OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	双結晶試料の粒界に生じる弾性拘束の解析法とその応用
Author(s)	有光, 隆
Citation	大阪大学, 1990, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2277
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

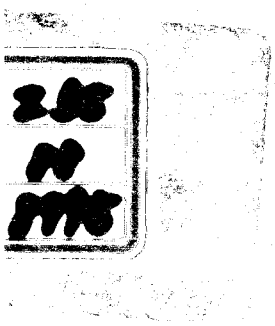
https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

双結晶試料の粒界に生じる弾性拘束の解析法とその応用

平成元年11月

有光　隆



双結晶試料の粒界に生じる弾性拘束の解析法とその応用

平成元年11月

有光　隆

目　次

第１章　緒論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 5

第２章　不均質弾性体に生じる不適合応力 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 8

２．１　緒言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8

２．２　一般的解法 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9

２．２．１　規準変形 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 9

２．２．２　表面力の不適合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 11

２．２．３　変位の不適合と界面転位 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 12

２．３　双結晶試料の一軸引張り ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 17

２．３．１　粒界と引張り方向とが垂直な場合 ・・・・・・・・・・・・ 17

２．３．２　粒界と引張り方向とが平行な場合 ・・・・・・・・・・・・ 21

２．３．２．１　２次元応力状態を仮定した解 ・・・・・・・・・・・ 21

２．３．２．２　単軸応力状態を仮定した別解 ・・・・・・・・・・・ 28

２．４　考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 34

２．５　結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 35

参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 36

第３章　異方性弾性体の平面応力解 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 38

３．１　緒言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 38

３．２　立方晶の平面応力解 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 39

３．２．１　数学的定式化 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 39
３．２．２　可能な応力分布 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 49
３．３　立方晶以外の結晶系の平面応力解 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 51
３．３．１　正方晶の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 51
３．３．２　六方晶の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 53
３．４　考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54
３．５　結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 56
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 57

第４章　一般化２次元弾性問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 59
４．１　緒言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 59
４．２　一般化２次元弾性問題の応力関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 60
４．３　Leipholzの応力関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 66
４．４　Fourier 変換による応力解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 68
４．５　考察 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 73
４．６　結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 82
参考文献 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 83

第５章　界面転位による不適合応力場 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 84
５．１　緒言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 84
５．２　連続分布転位 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 86
５．３　仮想表面力 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 91
５．４　不適合応力 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 98
５．５　結言 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・102

参考文献 ・・・

第１章　　序　論

古くから結晶粒界は転位論とも関連して変形機構[1]~[3]加工硬化[4]~[6]破壊[7]~[9]再結晶[10]~[12]などとの関わりにおいて研究されてきた。双結晶試料の作製技術が広まって以来種々の材料の双結晶試料が作製され、アルミニウム、鉛、亜鉛、銅などの低融点金属からニッケル、モリブデンなどの高融点金属まで双結晶を用いた各種の実験がなされている。そして、これら双結晶試料を用いた実験からいくつかの興味深い実験結果が報告されている。例えば、Hookら[1]は双結晶試料の引張り試験の際主すべり系以外に粒界近傍にのみ発生するすべり線を観察している。猪子ら[9]は、双結晶試料を用いて疲労試験した場合の結晶方位の違いによるクラック発生場所の違いについて議論している。また、双結晶とその成分結晶との応力歪線図を比較し、双結晶の変形応力が成分単結晶の変形応力よりも低下する場合があることを見いだしている[4]。これらの実験結果の解析には、双結晶試料の粒界近傍の応力解析と共に粒界と転位との相互作用についても考察する必要がある。さらに最近では異相双結晶の作製も可能[13]となり、不均質弾性体の弾性問題の解析がますます重要になってきた。

一般に、弾性問題において考える対象を均質として取り扱う場合には、全領域を一つの対象物として考察する。一方、不均質弾性体の問題においては、弾性定数、熱膨張係数などの熱力学特性についてそれらの巨視的特性と個々には均質であり全体として不均質体を構成している各要素の特性との関連について考察する場合[14]~[17]と、界面近傍の主として転位の運動により誘起される機械的性質について考察する微視的立場[18]~[20]とに大別できる。そして、これらの材料の微視的特性と巨視的特性とを橋渡しするマイクロメカニックスの立場[21]~[24]に立つと両者の統一的な取扱が可能となる。ただし、多結晶体とか複合材料においては、双結晶試料を用いた実験と比較して結晶方位の平均操作、結晶粒の

相互作用によるより複雑な問題を考慮しなければならない。しかし、双結晶試料を用いて粒界近傍の機械的性質を研究することは、微視的特性と巨視的特性とを橋渡しする考え方を検討実証するうえで多結晶体の粒界近傍を直接観察できるようになった今日においても依然として有効な実験方法といえよう。

双結晶試料のように弾性的に不均質な試料においては、一軸引張り試験などの単純な境界条件のもとであっても粒界近傍では粒界による弾性的拘束のため非常に複雑な応力場となる。しかも、双結晶試料とか異相双結晶試料では、複雑な多結晶体とか複合材料と比較して界面による拘束状態を非常に単純化できる反面、自由表面の影響を強く受けるため双結晶試料では必ずしも多結晶体における変形機構が主になっているとは限らない[25]。これらの点を明らかにするためには双結晶試料の粒界に生じる弾性的粒界拘束を自由表面の効果も含めて評価することが重要となる。

双結晶試料の粒界に生じる不適合応力の評価については、Hookら[1]が弾性歪の適合性から簡単に評価する方法を示しており実験結果の整理に広く利用されている。しかし、この方法は自由表面の影響がどの様になっているかを知る目的には不十分である。結晶粒界近傍の応力場を自由表面の効果をも含めて３次元的に求めるには、有限要素法、境界要素法などの数値計算による方法が一般的である[26]~[28]。しかし精度向上には計算機の大容量化、高速化が必要となり、またこれらの数値計算によって得られた結果から物理的知見を得ることは困難である。準解析的にはIyenger and Alwar[29]・[30]が２次元的に、Chou and Hirth[31]が３次元的にそれぞれ異なった方法で解を示している。また不均質弾性体の弾性問題に関する解析解としてはEshelby[32]・[33]のeigen歪による方法がよく知られている。なかでも無限弾性体中の楕円体介在物の問題が有名であり、介在物や第二相の析出に関わる内部応力の解析には有効である。しかし、Eshelbyの方法は介在物をその内部に含むマトリックスに境界条件が与えられる場合を想定しており、双結晶試料のように界面によって隔てられた２つの部分に対して共に境界条件が与えられる場合には適用できない。

阿部ら[34]~[36]は不均質物体の弾性変形を転位分布により表現する方法を示しているが、そこに用いられている「拘束率」なる概念についてはその物理的意味が必ずしも明確ではない。また大橋ら[37]、西岡ら[38],[39]は双結晶試料の弾性不適合応力の計算法として界面に転位(界面転位)を分布させて解く方法を示しており、本論文はこの考え方に基づき自由表面の影響をも含めて準解析的に解く方法とその応用とを示したものである。

解析的方法あるいは準解析的方法では陰に陽に何らかの形でGreen関数を用いた定式化が可能であるが、Green関数を用いた方法に自由表面を持ち込むことは問題を非常に複雑にする。一方、界面転位を用いる方法についてもGreen関数による定式化が可能であり本質的には同じであるが、界面転位を用いる方が物理的イメージをつかみ易い。任意の形状では困難であるが、半無限体、厚板などの場合には粒界にある界面転位が自由表面から受ける影響は鏡像転位、仮想表面力などを導入することにより評価できる。

本論文は、物理的知見を得やすい界面転位を用いて双結晶試料の粒界における弾性的拘束状態を自由表面の効果をも含めて評価する解析方法を示し、その一つの応用として粒界による弾性拘束と塑性変形を引き起こすすべり転位との相互作用について考察した研究成果をまとめたものである。

