The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究
Author(s)	池田, 雅夫
Citation	大阪大学, 1975, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2258
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究

池　田　雅　夫

昭和50年4月

序　　文

本論文は，著者が大阪大学大学院工学研究科通信工学専攻に在学中，および神戸大学工学部システム工学科において行なった，ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究をまとめたもので，第1部「線形時変システムの構造と安定化」（第1章～第5章）と第2部「大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化」（第6章～第10章）から成っている．

まず，第1部では，状態方程式で記述される有限次元線形時変システムを対象に，その可制御性，可到達性，可観測性，可決定性の概念とフィードバックによる安定化問題について考え，可制御性や可観測性などに関するいくつかの性質がシステムをフィードバックによって安定にできるための条件であることを示している．第1部の各章の内容は次の通りである．

第1章は第1部の緒論で，線形時変システムの構造と安定化に関する研究の現状と本研究の目的および意義を述べている．

第2章では，第1部で対象とする線形時変システムを記述し，その可制御性，可到達性，可観測性，可決定性に関する諸概念を定義している．これらの概念のなかには本研究で初めて定義された概念がある．

第3章では，線形時変システムの状態フィードバックによる安定化について考察し，安定化できるための条件を求めている．そのために，まず，閉ループシステムに実現できる安定性の種類に応じて，可安定性，逆可安定性，可設計性の概念を導入している．そして，これらと可制御性，可到達性の間に等価な関係があることを示している．

第4章では，状態を直接には取り出せない線形時変システムに対する安定化問題を扱っている．そのなかで，まず，確定的状態推定器の構成問題について考え，どのような推定誤差で状態を推定できるかに応じて可検出性，逆可検出性，可推定性の概念を定義している．次に，この推定器の構成問題を双対システムや随伴システムに対する安定化問題に置き換えることができることを示し，第3章の結果を使って，可検出性，逆可検出性，可推定性と可観測性，可決定性の間に等価な関係があることを明らかにしている．そして，推定器により得られる状態の推定値をフィードバックすることによっても，真値をフィードバ

ックしたのと同様の安定化が可能であることを示している．

第5章は第1部の結論で，第1部の研究の成果を述べている．

次に，第2部では，ブロック線図で表わされる大規模ダイナミカルシステムを対象に，状態方程式表現，リプシッツ条件および線形化について考え，その大規模システムが意味のあるシステムであるためにはサブシステムの特性とそれらの接続関係がどのような条件を満たすべきかを明らかにしている．またサブシステムが線形時間不変かつ可制御ならば，サブシステムごとの安定化によって全体を安定にできることを示している．第2部の各章の内容は次の通りである．

第6章は第2部の緒論で，大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化に関する研究の現状と本研究の目的および意義を述べている．

第7章では，第2部で対象とするブロック線図で表わされる大規模ダイナミカルシステムを，サブシステムの特性とそれらの接続関係に分けて記述している．

第8章では，まず，線形サブシステムから成る大規模システムが全体として状態方程式で表わせるために，サブシステムの特性とそれらの接続関係が満たすべき必要十分条件を求め，次に，非線形サブシステムから成る大規模システムの場合について十分条件を求めている．そして，非線形大規模システムが状態方程式で表わせるとき，それがリプシッツ条件を満たすための十分条件を求めている．また，サブシステムごとの線形化によって得られる線形大規模システムがどのような場合に全体の線形化システムになるのかを明らかにしている．

第9章では，線形時間不変サブシステムから成る大規模システムを対象に，サブシステムごとの安定化によって全体システムを安定にする問題を考えている．そして，各サブシステムが完全可制御であれば，状態のフィードバックとフィードフォワードによる漸近安定化をサブシステムごとに行なうことによって，全体システムを漸近安定にすることができることを示している．また，状態を直接には取り出せないようなサブシステムから成る大規模システムの場合にも，各サブシステムが完全可制御かつ可検出であれば，状態推定器によって得られる状態の推定値を用いて同様の安定化が可能であることを示している．

第10章は第2部の結論で，第2部の研究の成果を述べている．

関　連　発　表　論　文

○　第1部「線形時変システムの構造と安定化」に関するもの

(1)　池田，前田；状態変数フィードバックによるシステムの安定化について，昭和45　年電気関係学会関西支部連合大会講演論文集，p. G200（昭45－11）．

(2)　池田，前田；状態ベクトルフィードバックによるシステムの安定化について，電子通信学会　回路とシステム理論研究会資料，CT 70－39（昭45－11）．

(3)　池田，前田，児玉；線形時変システムの状態フィードバックによる安定化について，電子通信学会論文誌（C），第54－C巻，第11号，pp. 972－978（昭46－11）．

(4)　池田，笹野，児玉；状態フィードバックによる線形システムの設計と状態推定機の設計について，第2回ダイナミカルシステム・シンポジウム講演論文集，pp. 43－46（昭47－7）．

(5)　池田，前田，児玉；一様完全可制御な線形時変システムの状態フィードバックによる安定化について，電子通信学会論文誌（D），第55-D巻第7号，pp. 442－447（昭47－7）．

(6)　池田，笹野，児玉；線形時変システムに対する状態推定機について，電子通信学会論文誌（D），第55－D巻，第7号，pp. 448-455（昭47－7）．

(7)　池田，前田，児玉；線形時変システムの状態フィードバックによる設計，電子通信学会論文誌（D），第55－D巻，第11号　pp. 707－714（昭47－11）．

(8)　M.Ikeda,H.Maeda and S.kodama;Stabilization of linear systems, SIAM Journal on Control, Vol.10, No.4, pp.716-729 (Nov.1972).

(9)　M.Ikeda,H.Maeda and S.kodama; Estimation and feedback in linear time-varying systems: A deterministic theory, SIAM Journal on Control, Vol.13, No.2, pp.304-326 (Feb.1975).

○　第２部「大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化」に関するもの

(1)　児玉，池田；線形システムの中間標準形について，第２回ダイナミカルシステム・シンポジウム講演論文集，pp. 13 － 16（昭47 － 7）.

(2)　M.Ikeda and S.Kodama; Large-scale dynamical systems: State equations, Lipschitz conditions and linearization, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol.CT-20, No.3, pp.193-202(May 1973).

(3)　児玉，池田；線形ダイナミカルシステムの表現式について，電子通信学会論文誌（Ｄ），第56－Ｄ巻，第10号，pp. 553 ～ 560（昭48－10）.

(4)　梅藤，池田；大規模線形システムの安定化について，第１７回自動制御連合講演会（前刷），pp. 169 － 170　（昭49 － 11）.

(5)　池田，梅藤，児玉；線形大規模システムの安定化，電気学会　自動制御研究会資料，ＡＣ－75－3　（昭50 － 1）.

目　　次

第 1 部　線形時変システムの構造と安定化 …… 1

第 1 章　緒　　論 …… 1

第 2 章　システムの記述と可制御性，可到達性，
可観測性，可決定性 …… 6

2．1　緒　　言 …… 6

2．2　システムの記述 …… 6

2．3　可制御性と可到達性 …… 7

2．4　可観測性と可決定性 …… 11

2．5　可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の関係 …… 14

2．6　結　　言 …… 17

第 3 章　状態フィードバックによる安定化 …… 18

3．1　緒　　言 …… 18

3．2　可安定性，逆可安定性と可設計性 …… 19

3．3　完全可制御なシステムの安定化と逆安定化 …… 25

3．4　完全可制御性に関して一様なシステムの安定化 …… 33

3．5　完全可到達性に関して一様なシステムの逆安定化 …… 38

3．6　一様完全可制御なシステムの安定性の指定 …… 42

3．7　結　　言 …… 50

第 4 章　出力フィードバックによる安定化 …… 52

4．1　緒　　言 …… 52

4．2　確定的状態推定器の構成 …… 54

4．2．1　可検出性，逆可検出性と可推定性 …… 54

4．2．2　状態フィードバックによるシステムの構成問題と
状態推定器の構成問題の関係 …… 57

4．2．3　状態推定器を構成できるための条件 …… 64

4．3　状態の推定値のフィードバック …… 66
4．4　結　　言 …… 77

第 5 章　結　　論 …… 79

第 2 部　大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化 …… 81

第 6 章　緒　　論 …… 81

第 7 章　大規模システムの記述 …… 86
7．1　緒　　言 …… 86
7．2　サブシステム …… 86
7．3　ブロック線図表現と接続マトリクス …… 89
7．4　結　　言 …… 93

第 8 章　大規模システムの状態方程式表現 …… 95
8．1　緒　　言 …… 95
8．2　線形大規模システムの状態方程式表現 …… 97
8．2．1　状態方程式表現できるための条件 …… 97
8．2．2　線形時間不変大規模システムの状態方程式表現 …… 107
8．3　非線形大規模システムの状態方程式表現 …… 114
8．3．1　状態方程式表現できるための条件 …… 114
8．3．2　リプシッツ条件 …… 123
8．4　非線形大規模システムの線形化 …… 134
8．5　結　　言 …… 144

第 9 章　線形時間不変大規模システムの安定化 …… 145
9．1　緒　　言 …… 145
9．2　線形時間不変大規模システムの安定条件 …… 146

9．3　サブシステムごとの安定化による
全体システムの安定化 …… 151
9．3．1　サブシステムの状態を直接取り出せる
場合の安定化法 …… 161
9．3．2　サブシステムの状態を直接には取り出せない
場合の安定化法 …… 169
9．4　結　　言 …… 173

第 10 章 結　　論 …… 175

謝　　辞 …… 177

文　　献 …… 178

第1部 線形時変システムの構造と安定化

第1章 緒　論

制御理論におけるもっとも基本的で重要な問題はフィードバックシステムの設計問題である．この問題に関して，いわゆる古典制御理論では，線形時間不変システムを対象にした周波数応答法，根軌跡法，極一零点法などの設計手法が確立されている．[1),2)] 一方，状態方程式表現を基盤とする現代制御理論においても，多変数線形システムを対象にしたフィードバックシステムの設計法がいくつも提案されている．対象を時間不変システムに限定すると，そのなかで定着しつつあるものに，古典制御理論の拡張である周波数領域での設計法[3),4)] 入力と状態の2次形式を評価関数とする最適レギュレータシステムの設計法，[5)~7)] 閉ループシステムの極の分布を希望する分布に一致させる極指定（pole assignment）法[8)~12)] がある．これらのうち，対象が線形時変システムの場合にも適用できるのは，時変システムには周波数応答や極の概念がないので，当然のことながら最適レギュレータシステムの設計法だけである．ところで，極と安定性の関係を考えると，極の分布を指定できることは安定性を指定できることを意味している．このように極の代りに安定性に注目して，時間不変システムに対する極指定問題を時変システムのクラスに拡張した設計問題が考えられており，いくつかの設計法が報告されている．[7),13),14)] しかし，これらの設計法は（i）その対象が狭いクラスの時変システムに限定されている，（ii）安定性を指定できるための条件が厳しい，（iii）安定性の精密な指定ができない，（iv）フィードバック則を求めるための計算量が膨大，など不充分な点をもっている．

本研究はこれらの点を解決し，安定性に注目した有限次元線形時変フィードバックシステムの設計問題に完全な解を与えることを目的としている．そのために，対象とする線形時変システムのパラメータにはそのシステムが解をもつことを保証するのに必要な最低の制限しか設けない．すなわち，ほとんどすべての有限次元線形連続時間システムがこの研究の対象である．安定性の指定に

ついては，零入力応答の上界だけでなく下界も同時に指定することを考える．そして，そのように安定性を指定できるための条件は可能な限りゆるめ，できれば必要十分条件を求める．線形時間不変システムの場合の極指定は零入力応答の上界だけでなく下界の指定も意味しているが，一般の時変システムに対してはこれまで上界のみを指定する問題がもっぱら考えられてきた．[7),14)]さらに，フィードバック則としてはそれを得るための計算量が少なくてすむものを求める．これまでに提案されているフィードバック則のなかにはRiccati 形微分方程式の極限解を用いているものがあるが，それを実現するには膨大な量の計算が必要である．[7)]

以下の第2章から第5章まではこのような観点に立った本研究の結果をまとめたもので，安定性に注目したフィードバックシステムの構成問題は状態フィードバックによる構成問題，状態推定器の構成問題，状態の推定値のフィードバックによる構成問題の3つの問題に分けて考えられている．この研究でシステムを構成するために状態またはその推定値のフィードバックを用いるのは，状態がシステムの過去のふるまいが未来のふるまいに与える情報をすべてもっているため，[15)] その情報を利用することによって精密な，そして複雑でない設計が可能になると予想されるからである．各章で述べることは次の通りである．

第2章では，まず，本研究で対象とする線形時変システムを記述する．対象とするシステムは状態方程式で表わされ，ほとんど制限がないと考えられるくらい一般的な有限次元線形時変システムである．次に，これまでの研究の結果から，任意に指定された安定性を状態フィードバックによって実現できるための条件と予想される可制御性と可到達性，および状態推定器を構成できるための条件と予想される可観測性と可決定性に関する概念を定義する．ここで定義される概念のうち，完全可制御性，完全可到達性，一様完全可制御性，完全可観測性，完全可決定性，一様完全可観測性はすでによく知られた概念であるが，[5),16),17)] 完全可制御性に関する一様性，完全可到達性に関する一様性，完全可観測性に関する一様性，完全可決定性に関する一様性は新しい概念である．これらの新しい概念は時変システムの性質を正確に表わすために導入されるものであって，有界システムのクラスでは一様完全可制御性や一様完全可観測性と等価であり，時間不変システムのクラスでは完全可制御性，完全可到達性や

完全可観測性，完全可決定性とも等価である．この章では，また，随伴システムと双対システムを介して成り立つ可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の間の等価な関係について述べる．

第3章では，指定された安定性を状態フィードバックによって実現する問題を考える．この問題は有限次元線形時間不変システムについては，開ループシステムが完全可制御であることが閉ループシステムの極を任意に配置できるための必要十分条件であることがWonham[11]によって示され，すでに解決している．しかし，時変システムについては，次の結果が得られているにすぎない．Wolovich[13]はパラメータの時間変化が充分に滑らかな1入力の一様可制御システムをリアプノフ変換により時間不変システムに変換して，指定された安定性を時変システムで実現する問題を時間不変システムの極指定問題に置き換え，一様可制御性よりも少し厳しい条件が安定性を任意に指定できるための十分条件であることを示している．この場合，問題が極配置問題に置き換えられているので，安定性の指定は零入力応答の上界と下界を指数関数で指定できる．もっと一般の時変システムに対しては，最適レギュレータ問題の結果として，開ループシステムが一様完全可制御ならば閉ループシステムを一様漸近安定にできることがKalman[5]によって示され，同じ条件のもとに零入力応答の上界を指数関数で指定できることがJohnson[14]およびAndersonとMoore[7]によって示唆されている．

このように，一般の時変システムに対しては，零入力応答の上界のみを指定する安定化問題が考えられてきた．ところが，上界だけを指定して閉ループシステムを構成したのでは，実現されたフィードバックシステムが必要以上に安定になり，外乱に対して非常に敏感になる可能性がある．したがって，そのようなことにならないように，上界とともに下界をも同時に指定してフィードバックシステムを構成できることが望ましい．第3章では，このような構成が可能であるための条件と構成方法を求めている．その結果によると，開ループシステムが一様完全可制御ならば，零入力応答の上界と下界を任意の指数関数で指定して閉ループシステムを構成することができる．また，有界な開ループシステムと有界なフィードバックゲインのクラスに限定して考えれば，この逆も成り立つ．しかも，フィードバックゲインは積分計算によって得られ，Riccati 形微分方程式の極限解を用いる場合よりはるかに簡単に求めることがで

きる．この章では，これらの結果を得る過程で，可制御性や可到達性が閉ループシステムの安定性をどのように指定できることを保証しているのか，をも明らかにする．

以上の第3章の結果から，指定された安定性を実現するために状態フィードバックが有効であることがわかるが，それが可能であるためには状態を出力として取り出せることが必要である．しかし，一般に状態を出力として直接取り出せることはほとんどない．このような場合に状態フィードバックを実現するためには，開ループシステムの入力と出力から状態を何らかの方法で推定しなければならない．第4章ではその1つの方法として，開ループシステムと同じ次元をもつ状態推定器を用いる方法を考える．そして，まず，このような推定器を推定誤差の安定性を指定して構成する問題が，時間不変システムの場合[11),12)]と同様に，随伴システムや双対システムに対するフィードバックシステムの構成問題と等価であることを示す．したがって，推定器の構成が可能であるための条件やその構成方法は第3章の結果や第2章の可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の間の関係から直ちに得られる．それによると，開ループシステムが一様完全可観測ならば，推定誤差の上界と下界を任意の指数関数で指定して推定器を構成することができる．また，開ループシステムと推定器を有界システムのクラスに限定すれば，この逆も成り立つ．

ところで，推定器が推定器としての意味のある動作をするためには第一に推定誤差が減衰しなければならない．そして，その減衰の速さは少なくとも（閉ループ）システムの減衰特性よりも速くなければならない．しかし，速ければ速いほど良いというわけではなく，あまりに速すぎると外乱に対して鋭敏になってしまう．そこで，一般には，推定誤差の減衰特性は（閉ループ）システムの減衰特性より少し速い程度に指定するのが良いと考えられている．[18)]この章で得られる推定器の構成方法では推定誤差の上界と下界を同時に任意の指数関数で指定できるので，そのような指定が可能である．

さて，このようにして得られた状態の推定値をその真値の代りに状態フィードバックに用いた場合，真値のフィードバックによって可能であった安定性の指定が推定値のフィードバックによっても可能であろうか．もし，不可能ならば，前述の推定器を構成することの意味はなくなる．この問題に関しては，すでに時間不変システムや一部の有界な時変システムについて可能であることが

示されているが，[12),18)~20)]　第4章では有界とは限らない一般の時変システムについても肯定的な解答を得ている．それによると，開ループシステムが一様完全可制御かつ一様完全可観測ならば，零入力応答の上界と下界を指数関数で指定して状態推定器を含んだフィードバックシステムを構成することができる．また，この場合も，開ループシステム，推定器，フィードバックゲインを有界なクラスに限れば，逆も成立する．

以上が従来の研究と本研究の概要である．

第 2 章　システムの記述と可制御性，可到達性，可観測性，可決定性

2・1 緒　言

この章では，まず，第1部で対象とする線形時変システムを記述する．このシステムは状態方程式で表わされる有限次元線形システムで，そのパラメータの時間変化についての制限はほとんどない．そして，次に，このシステムに対して可制御性，可到達性，可観測性，可決定性＊に関するいくつかの概念を定義する．特に，線形時変システムの性質を精密に表わすために，Kalman[5]によって定義された一様完全可制御性の概念を可制御性と可到達性に関する2つの概念に分けて定義する．一様完全可制御性は可制御性という語が用いられているけれども，可制御性と可到達性の時間的一様性を同時に意味する概念である．同様に，一様完全可観測性[5]の概念も可観測性と可決定性に関する2つの概念に分けて定義する．また，可制御性と可到達性に関して定義した概念と可観測性と可決定性に関して定義した概念の間に成り立つ等価な関係を随伴システムと双対システムを用いて述べる．

2・2 システムの記述

第1部「線形時変システムの構造と安定化」では，開ループシステムとして状態方程式

$$S_0 : \begin{cases} \dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)\chi(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

で記述される有限次元線形時変システムを対象とする．ここに，$\chi(t)$ は状態を表わすn次元ベクトル，$u(t)$ は入力を表わすr次元ベクトル，$y(t)$ は出力を表わすm次元ベクトルで，特に，$u(\cdot)$ の成分は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする．また，$A(\cdot)$，$B(\cdot)$，$C(\cdot)$，$D(\cdot)$はそれぞれ $n\times n$，$n\times r$，$m\times n$，$m\times r$ マトリクスで，それらの要素は可測かつすべての有限

＊　文献16)では，可決定性（determinability）の代りに可再成性（reconstructibility）という語を使っている．

時間区間で有界な関数である．u(·)，A(·)，B(·)，C(·)，D(·)の成分と要素に対するこのような仮定は実在する一般の有限次元線形システムでは満たされており、S_0が一意解をもつことを保証している．[21),22)]

S_0のふるまいに密接な関係のある同次システム

$$\dot{\chi}(t) = A(t)\,\chi(t) \tag{2.1}$$

の状態転移マトリクスはΦ(·,·)で表わす．A(·)に関する仮定により，すべてのt，sについてΦ(t,s)は一意的に存在し，t，sに関して連続で，かつ正則である．そして，

$$\Phi^{-1}(t,s) = \Phi(s,t)$$

である．この状態転移マトリクスを用いると，S_0のふるまいは次のように表わされる．

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \Phi(t,t_0)\,\chi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \\ y(t) &= C(t)\,\Phi(t,t_0)\,\chi(t_0) + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + D(t)\,u(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

2・3 可制御性と可到達性

Kalman[5)]によって導入された可制御性と可到達性の概念は次のように定義されている．

〔定義 2.1〕[16)] S_0の状態χと時刻tに対してある時刻t_1が存在し，時間区間〔t，t_1〕で定義された入力によって，tにおいてχであった状態をt_1で0に移すことができるとき，χはtで可制御であるという．また，S_0のすべての状態が時刻tで可制御であるとき，S_0は時刻tで完全可制御であるといい，すべての時刻で完全可制御であるとき，S_0は完全可制御であるという．

〔定義 2.2〕[16)] S_0の状態χと時刻tに対してある時刻t_{-1}が存在し，時間区間〔t_{-1}，t〕で定義された入力によって，t_{-1}において0であった状態をtでχに移すことができるとき，χはtで可到達であるという．また，S_0のすべての状態が時刻tで可到達であるとき，S_0は時刻tで完全可到達であるといい，すべ

ての時刻で完全可到達であるとき，S_0は完全可到達であるという．

S_0のような有限次元状態方程式で表わされるシステムに対しては，このような物理的な定義に対する簡単な必要十分条件が得られている．いま，S_0に関して2つの対称マトリクス$W(\cdot,\cdot)$，$Y(\cdot,\cdot)$を次のように定義する．

$$W(t,s) \triangleq \int_t^s \Phi(t,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t,\tau)\,d\tau \qquad t<s \quad (2.3)$$

$$Y(s,t) \triangleq \int_s^t \Phi(t,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t,\tau)\,d\tau \qquad s<t \quad (2.4)$$

以下では，$W(\cdot,\cdot)$をS_0の可制御性グラミアンと呼び，$Y(\cdot,\cdot)$を可到達性グラミアンと呼ぶ．

〔補題2.1〕[16] S_0が時刻tで完全可制御であるための必要十分条件は

$$W(t,t_1)>0$$

となるような時刻$t_1(>t)$が存在することである．

〔補題2.2〕[16] S_0が時刻tで完全可到達であるための必要十分条件は

$$Y(t_{-1},t)>0$$

となるような時刻$t_{-1}(<t)$が存在することである．

（注2.1） S_0のような有限次元線形システムに対してだけでなく，無限次元線形システムについても可制御性，可到達性に関する研究が行なわれ，同様の補題も得られている．[23]

（注2.2） 可制御性グラミアン$W(\cdot,\cdot)$と可到達性グラミアン$Y(\cdot,\cdot)$の間には次の関係が成立する．

$$W(t,s)=\Phi(t,s)\,Y(t,s)\,\Phi'(t,s)$$

$\Phi(t,s)$は正則だから，この関係より，$W(t,s)$が正定であることと$Y(t,s)$が正定であることは等価である．しかし，次の例が示すように，完全可制御であるが完全可到達ではないシステムやその逆のシステムが存在する．それは，可制御性の定義において時刻t_1が時刻t以後であるのに対し，可到達性の定義においては時刻t_{-1}が時刻t以前であることによる．

〔例 2.1〕 スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = 1(t)\,u(t) \tag{2.5}$$

を考える．ここに，$1(\cdot)$は単位階段関数である．このシステムについて可制御性グラミアンを計算すると

$$W(t,1) = 1, \qquad t<0$$
$$W(t,t+1) = 1, \qquad t\geqq 0$$

であるから，(2.5)は完全可制御である．しかし，それは完全可到達ではない．なぜなら，$t<0$のとき，$t_1(<t)$をどのように選んでも

$$Y(t_1,t) = 0, \qquad t<0$$

だからである．

〔例 2.2〕 スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = 1(-t)\,u(t) \tag{2.6}$$

は完全可到達であるが，完全可制御ではない．

ここで導入した可制御性グラミアン$W(\cdot,\cdot)$と可到達性グラミアン$Y(\cdot,\cdot)$の性質については，すでにいろいろな研究がなされている．[24),25)] それによると，S_0が完全可制御であるとき，時刻 t においてχであった状態を時刻 t_1で 0 に移すのに必要な入力の最少エネルギーは$\chi' W^{-1}(t,t_1)\chi$である．同様に，S_0が完全可到達であるとき，時刻 t_1において 0 であった状態を時刻 t でχに移すのに必要な入力の最少エネルギーは$\chi' Y^{-1}(t_1,t)\chi$である．このような状態転移に必要な時間幅が初期時刻や初期状態または最終時刻や目標状態に関係なく定まり，しかも，初期状態または目標状態が同じ場合には，その状態転移に必要な入力の最少エネルギが時間的には一様であるという条件を完全可制御性や完全可到達性の概念に加えて，次の 2 つの定義を設ける．

〔定義 2.3〕 すべての t について

$$0 < \alpha_1 I \leqq W(t,t+\sigma) \leqq \alpha_2 I \tag{2.7}$$

が成立するような正数σ，α_1，α_2が存在するとき，S_0は完全可制御性に関して

一様であるという．

〔定義 2.4〕　すべての t について

$$0 < \alpha_3 I \leqq Y(t-\sigma, t) \leqq \alpha_4 I \qquad (2.8)$$

が成立するような正数 σ，α_3，α_4 が存在するとき，S_0 は完全可到達性に関して一様であるという．

注 2.2 で述べた可制御性グラミアン $W(\cdot,\cdot)$ と可到達性グラミアン $Y(\cdot,\cdot)$ の関係から，完全可制御性に関する一様性と完全可到達性に関する一様性がどちらも完全可制御性と完全可到達性の両方を意味することが言える．そして，Kalman によって定義された一様完全可制御性はこれらを合わせた概念と考えられる．一様完全可制御性の定義は次の通りである．

〔定義 2.5〕[5] すべての t について

$$0 < \alpha_1 I \leqq W(t, t+\sigma) \leqq \alpha_2 I \qquad (2.9a)$$

$$0 < \alpha_3 I \leqq Y(t-\sigma, t) \leqq \alpha_4 I \qquad (2.9b)$$

が成立するような正数 σ，α_1，α_2，α_3，α_4 が存在するとき，S_0 は一様完全可制御であるという．

（注 2.3）[5] (2.9a)，(2.9b) がすべての t で成立すれば，すべての t, s について

$$\| \Phi(t,s) \| \leqq \gamma(|t-s|) \qquad (2.9c)$$

が成立するような関数 $\gamma(\cdot)$ が存在する．しかも，(2.9a)，(2.9b)，(2.9c) の 3 つの条件のうち，任意の 2 つが成立すれば，残りの 1 つも成立する．したがって，(2.9a), (2.9b), (2.9c) のうち 2 つが成立するとき，S_0 は一様完全可制御であると定義することもできる．

（注 2.4）　S_0 が有界システムならば，すべての t，s について

$$\| \Phi(t,s) \| \leqq \exp[K_1 |t-s|]$$

が成立する．ただし，すべての t で $\| A(t) \| \leqq K_1$ とする．したがって，注 2.3 により，完全可制御性に関して一様であること，完全可到達性に関して一様であること，および一様完全可制御であることはすべて等価である．

（注 2.5）定義から明らかなように，S_0は，一様完全可制御ならば，完全可制御性に関して一様かつ完全可到達性に関して一様である．証明は省略するが，この逆も成立する．

以上のように，ここでは，システムの性質を正確に表わすために，一様完全可制御性の概念を完全可制御性と完全可到達性に関する２つの概念に分けた．ところで，実際に完全可制御性に関して一様であるが完全可到達性に関して一様でないシステムやその逆のシステムが存在しなければ，このような概念の分割は意味をもたない．そこで，次に，そのようなシステムの例をあげておく．

〔例 2.3〕　スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = 3t^2\chi(t) + \sqrt{6}\,t\,u(t) \tag{2.10}$$

を考えよう．このシステムの可制御性グラミアンを$\sigma = 1$として計算すると

$$W(t, t+1) = 1 - \exp[-6t^2 - 6t - 2]$$

だから，すべての t について

$$0 < 1 - \exp[-0.5] \leqq W(t, t+1) \leqq 1$$

が成立する．したがって，（2.10）は完全可制御性に関して一様である．一方，可到達性グラミアンは

$$Y(t-\sigma, t) = \exp[6\sigma t^2 - 6\sigma^2 t + 2\sigma^3] - 1$$

だから，どのようにσ（>0）を選んでも有界ではない．したがって，（2.10）は完全可到達性に関して一様ではない．

〔例 2.4〕　スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = -3t^2\chi(t) + \sqrt{6}\,t\,u(t) \tag{2.11}$$

は完全可到達性に関して一様であるが，完全可制御性に関して一様でない．

2.4　可観測性と可決定性

可観測性と可決定性の概念もKalman[29]によって導入され，次のように定義されている．

〔定義 2.6〕[16] 時刻 t における状態 χ（≠0）について，S_0の零入力に対する出力が t 以後のほとんど至るところで 0 であるとき，χは t で可観測でないという．また，時刻 t で可観測でない状態が存在しないとき，S_0は時刻 t で完全可観測であるといい，すべての時刻で完全可観測であるとき，S_0は完全可観測であるという．

〔定義 2.7〕[16] 時刻 t における状態 χ（≠0）についてS_0の零入力に対する出力が t 以前のほとんど至るところで 0 であるとき，χは t で可決定でないという．また，時刻 t で可決定でない状態が存在しないとき，S_0は時刻 t で完全可決定であるといい，すべての時刻で完全可決定であるとき，S_0は完全可決定であるという．

（注 2.6） Kalman は「可決定」（ determinable ）という語の代りに「可再成」（ reconstructible ）という語を使っているが，[16] この論文では「可決定」[26] を使う．

（注 2.7） Kalman は最初，上の定義の「可決定」の意味で「可観測」という語を使っていたが，[5),27] 現在では上のように変更している．[16] Kreindler と Sarachik[17] の可観測性の定義は上の定義に一致する．

可観測性と可決定性の概念は次のことを意味している．まず，S_0が完全可観測であるということは，将来の有限時間区間の入力と出力から現在の状態を決定することができるということである．それに対して，S_0が完全可決定であるということは，過去の有限時間区間の入力と出力から現在の状態を決定することができるということである．

ところで，S_0のような有限次元線形システムについては，完全可制御性や完全可到達性の場合と同様，完全可観測，完全可決定であるための簡単な必要十分条件が得られている．いま，S_0に関して 2 つの対称マトリクスを次のように定義する．

$$M(t,s) \triangleq \int_t^s \Phi'(\tau,t)\, C'(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau,t)\, d\tau,\quad t < s \qquad (2.12)$$

$$N(s,t) \triangleq \int_s^t \Phi'(\tau,t)\, C'(\tau)\, C(\tau)\, \Phi(\tau,t)\, d\tau,\quad s < t \qquad (2.13)$$

以下では，$M(\cdot,\cdot)$をS_0 の可観測性グラミアンと呼び，$N(\cdot,\cdot)$を可決定性グラミアンと呼ぶ．

〔補題 2.3〕[16] S_0が時刻 t で完全可観測であるための必要十分条件は

$$M(t, t_1) > 0$$

となるような時刻 $t_1(>t)$ が存在することである。

〔補題 2.4〕[16] S_0が時刻 t で完全可決定であるための必要十分条件は

$$N(t_{-1}, t) > 0$$

となるような時刻 $t_{-1}(<t)$ が存在することである。

（注 2.8） 完全可制御性と完全可到達性の場合と同様，完全可観測であるが完全可決定でないシステムやその逆のシステムが存在する。

さて，可観測性グラミアン$M(\cdot,\cdot)$と可決定性グラミアン$N(\cdot,\cdot)$を用いると，零入力応答の出力のエネルギを初期状態や最終状態の簡単な関数の形に表わすことができる。すなわち，時刻 t において状態が χ であるとき，零入力に対する時間区間〔t, t_1〕での出力のエネルギは $\chi' M(t, t_1)\chi$ である。また，時刻 t において状態が χ であるとき，零入力に対する時間区間〔t_{-1}, t〕での出力のエネルギは $\chi' N(t_{-1}, t)\chi$ である。このような状態と出力エネルギの関係が，時間区間の幅が同じならば，時間的に一様であるという条件を完全可観測性や完全可決定性の概念に加えて次の定義を設ける。

〔定義 2.8〕 すべての t について

$$0 < \beta_1 I \leqq M(t, t+\sigma) \leqq \beta_2 I \tag{2.14}$$

が成立するような正数 σ，β_1，β_2が存在するとき，S_0は完全可観測性に関して一様であるという。

〔定義 2.9〕 すべての t について

$$0 < \beta_3 I \leqq N(t-\sigma, t) \leqq \beta_4 I \tag{2.15}$$

が成立するような正数 σ，β_3，β_4が存在するとき，S_0は完全可決定性に関して一様であるという。

完全可制御性に関する一様性と完全可到達性に関する一様性の場合と同様，完全可観測性に関する一様性と完全可決定性に関する一様性も完全可観測性と完全可決定性の両方を意味する。そして，Kalman によって定義された一様

完全可観測性はこれらを合わせた概念であると考えられる。一様完全可観測性の定義は次の通りである。

〔定義 2.10〕[5] すべての t について

$$0 < \beta_1 I \leqq M(t, t+\sigma) \leqq \beta_2 I \tag{2.16a}$$

$$0 < \beta_3 I \leqq N(t-\sigma, t) \leqq \beta_4 I \tag{2.16b}$$

が成立するような正数 σ, β_1, β_2, β_3, β_4 が存在するとき，S_0 は一様完全可観測であるという。

（注 2.9） 注 2.4，2.5 で述べた可制御性，可到達性の場合と同様，一様完全可観測であることは，完全可観測性に関して一様かつ完全可決定性に関して一様であることと等価である。また，S_0 が有界システムならば，一様完全可観測であること，完全可観測性に関して一様であること，完全可決定性に関して一様であることはすべて等価である。

2.5 可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の関係

制御と観測が双対な概念であるとはよく言われることである。そして，その具体的な事実として，最適レギュレータシステムの構成問題とカルマン・フィルタの構成問題[28)〜30)]，線形時間不変システムに対する状態フィードバックによる極指定問題と状態観測器の構成問題[11),12)]がそれぞれ双対な問題であることはよく知られている。この論文でも 4.2 で，線形時変システムに対して，状態フィードバックによる零入力応答指定問題と状態推定器の構成問題が双対であることを述べる。そのために，ここでは，上で定義した可制御性，可到達性と可観測性，可決定性のすべての概念について，それらの間に成り立つ関係を S_0 の随伴システム[31)]

$$\text{Ad}: \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_A(t) &= -A'(t)\chi_A(t) + C'(t)u_A(t) \\ y_A(t) &= B'(t)\chi_A(t) + D'(t)u_A(t) \end{aligned}$$

と双対システム[31)]

$$\text{Du}: \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_D(t) &= A'(-t)\chi_D(t) + C'(-t)u_D(t) \\ y_D(t) &= B'(-t)\chi_D(t) + D'(-t)u_D(t) \end{aligned}$$

を用いて述べよう。

（注 2.10 ） 随伴システムと双対システムの本質的な違いは，随伴システムの時間方向が S_0の時間方向と同じであるのに対して，双対システムの時間方向は S_0の時間方向の逆であるという点にある。

〔補題 2.5〕 S_0が完全可観測（完全可制御）であるための必要十分条件は，A_dが完全可制御（完全可観測）であることである。

〔補題 2.6〕 S_0が完全可決定（完全可到達）であるための必要十分条件は，A_dが完全可到達（完全可決定）であることである。

〔補題 2.7〕 S_0が完全可観測性（完全可制御性）に関して一様であるための必要十分条件は，A_dが完全可制御性（完全可観測性）に関して一様であることである。

〔補題 2.8〕 S_0が完全可決定性（完全可到達性）に関して一様であるための必要十分条件は，A_dが完全可到達性（完全可決定性）に関して一様であることである。

〔補題 2.9〕 S_0が一様完全可観測（一様完全可制御）であるための必要十分条件は，A_dが一様完全可制御（一様完全可観測）であることである。

これらの補題は次のように容易に示すことができる。いま，

$$\dot{\chi}_A(t) = -A'(t)\chi_A(t) \tag{2.17}$$

の状態転移マトリクスを$\Phi_A(\cdot,\cdot)$ で表わすと，これは

$$\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t) \tag{2.1}$$

の状態転移マトリクス$\Phi(\cdot,\cdot)$と

$$\Phi_A(t,\tau) = \Phi'(\tau,t) \tag{2.18}$$

の関係にある。[31] したがって，A_dの可制御性グラミアン$W_A(\cdot,\cdot)$，可到達性グラミアン$Y_A(\cdot,\cdot)$，可観測性グラミアン$M_A(\cdot,\cdot)$，可決定性グラミアン$N_A(\cdot,\cdot)$ は S_0のそれらと次の関係にある。

$$W_A(t,s) = M(t,s) \tag{2.19a}$$

$$Y_A(s,t) = N(s,t) \tag{2.19b}$$

$$M_A(t,s) = W(t,s) \tag{2.19c}$$
$$N_A(s,t) = Y(s,t) \tag{2.19d}$$

これらの関係を補題2.1～2.4，定義2.3～2.5，2.8～2.10に当てはめると，上の補題は直ちに得られる．

〔補題2.10〕　Soが完全可観測（完全可到達）であるための必要十分条件は，Du が完全可到達（完全可観測）であることである．

〔補題2.11〕　Soが完全可決定（完全可制御）であるための必要十分条件は，Du が完全可制御（完全可決定）であることである．

〔補題2.12〕　Soが完全可観測性（完全可到達性）に関して一様であるための必要十分条件は，Du が完全可到達性（完全可観測性）に関して一様であることである．

〔補題2.13〕　Soが完全可決定性（完全可制御性）に関して一様であるための必要十分条件は，Du が完全可制御性（完全可決定性）に関して一様であることである．

〔補題2.14〕　Soが一様完全可観測（一様完全可制御）であるための必要十分条件は，Du が一様完全可制御（一様完全可観測）であることである．

これらの補題も，補題2.5～2.10と同様に，容易に証明できる．いま，

$$\dot{\chi}_D(t) = A'(-t)\chi_D(t) \tag{2.20}$$

の状態転移マトリクスを$\Phi_D(\cdot,\cdot)$で表わすと

$$\Phi_D(t,\tau) = \Phi'(-\tau,-t) \tag{2.21}$$

である．[31] この関係を用いると，Du の可制御性グラミアン$W_D(\cdot,\cdot)$，可到達性グラミアン$Y_D(\cdot,\cdot)$，可観測性グラミアン$M_D(\cdot,\cdot)$，可決定性グラミアン$N_D(\cdot,\cdot)$とSoのそれらとの間に次の関係が成立することがわかる．

$$W_D(t,s) = N(-s,-t) \tag{2.22a}$$
$$Y_D(s,t) = M(-t,-s) \tag{2.22b}$$
$$M_D(t,s) = Y(-s,-t) \tag{2.22c}$$
$$N_D(s,t) = W(-t,-s) \tag{2.22d}$$

これらの関係と補題2.1～2.4，定義2.3～2.5，2.8～2.10から，補題2.10～2.14は直ちに得られる．

2.6 結　　言

この章では，対象とする線形時変システムを記述し，可制御性，可到達性，可観測性，可決定性に関する概念を定義した．以下の章では，ここで定義した概念がどのようなフィードバックシステムや状態推定器を構成することができることを保証しているのかを述べる．また，随伴システムや双対システムを用いて，可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の間の関係を述べた．この関係は状態推定器の構成問題をフィードバックシステムの構成問題に結び付ける際に重要な役割をはたす．

第3章　状態フィードバックによる安定化[32)~39)]

3.1　緒　　言

この章では，有限次元線形時変システムS_0を対象に，安定性に注目したフィードバックシステムの構成問題を考える．そして，その目的は，任意に指定された安定性を状態フィードバックによって実現できるための条件を明らかにすることである．ここに，安定性の指定とはシステムの内部安定性，すなわち，零入力応答に関する安定性の指定をいう．この問題に関しては，線形時間不変システムについて，開ループシステムが完全可制御であることが閉ループシステムの極を任意に配置できるための必要十分条件であることがよく知られている．[11)]極の配置を指定できるということは零入力応答の上界と下界を指数関数で指定できることを意味している．したがって，この時間不変システムに対する事実から，極という概念のない時変システムのクラスにおいても，開ループシステムが可制御（完全可制御，一様完全可制御など）であることが，零入力応答の上界と下界を時間関数で指定してフィードバックシステムを構成できるための必要十分条件ではないだろうかと推測される．この推測に対する解答は，Wolovich[13)] によって，あるクラスに属する時変システムについては一部与えられている．それによると，開ループシステムがパラメータの時間変化が充分に滑らかな有界システムで，一様可制御性よりも少し厳しい条件を満たしていれば，零入力応答の上界と下界を指数関数で指定してフィードバックシステムを構成することができる．しかし，もっと一般の時変システムについては上界関数と下界関数を同時に指定する問題は全く研究されておらず，もっぱら上界関数のみを指定する問題，すなわち，安定化問題が研究されている．[5),7),14)]そして，開ループシステムが一様完全可制御ならば，任意に指定された指数関数を閉ループシステムの零入力応答の上界とすることができるという結果が示唆されているだけである．[7)]

そこで，この章では，ほとんど制限がないと考えられるくらい一般的な線形時変システムS_0を対象に，零入力応答の上界と下界を指定してフィードバックシステムを構成できる可能性とS_0の可制御性，可到達性の関係を調べる．そのために，まず3.2で，上界関数や下界関数またはそれらを同時に指定できると

という可安定性，逆可安定性，可設計性の概念を定義する．そして，3.3で，S_0が完全可制御であることが，任意に指定された時刻以降で，零入力応答の上界または下界を連続関数で指定してフィードバックシステムを構成できるための必要十分条件であることを示す．続いて，3.4では，S_0が完全可制御性に関して一様であることが，閉ループシステムの零入力応答の上界をすべての時間区間について一様に指数関数で指定できるための十分条件であることを示す．さらに，S_0が有界システムの場合には，フィードバックゲインを有界なゲインのクラスに限れば，それが必要条件でもあることを示す．同様に，3.5では，完全可到達性に関して一様であることが零入力応答の下界を一様に指数関数で指定できることを意味し，有界システムのクラスではこの逆も正しいことを示す．そして，3.6で，S_0が一様完全可制御ならば，閉ループシステムの零入力応答の上界と下界を指数関数で同時に指定できるという結果を得る．この結果についても，有界システムのクラスでは，逆が成立することが示される．

3.2 可安定性，逆可安定性，可設計性

上で述べたように，この章では，線形時変システム

$$S_0: \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A(t)\chi(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)\chi(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

を開ループシステムとして，指定された安定性をもつシステムを線形状態フィードバック

$$u(t) = K(t)\chi(t) + v(t) \tag{3.1}$$

によって構成する問題を考え，安定性を任意に指定できることと開ループシステムの可制御性，可到達性がどのような関係にあるのかを明らかにする．ここに，フィードバックゲイン$K(\cdot)$は$r \times n$マトリクスで，その要素は可測かつすべての有限時間区間で有界とする．$v(\cdot)$は新しい入力で，$u(\cdot)$に対する仮定を満たすものとする．そして，ここでいう安定性の指定とは，閉ループシステム

$$S_c: \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \{A(t) + B(t)K(t)\}\chi(t) + B(t)v(t) \\ y(t) &= \{C(t) + D(t)K(t)\}\chi(t) + D(t)v(t) \end{aligned}$$

の零入力安定性，すなわち，

$$S_c^{\prime}: \quad \dot{\chi}(t) = \{A(t)+B(t)K(t)\}\chi(t)$$

の安定性を指定することである．以下では，$S_c^{\prime}$のふるまいを表わす状態転移マトリクスを$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ で表わす．

ところで，この$S_c^{\prime}$の状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$を用いると，S_cのふるまいは

$$\chi(t)=\hat{\Phi}(t,t_0)\chi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\hat{\Phi}(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\{C(t)+D(t)K(t)\}\hat{\Phi}(t,t_0)\chi(t_0) \tag{3.2}$$

$$+\{C(t)+D(t)K(t)\}\int_{t_0}^{t}\hat{\Phi}(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau+D(t)v(t)$$

と表わせ，これらの右辺の第2項は入力による応答も$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$の性質に関係があることを示している．したがって，ここでの安定性の指定は直接にはS_cの零入力応答の安定性，すなわち，$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ の性質を指定することを意味しているが，間接的には入力による応答の性質を指定することでもある．零入力応答安定性（一様漸近安定性）と入力による応答の安定性（有界入力—有界出力安定性）の関係は文献 40),41) に述べられている．

さて，それでは，指定された安定性を状態フィードバックによって実現できるという概念をはっきり定義しよう．指定された時刻 t_0に対して，$\delta(\cdot,t_0)$を $[t_0,\infty)$ で定義された$\delta(t_0,t_0)=0$ なる連続関数とする．

〔定義 3.1〕 任意の初期時刻 t_0と連続関数$\delta(\cdot,t_0)$ に対して，$S_c^{\prime}$のすべての解がすべての $t(\geqq t_0)$ で

$$\|\chi(t)\| \leqq b(t_0)\|\chi(t_0)\| \exp[\delta(t,t_0)] \tag{3.3}$$

を満たすようなフィードバックゲイン$K(\cdot)$と正数 $b(t_0)$ が存在するとき，S_cは完全可安定であるという．

〔定義 3.2〕 任意の初期時刻 t_0と連続関数$\delta(\cdot,t_0)$ に対して，$S_c^{\prime}$のすべての解がすべての $t(\geqq t_0)$ で

$$a(t_0)\|\chi(t_0)\| \exp[\delta(t,t_0)] \leqq \|\chi(t)\| \tag{3.4}$$

を満たすようなフィードバックゲイン$K(\cdot)$と正数$a(t_0)$が存在するとき，S_cは完全逆可安定であるという．

（注3.1） S_c'のすべての解が（3.3）を満たすことは，その状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\| \hat{\Phi}(t,t_0) \| \leqq b(t_0)\exp[\delta(t,t_0)] \tag{3.5}$$

