Title	レーザー核融合におけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーションによる研究
Author(s)	坂上, 仁志
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/2964171
rights	
Note	

レーザー核融合におけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーションによる研究

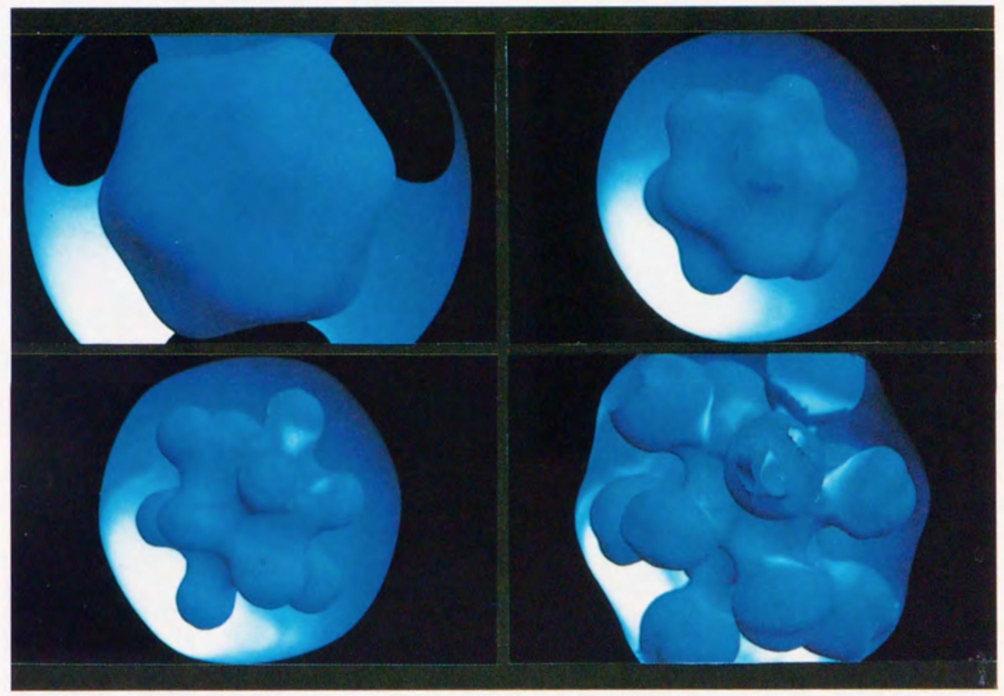
平成２年９月

坂上仁志

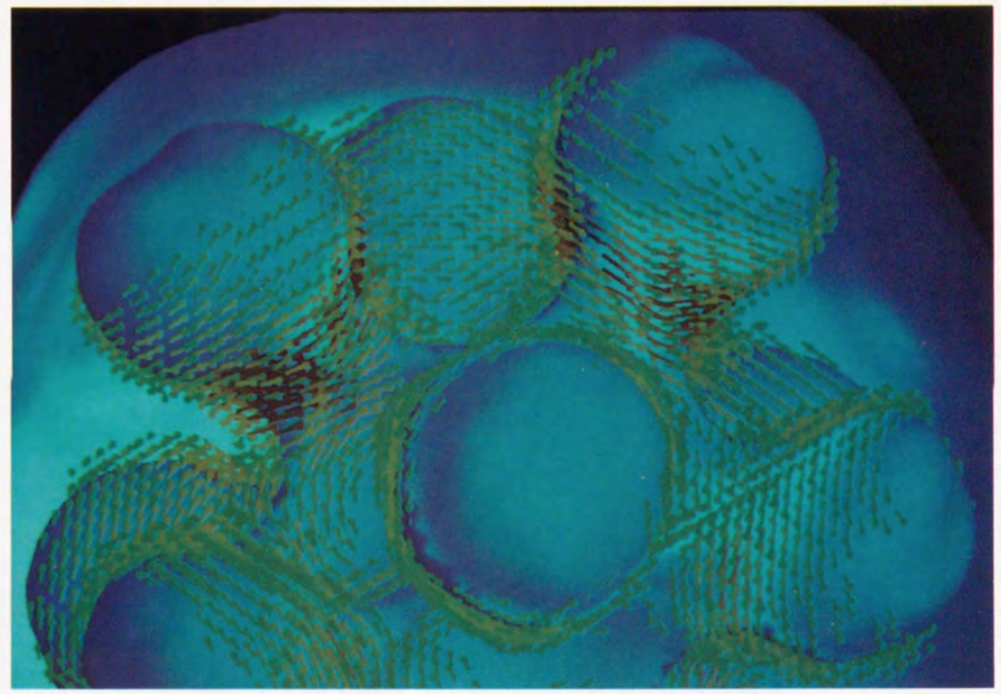
レーザー核融合におけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーションによる研究

平成２年９月

坂上仁志



３次元球対称ターゲットにおいて，モード数（ｎ，ｍ）＝（６，３）で与えられる球面調和関数のじょう乱を印加した場合の燃料・プッシャー接触面のスタグネーションフェーズにおける時間発展．レイリー・テイラー不安定性により非線形なバブル・スパイク構造が形成されているのがよくわかる．この図は，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄの結果をボリューム・レンダリングの一つであるマーチング・キューブ法を用いた手法により可視化した．



3次元球対称ターゲットにおいて，モード数（n，m）＝（6，3）で与えられる球面調和関数のじょう乱を印加した場合の燃料・プッシャー接触面の非線形段階における形状とそのときの渦度ベクトル．渦度ベクトルの強度はベクトルの色が緑→黄→赤になるほど強くなっている．バブルの根元・付け根に強い強度の渦度リングがあることがよくわかる．この渦度リングがバブルの成長を促すメカニズムになっていると考えられる．

内容梗概

本論文は，著者が大阪大学レーザー核融合研究センターの受託研究員として行なった多次元流体コードの開発とこれを用いたシミュレーションによる解析を中心としたレーザー核融合の爆縮過程における一様性を阻害する流体力学的不安定性についての研究成果をまとめたものである.

レーザー核融合において核融合の自己点火に必要な高温・高密度を達成するためには一様・均一にターゲットを爆縮することが不可欠であるが，この一様・均一な爆縮を妨げる様々な流体力学的不安定性が存在する. この流体力学的不安定性の中でもレイリー・テイラー不安定性は，加速フェーズにおいてはアブレーション面で，スタグネーションフェーズにおいては燃料とプッシャーの接触面で本質的に避けることのできない問題であり，特に，スタグネーションフェーズにおいては燃料とプッシャーのミキシングを誘起し，中性子発生数を著しく減少させる. このため，レイリー・テイラー不安定性のふるまいを多次元コードにより解析して一様爆縮に与える影響を調べることは，レーザー核融合にとって重要な課題の一つである.

また，高エネルギー電子による燃料の先行加熱は，燃料の圧力を圧縮前に高くしてしまうために効率のよい爆縮を妨げるので，これも重要な課題である.

このような状況を鑑み，著者は，スタグネーションフェーズにおいて爆縮の一様性・対称性を損なうレイリー・テイラー不安定性に着目し，新しい２次元・３次元流体コード『ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄ』を開発すると共に，このコードを用いたシミュレーションによりレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展を一貫して調べた. 特に，３次元現象を取り扱えるようになったことの意義は大きく，本研究により初めてレイリー・テイラー不安定性の３次元的なふるまいが明らかになった. また，1-1/2次元電磁粒子コード『ＥＭＰＡＣ』を用いたシミュレーションによりターゲット燃料の先行加熱の原因となる超高エネルギーの電子を発生させる誘導ラマン散乱の二つの飽和機

構もあわせて明らかにした．

本論文は，７章より構成されている．

第１章は緒論であり，レーザー核融合における爆縮過程を概観して本研究の重要性と目的を明らかにする．

第２章では，本研究を遂行するために開発した多次元流体コード『ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄ』について詳細を述べ，レイリー・テイラー不安定性によるタービュラント・ミキシングの実験結果をシミュレーション結果と比較する．あわせて３次元シミュレーションの結果を可視化するボリューム・レンダリングの手法についても述べる．

第３章では，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展をＩＭＰＡＣＴ－２Ｄを用いたシミュレーションにより調べ，自己相似解の固有値解析による理論的な結果と比較・議論する．また，レイリー・テイラー不安定性の線形・非線形段階の両方を含む簡単な時間発展モデルを考え，スタグネーションフェーズ開始時の初期振幅とモード数の関数として最大圧縮時におけるじょう乱の振幅を評価する．

第４章では，ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄで解いている２次元流体方程式のエネルギー保存式に電子熱伝導項を付加することにより，電子熱伝導によるレイリー・テイラー不安定性の抑制効果をシミュレーションにより調べ，質量密度の有限勾配効果による不安定性抑制の解析結果と比較・議論する．

第５章では，第３章で述べた２次元円柱対称ターゲットを３次元球対称ターゲットに拡張してＩＭＰＡＣＴ－３Ｄによるシミュレーションを行ない，レイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展および３次元的なふるまいを明らかにする．

第６章では，超高エネルギー電子の生成・損失および密度の線形空間スケール長の変化によって引き起こされる誘導ラマン散乱の飽和・脈動のダイナミクスを1-1/2次元電磁粒子コードによるシミュレーションおよび簡単な理論モデルにより調べる．

第７章は結論であり，以上の研究で得られた成果をまとめて本論文の総括を行なっている．

目次

第1章　緒論

核融合を実現するための方式には，大別すると磁場閉じ込め方式と慣性閉じ込め方式とがある．磁場閉じ込め方式は，比較的低密度のプラズマを磁気圧力で閉じ込めながら連続的に核反応を維持し続ける定常的な方式である．それに対して，慣性閉じ込め方式は，燃料球を爆縮によって超高密度に圧縮し，慣性のためにその燃料球が飛散するのに要する極く短い時間のうちに核反応を終えてしまうパルス的な方式である．

レーザーをエネルギードライバーとして慣性閉じ込め方式を実現するレーザー核融合では，ターゲットと呼ばれる燃料小球の表面に高強度のレーザー光を照射して高温プラズマを生成・噴出させ，その反作用により燃料を圧縮する．そして，この爆縮の結果得られる高温・高密度の燃料プラズマが自己点火・燃焼（熱核融合反応）することによりエネルギーを発生させる．このため，レーザー核融合で大きなエネルギーを取り出すためには，ターゲットを効率よく圧縮することが不可欠となる．このターゲットの圧縮効率はターゲットの構造そのものとレーザーの照射方式に大きく依存するが，理論・シミュレーション等による解析および実験による研究が精力的に進められている．

ターゲットに照射したレーザーエネルギーと核融合反応により発生したエネルギーが等しい条件を科学的ブレークイーブンと呼ぶ．重水素・三重水素（ＤＴ）を燃料とした場合を考えると，この科学的ブレークイーブンを満たすために必要なレーザーのエネルギーは，おおよそ次のように評価できる[1, 2]．

$$E_L \approx 7.8 \times 10^9 \cdot \frac{1}{\eta_a \eta_h \eta_t} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_m}\right)^2 \quad [\mathrm{J}] \qquad (1-1)$$

ここで，η_aはレーザーの吸収率，η_hは流体力学的効率と呼ばれ吸収エネルギーから爆縮の運動エネルギーへの変換効率，η_tは伝達効率と呼ばれ運動エネルギーから燃料

の内部エネルギーへの変換効率を表す．更に，ρ_s，ρ_mはそれぞれＤＴ燃料の固体密度および最大圧縮密度である．従って，小さなレーザーエネルギーで科学的ブレークイーブンを実現するためには，ＤＴ燃料の最大圧縮密度を上げることと上記三つの効率を大きくすることが重要になってくる．

レーザーの吸収率および流体力学的効率は，波長，出力エネルギー，パルス幅等のレーザー条件，ターゲットの材質・構造によって決定される[3)]．一方，伝達効率および燃料の最大圧縮密度は，爆縮の一様性によって著しく影響を受けるが，この爆縮一様性はレーザーの照射系で決定されるレーザー吸収の一様性とその後の爆縮過程で引き起こされる流体力学的な不安定性に大きく依存する．また，燃料の先行加熱は，圧縮前に燃料の圧力を高くしてしまうために効率のよい爆縮を妨げるので，この先行加熱の抑制も重要な問題である．

レーザー核融合における爆縮方式は，まずレーザーの照射方式により直接照射方式と間接照射方式とに大別される．直接照射方式は燃料を封入したターゲットの表面を直接照射する方式であり，間接照射方式はレーザーのエネルギーをいったんプラズマもしくはＸ線のエネルギーに変換してから燃料を爆縮する方式である．更に，直接照射方式は爆縮過程の差異により，エクスプローシブ型爆縮とアブレーティブ型爆縮とに大別される．エクスプローシブ型爆縮では，短パルス高強度のレーザー光をターゲットに照射して共鳴吸収により高速電子を生成する．そして，球殻の急激な膨張を引き起こし，その静圧で燃料を圧縮しようとする．この方式では，燃料は低密度ではあるが十分高温になるので，比較的エネルギーの小さなレーザーで効率よく核反応を起こすことができる．これに対してアブレーティブ型爆縮は，長パルス低強度のレーザー照射により球殻を連続的に噴出させ，その反作用であるロケット効果の動圧により燃料を高密度に圧縮しようとするものである．現在，研究の中心はこのアブレーティブ型爆縮に移ってきており，1989年には大阪大学レーザー核融合研究センターの激光XII号を用いた実験により，固体密度の600倍（太陽中心部の密度の４倍に匹敵）にも達する超高密度が実現している．

間接照射方式の場合には，レーザー光をターゲットの外殻と内殻の二重殻で構成される空洞中に入射する．レーザーは外殻内壁で吸収され，そこでプラズマおよびＸ線が発生する．燃料を爆縮する機構には，そのプラズマの電子熱伝導およびＸ線の輻射によって内殻外壁をアブレーションさせることにより生じる動圧と空洞中に充満したプラズマの静圧によるものとがある．いずれにしろ，プラズマおよびＸ線は空洞中に長時間にわたって閉じ込められるため，直接照射方式に比較するとエネルギー吸収強度の不均一性が幾何学的に緩和されるので比較的一様な爆縮が実現できる．このため，将来ドライバーエネルギーが大きくなりターゲットが大型化したときには，高効率の爆縮が期待されている．

以上にレーザー核融合における各種爆縮方式を概観したが，現在研究の中心であるアブレーティブ型爆縮について更に詳しく原理をみる[4)]．

まず，真空中に置かれた固体平面ターゲットの片面にレーザー光が照射されたときに起こる現象を考える．ターゲットの表面はレーザーの吸収により急速にプラズマ化・噴出し加熱されるため，表面における温度および圧力は急激に上昇する．このとき，噴出するプラズマにより真空中への膨張波が形成され，表面での温度と圧力の大きな不均衡はそれぞれ固体内部に伝播する熱伝導波および衝撃波を形成する．このような過渡的な現象が終わり，一定のレーザーエネルギーが供給され続けていると仮定すると，プラズマは図１－１に示すような定常的な構造をもつ．

固体内部は，初期状態のままの冷たい固体領域（I）と衝撃波により圧縮された固体領域（II）とからなり，その背面には圧力変化はゆっくりしているが密度の急激な減少および温度・流速の急激な増大で特徴づけられるデフラグレーション領域（III）が形成される．更に，この領域はほとんど等温で膨張していく希薄波領域（IV）へと連続的に移行していく．このデフラグレーション領域において，噴出するプラズマの反作用として生じるロケット効果による圧力をアブレーション圧力（P_A）と呼び，この圧力がターゲットを加速・圧縮する力となる．

アブレーション圧力による爆縮，即ちアブレーティブ型爆縮を考察するために，ガラス等の比較的密度の高い材質でできた球殻（プッシャー）の内面に固体ＤＴ層（燃料）

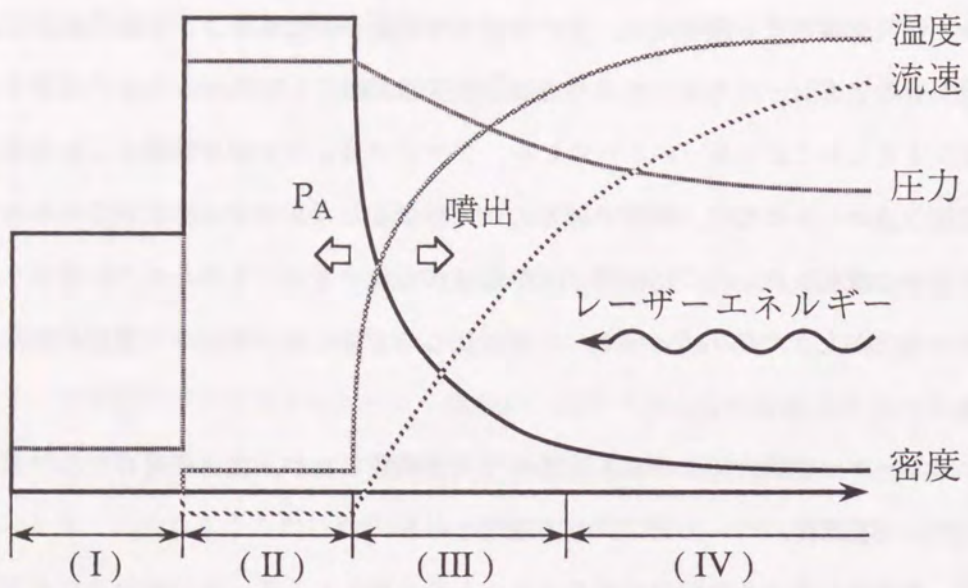


図１－１　固体平面ターゲットのアブレーション．噴出するプラズマのロケット効果によりアブレーション圧力（P_A）が生じている．

および外面に低Ｚの噴出層（アブレーター）をコーティングした三層構造のクライオターゲットを考える．爆縮過程における時間・空間の模式図を図１－２に示す．

爆縮の物理過程は次の５段階に分けて考えることができる．

(I) 加速フェーズ（$t < t_1$）

アブレーターはレーザー光の照射によりプラズマ化・噴出し，その反作用の結果生じるアブレーション圧力によりプッシャーおよび燃料はターゲット中心へ加速される．レーザー光は時刻 t_1 まで照射されており，このフェーズでアブレーターはすべて噴出により失われ，プッシャーおよび燃料は最大速度（V_A）まで加速される．時刻 $t = 0$ にアブレーション圧力によって生じる強い衝撃波がプッシャーおよび燃料の内部を伝播・加熱し，それらの内部状態を決定する．

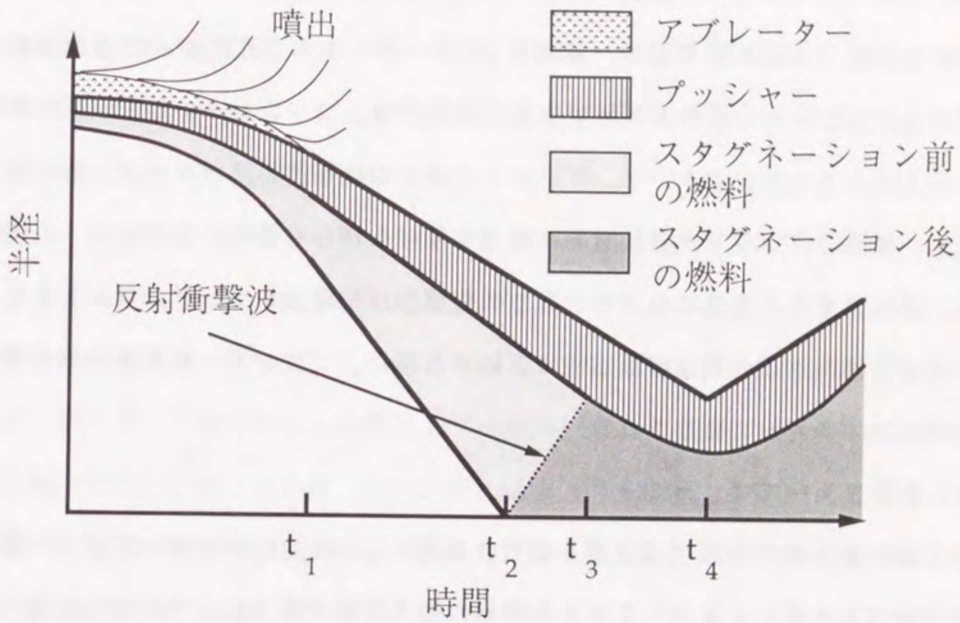


図１－２　クライオターゲットにおける爆縮過程の時間・空間の模式図．爆縮の物理過程は５段階に分けて考えることができる．

(II) 慣性フェーズ（$t_1 < t < t_2$）

時刻 t_1 にターゲット中心への加速が終了後，プッシャーおよび燃料が十分低温・低圧に保たれており，それらの動圧（ρV_A^2）が静圧より十分大きい場合，プッシャーおよび燃料は，慣性によりターゲット中心に向かって自由運動しながら同時に音速程度での自己膨張を行なう．

(III) 反射衝撃波フェーズ（$t_2 < t < t_3$）

燃料の膨張先端は時刻 t_2 にターゲット中心に到達・収束し，その中心より反射衝撃波が発生して外に向かって伝播する．この反射衝撃波により燃料はターゲット中心に向かう自由運動を止め，その運動エネルギーを内部エネルギーに変換する．このため，燃料の温度および圧力はこのフェーズにおいて急激に上昇する．

（IV）スタグネーション（減速）フェーズ（$t_3 < t < t_4$）

燃料中を伝播する反射衝撃波は，時刻t_3にターゲット中心に向かって自由運動を続ける燃料とプッシャーの接触面と衝突する．このとき，プッシャーの動圧が反射衝撃波による圧力よりも十分に大きいと，プッシャーはこの衝撃波を再びターゲット中心へと押し返し，燃料とプッシャーの接触面は減速を受けながらも依然として中心への運動を続ける．燃料はすでに高温になっているため衝撃波は明確なショックフロントをもはや形成できず，燃料はこの間ほぼ断熱的に圧縮され続け，プッシャーの運動エネルギーも燃料の内部エネルギーに変換される．

（V）膨張フェーズ（$t_4 < t$）

断熱圧縮により燃料の圧力は上昇を続け，時刻t_4には，もはやプッシャーの動圧がその圧力を支えきれなくなる．このとき燃料の最大圧縮が得られ，この時刻以後，燃料は膨張を始める．

以上に考察した流体力学的現象は理想的な球対称の均一爆縮を仮定しているが，実際には均一な爆縮を妨げる流体力学的不安定性を考慮しなければならない．この流体力学的不安定性の中での重要な課題の一つとしてレイリー・テイラー不安定性がある．

また，燃料の先行加熱の問題も重要な課題である．レーザーを吸収するときに発生する高エネルギーの電子や硬X線は，その平均自由行程が長いためデフラグレーション領域で吸収されずに燃料にまで達し，これを加熱する．このため，圧縮前に燃料の圧力が高くなってしまい燃料の効率のよい爆縮を妨げる．

レイリー・テイラー不安定性は，重力に抗して重い流体を軽い流体で支えるときに必ず起こり，二つの流体の境界面におけるじょう乱は時間と共に指数関数的に成長する．

上記のレーザー核融合におけるアブレーティブ型爆縮過程では，加速フェーズにおいてはアブレーション面で，スタグネーション（減速）フェーズにおいては燃料とプッシャーの接触面で，レイリー・テイラー不安定性は本質的に避けることのできない問題である．この不安定性は，レーザー照射および吸収の非一様性，ターゲット製作上の非球対称性，更に短波長の自然ノイズのモード間結合等によって引き起こされ，爆縮の球対称性を損ない効率のよい圧縮を妨げる．

多くの研究の結果，加速フェーズにおけるアブレーション面でのレイリー・テイラー不安定性は，アブレーションにより指数関数的成長が抑制され，従来考えられていたほどには危険ではないことが明らかにされた．

一方，1次元流体コードのシミュレーションにより，最大圧縮が得られるスタグネーションフェーズにおいて，核反応が支配的に起こり中性子の発生数が急激に増加することが明らかにされた．従って，このフェーズにおける燃料とプッシャーの接触面でのレイリー・テイラー不安定性による燃料とプッシャーのミキシングは，全中性子発生数を大幅に減少させると考えられる．このため，スタグネーションフェーズにおける爆縮の一様性・対称性の研究は重要であるが，これまでこの分野での研究は皆無である．

本研究は，以上のような背景のもとに，特にスタグネーションフェーズにおける燃料とプッシャーの接触面でのレイリー・テイラー不安定性を対象として，その不安定性を正確にシミュレーションできる新しいコードの開発から，2次元および3次元における不安定性の線形・非線形時間発展，電子熱伝導による抑制効果等を一貫して調べた結果と，あわせて燃料の先行加熱の問題の時に重要となる高エネルギーの電子を発生させる誘導ラマン散乱の飽和機構を明らかにした結果をまとめたものである．

参考文献

1）R. E. Kidder, Nucl. Fusion **16**, 405 (1976).

2）三間圀興，核融合研究　**51**, 400 (1984).

3）M. Murakami and K. Nishihara, Jpn. J. Appl. Phys. **26**, 1132 (1987).

4）高部英明，プラズマ・核融合学会，第２４回若手夏の学校テキスト(1985).

第2章　シミュレーションコードの開発

2.1　序言

レーザー核融合の爆縮過程で生じる各種の物理現象は複雑であり，かつその性格上極めて短い時間内（～10^{-9}秒）に極く微小な領域（～1ミリ）で起こる．このため，実験で観測できる物理量は非常に限定されるので研究の初期の段階からシミュレーションによる解析が重要な役割を担ってきたが，最近の研究の進展に伴いより正確でより大規模な多次元シミュレーションが必要不可欠になってきている．

精力的な研究により様々な物理現象を同時にかつ正確に取り扱うことのできる1次元流体コードが開発され，そのコードのパラメーターランにより最適なターゲット構造等が決定され実験に用いられてきた．しかし，これまでの多くの実験で得られた全中性子発生数は1次元流体コードのシミュレーション結果から予想される値よりも，かなり小さな値を示している．この原因の一つとして1次元流体コードでは本質的に取り扱えない2次元的・3次元的な爆縮の一様性・対称性が考えられる．

一般に，レーザー核融合の爆縮過程をシミュレーションするには，コードは衝撃波や接触面等の非常に短い空間スケールにおいて物理量が大きく変化する現象を正確に取り扱わなければならない．1次元においては，流体方程式を安定にかつ高精度で解いて，この不連続な物理過程を捕えることのできるスキームが提案・開発されてきたが，多次元でも安定にかつ精度良く解けるスキームはほとんどない．また，これまでの爆縮シミュレーションでは，主に古典的ラグランジュ法による流体コードが開発されて大きな成果を収めてきたが，多次元の場合には，この方法では限界が生じる．即ち，流体の変形が大きくなると位相幾何学的な崩壊，いわゆる計算グリッドのねじれが生じ，それ以上のシミュレーションを実質上不可能にする．この対策として計算グリッドの再構成やねじれを防ぐための人工粘性の印加等が行なわれているが，これは許容範囲外の大きな数値的拡散を引き起こしシミュレーションの精度が著しく悪くなる．一方の固定グリッドを用いるオイラー法では，流体の大きな変形は容易に取り扱うことができるが，一般に数値的な拡散を招きやすい．特に，二つの流体が接する接触面を取り扱う場合，その流体の境界面は特別には追跡されないため，二つの流体がグリッド内で平均化されて大きな拡散を招く．このため，物理量の不連続性がなまり，もはや正確なシミュレーションはできなくなる．これを改善するためにスキームの精度を上げると，今度はその接触面において非物理的な振動が生じてしまう．

さて，本研究の課題であるレイリー・テイラー不安定性は，時間発展が進むと非線形な構造である，いわゆるバブル・スパイク構造を形成する．この非線形構造は大規模な流体の変形・ねじれをもたらすので，古典的ラグランジュ法ではレイリー・テイラー不安定性の非線形時間発展を正確に捕えることはできない．

このような状況から著者は新しい多次元流体コードを作成するのに，オイラー法でも数値的な拡散が小さく，高精度でしかも非物理的な振動が生じないＴＶＤスキームと呼ばれる新しいスキームを用いた．

2.2　ＴＶＤスキーム

ＴＶＤスキームは，Total Variation Diminishing スキームの略であり，双曲型の保存則で記述された方程式系の初期値問題を差分解法により高精度で解くために開発された比較的歴史の新しい差分スキームである[1-3]．

ＴＶＤスキームは1983年にニューヨーク大学の A. Harten らによって提案され，一般的に次のような優れた特性を備えている．

（Ｉ）　時間・空間の両方について２次の高精度である

（II）　不連続点において数値解の非物理的な振動がない

（III）　不連続点を数メッシュの高解像度で捕らえ，時間と共になまらない

現在では，このスキームの数値流体力学の分野，特に航空・宇宙工学の分野における応用研究がめざましく進んで，その有効性が広く認められており，この分野におけるもっとも良く使われているスキームの一つとなっている．

さて，ＴＶＤスキームを概説するために，次のようなスカラーの双曲型で記述された保存則方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}\\&=\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0\qquad\left(a(u)=\frac{df}{du}\right)\end{aligned}\qquad(2-1)$$

まず，Total Variationを次のように定義する．

$$\begin{aligned}TV(u^n)&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|u^n_{j+1}-u^n_j\right|\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\Delta_{j+1/2}u^n\right|\end{aligned}\qquad(2-2)$$

ここで，u^n_jは（２－１）式をある差分スキームで解いたときの時間が$n\Delta t$，空間が$j\Delta x$の差分解である．

もし，Total Variation が時間と共に増加しないならば，即ち（２－３）式を満足するならば，この性質を Total Variation Diminishing であると言い，この差分スキームをＴＶＤスキームと呼ぶ．

$$TV\left(u^{n+1}\right)\leq TV(u^n)\qquad(2-3)$$

（２－１）式の解は一般的な性質として単調性が保存されるが，差分解であるu^n_jも当然単調性を保存しなければならず，このＴＶＤスキームに対する要求はしごく自然なものである．ＴＶＤスキームは，この性質のために『不連続点において数値解の非物理

的な振動がない』という２番目の特性を本質的に備えている．

さてここで，（２－１）式の差分解u^n_jを次のようなスキームで定義する．

$$\begin{aligned}u^{n+1}_j&=u^n_j-\lambda\left[\bar{f}^n_{j+1/2}-\bar{f}^n_{j-1/2}\right]\\&=u^n_j+C^+_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}u^n-C^-_{j-1/2}\Delta_{j-1/2}u^n\end{aligned}\qquad(2-4)$$

ここで，λは$\Delta t／\Delta x$であり，ΔtおよびΔxはそれぞれ時間および空間の差分ステップである．$\bar{f}^n_{j+1/2}$はフラックス関数$f(u)$と矛盾のないように定義される半整数空間での数値フラックス関数であり，係数$C^{\pm}_{j+1/2}$については後述する．

（２－４）式の空間に関する添字ｊに関してｊ＋１とｊの差より，

$$\begin{aligned}\Delta_{j+1/2}u^{n+1}&=C^+_{j+3/2}\Delta_{j+3/2}u^n+C^-_{j-1/2}\Delta_{j-1/2}u^n\\&\quad+\left(1-C^+_{j+1/2}-C^-_{j+1/2}\right)\Delta_{j+1/2}u^n\end{aligned}\qquad(2-5)$$

が得られる．

更に，この式の絶対値を取ることにより，

$$\begin{aligned}\left|\Delta_{j+1/2}u^{n+1}\right|&\leq C^+_{j+3/2}\left|\Delta_{j+3/2}u^n\right|+C^-_{j-1/2}\left|\Delta_{j-1/2}u^n\right|\\&\quad+\left(1-C^+_{j+1/2}-C^-_{j+1/2}\right)\left|\Delta_{j+1/2}u^n\right|\end{aligned}\qquad(2-6)$$

が得られ，もし係数$C^{\pm}_{j+1/2}$が次のような条件を満たすと仮定すると，

$$\begin{aligned}&C^+_{j+1/2}\geq 0,\\&C^-_{j+1/2}\geq 0,\\&C^+_{j+1/2}+C^-_{j+1/2}\leq 1\end{aligned}\qquad(2-7)$$

このスキームの Total Variation は，次式のように評価できる．

$$
\begin{aligned}
TV(u^{n+1}) &\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{j+1/2} u^{n+1} \right| \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{+}_{j+3/2} \left| \Delta_{j+3/2} u^{n} \right| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{-}_{j-1/2} \left| \Delta_{j-1/2} u^{n} \right| \\
&\qquad + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(1 - C^{+}_{j+1/2} - C^{-}_{j+1/2}\right) \left| \Delta_{j+1/2} u^{n} \right| \qquad (2-8) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{j+1/2} u^{n} \right| \equiv TV(u^{n})
\end{aligned}
$$

よって，このスキームは（２－３）式を満たすのでＴＶＤスキームである．

ここまでは，数値フラックス関数 $\overline{f}^{\,n}_{j+1/2}$ の定義については触れなかったが，次のように定義する．

$$
\overline{f}_{j+1/2} = \frac{f_{j+1} + f_j}{2} - \frac{1}{2\lambda} Q\left(\lambda \overline{a}_{j+1/2}\right) \Delta_{j+1/2} u
$$

$$
\overline{a}_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{f_{j+1} - f_j}{\Delta_{j+1/2} u} & \left(\Delta_{j+1/2} u \neq 0\right) \\ a_j & \left(\Delta_{j+1/2} u = 0\right) \end{cases} \qquad (2-9)
$$

ただし，関数Q(x)は人工粘性に関与する関数であり，また簡単のために時間に関する添字のｎを省略している．

もし，関数Q(x)が μ をある定数として次のような性質を満足すれば，

$$
|x| \leq Q(x) \leq 1 \quad (0 \leq |x| \leq \mu \leq 1) \qquad (2-10)
$$

差分スキーム（２－４）式および（２－９）式は次のようなＣＦＬ条件と類似した制限条件のもとでＴＶＤスキームとなることを示す．

$$
\lambda \, max_j \left| \overline{a}_{j+1/2} \right| \leq \mu \qquad (2-11)
$$

まず，（２－９）式を変形して，（２－１２）式を得る．

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_{j+1/2} &= f_j - \frac{1}{2\lambda} \left[Q(\overline{\nu}_{j+1/2}) - \overline{\nu}_{j+1/2} \right] \Delta_{j+1/2} u \\
\overline{f}_{j-1/2} &= f_j - \frac{1}{2\lambda} \left[Q(\overline{\nu}_{j-1/2}) + \overline{\nu}_{j-1/2} \right] \Delta_{j-1/2} u
\end{aligned} \qquad (2-12)
$$

ここで，$\overline{\nu}_{j+1/2}$ は $\lambda \overline{a}_{j+1/2}$ である．

次に，（２－１２）式を（２－４）式に代入して，（２－１３）式を得る．

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \lambda \left[\overline{f}_{j+1/2} - \overline{f}_{j-1/2} \right] \\
&= u_j^n + \frac{1}{2} \left[Q(\overline{\nu}_{j+1/2}) - \overline{\nu}_{j+1/2} \right] \Delta_{j+1/2} u^n \\
&\qquad - \frac{1}{2} \left[Q(\overline{\nu}_{j-1/2}) + \overline{\nu}_{j-1/2} \right] \Delta_{j-1/2} u^n \qquad (2-13) \\
&\equiv u_j^n + C^{+}_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} u^n - C^{-}_{j-1/2} \Delta_{j-1/2} u^n
\end{aligned}
$$

よって，係数 $C^{\pm}_{j+1/2}$ は，

$$
C^{\pm}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[Q(\overline{\nu}_{j+1/2}) \mp \overline{\nu}_{j+1/2} \right] \geq 0 \qquad (2-14)
$$

と求められ，更に，条件（２－１０）式および（２－１１）式により，係数 $C^{\pm}_{j+1/2}$ は次のような条件を満足する．

$$
\begin{aligned}
&C^{+}_{j+1/2} + C^{-}_{j+1/2} = Q(\overline{\nu}_{j+1/2}) \leq 1 \\
&\left(\left| \overline{\nu}_{j+1/2} \right| \leq max_j \left| \overline{\nu}_{j+1/2} \right| \leq \mu \leq 1 \right)
\end{aligned} \qquad (2-15)
$$

故に，差分スキーム（２－４）式および（２－９）式は（２－７）式を満たすのでＴ

VDスキームとなるが，このスキームは３点差分なので，明らかに時間・空間の両方について１次の精度しか持たない．

ここでは，修正数値フラックス関数法と呼ばれる手法を用いて１次精度の３点差分スキームを２次精度の５点差分スキームに置き換える．

修正数値フラックス関数法とは，元の１次精度スキームの数値フラックス関数に２次オーダーの微小量の項を付け加えることにより，スキームを１次精度から２次精度に置き換える手法である．

そこで，修正数値フラックス関数$\overline{f}^{M}{}_{j+1/2}$を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\overline{f}^{M}_{j+1/2} &= \frac{f^{M}_{j+1}+f^{M}_{j}}{2} - \frac{1}{2\lambda}Q\left(\overline{v}^{M}_{j+1/2}\right)\Delta_{j+1/2}u \\
&= \frac{f_{j+1}+f_{j}}{2} + \frac{1}{2\lambda}\left[g_{j+1}+g_{j}-Q(\overline{v}_{j+1/2}+\gamma_{j+1/2})\Delta_{j+1/2}u\right] \\
\gamma_{j+1/2} &= \frac{g_{j+1}-g_{j}}{\Delta_{j+1/2}u} \qquad (2-16) \\
&\left(f^{M}_{j} = f_{j}+\frac{g_{j}}{\lambda},\ \ \overline{v}^{M}_{j+1/2}=\overline{v}_{j+1/2}+\gamma_{j+1/2}\right)
\end{aligned}
$$

もし，関数Q(x)が（２－１０）式の条件に加えてリプシッツの連続条件を満たし，かつ数値フラックス関数の修正項g_jが次の条件を満足すれば，スキームは２次の精度になることをまず示す．

$$
\begin{aligned}
g_{j+1}+g_{j} &= \left[Q(\overline{v}_{j+1/2})-(\overline{v}_{j+1/2})^{2}\right]\Delta_{j+1/2}u + O(\Delta^{2}) \\
g_{j+1}-g_{j} &\equiv \gamma_{j+1/2}\cdot\Delta_{j+1/2}u = O(\Delta^{2})
\end{aligned}
\qquad (2-17)
$$

２次精度のスキームである Lax-Wendorff スキームの数値フラックス関数$\overline{f}^{LW}{}_{j+1/2}$は，$Q(x)=x^2$として次のように書けるが，

$$
\overline{f}^{LW}_{j+1/2} = \frac{f_{j+1}+f_{j}}{2} - \frac{1}{2\lambda}(\overline{v}_{j+1/2})^{2}\Delta_{j+1/2}u \qquad (2-18)
$$

修正数値フラックス関数$\overline{f}^{M}{}_{j+1/2}$が次の条件を満足すれば，このスキームが２次の精度になることは明らかである．

$$
\overline{f}^{M}_{j+1/2} - \overline{f}^{LW}_{j+1/2} = O(\Delta^{2}) \qquad (2-19)
$$

そこで，（２－１６）式と（２－１８）式の差を取ると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
2\lambda\left[\overline{f}^{M}_{j+1/2}-\overline{f}^{LW}_{j+1/2}\right] &= \left\{g_{j+1}+g_{j}-\left[Q(\overline{v}_{j+1/2})-(\overline{v}_{j+1/2})^{2}\right]\Delta_{j+1/2}u\right\} \\
&\quad + \left\{\left[Q(\overline{v}_{j+1/2})-Q(\overline{v}_{j+1/2}+\gamma_{j+1/2})\right]\Delta_{j+1/2}u\right\}
\end{aligned}
\qquad (2-20)
$$

（２－２０）式の右辺第１項は，（２－１７）式の最初の条件より$O(\Delta^2)$になることは明らかである．また，右辺第２項は，関数Q(x)が次のリプシッツの連続条件を満たすので，

$$
\left|Q(\overline{v}_{j+1/2})-Q(\overline{v}_{j+1/2}+\gamma_{j+1/2})\right| \le const\cdot\left|\gamma_{j+1/2}\right| \qquad (2-21)
$$

右辺第１項と同様に（２－１７）式の２番目の条件により$O(\Delta^2)$になる．

よって，このスキームは２次の精度を持つことになる．

つぎに，数値フラックス関数の修正項g_jを次式で定義すれば，g_jが（２－１７）式を満足することを示す．

$$
\begin{aligned}
g_{j} &= s_{j+1/2}\,max\left[0, min\left(\left|h_{j+1/2}\right|, s_{j+1/2}\cdot h_{j-1/2}\right)\right] \\
&= \begin{cases} s_{j+1/2}\,min\left(\left|h_{j+1/2}\right|,\left|h_{j-1/2}\right|\right) & (h_{j+1/2}\cdot h_{j+1/2}\ge 0) \\ 0 & (h_{j+1/2}\cdot h_{j+1/2}<0) \end{cases} \\
h_{j+1/2} &= \frac{1}{2}\left[Q(\overline{v}_{j+1/2})-(\overline{v}_{j+1/2})^{2}\right]\Delta_{j+1/2}u \qquad (2-22) \\
s_{j+1/2} &= sgn(h_{j+1/2})
\end{aligned}
$$

(2－22)式を変形すると次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
g_j &= \frac{1}{2}\left[h_{j+1/2}+h_{j-1/2}-s_{j+1/2}\left|h_{j+1/2}-h_{j-1/2}\right|\right] \\
&= h_{j\pm1/2}-\frac{1}{2}\left[\pm\left(h_{j+1/2}-h_{j-1/2}\right)+s_{j+1/2}\left|h_{j+1/2}-h_{j-1/2}\right|\right]
\end{aligned}
\qquad (2-23)
$$

ここで，関数Q(x)はリプシッツの連続条件を満たすので，$h_{j+1/2}$は

$$h_{j+1/2}-h_{j-1/2}=O(\Delta^2) \qquad (2-24)$$

となり，(2－23)式より結局g_jは

$$g_j=h_{j\pm1/2}+O(\Delta^2) \qquad (2-25)$$

となる.

この式を書き直して

$$
\begin{aligned}
g_j &= h_{j+1/2}+O(\Delta^2) \\
g_{j+1} &= h_{j+1/2}+O(\Delta^2)
\end{aligned}
\qquad (2-26)
$$

が得られ，これから直ちに(2－22)式の$h_{j+1/2}$の定義よりg_jが(2－17)式を満足することがわかる.

以上の式により定義された修正数値フラックス関数$\overline{f}^M_{j+1/2}$は，(2－11)式と同様に次式で示される制限条件のもとで(2－15)式を満足することは容易に示せるので，この5点差分スキームはTVDスキームである.

$$\max_j\left|\overline{\nu}^M_{j+1/2}\right|\le\mu \qquad (2-27)$$

更に，(2－11)式が成り立つなら(2－27)式が成り立つことも容易に示せるので，結局この5点差分スキームは，(2－11)式のCFL条件と類似した制限条件のもとでTVDスキームとなる.

以上の5点差分2次精度TVDスキームのアルゴリズムを図2－1に示す.

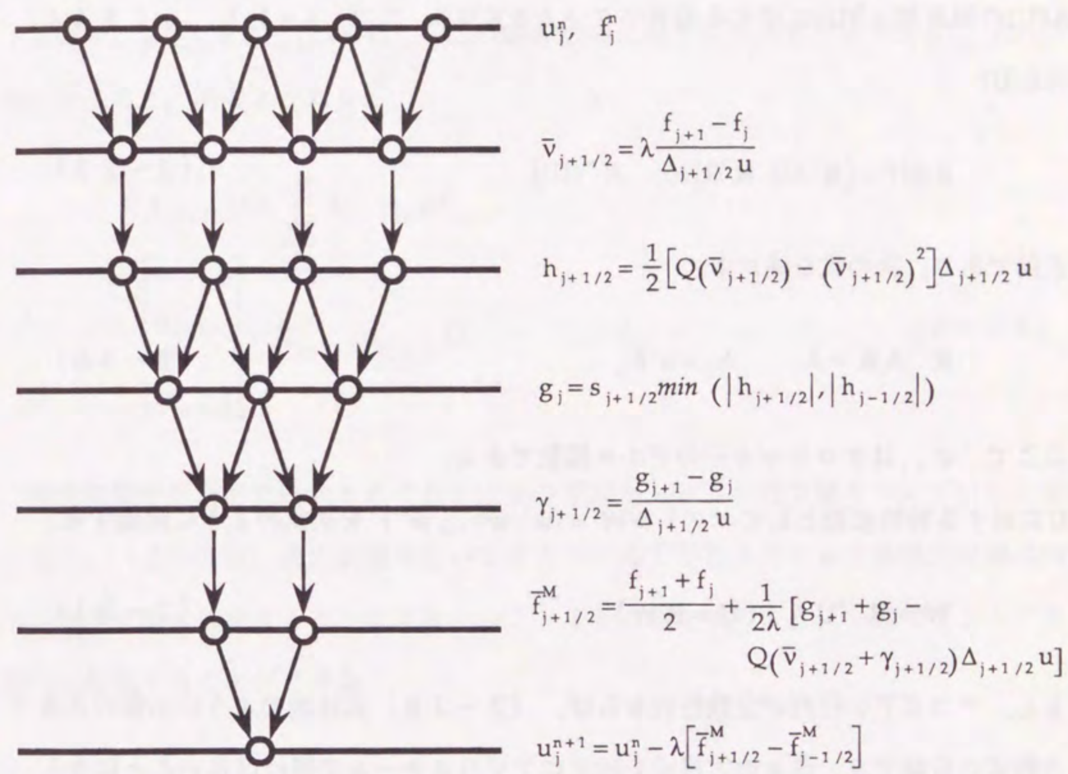


図2－1　5点差分による2次精度TVDスキームのアルゴリズム.

2.3　流体方程式への応用

前節で説明したTVDスキームはスカラーの方程式を対象にしていたが，本節ではこのスキームを拡張して流体方程式に適用する手法について述べる[4)].