以下に本論文各章の内容の概略について具体的に述べる。

第２章では、一般的な境界条件のもとで双結晶試料などの不均質弾性体の界面に生じる弾性拘束に関して規準変形なる概念を導入し、それを用いて弾性拘束の一般的な解析法を示している。この規準変形は界面に表面力と変位との不適合をともない、前者の解消には粒界に物体力が分布した弾性問題の解を必要とするが、後者については界面の剛体変位に加えて界面転位の導入によって解消する。そしてこの界面転位の転位密度は外力に比例することを示している。

第３章では、異方性弾性板に対する平面応力解を板厚を通じていたるところ板厚方向の応力成分がゼロとなり３次元弾性体に対する適合条件をすべて満足する解として定義し、

この平面応力解が存在する条件を明らかにした。例として、立方晶、六方晶、正方晶において結晶軸(c軸)が試料表面に垂直な場合についてその平面応力解を論じている。第２章で導入した規準変形については、双結晶試料の粒界拘束の問題の場合には弾性的に均質な異方性弾性板を参照系として選ぶことになり、したがって規準変形として平面応力解を用いることのできる条件が有用となる。さらにこの参照系の板厚が十分薄い場合には応力成分を板厚方向に一様であるとして近似することが妥当であることを示している。

第４章では、１つの座標軸x_2に沿って$\partial \sigma_{ij}/\partial x_2 = 0$で定義される一般化２次元問題についてその応力関数が満たすべき条件を示している。また一般化２次元問題のうちでさらに$\partial u_i/\partial x_k = 0$の条件を課すと、自由表面を含む系に界面転位が存在する一般的な場合の解を求めるに際し必要となる仮想表面力の応力場が得られ、Fourier変換を用いることにより数値計算が可能なことを示している。

第５章では、界面転位による応力場が無限弾性体中の連続分布転位の応力場と自由表面での境界条件を満足させるべく自由表面に仮想表面力を分布させた系の応力場とを重ね合わせて得られることを示している。無限弾性体中で界面転位が連続分布する場合の応力場は離散分布する場合の解から導かれ、仮想表面力による応力場を求めるに際しては第４章で示した一般化２次元問題の解析方法を用いている。数値計算の結果、転位壁の影響は粒界近傍で大きく粒界から遠ざかるにしたがって減り、転位壁と自由表面の交線には応力集中が起こることを示している。

第６章では、ねじれ粒界に対応する２つの場合を例に取り、結晶方位と界面転位の密度との関係を導き、双結晶試料の各すべり系に生じる分解せん断応力を示した。これらから、粒界近傍に生じる不適合応力のために各すべり系の分解せん断応力が変化し、Schmid因子の大きさ以外に不適合応力もまた転位の運動に影響を与える可能性を示している。また、界面転位と粒界近傍の転位との相互作用の観点からすべり変形を定性的に考察し、実験結果を整理するために従来からよく用いられている応力伝達係数は不適合応力が無視できな

い場合には必ずしも適切なパラメータではないことを示している。

第７章は結論で、第２章から第６章で得られた成果を総括している。

参 考 文 献

(1) J.C.Livingston and B.Chalmers, Acta Met., 5(1957), 322.

(2) R.E.Hook and J.P.Hirth, Acta Met., 15(1967), 535.

(3) H.Fujita, K.Toyoda and Y.Kanetsuki, Trans. JIM, 16(1975), 151.

(4) 美馬源次郎，岡　俊博，猪子富久治，日本金属学会誌，35(1971)，647.

(5) Y.Chuang and H.Margolin, Met. Trans., 4(1973), 1905.

(6) 丸山公一，辛島誠一，池　政秀，日本金属学会誌，42(1978)，69.

(7) A.N.Stroh, Proc. Roy. Soc. (London) Ser., A223(1954), 404.

(8) 栗下裕明，大石　朗，久保晴義，吉永日出男，日本金属学会誌，47(1983)，546.

(9) 猪子富久治，安宅　健，木村　節，秋園幸一，美馬源次郎，辛島誠一，日本金属学会誌，46(1982)，672.

(10) J.E.Bailey and P.B.Hirsch, Pil. Mag., 5(1960), 485.

(11) S.P.Bellier and R.D.Doherty, Acta Met., 25(1977), 521.

(12) 稲数直次，山本　久，松井隆一，日本金属学会誌，49(1985)，1.

(13) 高杉隆幸，和泉　修，日本金属学会会報，6(1980)，430.

(14) 若島健司，日本複合材料学会誌，2，3(1976)，119.

(15) 若島健司，日本複合材料学会誌，2，4(1976)，161.

(16) T.Mori and K.Tanaka, Acta Met., 21(1973), 571.

(17) J.F.W.Bishop and R.Hill, Pil. Mag., 42(1951), 414.

(18) R. H. Wagoner, Met. Tras., 12A(1981), 2015.

(19) W. A. T. Clark and R. H. Wagoner, Proc. 9th Yamada Conf. on Dislocations in Solids, (1985), 647.

(20) J. R. Fekete, J. E. Talia and R. Gibala, ibid., 651.

(21) 村外志夫，森　勉，マイクロメカニックス　転位と介在物，培風館，1978.

(22) T. Mura, Micromechanics of defects in solids, Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.

(23) 大南正瑛　編，マイクロメカニックス入門，オーム社，1980.

(24) 岡村弘之，強度解析学　連続体力学的アプローチ，オーム社，1985.

(25) 藤田広志，日本金金属学会会報，14(1975)，837.

(26) 大橋鉄也，半沢　宏，岸田路也，日本金属学会誌，44(1980)，876.

(27) 浅田浩之，北川和夫，門前亮一，古川泰司，日本金属学会講演概要，(1985)，453.

(28) 宮本　博，日本金属学会シンポジウム予稿，(1974)，13.

(29) K. T. S. R. Iyenger and R. S. Alwar, Z. angew. Math. Phys., 14(1963), 344.

(30) K. T. S. R. Iyenger and R. S. Alwar, Z. angew. Math. Mech., 43(1963), 249.

(31) T. W. Chou and J. P. Hirth, J. Composite Materials, 4(1970), 102.

(32) J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc., A241(1957), 376.

(33) J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc., A252(1959), 561.

(34) 阿部武治，日本機械学会誌，42(1976)，1037.

(35) 阿部武治，日本機械学会誌，44(1978)，2559.

(36) 阿部武治，蒲田宇祐，日本機械学会誌，49(1983)，53.

(37) 大橋鉄也，半沢　宏，日本機械学会講演論文集，No.800-10 (1980)，181.

(38) K. Nishioka, Y. Arimitsu and T. Takai, Grain Boundary Structure and Related Phenomena, Japan Inst. Metals, (1986), 915.

(39) K. NIshioka, T. Takai, Y. Arimitsu and T. Ohashi, Mechanics of Materials, 6(1987), 139.

