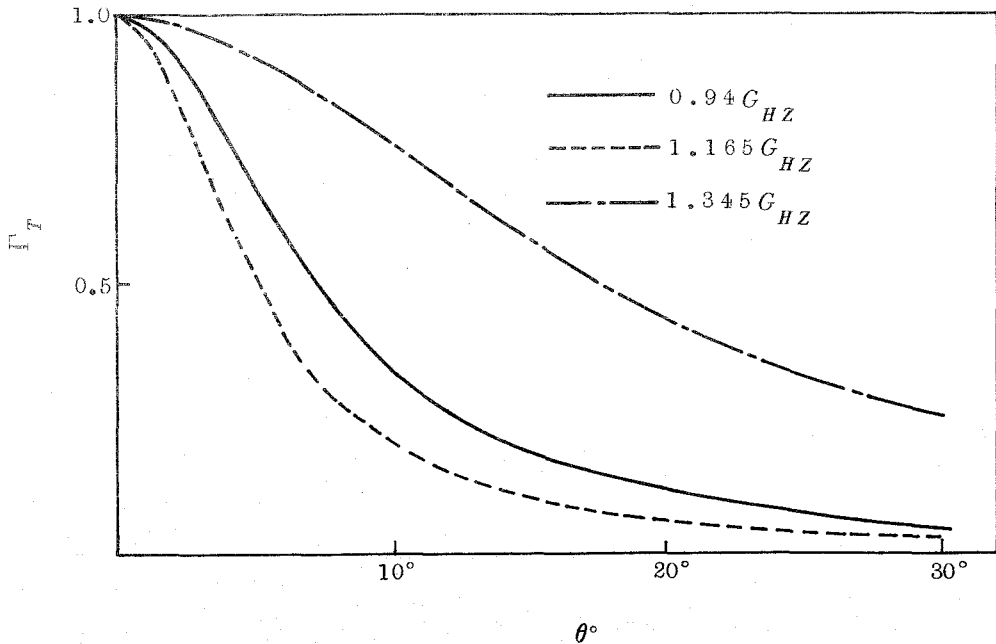


図5.2(a) 入射波が前進波の場合の電力透過係数 $\Gamma_T$



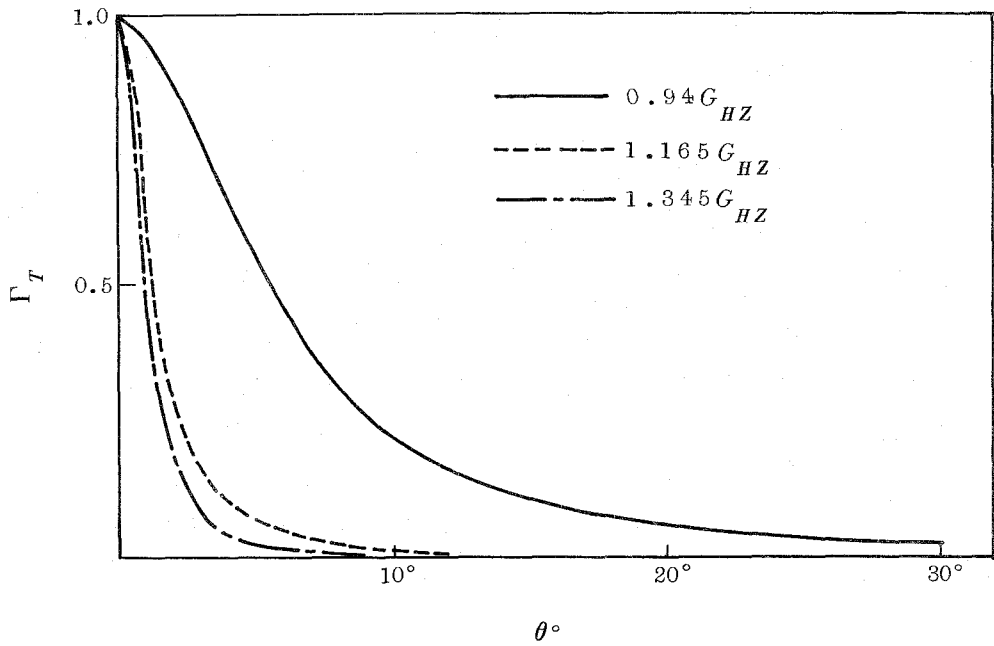


図 5.2 (b) 入射波が後退波の場合の電力透過係数  $\Gamma_T$

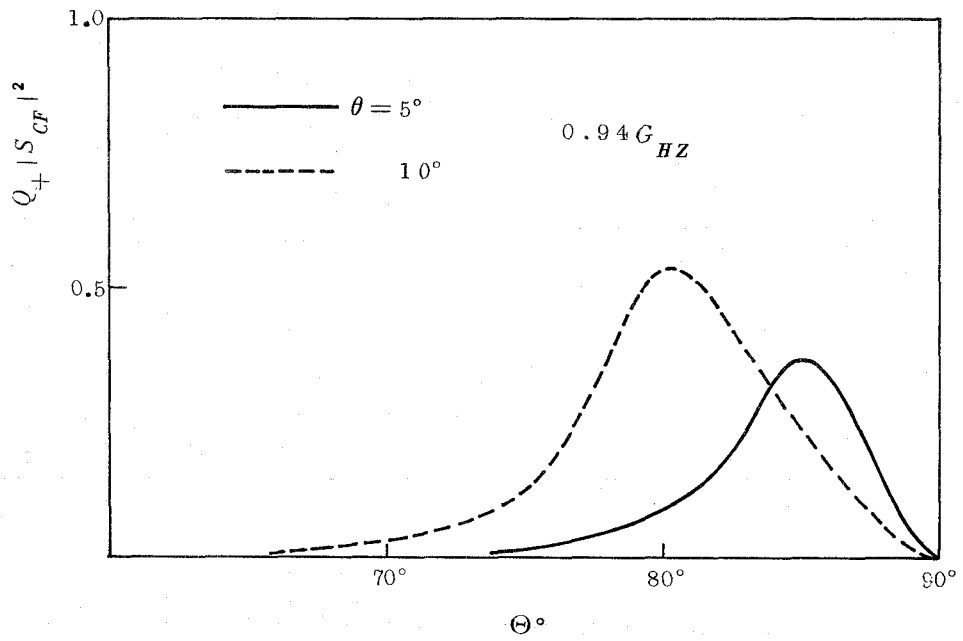


図 5.3 (a) Bulk Shear 波の散乱パターン

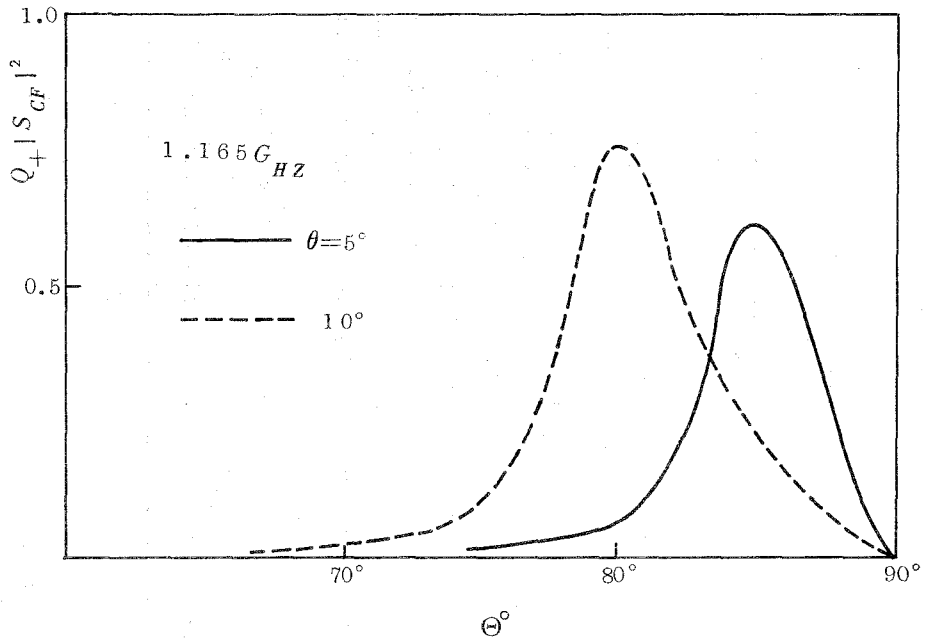


図 5.3 (b) Bulk Shear 波の散乱パターン

の場合の Bulk-Shear 波の散乱パターンを、 $\theta$  をパラメータとして図 5.3 に示す。

以上の数値計算例の検討の前に、式 (5.12), (5.13), (5.17) 及び (5.18) で求めた透過波および散乱 Bulk-Shear 波が、近似解として有効な  $\theta$  の範囲を求めておかねばならない。すなわち式 (5.10) の近似は、 $\theta$  が大きくなれば当然成り立たなくなる。ここで適当な実験結果が見あたらないのでエネルギー関係式を用いて有効な範囲を決定する。いま式 (5.10) の近似が有効なら、透過波のエネルギーと散乱 Bulk-Shear 波のエネルギーの和は、入射波のそれと等しくなるはずであり、前章同様  $\Gamma_T + \Gamma_B = 1$  が成立するものと考えられる。表 5.1 に、 $\Gamma_T$ ,  $\Gamma_B$ ,  $\Gamma_T + \Gamma_B$  及び各周波数に対する磁気機械結合係数の数値計算例を示す。表 5.1 より、 $0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ$  の範囲で得られた近似解が有効と考えられ、図 5.2, 5.3 の数値計算例は、 $\theta$  が  $10^\circ$  以下で妥当であるものと思われる。

表 5 . 1  $\Gamma_T, \Gamma_B$  および  $\Gamma_T + \Gamma_B$

$\theta^\circ$	0.94GHz						1.165GHz						1.345GHz					
	$K^+=0.062$			$ K^- =0.047$			$K^+=0.044$			$ K^- =0.011$			$K^+=0.303$			$ K^- =0.007$		
	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$	$\Gamma_T$	$\Gamma_B$	$\Gamma_T+\Gamma_B$
2°	0.925	0.092	1.017	0.881	0.122	1.003	0.862	0.156	1.018	0.298	0.695	0.993	0.997	0.010	1.007	0.148	0.846	0.994
4°	0.756	0.296	1.052	0.648	0.359	1.007	0.610	0.441	1.051	0.096	0.895	0.991	0.987	0.037	1.024	0.042	0.953	0.995
6°	0.579	0.508	1.087	0.450	0.562	1.012	0.410	0.667	1.077	0.045	0.945	0.990	0.971	0.073	1.044	0.019	0.975	0.994
8°	0.436	0.681	1.117	0.315	0.700	1.015	0.281	0.812	1.093	0.026	0.965	0.993	0.950	0.119	1.069	0.011	0.983	0.994
10°	0.331	0.808	1.139	0.227	0.789	1.016	0.200	0.904	1.104	0.017	0.974	0.991	0.923	0.172	1.095	0.007	0.987	0.994

図 5.3, 5.4 及び表 5.1 から, コーナ角度すなわち  $\theta$  が  $0^\circ$  からわずかにずれても, 入射波が散乱 Bulk-Shear 波として散乱される割合が急速に増加していくことが分かる. 又  $|K^+|$  が大きいほど, 磁気弾性表面波の表面への集中度が高く, コーナ部においては透過しやすく散乱されにくいと考えられる. 更に同一周波数においては, 前進波の方が後退波よりも磁気機械結合係数の値が大きい. すなわち前進波の方が後退波よりも磁気的な性質が強く, 表面金属の影響により, 前者が後者よりも表面への集中度が高いと考えられ, その差が透過係数の差となって表れているものと考えられる. なお  $\theta$  が大きい場合には, 式 (5.10) の近似が成り立たず, 高次の近似あるいは数値的な解析が必要であり, 今後の課題と考えられる.

## 5.5 結 言

本章では磁性媒質不連続部における磁気弾性表面波の伝搬特性を, 第 3 章で導出した積分表示式を用いて近似的に解析した. 具体的な形状としては, コーナ及びステップを仮定し, コーナについては数値計算例をあげて定量的に検討している. 更に散乱 Bulk-Shear 波の散乱パターンも求めている. また近似解として有効な範囲は, 前章同様エネルギー関係式を検討することによりその目安を定めている. なおステップに関する詳しい検討は今後の課題としたい.