まず最初に，次のような双曲型の保存則で記述された一般的なシステムを考える.

$$
\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0,
$$

$$
\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \tag{2-28}
$$

ここで，U, F(U)は要素数mの列ベクトルである．また，A(U)はm×mのヤコビアン行列であり，その固有値はすべて実数であると仮定する．

A(U)の固有値 $a^k(\mathbf{U})$に対する固有ベクトルを$\mathbf{R}^k(\mathbf{U})$，ただし$k = 1, 2, \dots, m$とすると，行列R(U)

$$
\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \left[\mathbf{R}^1(\mathbf{U}), \mathbf{R}^2(\mathbf{U}), \dots, \mathbf{R}^m(\mathbf{U})\right] \tag{2-29}
$$

は正則であり，次の式を満たす．

$$
\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{R} = \Lambda, \qquad \Lambda_{ij} = a^i \delta_{ij} \tag{2-30}
$$

ここで，δ_{ij}はクロネッカーのデルタ関数である．

Uに対する特性変数としてベクトル$\mathbf{W} = (w^1, w^2, \dots, w^m)^t$を次式のように定義する．

$$
\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} \qquad (\mathbf{U} = \mathbf{R}\,\mathbf{W}) \tag{2-31}
$$

もし，ヤコビアン行列が定数行列ならば，（２－２８）式は次のようにm個のスカラー方程式に分離でき，各々の方程式を独立にＴＶＤスキームで解けば良いことになる．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right] \\
&= \mathbf{R}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{R}\,\mathbf{R}^{-1}\right)\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \\
&= \frac{\partial w^k}{\partial t} + a^k\frac{\partial w^k}{\partial x} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned} \tag{2-32}
$$

さて，（２－３１）式を別の見方をすれば，特性変数$\mathbf{W}^k$は，次のようにUについての固有空間における各固有ベクトル$\mathbf{R}^k(\mathbf{U})$の成分と考えることができる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \mathbf{R}\,\mathbf{W} \\
&= \left[\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \dots, \mathbf{R}^m\right]\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^m \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k w^k
\end{aligned} \tag{2-33}
$$

そこで，$\alpha^k_{j+1/2}$を$\Delta_{j+1/2}\mathbf{U} = \mathbf{U}_{j+1} - \mathbf{U}_j$の固有空間における各固有ベクトル$\mathbf{R}^k_{j+1/2}(\mathbf{U})$の成分と考えると，次のようになる．

$$
\Delta_{j+1/2}\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{R}^k_{j+1/2}\,\alpha^k_{j+1/2}
$$

$$
\begin{bmatrix} \alpha^1_{j+1/2} \\ \alpha^2_{j+1/2} \\ \vdots \\ \alpha^m_{j+1/2} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1}_{j+1/2}\,\Delta_{j+1/2}\mathbf{U} \tag{2-34}
$$

特性変数が局所的に定義されており，かつ状態がメッシュ内で凍りついていると仮定すると，（２－３４）式の表現を用いてスカラーのＴＶＤスキームを各特性変数についてスカラー的に適用することにより，（２－１６）式を次のように一般的なシムテムの系へと拡張することができる．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}^{n+1}_j = \mathbf{U}^n_j - \lambda\left[\bar{\mathbf{F}}^M_{j+1/2} - \bar{\mathbf{F}}^M_{j-1/2}\right] \\
&\bar{\mathbf{F}}^M_{j+1/2} = \frac{\mathbf{F}_{j+1} + \mathbf{F}_j}{2} \\
&\qquad + \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{R}^k_{j+1/2}\left[g^k_{j+1} + g^k_j - Q^k(\bar{\nu}^k_{j+1/2} + \gamma^k_{j+1/2})\alpha^k_{j+1/2}\right] \\
&\bar{\nu}^k_{j+1/2} = \lambda\, a^k_{j+1/2}, \qquad \gamma^k_{j+1/2} = \frac{g^k_{j+1} - g^k_j}{\alpha^k_{j+1/2}} \\
&g^k_j = \begin{cases} s^k_{j+1/2}\, min\left(\left|h^k_{j+1/2}\right|, \left|h^k_{j-1/2}\right|\right) & \left(h^k_{j+1/2}\cdot h^k_{j-1/2} \geq 0\right) \\ 0 & \left(h^k_{j+1/2}\cdot h^k_{j-1/2} < 0\right) \end{cases} \\
&h^k_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[Q^k\left(\bar{\nu}^k_{j+1/2}\right) - \left(\bar{\nu}^k_{j+1/2}\right)^2\right]\alpha^k_{j+1/2} \\
&s^k_{j+1/2} = sgn\left(h^k_{j+1/2}\right)
\end{aligned} \tag{2-35}
$$

さて，１次元の流体方程式の場合，（２－２８）式は次式のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e+p)u \end{bmatrix} = 0 \qquad (2-36)$$

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho u^2 / 2)$$

ここで，ρ，u，eおよびpはそれぞれ質量密度，流速，単位体積あたりの全エネルギーおよび圧力であり，γは断熱指数（比熱比）である．更に，方程式を閉じるために理想気体の状態方程式を仮定している．

この場合，ヤコビアン行列の固有値および固有ベクトルは次のように求められる．

$$a^1 = u - c,\quad \mathbf{R}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{bmatrix},$$

$$a^2 = u,\quad \mathbf{R}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix},$$

$$a^3 = u + c,\quad \mathbf{R}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{bmatrix}, \qquad (2-37)$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}},$$

$$H = \frac{e+p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2}$$

ここで，cとHは，それぞれ音速とエンタルピーである．更に，$\mathbf{R}^{-1}$は，

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(d_1 + \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2 u - \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2 \\ 1 - d_1 & d_2 u & -d_2 \\ \frac{1}{2}\left(d_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2 u + \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = d_2 \frac{u^2}{2} \qquad (2-38)$$

$$d_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2}$$

と求められ，（２－３４）式より$\alpha^k_{j+1/2}$は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \alpha^1_{j+1/2} \\ \alpha^2_{j+1/2} \\ \alpha^3_{j+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_1 - D_2)/2 \\ \Delta_{j+1/2}\rho - D_1 \\ (D_1 + D_2)/2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{\gamma - 1}{c^2_{j+1/2}}\left[\Delta_{j+1/2}e + \frac{u^2_{j+1/2}}{2}\Delta_{j+1/2}\rho - u_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}(\rho u)\right] \qquad (2-39)$$

$$D_2 = \frac{\Delta_{j+1/2}(\rho u) - u_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}\rho}{c_{j+1/2}}$$

半整数空間上での値である$u_{j+1/2}$および$c_{j+1/2}$は，不連続点を高解像度で捕らえるために単純な空間平均ではなく，Roe[5]によって導入された次のような特別な平均形式を用いる．

$$u_{j+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}u_{j+1} + \sqrt{\rho_j}u_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}}$$

$$H_{j+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1} + \sqrt{\rho_j}H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \qquad (2-40)$$

$$c^2_{j+1/2} = (\gamma - 1)\left(H_{j+1/2} - \frac{1}{2}u^2_{j+1/2}\right)$$

さて，これで最後に残された問題は，人工粘性に関与する関数$Q^k(x)$を決定することである．

一般に，流体方程式（２－３６）式の解を衝撃波のような不連続な解を許容するように拡張した，いわゆる弱い解は一意的には決定されず，その解の中から物理的に意味のある解を取りだすための条件が必要である．この条件が，熱力学でのエントロピー増大則と等価であることはよく知られている[6]．

（２－１０）式を満足する一番簡単な関数を考えると$Q^k(x) = |x|$であるが，この関数は$x = 0$のときに$Q^k(x) = 0$となり，この場合にはエントロピー増大則が満足され

ないので，不連続な解を一意的に決定できないことが示される[7]．

このことは，次のように考えることもできる．

関数$Q^k(x)$は人工粘性に関与しているので，$Q^k(x)=0$になることは人工粘性が消滅することを意味する．ところが，衝撃波は，この粘性のような不可逆項により形成されるので，$Q^k(x)=0$の場合には衝撃波を形成することができず物理的に意味のある解が存在できないことになる．

そこで，$x=0$のときに$Q^k(x)=0$とならないようにするため，関数$Q^k(x)$を次のように定義する．

$$Q^k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}(x^2+\varepsilon^2) & (|x|<\varepsilon)\\ |x| & (|x|\geq\varepsilon)\end{cases} \qquad (2-41)$$

衝撃波は固有値が$k=1$または3の場合に対応し，$k=2$は接触面に対応することがわかっている．接触面は，連続解を積み重ねて実現できる特別な場合なので上記のようなエントロピーの問題は考えなくてよい．

よって，（2－41）式は，$k=1$または3のときに適用し，$k=2$のときには簡単な関数である$Q^k(x)=|x|$を用いる．

なお，このスキームの数値解に対するεの依存性は大きくないことが調べられているので，適当な値として$\varepsilon=0.2$を選んでいる[1]．

以上のアルゴリズムにより，1次元の流体方程式を5点差分2次精度TVDスキームで解くことができる．

さて，一般に固定グリッドを用いるオイラー法では接触面を精度よく解くことは難しく，接触面の不連続性は時間と共になまることが知られている[8]．

接触面は特性速度uで伝播し，その両側の流体は接触面を挟んで流速，圧力が等しく質量密度だけが不連続であり，同じ特性速度uで伝播している．即ち，接触面近傍における特性曲線はすべて平行である．接触面の両側の流体についての数値解の特性速度は

2次の精度を持ってはいるが，数値誤差のため厳密には等しくなく，特性曲線はわずかながら発散していく．この発散は，時間と共に大きくなる不連続性のなまりとして現われる．

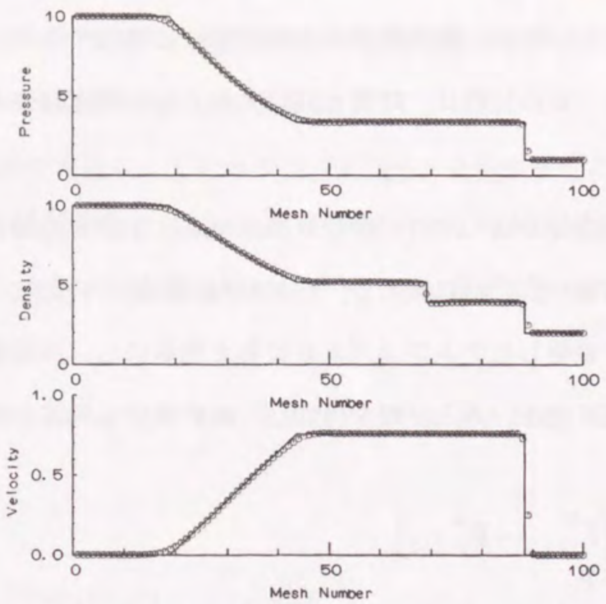
そこで，この特性曲線をほんのわずか収束させるような項を接触面に対応する$k=2$の数値フラックス関数の修正項に加える．これを人工圧縮という[1,2]．

実際には，上記で説明したアルゴリズムを計算を簡単にし，不連続面の解像度をよくするために更に改良を加え，人工圧縮を付加して最終的には次式を得る．

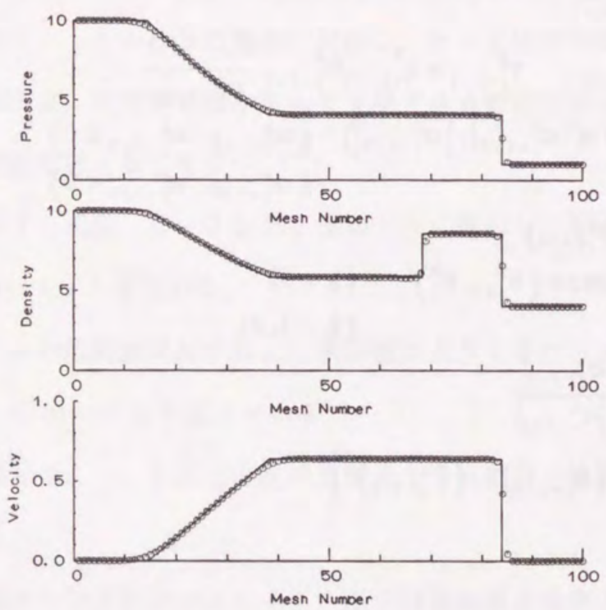
$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_j^{n+1}=\mathbf{U}_j^n-\lambda\left[\bar{\mathbf{F}}^M_{j+1/2}-\bar{\mathbf{F}}^M_{j-1/2}\right]\\
&\bar{\mathbf{F}}^M_{j+1/2}=\frac{\mathbf{F}_{j+1}+\mathbf{F}_j}{2}\\
&\qquad+\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{3}\mathbf{R}^k_{j+1/2}\left[\xi^k_{j+1/2}h^k_{j+1/2}(g^k_{j+1}+g^k_j)-Q^k(\bar{\nu}^k_{j+1/2}+\gamma^k_{j+1/2})\alpha^k_{j+1/2}\right]\\
&\bar{\nu}^k_{j+1/2}=\lambda a^k_{j+1/2}, \qquad \gamma^k_{j+1/2}=\xi^k_{j+1/2}h^k_{j+1/2}\frac{g^k_{j+1}-g^k_j}{\alpha^k_{j+1/2}}\\
&g^k_j=\begin{cases}s^k_{j+1/2}\,min\left(\left|\alpha^k_{j+1/2}\right|,\left|\alpha^k_{j-1/2}\right|\right) & (\alpha^k_{j+1/2}\cdot\alpha^k_{j-1/2}\geq 0)\\ 0 & (\alpha^k_{j+1/2}\cdot\alpha^k_{j-1/2}<0)\end{cases}\\
&s^k_{j+1/2}=sgn\left(\alpha^k_{j+1/2}\right)\\
&\xi^k_{j+1/2}=\begin{cases}1+\omega\,max\left(\theta^k_{j+1},\theta^k_j\right) & (k=2)\\ 1 & (k=1,3)\end{cases}\\
&\theta^k_j=\frac{\left|\alpha^k_{j+1/2}-\alpha^k_{j-1/2}\right|}{\left|\alpha^k_{j+1/2}\right|+\left|\alpha^k_{j-1/2}\right|}\\
&h^k_{j+1/2}=\frac{1}{2}\left[Q^k\left(\bar{\nu}^k_{j+1/2}\right)-\left(\bar{\nu}^k_{j+1/2}\right)^2\right]
\end{aligned} \qquad (2-42)$$

なお，上式においてωが人工圧縮に関係する項であり，この値としては適当な値と思われる$\omega=2$を選んでいる[2]．

このスキームにより，初期値問題である1次元のリーマン問題を実際に解いたときの結果を二つの初期値について図2－2に示す．ここで，実線は解析解であり，シンボルは数値解である．



（a） （ρ，p）$_L$＝（１０，１０），（ρ，p）$_R$＝（２，１）の場合



（b） （ρ，p）$_L$＝（１０，１０），（ρ，p）$_R$＝（４，１）の場合

図２－２　１次元リーマン問題を二つの初期値についてＴＶＤスキームで解いた結果．シミュレーションパラメーターは，グリッド数：１００，タイムステップ数：５０，μ：０.９５，γ：５/３である．

図２－２より，ＴＶＤスキームが衝撃波や従来難しいと言われていた接触面を高解像度で捕らえていることがわかる．

２.４　多次元への拡張

前節ではＴＶＤスキームの１次元流体方程式への応用について述べたが，本節ではこのスキームを更に拡張して２次元，３次元流体方程式に適用する[5, 8, 9]．

２次元流体方程式は，次式で定義される．

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho v u\\ (e+p)u\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho v^2+p\\ (e+p)v\end{bmatrix}=0 \qquad (2-43)$$

$$p=(\gamma-1)\left[e-\frac{\rho(u^2+v^2)}{2}\right]$$

ここで，ρ，u，v，eおよびpはそれぞれ質量密度，x方向の流速，y方向の流速，単位体積あたりの全エネルギーおよび圧力であり，γは断熱指数（比熱比）である．更に，方程式を閉じるために１次元のときと同様に理想気体の状態方程式を仮定している．

１次元流体方程式を解くために用いたアルゴリズムをそのままの形で２次元流体方程式に拡張するため，ここでは時間発展をｘ方向とｙ方向に分離する，いわゆる分ステップ法と呼ばれる手法を用いる．

L_x，L_yをそれぞれ次のような１次元方程式を解くための差分スキームのオペレーターだとすると，

$$L_x:\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0,\qquad L_y:\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}=0 \qquad (2-44)$$

変数ベクトルUをΔtだけ時間発展させる差分の時間ステップは，分ステップ法により

次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
U^{*}_{i,j} &= L_x \cdot U^{n}_{i,j} \\
U^{n+1}_{i,j} &= L_y \cdot U^{*}_{i,j} \\
&= L_y L_x \cdot U^{n}_{i,j}
\end{aligned}
\qquad (2-45)
$$

ただし，$U^{*}_{i,j}$は計算の途中結果としてでてきた補助的な変数に過ぎず，物理的には何も意味を持っていない．

このままでは，時間に関して１次の精度しか持たないがＴＶＤスキームは時間に関して２次の精度を持つので，実際には，この２次の精度を保つために（２－４５）式を次のように変形して計算を行なっている．

$$
U^{n+1}_{i,j} = L_{x/2} L_y L_{x/2} \cdot U^{n}_{i,j} \qquad (2-46)
$$

ここで，$L_{x/2}$はｘ方向に$\Delta t/2$だけ時間発展させる差分スキームのオペレーターを意味する．

L_x，L_yは，前節で説明したスカラースキームの一般的なシステムの系への拡張により求めることができる．

まず，L_xを求めることを考える．

１次元流体方程式のときと同様の手順で（２－４４）式よりL_xを求めるためにはヤコビアン行列$\partial F(U)/\partial U$の固有値および固有ベクトルを求めればよい．

実際に計算すると，固有値および固有ベクトルは次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
& a^1_x = u - c, \quad R^1_x = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ v \\ H - uc \end{bmatrix}, \\
& a^2_x = u, \quad R^2_x = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{bmatrix}, \\
& a^3_x = u, \quad R^3_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v \end{bmatrix}, \\
& a^4_x = u + c, \quad R^4_x = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ v \\ H + uc \end{bmatrix}, \\
& c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}, \\
& H = \frac{e + p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2}
\end{aligned}
\qquad (2-47)
$$

ここで，ｃとＨは，それぞれ音速とエンタルピーである．

更に，$R_x = [\, R_x^1(U), R_x^2(U), R_x^3(U), R_x^4(U) \,]$の逆行列$R_x^{-1}$は，

$$
\begin{aligned}
& R_x^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left(d_1 + \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2 u - \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2 v) & \frac{1}{2} d_2 \\
1 - d_1 & d_2 u & d_2 v & -d_2 \\
-v & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2}\left(d_1 - \frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2 u + \frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2 v) & \frac{1}{2} d_2
\end{bmatrix} \\
& d_1 = d_2 \frac{u^2 + v^2}{2} \\
& d_2 = \frac{\gamma - 1}{c^2}
\end{aligned}
\qquad (2-48)
$$

と求められ，$(\alpha_x)^k_{i+1/2,j}$は次のようになる．

$$\begin{bmatrix}\alpha^1_{i+1/2}\\ \alpha^2_{i+1/2}\\ \alpha^3_{i+1/2}\\ \alpha^4_{i+1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(D_1-D_2)/2\\ \Delta_{i+1/2}\rho-D_1\\ \Delta_{i+1/2}(\rho v)-v_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2}\rho\\ (D_1+D_2)/2\end{bmatrix}$$

$$D_1=\frac{\gamma-1}{c^2_{i+1/2,j}}\Big[\Delta_{i+1/2}e+\frac{u^2_{i+1/2,j}+v^2_{i+1/2,j}}{2}\Delta_{i+1/2}\rho \qquad (2-49)$$

$$-u_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2}(\rho u)-v_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2}(\rho v)\Big]$$

$$D_2=\frac{\Delta_{i+1/2}(\rho u)-u_{i+1/2,j}\Delta_{i+1/2}\rho}{c_{i+1/2,j}}$$

よって，L_xは最終的に次式となる．

$$\mathbf{U}^*_{i,j}=\mathrm{L}_x\cdot\mathbf{U}^n_{i,j}$$

$$=\mathbf{U}^n_{i,j}-\lambda\left[\bar{\mathbf{F}}^M_{i+1/2,j}-\bar{\mathbf{F}}^M_{i-1/2,j}\right]$$

$$\bar{\mathbf{F}}^M_{i+1/2,j}=\frac{\mathbf{F}_{i+1,j}+\mathbf{F}_{i,j}}{2}$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{4}\mathrm{R}^k_{i+1/2}\left[\xi^k_{i+1/2}h^k_{i+1/2}(g^k_{i+1}+g^k_i)-Q^k(\bar{v}^k_{i+1/2}+\gamma^k_{i+1/2})\alpha^k_{i+1/2}\right]$$

$$\bar{v}^k_{i+1/2}=\lambda a^k_{i+1/2},\qquad \gamma^k_{i+1/2}=\xi^k_{i+1/2}h^k_{i+1/2}\frac{g^k_{i+1}-g^k_i}{\alpha^k_{i+1/2}}$$

$$g^k_i=\begin{cases}s^k_{i+1/2}\,min\left(\left|\alpha^k_{i+1/2}\right|,\left|\alpha^k_{i-1/2}\right|\right) & (\alpha^k_{i+1/2}\cdot\alpha^k_{i-1/2}\geq 0)\\ 0 & (\alpha^k_{i+1/2}\cdot\alpha^k_{i-1/2}<0)\end{cases}$$

$$s^k_{i+1/2}=sgn(\alpha^k_{i+1/2})$$

$$\xi^k_{i+1/2}=\begin{cases}1+\omega\,max\,(\theta^k_{i+1},\theta^k_i) & (k=2,3)\\ 1 & (k=1,4)\end{cases}$$

$$\theta^k_i=\frac{\left|\alpha^k_{i+1/2}-\alpha^k_{i-1/2}\right|}{\left|\alpha^k_{i+1/2}\right|+\left|\alpha^k_{i-1/2}\right|}$$

$$h^k_{i+1/2}=\frac{1}{2}\left[Q^k(\bar{v}^k_{i+1/2})-(\bar{v}^k_{i+1/2})^2\right]$$

(2－50)

L_yもL_xと同様に，ヤコビアン行列$\partial G(U)/\partial U$を考えることにより求めることができる．

固有値および固有ベクトルは，

$$(a^1_y,a^2_y,a^3_y,a^4_y)=(v-c,v,v,v+c),$$

$$\mathbf{R}_y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ u & u & 1 & u\\ v-c & v & 0 & v+c\\ H-vc & \frac{1}{2}(u^2+v^2) & u & H+vc\end{bmatrix} \qquad (2-51)$$

となり，$\mathbf{R}_y^{-1}$および$(\alpha_y)^k_{i,j+1/2}$はそれぞれ

$$\mathbf{R}_y^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(d_1+\frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}\left(-d_2v-\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2\\ 1-d_1 & d_2u & d_2v & -d_2\\ -u & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2}\left(d_1-\frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}\left(-d_2v+\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2\end{bmatrix} \qquad (2-52)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha^1_{j+1/2}\\ \alpha^2_{j+1/2}\\ \alpha^3_{j+1/2}\\ \alpha^4_{j+1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(D_3-D_4)/2\\ \Delta_{j+1/2}\rho-D_3\\ \Delta_{j+1/2}(\rho u)-u_{i,j+1/2}\Delta_{j+1/2}\rho\\ (D_3+D_4)/2\end{bmatrix}$$

$$D_3=\frac{\gamma-1}{c^2_{i,j+1/2}}\Big[\Delta_{j+1/2}e+\frac{u^2_{i,j+1/2}+v^2_{i,j+1/2}}{2}\Delta_{j+1/2}\rho \qquad (2-53)$$

$$-u_{i,j+1/2}\Delta_{j+1/2}(\rho u)-v_{i,j+1/2}\Delta_{j+1/2}(\rho v)\Big]$$

$$D_4=\frac{\Delta_{j+1/2}(\rho v)-v_{i,j+1/2}\Delta_{i+1/2}\rho}{c_{i,j+1/2}}$$

となる．

よって，L_yは次式になる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}^{n+1}_{i,j} &= L_y \cdot \mathbf{U}^{*}_{i,j} \\
&= \mathbf{U}^{*}_{i,j} - \lambda\left[\bar{\mathbf{G}}^{M}_{i,j+1/2} - \bar{\mathbf{G}}^{M}_{i,j-1/2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\bar{\mathbf{G}}^{M}_{i,j+1/2} = \frac{\mathbf{G}_{i,j+1} + \mathbf{G}_{i,j}}{2} + \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{4} \mathbf{R}^{k}_{j+1/2}\left[\xi^{k}_{j+1/2} h^{k}_{j+1/2}\left(g^{k}_{j+1} + g^{k}_{j}\right) - Q^{k}\left(\bar{\nu}^{k}_{j+1/2} + \gamma^{k}_{j+1/2}\right)\alpha^{k}_{j+1/2}\right]
$$

$$
\bar{\nu}^{k}_{j+1/2} = \lambda a^{k}_{j+1/2}, \qquad \gamma^{k}_{j+1/2} = \xi^{k}_{j+1/2} h^{k}_{j+1/2} \frac{g^{k}_{j+1} - g^{k}_{j}}{\alpha^{k}_{j+1/2}}
$$

$$
g^{k}_{j} = \begin{cases} s^{k}_{j+1/2}\, min\left(\left|\alpha^{k}_{j+1/2}\right|, \left|\alpha^{k}_{j-1/2}\right|\right) & \left(\alpha^{k}_{j+1/2} \cdot \alpha^{k}_{j-1/2} \geq 0\right) \\ 0 & \left(\alpha^{k}_{j+1/2} \cdot \alpha^{k}_{j-1/2} < 0\right) \end{cases}
$$

$$
s^{k}_{j+1/2} = sgn\left(\alpha^{k}_{j+1/2}\right)
$$

$$
\xi^{k}_{j+1/2} = \begin{cases} 1 + \omega\, max\left(\theta^{k}_{j+1}, \theta^{k}_{j}\right) & (k = 2, 3) \\ 1 & (k = 1, 4) \end{cases}
$$

$$
\theta^{k}_{j} = \frac{\left|\alpha^{k}_{j+1/2} - \alpha^{k}_{j-1/2}\right|}{\left|\alpha^{k}_{j+1/2}\right| + \left|\alpha^{k}_{j-1/2}\right|}
$$

$$
h^{k}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[Q^{k}\left(\bar{\nu}^{k}_{j+1/2}\right) - \left(\bar{\nu}^{k}_{j+1/2}\right)^{2}\right] \tag{2－54}
$$

なお，以上の式中では次のような変数の簡略記法を用いている．

$$
\begin{aligned}
\beta^{k}_{i+1/2} &\equiv \left(\beta_x\right)^{k}_{i+1/2,j} \\
\beta^{k}_{j+1/2} &\equiv \left(\beta_y\right)^{k}_{i,j+1/2} \\
\Delta_{i+1/2}\beta &\equiv \beta_{i+1,j} - \beta_{i,j} \\
\Delta_{j+1/2}\beta &\equiv \beta_{i,j+1} - \beta_{i,j}
\end{aligned} \tag{2－55}
$$

（２－５０）式および（２－５４）式では，u，v および c の値が半整数空間上で必要であるが，これも（２－４０）式と同様に Roe の平均を用いて次のように求める．

$$
u_{i+1/2,j} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1,j}}\,u_{i+1,j} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,u_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i+1,j}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}, \quad u_{i,j+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{i,j+1}}\,u_{i,j+1} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,u_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i,j+1}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}
$$

$$
v_{i+1/2,j} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1,j}}\,v_{i+1,j} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,v_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i+1,j}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}, \quad v_{i,j+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{i,j+1}}\,v_{i,j+1} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,v_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i,j+1}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}
$$

$$
H_{i+1/2,j} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1,j}}\,H_{i+1,j} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,H_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i+1,j}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}, \quad H_{i,j+1/2} = \frac{\sqrt{\rho_{i,j+1}}\,H_{i,j+1} + \sqrt{\rho_{i,j}}\,H_{i,j}}{\sqrt{\rho_{i,j+1}} + \sqrt{\rho_{i,j}}}
$$

$$
\begin{aligned}
c^{2}_{i+1/2,j} &= (\gamma - 1)\left[H_{i+1/2,j} - \frac{1}{2}\left(u^{2}_{i+1/2,j} + v^{2}_{i+1/2,j}\right)\right] \\
c^{2}_{i,j+1/2} &= (\gamma - 1)\left[H_{i,j+1/2} - \frac{1}{2}\left(u^{2}_{i,j+1/2} + v^{2}_{i,j+1/2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2－56}
$$

以上によりＴＶＤスキームは，２次元流体方程式に拡張された．

さて，次に（２－５７）式で定義される３次元流体方程式に対する拡張を考える．

$$
\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} + \frac{\partial H(U)}{\partial z}
= \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^{2} + p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ (e + p)u \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^{2} + p \\ \rho wv \\ (e + p)v \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^{2} + p \\ (e + p)w \end{bmatrix} = 0 \tag{2－57}
$$

$$
p = (\gamma - 1)\left[e - \frac{\rho\left(u^{2} + v^{2} + w^{2}\right)}{2}\right]
$$

ここで，ρ，u，v，w，e および p はそれぞれ質量密度，x 方向の流速，y 方向の流速，z 方向の流速，単位体積あたりの全エネルギーおよび圧力であり，γ は断熱指数（比熱比）である．更に，方程式を閉じるために１，２次元のときと同様に理想気体の状態方程式を仮定している．

L_x，L_y，L_z をそれぞれ次のような１次元方程式を解くための差分スキームのオペレーターだとすると，

$$
L_x : \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \qquad L_y : \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0,
$$

$$
L_z : \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H(U)}{\partial z} = 0 \tag{2－58}
$$

変数ベクトル**U**を１次の精度でΔｔだけ時間発展させる差分の時間ステップは，分ステップ法により次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
U^{*}_{i,j,k} &= L_x \cdot U^{n}_{i,j,k} \\
U^{**}_{i,j,k} &= L_y \cdot U^{*}_{i,j,k} \\
U^{n+1}_{i,j,k} &= L_z \cdot U^{**}_{i,j,k} \\
&= L_z L_y \cdot U^{*}_{i,j,k} \\
&= L_z L_y L_x \cdot U^{n}_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{2－59}
$$

ただし，$U^{*}_{i,j,k}$，$U^{**}_{i,j,k}$は計算の途中結果としてでてきた補助的な変数に過ぎず，物理的には何も意味を持っていない．

実際には，（２－５９）式も２次の精度を保つため２次元のときと同様に次のように変形して計算を行なっている．

$$
U^{n+1}_{i,j,k} = L_{x/4} L_{z/2} L_{y/2} L_{x/2} L_{z/2} L_{y/2} L_{x/4} \cdot U^{n}_{i,j,k} \tag{2－60}
$$

ここで，$L_{\beta/2}$，$L_{\beta/4}$はそれぞれβ方向にΔｔ／２およびΔｔ／４だけ時間発展させる差分スキームのオペレーターを意味する．

L_x，L_y，L_zを求めるために２次元流体方程式の場合と同様に考えて，まず，各々のヤコビアン行列∂F(U)/∂U，∂G(U)/∂U，∂H(U)/∂Uの固有値および固有ベクトル，更に固有ベクトルを列ベクトルとする行列の逆行列を計算すると次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
(a^1_x, a^2_x, a^3_x, a^4_x, a^5_x) &= (u-c, u, u, u, u+c), \\
(a^1_y, a^2_y, a^3_y, a^4_y, a^5_y) &= (v-c, v, v, v, v+c), \\
(a^1_z, a^2_z, a^3_z, a^4_z, a^5_z) &= (w-c, w, w, w, w+c)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
u-c & u & 0 & 0 & u+c \\
v & v & 1 & 0 & v \\
w & w & 0 & 1 & w \\
H-uc & \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) & v & w & H+uc
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
u & u & 1 & 0 & u \\
v-c & v & 0 & 0 & v+c \\
w & w & 0 & 1 & w \\
H-vc & \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) & u & w & H+vc
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
u & u & 1 & 0 & u \\
v & v & 0 & 1 & v \\
w-c & w & 0 & 0 & w+c \\
H-wc & \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) & u & v & H+wc
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_x^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left(d_1+\frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2u-\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2v) & \frac{1}{2}(-d_2w) & \frac{1}{2}d_2 \\
1-d_1 & d_2u & d_2v & d_2w & -d_2 \\
-v & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-w & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{u}{c}\right) & \frac{1}{2}\left(-d_2u+\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2v) & \frac{1}{2}(-d_2w) & \frac{1}{2}d_2
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_y^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left(d_1+\frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}\left(-d_2v-\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2w) & \frac{1}{2}d_2 \\
1-d_1 & d_2u & d_2v & d_2w & -d_2 \\
-u & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-w & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{v}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}\left(-d_2v+\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2w) & \frac{1}{2}d_2
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{R}_z^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\left(d_1+\frac{w}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}(-d_2v) & \frac{1}{2}\left(-d_2w-\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2 \\
1-d_1 & d_2u & d_2v & d_2w & -d_2 \\
-u & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-v & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\left(d_1-\frac{w}{c}\right) & \frac{1}{2}(-d_2u) & \frac{1}{2}(-d_2v) & \frac{1}{2}\left(-d_2w+\frac{1}{c}\right) & \frac{1}{2}d_2
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= d_2 \frac{u^2+v^2+w^2}{2} \\
d_2 &= \frac{\gamma-1}{c^2}
\end{aligned} \tag{2－61}
$$

この式より，$(\alpha_x)^l_{i+1/2,j,k}$，$(\alpha_y)^l_{i,j+1/2,k}$，$(\alpha_z)^l_{i,j,k+1/2}$をそれぞれ求めると，

$$
\begin{bmatrix} \alpha^1_{i+1/2} \\ \alpha^2_{i+1/2} \\ \alpha^3_{i+1/2} \\ \alpha^4_{i+1/2} \\ \alpha^5_{i+1/2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (D^1_{i+1/2} - D^2_{i+1/2})/2 \\ \Delta_{i+1/2}\rho - D^1_{i+1/2} \\ \Delta_{i+1/2}(\rho v) - v_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}\rho \\ \Delta_{i+1/2}(\rho w) - w_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}\rho \\ (D^1_{i+1/2} + D^2_{i+1/2})/2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \alpha^1_{j+1/2} \\ \alpha^2_{j+1/2} \\ \alpha^3_{j+1/2} \\ \alpha^4_{j+1/2} \\ \alpha^5_{j+1/2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (D^1_{j+1/2} - D^2_{j+1/2})/2 \\ \Delta_{j+1/2}\rho - D^1_{j+1/2} \\ \Delta_{j+1/2}(\rho u) - u_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}\rho \\ \Delta_{j+1/2}(\rho w) - w_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}\rho \\ (D^1_{j+1/2} + D^2_{j+1/2})/2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \alpha^1_{k+1/2} \\ \alpha^2_{k+1/2} \\ \alpha^3_{k+1/2} \\ \alpha^4_{k+1/2} \\ \alpha^5_{k+1/2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} (D^1_{k+1/2} - D^2_{k+1/2})/2 \\ \Delta_{k+1/2}\rho - D^1_{k+1/2} \\ \Delta_{k+1/2}(\rho u) - u_{k+1/2}\Delta_{k+1/2}\rho \\ \Delta_{k+1/2}(\rho v) - v_{k+1/2}\Delta_{k+1/2}\rho \\ (D^1_{k+1/2} + D^2_{k+1/2})/2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
D^1_{m+1/2} &= \frac{\gamma - 1}{c^2_{m+1/2}}\Big[\Delta_{m+1/2}e + \frac{u^2_{m+1/2} + v^2_{m+1/2} + w^2_{m+1/2}}{2}\Delta_{m+1/2}\rho \\
&\quad - u_{m+1/2}\Delta_{m+1/2}(\rho u) - v_{m+1/2}\Delta_{m+1/2}(\rho v) - w_{m+1/2}\Delta_{m+1/2}(\rho w)\Big] \\
&\qquad (m = i, j, k) \\
D^2_{i+1/2} &= \frac{\Delta_{i+1/2}(\rho u) - u_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}\rho}{c_{i+1/2}} \\
D^2_{j+1/2} &= \frac{\Delta_{j+1/2}(\rho v) - v_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}\rho}{c_{j+1/2}} \\
D^2_{k+1/2} &= \frac{\Delta_{k+1/2}(\rho w) - w_{k+1/2}\Delta_{k+1/2}\rho}{c_{k+1/2}}
\end{aligned}
\tag{2-62}
$$

となり，最終的にL_x，L_y，L_zは次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
U^*_{i,j,k} &= L_x \cdot U^n_{i,j,k} \\
&= U^n_{i,j,k} - \lambda\left[\bar{F}^M_{i+1/2,j,k} - \bar{F}^M_{i-1/2,j,k}\right] \\
U^{**}_{i,j,k} &= L_y \cdot U^*_{i,j,k} \\
&= U^*_{i,j,k} - \lambda\left[\bar{G}^M_{i,j+1/2,k} - \bar{G}^M_{i,j-1/2,k}\right] \\
U^{n+1}_{i,j,k} &= L_z \cdot U^{**}_{i,j,k} \\
&= U^{**}_{i,j,k} - \lambda\left[\bar{H}^M_{i,j,k+1/2} - \bar{H}^M_{i,j,k-1/2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{F}^M_{i+1/2,j,k} &= \frac{F_{i+1,j,k} + F_{i,j,k}}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda}\sum_{l=1}^{5} R^l_{i+1/2}\left[\xi^l_{i+1/2}h^l_{i+1/2}(g^l_{i+1} + g^l_i) - Q^l(\bar{\nu}^l_{i+1/2} + \gamma^l_{i+1/2})\alpha^l_{i+1/2}\right] \\
\bar{G}^M_{i,j+1/2,k} &= \frac{G_{i,j+1,k} + G_{i,j,k}}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda}\sum_{l=1}^{5} R^l_{j+1/2}\left[\xi^l_{j+1/2}h^l_{j+1/2}(g^l_{j+1} + g^l_j) - Q^l(\bar{\nu}^l_{j+1/2} + \gamma^l_{j+1/2})\alpha^l_{j+1/2}\right] \\
\bar{H}^M_{i,j,k+1/2} &= \frac{H_{i,j,k+1} + H_{i,j,k}}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda}\sum_{l=1}^{5} R^l_{k+1/2}\left[\xi^l_{k+1/2}h^l_{k+1/2}(g^l_{k+1} + g^l_k) - Q^l(\bar{\nu}^l_{k+1/2} + \gamma^l_{k+1/2})\alpha^l_{k+1/2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\nu}^l_{m+1/2} = \lambda a^l_{m+1/2}, \qquad \gamma^l_{m+1/2} = \xi^l_{m+1/2}h^l_{m+1/2}\frac{g^l_{m+1} - g^l_m}{\alpha^l_{m+1/2}} \\
&g^l_m = \begin{cases} s^l_{m+1/2}\,min\left(\left|\alpha^l_{m+1/2}\right|, \left|\alpha^l_{m-1/2}\right|\right) & (\alpha^l_{m+1/2}\cdot\alpha^l_{m-1/2} \geq 0) \\ 0 & (\alpha^l_{m+1/2}\cdot\alpha^l_{m-1/2} < 0) \end{cases} \\
&s^l_{m+1/2} = sgn(\alpha^l_{m+1/2}) \\
&\xi^l_{m+1/2} = \begin{cases} 1 + \omega\,max(\theta^l_{m+1}, \theta^l_m) & (l = 2, 3, 4) \\ 1 & (l = 1, 5) \end{cases} \\
&\theta^l_m = \frac{\left|\alpha^l_{m+1/2} - \alpha^l_{m-1/2}\right|}{\left|\alpha^l_{m+1/2}\right| + \left|\alpha^l_{m-1/2}\right|} \\
&h^l_{m+1/2} = \frac{1}{2}\left[Q^l(\bar{\nu}^l_{m+1/2}) - (\bar{\nu}^l_{m+1/2})^2\right] \qquad (m = i, j, k)
\end{aligned}
\tag{2-63}
$$

なお，以上の式中でも次のような変数の簡略記法を用いており，u，v，w，cの半整数空間上の値も（２－５６）式と同様に Roe の平均を用いて求める．

$$\beta_{i+1/2} \equiv \beta_{i+1/2,j,k}$$
$$\beta_{j+1/2} \equiv \beta_{i,j+1/2,k}$$
$$\beta_{k+1/2} \equiv \beta_{i,j,k+1/2}$$
$$\beta^{l}_{i+1/2} \equiv (\beta_x)^{l}_{i+1/2,j,k}$$
$$\beta^{l}_{j+1/2} \equiv (\beta_y)^{l}_{i,j+1/2,k}$$
$$\beta^{l}_{k+1/2} \equiv (\beta_z)^{l}_{i,j,k+1/2} \qquad (2-64)$$
$$\Delta_{i+1/2}\beta \equiv \beta_{i+1,j,k} - \beta_{i,j,k}$$
$$\Delta_{j+1/2}\beta \equiv \beta_{i,j+1,k} - \beta_{i,j,k}$$
$$\Delta_{k+1/2}\beta \equiv \beta_{i,j,k+1} - \beta_{i,j,k}$$

以上によりＴＶＤスキームは，３次元流体方程式に拡張された．

本節で述べたアルゴリズムにより，レーザー核融合の爆縮過程をシミュレーションできる２次元，３次元流体コードＩＭＰＡＣＴ(IMPlosion Analysis Code with TVD scheme)－２Ｄ，３Ｄを開発し，本研究の遂行に用いた．

２．５　実験結果との比較

レイリー・テイラー不安定性は，重力に抗して重い流体を軽い流体で支えるときに必ず起こる流体力学的不安定性であり，一般に二つの流体の境界面での微小なじょう乱は時間と共に指数関数的に成長することが知られている．

ＡＷＲＥではK. I. Readらによって，レイリー・テイラー不安定性の成長を実験的に観測することを可能とする固体燃料ロケットモーターを用いた新しい実験手法が開発された[10]．この実験手法を用いて，二つの流体の境界面が平面であり初期に微小な振幅のランダムなじょう乱が存在する場合の，レイリー・テイラー不安定性によって引き起こされるタービュラント・ミキシングの時間発展が種々のパラメーターについて調べられた．

実験結果によれば，軽い流体が重い流体中に侵入する距離の時間発展は，次式によって非常に良く近似される．

$$h_1 = f\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}g\,t^2 \qquad (2-65)$$

ここで，係数ｆは，二つの流体の質量密度比に実験の範囲内の値（１．６～６００）では，ほとんど依存しないという興味深い現象が見いだされ，実験結果より，その値はｆ＝０．０６～０．０７と評価された[10]．

この結果をシミュレーションするために，ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄの基礎方程式にｙ方向に働く一定の重力項を付加する．即ち，（２－４３）式は，次式のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho v u\\ (e+p)u\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho u v\\ \rho v^2+p\\ (e+p)v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \rho g_y\\ 0\end{bmatrix} \qquad (2-66)$$

質量密度および圧力の初期プロファイルは，圧力バランスの条件，

$$\frac{\partial}{\partial y}p = \rho g_y \qquad (2-67)$$

および音速一定の条件，

$$c=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}=c_0=const. \qquad (2-68)$$

より，次のように求めた．

$$p=p_0\,exp\left(\frac{\gamma g_y}{c_0^2}y\right),\qquad \rho=\rho_0\,exp\left(\frac{\gamma g_y}{c_0^2}y\right) \qquad (2-69)$$

二つの流体の境界面に微小な振幅のランダムなじょう乱を与えてシミュレーションを

行なった．このときの質量密度の等値線（等高線）を図２－３に，シミュレーションパラメーターおよび初期値を表２－１に示す．なお，各々の流体は，境界面で表２－１に与えられた質量密度および圧力の値を持ち，ｙ方向にはそれぞれ（２－６９）式で与えられるプロファイルに従う．また，ｘ方向には一様・均一である．

表２－１　シミュレーションパラメーターおよび初期値．

計算グリッド	２５６×２０１
境界条件	ｘ方向：周期的境界条件 ｙ方向：完全反射（低い側） 開放自由端（高い側）
メッシュサイズ（μｍ）	ｘ，ｙ方向：１．０
重力（$\times 10^{16}$ cm／s^2）	－０．１
質量密度（g／cm^3）	５．０（ρ_1），０．５（ρ_2）
圧力（Ｍｂａｒ）	１０００

図２－４に上記のシミュレーション結果から得られた軽い流体が重い流体中に侵入する距離h_1の時間発展を時間の自乗を横軸として示す．（２－６５）式の係数ｆは，このグラフに対して直線フィッティングをすることにより求めることができる．

種々の質量密度比に対してシミュレーションを行なった結果から得られた係数ｆの値を表２－２に示す．なお，重力は，$(\rho_1-\rho_2)/(\rho_1+\rho_2)g$が種々の質量密度比に対して一定の値となるように選んだ．

シミュレーション結果からも，係数ｆは，ほとんど質量密度比に依存せずにおおよそｆ～０．０８となり，実験結果とよく一致していることがわかる．

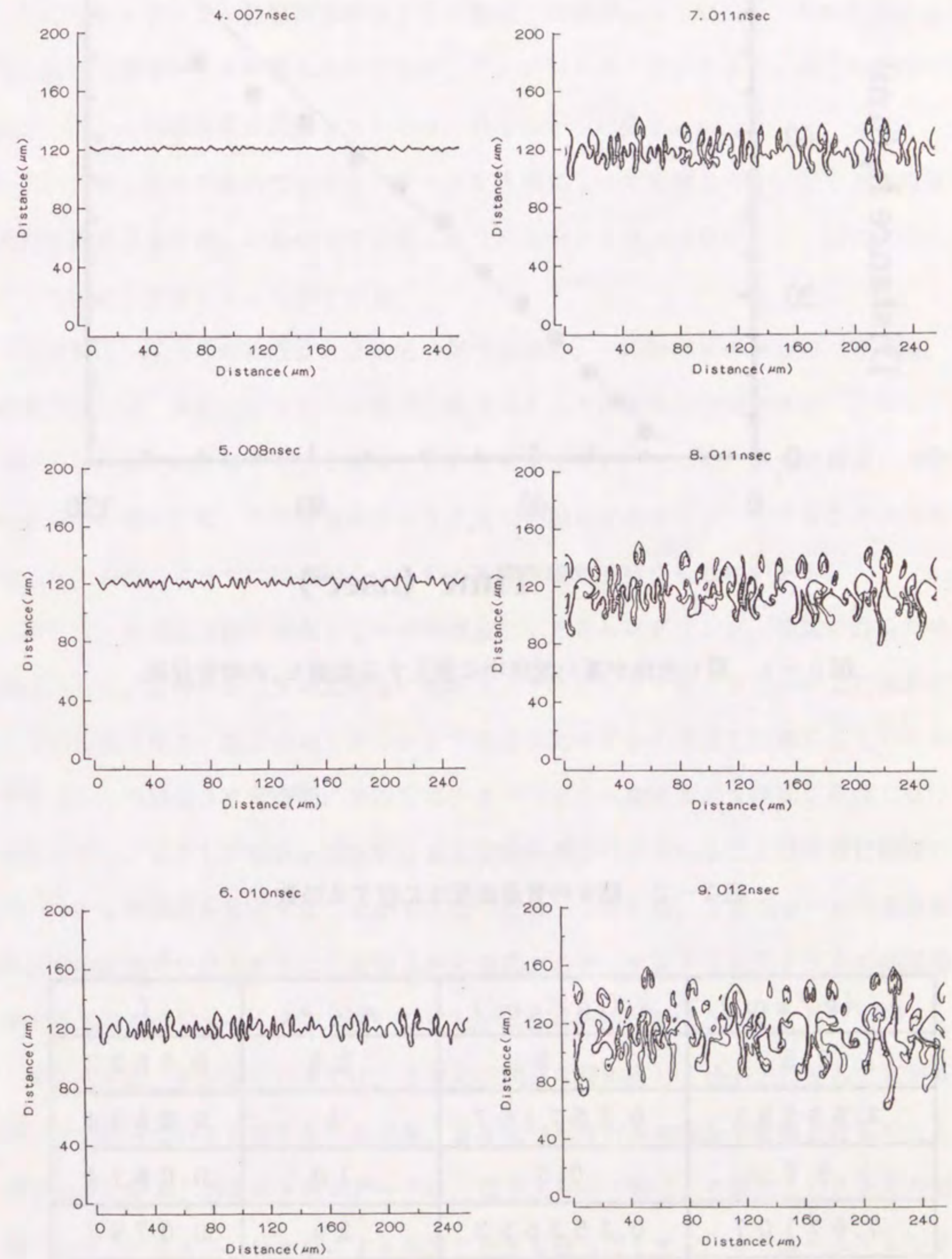


図２－３　質量密度の等値線．

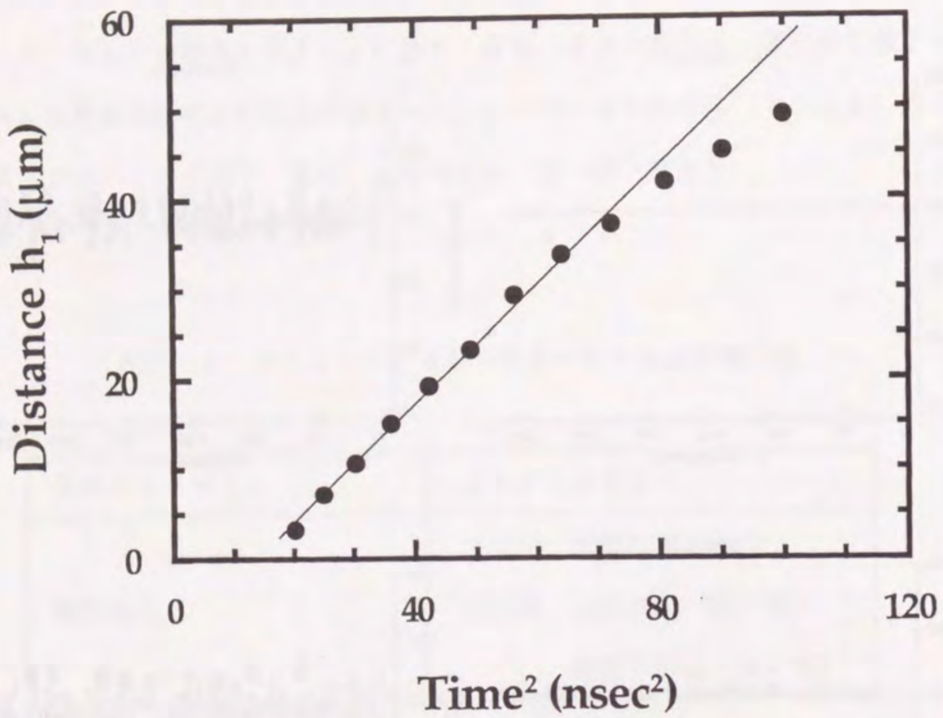


図２－４　軽い流体が重い流体中に侵入する距離ｈ$_1$の時間発展.