第２章　　不均質弾性体に生じる不適合応力

２．１　緒言

物体を均質な弾性体で近似する考え方は昔から用いられているいわゆる巨視的設計の段階では有効であった。しかし次第に物体の微視構造が解明されはじめ、従来均質な物体として取り扱って来たものもさまざまな階層からなる領域の集合体、つまり不均質物体であることが明らかになってきた。このような領域間に働く変形拘束は材料の機械的性質に大きな影響を与えると考えられる。この問題を系統的に実験的に解明しようとする目的で用いられる試料が双結晶試料である。

Hirth[1]は外力のもとにある不均質体において粒界や相境界で変位の連続性を満足するために引き起こされる不適合応力について議論している。この不適合応力を解析するには有限要素法などの数値計算が一般的であり、宮本[2]、大橋ら[3]、北川ら[4]により解析されてきた。Iyenger and Alwar[5],[6]はそれぞれの領域のAiryの応力関数をFourier級数で表す方法により２次元問題の解を示し、Chou and Hirth[7]は変位を級数で表す方法により３次元問題の解を示している。またBilby[8],[9]は界面転位の概念を導入し、大橋ら[10]、西岡ら[11],[12]はそれをこの問題に適用して一様な外力のもとでの双結晶や異相双結晶に生じる不適合応力を評価している。そして、界面転位による応力場を計算するに際して等方性近似を用いたとしても有限要素法による結果や解析解に対して十分な精度で一致することがわかっている。

双結晶試料を用いた実験では棒状試料も用いられているが板状試料によるものが圧倒的に多い。また粒界は引張り軸に対して垂直もしくは平行な場合が多い。これらの条件は実験を容易にするだけでなく解析する際にも非常に都合が良い。本章では、一般的な境界条件と載荷機構とをもった一般的な試料について規準変形に関連する弾性問題の基本的概

念を説明し、板状双結晶試料に関して粒界が引張り軸に対して垂直な場合と平行な場合とを例に挙げ具体的解析手順を示している。

２．２ 一般的解法

２．２．１ 規準変形

規準変形（reference deformation）の概念を説明するために図2-1に示すような双結晶試料を例として考える。板厚は一様で領域Ⅰ，Ⅱはそれぞれ弾性的に均質であるとする。それぞれの領域が均質と考えられる限り試料としては異相双結晶、２相複合材であっても以下の考え方は同じである。弾性変形を与える任意の境界条件のうち領域Ⅰに属するものをBC(Ⅰ)で表し領域Ⅱに対してはBC(Ⅱ)で表す。図中の粒界Ｂの存在により実際の変形は複雑になる。

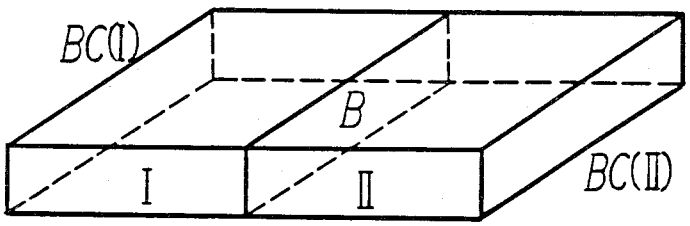
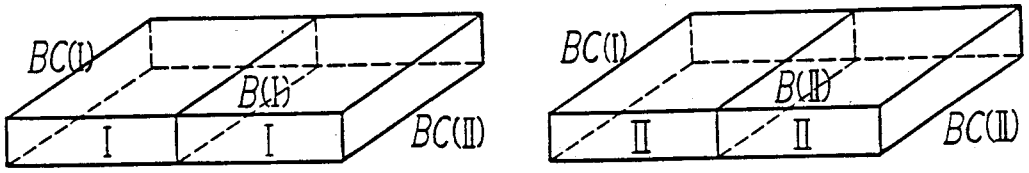


図2-1 板状双結晶試料と境界条件

次に図2-2 (a),(b)に示す２つの参照系を考える。参照系(a)では試料全体が実際の系の領域Ⅰと同じ結晶方位をもち参照系(b)では領域Ⅱと同じ結晶方位を持っている。これら２つの参照系での境界条件は実際の系と完全に一致し、参照系中のB(Ⅰ)，B(Ⅱ)は実際の系のＢに相当する位置にある仮想境界を表す。



(a) (b)

図2-2　規準変形を決定するための参照系

図2-2 (a)の仮想境界B(Ⅰ)の左側と(b)の仮想境界B(Ⅱ)の右側の変形を規準変形と呼ぶ。実際の系に起こる変形は規準変形とは異なっているが、その違いは図2-1に示されている境界Bが存在するために生じた「不適合」の影響によるものと考えることができる。

それぞれの参照系を仮想境界B(Ⅰ), B(Ⅱ)に沿って切断し、規準変形が変わらないように表面力$\boldsymbol{F}$(Ⅰ)と$\boldsymbol{F}$(Ⅱ)とを仮想表面上に分布させる。図2-2 (a)の左部分と(b)の右部分を接続して実際の系を形成しようとした場合、一般に界面での表面力と変位との連続性は満足されない。本来界面においても作用反作用の法則と変位の連続性とが成立しなければならず実際の系とはこれらの点で異なる。これらの不連続性を以下において「表面力の不適合」と「変位の不適合」と呼び、表面力と変位との不適合を解消するために生じる応力を「不適合応力」と呼ぶ。図2-1で与えられているもとの問題の解は規準変形の解に表面力と変位との不適合を解消するための解を重ね合わせることによって得られる。したがって、求める応力場は規準変形による応力場と不適合応力による応力場との重ね合わせとなる。

図2-2では、(a), (b)に示す２つの参照系の境界条件はどちらも実際の系と完全に一致するものとしている。しかしながら、参照系に対するこの境界条件の与え方は上述の考え方を適用するための十分条件ではあるが必ずしも必要条件ではない。参照系(a), (b)の境界条件として実際の系と一致する必要があるのは図2-2 (a)ではBC(Ⅰ)、図2-2 (b)では

BC(Ⅱ)であり、(a)におけるBC(Ⅱ)、(b)におけるBC(Ⅰ)は各々BC(Ⅰ), BC(Ⅱ)と共に力とモーメントとの釣合条件を満足する限り任意である。これらの境界条件の選び方に応じて規準変形は変わり、したがって不適合応力も変わる。この意味では与えられた系に対する不適合応力の大きさには参照系に対する境界条件の選び方に関連した任意性がある。

２．２．２　表面力の不適合

表面力の不適合を解消するには次式で表される物体力を図2-3に示すように双結晶の界面Ｂに分布した弾性問題を解けばよい。

$$\boldsymbol{F} = -[\boldsymbol{F}(\mathrm{I}) + \boldsymbol{F}(\mathrm{II})] \quad , \tag{2.2.1}$$

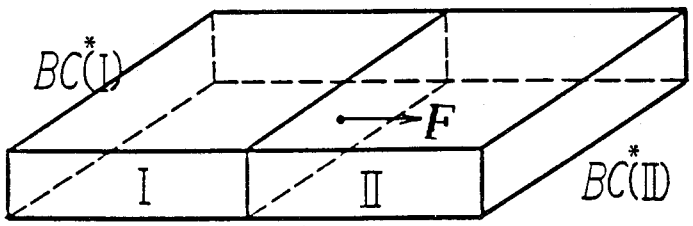


図2-3　表面力の不適合を解消するための弾性問題

図2-3の境界条件BC*(Ⅰ)とBC*(Ⅱ)はもとの問題の境界条件BC(Ⅰ), BC(Ⅱ)とは異なり次のようにして決定される。規準変形と図2-3の問題とを重ね合わせた際、その境界条件は与えられた問題である図2-1の境界条件BC(Ⅰ), BC(Ⅱ)と一致するように決める。つまり、境界条件BC(Ⅰ)とBC(Ⅱ)とが表面力で与えられているならBC*(Ⅰ)とBC*(Ⅱ)とは表面力ゼロの境界条件となり、変位で与えられているならBC*(Ⅰ)とBC*(Ⅱ)とは変位ゼロの境界条件となる。ここで図2-1の試料は全体として釣合っているので、図2-3において物体力$\boldsymbol{F}$と表

面力の境界条件(BC*(Ⅰ)BC*(Ⅱ)が変位で与えられる場合は対応する表面力)とは合力、合モーメントが釣合状態にある。

(2.2.1)式で与えられる物体力の役割について考えるために図2-4に示すように境界に厚みを考える。もちろん後でその厚さゼロの極限を考える。境界条件BC*(Ⅰ)とBC*(Ⅱ)とのもとで物体力Fが作用することにより図2-4に示すような表面力$F^*(Ⅰ)$と$F^*(Ⅱ)$が現れるとする。境界の領域に関する力の釣合から次式が成り立つ。

$$F - F^*(Ⅰ) - F^*(Ⅱ) = 0 \quad , \qquad (2.2.2)$$

ここで$F^*(Ⅰ)$と$F^*(Ⅱ)$とはそれぞれ境界の領域から領域ⅠとⅡとの側に作用している表面力を表す。

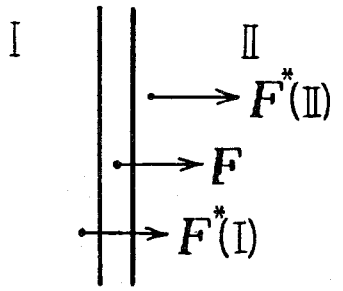


図2-4　界面に作用する物体力の役割

境界層の厚みゼロの極限を考え、(2.2.1)式に(2.2.2)式を代入すれば次式が得られる。

$$F(Ⅰ) + F^*(Ⅰ) = -[F(Ⅱ) + F^*(Ⅱ)] \quad . \qquad (2.2.3)$$

(2.2.3)式は境界での作用反作用の法則の成立を表している。したがって表面力の不適合は図2-3の解を規準変形に重ね合わせることにより解消することができる。ここで注意すべき点は物体力Fは新たな変位の不適合を引き起こさないということである。