本章 5.3 節中の  $R_1, B_{R_2}$  の具体的な表示は以下のようになる。

$$R = \left[ R_{m_1} (1 - e^{-2\xi_2^- d}) + R_{m_2} \{ 1 - e^{-(\xi_2^- - \xi_1^-) d} \} \right. \\ \left. + R_{m_3} \{ 1 - e^{-(\xi_2^- + \xi_2^+) d} \} + R_{m_4} \{ 1 - e^{-(\xi_2^- + \xi_1^+) d} \} \right. \\ \left. + R_{m_5} \{ 1 - e^{-(\xi_2^+ - \xi_1^-) d} \} + R_{m_6} \{ 1 - e^{-(\xi_1^+ - \xi_1^-) d} \} \right] \frac{K^-}{1 + K^{-2}}$$

$$R_{m_1} = -R_0 \left[ \frac{1}{2K^-} + j \frac{1}{2} \left( \frac{b}{M} \right) \frac{b_{eq}}{\bar{c}_{44}} + \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ j \left( \frac{b}{M} \right) \beta - j \frac{1}{2} \alpha b_{eq} \mu_{eq} \right\} \right]$$

$$R_{m_2} = R_0 j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ \alpha b_{eq} \mu_{eq} + \left( \frac{b}{M} \right) \beta \right\}$$

$$R_{m_3} = \frac{-\xi_1^+}{\xi_2^- + \xi_2^+} + \frac{\xi_2^+}{\xi_2^- + \xi_2^+} + \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ j \left( \frac{b}{M} \right) \beta - j \alpha b_{eq} \mu_{eq} \frac{\xi_2^-}{\xi_2^- + \xi_2^+} \right\}$$

$$R_{m_4} = \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ b_{eq} \left( -\frac{\xi_1^+}{\xi_2^- + \xi_1^+} + j \alpha \mu_{eq} \frac{\xi_2^-}{\xi_2^- + \xi_1^+} \right) - j \left( \frac{b}{M} \right) \beta \right\}$$

$$R_{m_5} = \frac{\xi_1^-}{\xi_2^+ - \xi_1^-} \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ 1 - j \alpha \mu_{eq} \right\}$$

$$R_{m_6} = \frac{-\xi_1^-}{\xi_1^+ - \xi_1^-} \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left\{ 1 - j \alpha \mu_{eq} \right\}$$

$$R_0 = \frac{1 - (K^-)^2}{1 + (K^-)^2}$$

$$\begin{aligned}
B_{R_2} = & \{ 1 - e^{-(\xi_2^+ + j k_0 \cos \theta) d} \} B_1 + \{ 1 - e^{-(\xi_2^+ - j k_0 \cos \theta) d} \} B_2 \\
& + \{ 1 - e^{-(\xi_1^+ + j k_0 \cos \theta) d} \} B_3 + \{ 1 - e^{-(\xi_1^+ - j k_0 \cos \theta) d} \} B_4 \\
& + \left[ \frac{\sqrt{1 - (K^+)^2} \sin \theta}{K^+ - \sqrt{1 - (K^+)^2} \sin \theta} \{ 1 - e^{-(\xi_2^+ - k_0 \sin \theta) d} \} - \frac{\sqrt{1 - (K^+)^2} \sin \theta}{1 - \sqrt{1 - (K^+)^2} \sin \theta} \{ 1 - e^{-(\xi_1^+ - k_0 \sin \theta) d} \} \right] B_5 + \{ 1 - e^{-(\xi_2^- + j k_0 \cos \theta) d} \} B_6 \\
& + \{ 1 - e^{-(\xi_2^- - j k_0 \cos \theta) d} \} B_7 + \{ 1 - e^{-(\xi_2^- - k_0 \sin \theta) d} \} B_8 \\
& + \left[ \frac{1}{1 + j \sqrt{1 - (K^-)^2} \cos \theta} \{ 1 - e^{(\xi_1^- - j k_0 \cos \theta) d} \} + \frac{1}{1 - j \sqrt{1 - (K^-)^2} \cos \theta} \right. \\
& \cdot \frac{\cos \theta + j K^- \sin \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta} \{ 1 - e^{(\xi_1^- + j k_0 \cos \theta) d} \} - \frac{2}{1 - \sqrt{1 - (K^-)^2} \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta} \\
& \left. \cdot \{ 1 - e^{(\xi_1^- + k_0 \sin \theta) d} \} \right] B_9
\end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[ j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{1}{K^+ + j \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta} \left\{ 1 + \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \alpha b_{eq} \mu_{eq} \sqrt{1 - (K^+)^2} + j \left( \frac{b}{M} \right) \frac{b_{eq}}{\bar{c}_{44}} K^+ \right\} \right]$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \frac{\cos \theta + j K^- \sin \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta} \left[ j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{1}{K^+ - j \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta} \left\{ 1 - \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \alpha b_{eq} \mu_{eq} \sqrt{1 - (K^+)^2} + j \left( \frac{b}{M} \right) \frac{b_{eq}}{\bar{c}_{44}} K^+ \right\} \right]$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \left[ -j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \frac{1 - \alpha \mu_{eq} \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta}{1 + j \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta} \right]$$

$$B_4 = \frac{1}{2} \left[ -j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta - \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \frac{1 - \alpha \mu_{eq} \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta}{1 - j \sqrt{1 - (K^+)^2} \cos \theta} \right]$$

$$B_5 = \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} (1 - j \alpha \mu_{eq}) \frac{\cos \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta}$$

$$B_6 = \frac{R_0}{2} \left[ -j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{1}{K^- - j \sqrt{1 - (K^-)^2} \cos \theta} \left\{ \sqrt{1 - (K^-)^2} \left( \sin \theta - \frac{b_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \cos \theta \right) + j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} b_{eq} \mu_{eq} \alpha K^- \right\} \right]$$

$$B_7 = \frac{R_0}{2} \frac{\cos \theta + j K^- \sin \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta} \left[ -j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{1}{K^- + j \sqrt{1 - (K^-)^2} \cos \theta} \left\{ \sqrt{1 - (K^-)^2} \left( \sin \theta + \frac{b_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \cos \theta \right) + j \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}^2}{\bar{c}_{44}} \alpha K^- \right\} \right]$$

$$B_8 = R_0 \frac{\cos \theta}{\cos \theta - j K^- \sin \theta} \left\{ j \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \left( \frac{b}{M} \right) \beta + \frac{b_{eq} \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} \frac{-b_{eq} \sqrt{1 - (K^-)^2} \sin \theta - j \alpha b_{eq} \mu_{eq} K^-}{K^- + \sqrt{1 - (K^-)^2} \sin \theta} \right\}$$

$$B_9 = \frac{R_0}{2} \frac{b_{eq}^2 \mu_{eq}}{\bar{c}_{44}} (1 - j \alpha \mu_{eq})$$

## 第6章 導波路凹部による Bleustein-Gulyaev 波の反射，透過および散乱<sup>(46)~(48)</sup>

### 6.1 緒言

弾性表面波を，通信工学の領域に採り入れようとする試みが，近年急速に高まってきている<sup>(3),(62)</sup>ことは，既に序論においても詳述しているが，例えばここ2~3年の成果としては，弾性表面波共振器に関する研究<sup>(63),(64)</sup>も特筆すべきものがある．特にグレーティング構造は，弾性表面波が表面付近にエネルギーの大部分を集中しているという性質上，非常に有効であり，更に今後工作精度が向上していくであろうことを考慮すると，実用可能な高共振尖鋭度 $Q$ を持つ弾性表面波共振器が，グレーティング構造を用いて実現される日も真近であろうと思われる．

グレーティング構造を有した弾性波導波路における弾性表面波の伝搬特性は，これまで主として等価回路論的見地から解析されていたが<sup>(65)</sup>，この手法だと $Q$ の劣化に直接関係する Bulk 波の評価が出来ないという難点があり，従ってグレーティングに弾性表面波が入射する際発生する不用 Bulk 波は，経験的に処理されているのが実情である．最近になって上記の難点を除くべく，レイリイ波に関し，波動論的立場に立ったグレーティングの解析結果が報告されている<sup>(60),(66)</sup>．しかしながら Bleustein-Gulyaev 波については，金属アレイによる反射，透過に関し二，三報告されているにすぎない<sup>(24),(67)</sup>

そこで本章では，導波路凹部における BG 波の伝搬に関する問題を，散乱 Bulk-Shear 波の評価が容易である積分方程式法により数値的に解析し，更にその数値解を用いてグレーティングによる反射及び透過特性を明らかにする．積分方程式法は通常電磁波の散乱問題の解析に用いられているが<sup>(49)(50)</sup>，必要とあらばいくらでも厳密解に近い解を得ることが出来る．なお共振器等は金属アレイを用いて実現することも考えられるが，BG 波導波路は，その表面が電氣的に短絡された状態で使用されるのが望ましく<sup>(52)</sup>，この点からも本章で取り上げるグレーティング構造がより共振器等に適しているものと考



えることが出来る。

## 6.2 積分方程式の導出

図 6.1 に示す 6 mm クラスの半無限圧電性媒質の任意形状をした凹部に、式 (6.1) で与えられる BG 波が  $x_1 = -\infty$  から  $x_1$  軸に沿って入射するものとする。

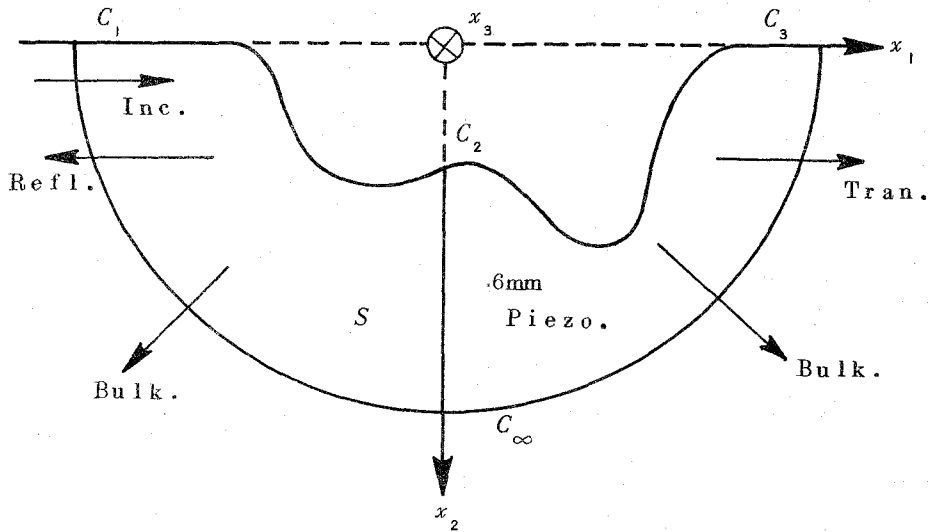


図 6.1 圧電性媒質凹部とその座標系

但し媒質の表面は、無限に薄い完全導体で覆われており、かつ結晶軸は  $x_3$  軸方向であるという仮定はこれまでの章と同様である。

$$\left. \begin{aligned} U_{in}(\mathbf{r}) &= A e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} \\ \phi_{in}(\mathbf{r}) &= \frac{e_{15}}{e_{11}^s} A (e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} - e^{-\xi_1 x_2 + i \xi_1 x_1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

このとき入射  $BG$  波の一部が透過  $BG$  波 ( $U_T, \phi_T$ ) として  $x_1$  軸の正方向に伝搬し、一部が反射  $BG$  波 ( $U_R, \phi_R$ ) として入射  $BG$  波とは逆方向、すなわち  $x_1$  軸の負方向に伝搬し、残りは散乱 Bulk-Shear 波 ( $U_B, \phi_B$ ) として散乱されるものと考えることができる。今これらの和を各々  $U_{Total}, \phi_{Total}$  で表わすものとし、更に第 2 章で求めた圧電性媒質における  $SH$  タイプの波動に関する積分表現を用いると  $U_{Total}, \phi_{Total}$  は次のように表示することができる。

$$\left. \begin{aligned} U_{Total}(\mathbf{r}) &= U_{in}(\mathbf{r}) + \int_{C_2} \left\{ U(\mathbf{r}') T_U^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - G_E^U(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D(\mathbf{r}') \right\} dV' \\ \phi_{Total}(\mathbf{r}) &= \phi_{in}(\mathbf{r}) + \int_{C_2} \left\{ U(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') D(\mathbf{r}') \right\} dV' \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

但し下添字  $in$  は入射波であることを表わし、積分記号に付した下添字  $C_2$  は、 $C_2$  に沿う積分を表わすものとする。

式 (6.2) は、図 6.1 に示す領域  $S$  内の Fields が入射  $BG$  波により凹部  $C_2$  上に誘起される機械源及び電荷源からの再放射界として与えられることを示している。ここに  $U(\mathbf{r}'), D(\mathbf{r}')$  は境界  $C_2$  上の機械源 (粒子変位分布) 電荷源 (電荷密度分布) を表わしている。更に  $G_E^U(\mathbf{r}|\mathbf{r}'), G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は各々波源として電荷源を考えた時の粒子変位に相当するグリーン関数であり、 $T_U^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$   $T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  は Shear ストレスを表わすグリーン関係である。なお領域  $S$  は、面  $C_1, C_2, C_3$  及び原点に中心を置き十分大きな半径を有する円弧  $C_\infty$  で囲まれる領域である。又式 (6.2) の導出にあたっては、次式で示される境界条件を考慮している。

$$\left. \begin{aligned} C_1, C_3 \text{ 上で } T_U^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= 0, T_\phi^G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \\ G_E^U(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= 0, G_E^\phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = 0 \\ C_1, C_2, C_3 \text{ 上で } \phi(\mathbf{r}') &= 0, T(\mathbf{r}') = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$C_\infty$  上で  $U(\mathbf{r}'), \phi(\mathbf{r}')$  の外向放射条件