表２－２　種々の質量密度比に対する係数ｆ.

ρ_1 (g／cm^3)	ρ_2 (g／cm^3)	ρ_1／ρ_2	f
2.5	1.0	2.5	0.0832
3.53553	0.707107	5	0.0834
5.0	0.5	10	0.0814
7.07107	0.353553	20	0.0797
10.0	0.25	40	0.0807

2.6　ボリューム・レンダリング

シミュレーションや数値計算がますます複雑・大規模になるにつれ，その計算結果として膨大な量のデータが掃き出されるが，このデータのプリントされた数字を眺めて今起こっている物理現象を把握することは，ほとんど不可能である．

このため，数字の羅列でしかないデータを人間にとって理解しやすい形である視覚情報に置き換える手法，いわゆるヴィジュアライゼーション（可視化）は，研究を進めるうえで極めて重要になってきている．

質量密度，圧力等の物理量を２次元で調べる場合，その物理量の等値線（等高線）を線画で描けば，現在起こっている物理現象をほとんどの場合は把握できる．しかし，３次元の場合はそれでは不十分であると言わざるをえない．たとえ，多くの断面上の等値線を同時に描いても，その等値線から３次元の形状を正確にイメージすることは極めて難しく，場合によっては現在起こっている物理現象を誤解する恐れがある．

そこで，３次元空間に存在している物理量データをレンダリング（画像を作るための処理）して，立体的な（３次元的な）形状をグラフィック・ディスプレイ上に表示することが必要になる．従来のレンダリングでは３次元モデルの表面を対象にしているものが多く，この場合３次元空間に存在しているデータから幾何学的な曲面を生成しなければならない．しかし，形状が複雑になると曲面そのものを求めることは非常に困難になり，モデルの形状を表示することができなくなる．このため，３次元モデルの表面を幾何学的な曲面等で近似せずに，直接３次元空間上のデータより３次元モデルの内部構造を可視化するボリューム・レンダリングと呼ばれる手法が要求されてきた[11)]．

ボリューム・レンダリングでは，３次元空間上に規則正しく格子上に並んだ点が各々データを持っていると考える．これを，２次元のピクセルの概念を拡張したものとしてボクセルと呼ぶ．通常ボクセルデータは，ＣＴスキャナ等により測定した３次元の値を用いたり，シミュレーションによる解析データを使ったりする．ボリューム・レンダリングには，切断面レンダリング法，閾値面レンダリング法，レイ・キャスティング法，

ボリューム・トレーシング法などがあるが，ここでは閾値面レンダリング法の一つであるマーチング・キューブ法[12]を用いる．

マーチング・キューブ法では隣接した８個のボクセルを頂点とする立方体（キューブ）を考え，あらかじめ指定した閾値（表示したい面が持つべき値）と各ボクセルが持っている値との大小関係を調べて，表示したい面がその立方体の中でどのように構成されるかを判定する．そのために，まず立方体の頂点の値と閾値を比較して，頂点の値の方が大きいときには１を，小さいときには０をそれぞれの頂点に割り当てる．頂点における０と１の値により分類すると面の構成の仕方は，全部で $2^8=256$ 通りもの組み合わせが考えられるが，実際には面が交差するもののうちトポロジ的に同一のもの，回転対称を考え，更に，面の表裏を無視すると，結局，図２－５に示されるように14種類に減らすことができる．ただし，タイプ０は，すべての頂点に０（または１）が割り当てられ表示したい面が立方体内を交差しないものを表している．立方体内の面は，最終的には図２－５に示されているように，シェーディング処理の簡便性を考えて，すべて３角形で構成する．

３角形の頂点となる立方体のエッジと３角形の交差点は，そのエッジ両端の頂点の値と閾値とにより線形補間を用いて計算する．３角形頂点での法線ベクトルも立方体頂点の法線ベクトルを求め，二つの法線ベクトルから同様に線形補間して求める．なお，表示したい面上ではデータの勾配（グラディエント）が０のため，立方体頂点での法線ベクトルは，そこでのデータの勾配ベクトルと平行であると考えられる．データの勾配ベクトルは差分によって容易に求められるので，結局，その勾配ベクトルを正規化することにより立方体頂点の法線ベクトルも容易に求められる．

以上のアルゴリズムにより生成された各３角形は，その３角形頂点の法線ベクトルにより通常のシェーディングを施して表示される．

法線ベクトルを用いたシェーディングには，グロー・シェーディングやフォン・シェーディング等があるが，ここでは比較的計算時間のかからないグロー・シェーディングを用いる．図２－６にマーチング・キューブ法による表示例を示す．

この３次元のシミュレーション結果の可視化は，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄによるレイリー・テイラー不安定性の非線形時間発展のシミュレーション結果を評価するときに威力を発揮し，本研究を進めるうえで非常に有力な手段になった．

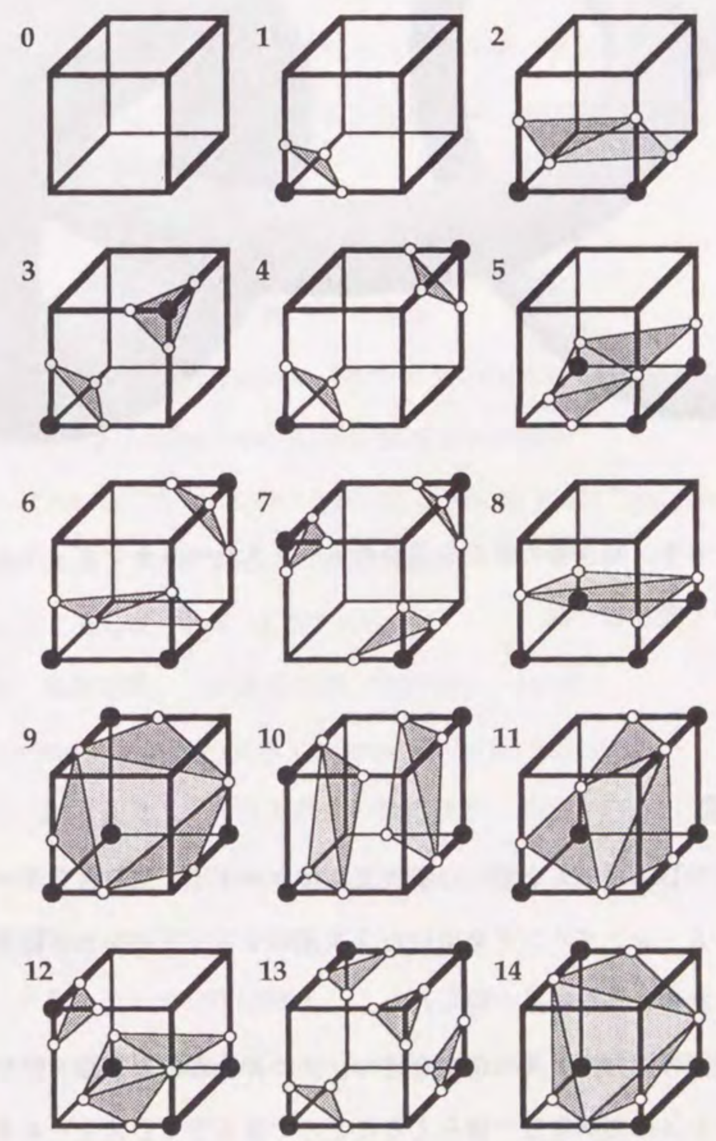


図２－５　マーチング・キューブ法における面の構成の仕方．

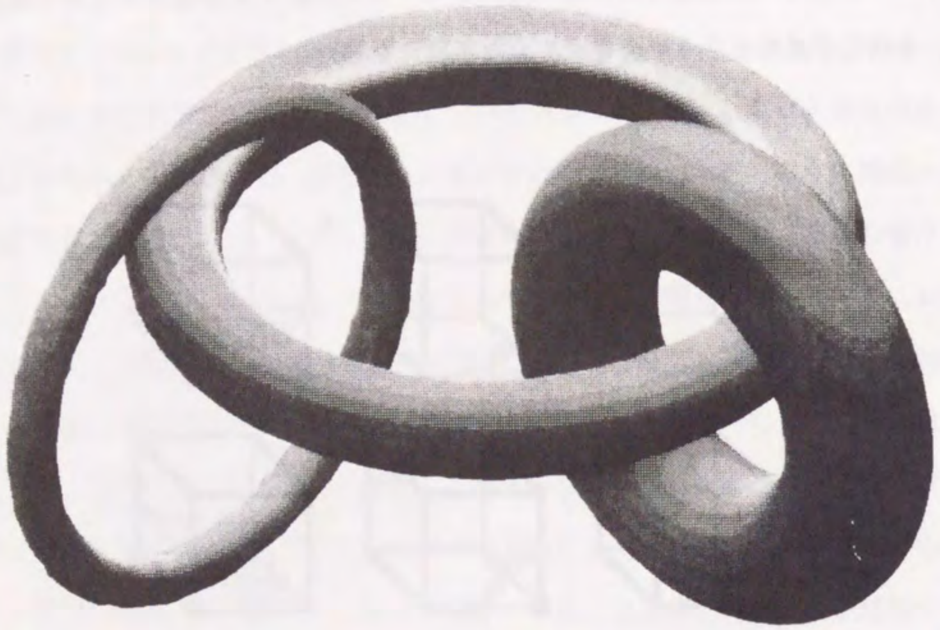


図２－６　大きさ，向き等の異なる三つのトーラスをマーチング・キューブ法を用いて表示した例.

２.７　結言

本章では，ＴＶＤスキームを用いた多次元流体コード『ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄ』およびボリューム・レンダリングを用いた３次元のシミュレーション結果を可視化する手法を開発し，次のような結果が得られた.

１）時間と空間の両方に２次の精度を持ち，かつ非物理的な振動を伴わずに不連続面を数メッシュの高解像度で捕らえることのできるＴＶＤスキームを１次元流体方程式に適用し，その優れた特質を確認した.

２）１次元流体方程式に適用したアルゴリズムを分ステップ法を用いて多次元に拡張

し，多次元流体コードＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄを開発した.

３）微小・ランダムなじょう乱が存在する場合にレイリー・テイラー不安定性によって軽い流体が重い流体中に侵入する距離の時間発展は，K. I. Read による実験結果とＩＭＰＡＣＴ－２Ｄによるシミュレーション結果とがよく一致した.

４）３次元のシミュレーション結果を的確に把握するためには不可欠である可視化の手法をボリューム・レンダリングの一つであるマーチング・キューブ法を用いて開発し，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄによるシミュレーション結果の評価に適用した.

参考文献

１）A. Harten, J. Comput. Phys. **49**, 357 (1983).
２）H. C. Yee, R. F. Warming, and A. Harten, J. Comput. Phys. **57**, 327 (1985).
３）H. C. Yee, Comp. Maths. with Appls. **12A**, 413 (1986).
４）P. L. Roe, Proc. of 7th Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn., 354 (Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981).
５）P. L. Roe, J. Comput. Phys. **43**, 357 (1981).
６）谷内俊弥，西原功修，　非線形波動（岩波書店，1977）.
７）A. Harten and J. M. Hyman, J. Comput. Phys. **50**, 235 (1983).
８）矢嶋信男，野木達夫，　発展方程式の数値解析（岩波書店，1977）.
９）T. H. Pulliam and D. S. Chaussee, J. Comput. Phys. **39**, 347 (1981).
１０）K. I. Read, Physica **12D**, 45 (1984).
１１）柴本猛，ＰＩＸＥＬ **77**, 55 (1989).
１２）W. Lorensen and H. Cline, Computer Graphics **21**, 4, 163 (1987).

第３章　２次元円柱対称ターゲット

３.１　序言

レイリー・テイラー不安定性は，一般には重力に抗して重い流体を軽い流体で支えるときに起こるが，質量密度の大きな流体が質量密度の小さな流体によって押されて加速されるときにも起こりえる．二つの流体の境界面における微小なじょう乱は，最初の線形段階では時間と共に指数関数的に成長し，その後自由落下的に成長する非線形段階へ移行する．そして，最終的にはケルビン・ヘルムホルツ不安定性を誘発する速度シアーを伴うバブル・スパイク構造を形成する．アブレーティブ型レーザー核融合では，このレイリー・テイラー不安定性は加速フェーズおよびスタグネーションフェーズの両方のフェーズにおいて誘起され，爆縮の球対称性を損ない効率のよい燃料の圧縮を妨げる．

加速フェーズでは，低温で質量密度の大きいプッシャーが高温で質量密度の小さいプラズマのアブレーションにより加速されるので，レイリー・テイラー不安定性はアブレーション面において起こる．しかし，この分野の多くの研究により，この場合のレイリー・テイラー不安定性の成長率はアブレーションによる安定化メカニズムにより，古典的な解析による成長率より大幅に緩和されることが明らかになった[1-5]．

一方，燃料・プッシャー接触面においては，ターゲット中心からの反射衝撃波がその接触面に衝突した後，燃料・プッシャー接触面の減速が起きて実効的に逆向きの加速度を受けることになるので，このときレイリー・テイラー不安定性が起こる．図３－１に最大圧縮時（$t = t_M$）前後の半径・時間ダイアグラムを示す．燃料・プッシャー接触面の減速は，衝撃波と接触面の衝突が起こる$t = t_S$から始まり，この爆縮過程の最終段階である$t_S < t < t_M$のフェーズをスタグネーションフェーズと呼ぶ．スタグネーションフェーズでは，衝撃波は接触面とターゲット中心の間を何回か反射・往復するが，燃料の温度が十分高温になると明確なショックフロントをもはや形成することができなくなり，その後燃料はほぼ断熱的に圧縮される．１次元流体コードのシミュレーション

により，核融合反応は最大圧縮前後の短い時間内に支配的に起こっており，スタグネーションフェーズにおいて中性子の発生数は，それまでの100倍も大きくなることが明らかになった．このため，スタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性によって引き起こされる燃料とプッシャーのミキシングは，中性子の全発生数を大幅に少なくすると思われる．実際，これまでの多くの実験から得られた中性子の全発生数は，その１次元流体コードのシミュレーションから予測される値よりかなり少なく，スタグネーションフェーズでの燃料とプッシャーのミキシングが，この原因の一つと考えられている．

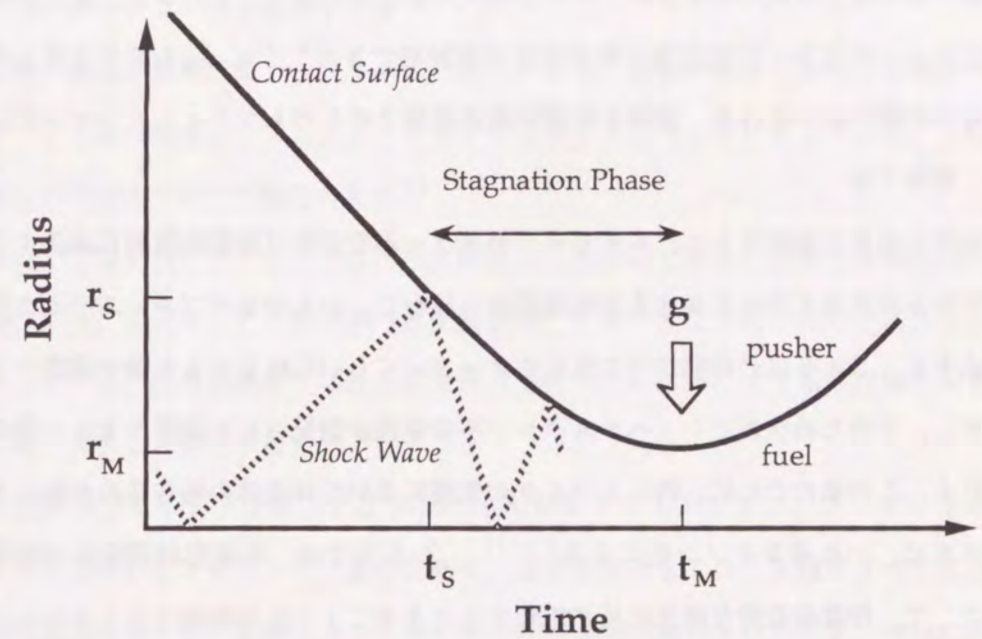


図３－１　最大圧縮時前後の半径・時間ダイアグラム．

本章では，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展をシミュレーシ

ョンおよび理論解析により調べる．シミュレーションは，２章で説明した時間と空間の両方に２次の精度を持ち，非物理的な振動を伴うことなく不連続面を高解像度で捕らえることのできるＴＶＤスキームを用いた流体コードＩＭＰＡＣＴ－２Ｄにより行なう．シミュレーションモデルの詳細は３.２節で述べ，３.３節ではシミュレーションで求めたレイリー・テイラー不安定性の線形成長率について述べる．

線形段階の理論解析をするために，円柱対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを記述できる自己相似的な運動を用いる．この自己相似解からの微小な摂動を仮定して，基礎方程式を線形化することにより固有値方程式が求まる．この固有値方程式は，最終的には２階の常微分方程式に帰着され，この方程式を数値的に解くことにより，最大圧縮時のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率が評価できる[6-8]．３.４節では以上の理論解析の詳細を述べるほか，動的な摂動の時間発展そのものもシミュレーション結果と比較・議論する．

線形的な成長が飽和すると，レイリー・テイラー不安定性は指数関数的に成長する線形段階から自由落下的に成長する非線形段階へ移行し，いわゆるバブル・スパイク構造を形成する．じょう乱の振幅がその波長のオーダーぐらいに成長すると強い速度シアーが発生し，そのためケルビン・ヘルムホルツ不安定性が誘発されて渦度の大きい渦が形成される．この渦のために，特にスパイクの先端においては流体の巻き込みが起こり，スパイクは，いわゆるキノコ形になる[9-11]．３.５節では，非線形時間発展の特質の一つとして，指数関数的な線形成長が飽和するときのじょう乱の振幅をシミュレーションにより求め，更にバブル・スパイク構造により誘起される渦のダイナミクスについても議論する．

指数関数的に成長するレイリー・テイラー不安定性の線形段階およびケルビン・ヘルムホルツ不安定性を誘発しながら自由落下的に成長する非線形段階の両方を含むじょう乱に対する簡単な時間発展モデルについて，３.６節で議論する．更に，このモデルにより，スタグネーションフェーズ開始時のじょう乱の初期振幅とモード数の関数として

最大圧縮時におけるじょう乱の振幅も同時に評価する．

３.２　シミュレーションモデル

レイリー・テイラー不安定性の非線形段階で形成されるバブル・スパイク構造は，渦度の大きい渦を作りだしてスパイク先端における流体の巻き込みを起こし，燃料・プッシャー接触面の大きな変形を引き起こす．このため，古典的ラグランジュ法を用いて，この非線形現象をシミュレーションするには，計算グリッドの再構成やねじれを防ぐための人工粘性等を導入しなければならないが，これは許容できないほどの数値拡散を招く．従って，ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄでは，古典的ラグランジュ法を用いないで固定グリッドを用いるオイラー法を使っている．

なお，最近の数値計算アルゴリズムの研究により，流体が大きく変形する場合でもラグランジュ法で精度よくシミュレーションできる『フリー・ラグランジュ法』と呼ばれる新しい手法についての報告もある[12-16]．

また，ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄでは円柱対称性を保たないで原点に収束する爆縮過程を取り扱うため，カーテシアン座標系（直交座標系）を用いて正方格子状の計算グリッドを導入している．他の座標系では原点に特異点を持つため，そのような非対称の現象を正確に取り扱うことができない．

典型的なシミュレーションでは201×201の計算グリッドを用い，ターゲットの中心をその計算グリッドのちょうど真中に置く．境界条件としては，４境界すべてにおいて開放自由端を用いる．実際には，そのために特別な境界処理を行なわず，円柱対称を仮定して境界内部の各物理量を外挿することにより計算グリッド境界上の物理量をそれぞれ求めている．このため，境界上において非物理的なじょう乱が誘発されると考えられるが，境界とプッシャーの間には十分厚いアブレーター層が存在し，更にプッシャー層そのものの厚さも加わるので，そのじょう乱は内部へ伝播する間に十分ならされてしまう．従って，境界上の非物理的なじょう乱が燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイ

ラー不安定性に与える影響は，十分小さく無視できる．

初期条件として，アブレーターとプッシャーに対応する流体にはターゲットの中心へ向かう一定の速度を持たせ，燃料に対応する流体は静止させた状態に置く．すると，強い衝撃波がプッシャーと燃料の境界で発生し，その衝撃波は燃料中をターゲットの中心へ向かって伝播する．アブレーター，プッシャー，燃料それぞれの流体に設定した質量密度，流速および圧力の初期値を表３－１に示す．

なお，このときのシミュレーションでは，計算グリッド１メッシュの物理的な大きさを２ミクロン（μｍ）としている．

表３－１　アブレーター，プッシャー，燃料に対する初期条件．

	アブレーター	プッシャー	燃料
半径（μｍ）	＞１９０	１３０～１９０	＜１３０
質量密度（ｇ／ｃｍ^3）	０.５	５.０	０.５
速度（×１０^{6}ｃｍ／ｓ）	１５	１５	０
圧力（Ｍｂａｒ）	１０	１０	１０

燃料中を伝播する衝撃波は，ターゲット中心に向かって加速され，ついには中心に到達・収束する．そして，反射衝撃波が中心で発生し外に向かって伝播するが，その衝撃波は，同様にターゲット中心に向かって加速されている燃料・プッシャー接触面と衝突する．このときから燃料・プッシャー接触面は減速を始め，スタグネーションフェーズが始まる．一方の衝撃波は，接触面で再び反射されターゲット中心に向かう．

このスタグネーションフェーズ開始時の各物理量のプロファイルは，半径の関数として計算機上のファイルに保存し，以下に行なうレイリー・テイラー不安定性を調べるためのシミュレーションの初期プロファイルとして用いられる．この初期プロファイルを図３－２に示す．

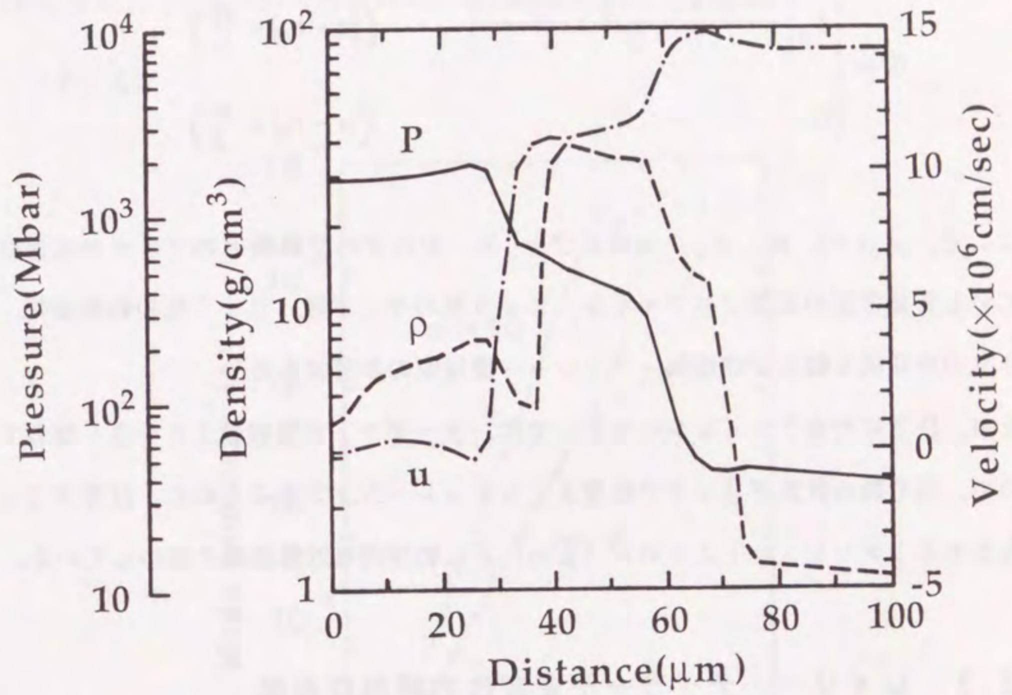


図３－２　質量密度，流速及び圧力の初期プロファイル．

燃料・プッシャー接触面およびその接触面に数タイムステップ後に衝突する反射衝撃波は，それぞれ半径が～３８ミクロン（μｍ）および～３０ミクロン（μｍ）のところに見いだされる．なお，半径が～６０ミクロン（μｍ）のところにある第２の衝撃波は，ｔ＝０に発生してプッシャー中を外側に伝播した衝撃波のなごりであり，～７０ミクロン（μｍ）のところには，プッシャーとアブレーターの境界面がある．

単一モードのレイリー・テイラー不安定性の成長を調べるために，質量密度の初期プ

ロファイルに対して次式で示されるような正弦波状の単一モードのじょう乱を燃料・プッシャー接触面の近傍に印加する.

$$\rho_1(r,\theta,m)=\rho_0[r+\delta r\cdot\sin(m\theta)],$$

$$\delta r=\begin{cases}\delta_0\left[\dfrac{\cos(2\pi(r-r_c)/w)+1}{2}\right] & \left(|r-r_c|<\dfrac{w}{2}\right)\\[2ex] 0 & \left(|r-r_c|\geq\dfrac{w}{2}\right)\end{cases}\qquad(3-1)$$

ここで, $\rho_0(r)$, m, δ_0, wおよびr_cは, それぞれ計算機上のファイルに保存されている質量密度の初期プロファイル, じょう乱のモード数, じょう乱の初期振幅, じょう乱の空間的な幅および燃料・プッシャー接触面の半径である.

なお, 以下に行なうシミュレーションでは, ターゲットが爆縮により小さくなっているので, 同じ数の計算グリッドで精度よくシミュレーションするために, 計算グリッドの大きさを1メッシュ=1ミクロン（μm）とし物理的な計算領域を縮小している.

3.3　レイリー・テイラー不安定性の線形成長率

2次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率を調べるために, 微小な振幅のじょう乱を接触面の近傍に印加する.

即ち, （3－1）式において$\delta_0/r_c=0.0005$およびw／$r_c=0.5$とする.

このようにじょう乱の振幅は極めて微小なため, 燃料・プッシャー接触面の変形の度合いを質量密度の等値線（等高線）等により直接観測することは不可能である. このため, シミュレーションにおける線形成長率は, ターゲットの微小領域に含まれる質量をフーリエ変換することにより観測する. 具体的には, 円柱座標系におけるθ方向について全周（2π）を256個のセグメントに等分割して, その各々のθ方向についてターゲットの中心から燃料・プッシャー接触面を越えてアブレーター領域まで質量密度を動径

方向に積分することにより微小な扇形に含まれる質量を求める. この結果得られた質量はθの関数であり, θ方向についてフーリエ変換することにより各モード数についてのフーリエ係数が求められる[9].

図3－3にじょう乱を印加してシミュレーションしたときの, そのじょう乱のモード数に対応するフーリエ係数の典型的な時間発展を示す.

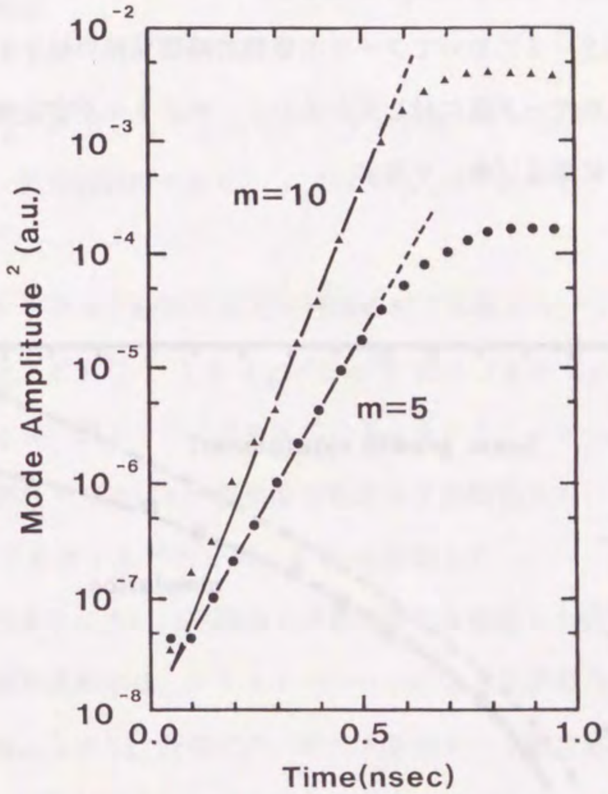


図3－3　じょう乱のモード数に対応するフーリエ係数の典型的な時間発展.

一連のシミュレーションにより, この微小な扇形の領域に含まれる質量は, レイリー・テイラー不安定性によって引き起こされる接触面の変形の度合いに非常に敏感であり,

そのフーリエ係数はおおよそ次式で示されるように，その接触面の変形度合いに比例することが確かめられた．

$$\text{フーリエ係数} \doteqdot 0.42 \times \delta(t) / r_c(t) \qquad (3-2)$$

従って，上記で述べた燃料・プッシャー接触面の変形度合いをフーリエ変換によって観測する方法の有効性が確認されたことになる．

線形成長率は，図３－３においてフーリエ係数の時間発展の傾きを測定することにより求められる．種々のモード数に対してレイリー・テイラー不安定性の線形成長率を求めた結果を図３－４に黒丸（●）で示す．

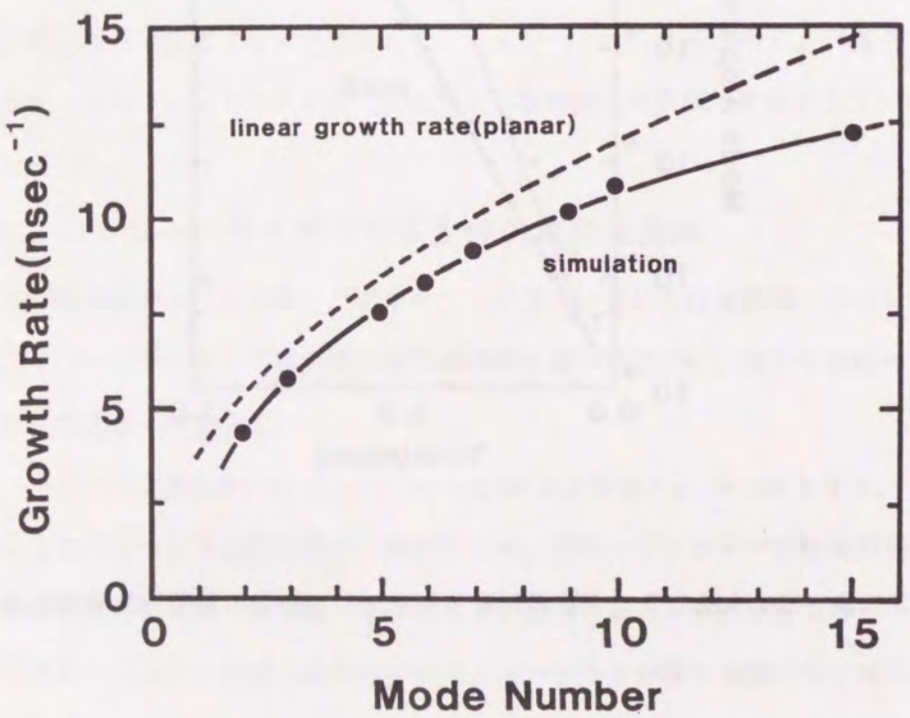


図３－４　レイリー・テイラー不安定性の線形成長率．

ここで，実線はシミュレーション結果の黒丸を滑らかに結んだもの，破線は平面および非圧縮性を仮定した古典的解析により求められたレイリー・テイラー不安定性の線形成長率である．

この古典的レイリー・テイラー不安定性の線形成長率は，よく知られているように次式で表される．

$$\Gamma = \sqrt{\alpha k g} \qquad (3-3)$$

ここで，$\alpha = (\rho_p - \rho_f)/(\rho_p + \rho_f)$はアトウッド数，$k = m / r_c$および$g$はそれぞれじょう乱の波数，実効加速度であり，$\rho_p$および$\rho_f$はそれぞれプッシャーおよび燃料の質量密度である．

ただし，シミュレーション結果の最大圧縮時における値より，ρ_p，ρ_fおよびr_cはそれぞれ１５０（g／cm^3），１８（g／cm^3）および２０（μm）と評価した．また，実効加速度のgは，図３－５に示されているようにシミュレーション結果における最大圧縮時近傍の燃料・プッシャー接触面の軌跡を２次関数を用いてフィッティングすることによって3.76×10^{16}（cm／s^2）と評価した．

図３－４から明らかなように，平面および非圧縮性を仮定した古典的なレイリー・テイラー不安定性の線形成長率は，シミュレーションによって求められた線形成長率の良い近似になっている．しかし，両者には，特に大きなモード数においてくいちがいがみられる．次節では，円柱対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを取り入れた理論解析による線形成長率がシミュレーション結果とよく一致することを示す．

なお，線形成長率は，じょう乱の初期振幅が十分小さく，スタグネーションフェーズの間に指数関数的な線形成長が飽和しないかぎりは，じょう乱の初期振幅そのものには依存せずにモード数に対しては一定の値を示したことを付記しておく．

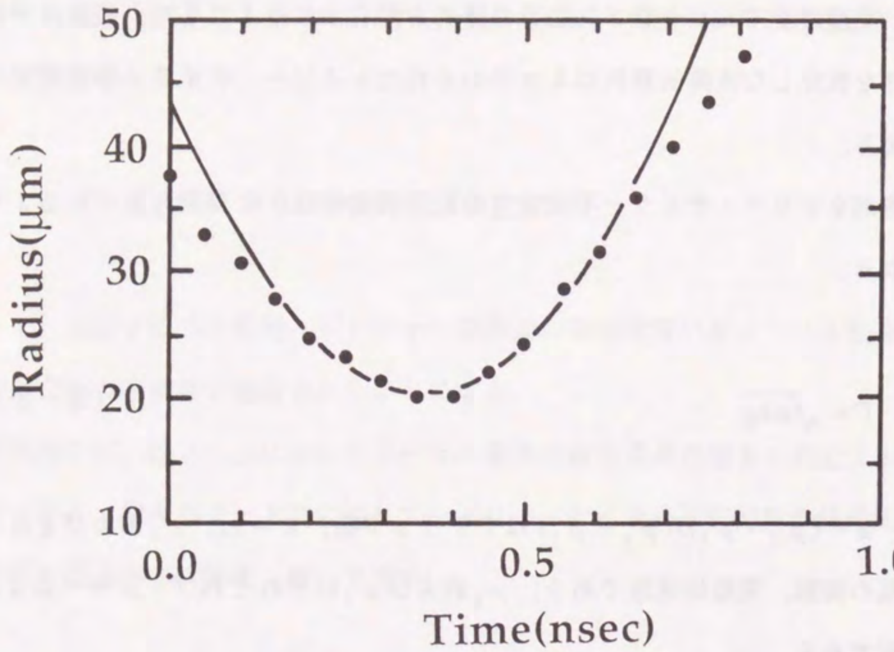


図3－5　シミュレーションにおける燃料・プッシャー接触面の軌跡.

3.4　自己相似解による理論解析

円柱対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを解析するために[8]，まず流体の運動は次式で示されるように断熱的であると仮定する.

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\nabla\bullet u \qquad (3-4)$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\nabla p \qquad (3-5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(p\rho^{-\gamma}\right)=0 \qquad (3-6)$$

ここで，ρ，u および p は，それぞれ質量密度，流速および圧力であり，γ は断熱指数（比熱比）である.

円柱対称を仮定すると，（3－4）式から（3－6）式は次のように簡略化される.

$$\frac{d\rho_0}{dt}=-\frac{\rho_0}{R_0}\cdot\frac{\partial}{\partial R_0}\left(R_0u_0\right) \qquad (3-7)$$

$$\rho_0\frac{du_0}{dt}=-\frac{\partial p_0}{\partial R_0} \qquad (3-8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_0\rho_0^{-\gamma}\right)=0 \qquad (3-9)$$

ここで，ρ_0，u_0 および p_0 は R_0 のみの関数であり，R_0 と u_0 は，

$$\frac{d}{dt}R_0=u_0 \qquad (3-10)$$

という関係で結びつけられている.

（3－7）式から（3－9）式を解くために，次式で定義される自己相似変数 r_0 を導入する.

$$r_0=\frac{R_0}{f(t)} \qquad (3-11)$$

時間のみの関数である $f(t)$ は $f(0)=1$ を満足し，r_0 および R_0 は，それぞれ時刻 $t=0$ および $t=t$ における流体要素の位置である．また，$t=0$ は最大圧縮時とする.

自己相似変数 r_0 を用いて（3－7）式と（3－9）式をそれぞれ次のように書き換えることができる.

$$\rho_0=\rho_0^*(r_0)\,f(t)^{-2} \qquad (3-12)$$

$$p_0=p_0^*(r_0)\,f(t)^{-2\gamma} \qquad (3-13)$$

ここで，ρ^*_0およびp^*_0は，それぞれ時刻$t=0$における質量密度と圧力である．

更に，これらの（3－10）式から（3－13）式を（3－8）式に代入することにより，（3－8）式は次のように$f(t)$とp^*_0に，即ち時間と空間に分離することができる．

$$f(t)^{2\gamma-1}\frac{d^2}{dt^2}f(t)=\frac{1}{\tau^2} \qquad (3-14)$$

$$\frac{dp^*_0(r_0)}{dr_0}=-\frac{1}{\tau^2}\rho^*_0(r_0)r_0 \qquad (3-15)$$

ここで，τ^2は分離定数であり，スタグネーションフェーズ，即ち減速を取り扱うためには関数$f(t)$は下に凸とならなければならないので，分離定数として$\tau^2>0$を仮定する．なお，この定数τは，最大圧縮時近傍での特性的な実効加速度とも結びついている．

もし，質量密度のプロファイルが与えられれば（3－15）式より圧力のプロファイルを決定することができる．

そこで，質量密度のプロファイルを次にように仮定する．

$$\frac{\rho^*_0(r_0)}{\rho_p}=\begin{cases}\rho_f/\rho_p & (0<r_0<r_c)\\ 1 & (r_c<r_0<r_s)\end{cases} \qquad (3-16)$$

ここで，ρ_pおよびρ_fはそれぞれプッシャーおよび燃料の質量密度であり，r_cおよびr_sはそれぞれ燃料・プッシャー接触面およびプッシャー外側境界の半径である．

（3－15）式を解いて，圧力プロファイルとして

$$\frac{p^*_0(r_0)}{p^*_0(0)}=\begin{cases}1-\frac{1}{2\beta}\cdot\frac{\rho_f}{\rho_p}\cdot\left(\frac{r_0}{r_s}\right)^2 & (0<r_0<r_c)\\ 1-\frac{1}{2\beta}\cdot\left[\left(\frac{r_0}{r_s}\right)^2+\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}-1\right)\cdot\left(\frac{r_c}{r_s}\right)^2\right] & (r_c<r_0<r_s)\end{cases} \qquad (3-17)$$

を得る．ここで，$\beta=\tau^2p^*_0(0)/\rho_p r_s^2$である．

プッシャー外側境界での圧力$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$を与えると，（3－17）式よりβの値を

$$\beta=\frac{1}{2}\left[1-\frac{p^*_0(r_s)}{p^*_0(0)}\right]^{-1}\cdot\left[1+\left(\frac{\rho_f}{\rho_p}-1\right)\cdot\left(\frac{r_c}{r_s}\right)^2\right] \qquad (3-18)$$

と評価できる．

図3－6に$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)=0$としたときの質量密度と圧力のプロファイルを模式的に示す．

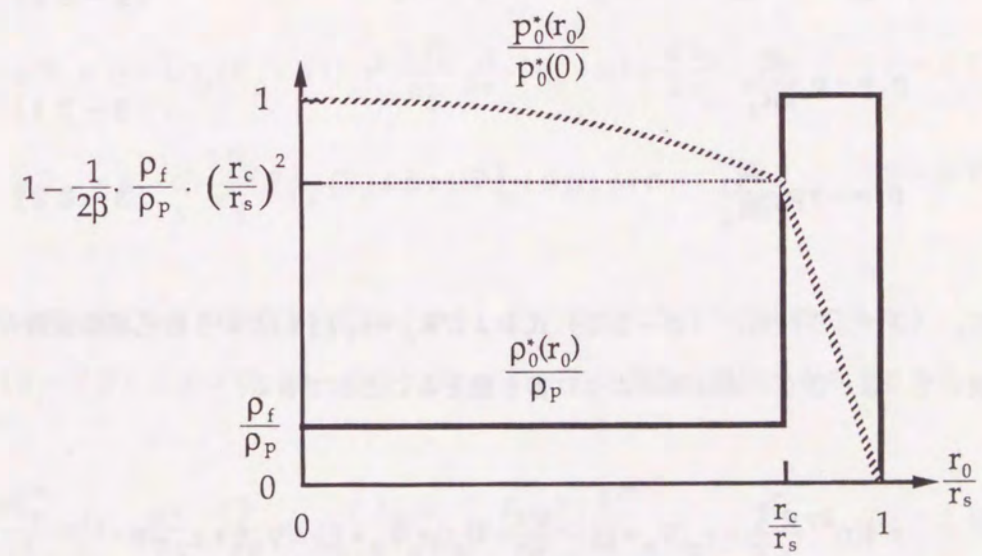


図3－6　自己相似解の質量密度と圧力のプロファイルの模式図．

上記で述べた自己相似的な運動の安定性を線形解析するため，流体がじょう乱によりこの自己相似解から微小な摂動を受けたと仮定して，基礎方程式を線形化する．

まず，摂動を受けた流体要素$\mathbf{R}$の時刻 t = t における位置を

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0+\xi(\mathbf{r}_0,t) \qquad (3-19)$$

で与えられるとする．

ここで，$|\mathbf{R}_0|=R_0$，$|\mathbf{r}_0|=r_0$であり，ξは摂動がないときの時刻 $t=0$ における位置が$\mathbf{r}_0$の流体要素に対する摂動による変位である．

（3－5）式，（3－4）式および（3－9）式を線形化すると，それぞれ1次の摂動に対する次のような方程式が得られる[17]．

$$\rho_0\frac{d^2\xi}{dt^2}+\rho_1\frac{d^2\mathbf{R}_0}{dt^2}=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}_0}p_1+\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{R}_0}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}_0}p_0 \qquad (3-20)$$

$$\rho_1=-\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{R}_0} \qquad (3-21)$$

$$p_1=-\gamma p_0\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{R}_0} \qquad (3-22)$$

更に，（3－21）式，（3－22）式および$\mathbf{R}_0=\mathbf{r}_0 f(t)$という自己相似変数の関係を用いて（3－20）式は次のように書き換えることができる．

$$\tau^2 f(t)^{2\gamma}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\mathbf{r}_0(\nabla_0\bullet\xi)-\frac{\gamma\tau^2}{\rho^*_0}\nabla_0(p^*_0\nabla_0\bullet\xi)+\nabla_0\xi\bullet\mathbf{r}_0=0$$

$$\nabla_0=\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_0} \qquad (3-23)$$

ここで，次式で定義されるように摂動に関する新しい変数$S(\mathbf{r}_0)$と$T(t)$を導入すると，

$$\xi(r_0,t)=S(r_0)\cdot T(t) \qquad (3-24)$$

（3－23）式は次のように$S(\mathbf{r}_0)$と$T(t)$に対する方程式に分離される．

$$\mu S-\mathbf{r}_0(\nabla_0\bullet S)-\frac{\gamma\tau^2}{\rho^*_0}\nabla_0(p^*_0\nabla_0\bullet S)+\nabla_0 S\bullet\mathbf{r}_0=0 \qquad (3-25)$$

$$\tau^2 f(t)^{2\gamma}\frac{d^2T}{dt^2}=\mu T \qquad (3-26)$$

ここで，μは新たな分離定数であり，（3－26）式より明らかなように$\mu^{1/2}\tau^{-1}$は最大圧縮時（$t\sim 0$）におけるじょう乱の成長率となる．

更に，（3－25）式は，その動径方向成分を分離し，方位角方向の発散をとることにより，二つの方向成分に分けることができる．

$$\mu S_r+(\gamma-1)r_0(\nabla_0\bullet S)-\tau^2\frac{\gamma p^*_0}{\rho^*_0}\frac{\partial}{\partial r_0}(\nabla_0\bullet S)+\frac{\partial S_r}{\partial r_0}r_0=0 \qquad (3-27)$$

$$\mu\nabla_{0\perp}\bullet S-\tau^2\frac{\gamma p^*_0}{\rho^*_0}\nabla^2_{0\perp}(\nabla_0\bullet S)+\nabla^2_{0\perp}(S_r r_0)=0 \qquad (3-28)$$

ここで，S_rはSの動径方向成分であり，$\nabla_{0\perp}$は方位角方向の発散である．

（3－27）式および（3－28）式は，フーリエ級数に展開することにより

$$\frac{d\bar{S}_r^m}{d\bar{r}}=\left[1+\frac{m^2}{\mu}\cdot\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}\cdot\beta\cdot\frac{1}{\bar{r}^2}\right]\bar{D}^m-\left[1+\frac{m^2}{\mu}\right]\frac{\bar{S}_r^m}{\bar{r}} \qquad (3-29)$$

$$\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}\cdot\beta\cdot\frac{d\bar{D}^m}{d\bar{r}}=\left[\gamma+\frac{m^2}{\mu}\cdot\frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}\cdot\beta\cdot\frac{1}{\bar{r}^2}\right]\bar{r}\bar{D}^m-\left[1+\frac{m^2}{\mu}-\mu\right]\bar{S}_r^m \qquad (3-30)$$

と書き換えることができる．

ただし，すべての変数は次のような正規化を行ない，

$$\bar{\rho} = \rho^*_0 / \rho_p$$
$$\bar{p} = p^*_0 / p^*_0(0)$$
$$\bar{r} = r_0 / r_s$$
$$\bar{S}_r = S_r$$
$$\bar{D} = D r_s$$

フーリエ級数である$S^m{}_r$およびD^mは，

$$\bar{S}_r = \sum_m \bar{S}^m_r F^m(\theta)$$
$$\nabla_0 \bullet \bar{S} = \sum_m \bar{D}^m F^m(\theta) \qquad (3-31)$$

と定義される．ここで，$F^m(\theta)$はフーリエの直交関数である．

なお，（３－２９）式および（３－３０）式を導出するにあたり，

$$\nabla^2_{0\perp} F^m = -\frac{m^2}{r^2_0} F^m$$

および

$$\nabla_{0\perp} \bullet S = \nabla_0 \bullet S - \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial r_0}(r_0 S_r)$$

という関係式を用いた．

背景の０次オーダーの質量密度と圧力を（３－１６）式および（３－１７）式で表される自己相似解であると仮定し，更に，次式で示される境界条件を$S^m{}_r$およびD^mに課して，（３－２９）式および（３－３０）式を数値的に解析する．

$$\bar{S}^m_r = 0, \quad \text{at} \quad \bar{r} = 0 \qquad (3-32)$$
$$\bar{D}^m = 0, \quad \text{at} \quad \bar{r} = 1$$

前者の条件は，m＝１を除いたモードに対する$r_0 = 0$における動径方向の解S_rの一意性により，また，後者の条件は，$r_0 > r_s$，即ちプッシャーの外側では流体が非常に希薄なため圧力の摂動が許されない（$p_1 = 0$）という制約と（３－２２）式から得られる．この境界条件に加えて，S_rおよびp_1が$r_0 = r_c$で連続であるという条件も用いて解析を行なう．

数値解析により，固有値μはr_c / r_s，ρ_f / ρ_p，$p^*_0(r_s) / p^*_0(0)$という三つのパラメーターとモード数mの関数として一意的に決定される．シミュレーションの最大圧縮時のプロファイルよりこの三つのパラメーターの値を評価し，$\gamma = 5/3$として数値解析を行なった結果得られた固有値μおよび最大圧縮時におけるじょう乱の線形成長率$\mu^{1/2}\tau^{-1}$の値を表３－２に示す．