２．２．３　変位の不適合と界面転位

図2-2 (a)の左側部分と(b)の右側部分とを接合して実際の系を形成すると一般には粒界で変位の連続性が満足されない。この変位の不適合を解消するために次の３段階の手続き

を行う。

(1) 粒界上に任意の点Pを選び、これに対応する図2-2 (a), (b)の界面B(Ⅰ), B(Ⅱ)上の点をP(Ⅰ), P(Ⅱ)とする。これらの点は変形後それぞれ異なった位置に移動し、この差を$\delta \mathbf{u}$とすると次式のように書ける。

$$\delta \mathbf{u}(P) = \mathbf{u}[P(Ⅱ)] - \mathbf{u}[P(Ⅰ)] \qquad (2.2.4)$$

この食い違いについては規準変形に図2-5で示される弾性問題の解を重ね合わせることによってそれを取り除くことができる。この図2-5は領域Ⅱを示しており、境界条件BC*(Ⅱ)のもとで仮想境界B(Ⅱ)を剛体的に$-\delta \mathbf{u}(P)$だけ並進させて点P(Ⅰ)とP(Ⅱ)とを重ね、界面上に相対変位を測る基準点Pをつくる。

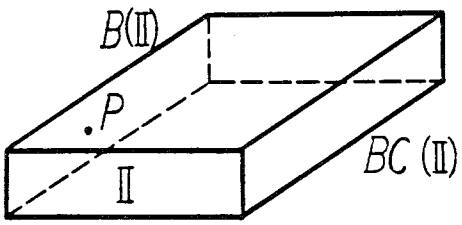


図2-5 剛体変位の不適合を解消するための弾性問題

(2) 境界条件BC*(Ⅱ)が変位ゼロの条件を含む場合、界面B(Ⅱ)の剛体的並進は界面B(Ⅱ)に表面力$\boldsymbol{F}^{**}(Ⅱ)$を分布させることにより行う。これにより実際の系の境界にはさらに別の表面力の不適合を生じる。しかしこの不適合を解消するには2.2.2節で解いた弾性問題の物体力$\boldsymbol{F}$に$-\boldsymbol{F}^{**}(Ⅱ)$を単に加え合わせるだけで解消できる。境界条件BC*(Ⅱ)が表面力ゼロのみからなる場合は、剛体的並進により新たな表面力の不適合は生じない。

(3) 解消されずに残った変位の不適合は次式となる。

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathrm{II}) - \mathbf{u}(\mathrm{I}) - \delta \mathbf{u}(\mathrm{P}) \qquad (2.2.5)$$

ここで$\mathbf{u}(\mathrm{I})$と$\mathbf{u}(\mathrm{II})$は図2-2の参照系の仮想境界B(Ⅰ)、B(Ⅱ)での変位を表す。この不適合を解解消するために図2-6に示すような境界条件BC*(Ⅰ), BC*(Ⅱ)のもとで界面Bに界面転位(surface dislocation)が分布する弾性問題を考える。不適合を解消するために必要な転位密度はBilby[8],[9]によって与えられているが、ここではここでの問題に即して説明する。

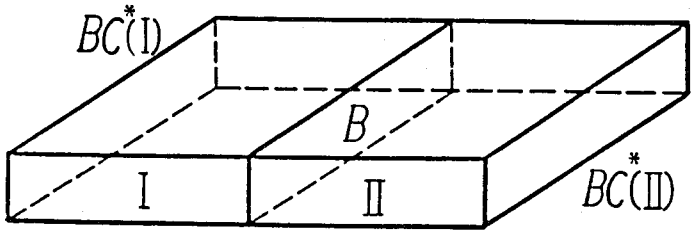


図2-6　変位の不適合を解消するための弾性問題

図2-7に示すように境界Bと交差するようにBurgers回路Cを考える。境界に垂直で領域ⅠからⅡへ向かう単位ベクトルを$\mathbf{n}$とする。また紙面に垂直な単位ベクトルを$\mathbf{m}$とし右ネジが$\mathbf{m}$方向に進むときネジを回転する方向を回路Cの方向とする。Burgersベクトルの方向は実際の格子におけるSF/RH法[13]で表す(理想結晶中の対応回路ではFS/RHとなる)。回路Cで囲まれた面の全Burgersベクトル$\mathbf{b}$は次式で与えられる[14]。

$$\mathbf{b} = -\oint \delta \mathbf{u}^{\mathrm{p}} \quad , \qquad (2.2.6)$$

ここで$\delta \mathbf{u}^{\mathrm{p}}$はCに沿った線要素の先端の後端に対する塑性的な相対変位を表している。不

適合を解消するのに必要な塑性的変位はちょうど(2.2.5)の$\delta \mathbf{u}$の逆となりこの問題については次式を得る。

$$\mathbf{b} = -[\delta \mathbf{u}(Q) - \delta \mathbf{u}(R)] \quad . \qquad (2.2.7)$$

(2.2.5)式を(2.2.7)式に代入しその結果を面積ℓdで割り$\ell \to 0$の極限をとると連続分布転位の単位面積当りのBurgersベクトルを次式のように得る。

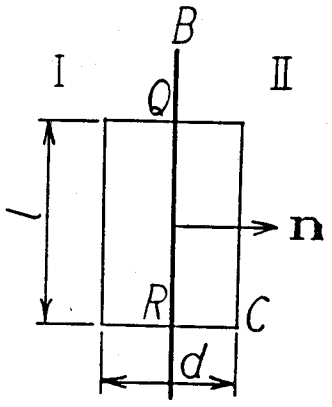


図2-7　転位密度を決めるBurgers回路

$$\lim_{\ell \to 0}(b_i/\ell d) = -[u_{i',j}(\mathrm{II}) - u_{i',j}(\mathrm{I})] \in_{jkl} m_k n_l / d \ , \qquad (2.2.8)$$

ここで$\in_{jkl}$は交代テンソルを表し、指標は3次元についての総和規約にしたがうものとする。またここで$,_j$はd/dx_jを表している。(2.2.8)式にdを乗じると境界Bでの単位長さの線要素と交わる転位のBurgersベクトルを次式のように得る。

$$a_i(\mathbf{m}) = -[u_{i',j}(\mathrm{II}) - u_{i',j}(\mathrm{I})] \in_{jkl} m_k n_l \ , \qquad (2.2.9)$$

ここで$\mathbf{m}$は線要素に垂直で界面内にある単位ベクトルを表す。(2.2.5)式の剛体的並進$-\delta \mathbf{u}(P)$は転位密度$a_i(\mathbf{m})$に影響しないことが分かる。任意の方向$\mathbf{m}$に対する$a_j(\mathbf{m})$は、以下に示すように、独立で既知な2方向を$\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$として$a_j(\mathbf{m}_1)$, $a_j(\mathbf{m}_2)$によって表すことができる。図2-8に示されているように単位ベクトル$\mathbf{n}$が紙面から垂直に出ているとし、長さがℓ_1, ℓ_2, ℓの3個の線分を考えそれらに垂直な方向を$\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}$とする。ここで(2.2.7)式の導出に用いた考え方を応用すると次式が得られる。

$$\mathbf{b}(\mathbf{m}_1) = -[\delta\,\mathbf{u}(A) - \delta\,\mathbf{u}(C)] \quad , \tag{2.2.10}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{m}_2) = -[\delta\,\mathbf{u}(B) - \delta\,\mathbf{u}(A)] \quad , \tag{2.2.11}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{m}) = -[\delta\,\mathbf{u}(C) - \delta\,\mathbf{u}(B)] \quad . \tag{2.2.12}$$