但し  $\mathbf{r}'(= (x'_1, x'_2))$  は波源の位置を表わす位置ベクトルであり、また演算子に付した ' の記号は  $\mathbf{r}'$  に関する演算を表わすものとする。

今式 (6.2) において観測点  $\mathbf{r}$  を凹部  $C_2$  上にもってこることにより次式の積分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} U(\mathbf{r}_{c_2}) &= U_{in}(\mathbf{r}_{c_2}) + \int_{c_2} f U(\mathbf{r}') T_U^G(\mathbf{r}_{c_2} | \mathbf{r}') dV' \\ &\quad - \int_{c_2} f G_E^U(\mathbf{r}_{c_2} | \mathbf{r}') D(\mathbf{r}') dV' \\ 0 &= \phi_{in}(\mathbf{r}_{c_2}) + \int_{c_2} U(\mathbf{r}') T_\phi^G(\mathbf{r}_{c_2} | \mathbf{r}') dV' \\ &\quad - \int_{c_2} f G_E^\phi(\mathbf{r}_{c_2} | \mathbf{r}') D(\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

ここに  $\mathbf{r}$  に付した下添字  $c_2$  は、観測点が境界  $C_2$  上にあることを示し、また  $f$  の記号は特異点を除く積分を表わしている。

式 (6.4) は凹部  $C_2$  上における粒子変位分布及び電荷密度分布を未知関数とする連立積分方程式であるが、 $C_2$  上に適当なサンプリング点を取ることにより線型代数方程式に帰着することができる。従ってこの線型代数方程式を解くことにより、境界  $C_2$  上に誘起される粒子変位分布  $U(\mathbf{r}')$ 、電荷密度分布  $D(\mathbf{r}')$  を決定することができる。必要な諸量はすべてこの  $U(\mathbf{r}'), D(\mathbf{r}')$  より計算することができる。但しフーリエ積分を用いて表わされたグリーン関数に現われる波数  $k$  に関する実軸に沿う  $-\infty \rightarrow \infty$  の無限積分は、複素積分の手法を用いて以下のように求めることができる。すなわち複素平面上で外向放射条件を満足するように積分路を変更することにより、無限積分は図 6.2 に示す、Branch-Cut に沿う積分と留数積分により求めることができる。図 6.2 における上半円 (実線) に沿う積分が、観測点の座標  $x_1$  が波源の座標  $x'_1$  より大きい場合 ( $x_1 > x'_1$ ) であり、下半円 (破線) はその逆の場合 ( $x_1 < x'_1$ ) である。また  $x_1 = x'_1$  の場合は上記のいずれかに含めて計算することができる。

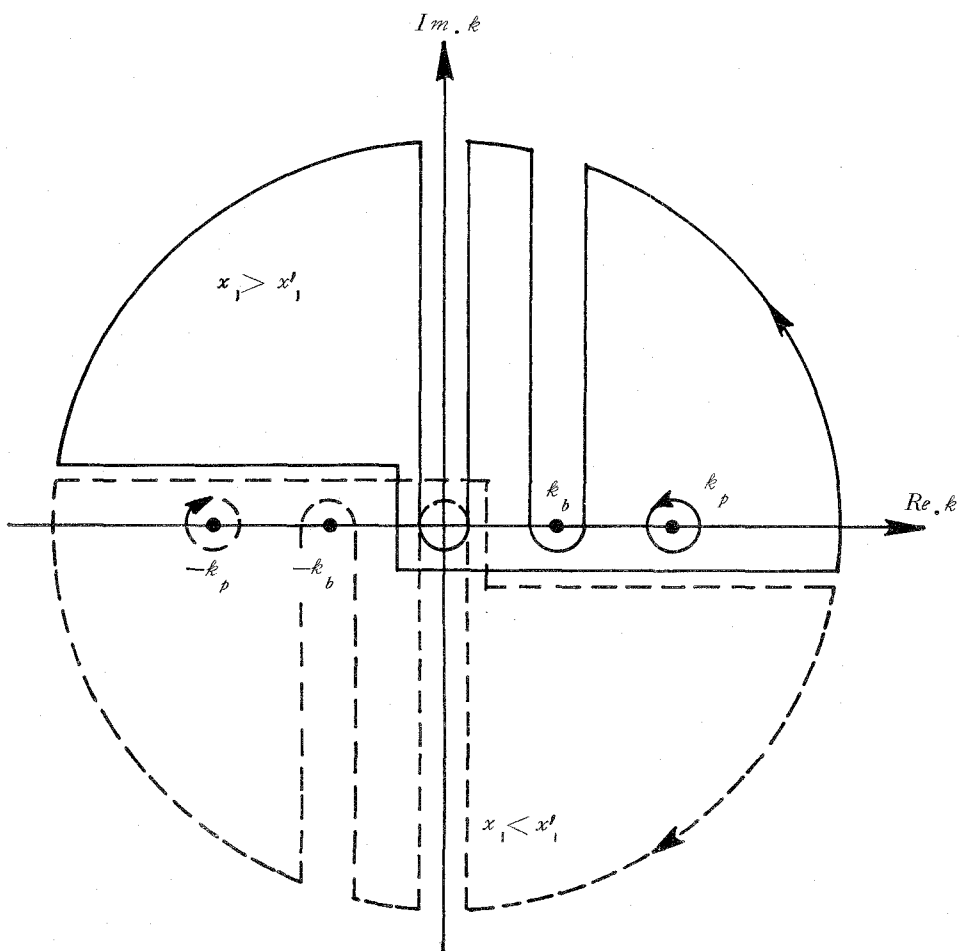


図 6.2 グリーン関数の積分路

### 6.3 反射波，透過波及び散乱 Bulk-Shear波

凹部  $C_2$  上に誘起される粒子変位分布，電荷密度分布が求まれば，透過  $BG$  波，反射  $BG$  波及び散乱される Bulk-Shear 波は，式 (6.2) を用いて求めることができる。先ず透過  $BG$  波は，凹部  $C_2$  上に誘起された二次波源から再放射される界のうち，正の極の留数で表わされる界と入射  $BG$  波との和であり次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 U_T(\mathbf{r}) &= T \cdot A e^{-\xi_2 x_2 + i \xi_1 x_1} \\
 \phi_T(\mathbf{r}) &= T \cdot \frac{e^{15}}{\Theta_{11}^s} A (e^{-\xi_2 x_2} - e^{-\xi_1 x_2}) \cdot e^{i \xi_1 x_1} \\
 T &= 1 + \int_{c_2} \left\{ U(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{Res} \left\{ T_U^G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{Res} \left\{ G_E^U(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\} D(\mathbf{r}') \right\} d l'
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

また反射BG波は，再放射される界のうちグリーン関数の負の極 $-\xi_1$ の留数で与えられる界であり，次式に示すとおりである。

$$\begin{aligned}
 U_R(\mathbf{r}) &= R \cdot A e^{-\xi_2 x_2 - i \xi_1 x_1} \\
 \phi_R(\mathbf{r}) &= R \frac{e^{15}}{\Theta_{11}^s} A (e^{-\xi_2 x_2} - e^{-\xi_1 x_2}) \cdot e^{-i \xi_1 x_1} \\
 R &= \int_{c_2} \left\{ U(\mathbf{r}') \operatorname{Res} \left\{ T_U^G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \operatorname{Res} \left\{ G_E^U(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\} D(\mathbf{r}') \right\} d l'
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

更に散乱されるBulk-Shear波の遠方界は，グリーン関数を鞍部点法で近似的に求めることにより，次のように表示される。

$$\begin{aligned}
 U_B(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{1}{2 \pi k_0 r}} B(\theta) \cdot A \cdot e^{i(k_0 r - \pi/4)} \\
 \phi_B(\mathbf{r}) &= \frac{e^{15}}{\Theta_{11}^s} U_B(\mathbf{r}) \\
 B(\theta) &= \int_{c_2} \left\{ U(\mathbf{r}') \cdot \left\{ T_U^G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\}_{SCD} \right.
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

$$-\left\{ G_E^U(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \right\}_{SDC} \cdot D(\mathbf{r}') \} dV'$$

なお  $Re s\{ \}$  及び  $\{ \}_{SDC}$  の記号は各々グリーン関数の留数積分及び鞍部点による積分を表わすものとする。また  $r, \theta$  は十分遠方の観測点の距離および方向を示しており ( $k_0 r \gg 1$ ),  $x_1 = r \sin \theta, x_2 = r \cos \theta$  である。

今圧電性媒質中における準解電近似のもとでのエネルギー関係式を用いると、電力透過係数  $\Gamma_T$ 、電力反射係数  $\Gamma_R$  及び散乱される電力の対入射電力比  $\Gamma_B$  は各々次式で定義することができる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_T &= |T|^2, \quad \Gamma_R = |R|^2 \\ \Gamma_B &= Q \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |B(\theta)|^2 d\theta \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

更に  $\Gamma_T, \Gamma_R$  及び  $\Gamma_B$  は次式のエネルギー保存則を満足する。

$$\Gamma_T + \Gamma_R + \Gamma_B = 1 \quad (6.9)$$

この関係式は、数値計算の結果の精度を検討する際に用いることができる。

式(6.4)の積分方程式は、次のようにして線型代数方程式に帰着することができる。いま凹部  $C_2$  を  $N$  個の区間に分割し、各区間内での粒子変位、電荷密度が一様であると仮定し、それらの値を適当に定めたサンプリング点  $(x_{1m}, x_{2m}) (m=1 \sim N)$  における  $U_m(x_{1m}, x_{2m}), D_m(x_{1m}, x_{2m})$  によって代表させるものとする。このとき積分方程式(6.4)は、次の二組の線型方程式によって近似される。

$$\left. \begin{aligned} U_{in}(x_{1p}, x_{2p}) + \sum_{m=1}^N T_{pm}^U U_m(x_{1m}, x_{2m}) \\ - \sum_{m=1}^N G_{pm}^U D_m(x_{1m}, x_{2m}) = 0 \\ \phi_{in}(x_{1p}, x_{2p}) + \sum_{m=1}^N T_{pm}^\phi U_m(x_{1m}, x_{2m}) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

$$-\sum_{m=1}^N G_{\rho m}^{\phi} \cdot D_m(x_{1m}, x_{2m}) = 0$$

$$\rho = 1 \sim N$$

ここに  $(x_{1\rho}, x_{2\rho})$  は  $N$  個の観測点を表わしている。更に  $(x_{1\rho}, x_{2\rho}), (x_{1m}, x_{2m})$  として各分割区間の中点を選ぶものとする。このとき  $T_{\rho m}^U, T_{\rho m}^{\phi}, G_{\rho m}^U$  及び  $G_{\rho m}^{\phi}$  は各々次式によって与えられる。

$$T_{\rho m}^U = \begin{cases} T_U^G(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}_{c_{2m}}) \cdot \Delta_m & (\rho \neq m) \\ \int_{\Delta_m} T_U^G(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}') d l' - \frac{1}{2} & (\rho = m) \end{cases}$$

$$T_{\rho m}^{\phi} = T_{\phi}^G(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}_{c_{2m}}) \cdot \Delta_m$$

$$G_{\rho m}^U = \begin{cases} G_E^U(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}_{c_{2m}}) \cdot \Delta_m & (\rho \neq m) \\ \int_{\Delta_m} G_E^U(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}') d l' & (\rho = m) \end{cases}$$

$$G_{\rho m}^{\phi} = \begin{cases} G_E^{\phi}(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}_{c_{2m}}) \cdot \Delta_m & (\rho \neq m) \\ \int_{\Delta_m} G_E^{\phi}(\mathbf{r}_{c_{2\rho}} | \mathbf{r}') d l' & (\rho = m) \end{cases} \quad (6.11)$$

但し  $\Delta_m$  は  $m$  番目の区間の分割巾を表わし、 $\mathbf{r}_{c_{2\rho}}, \mathbf{r}_{c_{2m}}$  は各々  $\rho$  番目、 $m$  番目の区間の中点を表わす位置ベクトルである。なお  $G_{\rho m}^U, G_{\rho m}^{\phi}$  において  $\rho = m$  (観測点と波源の位置が一致する。) のときグリーン関数に含まれるハンケル関数の発散という困難は、次の漸近展開式を用いて、区間内で積分を実行することにより除去している。

$$H_0^{(1)}(k_0 r) \approx 1 + j \frac{2}{\pi} (\ln k_0 r + \ln \gamma / 2) \quad (6.12)$$

( $\gamma$  は Euler の定数)

以上のようにして得られた線型方程式を行列の形で表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \vec{U}_{in} + [T^U] \vec{U} - [G^U] \vec{D} &= 0 \\ \vec{\phi}_{in} + [T^\phi] \vec{U} - [G^\phi] \vec{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