表３－２　各モードに対する固有値μと成長率$\mu^{1/2}\tau^{-1}$．

m	μ	$\mu^{1/2}\tau^{-1}$
2	2.08	6.11
3	2.90	7.20
5	4.49	8.96
7	6.06	10.41
10	8.41	12.27
13	10.76	13.88
15	12.33	14.86
20	16.25	17.06

$r_c / r_s = 0.61$，$\rho_f / \rho_p = 0.12$，$p^*_0(r_s) / p^*_0(0) = 0.01$

更に，固有値μのパラメーター依存性を調べるために，三つのパラメーターのうち二つを固定して残りのもう一つを変化させて数値解析を行なった．この結果得られた固有値μを表３－３（ａ）－（ｃ）に示す．

小さなモード数においては，プッシャー層の厚さが薄くなればなるほど，即ちパラメーターr_c/r_sの値が大きくなればなるほど，固有値μの値が急速に小さくなることが表３－３（ａ）から見いだされる．従って，この条件のときには，レイリー・テイラー不安定性の成長率は大きく緩和されることになる．また，モード数を固定して考えると，固有値μの値を最大にするパラメーターr_c/r_sの値が存在することがわかり，この値はモード数が大きくなるに従って大きくなる．即ち，モード数が大きく波長が短いほど，最大成長率を与えるプッシャー層の厚さは薄くなることがわかる．表３－３（ｂ）からは，固有値μの値は，モード数が小さくて，かつパラメーターが$\rho_f/\rho_p>0.25$になるときを除いては，ほとんどアトウッド数に比例していることがわかる．成長率は以前にも述べたように$\mu^{1/2}$に比例するので$\Gamma\propto\mu^{1/2}\propto\alpha^{1/2}$となり，古典的なレイリー・テイラー不安定性の成長率$\Gamma=(\alpha kg)^{1/2}\propto\alpha^{1/2}$と同じアトウッド数に対する依存性を示す．このため，接触面の両側における質量密度比は，この場合にも平面および非圧縮性を仮定した古典的な場合と同じメカニズムで成長率に影響を及ぼしていると考えられる．最後に表３－３（ｃ）からは，固有値μの値は$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$というパラメーターには，ほとんど依存しないことがわかる．

固有値μを決定すると，（３－１４）式と（３－２６）式を数値的に解くことにより摂動の時間発展を調べることができる．加速度および波長が時間・空間と共に変化するというスタグネーションのダイナミクスをも含めた実効的な成長率は，時間平均を考えて次のように評価できる．

$$\Gamma_{eff}\Delta t=\int\Gamma dt \qquad (3-33)$$

表３－３　固有値μの各パラメーターに対する依存性．

(a) various r_c/r_s with ρ_f/ρ_p= 0.12 and $p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$ = 0.01

r_c/r_s	0.25	0.5	0.7	0.8	0.9
m=2	2.15	2.12	2.03	1.91	1.65
m=6	5.24	5.26	5.27	5.23	4.97
m=10	8.37	8.39	8.43	8.45	8.31
m=15	12.30	12.31	12.35	12.39	12.39

(b) various ρ_f/ρ_p(Atwood number α) with r_c/r_s=0.61 and $p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$ = 0.01

ρ_f/ρ_p	0.001	0.01	0.1	0.25	0.5
α	1.00	0.98	0.82	0.60	0.33
m=2	2.56	2.51	2.15	1.73	1.31
m=6	6.51	6.40	5.46	4.24	2.87
m=10	10.49	10.32	8.72	6.62	4.14
m=15	15.48	15.21	12.81	9.61	5.77

(c) various $p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$ with r_c/r_s = 0.61 and ρ_f/ρ_p= 0.12

$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$	0.00001	0.001	0.1	0.5	0.9
m=2	2.08	2.08	2.08	2.07	2.05
m=6	5.27	5.27	5.27	5.25	5.24
m=10	8.41	8.41	8.40	8.39	8.37
m=15	12.33	12.33	12.32	12.31	12.30

この実効的な成長率を計算した結果を図３－７に示す．ここで，黒丸（●）はシミュレーション結果を示し，実線は実効的な成長率Γ_{eff}を，破線は最大圧縮時における成長率$\mu^{1/2}\tau^{-1}$を表す．

ただし，Δtはシミュレーション結果より$\Delta t = 0.3$（ｎｓｅｃ）とした．

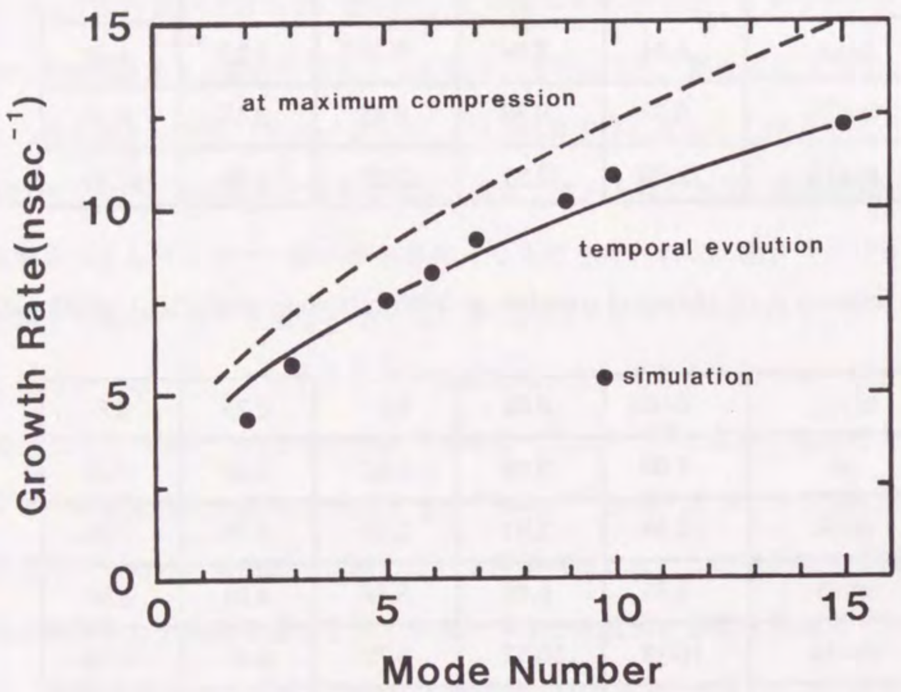


図３－７　理論解析による実効的なレイリー・テイラー不安定性の線形成長率．

図３－７より明らかなように，シミュレーション結果と実効的な成長率Γ_{eff}は非常によく一致している．

また，本節で述べた理論解析によれば，実効的な加速度は

$$g = r_c \frac{d^2 f}{dt^2} \qquad (3-34)$$

となるが，この実効的加速度の最大圧縮時の値（3.59×10^{16} ｃｍ／ｓ^2）もシミュレーション結果より得られた加速度（3.76×10^{16} ｃｍ／ｓ^2）とよく一致していることを付記しておく．

３.５　非線形時間発展

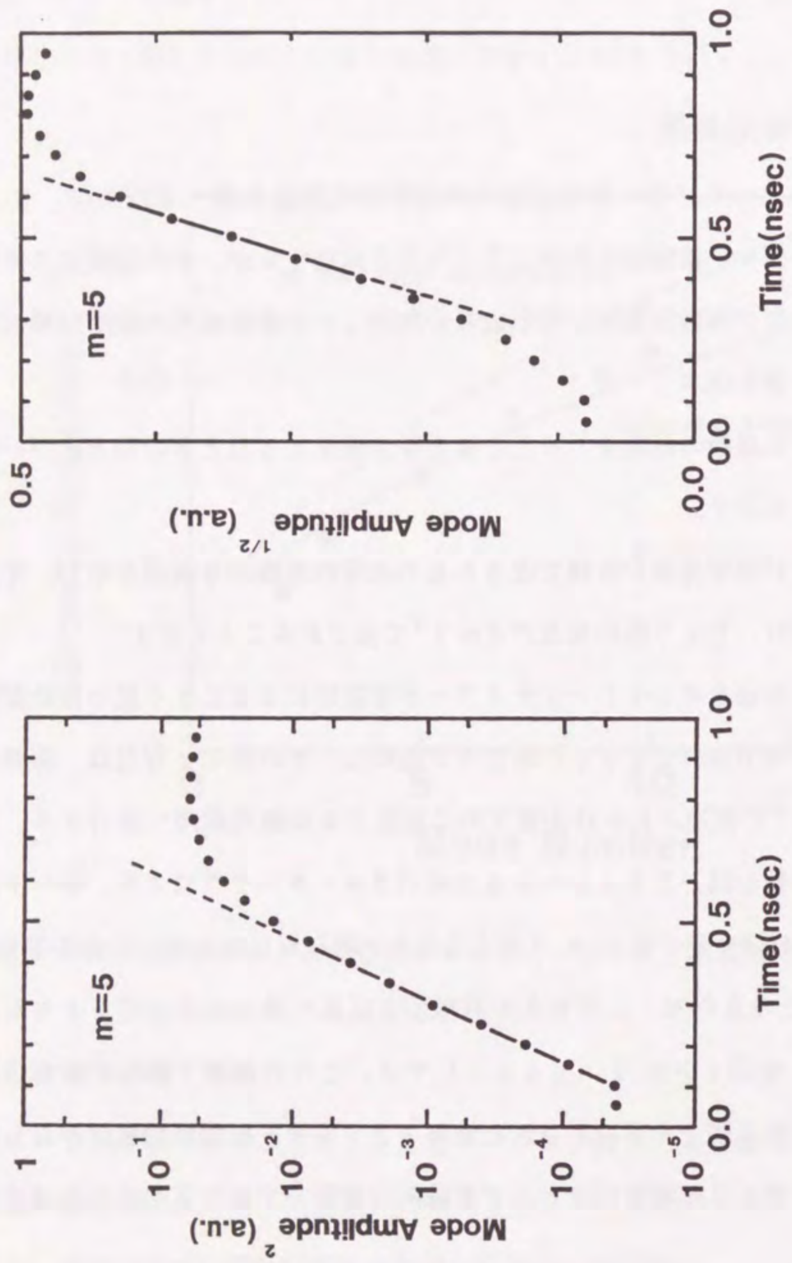
本節では，レイリー・テイラー不安定性の非線形時間発展を調べるために，３.３節と同様に燃料・プッシャー接触面の近傍にじょう乱を印加するが，その振幅はスタグネーションフェーズの間に指数関数的な線形成長が飽和して非線形成長の段階に移行するように，十分大きな値を選ぶ．

じょう乱のフーリエ係数の対数をとったときと平方根をとったときの両方についての時間発展を図３－８に示す．

対数をとったときに時間発展が直線で表されるのは指数関数的な成長を示し，平方根をとったときの直線は，じょう乱の成長が$\delta \propto t^2$で表されることを示す．

図３－８より，この場合のレイリー・テイラー不安定性によるじょう乱の指数関数的な線形成長は時刻$t = 0.4$（ｎｓｅｃ）あたりで飽和し，その後じょう乱は，振幅の時間発展が$\delta = \eta g t^2$で記述される自由落下的に成長する非線形段階へ移行する．この自由落下的成長の係数ηは，シミュレーションのパラメーターランにより，モード数にはほとんど依存せずほぼ一定の値～ 0.2をとることが明らかになった．自由落下では，このηの値が0.5となるため，このときの非線形な成長の速さは自由落下よりも遅いことになる．また，時刻$t > 0.7$（ｎｓｅｃ）では，この自由落下的な非線形成長も飽和しているが，これは図３－５に示された燃料・プッシャー接触面の軌跡からも明らかなように，この時間には接触面はほとんど直線的に運動しており実効的な加速度がなくなるためである．

自由落下的成長の係数ηの物理的性質を調べるために，まず，他の物理量は同じにして断熱指数（比熱比）γの値だけを５／３から７／５に変更してシミュレーションを行



（a）対数　（b）平方根

図３－８　じょう乱のフーリエ係数の対数と平方根をとったときの時間発展.

なってηの値のγに対する依存性を調べた．一般に，衝撃波によって流体を圧縮する場合には，ランキン・ユーゴニオの関係により最大圧縮率が$(\gamma+1)/(\gamma-1)$になることが知られている．このため，燃料の最大圧縮密度は，$\gamma=7/5$の場合の方が５／３の場合より大きくなることが予測される．実際にシミュレーションでも，燃料の最大圧縮密度は５５％程大きくなっているが，ηの値は～０.２と$\gamma=5/3$の場合と同じ値を示した．

更に，今度は$\gamma=5/3$であるが最大圧縮時にもっと小さな質量密度比ρ_f/ρ_pが得られるように表３－１に示した初期条件そのものを変更してシミュレーションを行なった．$\rho_f/\rho_p=0.03$と今までの$\rho_f/\rho_p=0.12$の１／４の質量密度比が得られる初期条件を用いても，ηの値は～０.２と同様の値を示した．

以上の結果より自由落下的成長の係数ηは，現行のシミュレーションパラメーターの範囲内では，モード数，断熱指数（比熱比）および質量密度比等の物理量にはほとんど依存せず，本質的に一定の値～０.２をとることが明らかになった．

図３－８と同じシミュレーション結果において，そのじょう乱のモード数に対応する渦度（$\nabla\times v$）のフーリエ係数を図３－９に示す．２次元の場合，渦度はシミュレーションを行なっている平面に垂直な成分しか持たずスカラー的に扱えるので，渦度のフーリエ係数も質量密度のときと同様に微小な扇形について渦度を積分し，その結果をフーリエ変換することにより求めている．じょう乱のモード数に対応する渦度は，自由落下的な非線形成長が始まる時刻$t=0.4$（ｎｓｅｃ）あたりから急激に増加することが見いだされる．このことから，渦の発生は非線形なバブル・スパイク構造と密接に結びついていることがうかがえる．

さて，じょう乱の指数関数的な線形成長が飽和し，その後の非線形段階である自由落下的な成長へ移行する丁度そのときのじょう乱の山から谷までの振幅を指数関数的成長の飽和レベルと定義する．この指数関数的成長の飽和レベルを各々のモード数についてシミュレーションにより調べた．飽和レベルをじょう乱の波長について規格化したものを図３－１０に示す．

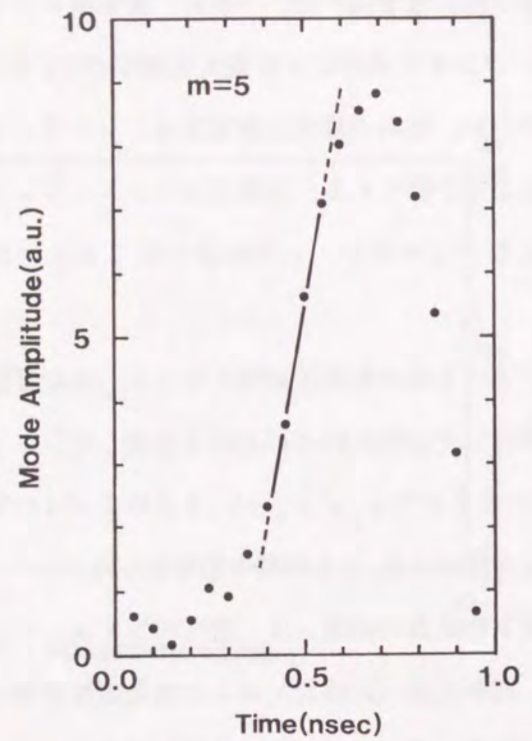


図３－９　渦度のフーリエ係数の時間発展．

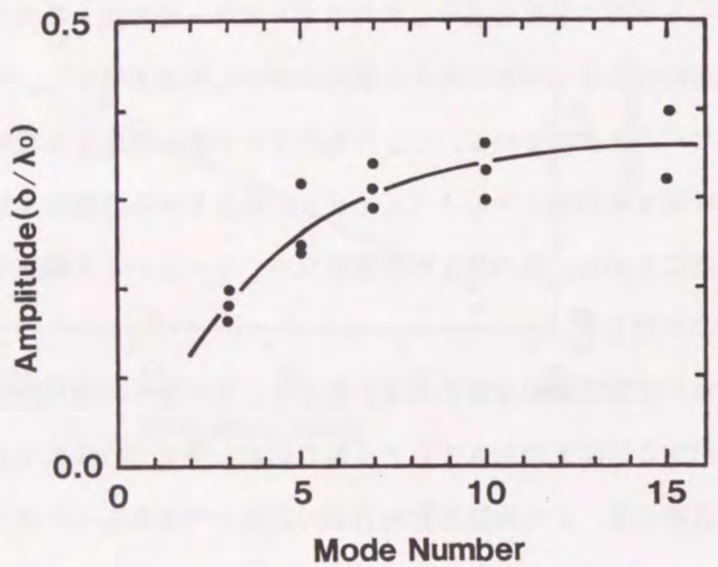


図３－１０　じょう乱の指数関数的成長の飽和レベル．

ここで，同じモード数に対する複数の異なった黒丸（●）は，じょう乱の初期振幅の違いに対応する．また，波長λ_0は，その飽和したときの接触面の平均的な半径を用いて$\lambda_0 = 2\pi r_c / m$（m：モード数）と求めた．

図３－１０より，指数関数的成長の飽和レベルは，比較的大きなモード数（m＞６）においては，モード数に依存せずにおおよそ$\delta \sim 0.35\lambda_0$と一定の値を示すが，それより小さなモード数（m＜５）においては，その値より若干緩和されている．

ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄで解いている流体方程式には，よく知られているように特徴的な空間スケールが存在しない．このため，外部より与えるじょう乱の波長が唯一の特徴的な空間スケールとなる．従って，じょう乱の波長という空間スケールについて規格化した指数関数的成長の飽和レベルは，本来はモード数にはまったく依存しないはずであるが，実際には上記で述べたようにモード数に対する弱い依存性が存在する．半径を固定して考えてみると，モード数が大きくなる程波長が短くなるので$\lambda / r \ll 1$となり，より平面の場合に近づき円柱対称という幾何学的な影響を受けなくなる．従って，小さなモード数における飽和レベルの緩和傾向は，円柱対称という幾何学的な効果のためと考えることができる．

モード数5のじょう乱を印加したときの質量密度，渦度および圧力の等値線（等高線）を異なった時間について描いたものを図３－１１に示す．また，それとは異なったモード数3，１０および１５のじょう乱を印加したときの質量密度の等値線を同様に描いたものを図３－１２に示す．なお，じょう乱の初期振幅はスタグネーションフェーズの比較的早い時期に指数関数的な線形成長が飽和し，そのフェーズの間に非線形な成長が十分に起こるよう，各モード数ごとに十分大きな値を選んでいる．

指数関数的な線形成長が飽和した後，じょう乱は線形段階から自由落下的に成長する非線形段階へ移行するが，そのとき非線形なバブル（質量密度の小さい流体，この場合燃料に相当する）・スパイク（質量密度の大きな流体，この場合プッシャーに相当する）構造を形成する．そして，じょう乱の振幅がその波長オーダー（$\delta \sim \lambda$）になると，プッシャーのスパイクは燃料中に深く沈み込み，燃料のバブルは逆にスパイク中を浮き上

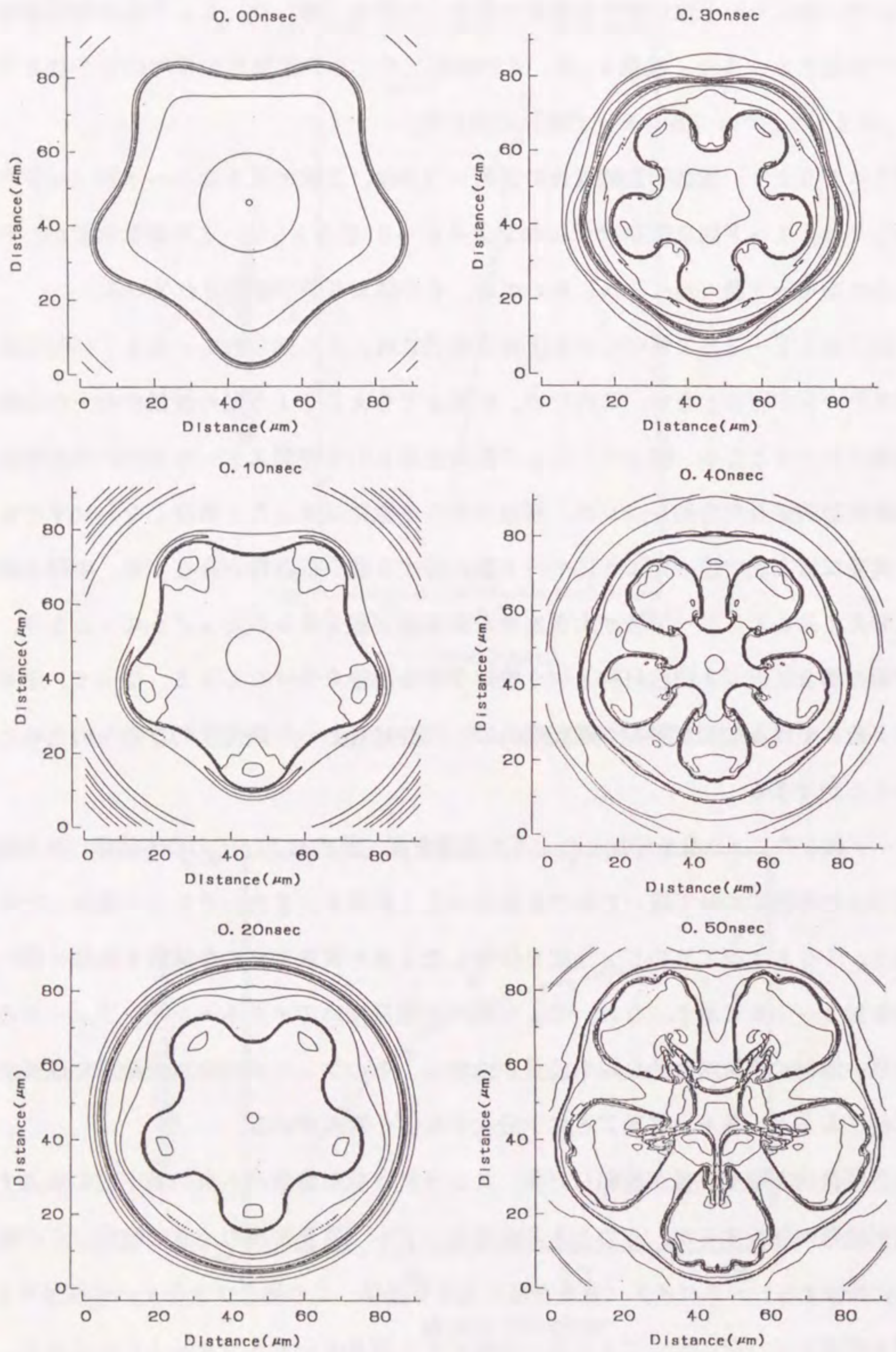


図3－11（a）モード数5のときの質量密度の等値線.

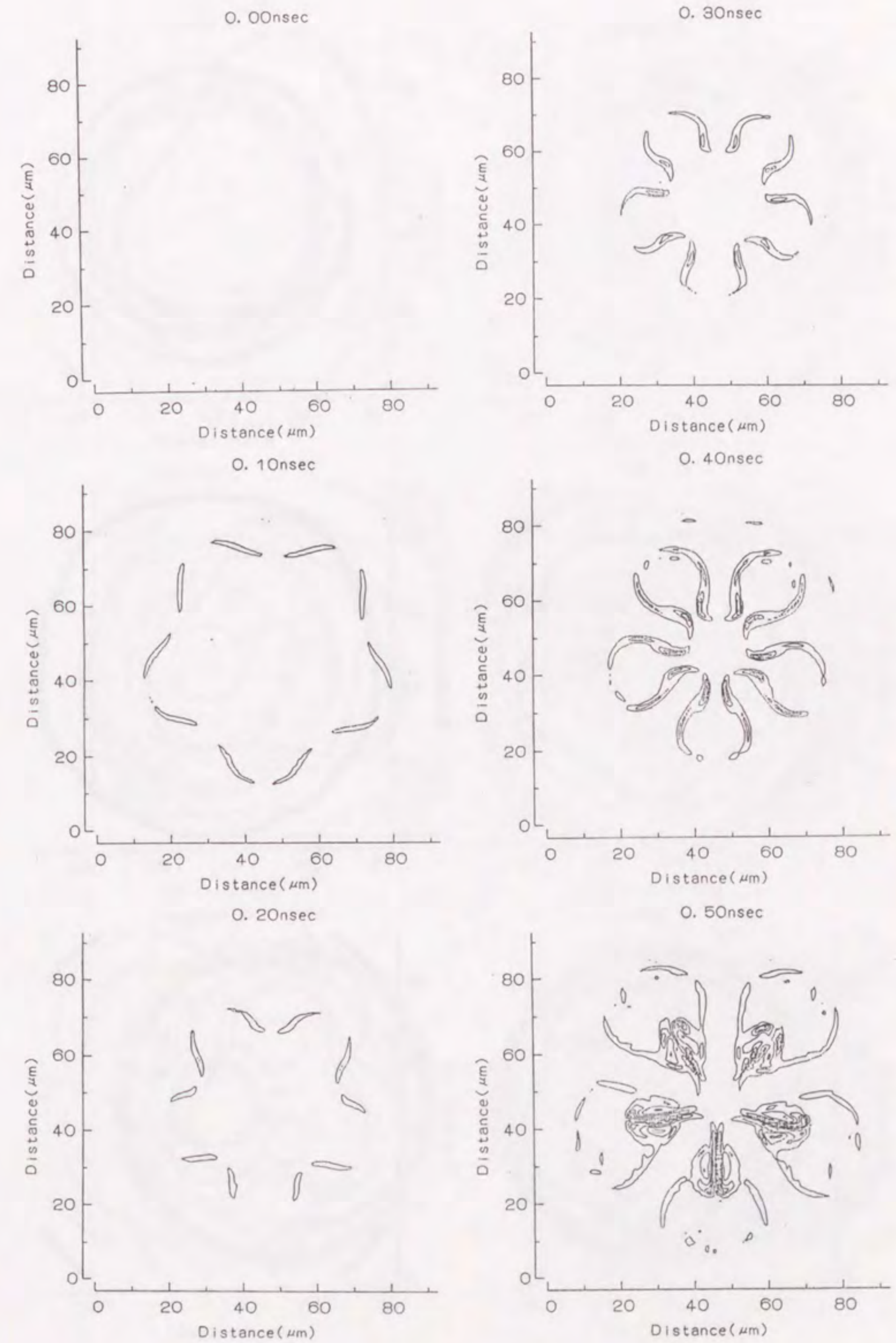


図3－11（b）モード数5のときの渦度の等値線.

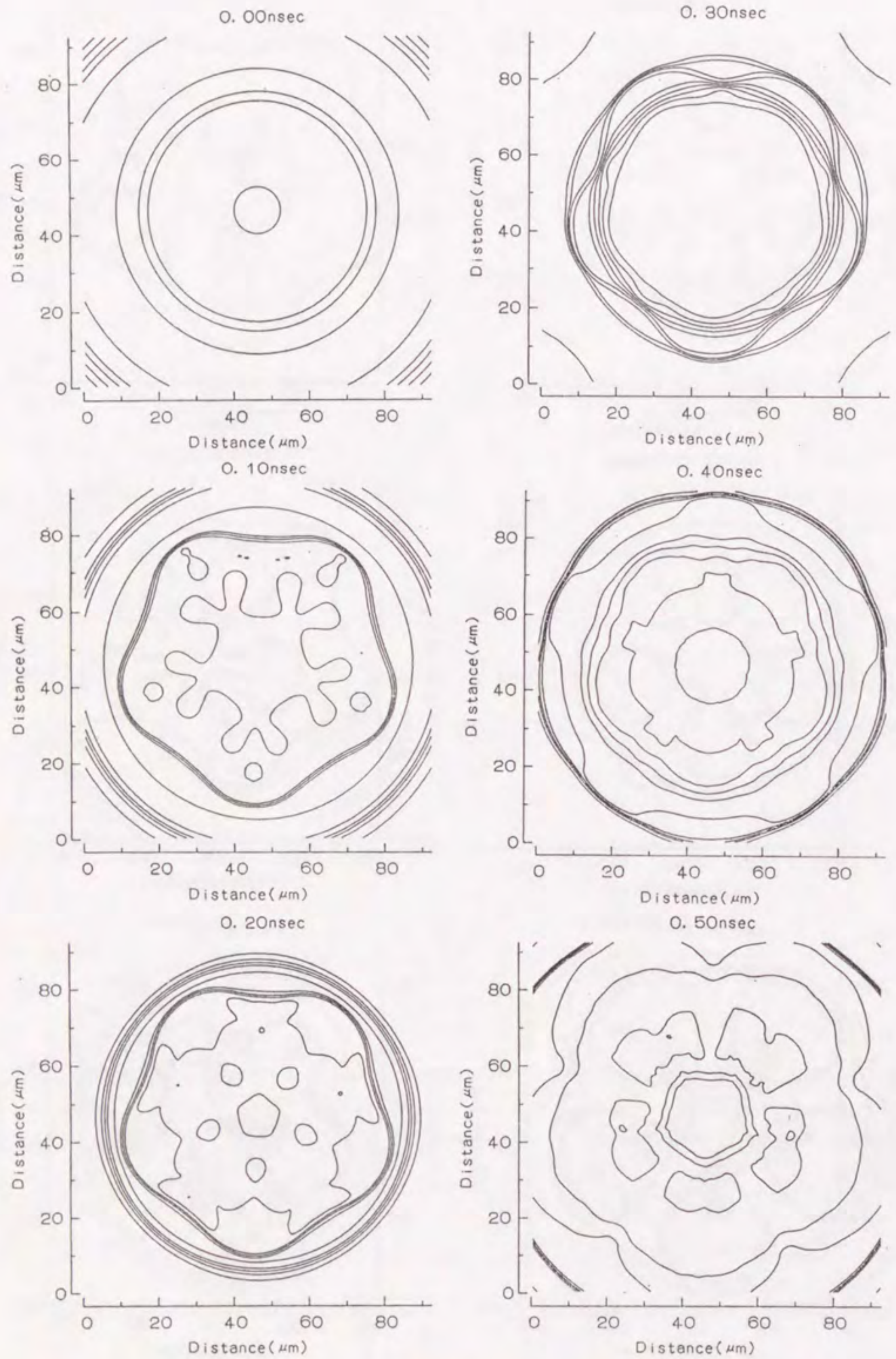


図3－11（c）モード数5のときの圧力の等値線.

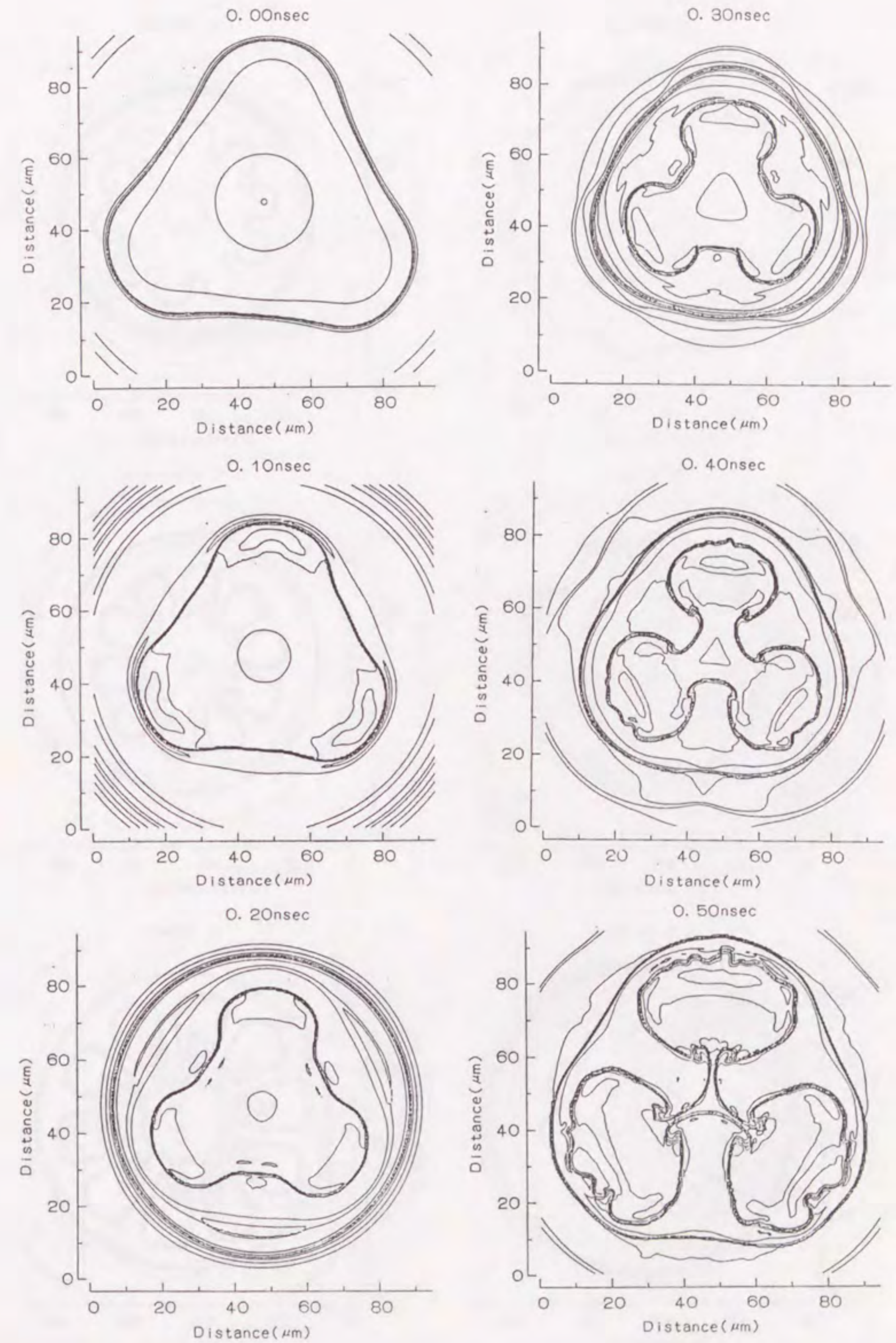


図3－12（a）モード数3のときの質量密度の等値線.

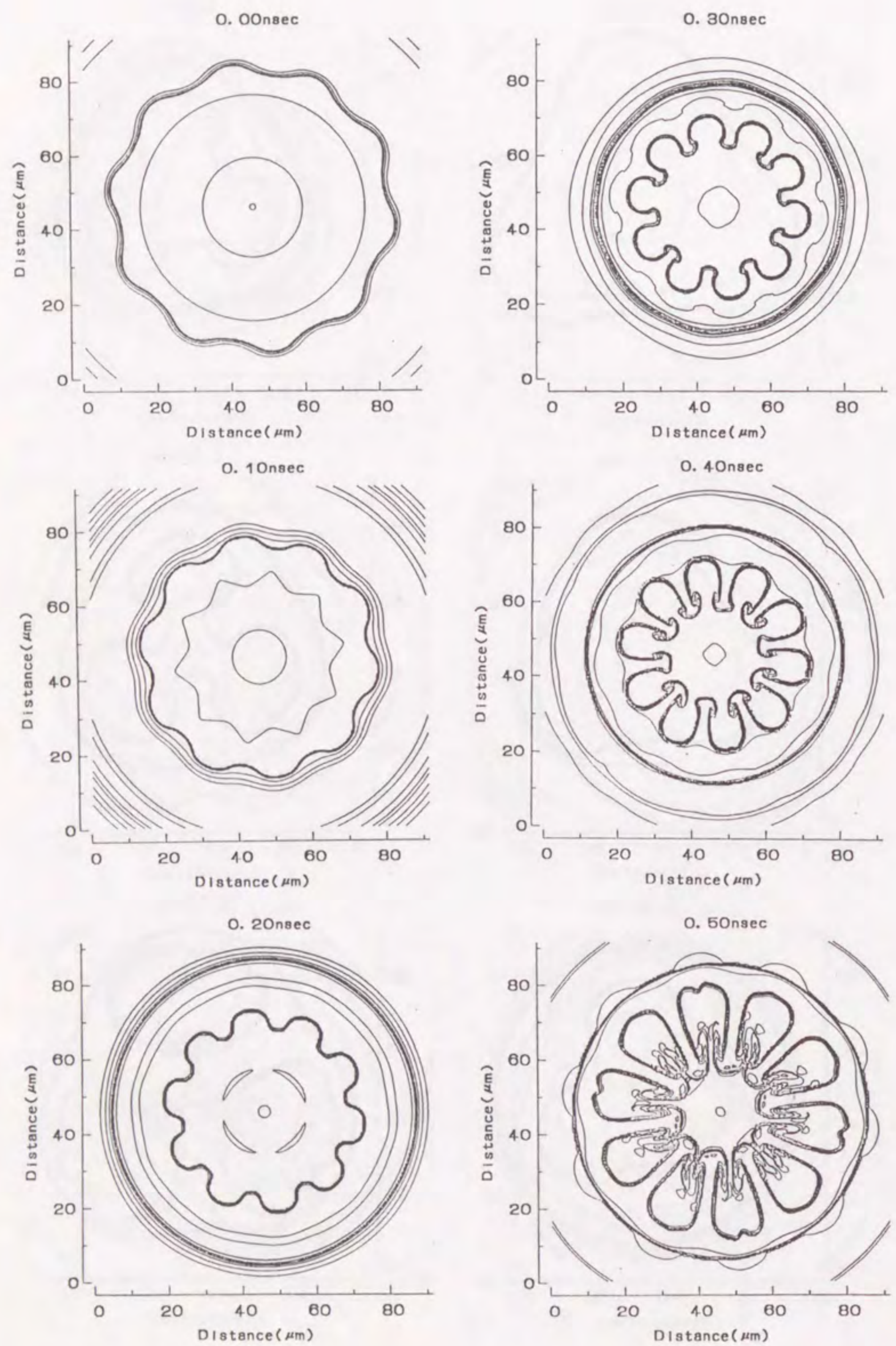


図３－１２（b）モード数１０のときの質量密度の等値線.

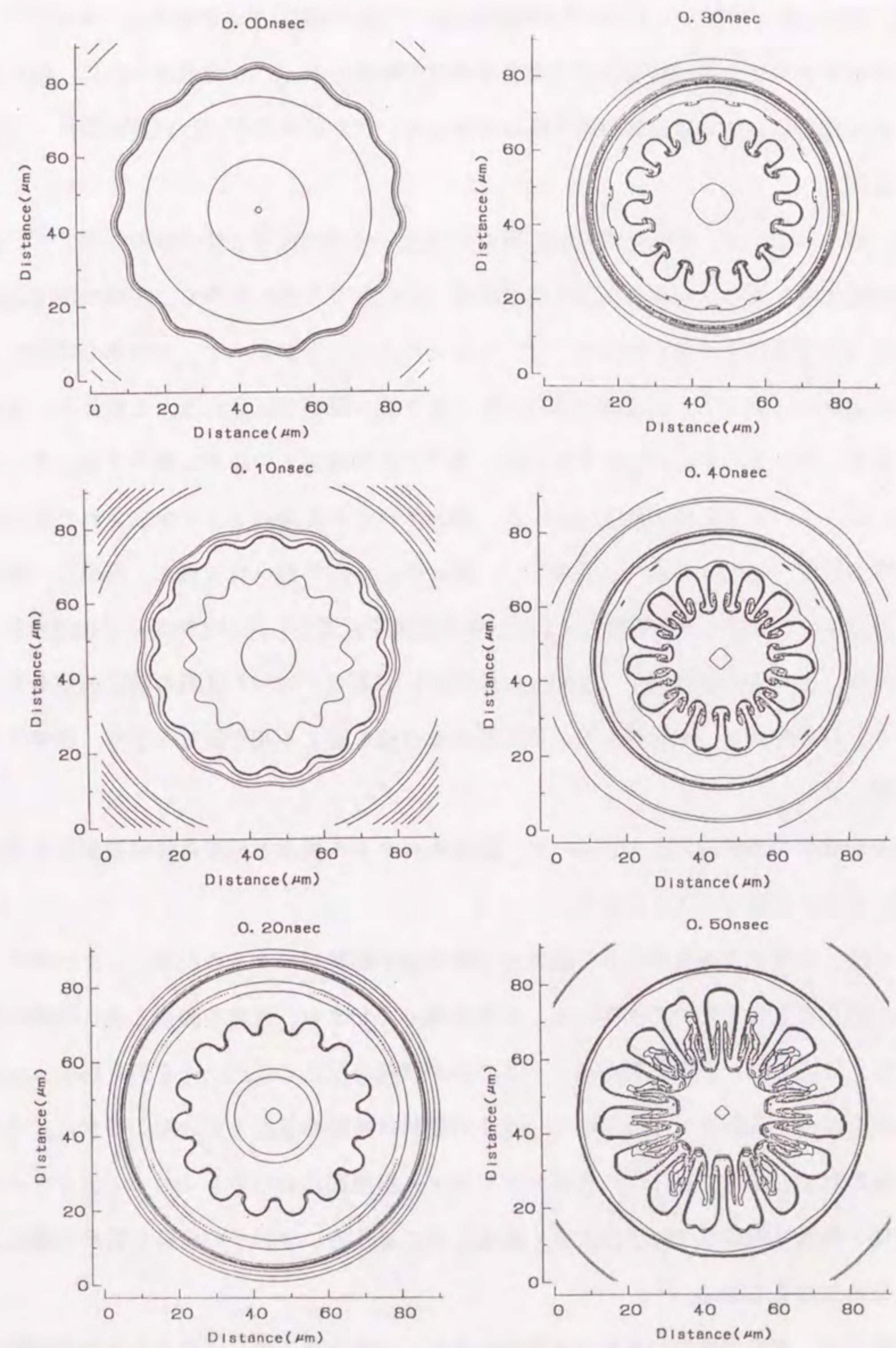


図３－１２（c）モード数１５のときの質量密度の等値線.

がる．このとき，バブル・スパイクの境界において強い速度シアーが発生し，ケルビン・ヘルムホルツ不安定性が誘発されて大きな渦度が生成される．この渦のために，特にスパイクの先端においては流体の巻き込みが起こり，スパイクの形は，いわゆるキノコ形になる．

一つのスパイクは，その先端の左右両側にお互いに逆の符号を持つ対の（ペアの）渦度を生成する．即ち，右側の渦度は負の符号（時計回りの渦）を持ち，左側の渦度は正の符号（反時計回りの渦）を持つ．プッシャーのスパイクがターゲットの中心に向かって沈み込むのに従って，渦度は次第に大きくなり強い渦が生成される．このとき，スパイクがターゲットの中心に収束するため，スパイク先端同士の距離は減少する．そしてついには，スパイク先端の渦度（渦）は，隣のスパイク先端によって生成された逆の符号を持つ渦度（逆向きの渦）と衝突し，一緒に中心から外側へ吹き飛ぶ．同時に，燃料も上記で述べた渦度の双極子構造により，その双極子の間から外側に向かって加速され，噴出する．逆符号の渦度同士（逆向きの渦同士）が近づくにつれ燃料の噴出速度も大きくなり，最終的には，燃料ジェットは局所的な音速を越える超音速流となり，燃料バブルを膨らませる．

非線形成長の最終段階近傍において，流速のベクトル表示と渦度の等値線表示を重ねて描いたものを図３－１３に示す．

この後，燃料バブルは中心から超音速で吹き出す燃料ジェットのために，ターゲット中心で静止している燃料の本体から，ちぎれ飛んでしまい，流体の膨張と共に外側に運ばれる．このため，初期燃料の極く一部のみが核融合反応の自己点火を引き起こすために必要な高温・高密度になるだけで，残りの燃料は核融合反応を引き起こさずに，そのまま失われてしまう．従って，燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性が最大圧縮時までに十分大きく成長してしまうと，中性子の全発生数が大幅に少なくなると考えられる．

次節では，指数関数的に成長する線形段階および自由落下的に成長する非線形段階の両方を含むじょう乱に対する簡単な時間発展モデルを考え，スタグネーションフェー

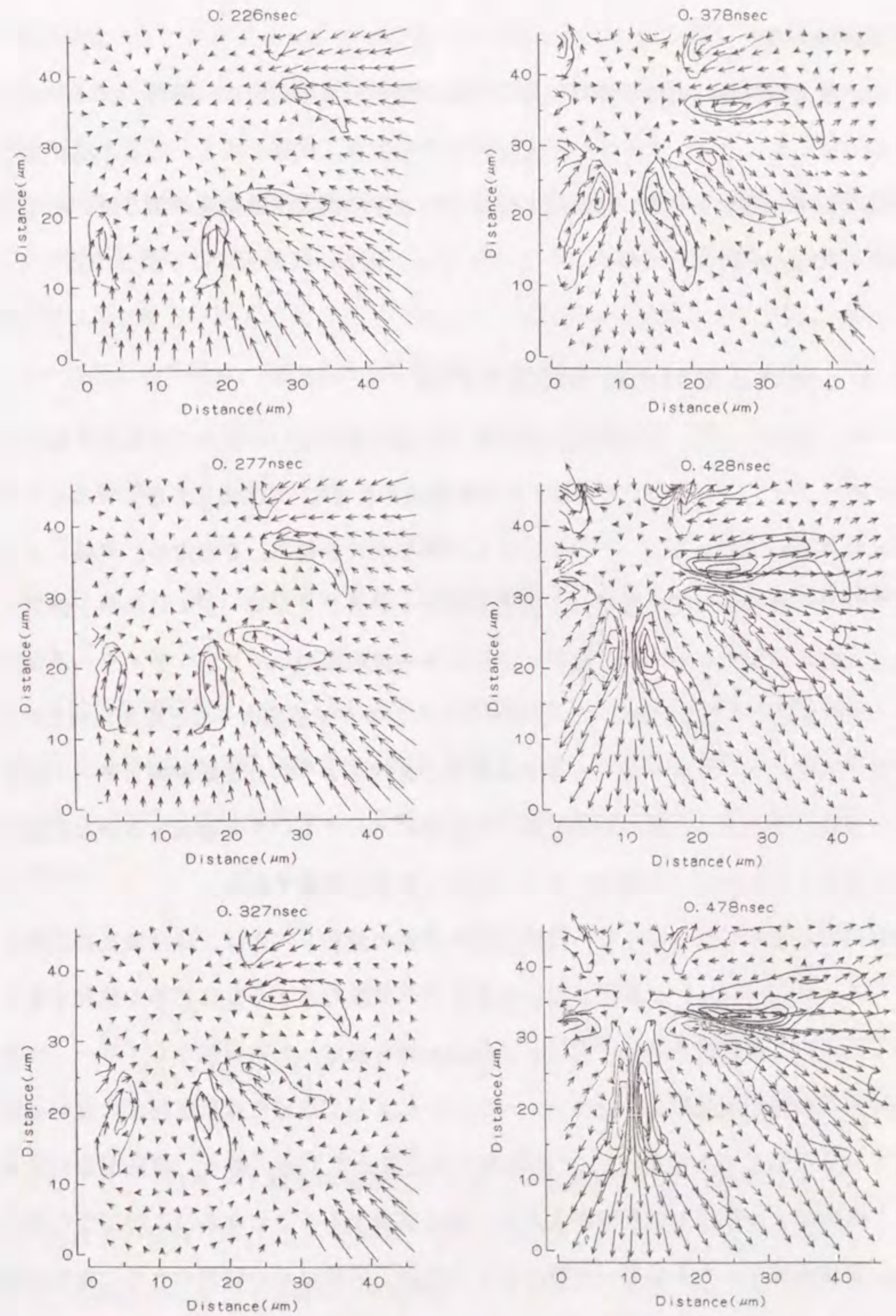


図３－１３　最終段階における流速ベクトルと渦度の等値線（m＝５）．

ズ開始時のじょう乱の初期振幅とモード数の関数として最大圧縮時におけるじょう乱の振幅を評価する.

なお，最大圧縮時における燃料の最大圧縮密度そのものの値は，燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性が十分大きく成長しても，じょう乱が全然なく円柱対称を保ちながら均一に圧縮を行なったときの最大圧縮密度の値とほとんど変わらなかったことを付記しておく.