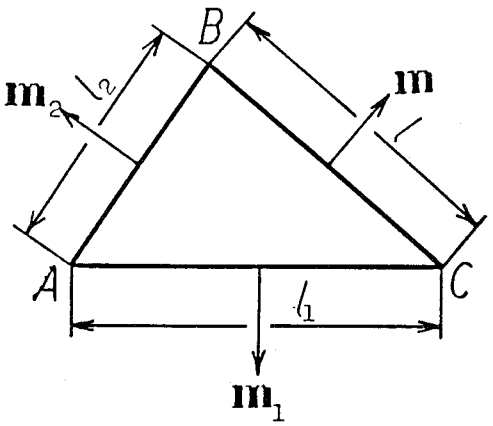


図2-8　粒界面内の３つの方向

これらの式から次式を得、

$$\mathbf{b}(\mathbf{m})/\ell = -[(\ell_1/\ell)\,\mathbf{b}(\mathbf{m}_1)/\ell_1 + (\ell_2/\ell)\,\mathbf{b}(\mathbf{m}_2)/\ell_2] \quad , \tag{2.2.13}$$

したがって次式を得る。

$$\mathbf{a}(\mathbf{m}) = -[(\ell_1/\ell)\,\mathbf{a}(\mathbf{m}_1) + (\ell_2/\ell)\,\mathbf{a}(\mathbf{m}_2)] \quad . \tag{2.2.14}$$

界面内の直交座標の２つの軸を$\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ に選べば(2.2.14)式は

$$a_i(\mathbf{m}) = m_j a_{ji} \quad , \tag{2.2.15}$$

となる。ここでa_{ji}はj軸に沿った単位ベクトルを$\mathbf{e}_j$としたときの転位密度テンソル$\mathbf{a}(\mathbf{e}_j)$のi成分を表す。

境界での連続分布転位はBilby[8],[9]によって界面転位として表されている。変位の不適合は上述のように２つの段階を経て解消される。第１段階として任意の点ＰをB(Ⅱ)の剛体的並進によって一致させ、次の段階としてはＰ点との相対的不適合を界面転位の導入によって解消する。変位の不適合を解消するためにこのようにして導入される界面転位の密度は外力に比例し外力が作用しない場合には消失する。また界面転位は表面力の連続性が保たれているSomigliana転位[16],[17]であるので、新たな表面力の不適合を引き起こさない。

不適合応力は2.2.2節と2.2.3節との弾性問題の応力場を重ね合わせることにより得られ、全応力は参照系の応力場に不適合応力を重ね合わせることにより得られる。界面転位の応力場を計算するに際しては、後述するように試料全体を均質かつ等方性として近似しても実際の問題に対して十分有用と考えられる。

２．３　双結晶試料の一軸引張り

２．３．１　粒界と引張り軸とが垂直な場合

具体的に不適合応力を解析する例として、図2-9に示すような一様な板厚で粒界と引張り軸とが垂直な双結晶試料の引張り試験を考える。図のように座標軸をとり粒界は平面でx_2-x_3面に平行と仮定する。載荷機構としては、試料のx_1軸に垂直な両端面においてx_1軸に沿った均一な一軸引張り応力σ_aが保たれるとする。変位を一意的に決定するために点Ａ

(x_1^0, x_2^0, x_3^0)を固定し、A点に関する回転を取り除くためにA点近傍も固定する。

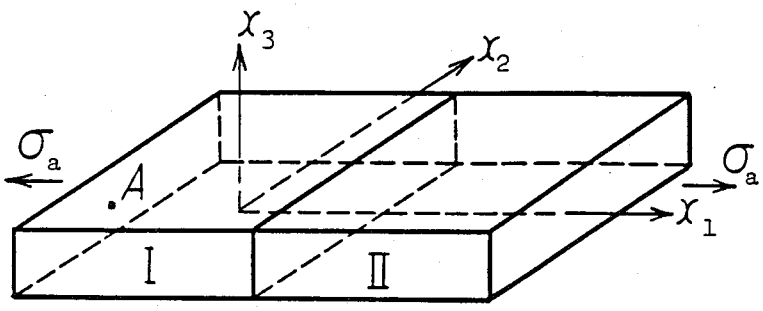


図2-9　粒界面が引張り軸に垂直な板状双結晶試料

次に結晶方位がそれぞれI、IIの部分の方位からなる単結晶の参照系を考え実際の系と同じ境界条件のもとにあるとする。結晶Iに対して変位は次式のようになる。

$$u_1(\mathrm{I}) = S_{11}(\mathrm{I})\sigma_a(x_1 - x_1^0) + \frac{1}{2}S_{16}(\mathrm{I})\sigma_a(x_2 - x_2^0) + \frac{1}{2}S_{15}(\mathrm{I})\sigma_a(x_3 - x_3^0) \quad , \tag{2.3.1}$$

$$u_2(\mathrm{I}) = S_{12}(\mathrm{I})\sigma_a(x_2 - x_2^0) + \frac{1}{2}S_{14}(\mathrm{I})\sigma_a(x_3 - x_3^0) + \frac{1}{2}S_{16}(\mathrm{I})\sigma_a(x_1 - x_1^0) \quad , \tag{2.3.2}$$

$$u_3(\mathrm{I}) = S_{13}(\mathrm{I})\sigma_a(x_3 - x_3^0) + \frac{1}{2}S_{15}(\mathrm{I})\sigma_a(x_1 - x_1^0) + \frac{1}{2}S_{14}(\mathrm{I})\sigma_a(x_2 - x_2^0) \quad , \tag{2.3.3}$$

ここで$S_{11}(\mathrm{I})$などは結晶方位Iに対する弾性コンプライアンスを表す。また、結晶IIに対する変位も$S_{11}(\mathrm{I})$などの代わりに結晶方位IIに対する弾性コンプライアンス$S_{11}(\mathrm{II})$など

を用いれば上述の式と同じように表すことができる。

粒界が $x_1=x_1^*$ の位置にあるとすると、規準変形は $x_1 \leqq x_1^*$ に対して $u_i(\mathrm{I})$ で、$x_1 \geqq x_1^*$ に対しては $u_i(\mathrm{II})$ により与えられる。ここに考察している問題は一様な引張り応力のもとにあるため、表面力の不適合は起こらない。

粒界内に任意の点 $P(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ を選び、Pでの変位の不適合 $\delta \mathbf{u}(P)$ を領域IIの界面を剛体的に並進することにより解消することを考える。この場合 $\delta \mathbf{u}(P)$ の成分は次式により得られる。

$$\delta u_1(P) = (S_{11}(\mathrm{II}) - S_{11}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_1^* - x_1^0) + \frac{1}{2}(S_{16}(\mathrm{II}) - S_{16}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_2^* - x_2^0) + \frac{1}{2}(S_{15}(\mathrm{II}) - S_{15}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_3^* - x_3^0) \quad , \tag{2.3.4}$$

$$\delta u_2(P) = (S_{12}(\mathrm{II}) - S_{12}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_2^* - x_2^0) + \frac{1}{2}(S_{14}(\mathrm{II}) - S_{14}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_3^* - x_3^0) + \frac{1}{2}(S_{16}(\mathrm{II}) - S_{16}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_1^* - x_1^0) \quad , \tag{2.3.5}$$

$$\delta u_3(P) = (S_{13}(\mathrm{II}) - S_{13}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_3^* - x_3^0) + \frac{1}{2}(S_{15}(\mathrm{II}) - S_{15}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_1^* - x_1^0) + \frac{1}{2}(S_{14}(\mathrm{II}) - S_{14}(\mathrm{I}))\sigma_a(x_2^* - x_2^0) \tag{2.3.6}$$