を満たすことと等価である．また，すべての解が（3.4）を満たすことは，$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\| \hat{\Phi}(t_0,t) \| \leqq a(t_0)^{-1}\exp[-\delta(t,t_0)] \tag{3.6}$$

を満たすことと等価である．

（注3.2） 上述の連続関数$\delta(\cdot,t_0)$を(t_0,∞)で連続微分可能な関数としても，定義3.1と3.2の意味するところは変らない．その理由は定義3.1については次の通りである．まず，おのおの連続関数$\delta(\cdot,t_0)$に対して$\delta_d(t_0,t_0)=0$かつ$\delta_d(t,t_0)\leqq\delta(t,t_0)$，$t\geqq t_0$を満たす連続微分可能な関数$\delta_d(\cdot,t_0)$が必ず存在する．ゆえに，$\delta(\cdot,t_0)$が指定されたとき，そのような$\delta_d(\cdot,t_0)$に対して（3 3）を満たす$K(\cdot)$，$b(t_0)$が存在すれば，それらは$\delta(\cdot,t_0)$に対しても（3.3）を満たす．したがって，任意の$\delta_d(\cdot,t_0)$に対して$K(\cdot)$，$b(t_0)$が存在することは，任意の$\delta(\cdot,t_0)$に対してもそれらが存在することを意味するのである．同様のことが定義3.2についても言えるので，以下では，$\delta(\cdot,t_0)$を微分可能な関数と仮定することがある．

〔定義3.3〕 任意の実数Mに対して，S_c'のすべての解がすべてのt_1，$t_2(\geqq t_1)$について

$$\| \chi(t_2) \| \leqq b \| \chi(t_1) \| \exp[M(t_2-t_1)] \tag{3.7}$$

を満たすようなフィードバックゲイン$K(\cdot)$と正数bが存在するとき，S_cは一様完全可安定であるという．

〔定義3.4〕 任意の実数mに対して，S_c'のすべての解がすべてのt_1，$t_2(\geqq t_1)$について

$$a \| \chi(t_1) \| \exp[m(t_2-t_1)] \leqq \| \chi(t_2) \| \tag{3.8}$$

を満たすようなフィードバックゲインK(・)と正数aが存在するとき，S_0は一様完全逆可安定であるという．

〔定義 3.5〕 任意の実数m，M（≧m）に対して，S_c^1のすべての解がすべてのt_1，t_2（≧t_1）について

$$a \| \chi(t_1) \| \exp[m(t_2-t_1)] \leqq \| \chi(t_2) \| \leqq b \| \chi(t_1) \| \exp[M(t_2-t_1)] \tag{3.9}$$

を満たすようなフィードバックゲインK(・)と正数a，bが存在するとき，S_0は一様完全可設計であるという．

（注 3.3） S_c^1のすべての解が（3.7），（3.8）を満たすことは，その状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\| \hat{\Phi}(t_2,t_1) \| \leqq b \exp[M(t_2-t_1)] \tag{3.10}$$

$$\| \hat{\Phi}(t_1,t_2) \| \leqq a^{-1} \exp[-m(t_2-t_1)] \tag{3.11}$$

を満たすこととそれぞれ等価である．また，S_c^1のすべての解が（3.9）を満たすことは，$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$が（3.10），（3.11）を同時に満たすことと等価である．

これらの概念の間に成り立つ関係をまとめると次のようになる．まず，完全可安定性と完全逆可安定性は等価である．この関係は定義から直接には示せないが，後に得られる定理 3.1 と 3.2 から導ける．一様完全可設計であることが一様完全可安定であることと一様完全逆可安定であることを同時に意味することは定義から明らかである．その逆，すなわち，一様完全可安定かつ一様完全逆可安定であることが一様完全可設計であることを意味するのかという問題に対する解答はいまのところ得られてない．例 3.1，3.2 に示すように，一様完全可安定性だけ，または一様完全逆可安定性だけでは一様完全可設計性を意味しないことはわかっている．また，これらの例と例 3.3 は完全可安定性（または，完全逆可安定性），一様完全可安定性，一様完全逆可安定性の間には何らの包含関係もないことを示している．

〔例 3.1〕 線形時変システム

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.12}$$

を考えよう．任意の実数Mに対してフィードバックゲインを

$$K(t) = [M+1 \quad 0]$$

と定めると，閉ループシステムS_cの零入力応答，すなわち，S_c^1の解は

$$\begin{bmatrix} \chi_1(t_2) \\ \chi_2(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[M(t_2-t_1)] & 0 \\ 0 & \exp[-t_2^3+t_1^3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t_1) \\ \chi_2(t_1) \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

となる．そして，すべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$-t_2^3+t_1^3 \leqq M^2+1+M(t_2-t_1)$$

が成り立つので，この解はすべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\|\chi(t_2)\| \leqq \exp[M^2+1]\,\|\chi(t_1)\|\,\exp[M(t_2-t_1)]$$

を満たす．したがって，(3.12)は一様完全可安定である．

しかし，このシステムは一様完全逆可安定ではない．いま，S_c^1の状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$を考えよう．これはどのようなフィードバックゲインに対しても

$$\hat{\Phi}(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_1,t_2) & \phi_{12}(t_1,t_2) \\ 0 & \exp[-t_1^3+t_2^3] \end{bmatrix}$$

の形をしているので，そのノルムは次に示すように下から押さえられる．

$$\exp[-t_1^3+t_2^3] \leqq \|\hat{\Phi}(t_1,t_2)\|$$

ゆえに，注3.3より，(3.12)が一様完全逆可安定であるためには，少なくとも，すべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\exp[-t_1^3+t_2^3] \leqq a^{-1}\exp[-m(t_2-t_1)]$$

が成立しなければならない．ところが，たとえば$m=0$の場合，すべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）についてこの不等式が成立するような正数aは存在しない．したがって，(3.12)は一様完全逆可安定ではない．当然，一様完全可設計でない．

また，このシステムが完全可安定でないことが次のように示される．いま，

$$\delta(t, t_0) = -t^3 + t_0^3 - (t - t_0)$$

としよう．上で述べたように，どのようなフィードバックゲインに対しても

$$\exp[-t^3 + t_0^3] \leqq \|\hat{\Phi}(t, t_0)\|$$

が成立する．ゆえに，注3.1より，(3.12)が完全可安定ならば，すべての t ($\geqq t_0$) について

$$\exp[-t^3 + t_0^3] \leqq b(t_0) \exp[-t^3 + t_0^3 - (t - t_0)]$$

または，これと等価な

$$1 \leqq b(t_0) \exp[-(t - t_0)]$$

が成立するはずである．しかし，すべての t ($\geqq t_0$)についてこの不等式が成立するような正数 $b(t_0)$ は存在せず，したがって，(3.12) は完全可安定ではない．同様に，完全逆可安定でもない．

〔例3.2〕 線形時変システム

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.14}$$

は一様完全逆可安定であるが，一様完全可安定ではなく，したがって，一様完全可設計ではない．また，完全可安定でなく，完全逆可安定でもない．

〔例3.3〕 スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = -\chi(t) + 1(t) \quad u(t) \tag{3.15}$$

を考えよう．任意の t_0と任意の $\delta(\cdot, t_0)$に対して，フィードバックゲインを

$$K(t) = \dot{\delta}(t, t_0) + 1, \qquad t \geqq t_0$$

と定めると，Sの解はすべての t ($\geqq t_0$) で

$$\|\chi(t)\| = C(t_0) \|\chi(t_0)\| \exp[\delta(t, t_0)]$$

$$C(t_0) = \begin{cases} \exp[t_0 - \delta(0, t_0)], & t_0 < 0 \\ 1, & t_0 \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす．したがって，このシステムは完全可安定かつ完全逆可安定である．

しかし，このシステムは一様完全可安定ではない．なぜなら，$t_1 \leqq t_2 < 0$の場合を考えると，どのようなフィードバックゲインに対してもS_0の解は

$$\chi(t_2) = \chi(t_1) \exp[-(t_2 - t_1)]$$

である．ゆえに，このシステムが一様完全可安定であるためには，任意の実数Mに対して，すべてのt_1，t_2（ただし，$t_1 \leqq t_2 < 0$）について

$$\exp[-(t_2 - t_1)] \leqq b \exp[M(t_2 - t_1)]$$

が成立するような正数bが存在しなければならないが，$M < -1$の場合にはそのようなbは存在しないからである．同様に，このシステムは一様完全逆可安定ではなく，当然，一様完全可設計でもない．

3.3 完全可制御なシステムの安定化と逆安定化

ここでは，完全可制御なシステムにおいてはどのような安定化や逆安定化が可能なのかという問題を考える．完全可制御性の定義から明らかなように，このシステムでは，適当な入力によって，状態を任意の初期状態から平衡状態0に有限時間で移すことができる．そのような入力は線形状態フィードバックでは得られないが，[42]この事実は完全可制御なシステムが完全可安定であることを予想させる．また，このシステムでは，0に移すのと同じ有限時間区間で，任意の初期状態から（0とは限らない）任意の目標状態に状態を移すことができる．[24]これは完全可制御なシステムが完全逆可安定でもあることを予想させる．一方，完全可制御ではないシステムにおいては，状態空間に入力の影響を受けない部分空間が存在する．[24]この部分空間における状態のふるまいは，当然，状態フィードバックに無関係なので，それを用いて任意に安定化や逆安定化を行なうことはできない．ゆえに，完全可制御でないシステムは完全可安定でも完全逆可安定でもないと予想される．実際，完全可制御性と完全可安定性，完全逆可安定性は等価である．

〔定理3.1〕　S_0が完全可安定であるための必要十分条件は，それが完全可制御であることである．

〔定理3.2〕　S_0が完全逆可安定であるための必要十分条件は，それが完全可

制御であることである．

これらの証明の前に，必要な補題をあげておく．

〔補題 3.1〕 $\delta(\cdot, t_0)$ を $[t_0, \infty)$ で定義された連続微分可能な関数としよう．このとき，S_0が完全可制御ならば，

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) - \dot{\delta}(t, t_0)]\}\chi(t) + B(t)u(t), \qquad t \geqq t_0 \tag{3.16}$$

もすべての $t\ (\geqq t_0)$ で完全可制御である．

（証明） 同次システム

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) - \dot{\delta}(t, t_0)]\}\chi(t), \qquad t \geqq t_0 \tag{3.17}$$

の状態転移マトリクス$\Phi_\delta(\cdot,\cdot)$は$\Phi(\cdot,\cdot)$を使って

$$\Phi_\delta(t, \tau) = \Phi(t, \tau)\ \exp[-\delta(t, t_0) + \delta(\tau, t_0)], \quad t, \tau \geqq t_0$$

と表わせるから，(3.16)の可制御性グラミアン$W_\delta(\cdot,\cdot)$は

$$W_\delta(t, t_1) = \int_t^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t, \tau)\exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(\tau, t_0)]\,d\tau, \qquad t, t_1 \geqq t_0 \tag{3.18}$$

と書ける．そして，$t \leqq \tau \leqq t_1$ のときには

$$\Phi(t, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t, \tau)\ \exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(\tau, t_0)]$$
$$\geqq \Phi(t, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t, \tau)\ \exp[-2\delta(t, t_0) + 2 \inf_{t \leqq \tau \leqq t_1} \delta(\tau, t_0)]$$

が成立するので，すべての $t_1(\geqq t)$ について

$$W_\delta(t, t_1) \geqq W(t, t_1)\ \exp[-2\delta(t, t_0) + 2 \inf_{t \leqq \tau \leqq t_1} \delta(\tau, t_0)]$$

である．したがって，$W(t, t_1)$が正定ならば，$W_\delta(t, t_1)$も正定である．補題 2.1 によると，これは，S_0が完全可制御ならば，(3.16)もすべての $t\ (\geqq t_0)$ で完全可制御であることを意味している． （証明終）

（定理 3.1 の証明） <u>必要性</u>： S_0は完全可安定であるとしよう．いま，それが完全可制御でないとすると，補題 2.1 により，すべての $t\ (\geqq t_u)$ について $\lambda' W(t_u, t)\lambda = 0$，すなわち

$$\int_{t_u}^{t} \| \lambda' \Phi(t_u, \tau) B(\tau) \|^2 d\tau = 0$$

となるような時刻 t_u と n 次元ベクトル λ ($\neq 0$) が存在する．これは，ほとんどすべての t ($\geqq t_u$) で

$$\lambda' \Phi(t_u, t) B(t) = 0 \tag{3.19}$$

であることを意味している．ところで，初期時刻を t_u とすると，S_c^1 の状態転移マトリクス $\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ は積分方程式

$$\hat{\Phi}(t, t_u) = \Phi(t, t_u) + \int_{t_u}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) K(\tau) \hat{\Phi}(\tau, t_u) d\tau$$

または，それと等価な方程式

$$\Phi(t_u, t) \hat{\Phi}(t, t_u) = I + \int_{t_u}^{t} \Phi(t_u, \tau) B(\tau) K(\tau) \hat{\Phi}(\tau, t_u) d\tau$$

を満たす．[25] したがって，(3.19) より，すべての t ($\geqq t_u$) で

$$\lambda' \Phi(t_u, t) \hat{\Phi}(t, t_u) = \lambda' \tag{3.20}$$

であり，ゆえに，

$$\| \lambda \| \leqq \| \lambda \| \, \| \Phi(t_u, t) \| \, \| \hat{\Phi}(t, t_u) \|$$

が成立する．そして，Wazewski の定理 [15] によれば，$t \geqq t_u$ のとき

$$\| \Phi(t_u, t) \| \leqq \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda_{\min}(A(\tau) + A'(\tau)) d\tau\right] \tag{3.21}$$

だから，結局，すべての t ($\geqq t_u$) で

$$1 \leqq \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda_{\min}(A(\tau) + A'(\tau)) d\tau\right] \| \hat{\Phi}(t, t_u) \| \tag{3.22}$$

が成立する．

一方，仮定によると，S_0は完全可安定であるから，初期時刻を t_u，連続関数を

$$\delta(t, t_u) = -(t-t_u) + \frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda\min\left(A(\tau)+A'(\tau)\right) d\tau \qquad (3.23)$$

と定めても，$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$がすべての $t\ (\geqq t_u)$ で

$$\left\| \hat{\Phi}(t, t_u) \right\| \leqq b(t_u) \exp\left[\delta(t, t_u)\right]$$

を満たすようにできる（注3.1参照）．これを（3.22）に代入すると，

$$1 \leqq b(t_u) \exp\left[-(t-t_u)\right] \qquad (3.24)$$

が得られるが，この不等式がすべての $t\ (\geqq t_u)$ で成立するような正数 $b(t_u)$ は存在しない．したがって，完全可安定なシステムを完全可制御でないとしたことは誤りである．ゆえに，S_0は，完全可安定ならば，完全可制御である．

<u>十分性</u>：　S_0が完全可制御であると仮定しよう．任意の初期時刻 t_0 と連続微分可能な関数 $\delta(\cdot, t_0)$ に対して，フィードバックゲイン $K(\cdot)$ を $[t_0, \infty)$ で

$$K(t) = -\frac{1}{2} B'(t) \left(P(t) - I\right), \quad t \geqq t_0 \qquad (3.25)$$

と定める（注3.2参照）．ここに，$n \times n$ マトリクス $P(\cdot)$ は Riccati 型マトリクス微分方程式

$$\dot{P}(t) + \left\{A'(t) - \dot{\delta}(t, t_0) I\right\} P(t) + P(t)\left\{A(t) - \dot{\delta}(t, t_0) I\right\} - P(t) B(t) B'(t) P(t) = -E(t), \quad t \geqq t_0 \qquad (3.26)$$

の対称かつ準正定な解で，$n \times n$ マトリクス $E(\cdot)$ は可測，$[t_0, \infty)$ のすべての有限時間区間で有界，対称かつ準正定で

$$E(t) \geqq A(t) + A'(t) - 2\dot{\delta}(t, t_0) I + B(t) B'(t), \quad t \geqq t_0$$

を満たすものとする．仮定と補題3.1によって

$$\dot{\chi}(t) = \left\{A(t) - \dot{\delta}(t, t_0) I\right\} \chi(t) + B(t) u(t), \quad t \geqq t_0 \qquad (3.16)$$

がすべての $t\ (\geqq t_0)$ で完全可制御であるから，このRiccati型微分方程式が $[t_0, \infty)$ で準正定な解をもつことは保証されている．[5]

さて，(3.25)で定義したフィードバックゲインを用いると S_c' の解が(3.3)を満たすことを示そう．いま，$[t_0, \infty)$ で，n次元ベクトル χ と時刻tのスカラ関数 $V(\chi, t)$ を

$$V(\chi, t) = \chi'(P(t) + I)\chi \tag{5.27}$$

と定義する．$P(\cdot)$ が準正定だから，

$$\|\chi\|^2 \leqq V(\chi, t) \leqq (\lambda\max(P(t)) + I)\|\chi\|^2 \tag{3.28}$$

である．そして，S_c' の解 $\chi(\cdot)$ に沿った $V(\chi(\cdot), \cdot)$ の時間微分はほとんどすべての $t\ (\geqq t_0)$ で

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(\chi(t), t) \\
&= \chi'(t)\{2\dot{\delta}(t, t_0)P(t) - E(t) + A(t) + A'(t) + B(t)B'(t)\}\chi(t) \\
&\leqq \chi'(t)\{2\dot{\delta}(t, t_0)P(t) + 2\dot{\delta}(t, t_0)I\}\chi(t) \\
&= 2\dot{\delta}(t, t_0)V(\chi(t), t)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

を満たすから，すべての $t\ (\geqq t_0)$ について

$$V(\chi(t), t) \leqq V(\chi(t_0), t_0)\exp[2\delta(t, t_0)] \tag{3.30}$$

が成立する．ゆえに，(3.28)より，S_c' のすべての解はすべての $t\ (\geqq t_0)$ で

$$\|\chi(t)\| \leqq \sqrt{\lambda\max(P(t_0)) + 1}\,\|\chi(t_0)\|\exp[\delta(t, t_0)] \tag{3.31}$$

を満たす．したがって，S_0 は，完全可制御ならば，完全可安定である．（証明終）

（定理3.2の証明）<u>必要性</u>：S_0 は完全逆可安定であるとしよう．いま，それが完全可制御でないとすると，定理3.1の証明で述べたように，ある時刻 t_u とn次元ベクトル $\lambda\ (\neq 0)$ が存在して，どのような状態フィードバックに対してもすべての $t\ (\geqq t_u)$ で

$$\lambda'\Phi(t_u, t)\hat{\Phi}(t, t_u) = \lambda' \tag{3.20}$$

が成立する．これは

$$\lambda' = \lambda' \hat{\Phi}(t_u, t)\ \Phi(t, t_u) \tag{3.32}$$

と等価であり，そして，Wazewski の定理[15]によると，$t \geqq t_u$のとき

$$\| \Phi(t, t_u) \| \leqq \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda \max(A(\tau) + A'(\tau))d\tau\right] \tag{3.33}$$

であるから，すべての $t\ (\geqq t_u)$ で

$$\| \lambda \| \leqq \| \lambda \| \| \hat{\Phi}(t_u, t) \| \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda \max(A(\tau) + A'(\tau))\, d\tau\right] \tag{3.34}$$

が成立する．

一方，仮定によると，S_0は完全逆可安定であるから，初期時刻を t_u，連続関数を

$$\delta(t, t_u) = (t - t_u) + \frac{1}{2}\int_{t_u}^{t} \lambda \max\ (A(\tau) + A'(\tau))\, d\tau \tag{3.35}$$

と定めても，$\hat{\Phi}(\cdot, \cdot)$ がすべての $t\ (\geqq t_u)$ で

$$\| \hat{\Phi}(t_u, t) \| \leqq a(t_u)^{-1} \exp[-\delta(t, t_u)]$$

を満たすようにできる（注3.1参照）．これを（3.34）に代入すると

$$1 \leqq a(t_u)^{-1} \exp[-(t - t_u)] \tag{3.36}$$

が得られるが，この不等式がすべての $t\ (\geqq t_u)$ で成立するような正数 $a(t_u)$ は存在しない．したがって，完全逆可安定なシステムを完全可制御でないとしたことは誤りである．ゆえに，S_0は，完全逆可安定ならば，完全可制御である．

<u>十分性</u>：　S_0が完全可制御であるとしよう．すると，補題3.1により，任意の t_0と連続微分可能な関数 $\delta(\cdot, t_0)$ について

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) - \dot{\delta}(t, t_0)I\}\chi(t) + B(t)u(t), \quad t \geqq t_0 \tag{3.16}$$

もすべての $t\ (\geqq t_0)$ で完全可制御である．したがって，このシステムの可制

御性グラミアン$W_\delta(\cdot,\cdot)$が

$$W_\delta(t_0, t_1) > 0, \qquad W_\delta(t_i, t_{i+1}) > 0, \quad i = 1, 2 \cdots$$
$$t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots, \quad \lim_{i\to\infty} t_i = \infty$$

を満たすような時刻列$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$が存在する。いま，時間区間$[t_0, t_1]$において

$$k_0 \ \Phi(t, t_0)\Phi'(t, t_0) \exp[-2\delta(t, t_0)] \geqq I \tag{3.37}$$

が，$[t_i, t_{i+1}]$，$i=1,2,3\cdots\cdots$において

$$k_i \ \Phi(t, t_{i-1}) W_\delta(t_{i-1}, t_i) \Phi'(t, t_{i-1}) \exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(t_{i-1}, t_0)] \geqq I \tag{3.38}$$

が成立するような正数k_i，$i=1,2,3\cdots$を見つけ，$n\times n$対称マトリクス$Q(\cdot)$を次のように定義しよう。

$$Q(t) = k_0 \ \Phi(t, t_0)\Phi'(t, t_0) \exp[-2\delta(t, t_0)]$$
$$+\int_{t_0}^{t} k(\tau)\Phi(t,\tau)B(\tau)B'(\ )\Phi'(t,\tau) \exp[-2\delta(t,t_0) + 2\delta(\tau, t_0)]\, d\tau$$

$$k(t) \triangleq \Sigma_{i=1}^{\infty} \ k_i\{1(t - t_{i-1}) - 1(t - t_i)\} \tag{3.39}$$

ここに，$W_\delta(t_{i-1}, t_i)$が正定であるから，(3.38)が成立するようなk_iは必ず存在する。このとき，$Q(\cdot)$は時間区間$[t_i, t_{i+1}]$，$i=0,1,2,\cdots\cdots$で

$$Q(t) = k_0 \ \Phi(t, t_0)\Phi'(t, t_0) \exp[-2\delta(t, t_0)]$$
$$+k_1\Phi(t, t_0)W_\delta(t_0, t_1)\Phi'(t, t_0) \exp[-2\delta(t, t_0)]$$
$$+k_2\Phi(t, t_1)W_\delta(t_1, t_2)\Phi'(t, t_1) \exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(t_1, t_0)]$$
$$\vdots$$
$$+k_i\Phi(t, t_{i-1})W_\delta(t_{i-1}, t_i)\Phi'(t, t_{i-1}) \exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(t_{i-1}, t_0)]$$
$$+k_{i+1}\Phi(t, t_i)W_\delta(t_i, t)\Phi'(t, t_i) \exp[-2\delta(t, t_0) + 2\delta(t_i, t_0)]$$

と表わせるから，(3.37)と(3.38)より，すべての t ($\geqq t_0$) で

$$Q(t) \geqq I$$

が成立することが言える．この $Q(\cdot)$ を用いてフィードバックゲイン $K(\cdot)$ を次のように定めよう．

$$K(t) = \frac{1}{2} k(t) B'(t) Q^{-1}(t), \qquad t \geqq t_0 \tag{3.40}$$

ここに，$Q(\cdot)$ が正定だから，$Q^{-1}(\cdot)$ は存在して正定である．

さて，このフィードバックゲインを用いると $S_c^!$ の解が (3.4) を満たすことを示すために，$[t_0, \infty)$ でスカラ関数 $V(\cdot,\cdot)$ を

$$V(\chi, t) = \chi' Q^{-1}(t) \chi, \qquad t \geqq t_0 \tag{3.41}$$

と定義しよう．すると，$Q^{-1}(t) \leqq I$ であるから

$$\lambda_{\min}(Q^{-1}(t)) \|\chi\|^2 \leqq V(\chi, t) \leqq \|\chi\|^2 \tag{3.42}$$

が成立する．そして，

$$\begin{aligned}\dot{Q}^{-1}(t) &= -Q^{-1}(t) \dot{Q}(t) Q^{-1}(t) \\ &= -Q^{-1}(t) A(t) - A'(t) Q^{-1}(t) + 2\dot{\delta}(t, t_0) Q^{-1}(t) \\ &\qquad - k(t) Q^{-1}(t) B(t) B'(t) Q^{-1}(t), \quad t \geqq t_0\end{aligned}$$

であるから，$S_c^!$ の解 $\chi(\cdot)$ に沿った $V(\chi(\cdot), \cdot)$ の時間微分はほとんどすべての t ($\geqq t_0$) で

$$\begin{aligned}\dot{V}(\chi(t), t) &= 2\dot{\delta}(t, t_0) \chi'(t) Q^{-1}(t) \chi(t) \\ &= 2\dot{\delta}(t, t_0) V(\chi(t), t)\end{aligned}$$

となり，ゆえに，すべての t ($\geqq t_0$) で

$$V(\chi(t), t) = V(\chi(t_0), t_0) \exp[2\delta(t, t_0)] \tag{3.43}$$

である．したがって，$S_c^!$ のすべての解はすべての t ($\geqq t_0$) で

$$\sqrt{\lambda \min(Q^{-1}(t_0))}\ \|\chi(t_\sigma)\|\ \exp[\delta(t, t_0)] \leqq \|\chi(t)\| \tag{3.44}$$

を満たす．以上より，S_0は，完全可制御ならば，完全逆可安定である．

（証明終）

3.4 完全可制御性に関して一様なシステムの安定化

ここでは，完全可制御性に関して一様なシステムの安定化について考える．完全可制御性に関して一様なシステムは，当然，完全可制御であるから，定理3.1により，完全可安定である．そして，このシステムでは，状態を0に転移させるのに必要な入力の最少エネルギが時間的に一様なことから予想できるように，時間的に一様な安定化が可能である．

〔定理3.3〕 S_0は，完全可制御性に関して一様ならば，一様完全可安定である．

〔定理3.4〕 有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定であるための必要十分条件は，それが完全可制御性に関して一様であることである．*

（注3.4） 次の例に示すように，定理3.3の逆は成立しない．

〔例3.4〕 スカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = \chi(t) + \exp[t]\ u(t) \tag{3.45}$$

を考えよう．任意の実数Mに対して，フィードバックゲインK(・)を

$$K(t) = (M - 1)\ \exp[-t]$$

と定めると，S_c^1の解はすべてのt_1，t_2について

$$\chi(t_2) = \chi(t_1)\ \exp[M(t_2 - t_1)]$$

となるので，このシステムは一様完全可安定である．しかし，可制御性グラミアンW(・,・)はどのような正数σに対しても

$$W(t, t+\sigma) = \sigma\ \exp[2t]$$

---

* S_0が有界であるとは，そのパラメータA(・)，B(・)，C(・)，D(・)が有界な関数であることを意味する．

であるから，このシステムは完全可制御性に関して一様ではない．

（定理 3.3 の証明）　S_0は完全可制御性に関して一様であるとしよう．任意の実数Mに対して，フィードバックゲインを

$$K(t) = -\frac{1}{2} B'(t) \widetilde{W}^{-1}(t, t+\sigma) \tag{3.46}$$

で定義する．ここに，

$$\widetilde{W}(t, t+\sigma) \triangleq \int_t^{t+\sigma} \Phi(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t,\tau) \exp[-2M(t-\tau)] d\tau$$

で，σは完全可到達性に関する一様性を定義した

$$0 < \alpha_1 I \leqq W(t, t+\sigma) \leqq \alpha_2 I \tag{2.7}$$

がすべてのtで成立するような正数である．仮定，および $t \leqq \tau \leqq t+\sigma$ のとき成立する不等式

$$\Phi(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t,\tau) \exp[-2|M|\sigma]$$

$$\leqq \Phi(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t,\tau) \exp[-2M(t-\tau)]$$

$$\leqq \Phi(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t,\tau) \exp[2|M|\sigma]$$

によって，$\widetilde{W}(\cdot,\cdot)$ がすべてのtについて

$$0 < \alpha_1 \exp[-2|M|\sigma] I \leqq \widetilde{W}(t, t+\sigma) \leqq \alpha_2 \exp[2|M|\sigma] I \tag{3.47}$$

を満たすことに注意しておく．いま，スカラ関数$V(\cdot,\cdot)$を

$$V(\chi, t) = \chi' \widetilde{W}^{-1}(t, t+\sigma) \chi \tag{3.48}$$

で定義しよう．すると，(3.47)より，すべてのtで

$$\alpha_2^{-1} \exp[-2|M|\sigma] \|\chi\|^2 \leqq V(\chi, t) \leqq \alpha_1^{-1} \exp[2|M|\sigma] \tag{3.49}$$

が成立する．そして，S_c^1の解$\chi(\cdot)$に沿った$V(\chi(\cdot), \cdot)$の時間微分はほとんどすべてのtで

$$\dot{V}(\chi(t),\ t) = \chi'(t)\ \{\ 2M\widetilde{W}^{-1}(t,t+\sigma) - \widetilde{W}^{-1}(t,t+\sigma)\Phi(t,t+\sigma)B(t+\sigma)$$

$$\cdot B'(t+\sigma)\Phi'(t,t+\sigma)\widetilde{W}^{-1}(t,t+\sigma)\exp[2M\sigma]\ \}\ \chi(t)$$

$$\leqq\ 2\ M\chi'(t)\ \widetilde{W}^{-1}(t,t+\sigma)\ \chi(t)$$

$$=\ 2\ M\ V(\chi(t),\ t)$$

を満たすから，すべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$V(\chi(t_2),\ t_2) \leqq V(\chi(t_1),\ t_1)\exp[2M(t_2 - t_1)] \tag{3.50}$$

が成立する．ゆえに，S_c'のすべての解はすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\|\chi(t_2)\| \leqq \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}\ \exp[2|M|\sigma]\ \|\chi(t_1)\|\exp[M(t_2-t_1)] \tag{3.51}$$

を満たす．したがって，S_0は，完全可制御性に関して一様ならば，一様完全可安定である．（証明終）

定理 3.4 の証明の前に，その証明に必要な補題を述べておく．

〔補題 3.2〕　有界な S_0が完全可制御性に関して一様であるための必要十分条件は，その可制御性グラミアン$W(\cdot,\cdot)$ がすべての t で

$$0\ <\ \alpha_1\ I\ \leqq\ W(t,t+\sigma) \tag{3.52}$$

を満たすような正数 σ，α_1 が存在することである．

（証明）　すべての t で

$$\|A(t)\| \leqq K_1,\qquad \|B(t)\| \leqq K_2$$

であるとしよう，Bellman − Gronwall の不等式[43]によると，すべての t，τについて，$\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t)$ の状態転移マトリクス$\Phi(\cdot,\cdot)$は

$$\|\Phi(t,\tau)\| \leqq \exp[K_1\ |\tau - t|]$$

を満たす．したがって，どのような正数σに対しても，すべての t について

$$W(t,t+\sigma)\ \leqq \int_t^{t+\sigma}\ \|\Phi(t,\tau)\|^2\ \|B(\tau)\|^2\ d\tau\cdot I$$

$$\leqq \quad K_2^2 \int_t^{t+\sigma} \exp\,[2K_1\,(\tau - t)]\,d\tau \cdot I$$

$$= \frac{K_2^2}{2K_1}\,(\exp\,[2K_1\sigma] - 1)\,I$$

が成立する．これは(3.52) が成立することと(2.7) が成立することが等価であることを意味している． （証明終）

（定理 3.4 の証明） 必要性：まず，補題 3.2 の証明で述べたように，$\|A(t)\| \leqq K_1$のとき，$\dot{\chi}(t) = A(t)\,\chi(t)$の状態転移マトリクス$\Phi(\cdot,\cdot)$ がすべての t_1，t_2 $(\geqq t_1)$について

$$\|\Phi(t_1, t_2)\| \leqq \exp\,[K_1\,|t_2 - t_1|] \tag{3.53}$$

を満たすことに注意しておく．

S_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定であると仮定しよう．すると，S_c'の状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ がすべての t_1，t_2 $(\geqq t_1)$について

$$\|\hat{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq b\,\exp\,[-2K_1\,(t_2 - t_1)] \tag{3.54}$$

を満たすような有界なフィードバックゲイン$K(\cdot)$と正数 b が存在する（注 3.3 参照）．ここで，すべての t で

$$\|K(t)\| \leqq K_3$$

としておく．ところで，$\Phi(\cdot,\cdot)$と$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$はすべての t_1，t_2 について

$$\hat{\Phi}(t_2, t_1) = \Phi(t_2, t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau)\,B(\tau)\,K(\tau)\,\hat{\Phi}(\tau, t_1)\,d\tau$$

または，これと等価な

$$\Phi(t_1, t_2)\,\hat{\Phi}(t_2, t_1) = I + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_1, \tau)\,B(\tau)\,K(\tau)\,\hat{\Phi}(\tau, t_1)\,d\tau$$

を満たすから，[25]任意の n 次元ベクトルμについて

$$\mu'\Phi(t_1, t_2)\hat{\Phi}(t_2, t_1) = \mu' + \int_{t_1}^{t_2} \mu'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)K(\tau)\hat{\Phi}(\tau, t_1)\,d\tau$$

である．ゆえに，すべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\|\mu\|\,\|\Phi(t_1, t_2)\|\,\|\hat{\Phi}(t_2, t_1)\|$$

$$\geqq \|\mu\| - \int_{t_1}^{t_2} \|\mu'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)\|\,\|K(\tau)\|\,\|\hat{\Phi}(\tau, t_1)\|\,d\tau \tag{3.55}$$

が成立し，この両辺に (3.53) と (3.54) を代入することによって次の不等式が得られる．

$$b\|\mu\|\exp[-K_1(t_2 - t_1)]$$

$$\geqq \|\mu\| - bK_3\int_{t_1}^{t_2} \|\mu'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)\|\,d\tau, \quad t_2 \geqq t_1 \tag{3.56}$$

いま，S_0が完全可制御性に関して一様でないとしてみよう．すると，補題 3．2 により，あらゆる正数 σ と任意の正数 ρ に対して，$\lambda' W(s, s+\sigma)\lambda < \rho\lambda'\lambda$，すなわち，

$$\int_s^{s+\sigma} \|\lambda'\Phi(s, \tau)B(\tau)\|^2\,d\tau < \rho\|\lambda\|^2 \tag{3.57}$$

となるような時刻 s と n 次元ベクトル λ（$\neq 0$）が存在する．Hölder の不等式[44] を用いると，このような σ，ρ，s，λ が次の不等式を満たすことがわかる．

$$\int_s^{s+\sigma} \|\lambda'\Phi(s, \tau)B(\tau)\|\,d\tau < \sqrt{\rho\sigma}\,\|\lambda\| \tag{3.58}$$

ここで，$\sigma = (\log 3b)/K_1$，　$\rho = 1/(9b^2K_3^2\sigma)$ とおいて (3.57) を満たす s，λ を求め，(3.56) で $\mu = \lambda$，$t_1 = s$，$t_2 = s + \sigma$ としよう．すると，(3.58) より，

$$\frac{1}{3}\|\lambda\| = b\|\lambda\|\exp[-K_1\sigma]$$

$$> \| \lambda \| - bK_3 \sqrt{\rho \sigma} \| \lambda \| = \frac{2}{3} \| \lambda \| \qquad (3.59)$$

が得られる．この不等式は明らかに矛盾している．したがって，有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定ならば，それは完全可制御性に関して一様である．

十分性：　定理 3.3 の証明がそのまま適用できる．ここで対象にしているシステムでは，B(·)が有界で，かつ(3.47)より$\widetilde{W}^{-1}(\cdot,\cdot+\sigma)$ も有界だから，(3.46)で定義されたフィードバックゲインK(·)は有界である．　（証明終）

注 2.4，2.5 で述べたように，一様完全可制御性は完全可制御性に関する一様性をも意味し，有界なシステムではこれら２つの概念は等価である．したがって，定理 3.3，3.4 から直ちに次の２つの系が得られる．

〔系 3.1〕　S_0は，一様完全可制御ならば，一様完全可安定である．

〔系 3.2〕　有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定であるための必要十分条件は，それが一様完全可制御であることである．

3.5　完全可到達性に関して一様なシステムの逆安定化

完全可制御性に関する一様性と完全可到達性に関する一様性および一様完全可安定性と一様完全逆可安定性の物理的意味を比較すると，完全可制御性に関する一様性と一様完全可安定性の関係を述べた定理 3.3，3.4 から，完全可到達性に関して一様であることが一様完全逆可安定であるための十分条件ではないかと考えられる．この類推は正しく，特に，有界システムのクラスでは必要条件でもある．

〔定理 3.5〕　S_0は，完全可到達性に関して一様ならば，一様完全逆可安定である．

〔定理 3.6〕　有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全逆可安定であるための必要十分条件は，それが完全可到達性に関して一様であることである．

（注 3.5）　定理 3.3 の逆が成立しないように，定理 3.5 の逆も成立しない．

〔例 3.5〕　例 3.4 で考えたスカラ・システム

$$\dot{x}(t) = x(t) + \exp[t]\, u(t) \qquad (3.45)$$

をふたたび考えよう．任意の実数mに対して，フィードバックゲインK(·)を

$$K(t) = (m-1)\ \exp[-t]$$

と定めると，S_c'の解はすべての t_1，t_2 について

$$\chi(t_2) = \chi(t_1)\ \exp[m(t_2-t_1)]$$

となるので，このシステムが一様完全逆可安定であることがわかる．ところが，可到達性グラミアンY（·,·）はどのような正数σに対しても

$$Y(t-\sigma, t) = \sigma\ \exp[2t]$$

であるから，このシステムは完全可到達性に関して一様ではない．

（定理 3.5 の証明）　S_0は完全可到達性に関して一様であるとしよう．任意の実数mに対して，フィードバックゲインK(·)を次のように定める．

$$K(t) = \frac{1}{2}\ B'(t)\ \widetilde{Y}^{-1}(t-\sigma, t) \tag{3.60}$$

ここに，

$$\widetilde{Y}(t-\sigma, t) \triangleq \int_{t-\sigma}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi'(t,\tau) \exp[-2m(t-\tau)]\, d\tau$$

で，σは完全可到達性に関する一様性を定義した

$$0 < \alpha_3 I \leqq Y(t-\sigma, t) \leqq \alpha_4 I \tag{2.8}$$

がすべてのtで成立するような正数である．この条件により，$\widetilde{Y}$（·,·）はすべてのtで

$$0 < \alpha_3\ \exp[-2|m|\sigma]\, I \leqq \widetilde{Y}(t-\sigma, t) \leqq \alpha_4\ \exp[2|m|\sigma]\, I \tag{3.61}$$

を満たす．いま，スカラ関数V（·,·）を

$$V(\chi, t) = \chi' \widetilde{Y}^{-1}(t-\sigma, t)\ \chi \tag{3.62}$$

としよう．すると，(3.61)より，不等式

$$\alpha_4^{-1} \exp[-2|m|\sigma] \|\chi\|^2 \leqq V(\chi,t) \leqq \alpha_3^{-1} \exp[2|m|\sigma] \|\chi\|^2 \tag{3.63}$$

が得られる．また，$S_c^{\prime}$の解$\chi(\cdot)$に沿った$V(\chi(\cdot),\cdot)$の時間微分はほとんどすべてのtで

$$\begin{aligned}\dot{V}(\chi(t),t) &= \chi'(t)\{2m\tilde{Y}^{-1}(t-\sigma,t) + \tilde{Y}^{-1}(t-\sigma,t)\Phi(t,t-\sigma)B(t-\sigma) \\ &\qquad \cdot B'(t-\sigma)\Phi'(t,t-\sigma)\tilde{Y}^{-1}(t-\sigma,t)\exp[-2m\sigma]\}\chi(t) \\ &\geqq 2m \quad \chi'(t)\tilde{Y}^{-1}(t-\sigma,t)\chi(t) \\ &= 2m \quad V(\chi(t),t)\end{aligned}$$

を満たすから，すべてのt_1，t_2 $(\geqq t_1)$について

$$V(\chi(t_1),t_1)\exp[2m(t_2-t_1)] \leqq V(\chi(t_2),t_2) \tag{3.64}$$

が成立する．ゆえに，$S_c^{\prime}$のすべての解はすべてのt_1，t_2 $(\geqq t_1)$について

$$\sqrt{\alpha_3/\alpha_4}\ \exp[-2|m|\sigma]\|\chi(t_1)\|\exp[m(t_2-t_1)] \leqq \|\chi(t_2)\| \tag{3.65}$$

を満たす．したがって，S_oは，完全可到達性に関して一様ならば，一様完全逆可安定である．（証明終）

定理 3.6 を証明するためには次の補題が必要である．

〔補題 3.3〕　有界なS_oが完全可到達性に関して一様であるための必要十分条件は，その可到達性グラミアン$Y(\cdot,\cdot)$がすべてのtで

$$0 < \alpha_3 I \leqq Y(t-\sigma,t) \tag{3.66}$$

を満たすような正数σ，α_3が存在することである．

（証明）　補題 3.2 の証明と同様に，$\|A(t)\| \leqq K_1$，$\|B(t)\| \leqq K_2$ とすると，どのような正数σに対しても，すべてのtで

$$Y(t-\sigma,t) \leqq \frac{K_2^2}{2K_1}(\exp[2K_1\sigma]-1)I$$

が成立する．これは(3.66)が成立することと(2.8)が成立することが等価であることを意味している．（証明終）

（定理 3.6 の証明） 必要性： 定理 3.4 の必要性の証明と同様に証明できる．まず，有界な S_0に関しては，すべての t_1，t_2 について

$$\| \Phi(t_2, t_1) \| \leqq \exp[K_1 \mid t_2 - t_1 \mid] \tag{3.67}$$

が成立することに注意しよう．ただし，$\| A(t) \| \leqq K_1$ とする．このシステムが有界なフィードバックゲインによって一様完全逆可安定ならば，$m = 2K_1$ に対しても有界なフィードバックゲイン$K(\cdot)$と正数 a が存在して，注 3.3 で述べたように，すべての t_1，t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$\| \hat{\Phi}(t_1, t_2) \| \leqq a^{-1} \exp[-2K_1(t_2 - t_1)] \tag{3.68}$$

が成立する．いま，$\| K(t) \| \leqq K_3$ としておく．ゆえに，$\Phi(\cdot,\cdot)$ と $\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ がすべての t_1，t_2 について

$$\Phi(t_2, t_1)\hat{\Phi}(t_1, t_2) = I - \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau) B(\tau) K(\tau) \hat{\Phi}(\tau, t_2)\, d\tau$$

を満たすことを考慮すると，任意の n 次元ベクトル μ およびすべての t_1，t_2 $(\geqq t_1)$ について次の不等式が成立する．

$$\begin{aligned} a^{-1} \| \mu \| \exp[-K_1(t_2 - t_1)] \\ \geqq \| \mu \| - a^{-1} K_3 \int_{t_1}^{t_2} \| \mu' \Phi(t_2, \tau) B(\tau) \| d\tau \end{aligned} \tag{3.69}$$

さて，S_0が完全可到達性に関して一様でないとしてみよう．すると，補題 3.3 により，あらゆる正数 σ と任意の正数 ρ に対して，ある時刻 s について

$$\int_{s-\sigma}^{s} \| \lambda' \Phi(s, \tau) B(\tau) \|^2 d\tau < \rho \| \lambda \|^2 \tag{3.70}$$

となるような n 次元ベクトル λ $(\neq 0)$ が存在する．Hölder の不等式によると，このような σ，ρ，s，λ について，次の不等式が成立する．

$$\int_{s-\sigma}^{s} \| \lambda' \Phi(s, \tau) B(\tau) \| d\tau < \sqrt{\rho\sigma} \| \lambda \| \tag{3.71}$$

ここで，$\sigma=(\log 3/a)/K_1$，$\rho=a^2/(9K_3^2\sigma)$とおいて(3.70)を満たすs，λを求め，(3.69)で$\mu=\lambda$，$t_1=s-\sigma$，$t_2=s$とすると，(3.71)より，

$$\frac{1}{3}\|\lambda\|=a^{-1}\|\lambda\|\exp[-K_1\sigma]$$

$$>\|\lambda\|-a^{-1}K_3\sqrt{\rho\sigma}\|\lambda\|=\frac{2}{3}\|\lambda\| \qquad (3.72)$$

が得られるが，この不等式は明らかに矛盾している．したがって，有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全逆可安定ならば，それは完全可到達性に関して一様である．

十分性：　定理3.5の証明がそのまま適用できる．ここで対象としているシステムでは，B(·)が有界で，かつ(3.61)より$\tilde{Y}^{-1}(\cdot-\sigma,\cdot)$も有界だから，(3.60)で定義されたフィードバックゲインK(·)は有界である．（証明終）

注2.4，2.5で述べたように，一様完全可制御性は完全可到達性に関する一様性をも意味し，有界なシステムではこれら2つの概念は等価である．したがって，定理3.5, 3.6から直ちに次の2つの系が得られる

〔系3.3〕　S_0は，一様完全可制御ならば，一様完全逆可安定である．

〔系3.4〕　有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全逆可安定であるための必要十分条件は，それが一様完全可制御であることである．

3.6　一様完全可制御なシステムの安定性の指定

これまでに，完全可制御性に関して一様であることが一様完全可安定であるための，完全可到達性に関して一様であることが一様完全逆可安定であるための十分条件であることを示した．これらの事実から，完全可制御性に関する一様性と完全可到達性に関する一様性を同時に意味する一様完全可制御性が，一様完全可設計であることを保証すると推測できる．この推測は正しく，次の定理が成立する．特に，有界システムのクラスでは，一様完全可制御性と一様完全可設計性は等価である．

〔定理3.7〕　S_0は，一様完全可制御ならば，一様完全可設計である．

〔定理3.8〕　有界なS_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可設計であるための必要十分条件は，それが一様完全可制御であることである．