ここに  $\vec{U}_{in,p} = U_{in}(x_{1p}, x_{2p})$ ,  $\vec{\phi}_{in,p} = \phi_{in}(x_{1p}, x_{2p})$  である。粒子変位分布  $U(\mathbf{r})$ , 電荷密度分布  $D(\mathbf{r})$  は式 (6.13) の線型方程式を解くことによって求めることができ、反射  $BG$  波、透過  $BG$  波及び散乱 Bulk-Shear 波は式 (6.5) ~ (6.7) を数値積分することにより求めることができる。

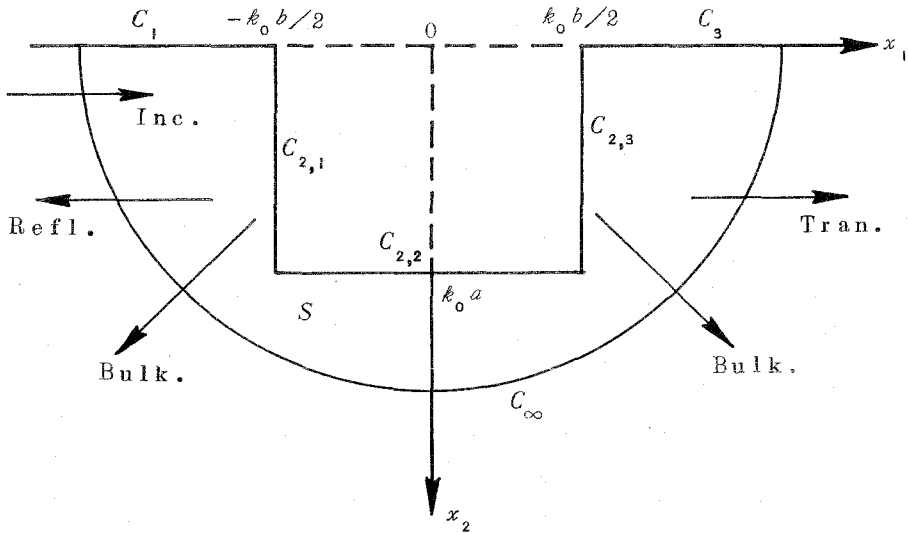


図 6.3 方形の凹部の座標系

今具体例として図 6.3 に示す、深さ  $k_0 \cdot a$ 、巾  $k_0 \cdot b$  で与えられる方形の凹部



を考え、この凹部におけるBG波の反射、透過及び散乱の問題に $C_{2,1}, C_{2,3}$ 上を $Nd$ 等分割、 $C_{2,2}$ 上を $Nw$ 等分割して式(6.5)~(6.7)及び(6.13)を適用する。圧電性媒質としてPZT-4( $C_{44}^E=2.56 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $e_{15}=-12.7 \text{C/m}^2$ ,  $e_{11}^s=729.6 \times \epsilon_0$ 但し $\epsilon_0$ は真空の誘電率,  $K^2=0.4938$ ), ZnO( $C_{44}^E=4.25 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $e_{15}=-0.59 \text{C/m}^2$ ,  $e_{11}^s=8.84 \times \epsilon_0$ ,  $K^2=0.1000$ )を用いた場合で巾一定( $k_0 b=0.5$ )の時の深さ $k_0 a$ の変化に対する電力透過係数 $\Gamma_T$ , 電力反射係数 $\Gamma_R$ , 散乱電力比 $\Gamma_B$ の数値計算例を図6.4に示す。また深さ一定( $k_0 a=0.5$ )の時の巾 $k_0 b$ の変化に対する $\Gamma_T, \Gamma_R, \Gamma_B$ の数値計算例を図6.5に示す。さら

表 6.1 分割数と収束状態

(媒質 PZT-4,  $k_0 a=1.0, k_0 b=1.0$ )

DIV.		$\Gamma_T$	$\Gamma_R$	$\Gamma_B$	Total	Error
$Nd$	$Nw$					
1	1	.2235	.4095	.4564	1.0894	.0894
2	2	.2599	.4244	.3391	1.0234	.0234
3	3	.2598	.4337	.3203	1.0138	.0138
4	4	.2580	.4387	.3139	1.0106	.0106
5	5	.2560	.4422	.3107	1.0089	.0089
6	6	.2543	.4447	.3090	1.0080	.0080
7	7	.2534	.4461	.3082	1.0077	.0077
8	8	.2508	.4484	.3083	1.0075	.0075
9	9	.2512	.4489	.3068	1.0069	.0069

に Bulk-Shear波の散乱パターン $Q|B(\theta)|^2$ を $k_0 a$ あるいは $k_0 b$ をパラメータとして図6.6に示す。

これらの数値計算例の検討の前に、本解析の妥当性を確かめておかねばならない。ここで適当な実験結果が見あたらないので式(6.9)のエネルギー関係式を用いて検討する。圧電性媒質がPZT-4の場合で $k_0 a=1.0, k_0 b=1.0$ の時の分割数に対する $\Gamma_T, \Gamma_R, \Gamma_B$ , 全電力( $\Gamma_T + \Gamma_R + \Gamma_B$ )を表6.1に示す。

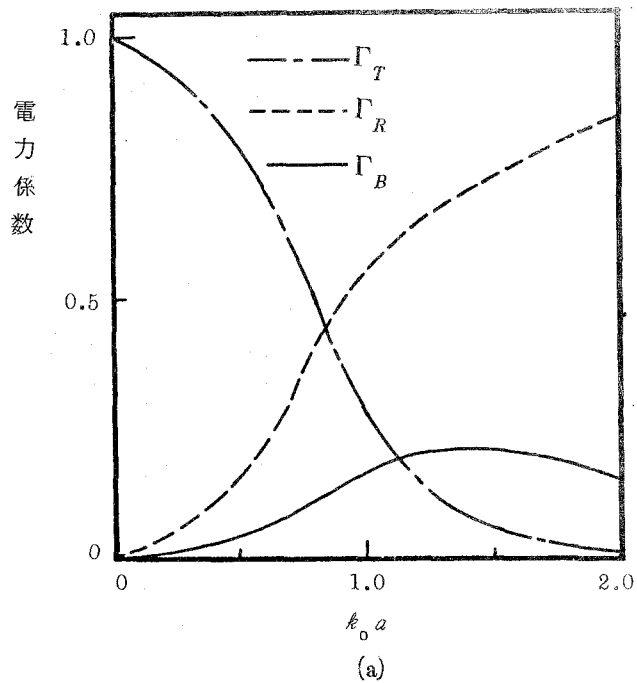


図 6.4(a) 深さを変化させたときの電力係数 (PZT-4)

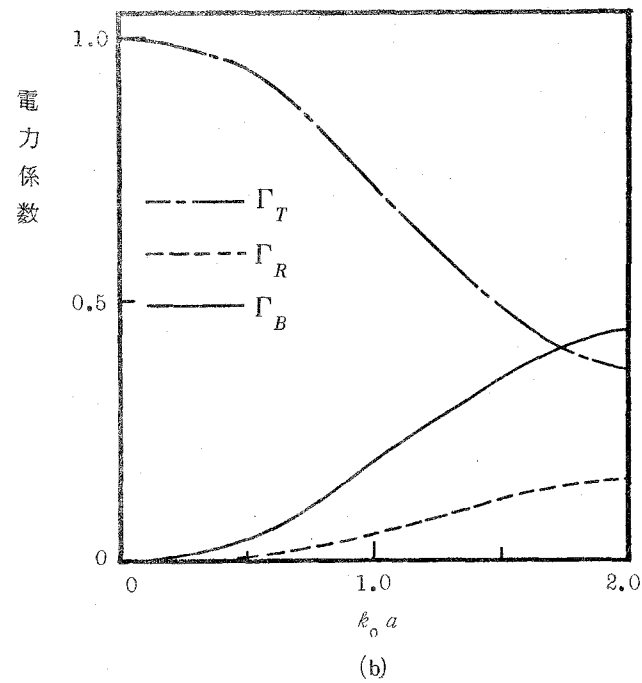


図 6.4(b) 深さを変化させたときの電力係数 (ZnO)

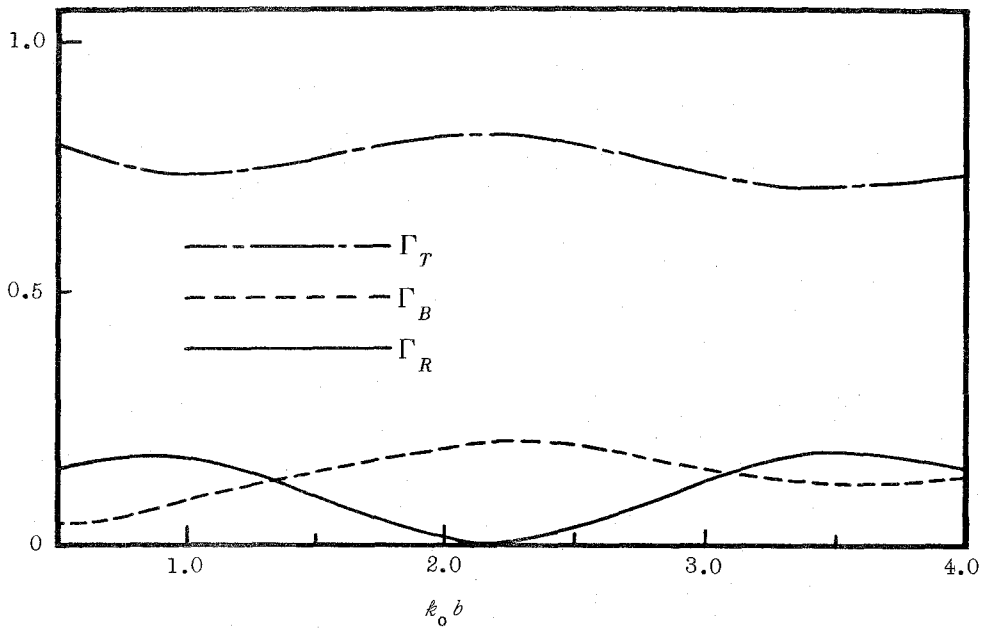


図 6.5(a) 幅を変化させた時の電力係数 (PZT-4)

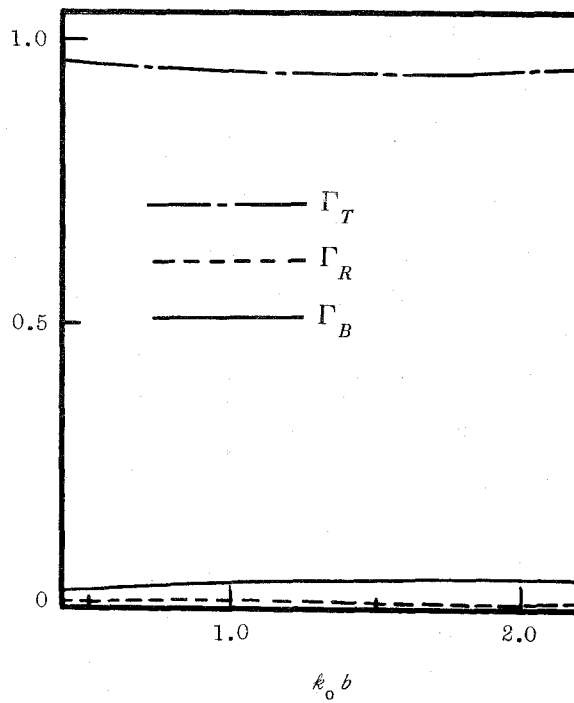


図 6.5(b) ZnO

表 6.1 より，分割数 ( $Nd, Nz$ ) の増加に伴って誤差が減少していること及び誤差が 0.01 以下 ( $Nd=6, Nz=6$  以上) では各電力係数が 2 桁か 3 桁まで収束していることが分かる。これは本解析の妥当性を示すものであり，分割数の増加につれて得られる解が厳密解に近づくことを意味している。しかしながら式 (6.11) に示す係数が積分計算を含むため全計算時間がかなり必要で，とりわけ分割数の 2 乗に比例して計算時間が増大することにより，実際問題としてはむやみに分割数を増加させるわけにはいかない。(たとえば表 6.1 に示す数値例の計算に要した全時間は，NEAC2200MODEL700 を用いて約 2.5 分。) 従って図 6.4~6.6 の数値例はいずれも表 6.1 の収束状態を考慮してその誤差が 0.01 以下となるような分割数で計算している。従ってこれらの数値例は少なくとも 2 桁か 3 桁までは厳密と考えてよい。図 6.4 より媒質が PZT-4 の場合には深さ  $\epsilon_0 a$  の増加に伴って  $\Gamma_T$  が急激に減少し  $\Gamma_R$  が増加することが分かる。一方媒質が ZnO の場合には， $\Gamma_T$  の減少の程度がいくぶんゆるやかでかつ前者と比較して  $\Gamma_B$  が大きい。これは媒質が PZT-4 の場合には ZnO の場合に比べ BG 波の表面への集中度が高いことにより弾性波導波路の表面不整部において表面波モードから Bulk モードへのモード変換がされにくいためであると考えられる。逆に集中度の低い ZnO の場合には，反射されるよりもむしろモード変換されて Bulk-Shear 波として散乱されやすいためであると考えられる。また図 6.5 特に媒質が PZT-4 の場合には凹部の巾  $\epsilon_0 b$  の変化につれて各電力係数がかなり振動している。これは凹部の両端による BG 波の反射波間の干渉によると考えられる。媒質が ZnO の場合には，反射 BG 波の電力の絶対量が少ないためその様子は明らかではない。更に図 6.6 の Bulk-Shear 波の散乱パターンは，凹部の巾  $\epsilon_0 b$  が広がるにつれてそのピーク値が，凹部の後方に移って行くことを示している。これは，凹部の  $C_{2,2}$  上に誘起される二次波源によると考えられ，深さ  $\epsilon_0 a$  を変化させた場合のパターンが前後ほぼ対称であることから推測される。