結晶IIには境界条件として変位に関する条件が含まれていないので界面を $-\delta \mathbf{u}(P)$ だけ剛体的に並進させてもそのことによる弾性変形は生じない。

次に、界面転位の転位密度を導くわけであるが、界面が x_2-x_3 面に平行であるので $\mathbf{a}(\mathbf{e}_2)$ と $\mathbf{a}(\mathbf{e}_3)$ とを決定すれば良いことになる。(2.3.1)～(2.3.3)式と $u_i(\mathrm{II})$ に対する同様な式とを(2.2.9)式に代入すると次式が得られる。

$$a_{21} = \frac{1}{2}(S_{15}(\mathrm{II}) - S_{15}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.7}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}(S_{14}(\mathrm{II}) - S_{14}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.8}$$

$$a_{23} = (S_{13}(\mathrm{II}) - S_{13}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.9}$$

$$a_{31} = -\frac{1}{2}(S_{16}(\mathrm{II}) - S_{16}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.10}$$

$$a_{32} = -(S_{12}(\mathrm{II}) - S_{12}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.11}$$

$$a_{33} = -\frac{1}{2}(S_{14}(\mathrm{II}) - S_{14}(\mathrm{I}))\sigma_a \quad , \tag{2.3.12}$$

ここでa_{22}とa_{33}とはらせん転位、その他は刃状転位の転位密度を表す。不適合応力はこれらの界面転位による応力場の重ね合わせによって得られる。また界面転位密度は外力に比例し外力が作用しなくなると転位は消失するので、いわゆる「粒界の転位モデル」[17]などとは本質的に異なることがわかる。

２．３．２　粒界と引張り軸とが平行な場合

２．３．２．１　２次元応力状態を仮定した解

図2-10に示すように引張り軸と粒界とが平行な双結晶試料の引張り試験を考える。粒界はx_3-x_1面に平行で、変形状態はx_1方向に一様とする。前節で考察したモデルが「応力一定モデル」[18]であるのに対していわゆる「歪一定モデル」[19]の様な印象を受けるが、引張り軸と粒界とが平行な双結晶試料の単軸引張り試験における載荷機構をいかなる境界条件によって表示するかは簡明でない。そこで、双結晶試料に対する境界条件の考察に先立ってまず参照系に対する境界条件を考えることにし、例えば参照系に対して次のような手順で境界条件を与えてみよう。

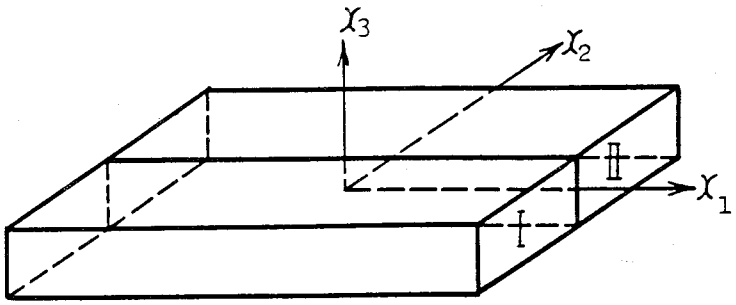


図2-10　粒界面が引張り軸に平行な板状双結晶

(1) 参照系Ⅰ及びⅡに対して一様な変形を与えるため参照系の各点において次式で与えられる変形を仮定する。

$$u_{1',1} = \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.13}$$

$$u_{2',1} = 0 \quad , \tag{2.3.14}$$

$$u_{3',1} = 0 \quad , \tag{2.3.15}$$

$$u_{i',2} = 0 \qquad (i = 1,2,3) \tag{2.3.16}$$

(2) 参照系は次式が成立する平面応力状態にあるとする。

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad . \tag{2.3.17}$$

更に、第３章で説明するが参照系の板厚が十分薄い場合には各応力成分は板厚方向に一様と近似することができる。

(2.3.13)～(2.3.16)式より変位は次式で表される関数でなければならない。

$$u_1 = \varepsilon_0 x_1 + u(x_3) \quad , \tag{2.3.18}$$

$$u_2 = u_2(x_3) \quad , \tag{2.3.19}$$

$$u_3 = u_3(x_3) \quad . \tag{2.3.20}$$

したがって、(2.3.13)～(2.3.16)式は、境界条件として(2.3.18)～(2.3.20)式によって定められる変位の境界条件を想定しているものと解釈できる。

歪成分ε_{ij}は線形弾性論のもとでは次式で定義できる。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i',j} + u_{j',i}) \quad , \tag{2.3.21}$$

参照系Ⅰに対する応力と歪との関係は(2.3.17)式の成立のもとでは次式のようになり、更

に歪に関する関数形としては(2.3.18), (2.3.19), (2.3.20)式を(2.3.21)式に代入することにより次式の右端の表式が得られる。

$$\varepsilon_{11}(I) = S_{11}(I)\sigma_{11}(I)+S_{12}(I)\sigma_{22}(I)+S_{16}(I)\sigma_{12}(I) = \varepsilon_0 \quad , \qquad (2.3.22)$$

$$\varepsilon_{22}(I) = S_{12}(I)\sigma_{11}(I)+S_{22}(I)\sigma_{22}(I)+S_{26}(I)\sigma_{12}(I) = 0 \quad , \qquad (2.3.23)$$

$$\varepsilon_{33}(I) = S_{13}(I)\sigma_{11}(I)+S_{23}(I)\sigma_{22}(I)+S_{36}(I)\sigma_{12}(I) = u_3(x_3),_3 \quad , \qquad (2.3.24)$$

$$2\varepsilon_{23}(I) = S_{14}(I)\sigma_{11}(I)+S_{24}(I)\sigma_{22}(I)+S_{46}(I)\sigma_{12}(I) = u_2(x_3),_3 \qquad (2.3.25)$$

$$2\varepsilon_{31}(I) = S_{15}(I)\sigma_{11}(I)+S_{25}(I)\sigma_{22}(I)+S_{56}(I)\sigma_{12}(I) = u(x_3),_3 \quad , \qquad (2.3.26)$$

$$2\varepsilon_{12}(I) = S_{16}(I)\sigma_{11}(I)+S_{26}(I)\sigma_{22}(I)+S_{66}(I)\sigma_{12}(I) = 0 \quad , \qquad (2.3.27)$$

参照系Ⅱに対しても同様な式が得られる。参照系Ⅰ及びⅡに対して関数 u_1, u_2, u_3 は一般に異なるため歪成分 ε_{33}, ε_{23}, ε_{31} は2つの参照系において一般に異なるが、歪成分 ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} は2つの参照系において一致する。界面において不連続となる歪成分として ε_{33}, ε_{23}, ε_{31}、一方界面において連続性を維持する歪成分として ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} があることがわかる。(2.3.22), (2.3.23), (2.3.27)式から各応力成分 $\sigma_{11}(I)$, $\sigma_{22}(I)$, $\sigma_{12}(I)$ は次式のように求まり、ε_{11}, ε_{22} 及び ε_{12} が x_3 に依存しないことから $\sigma_{11}(I)$, $\sigma_{22}(I)$ 及び $\sigma_{12}(I)$ も x_3 に依存しない定数となることがわかる。

$$\sigma_{11}(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}\left(S_{22}(I)S_{66}(I) - S_{26}(I)S_{26}(I)\right) \quad , \qquad (2.3.28)$$

$$\sigma_{22}(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}\left(S_{16}(I)S_{26}(I) - S_{12}(I)S_{66}(I)\right) \quad , \qquad (2.3.29)$$

$$\sigma_{12}(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}\left(S_{12}(I)S_{26}(I) - S_{16}(I)S_{22}(I)\right) \quad , \tag{2.3.30}$$