3.6　最大圧縮時の振幅評価モデル

レーザー核融合における核融合反応は最大圧縮前後の短い時間内で支配的に起こり，スタグネーションフェーズでの中性子の発生数はそれまでの100倍も大きくなることが，1次元流体コードのシミュレーションにより明らかにされた. このため，実験によって観測された中性子の全発生数が，1次元流体コードのシミュレーションから予測される値より大幅に少なくなるのは，燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性によって引き起こされる燃料とプッシャーのミキシングが原因の一つと考えられている. 従って，スタグネーションフェーズが始まるときのじょう乱の初期振幅とモード数を与えたときに，そのじょう乱の振幅が最大圧縮時にどれぐらいまで成長するかを定量的に評価することはレーザー核融合において極めて重要な課題である.

前節において示されたように，指数関数的成長の飽和レベルは，ほぼ波長に比例するので（$\delta \sim 0.35\lambda_0$），波長が短い大きなモード数のじょう乱ほど早く飽和することになる. 一方，線形成長率は平面および非圧縮性を仮定した古典的なレイリー・テイラー不安定性の線形成長率が，シミュレーションによって求めた線形成長率の良い近似になっているため，おおよそ$\lambda^{-1/2}$に比例すると考えてよい. 即ち，波長が短い大きなモード数のじょう乱ほど成長率が大きく，速く成長することになる. この二つの理由により，短波長である大きなモード数のじょう乱は，非常に早い時間のうちに指数関数的な成長が飽和して，それよりもずっとゆっくり成長する自由落下的成長の非線形段階へ

移行してしまう. このため，短波長モードのじょう乱の最大圧縮時の振幅はそれほど大きな値にはならず，スタグネーションフェーズ開始時にそのようなモード数の大きなじょう乱が存在することは，以前に予測されていたほどにはレーザー核融合にとって危険ではない[9].

最大圧縮時におけるじょう乱の振幅を，スタグネーションフェーズ開始時の初期振幅とモード数の関数として定量的に評価する簡単なモデルを考えるために，まず，実効的な加速度はスタグネーションフェーズにおいて一定であると仮定する. 即ち，燃料・プッシャー接触面の半径は，次のような時間依存性を持つとする.

$$r = r_M + \frac{1}{2} g (t - t_M)^2 \qquad (3-35)$$

ここで，r_Mとt_Mは，それぞれ最大圧縮時の燃料・プッシャー接触面の半径および時間である.

じょう乱の時間発展は，シミュレーションの結果をふまえて，指数関数的に成長する線形段階および自由落下的に成長する非線形段階の両方の段階を考慮し，線形段階は簡単のためじょう乱の振幅が$\delta = \lambda / 2$のときに非線形段階に移行すると仮定すると，次式で表せる.

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 e^{\Gamma_{eff} t} & (\delta < \frac{\lambda}{2}) \\ \delta_1 + \eta g (t - t_1)^2 & (\delta > \frac{\lambda}{2}) \end{cases} \qquad (3-36)$$

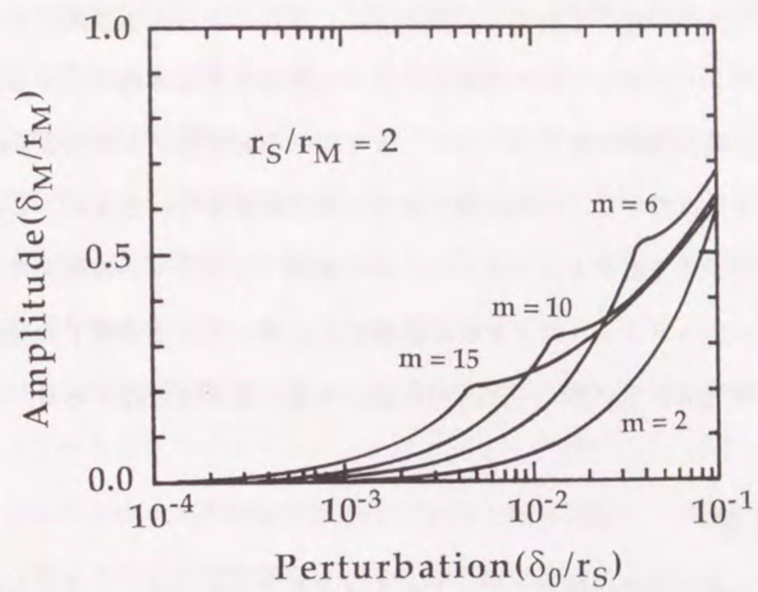
ここで，Γ_{eff}はモード数mの関数として与えられる実効的な成長率であり，ηは自由落下的成長の係数（＝0.2）である. また，δ_0は，じょう乱の初期振幅，λは波長であり，時間と共に変化する半径rの関数として$\lambda = 2\pi r(t) / m$と表せるので時間の関数になる. 更に，δ_1およびt_1は，じょう乱の成長が線形段階から非線形段階へ移行

する時のじょう乱の振幅および時間である．

（３－３５）式および（３－３６）式を数値解析することにより，r_S / r_Mを固定パラメーターとして考えたときの，最大圧縮時（$t = t_M$）におけるじょう乱の振幅δ_Mをスタグネーションフェーズ開始時（$t = t_S$）の初期振幅δ_0およびモード数mの関数として求めることができる．なお，r_Sは，スタグネーションフェーズ開始時の燃料・プッシャー接触面の半径である．

r_S / r_Mを２，８と選んだときのモード数２，６，１０，１５の計算結果を，δ_0およびδ_Mをそれぞれr_Sおよびr_Mで規格化して図３－１４に示す．$r_S / r_M = 2$のときには図より明らかなように，じょう乱の初期振幅を固定して考えると，その初期振幅の値に対してもっとも危険な，言い換えれば最大圧縮時にもっとも大きく成長するモード数が存在することがわかる．例えば，初期振幅を$\delta_0 / r_S = 0.01$と選ぶとモード数m＝１０がもっとも危険なモード数であり，$\delta_0 / r_S = 0.04$とするとm＝６がもっとも危険である．また，別の見方をすれば，燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性によって引き起こされる燃料とプッシャーのミキシングを考えて，もし最大圧縮時のじょう乱の振幅が$\delta_M / r_M < 50\%$の場合，そのミキシングがレーザー核融合にとって許容できると仮定すると，モード数６のじょう乱はスタグネーションフェーズ開始時に３％以下でなければならないが，モード数１０および１５のじょう乱はその条件より少し緩くて６％以下であればよいことになる．もし$\delta_M / r_M < 30\%$が許されるとすると，モード数６および１５は２％以下でよいが，モード数１０はもっと厳しくて１％以下でなければならないことがわかる．

$r_S / r_M = 8$の場合には，スタグネーションフェーズ開始時のじょう乱の振幅が非常に小さいときでさえ，指数関数的に成長する線形段階が飽和しても，その後の自由落下的に成長する非線形段階の時間が十分にある．ところが，非線形段階の自由落下的な成長の度合いはモード数に依存せずに一定であるので，$r_S / r_M = 2$のときのようにモード数が違う計算結果のクロスオーバーは起こらず，初期振幅の値に対してもっとも危険な臨界モード数も存在しない．



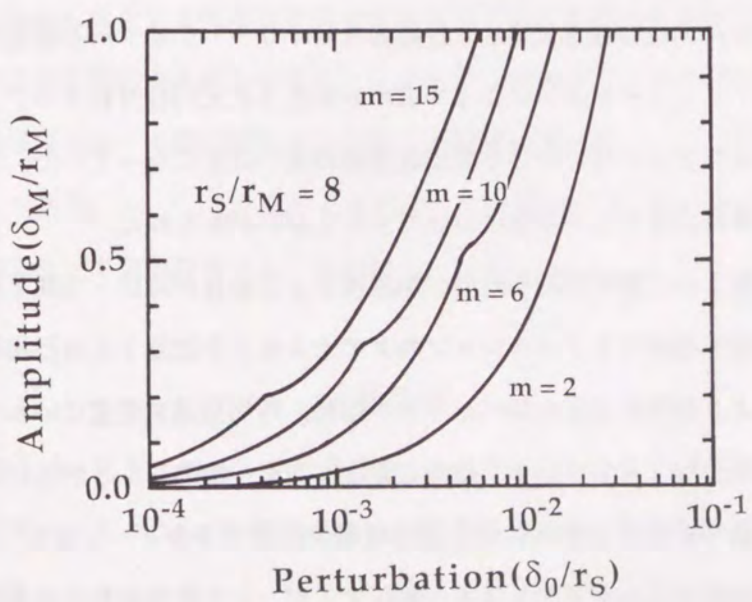


図３－１４　r_S / r_Mをパラメーターとしたときの最大圧縮時におけるじょう乱の振幅．

なお，本節では燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性の最大圧縮時のじょう乱の振幅がどれぐらいのときに，それによって引き起こされる燃料とプッシャーのミキシングがレーザー核融合にとって許容できるか触れなかった．前節で付記したように，最大圧縮密度はレイリー・テイラー不安定性が十分大きく成長しても，ほとんど影響を受けないが，核融合反応がどういう影響を受けるかは，このシミュレーションコードで評価することはできない．この燃料・プッシャー接触面のじょう乱の振幅とスタグネーションフェーズにおける核融合反応率もしくは中性子の発生数の定量的関係に関する研究は皆無に等しく，この問題は今後の重要な課題である．

3.7　結言

本章では，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展をシミュレーションおよび理論解析により調べ，次のような結果が得られた．

1）平面および非圧縮性を仮定した古典的なレイリー・テイラー不安定性の線形成長率は，シミュレーションによって求められた２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける線形成長率の良い近似になっていた．しかし，両者には，特に大きなモード数においてくいちがいがみられた．

2）円柱対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを記述する自己相似解の固有値解析により線形成長率を調べた．その結果，時間発展を考慮にいれた実効的な線形成長率がシミュレーション結果と非常によく一致することが明らかになった．

3）じょう乱の成長は指数関数的な線形段階が飽和すると$\delta = \eta g t^2$で記述される非線形段階の自由落下的な成長へ移行するが，その指数関数的成長の飽和レベルを求めると，比較的大きなモード数（m＞6）においてはモード数に依存せずにおおよそ$\delta \sim 0.35\lambda_0$となるが，小さなモード数（m＜5）においてはその値より若干緩和されることが明らかになった．

4）自由落下的成長の係数ηは，モード数，断熱指数（比熱比）および質量密度比等の物理量にはほとんど依存せず，本質的に一定の値～0.2となり比較的ゆっくりな成長であることが明らかになった．このため，モード数の大きなじょう乱は，波長が短いのですぐに指数関数的成長が飽和し，その後ゆっくりと自由落下的に成長するため，従来考えられていたほどにはレーザー核融合にとって危険ではないことが明らかになった．

5）非線形段階の成長が進むとバブル・スパイク構造が形成されるが，じょう乱の振幅が$\delta \sim \lambda$になるとバブル・スパイク境界において強い速度シアーが発生し，ケルビン・ヘルムホルツ不安定性が誘発されて大きな渦度が生成される．この渦のために，特にスパイクの先端においては流体の巻き込みが起こり，スパイクの形はキノコ形になる．更に，その渦のために外側に噴出する超音速燃料ジェットが生成され，それが燃料バブルを膨らまし，吹き飛ばすことが見いだされた．

6）指数関数的に成長する線形段階および自由落下的に成長する非線形段階の両方を含む簡単な時間発展モデルを考え，スタグネーションフェーズ開始時のじょう乱の初期振幅とモード数の関数として最大圧縮時におけるじょう乱の振幅を評価した．この結果，$r_S / r_M = 2$のときには，その初期振幅の値に対してもっとも危険な臨界モード数が存在することが明らかになった．

参考文献

1）H. Takabe, L. Montierth, and R. L. Morse, Phys. Fluids **26**, 2299 (1983).

2）H. Takabe, K. Mima, L. Montierth, and R. L. Morse, Phys. Fluid **28**, 3676 (1985).

3）M. H. Emery, J. H. Gardner, and J. P. Boris, Appl. Phys. Lett. **41**, 808 (1982).

4）W. M. Manheimer and D. G. Colombant, Phys. Fluids **27**, 983 (1982).

5）M. J. de C. Henshaw, G. J. Pert, and D. L. Youngs, Plasma Phys. Controlled Fusion **29**, 405 (1987).

6）R. E. Kidder, Nucl. Fusion **16**, 3 (1976).

7）D. L. Book and I. B. Bernstein, J. Plasma Phys. **23**, 521 (1980).

8）F. Hattori, H. Takabe, and K. Mima, Phys. Fluid **29**, 1719 (1986).

9）M. H. Emery, J. P. Dahlburg, and J. H. Gardner, NRL Memorandum Report 6061 (1987).

１０）D. L. Youngs, Physica **12D**, 32 (1984).

１１）B. J. Daly, Phys. Fluids **10**, 297 (1967).

１２）H. E. Trease, Lecture Notes in Physics, the Free-Lagrange Method (Springer-Verlag, New York, 1985).

１３）D. M. Fraser, Los Alamos National Laboratory report, LA-UR-88-3707 (1988).

１４）H. E. Trease, Comput. Phys. Commun. **48**, 39 (1988).

１５）W. P. Crowley, Comput. Phys. Commun. **48**, 51 (1988).

１６）M. S. Sahota, Los Alamos National Laboratory report, LA-UR-89-1179 (1989).

１７）I. B. Bernstein and D. L. Book, Astrophys. J. **255**, 633 (1978).

第４章　電子熱伝導による不安定性の抑制

４．１　序言

前章では，流体方程式中のエネルギー保存式において熱伝導の効果を無視した．しかし，レーザー核融合においてはターゲットが加熱されて電離・プラズマ化するため，プラズマ中での熱伝導を評価しなければならない．特に，電子は質量が軽いために，すばやく動くことができるので，この電子による熱伝導の効果は爆縮過程を考えるときには十分考慮しなければならない．

熱伝導による熱流束 **q** は，フーリエの法則を用いて次のように表せる．

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_e = -\kappa_e \nabla T_e \qquad (4-1)$$

ここで，κ_e は電子熱伝導率であり，T_e は電子温度である．イオンの熱伝導に対する寄与はイオンの質量が大きいために，ほとんど無視できる．プラズマ中における電子熱伝導率は，よく知られているように電子温度の５／２乗に比例するという非線形なふるまいをする[1)]．レーザーの吸収によって生成されるプラズマ中の電子は高温になるので電子熱伝導率は大きな値を示し，わずかな温度差でも大きな熱伝導による熱流束が生じる．更に，爆縮過程で存在する衝撃波や接触面等においては非常に短い空間スケールで大きく温度が変化するので温度勾配が急峻となり，ここでも大きな熱流束が生じる．このため，レーザー核融合の爆縮過程では，いたる所において電子熱伝導の効果が物理現象に重要な影響を与える．実際に，１章で述べたデフラグレーション領域は，アブレーション面からのプラズマの噴出とレーザー吸収領域からの電子熱伝導とのバランスによって成り立っており，この非線形な電子熱伝導によりデフラグレーションの構造が決定されている．

さて，爆縮過程の加速フェーズにおいては，アブレーション面でレイリー・テイラー

不安定性が起こることは以前にも述べたが，アブレーション面でじょう乱が誘起される主な原因として，レーザーの照射および吸収の非一様性が考えられる．ところが，レーザーの吸収領域とアブレーション面の間にはデフラグレーション領域が存在するので，吸収面での不均一性はこの領域において横方向の電子熱伝導により緩和される．この効果を，Cloudy Day Effect または Thermal Smoothing と呼んでいるが，この効果による不均一性緩和の度合いはレーザーの波長・強度等のパラメーターによって大きく異なる[2]．また，アブレーション面におけるじょう乱の成長は，電子熱伝導による，いわゆるFire Polishing効果によっても抑制される．不安定性により成長した突起部は，よりレーザーの吸収領域に近づくため，より多くのエネルギーが供給される．このため，その突起部においてはプラズマの噴出（アブレーション）が多く起こるので，突起部そのものの成長は抑えられる．これがFire Polishing効果である．更に，アブレーション面におけるレイリー・テイラー不安定性の線形成長率は，横方向の電子熱伝導により，じょう乱が短波長のときに減少することも研究により明らかになっている[3]．

以上にアブレーション面におけるレイリー・テイラー不安定性の電子熱伝導による抑制について述べたが，燃料・プッシャー接触面においても電子熱伝導による抑制効果が考えられる．

一般に，接触面においては，圧力および流速は一定であるが質量密度には不連続性があり，実際に燃料・プッシャー接触面には大きな質量密度差が存在する．理想気体の状態方程式を考えると，この大きな質量密度差は大きな温度差になり，フーリエの法則により接触面を横切って熱流が存在することになる．一般に，アブレーション面では，流れが存在することによるコンベクションの効果によって，レイリー・テイラー不安定性が安定化されることが知られているが[4,5]，この接触面を横切る熱流も一種の流れであり，燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性を安定化すると考えられる．更に，接触面は電子熱伝導のために，実際には不連続面とはならずに電子の平均自由行程程度の有限の幅を持つと考えられる．このため，質量密度は有限の勾配を持って変化することになる．この質量密度の有限勾配効果によっても，レイリー・テイラー不安定性の線形成長は抑制されることが知られている[6,7]．

本章では，２次元流体方程式中のエネルギー保存式に電子熱伝導項を付加することにより，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性に対する電子熱伝導による抑制効果をシミュレーションにより調べる．シミュレーションに用いた電子熱伝導の数値モデルとそのシミュレーション結果については４.２節で述べ，４.３節では，特に質量密度の有限勾配効果による不安定性の抑制に着目し，シミュレーション結果をその効果の理論的な解析結果と比較・議論する．

４.２　シミュレーションモデル

２次元流体方程式（２－４３）式において，エネルギー保存の式に電子熱伝導項を付加すると次式のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}e+\frac{\partial}{\partial x}[(e+p)u+q_x]+\frac{\partial}{\partial y}[(e+p)v+q_y]=0 \qquad (4-2)$$

ここで，$\mathbf{q}=(q_x, q_y)$ は，電子熱伝導による熱流束である．

完全電離プラズマ中での電子熱伝導については，拡散近似を用いてFokker-Planck 方程式から導く L. Spitzer-R. Härmの理論がよく知られている[1]．この導出には，温度変化の空間スケールが電子の平均自由行程より十分長いと仮定して，電子の分布関数を線形展開している．しかし，レーザー核融合で生じるプラズマ中では，上記の仮定が成り立たず L. Spitzer-R. Härmの理論は破綻してしまう．実際に，高強度レーザーの照射実験の結果は L. Spitzer-R. Härmの理論から予測される熱流束の 1/10～1/30 程度になることが確かめられている．このため，一般的には，制限熱流束と呼ばれる物理量を導入し，流体コード内での電子による熱流束はその制限熱流束を越えないようにする．具体的には，流体コード内の熱流束は，拡散近似による L. Spitzer-R. Härmの熱流束と制限

熱流束の調和平均を用いて実効的な熱流束として与える．制限熱流束は，自由熱流束にフラックスリミッターと呼ばれる係数を乗じたもので定義され，一般には，実験の結果と流体コードによるシミュレーションの結果がよく一致するように，このフラックスリミッターの値を調整する．

しかし，このような処置はとても物理的なものとは言えず，最近になって，電子に対するFokker-Planck 方程式を拡散近似を用いないでより正確に解き，そのような熱流束の制限を自動的に含むよう電子のエネルギー輸送問題を取り扱う研究が精力的に行なわれている[8-12]．

さて，本章における研究の主眼は，燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性に対する電子熱伝導による抑制効果であり，爆縮過程における電子のエネルギー輸送問題を正確に取り扱うことではない．従って，ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄにおいては，上記で述べた便宜的な方法を用いて電子による熱流束を取り扱う．即ち，電子熱伝導による実効的な熱流束 q を次式で表す．

$$q = \frac{q_L \cdot q_e}{q_L + |q_e|} \qquad (4-3)$$

ここで，q_Lおよび q_eは，制限熱流束と拡散近似による L. Spitzer-R. Härmの熱流束であり，それぞれ，

$$\begin{aligned} q_L &= 0.6 \cdot q_{FS} \\ &= 0.6 \cdot n_e k_B T_e v_{te} \end{aligned} \qquad (4-4)$$

および，

$$q_e = -\kappa_e \nabla T_e \qquad (4-5)$$

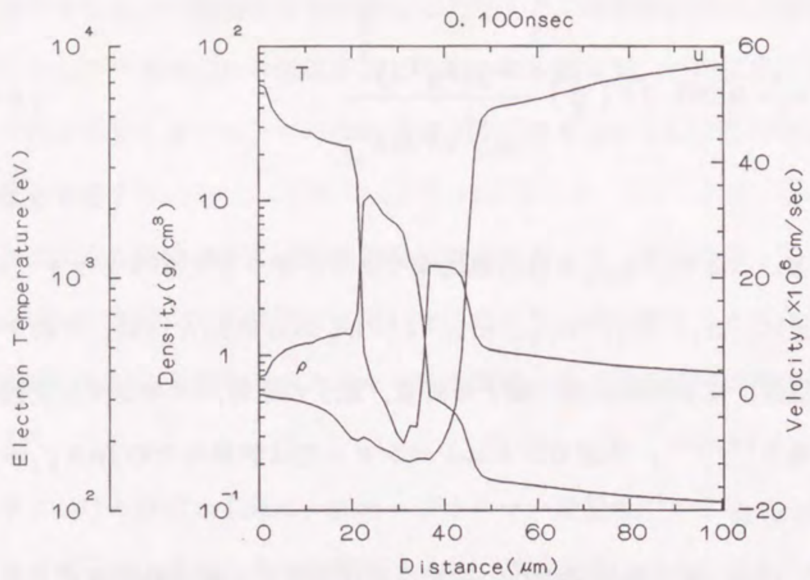
$$\kappa_e = 0.095 \cdot 20 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{k_B (k_B T_e)^{\frac{5}{2}}}{m_e^{\frac{1}{2}} e^4 \ln\Lambda_{ei}} \qquad (4-6)$$

と定義される．ここで，q_{FS}は自由熱流束であり，フラックスリミッターは0.6と選んでいる．更に，n_e，T_e，v_{te}，m_e，e，k_Bおよび$\ln\Lambda_{ei}$は，それぞれ電子の数密度，電子温度，電子の熱速度，電子の質量，電子の電荷，ボルツマン定数およびクーロン対数であり[13, 14]，本章のシミュレーションでは簡単のため$\ln\Lambda_{ei}=10$と一定の値を用いている．

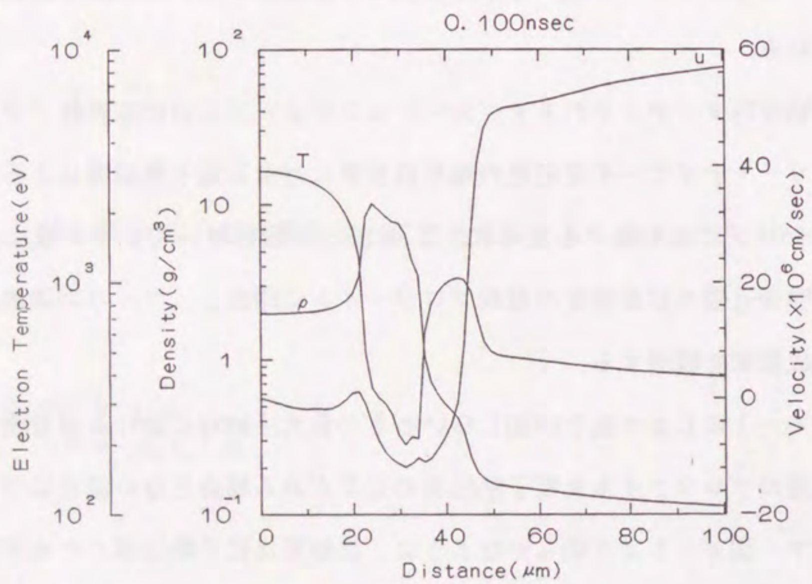
（４－２）式は，電子熱伝導のない通常の流体方程式と電子熱伝導による拡散方程式のみの二つに分離し，それぞれを別々に時間発展させる分ステップ法により数値的に解いている．また，各々の方程式を差分化するスキームに関しては，通常の流体方程式は２章で述べたＴＶＤスキームを，拡散方程式は中心差分を用いた単純な陽的解法スキームを用いている．

２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率に対する電子熱伝導による抑制効果をシミュレーションにより調べるために，３.３節と同様に単一モードの微小な振幅のじょう乱を接触面近傍の質量密度の初期プロファイルに印加し，フーリエ係数の時間発展により線形成長率を観測する．

まず，図４－１にじょう乱を印加しないときの最大圧縮時における質量密度，電子温度および流速のプロファイルを電子熱伝導の効果がある場合とない場合について両者を比較して示す．図４－１より明らかなように，接触面は電子熱伝導のため不連続とはならずに滑らかなプロファイルを持っていることがわかる．この有限な質量密度の勾配のために，レイリー・テイラー不安定性の線形成長率が減少することを期待できる．なお，電子熱伝導がない場合の電子温度（質量密度）のプロファイルは，ターゲット中心付近の極く狭い領域（＜３μm）で高く（低く）なっているが，これは非物理的な数値的



（a）電子熱伝導がない場合



（b）電子熱伝導がある場合

図４－１　最大圧縮時における質量密度，電子温度および流速のプロファイル．

なエラーであり，excess Wall Heating Q error として知られている[15)]．

次に，シミュレーションにより得られた線形成長率をモード数の関数として，最大圧縮時のターゲット中心における電子温度をパラメーターに図４－２に示す．なお，図中のラベル 'noth'は，電子熱伝導がない場合を示す．電子温度が３ｋｅＶを越えると，特に大きなモード数（短波長）のモードにおいて，電子熱伝導によるレイリー・テイラー不安定性の著しい抑制がみられる．

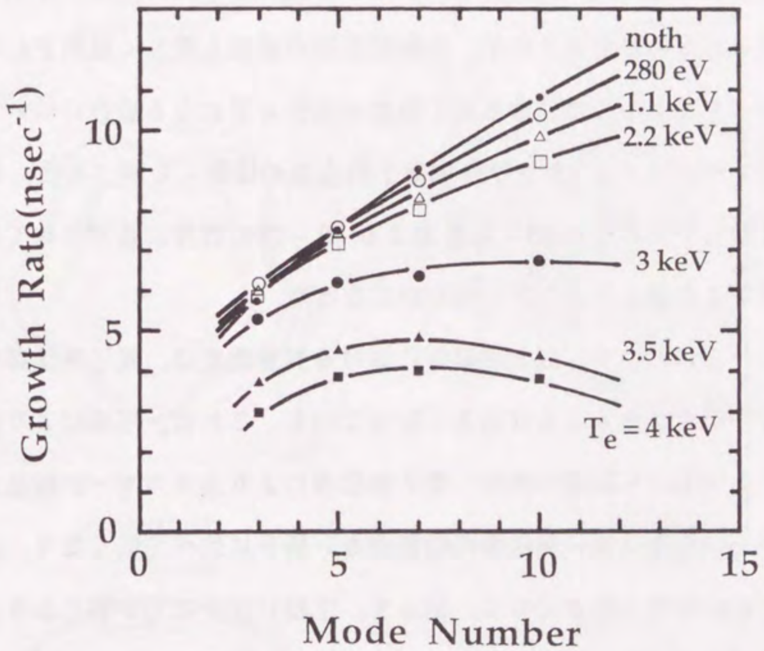


図４－２　電子熱伝導がある場合のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率．

電子熱伝導はレイリー・テイラー不安定性の線形段階だけではなく非線形段階の成長にも大きな影響を与える．じょう乱の振幅としてスタグネーションフェーズの間に指数関数的な線形成長が飽和し非線形段階に移行するように，十分大きな値を選んでシミュレーションを行なった．最大圧縮時のターゲット中心における電子温度が３ｋｅＶにな

る場合について，モード数５のじょう乱を印加したときの質量密度および渦度の等値線を図４－３に示す．図３－１１と比較して明らかなように，電子熱伝導により燃料・プッシャー接触面が有限の幅を持つので，レイリー・テイラー不安定性の非線形段階の特徴であるバブル・スパイク構造は，その微細な構造がぼかされている．そして，強い速度シアーが発生しないために大きな渦度も生成されず，スパイクの先端において流体の巻き込みが起こらない．このため，スパイクは丸みを帯び，その形状は電子熱伝導がない場合と比較して大きく異なっており，スパイクの成長自体も緩和されている．ターゲット中心における電子温度が３ｋｅＶよりもっと高い場合には，もはや明確なバブル・スパイク構造そのものが生成されず，非線形段階の成長も著しく緩和される．また，最大圧縮時のターゲット中心における電子温度が３ｋｅＶになる場合について，指数関数的成長の飽和レベルδ/λ_0および自由落下的成長の係数ηを調べると，電子熱伝導がない場合と比較してそれぞれ63～95%および52～75%程度に緩和されており，特に自由落下的成長がより遅くなることが明らかになった．

なお，図４－１において，最大圧縮時における質量密度は，電子熱伝導の効果がある場合の方がない場合より６５%程大きくなっている．これは，圧縮により高温になっているターゲット中心から低温の外側へ電子熱伝導によりエネルギーが輸送されるので，ターゲット中心の温度は電子熱伝導の効果がない場合に比べて低くなり，それに伴ってターゲット中心の圧力も小さくなる．従って，圧縮に抗する力が弱くなり，ターゲット中心は同じ仕事量に対して電子熱伝導の効果がない場合より大きな質量密度まで圧縮されるためと考えられる．

また，スタグネーションフェーズに注目しているため，シミュレーションにおける電子熱伝導の効果はスタグネーションフェーズ開始時から初めて有効として，電子熱伝導の効果がないときと比較しているが，実際の爆縮過程ではスタグネーションフェーズ以前にも電子熱伝導の効果は存在する．しかし，プラズマ中での電子熱伝導率は電子温度の５／２乗に比例することを考えると，もっとも燃料が高温になるスタグネーションフェーズでの電子熱伝導の動向が支配的であると考えられる．

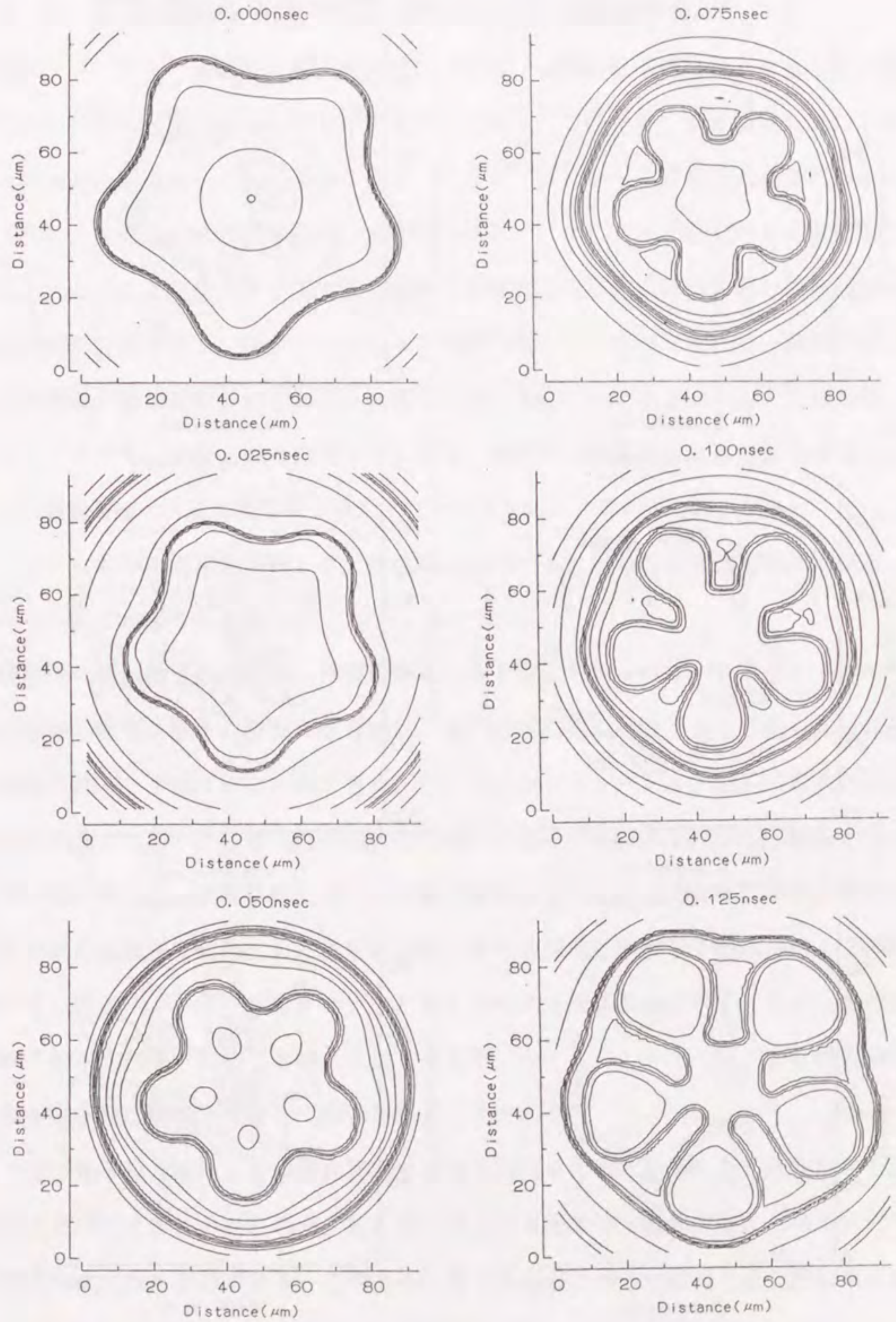


図４－３（ａ）電子熱伝導がある場合の質量密度の等値線（ｍ＝５）．

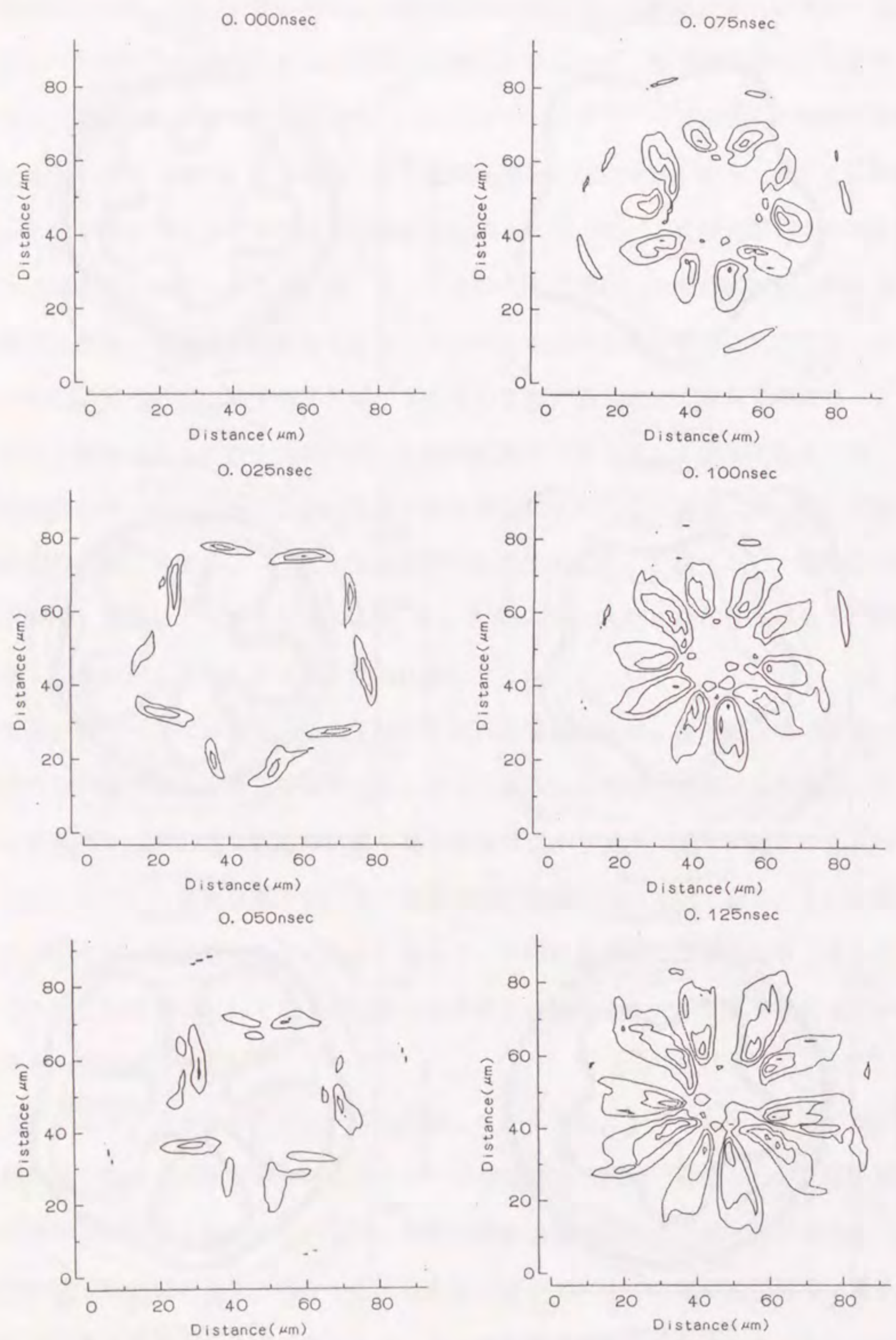


図４－３（ｂ）電子熱伝導がある場合の渦度の等値線（ｍ＝５）．

４．３　質量密度の有限勾配効果による不安定性の抑制

燃料・プッシャー接触面は電子熱伝導のために，実際には不連続面とはならずに電子の平均自由行程程度の有限の幅を持つと考えられる．このため，質量密度のプロファイルは有限の勾配を持ち，この効果によりレイリー・テイラー不安定性の成長が抑制される．また，熱流束に起因する流体の流れもレイリー・テイラー不安定性を安定化すると考えられる．ところが，プラズマ中における非線形な電子熱伝導率を用いて熱伝導波の伝播速度を評価すると，シミュレーションで取り扱っているパラメーター領域では，その伝播速度が流体運動の目安となる音速よりずっと小さいことがわかる．このため，レイリー・テイラー不安定性の抑制に対しては，熱流束に起因する流れの効果はほとんどなく，質量密度の有限勾配効果が支配的だと考えられる．このことは，図４－１の（ａ）と（ｂ）における流速を比較して，熱流束に起因すると思われる流体の流れが顕著にみられないことからもわかる．

接触面の幅は電子の平均自由行程程度になると考えられるので，レイリー・テイラー不安定性の線形成長率の緩和の度合いは，電子の平均自由行程とじょう乱の波長の関係で決定されると予測することができる．そこで，シミュレーション結果の最大圧縮時におけるパラメーターより電子の平均自由行程とじょう乱の波長を評価し，横軸を電子の平均自由行程L_{mfp}で規格化したじょう乱の波長λ_Mにとり，縦軸を電子熱伝導がないときの線形成長率で規格化した線形成長率，即ち線形成長率の電子熱伝導による緩和率にとり，図４－２のデータをプロットし直したものを図４－４に示す．じょう乱の波長が電子の平均自由行程の１０倍より短くなると，レイリー・テイラー不安定性の線形成長率が電子熱伝導により著しく緩和されることがわかる．

さて，電子熱伝導による線形成長率の緩和を調べるために印加したじょう乱の振幅は波長に比べて非常に小さいので，電子熱伝導による効果は方位角方向にはほとんどなくて動径方向にのみ期待できる．このため，電子熱伝導による効果を１次元的に取り扱うことができる．また，燃料・プッシャー接触面を横切っての圧力差はほとんどないため，

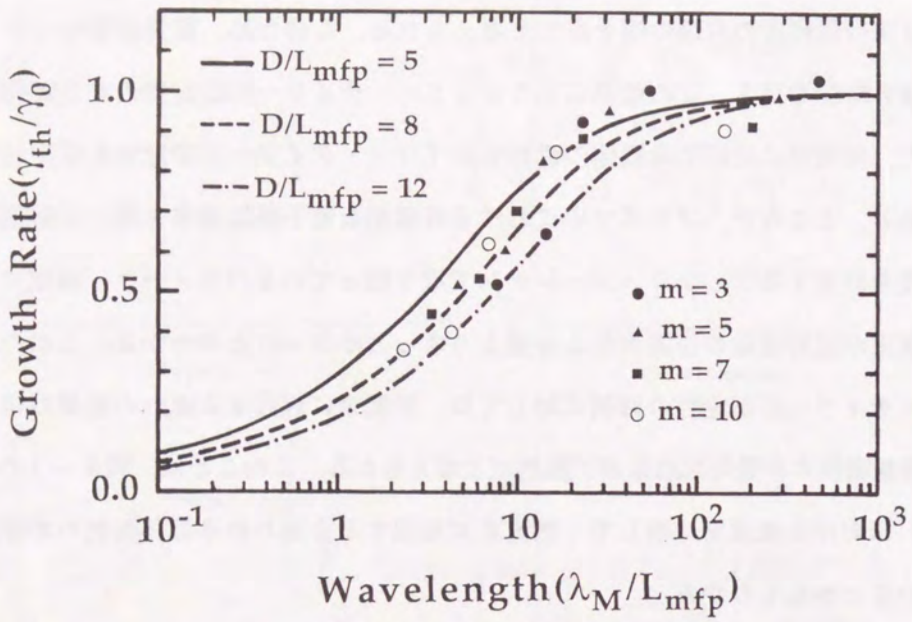


図４－４　線形成長率の電子熱伝導による緩和率．図中の曲線は，指数関数的に変化する質量密度のプロファイルにおける線形成長率の有限勾配効果による緩和率を理論的に求めたもの．

この効果は，そのまま接触面近傍の質量密度プロファイルを滑らかにすることにつながると考えられる．そこで，図４－５に示されるような，両側に質量密度の異なる均一な領域があり，その中間領域は $\rho=\rho_f\exp(\beta x)$ $(0\leqq x\leqq D)$ で表されるような指数関数的に変化する１次元的空間プロファイルを考える．圧縮性による効果は燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性にあまり大きな影響を及ぼさないので[16]，非圧縮を仮定すると，この質量密度プロファイルにおけるレイリー・テイラー不安定性の線形成長率は解析的に次のように求めることができる[7]．

$$\Gamma^2=g\,k\left[\frac{2ed}{\alpha^2+e^2+d^2}\right] \qquad (4-7)$$

ここで，$e=kD$，$d=\beta D/2$，kはじょう乱の波数であり，αは，超越方程式

$$\tan(\alpha)=\frac{2\alpha e}{\alpha^2+d^2-e^2} \qquad (4-8)$$

の解である．

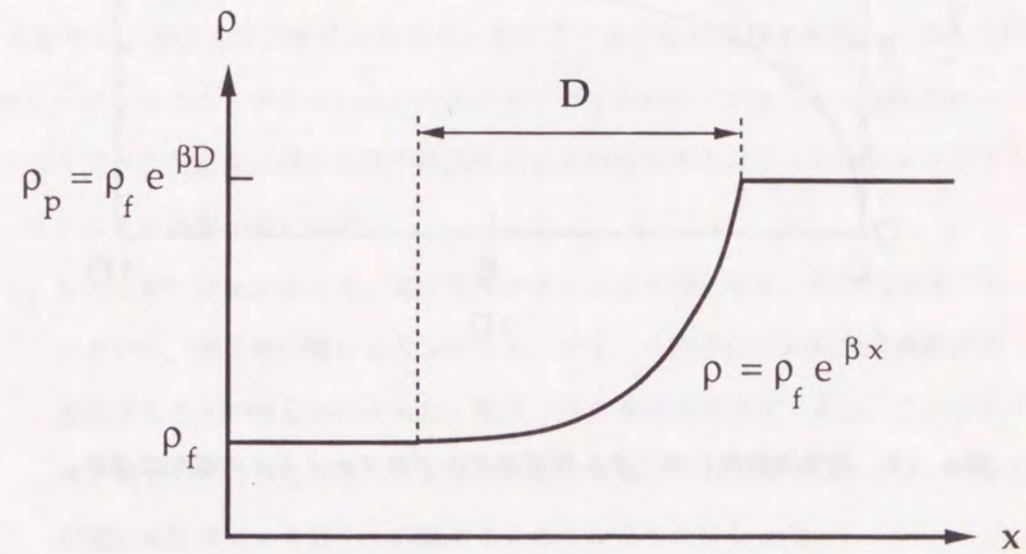


図４－５　指数関数的に変化する質量密度のプロファイル．

（４－８）式は超越方程式のため複数の解が存在するので，（４－７）式から得られる成長率も複数個存在することになる．そのうちもっとも大きな成長率を図４－６に示

す．図４－６中のラベル'Classical'は，（３－３）式で表される古典的レイリー・テイラー不安定性の線形成長率を示す．なお計算には，質量密度比ρ_p / ρ_fを１０と選んでいる．

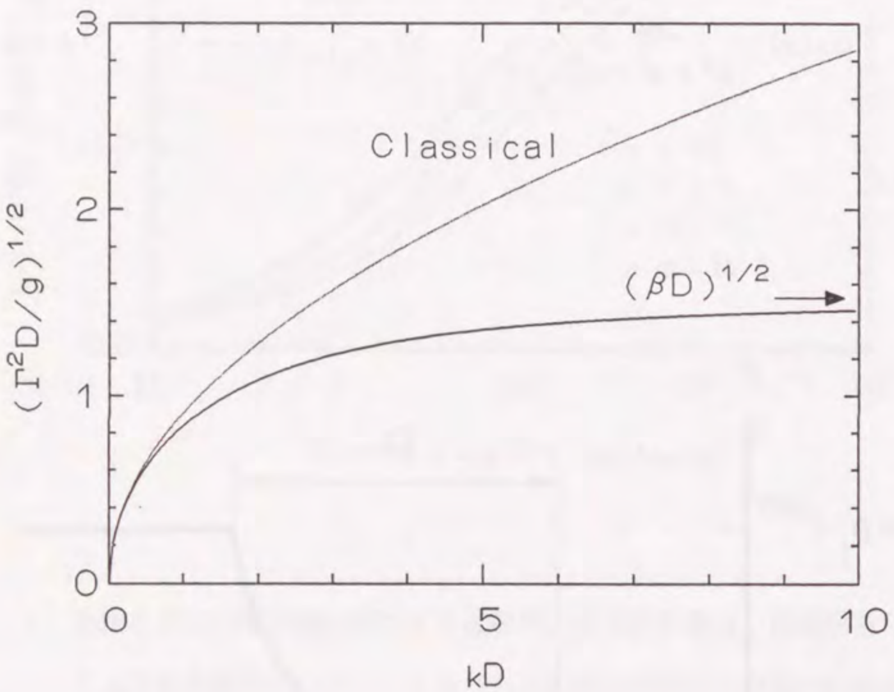


図４－６　指数関数的に変化する質量密度のプロファイルでの線形成長率．

図４－６から明らかにわかるように，波数が大きくなればなるほど，言い換えればじょう乱の波長が中間領域の幅Ｄに比べて短くなればなるほど，指数関数的なプロファイルの下での線形成長率は古典的な線形成長率より大きく緩和していることがわかる．更に，ｋＤ→∞の極限において，古典的な線形成長率は$\Gamma \to \infty$と限りなく大きくなるにもかかわらず，指数関数的なプロファイルの下での線形成長率は$\Gamma \to (\beta g)^{1/2}$と一定の値になることがわかる．

図４－４と同様にシミュレーション結果の最大圧縮時における物理量より質量密度比を評価し，中間領域の幅を電子の平均自由行程で規格化したものをパラメーターに選んで，（４－７）式および（４－８）式を数値解析した結果得られるもっとも大きな成長率を古典的な成長率で規格化して図４－４の中に重ねて示す．中間領域の幅が電子の平均自由行程の５倍から１０倍程度になっていると仮定すると，両者はよく一致していると言える．従って，電子熱伝導に伴い燃料・プッシャー接触面近傍の質量密度プロファイルが滑らかになることが，レイリー・テイラー不安定性の線形成長の抑制に重要な役割を果たしていると結論付けることができる．

４．４　結言

本章では，流体方程式中のエネルギー保存式に電子熱伝導項を付加し，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性に対する電子熱伝導による抑制効果をシミュレーションにより調べ，次のような結果が得られた．

１）シミュレーションにより，電子温度が３ｋｅＶを越えると，特に短波長のモードにおいて，電子熱伝導によりレイリー・テイラー不安定性の線形成長率が著しく緩和することが明らかになった．更に，これを別の見方をすると，じょう乱の波長が電子の平均自由行程の１０倍より短くなると，レイリー・テイラー不安定性が電子熱伝導により著しく抑制されることが明らかになった．

２）電子熱伝導により燃料・プッシャー接触面が有限の幅を持つので，レイリー・テイラー不安定性の非線形段階の特徴であるバブル・スパイク構造がぼかされ，更に電子温度が高くなると，もはや明確なバブル・スパイク構造そのものが生成されず，非線形段階の成長も著しく緩和されることが明らかになった．

３）最大圧縮時のターゲット中心における電子温度が３ｋｅＶになる場合に，指数関数的成長の飽和レベルδ / λ_0および自由落下的成長の係数ηを調べると，電子

熱伝導がない場合と比較してそれぞれ63～95% および52～75% 程度に緩和されることが明らかになった.