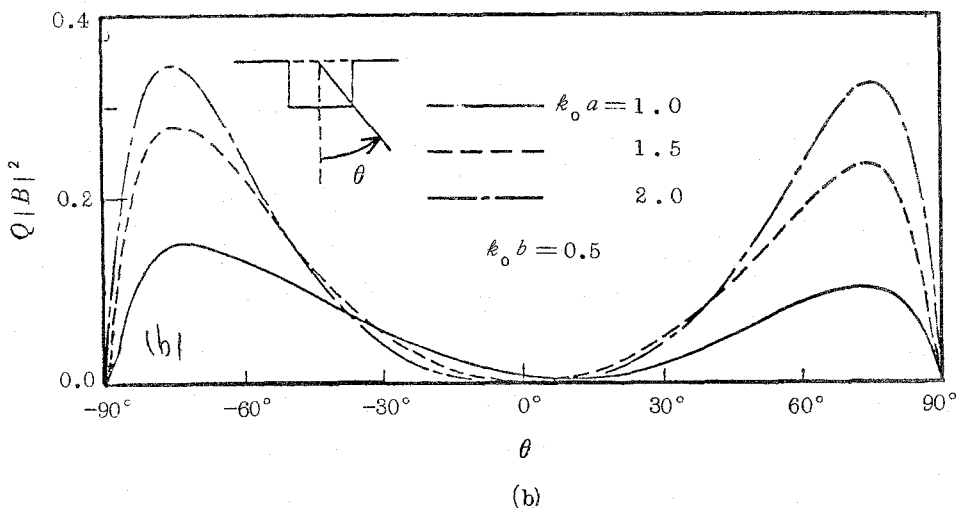
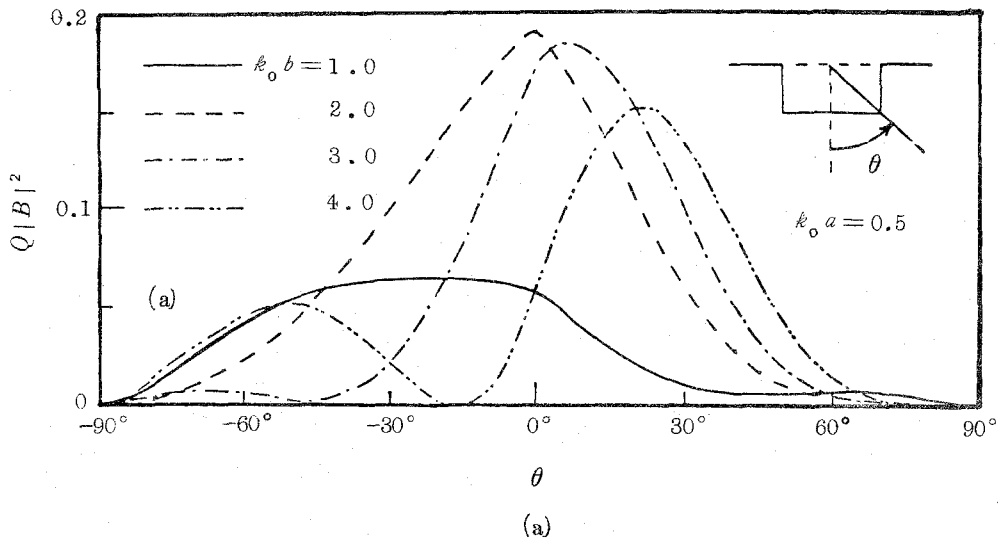


図 6.6 Bulk-Shear波の散乱パターン (a) PZT-4 (b) ZnO

## 6.4 グレイティングによる反射と透過

### 6.4.1 凹部の等価回路

本節では、圧電性弾性波導波路のグレイティングによるBG波の反射

と透過を解析するための基礎となる単一の凹部の等価回路を求める。前節においても議論したように、導波路表面に多数の凹部が存在する場合には、前節の積分方程式法をそのまま適用してBG波の伝搬特性を解析することは、計算機に要する時間が莫大なものとなるため実用的ではない。しかしながら導波路表面の凹凸構造をフィルタあるいは反射器等に利用しようとするとき、多数の凹凸構造を周期的に配置する必要がある。周期構造を有する導波路における波動の伝搬特性は、モード結合理論等を用いて解析することも考えられるが、<sup>(68)</sup>本報告では前節の手法により得られる凹部におけるBG波の反射、透過両係数を用いて、凹部を等価回路表示することにより議論する。多数の凹部は、この等価回路と伝送線路との縦続接続として表現することが出来る。前節の手法では、反射波、透過波のみならず散乱されるBulk-Shear波の評価もなされており、従って本節で求める回路表現では、凹部におけるBG波の散乱損失をも含めた取り扱いが可能である。

図6.7に示す凹部にBG波が入射するものとすれば、振幅透過係数 $T$ 、振幅反射係数 $R$ は前節の手法により求めることが出来る。回路理論の教えると

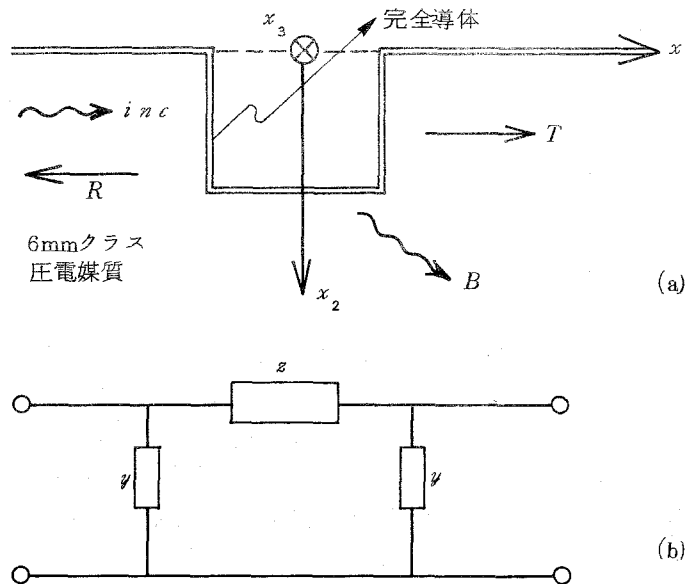


図 6.7 単一の凹部(a)とその等価回路(b)

ころにより，図 6.7(a) の凹部は，この  $T$  及び  $R$  を用いて  $\pi$  型あるいは  $T$  型の等価回路として表示することが出来る．ここで凹部を図 6.7(b) に示す  $\pi$  型の等価回路の  $K$  行列  $K_G$  は次式で与え与えられる．

$$K_G = \begin{bmatrix} 1 + \gamma z & z \\ \gamma(2 + \gamma z) & 1 + \gamma z \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

ここに  $\gamma$  及び  $z$  は，無損失な  $BG$  波導波路の特性アドミタンス及びインピダンス規格化した複素アドミタンス及びインピダンスである．図 6.7(a) は，図 6.7(b) の等価回路の出力端を特性アドミタンスで短絡したものとみなすことが出来，従ってこの回路における電圧透過係数，電圧反射係数を各々前述の  $T$  及び  $R$  に対応させることにより， $K$  行列の各要素と  $T$  及び  $R$  には次式の関係式が成り立つ．

$$\left. \begin{aligned} R \cdot e^{i\xi_1 l_j} &= \frac{a + b - c - d}{a + b + c + d} \\ T \cdot e^{i\xi_1 l_j} &= \frac{2}{a + b + c + d} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

但し  $l_j$  は凹部の幅である．式 (6.14), (6.15) より  $\gamma$  及び  $z$  は次式のように求められる．

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{1 - R \cdot e^{i\xi_1 l_j} - T \cdot e^{i\xi_1 l_j}}{1 + R \cdot e^{i\xi_1 l_j} + T \cdot e^{i\xi_1 l_j}} \\ z &= \frac{(1 + R e^{i\xi_1 l_j} + T e^{i\xi_1 l_j})(1 + R e^{i\xi_1 l_j} - T e^{i\xi_1 l_j})}{2 T e^{i\xi_1 l_j}} \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

なおここでは散乱損失も考慮した  $T$  及び  $R$  を用いており，従って  $\gamma$  及び  $z$  はその実部が散乱損失を表わすものとみなすことが出来る．更に凹部と凹部の間（以後単に平担部と呼ぶことにする．）を回路的に無損失な分布定数線路と見なせば，長さ  $l_i$  の平担部の  $K$  行列  $K_L$  は，次式のように表示すること

が出来る。

$$K_L = \begin{bmatrix} \cos \xi_1 l_i & -i \sin \xi_1 l_i \\ -i \sin \xi_1 l_i & \cos \xi_1 l_i \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

以上の議論より，図 6.8 に示す  $m$  個の凹部からなるグレーティングの等価回路の  $K$  行列  $K_{Total}$  は式 (6.14) 及び (6.17) の  $K$  行列を用いて次式のように求めることができる。

$$K_{Total} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} (K_{Gi} \cdot K_{Li}) \right\} K_{Gm} \\ \cong \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (6.18)$$

なお各  $K$  行列の下添字  $i$  は，それらが  $i$  番目の凹部あるいは平坦部に対応することを示している。式 (6.18) を用いて，図 6.8 のグレーティングに  $BG$  波が入射する場合の振幅透過係数  $T_{Total}$  は各々次式のように求めることができる。

振幅反射係数  $R_{Total}$

$$\left. \begin{array}{l} T_{Total} = \frac{2}{A+B+C+D} \\ R_{Total} = \frac{A+B-C-D}{A+B+C+D} \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

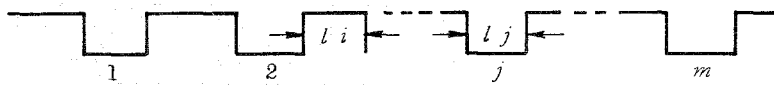


図 6.8 多数の凹部



### 6.4.2 相互干渉を考慮した等価回路

前節で求めた等価回路表示には，凹部間の多重反射による効果は自動的に考慮されている．しかしながら前節にも述べられているように凹部で  $BG$  波が Bulk-Shear波として散乱される割合は少ないものではなく，従って凹部と凹部の間隔が波長に比べあまり大きくない場合には，ある凹部で Bulk-Shear波として散乱された波動が別の凹部で  $BG$  波に再変換されることが考えられ，多重反射以外の相互干渉の影響も考慮する必要がある．いま図 6.9 (a) に示す 2 個の凹部が存在する場合について，式 (6.19) より求められる

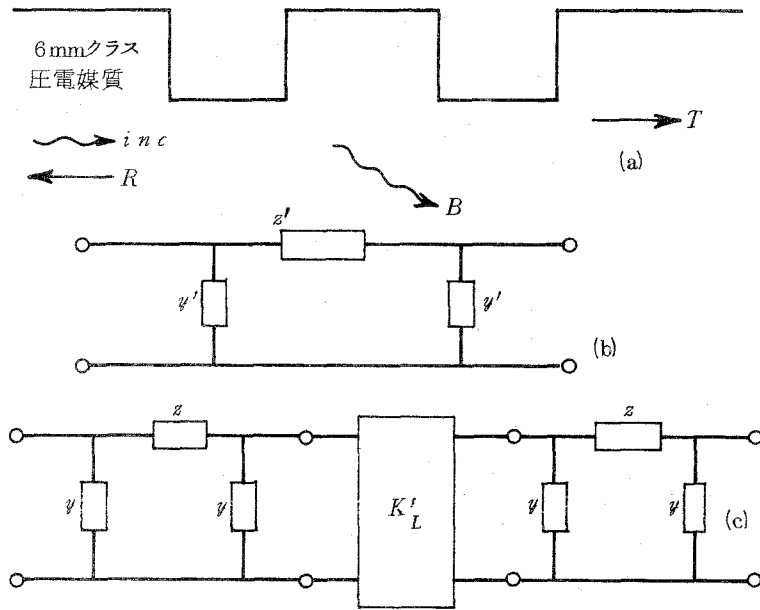


図 6.9 2 個の凹部(a)とその等価回路(b), (c)

$BG$  波の電力透過係数，電力反射係数及び散乱電力比（ $1 - \text{電力透過係数} - \text{電力反射係数}$ ）と，2 節の手法により得られる数値解との比較を，圧電性媒質として  $PZT-4$  を選び表 6.2 に示す．