（注3.6）　定理3.3と3.5の逆が成立しないように，定理3.7の逆も成立し

ない．これは次の例によって示される．

〔例 3.6〕　例 3.4，3.5で考えたスカラ・システム

$$\dot{\chi}(t) = \chi(t) + \exp[t]\, u(t) \tag{3.45}$$

をもう一度考えよう．任意の実数m，M（≧m）に対して，フィードバックゲインK(·)を

$$K(t) = \{-1+\frac{1}{2}(m+M)\} \exp[-t]$$

とする．このとき，S_c^1の解は

$$\chi(t_2) = \chi(t_1) \exp[\frac{1}{2}(m+M)(t_2-t_1)]$$

であるから，すべての t_1，t_2（≧t_1）について

$$|\chi(t_1)| \exp[m(t_2-t_1)] \leqq |\chi(t_2)| \leqq |\chi(t_1)| \exp[M(t_2-t_1)]$$

を満たす．したがって，(3.45)は一様完全可設計である．しかし，例 3.4，3.5 で示したように，このシステムは完全可制御性に関しても完全可到達性に関しても一様ではないので，一様完全可制御ではない．

定理 3.7，3.8　の証明の前に，これらの証明に必要な 2 つの補題をあげておく．

〔補題 3.4〕　S_0が一様完全可制御ならば，すべての t_1，t_2（≧t_1）について

$$\int_{t_1}^{t_2} \| B(\tau) \|^2 \, d\tau \leqq C_1 + C_2 (t_2-t_1) \tag{3.73}$$

が成立するような正数C_1，C_2が存在する．

（証明）　まず，

$$\| B(t) \|^2 = \| B'(t) \|^2 = \lambda \max(B(t)B'(t)) = \| B(t)B'(t) \|$$

であることに注意しよう．S_0が一様完全可制御であるから，すべての t_1について

$$\int_{t_1}^{t_1+\sigma}\|B(\tau)\|^2\,d\tau = \int_{t_1}^{t_1+\sigma}\|B(\tau)B'(\tau)\|\,d\tau$$

$$= \int_{t_1}^{t_1+\sigma}\|\Phi(\tau,t_1)\,\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)\Phi'(\tau,t_1)\|\,d\tau$$

$$\leqq \sup_{t_1\leqq\tau\leqq t_1+\sigma}\|\Phi(\tau,t_1)\|^2 \int_{t_1}^{t_1+\sigma}\|\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)\|\,d\tau$$

$$\leqq \{\sup_{0\leqq\tau\leqq\sigma}\gamma(\tau)\}^2 \quad n\,\|W(t_1,t_1+\sigma)\|$$

$$\leqq n\alpha_2\,\{\sup_{0\leqq\tau\leqq\sigma}\gamma(\tau)\}^2 \triangleq C_1 \tag{3.74}$$

が成立する．ここに，σは一様完全可制御性を定義した(2.9a)，(2.9b)　がすべてのtで成立するような正数，$\gamma(\cdot)$は注2.3で述べた関数である．したがって，$t_1+i\sigma \leqq t_2 \leqq t_1+(i+1)\sigma$　$(i=0,1,2,\cdots\cdots)$なるt_2に対して

$$\int_{t_1}^{t_2}\|B(\tau)\|^2\,d\tau \leqq \int_{t_1}^{t_1+(i+1)\sigma}\|B(\tau)\|^2\,d\tau$$

$$= \int_{t_1}^{t_1+\sigma}\|B(\tau)\|^2\,d\tau + \int_{t_1+\sigma}^{t_1+2\sigma}\|B(\tau)\|^2\,d\tau + \cdots$$

$$+ \int_{t_1+i\sigma}^{t_1+(i+1)\sigma}\|B(\tau)\|^2\,d\tau \leqq (i+1)\,C_1$$

$$\leqq C_1\,\{1+(t_2-t_1)/\sigma\}$$

$$= C_1 + C_2\,(t_2-t_1), \qquad C_2 \triangleq C_1/\sigma \tag{3.75}$$

である．　（証明終）

〔補題3.5〕　$F(\cdot)$を可測かつ有界な関数を要素とするn×nマトリクスとする．このとき，S_0が一様完全可制御ならば，フィードバックゲイン

$$K(t) = B'(t)\,F(t) \tag{3.76}$$

によって定まるS_cも一様完全可制御である．

（証明）　文献41）の定理4により，すべてのtについて

$$\int_t^{t+\sigma} \| B'(\tau)\ F(\tau) \|^2\ d\tau \leqq C_3$$

が成立するような正数C_3が存在することを示せば十分である．$F(\cdot)$は有界だから，$\| F(t) \| \leqq K_4$ としよう．S_0が一様完全可制御だから，(3.74) より，すべての t で

$$\int_t^{t+\sigma} \| B'(\tau) F(\tau) \|^2\ d\tau \leqq K_4^2 \int_t^{t+\sigma} \| B(\tau) \|^2\ d\tau$$

$$\leqq K_4^2\ C_1 \triangleq C_3 \tag{3.77}$$

が成立する．（証明終）

（定理 3.7 の証明） S_0は一様完全可制御であるから，当然，完全可到達性に関して一様である．したがって，定理 3.5 により，任意の実数 M と正数 ϵ に対して，

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) + B(t)K_1(t)\}\chi(t) + B(t)u(t) \tag{3.78}$$

のすべての零入力応答がある正数 a_1とすべての t_1，t_2 $(\geqq t_1)$について

$$a_1 \| \chi(t_1) \| \exp[(M+\epsilon)(t_2-t_1)] \leqq \| \chi(t_2) \| \tag{3.79}$$

を満たすようなフィードバックゲイン$K_1(\cdot)$が存在する．このフィードバックゲイン$K_1(\cdot)$として，ここでは，定理 3.5 の証明のように，(3.60) の形のものを用いることにしよう．すると，補題 3.5 により，(3.78) は一様完全可制御になり，その可制御性グラミアン

$$W_1(t, s) \triangleq \int_t^s \Phi_1(t,\tau) B(\tau) B'(\tau) \Phi_1'(t,\tau)\ d\tau \tag{3.80}$$

がすべての t で

$$0 < \tilde{\alpha}_1\ I \leqq W_1(t, t+\sigma_1) \leqq \tilde{\alpha}_2\ I \tag{3.81}$$

を満たすような正数 σ_1，$\tilde{\alpha}_1$，$\tilde{\alpha}_2$ が存在する．ここに，$\Phi_1(\cdot,\cdot)$は

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) + B(t)K_1(t)\}\chi(t)$$

の状態転移マトリクスである．(3.78) のすべての零入力応答が (3.79) を満たすことは，この状態転移マトリクスが

$$\| \Phi_1 (t_1 , t_2) \| \leqq a_1^{-1} \exp [-(M+\varepsilon)(t_2 - t_1)] \tag{3.82}$$

を満たすことと等価である（注 3.3 参照）．

さて，ここで，実数 m，M の関係を m＜M の場合と m＝M の場合に分けて考えよう．まず，m＜M の場合を考える．この場合には，S_0の逆安定化によって得られた (3.78) に，今度は安定化のためのフィードバックゲイン

$$K_2 (t) = -\frac{1}{2} B'(t) \widetilde{W}_1^{-1} (t, t+\widetilde{\sigma}) \tag{3.83}$$

を用いて，もう一度状態フィードバックをほどこす．ここに，

$$\widetilde{W}_1 (t, t+\widetilde{\sigma}) \triangleq \int_t^{t+\widetilde{\sigma}} \Phi_1 (t,\tau) B(t) B'(\tau) \Phi_1'(t,\tau) \exp [-2M(t-\tau)] d\tau \tag{3.84}$$

$$\widetilde{\sigma} \triangleq \max \left\{ \sigma_1 , \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{C_2 \exp [2 |M| \sigma_1]}{2 a_1^2 \widetilde{\alpha}_1 (M-m)} \right\} \tag{3.85}$$

とする．その結果，S_c' は

$$\dot{\chi}(t) = \{A(t) + B(t)K(t)\} \chi(t) \tag{3.86}$$
$$K(t) \triangleq K_1(t) + K_2(t)$$

となる．いま，n 次元ベクトルχと時刻 t のスカラ関数 V（χ，t）を

$$V(\chi, t) = \chi' \widetilde{W}_1^{-1} (t, t+\widetilde{\sigma}) \chi \tag{3.87}$$

で定義しよう．この証明の最後に示すように，どのような正数$\widetilde{\sigma}$（$\geqq \sigma_1$）に対しても，すべての t について

$$0 < C_4 I \leqq \widetilde{W}_1 (t, t+\widetilde{\sigma}) \leqq C_5 I \tag{3.88}$$

$$C_4 \triangleq \widetilde{\alpha}_1 \exp [-2 |M| \sigma_1], \quad C_5 \triangleq \frac{C_1}{a_1^2 (1 - \exp [-2\varepsilon\sigma])}$$

が成立するから，$V(\cdot,\cdot)$ は $\tilde{\sigma}$ $(\geqq \sigma_1)$ にかかわらず，すべての t で

$$C_5^{-1}\|\chi\|^2 \leqq V(\chi,t) \leqq C_4^{-1}\|\chi\|^2 \tag{3.89}$$

を満たす．また，(3.86) の解 $\chi(\cdot)$ に沿った $V(\chi(\cdot),\cdot)$ の時間微分はほとんどすべての t で

$$\dot{V}(\chi(t),t) = \chi'(t)\{2M\tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma}) - \tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma})\Phi_1(t,t+\tilde{\sigma})B(t+\tilde{\sigma})$$
$$\cdot B'(t+\tilde{\sigma})\Phi_1'(t,t+\tilde{\sigma})\tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma})\exp[2M\tilde{\sigma}]\}\chi(t) \tag{3.90}$$

である．(3.82) と (3.88) によると，これから，ほとんどすべての t で

$$\left\{2M - \frac{\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2\ C_4}\|B(t+\tilde{\sigma})\|^2\right\}V(\chi(t),t)$$
$$\leqq \dot{V}(\chi(t),t) \leqq 2M\ V(\chi(t),t) \tag{3.91}$$

が成り立ち，* ゆえに，すべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$V(\chi(t_1),t_1)\exp\left[2M(t_2-t_1) - \frac{\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2\ C_4}\int_{t_1+\tilde{\sigma}}^{t_2+\tilde{\sigma}}\|B(\tau)\|^2\,d\tau\right]$$
$$\leqq V(\chi(t_2),t_2) \leqq V(\chi(t_1),t_1)\exp[2M(t_2-t_1)] \tag{3.92}$$

が成り立つことがわかる．(3.89) を用いると，右側の不等式から，直ちに

$$\|\chi(t_2)\| \leqq \sqrt{C_5/C_4}\ \|\chi(t_1)\|\exp[M(t_2-t_1)] \tag{3.93}$$

が得られる．一方，補題 3.4 により，左側の不等式からは

$$V(\chi(t_2),t_2)$$
$$\geqq V(\chi(t_1),t_1)\exp\left[-\frac{C_1\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2\ C_4} + 2\left(M - \frac{C_2\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{2a_1^2\ C_4}\right)(t_2-t_1)\right]$$
$$= \exp\left[-\frac{C_1\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2\ C_4}\right]V(\chi(t_1),t_1)\exp\left[2\left(M - \frac{C_2\exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{2a_1^2\ C_4}\right)(t_2-t_1)\right] \tag{3.94}$$

---

* $\tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma})\ \tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma}) \leqq C_4^{-1}\ \tilde{W}_1^{-1}(t,t+\tilde{\sigma})$ を用いている．

が得られる．ところで，$\tilde{\sigma}$は (3.85) により

$$M - \frac{C_2 \exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{2a_1^2 C_4} \geqq m$$

となるように定められているから，(3.94) は

$$V(\chi(t_2), t_2)$$

$$\geqq \exp\left[-\frac{C_1 \exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2 C_4}\right] V(\chi(t_1), t_1) \exp[2m(t_2 - t_1)] \tag{3.95}$$

が成り立つことを意味している．ゆえに，(3.89) を用いると

$$\sqrt{\frac{C_4}{C_5} \exp\left[-\frac{C_1 \exp[-2\varepsilon\tilde{\sigma}]}{a_1^2 C_4}\right]} \|\chi(t_1)\| \exp[m(t_2 - t_1)] \leqq \|\chi(t_2)\| \tag{3.96}$$

が得られる．このように，m＜Mの場合には，適当なフィードバックゲインによって，S_c^1のすべての解がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について (3.93) と (3.96) を同時に満たすようにできることがわかった．

次に，m＝Mの場合を考えよう．この場合には，(3.83) で定義したフィードバックゲイン$K_2(\cdot)$の代りに

$$K_2(t) = -\frac{1}{2} B'(t) \tilde{W}_1^{-1}(t, \infty) \tag{3.97}$$

を用いて，(3.78) に状態フィードバックをほどこす．$\tilde{W}_1(t, s)$が t を固定したとき s の単調非減少関数で，(3.88) より，つねに$\tilde{W}_1(t, s) \leqq C_5 I$ であるから，$\tilde{W}_1(t, \infty)$ はすべての t について存在する．そして，すべての t について，(3.88) と同様の不等式が成立する．

$$0 < C_4 I \leqq \tilde{W}_1(t, \infty) \leqq C_5 I \tag{3.98}$$

いま，スカラ関数$V(\cdot, \cdot)$を (3.87) の代りに

$$V(\chi, t) = \chi' \tilde{W}_1^{-1}(t, \infty) \chi \tag{3.99}$$

で定義しよう．このときも，(3.98) より，$V(\cdot, \cdot)$はすべての t で (3.89)

を満たす．また，(3.86)　（ただし，$K_2(\cdot)$は(3.97)　で定義されたもの）の解$\chi(\cdot)$に沿った$V(\chi(\cdot),\cdot)$の時間微分はほとんどすべての t で

$$\dot{V}(\chi(t),t) = 2M\,V(\chi(t),t)\ (=2m\,V(\chi(t),t)) \tag{3.100}$$

を満たすから，すべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\begin{aligned} V(\chi(t_2),t_2) &= V(\chi(t_1),t_1)\ \exp[2M(t_2-t_1)] \\ &\quad (\ = V(\chi(t_1),t_1)\ \exp[2m(t_2-t_1)]\ ) \end{aligned} \tag{3.101}$$

である．ゆえに，(3.89)より，

$$\begin{aligned} \sqrt{C_4/C_5}\ \|\chi(t_1)\|\ \exp[m(t_2-t_1)] &\leqq \|\chi(t_2)\| \\ &\leqq \sqrt{C_5/C_4}\ \|\chi(t_1)\|\ \exp[M(t_2-t_1)] \end{aligned} \tag{3.102}$$

が成立する．このように，m＝Mの場合にも，適当なフィードバックゲインによって，$S_c^{\prime}$のすべての解がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について(3.102)　を満たすようにできることがわかった．

それでは，最後に，不等式(3.88)を導こう．まず，$\widetilde{W}_1(t,t+\tilde{\sigma})$は t を固定したとき$\tilde{\sigma}$に関して単調非減少なマトリクス関数だから，$\tilde{\sigma}\geqq\sigma_1$　ならば，(3.81)　より，

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_1(t,t+\tilde{\sigma}) &\geqq \widetilde{W}_1(t,t+\sigma_1) \\ &\geqq \tilde{\alpha}_1\ \exp[-2|M|\sigma_1]\,I \quad \triangleq C_4\,I \end{aligned}$$

である．一方，(3.74)と(3.82)を考慮すると

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_1(t,t+\tilde{\sigma}) &\leqq \int_t^{\infty}\|B(\tau)\|^2\ \|\Phi_1(t,\tau)\|^2\ \exp[-2M(t-\tau)]\,d\tau\cdot I \\ &\leqq \int_t^{\infty}\frac{1}{a_1^2}\ \|B(\tau)\|^2\ \exp[-2\varepsilon(\tau-t)]\,d\tau\cdot I \\ &= \frac{1}{a_1^2}\ \{\int_t^{t+\sigma}\|B(\tau)\|^2\ \exp[-2\varepsilon(\tau-t)]\,d\tau \\ &\qquad +\int_{t+\sigma}^{t+2\sigma}\|B(\tau)\|^2\ \exp[-2\varepsilon(\tau-t)]\,d\tau\ +\cdots\cdots\}\ I \end{aligned}$$

$$\leqq \frac{1}{a_1^2}\left\{ \int_t^{t+\sigma} \|B(\tau)\|^2 \, d\tau + \exp[-2\varepsilon\sigma] \int_{t+\sigma}^{t+2\sigma} \|B(\tau)\|^2 \, d\tau + \cdots \right\} I$$

$$\leqq \frac{C_1}{a_1^2}\left\{ 1 + \exp[-2\varepsilon\sigma] + \cdots\cdots \right\} I$$

$$= \frac{C_1}{a_1^2\,(1-\exp[-2\varepsilon\sigma])} I \triangleq C_5 I$$

である．ここに，C_4，C_5 は t にも $\tilde{\sigma}$ にも独立だから，どのような $\tilde{\sigma}$（$\geqq \sigma_1$）に対しても，すべての t について (3.88) は成立する．

以上で，S_0は一様完全可制御ならば一様完全可設計であることが完全に証明された．（証明終）

（定理 3.8 の証明） 必要性： 有界な S_0が有界なフィードバックゲインによって一様完全可設計ならば，当然，そのシステムは有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定である．したがって，系 3.2 により，そのシステムは一様完全可制御である．

十分性： 定理 3.7 の証明がそのまま適用できる．このシステムは有界だから，まず，定理 3.6 の証明で述べたように，(3.60) の形のフィードバックゲイン$K_1(\cdot)$は有界である．また，$B(\cdot)$が有界で，かつ (3.88) と (3.98) より $\tilde{W}_1^{-1}(\cdot,\cdot+\tilde{\sigma})$と$\tilde{W}_1^{-1}(\cdot,\infty)$ も有界だから，(3.83) と (3.97) で定義されたフィードバックゲイン$K_2(\cdot)$も有界である．したがって，$K(\cdot)\triangleq K_1(\cdot)+K_2(\cdot)$ は有界である．（証明終）

3.7 結　　言

この章では，有限次元線形時変システム S_0を対象に，指定された安定性を状態フィードバックを用いて実現する問題を考え，可安定性や逆可安定性と可制御性や可到達性の間に成り立つ関係を調べた．そして，まず，完全可制御であることは完全可安定であるための必要十分条件であるとともに，完全逆可安定であるための必要十分条件でもあることを明らかにした．この結果は，当然のことであるが，完全可制御でないシステムにはフィードバックによって任意の特性を与えることができないことを意味している．

次に，完全可制御性に関して一様であることが一様完全可安定であるための

十分条件であることと，完全可到達性に関して一様であることが一様完全逆可安定であるための十分条件であることを示した．これらの結果は，単に，完全可制御性に関する一様性と一様完全可安定性，および完全可到達性に関する一様性と一様完全逆可安定性が密接な関係にあることを示しているだけでなく，可制御性や可到達性に関する一様性の物理的意味をより明らかにしている．有界システム（たとえば，時間不変システム）では，完全可制御性に関する一様性と完全可到達性に関する一様性は条件のうえでは等価になるので，概念の差異ははっきりとは現われない．しかし，可制御性や可到達性に関する一様性の物理的意味がより明らかになった結果，有界システムを解析，設計する場合にも，どの現象にはどちらの性質が本質的な役割を果たしているのかがわかり，いままでより理論的な解析，設計が可能になると考えられる．

最後に，一様完全可制御であることが一様完全可設計であるための十分条件であることを示した．この結果は，可制御性と可到達性に関する一様性の物理的意味が明確になった結果得られたもので，上で述べた理論的な解析，設計の一つの成果と言える．そして，開ループシステムと閉ループシステムを有界システムのクラスに限れば，この関係が必要十分の関係として成立することも示し，時間不変システムの極指定問題に対するWonham[11] の結果を有界な時変システムのクラスまで拡張した．

完全可制御性に関して一様なシステム，完全可到達性に関して一様なシステム，一様完全可制御なシステムに，指定された安定性を実現するため使用したフィードバックゲインは（可制御性，可到達性）グラミアンを用いたものであった．　このフィードバックゲインは積分と逆マトリクスの計算によって具体的に求まり，極限をとる操作が必要でないので，Riccati 型微分方程式の極限解を用いたものよりも簡単に計算できる．可制御性グラミアンを用いたフィードバックゲインは，これまでにも，有限次元および無限次元の線形時間不変システムの安定化に使われている．[45)〜48)]

第4章　出力フィードバックによる安定化[39),49),50)]

4.1　緒　　言

第3章では，有限次元線形時変システムS_0を対象に，線形状態フィードバックによる安定性に注目したシステム構成問題を考えた．この状態フィードバックが可能であるためには，状態を出力として取り出せることが必要不可欠である．第3章ではそれを暗黙のうちに仮定していた．しかし，一般には，状態を出力として直接取り出せることはあまりない．このような場合に状態フィードバックを実現するためには，（システムの外部の）入力と出力から（内部の）状態を何らかの方法で推定することが必要である．そのための推定機構としてよく知られているのが，カルマン・フィルタ[28),30)]と（線形時間不変システムに対する）Luenbergerの観測器[51),52)]である．これら2つの推定機構のもっとも大きな違いは，カルマン・フィルタが雑音の確率分布を考慮して構成されているのに対し，観測器は雑音を考慮せず，推定誤差の減衰特性に注目して構成されている点である．この章では，線形時変システムS_0に対する，雑音を考慮しない確定的な推定機構について考察する．

Johnson[14)]も述べているように，確率的な扱いは対象とするシステムが雑音を考慮した適当な確率モデルで正確に表わされているときには有効であるが，一般にはそのような確率モデルが得られるとは限らない．このような場合に，雑音がなければ状態の真値と推定値の誤差が漸近的に0に近付くことを保証する確定的な扱いが有効となる．

確定的な推定機構（以下，（状態）推定器と呼ぶ）については，これまで，次のような研究が行なわれてきた．[11),12),18)～20),51)～59)]

(i)　推定器を構成できるための条件を求める研究

(ii)　推定器の簡単な構成方法を求める研究

(iii)　推定器の次元を減らす研究

(iv)　最適推定器を求める研究

そして，対象が線形時間不変システムの場合についてはほとんど完全に解決していると言ってよい．得られている結果によると，対象とするシステムが完全可観測であることが，推定誤差の上界と下界を指数関数で指定して推定器（観

測器）を構成できるための必要十分条件である．

一方，対象が時変システムの場合については次のことがわかっている．まず，Johnson[14]の結果によると，システムが任意に小さい時間区間に対して一様完全可観測ならば，状態の真値と推定値の誤差の上界を指定した特性で漸近的に0に近付けるような推定器を構成することができる．また，Wolovich[19]の得た結果によると，パラメータの時間変化が充分に滑らかな有界システムのクラスでは，システムが一様可観測性よりも少し厳しい条件を満たしていれば，推定誤差の上界と下界を指数関数で指定して推定器を構成することができる．

ところで，推定器が推定器としての意味をもつためには，当然のことながら，それによって得られる状態の推定値が漸近的に真値に近付かなければならない．すなわち，推定誤差の上限が漸近的に0に近付かなければならない．そして，一般的には，推定誤差は対象とするシステムの減衰特性よりも速く減衰する必要がある．JohnsonやWolovichの方法によれば，推定誤差の減衰特性をいくら速く指定しても推定器を構成することができるので，この必要性は満たされる．しかし，この減衰の速さは速いほど良いというわけではない．たとえば，減衰があまり速過ぎると，推定誤差が雑音に敏感になるという問題が生じる．この減衰特性はどの程度が良いのかという問題にはまだ解答が与えられていないが，実際問題としては，対象とするシステムの減衰特性より少し速いくらいが良いと考えられている．[18]時間不変システムに対するLuenbergerの観測器[51),52]や上で述べたWolovichの推定器はそのように推定誤差の減衰特性を指定して構成することができる．しかし，Johnsonの推定器については，推定誤差の上界しか指定できないので，その減衰特性は実際には非常に速いものになる可能性がある．この意味で，Johnsonによって得られた推定器の構成方法はまだ充分なものとは言えない．

そこで，この章では，Wolovichが対象としたような狭いクラスのシステムではなく，ほとんど制限がないと考えられるくらい一般的な線形時変システムS_0を対象に，推定誤差の上界と下界を時間関数で指定して推定器を構成する問題を考える．そして，この推定器によって得られる状態の推定値を真値の代りにフィードバックして閉ループシステムを構成し，その安定性について考察する．まず，4.2では，S_0に対するそれと同じ次元の状態推定器を構成する問題が，その随伴システムや双対システムに対する状態フィードバックシステム

の構成問題と等価であることを述べる．したがって，推定器を構成することができるための条件やその構成方法は第3章の結果から直ちに得られる．4.3では，この結果を用いて，推定値のフィードバックによって得られる閉ループシステムの安定性を指定できるための条件を求め，ある条件のもとでは，推定値のフィードバックによっても真値をフィードバックする場合とほとんど同様の安定性の指定が可能であることを示す．

4.2 確定的状態推定器の構成

4.2.1 可検出性，逆可検出性，可推定性

ここで考える状態推定器はS_0と同じn次元のシステムで，状態方程式

$$E_s: \quad \dot{z}(t) = F(t)z(t) + G(t)u(t) + H(t)y(t)$$

で記述されるものとする．ここに，$z(t)$はこの推定器の状態を表わすn次元ベクトルで，S_0の状態$\chi(t)$の推定値でもある．$F(\cdot)$，$G(\cdot)$，$H(\cdot)$はそれぞれ$n\times n$，$n\times r$，$n\times m$マトリクスで，それらの要素は可測かつすべての有限時間区間で有界な関数とする．

このように推定器の形を定めた結果，状態の真値$\chi(\cdot)$と推定値$z(\cdot)$の誤差

$$e(t) \triangleq \chi(t) - z(t)$$

は次の微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{\chi}(t) - \dot{z}(t)\\ &= F(t)e(t) + \{A(t) - H(t)C(t) - F(t)\}\chi(t)\\ &\qquad + \{B(t) - H(t)D(t) - G(t)\}u(t)\end{aligned} \tag{4.1}$$

E_sが状態推定器として動作するということは，S_0の状態$\chi(\cdot)$や入力$u(\cdot)$のどのようなふるまいに対しても，$e(\cdot)$が漸近的に0に近づくということである．そのためには，$F(\cdot)$と$G(\cdot)$は

$$F(t) = A(t) - H(t)C(t) \tag{4.2a}$$

$$G(t) = B(t) - H(t)D(t) \tag{4.2b}$$

でなければならない．つまり，F(・)とG(・)はH(・)が定まれば自動的に決まるパラメータである．また，このとき，e(・)のふるまいは

$$Se: \quad \dot{e}(t) = \{A(t) - H(t)C(t)\}e(t)$$

に従うので，H(・)はこの微分方程式が漸近安定になるように定める必要がある．そして，これからわかるように，Esの推定器としての特性はSeの安定性，したがって，推定器ゲインH(・)の定め方によって決まるのである．以上より，結局，ここで考えている推定器構成問題は，Seが指定された安定性をもつようにH(・)を定める問題に帰着する．このようにして構成される状態推定器は，(4.2)より，次のように記述され，それは漸近安定である．

$$E_s^1: \quad \dot{z}(t) = \{A(t) - H(t)C(t)\}z(t) + \{B(t) - H(t)D(t)\}u(t) + H(t)y(t)$$

以下では，Seの状態転移マトリクスを$\tilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$で表わす．

これまでの議論をもとに，どのような推定誤差特性の状態推定が可能であるのかを表わす，可検出性，逆可検出性，可推定性の概念を定義しよう．指定された時刻t_0に対して，$\delta(\cdot, t_0)$を$[t_0, \infty)$で定義された，$\delta(t_0, t_0)=0$を満たす連続関数とする．

〔定義 4.1〕 任意の初期時刻t_0と連続関数$\delta(\cdot, t_0)$に対して，Seのすべての解がすべての$t(\geqq t_0)$で

$$\|e(t)\| \leqq b(t_0)\|e(t_0)\| \exp[\delta(t, t_0)] \tag{4.3}$$

を満たすような推定器ゲインH(・)と正数$b(t_0)$が存在するとき，Soは完全可検出であるという．

〔定義 4.2〕 任意の初期時刻t_0と連続関数$\delta(\cdot, t_0)$に対して，Seのすべての解がすべての$t(\geqq t_0)$で

$$a(t_0)\|e(t_0)\| \exp[\delta(t, t_0)] \leqq \|e(t)\| \tag{4.4}$$

を満たすような推定器ゲインH(・)と正数$a(t_0)$が存在するとき，Soは完全逆可検出であるという．

（注 4.1） Seのすべての解が(4.3)を満たすことは，その状態転移マトリク

ス$\widetilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\|\widetilde{\Phi}(t,t_0)\| \leqq b(t_0)\exp[\delta(t,t_0)] \tag{4.5}$$

を満たすことと等価である．すべての解が(4.4)を満たすことは，$\widetilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\|\widetilde{\Phi}(t_0,t)\| \leqq a(t_0)^{-1}\exp[-\delta(t,t_0)] \tag{4.6}$$

を満たすことと等価である．また，注3.2で完全可安定性と完全逆可安定性について述べたのと同様に，上述の連続関数$\delta(\cdot,t_0)$を(t_0,∞)で連続微分可能な関数としても，定義4.1と4.2の意味するところは変らない．

〔定義4.3〕　任意の実数Mに対して，Seのすべての解がすべてのt_1，$t_2(\geqq t_1)$について

$$\|e(t_2)\| \leqq b\,\|e(t_1)\|\exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.7}$$

を満たすような推定器ゲインH(・)と正数bが存在するとき，Soは一様完全可検出であるという．

〔定義4.4〕　任意の実数mに対して，Seのすべての解がすべてのt_1，$t_2(\geqq t_1)$について

$$a\,\|e(t_1)\|\exp[m(t_2-t_1)] \leqq \|e(t_2)\| \tag{4.8}$$

を満たすような推定器ゲインH(・)と正数aが存在するとき，Soは一様完全逆可検出であるという．

〔定義4.5〕　任意の実数m，M$(\geqq m)$に対して，Seのすべての解がすべてのt_1，$t_2(\geqq t_1)$について

$$\begin{aligned} a\,\|e(t_1)\|\exp[m(t_2-t_1)] &\leqq \|e(t_2)\| \\ &\leqq b\,\|e(t_1)\|\exp[M(t_2-t_1)] \end{aligned} \tag{4.9}$$

を満たすような推定器ゲインH(・)と正数a，bが存在するとき，Soは一様完全可推定であるという．

（注4.2）　Seのすべての解が(4.7)，(4.8)を満たすことは，その状態転移マトリクス$\widetilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$が

$$\|\tilde{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq b \exp[M(t_2 - t_1)] \tag{4.10}$$

$$\|\tilde{\Phi}(t_1, t_2)\| \leqq a^{-1} \exp[-m(t_2 - t_1)] \tag{4.11}$$

を満たすこととそれぞれ等価である．すべての解が(4.9)を満たすことは，(4.10)，(4.11)が同時に成立することと等価である．

ここで定義した概念の間には，第3章で述べた完全可安定性，完全逆可安定性，一様完全可安定性，一様完全逆可安定性，一様完全可設計性の間の関係と同様の関係が存在する．すなわち，完全可検出性と完全逆可検出性は等価である．一様完全可推定であれば一様完全可検出かつ一様完全逆可検出であるが，この逆が成立するかどうかはまだわからない．これらのほかには等価関係や包含関係は存在しない．

4.2.2 状態フィードバックによるシステム構成問題と状態推定器の構成問題の関係

第3章で述べたように，状態フィードバックによるシステムの構成問題は，A(·)とB(·)が与えられたとき，

$$S_c^! : \quad \dot{\chi}(t) = \{A(t) + B(t)K(t)\}\chi(t)$$

が指定された安定性をもつようなフィードバックゲインK(·)を求める問題であった．それに対して，状態推定器を構成する問題は，A(·)とC(·)が与えられたとき，

$$S_e : \quad \dot{e}(t) = \{A(t) - H(t)C(t)\}\, e(t)$$

が指定された安定性をもつような推定器ゲインH(·)を求める問題である．この比較からわかるように，状態フィードバックによるシステム構成問題と状態推定器を構成する問題は形の上では非常によく似ている．事実，線形時間不変システムのクラスでは，この2つの問題は次の意味で同一の問題である．[11),12)] すなわち，線形時間不変システム

$$\begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A\chi(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\chi(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

に対して状態推定器を構成する問題は，その双対システム

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_D(t) &= A' \chi_D(t) + C' u_D(t) \\ y_D(t) &= B' \chi_D(t) + D' u_D(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

を対象とする状態フィードバックによるシステム構成問題である．なぜなら，A，C，Hが時間不変であるとき，

$$\dot{e}(t) = (A - HC)\, e(t) \tag{4.14}$$

の安定性を指定することはA－HCの固有値を指定することと等価であり，A－HCの固有値とA'－C'H'の固有値は同一なので，(4.14) の安定性を指定する問題はその双対システム

$$\dot{\chi}_D(t) = (A' - C'H')\, \chi_D(t) \tag{4.15}$$

の安定性を指定する問題に置き換えることができるからである．Simon と Mitter[12]はこの関係を使って，状態フィードバックによる極指定問題の結果より，(4.12) が完全可観測であることが，(4.14) の極を任意に指定できる（安定性を任意に指定できる）ための必要十分条件であることを明らかにした．

ところが，時変システムのクラスでは，後に例4.1 で示すように，一般に，同次システム $\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ の安定性とその双対システム $\dot{\chi}_D(t) = S'(-t) \cdot \chi_D(t)$ の安定性の間に直接の関係はないので，時変システム

$$S_0 : \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A(t)\chi(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)\chi(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

に対する状態推定器の構成問題はその双対システム[31]

$$D_u : \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_D(t) &= A'(-t)\chi_D(t) + C'(-t)u_D(t) \\ y_D(t) &= B'(-t)\chi_D(t) + D'(-t)u_D(t) \end{aligned}$$

に対する状態フィードバックシステムの構成問題と完全には同一ではない．しかし，S_eやS_c'の安定性を全時間上で一様に指数関数で指定する場合に限れば，これらの問題が同一の問題であることが次の補題から導かれる．

〔補題 4.1〕　ある正数 b と実数Mについて，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての

解がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$\|\chi(t_2)\| \leqq b\,\|\chi(t_1)\| \exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.16}$$

を満たすことは，その双対システム $\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\,\chi_D(t)$ のすべての解がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について (4.16) と同じ不等式を満たすことと等価である．また，ある正数 a と実数 m について，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての解がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$a\,\|\chi(t_1)\| \exp[m(t_2-t_1)] \leqq \|\chi(t_2)\| \tag{4.17}$$

を満たすことは，$\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\chi_D(t)$ のすべての解がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について (4.17) と同じ不等式を満たすことと等価である．

（証明） $\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ と $\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\chi_D(t)$ の状態転移マトリクスをそれぞれ $\Psi(\cdot,\cdot)$, $\Psi_D(\cdot,\cdot)$ としよう．これらはすべての t, s について次の関係にある．[31]

$$\Psi(t,s) = \Psi_D'(-s,-t) \tag{4.18}$$

ところで，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての解がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について (4.16) を満たすことは，$\Psi(\cdot,\cdot)$ がすべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$\|\Psi(t_2,t_1)\| \leqq b \exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.19}$$

を満たすことと等価である．ゆえに，(4.18) より，すべての t_1, t_2 $(\geqq t_1)$ について

$$\|\Psi_D(-t_1,-t_2)\| \leqq b \exp[M((-t_1)-(-t_2))] \tag{4.20}$$

が成立することと等価である．これは，$\tilde{t}_2 = -t_1$, $\tilde{t}_1 = -t_2$ と置いて言い換えると，$\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\,\chi_D(t)$ のすべての解がすべての $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ $(\geqq \tilde{t}_1)$ について

$$\|\chi_D(\tilde{t}_2)\| \leqq b\,\|\chi_D(\tilde{t}_1)\| \exp[M(\tilde{t}_2-\tilde{t}_1)] \tag{4.21}$$

を満たすということである．補題の後半は，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ と $\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\chi_D(t)$ のすべての解が (4.17) を満たすことが，それぞれ

$$\|\Psi(t_1, t_2)\| \leqq a^{-1} \quad \exp[-m(t_2-t_1)] \tag{4.22}$$

$$\|\Psi_D(t_1, t_2)\| \leqq a^{-1} \quad \exp[-m(t_2-t_1)] \tag{4.23}$$

が成立することと等価であることに注意すれば，同様に証明できる．

（証明終）

この補題によって，安定性が全時間上で一様な場合には，推定誤差のふるまいを表わす

$$Se: \quad \dot{e}(t) = \{A(t) - H(t)C(t)\}\, e(t)$$

と，Soの双対システムDu に状態フィードバックをほどこして得られる形の

$$\dot{\chi}_D(t) = \{A'(-t) - C'(-t)H'(-t)\}\, \chi_D(t) \tag{4.24}$$

は安定性に関して同一の性質をもつことがわかる．したがって，次の補題が成立する．

〔補題 4.2〕　Soが一様完全可検出であるための必要十分条件は，Duが一様完全可安定であることである．

〔補題 4.3〕　Soが一様完全逆可検出であるための必要十分条件は，Duが一様完全逆可安定であることである．

〔補題 4.4〕　Soが一様完全可推定であるための必要十分条件は，Duが一様完全可設計であることである．

Soに対する状態推定器の構成問題をこのようにDuに対する状態フィードバックシステムの構成問題に対応させた場合，Seと (4.24) の比較により，推定器ゲインH(·)は次のように定めればよいことがわかる．まず，Seについて指定された安定性をDuに対する状態フィードバックシステム

$$\dot{\chi}_D(t) = \{A'(-t) + C'(-t)\, K_D(t)\}\, \chi_D(t)$$

がもつようなフィードバックゲイン$K_D(\cdot)$を求める．そして，このフィードバックゲインを用いて

$$H(t) = -K'_D(-t)$$

と定める．

〔例 4.1〕　線形時変システム

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ e^{2t} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.25a}$$

とその双対システム

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1(t) \\ \dot{\chi}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{-2t} \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.25b}$$

を考えよう．(4.25a) と (4.25b) の状態転移マトリクス$\Psi(\cdot,\cdot)$，$\Psi_D(\cdot,\cdot)$はそれぞれ

$$\Psi(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 \\ 0.2(e^{t+\tau}-e^{-4t+6\tau}) & e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$\Psi_D(t,\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0.2(e^{-t-\tau}-e^{-6t+4\tau}) \\ 0 & e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

である．したがって，(4.25b) は漸近安定であるが，(4.25a) はそうではない．このように，一般に，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$の漸近安定性とその双対システム$\dot{\chi}_D(t) = S'(-t)\chi_D(t)$の漸近安定性の間には直接の関係はない．これは当然のことである．なぜなら，$\dot{\chi}_D(t)=S'(-t)\chi_D(t)$の漸近安定性，すなわち，$t\to\infty$におけるふるまいは，$\dot{\chi}(t)=S(t)\chi(t)$の$t\to-\infty$におけるふるまいには関係があっても，その$t\to\infty$におけるふるまいにはまったく関係がないからである．

以上のように，S_0の一様完全可検出性，一様完全逆可検出性，一様完全可推定性は D_u の一様完全可安定性，一様完全逆可安定性，一様完全可設計性とそれぞれ等価である．しかし，例 4.1 からわかるように，安定性を全時間上で指数関数で一様に指定しない場合，すなわち，完全可検出性，完全逆可検出性と完全可安定性，完全逆可安定性については，このような双対システムを介しての等価関係は成立しない．その代り，随伴システム[31]

$$\mathrm{Ad}\ :\quad \begin{aligned} \dot{\chi}_A(t) &= -A'(t)\chi_A(t) + C'(t)u_A(t) \\ y_A(t) &= B'(t)\chi_A(t) + D'(t)u_A(t) \end{aligned}$$

を介して別の等価関係が成立することが次の補題より導かれる．

〔補題 4.5〕 ある正数 $b(t_0)$ と $[t_0, \infty)$ で定義された連続関数 $\delta(\cdot, t_0)$ について，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての解が $t\ (\geqq t_0)$ で

$$\|\chi(t)\| \leqq b(t_0)\ \|\chi(t_0)\|\ \exp[\delta(t, t_0)] \tag{4.26}$$

を満たすことと，その随伴システム $\dot{\chi}_A(t) = -S'(t)\chi_A(t)$ のすべての解が $t\ (\geqq t_0)$ で

$$b(t_0)^{-1}\ \|\chi_A(t_0)\|\ \exp[-\delta(t, t_0)] \leqq \|\chi_A(t)\| \tag{4.27}$$

を満たすことは等価である．また，ある正数 $a(t_0)$ と連続関数 $\delta(\cdot, t_0)$ について，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての解が $t\ (\geqq t_0)$ で

$$a(t_0)\ \|\chi(t_0)\|\ \exp[\delta(t, t_0)] \leqq \|\chi(t)\| \tag{4.28}$$

を満たすことは $\dot{\chi}_A(t) = -S'(t)\chi_A(t)$ のすべての解が $t\ (\geqq t_0)$ で

$$\|\chi_A(t)\| \leqq a(t_0)^{-1}\ \|\chi_A(t_0)\|\ \exp[-\delta(t, t_0)] \tag{4.29}$$

を満たすことと等価である．

（証明） $\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ と $\dot{\chi}_A(t) = -S'(t)\chi_A(t)$ の状態転移マトリクスをそれぞれ $\Psi(\cdot,\cdot)$，$\Psi_A(\cdot,\cdot)$ としよう．これらはすべての t，s について次の関係にある．[31]

$$\Psi(t, s) = \Psi_A'(s, t) \tag{4.30}$$

ところで，$\dot{\chi}(t) = S(t)\chi(t)$ のすべての解が (4.26) を満たすことは

$$\|\Psi(t, t_0)\| \leqq b(t_0)\ \exp[\delta(t, t_0)] \tag{4.31}$$

が成立することと等価である．ゆえに，(4.30) より

$$\|\Psi_A(t_0, t)\| \leqq b(t_0)\ \exp[\delta(t, t_0)] \tag{4.32}$$

が成立することと等価であるが，これは $\dot{\chi}_A(t) = -S'(t)\chi_A(t)$ のすべての解が

$$\|\chi_A(t_0)\| \leqq b(t_0) \quad \|\chi_A(t)\| \quad \exp[\delta(t, t_0)], \tag{4.33}$$

すなわち，(4.27) を満たすことと等価である．補題の後半も同様に証明できる．（証明終）

この補題によれば，

$$S_e : \quad \dot{e}(t) = \{A(t) - H(t)C(t)\}\, e(t)$$

の安定化は

$$\dot{\chi}_A(t) = \{-A'(t) + C'(t)H'(t)\}\, \chi_A(t) \tag{4.34}$$

の逆安定化に，S_eの逆安定化は (4.34) の安定化に対応していることがわかる．(4.34) は S_0の随伴システム A_d に状態フィードバックをほどこして得られる形のシステムであるから，次の補題が成立する．

〔補題 4.6〕　S_0が完全可検出であるための必要十分条件は，A_d が完全逆可安定であることである．

〔補題 4.7〕　S_0が完全逆可検出であるための必要十分条件は，A_d が完全可安定であることである．

補題 4.5 は，$b(t_0)$ と $a(t_0)$ を b と a に，t と t_0 を t_2 と t_1 に，$\delta(t, t_0)$ を $M(t_2 - t_1)$ や $m(t_2 - t_1)$ に置き換えても成立するので，次の補題も同様に成立する．

〔補題 4.8〕　S_0が一様完全可検出であるための必要十分条件は，A_d が一様完全逆可安定であることである．

〔補題 4.9〕　S_0が一様完全逆可検出であるための必要十分条件は，A_d が一様完全可安定であることである．

〔補題 4.10〕　S_0が一様完全可推定であるための必要十分条件は，A_d が一様完全可設計であることである．

このように S_0に対する状態推定器の構成問題を A_d を対象とした状態フィードバックシステムの構成問題に対応させた場合，推定器ゲイン $H(\cdot)$ は次のように定めればよい．まず，S_eの解の上界が $\exp[\delta(\cdot, t_0)]$ で指定された推定器構成問題の場合には，下界が $\exp[-\delta(\cdot, t_0)]$ で指定された A_d に対する状

態フィードバックによる逆安定化問題を考え，フィードバックゲイン$K_A(\cdot)$を求めて，

$$H(t) = K_A'(t)$$

と定める．また，Seの解の下界が$\exp[\delta(t, t_0)]$で指定された推定器構成問題の場合は，上界が$\exp[-\delta(t, t_0)]$で指定されたAdに対する安定化問題を考え，フィードバックゲインを求めて，同様に定める．$\exp[M(t_2 - t_1)]$や$\exp[m(t_2 - t_1)]$で上界や下界が指定されている場合も同様である．

4.2.3 状態推定器を構成できるための条件

これまでの議論で，Soに対する状態推定器の構成問題を，その双対システムDuや随伴システムAdを対象とする状態フィードバックによるシステム構成問題で置き換えてもよいことがわかった．この結果（補題4.2～4.4，4.6～4.10）と第2章で述べた可制御性，可到達性と可観測性，可決定性の間で成り立つ関係（補題2.5～2.14）を用いれば，第3章の状態フィードバックによるシステム構成問題について得られた結果（定理3.1～3.8）より，状態推定器を構成できるための条件が直ちに得られる．

〔定理4.1〕 Soが完全可検出であるための必要十分条件は，それが完全可観測であることである．

〔定理4.2〕 Soが完全逆可検出であるための必要十分条件は，それが完全可観測であることである．

〔定理4.3〕 Soは，完全可決定性に関して一様ならば，一様完全可検出である．

〔定理4.4〕 有界なSoが有界な状態推定器によって一様完全可検出であるための必要十分条件は，それが完全可決定性に関して一様であることである．

〔定理4.5〕 Soは，完全可観測性に関して一様ならば，一様完全逆可検出である．

〔定理4.6〕 有界なSoが有界な状態推定器によって一様完全逆可検出であるための必要十分条件は，それが完全可観測性に関して一様であることである．

〔定理4.7〕 Soは，一様完全可観測ならば，一様完全可推定である．

〔定理4.8〕 有界なSoが有界な状態推定器によって一様完全可推定であるための必要十分条件は，それが一様完全可観測であることである．

（定理4.1の証明） まず，Soが完全可検出であることは，補題4.6により，

A_d が完全逆可安定であることと等価である．ゆえに，定理 3.2 により，A_d が完全可制御であることと等価であり，したがって，補題 2.5 により，S_oが完全可観測であることと等価である．（証明終）