但し、D(I)は(2.3.22), (2.3.23), (2.3.27)式の係数から作られる行列式で次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D(I) = {} & S_{11}(I)S_{22}(I)S_{66}(I)+S_{12}(I)S_{26}(I)S_{16}(I)+S_{16}(I)S_{12}(I)S_{26}(I) \\ & -S_{11}(I)S_{26}(I)S_{26}(I)-S_{12}(I)S_{12}(I)S_{66}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)S_{16}(I) \ . \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

参照系Ⅱに対しても同様にして$\sigma_{11}(Ⅱ)$, $\sigma_{22}(Ⅱ)$, $\sigma_{12}(Ⅱ)$が得られる。このうちσ_{22}, σ_{12}は粒界における表面力の不適合Fを生じさせ、(2.2.1)式より界面に分布すべき物体力$F(F_1, F_2, F_3)$は次式のものとなる。

$$F_1 = -\varepsilon_0\left[\frac{S_{12}(Ⅱ)S_{26}(Ⅱ)-S_{16}(Ⅱ)S_{22}(Ⅱ)}{D(Ⅱ)} - \frac{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)}{D(I)}\right] \ , \tag{2.3.32}$$

$$F_2 = -\varepsilon_0\left[\frac{S_{16}(Ⅱ)S_{26}(Ⅱ)-S_{12}(Ⅱ)S_{66}(Ⅱ)}{D(Ⅱ)} - \frac{S_{16}(I)S_{26}(I)-S_{12}(I)S_{66}(I)}{D(I)}\right] \ , \tag{2.3.33}$$

$$F_3 = 0 \tag{2.3.34}$$

$F_3 = 0$ であることから厚板に(2.3.32), (2.3.33)式で表される物体力が作用した場合の応力場に対してx_1-x_2面内の２次元応力を想定すると、Howland[20]による解が適用できる。しかし２次元応力状態ではσ_{33}, σ_{23}, σ_{31}などの板厚方向の応力成分は得られない。このよ

うな応力成分は粒界から遠ざかるに従って減衰するためと考えられるが、表面力の不適合によって生じる粒界近傍での不適合応力を正しく評価するにはこの問題も３次元問題として解く必要がある。この問題は無限弾性体の解(Kelvinの解[21],[22]) σ_{ij}^{K}と半無限弾性体の解(Mindlinの解[23],[24])とを組み合わせることにより解ける。鏡像の原理[25]を用いると求める解σ_{ij}は次式となる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{K} + \sigma_{ij}^{C1} + \sigma_{ij}^{C1'} + \sigma_{ij}^{C2} + \sigma_{ij}^{C2'} + \sigma_{ij}^{C3} + \cdots\cdots , \qquad (2.3.35)$$

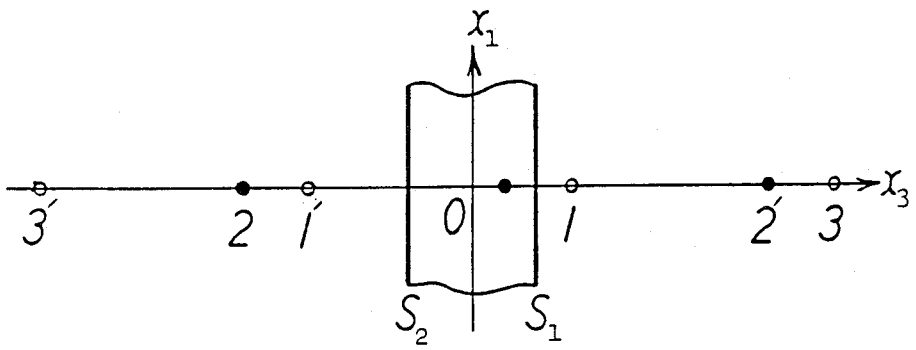


図2-11　鏡像点の無限列

ここでσ_{ij}^{C1}, $\sigma_{ij}^{C1'}$, σ_{ij}^{C2}, $\sigma_{ij}^{C2'}$, σ_{ij}^{C3}などは自由表面の影響による補正項で、それぞれ図2-11の鏡像の位置1, 1′, 2, 2′, 3などからの影響を表すものである。したがって(2.3.35)式右辺の第２項までの和は３次元のMindlinの解になる。記述が長くなるので具体的には付録にまとめて示す。この双結晶試料の問題の場合にはMindlinの解を界面に沿って積分する必要がある。

(2.3.24), (2.3.25), (2.3.26)式にσ_{11}, σ_{22}, σ_{12}を代入するとε_{33}, ε_{23}, ε_{31}は定数になるので、参照系Ⅰにおける変位$u_1(\mathrm{I})$, $u_2(\mathrm{I})$, $u_3(\mathrm{I})$は次式のようにならなければならない。

$$u_1(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}[S_{15}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{25}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{56}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\}]x_3+\varepsilon_0 x_1+c_1 , \quad (2.3.36)$$

$$u_2(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}[S_{14}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{24}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{46}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\}]x_3+ c_2 , \quad (2.3.37)$$

$$u_3(I) = \frac{\varepsilon_0}{D(I)}[S_{13}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{23}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{36}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\}]x_3+ c_3 , \quad (2.3.38)$$

ここでc_1～c_3は任意定数を表す。参照系に対する変形として(2.3.13)～(2.3.16)式を仮定したが変位はこれらの条件のみでは確定せず、任意定数c_1～c_3は実際の双結晶の引張り試験の状況から定められることになる。ここでは試料の一方の端面と粒界とに含まれ板厚の中央の点において変位がゼロとなるように試験が設定されているとしよう。すると座標系の原点をこの点に選定することによりc_1～c_3はゼロとなる。

次に、(2.3.36)～(2.3.38)式の[　]内を簡単のため次式のように表す。

$$A_1(I) = S_{15}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{25}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{56}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\} , \quad (2.3.39)$$

$$A_2(I) = S_{14}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{24}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{46}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\} , \quad (2.3.40)$$

$$A_3(I) = S_{13}(I)\{S_{22}(I)S_{66}(I)-S_{26}(I)S_{26}(I)\}+S_{23}(I)\{S_{16}(I)S_{26}(I) -S_{12}(I)S_{66}(I)\}+S_{36}(I)\{S_{12}(I)S_{26}(I)-S_{16}(I)S_{22}(I)\} . \quad (2.3.41)$$

参照系Ⅱに対しても(2.3.36)～(2.3.41)式と同様な結果が得られ、粒界における変位の不適合から定まる界面転位の転位密度が次式のように加えられた歪ε_0に比例する形で与えられる。

$$a_{11} = \left(\frac{A_1(\mathrm{II})}{D(\mathrm{II})} - \frac{A_1(\mathrm{I})}{D(\mathrm{I})} \right) \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.42}$$

$$a_{12} = \left(\frac{A_2(\mathrm{II})}{D(\mathrm{II})} - \frac{A_2(\mathrm{I})}{D(\mathrm{I})} \right) \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.43}$$

$$a_{13} = \left(\frac{A_3(\mathrm{II})}{D(\mathrm{II})} - \frac{A_3(\mathrm{I})}{D(\mathrm{I})} \right) \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.44}$$

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0 \quad . \tag{2.3.45}$$

したがって界面において連続性を保持する歪成分からは表面力の不適合を生じ、界面において不連続となる歪成分からは界面転位の分布を生じることになる。

上述の結果を得るに際し、双結晶試料の引張り試験を表す境界条件として、図2-10におけるⅠあるいはⅡの領域に対して各々(2.3.36)～(2.3.38)式及び領域Ⅱに対するこれらと同様な式によって定められる境界条件を考えている。試料の両端における板厚の中央線上ではⅠ及びⅡの領域ともに $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ 及び、試料の長さをLとして、$u_1 = \varepsilon_0 L$, $u_2 = u_3 = 0$ によって境界条件が 与えられるが、中央線上以外では領域ⅠとⅡとで変位のx_3依存性が異なるため端面と粒界との交線において変位の食い違いを生じる。しかしこの食い違いは(2.3.42)～(2.3.44)式で与えられる界面転位の導入によって解消しており、ここで想定している境界条件は各々の参照系に対する変位と界面転位の導入に伴う変位との和の試料両端における値によって与えられることになる。