表 6.2 厳密解と近似解の比較

	電力透過係数	電力反射係数	散乱電力比
厳密解	.96104	.01835	.02061
等価回路	.94873	.01474	.03653

(媒質 PZT-4, 2凹部の解)

但し  $l_j = l_i = \lambda/4$  で凹部の深さは  $\lambda/40$  である。ここに  $\lambda$  は入射 BG 波の波長を表わすものとする。表 6.2 から分かるように、両数値例は特に散乱される Bulk-Shear 波の対入射電力比において異なっている。いかえると散乱される Bulk-Shear 波が、BG 波に再変換される量は決して無視し得るものではないことが分かる。ここで相隣り合う凹部間の相互干渉による影響が特に大であると仮定し、3 個間の影響を無視することにすれば、隣接 2 凹部間の相互干渉を考慮した等価回路は以下のようにして求めることが出来る。図 6.9(a) に示す 2 個の凹部に BG 波が入射する場合の  $T$  及び  $R$  を 2 節の手法により求め、3 節の議論と同様にして図 6.9(b) の等価回路として表現する。いまこの等価回路として表現する。いまこの等価回路を図 6.9(d) に示す、単一の凹部と平坦部の縦続接続とみなせば、平坦部の等価回路の  $K$  行列  $K'_L$  は式 (6.14) の  $K_G$  を用いて次式のように表わすことが出来る。

$$K'_L = K_G^{-1} \cdot K_2 \cdot K_G^{-1} \quad (6.20)$$

ここに  $K_2$  は図 6.9(b) の等価回路の  $K$  行列である。式 (6.19) は、凹部間の相互干渉を考慮する場合には、平坦部を無損失な分布定数線路として取り扱い得ないことを示している。式 (6.14)、(6.20) を用いれば、グレーティングの等価回路の  $K$  行列は式 (6.18) と同様にして求めることが出来、従って透過係数及び反射係数は式 (6.19) と同じような形で求めることが出来る。3 個の凹部に対する、2 節の手法による厳密解、3 節式 (6.19) による解及び隣接 2 部間の相互干渉を考慮した式 (6.20) を用いた解の比較を表 6.3 に示す。なお媒質、凹部の深さ及び幅は表 6.2 の場合と同じである。

表 6.3 厳密解と等価回路による解

	電力透過係数	電力反射係数	散乱電力比
厳密解	.93091	.04766	.02143
相互干渉有	.92914	.04020	.03066
相互干渉無	.91377	.03215	.05408

( 媒質 PZT-4, 3 凹部の解 )

更に 3 個の凹部が存在する場合の数値解を用いれば, 前節と同様にしてその等価回路の  $K$  行列  $K_3$  を求めることが出来る. この等価回路を図 6.10 に示す凹部の等価回路 ( $K_G$ ) と平坦部の等価回路 (その  $K$  行列を  $K_L''$  とする.) との縦続接続とみなせば各  $K$  行列の間には次式の関係式が成立する.

$$K_3 = K_G \cdot K_L'' \cdot K_G \cdot K_L'' \cdot K_G \quad (6.21)$$

式 (6.21) より隣接 3 凹部間の相互干渉を考慮した平坦部の  $K$  行列  $K_L''$  は簡単な代数計算により求めることが出来る. 式 (6.14) とこの  $K_L''$  を用いれば, グレーティングの等価回路の  $K$  行列 (隣接 3 凹部間の相互干渉も考慮した) が得られること, 従って透過, 反射係数が得られることは上記の議論と同様である. 一般に  $2^m + 1$  個の凹部に対する数値解を用いれば, この手続を  $m$  回くり返すことにより, 隣接  $2^m + 1$  個の凹部間の相互干渉を考慮した等価回路が得られることを付記しておく.  $K_L''$  は結果のみ記すと次式のようになる.

$$K_L'' = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} e &= \frac{1}{\sqrt{C'_3 - A'_3 B'_3}} & , & f = \frac{A'_3}{\sqrt{C'_3 - A'_3 B'_3}} \\ g &= \frac{B'_3}{\sqrt{C'_3 - A'_3 B'_3}} & , & h = e \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

但し

$$A'_3 = \frac{B_3 - z}{A_3 + 1 + \gamma z}$$

$$B'_3 = \frac{1}{B_3(1 + \gamma z) + A_3 \gamma} \left[ \left\{ A_3^2 - (1 + \gamma z)^2 \right\} - \left\{ \gamma(1 + \gamma z)(2 + \gamma z) + A_3 C_3 \right\} A'_3 \right]$$

$$C'_3 = \frac{A_3 + 1 + \gamma z}{C_3 - \gamma(2 + \gamma z)} B'_3$$

ここに

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & A_3 \end{bmatrix} = K_G^{-1} \cdot K_3 \cdot K_G^{-1}$$

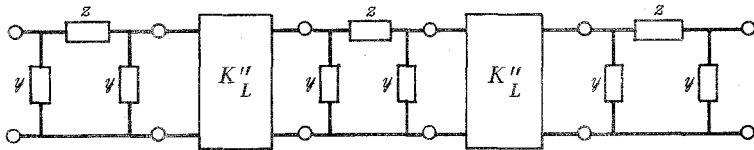


図 6.10 3 個の凹部の等価回路

#### 6.4.3 グレーティングによる反射と透過

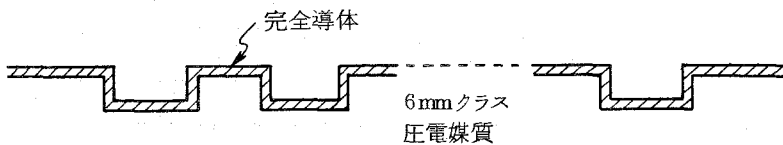


図 6.11 グレーティング

前節までの議論を，図 6.11 に示すグレーティングに  $BG$  波が入射する場合に適用し，反射特性及び透過特性を求めると，圧電性媒質としては， $BG$  波の表面へのエネルギー集中度の高い  $PZT-4$  と， $PZT-4$  に比して集中度の低い  $ZnO$  ( $K_2^2=0.1000$ ) を取り上げ，隣接 2 凹部間の相互干渉までを考慮した等価回路（式 (6.20) 及び (6.14)）を用いた反射特性及び透過特性の数値計算例を図 6.13 及び 6.14 に示す．なお図の横軸は規格化周波数，縦軸は規

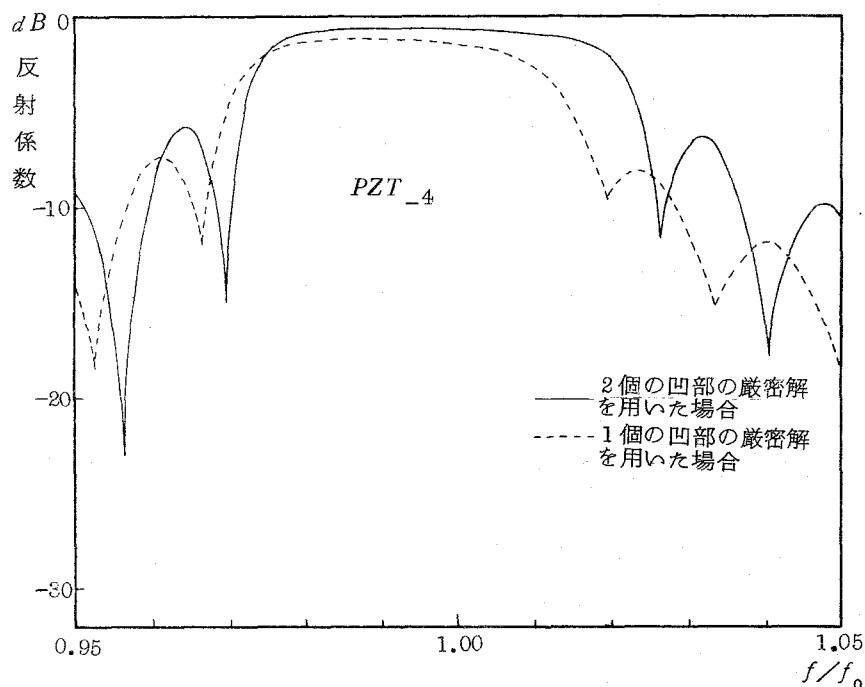


図 6.12 2つの数値解の比較

格化電力，更に凹部の個数  $N$  がパラメータである．また凹部の幅，凹部と凹部の間隔とも入射  $BG$  波の波長  $\lambda$  の  $1/4$  で，深さは，媒質が  $PZT-4$  の媒合には  $\lambda/40$ ，媒質が  $ZnO$  の場合には  $\lambda/20$  としている．凹部の深さをこのように入射  $BG$  波の波長に比して十分小さくしたのは，Bulk-Shear波として散

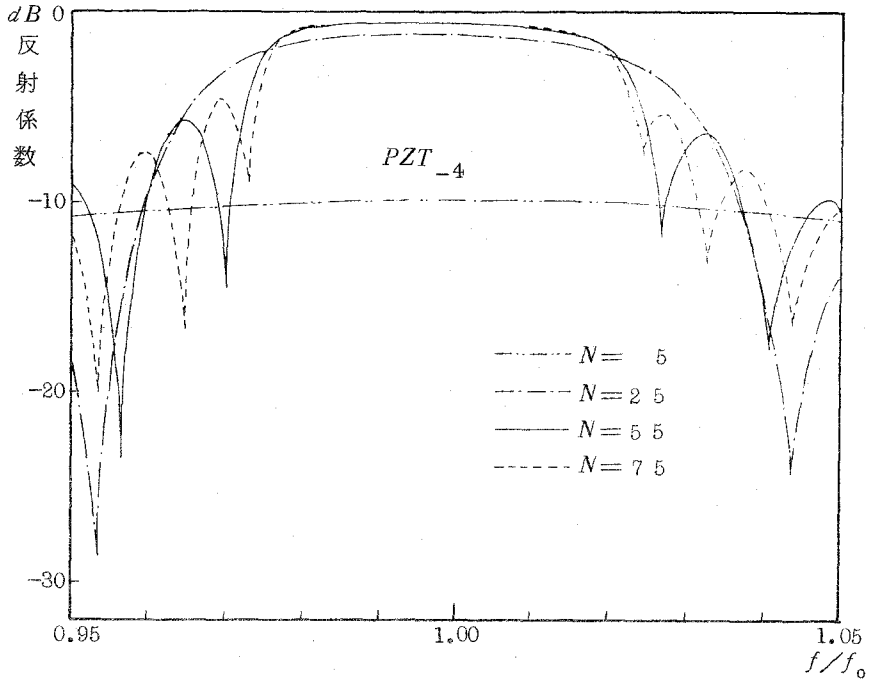


图 6.13(a) 反射特性 ( $PZT_{-4}$ )

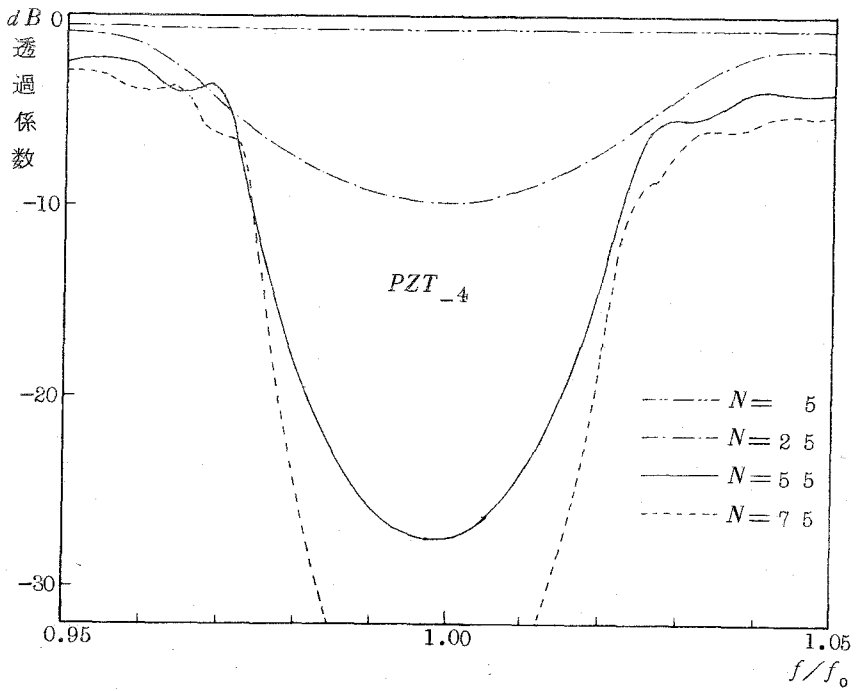


图 6.13(b) 透過特性 ( $PZT_{-4}$ )