（定理 4.2 の証明） 補題 4.7，定理 3.1，補題 2.5 を用いると，定理 4.1 と同様に証明できる．（証明終）

（定理 4.3 の証明） S_oが完全可決定性に関して一様ならば，補題 2.13により D_u は完全可制御性に関して一様である．ゆえに，定理 3.3 により，D_uは一様完全可安定である．したがって，補題 4.2 により，S_oは一様完全可検出である．（証明終）

（定理 4.4 の証明） 補題 4.2 によると，S_oの一様完全可検出性と D_u の一様完全可安定性は等価である．そして，S_eと (4.24) を比較すればわかるように，もし有界な S_oが有界な状態推定器によって一様完全可検出ならば，推定器ゲインが有界だから，有界な D_u は有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定である．逆に，有界な D_u が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定ならば，有界な S_oは有界な推定器ゲインによって一様完全可検出である．(4.2) によると，有界な S_oに対しては，推定器ゲインの有界性は推定器の他のパラメータの有界性をも意味する．このように，有界な S_oが有界な状態推定器によって一様完全可検出であることは，有界な D_u が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定であることと等価である．

他方，定理 3.4 によると，有界な D_u が有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定であるための必要十分条件は，それが完全可制御性に関して一様であることである．また，補題 2.13によると，D_u が完全可制御性に関して一様であることと，S_oが完全可決定性に関して一様であることは等価である．したがって，以上より，有界な S_oが有界な状態推定器によって一様完全可検出であるための必要十分条件は，それが完全可決定性に関して一様であることである．（証明終）

（定理 4.5 の証明） 補題 2.12，定理 3.5，補題 4.3 を用いると，定理 4.3 と同様に証明できる．（証明終）

（定理 4.6 の証明） 補題 4.3，定理 3.6，補題 2.12 を用いると，定理 4.4 と同様に証明できる．（証明終）

（定理 4.7 の証明）　補題 2.14，定理 3.7，補題 4,4 を用いると，定理 4.3 と同様に証明できる．　（証明終）

（定理 4.8 の証明）　補題 4.4，定理 3.8，補題 2.14 を用いると，定理 4.4 と同様に証明できる．　（証明終）

注 2.9 で述べたように，一様完全可観測性は完全可観測性に関する一様性と完全可決定性に関する一様性を同時に意味し，有界システムのクラスではこれら 3 つの概念は等価であるから，定理 4.3～4.6　から次の系が得られる．

〔系 4.1〕　S_0は，一様完全可観測ならば，一様完全可検出である．

〔系 4.2〕　有界な S_0が有界な状態推定器によって一様完全可検出であるための必要十分条件は，それが一様完全可観測であることである．

〔系 4.3〕　S_0は，一様完全可観測ならば，一様完全逆可検出である．

〔系 4.4〕　有界な S_0が有界な状態推定器によって一様完全逆可検出であるための必要十分条件は，それが一様完全可観測であることである．

4.3　状態の推定値のフィードバック

これまでは，システムの内部の状態を外部の入力と出力から推定するための状態推定器の構成について述べてきた．ここでは，この推定器によって得られる状態の推定値 $z(\cdot)$を，真値 $\chi(\cdot)$の代りに状態フィードバック則 (3.1) に代入して，フィードバックシステムを構成する．この場合，真値のフィードバックによって可能であった安定性の指定が，推定値のフィードバックによっても可能か，それとも不可能かが問題となる．すなわち，ここで考える問題は，開ループシステム S_0と状態推定器 E_s^1 およびフィードバック則

$$u(t) = K(t)\,z(t) + v(t) \tag{4.35}$$

をまとめて得られる 2 n 次元システム

$$S_t : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)K(t) \\ H(t)C(t) & A(t) - H(t)C(t) + B(t)K(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t) \\ B(t) \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C(t) & D(t)K(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + D(t)\,v(t) \end{cases}$$

の零入力安定性を任意に指定できるための条件を求める問題である．

ここでは，この問題を，状態フィードバックによるシステム構成問題について得られた第3章の結果や，状態推定器の構成問題について得られた4.2 の結果を用いて考える．そのために，まず，Stの零入力応答を表わす同次システム

$$S_t^{\prime}:\quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)K(t) \\ H(t)C(t) & A(t)-H(t)C(t)+B(t)K(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

を，それと同じ安定性をもつ2つのシステムに等価変換しよう．その2つのシステムとは，正則変換

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

によって得られる

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)+B(t)K(t) & -B(t)K(t) \\ 0 & A(t)-H(t)C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

と，正則変換

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

によって得られる

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)-H(t)C(t) & 0 \\ H(t)C(t) & A(t)+B(t)K(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

である．これらのシステムは安定性に関して$S_t^{\prime}$と同じ性質をもっているうえ，$S_t^{\prime}$よりも構造が簡単なので，以下では，主にこれらの安定性について考えていく．

ここで，対象とする開ループシステムS_oが時間不変システムで，状態推定器$E_s^{\prime}$とフィードバックゲインも時間不変である場合について少し考えてみよう．S_oのパラメータ$A(\cdot)$，$B(\cdot)$，$C(\cdot)$をそれぞれA，B，Cと書き，フィードバックゲイン$K(\cdot)$と推定器ゲイン$H(\cdot)$をそれぞれK，Hと書くことにする．この場

合，

$$\tilde{S}_t \ : \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ HC & A-HC+BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

の極は等価変換されたシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

の極と同一であるから，それはA＋BKの固有値とA－HCの固有値を合わせたものである．したがって，極指定問題について得られているWonham の結果[11] やSimonとMitterの結果[12]によると，S_0が完全可制御かつ完全可観測ならば，$\tilde{S}_t$の2n個の極のうち，n個はフィードバックゲインKによって任意の実数および共役な複素数の組に指定でき，残りのn個も推定器ゲインHによって同様に指定できる．また，その逆も成り立つ．すなわち，時間不変システムのクラスでは，S_tの安定性を任意に指定できるための必要十分条件は，S_0が完全可制御かつ完全可観測であることである．

S_0が時変システムの場合にも，安定性の指定と可制御性， 可到達性，可観測性，可決定性の間に同様の関係が存在する．いま，S_0が条件Aや条件Bを満たす とは次のことを意味するとしよう．

条件A： すべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\int_{t_1}^{t_2} \| B(\tau) \|^2 \, d\tau \leqq C_1 + C_2(t_2 - t_1)$$

が成立するような正数C_1，C_2が存在する．

条件B： すべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\int_{t_1}^{t_2} \| C(\tau) \|^2 \, d\tau \leqq C_1 + C_2(t_2 - t_1)$$

が成立するような正数C_1，C_2が存在する．

明らかに，これらの条件は$B(\cdot)$や$C(\cdot)$が有界なシステムでは満たされている．また，補題3.4で述べたように，一様完全可制御なシステムは条件Aを満たす．同様に，一様完全可観測なシステムは条件Bを満たす．

〔定理 4.9〕　S_0が完全可制御性に関して一様かつ完全可決定性に関して一様で，条件AまたはBを満たしていれば，任意の実数Mに対して，S_tの零入力応答がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\left\| \begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ z(t_2) \end{bmatrix} \right\| \leqq b \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[M(t_2 - t_1)\right] \tag{4.40}$$

を満たすような状態推定器E_sとフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数bが存在する．

〔定理 4.10〕　S_0が完全可到達性に関して一様かつ完全可観測性に関して一様で，条件AまたはBを満たしていれば，任意の実数mに対して，S_tの零入力応答がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$a \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[m(t_2 - t_1)\right] \leqq \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ z(t_2) \end{bmatrix} \right\| \tag{4.41}$$

を満たすような状態推定器E_sとフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数aが存在する．

〔定理 4.11〕　S_0が一様完全可制御かつ一様完全可観測ならば，任意の実数m，M（$>m$）に対して，S_tの零入力応答がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$a \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[m(t_2 - t_1)\right] \leqq \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ z(t_2) \end{bmatrix} \right\|$$

$$\leqq b \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[M(t_2 - t_1)\right] \tag{4.42}$$

を満たすような状態推定器E_sとフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数a，bが存在する．

〔定理 4.12〕　S_0が有界システムであるとしよう．このとき，任意の実数m，M（$>m$）に対して，S_tの零入力応答がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について(4.42)を満たすような，有界な状態推定器E_sと有界なフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数a，bが存在するための必要十分条件は，S_0が一様完全可制御かつ一様完全可観測であることである．

（注 4.3 ）　定理 4.11 ， 4.12 では，定理 4.9 ， 4.10 と異なり，S_0が条件Ａまたは Ｂを満たすことは（明白には）要求されていない．それは，上で述べたように，一様完全可制御かつ一様完全可観測なシステムはこれらの条件を満たしているからである．

（注 4.4 ）　定理 4.9 ， 4.10 ， 4.11の逆は，定理 3.3 ， 3.5 ， 3.7 の逆が成立しないのと同様，成立しない．ただし，有界システムのクラスでは成立する．

（注 4.5 ）　定理 4.11 ， 4.12 で注意すべき点は，安定性を指定する際，実数 m ， M は m＜M となるようにしか指定できないという点である．状態の真値のフィードバックが可能な場合には，定理 3.7 ， 3.8 で述べたように，m＝M とすることもできた．それに対して状態の推定値をフィードバックする場合にそのようにできない理由は，時間不変システムの場合を考えても容易に理解できる．

いま，開ループシステム S_0は次元が奇数で，完全可制御かつ完全可観測な線形時間不変システムであるとしよう．この場合，m＝M としようとすれば，S_tの零入力応答を表わす$\tilde{S}_t$の極の実部はすべてmにしなければならない．前に述べたように，$\tilde{S}_t$の極はＡ＋ＢＫの固有値とＡ－ＨＣの固有値を合わせたもので，これらはそれぞれフィードバックゲインＫと推定器ゲインＨによって任意の実数と共役な複素数の組に別々に指定できる．また，別々にしか指定できない．したがって，S_0の次元が奇数の場合に$\tilde{S}_t$の極の実部をすべてmにするためには，Ａ＋ＢＫとＡ－ＨＣの固有値のうちそれぞれ少なくとも１つは実数mにせざるを得ない．ゆえに，$\tilde{S}_t$は実数mの極を少なくとも２つもつ．その結果，$\tilde{S}_t$の状態転移マトリクスの要素に $t\exp[mt]$ の項が現われることがある（例 4.2 参照）．このような場合があるので，m＝M となるようには指定できないのである．

〔例 4.2 〕　開ループシステム S_0として，線形時間不変スカラ・システム

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \tag{4.43}$$

を考えよう．この場合，$\tilde{S}_t$は

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ h & 1-h+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

と書ける．これと同じ安定性をもつ

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k & -k \\ 0 & 1-h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

を考えると，たとえば $m=M=-1$ であるためには，$1+k=1-h=-1$，したがって，$k=-2$，$h=2$ でなければならない．このとき，$\tilde{S}_t$は

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

となる．この解

$$\begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ z(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{1+2(t_2-t_1)\}e^{-(t_2-t_1)} & -2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)} \\ 2(t_2-t_1)e^{-(t_2-t_1)} & \{1-2(t_2-t_1)\}e^{-(t_2-t_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix}$$

が $m=M=-1$ とすべての t_1，$t_2(\geqq t_1)$ について (4.42) を満たすような正数 a，b は存在しない．ゆえに，S_tの安定性を $m=M=-1$ と指定することはできない．

（定理 4.9 の証明）　まず，S_0が条件Aを満たしている場合を考えよう．S_t'と同じ安定性をもつ

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t)+B(t)K(t) & -B(t)K(t) \\ 0 & A(t)-H(t)C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

の状態転移マトリクスを$\Phi_{ta}(\cdot,\cdot)$とすると，これは

$$S_c' : \quad \dot{\chi}(t) = \{A(t)+B(t)K(t)\}\chi(t)$$

の状態転移マトリクス$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$と

$$S_e : \quad \dot{e}(t) = \{A(t)-H(t)C(t)\}e(t)$$

の状態転移マトリクス$\tilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$を用いて，次のように表わすことができる．

$$\Phi_{ta}(t_2, t_1) = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}(t_2, t_1) & -\int_{t_1}^{t_2} \hat{\Phi}(t_2, \tau) B(\tau) K(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_1) d\tau \\ 0 & \tilde{\Phi}(t_2, t_1) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

ゆえに，そのノルムはすべての t_1, t_2 について

$$\|\Phi_{ta}(t_2, t_1)\| \leqq \|\hat{\Phi}(t_2, t_1)\| + \|\tilde{\Phi}(t_2, t_1)\|$$

$$+ \left\| \int_{t_1}^{t_2} \hat{\Phi}(t_2, \tau) B(\tau) K(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_1) d\tau \right\| \quad (4.45)$$

を満たす．

いま，S_0は完全可制御性に関して一様かつ完全可決定性に関して一様であるから，定理 3.3 と 4.3 により，任意の実数 M と正数 ε に対して，S_c'と S_eのすべての解がすべての t_1, t_2 ($\geqq t_1$) について，それぞれ

$$\|x(t_2)\| \leqq b_1 \|x(t_1)\| \exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)]$$
$$\|e(t_2)\| \leqq b_2 \|e(t_1)\| \exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)]$$

を満たすような，すなわち，$\hat{\Phi}(\cdot,\cdot)$ と $\tilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$ が

$$\|\hat{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq b_1 \exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)] \quad (4.46)$$
$$\|\tilde{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq b_2 \exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)] \quad (4.47)$$

を満たすようなフィードバックゲイン $K(\cdot)$ と推定器ゲイン $H(\cdot)$ および正数 b_1, b_2が存在する．したがって，このフィードバックゲインとして (3.46) で定義したものを用いれば，条件 A が満たされている場合，次の不等式がすべての t_1, t_2 ($\geqq t_1$) について成立する．ただし，$C_6 \triangleq 0.5\alpha_1^{-1} \exp[2|M-\varepsilon|\sigma]$とする．

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} \hat{\Phi}(t_2, \tau) B(\tau) K(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_1) d\tau \right\|$$

$$\leqq b_1 b_2 C_6 \exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)] \int_{t_1}^{t_2} \|B(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\leqq b_1 b_2 C_6 \exp[M(t_2-t_1)] \exp[-\varepsilon(t_2-t_1)] \{C_1 + C_2(t_2-t_1)\}$$

$$\leqq b_1 b_2 C_6 (C_1 + C_2 \varepsilon^{-1} e^{-1}) \exp[M(t_2-t_1)]$$

$$\triangleq b_3 \exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.48}$$

そして，この不等式を(4.46)，(4.47)とともに(4.45)に代入すると

$$\|\Phi_{ta}(t_2, t_1)\| \leqq (b_1 + b_2 + b_3) \exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.49}$$

が得られる．これは，(4.37)のすべての解がすべての t_1，t_2 ($\geqq t_1$) について

$$\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_2)\\ e(t_2)\end{bmatrix}\right\| \leqq (b_1 + b_2 + b_3) \left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ e(t_1)\end{bmatrix}\right\| \exp[M(t_2-t_1)]$$

を満たすことを意味している．このとき，(4.36)より，S_t^1のすべての解はすべての t_1, t_2 ($\geqq t_1$) について

$$\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_2)\\ z(t_2)\end{bmatrix}\right\| \leqq 4(b_1 + b_2 + b_3) \left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ z(t_1)\end{bmatrix}\right\| \exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.50}$$

を満たす．以上で，条件Aが満たされている場合については証明できた．

S_0が条件Bを満たしている場合には，S_t^1と同じ安定性をもつ

$$\begin{bmatrix}\dot{e}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A(t) - H(t)C(t) & 0\\ H(t)C(t) & A(t) + B(t)K(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t)\\ z(t)\end{bmatrix} \tag{4.39}$$

を考え，この状態転移マトリクス$\Phi_{tb}(\cdot,\cdot)$が

$$\Phi_{tb}(t_2, t_1) = \begin{bmatrix}\tilde{\Phi}(t_2, t_1) & 0\\ \int_{t_1}^{t_2} \hat{\Phi}(t_2, \tau) H(\tau) C(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_1) d\tau & \hat{\Phi}(t_2, t_1)\end{bmatrix} \tag{4.51}$$

と表わせることを用いると，条件Aが満たされている場合と同様に，証明できる．

（証明終）

（定理 4.10 の証明） まず，S_oが条件Aを満たしている場合を考える．定理 4.9 の証明で述べたように，$S_t^!$と同じ安定性をもつ (4.37) の状態転移マトリクス $\Phi_{ta}(\cdot,\cdot)$ がすべての t_1，t_2 について

$$\|\Phi_{ta}(t_1, t_2)\| \leqq \|\hat{\Phi}(t_1, t_2)\| + \|\tilde{\Phi}(t_1, t_2)\|$$

$$+ \left\| \int_{t_2}^{t_1} \hat{\Phi}(t_1, \tau) B(\tau) K(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_2)\, d\tau \right\| \qquad (4.52)$$

を満たすことに注意しておこう．

いま，S_oは完全可到達性に関して一様かつ完全可観測性に関して一様であるから，定理 3.5 と 4.5 により，任意の実数 m と正数 ϵ に対して，$S_c^!$と S_eのすべての解がすべての t_1，t_2 （$\geqq t_1$ ）について，それぞれ

$$a_1 \|x(t_1)\| \exp[(m+\epsilon)(t_2-t_1)] \leqq \|x(t_2)\|$$
$$a_2 \|e(t_1)\| \exp[(m+\epsilon)(t_2-t_1)] \leqq \|e(t_2)\|$$

を満たすような，すなわち，

$$\|\hat{\Phi}(t_1, t_2)\| \leqq a_1^{-1} \exp[-(m+\epsilon)(t_2-t_1)] \qquad (4.53)$$
$$\|\tilde{\Phi}(t_1, t_2)\| \leqq a_2^{-1} \exp[-(m+\epsilon)(t_2-t_1)] \qquad (4.54)$$

が成立するようなフィードバックゲイン $K(\cdot)$ と推定器ゲイン $H(\cdot)$ および正数 a_1，a_2が存在する．このとき，(3.60) で定義されたフィードバックゲインを用いると，条件Aが満たされているから，(4.48) を導いたのと同様にして，

$$\left\| \int_{t_2}^{t_1} \hat{\Phi}(t_1, \tau) B(\tau) K(\tau) \tilde{\Phi}(\tau, t_2)\, d\tau \right\| \leqq a_3^{-1} \exp[-m(t_2-t_1)] \qquad (4.55)$$

がすべての t_1，t_2 （$\geqq t_1$） について成立するような正数 a_3が存在することが言える．ゆえに，(4.52) ～ (4.55) より，すべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\|\Phi_{ta}(t_1, t_2)\| \leqq (a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}) \exp[-m(t_2-t_1)] \qquad (4.56)$$

が成立する．これは，(4.37) のすべての解が

$$(a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1})^{-1}\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ e(t_1)\end{bmatrix}\right\|\exp[m(t_2-t_1)]\leqq\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_2)\\ e(t_2)\end{bmatrix}\right\|$$

を満たすことを意味している．したがって，(4.38) より，S_t'のすべての解はすべての t_1，t_2 （$\geqq t_1$） について

$$\frac{1}{4}(a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1})^{-1}\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ z(t_1)\end{bmatrix}\right\|\exp[m(t_2-t_1)]\leqq\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_2)\\ z(t_2)\end{bmatrix}\right\| \tag{4.57}$$

を満たす．

S_0が条件 B を満たしている場合については，S_t'と同じ安定性をもつ（4.39）を考えると，同様に証明できる．（証明終）

（定理 4.11 の証明） S_0が一様完全可制御かつ一様完全可観測であるから，定理 3.7 と 4.7 により，任意の実数 m，M（＞m）と正数 ε（$\leqq$（M－m）／2）に対して，

$$\|\hat{\Phi}(t_1,t_2)\|\leqq a_1^{-1}\exp[-(m+\varepsilon)(t_2-t_1)] \tag{4.58}$$

$$\|\hat{\Phi}(t_2,t_1)\|\leqq b_1\exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)] \tag{4.59}$$

$$\|\tilde{\Phi}(t_1,t_2)\|\leqq a_2^{-1}\exp[-(m+\varepsilon)(t_2-t_1)] \tag{4.60}$$

$$\|\tilde{\Phi}(t_2,t_1)\|\leqq b_2\exp[(M-\varepsilon)(t_2-t_1)] \tag{4.61}$$

がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について成立するようなフィードバックゲインK(·)と推定器ゲインH(·)および正数 a_1，a_2，b_1，b_2が存在する．いま，このフィドバックゲインとして定理 3.7 の証明で用いたものを用いれば，一様完全可制御なシステムは条件 A をつねに満たしている（補題 3.4 ）ので，定理 4.9 と 4.10の証明と同様にして，S_t'のすべての解がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\frac{1}{4}(a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1})\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ z(t_1)\end{bmatrix}\right\|\exp[m(t_2-t_1)]\leqq\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_2)\\ z(t_2)\end{bmatrix}\right\|$$

$$\leqq 4(b_1+b_2+b_3)\left\|\begin{bmatrix}\chi(t_1)\\ z(t_1)\end{bmatrix}\right\|\exp[M(t_2-t_1)] \tag{4.62}$$

を満たすことが示される．　　（証明終）

（定理 4.12 の証明）　<u>必要性</u>：　任意の実数m，M（＞m）に対して，S_tのすべての解がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$a \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[m(t_2-t_1)\right] \leqq \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ z(t_2) \end{bmatrix} \right\|$$

$$\leqq b \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ z(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[M(t_2-t_1)\right] \tag{4.42}$$

を満たすような有界なフィードバックゲイン$K(\cdot)$と有界な状態推定器E_sおよび正数a，bが存在するとしよう．このとき，S_tを等価変換して得られる（4.37）の解はすべて

$$\left\| \begin{bmatrix} \chi(t_2) \\ e(t_2) \end{bmatrix} \right\| \leqq 4b \left\| \begin{bmatrix} \chi(t_1) \\ e(t_1) \end{bmatrix} \right\| \exp\left[M(t_2-t_1)\right]$$

を満たす．すなわち，（4.37）の状態転移マトリクス$\Phi_{ta}(\cdot,\cdot)$は

$$\|\Phi_{ta}(t_2, t_1)\| \leqq 4b \exp\left[M(t_2-t_1)\right] \tag{4.63}$$

を満たす．これは，（4.44）で示した$\Phi_{ta}(\cdot,\cdot)$　の形からわかるように，すべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について

$$\|\hat{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq 4b \exp\left[M(t_2-t_1)\right] \tag{4.64}$$

$$\|\tilde{\Phi}(t_2, t_1)\| \leqq 4b \exp\left[M(t_2-t_1)\right] \tag{4.65}$$

が成立することを意味している．したがって，ここで考えている有界なS_0は有界なフィードバックゲインによって一様完全可安定かつ有界な状態推定器によって一様完全可検出である．ゆえに，系 3.2 と 4.2 により，このS_0は一様完全可制御かつ一様完全可観測である．

<u>十分性</u>：　定理 4.11の証明がそのまま適用できる．ここでは，S_0が有界だから，定理 3.8 と 4.8 により，（4.58）～（4.61）が，したがって，（4.62）がすべての t_1，t_2（$\geqq t_1$）について成立するような有界なフィードバックゲインと有界な状態推定器が存在する．　　（証明終）

ところで，一様完全可制御なシステムが条件Aを満たしている（補題3.4）ように，一様完全可観測なシステムはつねに条件Bを満たしている．また，一様完全可観測なシステムは完全可観測性に関して一様かつ完全可決定性に関して一様であるから，定理4.9と4.10より，次の系が得られる．

〔系4.5〕　S_0が完全可制御性に関して一様かつ一様完全可観測ならば，任意の実数Mに対して，S_tの零入力応答がすべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について（4.40）を満たすような状態推定器E_sとフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数bが存在する．

〔系4.6〕　S_0が完全可到達性に関して一様かつ一様完全可観測ならば，任意の実数mに対して，S_tの零入力応答がすべてのt_1，t_2（$\geqq t_1$）について（4.41）を満たすような状態推定器E_sとフィードバックゲイン$K(\cdot)$および正数aが存在する．

これらの系および定理4.11と4.12から，S_0が一様完全可観測ならば，状態の推定値のフィードバックによって，真値のフィードバックにより可能であった一様な安定性の指定がほとんど同様にできることがわかる．

4.4　結　　言

この章では，まず，有限次元線形時変システムS_0を対象とする状態推定器の構成問題が，その随伴システムや双対システムを対象とする状態フィードバックによるシステム構成問題と等価であることを示した．そして，フィードバックシステムの構成問題について得られた第3章の結果を用いて，推定誤差特性を指定して状態推定器を構成できることとS_0の可観測性，可決定性の間に成り立つ関係を明らかにした．対象としているシステムS_0においてはパラメータの連続性や微分可能性が仮定されていないので，得られた結果はWolovich[19]が対象としたシステムよりも広いクラスのシステムに対しても適用できる．しかも，状態推定器の構成が可能であることを保証する一様完全可観測性などの条件は，有限時間区間で$C(\cdot)$が0，すなわち，状態の情報が出力に現れないような時間が存在するシステムでも満たされるので，Johnson[14]によって得られている条件よりもゆるく，有界システムのクラスでは必要条件でもある．また，一様完全可観測なシステムに対しては，推定誤差の上界だけでなく，下界も同時に指数関数で指定して状態推定器を構成できるので，雑音に対する推定誤差

の感度を適当に抑えた状態推定器の構成が可能になった．以上のように，この章の結果は，線形時変システムに対する状態推定器構成問題に充分な解答を与えている．

次に，推定器によって得られる状態の推定値を真値の代りに状態フィードバック則に用いた場合，真値のフィードバックによって可能であった安定性の指定が推定値のフィードバックによっても可能かという問題を考えた．得られた結果によれば，対象とするシステムが可観測性や可決定性などに関する適当な条件（たとえば，一様完全可観測性）を満たしていれば，真値のフィードバックによって可能な安定性の指定が推定値のフィードバックによってもほとんど同様に可能である．この結果，いままで線形時間不変システムや一部の線形時変システムのクラスについて知られていた[12),18)～20)]のと同様に，一般の線形時変システムに対しても，フィードバックシステムを構成するために状態推定器が有用であることがわかった．

この章で考えた状態推定器の次元は，対象とするシステムの次元と同じである．それに対して，Luenberger[51),52)]やWolovich[19)]の推定器の次元は，対象とするシステムの次元より出力の次元だけ少ない．一般の線形時変システムに対する，このような次元の低い推定器については，笹野と著者が詳しく研究している．[60)] ただし，次元の低い推定器が構成できるためには，出力に状態の情報が瞬時でも現われない，すなわち，C(・)が0となる時刻が存在することは許されなくなるので，対象となる時変システムのクラスは狭くなる．

第 5 章　　結　　論

本研究では，ほとんど制限がないと考えられるくらい一般的な線形時変システムを対象に，安定性を指定してフィードバックシステムを構成する問題を，状態フィードバック，状態推定器の構成，状態の推定値のフィードバックの3つの問題に分けて考えた．そして，まず，状態フィードバックによるシステム構成問題について，指定された安定性を状態フィードバックによって実現できるための，開ループシステムが満たすべき，可制御性と可到達性に関する条件を求めた．その結果によると，零入力応答の上界を指数関数で指定して，状態フィードバックによりシステムを構成することができるためには，開ループシステムは完全可制御性に関して一様であれば十分で，一様完全可制御である必要はない．これは，いままでに知られている条件（一様完全可制御性）[7]よりもゆるい条件のもとに安定化が可能であることを意味している．しかも，この安定化のためのフィードバックゲインはいままでのものより比較的簡単な計算によって求めることができる．また，開ループシステムが一様完全可制御であれば，零入力応答の上界だけでなく下界も同時に指定することができることを示した．

次に，状態推定器の構成問題については，この問題が随伴システムや双対システムを介して状態フィードバックによるシステム構成問題と等価であることを示した．そして，状態フィードバックによる安定性指定問題について得られた結果を用いて，指定された推定誤差特性をもつ状態推定器が構成できるための，開ループシステムが満たすべき，可観測性と可決定性に関する条件を明らかにした．

最後に，状態のフィードバックおよび状態推定器の構成の2つの問題について得られた結果をもとに，状態の推定値をフィードバックする問題について，開ループシステムが一様完全可制御かつ一様完全可観測ならば，零入力応答の上界と下界を同時に任意の指数関数で指定して，状態推定器を組み込んだ閉ループシステムを構成することができることを示した．さらに，開ループシステムと状態推定器およびフィードバックゲインを有界システムのクラスに限れば，この逆も成立することを示した．

以上のように，本研究は一般的な線形時変システムを対象にして，安定性を指定できるための条件をゆるめ，精密な安定性の指定を行なう方法を求め，そして，フィードバックゲインや状態推定器の求め方を簡単にした．すなわち，線形時変システムに対するフィードバックシステム構成問題についてこれまでに得られていた結果の問題点はすべて解決され，緒論で述べた本研究の目的は充分に達成された．得られた結果では，状態フィードバックによって安定性を指定できることと可制御性，可到達性との関係，状態推定器が構成できることと可観測性，可決定性との関係，および状態の推定値のフィードバックによって安定性を指定できることと可制御性，可到達性，可観測性，可決定性との関係がすべてきれいにまとまった形で明らかにされている．したがって，本研究によって，有限次元線形時変システムを対象とする，安定性に注目したフィードバックシステム構成問題はほとんど完全に解決したと言ってもよいだろう．

緒論で述べたように，安定性に注目したフィードバックシステムの構成問題は，線形時間不変システムに対する極指定問題[8)～12)]を，極という概念のない線形時変システムのクラスに拡張したものである．時変システムと同様に極の概念がない非線形システムに対しても，安定性を指定してフィードバックシステムを構成する問題が考えられる．広瀬[61)]は非線形増幅器と線形システムの直列結合から成る非線形システムを対象にこの問題を考え，本研究の結果を用いて，充分に満足できる結果を得ている．

第2部 大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化

第6章 緒論

一般に，大規模システムとはそれを構成する要素の数が非常に多いシステムを意味する．このようなシステムの解析，設計を行なう場合，それは単に構成要素の数が多いというだけで，システムであることには変りないのだから，いままでに開発されている解析，設計手法が理論上は適用できる．しかし，実際には，いままでに得られている手法を大規模システムに直接適用すれば，一般にそれに必要な変数量と計算量は要素の数の2乗，3乗またはそれ以上に比例するので，電子計算機を使っても，計算時間が非常に長くなったり，記憶容量が不足する場合が多い．つまり，いままでに得られている解析，設計手法を大規模システムに直接適用しようとしても，うまくいくとは限らないのである．

そこで，このような不都合な点を克服する1つの方法として，大規模システムをいくつかのサブシステムが結合したものと見なし，個々のサブシステムごとに解析，設計を行なって，その結果とサブシステム間の結合関係を用いてシステム全体の解析，設計を行なう方法が考えられる．この方法によれば，サブシステムの解析や設計に必要な変数量や計算量は非常に少なくなり，サブシステム間の結合関係がある程度単純ならば，大規模システム全体を解析，設計するのに必要な変数量や計算量も，それを1つのシステムとして解析，設計する場合に比べて，かなり少なくなると予想される．そして，実際，このようにサブシステムの概念を導入して初めて大規模システムに適した取り扱いが考えられ，大規模システムに対する有効な解析，設計手法が得られる可能性が生まれるのである．

本研究でも，以上の観点から，対象とする大規模ダイナミカルシステムはいくつかのサブシステムが結合して構成されているものとし，その構造をサブシステム内部の特性とサブシステム間の接続関係に分けて考える．このような場合に重要な問題は，個々のサブシステムの特性とそれらの結合の仕方が全体システムの特性にどのように影響するのかという問題である．本研究では．まず，

そのなかでも最も基本的であり，解の存在性と密接な関連がある，サブシステムの表現式と全体システムの表現式の関係について考察する。この関係が明らかにならなければ，大規模システムの解析と設計は不可能である。次に，個々のサブシステムを設計することによって全体システムを設計する方法の1つとして，サブシステムごとの安定化による大規模システムの安定化問題を考える。上で述べたように，大規模システムの設計方法としては，サブシステムごとの設計によって全体システムが設計できるものでなければ実用上意味がない。この意味で，いままでに得られているダイナミカルシステムの設計方法のなかには大規模システムに適したものはほとんどない。以下の第7章から第10章までは本研究の結果をまとめたもので，各章で述べることおよび他の研究との関連は次の通りである。

第7章では，本研究で対象とする大規模ダイナミカルシステムを，サブシステムの特性とサブシステム間の接続関係に分けて記述する。まず，サブシステムは線形の標準形状態方程式

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \qquad y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

または，非線形の正規形状態方程式

$$\dot{x}(t) = f\,(\,x(t),\ u(t),\ t\,)\,, \qquad y(t) = g\,(\,x(t),\ u(t),\ t\,)$$

（$x(\cdot)$：状態，$u(\cdot)$：入力，$y(\cdot)$：出力）で表わされる多入力多出力の有限次元システムであるとする。そして，標準形状態方程式にはそれが全時間上で一意解をもつことを保証する条件を付加し，正規形状態方程式には（少なくとも）初期時刻の近傍で一意解をもつことを保証する条件を付加する。一方，サブシステム間の接続関係はブロック線図で表わされるものとする。こうすると，接続関係を0，1，－1を要素とするマトリクスで表わすことができ，サブシステム間の信号の流れはこの接続マトリクスを係数として線形の代数方程式で記述できる。この線形代数方程式とサブシステムを表わす状態方程式を合わせたものが対象とする大規模ダイナミカルシステムの記述式である。

ところで，大規模システムをいくつかのサブシステムが結合したものとして表わし，解析，設計を行なう場合，その接続関係がある程度単純でなければ，サブシステムの解析や設計がいくら簡単であっても，システム全体の解析，設

計は決して簡単にはならない。また，結合関係が複雑であれば，サブシステムごとの評価を用いて全体システムの評価を行なう場合，粗雑な評価しか得られないため，大規模システムに適した有効な解析，設計手法が得られる可能性は少ない。その点，ブロック線図表現は，システム間の結合関係が線形時間不変代数方程式で表わされるので，大規模システムに適した表現方法であると言える。しかも，この表現は実際の制御システム等を表わすのによく用いられ，すでに定着した表現方法となっている。

以上のように記述される大規模システムにおける最も基本的な問題は，全体システムが状態方程式表現できるのかという問題である。この状態方程式表現の問題は解の存在性と一意性に密接に関係する重要な問題で，回路理論における主要なテーマになっている。[62)〜69)] そして，回路が状態方程式で記述できるために素子とそれらの接続関係が満たすべき種々の条件が明らかにされている。回路は，サブシステムが1入力1出力の増幅器や1次の状態方程式で表わされるシステムに制限され*，それらの結合関係がキルヒホッフの方程式で表わされる大規模システムと見なすことができるから，それに対して得られた結果や，その結果を得る過程は大規模システムの状態方程式表現についても有益な示唆となる。

第8章では，この表現問題に関して，初めに，標準形状態方程式で記述されるサブシステムから成る線形大規模システムについて，全体システムがやはり標準形で記述できるための条件を求める。このとき問題となるのは，標準形で記述できる場合，各サブシステムの状態ベクトルを成分とする大きなベクトルが全体システムの状態ベクトルとなり得るのかという問題である。ここでは，まず，全体システムが一意解をもち，この大きなベクトルを状態ベクトルとして標準形で記述できるための必要十分条件を明らかにする。この場合，全体システムの次元は当然サブシステムの次元の総和になっている。そのあとで，サブシステムが線形時間不変システムの場合には，全体システムがサブシステムの次元の総和より低い次元の標準形状態方程式で記述できる場合があることを示し，そのための必要十分条件も明らかにする。

この章では，次に，正規形状態方程式で記述されるサブシステムから成る非線形大規模システムについて，それがサブシステムの状態の直和を状態として

脚注＊　変成器やジャイレータなどの結合素子を従属電源で等価表現すると，回路はすべて1入力1出力の素子で構成できる。

正規形で記述できるための条件を求める．ところで，正規形で記述できるということは必ずしもそのシステムが全時間上で一意解をもつことを保証しない．全時間上で一意解をもつための1つの十分条件はその正規形が大域的リプシッツ条件を満たすことであるが，大規模システムの場合，各サブシステムを表わす正規形が大域的リプシッツ条件を満たしていても，全体システムを表わす正規形が同じ条件を満たすとは限らない．そこで，ここでは，全体システムを表わす正規形が大域的リプシッツ条件を満たすために，サブシステムの特性と接続関係が満たすべき条件も明らかにする．

第8章では，また，正規形状態方程式表現に関連して，非線形大規模システム特有の問題である，線形化におけるサブシステムと全体システムの関係を考察する．よく知られているように，従来から制御工学等で線形システムとして取り扱ってきたものには非線形システムを（ある解の近傍で）線形化して得られたものが多い．それでは，全体システムの線形化式を求めたいときに，各サブシステムを線形化して得られる線形サブシステムから成る線形大規模システムの記述式を直ちにそれであるとしてもよいのかというのがここで考える問題である．もし，そうしてよいのなら，全体システムの線形化式を得るためにはそれを記述する正規形を求める必要がなくなり，その線形化式は容易に得られる．ここでは，このようなサブシステムごとの線形化によって全体システムの線形化式が得られることを保証する条件を明らかにする．

さて，最初に述べたように，大規模システムに対する設計方法としては，サブシステムごとの設計によって全体システムの設計ができるものでなければ意味がない．第9章では，そのような設計方法の1つとして，線形時間不変サブシステムから成る大規模システムを対象に，サブシステムごとの安定化によって全体システムを安定にする方法を考える．サブシステムの安定性と全体システムの安定性の関係については，すべてのサブシステムが漸近安定でも全体システムが漸近安定とは限らないことがよく知られている．しかし，直観的には，各サブシステムが充分に漸近安定であれば，全体システムも漸近安定になると予想される．そこで，ここでは，各サブシステムを充分に漸近安定にする方法として，状態フィードバックによる極指定法[11)]をサブシステムごとに適用することを考える．そして，この方法により各サブシステム（完全可制御とする）の極の実部を負の充分小さな値にしたうえ，入出力間に直結経路をもつサブシ

ステムに適当な状態フィードフォワードをほどこすと，全体システムを漸近安定にできることを示す。この状態フィードフォワードは，状態フィードバックが直結経路を通して出力に直接与える影響を打ち消すために用いられるのであって，サブシステムの安定化は本質的には状態フィードバックによっている。また，この結果を得る過程で，状態フィードフォワードを併用しない場合や，たとえこのような状態フィードフォワードを併用しても状態フィードバックの仕方によっては，各サブシステムをいくら漸近安定にしても全体システムが漸近安定にならない場合があることを例示する。この章では，さらに，サブシステムの状態を直接取り出せない場合にも，それらが可検出であれば，状態推定器によって得られる状態の推定値をサブシステムごとにフィードバックおよびフィードフォワードすることによって，全体システムを漸近安定にすることができることを示す。

以上が本研究の概要である。

第７章　大規模システムの記述

７．１　緒　言

この章では，本研究で対象とする大規模ダイナミカルシステムを，サブシステム内部の特性とサブシステム間の接続関係に分けて記述する．まず，各サブシステムは多入力多出力の有限次元システムとし，状態方程式で記述する．そして，その特性としては非線形時変，線形時変，線形時間不変の３つの場合を考える．一方，サブシステム間の接続関係は，直観的に理解しやすく，制御工学者になじみの深いブロック線図を用いて表わす．そして，この接続関係を表わす接続マトリクスを定義して，サブシステムの入力，出力，全体システムの入力，出力の結合関係を線形方程式で記述する．

７．２　サブシステム

第２部「大規模ダイナミカルシステムの構造と安定化」では，図7.１のような，Ｎ個のサブシステム（ブロック）といくつかの加え合わせ点，引き出し点およびそれらを結ぶ矢印から成るブロック線図で表わされる大規模ダイナミカルシステムを対象とする．このシステムにおいて，サブシステムに任意に番号付けを行ない，ｉ番目のサブシステムをＳｉで表わすことにしよう．そして，

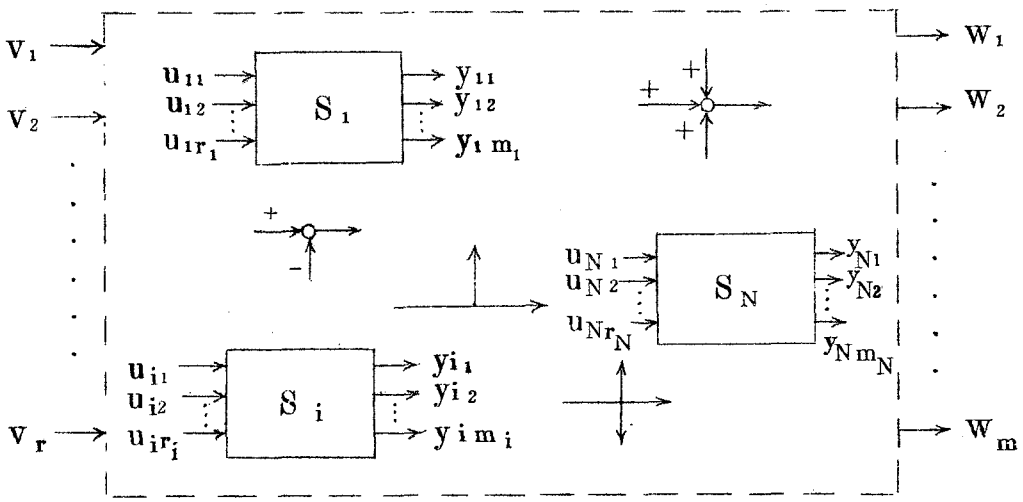


図7.１　ブロック線図で表わされる大規模ダイナミカルシステム

一般的には，S_i は（非線形の）有限次元状態方程式

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t), t) \qquad (7.1a)$$

$$y_i(t) = g_i(x_i(t), u_i(t), t) \qquad (7.1b)$$

で記述されているものとする。ここに，$x_i(t)$ はS_iの状態を表わす n_i 次元ベクトル，$u_i(t)$は入力を表わすr_i 次元ベクトル，$y_i(t)$は出力を表わすm_i次元ベクトルである。また，$f_i(\cdot,\cdot,\cdot)$は$R^{n_i} \times R^{r_i} \times R$から$R^{n_i}$への関数，$g_i(\cdot,\cdot,\cdot)$は$R^{n_i} \times R^{r_i} \times R$から$R^{m_i}$への関数で，どちらも初めの（$n_i + r_i$）変数に関して連続微分可能，最後の1変数に関して連続とする。この仮定によれば，$f_i(\cdot, u_i, t)$は任意の u_iと t について局所的なリプシッツ条件を満たしているので，各サブシステムが任意の初期時刻と初期状態および（連続な）入力に対して初期時刻の近傍で一意解をもつことは保証されている。以下では，便宜上，このような状態方程式を正規形状態方程式と呼ぶことにする．

ところで，増幅器ブロック，すなわち，出力がその時刻の入力によってのみ決まるサブシステムを考えれば，その入出力特性は

$$y_i(t) = g_i(u_i(t), t)$$

と表わされる。これは0次元の正規形，すなわち，状態ベクトルの次元が0の正規形と見なすことができるので，以下では，（7.1）の形の正規形状態方程式で，ダイナミックブロック（状態ベクトルの次元が1以上のサブシステム）はもちろん，増幅器ブロックも記述されているものとする。そして，表現のわずらわしさを避けるために，各サブシステムを表わす正規形をまとめて

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \qquad (7.2a)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \qquad (7.2b)$$

と書くことにする。ここに

$$X(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, \quad U(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix}, \quad Y(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix}$$

$$f(X(t),\ U(t),\ t) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(x_1(t),\ u_1(t),\ t) \\ f_2(x_2(t),\ u_2(t),\ t) \\ \vdots \\ f_N(x_N(t),\ u_N(t),\ t) \end{bmatrix}$$

$$g(X(t),\ U(t),\ t) \triangleq \begin{bmatrix} g_1(x_1(t),\ u_1(t),\ t) \\ g_2(x_2(t),\ u_2(t),\ t) \\ \vdots \\ g_N(x_N(t),\ u_N(t),\ t) \end{bmatrix}$$

である。

サブシステム内部の特性としては，以上の非線形時変の場合のほかに，線形時変の場合と線形時間不変の場合を考える。まず，線形時変の場合には，サブシステムS_iは状態方程式

$$\dot{x}_i(t) = A_i(t)\,x_i(t) + B_i(t)\,u_i(t) \qquad (7.3\,a)$$

$$y_i(t) = C_i(t)\,x_i(t) + D_i(t)\,u_i(t) \qquad (7.3\,b)$$

で記述されているものとする。ここに，$A_i(\cdot)$, $B_i(\cdot)$, $C_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$ はそれぞれ$n_i \times n_i$，$n_i \times r_i$，$m_i \times n_i$，$m_i \times r_i$のマトリクスで，その要素は連続関数とする。この仮定により，S_i が任意の初期状態と（連続な）入力に対して全時間上で一意解をもつことは保証されている。上述の非線形サブシステムの場合と同様，この場合も増幅器ブロックをダイナミックブロックと区別せず，増幅器ブロックも（7.3）の形の方程式で記述されているものとし，$A_i(\cdot)$, $B_i(\cdot)$, $C_i(\cdot)$ はそれぞれ形式的に 0×0，$0 \times r_i$，$m_i \times 0$ のマトリクスと見なすことにする。以下では，（7.3）の形の状態方程式を標準形状態方程式と呼び，各サブシステムを表わす標準形をまとめて

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \qquad (7.4\,a)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \qquad (7.4\,b)$$