4）質量密度が指数関数的に変化する空間プロファイルを考え，このプロファイルにおけるレイリー・テイラー不安定性の線形成長率を解析的に求めた．その結果，有限勾配効果によるレイリー・テイラー不安定性の線形成長率の緩和とシミュレーション結果とはよく一致し，電子熱伝導に伴い燃料・プッシャー接触面近傍の質量密度プロファイルが滑らかになることが，レイリー・テイラー不安定性の線形成長の抑制に重要な役割を果たしていることが明らかになった.

参考文献

1）L. Spitzer and R. Härm, Phys. Rev. Lett. **89**, 977 (1953).

2）J. Gardner and S. Bodner, Phys. Rev. Lett. **47**, 1137 (1981).

3）H. Takabe, L. Montierth, and R. L. Morse, Phys. Fluids **26**, 2299 (1983).

4）S. Bodner, Phys. Rev. Lett. **33**, 761 (1974).

5）Yu. F. Afanas'ev, N. G. Basov, E. G. Gamalii, O. N. Krokhin, and V. B. Rozanov, JETP Lett. **23**, 566 (1976).

6）J. D. Lindl, R. O. Bangerter, J. H. Nuckolls, W. C. Mead, and J. J. Thomson University of California Report UCRL-78470 (1976).

7）K. O. Mikaelian, Phys. Rev. Lett. **48**, 1365 (1982).

8）A. R. Bell, R. G. Evans, and D. J. Nicholas, Phys. Rev. Lett. **46**, 243 (1981).

9）J. P. Matte and J. Virmont, Phys. Rev. Lett. **49**, 1936 (1982).

10）D. Shvarts, J. Delettrez, R. L. McCrory, and C. P. Verdon, Phys. Rev. Lett. **47**, 247 (1981).

11）J. Albritton, Phys. Rev. Lett. **50**, 2078 (1983).

12）J. F. Luciani, P. Mora, and J. Virmont, Phys. Rev. Lett. **51**, 1664 (1983).

13）L. Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases (Wiley, New York, 1962).

14）R. J. Bickerton, Nucl. Fusion **13**, 457 (1973).

15）W. F. Noh, Lawrence Livermore National Laboratory Report, UCRL-53669 (1985).

16）F. Hattori, H. Takabe, and K. Mima, Phys. Fluids **29**, 1719 (1986).

第５章　３次元球対称ターゲット

５.１　序言

１次元流体コードのシミュレーションにより，核融合反応はスタグネーションフェーズの間に支配的に起こることが明らかになったが，このスタグネーションフェーズにおいては，燃料・プッシャー接触面で起こるレイリー・テイラー不安定性を本質的に避けることはできない．このため，スタグネーションフェーズでのレイリー・テイラー不安定性により引き起こされる燃料とプッシャーのミキシングが，中性子の全発生数を１次元流体コードのシミュレーションから予測される値より大幅に少なくすることは以前にも述べた[1, 2]．従って，スタグネーションフェーズでのレイリー・テイラー不安定性の成長を線形段階および非線形段階について定量的に評価することは極めて重要な課題である．この観点から，３章では，２次元円柱対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展をシミュレーションおよび理論解析により調べた．

しかし，この場合は円柱対称を仮定して自由度を３次元から２次元に減らしているため，当然３次元固有の現象をシミュレーションすることはできない．２次元では，渦度はシミュレーションを行なっている平面に垂直な成分しか持たないために，スカラー的にしか取り扱うことができない．このため，渦度と流体の流れの相互作用による３次元的な渦度のダイナミクスおよびその渦度のダイナミクスによって誘起される新たな流体力学的不安定性[3－5]を調べることはできない．また，２次元円柱対称のため物理量はｚ軸方向には一様であり，このとき誘起されるレイリー・テイラー不安定性は３次元的に考えるとフルート（縦溝）的な特殊なモードのみが許されることになる．更に，爆縮による圧縮率の違いを考えると，半径が１／２になった場合には，２次元では４倍の圧縮率が得られるが，３次元では８倍と２次元に比べて２倍の圧縮率が得られ，両者には大きな違いがあり，爆縮過程そのものにも２次元と３次元で大きな差が考えられる．

このため，１次元・２次元での爆縮過程の定性的な研究が進むのに従って，より詳細な３次元的効果を考慮した爆縮の一様性・対称性を３次元流体コードにより直接研究することが重要になってきている．

ところが，３次元流体コードによるシミュレーションを実行するには多大な演算回数と非常に大きな記憶領域が必要なため実際には実現が困難であり，まともに３次元を取り扱ったシミュレーションによる研究は皆無に等しい[6]．本研究で用いている多次元流体コードＩＭＰＡＣＴの場合でも，２次元での 100×100 の計算グリッドをそのまま３次元に拡張して同じ空間スケールでシミュレーションしようとすると 100×100×100 の計算グリッドが必要になり，ある物理量を記憶するためには，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄでは ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄに比べて100 倍もの記憶領域が必要なことになる．また，演算回数の増大を評価するため（２－４６）式と（２－６０）式を比較して，時間を１ステップ進めるために必要な差分オペレーターが３から７へと２倍以上になっていることがわかり，更に，一つの差分オペレーターについては最低でも計算グリッド数の増加した分だけ演算が増加するので，結局，ＩＭＰＡＣＴ－３ＤはＩＭＰＡＣＴ－２Ｄに比べて少なくとも230 倍以上もの演算が必要なことになる．

このような大規模なシミュレーションは，ピーク性能が１GFLOPS 以上，実記憶領域が 100Ｍバイト以上の，いわゆる第２世代のスーパーコンピュータが出現して初めて可能になった．

本章では，３章で述べた２次元円柱対称ターゲットの拡張を考えて，３次元球対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形および非線形時間発展をシミュレーションにより調べる．シミュレーションの結果は，３章で用いたＩＭＰＡＣＴ－２Ｄを３次元に拡張した流体コードＩＭＰＡＣＴ－３Ｄにより求められた．ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄは，２章で説明したように時間と空間の両方に２次の精度を持ち，非物理的な振動を伴うことなく不連続面を高解像度で捕らえることのできるＴＶＤスキームを用いている．５.２節では，まず流体コードのベンチマークテストとしてよく知られているNoh のショック問題を取り上げ[7]，

この問題にＩＭＰＡＣＴ－３Ｄを適用した結果を述べ，次に３次元球対称ターゲットのシミュレーションモデルについて詳細を述べる．５.３節では，微小なじょう乱として球面調和関数を選んだときのレイリー・テイラー不安定性の線形成長率をシミュレーションにより求め，更に，この結果を球対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを考慮した自己相似解を用いた理論解析[8-10]による結果と比較・議論する．

線形的な成長が飽和すると，レイリー・テイラー不安定性は指数関数的に成長する線形段階から自由落下的に成長する非線形段階へ移行し，いわゆるバブル・スパイク構造を形成する[11-14]．じょう乱の振幅が十分大きくなると強い速度シアーが発生し，特にバブルの根元・付け根において渦度のリングが形成される．この渦度のリングのために，燃料は２次元の場合に比べてより多くバブル内へ注入され，バブルはより大きく成長する[6]．５.４節では，非線形時間発展の特質として指数関数的な成長が飽和するときのじょう乱の振幅をシミュレーションにより求め，更にバブル・スパイク構造により誘起される渦度リングのダイナミクスについても議論する．

５.２　シミュレーションモデル

レイリー・テイラー不安定性の非線形段階で形成されるバブル・スパイク構造は渦度のリングをバブル基部に生成し，更に，そのリングがバブル内に流体を注入するのでバブルは大きく成長し，２次元の場合と同様に，燃料・プッシャー接触面の大変形を引き起こす．このため，古典的ラグランジュ法を用いて，この非線形現象を正確にシミュレーションすることはできないので，ＩＭＰＡＣＴ－３ＤでもＩＭＰＡＣＴ－２Ｄと同様に固定グリッドを用いるオイラー法を使っている．

また，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄでは球対称性を保たないで原点に収束する爆縮過程を取り扱うため，これもＩＭＰＡＣＴ－２Ｄと同様に，カーテシアン座標系（直交座標系）を用いて立方格子状の計算グリッドを導入する．他の座標系では原点に特異点を持つため，

そのような非対称の現象を正確に取り扱うことができない．

一般に，３次元流体コードで衝撃波をシミュレーションする場合には，次に示すような３種類の数値的な誤差が発生することが考えられる[7]．

（Ｉ）　衝撃波が壁面により生成される時の加熱による誤差

（Ⅱ）　衝撃波が非一様計算グリッドを伝播する時に発生する誤差

（Ⅲ）　衝撃波が球面波として伝播する時に発生する誤差

この中で（Ｉ）は，球面衝撃波が原点において収束・反射するときには避けることのできないものであり，スキームによっては許容できないほどの大きな誤差を発生させることがわかっている．この数値的な加熱により壁面（この場合，球面衝撃波が収束する原点が壁面に相当する）近傍の流体は内部エネルギーが正しい値より大きくなるが，圧力はほとんど一定の正しい値を示す．このため，理想気体の状態方程式から明らかにわかるように，この加熱は結局，壁面近傍の質量密度の減少につながる．また，（Ⅲ）の誤差も本章で取り扱う球対称ターゲットの爆縮過程では，本質的に避けることのできない誤差である．従って，まず最初に，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄを流体コードのベンチマークテストとしてよく知られているNohのショック問題[7]に適用し，どの程度の数値誤差が発生しているかを確認する．なお，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄでは一様な立方格子状の計算グリッドを用いるため，（Ⅱ）の誤差は考慮しなくてよい．

ＩＭＰＡＣＴ－３ＤをNohのショック問題に適用した結果として，時刻ｔ＝０.６（シミュレーションでは３２５タイムステップ）のときの質量密度のプロファイルを図５－１に，このときのシミュレーションパラメーターおよび初期値を表５－１に示す．ただし，図５－１における実線はこのショック問題に対する解析解を，シンボルはシミュレーション結果を表す．Nohのショック問題の圧力の初期値は本来ならゼロであるが，アルゴリズム上ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄでは，圧力をゼロにして計算すると浮動小数点演算エラーが起こり，シミュレーションを継続することができなくなる．このため，圧

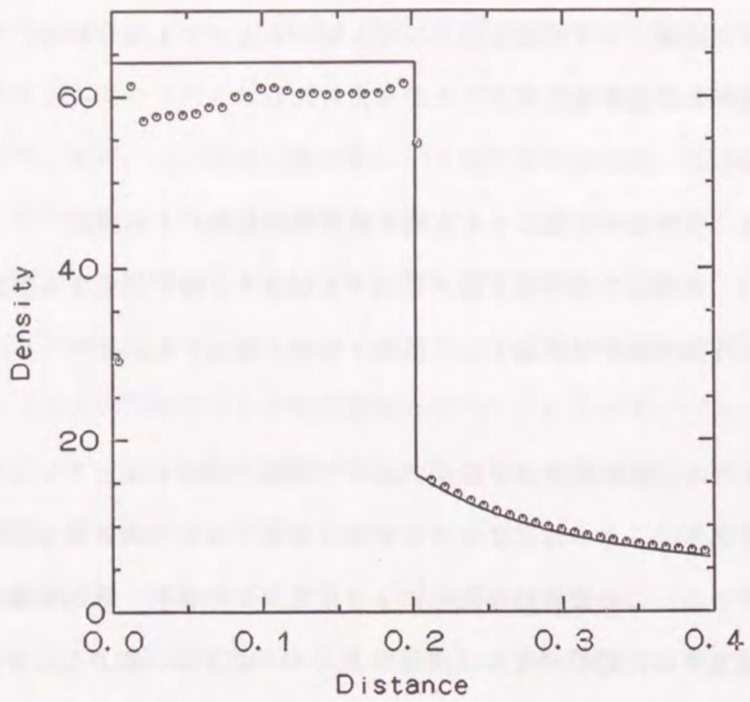


図５－１　Nohのショック問題の時刻ｔ＝０.６における質量密度のプロファイル.

表５－１　Nohのショック問題のシミュレーションパラメーターおよび初期値.

計算グリッド	１０１×１０１×１０１
境界条件	１／８球 低い側：完全反射，高い側：開放自由端
メッシュサイズ	０.００５
質量密度	１.０
圧力	０.００１
中心へ向かう流速	１.０

力の値として無限小の数値を用いている.

図５－１から，ＩＭＰＡＣＴ－３Ｄは非物理的な振動を伴わないで衝撃波を２メッシュの高解像度で捕らえていることがわかる．また，質量密度は，原点では壁面による加熱のため解析的な解のおおよそ半分になっており，衝撃波の背面では球面波として伝播する時に発生する誤差のため若干解析的な解より小さくなっているが，おおむね良好な結果が得られている.

次に，３次元球対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーションをするためのモデルについて詳細を述べる.

スタグネーションフェーズ開始時の各物理量のプロファイルは，３章で述べた２次元の場合と同様な手順で作成する．即ち，アブレーターとプッシャーに対応する流体にはターゲットの中心へ向かう一定の速度を持たせ，燃料に対応する流体は静止させた状態に置く．すると，強い衝撃波がプッシャーと燃料の境界で発生しターゲットの中心へ向かって伝播する．その衝撃波が中心に到達・収束すると，反射衝撃波が発生し外に向かって伝播するが，ついには燃料・プッシャー接触面と衝突する．このときから燃料・プッシャー接触面は減速を始め，スタグネーションフェーズが始まる．このスタグネーションフェーズ開始時の各物理量のプロファイルは，半径の関数として計算機上のファイルに保存し，初期プロファイルとして用いられる.

質量密度の初期プロファイルに次式で示されるような球面調和関数の単一モードのじょう乱を燃料・プッシャー接触面の近傍に印加して，シミュレーションによりレイリー・テイラー不安定性の成長を調べる.

$$\rho_1(r,\theta,\phi,n,m) = \rho_0\left[r + \delta r \cdot Y_n^m(\theta,\phi)\right],$$

$$\delta r = \begin{cases} \delta_0\left[\dfrac{\cos\left(2\pi(r-r_c)/w\right)+1}{2}\right] & \left(|r-r_c| < \dfrac{w}{2}\right) \\ 0 & \left(|r-r_c| \geq \dfrac{w}{2}\right) \end{cases} \qquad (5-1)$$

ここで，$\rho_0(r)$，δ_0，wおよびr$_c$は，それぞれ計算機上のファイルに保存されている質量密度の初期プロファイル，じょう乱の初期振幅，じょう乱の空間的な幅および燃料・プッシャー接触面の半径であり，$Y^m{}_n(z)$は，球面調和関数である．

更に，球面調和関数は次のように定義される．

$$Y_n^m(\theta,\phi)=\left[\frac{(2n+1)}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2}\cdot P_n^m(\cos\theta)\,e^{im\phi}\qquad(0\le m\le n)\tag{5-2}$$

ここで，$P^m{}_n(z)$は，ルジャンドルの陪関数であり，nとmは，それぞれルジャンドルの陪関数の次数と陪数である．

開放自由端の境界条件は，２次元の場合と同様に球対称を仮定して境界内部の各物理量を外挿することにより計算グリッド境界上の物理量をそれぞれ求めている．

表５－２に，アブレーター，プッシャー，燃料それぞれの流体に設定した質量密度，流速および圧力の初期値とシミュレーションパラメーターを示す．

５.３　レイリー・テイラー不安定性の線形成長率

３次元球対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率を調べるために，２次元の場合と同様に微小な振幅のじょう乱を接触面の近傍に印加する．

即ち，（５－１）式において$\delta_0/r_c=0.01$および$w/r_c=0.5$とする．

このように，じょう乱の振幅は極めて微小であり，また，燃料・プッシャー接触面の変形は３次元的であり，非常に複雑な幾何形状になるので，接触面変形の度合いを直接観測する有効な方法は存在しない．このため，シミュレーションにおける線形成長率は，２次元の方法を３次元に拡張して，ターゲットの微小体積に含まれる質量を球面調和関数のモードに展開することにより観測する．具体的には，極座標（球座標）における緯度方向（θ）について全極（π）を128個に，経度方向（ϕ）について全周（2π）を

表５－２　初期値とシミュレーションパラメーター．

（ａ）　アブレーター，プッシャー，燃料に対する初期条件

	アブレーター	プッシャー	燃料
半径（μm）	＞１０８	７０～１０８	＜７０
質量密度（g／cm^3）	０.５	５.０	０.５
速度（×１０^{6}cm／s）	１５	１５	０
圧力（Mbar）	１０	１０	１０

（ｂ）シミュレーションパラメーター

	スタグネーション以前	スタグネーションフェーズ
計算グリッド	８１×８１×８１	８１×８１×８１
境界条件	１／８球 低い側：完全反射 高い側：開放自由端	全球 すべて：開放自由端
メッシュサイズ	１.５μm	１.０μm

256個に等分割して，その各々のθおよびϕ方向についてターゲットの中心から燃料・プッシャー接触面を越えてアブレーター領域まで質量密度を動径方向に積分することにより微小な四角錐の中に含まれる質量を求める．

この結果得られた質量はθおよびϕの関数であり，次式で示すように，この関数を球面調和関数にモード展開することにより各々の次数と陪数のモード数についての係数が求められる[11]．

$$f(\theta,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}c_n^m\,Y_n^m(\theta,\phi)\,,$$

$$c_n^m=\int_{\phi=0}^{2\pi}d\phi\int_{\theta=0}^{\pi}d\theta\,f(\theta,\phi)\,Y_n^m(\theta,\phi)\sin\theta \qquad (5-3)$$

ここで，関数 $f(\theta,\phi)$は，上記で述べた方法により得られたθおよびϕの関数としての質量である.

じょう乱を印加してシミュレーションしたときの，そのじょう乱の球面調和関数のモード数に対応する係数の典型的な時間発展を，次数と陪数の2種類の組み合わせについて図5－2に示す.

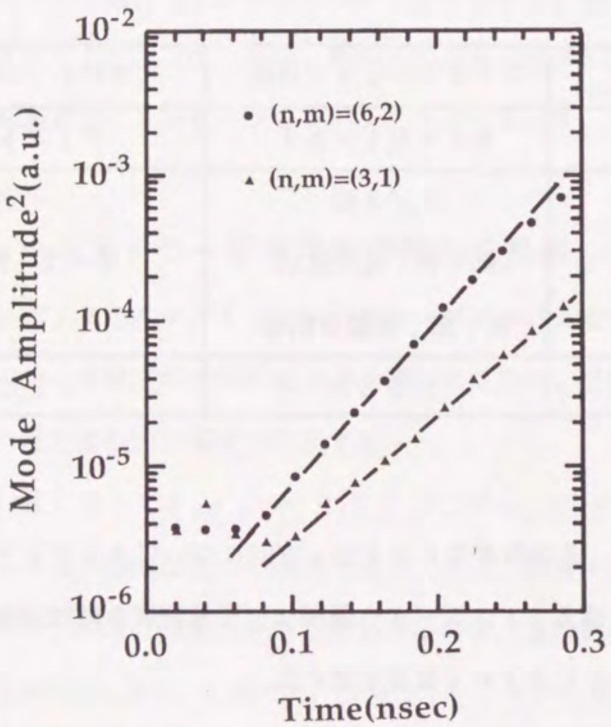


図5－2　じょう乱を球面調和関数に展開したときのモード数に対応する係数の典型的な時間発展.

一連のシミュレーションにより，この微小な四角錐の中に含まれる質量は，2次元の場合と同様に，レイリー・テイラー不安定性によって引き起こされる接触面の3次元的な変形の度合いに非常に敏感であり，その球面調和関数にモード展開したときの係数はおおよそ次式で示されるようにその接触面の変形度合いに比例することが確かめられた.

$$\text{モード係数} \fallingdotseq 0.2\times\delta(t)/r_c(t) \qquad (5-4)$$

従って，上記で述べた燃料・プッシャー接触面の変形度合いを，微小四角錐の中に含まれる質量を求めて，それを球面調和関数にモード展開することにより観測する方法の有効性が確認されたことになる.

種々の次数nと陪数mのモード数に対してレイリー・テイラー不安定性の線形成長率を求めた結果を図5－3に示す.

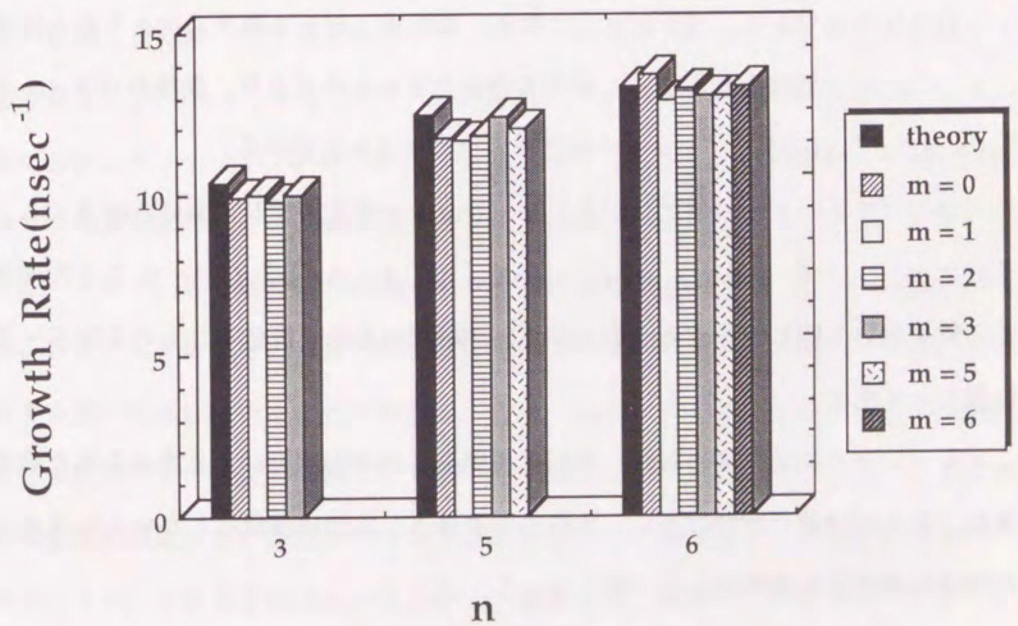


図5－3　次数および陪数のモード数に対する線形成長率. 図中のラベル'theory'は自己相似解の固有値解析による理論値.

次数が同じでも陪数が違うと，球面調和関数の幾何学的な３次元的形状は非常に異なったものになるが，それにもかかわらず，図５－３からわかるように線形成長率は，陪数にはほとんど依存せずに次数のみに依存することがわかる．

さて，次にスタグネーションフェーズにおけるレイリー・テイラー不安定性の線形段階の理論解析をするために，球対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを記述できる自己相似的な運動を導入する．この自己相似解からの微小な摂動を仮定して，基礎方程式を線形化することにより固有値方程式が求まる．固有値方程式は，最終的には２階の常微分方程式に帰着され，この方程式を数値的に解くことにより固有値を求めることができ，最大圧縮時のレイリー・テイラー不安定性の線形成長率が評価できる[10]．固有値および固有値から求められる最大圧縮時の線形成長率は，自己相似解を特徴付ける三つのパラメーターr_c/r_s，ρ_f/ρ_pおよび$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$と次数のみにより一意的に決定され，陪数には陽に依存しない．r_c/r_sは，燃料・プッシャー接触面の半径とプッシャーの外径の比であり，プッシャーの厚さ，即ちターゲットのアスペクト比を決定する．ρ_f/ρ_pは，燃料とプッシャーの質量密度比そのものであり，最後のパラメーター$p^*_0(r_s)/p^*_0(0)$は，プッシャー外側境界での圧力を決定する．

この三つのパラメーターの値は，シミュレーションの最大圧縮時における結果から，それぞれ$r_c/r_s \sim 0.62$，$\rho_f/\rho_p \sim 0.1$，$p^*_0(r_s)/p^*_0(0) \sim 0.1$と評価され，この値を用いて固有値を求め，最大圧縮時の線形成長率を評価したものを図５－３に黒い棒として示す．

シミュレーションにより求められた線形成長率とこの理論解析により求められた線形成長率は，その絶対値だけではなく，次数のみに依存し陪数には依存しないというモード数に対する依存性も非常によく一致している．

なお，上記で述べた自己相似解を用いた理論解析により最大圧縮時の実効的加速度を評価すると$5.09\times10^{16}\,cm/s^2$となるが，これはシミュレーション結果より得られた加速度$4.36\times10^{16}\,cm/s^2$ともほぼ一致していることを付記しておく．

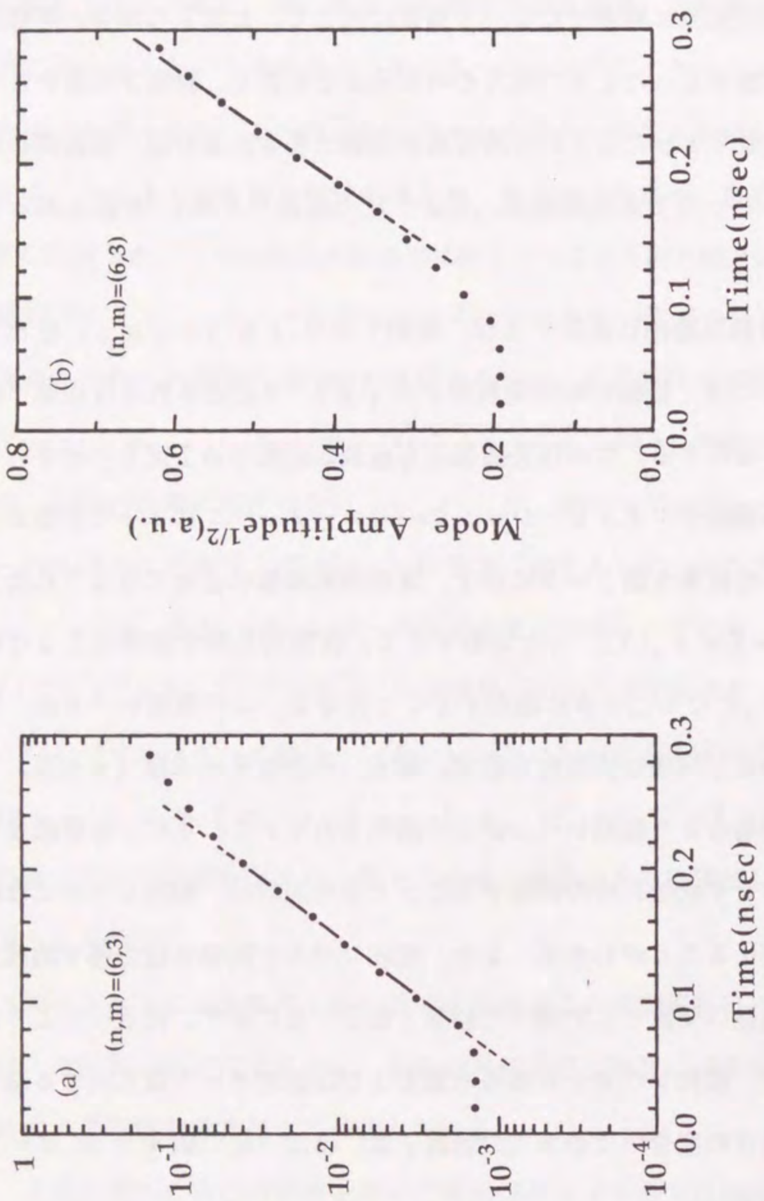
５．４　非線形時間発展

本節では，スタグネーションフェーズの間に指数関数的な線形成長が飽和して非線形成長の段階に移行するように，十分大きな振幅のじょう乱を燃料・プッシャー接触面の近傍に印加し，レイリー・テイラー不安定性の非線形時間発展を調べる．

じょう乱を球面調和関数に展開したモード係数に対して，２次元の場合と同様に対数をとったときと平方根をとったときの両方の時間発展を次数６，陪数３の場合について図５－４に示す．対数をとったときに時間発展が直線で表されるのは，指数関数的な成長を示し，平方根をとったときの直線は，じょう乱の成長が$\delta \propto t^2$で表されることを示す．

最初じょう乱は指数関数的に成長するが，時刻$t=0.18$（nsec）あたりでその成長が飽和し，その後，振幅の時間発展が$\delta=\eta g t^2$で記述される自由落下的に成長する非線形段階へ移行する．この指数関数的な成長が飽和する丁度そのときのじょう乱の山から谷までの振幅をシミュレーションのパラメーターランによって次数および陪数の関数として調べた結果を図５－５に示す．球面調和関数によって与えられたじょう乱の波長λ_0を$\lambda_0=2\pi r_c(t)/n$と定義すると，指数関数的な成長はじょう乱の振幅がおおよそ$\delta \sim \lambda_0$になったときに飽和することになる．この飽和レベルは，次数に対しては２次元の場合と同様な依存性を示す．即ち，小さなモード数（$n\sim3$）においては，$n=5$，６の場合より飽和レベルが若干緩和されている．更に，線形成長率は陪数にはほとんど依存せず次数にのみ依存することとは対照的に，飽和レベルには陪数に対する弱い依存性があることがわかる．また，飽和レベルと同様に自由落下的成長の係数ηを次数および陪数の関数として調べた結果を図５－６に示す．図５－６より自由落下的成長の係数ηは，飽和レベルと同様の次数および陪数のモード数に対する弱い依存性を示すが，その依存の度合いは小さく，係数ηは，ほぼ一定の値$\eta=0.8\sim1.1$とみなせることがわかる．

この非線形時間発展の結果を３．５節で述べた２次元円柱対称の場合の結果，即ち，



（a）対数

（b）平方根

図5－4　じょう乱を球面調和関数に展開したモード係数の対数と平方根をとったときの時間発展.

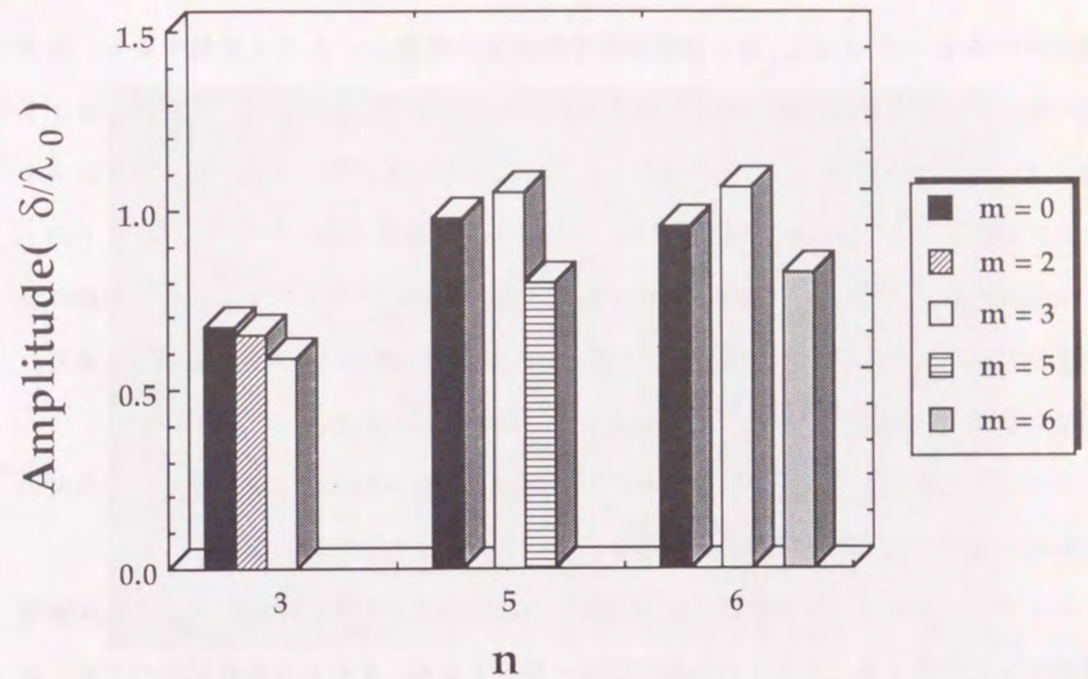


図5－5　次数および陪数のモード数に対する指数関数的成長の飽和レベル.

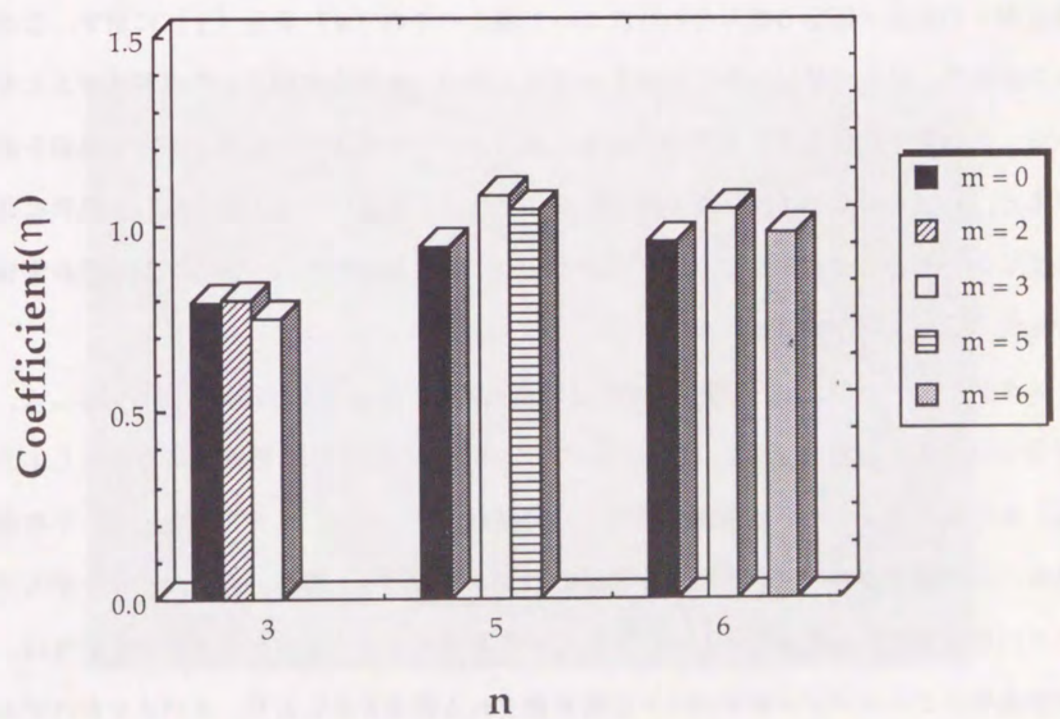


図5－6　次数および陪数のモード数に対する自由落下的成長の係数.

飽和レベル$\delta \sim 0.35\lambda_0$および自由落下的成長の係数$\eta \sim 0.2$と比較すると，３次元の場合は，指数関数的成長がより大きな振幅まで飽和せずに，かつ，飽和後にはより速いスピードで自由落下的に成長するという両方の面において，スタグネーションフェーズにおける，より悪い燃料とプッシャーのミキシング条件を指し示している．これは，３次元球対称ターゲットの場合の方が２次元円柱対称ターゲットの場合より，空間の自由度が大きいため燃料がより膨張しやすく，それが指数関数的成長の飽和を妨げており，同時に自由落下的成長のスピードを速くしていると考えられる．

このような燃料とプッシャーのミキシングは，レーザー核融合において，自己点火のために必要な高温・高密度の達成を阻害してしまい，大きな問題となる．

レイリー・テイラー不安定性の指数関数的な線形成長が飽和した後，じょう乱は線形段階から自由落下的に成長する非線形段階へ移行するが，そのとき非線形なバブル・スパイク構造を形成する[11-14]．燃料・プッシャー接触面に対応する質量密度の等値面を２.６節で述べたボリューム・レンダリングの手法を用いて３次元的に可視化した結果を種々の次数と陪数の組み合わせについて図５－７の（ａ）から（ｊ）に示す．これらの図より，３次元球対称系におけるバブル・スパイク構造の様子・幾何形状がよくわかる．自由落下的に成長する非線形段階においてバブル・スパイク構造の時間発展を調べると，バブルはスパイクに取り囲まれることにより徐々にお互いに分離して島状に成長するが，一方のスパイクはお互いに結合しバブルの島を取り囲む海のように燃料流体中を沈み込むことが明らかになった．

スタグネーションフェーズ開始時のじょう乱の次数，陪数および振幅を同じ値にして，符号だけを逆にしたじょう乱（即ち，元のじょう乱の山が谷に，谷が山になったじょう乱）を燃料・プッシャー接触面に印加して同様のシミュレーションを行なった．その結果も，元のじょう乱の場合と同様な非線形バブル・スパイク構造，即ち，バブルがスパイクに取り囲まれる構造を示した．３次元平面系でのレイリー・テイラー不安定性は，初期条件によってバブルがスパイクに取り囲まれる構造を示したり，スパイクがバブルに取り囲まれる構造を示したりすることがわかっているが[15]，スタグネーションフェ

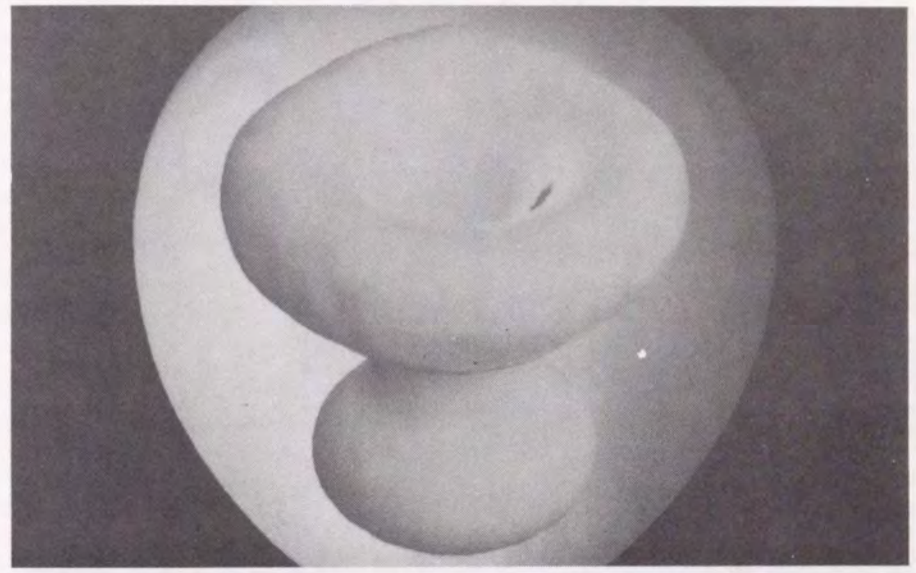


図５－７（ａ）モード数（ｎ，ｍ）＝（３，０）のときの接触面の形状．

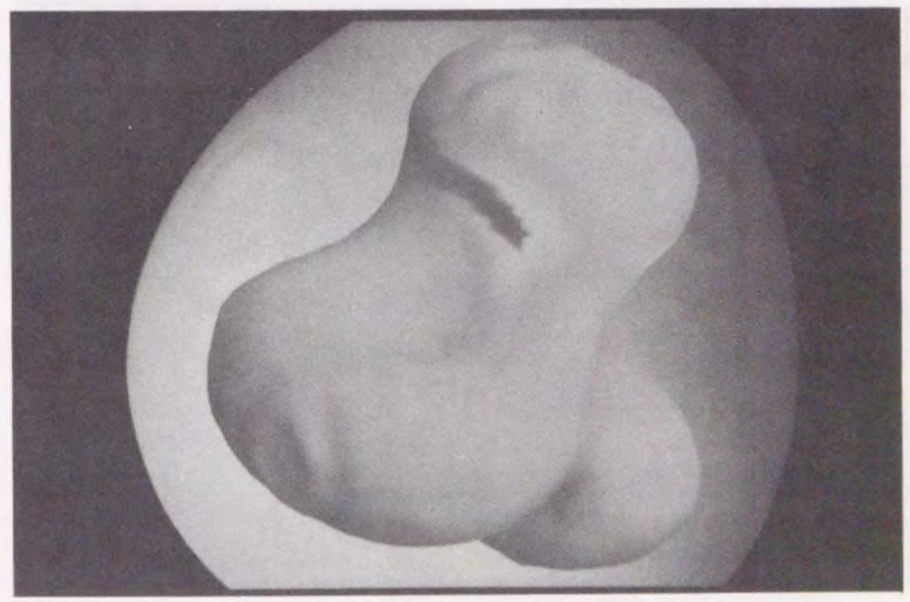


図５－７（ｂ）モード数（ｎ，ｍ）＝（３，１）のときの接触面の形状．

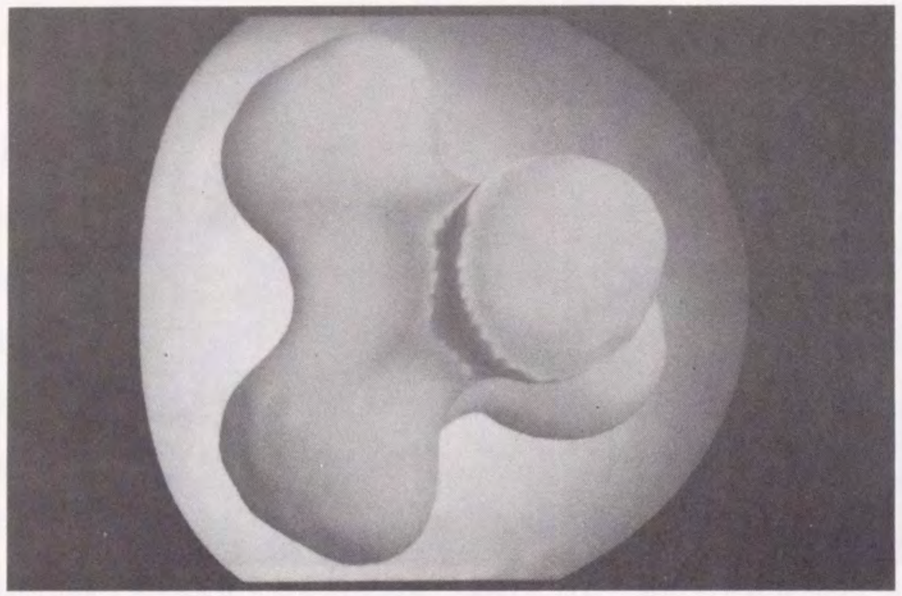


図5－7（c）モード数（n，m）＝（3，2）のときの接触面の形状.

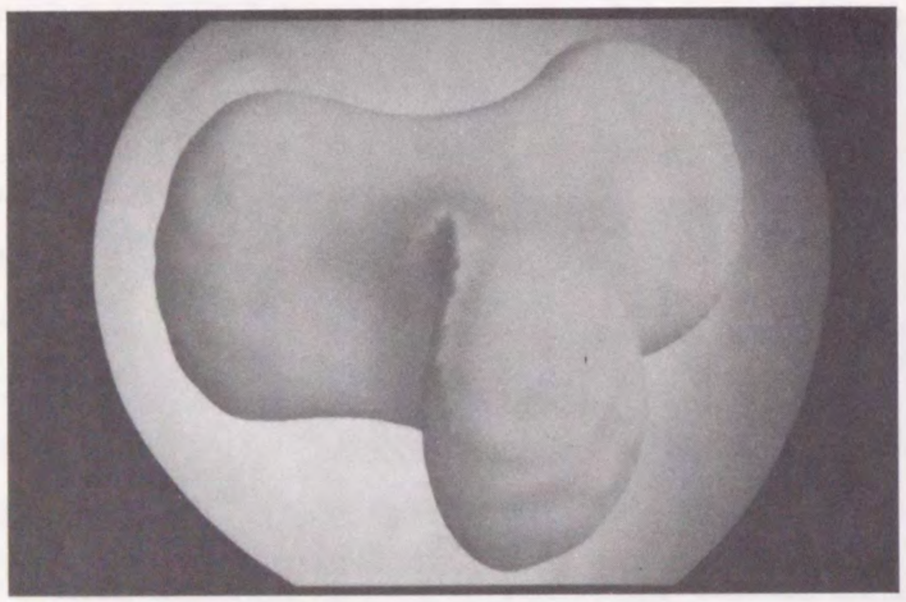


図5－7（d）モード数（n，m）＝（3，3）のときの接触面の形状.

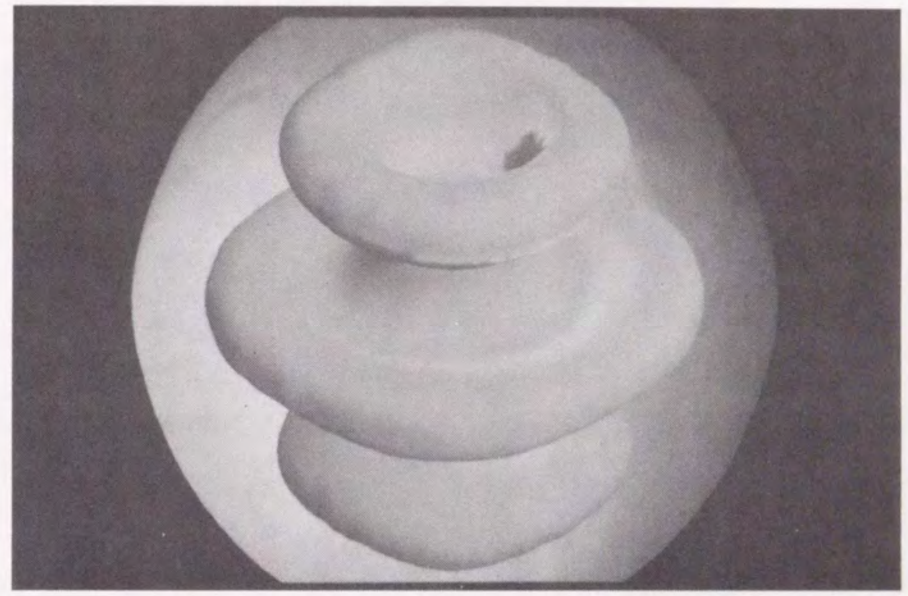


図5－7（e）モード数（n，m）＝（6，0）のときの接触面の形状.

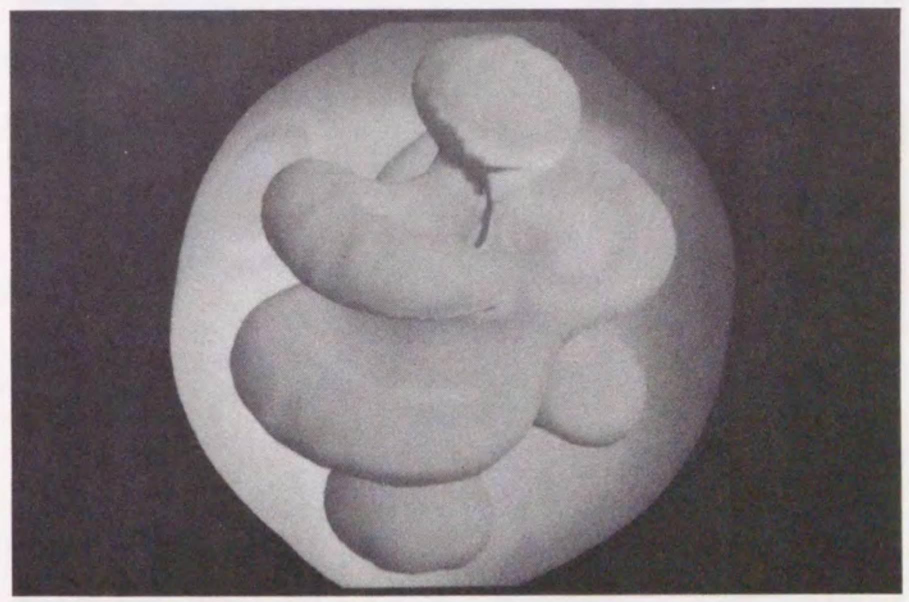


図5－7（f）モード数（n，m）＝（6，1）のときの接触面の形状.