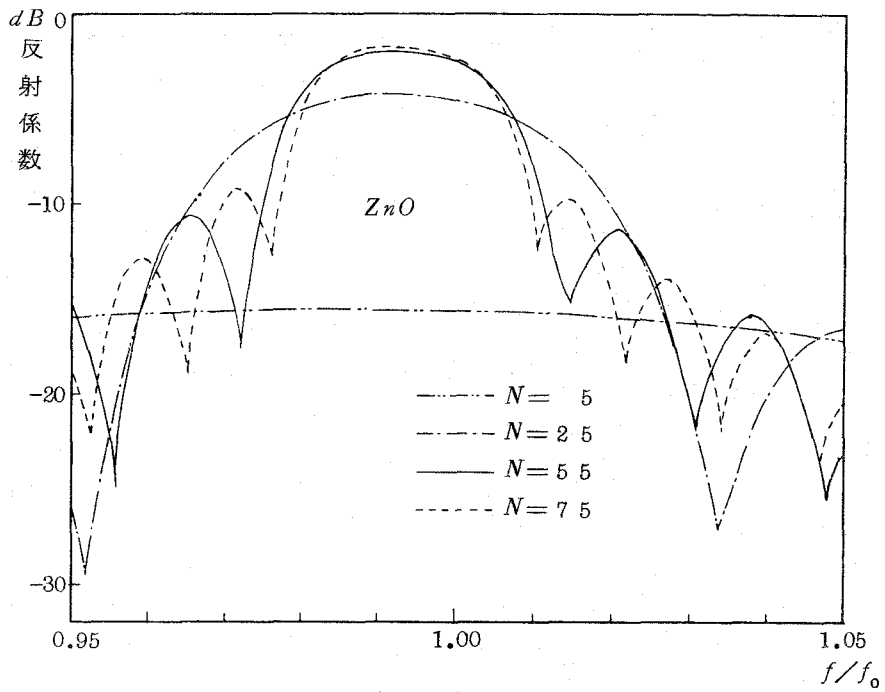


图 6.14(a) 反射特性 (ZnO)

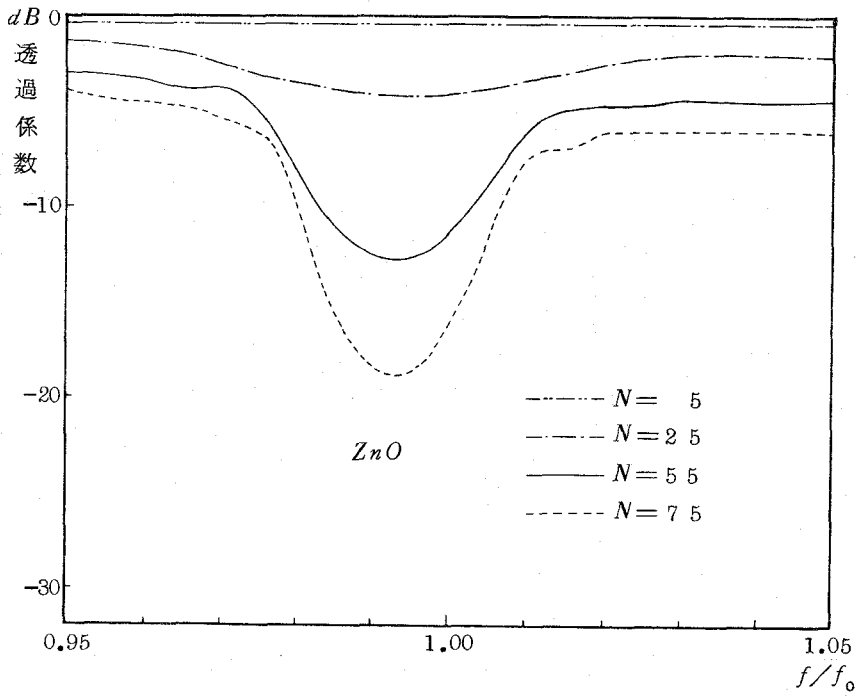


图 6.14(b) 透過特性 (ZnO)

乱される損失があまり大きくならないようにとの配慮からである。また図 6.12 に、凹部の個数  $N=55$  の場合について、圧電性媒質として  $PZT-4$  を選び、凹部間の相互干渉を考慮しない式 (6.18) を用いた反射特性の数値計算例と、相互干渉を考慮した数値計算例の比較を示す。両者は、周波数の高い領域で特にその差が著しい。これは周波数が高い程凹部の等価的な深さが増大し、従って  $BG$  波が Bulk Shear 波として散乱される割合が増大するためであり、Bulk Shear 波の  $BG$  波への再変換が無視できるものではないことを表わしているものと考えられる。なお相互干渉の効果も考慮しても、散乱損失の影響により、図 6.13 及び 6.14 に示す各特性は非対称性を示しており、表面への集中度の低い（従って散乱されやすい。） $ZnO$  程その傾向が高い。すなわち  $N=55$  の場合、中心周波数における散乱電力比は、媒質が  $PZT-4$  のとき 0.127、媒質が  $ZnO$  のとき 0.378 となっている。

更に図 6.13 及び 6.14 は凹部の個数  $N$  の増加に伴い高い反射係数が得られること及び阻止帯域が狭くなることを示しているがこれは予想される結果とよく一致している。しかしながら、媒質が  $PZT-4$  の場合と  $ZnO$  の場合を比較すると、阻止帯域は、媒質が  $PZT-4$  の場合の方が広がっている。これは、両媒質における  $BG$  波の表面への集中度の違いによるものと考えられる。また同様の理由で、媒質が  $PZT-4$  の場合の方が  $ZnO$  の場合に比して高い反射係数が得られていることを説明することが出来る。更に Bulk Shear 波として散乱される割合は通過帯域の方が阻止帯域よりも大きいことが分かる。たとえば、媒質  $PZT-4$   $N=55$  の場合、規格化周波数 0.96 においては散乱電力比 0.372、規格化周波数 1.04 においては、散乱電力比 0.574 となっており、前記の中心周波数における散乱電力比と比較すると明らかである。

## 6.5 結 言

本章では、積分表示式から導出される積分方程式を用いて、 $BG$  波導波路凹部の解析を数値的にを行い、更にその数値解を用いてグレーティングによる  $BG$  波の反射、透過の様子を明らかにした。

筆者の知るところこのような問題に対する実験はこれまで行なわれておら



ず，従ってあまり強い結言を書くことが出来ない．以下若干の検討を行ない結言に換える．

本章ではまず，圧電性弾性波導波路の凹部における  $BG$  波の伝搬特性を，積分方程式を用いて数値的に解析した．凹部の形状としては方形の凹部を考え，比較的良い精度で数値解が得られることを示した．その結果次のことが明らかになった．(i)凹部における反射の割合は， $BG$  波の表面への集中度が高い程大である．すなわち表面不整の程度が小さい範囲では，表面への集中度の低い  $BG$  波程凹部の影響を受けにくいといえる．(ii)不整の程度が大きくなると（凹部が深くなると）表面への集中度の低い  $BG$  波程 Bulk-Shear 波として散乱される割合が大きくなる．従って， $BG$  波導波路として用いる場合には表面への集中度の低い媒質が適していると考えられるのに対し，フィルタ，反射器等を構成する場合には表面への集中度の高い媒質が適していると考えられる．更に導波路表面に置かれた電極よりも本論文で取り上げた凹部の方が  $BG$  波に影響を及ぼし易いことを考慮すると，高圧電性媒質の凸凹構造を積極的に（散乱損失が高圧電媒質程少ないので）応用した素子の構成も考えられる．

なお本章で取り上げた方形の凹部は，形状としては単純であるが(i)凹部の各頂点における端効果(ii)グリーン関係の数値積分における無限積分（詳細は付録に示す）の為，他の形状に比べ数値計算にかなりの困難が生じる．これらの不利な条件にもかかわらず表 6.1 に示すように 2 桁か 3 桁の精度で厳密解に近い解が得られたことより，他の形状の凹部にも本解析法が十分適用できるものと考えられる．更に非圧電性媒質のレイリー波に対しても本手法の適用が可能である．

本章では積分方程式を解くことにより単一の凹が存在する場合の解析を行ったが，当然複数個の凹部に対しても本手法が適用できる．しかしながら多数の凹部に対しては本手法をそのまま適用することは，計算時間が莫大なものとなり実用上このましくない．それで多数の凹部に対しては以下のように議論を進めた．

圧電性弾性波導波路のグレーティングによる Bleustein Gulyaev 波の

反射及び透過の問題を，1または2個の凹部における反射係数及び透過係数の数値解を用いてグレーティングを等価回路表示することにより解析した。その結果以下のことが明らかになった。

- (1) Bulk Shear波として散乱された波動がBG波に再変換される効果をぬきにしてこのような問題を論じることが出来ない。
- (2) 上記の効果を考慮しても散乱損失の影響が，特に周波数の高い領域に現われる。従って各特性は非対称である。
- (3) 圧電効果が高くなる程反射特性は広帯域となり，かつ高い反射係数が得られる。
- (4) 散乱Bulk Shear波として散乱される損失は，阻止帯域よりも通過帯域の方が多い。

なお，BG波導波路は，圧電性のレイリイ波導波路に比して，その電気機械結合係数が一般に高いことが知られており，両者のグレーティングによる反射特性はBG波の方が広帯域となることが予想される。これは非圧電性のレイリイ波について論じられた文献(59)の結果と本報告の結果を比較することによっても予想されるが，詳しい比較検討は今後の課題としたい。更に金属アレイによるBG波の反射と透過についても，筆者の知る限り，アレイ間の相互干渉を考慮した詳しい報告がなされておらず，従って今後併せて検討していくつもりである。

付録 6-I グリーン関数を数値積分する際の無限積分

積分路を変更してグリーン関数を数値積分する際、 $T_U^G$  あるいは  $T_\phi^G$  が一階微分を含んでいるため、たとえば次式に示すような無限積分があらわれる。

$$\int_0^\infty \frac{\rho}{q - K^2 \rho} \left\{ \cos q(x_2 + x'_2) - K^2 \cos(qx_2 + \rho x'_2) \right\} \cdot e^{-\rho(x - x'_1)} d\rho \quad (\text{A.1})$$

ただし  $q = \sqrt{1 + \rho^2}$  である。ここで  $x_1 \neq x'_1$  の時には、複積分関数の指数項により無限積分は十分速く収束するが、本報告では方形の凹部を考えているため観測点と波源の位置が異なる場合でも  $x_1 = x'_1$  の時の無限積分を求めねばならない。このとき (A.1) の被積分関数は周期関数に近い関数となりその収束は非常に悪くなる。これは十分大きな  $\rho$  に対し  $\sqrt{1 + \rho^2} \approx \rho$  となることを考慮し式 (A.1) を

$$\lim_{x \rightarrow x'} \int_0^\infty \cos \rho(x_2 + x'_2) e^{-\rho(x - x'_1)} d\rho \quad (\text{A.2})$$

と考えることにより、その収束は一応保証される。実際数値積分する場合には上記の  $\rho$  をどれくらいに取るかが問題となる。計算時間とのかねあいでむやみに大きな値を取るわけにはいかず、本論文ではその積分値の有効数字が 5 桁保証されるように  $\rho$  を選んだ。

## 第 7 章 結 論

本章では、本研究の成果を総括して述べる。著者は、本論文において弾性表面波導波路の不連続問題、すなわち圧電性媒質の不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱、及び磁性媒質の不連続部における  $SH$  タイプ磁気弾性表面波の反射、透過及び散乱の問題について考察し、種々の興味ある現象を明らかにした。

第 2 章では、6 mm クラス圧電性媒質におけるグリーン関数を求め、 $SH$  波の積分表示を導出した。なお本表示は、本論文の基礎となる表示である。

第 3 章では、磁性媒質におけるグリーン関数を求め、相反定理が成り立つ系を導入することにより、非可逆性を有する  $SH$  波の積分表示を導出した。本表示も前章の表示同様本論文の基礎をなしている。

第 4 章では、第 2 章において導出した圧電性媒質における  $SH$  波の積分表示を用いて、圧電性媒質不連続部における Bleustein-Gulyaev 波の反射、透過及び散乱の問題を近似的に解析した。なお不連続部の具体的な形状としては、ゆるやかなコーナ及び入射 Bleustein-Gulyaev 波の波長に比してあまり高くないステップを仮定し、コーナ角度、ステップの高さ、圧電性媒質等の入射波に及ぼす影響を定量的に明らかにしている。

第 5 章では、第 3 章において導出した磁性媒質における  $SH$  波の積分表示を用いて、 $SH$  タイプ磁気弾性表面波の不連続部における反射、透過及び散乱の問題を近似的に解析した。不連続部の具体的な形状は前章と同様なコーナ、ステップを仮定し、特にコーナに関しては定量的な検討を加え、コーナ角度の影響のみならず非可逆性の入射波に及ぼす影響についても明らかにした。

第6章では、積分表示より導出される積分方程式を数値的に解くことにより、Bleustein-Gulyaev波の凹部における伝搬の様子を明らかにし、更にこれまでほとんど弾性波導波路の不連続問題に用いられていなかった積分方程式法が、弾性波導波路の不連続問題の解析に有効であることも明らかにした。