と書く。ここに，

$$A(t) \triangleq \mathrm{diag.}\{A_1(t),\ A_2(t),\ \cdots\cdots,\ A_N(t)\}$$

$$B(t) \triangleq \mathrm{diag.}\{B_1(t),\ B_2(t),\ \cdots\cdots,\ B_N(t)\}$$

$$C(t) \triangleq \mathrm{diag.}\{C_1(t),\ C_2(t),\ \cdots\cdots,\ C_N(t)\}$$

$$D(t) \triangleq \mathrm{diag.}\{D_1(t),\ D_2(t),\ \cdots\cdots,\ D_N(t)\}$$

である。

各サブシステムが線形時間不変の場合には，標準形状態方程式（7.3）を

$$\dot{x}_i(t) = A_i\, x_i(t) + B_i\, u_i(t) \qquad (7.5a)$$

$$y_i(t) = C_i\, x_i(t) + D_i\, u_i(t) \qquad (7.5b)$$

と書き，（7.4）を

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad (7.6a)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \qquad (7.6b)$$

と書くことにする。ただし，

$$A \triangleq \mathrm{diag.}\{A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots\ A_N\}$$

$$B \triangleq \mathrm{diag.}\{B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots\ B_N\}$$

$$C \triangleq \mathrm{diag.}\{C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots\ C_N\}$$

$$D \triangleq \mathrm{diag.}\{D_1,\ D_2,\ \cdots\cdots\ D_N\}$$

である。

7．3 ブロック線図表現と接続マトリクス[70),71)]

ブロック線図表現された大規模システムでは，サブシステムとサブシステム，サブシステムと全体の入力，出力などの接続関係は加え合わせ点，引き出し点および矢印によって表わされている。ここでは，このようにグラフ的に表現された接続関係をマトリクスで表わし，サブシステムの入力，出力，全体システムの入力，出力の結合関係をこの接続マトリクスを係数とする線形方程式で記

述する．

いま，全体システムの入力の数をr，出力の数をmとしよう．上で述べたように，サブシステムS_i（$i=1,2,\cdots,N$）の入力の数はr_i，出力の数はm_iである．このようなシステムにおいて，S_jのℓ番目の出力$y_{j\ell}$から出た矢印をたどっていくと，いくつかの加え合わせ点と引き出し点を経て，S_iのk番目の入力u_{ik}に達するとしょう．ただし，$y_{j\ell}$からu_{ik}への経路はただ1つとする*．このとき，$y_{j\ell}$はu_{ik}に接続しているという．そして，加え合わせ点の－符号の付いた入力を偶数回通って接続しているとき，正に接続しているといい，奇数回通って接続しているとき，負に接続しているということにする．同様に，全体システムの入力とサブシステムの入力の間，サブシステムの出力と全体システムの出力の間，全体システムの入力と出力の間にも，正，負の接続関係を考えることができる．これらの接続関係を次に定義する接続マトリクスで表わすことにする．

まず，サブシステム相互の接続関係，すなわち，サブシステムの出力からサブシステムの入力への接続関係を表わすブロック－ブロック接続マトリクスFはN^2個のブロックマトリクスから成る。

$$F=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{pmatrix}$$

そのijブロックF_{ij}は$r_i\times m_j$の大きさをもち，要素はS_jの出力がS_iの入力にどのように接続しているのかを示すように定められる．すなわち，F_{ij}の$k\ell$要素$f_{ij}(k,\ell)$は次のように定められる．

$$f_{ij}(k,\ell)=\begin{cases} 1: S_j\text{の}\ell\text{番目の出力が}S_i\text{の}k\text{番目の入力に正に接続しているとき．} \\ -1: S_j\text{の}\ell\text{番目の出力が}S_i\text{の}k\text{番目の入力に負に接続しているとき．} \end{cases}$$

脚注＊　この仮定は，接続関係を単純に扱うために必要なのであって，本質的な仮定ではない．加え合わせ点を多入力1出力のサブシステム，引き出し点を1入力多出力のサブシステムとして扱えば，この仮定は必要でなくなる．

$$\left\{ \begin{array}{l} 0：S_j \text{ の } \ell \text{ 番目の出力が } S_i \text{ の } k \text{ 番目の入力に接続} \\ \quad \text{していないとき。} \end{array} \right.$$

全体システムの入力からサブシステムの入力への接続関係を表わす入力－ブロック接続マトリクスGはN個のブロックマトリクスから成る。

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_N \end{bmatrix}$$

i番目のブロックG_iは$r_i \times r$の大きさをもち，その$k\ell$要素$g_i(k, \ell)$は，全体システムの入力がS_iの入力にどのように接続しているかを示すように，次のように定められる。

$$g_i(k, \ell) = \left\{ \begin{array}{l} 1：\text{全体システムの } \ell \text{ 番目の入力が } S_i \text{ の } k \text{ 番目の入} \\ \quad \text{力に正に接続しているとき。} \\ -1：\text{全体システムの } \ell \text{ 番目の入力が } S_i \text{ の } k \text{ 番目の入} \\ \quad \text{力に負に接続しているとき。} \\ 0：\text{全体システムの } \ell \text{ 番目の入力が } S_i \text{ の } k \text{ 番目の入} \\ \quad \text{力に接続していないとき。} \end{array} \right.$$

サブシステムの出力から全体システムの出力への接続関係を表わすブロック－出力接続マトリクスJもN個のブロックマトリクスから成る。

$$J = [J_1 \ J_2 \ \cdots \ J_N]$$

i番目のブロックJ_iは$m \times m_i$の大きさをもち，その$k\ell$要素$j_i(k, \ell)$は，S_iの出力が全体システムの出力にどのように接続しているかを示すように，次のように定められる。

$$j_i(k, \ell) = \left\{ \begin{array}{l} 1：S_i \text{ の } \ell \text{ 番目の出力が全体システムの } k \text{ 番目の出} \\ \quad \text{力に正に接続しているとき。} \\ -1：S_i \text{ の } \ell \text{ 番目の出力が全体システムの } k \text{ 番目の出} \\ \quad \text{力に負に接続しているとき。} \\ 0：S_i \text{ の } \ell \text{ 番目の出力が全体システムの } k \text{ 番目の出} \\ \quad \text{力に接続していないとき。} \end{array} \right.$$

全体システムの入力から出力への接続関係を表わす入力－出力接続マトリクスLはm×rの大きさで，そのkℓ要素ℓ（k，ℓ）は，全体システムの入力が全体システムの出力にどのように接続しているのかを示すように，次のように定められる．

$$\ell(k,\ell)=\begin{cases} 1: & \text{全体システムの}\ell\text{番目の入力が全体システムの}k\text{番目の出力に正に接続しているとき．} \\ -1: & \text{全体システムの}\ell\text{番目の入力が全体システムの}k\text{番目の出力に負に接続しているとき．} \\ 0: & \text{全体システムの}\ell\text{番目の入力が全体システムの}k\text{番目の出力に接続していないとき．} \end{cases}$$

これらの接続マトリクスF，G，J，Lを用いると，それらの定義から明らかなように，全体システムの出力W(・)とサブシステムの入力$u_i(\cdot)$（i＝1,2,…，N）を全体システムの入力V(・)とサブシステムの出力$y_i(\cdot)$（i＝1,2,……，N）の線形結合として次のように表わすことができる．

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdots & F_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_N \end{bmatrix} V(t) \qquad (7.7a)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots\cdots & J_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix} + L\,V(t) \qquad (7.7b)$$

以下では，簡単のため，これらを

$$U(t) = F\,Y(t) + G\,V(t) \qquad (7.8a)$$

$$W(t) = J\,Y(t) + L\,V(t) \qquad (7.8b)$$

と書くことが多い．

このように，ブロック線図で表わされる大規模システムにおいては，サブシステムの外部の接続関係は，サブシステムの内部の特性に関係なく，線形の代

数方程式で記述できる．この接続関係を表わす代数方程式と前に述べたサブシステムの特性を表わす状態方程式を合わせたものが大規模システム全体の記述式である．すなわち，本研究で対象とする大規模ダイナミカルシステムは非線形大規模システム

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \tag{7.2a}$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \tag{7.2b}$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \tag{7.8a}$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \tag{7.8b}$$

線形時変大規模システム

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \tag{7.4a}$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \tag{7.4b}$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \tag{7.8a}$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \tag{7.8b}$$

および線形時間不変大規模システム

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \tag{7.6a}$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \tag{7.6b}$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \tag{7.8a}$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \tag{7.8b}$$

の3つである．

7.4 結　　言

この章では，本研究で対象とする大規模ダイナミカルシステムを，サブシステム内部の特性とサブシステム間の接続関係に分けて記述した．ここでは，もともとサブシステムが存在し，それらが結合して大規模システムを構成している，すなわち，大規模システムはすでにサブシステムに分割されているものと

している．実際，制御システム等には，このように与えられたサブシステムを結合して構成されたものが多い．

ところで，大規模システムを解析する場合，サブシステムへの分割の仕方を固定して考える必要はなく，いくつかのサブシステムをまとめて，新しく1つのサブシステムと考えることもできる．この観点から，（新しい）サブシステム間の接続関係が単純になるように大規模システムを分割する系統的な方法が Ramamoorthy らによって得られている[72),73)]．大規模システムをサブシステムが結合したものと見なして解析する場合，サブシステム間の結合がある程度単純でなければサブシステムに分割して解析する意味は一般にないので，これは有効な方法である．

大規模システムを表わすのには，ブロック線図のほかにシグナルフロー・グラフもよく用いられる．しかし，このグラフは1本の枝が1つのサブシステムを表わす有向グラフだから，各サブシステムが1入力1出力の場合を表わすことはできても，多入力多出力でそれらが複雑に接続している場合を表わすことは困難である．

第8章　大規模システムの状態方程式表現[70),71),74)~76)]

8・1　緒　　言

第7章で述べたように，標準形状態方程式で記述されるサブシステムは任意の初期時刻と初期状態および（連続な）入力に対して全時間上で一意解をもつ．しかし，そのようなサブシステムが結合して構成される線形大規模システムがつねに一意解をもつとは限らず，後に例で示すように，一意的でない解をもつ場合や，ある特定の入力しか受け付けない場合がある．また，たとえ全体システムが一意解をもっても，それが標準形で記述できるとは限らない．同様に，正規形状態方程式で表わされるサブシステムから成る非線形大規模システムも一意解をもつとは限らず，正規形で記述できるとは限らない．この章では，これらの点を考慮して，大規模システムが一意解をもち，標準形や正規形の状態方程式で記述できるためには，サブシステムの特性と接続関係がどのような条件を満たしていなければならないかを明らかにする．

このような解の存在性と状態方程式表現に関する問題は回路理論において最も基本的な問題として研究され[62)~69)]，線形受動回路，線形能動回路，非線形回路等が一意解をもち，状態方程式で記述できるための種々の条件が明らかにされている．これらの条件は，その回路をもとに構成される抵抗回路，キャパシタ回路，インダクタ回路がそれぞれ一意解をもつための条件と考えられ，多くはそれらの回路を記述する（非線形）方程式に対する逆関数定理や陰関数定理の条件に帰着する[77)]．また，サブシステムが状態方程式で表わされ，接続関係が回路グラフで表わされる複合システムについても，本質的には同様の解析が行なわれている[78),79)]．そして，特に，線形時間不変回路に対しては，電子計算機を用いるのに適した，代数的かつ系統的に状態方程式を導く方法が開発されている[67),69)]．

一方，信号の流れがブロック線図で表わされるダイナミカルシステムについては，記憶素子を入力に置き換えて得られる静的な（非記憶素子から成る）システムが一意解をもてば，その記憶素子の変数を状態変数として状態方程式表現できることが知られている[80)]．本研究でも，8.2.1と8.3.1で，本質的にはこれと同じ考え方に基づき，大規模システムが状態方程式で記述できるために

サブシステムの特性と接続関係が満たすべき条件を求める．したがって，得られる条件は，回路の場合と同様に，ある静的なシステムを表わす方程式に対する陰関数定理の条件になる．そして，このとき，全体システムを表わす標準形や正規形の状態方程式の次元はサブシステムを表わす状態方程式の次元の総和になる．これに対して，8.2.2では，標準形で表わされる線形時間不変サブシステムから成る大規模システムのなかには，上の静的なシステムが一意解をもたなくても全体システムが標準形で記述できるものがあり，この場合は，全体システムを表わす標準形の次元はサブシステムを表わす標準形の次元の総和より低くなることを示す．そして，このような場合も含めて，線形時間不変大規模システムが標準形で記述できるための必要十分条件を回路理論で得られている結果[67),69)]を用いて明らかにする．

ところで，正規形状態方程式については局所的リプシッツ条件を満たすことが仮定されているだけだから，システムが正規形で表わせるということはその解が初期時刻の近傍で一意的に存在することしか保証していない．すなわち，全体システムは正規形で記述できるからといって，全時間上で解をもつとは限らないのである．そして，たとえ全時間上での解の存在を保証する大域的リプシッツ条件を各サブシステムを表わす正規形が満たしていても，全体システムを表わす正規形が大域的リプシッツ条件を満たすとは限らない．そこで，8.3.2では，全体システムを表わす正規形が大域的リプシッツ条件を満たすためにサブシステムの特性と接続関係が満たすべき条件を求める。

8.4では，非線形大規模システムの線形化について，サブシステムごとの線形化によって全体システムの線形化システムが得られるのかという問題を考える．全体システムが線形化できるためにはそれは正規形で記述できなければならないが，上で述べたように，一般には全体システムが正規形で記述できるとは限らない．それに対して，サブシステムは正規形で表わされているので，つねに線形化は可能である．つまり，全体システムが線形化できない場合でも，サブシステムの線形化は可能である．そこで，ここでは，個々のサブシステムを線形化して得られる線形化サブシステムを接続して構成される線形大規模システムは，どのような条件を満たすときに，全体システムの線形化システムといえるのかを明らかにする．

8．2　線形大規模システムの状態方程式表現

8．2．1　状態方程式表現できるための条件

ここでは，標準形状態方程式で表わされるサブシステムから成る線形（時変）大規模システム

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \qquad (7.4\,a)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t) \qquad (7.4\,b)$$

$$U(t) = F\,Y(t) + G\,V(t) \qquad (7.8\,a)$$

$$W(t) = J\,Y(t) + L\,V(t) \qquad (7.8\,b)$$

が一意解をもち，かつ標準形状態方程式で記述できるための条件を求めよう．各サブシステムは標準形で表わされているので，第7章で述べたように，それら自身が任意の初期時刻と初期状態および（連続な）入力に対して全時間上で一意解をもつことは保証されている．しかし，次の例で示すように，それらを接続して構成される大規模システムがつねに一意解をもつとは限らない．一意解をもたないということは，（標準形で記述できれば一意解をもつので）標準形では記述できないということでもある．

〔例8.1〕　標準形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.1のシステムを考えよう．このシステムは初期条件 $x_1(0_-)=x_2(0_-)=0$ と任

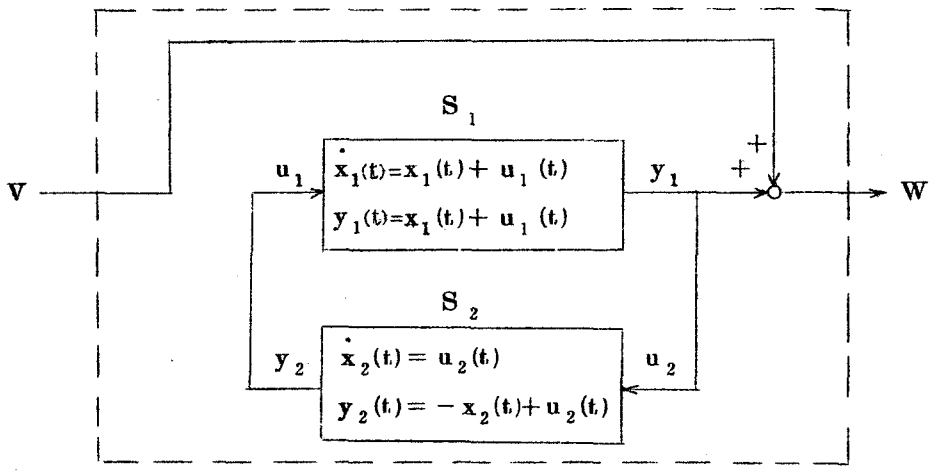


図8.1　解が一意的でないシステム

意の入力に対して，明らかに

$$\begin{cases} u_1(t) = 0 \\ x_1(t) = 0 \\ y_1(t) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_2(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = 0 \end{cases}, \qquad (8.1)$$

$$W(t) = V(t), \qquad t \geqq 0$$

という解をもつ。また，簡単な計算からわかるように，同じ初期条件に対して

$$\begin{cases} u_1(t) = e^t \\ x_1(t) = t e^t \\ y_1(t) = (1+t)e^t \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_2(t) = (1+t)e^t \\ x_2(t) = t e^t \\ y_2(t) = e^t \end{cases}, \qquad (8.2)$$

$$W(t) = (1+t)e^t + V(t), \qquad t \geqq 0$$

もこのシステムの解である。すなわち，図8.1のシステムの解は一意的ではない。以上よりわかるように，標準形で表わされるサブシステムから成る大規模システムがつねに一意解をもつとは限らない。

〔例8.2〕 標準形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.2のシステムを考えよう。このシステムの初期条件 $x_1(0_-) = x_2(0_-) = 0$ に対する解は，もし存在すれば，各サブシステムの特性とそれらの接続関係からわかる

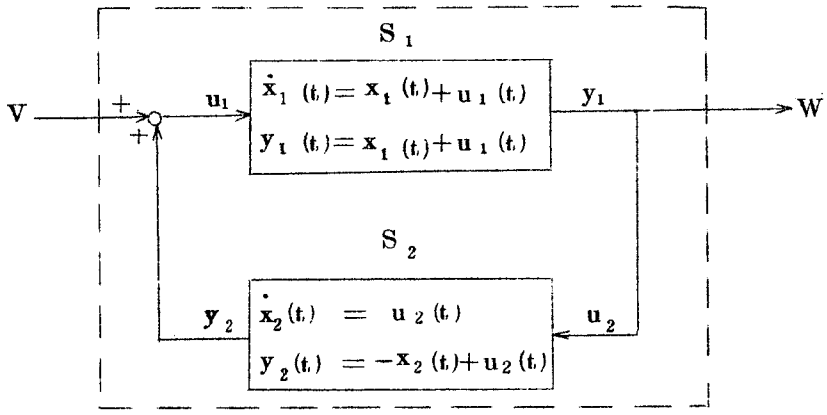


図8.2 解をもたないシステム

ように，

$$y_1(t) = \int_0^t e^{t-\tau} u_1(\tau)\, d\tau + u_1(t) \qquad (8.3\,a)$$

$$y_2(t) = -\int_0^t u_2(\tau)\, d\tau + u_2(t) \qquad (8.3\,b)$$

$$u_1(t) = y_2(t) + V(t) \qquad (8.3\,c)$$

$$u_2(t) = y_1(t) \qquad (8.3\,d)$$

$$W(t) = y_1(t) \qquad (8.3\,e)$$

を満たす．（8.3 a）～（8.3 d）を辺ごとに加えて，整理すると，すべての t で

$$V(t) = \int_0^t u_2(\tau)\, d\tau - \int_0^t e^{t-\tau} u_1(\tau)\, d\tau$$

が成立することがわかる．したがって，

$$\dot{V}(t) = u_2(t) - u_1(t) - \int_0^t e^{t-\tau} u_1(\tau)\, d\tau$$

である．ところが，（8.3 a）と（8.3 d）より

$$u_2(t) = \int_0^t e^{t-\tau} u_1(\tau)\, d\tau + u_1(t)$$

であるから，結局，

$$\dot{V}(t) = 0$$

ということになる．つまり，図8.2のシステムが解をもつためには，全体システムの入力は一定の値でなければならない．すなわち，任意の入力に対しては，このシステムは解をもたないのである．

このように，一般には，サブシステムが一意解をもつようなシステムでも，全体システムが一意解をもつとは言えない．また，次の例で示すように，たとえ一意解をもっても，それが標準形で記述できるとは限らない．

〔例8.3〕 標準形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.3のシステムを考える。まず，このシステムが一意解をもつことをs領域で示そう。いま，$x_1(\cdot)$, $u_1(\cdot)$, $y_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $u_2(\cdot)$, $y_2(\cdot)$, $V(\cdot)$, $W(\cdot)$ のラプラス変換をそれぞれ $\hat{x}_1(\cdot)$, $\hat{u}_1(\cdot)$, $\hat{y}_1(\cdot)$, $\hat{x}_2(\cdot)$, $\hat{u}_2(\cdot)$, $\hat{y}_2(\cdot)$, $\hat{V}(\cdot)$, $\hat{W}(\cdot)$ で表わすと，サブシステムの特性は

$$S_1 : \begin{cases} \hat{x}_1(s) = \dfrac{1}{s+1} x_1(0_-) + \dfrac{1}{s+1} \hat{u}_1(s) \\ \hat{y}_1(s) = \hat{x}_1(s) + \hat{u}_1(s) \end{cases} \tag{8.4 a}$$

$$S_2 : \begin{cases} \hat{x}_2(s) = \dfrac{1}{s+3} x_2(0_-) + \dfrac{1}{s+3} \hat{u}_2(s) \\ \hat{y}_2(s) = \hat{x}_2(s) + \hat{u}_2(s) \end{cases} \tag{8.4 b}$$

と記述でき，接続関係は

$$\hat{u}_1(s) = \hat{y}_2(s) + \hat{V}(s) \tag{8.4 c}$$

$$\hat{u}_2(s) = \hat{y}_1(s) \tag{8.4 d}$$

$$\hat{W}(s) = \hat{y}_2(s) \tag{8.4 e}$$

と記述できる。これらは任意の初期条件 $x_1(0_-)$, $x_2(0_-)$ と入力 $\hat{V}(\cdot)$ に対して一意的に解け，たとえば，

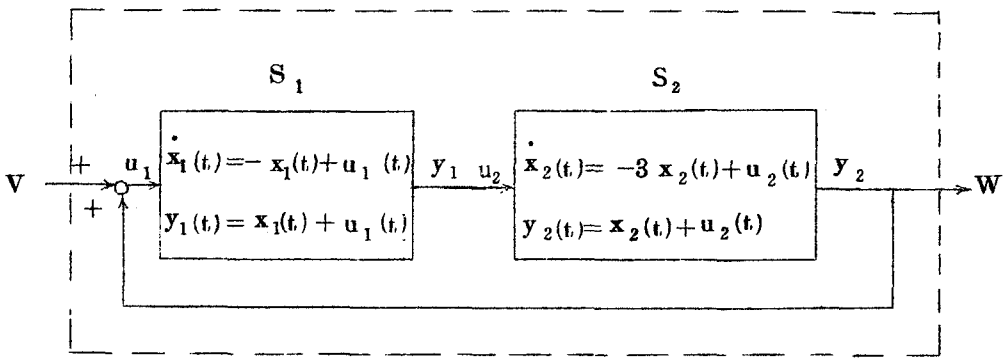


図8.3 一意解をもつが標準形では表わせないシステム

$$\hat{u}_1(s)=-\frac{s+4}{2s+5}x_1(0_-)-\frac{s+1}{2s+5}x_2(0_-)-\frac{(s+1)(s+4)}{2s+5}\hat{V}(s) \qquad (8.5a)$$

$$\hat{u}_2(s)=-\frac{s+3}{2s+5}x_1(0_-)-\frac{s+2}{2s+5}x_2(0_-)-\frac{(s+2)(s+3)}{2s+5}\hat{V}(s) \qquad (8.5b)$$

$$\hat{W}(s)=-\frac{s+4}{2s+5}x_1(0_-)-\frac{s+1}{2s+5}x_2(0_-)-\frac{(s+2)(s+4)}{2s+5}\hat{V}(s) \qquad (8.5c)$$

である。（その他の変数は$\hat{u}_1(\cdot)$, $\hat{u}_2(\cdot)$を（8.4 a），（8.4 b）に代入すれば直ちに求まる。）このように，図8.3のシステムは一意解をもつ．しかし，このシステムは標準形では記述できない．なぜなら，このシステムの伝達関数

$$-\frac{(s+2)(s+4)}{2s+5} \qquad ((8.5c)参照)$$

の分子の次数は分母の次数より高いが，標準形で表わされるシステムでは分子の次数は分母の次数より高くはならないからである．

以上の例が示すように，サブシステムが標準形状態方程式で表わされていても，全体システムは標準形で記述できるとは限らない．それでは，どのような条件が成り立つとき全体システムも標準形で記述できるのかを述べているのが次の定理である．

〔定理 8.1〕（7.4）と（7.8）で表わされる線形大規模システムが一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できる．すなわち，

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)&=\tilde{A}(t)X(t)+\tilde{B}(t)V(t)\\ W(t)&=\tilde{C}(t)X(t)+\tilde{D}(t)V(t)\end{aligned} \qquad (8.6)$$

の形に記述できるための必要十分条件は，すべてのtで

$$\det(I-D(t)F) \quad (=\det(I-FD(t))) \neq 0 \qquad (8.7)$$

が成立することである．

（注 8.1）ここで，サブシステムの状態の直和，すなわち$X(\cdot)$，を状態とし

て標準形で記述できるとは，状態空間の次元がサブシステムの次元の総和$\tilde{n}$（$\triangleq \Sigma_{i=1}^{N} n_i$）であって，初期状態として$R^{\tilde{n}}$のどの値でも任意に指定できることを意味している．

（定理8.1の証明）　必要性：　（7.4 b）と（7.8 a）をまとめた

$$\begin{bmatrix} I & -F \\ -D(t) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \quad (8.8)$$

を考えよう．もし，ある時刻t_0で$\det(I-D(t_0)F)=0$とすると，

$$\det \begin{bmatrix} I & -F \\ -D(t_0) & I \end{bmatrix} = \det(I-D(t_0)F) = 0$$

であるから，（8.8）の左辺の係数マトリクスはt_0で正則ではない．したがって，その時刻で，係数マトリクスは適当な行変換によって最下行が0になるように変換できる．この行変換を$t=t_0$とした（8.8）の全体にほどこすと，その結果は次のような形に書ける．

$$\begin{bmatrix} S(t_0) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t_0) \\ Y(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t_0) \\ c_2(t_0) \end{bmatrix} X(t_0) + \begin{bmatrix} G_1 \\ g_2 \end{bmatrix} V(t_0) \quad (8.9)$$

この最下段の式

$$c_2(t_0)X(t_0) + g_2 V(t_0) = 0 \quad (8.10)$$

について考えよう．係数ベクトル$c_2(t_0)$，g_2に関して，次の3つの場合が生じる可能性がある．

(i)　$c_2(t_0) \neq 0$

(ii)　$c_2(t_0) = 0$，　$g_2 \neq 0$

(iii)　$c_2(t_0) = 0$，　$g_2 = 0$

まず，(i)の場合には，(8.10)は$X(t_0)$がある拘束条件を満たすことを意味しており，t_0を初期時刻とするとき，初期状態$X(t_0)$を$R^{\tilde{n}}$の任意の値には設定できないことになる．すなわち．たとえ全体システムが状態方程式で記述できても，その状態空間は$R^{\tilde{n}}$ではないのである．(ii)の場合には，$g_2 V(t_0) = 0$を満たす入力以外はこのシステムが受け付けないことを意味している．こ

れは，入力は任意の（連続）関数であるという暗黙の仮定に反する．(iii)の場合は，全体システムを表わす（7.4 a），（7.4 b），（7.8 a），（7.8 b）の（$\tilde{n}+\tilde{m}+\tilde{r}+m$）個の式（ただし，$\tilde{m}\triangleq\sum_{i=1}^{N}m_i$，$\tilde{r}\triangleq\sum_{i=1}^{N}r_i$）のなかに互いに従属な式があることを意味する．したがって，独立な式の数は未知数$X(\cdot)$，$U(\cdot)$，$Y(\cdot)$，$W(\cdot)$の数（$\tilde{n}+\tilde{r}+\tilde{m}+m$）個よりも少なく，ゆえに，全体システムは一意解をもたない．以上からわかるように，この定理の条件が満たされないときは，全体システムを$X(\cdot)$を状態として標準形で記述することはできないのである．

<u>十分性</u>：　すべてのtで$\det(I-D(t)F)$（$=\det(I-FD(t))\neq 0$であるとしよう．これは，（7.4 b）と（7.8 a）をまとめて得られる（8.8）の左辺の係数マトリクスが正則であることを意味している．ゆえに，（8.8）は$U(\cdot)$と$Y(\cdot)$について一意的に解ける．

$$\begin{bmatrix} U(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-FD(t))^{-1}FC(t) \\ (I-D(t)F)^{-1}C(t) \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} (I-FD(t))^{-1}G \\ (I-D(t)F)^{-1}D(t)G \end{bmatrix} V(t) \tag{8.11}$$

これらを（7.4 a），（7.8 b）に代入すると，全体システムを表わす標準形状態方程式が得られる．

$$\dot{X}(t)=\{A(t)+B(t)(I-FD(t))^{-1}FC(t)\}X(t) + B(t)(I-FD(t))^{-1}GV(t) \tag{8.12a}$$

$$W(t)=J(I-D(t)F)^{-1}C(t)X(t) + \{L+J(I-D(t)F)^{-1}D(t)G\}V(t) \tag{8.12b}$$

したがって，$X(\cdot)$と$W(\cdot)$は任意の初期状態と入力$V(\cdot)$に対して一意的に定まる．また，$U(\cdot)$と$Y(\cdot)$は（8.11）のように$X(\cdot)$と$V(\cdot)$によって定まるから，やはり一意的である．　（証明終）

以上の証明からわかるように，定理8.1の条件は，（7.4 b）と（7.8 a）をまとめた（8.8）が，任意の$X(t)$と$V(t)$に対して，$U(t)$と$Y(t)$について，陽に解けるための必要十分条件である．ところで，$X(\cdot)$を入力と見なせば，（8.8）は，ここで考えている線形大規模システムにおいて記憶素子を入力に置き換え

て得られる静的な（非記憶素子から成る）システムを表わしている。
したがって，この定理は，そのような静的なシステムが一意解をもてば（記憶素子の変数を状態変数として）もとのシステムが状態方程式で記述できるというDertouzos[80]の定性的な結果を，その逆も成立することを含めて，具体化したものと考えることもできる。

次に，一般的に$\det(I-D(t)F)$（$=\det(I-FD(t))$）$\neq 0$，すなわち，$I-D(t)F$と$I-FD(t)$が正則になるような接続の条件を考察しておこう。接続関係を論じるには，0と1を要素とし，その加算や乗算がブール演算によって定義されるブールマトリクスの考え方が有効である[73]。いま，

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{11}^* & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^* & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & d_{NN}^* \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

$$d_{ii}^* \triangleq \begin{cases} 1 : S_i\text{に直結経路があるとき，すなわち，}D(t)\neq 0\text{のとき。} \\ 0 : S_i\text{に直結経路がないとき，すなわち，}D(t)\equiv 0\text{のとき。} \end{cases}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

$$F^* = \begin{bmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* & \cdots\cdots & f_{1N}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* & \cdots\cdots & f_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1}^* & f_{N2}^* & \cdots\cdots & f_{NN}^* \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

$$f_{ij}^* \triangleq \begin{cases} 1 : S_j\text{の出力が}S_i\text{の入力に接続しているとき，すなわち，}F_{ij}\neq 0\text{のとき。} \\ 0 : S_j\text{の出力が}S_i\text{の入力に接続していないとき，すなわち，}F_{ij}=0\text{のとき。} \end{cases}$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

によって，2つのブールマトリクスD^*，F^*を定義する。これらのマトリク

スを用いると，$I-D(t)F$ や $I-FD(t)$ が正則になるための簡単な十分条件が求まり，次の系が得られる．

〔系 8.1〕

$$(D^*F^*)^N=0 \tag{8.15}$$

または

$$(F^*D^*)^N=0 \tag{8.16}$$

ならば，（7.4）と（7.8）で表わされる線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できる．

（証明）　$(F^*D^*)^N=0$ の場合も同様なので，ここでは $(D^*F^*)^N=0$ の場合を証明しよう．D^* と F^* の定義からわかるように，$(D^*F^*)^N$ の ij 要素が 0 であることは $(D(t)F)^N$ の ij ブロックが 0 マトリクスであることを意味する．したがって，$(D^*F^*)^N=0$ は $(D(t)F)^N\equiv 0$ を意味している．

いま，時刻 t_0 で $I-D(t_0)F$ が正則ではないとしよう．すると，$(I-D(t_0)F)\cdot x_0=0$，すなわち，$x_0=D(t_0)Fx_0$ となる $\tilde{m}$ 次元ベクトル $x_0(\neq 0)$ が存在する．この式に左から $D(t_0)F$ をかけると，$D(t_0)Fx_0=(D(t_0)F)^2x_0$．ゆえに，$x_0=D(t_0)Fx_0=(D(t_0)F)^2x_0$ である．以下，同様にして，$x_0=(D(t_0)F)^Nx_0$ が得られる．ところが，上で述べたように，（8.15）より，$(D(t_0)F)^N=0$ だから，$x_0=0$ となる．これは，$I-D(t)F$ が正則ではないとしたことに矛盾している．したがって，$I-D(t)F$ は正則であり，定理 8.1 により，この系は証明された．　（証明終）

（注 8.2）　この系は $(D^*F^*)^N$ や $(F^*D^*)^N$ を実数体上のマトリクスの積と見なしても成立する．それは，D^* と F^* の要素が 0 と 1 だけだから，ブール演算で (8.15) が成立すれば実数体上の演算でもそれは成立し，逆に実数体上の演算によって成立すればブール演算によって成立するからである．

（注 8.3）　(8.15) が成立することと (8.16) が成立することは等価である．注 8.2 で述べたように，(8.15) や (8.16) がブール演算で成立することと実数体上の演算で成立することは必要十分の関係にあるから，ここでは，実数体上で (8.15) と (8.16) が等価であることを示す．いま，$(D^*F^*)^N=0$ であるとしよう．すると，$(F^*D^*)^{N+1}=F^*(D^*F^*)D^*=0$．　F^*D^* の固有値

をλとすると$(F^*D^*)^{N+1}$の固有値はλ^{N+1}だから，これはF^*D^*　のN個の固有値がすべて0であることを意味している．したがって，$(F^*D^*)^N=0$である．このように，（8.15）が成立すれば，（8.16）も成立する．また，この逆も全く同様に示すことができる．

ここで，ブロック線図から導かれる有向グラフを考え，系8.1の条件の具体的な意味を調べよう．このグラフはサブシステム（ブロック）の入力と出力を節点で置き換え，それらの接続関係を枝で表わしたグラフで，具体的には次のように描かれるものとする．まず，サブシステムS_i（$i=1, 2, \cdots, N$）の入力に対応して節点iを書き，出力に対応して節点$N+i$を書く．次に，S_iが直結経路をもつならば，iから$N+i$に向う枝を書き，S_j（$j=1, 2, \cdots, N$）の出力がS_iの入力に接続しているならば，$N+j$からiに向う枝を書く．このようにして作られたグラフはサブシステム間およびサブシステム内部の静的な接続関係を表わしている．

いま，このグラフをアソシエーションマトリクス（節点接続マトリクス）[73]を用いて表わそう．アソシエーションマトリクスとは，そのij要素が，節点jから節点iに向う枝があるとき1，ないとき0で定義される正方マトリクスである．上で述べたグラフの描き方およびブールマトリクスD^*，F^*の定義を比較すれば容易にわかるように，このグラフのアソシエーションマトリクスは

$$\begin{bmatrix} 0 & F^* \\ D^* & 0 \end{bmatrix}$$

である．このブールマトリクスを（2N）乗すると

$$\begin{bmatrix} 0 & F^* \\ D^* & 0 \end{bmatrix}^{2N} = \begin{bmatrix} (F^*D^*)^N & 0 \\ 0 & (D^*F^*)^N \end{bmatrix}$$

だから，系8.1の条件が成立することは

$$\begin{bmatrix} 0 & F^* \\ D^* & 0 \end{bmatrix}^{2N} = 0 \qquad (8.17)$$

であることを意味している（注8.3参照）．ところで，アソシエーションマト

リクスのk乗（k＝1，2，・・・）のij要素が1であることは，節点 ⓙ から節点ⓘへのk本の枝を通る経路が存在することを表わし，0はそのような経路が存在しないことを表わす.[73] したがって，（8.17）より，上の有向グラフには，（2N）本の枝を通る経路は存在しない．これは，もしサイクルがあれば（2N）本以上の枝を通る経路が存在するので，このグラフにはサイクルがないということである．以上より，系8.1の条件は，対象としている大規模システムに静的なフィードバックがないことを意味していると言える．

線形大規模システムが系8.1の条件を満たす具体的な場合としては次の場合がある．

(i) すべてのサブシステムが直結経路をもたないとき．すなわち，$D^*=0$ のとき．

(ii) サブシステム間に接続がないとき．すなわち，$F^*=0$ のとき．

(iii) 全体システムが一方向干渉システムの構造をしているとき．すなわち，サブシステムの番号付けを適当に変換することによって，

$$F^* = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となるとき．ただし，＊は0または1を表わす．

8．2．2 線形時間不変大規模システムの状態方程式表現

これまでに述べたように，線形大規模システムが一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できるための必要十分条件は，$I-D(t)F$ が正則（または，それと等価な $I-FD(t)$ が正則）であることである．ところで，次の例で示すように，サブシステムが時間不変システムの場合には，この条件が成立しなくても全体システムが一意解をもち，状態はサブシステムの状態の直和ではないが標準形状態方程式で記述できることがある．以下では，線形時間不変サブシステムから成る大規模システム

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad (7.6a)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \qquad (7.6b)$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \qquad (7.8a)$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \qquad (7.8b)$$

を対象に，このような場合も含めて，全体システムが一意解をもち，標準形で記述できるための一般的な条件を求める．

〔例 8.4〕　標準形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図 8.4 の線形時間不変システムを考えよう．このシステムが一意解をもつことは，例 8.3 のシステムと同様に，s 領域で示すことができる．さて，2つのサブシステムを表わす標準形をまとめると次の通りである．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \qquad (8.18a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \qquad (8.18b)$$

一方，接続関係は

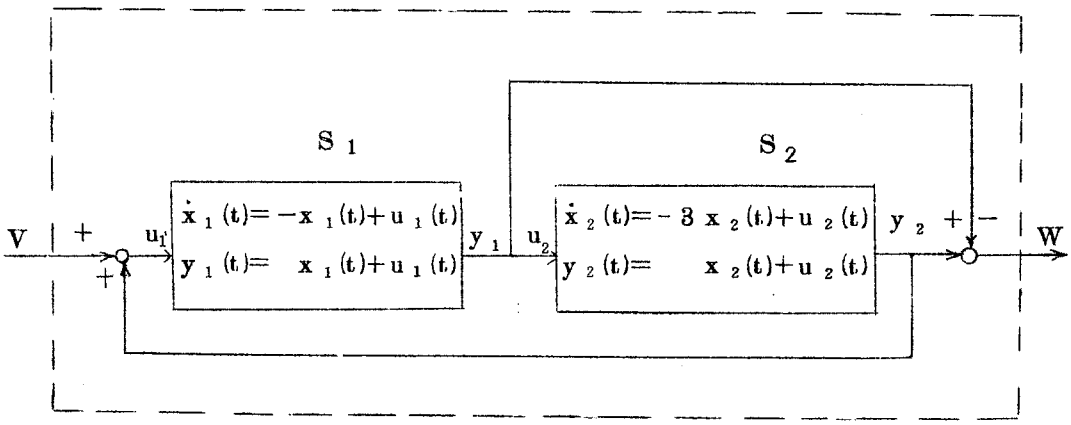


図 8.4　det（I−DF）=0 だが，標準形で表わせるシステム

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \underset{F}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underset{G}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} V(t) \qquad (8.19a)$$

$$W(t) = \underset{J}{[-1 \quad 1]} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \underset{L}{[0]} V(t) \qquad (8.19b)$$

で表わされる．これらより

$$I - DF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

は正則ではないので，このシステムは $[x_1(\cdot) \quad x_2(\cdot)]'$ を状態としては標準形で記述できない．しかし，これから導くように，1次元の標準形で記述することができるのである．まず，(8.18b)と(8.19a)を展開して得られる4つの式を辺ごとに加えて，整理すると，

$$x_1(t) = -x_2(t) - V(t) \qquad (8.20)$$

が得られる．この両辺を微分して，(8.18a)の2つの式を代入する．

$$-x_1(t) + u_1(t) = -(-3x_2(t) + u_2(t)) - \dot{V}(t)$$

これから(8.18b)の下の式と(8.19a)の上の式を引き，(8.20)を加えて，$u_2(\cdot)$について整理する．

$$u_2(t) = 0.5x_2(t) - V(t) - 0.5\dot{V}(t) \qquad (8.21)$$

これを(8.18a)の下の式に代入することによって

$$\dot{x}_2(t) = -2.5x_2(t) - V(t) - 0.5\dot{V}(t) \qquad (8.22)$$

が得られる．一方，(8.19b)から(8.18b)の上の式，(8.19a)の上の式，(8.20)を引くと，

$$W(t) = x_2(t) \qquad (8.23)$$

が得られる．ここで，新しい変数$x'(\cdot)$を

$$x(t) \triangleq x_2(t) + 0.5V(t)$$

と定義すると，これらは全体システムを表わす標準形状態方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2.5x(t) + 0.25V(t) \\ W(t) &= x(t) - 0.5V(t) \end{aligned} \qquad (8.24)$$

になる．

このようなI－DFやI－FDが正則でない場合も含めて，解の存在性や一意性と状態方程式表現について一般的に考察する場合，全体システムを中間標準形[74),76)]で表わすと，回路理論で得られている結果[64),67),69),81)]が適用できる．中間標準形とは，ある中間変数$z(\cdot) \triangleq (z_1(\cdot) \quad z_2(\cdot) \cdots z_N(\cdot))'$および入力$u(\cdot)$と出力$y(\cdot)$に関する

$$\bar{S}\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \qquad (8.25a)$$

$$y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \qquad (8.25b)$$

$$\bar{S}, \quad \bar{A} \in R^{n\times n}$$

の形の方程式で，標準形状態方程式との違いは$\bar{S}$が単位マトリクスとは限らず，正則でなくてもよい点である．この中間標準形で表わすことのできるシステムのクラスは非常に広く，有限個の増幅器，積分器，加算器で構成されるシステムや入出力微分方程式で表わせるシステムはすべて記述できる[76)]．しかも，中間標準形は一意解をもたないシステムを記述することもできる．中間標準形についてはDolezal[81)]によって次の補題が得られている．

〔補題8.1〕[81)] 中間標準形(8.25)が任意の初期条件$z(0_-)$と入力に対して一意解をもつための必要十分条件は，

$$\det(s\bar{S}-\bar{A}) \not\equiv 0 \qquad (8.26)$$

が成立することである．

さらに，Fettweis[67)]とDervisoğlu[69)]は，この補題の条件が中間標準形に等価な[76)]

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \qquad (8.27a)$$
$$y(t) = \tilde{C}x(t) + \tilde{D}(p)u(t) \qquad (8.27b)$$
$$z(t) = \tilde{E}x(t) + \tilde{F}(p)u(t) \qquad (8.27c)$$

（$\tilde{D}(p)$, $\tilde{F}(p)$は微分オペレータ$p \triangleq d/dt$ の多項式を要素とするマトリクス）の形の方程式（準標準形と呼ぶ）が存在するための必要十分条件であることを示した＊．この結果に若干の考察を加えると，中間標準形で表わされたシステムが標準形で記述できるための必要十分条件が得られる．すなわち，準標準形で$\tilde{D}(p)$が定数マトリクスになれば，そのシステムは標準形で記述できたことになる．これはそのシステムの入出力間の伝達関数が$s=\infty$に極をもたないことと等価である．したがって，次の補題が成立する．

〔補題 8.2〕　中間標準形（8.25）で表わされたシステムが一意解をもち，標準形状態方程式で記述できるための必要十分条件は，

$$\text{(i)} \quad \det(s\bar{S}-\bar{A}) \not\equiv 0 \qquad (8.26)$$
$$\text{(ii)} \quad \lim_{s\to\infty} \bar{C}(s\bar{S}-\bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} = \tilde{D} \qquad (8.28)$$

$\tilde{D}$ ： 定数マトリクス

が成立することである．

それでは，この補題をここで考えている線形時間不変大規模システムに適用するために，（7.6）と（7.8）をまとめて中間標準形の形に書こう．

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{U}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & -I & F \\ C & D & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(t) \\ U(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \qquad (8.29a)$$

脚注＊　厳密に言えば，Fettweis とDervisoğlu は中間標準形と$\dot{x}(t)=\tilde{A}x(t)+\tilde{B}(p)u(t)$, $y(t)=\tilde{C}x(t)+\tilde{D}(p)u(t)$, $z(t)=\tilde{E}x(t)+\tilde{F}(p)u(t)$.
の形の方程式の等価性を論じている．この方程式が準標準形に等価変換できることはPottle[64]が示している．

$$W(t) = [0 \quad 0 \quad J] \begin{bmatrix} X(t) \\ U(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} + L\,V(t) \qquad (8.29b)$$

この中間標準形においては

$$\det \begin{bmatrix} sI-A & -B & 0 \\ 0 & I & -F \\ -C & -D & I \end{bmatrix}$$

$$= \det(sI-A) \quad \det(I-(C(sI-A)^{-1}B+D)F)$$

$$= \det(sI-A) \quad \det(I-H(s)F) \qquad (8.30)$$

$$H(s) \triangleq C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$= \begin{bmatrix} C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & C_N(sI-A_N)^{-1}B_N+D_N \end{bmatrix}$$

で，つねに $\det(sI-A \neq 0$ は成立するから，補題 8.2 の条件（1）が成立することは，$\det(I-H(s)F) \neq 0$ が成立することと等価である．また，

$$[0 \quad 0 \quad J] \begin{bmatrix} sI-A & -B & 0 \\ 0 & I & -F \\ -C & -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ G \\ 0 \end{bmatrix} + L$$

$$= J(I-H(s)F)^{-1}H(s)G + L \qquad (8.31)$$

である．したがって，補題 8.2 より直接，線形時間不変大規模システムの状態方程式に関する次の定理が得られる．

〔定理 8.2〕　（7.6）と（7.8）で記述される線形時間不変大規模システムが一意解をもち，標準形状態方程式で記述できる，すなわち，

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + \hat{B}V(t) \\ W(t) &= \hat{C}x(t) + \hat{D}V(t) \end{aligned} \qquad (8.32)$$