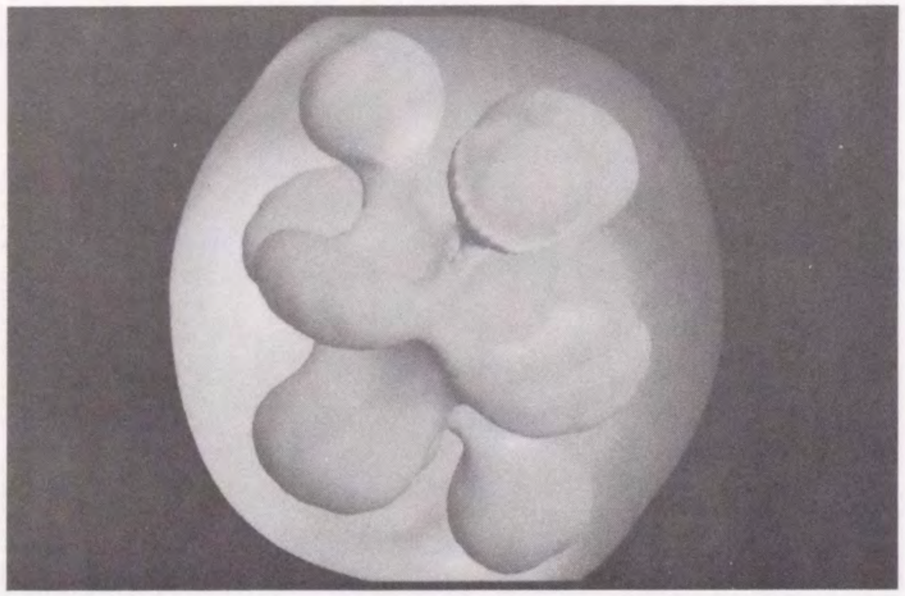


図5－7（g）モード数（n, m）＝（6, 2）のときの接触面の形状.

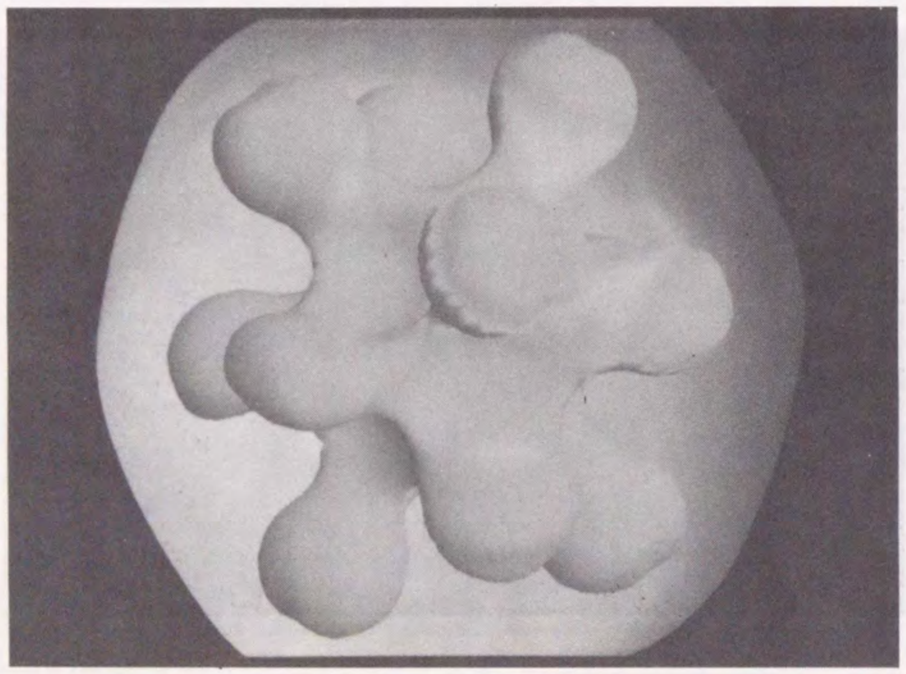


図5－7（h）モード数（n, m）＝（6, 3）のときの接触面の形状.

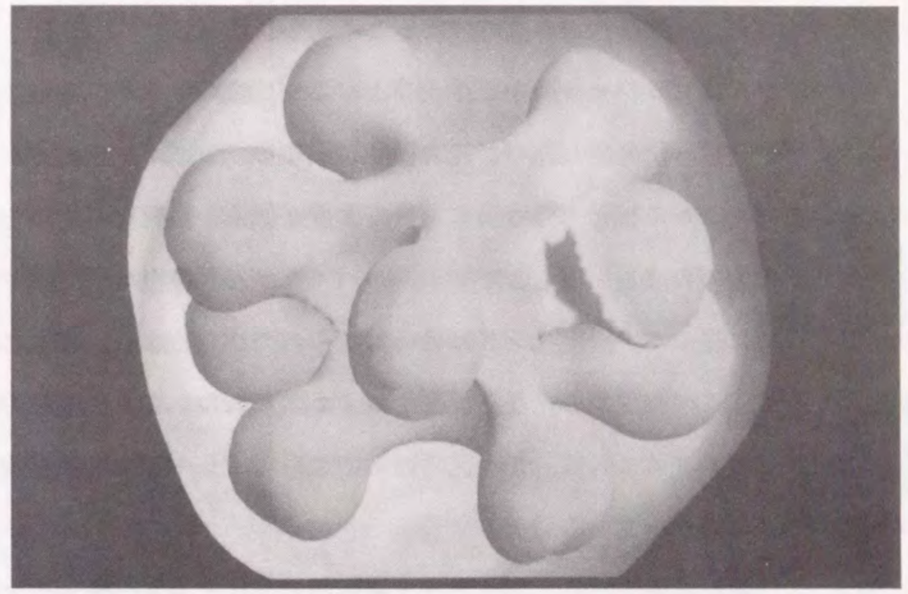


図5－7（i）モード数（n, m）＝（6, 5）のときの接触面の形状.

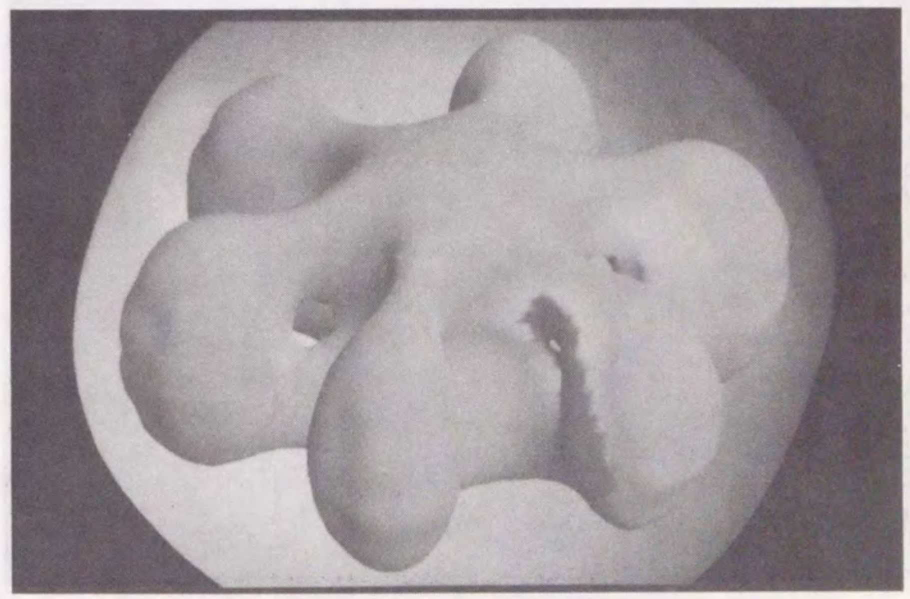


図5－7（j）モード数（n, m）＝（6, 6）のときの接触面の形状.

ーズにおける３次元球対称系では，その幾何学的な理由により，バブルがスパイクに取り囲まれるバブル・スパイク構造が本質的であると考えられる．

さて，燃料のバブルはプッシャーの中を浮かび上がるが，このときバブル・スパイクの境界において速度シアーが発生し，バブルの回りに渦度のリングが生成される．この渦度リングは，特にバブルの根元・付け根において強度が強く，燃料をバブルの中へ吹き飛ばしバブルそのものの成長を促進している．スパイクが燃料中をターゲット中心へ向かって沈み込むのに従って，渦度リングは締め付けられて小さくなり，ますます強度が強くなる．そして，このバブルの成長を促進するメカニズムは，ますます強く働くことになる．なお，このメカニズムは，３次元平面系でのシミュレーションにおいて観測されたメカニズムとは異なっている[6)]．

図５－８に，この最終段階の燃料・プッシャー接触面の形状と渦度ベクトルを重ねて表示したものを示す．

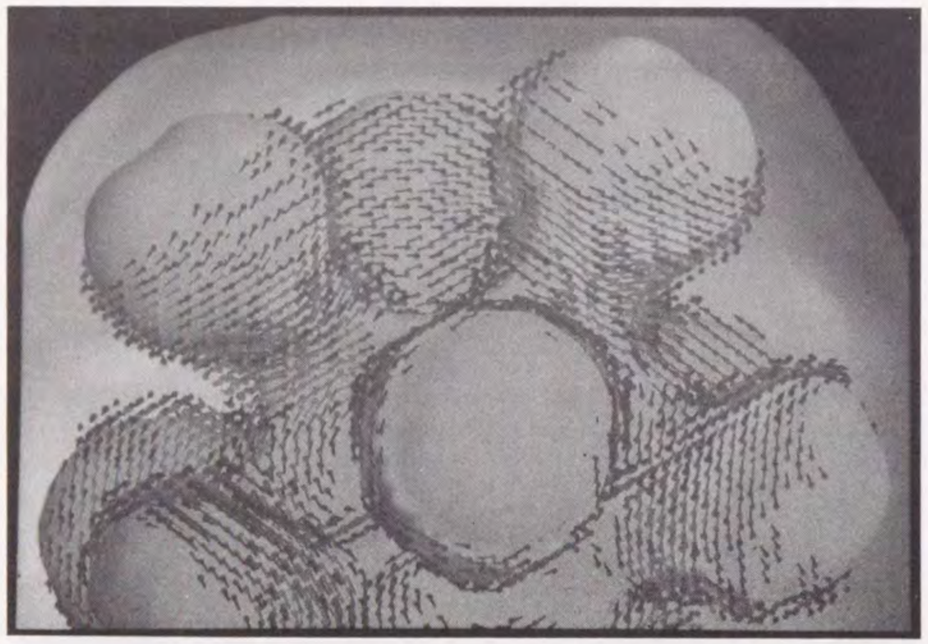


図５－８　最終段階における接触面の形状と渦度ベクトル．

バブルの根元・付け根に強い強度の渦度リングがあることがよくわかる．結局，この渦度リングによるバブルの成長を促すメカニズムが，２次元の場合に比べて大きな指数関数的成長の飽和レベルを招いていると考えられる．

また，陪数が$m\sim0$および$m\sim n$の場合には，図５－７から明らかにわかるようにバブルが幾何学的に大きな構造を持つために，渦度リングの締め付けが起こりにくくなり，バブルの根元・付け根に強い渦度リングが生成されない．このため，上記で述べた渦度リングによるバブル成長を促すメカニズムがぼやけてしまい，他の場合に比べて指数関数的成長の飽和レベルが小さくなると考えられる．従って，図５－５に見られたように，指数関数的成長の飽和レベルは陪数に対して弱い依存性を示すことが説明できる．

５.５　結言

本章では，３章で述べた２次元円柱対称ターゲットの拡張を考えて，３次元球対称ターゲットのスタグネーションフェーズにおける燃料・プッシャー接触面のレイリー・テイラー不安定性の線形および非線形時間発展をシミュレーションにより調べ，次のような結果が得られた．

１）球対称という幾何学的な効果，加速度および波長が時間・空間と共に変化するという効果等のスタグネーションのダイナミクスを記述する自己相似解の固有値解析により線形成長率を調べた．その結果，理論解析による線形成長率は，シミュレーション結果と次数のみに依存し陪数には依存しないというモード数に対する依存性だけではなく，その絶対値も非常によく一致することが明らかになった．

２）指数関数的な成長はじょう乱の振幅が$\delta\sim\lambda_0$になったときに飽和するが，その飽和レベルは次数および陪数に対して弱い依存性を示すことが明らかになった．また，飽和後の自由落下的成長の係数ηも，飽和レベルと同様の次数および陪数に対する弱い依存性が存在するが，その度合いは小さく，係数ηは，ほぼ一定の値$\eta=0.8\sim1.1$となることが明らかになった．

3）この結果を３章で述べた２次元の結果$\delta\sim0.35\lambda_0$および$\eta\sim0.2$と比較すると，３次元の場合は，飽和レベルおよび自由落下的成長のスピードという両方の面において，２次元の場合より悪いスタグネーションフェーズにおける燃料とプッシャーのミキシング条件を示すことが明らかになった．

4）非線形段階の成長が進むとバブル・スパイク構造が形成されるが，このとき速度シアーにより特にバブルの根元・付け根において強度の強い渦度のリングが生成され，この渦度リングは，燃料をバブルの中へ吹き飛ばしバブルそのものの成長を促進し，２次元の場合に比べて大きな指数関数的成長の飽和レベルを招くことが明らかになった．更に，この渦度リングによるバブル成長を促すメカニズムにより，指数関数的成長の飽和レベルの陪数に対する弱い依存性も説明できることが明らかになった．

5）非線形なバブル・スパイク構造については，３次元平面系では，初期条件によってバブルがスパイクに取り囲まれる構造を示したり，スパイクがバブルに取り囲まれる構造を示したりするが，３次元球対称系では，バブルがスパイクに取り囲まれる構造が本質的であることが明らかになった．

参考文献

1）Yu. F. Afanas'ev, N. G. Basov, E. G. Gamalii, O. N. Krokhin, and V. B. Rozanov, JETP Lett. **23**, 566 (1976).

2）J. R. Freeman, M. J. Clauser, and S. L. Thompson, Nucl. Fusion **17**, 233 (1977).

3）S. A. Orszag and A. T. Patera, J. Fluid Mech. **128**, 347 (1983).

4）F. F. Grinstein, R. H. Guirguis, J. P. Dahlburg, and E. S. Oran, Proc. of the Inter. Conf. Num. Meth. in Fluid Mech. (Springer Verlag, 1989).

5）A. F. Ghoneim, H. M. Aly, and O. K. Knio, Proc. of AIAA 25th Aerospace Science Meeting, AIAA-87-0379 (1987).

6）J. P. Dahlburg and J. H. Gardner, to be published Phys. Rev. A (1990).

7）W. F. Noh, Lawrence Livermore National Laboratory Report, UCRL-53669 (1985).

8）R. E. Kidder, Nucl. Fusion **16**, 3 (1976).

9）D. L. Book and I. B. Bernstein, J. Plasma Phys. **23**, 521 (1980).

１０）F. Hattori, H. Takabe, and K. Mima, Phys. Fluid **29**, 1719 (1986).

１１）M. H. Emery, J. P. Dahlburg, and J. H. Gardner, Phys. Fluids **31**, 1007 (1988).

１２）C. P. Verdon, R. L. McCrory, R. L. Morse, G. R. Baker, D. I. Merion, and S. A. Orszag, Phys. Fluids **25**, 1653 (1982).

１３）D. L. Youngs, Physica **12D**, 32 (1984).

１４）K. I. Read, Physica **12D**, 45 (1984).

１５）H. E. Trease, private communication (1989).

第6章　誘導ラマン散乱の飽和機構

6.1　序言

レーザーとプラズマの相互作用は，いろいろな非線形パラメトリック不安定性を生み出すが，その中でも誘導ラマン散乱はレーザー核融合にとって，もっとも重要な問題の一つである[1-9]．誘導ラマン散乱は，その非線形プロセスによって超高エネルギー電子を発生させ，その超高エネルギー電子は平均自由行程が長いため容易に燃料内部に侵入し，燃料が最大圧縮に達する前に，その燃料内部を先行加熱する[3]．先行加熱のために燃料の圧力は圧縮が起こる前に既に高くなっており，爆縮により燃料が核融合の自己点火に必要な高温・高密度を達成することを妨げる．

誘導ラマン散乱は重要な問題であるにもかかわらず，まだ，その現象には不明瞭な点が多くある．その一つとして，誘導ラマン散乱の閾値があるが，理論的に予測された閾値と実験により観測された閾値の間には，大きな隔たりがある[1,7]．また，誘導ラマン散乱の飽和機構も，多くの理論的研究があるものの[10-18]，まだ実験的には，その飽和機構の有効性が確かめられていない．

超高エネルギー電子の生成とイオン密度分布の揺動は，誘導ラマン散乱の重要な非線形効果と考えられる．コロナ領域の電子は，誘導ラマン散乱により励起された電子プラズマ波によって強く加熱され超高エネルギー電子となる．以前に行なわれたシミュレーション[12]および本章のシミュレーション結果から，その加熱された超高エネルギー電子は，おおざっぱに$T_h \sim m_e v_{ph}^2/2$と評価される特徴的な電子温度を持つマクスウェル分布に，ほぼ従っていることが明らかになった．ただし，m_eは電子の質量であり，v_{ph}は誘導ラマン散乱により励起された電子プラズマ波の位相速度である．1／4遮断密度での誘導ラマン散乱の後方散乱の場合，パラメトリック不安定性における波数と角周波数の整合条件からv_{ph}を評価して上記の関係を用いると，超高エネルギー電子の温度T_hは50～100keVと評価される．このように，超高エネルギー電子の温度は非常に高いので，電子プラズマ波はその超高エネルギー電子と容易に共鳴する．このため，電子プラズマ波のエネルギーは，自身の減衰により超高エネルギー電子のエネルギーにいったん変換され，更に，誘導ラマン散乱が起こっている1／4遮断密度付近の領域から超高エネルギー電子の輸送により失われる．誘導ラマン散乱により励起される電子プラズマ波のすべてのエネルギーが超高エネルギー電子のエネルギーに変換されると仮定すると，定常状態では，超高エネルギー電子によって運び去られるエネルギーフラックスと超高エネルギー電子に注入されるエネルギー，即ち誘導ラマン散乱により励起される電子プラズマ波に入射レーザーが注入するエネルギーとがバランスしていると考えることができる．背景の熱電子によるエネルギー輸送を無視し，超高エネルギー電子によるエネルギーフラックスとして自由熱流束を用いると，上記のバランス関係は，

$$r I_L \frac{\omega_{pe}}{\omega_0 - \omega_{pe}} \approx 0.6\, n_h T_h \sqrt{\frac{T_h}{m_e}} \qquad (6-1)$$

となる．ここで，r，I_Lおよびω_0は，それぞれ入射レーザーの反射率，強度および角周波数であり，ω_{pe}は電子プラズマ波の角周波数，n_hは超高エネルギー電子の密度である．超高エネルギー電子は，電子プラズマ波の減衰により生成されるが，ここでは，簡単のため減衰はランダウ減衰により起こると仮定すると，超高エネルギー電子の密度が評価でき，更に，定常状態での反射率rを評価することができる．超高エネルギー電子の温度を上記で述べた表式で見積ると，本章で行なうシミュレーションパラメーターでは，結局，定常状態での反射率は$r \sim 15\%$と求められる[19]．

しかしながら，本章で行なった1-1/2次元電磁粒子コードのシミュレーションによれば，自己無撞着な超高エネルギー電子の生成とその電子の誘導ラマン散乱に対するフィードバックは，この現象が定常的な状態になることを妨げる様相を呈している．実際シミュレーションでは，超高エネルギー電子密度の増加・減少に伴って，誘導ラマン散乱による散乱波の強度，即ち反射率は緩和振動している．本章では，この散乱波の発生

が超高エネルギー電子の生成・損失により時間的に脈動的なふるまいをすることについて詳細に議論する．更に，イオン密度の揺動とプラズマの膨張が引き起こす効果についても言及する．本章で行なうシミュレーションでは，密度に対する空間スケールは比較的短いものを取り扱うので，誘導ラマン散乱は，1／4遮断密度付近の極く狭い領域でしか起こらない[12]．このため，励起される電子プラズマ波はその領域に局所的に存在し，ポンドラモーティブ力によってイオン密度にくぼみが生成される．このイオン密度のくぼみは，密度の空間スケールをより短くし反射率を小さくする．一方，プラズマの膨張は，両極性電場による高エネルギーイオンの生成を伴う超高エネルギー電子の膨張，即ち新たな損失の効果となる．このため，超高エネルギー電子の密度はよりいっそう減少するので，プラズマ膨張の効果は，イオン密度の揺動の場合とは逆に反射率を大きくする．

本章では，上記で述べた三つの非線形現象とそれによって引き起こされる誘導ラマン散乱の飽和・脈動のダイナミクスをシミュレーションを用いて調べ，簡単な理論モデルにより解析した．6.2節では，密度勾配があるプラズマ中での誘導ラマン散乱の線形成長率を調べ，その表式から得られる二つの飽和機構を概観する．シミュレーションには1-1/2次元電磁粒子コードを用い，シミュレーションシステム内に超高エネルギー電子を吸収する特別な領域を設けるが，このシミュレーションモデルの詳細については6.3節で述べる．6.4節では，簡単な現象論的モデル方程式を考えて，これを解析することにより誘導ラマン散乱の非線形時間発展を調べ，更に，シミュレーション結果と比較・議論する．

6.2 誘導ラマン散乱の線形成長率と飽和

プラズマの空間プロファイルとして直線的に変化するものを考えると，密度は

$$n = n_{cr}\left(1 + \frac{x}{L}\right) \qquad (6-2)$$

で与えられる．ここで，n_{cr}およびLは，それぞれ遮断密度および密度の線形空間スケール長である．

このような密度勾配があるプラズマ中での1／4遮断密度における誘導ラマン散乱の線形成長率は，次式で与えられる．

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{v_0}{c}\right)\omega_0 - \frac{1}{2}\gamma_L(k) - \frac{\omega_0}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\left(\frac{c}{v_0}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{c}{L\omega_0} \qquad (6-3)$$

ここで，ω_0，v_0，k，cおよびγ_Lは，それぞれ入射レーザーの角周波数，入射レーザーの電場中での電子の振動速度，1／4遮断密度における電子プラズマ波の波数，光速およびランダウ減衰率である[20]．（6－3）式において，第2項，即ちランダウ減衰率は電子温度の関数であり，第3項はプラズマが有限の勾配を持つために生じるコンベクションによる減衰を表している．

誘導ラマン散乱の入射レーザーに対する閾値は，（6－3）式において$\Gamma=0$とおくことにより得られる．図6－1に密度の線形空間スケール長を$L/\lambda_0=25$と固定したときの電子温度に対する入射レーザーの閾値を示す．ここで，λ_0は入射レーザーの真空中での波長である．電子温度が上がるとランダウ減衰が大きくなるため，閾値は電子温度の増加に伴って急激に大きくなる．

（6－3）式を用いて，超高エネルギー電子が誘導ラマン散乱によって生成される場合の誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを考える．最初，入射レーザーの強度が閾値を越えていると，誘導ラマン散乱が起こり電子プラズマ波が励起され，更に，その電子プラズマ波の減衰により超高エネルギー電子が生成される．この超高エネルギー電子の速度は，ほぼ電子プラズマ波の位相速度に等しいが，この速度を誘導ラマン散乱の整合条件により求めると背景電子の熱速度よりずっと速く光速のオーダーになる[8]．このような高エネルギー・高温電子の生成は，実効的には電子温度を上昇させることになり，それと同時に実効的なランダウ減衰率および入射レーザーの閾値も大きくなる．こ

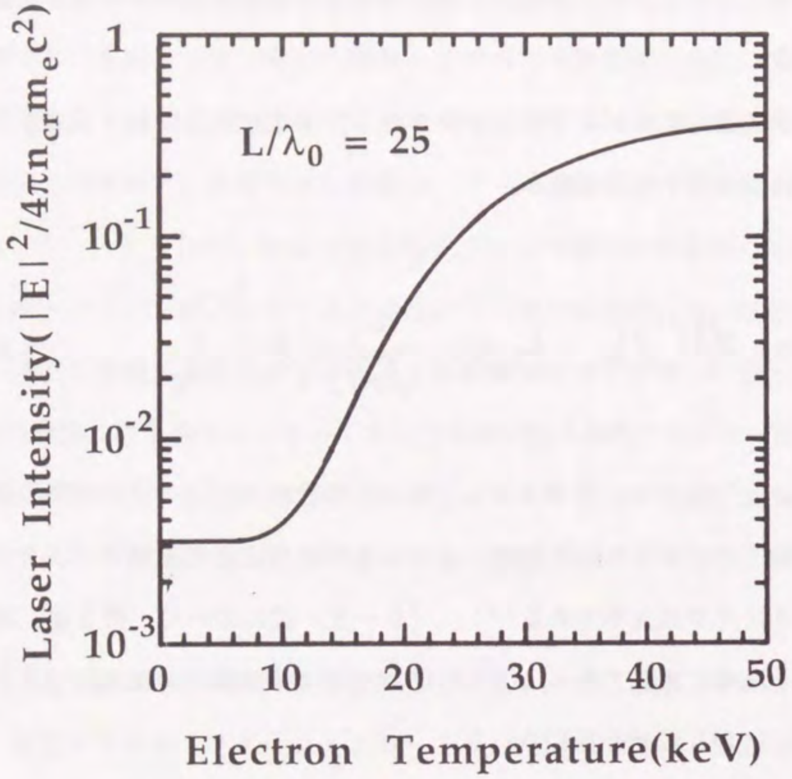


図６－１　入射レーザーの誘導ラマン散乱に対する閾値の電子温度依存性.

の大きくなった閾値が入射レーザー強度を上回ると誘導ラマン散乱は起こらなくなり，超高エネルギー電子はもはや生成されない．そして，超高エネルギー電子はプラズマの膨張や高密度側への輸送により１／４遮断密度近傍の相互作用領域から失われる．その結果，今度は逆に超高エネルギー電子が少なくなるため，実効的な電子温度，従って入射レーザーの閾値が下がる．もし，電子温度が十分に低くなると誘導ラマン散乱が再び起こり，上記に述べたプロセスを繰り返すことになる．即ち，超高エネルギー電子密度の増加・減少の緩和振動に伴って誘導ラマン散乱は脈動的なふるまいをすることになる．

次に，電子温度を１０ｋｅＶと固定したときの密度の線形空間スケール長に対する入射レーザーの閾値を図６－２に示す．密度の線形空間スケール長が十分短いと（６－３）

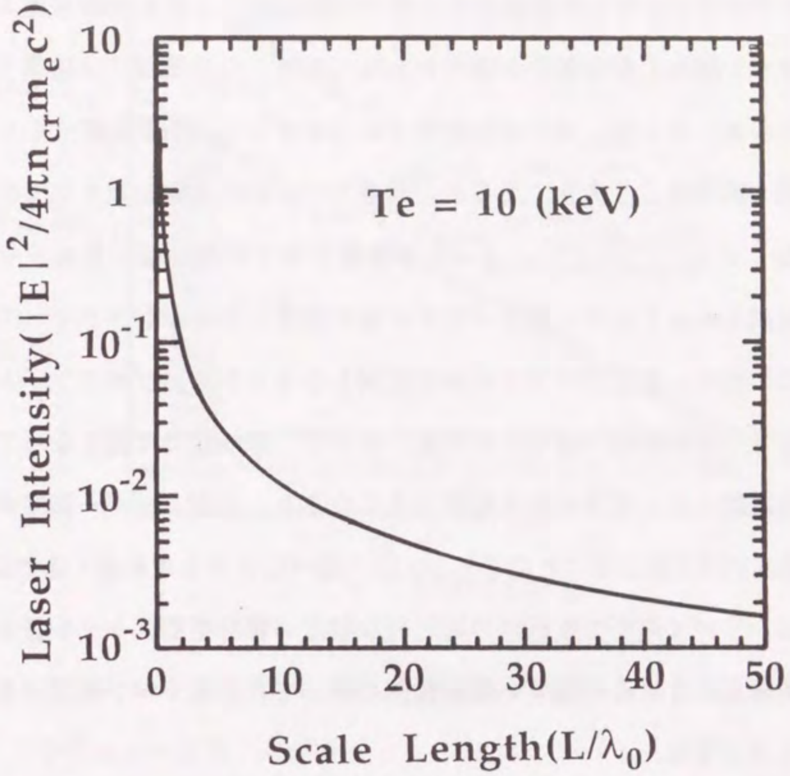


図６－２　入射レーザーの誘導ラマン散乱に対する閾値の密度空間スケール依存性.

式の第３項が支配的になり，入射レーザーの閾値はランダウ減衰ではなくコンベクションによる損失により決定される．このため，密度の線形空間スケール長が短くなればなるほど閾値は高くなる．従って，誘導ラマン散乱はプラズマの密度プロファイルが急峻になることによっても飽和すると考えられる．

そこで，プラズマ密度プロファイルの急峻化による誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを考える．誘導ラマン散乱は１／４遮断密度近傍の極く狭い領域でしか起こらないので[12]，誘導ラマン散乱により励起される電子プラズマ波は，分散関係を考えると，その領域に定在波を作り局所的に存在することになる．このため，電子プラズマ波は，その静電場のポンドラモーティブ力により密度プロファイル上に穴を穿つことにな

る[21)]．このプロファイル上に生成された穴での密度が，１／４遮断密度より小さくなると，誘導ラマン散乱の整合条件が満たされなくなり，この領域では誘導ラマン散乱が起こりにくくなる．そして，プラズマ密度プロファイルの局所的勾配もしくは共鳴条件の不整合がある臨界値より大きくなると，誘導ラマン散乱は安定化されてしまい，それ以上起こらなくなる[16, 17, 22)]．いったん誘導ラマン散乱が起こらなくなると電子プラズマ波も生成されなくなり，電子プラズマ波の強度と共にポンドラモーティブ力も小さくなる．このため，密度プロファイルの変調も小さくなり，プロファイルはプラズマの熱運動により，元の状態へ戻ろうとする．そして，急峻化して短くなっている局所的な密度の線形空間スケール長がある程度大きくなると，入射レーザー強度が閾値を越え誘導ラマン散乱が再び起こることになり，上記に述べたプロセスを繰り返すことになる．この場合には，１／４遮断密度近傍の局所的な密度の線形空間スケール長もしくはプロファイル上の密度のくぼみの深さの緩和振動に伴って，誘導ラマン散乱は脈動的なふるまいをすることになる．

6.3　シミュレーションモデル

前節で述べた誘導ラマン散乱の二つの飽和機構，即ち超高エネルギー電子密度の増加による飽和機構および密度の線形空間スケール長の急峻化による飽和機構を調べるために，1-1/2次元相対論的電磁粒子コード（ＥＭＰＡＣ）[24)]を用いてシミュレーションを行なった．

本章で用いたシミュレーションモデルを図６－３に示す．シミュレーションシステムは当然のことながら有限なので，誘導ラマン散乱によって生成された超高エネルギー電子は，システム内から輸送されて失われずに，いつまでもシステム内に閉じ込められたままである．このため，シミュレーションシステム内に超高エネルギー電子を吸収するものがないと，超高エネルギー電子はシステム内にどんどん増加してゆく．そして，その超高エネルギー電子はシミュレーションシステム内に充満し，ついには誘導ラマン散

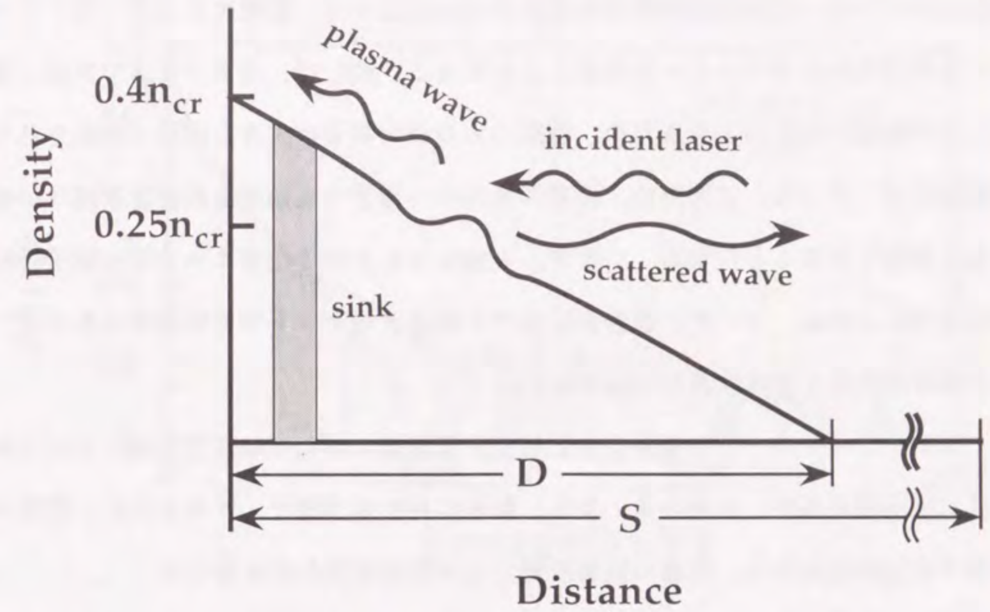


図６－３　超高エネルギー電子を吸収する特別な領域（ｓｉｎｋ）を導入したシミュレーションモデル．

乱による入射レーザーの反射率を非物理的な原因により無視できないほど減少させてしまう．実際のレーザー生成プラズマの場合，誘導ラマン散乱が起こる１／４遮断密度近傍の領域の背後には，アブレーションにより十分長く大きい高密度領域が生成されており，この領域に輸送された超高エネルギー電子は効率よく吸収されて，１／４遮断密度近傍の領域から失われる．

この効果をシミュレーションシステムに取り入れるため，システム内に超高エネルギー電子を吸収する特別な領域（ｓｉｎｋ）を導入する．この特別な領域の中に入ってきた超高エネルギー電子は，ある決められた割合で吸収され，システム内の粒子数をシミュレーションを行なっている間一定の値に保つために，その吸収された超高エネルギー電子と同数の熱電子を放出する．熱電子の速度は，背景のプラズマの電子温度と同じ電子温度を持つマクスウェル分布になるように乱数を用いて決定する．このｓｉｎｋにお

ける超高エネルギー電子吸収の割合を変えることによって，超高エネルギー電子のシムテムからの損失率をコントロールできることになる．例えば，高Ｚプラズマでは，電子とイオンの衝突が支配的となるため，超高エネルギー電子は大きな確率で散乱されてコロナ領域に戻ってくる．このため，超高エネルギー電子の実効的な高密度領域への輸送は大きく制限されることになる．つまり，ｓｉｎｋにおける超高エネルギー電子吸収の割合が小さいことは，レーザー核融合における高Ｚターゲット中での超高エネルギー電子の小さな損失率を意味することになる．

シミュレーションコードの境界条件として，電磁波に対しては左右両端において無反射条件（完全透過条件）を用いる．また，粒子に対しては電子・イオン共に，左端の高密度側では完全反射条件，右端の低密度側では周期的境界条件を用いる．

典型的なシミュレーション結果を図６－４から図６－６に示す．また，このときのシミュレーションパラメーターを表６－１にまとめておく．

表６－１　シミュレーションパラメーター．

S	１０２３Δ（Δはメッシュサイズ）
D	３５０Δ
$\omega_{pe}\Delta t$	０.１（０.４n_{cr}において）
$n_0\Delta$	１００（０.４n_{cr}において）
m_i/m_e	１００
T_e/T_i	１
c/v_{te}	７.１５［T_e＝１０（ｋｅＶ）］
L/λ_0	２５（λ_0は入射レーザーの真空中での波長）
$E_0{}^2/4\pi n_{cr} m_e c^2$	０.５×10^{-2} ［$I_0\lambda_0{}^2$＝１.３７×10^{16}（W/cm^2-μm^2）］

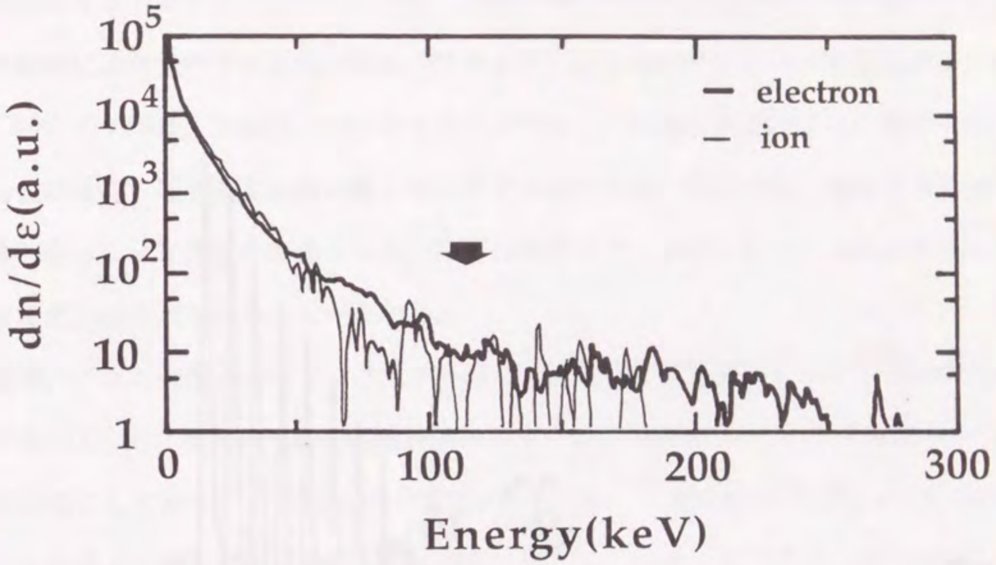


図６－４　電子およびイオンのエネルギー分布．

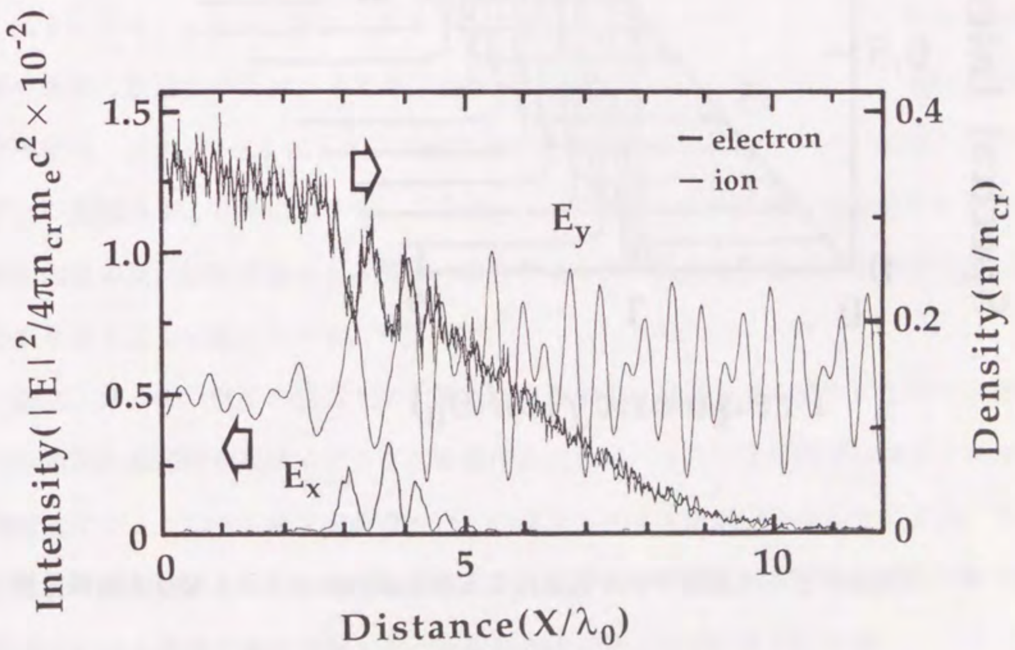


図６－５　電子およびイオンの密度プロファイル，電場の強度プロファイル．

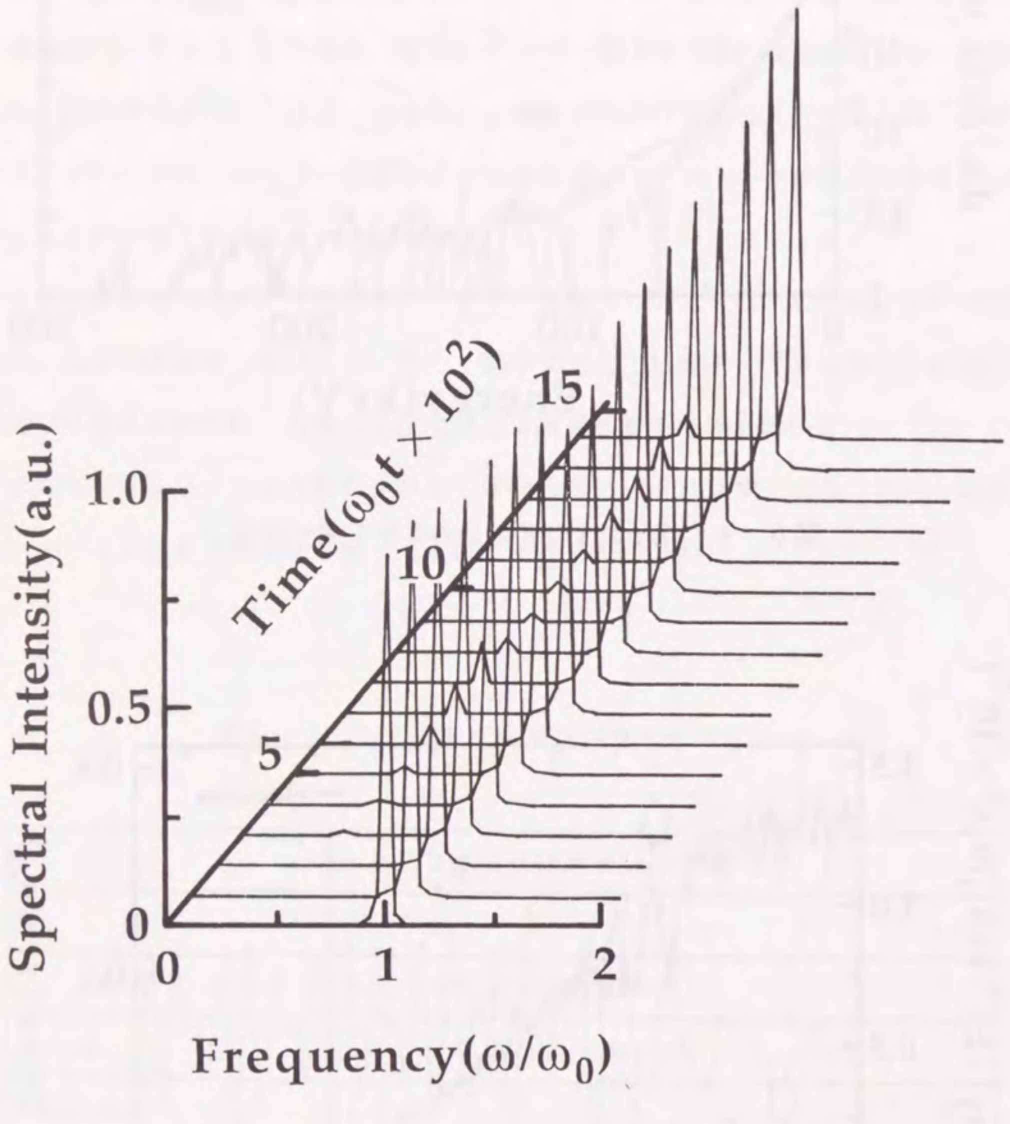


図６－６　入射レーザーと誘導ラマン散乱による散乱波のスペクトル強度の時間発展．

図６－４はエネルギー分布を示すが，誘導ラマン散乱により加熱された電子とその電子の膨張により発生する両極性電場で加速された高エネルギーイオンの存在がよくわかる．図中の矢印は，共鳴電子のエネルギー，即ち１／４遮断密度における電子プラズマ波の位相速度と同じ速度を持つ電子のエネルギーである．この場合，電子のエネルギー分布の傾きにより温度を評価すると，電子は誘導ラマン散乱により，おおよそ６０ｋｅＶにまで加熱されていることがわかる．

電子，イオン密度の空間プロファイルおよび電場強度の空間プロファイルを図６－５に示す．1-1/2次元相対論的電磁粒子コードでは，静電場（E_x）と電磁場（E_y）は完全に独立しており，お互いにカップリングしない．このため，静電場（E_x）の強度は，そのまま正確に電子プラズマ波の強度に等しい．図６－５から明らかにわかるように，電子プラズマ波は１／４遮断密度近傍に局所的に定在波として存在し，そのポンドラモーティブ力はイオン密度にくぼみを生成している．この場合，１／４遮断密度近傍に三つのくぼみを見ることができる．

図６－６は，入射レーザーと誘導ラマン散乱による散乱波のスペクトル強度の時間発展を示す．散乱波のスペクトルは，ほぼ$\omega \sim \omega_0/2$のところに見られ，最初，散乱波の強度は，$\gamma/\omega_0 \sim 9\times10^{-3}$の成長率で指数関数的に増大し，ついには，入射レーザーの反射率が１０％に達する．ここで，ω_0は入射レーザーの角周波数である．この線形成長率は，線形理論による解析，即ち（６－３）式から評価される誘導ラマン散乱の成長率とよく一致している．

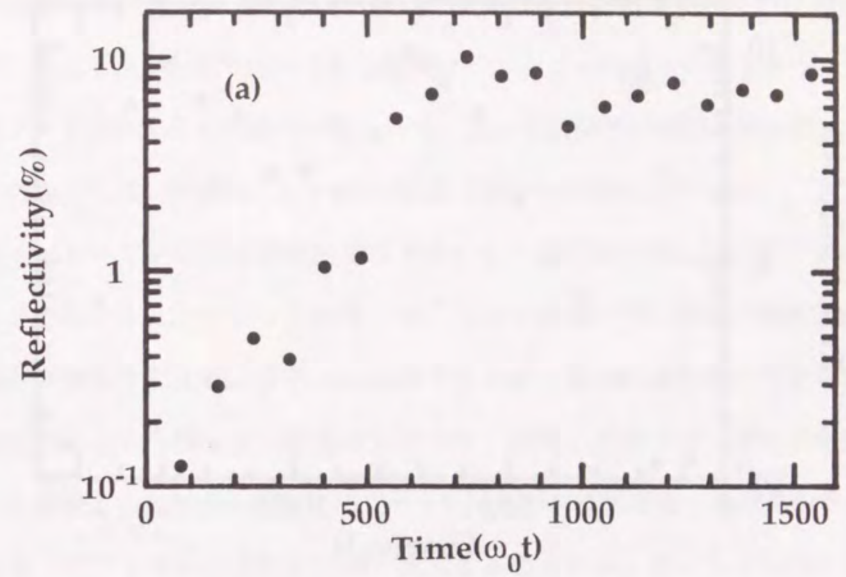
超高エネルギー電子の誘導ラマン散乱による生成と輸送による損失に起因する誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを調べるために，イオンを初期プロファイルのまま固定してシミュレーションを行なった．つまり，イオンを固定することにより，もはやプラズマの膨張とそれに付随する超高エネルギー電子の損失および密度プロファイルの急峻化による密度の線形空間スケール長の変化が起こらないことになる．