次に積分方程式法により得られる数値解を用いて、凹部を等価回路表示し、グレイディングによるBleustein-Gulyaev波の反射、透過特性を明らかにした。

以上、本研究で得られた成果が今後弾性表面波工学ならびに通信工学の発展に多少なりとも貢献し得るならば、著者の最も幸とするところである。

## 謝 辞

本研究を行なうに際し、終始御懇切な御指導、御激励をいただいた大阪大学工学部熊谷信昭教授に衷心より感謝の意を表わす。

大阪大学大学院在学中には、通信工学一般に関して御指導、御教示を戴いた大阪大学工学部板倉清保教授、滑川敏彦教授、手塚慶一教授、中西義郎教授、児玉慎三教授ならびに松原正則助教授に深謝する。

本研究遂行にあたって、種々有益な御教示、御討論を戴いた岐阜大学工学部助手田中嘉津夫博士に深謝する。

また、本研究に関し御協力を戴いた寺本泰規（現在、村田製作所）ならびに奥村寿彦（現在、三菱電機）の両氏に深謝するとともに、有益な御助言を戴いた大阪大学工学部講師堤誠博士、大阪大学工学部助手森田長吉博士ならびに塩沢俊之博士、岸本清治博士（現在、日立製作所）の諸氏に深謝する。

さらに、日頃御討論を戴いた大阪大学大学院里村裕博士、森下克己博士下代雅啓氏をはじめとする熊谷研究室の諸兄に厚く御礼を申し上げる。

## 文 献

- (1) "Special Issue on Microwave Acoustics", IEEE Trans., **MTT-17**, 11 (Nov.1969)
- (2) "Special Issue on Microwave Acoustics Signal Processing", IEEE Trans., **SU-20**, 2 (Apr.1973)
- (3) "Special Issue on Surface acoustic wave devices and applications", Proc. IEEE, **64**, 5 (May.1976)
- (4) H. Jeffreys: "The reflection and refraction of elastic waves", Monthly Notices Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl., **1**, p.321 (1926)
- (5) R.C.Williamson and H.I.Smith: "The uses of surface-elasticwave reflection Grating in large time-bandwidth pulse-compression filters", IEEE Trans., **MTT-21**, 4, p.195 (Apr.1973)
- (6) R.C.Williamson: "Properties of reflective-array devices", Proc. IEEE, **64**, 5, p.702 (May.1976)
- (7) C.C.Tseng and R.M.White: "Propagation of piezoelectric and elastic surface waves on the basal plane of hexagonal piezoelectric crystals", J. Appl. Phys. **38**, 11, p.4274 (Oct.1967)
- (8) H.F.Tiersten: "Elastic surface waves guided by thin films", J. Appl. Phys. **40**, 2, p.770 (Feb.1969)
- (9) R.A.Waldron: "Some problems in the theory of guided microsonic waves", IEEE Trans., **MTT-17**, 11, p.893 (Nov.1969)
- (10) 佐藤, 牧本: "段付圧電性弾性導波系における散乱係数の変分表示式", 信学論(B), **58-B**, 5, p.231 (昭50-05)
- (11) A.McGarr and L.E.Alsop: "Transmission and reflection

- of Rayleigh waves at vertical boundaries", J. Geophys. Res., **72**, 8, p.2169 (Apr.1967)
- (12) J.A.Hudson and L.Knopoff: "Transmission and reflection of surface waves at a corner", J.Geophys. Res., **69**, 2, p.281 (Jan.1964)
- (13) A.K.Mal and L.Knopoff: "Transmission of Rayleigh waves past a step change in elevation", Bull. Seism. Soc. Am, **55**, 2, p.319 (Apr.1965)
- (14) L.Knopoff and J.A.Hudson: "Transmission of Love waves past a continental margin", J.Geophys. Res., **69**, 8, p.1649 (Apr.1964)
- (15) 米山, 西田: "蒸着膜の縁部による弾性表面波回折", 信学論(A), **57-A**, 6, p.453 (昭49-03)
- (16) T.Yoneyama and S.Nishida: "Transmission and reflection of Rayleigh waves by a high impedance obstacle of finite length", J.Acoust. Soc. Am., **60**, 1, p.90 (July. 1976)
- (17) J.L.Bleustein: "A new surface wave in piezoelectric materials", Appl. Phys. Lett., **13**, 12, p.412 (Dec.1968)
- (18) Yo. V. Gulyaev: "Electroacoustic surface waves in solids", Soviet Phys. JETP. Lett., **9**, p.37 (Jan.1969)
- (19) 太田, 中村, 清水: "導体被覆による圧電体中 Shear wave の表面集中", 信学会超音波研資 **US** 69-3 (1969-04)
- (20) J.P.Parekh: "Magnetoelastic surface wave in ferrites", Electronics Lett., **5**, 14, p.322 (July.1969)
- (21) 堤, 岸本: "YIG 薄膜内を伝搬する磁気弾性波に対する金属膜の影響", 応用物理, **41**, 11, p.1194 (昭47-11)
- (22) 杉本, 牧本: "薄膜導波系の不連続部における Bleustein 波の反射および透過", 信学会マイクロ波研資, **MW**74-14 (1974-05)



- (23) L.J.Vonder Pauw: "Diffraction of Bleustein Gulyaev surface wave by a conductive semiinfinite surface layer", J.Acoust, Soc. Am., **59**, 4, p.1107 (Apr.1973)
- (24) R.G.Curtis and M.Redwood "Bleustein wave reflection and bulk wave generation by an electrode of finite dimensions", J.Appl. Phys., **46**, 6, p.2406 (Jun.1975)
- (25) R.G.Curtis and M.Redwood "Approximate analysis of the reflection of surface acoustic waves by steps", J. Appl. Phys., **46**, 11, p.4627 (Nov.1975)
- (26) K.Tanaka and Z.Kawasaki: "Transmission characteristics of Bleustein-Gulyaev waves at a corner", J. Appl. Phys., **48**, 5, p.1778 (May.1977)
- (27) 田中, 河崎: "Bleustein-Gulyaev波のコーナにおける透過", 信学会マイクロ波研資, **MW** 74-101 (1974-12)
- (28) J. De. Jong: "Diffraction effects from cylindrical transducers in a piezoelectric medium of hexagonal symmetry (class  $C_{6v}(6mm)$ )", Appl. Sci. Res., **27**, 12, p.169 (Dec.1972)
- (29) 河崎, 田中: "Shear Horizontalタイプ磁気弾性波の積分表示", 信学論(B), **59-B**, 7, p.357 (昭51-07)
- (30) 河崎, 田中: "磁気弾性表面波の積分表示とその応用", 電気学会電磁界理論研資, **EMT-75-20** (1975-10)
- (31) 河崎, 寺本, 田中: "SHタイプ磁気弾性波の積分表示(2)", 昭52信学会全国大会, 73
- (32) 河崎, 田中: "ステップ状不連続部における弾性表面波の反射, 透過及び散乱", 信学会マイクロ波研資, **MW** 75-83 (1975-11)
- (33) H.S.Tuan: "The radiation and reflection of surface waves at a discontinuity", IEEE Trans., **AP-21**, 3, p.351 (May.1973)

- (34) C.P.Chang and H.S.Tuan: "On the surface-to-bulk mode conversion of Rayleigh waves", IEEE Trans., **MTT-21**, 8, p.558 (Aug.1973)
- (35) H.S.Tuan and R.C.M.Li: "Rayleigh-wave reflection from groove and discontinuities", J. Acoust. Soc. Am., **55**, 6, p.1212 (Jun.1974)
- (36) H.S.Tuan: "On bulk waves excited at a groove by Rayleigh waves", J. Appl. Phys., **46**, 1, p.36 (Jan.1975)
- (37) H.S.Tuan: "Acoustic-surface-wave scattering at a region with material perturbation", J. Appl. Phys., **47**, 4, p.1248 (Apr.1976)
- (38) J.P.Parekh and H.S.Tuan: "Reflection and bulk-wave conversion of Rayleigh wave at a single shallow groove", J. Appl. Phys., **48**, 3, p.994 (Mar.1977)
- (39) H.S.Tuand and J.P.Parekh: "SAW reflection and bulk-wave loss characteristics of a groove reflector grating", Appl. Phys. Lett., **30**, 5, p.220 (Mar.1977)
- (40) A.K.Mai and L.Knopoff: "Transmission of Rayleigh waves at a corner", Bull. Seism. Soc. Am., **56**, 2, p.455 (Apr.1966)
- (41) K.Viswanathan, J.T.Kuo and E.R.Lapwood: "Reflection and Transmission of Rayleigh waves in a wedge-I", Geophys. J.R.Astr. Soc., **24**, p.401 (1971)
- (42) K.Viswanathan and A.Roy: "Reflection and Transmission of Rayleigh waves in a wedge-II", Geophys. J.R.Astr. Soc., **32**, p.459 (1972)
- (43) H.Matthews and H.Vande Vaart: "Magnetoelastic Love waves", Appl. Phys. Lett., **15**, 11, p.373 (Dec.1969)
- (44) 河崎, 田中: "磁気弾性表面波のコーナにおける伝搬特性", 昭51

信学会全国大会, 652

- (45) R.F.Harrington: "Field computation by moment methods", Macmillan company, New York (1968)
- (46) Z.Kawasaki and K.Tanaka: "Analysis of propagation characteristics of Bleustein-Gulyaev waves at surface imperfections", Appl. Phys. Lett., to be published in the January 15th 1978 issau.
- (47) 河崎, 田中: "圧電弾性表面波導波路の凹部におけるBGS波の反射, 透過及び散乱", 電気学会電磁界理論研資, **EMT-76-47** (1976-10)
- (48) 河崎: "グレーティングによるBleustein-Gulyaev波の反射と透過", 信学技報, **US77-34** (1977-08)
- (49) K.K.Mei and J.G.Bladel: "Scattering by perfectly conducting rectangular cylinders", IEEE Trans., **AP-11, 2**, p.185 (Mar.1963)
- (50) 森田: "半無限導体による電磁波の回折", 信学論(B), **53-B, 2**, p.62 (昭45-02)
- (51) I.A.Viktorov: "Rayleigh and Lamb waves", Plenum Press, New York (1967)
- (52) R.F.Milson and M.Redwood: "Generation of Bleustein-Gulyaev and bulk-shear waves by interdigital transducers on a piezoelectric ceramic", Electronics Lett., **9, 18**, p.417 (Sep.1973)
- (53) W.Soluch: "Theory of amplification of Bleustein-Gulyaev waves in tetragonal and hexagonal aystals", IEEE Trans, **SU-24, 1**, p.43 (Jan.1977)
- (54) H.F.Tiersten: "Wave propagation in aninfinite piezoelectric plate", J. Acoust. Soc. Am., **35, 2**, p.234 (Feb.1963)

- (55) R.E.Collin: "Field theory of guided waves", McGraw Hill Book Company (1960)
- (56) J.H.Collins and G.R.Pulliam: Ferrites, Proc. of the International Conference, Japan (1970)
- (57) 堤: "磁気弾性波を用いたカップラの理論的考察", 信学論(B), **54-B**, 12, p.797 (昭46-12)
- (58) 岸本, 堤, 熊谷: "圧電弾性表面波と磁気弾性表面波の周期的結合", 信学論(B), **59-B**, 4, p.231 (昭51-04)
- (59) R.C.M.Li and J.Melngailis: "The influence of stored energy at step discontinuities on the behavior of surface-wave gratings", IEEE Trans., **SU-22**, 3, p.189 (May.1975)
- (60) 疋田, 鈴木: "弾性表面波導波路のステップの解析", 信学論(B), **59-B**, 12, p.555 (昭51-12)
- (61) B.A.Auld: "Acoustic fields and waves in solids", Wiley Interscience (1973)
- (62) 稲村, 吉川: "弾性表面波素子の応用", 応用物理, **45**, 8, p.718 (昭51-08)
- (63) G.L.Matthaei, B.P.O'Shaughnessy and F.Barman: "Relations for analysis and design of surface-wave resonators", IEEE Trans, **SU-23**, 2, p.99 (Mar.1976)
- (64) P.S.Cross, W.H.Haydl and R.S.Smith: "Design and applications of two-port SAW resonators on YZ-Lithium Niobate", Proc. IEEE, **64**, 5, p.682 (May.1976)
- (65) E.S.Sitting and G.A.Coquin: "Filters and dispersive delay lenes using repetitively mismatched ultrasonic transmission lines", IEEE Trans., **SU-15**, 2, p.111 (Apr.1968)
- (66) 竹内, 清水: "弾性的周期摂動を与えた場合の弾性表面波および漏洩弾

- 性表面波の解析”，信学会超音波研資，**US75-16** (1975-07)
- (67) H.A.Sabbagh and T.F.Krile: “Excitation, detection and scattering of electroelastic surface waves via an integral equation approach”, J. Acoust. Am., **60**, 3, p.626 (Sep.1976)
- (68) 疋田，鈴木：“弾性表面波導波路の界面不連続によるモード結合と姿態変換”，信学論(B)，**58-B**, 7, p.353 (昭50-07)