の形に記述できるための必要十分条件は，

(i) $\det(I - H(s)F) \quad (= \det(I - FH(s))) \neq 0$

(ii) $\lim_{s \to \infty} J(I - H(s)F)^{-1} H(s)G + L = \hat{D}$

$\hat{D}$ ： 定数マトリクス

が成立することである．

この場合，得られる標準形状態方程式（8.32）の次元は

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B & 0 \\ 0 & I & -F \\ -C & -D & I \end{bmatrix}$$

の次数に一致することが知られている[67),69)]．それは行列式の定義から$\tilde{n}$を越えない．すなわち，全体システムの状態空間の次元はサブシステムの状態空間の次元の総和より低いか，または等しいのである．

$$\dim x \leqq \dim X \qquad (8.35)$$

ところで，定理8.1より，$I - DF$が正則ならば，定理8.2の条件(i)，(ii)は当然成立しなければならない．それを確かめておこう．まず，

$$\det(I - H(\infty)F) = \det(I - DF)$$

であるから，$\det(I - DF) \neq 0$のとき，条件(i)が成立することはわかる．しかも，このとき，

$$\lim_{s \to \infty} J(I - H(s)F)^{-1} H(s)G + L = J(I - DF)^{-1} DG + L$$

となるから，条件(ii)も成立する．

8．3　非線形大規模システムの状態方程式表現

8．3．1　状態方程式表現できるための条件

ここでは，正規形状態方程式で表わされるサブシステムが接続して構成される非線形大規模システム

$$\dot{X}(t) = f(X(t),\ U(t),\ t) \qquad (7.2a)$$

$$Y(t) = g(X(t),\ U(t),\ t) \qquad (7.2b)$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \qquad (7.8a)$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \qquad (7.8b)$$

を対象に，その解の存在性と一意性，および状態方程式表現について考えよう．線形大規模システムについてこれまでに述べたように，サブシステムを表わす状態方程式（7.2）が線形の標準形（これは正規形の1つである）の場合でも全体システムは一意解をもつとは限らず，まして状態方程式で記述できるとは限らない．したがって，当然，ここで考えている非線形大規模システムも一意解をもつとは限らず，正規形状態方程式で記述できるとは限らない．そこで，以下では，どのような条件が成り立つとき，全体システムが一意解をもち，正規形状態方程式で記述できるのかという問題を考える．

そのために，線形大規模システムの場合（定理8.1の証明）と同様に，サブシステムの出力を表わす（7.2b）と入力を表わす（7.8a）を合わせた連立方程式

$$Y(t) = g(X(t),\ U(t),\ t) \qquad (7.2b)$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \qquad (7.8a)$$

を考えよう．これは，ここで考えている大規模システムの記憶素子を入力に置き換えて得られる静的な（非記憶素子から成る）システムに表わしている．いま，この連立方程式が，任意の$X(t)$，$V(t)$，tに対して，$U(t)$と$Y(t)$について

$$U(t) = \tilde{h}(X(t),\ V(t),\ t) \qquad (8.36)$$

$$Y(t) = \hat{h}(X(t), V(t), t) \tag{8.37}$$

の形に，陽に解けたとしよう．ここに，$\tilde{h}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は$R^{\tilde{n}} \times R^{r} \times R$から$R^{\tilde{r}}$への関数，$\hat{h}(\cdot, \cdot, \cdot)$は$R^{\tilde{n}} \times R^{r} \times R$から$R^{\tilde{m}}$への関数で，どちらも初めの（$\tilde{n}+r$）変数に関して連続微分可能，最後の1変数に関して連続とする．すると，（8.36）と（8.37）をそれぞれ（7.2a）と（7.8b）に代入することによって，全体システムを記述する正規形状態方程式が得られる．

$$\dot{X}(t) = f(X(t), \tilde{h}(X(t), V(t), t), t)$$

$$\triangleq \tilde{f}(X(t), V(t), t) \tag{8.38a}$$

$$W(t) = J\hat{h}(X(t), V(t), t) + LV(t)$$

$$\triangleq \tilde{g}(X(t), V(t), t) \tag{8.38b}$$

そして，この正規形と，$U(\cdot)$と$Y(\cdot)$が（8.36）と（8.37）で表わせることから，全体システムが一意解をもつことが言える．このように，（7.2b）と（7.8a）を合わせた連立方程式が$U(t)$と$Y(t)$について陽に解けることが，ここで考えている非線形大規模システムが一意解をもち，$X(\cdot)$を状態として正規形状態方程式で記述できるための十分条件である．したがって，（7.2b）と（7.8a）が$U(t)$と$Y(t)$について解けるための条件を明らかにすることが，ここでの問題となる．

そこで，この条件を明らかにするために，（7.8a）に（7.2b）を代入して得られる

$$U(t) - Fg(X(t), U(t), t) - GV(t) = 0 \tag{8.39}$$

と，（7.2b）に（7.8a）を代入して得られる

$$Y(t) - g(X(t), FY(t) + GV(t), t) = 0 \tag{8.40}$$

を考えよう．もし，（8.39）が$U(t)$について（8.36）の形に解ければ，その結果を（7.2b）に代入することにより，$Y(t)$は（8.37）の形に表わせ，また，（8.40）が$Y(t)$について（8.37）の形に解ければ，その結果を（7.8a）に代

入することにより，U(t)は（8.36）の形に表わせる．すなわち，（8.39）がU(t)について，または，（8.40）がY(t)について陽に解ければ，（7.2b）と（7.8a）を合わせた連立方程式はU(t)とY(t)について解けたことになるのである．（したがって，全体システムは正規形で記述できる．）　以上の考察をもとに，（8.39）と（8.40）に大域的陰関数定理を適用して，U(t)とY(t)が（8.36）と（8.37）の形に解けるための条件を求めると，次の定理が得られる．

〔定理8.3〕　すべてのX，U，tについて

$$\text{(i)}\quad \det\left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right) \quad \left(=\det\left(I - \frac{\partial g}{\partial U}F\right)\right) \neq 0 \qquad (8.41)^{*}$$

かつ，すべてのX，V，tについて

$$\text{(ii)}\quad \lim_{\|U\|\to\infty} \|U - Fg(X, U, t) - GV\| = \infty \qquad (8.42)$$

または，

$$\text{(ii)}'\quad \lim_{\|Y\|\to\infty} \|Y - g(X, FY + GV, t)\| = \infty \qquad (8.43)$$

が成立すれば，（7.2）と（7.8）で表わせる非線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる．すなわち，

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \tilde{f}(X(t), V(t), t) \\ W(t) &= \tilde{g}(X(t), V(t), t) \end{aligned} \qquad (8.44)$$

の形に記述できる．

（注8.4）　この定理で非線形大規模システムが一意解をもつとは，任意の初期時刻と初期状態および（連続な）入力に対して初期時刻の近傍で一意解をもつという意味であって，全時間上での一意解の存在を意味しているのではない．

脚注＊

簡単のため，$\frac{\partial}{\partial U}g(X, U, t)$を$\frac{\partial g}{\partial U}$と書く．

この定理の証明のために，大域的陰関数定理を与えておこう．

〔補題 8.3〕　$v(\cdot, \cdot, \cdot)$を$R^n \times R^k \times R^\ell$ からR^nへの，最初の$(n+k)$変数に関して連続微分可能かつ残りのℓ変数に関して連続な関数として，方程式$v(x, y, z)=0$を考えよう．もし，おのおのの$y \in R^k$，$Z \in R^\ell$ごとに$v(\cdot, y, z)$がR^nからR^nへの関数として微分同相，すなわち，その連続微分可能な逆関数が存在すれば，すべてのy，zについて$v(w(y, z), y, z)=0$，すなわち，$x=w(y, z)$が成立するような$R^k \times R^\ell$からR^nへの関数$w(\cdot, \cdot)$が一意的に存在する．そして，この関数は最初のk変数に関して連続微分可能，残りのℓ変数に関して連続である．

（証明）　方程式$v(x, y, z)=u$を考える．$v(\cdot, y, z)$は微分同相であるから，すべてのx，y，zについて$\det \partial v/\partial x \neq 0$*，　かつ，各$y$，$z$ごとに逆関数$\tilde{w}(\cdot)$が一意的に存在する[82]．すなわち，$x=\tilde{w}(u)$．当然，$\tilde{w}(\cdot)$は$y$，$z$に依存しているので，これは$x=\hat{w}(u, y, z)$となるような$R^n \times R^k \times R^\ell$から$R^n$への関数$\hat{w}(\cdot, \cdot, \cdot)$が存在することを意味している．ここで，$u=0$とおき，$\hat{w}(0, y, z)$を$w(y, z)$と書くことにすると，$v(w(y, z), y, z)=0$が成立する．すなわち，すべての$y$，$z$に対して，方程式$v(x, y, z)=0$は$x$について一意解をもち，$x=w(y, z)$と表わせる．ところで，すべての$x$，$y$，$z$について$\det \partial v/\partial x \neq 0$であるから，局所的陰関数定理[83]により，すべてのy，zの近傍で$v(\bar{w}(y, z), y, z)=0$を満たすような$R^k \times R^\ell$からR^nへの関数$\bar{w}(\cdot, \cdot)$が一意的に存在する．したがって，$w(\cdot, \cdot)$は$\bar{w}(\cdot, \cdot)$を連結したものにほかならない．この$\bar{w}(\cdot, \cdot)$は最初のk変数に関して連続微分可能，かつ残りのℓ変数に関して連続で[83]，微分可能性や連続性は局所的な性質だから，$w(\cdot, \cdot)$も同様の性質をもつ．　（証明終）

この補題では，ある逆関数の存在が陰関数の存在を意味している．逆関数が存在するための条件は種々得られているので，この補題を用いると，それらに応じて陰関数が存在するための条件が得られ，したがって，全体システムが一意解をもち，正規形状態方程式で記述できるための条件が得られる．定理 8.3

脚注＊

簡単のため，$\dfrac{\partial}{\partial x} v(x, y, z)$を$\dfrac{\partial v}{\partial x}$と書く．

は次に述べるPalais[84]の大域的逆関数定理によっている.

〔補題8.4〕[84] $v(\cdot)$をR^nからR^nへの連続微分可能な関数とする. このとき, すべての$x \in R^n$について

$$\text{(i)} \quad \det \frac{\partial v(x)}{\partial x} \neq 0$$

かつ,

$$\text{(ii)} \quad \lim_{\|x\| \to \infty} \|v(x)\| = \infty$$

ならば, $v(\cdot)$は微分同相である.

(定理8.3の証明) 定理の前に述べたように, (8.39)が$U(t)$について(8.36)の形に解けることか, (8.40)が$Y(t)$について(8.37)の形に解けることを示せば十分であろう. まず, Palaisの大域的逆関数定理(補題8.4)によると, この定理の条件(i)と(ii)は, $U-Fg(X, U, t)-GV$をUの関数と見なしたとき, その逆関数が存在することを保証している. したがって, 大域的陰関数定理(補題8.3)により, 方程式$U-Fg(X, U, t)-GV=0$はUについて$U=\tilde{h}(X, V, t)$の形に解ける. これは(8.39)が$U(t)$について(8.36)の形に解けることを意味している. 同様に, この定理の条件(i)と(ii)′は(8.40)が$Y(t)$について(8.37)の形に解けることを保証している.

(証明終)

以上で定理8.3は証明されたが, この定理の条件(ii)と(ii)′は実際問題には適用しにくい形をしている. そこで, Rheinboldt[85]やOhtsuki, Watanabe[66]によって得られている大域的逆関数定理を用いてもう少し使いやすい条件を求めておこう. RheinboldtやOhtsuki, Watanabeの大域的逆関数定理は次の通りである.

〔補題8.5〕[85] $v(\cdot)$をR^nからR^nへの連続微分可能な関数とする. このとき, すべての$x \in R^n$について

$$\text{(i)} \quad \det \frac{\partial v(x)}{\partial x} \neq 0$$

が成立し，かつ，すべての $x \in R^n$ について

$$(\text{iii}) \quad \left\| \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^{-1} \right\| \leqq \alpha \| x \| + \beta$$

が成立するような正数 α，β が存在すれば，$v(\cdot)$ は微分同相である．

〔補題 8.6〕 [66] $v(\cdot)$ を R^n から R^n への連続微分可能な関数とする．このとき，すべての $x \in R^n$ について

$$(\text{IV}) \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x} \geqq \varepsilon I \quad *$$

または

$$(\text{V}) \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x} \leqq -\varepsilon I \quad *$$

が成立するような正数 ε が存在すれば，$v(\cdot)$ は微分同相である．

（注 8.5） マトリクス M と定数 ε について，$M \geqq \varepsilon I$ や $M \leqq \varepsilon I$ が成立することは，それぞれ

$$\frac{1}{2} \lambda \min (M + M') \geqq \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} \lambda \max (M + M') \leqq \varepsilon$$

が成立することと等価である．

これらの大域的逆関数定理を大域的陰関数定理（補題 8.3）とともに（8.39）と（8.40）に適用すると，補題 8.5 と 8.6 に応じて，次の 2 つの系が得られる．

〔系 8.2〕 すべての X，U，t について

脚注＊ 非対象（正方）マトリクス M についても，ある定数 ε に対して，すべての x について $x'Mx \geqq \varepsilon x'x$（$x'Mx \leqq \varepsilon x'x$）が成立することを，$M \geqq \varepsilon I$（$M \leqq \varepsilon I$）と書くことにする．

$$\text{(i)} \quad \det\left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right) \quad \left(= \det\left(I - \frac{\partial g}{\partial U}F\right)\right) \neq 0 \tag{8.41}$$

が成立し，かつ，任意のX，tに対して，すべてのUについて

$$\text{(iii)} \quad \left\| \left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1} \right\| \leqq \alpha \| U \| + \beta \tag{8.45}$$

または

$$\text{(iii)}' \quad \left\| \left(I - \frac{\partial g}{\partial U}F\right)^{-1} \right\| \leqq \alpha \| U \| + \beta \tag{8.46}$$

が成立するような正数α，βが存在すれば，（7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる．

〔系8.3〕　任意のX，tに対して，すべてのUについて

$$\text{(iv)} \quad I - F\frac{\partial g}{\partial U} \geqq \varepsilon I \tag{8.47}$$

$$\text{(iv)}' \quad I - \frac{\partial g}{\partial U}F \geqq \varepsilon I \tag{8.48}$$

$$\text{(v)} \quad I - F\frac{\partial g}{\partial U} \leqq -\varepsilon I \tag{8.49}$$

$$\text{(v)}' \quad I - \frac{\partial g}{\partial U}F \leqq -\varepsilon I \tag{8.50}$$

のうちのどれか1つでも成立するような正数εが存在すれば，（7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる．

ここで，非線形大規模システムの特別な場合として，サブシステムの出力が

$$y_i(t) = g_i(x_i(t), t) + D_i(t)\, u_i(t) \tag{8.51}$$

の形に記述できる場合を考えよう．ここに，$g_i(\cdot, \cdot)$は$R^{n_i} \times R$からR^{m_i}へ

の，最初の n_i 変数に関して連続微分可能かつ残りの1変数に関して連続な関数とし，$D_i(\cdot)$は $m_i \times r_i$ マトリクスで，その要素は連続とする。サブシステムの出力をまとめて表わすと

$$Y(t) = g(X(t),\ t) + D(t)U(t) \qquad (8.52)$$

$$g(X(t),\ t) \triangleq \begin{bmatrix} g_1(x_1(t),\ t) \\ g_2(x_2(t),\ t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_N(x_N(t),\ t) \end{bmatrix}, \quad D(t) \triangleq \begin{bmatrix} D_1(t) & & & O \\ & D_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & D_N(t) \end{bmatrix}$$

と書けるから，定理8.3の条件(i)と(ii)はそれぞれ

$$\text{(i)}' \quad \det(I - FD(t)) \quad (= \det(I - D(t)F)) \neq 0 \qquad (8.53)$$

$$\text{(ii)}'' \quad \lim_{\|U\| \to \infty} \|(I - FD(t))U - Fg(X, t) - GV\| = \infty \qquad (8.54)$$

という条件になる。ところが，$I - FD(t)$が正則ならば

$$\|(I - FD(t))U - Fg(X,\ t) - GV\|$$

$$\geqq \|(I - FD(t))U\| - \|Fg(X,\ t) + GV\|$$

$$\geqq \|(I - FD(t))^{-1}\|^{-1}\|U\| - \|Fg(X,\ t) + GV\|$$

であるから，条件(i)′が成立すれば条件(ii)′はつねに成立する。以上より，次の系が得られる。

〔系8.4〕 すべてのtで

$$\text{(i)}' \quad \det(I - FD(t)) \quad (= \det(I - D(t)F)) \neq 0 \qquad (8.53)$$

が成立するならば，(7.2a)，(8.52)，(7.8)で表わされる非線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる。

（注8.6） 証明は省略するが，線形大規模システムに対する定理8.1と同様，

この系の逆は成立する。

以上の定理8.3，系8.2，8.3，8.4はすべて（7.2b）と（7.8a）を合わせた連立方程式がU(t)とY(t)について解けるための条件を大域的陰関数定理を使って求めることによっている。それに対して，次に述べる系8.5は，線形大規模システムに対する系8.1と同様に，ブールマトリクスを使って接続関係を表わす考え方から得られる。いま，線形サブシステムの場合と同様，非線形サブシステムに対してブールマトリクスを

$$\tilde{D}^* = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11}^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{22}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{d}_{NN}^* \end{bmatrix} \qquad (8.55)$$

$$\tilde{d}_{ii}^* \triangleq \begin{cases} 1 : S_i \text{ に直結経路があるとき，すなわち，出力が} \\ \quad y_i(t) = g_i(x_i(t), t) \text{ の形では表わせないとき.} \\ 0 : S_i \text{ に直結経路がないとき，すなわち，出力が} \\ \quad y_i(t) = g_i(x_i(t), t) \text{ の形に表わせるとき.} \end{cases}$$

で定義しよう。サブシステム間の接続関係は（8.14）で定義したブールマトリクスF^*を用いて表わす。このとき，次の系が成立する。

〔系8.5〕

$$(\tilde{D}^* F^*)^N = 0 \qquad (8.56)$$

または

$$(F^* \tilde{D}^*)^N = 0 \qquad (8.57)$$

ならば，（7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムは一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる。

（証明）　注8.3で述べたように，$(\tilde{D}^* F^*)^N = 0$と$(F^* \tilde{D}^*)^N = 0$は等価だから，ここでは$(F^* \tilde{D}^*)^N = 0$の場合を証明しよう。この条件が成立するとき，対象としているシステムが静的なサイクルをもたないことは，線形の場合と同様である。もっと具体的に言えば，任意のサブシステムの入力から，サブシステムどうしを結ぶ矢印と直結経路をもつサブシステムだけを逆方向に

たどると，必ず直結経路をもたないサブシステムの出力または全体システムの入力に到達し，それ以外にはない。このことを数式の上で述べれば，（8.39）を変形した

$$U(t) = Fg(X(t), U(t), t) + GV(t) \qquad (8.58)$$

の右辺にそれ自身を（N－1）回代入して得られる

$$U(t) = \overbrace{Fg(X(t), Fg(X(t), \cdots, Fg(X(t), Fg(X(t), U(t), t)}^{N}$$
$$\underbrace{+GV(t), t) + \cdots + GV(t), t) + GV(t), t) + GV(t)}_{N} \qquad (8.59)$$

の右辺はもはやU（t）の関数ではないということである。しかも，この右辺の関数は，その形からわかるように，X（t）とV（t）に関して連続微分可能かつtに関して連続である。このように，（8.57）の条件が成立するとき，任意のX（t），V（t），tに対して，（8.39）はU（t）について（8.36）の形に一意的に解ける。したがって，上で述べたように，全体システムは一意解をもち，X(·)を状態として正規形状態方程式で記述できる。　　（証明終）

系8.5の条件を満たすような非線形大規模システムの具体的な例としては，線形大規模システムの場合と同様，すべてのサブシステムに直結経路がないような大規模システム，サブシステム間に接続がないような大規模システム，接続関係が一方向干渉システムの構造になっている大規模システムなどがある。

8.3.2　リプシッツ条件

これまでは非線形大規模システムが一意解をもち，正規形状態方程式で記述できるための条件を求めてきた。ところで，正規形状態方程式は状態変数に関して局所的リプシッツ条件を満たしているだけだから，上で得られた条件は初期時刻の近傍での一意解の存在を保証しているだけで，初期時刻以降の全時間上での解の存在は保証していない。つまり，解は有限時間で発散してしまうかも知れないのである。そこで，以下では，全時間上での一意解の存在を保証す

る大域的リプシッツ条件が，状態変数に関して，全体システムを記述する正規形状態方程式の微分方程式において成立するための条件を求める。次の3つの例が示すように，各サブシステムを表わす正規形の微分方程式が状態変数に関して（例8.7では，正規形全体が状態変数と入力変数に関して）大域的リプシッツ条件を満たしていても，全体システムの正規形がこの条件を満たすとは限らない。すなわち，大域的リプシッツ条件についても，正規形や標準形状態方程式表現についてと同様，サブシステムの特性が全体システムに保存されるとは限らないのである。

〔例8.5〕　正規形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.5のフィードバックシステムを考えよう。このシステムにおいて，ブールマトリクス $\widetilde{D}^*$，F^* はそれぞれ

$$\widetilde{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

だから

$$(\widetilde{D}^* F^*)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。したがって，系8.5により，このシステムは一意解をもち，正規形状態方程式で記述できる。そして，その正規形は，簡単な計算により，次のよう

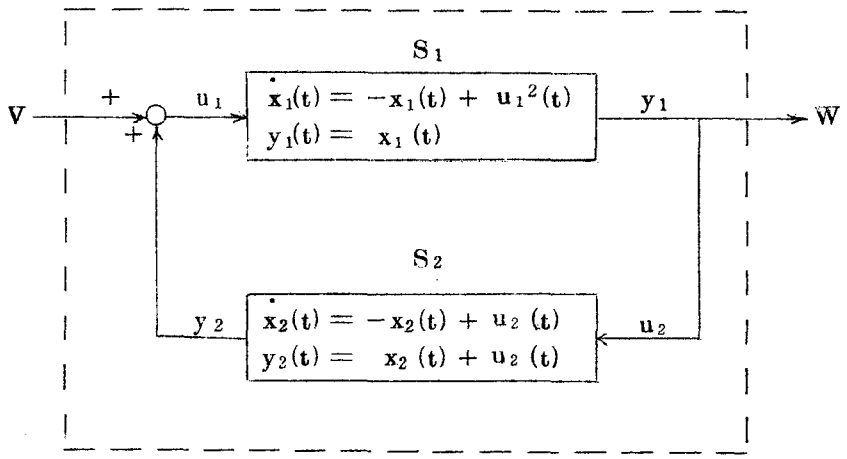


図8.5　大域的リプシッツ条件を満たさないシステム(1)

に得られる。

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + (x_1(t) + x_2(t) + V(t))^2$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) \qquad (8.60)$$

$$W(t) = x_1(t)$$

これは明らかに $x_1(t)$ に関して大域的リプシッツ条件を満たしていない。

〔例8.6〕 正規形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.6のフィードバックシステムを考えよう。このシステムが一意解をもち，正規形状態方程式で記述できることは，例8.5と同様，系8.5を用いて示すことができる。その正規形は

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_1^2(t) + x_2(t) + V(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - x_2(t) \qquad (8.61)$$

$$W(t) = x_1^2(t)$$

であるが，これは $x_1(t)$ に関して大域的リプシッツ条件を満たしていない。

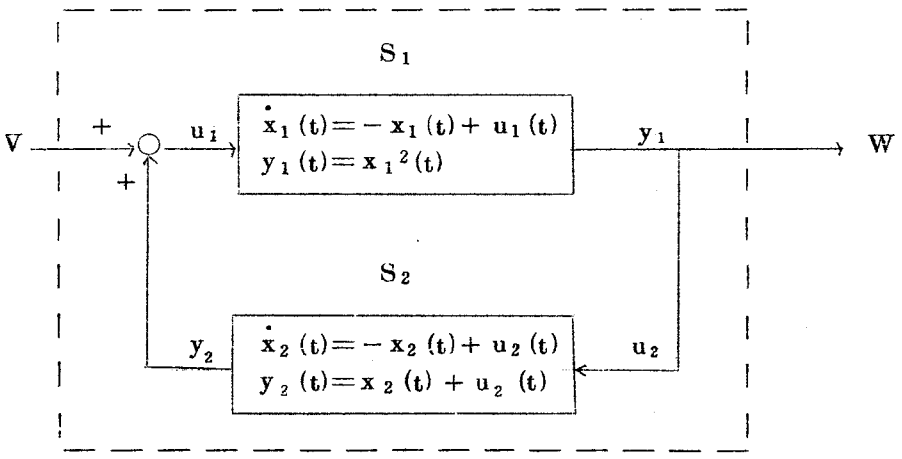


図8.6　大域的リプシッツ条件を満たさないシステム(2)

以上の2つの例では，S_1 の入力または出力に（大域的リプシッツ条件を満たさない）2次関数特性が存在するために，全体システムを表わす正規形が大域

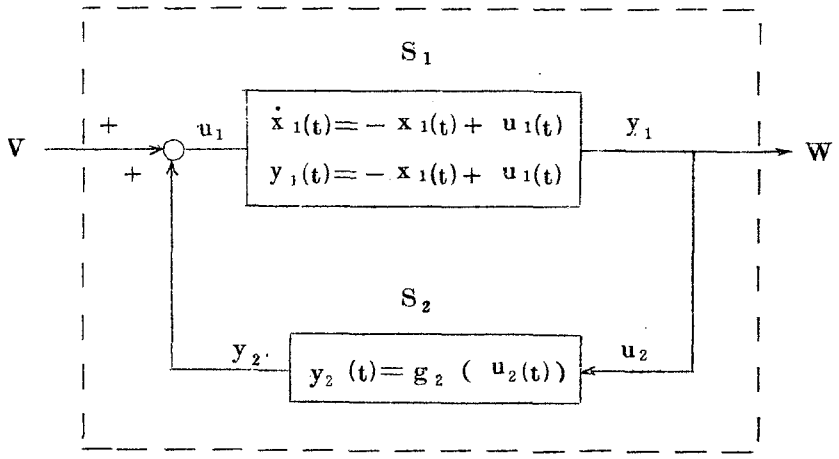
的リプシッツ条件を満たさなくなっている。次の例では，サブシステムを表わすすべての関数が（すべての変数に関して）大域的リプシッツ条件を満たしているにもかかわらず，全体システムを表わす正規形はその条件を満たさない。

〔例8.7〕　正規形で表わされた2つのスカラ・システムから成る図8.7のフィードバックシステムを考えよう。サブシステムS_1は線形時間不変システムであるから，それを表わす状態方程式は大域的リプシッツ条件を満たしている。また，サブシステムS_2（増幅器）の特性を表わす$g_2(\cdot)$は連続微分可能で，すべての$\tilde{u}_2$，$\hat{u}_2$について

$$|g_2(\tilde{u}_2) - g_2(\hat{u}_2)| \leq 1.5\,|\tilde{u}_2 - \hat{u}_2| \qquad (8.62)$$

を満たすから，やはり大域的リプシッツ条件を満たしている。さて，このシステムが一意解をもち，正規形状態方程式で記述できることは，

$$\det\left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\partial g_2}{\partial u_2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$g_2(u_2) \triangleq \begin{cases} u_2 + \sqrt{u_2} - 0.5, & 1 \leq u_2 \\ 1.5\,u_2, & -1 < u_2 < 1 \\ u_2 - \sqrt{-u_2} + 0.5, & u_2 \leq -1 \end{cases}$$

図8.7　大域的リプシッツ条件を満たさないシステム(3)

$$= 1 - \frac{\partial g_2}{\partial u_2}$$

$$= \begin{cases} -0.5 \quad u_2^{-\frac{1}{2}}, & 1 \leqq u_2 \\ -0.5, & -1 < u_2 < 1 \\ -0.5 \ (-u_2)^{-\frac{1}{2}}, & u_2 \leqq -1 \end{cases}$$

$$\neq 0 \qquad (8.63)$$

で，かつ，ℓ_1 ノルムに関して

$$\left\| \left(I - F \frac{\partial g}{\partial U} \right)^{-1} \right\| \leqq \left| 1 - \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right|^{-1} \left\| \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|$$

$$\leqq (2 + 2 \, | u_2 |) \times 2.5$$

$$\leqq 5 + 5 \, \| U \| \qquad (8.64)$$

が成立するので，系8.2により，保証されている。そして，その正規形は簡単な計算によって次のように求まる。

$$\dot{x}_1(t) = \begin{cases} -(x_1(t) - V(t) - 0.5)^2, & x_1(t) - V(t) \leqq -0.5 \\ 2x_1(t) - 2V(t), & -0.5 < x_1(t) - V(t) < 0.5 \\ (x_1(t) - V(t) - 0.5)^2, & 0.5 \leqq x_1(t) - V(t) \end{cases}$$

$$(8.65)$$

$$W(t) = \begin{cases} -(x_1(t) - V(t) - 0.5)^2, & x_1(t) - V(t) \leqq -0.5 \\ 2x_1(t) - 2V(t), & -0.5 < x_1(t) - V(t) < 0.5 \\ (x_1(t) - V(t) + 0.5)^2, & 0.5 \leqq x_1(t) - V(t) \end{cases}$$

これは，明らかに，$x_1(t)$ に関して大域的リプシッツ条件を満たしていない。そして，この正規形の $x_1(0) = 2$，$V(t) \equiv 0.5$ に対する解

$$x_1(t)=\frac{2}{1-2t}$$
$$W(t)=\frac{4}{(1-2t)^2} \qquad (8.66)$$

が $t \to 0.5$ で発散するように，図8.7のシステムの解は全時間上では存在しない。

非線形大規模システムが正規形状態方程式で記述できる場合，その正規形が大域的リプシッツ条件を満たすための条件は次の定理で与えられる。

〔定理8.4〕 (7.2)と(7.8)で表わされる非線形大規模システムが定理8.3の条件を満たしているとしよう。このとき，すべての X，U，t について

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial U}\left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1} F\frac{\partial g}{\partial X} \right\| \leqq C_1(t) \qquad (8.67)^*$$

が成立するような連続関数 $C_1(\cdot)$ が存在するならば，全体システムを記述する正規形状態方程式

$$\dot{X}(t)=\tilde{f}(X(t),\ V(t),\ t)$$
$$W(t)=\tilde{g}(X(t),\ V(t),\ t) \qquad (8.44)$$

において，$\tilde{f}(\cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ はすべての X_1，X_2，V，t について

$$\|\tilde{f}(X_2,\ V,\ t)-\tilde{f}(X_1,\ V,\ t)\| \leqq C_1(t)\|X_2-X_1\| \qquad (8.68)$$

を満たす。したがって，このシステムは全時間上で一意解をもつ。

（証明） 定理8.3の条件が満たされているとき，全体システムを表わす正規形状態方程式は(8.38)のように書けるので

脚注 *

簡単のため，$\frac{\partial}{\partial X}f(X,\ U,\ t)$ を $\frac{\partial f}{\partial X}$ と，$\frac{\partial}{\partial U}f(X,\ U,\ t)$ を $\frac{\partial f}{\partial U}$ と，$\frac{\partial}{\partial X}g(X,U,t)$ を $\frac{\partial g}{\partial X}$ と書く。

$$\tilde{f}(X, V, t) = f(X, \tilde{h}(X, V, t), t)$$

である。これより，次の関係が成立する。

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial U} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial X} \qquad (8.69)^*$$

そして，$\tilde{h}(\cdot, \cdot, \cdot)$ が，(8.36) と (8.39) より，

$$\tilde{h}(X, V, t) - Fg(X, \tilde{h}(X, V, t), t) - GV = 0$$

を満たすことに注意すると

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial X} = \left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1} F \frac{\partial g}{\partial X} \qquad (8.70)$$

であるから，結局，$\partial \tilde{f} / \partial X$ は

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial U}\left(I - F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1} F \frac{\partial g}{\partial X} \qquad (8.71)$$

と表わせる。したがって，仮定により，すべての X，V，t について

$$\left\| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial X} \right\| \leqq C_1(t) \qquad (8.72)$$

が成立する。ところで，平均値の定理[86]によると

$$\| \tilde{f}(X_2, V, t) - \tilde{f}(X_1, V, t) \|$$

$$\leqq \| X_2 - X_1 \| \sup_{0 \leqq \xi \leqq 1} \left\| \frac{\partial}{\partial X} \tilde{f}(\xi X_1 + (1-\xi) X_2, V, t) \right\| \qquad (8.73)$$

であるから，(8.72) が成立することは，すべての X_1，X_2，V，t について

脚注 *

$\frac{\partial}{\partial X}\tilde{f}(X, V, t)$ を $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}$ と，$\frac{\partial}{\partial X}\tilde{h}(X, V, t)$ を $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial X}$ と書く。

(8.68)が成立することを意味している。　　(証明終)

この定理では，サブシステムを表わす正規形状態方程式に何も制限を設けていない。すなわち，非線形大規模システムを構成する各サブシステムが大域的リプシッツ条件を満たす正規形で表わされているとは仮定していない。それに対して，以下では，サブシステムの特性が大域的リプシッツ条件を満たす関数で表わされている場合について考えよう。まず，サブシステムを表わす正規形に関して，次のL1～L3を仮定する。

L1：　すべてのX_1，X_2，U，tについて

$$\| f(X_2, U, t) - f(X_1, U, t) \| \leqq k_1(t) \| X_2 - X_1 \| \quad (8.74)$$

を満たす連続関数$k_1(\cdot)$が存在する。

L2：　すべてのX，U_1，U_2，tについて

$$\| f(X, U_2, t) - f(X, U_1, t) \| \leqq k_2(t) \| U_2 - U_1 \| \quad (8.75)$$

を満たす連続関数$k_2(\cdot)$が存在する。

L3：　すべてのX_1，X_2，U，tについて

$$\| g(X_2, U, t) - g(X_1, U, t) \| \leqq k_3(t) \| X_2 - X_1 \| \quad (8.76)$$

を満たす連続関数$k_3(\cdot)$が存在する。

これらの仮定は，各サブシステムを表わす正規形ごとに，同様の条件が満たされていることを意味している。このようなサブシステムから成る非線形大規模システムについて，次の2つの系が成立する。

〔系8.6〕　(7.2)と(7.8)で表わされる非線形大規模システムにおいてL1～L3を仮定しよう。このとき，定理8.3の条件が成立し，かつ，すべてのX，U，tについて

$$\| (I - F\frac{\partial g}{\partial U})^{-1} F \| \left(= \| F (I - \frac{\partial g}{\partial U} F)^{-1} \| \right) \leqq C_2(t) \quad (8.77)$$

を満たすような連続関数$C_2(\cdot)$が存在するならば，全体システムを記述する正規形状態方程式(8.44)において

$$\| \tilde{f}(X_2, V, t) - \tilde{f}(X_1, V, t) \| \leqq C_3(t) \| X_2 - X_1 \| \qquad (8.78)$$

がすべてのX_1，X_2，V，tについて成立するような連続関数$C_3(\cdot)$が存在し，このシステムは全時間上で一意解をもつ。

（証明）　$\partial f / \partial X$の第1列を考えよう。Xの第1番目の要素をx_{11}と書くことにすると，これは$\partial f / \partial x_{11}$である*。そして，$f(\cdot, \cdot, \cdot)$が最初の変数に関して連続微分可能だから，

$$\frac{\partial}{\partial x_{11}} f(X, U, t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left(f(X+\Delta, U, t) - f(X, U, t) \right)$$

$$\Delta = \delta \left. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \tilde{n}$$

と表わせる。ところで，仮定L 1によると，一般に

$$\| f(X+\Delta, U, t) - f(X, U, t) \| \leqq k_1(t) \| \Delta \| = \delta k_1(t)$$

が成立する。ゆえに，$\partial f / \partial x_{11}$のノルムは次の不等式を満たす。

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_{11}} f(X, U, t) \right\| \leqq k_1(t)$$

$\partial f / \partial X$の他の列についても，同様にして，同じ不等式が得られるので，結局，すべてのX，U，tについて

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X} \right\| \leqq \tilde{n} k_1(t) \qquad (8.79)$$

が成立する。同様に，仮定L 2とL 3により，$\partial f / \partial U$と$\partial g / \partial X$につい

脚注 *

簡単のため，$\dfrac{\partial}{\partial x_{11}} f(X, U, t)$を$\dfrac{\partial f}{\partial x_{11}}$と書く。

こも，すべてのX，U，tについて

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial U} \right\| \leqq \tilde{n} \quad k_2(t) \tag{8.80}$$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial X} \right\| \leqq \tilde{n} \quad k_3(t) \tag{8.81}$$

が成立する。これらと（8.77）より，不等式

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial U} \left(I - F \frac{\partial g}{\partial U} \right)^{-1} F \frac{\partial g}{\partial X} \right\| \leqq \tilde{n} k_1(t) + \tilde{n}^2 C_2(t) k_2(t) k_3(t) \tag{8.82}$$

が得られるので，定理8.4により，この系は証明された。　（証明終）

〔系8.7〕　（7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムにおいてL1～L3を仮定しよう。このとき，

$$I - F \frac{\partial g}{\partial U} \geqq \varepsilon(t) I \tag{8.83}$$

$$I - \frac{\partial g}{\partial U} F \geqq \varepsilon(t) I \tag{8.84}$$

$$I - F \frac{\partial g}{\partial U} \leqq -\varepsilon(t) I \tag{8.85}$$

$$I - \frac{\partial g}{\partial U} F \leqq -\varepsilon(t) I \tag{8.86}$$

のうちのどれか1つでもすべてのX，U，tについて成立するような正値連続関数$\varepsilon(\cdot)$が存在すれば，全体システムを記述する正規形状態方程式（8.44）において（8.78）が成立し，このシステムは全時間上で一意解をもつ。

（証明）　まず，（8.83）がすべてのX，U，tについて成立する場合を考えよう。系8.3により，このシステムが初期時刻の近傍で一意解をもち，正規形状態方程式で記述できることは保証されている。いま，$\varepsilon(\cdot)$は正値関数だから，$I - F(\partial g / \partial U)$はつねに正則である。すなわち，$(I - F(\partial g / \partial U))^{-1}$が存在する。ゆえに，（8.83）に左から$u'(I - F(\partial g / \partial U))'^{-1}$を，右から

$(I-F(\partial g/\partial U))^{-1}u$をかけることができ，その結果，

$$u'\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)'^{-1}u \geqq \varepsilon(t)u'\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)'^{-1}\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}u$$

が成立する。ただし，uは任意の$\tilde{r}$次元ベクトルである。この両辺のℓ_2ノルムを考えると，次の不等式が得られる。

$$\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}u\right\|\,\|u\| \geqq \varepsilon(t)\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}u\right\|^2 \qquad (8.87)$$

これより，

$$\frac{\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}u\right\|}{\|u\|} \leqq \frac{1}{\varepsilon(t)}$$

であるから，結局，

$$\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}\right\| = \sup_{\|u\|}\frac{\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}u\right\|}{\|u\|} \leqq \frac{1}{\varepsilon(t)} \qquad (8.88)$$

が成立する。したがって，すべてのX，U，tについて

$$\left\|\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)^{-1}F\right\| \leqq \frac{1}{\varepsilon(t)}\|F\|$$

が成立し，系8.6により，この系は証明された。（8.84）が成立している場合も同様に証明できる。また，（8.85）や（8.86）が成立している場合には，それらと等価な

$$-\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right) \geqq \varepsilon(t)I \qquad (8.85)'$$

$$-\left(I-\frac{\partial g}{\partial U}F\right) \geqq \varepsilon(t)I \qquad (8.86)'$$

を考えると，まったく同様に証明できる。　　（証明終）

サブシステムを表わす正規形に関して，上で述べたＬ１～Ｌ３とともに，次のＬ４を仮定すると，系8.5の条件と同じブールマトリクスを使った簡単な条件が得られる。

Ｌ４：　すべてのＸ，U_1，U_2，ｔについて

$$\| g(X, U_2, t) - g(X, U_1, t) \| \leqq k_4(t) \| U_2 - U_1 \| \qquad (8.89)$$

を満たす連続関数 $k_4(\cdot)$ が存在する。

〔系8.8〕　（7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムにおいてＬ１～Ｌ４を仮定しよう。このとき，

$$(\tilde{D}^* F^*)^N = 0 \qquad (8.56)$$

または

$$(F^* \tilde{D}^*)^N = 0 \qquad (8.57)$$

ならば，全体システムを記述する正規形状態方程式（8.44）において（8.78）が成立し，このシステムは全時間上で一意解をもつ。

（証明）　系8.5の証明で述べたように，（8.56）または（8.57）が成立するとき，全体システムは正規形状態方程式で記述でき，その微分方程式は（7.2a）に（8.59）を代入して得られる。すなわち，$\tilde{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ に $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ を有限回代入した形をしている。したがって，仮定Ｌ１～Ｌ４により，直ちに結論が得られる。　　（証明終）

8.4　非線形大規模システムの線形化

すでに諸論で述べたように，制御理論等で線形システムとしてわれわれが取り扱うシステムには，もともと非線形システムであるものをある解のまわりで線形化して得られるものが多い。8.2で考えたような線形大規模システムを構成するサブシステムについても同様である。ところで，サブシステムがこのよ

うな線形化システムである場合，それらが結合して構成される線形大規模システムは，もとの非線形サブシステムから成る非線形大規模システムの線形化システムになっているのであろうか。もし，そうならば，非線形大規模システムを線形化する場合，サブシステムごとに線形化を行ない，得られた線形化サブシステムをもとの非線形サブシステムと置き換えることによって，全体の線形化システムを得ることができる。この方法によれば，全体システムの線形化式を求めるためには，それを表わす正規形状態方程式を求める必要がない。一般に，全体システムを記述する正規形を求めることは非常な困難をともなうので，全体システムを表わす正規形からその線形化式を求めることは不可能に近く，したがって，この方法が正しければ，有効である。実際，非線形大規模システムの線形化は，理論的裏付けのないまま，実用上，この方法によって行なわれている。しかし，理論的には，8.3で述べたように，一般に全体システムが正規形で記述できるとは限らず，全体システムの線形化式が存在するとは限らないので，サブシステムごとの線形化によって得られる線形大規模システムを直ちにもとの非線形大規模システムの線形化システムであるとすることはできない。以下では，線形化サブシステムから成る線形大規模システムは，どのような条件を満たしているとき，もとの非線形大規模システムの線形化システムであると言えるのかという問題を考える。ここでは，もとの非線形大規模システムが正規形状態方程式で記述できるのか，できないのか，などはわかっていないものとする。

いま，非線形大規模システム

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \qquad (7.2a)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \qquad (7.2b)$$

$$U(t) = FY(t)+GV(t) \qquad (7.8a)$$

$$W(t) = JY(t)+LV(t) \qquad (7.8b)$$

が初期条件$X(t_0)=\hat{X}_0$と入力$V(t)=V_0(t)$，$t \geqq t_0$に対して，解$X(t)=X_0(t)$，$U(t)=U_0(t)$，$Y(t)=Y_0(t)$，$W(t)=W_0(t)$，$t \geqq t_0$をもったとする。すなわち，

$$\dot{X}_0(t) = f\ (X_0(t),\ U_0(t),\ t\ ) \qquad (8.90a)$$

$$Y_0(t) = g\ (X_0(t),\ U_0(t),\ t\ ) \qquad (8.90b)$$

$$U_0(t) = F\,Y_0(t) + G\,V_0(t) \qquad (8.91a)$$

$$W_0(t) = J\,Y_0(t) + L\,V_0(t) \qquad (8.91b)$$

とする。各サブシステムをこの解

$$X_0(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_{10}(t) \\ x_{20}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N_0}(t) \end{bmatrix}, \quad U_0(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_{10}(t) \\ u_{20}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{N_0}(t) \end{bmatrix}, \quad Y_0(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_{10}(t) \\ y_{20}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N_0}(t) \end{bmatrix}$$

のまわりで線形化しよう。得られる線形化サブシステムは次の標準形で表わされる。

$$\dot{x}_{id}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_t x_{id}(t) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\right|_t u_{id}(t) \qquad (8.92a)^*$$

$$y_{id}(t) = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right|_t x_{id}(t) + \left.\frac{\partial g_i}{\partial u_i}\right|_t u_{id}(t) \qquad (8.92b)$$

ここに，$x_{id}(t)$，$u_{id}(t)$，$y_{id}(t)$ はそれぞれ $x_i(t)$，$u_i(t)$，$y_i(t)$ の

脚注＊ $\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_t$，$\left.\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\right|_t$，$\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right|_t$，$\left.\frac{\partial g_i}{\partial u_i}\right|_t$

はそれぞれ $x_i = x_{i0}(t)$，$u_i = u_{i0}(t)$，$t = t$ における

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_i\ (x_i,\ u_i,\ t\ )\ ,\ \frac{\partial}{\partial u_i} f_i\ (x_i,\ u_i,\ t\ )\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_i\ (x_i,\ u_i,\ t\ )\ ,\ \frac{\partial}{\partial u_i} g_i\ (x_i,\ u_i,\ t\ )$$

を表わす。

$x_{i0}(t)$, $u_{i0}(t)$, $y_{i0}(t)$ からの変化量を表わす。すなわち,

$$x_{id}(t) \triangleq x_i(t) - x_{i0}(t)$$

$$u_{id}(t) \triangleq u_i(t) - u_{i0}(t)$$

$$y_{id}(t) \triangleq y_i(t) - y_{i0}(t)$$

である。

さて，もとの非線形サブシステムをこれらの線形化サブシステムで置き換えて得られる線形大規模システムを考えよう。各サブシステムを表わす標準形をまとめると，次のように書ける。

$$\dot{X}_d(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t X_d(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t U_d(t) \qquad (8.93a)^*$$

$$Y_d(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t X_d(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t U_d(t) \qquad (8.93b)$$

ここに,

$$X_d(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{Nd}(t) \end{bmatrix}, \quad U_d(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_{1d}(t) \\ u_{2d}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{Nd}(t) \end{bmatrix}, \quad Y_d(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_{1d}(t) \\ y_{2d}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{Nd}(t) \end{bmatrix}$$

脚注＊ $\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t, \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t, \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t, \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t$