このイオンを固定したときの，散乱波の強度，即ち入射レーザーの反射率の時間発展を，超高エネルギー電子のｓｉｎｋにおける異なった二つの損失率について，図６－７

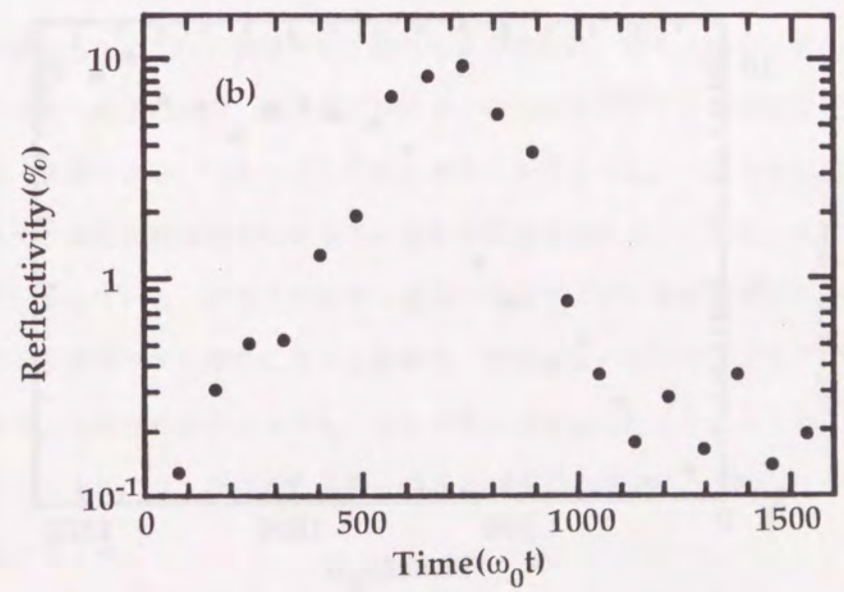
（ａ）および（ｂ）に示す．ここで，損失率は，それぞれ４０％および１０％である．超高エネルギー電子の損失率が４０％と比較的に大きな場合には，誘導ラマン散乱による超高エネルギー電子の生成と損失が速やかにバランスしてしまい，入射レーザーの反射率は，一定の飽和レベル～１０％に次第に近づき，定常的な状態になってしまう．一方，損失率が小さく１０％の場合には，いったん超高エネルギー電子が生成されて誘導ラマン散乱が起こらなくなると，超高エネルギー電子がｓｉｎｋにより損失して実効的な電子温度が十分に低くなり，再び誘導ラマン散乱が起こるまでには長い時間が必要になる．このため，反射率は大きな振幅・周期を持つ緩和振動をし，散乱波そのものは脈動的に発生することになる．

さて次に，電子プラズマ波のポンドラモーティブ力による密度プロファイルの急峻化に起因する誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを調べるため，イオンを固定しないでシミュレーションを行なった．この場合，プラズマは図６－５に示されているように真空中に膨張するので，超高エネルギー電子は，この膨張とｓｉｎｋの両方により損失されることになる．

前と同様に，このときの入射レーザーの反射率の時間発展を，超高エネルギー電子のｓｉｎｋにおける異なった二つの損失率について，図６－８（ａ）および（ｂ）に示す．ここでも，損失率は，それぞれ４０％と１０％である．損失率が大きい場合には，プラズマ膨張とｓｉｎｋにより高い割合で超高エネルギー電子が失われるため，誘導ラマン散乱の成長を抑制するほどには超高エネルギー電子の密度は大きくならない．このため，電子プラズマ波が誘導ラマン散乱により局所的に激しく励起されて，同時にその電子プラズマ波による強いポンドラモーティブ力が密度プロファイルを急峻化し，反射率の緩和振動を招く．なお，このシミュレーションの場合，シミュレーションシステムが有限のために，プラズマの膨張と密度プロファイルの急峻化により時刻 $\omega_0 t > 1500$ では，システム内に１／４遮断密度以上の密度を持った領域がなくなってしまう．このため，この時刻以後は，入射レーザーはもはや誘導ラマン散乱を起こさないため，反射率は急激に低下する．一方の損失率が小さい場合には，超高エネルギー電子は十分には失われ

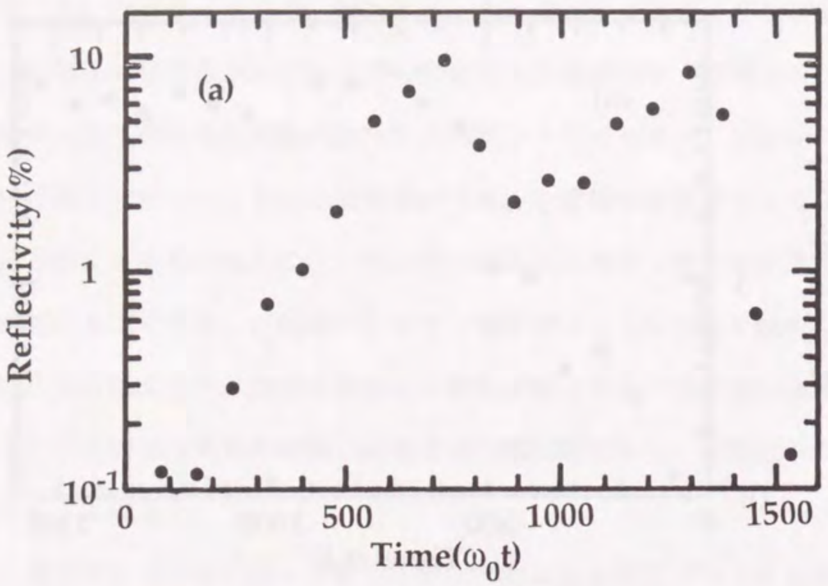


（ａ）損失率が大きい場合（４０％）

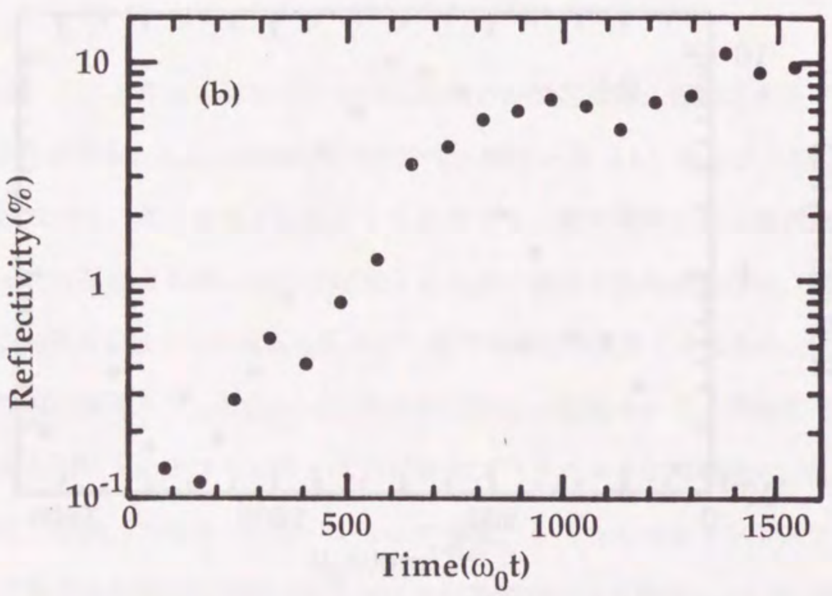


（ｂ）損失率が小さい場合（１０％）

図６－７　イオンを固定したときの反射率の時間発展．



（a）損失率が大きい場合（４０％）



（b）損失率が小さい場合（１０％）

図６－８　イオンを固定しないときの反射率の時間発展．

ず，その超高エネルギー電子によるランダウ減衰のために誘導ラマン散乱の成長率は大きく減少してしまい，上記で述べた緩和振動のメカニズムがぼやけてしまう．このため，密度プロファイルの大きな急峻化が起こらず，従って反射率の緩和振動も観測されない．なお，この場合には，時刻$\omega_0 t > 1700$以後（図中には現れていない），シミュレーションプラズマすべてが１／４遮断密度以下になるため反射率は急激に低下する．

以上に述べたシミュレーション結果から，二つの誘導ラマン散乱の飽和機構が反射率の緩和振動・脈動を引き起こすための超高エネルギー電子の損失率の大きさに対する条件は，相反するという興味深い事実がわかった．即ち，誘導ラマン散乱が超高エネルギー電子の生成により飽和する場合には，小さな損失率が緩和振動・脈動を引き起こすが，一方の密度プロファイルの急峻化により飽和する場合には，逆に大きな損失率が緩和振動・脈動を引き起こす．

６．４　理論モデル

前節で議論したように，誘導ラマン散乱による散乱波，即ち入射レーザーの反射率は超高エネルギー電子の生成・損失およびイオン密度プロファイルの急峻化と結びついて緩和振動・脈動をする．（６－３）式からも明らかなように，プラズマの初期密度勾配は誘導ラマン散乱の閾値を決定するのに重要な要因ではある．しかし，本章で研究の対象として着目している，超高エネルギー電子の密度とイオン密度プロファイルのくぼみによる効果が誘導ラマン散乱に与える影響は，密度勾配のない均一プラズマ中での電磁波とプラズマの相互作用によっても，その本質は近似的に記述できると考えることができる．そこで本節では，簡単のため均一プラズマ中での電磁波とプラズマの非線形な結合方程式を考える．

誘導ラマン散乱における散乱波と電子プラズマ波のモード結合は，次式に示される現象論的な方程式により記述できるので，前節で述べた誘導ラマン散乱の二つの飽和機構に関するシミュレーション結果を解析的に議論することを，この方程式から出発するこ

とにする.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{te}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2\left(1+\frac{\delta n}{n_0}\right)\right]E_p = \alpha E_s^* E_i \tag{6－4}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2\left(1+\frac{\delta n}{n_0}\right)\right]E_s = \alpha E_p^* E_i \tag{6－5}$$

ここで，添字のｉ，ｓおよびｐは，それぞれ入射レーザー，散乱波および電子プラズマ波を意味する．また，ω_{pe}は プラズマ角周波数であり，v_{te}は電子の熱速度である．更に，$\delta n / n_0$は電子プラズマ波のポンドラモーティブ力によるイオン密度の変化である．

誘導ラマン散乱の整合条件および入射レーザー，散乱波および電子プラズマ波が満たすべき分散関係は，

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_s + \omega_p \\ k_i &= k_s + k_p \\ \omega_{i,s}^2 &= \omega_{pe}^2 + c^2 k_{i,s}^2 \\ \omega_p^2 &= \omega_{pe}^2 + 3v_{te}^2 k_p^2 \end{aligned} \tag{6－6}$$

となる．

解析を進めるために，次式で定義される電場に関する新しい変数ε_i，ε_s，ε_pを導入する．

$$\begin{aligned} E_p &= \varepsilon_p e^{i(\omega_p t - k_p x)} \\ E_s &= \varepsilon_s e^{i(\omega_s t - k_s x)} \\ E_i &= \varepsilon_i e^{i(\omega_i t - k_i x)} \end{aligned} \tag{6－7}$$

ε_i，ε_s，ε_pはゆっくりと変化する関数なので，２次以上の微分を無視することができ，（６－４）式および（６－５）式は（６－７）式を代入して，結局次のように書き換えることができる．

$$\left[i\left(\omega_p\frac{\partial}{\partial t} + 3v_{te}^2 k_p\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\omega_{pe}^2}{2}\frac{\delta n}{n_0}\right]\varepsilon_p = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_i\varepsilon_s^* \tag{6－8}$$

$$\left[i\left(\omega_s\frac{\partial}{\partial t} + c^2 k_s\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\omega_{pe}^2}{2}\frac{\delta n}{n_0}\right]\varepsilon_s = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_i\varepsilon_p^* \tag{6－9}$$

一方，整合条件の方は，簡単のため分散関係の熱的な補正項を無視して，

$$\begin{aligned} \omega_s &\approx \omega_p \approx \frac{\omega_i}{2} = \frac{\omega_0}{2} \\ k_p &\approx k_i \approx \frac{\sqrt{3}}{2}k_0 \\ k_s &\approx 0 \end{aligned} \tag{6－10}$$

と仮定する．ここで，ω_0およびk_0は，それぞれ入射レーザーの真空中での角周波数と波数である．

（６－８）式および（６－９）式の右辺の項は，入射レーザーにより駆動される誘導ラマン散乱の絶対的な成長項と考えることができる．また，電子プラズマ波の（６－８）式には，超高エネルギー電子（熱電子ではない！）によるランダウ減衰の項を新たに付け加えなければならない．一方，散乱波は，$k_s \sim 0$と仮定しているが群速度は十分大きいために，伝播により誘導ラマン散乱が起こっている領域から失われる．このため，散乱波の（６－９）式にも，この損失効果を取り入れるために実効的な損失項を新たに付け加える．プラズマは均一と仮定しているので$\partial / \partial x \sim 0$とおいて，上記に述べたことを考慮にいれると，（６－８）式および（６－９）式から（６－１０）式の整合条

件を用いて，次のような式が得られる．

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_p + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0}\frac{\delta n}{n_0}\varepsilon_p = i\Gamma\varepsilon_s^* - i\gamma_L(n_h)\varepsilon_p \qquad (6-11)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_s + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0}\frac{\delta n}{n_0}\varepsilon_s = i\Gamma\varepsilon_p^* - i\nu_{eff}\varepsilon_s \qquad (6-12)$$

ここで，Γは（６－３）式で与えられる誘導ラマン散乱の成長率であり，$\gamma_L(n_h)$およびν_{eff}は，それぞれ電子プラズマ波の超高エネルギー電子によるランダウ減衰率および散乱波の伝播による実効的な損失率である．

各々の電場εを$\varepsilon = a\,exp\,(i\theta)$とおくことにより，振幅の関数ａと位相の関数$\theta$に分離して，（６－１１）式および（６－１２）式は次のように書き換えることができる．

$$i\left[\frac{d}{dt}a_p - \Gamma a_s\cos\chi + \gamma_L a_p\right] - a_p\left[\frac{d}{dt}\theta_p - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0}\frac{\delta n}{n_0} + \Gamma\frac{a_s}{a_p}\sin\chi\right] = 0 \qquad (6-13)$$

$$i\left[\frac{d}{dt}a_s - \Gamma a_p\cos\chi + \nu_{eff}a_s\right] - a_s\left[\frac{d}{dt}\theta_s - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0}\frac{\delta n}{n_0} + \Gamma\frac{a_p}{a_s}\sin\chi\right] = 0 \qquad (6-14)$$

ここで，$\chi = \theta_p + \theta_s$である．

（６－１３）式と（６－１４）式のそれぞれの虚部と実部の和を取ることにより，最終的に次式が得られる．

$$\frac{d}{dt}a_p + \gamma_L a_p = \Gamma a_s\cos\chi \qquad (6-15)$$

$$\frac{d}{dt}a_s + \nu_{eff}a_s = \Gamma a_p\cos\chi \qquad (6-16)$$

$$\frac{d}{dt}\chi + \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_0}\left(a_p^2 + a_s^2\right) = -\Gamma\frac{a_p^2 + a_s^2}{a_p a_s}\sin\chi \qquad (6-17)$$

なお，この式の導出には，電子プラズマ波のポンドラモーティブ力による非線形なイオン密度の変化を求めるために圧力バランス条件，即ち$\delta n / n_0 \sim (a_p^2 + a_s^2)$を用いている[24]．この単純な三つの式，つまり（６－１５）式，（６－１６）式および（６－１７）式が誘導ラマン散乱によって励起される散乱波，電子プラズマ波およびプラズマのモード結合を記述している．

次に，超高エネルギー電子の生成と損失について考えなければならない．誘導ラマン散乱が起こっている１／４遮断密度近傍の領域に入ってくる熱電子は，電子プラズマ波により共鳴的に加速されて超高エネルギー電子になると考えられる．よって，共鳴的に加速される熱電子すべてが超高エネルギー電子になると仮定すると，超高エネルギー電子の生成項は，熱電子の分布関数を用いて次のように書くことができる．

$$s = \left[\int_{-v_{ph}-v_{tr}}^{-v_{ph}+v_{tr}} + \int_{v_{ph}-v_{tr}}^{v_{ph}+v_{tr}}\right] dv\,\frac{n_{cr}}{4}\,\frac{v f_e(v)}{D} \qquad (6-18)$$

ここで，v_{ph}およびv_{tr}は，それぞれ電子プラズマ波の位相速度およびその電子プラズマ波のポテンシャルによって捕獲される電子の速度である．また，$f_e(v)$は規格化された電子のマクスウェル分布関数であり，Ｄは図６－３に示されたシミュレーションプラズマの長さである．

更に，v_{tr}は電子プラズマ波の電場中での運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの保存を考えることにより$1/2\,m_e v_{tr}^2 \sim 2e\phi$と評価できる．ここで，$m_e$は電子の質量であり，$\phi$は電子プラズマ波のポテンシャルである[25]．また，v_{ph}は整合条件（６－１０）式より，$v_{ph} = \omega_p / k_p \sim c/\sqrt{3}$となる．ここで，ｃは光速である．

最終的に，超高エネルギー電子の生成・損失方程式は，損失項を加えて次式で与えられる．

$$\frac{d}{dt}n_h = s - \nu n_h \qquad (6-19)$$

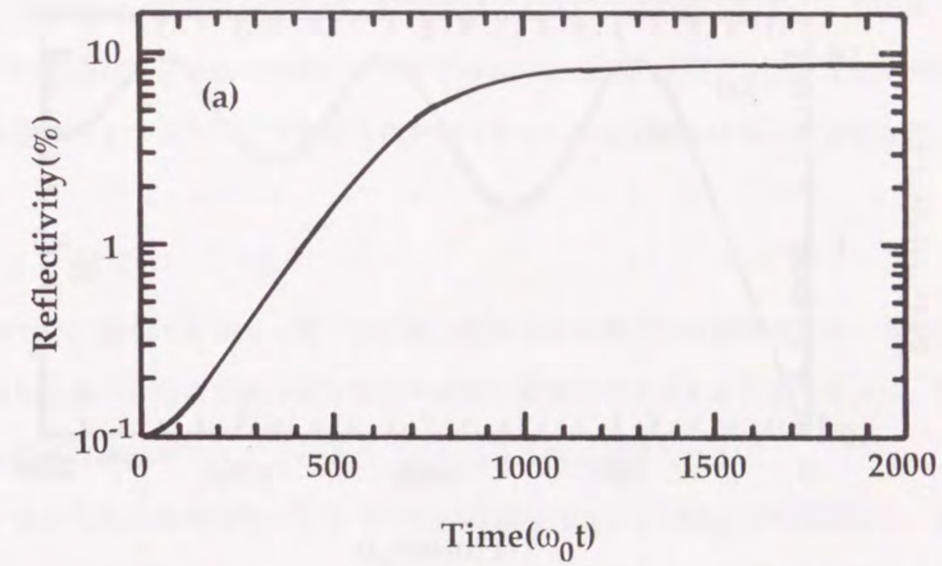
ここで，n_hは超高エネルギー電子の密度であり，νはｓｉｎｋと膨張による両方の効果を含んだ超高エネルギー電子の損失率である．

以上に述べた方程式が，本節で取り扱う理論モデルである．

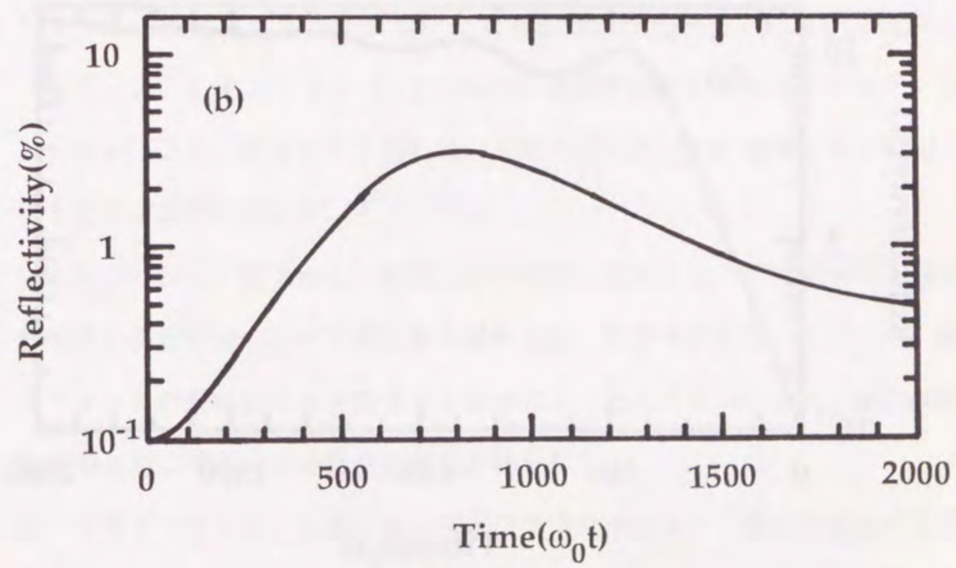
まず最初に，イオン密度プロファイルの変化による効果を無視して超高エネルギー電子の生成・損失だけによる誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを解析するために，（６－１５）式および（６－１６）式中で$\chi = 0$とおいて密度変化の効果をなくし，簡単のために散乱波の伝播による実効的な損失率を$\nu_{eff} = \Gamma$とおく．（６－１５）式，（６－１６）式および（６－１９）式を，超高エネルギー電子の損失率の二つの異なった場合について，数値的に解いた結果を図６－９（ａ）および（ｂ）に示す．なお，超高エネルギー電子の電子温度は，図６－４に示されたシミュレーション結果より６０ｋｅＶと仮定した．シミュレーション結果である図６－７の（ａ）および（ｂ）と比較すると，両者は定性的に一致していることがわかる．

次に，密度の線形空間スケール長の変化による誘導ラマン散乱の飽和機構のダイナミクスを調べるために，四つの方程式（６－１５）式，（６－１６）式，（６－１７）式および（６－１９）式を数値的に解析する．散乱波にとっては１／４遮断密度が遮断密度となるため，散乱波は電子プラズマ波のポンドラモーティブ力により密度プロファイルに穿たれた穴に捕獲されて伝播のために失われないと考えられる．よって，ここでは散乱波の伝播による実効的な損失率を$\nu_{eff} = 0$とおく．同様に，超高エネルギー電子の損失率の二つの異なった場合について，数値的に解いた結果を図６－１０（ａ）および（ｂ）に示す．この場合も，シミュレーション結果である図６－８の（ａ）および（ｂ）と比較して両者は定性的に一致していることがわかる．

前節のシミュレーションは密度勾配のある不均一プラズマで行なわれ，本節の理論解析は簡単のために均一プラズマを用いているので，両者の結果を直接比較・議論することはできない．しかし，以上の解析によりプラズマの密度勾配は誘導ラマン散乱の成長

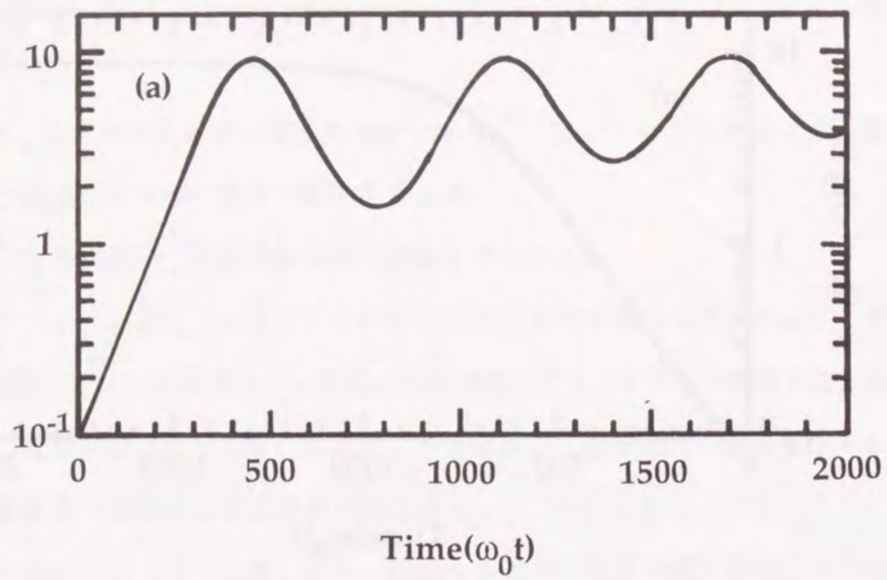


（ａ）損失率が大きい場合

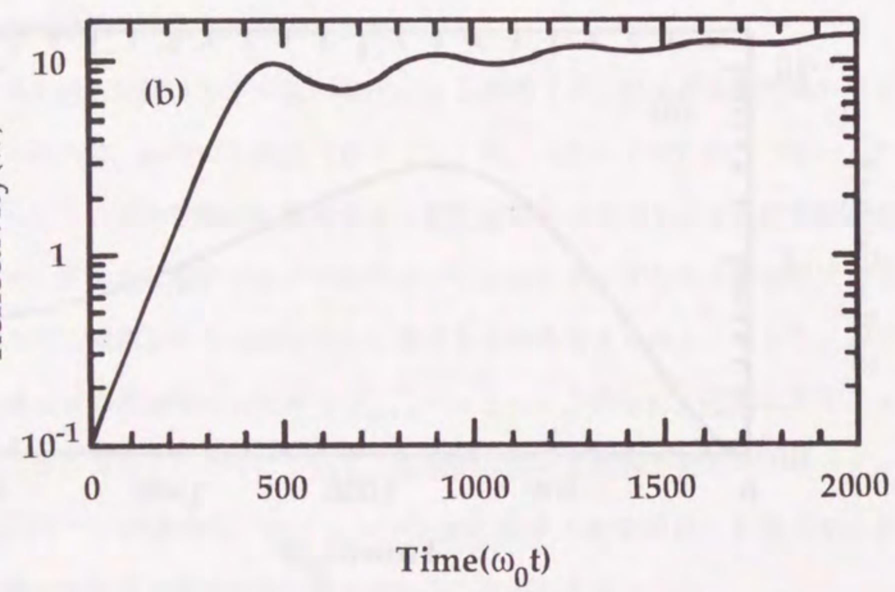


（ｂ）損失率が小さい場合

図６－９　超高エネルギー電子の生成・損失による反射率の緩和振動．



（a）損失率が大きい場合



（b）損失率が小さい場合

図６－１０　密度プロファイルの急峻化による反射率の緩和振動．

率を決定する上では重要であるが，飽和機構にとっては主要因ではなく，超高エネルギー電子の密度およびイオン密度プロファイルのくぼみが，誘導ラマン散乱の飽和機構とその脈動のダイナミクスに大きな役割を果たしていると結論付けることができる．

6.5　結言

本章では，超高エネルギー電子の生成・損失および密度の線形空間スケール長の変化よって引き起こされる誘導ラマン散乱の飽和・脈動のダイナミクスをシミュレーションおよび簡単な理論モデルにより調べ，次のような結果が得られた．

1）密度勾配を持つ不均一プラズマ中での線形理論による成長率の表式から，誘導ラマン散乱は電子温度の上昇および密度勾配の急峻化という二つの機構によって飽和することを明らかにした．このことから，超高エネルギー電子密度の増加・減少と密度プロファイル上のくぼみの深さの緩和振動に伴って，誘導ラマン散乱は脈動的なふるまいをすることが予測された．

2）システム内に超高エネルギー電子をある定められた割合で吸収する特別な領域（ｓｉｎｋ）を導入した１-１/２次元相対論的電磁粒子コードを用いたシミュレーションにより，誘導ラマン散乱は，上記で述べた二つの機構により飽和・脈動することが確かめられた．

3）シミュレーション結果から，誘導ラマン散乱が超高エネルギー電子の生成により飽和する場合には，小さな損失率が緩和振動・脈動を引き起こす．一方，密度プロファイルの急峻化により飽和する場合には，逆に大きな損失率が緩和振動・脈動を引き起こすという興味深い結果が得られた．

4）均一プラズマ中における散乱波と電子プラズマ波のモード結合を記述する現象論的な方程式および超高エネルギー電子の生成・損失に関する方程式を用いた理論解析による結果は，シミュレーション結果と定性的に一致していることが明らかになった．

5）このため，プラズマの密度勾配は誘導ラマン散乱の成長率を決定する上では重要であるが，飽和・脈動にとっては主要因ではなく，超高エネルギー電子の生成・損失およびイオン密度プロファイルの急峻化・緩和が，そのダイナミクスに大きな役割を果たしていることが明らかになった．

参考文献

1）K. Tanaka, L. M. Goldman, W. Seka, M. C. Richardson, J. M. Soures, and E. A. Williams, Phys. Rev. Lett. **48**, 1179 (1982).

2）D. W. Phillion, D. L. Banner, E. M. Campbell, R. E. Turner, and K. G. Estabrook, Phys. Fluids **25**, 1434 (1982).

3）R. P. Drake, R. E. Turner, B. F. Lasinski, K. G. Estabrook, E. M. Campbell, C. L. Wang, D. W. Phillion, E. A. Williams, and W. L. Kruer, Phys. Rev. Lett. **53**, 1739 (1984).

4）H. Figueroa, C. Joshi, H. Azechi, N. A. Ebrahim, and K. Estabrook, Phys. Fluids **27**, 1887 (1984).

5）W. Seka, E. A. Williams, R. S. Craxton, L. M. Goldman, R. W. Short, and K. Tanaka, Phys. Fluids **27**, 2181 (1984).

6）Y. Sakawa, K. A. Tanaka, H. Nishimura, M. Nakai, T. Yabe, H. Sakurai, Y. Izawa, Y. Kato, T. Mochizuki, M. Nakatsuka, and C. Yamanaka, Phys. Fluids **30**, 3276 (1987).

7）A. Simon, W. Seka, L. M. Goldman, and R. W. Short, Phys. Fluids **29**, 1704 (1986).

8）W. L. Kruer, K. Estabrook, B. F. Lasinski and A. B. Langdon, Phys. Fluids **23**, 1326 (1980).

9）B. Amini and F. F. Chen, Phys. Fluids **29**, 3864 (1986).

１０）C. J. McKinstrie and A. Simon, Phys. Fluids **28**, 2602 (1985).

１１）H. H. Klein, E. Ott, and W. M. Manheimer, Phys. Fluids **18**, 1031 (1975).

１２）K. Estabrook, W. L. Kruer and B. F. Lasinski, Phys. Rev. Lett **45**, 1399 (1980).

１３）K. Estabrook and W. L. Kruer, Phys. Rev. Lett. **53**, 465 (1984).

１４）K. Estabrook and W. L. Kruer, Phys. Fluids **26**, 1892 (1983).

１５）G. Bonnard, Laser and Particle Beams **5**, 101 (1987).

１６）C. H. Aldrich, D. F. Bezzerides, D. F. Dubois, and H. A. Rose, Comm. Plasma Phys. **10**, 1 (1986).

１７）W. Rozmus, R. P. Sharma, J. C. Samson and W. Tighe, Phys. Fluids **30**, 2181 (1987).

１８）H. C. arr and F. F. Chen, Phys. Fluids **30**, 1180 (1987).

１９）W. L. Kruer, The Physics of Laser Plasma Interactions, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1988).

２０）A. Simon and W. B. Thomson, Advances in Plasma Physics, (Wiley, New York, 1976).

２１）J. F. Drake and Y. C. Lee, Phys. Rev. Lett **31**, 1197 (1973).

２２）H. A. Rose, D. F. DuBois and B. Bezzerides, Phys. Rev. Lett **58**, 2547 (1987).

２３）C. K. Birdsall and A. B. Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation, (McGraw-Hill, New York, 1982).

２４）H. H. Chen and C. S. Liu, Phys. Rev. Lett **39**, 881 (1977).

２５）R. Z. Sagdeev and A. A. Galeev, Nonlinear Plasma Theory, (Benjamin, New York, 1969).

第７章　結論

レーザー核融合の研究では，初期の段階からシミュレーションによる解析が重要な役割を担ってきたが，これまでの多くの実験で得られた全中性子発生数は１次元流体コードのシミュレーション結果から予想される値よりもかなり小さいな値を示している．この原因の一つとして１次元流体コードでは本質的に扱えない２次元的・３次元的な爆縮の一様性・対称性が考えられており，この多次元効果に対する２次元・３次元コードのシミュレーションによる解析が急務になっている．１次元流体コードのシミュレーションにより，核反応は最大圧縮が得られるスタグネーションフェーズにおいて支配的に起こり，このフェーズで中性子の発生数が急激に増加することが明らかにされた．従って，スタグネーションフェーズにおける燃料とプッシャーの接触面でのレイリー・テイラー不安定性による燃料とプッシャーのミキシングは，全中性子発生数を大幅に減少させると考えられる．

本論文では，このスタグネーションフェーズにおける爆縮の一様性・対称性を損なうレイリー・テイラー不安定性に着目し，この不安定性をシミュレーションできる新しい２次元・３次元流体コード『ＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄ』を開発すると共に，このコードを用いたシミュレーションによりレイリー・テイラー不安定性の線形・非線形時間発展を一貫して調べた．特に，３次元現象を取り扱えるようになったことの意義は大きく，本研究により初めて３次元球対称ターゲットにおけるレイリー・テイラー不安定性のふるまいが明らかになった．また，ターゲット燃料の先行加熱の原因となる超高エネルギーの電子を発生させる誘導ラマン散乱の二つの飽和機構もあわせて明らかにした．

以下に，本論文で得られた結果を各章ごとに総括する．

第２章　シミュレーションコードの開発

１）時間と空間の両方に２次の精度を持ち，かつ非物理的な振動を伴わずに不連続面を数メッシュの高解像度で捕らえることのできるＴＶＤスキームを１次元流体方程式に適用し，その優れた特質を確認した．

２）１次元流体方程式に適用したアルゴリズムを分ステップ法を用いて多次元に拡張し，多次元流体コードＩＭＰＡＣＴ－２Ｄ，３Ｄを開発した．

３）微小・ランダムなじょう乱が存在する場合にレイリー・テイラー不安定性によって軽い流体が重い流体中に侵入する距離の時間発展は，K. I. Read による実験結果とＩＭＰＡＣＴ－２Ｄによるシミュレーション結果とがよく一致した．

４）３次元のシミュレーション結果を的確に把握するためには不可欠である可視化の手法をボリューム・レンダリングの一つであるマーチング・キューブ法を用いて開発した．

第３章　２次元円柱対称ターゲット

１）古典的なレイリー・テイラー不安定性の線形成長率は，シミュレーションにおける線形成長率の良い近似になっていた．しかし，両者には，特に大きなモード数においてくいちがいがみられた．

２）スタグネーションのダイナミクスを記述する自己相似解の固有値解析により線形成長率を理論的に調べた．その結果，時間発展を考慮にいれた実効的な線形成長率がシミュレーション結果と非常によく一致することが明らかになった．

３）指数関数的成長の飽和レベルは$\delta \sim 0.35\lambda_0$となり，自由落下的成長の係数$\eta$は一定の値$\sim 0.2$となることが明らかになった．このため，モード数の大きなじょう乱は，比較的ゆっくり成長するため従来考えられていたほどにはレーザー核融合にとって危険ではないことが明らかになった．

４）非線形段階の成長が進むとバブル・スパイク構造が形成されるが，じょう乱の振幅が$\delta \sim \lambda$になると強い速度シアーのために大きな渦度が生成されることが明ら

かになった．この渦のために，スパイクの形状はキノコ形になり，更に，外側に噴出する超音速燃料ジェットが生成されることが見いだされた．

5）指数関数的に成長する線形段階および自由落下的に成長する非線形段階を含む簡単な時間発展モデルを考え，スタグネーションフェーズ開始時のじょう乱の初期振幅とモード数の関数として最大圧縮時におけるじょう乱の振幅を評価した．

第4章　電子熱伝導による不安定性の抑制

1）じょう乱の波長が電子の平均自由行程の１０倍より短くなると，レイリー・テイラー不安定性が電子熱伝導により著しく抑制されることが明らかになった．

2）電子熱伝導に伴い燃料・プッシャー接触面が有限の幅を持つので，非線形なバブル・スパイク構造そのものがぼかされてしまい，非線形段階の成長も著しく緩和されることが明らかになった．

3）質量密度の有限勾配効果による線形成長率の緩和を解析的に求めた結果とシミュレーション結果とはよく一致しており，電子熱伝導に伴い質量密度プロファイルが滑らかになることが，線形成長の抑制に重要な役割を果たしていることが明らかになった．

第5章　３次元球対称ターゲット

1）自己相似解の固有値解析による理論的な線形成長率は，シミュレーション結果と，次数のみに依存し陪数には依存しないというモード数に対する依存性だけではなくその絶対値も非常によく一致することが明らかになった．

2）指数関数的な成長の飽和レベルは，ほぼ$\delta \sim \lambda_0$であり，自由落下的成長の係数ηは，ほぼ$\eta \sim 1$となることが明らかになった．この結果，３次元の場合は，飽和レベルおよび自由落下的成長のスピードという両方の面において，２次元の場合に比べて，より悪い燃料とプッシャーのミキシング条件を示すことが明らかになった．

3）平面（2.5節），円柱（3.5節）および球（5.4節）の場合の結果を比較することにより，自由落下的成長の係数ηは幾何形状により異なった値を示すことが明らかになった．

4）非線形段階のバブル・スパイク構造が形成されると，速度シアーのためにバブル根元に渦度リングが生成されるが，このリングは，バブルそのものの成長を促進し，大きな指数関数的成長の飽和レベルを招くことが明らかになった．

5）３次元平面系では初期条件によってバブルがスパイクに取り囲まれる構造を示したりスパイクがバブルに取り囲まれる構造を示したりするが，３次元球対称系ではバブルがスパイクに取り囲まれる構造が本質的であることが明らかになった．

第6章　誘導ラマン散乱の飽和機構

1）密度勾配を持つ不均一プラズマ中での線形理論による成長率の表式から，誘導ラマン散乱は超高エネルギー電子密度の増加・減少と密度プロファイル上のくぼみの深さの緩和振動に伴って，脈動的なふるまいをすることが予測された．

2）システム内に超高エネルギー電子を吸収する特別な領域（ｓｉｎｋ）を導入した1-1/2次元相対論的電磁粒子コードにより，誘導ラマン散乱はその二つの機構により飽和・脈動することが確かめられた．

3）誘導ラマン散乱が超高エネルギー電子の生成により飽和する場合には，小さな損失率が緩和振動・脈動を引き起こすが，密度プロファイルの急峻化により飽和する場合には，逆に大きな損失率が緩和振動・脈動を引き起こすという興味深い結果が得られた．

4）モード結合を記述する簡単な現象論的な方程式および超高エネルギー電子の生成・損失方程式による理論解析結果は，シミュレーション結果と定性的に一致しており，超高エネルギー電子の密度およびイオン密度プロファイルのくぼみが，誘導ラマン散乱のダイナミクスに大きな役割を果たしていることが明らかになった．

謝辞

本研究の遂行に際し，終始懇篤なる御指導，御鞭撻を賜りました大阪大学西原功修教授に深厚なる感謝の意を表します．あわせて受託研究員として大阪大学レーザー核融合研究センターでの研究中に御指導，御教示を戴きました同学三間圀興教授，中井貞雄教授に謝意を表します．

本研究を行なう機会を与えて戴くと共に，深い御理解と御支援を戴いた（財）レーザー技術総合研究所所長山中千代衛大阪大学名誉教授ならびにスーパーコンピュータ研究所所長ラウル・メンデス氏に厚く感謝致します．

本研究を通じてたゆまぬ有益な御助言，討論，ならびに激励を戴きました大阪大学渡辺健二名誉教授，横山昌弘教授，石村勉教授，青木亮三教授，三宅正宣教授，権田俊一教授，山中龍彦教授，井沢靖和教授に深く感謝致します．

また終始変わらぬ御指導，助言を戴きました同学高部英明講師，田中和夫講師，西口彰夫氏に厚く感謝します．

終わりに本研究を進めるにあたり惜しみない御協力を戴きました大阪大学レーザー核融合研究センターの理論シミュレーション・グループおよび計算機室の方々に，スーパーコンピュータ研究所の研究員およびエンジニアの方々に深く感謝します．

業績目録

主要論文

1）The Performance of the Alliant FX/8 on Two Sets of Benchmarks
C. Eoyang, *H. Sakagami* and R. Mendez
Lecture Notes in Engineering **36**, 98 (Springer-Verlag, 1988).

2）Particle-Particle Particle-Mesh Simulation of Laser-Produced Dense Plasma
K. Nishihara, H. Furukawa, T. Hiramatsu, M. Kawaguchi and *H. Sakagami*
Laser Interaction with Matter, 368 (World Science, 1989).

3）Pulsation of Stimulated Raman Scattering in a Laser Plasma
H. Sakagami, K. Mima and K. Nishihara
Phys. Fluids B **2**, 815 (1990).

4）Three Dimensional Rayleigh-Taylor Instability of Spherical Systems
H. Sakagami and K. Nishihara
Phys. Rev. Lett. **65**, 432 (1990).

5）Rayleigh-Taylor Instability on Pusher-Fuel Contact Surface of Stagnating Targets
H. Sakagami and K. Nishihara
to be published in Phys. Fluids B **2**, No. 11 (1990).

その他の発表論文

1） Stability of Time Filtering Particle Code Simulations

H. Sakagami, K. Nishihara and D. C. Colonbant

ILE Research Report, ILE 8117P (1981).

2） Formation of Weak Double Laysers in Ion Acoustic Turbulence

K. Nishihara, *H. Sakagami*, T. Taniuchi and A. Hasegawa

ILE Research Report, ILE 8213P (1982).

3） Ion Acoustic Turbulence and Double Layer Formation

H. Sakagami and K. Nishihara

ILE Annual Progress Report on Laser Fusion Program,

ILE-APR-81, 81 (1982).

4） Saturation Mechanisms of Stimulated Raman Scattering

K. Mima, *H. Sakagami* and K. Nishihara

ILE Annual Progress Report on Laser Fusion Program,

ILE-APR-81, 83 (1982).

5） Stability of Time Filtering Particle Code

H. Sakagami, K. Nishihara and D. C. Colonbant

ILE Annual Progress Report on Laser Fusion Program,

ILE-APR-81, 97 (1982).

6） ＩＢＭ３０９０ＶＦにおけるベクトル化の手法

坂上仁志

三菱重工　研究報告，２Ｓ１８６１９Ａ（１９８６）．

7） The Performance of the Alliant FX-8 on Two Sets of Benchmarks

C. Eoyang, *H. Sakagami* and R. Mendez

ISR Technical Report, TR 87-04 (1987).

8） ミニスーパーコンピュータのベンチマークテスト

坂上仁志，欧陽クリストファー，ラウル・メンデス

日経コンピュータ　１９８８年１月４日号.

9） Saturation Mechanisms of Stimulated Raman Scattering

H. Sakagami, K. Mima and K. Nishihara

ISR Technical Report, TR 88-02 (1988).

１０） Rayleigh-Taylor Instability in Pusher-Fuel Contact Surface of Stagnating Targets

H. Sakagami and K. Nishihara

ISR Technical Report, TR 89-03 (1989).

１１） Pulsation of Stimulated Raman Scattering in a Laser Plasma

H. Sakagami, K. Mima and K. Nishihara

ILE Quarterly Progress Report, ILE-QPR-88-28, 36 (1989)

１２） Rayleigh-Taylor Instability in Pusher-Fuel Contact Surface of Stagnating Targets

H. Sakagami and K. Nishihara

ILE Quarterly Progress Report, ILE-QPR-88-28, 51 (1989).

１３） Rayleigh-Taylor Instability on Pusher-Fuel Contact Surface of Stagnating Targets

H. Sakagami and K. Nishihara

ILE Research Report, ILE 8903P (1989).

１４） The Three Dimensional Rayleigh-Taylor Instability of Spherical Systems

H. Sakagami and K. Nishihara

ISR Technical Report, TR 90-01 (1990).

1 5) The Three Dimensional Rayleigh-Taylor Instability of Spherical Systems

H. Sakagami and K. Nishihara

ILE Quarterly Progress Report, ILE-QPR-89-32, 71 (1990).

国際会議

1) One and Two Dimensional High Energy Electron Transport

H. Takabe, K. Mima, K. Nishihara, *H. Sakagami*, T. Sugiyama, T. Yabe, K. Yoshikawa and C. Yamanaka

14th European Conf. on Laser Interaction with Mattter, Palaiseau, France, September 15-19 (1980).

2) Formation of Negative Potential Solitary Wave and Double Layer

K. Nishihara, *H. Sakagami*, T. Taniuchi and A. Hasegawa

Proc. of Symposium on Plasma Double Layers, R-472, 41 (1982).

3) Hot Electron Generation by Raman Scattering and Heat Flux Filamentation

T. Yabe, K. Mima,*H. Sakagami* and K. Nishihara

Proc. of Japan-US Seminar on Theory and Application of Multiply-Ionized Plasmas Produced by Laser and Particle Beams, 203 (1982).

4) Stability of Time Filtering Implicit Particle Codes

K. Nishihara, *H. Sakagami* and D. C. Colombant

Proc. of 10th Conf. on Numerical Simulation of Plasma, 2B-7 (1983).

5) Particle Simulations on Static and Dynamic Properties of Two Component Hot Dense Plasmsas

H. Furukawa, K. Nishihara, M. Kawaguchi, *H. Sakagami*, T. Hiramatsu and H. Yasui

24th Yamada Conf. on Strongly Coupled Plasma Physics, Lake Yamada, August 29 - September 2 (1989).

6) Rayleigh-Taylor Instability of Stagnating Targets

H. Sakagami and K. Nishihara

CECAM Workshop on Rayleigh-Taylor Instabilities, Thermal Smoothing and Interaction in Laser-Plasma, Orsay, France, September 18-29 (1989).

7) Three Dimensional Particle Code for Strongly Coupled Plasmas and Contact Potential and Surface Tension between Different Hot Dense Plasmas

K. Nishihara, H. Furukawa, M. Kawaguchi, *H. Sakagami*, T. Hiramatsu and H. Yasui

Proc. of 13th Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas, IM-4 (1989).

8) Two and Three Dimensional Nonlinear Evolution of Rayleigh-Taylor Instability at Fuel-Pusher Contact Surface

H. Sakagami and K. Nishihara

Bull. Am. Phys. Soc. **34**, 2021 (1989).

9) Vortex Associated with the Rayleigh-Taylor Instability in Cylindrically Stagnating Targets

H. Sakagami and K. Nishihara

Proc. of Workshop of US-Japan Joint Institute for Fusion Theory Program, NIFS-PROC-2, 141 (1990).

１０） Supercomputing in Laser Fusion Research at Institute of Laser Engineering

K. Nishihara, Y. -O. Fukuda, H. Furukawa, M. Kawaguchi, K. Mima, A. Nishiguchi, *H. Sakagami*, and H. Takabe

Proc. of Int. Conf. on Supercomputing in Nuclear Applications, Mito, Japan, March 12-16 (1990).

国内学会発表

１） ダブルレイヤーと大振幅負孤立波の計算機シミュレーション
日本物理学会　福井大学　１９８０年１０月

２） 非定常負イオン波とダブルレイヤーの生成機構
日本物理学会　広島大学　１９８１年　３月

３） Ｔｉｍｅ Ｆｉｌｔｅｒｉｎｇ Ｐａｒｔｉｃｌｅ Ｃｏｄｅ
日本物理学会　新潟大学　１９８１年１０月

４） 燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーション
日本物理学会　広島大学　１９８８年１０月

５） ３次元粒子－粒子，粒子－格子（ＰＰＰＭ）コードの性質
日本物理学会　広島大学　１９８８年１０月

６） 二成分強結合プラズマの粒子コードシミュレーション
プラズマ核融合学会　東京　１９８８年１１月

７） レイリー・テイラー不安定性のシミュレーション
プラズマ波動系のダイナミックスと乱れ研究会　名古屋大学　１９８８年１２月

８） 燃料・プッシャー接触面におけるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーション II
日本物理学会　東海大学　１９８９年　３月

９） 高密度プラズマでの波動の粒子シミュレーション
日本物理学会　東海大学　１９８９年　３月

１０） ３次元流体コードによるレイリー・テイラー不安定性のシミュレーション
日本物理学会　鹿児島大学　１９８９年１０月

１１） 高密度プラズマ中の波と電磁波の相互作用
日本物理学会　鹿児島大学　１９８９年１０月

１２） 3D PPPM Method for Two Component Strongly Coupled Plasma
日本物理学会　大阪大学　１９９０年　３月

１３） レイリー・テイラー不安定性のモード結合　Ｉ．理論
日本物理学会　大阪大学　１９９０年　４月

１４） レイリー・テイラー不安定性のモード結合　ＩＩ．シミュレーション
日本物理学会　大阪大学　１９９０年　４月