はそれぞれ $X = X_0(t)$, $U = U_0(t)$, $t = t$ における

$$\frac{\partial}{\partial X} f(X, U, t), \quad \frac{\partial}{\partial U} f(X, U, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial X} g(X, U, t), \quad \frac{\partial}{\partial U} g(X, U, t)$$

を表わす。

なぜなら，f（・，・，・）とg（・，・，・）の定義より，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t = \mathrm{diag.}\left\{\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_t, \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_t, \cdots, \left.\frac{\partial f_N}{\partial x_N}\right|_t\right\}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t = \mathrm{diag.}\left\{\left.\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right|_t, \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right|_t, \cdots, \left.\frac{\partial f_N}{\partial u_N}\right|_t\right\}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t = \mathrm{diag.}\left\{\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_t, \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_t, \cdots, \left.\frac{\partial g_N}{\partial x_N}\right|_t\right\}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t = \mathrm{diag.}\left\{\left.\frac{\partial g_1}{\partial u_1}\right|_t, \left.\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right|_t, \cdots, \left.\frac{\partial g_N}{\partial u_N}\right|_t\right\}$$

であるからである。一方，この線形大規模システムでは，その構成の仕方から明らかなように，サブシステムの外部の接続関係はもとの非線形大規模システムと同一である。したがって，全体システムの入力，出力をそれぞれ$V_d(\cdot)$，$W_d(\cdot)$とすれば，それらとサブシステムの入力，出力との関係は

$$U_d(t) = F\,Y_d(t) + G\,V_d(t) \qquad (8.94\,a)$$

$$W_d(t) = J\,Y_d(t) + L\,V_d(t) \qquad (8.94\,b)$$

と表わせる。

それでは，このような（8.93）と（8.94）で表わされる線形大規模システムは，もとの非線形大規模システム（7.2），（7.8）に対してどのような意味をもっているのか調べていこう。いま，この線形大規模システムが一意解をもち，$X_d(\cdot)$を状態として標準形状態方程式で記述できるとする。すると，定理8.1により，すべてのtで

$$\det\left(I - F\left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t\right) \quad \left(= \det\left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F\right)\right) \neq 0 \qquad (8.95)$$

が成立する。ここで，8.3で考えた，（7.8a）に（7.2b）を代入して得られる

$$U(t) - F\,g\,(X(t),\ U(t),\ t) - G\,V(t) = 0 \qquad (8.39)$$

と，（7.2b）に（7.8a）を代入して得られる

$$Y(t)-g\,(X(t),\ FY(t)+GV(t),\ t)=0 \qquad (8.40)$$

をふたたび考えよう。（8.90b）と（8.91a）からわかるように，$X(t)=X_0(t)$，$U(t)=U_0(t)$，$Y(t)=Y_0(t)$，$V(t)=V_0(t)$は（7.2b）と（7.8a）を満たすので，（8.39）と（8.40）はこのような$X(t)$，$U(t)$，$Y(t)$，$V(t)$に対して成立する。すなわち，

$$U_0(t)-Fg\,(X_0(t),\ U_0(t),\ t)-GV_0(t)=0$$

$$Y_0(t)-g\,(X_0(t),\ FY_0(t)+GV_0(t),\ t)=0$$

である。そして，（8.95）より，$X=X_0(t)$，$U=U_0(t)$，$t=t$に対して

$$\det\left(I-F\frac{\partial g}{\partial U}\right)\ \left(=\det\left(I-\frac{\partial g}{\partial U}F\right)\right)\neq 0$$

が成立しているので，陰関数定理[83]により，（8.39）と（8.40）は$X(t)=X_0(t)$，$U(t)=U_0(t)$，$Y(t)=Y_0(t)$，$V(t)=V_0(t)$，$t=t$の近傍で$U(t)$と$Y(t)$について

$$U(t)=\tilde{h}\,(X(t),\ V(t),\ t) \qquad (8.36)$$

$$Y(t)=\hat{h}\,(X(t),\ V(t),\ t) \qquad (8.37)$$

の形に解くことができる。したがって，定理8.3の上で述べたように，非線形大規模システム（7.2），（7.8）は同じ近傍で一意解をもち，正規形状態方程式

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)&=\tilde{f}\,(X(t),\ V(t),\ t)\\ W(t)&=\tilde{g}\,(X(t),\ V(t),\ t)\end{aligned} \qquad (8.44)$$

で記述できる。つまり，線形化サブシステムから成る線形大規模システムが一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できれば，もとの非線形大規模システムは線形化を行なった解の近傍で一意解をもち，やはりサブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記

述できるのである。

ところで，この場合，線形化サブシステムから成る線形大規模システムを記述する標準形状態方程式は，（8.12）より，

$$\dot{X}_d(t) = \left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t \right)^{-1} F \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \right\} X_d(t)$$

$$+ \left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t \right)^{-1} G \right\} V_d(t) \qquad (8.96a)$$

$$W_d(t) = \left\{ J \left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F \right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \right\} X_d(t)$$

$$+ \left\{ J \left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F \right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t G + L \right\} V_d(t) \qquad (8.96b)$$

である。これがもとの非線形大規模システムを（線形化を行なった解の近傍で）記述する正規形状態方程式（8.44）の（その解のまわりでの）線形化式

$$\dot{\tilde{X}}_d(t) = \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\right|_t \tilde{X}_d(t) + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial V}\right|_t \tilde{V}_d(t) \qquad (8.97a)^*$$

$$\tilde{W}_d(t) = \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial X}\right|_t \tilde{X}_d(t) + \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial V}\right|_t \tilde{V}_d(t) \qquad (8.97b)$$

脚注*

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\right|_t, \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial V}\right|_t, \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial X}\right|_t, \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial V}\right|_t$$

はそれぞれ　$X = X_0(t)$，$V = V_0(t)$，$t = t$ における

$$\frac{\partial}{\partial X}\tilde{f}(X, V, t), \quad \frac{\partial}{\partial V}\tilde{f}(X, V, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\tilde{g}(X, V, t), \quad \frac{\partial}{\partial V}\tilde{g}(X, V, t)$$

を表わす。

に一致することを示そう．ここに，$\tilde{X}_d(t)$，$\tilde{V}_d(t)$，$\tilde{W}_d(t)$はそれぞれ$X(t)$，$V(t)$，$W(t)$の$X_0(t)$，$V_0(t)$，$W_0(t)$からの変化量である．

$$\tilde{X}_d(t) \triangleq X(t) - X_0(t)$$

$$\tilde{V}_d(t) \triangleq V(t) - V_0(t)$$

$$\tilde{W}_d(t) \triangleq W(t) - W_0(t)$$

まず，8.3で述べたように，この正規形状態方程式（8.44）は（8.38）のように書けるので，$\tilde{f}(\cdot,\cdot,\cdot)$と$\tilde{g}(\cdot,\cdot,\cdot)$は

$$\tilde{f}(X, V, t) = f(X, \tilde{h}(X, V, t), t)$$

$$\tilde{g}(X, V, t) = J\hat{h}(X, V, t) + L$$

と表わせ，これらの両辺を偏微分することによって，次の関係が成立することがわかる．

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\right|_t = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial X}\right|_t \qquad (8.98)^*$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial V}\right|_t = \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial V}\right|_t \qquad (8.99)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial X}\right|_t = J \left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial X}\right|_t \qquad (8.100)$$

---

* $\left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial X}\right|_t$，$\left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial V}\right|_t$，$\left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial X}\right|_t$，$\left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial V}\right|_t$

はそれぞれ$X = X_0(t)$，$V = V_0(t)$，$t = t$における

$$\frac{\partial}{\partial X}\tilde{h}(X, V, t)\ ,\ \frac{\partial}{\partial V}\tilde{h}(X, V, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\hat{h}(X, V, t)\ ,\ \frac{\partial}{\partial V}\hat{h}(X, V, t)$$

を表わす．

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial V}\right|_t = J \left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial V}\right|_t + L \qquad (8.101)$$

また，（8.36）と（8.39）より，$\tilde{h}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は

$$\tilde{h}(X, V, t) - Fg(X, \tilde{h}(X, V, t), t) - GV = 0$$

を，（8.37）と（8.40）より，$\hat{h}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は

$$\hat{h}(X, V, t) - g(X, F\hat{h}(X, V, t) + GV, t) = 0$$

を $X = X_0(t)$，$V = V_0(t)$ の近傍で満たすので，

$$\left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial X}\right|_t = \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t\right)^{-1} F \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \qquad (8.102)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial V}\right|_t = \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t\right)^{-1} G \qquad (8.103)$$

$$\left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial X}\right|_t = \left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \qquad (8.104)$$

$$\left.\frac{\partial \hat{h}}{\partial V}\right|_t = \left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t G \qquad (8.105)$$

が成立する．これらを（8.98）～（8.101）に代入することによって，（8.97）の係数マトリクスが次のように表わせることがわかる．

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial X}\right|_t = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_t + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t\right)^{-1} F \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \qquad (8.106)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial V}\right|_t = \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_t \left(I - F \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t\right)^{-1} G \qquad (8.107)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial X}\right|_t = J \left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial X}\right|_t \qquad (8.108)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial V}\right|_t = J\left(I - \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t F\right)^{-1} \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_t G + L \qquad (8.109)$$

つまり，もとの非線形大規模システムを表わす正規形の線形化式（8.97）の係数マトリクスは，線形化サブシステムから成る線形大規模システムを記述する標準形（8.96）の係数マトリクスに一致する．したがって，結局，線形化サブシステムから成る線形大規模システムが一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形で記述できれば，もとの非線形大規模システムの線形化システムは存在し，それはこの標準形で記述できるのである．

以上をまとめたのが次の定理である．

〔定理 8.5〕 （7.2）と（7.8）で表わされる非線形大規模システムが1つの解をもったとしよう．各サブシステムをこの解のまわりで線形化して得られるその線形化サブシステムで置き換えた，線形大規模システムを考える．もしこの線形大規模システムが一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できるならば，もとの非線形大規模システムは上の解の近傍で一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として正規形状態方程式で記述できる．そして，その（上述の解のまわりで得られる）線形化式は線形化サブシステムから成る線形大規模システムを記述する標準形状態方程式に一致する．

（注8.7） この定理は，対象とする非線形大規模システムのもつ解が一意的か，そうでないかにかかわらず成立する．また，その解が初期時刻の近傍でのみ存在し，全時間上では存在しない場合には，以上の議論はすべて初期時刻の近傍での議論になる．

（注8.8） この定理によれば，系8.5や8.8のブールマトリクスの条件（8.56），（8.57）を満たす非線形大規模システムでは，サブシステムごとの線形化によって得られる線形大規模システムはつねに全体システムの線形化システムである．なぜなら，サブシステムごとの線形化によって得られる線形大規模システムは，系8.1の条件（8.15），（8.16）を満たすので，一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できるからである．

8．5　結　　言

この章では，いくつかのサブシステムが結合して構成されている大規模ダイナミカルシステムを対象に，解の存在性と一意性に密接に関係する基本的問題として，サブシステムの表現式と全体システムの表現式の関係を考察した．その結果，明らかになったことは，サブシステムの表現式の性質は全体システムの表現式に保存されるとは限らないということである．すなわち，サブシステムが標準形や正規形の状態方程式で記述されていても，全体システムが同様の状態方程式で記述できるとは限らず，場合によっては解をもたないことさえある．そして，サブシステムが大域的リプシッツ条件を満たす状態方程式で表わされ，全時間上で一意解をもつシステムであっても，全体システムがそうであるとは限らず，また，サブシステムごとの線形化は可能であっても，その結果が全体システムの線形化になるとは限らない．つまり，サブシステムが（解の存在性等に関して）意味のあるシステムであっても，全体システムは意味のないシステムになる可能性があるのである．したがって，サブシステムを接続して大規模システムを構成しようとする場合には，つねにこの点に留意して，そのシステムが意味のないシステムにならないように注意しなければならない．

この章では，さらに，以上の事実を考慮して，それでは，サブシステムの特性とそれらの接続関係がどのような条件を満たしていれば，サブシステムの表現式の性質が全体システムの表現式に保存されるのかという問題を考え，そのための条件を求めた．得られた条件は，サブシステムを接続して構成される大規模システムが意味のないシステムにならないことを確認するために有用である．これらの条件のうち，接続関係をブールマトリクスで表わして得られた条件は，使いやすい単純な形をしており，サブシステムの数が非常に多い場合には特に実用的である．

第9章　線形時間不変大規模システムの安定化[87),88)]

9.1 緒　　言

この章では，線形時間不変サブシステムから成る大規模システムを対象に，各サブシステムを安定にすることによって全体システムを安定にする方法を考える．緒論で述べたように，大規模システムと言っても，それは構成要素の数が多いだけで，システムの1つであることに変りはないのだから，これまでに開発されている安定化法，たとえば状態フィードバックによる極指定法[8)~12)]，を全体システムに直接適用することもできなくはない．しかし，このような安定化法では，設計するパラメータ，たとえばフィードバックゲインを求めるために必要な変数の数や計算量が要素の数の2乗や3乗またはそれ以上に比例するので，要素数の非常に多い大規模システムに直接適用することは不適当である．そこで，この章では，いままでに得られている安定化法をサブシステムごとに適用し，各サブシステムを漸近安定にすることによって全体システムを漸近安定にすることを考える．

ところで，よく知られているように，大規模システムにおいては，すべてのサブシステムが漸近安定でも全体システムは漸近安定とは限らない．しかし，直観的には，各サブシステムが充分に漸近安定であれば，すなわち，各サブシステムの極の実部が負の充分に小さな値であれば，全体システムも漸近安定であると推測できる．そして，サブシステム（完全可制御とする）を充分に漸近安定にする方法としては，状態フィードバックによる極指定法が考えられる．ところが，後に例で示すように，単にこの方法を用いたのでは，すべてのサブシステムの極の実部を負のいくら小さな値にしても，全体システムが漸近安定にならない場合があるのである．また，同じく例で示すように，指定された極の分布を実現する状態フィードバックが一意的でないサブシステムが存在する場合，ある状態フィードバックによって各サブシステムを漸近安定にすれば，全体システムも漸近安定になるが，別の状態フィードバックによってサブシステムごとに同一の極分布を実現しても，全体システムが漸近安定になるとは限らないのである．この章では，これらの点に注目して，一意解をもち，サブシステムの状態の直和を状態として標準形状態方程式で記述できる線形時間不変

大規模システムを対象に，どのような条件が成り立っているときに，どのようにサブシステムを安定化すれば，全体システムを漸近安定にすることができるのかという問題を考える．

まず，9.2では，全体システムが漸近安定であるための，各サブシステムが満たすべき条件をs領域で求める．そして，9.3.1で，この条件を使って，すべてのサブシステムが完全可制御である場合，サブシステムごとにLuenbergerの正準形[89]にもとづく適当な状態フィードバックをほどこし，その極の実部を負の充分に小さな値にしたうえ，入出力間に直結経路をもつサブシステムには適当な状態フィードフォワードをほどこせば，全体システムを漸近安定にすることができることを示す．また，9.3.2では，状態を直接には取り出せないようなサブシステムから成る大規模システムの場合でも，各サブシステムが完全可制御であるとともに可検出（detectable）[90]であれば，サブシステムごとに推定器から得られる状態の推定値を真値の代りにフィードバックおよびフィードフォワードすることによって，同様の安定化が可能であることを示す．

9．2　線形時間不変大規模システムの安定条件

まず，この章で対象とする線形時間不変大規模システム

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad (7.6a)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \qquad (7.6b)$$

$$U(t) = FY(t) + GV(t) \qquad (7.8a)$$

$$W(t) = JY(t) + LV(t) \qquad (7.8b)$$

は定理8.1の条件，すなわち，

$$\det(I - DF) \quad (= \det(I - FD)) \neq 0 \qquad (8.7)'$$

を満たしているものと仮定する．したがって，この線形大規模システムは一意解をもち，X(·)を状態として標準形状態方程式で完全に記述できる（（8.11），（8.12）参照）．

$$\dot{X}(t) = \{A + B(I - FD)^{-1} FC\}X(t) + B(I-FD)^{-1} G V(t) \quad (9.1a)$$

$$W(t) = J(I - DF)^{-1} CX(t) + \{L + J(I-DF)^{-1} DG\}V(t) \quad (9.1b)$$

$$U(t) = (I-FD)^{-1} FCX(t) + (I-FD)^{-1} GV(t) \quad (9.1c)$$

$$Y(t) = (I-DF)^{-1} CX(t) + (I-DF)^{-1} DG V(t) \quad (9.1d)$$

それでは，この線形時間不変大規模システムが漸近安定であるための条件を求めよう．（9.1）からわかるように，このシステムが漸近安定であることは $A + B(I-FD)^{-1}FC$ のすべての固有値の実部が負であることと等価である．そこで，$A + B(I-FD)^{-1} FC$ の特性多項式を計算してみる．

$$\begin{aligned} &\det(sI - \{A + B(I-FD)^{-1} FC\}) \\ &= \det(sI - A) \det(I - (sI-A)^{-1} B(I-FD)^{-1} FC) \\ &= \det(sI - A) \det(I - C(sI-A)^{-1} B(I-FD)^{-1} F) \end{aligned} \quad (9.2)$$

ここに，

$$C(sI-A)^{-1} B = \begin{bmatrix} C_1(sI-A_1)^{-1} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_N(sI-A_N)^{-1} B_N \end{bmatrix}$$

はサブシステムの直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクスから成るブロック対角マトリクスである．以下では，それを $Hp(s)$ で表わし，その対角ブロックを $Hpi(s)$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ で表わすことにする．すなわち，

$$Hp(s) \triangleq \mathrm{diag.}\{Hp_1(s),\ Hp_2(s),\ \cdots,\ Hp_N(s)\}$$

$$Hpi(s) \triangleq C_i(sI - A_i)^{-1} B_i, \quad i=1, 2, \cdots, N.$$

そうすると，（9.2）は

$$\det(sI-\{A+B(I-FD)^{-1}FC\})$$
$$=\det(sI-A)\det(I-Hp(s)(I-FD)^{-1}F) \qquad (9.3)$$

と書ける．ところで，$A+B(I-FD)^{-1}FC$の固有値の実部がすべて負であることは，この多項式の値が $\mathrm{Re}\ s\geqq 0$ で0にならないことである．したがって，次の定理が成立する．

〔定理9.1〕 （7.6）と（7.8）で表わされる線形時間不変大規模システムが定理8.1の条件を満たしているとしよう．このとき，この大規模システムが漸近安定であるための必要十分条件は，$\mathrm{Re}\ s\geqq 0$で

$$\det(sI-A)\ \det(I-Hp(s)(I-FD)^{-1}F)\neq 0 \qquad (9.4)$$

が成立することである．

また，各サブシステムが漸近安定である場合には，$\mathrm{Re}\ s\geqq 0$ で

$$\det(sI-A)$$
$$=\det(sI-A_1)\det(sI-A_2)\cdots\det(sI-A_N)\neq 0$$

が成立するから，この定理より，次の系が得られる．

〔系9.1〕 漸近安定なサブシステムから成り，（7.6）と（7.8）で表わされる線形時間不変大規模システムが定理8.1の条件を満たしているとしよう．このとき，この大規模システムが漸近安定であるための必要十分条件は，$\mathrm{Re}\ s\geqq 0$ で

$$\det(I-Hp(s)(I-FD)^{-1}F)\neq 0 \qquad (9.5)$$

が成立することである．

これらの必要十分条件は，大規模システムをまとめて1つのシステムとして取り扱い，得られた条件である．したがって，これらの条件からは，各サブシステムがどのような特性をもっていれば全体システムが漸近安定なのかわからない．次に述べる系はその点を明らかにしており，サブシステムごとの安定化

によって全体システムを漸近安定にできることを示唆している．ここで，$(I-FD)^{-1}F$ をFのブロックマトリクスF_{ij}と同じ大きさのブロックマトリクス$\hat{F}_{ij}$に分割して

$$(I-FD)^{-1}F \triangleq \begin{bmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} & \cdots & \hat{F}_{1N} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} & \cdots & \hat{F}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{F}_{N1} & \hat{F}_{N2} & \cdots & \hat{F}_{NN} \end{bmatrix}$$

と書くことにする．

〔系9.2〕　漸近安定なサブシステムから成り，(7.6)と(7.8)で表わされる線形時間不変大規模システムが定理8.1の条件を満たしているとしよう．このとき，各サブシステムS_i $(i=1, 2, \cdots, N)$について，$\mathrm{Re}\ s \geqq 0$で

$$\|Hpi(s)\| \left(\sum_{j=1}^{N} \|\hat{F}_{ij}\|\right) < 1 \qquad (9.6)$$

が成立するならば，この大規模システムは漸近安定である．

（証明）　この線形大規模システムが漸近安定ではないとしよう．すると，系9.1により，

$$\det(I-Hp(\hat{s})(I-FD)^{-1}F) = 0$$

となるような$\mathrm{Re}\ \hat{s} \geqq 0$なる複素数$\hat{s}$が存在する．ゆえに，

$$(I-Hp(\hat{s})(I-FD)^{-1}F)\hat{x} = 0$$

となる$\tilde{m}(\triangleq \sum_{i=1}^{N} m_i)$次元複素ベクトル$\hat{x}(\neq 0)$が存在する．このベクトル$\hat{x}$を$m_1$次元ベクトル，$m_2$次元ベクトル，$\cdots$，$m_N$次元ベクトルに分割して

$$\hat{x} = \left[\hat{x}_1' \quad \hat{x}_2' \quad \cdots \quad \hat{x}_N'\right]'$$
$$\hat{x}_i \in R^{m_i}, \quad i=1, 2, \cdots, N$$

と表わそう．すると，(9.7)は

$$\begin{bmatrix} I-H_{P1}(\hat{s})\hat{F}_{11} & -H_{P1}(\hat{s})\hat{F}_{12} & \cdots & -H_{P1}(\hat{s})\hat{F}_{1N} \\ -H_{P2}(\hat{s})\hat{F}_{21} & I-H_{P2}(\hat{s})\hat{F}_{22} & \cdots & -H_{P2}(\hat{s})\hat{F}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H_{PN}(\hat{s})\hat{F}_{N1} & -H_{PN}(\hat{s})\hat{F}_{N2} & \cdots & I-H_{PN}(\hat{s})\hat{F}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書けるから，すべての $i(=1, 2, \cdots, N)$ について

$$\hat{x}_i = H_{pi}(\hat{s}) \sum_{j=1}^{N} \hat{F}_{ij} \hat{x}_j \qquad (9.8)$$

である．ゆえに，任意のノルムに関して

$$\| \hat{x}_i \| \leqq \| H_{pi}(\hat{s}) \| \sum_{j=1}^{N} (\| \hat{x}_j \| \| \hat{F}_{ij} \|) \qquad (9.9)$$

が成立し，そして，$\| \hat{x}_1 \|, \| \hat{x}_2 \|, \cdots, \| \hat{x}_N \|$ のうちで $\| \hat{x}_k \|$ が最大であるとすると，$i=k$ について

$$1 \leqq \| H_{pk}(\hat{s}) \| \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\| \hat{x}_j \|}{\| \hat{x}_k \|} \| \hat{F}_{kj} \| \right)$$

$$\leqq \| H_{pk}(\hat{s}) \| \sum_{j=1}^{N} \| \hat{F}_{kj} \| \qquad (9.10)$$

が成立する．ところが，これは $i=k$ について $\mathrm{Re}\ s \geqq 0$ で（9.6）が成立することに反している．したがって，$\mathrm{Re}\ s \geqq 0$ で（9.6）が成立するならば，ここで考えている線形大規模システムは漸近安定である．　（証明終）

この系は，すべてのサブシステムが漸近安定である場合，各サブシステムの直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクス $H_{pi}(s)$ のノルムが $\mathrm{Re}\ s \geqq 0$ で充分に小さければ，全体システムが漸近安定であることを意味している．ところで，$H_{pi}(s)$ のノルムが $\mathrm{Re}\ s \geqq 0$ で充分に小さいということは，直観的には，その極の実部が零点の実部に比べて充分に負の小さな値であるということ，すなわち，複素平面上で極が零点に比べて充分に左にあるということである．

これから述べるサブシステムごとの安定化による大規模システムの安定化法は，各サブシステムに適当な状態フィードバックを，さらに，必要ならば適当な状態フィードフォワードをほどこして，Hpi(s)の極と零点の関係がこのようになるようにする方法である．

9．3　サブシステムごとの安定化による全体システムの安定化

まず，初めに，各サブシステムを状態フィードバックによって単に漸近安定にするだけでは，それらをいくら漸近安定にしても，全体システムが漸近安定になるとは限らないことを例によって示そう．

〔例 9.1〕　2つの漸近安定かつ完全可制御なスカラ・システム S_1 S_2 から成る図9.1のフィードバックシステムを考えよう．このシステムは定理8.1の条件を満たしているので，一意解をもち，次の標準形状態方程式で記述できる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} V(t)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - 2V(t) \qquad (9.11)$$

そして，マトリクス

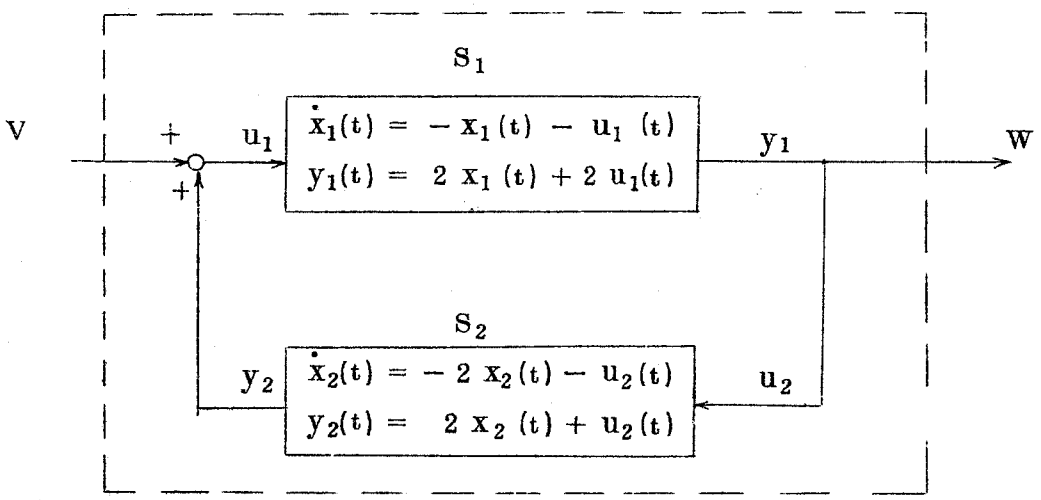


図 9.1　漸近安定なサブシステムから成る不安定なフィードバックシステム

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値が $(3-\sqrt{17})/2$ と $(3+\sqrt{17})/2$ だから，漸近安定ではない．

いま，このシステムにおいて，S_1 と S_2 に状態フィードバック

$$u_1(t) = \tilde{u}_1(t) + k_1 x_1(t) \qquad k_1 > -1 \qquad (9.12)$$

$$u_2(t) = \tilde{u}_2(t) + k_2 x_2(t) \qquad k_2 > -2 \qquad (9.13)$$

をそれぞれほどこしてみよう．ここに，$\tilde{u}_1(\cdot)$，$\tilde{u}_2(\cdot)$ はそれぞれ S_1，S_2 の新しい入力である．このときも，全体システム（図 9.2）は一意解をもち，標準形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ 2(1+k_1) & 2+k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} V(t)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} -2(1+k_1) & -2(2+k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - 2V(t) \qquad (9.14)$$

で記述できる．そして，これらの状態フィードバックによれば，k_1（>-1）と k_2（>-2）を大きくすればするほど，S_1 と S_2 をより漸近安定にすることが

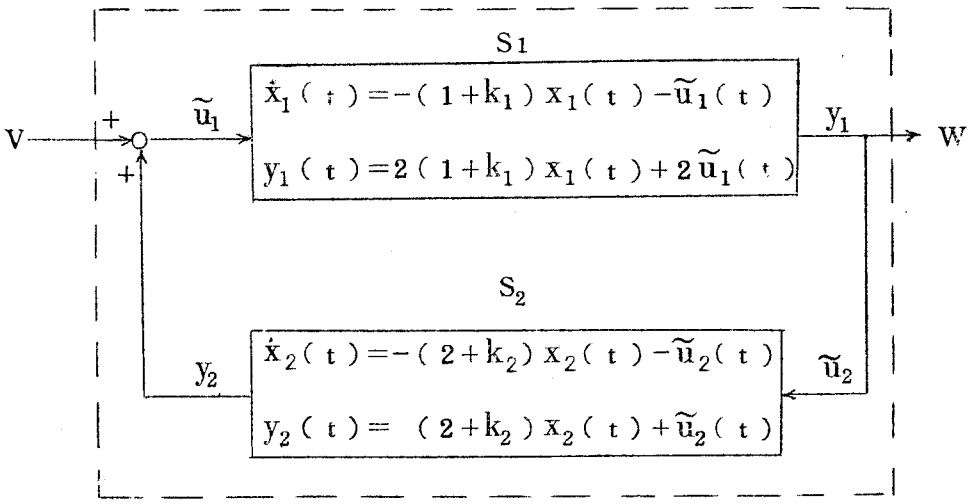


図 9.2　状態フィードバック（9.12），（9.13）をほどこしたシステム

できる．しかし，k_1，k_2 を大きくして S_1，S_2 をいくら漸近安定にしても，全体システムは漸近安定にはならない．なぜなら，（9.14）において，

$$\begin{bmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ 2(1+k_1) & 2+k_2 \end{bmatrix}$$

の固有値の1つは，S_1，S_2 を漸近安定にする $k_1(>-1)$ と $k_2(>-2)$ に対しては，必ず正になるからである．つまり，図9.1のシステムは，各サブシステムを状態フィードバックによっていくら漸近安定にしても，漸近安定にならないのである．

〔例9.2〕　2つの漸近安定かつ完全可制御なサブシステム S_1 S_2 から成る図9.3のフィードバックシステムを考えよう．このシステムは定理8.1の条件を満たすので，一意解をもち，次の標準形状態方程式で記述できる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \tag{9.15}$$

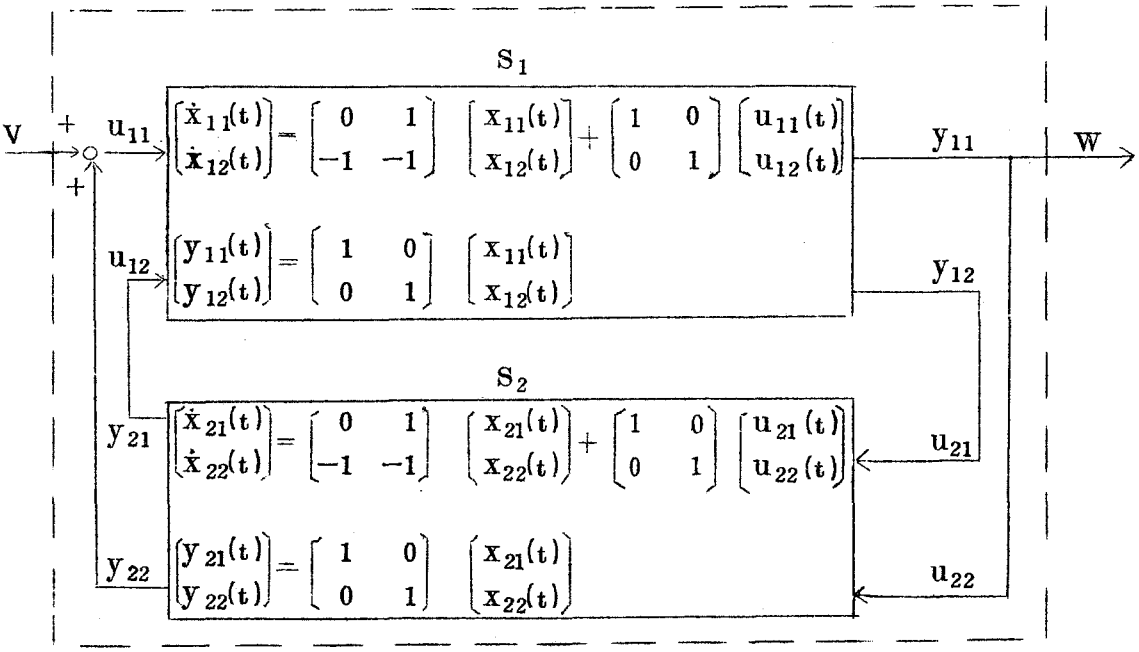


図9.3　漸近安定なサブシステムから成る，漸近安定ではないシステム

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

そして，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

の固有値が－1，－1，0，0なので，漸近安定ではない．

いま，S_1，S_2に状態フィードバック

$$\begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11}(t) \\ \tilde{u}_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-\alpha_1 \ \alpha_2 & 1-(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

$$\begin{bmatrix} u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{21}(t) \\ \tilde{u}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-\beta_1 \ \beta_2 & 1-(\beta_1+\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

をそれぞれほどこしてみよう．ここに，$\tilde{u}_{11}(\cdot)$，$\tilde{u}_{12}(\cdot)$，$\tilde{u}_{21}(\cdot)$，$\tilde{u}_{22}(\cdot)$は新しい入力である．その結果得られるのが図9.4のシステムである．このとき，S_1，S_2を表わす標準形において，マトリクス

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_1 \ \alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_1 \ \beta_2 & -(\beta_1+\beta_2) \end{bmatrix}$$

の固有値がそれぞれ$-\alpha_1$と$-\alpha_2$，$-\beta_1$と$-\beta_2$だから，(9.16)と(9.17)の形の状態フィードバックによってS_1，S_2に任意の安定性を実現することができる．ゆえに，S_1とS_2はいくらでも漸近安定にすることができるのである．しかし，サブシステムをこのように漸近安定にしたのでは，全体システムを漸近安定にすることはできない．なぜなら，このとき全体システムを記述する標準形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha_1\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta_1\beta_2 & -(\beta_1+\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) \tag{9.18}$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

において，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\alpha_1\alpha_2 & -(\alpha_1+\alpha_2) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta_1\beta_2 & -(\beta_1+\beta_2) \end{bmatrix}$$

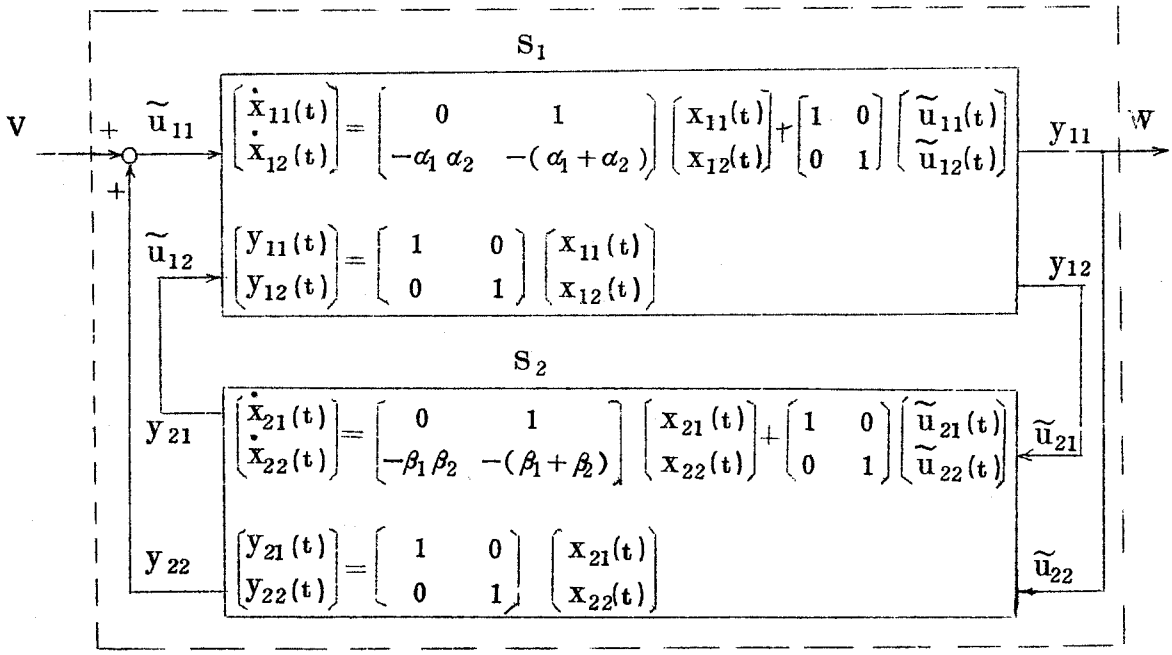


図 9.4　状態フィードバック（9.16），（9.17）をほどこしたシステム

の階数はどのようなα_1，α_2，β_1，β_2，対しても3以下なので，その固有値のうち少なくとも1つは0であるからである．

以上の2つの例から，各サブシステムを状態フィードバックによって単に漸近安定にするだけでは，それらをいくら漸近安定にしても，全体システムが漸近安定になるとは限らないことがわかった．その理由を少し考えてみよう．系9.2の安定条件について上で述べたように，各サブシステム（漸近安定とする）の直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクスHpi(s)のノルムの値がRe s ≧ 0で充分に小さければ，全体システムは漸近安定である．そして，直観的には，各サブシステムの極の実部を負の充分に小さな値にすれば，Hpi(s)のノルムはRe s ≧ 0で充分に小さな値になり，その結果，系9.2の安定条件を満たすようにできるだろうと予想された．しかし，状態フィードバックのみを用いたのでは，極の実部を負のいくら小さな値にしても，ノルムの値が小さくなるとは限らず，したがって，全体システムを漸近安定にできるとは限らないのである．*

それを，まず，例9.1のシステムについて確かめよう．このシステムにおいて，サブシステムごとに状態フィードバック（9.12），（9.13）をほどこすと，S_1とS_2の直結経路を除いた部分の伝達関数はそれぞれ

$$Hp_1(s) = -\frac{2(1+k_1)}{s+(1+k_1)} \quad , \quad Hp_2(s) = -\frac{2+k_2}{s+(2+k_2)}$$

となる（図9.2参照）．そして，これらのs＝0におけるノルム（絶対値）はどのようなk_1，k_2に対してもつねに2と1である．すなわち，k_1とk_2を大きくして$Hp_1(s)$と$Hp_2(s)$の極を負のいくら小さな値にしても，ノルムは小さくならず，系9.2の条件を満たすようにはできない．次に，例9.2のシステムを考えると，サブシステムごとの状態フィードバック（9.16），（9.17）をほどこした後，S_1とS_2の伝達関数マトリクスはそれぞれ

$$Hp_1(s) = \frac{1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)} \begin{bmatrix} s+(\alpha_1+\alpha_2) & 1 \\ -\alpha_1\alpha_2 & s \end{bmatrix}$$

---

* ただし，系9.2の条件は漸近安定であるための十分条件だから，この条件を満たすようにできないからと言って，漸近安定にできないとも言えない．

$$Hp_2(s) = \frac{1}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)} \begin{bmatrix} s+(\beta_1+\beta_2) & 1 \\ -\beta_1\beta_2 & s \end{bmatrix}$$

である（図 9.4 参照）．これらのノルムは，α_1，α_2およびβ_1，β_2の値にかかわらず，$s=0$でつねに1より大きいか等しい．ゆえに，この場合も，系9.2の条件を満たすようにはできない．

以上より，それでは，どのようにすれば，Hpi（s）のノルムをRe $s \geqq 0$で充分に小さくすることができるのか，という問題がこれからの問題になる．次の2つの例はこの問題に対する解答を示唆している．

〔例9.3〕　例9.1で考えた，図9.1の不安定なフィードバックシステムをふたたび考える．例9.1では，サブシステムS_1，S_2に状態フィードバック（9.12），（9.13）をほどこしておのおのを漸近安定にしたが，全体システムは漸近安定にはならなかった．ここでは，これらの状態フィードバックに加えて，おのおのに状態フィードフォワード

$$\tilde{y}_1(t) = y_1(t) - 2k_1 x_1(t) \tag{9.19}$$

$$\tilde{y}_2(t) = y_2(t) - k_2 x_2(t) \tag{9.20}$$

をほどこしてみよう．ここに，$\tilde{y}_1(\cdot)$と$\tilde{y}_2(\cdot)$はそれぞれS_1とS_2の新しい出力を

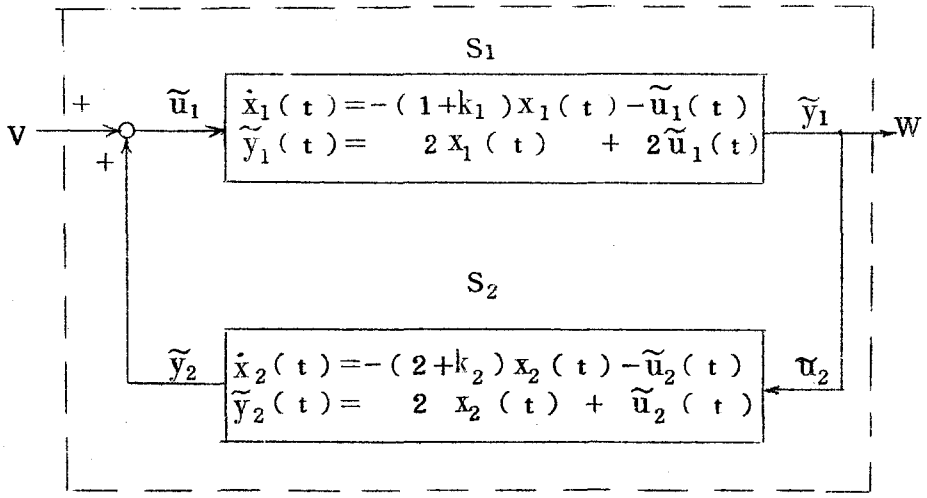


図 9.5　状態フィードバック（9.12），（9.13）と状態フィードフォワード（9.19），（9.20）をほどこしたシステム

表わす．その結果得られるのが図9.5のシステムである．このシステムもやはり一意解をもち，次の標準形状態方程式で記述できる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 2 \\ 2 & 2-k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} V(t)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - 2V(t) \qquad (9.21)$$

そして，たとえば，$k_1=5$, $k_2=6$とおくと，

$$\begin{bmatrix} 1-k_1 & 2 \\ 2 & 2-k_2 \end{bmatrix}$$

の固有値が－2と－6になるので，このシステムは漸近安定である．（このk_1，k_2に対してはS_1，S_2も漸近安定である．）つまり，図9.1のシステムは，サブシステムを状態フィードバックによって漸近安定にするだけでは漸近安定にならないが，適当な状態フィードフォワードを併用することによって漸近安定にすることができるのである．

〔例9.4〕　例9.2で考えた，漸近安定でない図9.3のシステムをふたたび考えよう．このシステムは，（9.16）と（9.17）の形の状態フィードバックによってS_1とS_2を漸近安定にしたのでは，漸近安定にならなかった．ここでは，次の形の状態フィードバックをほどこして，S_1とS_2を漸近安定にしてみよう．

$$\begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11}(t) \\ \tilde{u}_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -1 \\ 1 & 1-\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{bmatrix} \qquad (9.22)$$

$$\begin{bmatrix} u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{21}(t) \\ \tilde{u}_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta_1 & -1 \\ 1 & 1-\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad (9.23)$$

その結果が図9.6のシステムである．このとき，S_1とS_2のマトリクス

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

の固有値はそれぞれ$-\alpha_1$と$-\alpha_2$，$-\beta_1$と$-\beta_2$であるから，この形の状態フィードバックによってS_1とS_2に実現される極分布は（9.16）と（9.17）の形の状態フィードバックによって実現できる範囲に含まれている（例9.2参照）．ところが，この形の状態フィードバックによってS_1とS_2を漸近安定にすると，（9.16）と（9.17）の形の状態フィードバックによっては不可能だった全体システムの漸近安定化が可能になるのである．たとえば，$\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=2$と指定して$S_1$と$S_2$を漸近安定にすると，全体システムを表わす標準形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) \\ \dot{x}_{21}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \\ x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

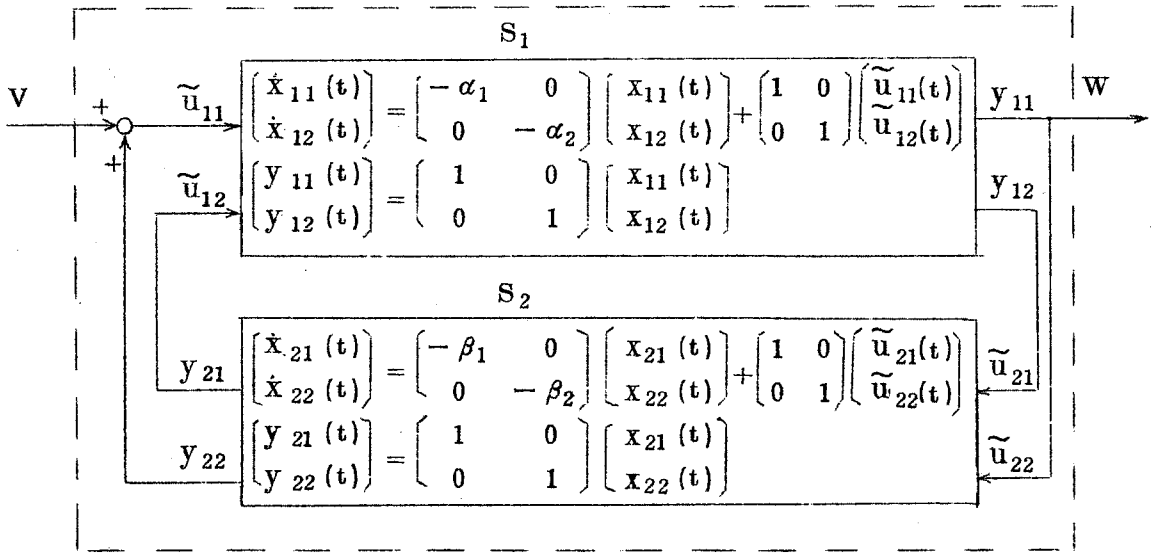


図9.6　状態フィードバック（9.22），（9.23）をほどこしたシステム

において，マトリクス

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

の固有値が－1，－1，－3，－3になるので，全体システムは漸近安定になる．このように，サブシステムごとの極分布が同一でも，全体システムが漸近安定である場合と，そうでない場合があるのである．

これらの2つの例についても，状態フィードバックや状態フィードフォワードとサブシステムの直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクス$Hp_i(s)$の関係を調べておこう．まず，例9.3のシステムでは，状態フィードバック（9.12），（9.13）および状態フィードフォワード（9.19），（9.20）をほどこした結果，S_1とS_2の直結経路を除いた部分の伝達関数は

$$Hp_1(s) = -\frac{2}{s+(1+k_1)}, \qquad Hp_2(s) = -\frac{2}{s+(2+k_2)}$$

となる．これらのRe $s \geqq 0$におけるノルム（絶対値）はk_1，k_2を大きくしてS_1，S_2を漸近安定にすればするほどいくらでも小さくなるから，適当にk_1，k_2を大きく定めることによって系9.2の安定条件を満たすようにできる．したがって，全体システムを漸近安定にすることができるのである．次に，例9.4のシステムでは，状態フィードバック（9.22），（9.23）をほどこした後のS_1とS_2の伝達関数マトリクスはそれぞれ

$$Hp_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\alpha_2} \end{bmatrix}, \quad Hp_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\beta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\beta_2} \end{bmatrix}$$

である．この場合も，これらのRe $s \geqq 0$におけるノルムは，α_1，α_2，β_1，β_2を大きくしてS_1とS_2を漸近安定にすればするほど，小さくなる．したがって，系9.2の安定条件を満たすようにできて，その結果，全体システムは漸近安定になるのである．

以下では，これまでに述べてきたことを考慮しつつ，各サブシステムを漸近安定にすることによって全体システムを漸近安定にする方法を考える．

9.3.1. サブシステムの状態を直接取り出せる場合の安定化法

ここでは，線形時間不変大規模システム（7.6），（7.8）を構成しているサブシステムはすべて完全可制御で，それらの状態は直接取り出せると仮定する．この仮定により，サブシステムごとに任意の極分布を状態フィードバックによって指定できることが保証されている．そして，一般性を失なうことなく，各サブシステムはLuenbergerの正準形[89]で記述されているものとすることができる．すなわち，サブシステムS_i（$i=1, 2, \cdots, N$）を表わす標準形状態方程式

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \qquad (7.5a)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \qquad (7.5b)$$

において，マトリクスA_i，B_i，C_iはそれぞれ

$$A_i = \begin{bmatrix} A^i_{11} & A^i_{12} & \cdots & A^i_{1q_i} \\ A^i_{21} & A^i_{22} & \cdots & A^i_{2q_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^i_{q_i 1} & A^i_{q_i 2} & \cdots & A^i_{q_i q_i} \end{bmatrix}, \qquad B_i = \begin{bmatrix} B^i_1 \\ B^i_2 \\ \vdots \\ B^i_{q_i} \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} C^i_1 & C^i_2 & \cdots & C^i_{q_i} \end{bmatrix} \qquad q_i \triangleq \mathrm{rank}\, B_i \ (\leqq r_i)$$

のようにブロックマトリクスから成り，特に，$A^i_{m\ell}$（$m, \ell = 1, 2, \cdots, q_i$）と$B^i_m$（$m=1, 2, \cdots, q_i$）は次のような形をしているとすることができる．ただし，＊は定数（同一とは限らない）を表わし，$\sigma_m{}^i$（$m=1, 2, \cdots, q_i$）は$\sum_{m=1}^{q_i} \sigma_m{}^i = n_i$を満たすようなある正整数である．

$$
A_{mm}^{i} = \left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0\quad 1\quad 0\quad \cdots\cdots\quad 0}}^{\sigma_m^{\,i}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ * & * & * & \cdots\cdots & * \end{bmatrix} \end{array}\right\} \sigma_m^{\,i}
$$

$$
A_{m\ell}^{i} = \left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\cdots\quad 0}}^{\sigma_\ell^{\,i}} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ * & * & \cdots\cdots & * \end{bmatrix} \end{array}\right\} \sigma_m^{\,i}, \qquad m \neq \ell
$$

$$
B_m^{\,i} = \left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0\cdots 0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{r_i} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{m-1} & & & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \end{array}\right\} \sigma_m^{\,i}
$$

ところで，$n_i \times r_i$ マトリクス B_i は，$n_i \times q_i$ マトリクス

$$
\hat{B}_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{B}_1^{\,i} \\ \hat{B}_2^{\,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{B}_{q_i}^{\,i} \end{bmatrix},
$$

ただし，

$$
\hat{B}_m^{\,i} \triangleq \left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0\cdots 0\quad 0\,0\quad \cdots\quad 0}}^{q_i} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{m-1} & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \sigma_m^{\,i}
$$

を用いて

$$B_i = \hat{B}_i \; Q_i \tag{9.25}$$

と表わせる．ここに，Q_iは

$$\left.\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 * * \cdots * * \cdots *}}^{r_i} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \ddots & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \end{array}\right] \\ \underbrace{\hphantom{0 \; 0 \; 0 \cdots 1}}_{q_i} \end{array}\right\} q_i$$

のような形をした$q_i \times r_i$マトリクス で，その形からわかるように，行に関して最大階数をもっている．B_iがこのように表わせることが，これから述べる安定化法では重要である．

それでは，フィードバックゲインK_iを

$$K_i = Q_i' (Q_i \, Q_i')^{-1} \; \hat{K}_i$$

$$\hat{K}_i \triangleq \begin{bmatrix} \hat{k}^i_{11} & \hat{k}^i_{12} & \cdots & \hat{k}^i_{1q_i} \\ \hat{k}^i_{21} & \hat{k}^i_{22} & \cdots & \hat{k}^i_{2q_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{k}^i_{q_i1} & \hat{k}^i_{q_i2} & \cdots & \hat{k}^i_{q_iq_i} \end{bmatrix}, \quad \hat{k}^i_{m\ell} \in R^{1 \times \sigma^i_\ell}$$

とおいて，サブシステムS_iに状態フィードバック

$$u_i(t) = \tilde{u}_i(t) + K_i \, x_i(t) \tag{9.26}$$

と状態フィードフォワード

$$\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - D_i K_i x_i(t) \qquad (9.27)$$

をほどこしてみよう．ここに，$\tilde{u}_i(\cdot)$と $\tilde{y}_i(\cdot)$はそれぞれ新しい入力と出力である（図 9.7 参照）．その結果，各サブシステムはこの新しい入出力に関する標準形状態方程式

$$\dot{x}_i(t) = (A_i + B_i K_i) x_i(t) + B_i \tilde{u}_i(t) \qquad (9.28a)$$

$$\tilde{y}_i(t) = C_i x_i(t) + D_i \tilde{u}_i(t) \qquad (9.28b)$$

で表わされるシステムになる．そして，

$$B_i K_i = \hat{B}_i Q_i Q_i' (Q_i Q_i')^{-1} \hat{K}_i = \hat{B}_i \hat{K}_i$$

だから，

$$e_m^i \triangleq \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \sigma_m^i , \qquad m = 1, 2, \cdots, q_i$$

とすると，$A_i + B_i K_i$は次のようなブロックマトリクスになる．*

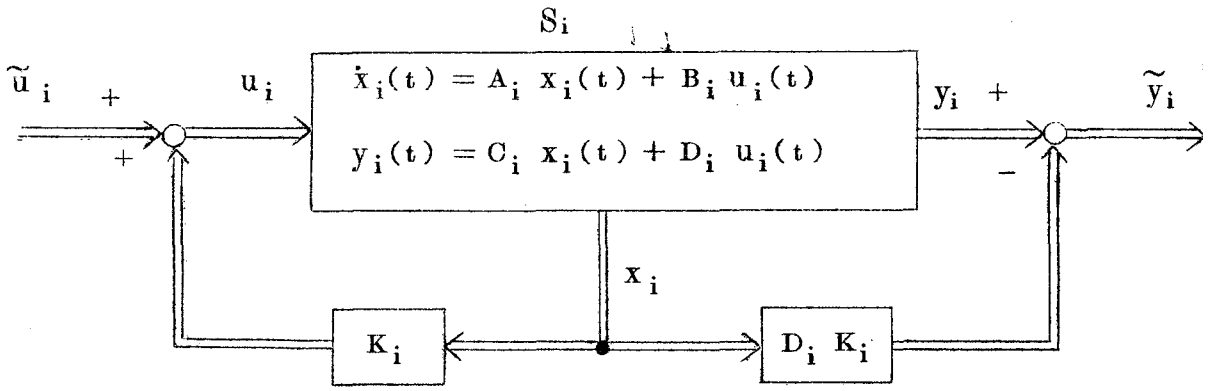


図 9.7　状態フィードバック（9.26）と状態フィードフォワード（9.27）をほどこしたサブシステム

脚注＊

$\hat{B}_i = \mathrm{diag.}\{ e_1^i, e_2^i, \cdots, e_{q_i}^i \}$　であることに注意しよう．

$$
A_i + B_i K_i
$$

$$
= \begin{bmatrix}
A_{11}^{i} + e_1^{i}\hat{k}_{11}^{i} & A_{12}^{i} + e_1^{i}\hat{k}_{12}^{i} & \cdots & A_{1q_i}^{i} + e_1^{i}\hat{k}_{1q_i}^{i} \\
A_{21}^{i} + e_2^{i}\hat{k}_{21}^{i} & A_{22}^{i} + e_2^{i}\hat{k}_{22}^{i} & \cdots & A_{2q_i}^{i} + e_2^{i}\hat{k}_{2q_i}^{i} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{q_i 1}^{i} + e_{q_i}^{i}\hat{k}_{q_i 1}^{i} & A_{q_i 2}^{i} + e_{q_i}^{i}\hat{k}_{q_i 2}^{i} & \cdots & A_{q_i q_i}^{i} + e_{q_i}^{i}\hat{k}_{q_i q_i}^{i}
\end{bmatrix}
$$

ここで，このマトリクスの各ブロックの形に注目しよう．まず，非対角ブロック$A_{m\ell}^{i} + e_m^{i}\hat{k}_{m\ell}^{i}$（$m \neq \ell$）では，$A_{m\ell}^{i}$と$e_m^{i}\hat{k}_{m\ell}^{i}$の形がいずれも

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \cdots & *
\end{bmatrix}
$$

である．そして，$e_m^{i}\hat{k}_{m\ell}^{i}$においては，＊で表わされている定数を$\hat{k}_{m\ell}^{i}$によって任意の値にすることができる．したがって，$\hat{k}_{m\ell}^{i}$を適当に定めることによって非対角ブロックを零マトリクスにすることができ，

$$
A_i + B_i K_i
$$

$$
= \begin{bmatrix}
A_{11}^{i} + e_1^{i}\hat{k}_{11}^{i} & & & 0 \\
& A_{22}^{i} + e_2^{i}\hat{k}_{22}^{i} & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & A_{q_i q_i}^{i} + e_{q_i}^{i}\hat{k}_{q_i q_i}^{i}
\end{bmatrix}
$$

とすることができる．一方，対角ブロック$A_{mm}^{i} + e_m^{i}\hat{k}_{mm}^{i}$は次のような形をしており，その＊で表わされている定数は$\hat{k}_{mm}^{i}$によって任意の値にすることができる．

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
* & * & * & \cdots & *
\end{bmatrix}
$$

したがって，このブロックの固有値は任意に指定できる．つまり，適当なフィードバックゲインK_iを用いることによって$A_i+B_i K_i$をブロック対角マトリクスにすることができ，しかも，その対角ブロックの固有値は任意に指定できるのである．

さて，これからは，このようなフィードバックゲインを状態フィードバック(9.26)と状態フィードフォワード(9.27)に用いることにする．そうすると，各サブシステムの直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクス$H_{pi}(s)$は，$A^i_{mm}+e^i_m\hat{k}^i_{mm}$と$\hat{B}^i_m$の組が可制御正準形の形をしているから，次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
&H_{pi}(s) \\
&\triangleq C_i[sI-(A_i+B_iK_i)]^{-1}\dot{B}_i \\
&=C_i[sI-(A_i+B_iK_i)]^{-1}\hat{B}_iQ_i \\
&=[C_1^i\ C_2^i\ \cdots\ C_{q_i}^i] \\
&\quad\cdot\begin{bmatrix}
[sI-(A^i_{11}+e^i_1\hat{k}^i_{11})]^{-1} & & & \bigcirc \\
& [sI-(A^i_{22}+e^i_2\hat{k}^i_{22})]^{-1} & & \\
& & \ddots & \\
\bigcirc & & & [sI-(A^i_{q_iq_i}+e^i_{q_i}\hat{k}^i_{q_iq_i})]^{-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\hat{B}^i_1 \\ \hat{B}^i_2 \\ \vdots \\ \hat{B}^i_{qi}
\end{bmatrix}Q_i
\end{aligned}
$$

$$= [\, C_1^i \,[sI - (A_{11}^i + e_1^i k_{11}^i)]^{-1} \hat{B}_1^i$$

$$+ C_2^i [\, sI - (A_{22}^i + e_2^i k_{22}^i)]^{-1} \hat{B}_2^i$$

$$+ \cdots + C_{q_i}^i [\, sI - (A_{q_i q_i}^i + e_{q_i}^i \hat{k}_{q_i q_i}^i)]^{-1} \hat{B}_{q_i}^i \,] Q_i$$

$$= \left[\frac{C_1^i \, n(s, \sigma_1^i)}{\det[sI - (A_{11}^i + e_1^i \hat{k}_{11}^i)]} \quad \frac{C_2^i \, n(s, \sigma_2^i)}{\det[sI - (A_{22}^i + e_2^i \hat{k}_{22}^i)]} \quad \cdots\cdots \quad \frac{C_{q_i}^i \, n(s, \sigma_{q_i}^i)}{\det[sI - (A_{q_i q_i}^i + e_{q_i}^i \hat{k}_{q_i q_i}^i)]} \right] Q_i \tag{9.29}$$

ただし，

$$n(s, \sigma_m^i) \triangleq \left. \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s^{\sigma_m^i - 1} \end{bmatrix} \right\} \sigma_m^i, \qquad m = 1, 2, \cdots, q_i$$

とする．ここで，$\hat{k}_{mm}^i$ ($m = 1, 2, \cdots, q_i$)を$A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i$の固有値のうち($\sigma_m^i - 1$)個が－1より小さい実数，残りの1つの固有値が$-a_i \sigma_m^i q_i \cdot \|C_m^i\| \, \|Q_i\|$より小さい実数になるように定めることにしょう．ただし，a_iは任意の正数とする．このとき，$A_i + B_i K_i$ は$A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i$を対角ブロックとするブロック対角マトリクスだから，その固有値はすべて負の実数である．すなわち，各サブシステムは漸近安定になっている．そして，簡単な計算によってわかるように，$j = 0, 1, 2, \cdots, (\sigma_m^i - 1)$について，$\mathrm{Re}\, s \geq 0$ で

$$\left| \frac{s^j}{\det\left[sI - (A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i)\right]} \right| \leq \frac{1}{a_i \sigma_m^i q_i \| C_m^i \| \|Q_i\|} \tag{9.30}$$

が成り立つから，$m = 1, 2, \cdots, q_i$について

$$\left\| \frac{C_m^i n(s, \sigma_m^i)}{\det\left[sI - (A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i)\right]} \right\|$$

$$\leq \| C_m^i \| \left\| \frac{n(s, \sigma_m^i)}{\det\left[sI - (A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i)\right]} \right\|$$

$$\leq \| C_m^i \| \sum_{j=0}^{\sigma_m^i - 1} \left| \frac{s^j}{\det\left[sI - (A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i)\right]} \right|$$

$$\leq (a_i q_i \| Q_i \|)^{-1} \tag{9.31}$$

が成立する．したがって，$H_{pi}(s)$ は$\mathrm{Re}\ s \geq 0$に対して

$$\| H_{pi}(s) \| \leq \| Q_i \| \sum_{m=1}^{q_i} \left\| \frac{C_m^i n(s, \sigma_m^i)}{\det\left[sI - (A_{mm}^i + e_m^i \hat{k}_{mm}^i)\right]} \right\|$$

$$\leq a_i^{-1} \tag{9.32}$$

を満たし，ゆえに，$\hat{k}_{mm}^i$ を定めるとき，正数a_i を

$$\sum_{j=1}^{N} \| \hat{F}_{ij} \| < a_i \tag{9.33}$$

の範囲で指定しておけば，各サブシステムを漸近安定にしつつ，系9.2の条件が成立するようにすることができるのである．つまり，サブシステムごとに(9.26)と(9.27)の形の適当な状態フィードバックと状態フィードフォワー

ドをほどこすことによって，各サブシステムを漸近安定にしつつ，全体システムを漸近安定にすることができるのである．

以上をまとめたのが次の定理である．

〔定理 9.2〕 (7.6)と(7.8)で表わされる線形時間不変大規模システムが定理 8.1の条件を満たしているとしよう．このとき，すべてのサブシステムが完全可制御ならば，各サブシステムを適当な状態フィードバックと状態フィードフォワードにより充分に漸近安定にすることによって，全体システムを漸近安定にすることができる．

(注 9.1) この定理は各サブシステムに状態フィードフォワードをほどこすことを許しているが，(9.27)の形からわかるように，それは状態フィードバック(9.26)が入出力間の直結経路を通して出力に直接与える影響を打ち消すためだけに使われている．つまり，この定理が保証している安定化法は本質的にはサブシステムごとの状態フィードバックによっている．

特に，すべてのサブシステムが入出力間の直結経路をもたない場合には，(9.27)の状態フィードフォワードはなくなるので，状態フィードバックのみによる安定化が可能である．また，この場合には，定理 8.1の条件はつねに成立するので，定理 9.2は次のように言い換えられる．

〔系 9.3〕 (7.6)と(7.8)で表わされる線形時間不変大規模システムにおいて，各サブシステムは入出力間に直結経路をもっていないとしよう．このとき，すべてのサブシステムが完全可制御ならば，各サブシステムを適当な状態フィードバックにより充分に漸近安定にすることによって，全体システムを漸近安定にすることができる．

9.3.2 サブシステムの状態を直接には取り出せない場合の安定化法

これまでに述べてきた安定化法は，各サブシステムの状態を直接取り出せることを前提としている．しかし，サブシステムの状態をすべて取り出せることは実際にはほとんどなく，そのような大規模システムにこの安定化法を適用するためには，サブシステムの入力と出力からその状態を何らかの方法で推定してやらなければならない．以下では，この推定の方法として第4章で述べたような状態推定器を用いる方法を採用し，この推定器より得られる状態の推定値をサブシステムごとにフィードバックおよびフィードフォワードすることによ

って，各サブシステムを漸近安定にするとともに，全体システムを漸近安定にすることができることを示す．ここでも，これまでと同様，サブシステムはすべて完全可制御であると仮定する．

いま，サブシステム S_i($i=1, 2, \cdots, N$)

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \tag{7.5a}$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u_i(t) \tag{7.5b}$$

に対して

$$\dot{z}_i(t) = (A_i - H_i C_i)\, z_i(t) + (B_i - H_i D_i)\, u_i(t) + H_i y_i(t) \tag{9.34}$$

で記述される状態推定器を考えよう（第4章参照）．ここに，$z_i(t)$はn_i次元ベクトルで，S_iの状態 $x_i(t)$の推定値である．また，H_iは$n_i \times m_i$マトリクスで，われわれが設計するパラメータである．このとき，状態の真値$x_i(\cdot)$と推定値 $z_i(\cdot)$ の誤差

$$e_i(t) \triangleq x_i(t) - z_i(t)$$

のふるまいは

$$\dot{e}_i(t) = (A_i - H_i C_i)\, e_i(t) \tag{9.35}$$

に従うから，(9.34)が状態推定器として動作するためには，(9.35)が漸近安定でなければならない．そこで，(9.35)が漸近安定になるような推定器ゲインH_iが存在することを保証するために，以下では，すべてのサブシステムが（完全可制御であるとともに）可検出（detectable）であると仮定する．

〔定義 9.1〕[90] $A_i - H_i C_i$の固有値の実部がすべて負になるような推定器ゲインH_iが存在するとき，S_iは可検出であるという．

（注 9.2） A_iのすべての固有値の実部が負ならば，$H_i = 0$に対して $A_i - H_i C_i$の固有値の実部はすべて負であるから，iは可検出である．また，S_iが完全可観測ならば，H_iによって$A_i - H_i C_i$の固有値を任意に指定することができるので，完全可観測なサブシステムは可検出である．

それでは，推定器ゲインH_iを $A_i - H_i C_i$ 固有値の実部がすべて負になるよ

うに定めて状態推定器（9.34）を構成し，それによって得られる推定値$z_i(\cdot)$を真値$x_i(\cdot)$の代りに（9.26）の形のフィードバックと（9.27）の形のフィードフォワードに用いよう．すなわち，ここでは，次の形のフィードバックとフィードフォワードをサブシステムS_iにほどこす（図9.8参照）．

$$u_i(t) = \tilde{u}_i(t) + K_i z_i(t) \tag{9.36}$$

$$\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - D_i K_i z_i(t) \tag{9.37}$$

ここに，$\tilde{u}_i(\cdot)$と$\tilde{y}_i(\cdot)$はそれぞれ新しい入力と出力である．そして，フィードバックゲインK_iは，上で述べたサブシステムの状態を直接取り出せる場合の安定化法によって定めるものとする．以上の結果，各サブシステムは標準形状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_iK_i \\ H_iC_i & A_i - H_iC_i + B_iK_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ B_i \end{bmatrix} \tilde{u}_i(t)$$

$$\tilde{y}_i(t) = [\, C_i \quad 0 \,] \begin{bmatrix} x_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} + D_i \tilde{u}_i(t) \tag{9.38}$$

で表わされる$2n_i$次元システムとなる．

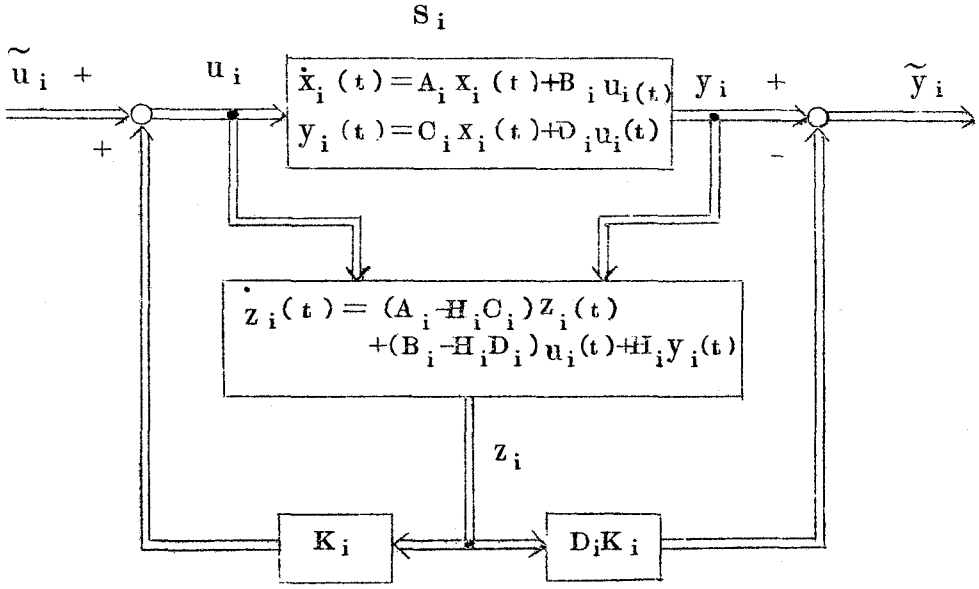


図9.8　フィードバック（9.36）とフィードフォワード（9.37）をほどこしたサブシステム

さて，この新しいサブシステムにおいて，入出力間の直結経路のゲインはもとのサブシステムと同じD_iである．また，ここで考えているフィードバックやフィードフォワードによっては，Fで表わされているサブシステム間の接続関係は変更されない．したがって，もとのサブシステム（7.5）を新しいサブシステム（9.38）で置き換えて得られる線形時間不変大規模システムも，もとの大規模システムと同様，定理8.1の条件を満たしている．そして，$(I-FD)^{-1}\cdot F$の各ブロック$\hat{F}_{ij}$ももとの大規模システムの場合そのままである．したがって，（サブシステムは違ったものになっているが，）この新しい線形大規模システムの安定判別にも系9.2をそのまま用いることができるのである．すなわち，各サブシステムが漸近安定で，それらの入出力間の直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクス$H_{pi}(s)$が$\mathrm{Re}\ s \geqq 0$で（9.6）を満たせば，新しい大規模システムも漸近安定なのである．

そこで，新しいサブシステムの安定性を調べ，直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクスを求めよう．そのために，新しいサブシステムを表わす標準形状態方程式として，（9.38）と等価な

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{e}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i + B_iK_i & -B_iK_i \\ 0 & A_i - H_iC_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_i(t)$$

$$\tilde{y}_i(t) = [\, C_i \quad 0 \,] \begin{bmatrix} x_i(t) \\ e_i(t) \end{bmatrix} + D_i \tilde{u}_i(t) \qquad (9.39)$$

を考える．まず，安定性について考えると，この標準形において，マトリクス

$$\begin{bmatrix} A_i + B_iK_i & -B_iK_i \\ 0 & A_i - H_iC_i \end{bmatrix}$$

の固有値の実部がすべて負であれば，このサブシステムは漸近安定である．そして，そのためには，$A_i + B_iK_i$と$A_i - H_iC_i$のすべての固有値の実部が負であればよいが，ここでは，フィードバックゲインK_iと推定器ゲインH_iはそうなるように定めてある．ゆえに，新しいサブシステムは漸近安定である．次に，直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクス$H_{pi}(s)$を求めると，

$$H_{pi}(s) \triangleq [\,C_i \quad 0\,]\left(sI - \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & -B_i K_i \\ 0 & A_i - H_i C_i \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= C_i[\,sI - (A_i + B_i K_i)\,]^{-1} B_i \qquad (9.40)$$

である．すなわち，新しいサブシステムの直結経路を除いた部分の伝達関数マトリクスは，もとのサブシステムに状態の真値をフィードバックおよびフィードフォワードした場合のそれとまったく同じなのである．ゆえに，フィードバックゲインK_iの定め方により，この$H_{pi}(s)$についても$\mathrm{Re}\ s \geqq 0$で（9.6）は成立する．したがって，新しいサブシステムから成る線形大規模システムは漸近安定である．

以上で，サブシステムごとの状態フィードバックと状態フィードフォワードによって可能であった線形時間不変大規模システムの安定化が，状態の推定値のフィードバックとフィードフォワードによっても同様に可能であることが示された．この結果をまとめたのが，次の定理と系である．

〔定理 9.3〕 （7.6）と（7.8）で表わされる線形時間不変大規模システムが定理 8.1の条件を満たしているとしよう．このとき，すべてのサブシステムが完全可制御かつ可検出ならば，サブシステムごとに状態推定器を構成することができ，各サブシステムを状態の推定値の適当なフィードバックとフィードフォワードにより充分に漸近安定にすることによって，全体システムを漸近安定にすることができる．

〔系 9.4〕 （7.6）と（7.8）で表わされる線形時間不変大規模システムにおいて，各サブシステムは入出力間に直結経路をもっていないとしよう．このとき，すべてのサブシステムが完全可制御かつ可検出ならば，サブシステムごとに状態推定器を構成することができ，各サブシステムを状態の推定値の適当なフィードバックにより充分に漸近安定にすることによって，全体システムを漸近安定にすることができる．

9.4 結　　言

この章では，線形時間不変大規模システムを対象に，各サブシステムを漸近

安定にすることによって全体システムを漸近安定にする方法を考えた．そして，すべてのサブシステムが完全可制御ならば，各サブシステムを適当な状態フィードバックにより充分に漸近安定にしたうえ，必要ならば補助的に適当な状態フィードフォワードをほどこすことによって，全体システムを漸近安定にすることができることを示した．また，状態を直接には取り出せないようなサブシステムから成る大規模システムの場合にも，すべてのサブシステムが完全可制御かつ可検出であれば，サブシステムごとの推定器から得られる状態の推定値を真値の代りにフィードバックおよびフィードフォワードすることによって，同様の安定化が可能であることも示した．例で示したように，状態フィードフォワードをほどこすことを許さなければ，各サブシステムを状態フィードバックによっていくら漸近安定にしても，全体システムが漸近安定になるとは限らない．また，状態フィードバックはサブシステムを充分に漸近安定にするものならどのようなものでもよいというわけではなく，サブシステムに同一の極分布を実現する状態フィードバックのなかにも，全体システムを漸近安定にするものとしないものがある．したがって，上の結果，およびそれらを示す過程で得られた安定化法は重要である．

この章では，全体システムを単に漸近安定にすることだけを考えて，安定度の指定については考えなかった．安定度を指定する問題は海藤[91]によって研究されており，サブシステムが完全可制御（状態を直接には取り出せない場合には，かつ完全可観測）ならば，この章の安定化法と本質的にはまったく同じ安定化法によって，任意に指定された安定度をサブシステムと全体システムに実現することができることが示されている．

ところで，この章の安定化法では，入出力間に直結経路をもつサブシステムには必ずフィードフォワードをほどこすことになっている．しかし，直結経路のゲインが小さい場合には，フィードフォワードをほどこさない，フィードバックのみによる安定化も可能なのである．そのような安定化が可能な大規模システムのクラスはやはり海藤[91]によって求められている．

第10章　結　　論

本研究では，サブシステムが状態方程式で記述され，それらの接続関係がブロック線図で表わされる大規模ダイナミカルシステムを対象に，サブシステムの特性とそれらの結合の仕方が全体システムにどのような影響を与えるのかという問題を，状態方程式表現と安定化について考察した．

まず，状態方程式表現に関しては，全体システムが状態方程式で記述できるための条件，その状態方程式が大域的リプシッツ条件を満たすための条件，サブシステムの線形化システムから成る大規模システムが全体の線形化システムになるための条件を求めた．状態方程式表現や大域的リプシッツ条件が解の存在性や一意性を保証すること，および，われわれが扱う線形大規模システムにおいてサブシステムの多くが線形化システムであることを考慮すると，これらの条件を満たさない大規模システムは一意解をもたない，または線形化の意味をもたないシステムになっている可能性がある．したがって，大規模システムの解析や設計を行なう場合，他の条件などによって解の存在性や一意性，またはそのシステムが線形（化）システムとして意味のあるものであることが保証されない限り，これらの条件を満たすシステムだけを対象とするべきである．このように大規模システムの解析や設計の前提になるという意味で，本研究で得られた条件は重要である．

次に，安定化問題に関しては，対象を線形時間不変大規模システムに限って，サブシステムごとの安定化によって全体システムを安定にすることができるための条件を明らかにし，そのような安定化法を開発した．その条件は本質的にはサブシステムが完全可制御であることである．そして，その方法は本質的には状態フィードバックによる極指定法であるが，状態フィードフォワードも併用する方法である．緒論でも述べたように，大規模システムの設計法としては，変数の数や計算量が比較的少ない，サブシステムごとの設計によって全体システムを設計する方法でなければ実用的でない．この意味で，ここで開発された安定化法は有用である．

以上の2つの問題を考察した結果言えることは，線形性や時間不変性のような性質を除いて，状態方程式表現や解の存在性と一意性，大域的リプシッツ条

件，線形化および安定化などに関しては，サブシステムの性質が一般には全体システムに保存されないということである．つまり，大規模システムの性質は結合の仕方によっては，それを構成するサブシステムの性質とまったく異なることがあるのである．したがって，サブシステムの性質およびそれらの結合の仕方と全体システムの性質の関係を明らかにした本研究の意義は大きい．

謝　　辞

本研究の全過程を通じて，直接，理解あるご教授，ご指導，ご鞭撻を賜った大阪大学工学部，児玉慎三教授に心から感謝の意を表する．また，終始，親切なご指導，ご助言をいただいた前川肇講師に深く感謝する．

本研究をまとめるにあたってご指導，ご鞭撻を賜った神戸大学工学部，平井一正教授に心から感謝する．また，適切なご指導，ご教示を賜った大阪大学工学部，藤井克彦教授，鈴木胖教授，中西義郎教授，滑川敏彦教授，手塚慶一教授，西村正太郎教授，増渕正美教授に厚く御礼申し上げる．

筆者が大阪大学大学院工学研究科に在学中，ご指導いただいた熊谷信昭教授，板倉清保教授，神戸大学工学部でご指導いただいている鳴瀧良之助教授，瀬口靖幸教授，前川禎男教授，藤井進助教授に感謝する．

日頃，有益なご助言，ご討論をいただいている近畿大学理工学部，長田朗教授，馬場鍈一助教授，神戸大学工学部，羽根田博正助教授，北村新三助教授に深く感謝する．

本研究を行なうにあたって種々の面でご協力をいただいた立石電機株式会社，岩城周作氏，住友電気工業株式会社，川野強氏，国際電信電話株式会社，広瀬辰氏，松下電器産業株式会社，笹野良郎氏，新日本製鉄株式会社，藤川浩治氏，三菱重工業株式会社，梅藤治氏，住友金属工業株式会社，徳田将敏氏に御礼申し上げる．特に，笹野良郎氏には本論文第4章に関して，梅藤治氏には第9章に関して有益なご助言をいただいた．ここに記して心より感謝する．

最後に，親切なご援助をいただいた大阪大学工学部通信工学教室，電子工学教室，電気工学教室，神戸大学工学部システム工学教室，計測工学教室の諸氏に御礼申し上げる．

文　　献

(1) H. Chestnut and R. W. Mayer; Servomechanisms and Regulating System Design, John Wiley, New York, 1951.

(2) 市　川； 体系自動制御理論，朝倉書店，東京，昭41.

(3) H. H. Rosenbrock ; Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array, Proc. IEE, Vol. 116, No. 11, pp. 1929-1936 (Nov. 1969).

(4) J. J. Belletrutti and A. G. J. MacFarlane; Characteristic loci techniques in multivariable-control-system design, Proc. IEE, Vol. 118, No. 9, pp. 1291-1297 (Sep. 1971).

(5) R. E. Kalman ; Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), Vol. 5, pp. 102-119 (1960).

(6) M. Athans and P. L. Falb ;Optimal Control, McGraw-Hill, New York, 1966.

(7) B. D. O. Anderson and J. B. Moore ;Linear Optimal Control, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

(8) R. W. Brockett ; Poles, zeros and feedback :State space interpretation, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-10, No. 2, pp. 129-135 (April, 1965).

(9) V. M. Popov ;Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions, Rev. Roumaine. Sci. Tech. Electrotech. Energet., Vol. 9, No. 4, pp. 629-690 (1964).

(10) B. D. O. Anderson and D. G. Luenberger ; Design of multivariable feedback systems, Proc. IEE, Vol. 114, No. 3, pp. 395-399 (March 1967).

(11) W. M. Wonham ;On pole assignment in multi-input controllable systems, IEEE Trans. Automatic Control,

Vol. AC-12, No. 6, pp. 660-665 (Dec. 1967).

(12) J. D. Simon and S. K. Mitter ; A theory of modal control, Information and Control, Vol. 13, No. 4, pp. 316-353 (Oct. 1968).

(13) W. A. Wolovich ; On the stabilization of controllable systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol, AC-13, No. 5, pp. 569-572 (Oct. 1968).

(14) G. W. Johnson ; A deterministic theory of estimation and control, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-14, No. 4, pp. 380-384 (Aug. 1969).

(15) L. A. Zadeh and C. A. Desoer ; Linear System Theory, McGraw-Hill, New York, 1963.

(16) R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib ; Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.

(17) E. Kreindler and P. E. Sarachik ; On the concepts of controllability and observability of linear systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-9, No. 2, pp. 129-136 (April 1964).

(18) D. G. Luenberger ; An introduction to observers, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 596-602 (Dec. 1971).

(19) W. A. Wolovich ; On state estimation of observable systems, Reprints of the 1968 JACC, pp. 210-220 (1968).

(20) Y. Ö. Yüksel and J. J. Bongiorno, Jr ; Observers for linear multivariable systems with applications, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 603-613 (Dec. 1971).

(21) E. A. Coddington and N. Levinson ; Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

(22) J. K. Hale ; Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience, New York, 1969.

(23) S. K. Mitter ; Optimal control of distributed parameter systems, in Control of Distributed Parameter Systems, ASME Pub., 1969.

(24) R. E. Kalman, Y. C. Ho and K. S. Narendra ; Controllability of linear dynamical systems, Contributions to Differential Equations, Vol. 1, No. 2, pp. 189-213 (1962).

(25) R. W. Brockett ;Finite-Dimensional Linear Systems, John Wiley, New York, 1970.

(26) L. Weiss ; Controllability, realization and stability of discrete-time systems, SIAM J. Control, Vol. 10, No. 2, pp. 230-251 (May 1972).

(27) L. Weiss, R. E. Kalman ; Contributions to linear system theory, Int. J. Engng Sci. Vol. 3, pp. 141-171 (1965).

(28) R. E. Kalman ; A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng, Vol. 82, No. 1, pp. 35-45 (March 1960).

(29) R. E. Kalman ; On the general theory of control systems, Proc. 1st IFAC Congress, Moscow,(1960).

(30) R. E. Kalman and R. S. Bucy ; New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng, Vol. 83, No. 1, pp. 95-107 (March 1961).

(31) H. D' Angelo ; Linear Time-Varying Systems : Analysis and Synthesis, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

(32) 池田，前田； 状態変数フィードバックによるシステムの安定化について，昭和45年電気関係学会関西支部連合大会講演論文集，G200 (昭45).

(33) 池田，前田； 状態ベクトルフィードバックによるシステムの安定化について，電子通信学会 回路とシステム理論研究会資料，CT70-39 (昭45).

(34) 池田，前田，児玉； 線形時変システムの状態フィードバックによる安定化について，電子通信学会論文誌(C)，第54-C巻，第11号，

pp. 972-978 (昭46-11).

(35) 池田，前田，児玉； 一様完全可制御な線形時変システムの状態フィードバックによる安定化について，電子通信学会論文誌（D），第55-D巻第7号，pp. 442-447 (昭47-7).

(36) 池田，前田，児玉； 線形時変システムの状態フィードバックによる設計，電子通信学会論文誌（D），第55-D巻，第11号，pp. 707-714 (昭47-11).

(37) M. Ikeda, H. Maeda and S. Kodama ; Stabilization of linear systems, SIAM J. Control, Vol. 10, No. 4, pp. 716-729 (Nov. 1972).

(38) 池田，前田，児玉； 多変数フィードバック制御系の時間領域での設計：線形時変システムと非線形システムの安定化，システムと制御，第17巻，第11号，pp. 662-671 (昭48-11).

(39) M. Ikeda, H. Maeda and S. Kodama ; Estimation and feedback in linear time-varying systems : A determistic theory, SIAM. J. Control, Vol. 13, No. 2, pp.304-326(Feb.1975).

(40) L. M. Silverman and B. D. O. Anderson ; Controllability, observability and stability of linear systems, SIAM J. Control, Vol. 6, No. 1, pp. 121-130 (Feb. 1968).

(41) B. D. O. Anderson and J. B. Moore ; New results in linear system stability, SIAM J. Control, Vol. 7, No. 3, pp. 398-414 (Aug. 1969).

(42) J. C. Willems and S. K. Mitter ; Controllability, observability, pole allocation, and state reconstruction, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. 582-595 (Dec. 1971).

(43) R. Bellman ; Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953.

(44) E. F. Beckenbach and R. Bellman ; Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

(45) D. L. Lukes ; Stabilizability and optimal control,

Funkcial. Ekvac., Vol. 11, No. 1, pp. 39-50 (1968).

(46) D. L. Kleinman; An easy way to stabilize a linear constant system, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-15, No. 6, p. 692 (Dec. 1970).

(47) M. Slemrod; The linear stabilization problem in Hilbert space, J. Functional Analysis, Vol. 11, No. 3 pp. 334-345 (Nov. 1972).

(48) M. Slemrod; A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space, SIAM J. Control, Vol. 12, No. 3, pp. 500-508 (Aug. 1974).

(49) 池田，笹野，児玉； 状態フィードバックによる線形システムの設計と状態推定機の設計について，第2回ダイナミカルシステム・シンポジウム講演論文集，pp. 43-46 (昭47).

(50) 池田，笹野，児玉； 線形時変システムに対する状態推定機について，電子通信学会論文誌(D)，第55-D巻，第7号，pp. 448-455 (昭47-7).

(51) D. G. Luenberger; Observing the state of a linear system, IEEE Trans. Military Electronics, Vol. MIL-8, No. 2, pp. 74-80 (April 1964).

(52) D. G. Luenberger; Observers for multivariable systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-11, No. 2, pp. 190-197 (April 1966).

(53) J. J. Bongiorno, Jr. and D. C. Youla; On observers in multivariable control systems, Int. J. Control, Vol. 8, No. 3, pp. 221-243 (Sep. 1968).

(54) J. J. Bongiorno, Jr. and D. C. Youla; Discussion of "On observers in multivariable control systems", Int. J. Control, Vol. 12, No. 1, pp. 183-190 (July 1970).

(55) B. Gopinath; On the control of linear multiple input-output systems, Proc. 2nd Asilomar Conference on

Circuits and System Theory, pp. 21-29 (1968).
(56) T. E. Fortmann and D. Williamson; Design of low-order observers for linear feedback control laws, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-17, No. 3, pp. 301-308 (June 1972).
(57) 有本，ポーター； カルマンフィルタを併合した最適レギュレータの動作指標の悪化，計測自動制御学会論文集，第9巻，第4号，pp. 393-397 (昭48-8).
(58) 有本，青野； オブザーバを併合した最適レギュレータ，計測自動制御学会論文集，第10巻，第3号，pp. 278-283 (昭49-6).
(59) 前田，日野； n-次観測器と最小次元観測器の能力の比較，システムと制御，第17巻，第4号，pp. 253-257 (昭48-4).
(60) 笹野，池田； 線形時変システムに対する低次元の状態推定機について，電子通信学会論文誌(D)，第55-D巻，第9号，pp. 594-600 (昭47-9).
(61) 広瀬； 非線形制御システムの設計，大阪大学大学院工学研究科修士論文，昭47
(62) E. S. Kuh and R. A. Rohrer; The state-variable approach to network analysis, Proc. IEEE, Vol. 53, No. 7, pp. 672-686 (July 1965).
(63) C. A. Desoer and J. Katzenelson; Nonlinear RLC networks, Bell Syst. Tech. J., Vol. 44, No. 1, pp. 161-198 (Jan. 1965).
(64) C. Pottle; State-space techniques for general active network analysis, in System Analysis by Digital Computers, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Eds. John Wiley, New York, 1966.
(65) D. A. Calahan; Computer-Aided Network Design, McGraw-Hill, New York, 1968.
(66) T. Ohtsuki and H. Watanabe; State-variable analysis of RLC networks containing nonlinear coupling elements, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 1,

pp. 26-38 (Feb. 1969).

(67) A. Fettweis ; On the algebraic derivation of the state equations, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-16, No. 2, pp. 171-175 (May 1969).

(68) E. J. Purslow; Solvability and analysis of linear active networks by use of the state equations, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-17, No. 4, pp. 469-475 (Nov. 1970).

(69) A. Dervisoğlu ; State equations and initial values in active RLC networks, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-18, No. 5, pp. 544-547 (Sep. 1971).

(70) 児玉, 池田, 須田 ; 制御工学者のためのマトリクス理論(12), システムと制御, 第16巻, 第8号, pp. 641-648 (昭47-8).

(71) M. Ikeda and S. Kodama ; Large-scale dynamical systems : State equations, Lipschitz conditions and linearization, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-20, No. 3, pp. 193-202 (May 1973).

(72) C. V. Ramamoorthy ; Analysis of graphs by connectivity considerations, J. ACM, Vol. 13, No. 2, pp. 211-222 (April 1966).

(73) 児玉, 須田, 池田 ; 制御工学者のためのマトリクス理論(11), システムと制御, 第16巻, 第7号, pp. 562-568 (昭47-7).

(74) 児玉, 池田 ; 線形システムの中間標準形について, 第2回ダイナミカルシステム・シンポジウム講演論文集, pp. 13-16 (昭47).

(75) 児玉, 池田, 須田 ; 制御工学者のためのマトリクス理論(15) ; システムと制御, 第16巻, 第11号, pp. 859-866 (昭47-11).

(76) 児玉, 池田 ; 線形ダイナミカルシステムの表現式について, 電子通信学会論文誌(D), 第56-D巻, 第10号, pp. 553-560 (昭48-10).

(77) E. S. Kuh and I. N. Hajj ; Nonlinear circuit theory : Resistive networks, Proc, IEEE, Vol. 59, No. 3, pp. 340-355 (March 1971).

(78) H. E. Koenig, Y. Tokad and H. K. Kesavan ; Analysis of Discrete Physical Systems, McGraw-Hill, New York, 1967.

(79) N. DeClaris and R. Saeks ; Theoretic foundations of finite network and system analysis, in Aspects of Network and System Theory, R. E. Kalman and N. DeClaris, Eds., Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

(80) M. L. Dertouzos, M. Athans, R. N. Spann and S. J. Mason ; Systems, Networks and Computations : Basic Concepts, McGraw-Hill, New York, 1972.

(81) V. Dolezal ; Dynamics of Linear Systems, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1964.

(82) F. F. Wu and C. A. Desoer ; Global inverse function theorem, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, No. 2, pp. 199-201 (March 1972).

(83) L. M. Graves ; The Theory of Functions of Real Variables, McGraw-Hill, New York, 1956.

(84) R. S. Palais ; Natural operations on differential forms, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 92, pp. 125-141 (July 1959).

(85) W. C. Rheinboldt ; Local mapping relations and global implicit function theorems, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 138, pp. 183-198 (April 1969).

(86) J. Dieudonné ; Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1969.

(87) 梅藤，池田 ； 大規模線形システムの安定化について，第17回自動制御連合講演会（前刷），pp. 169-170 （昭49）.

(88) 池田，梅藤，児玉 ； 線形大規模システムの安定化，電気学会 自動制御研究会資料，AC-75-3 （昭50）.

(89) D. G. Luenberger ; Canonical forms for linear multivariable systems, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-12,

No. 3, pp. 290-293 (June 1967).
(90) W. M. Wonham ; On a matrix Riccati equation of stochastic control, SIAM J. Control, Vol. 6, No. 4, pp. 681-697 (Nov. 1968).
(91) 梅藤 ; 線形大規模ダイナミカルシステムの安定化に関する研究，大阪大学大学院工学研究科修士論文， 昭50.