２．３．２．２　単軸応力状態を仮定した別解

粒界と引張り軸とが平行な場合、前節では結果として参照系にx_1-x_2面に関する２次元応力が生じる境界条件を仮定して解析を進めてきた。本節では解析を更に容易にするために参照系に対して前節とは異なった境界条件を仮定する別解を示す。本論文では表面力の不適合による応力場の解析について詳細には検討していないので、界面転位の導入だけで不適合応力の解析ができる境界条件を考えてみよう。2.3.1節で取り扱ったように、参照系が単軸応力のもとにある場合には表面力の不適合は起こらないので、単軸応力のもとにある参照系を考えよう。この場合(2.3.22)～(2.3.27)式は参照系Ⅰに対して次式のように簡単になる。

$$\varepsilon_{11}(\mathrm{I}) = S_{11}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) = \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.46}$$

$$\varepsilon_{22}(\mathrm{I}) = S_{12}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) \quad , \tag{2.3.47}$$

$$\varepsilon_{33}(\mathrm{I}) = S_{13}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) \quad , \tag{2.3.48}$$

$$2\varepsilon_{23}(\mathrm{I}) = S_{14}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) \quad , \tag{2.3.49}$$

$$2\varepsilon_{31}(\mathrm{I}) = S_{15}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) \quad , \tag{2.3.50}$$

$$2\varepsilon_{12}(\mathrm{I}) = S_{16}(\mathrm{I})\sigma_{11}(\mathrm{I}) \quad . \tag{2.3.51}$$

参照系Ⅱに対しても同様な式を考える。２つの参照系に対してε_0は等しいとし、したがって単軸応力の値$\sigma_{11}(\mathrm{I})$と$\sigma_{11}(\mathrm{II})$とは一般に互いに異なることになる。

実際の系の境界条件を考察する前に、まず参照系に対して(2.3.46)～(2.3.51)式を与える参照系の境界条件について検討する。前節と同様に変位による境界条件について考えてみる。(2.3.46)～(2.3.48)式を積分し応力成分が定数であることから次式を得る。

$$u_1(I) = \varepsilon_0 x_1 + u_1(x_2, x_3) \quad , \tag{2.3.52}$$

$$u_2(I) = \frac{S_{12}(I)}{S_{11}(I)} \varepsilon_0 x_2 + u_2(x_3, x_1) \quad , \tag{2.3.53}$$

$$u_3(I) = \frac{S_{13}(I)}{S_{11}(I)} \varepsilon_0 x_3 + u_3(x_1, x_2) \quad , \tag{2.3.54}$$

ここで関数$u_1(x_2, x_3)$, $u_2(x_3, x_1)$, $u_3(x_1, x_2)$は任意関数を表す。(2.3.52)～(2.3.54)式からせん断歪成分を計算し、(2.3.49)～(2.3.51)式と比較すると次式で示される関係が得られる。

$$u_2(x_3, x_1)_{,3} + u_3(x_1, x_2)_{,2} = \frac{S_{14}(I)}{S_{11}(I)} \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.55}$$

$$u_3(x_1, x_2)_{,1} + u_1(x_2, x_3)_{,3} = \frac{S_{15}(I)}{S_{11}(I)} \varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.56}$$

$$u_1(x_2, x_3)_{,2} + u_2(x_3, x_1)_{,1} = \frac{S_{16}(I)}{S_{11}(I)} \varepsilon_0 \quad . \tag{2.3.57}$$

(2.3.55)～(2.3.57)式をそれぞれx_1, x_2, x_3で微分すると次式が得られる。

$$u_2(x_3, x_1)_{,31} + u_3(x_1, x_2)_{,12} = 0 \quad , \tag{2.3.58}$$

$$u_3(x_1, x_2)_{,12} + u_1(x_2, x_3)_{,23} = 0 \quad , \tag{2.3.59}$$

$$u_1(x_2, x_3)_{,23} + u_2(x_3, x_1)_{,31} = 0 \quad . \tag{2.3.60}$$

(2.3.58)～(2.3.60)式から$u_1(x_2, x_3)$, $u_2(x_3, x_1)$, $u_3(x_1, x_2)$は

$$u_1(x_2, x_3) = u_{12}(x_2) + u_{13}(x_3) \quad , \tag{2.3.61}$$

$$u_2(x_3, x_1) = u_{23}(x_3) + u_{21}(x_1) \quad , \tag{2.3.62}$$

$$u_3(x_1, x_2) = u_{31}(x_1) + u_{32}(x_2) \quad , \tag{2.3.63}$$

の形式の関数でなければならない。ここで右辺の関数$u_{12}(x_2)$～$u_{32}(x_2)$は任意関数を表す。(2.3.61)～(2.3.63)式は(2.3.55)～(2.3.57)式の必要条件であり、更に十分条件でもあるためには関数$u_{12}(x_2)$～$u_{32}(x_2)$がそれぞれ一次式でなければならない。したがって関数$u_1(x_2, x_3)$～$u_3(x_1, x_2)$は次式のような一次関数となる。

$$u_1(x_2, x_3) = b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 \quad , \tag{2.3.64}$$

$$u_2(x_3, x_1) = a_2x_1 + c_2x_3 + d_2 \quad , \tag{2.3.65}$$

$$u_3(x_1, x_2) = a_3x_1 + b_3x_2 + d_3 \quad , \tag{2.3.66}$$

ここで右辺の係数a_2～d_3は任意係数であるが、これら９個の係数全てが独立ではなく、(2.3.64)～(2.3.66)式を(2.3.55)～(2.3.57)式に代入して得られる次の３つの関係式が成立する。

$$c_2 + b_3 = \frac{S_{14}(I)}{S_{11}(I)}\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.67}$$

$$a_3 + c_1 = \frac{S_{15}(I)}{S_{11}(I)}\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.68}$$

$$b_1 + a_2 = \frac{S_{16}(I)}{S_{11}(I)}\varepsilon_0 \quad . \tag{2.3.69}$$

(2.3.46)～(2.3.51)式の条件には剛体的移動と回転とを除くための境界条件が含まれていないので、次にこの点について考察する。試料の1つの端面と界面との交線上の板厚中央に原点をとり、試料の剛体的移動を除くために原点は固定されているとすると、参照系Ⅰに対してd_1～d_3はゼロとなり参照系Ⅱに対してても同様となる。x_1軸は試料の粒界面の中央線上を通り、参照系Ⅰのx_1軸上では変位は $u_2 = a_2 x_1$, $u_3 = a_3 x_1$ となって原点の回りの粒界の剛体的回転を表している。試料の剛体的回転を除くために粒界面の中央線が原点の回りに回転しないような条件が課されているとすると、参照系Ⅰに対して

$$a_2 = a_3 = 0 \quad , \tag{2.3.70}$$

が成立し、参照系Ⅱに対しても同様となる。またx_1軸回りの回転ω_1は(2.3.53), (2.3.54), (2.3.65), (2.3.66)式より次式で表され、

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}) = \frac{1}{2}(b_3 - c_2) \quad , \tag{2.3.71}$$

x_1軸回りの回転を除外すると

$$c_2 = b_3 \tag{2.3.72}$$

を得る。また、参照系Ⅱに対しても同様になる。(2.3.70), (2.3.72)式より各係数を求めて、参照系Ⅰに対する変位 $u_1(\mathrm{I})\sim u_3(\mathrm{I})$ をこれらの係数により表すと次式となる。

$$u_1(\mathrm{I}) = \varepsilon_0 x_1 + \frac{S_{16}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_2 + \frac{S_{15}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_3 \quad , \tag{2.3.73}$$

$$u_2(\mathrm{I}) = \frac{S_{12}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_2 + \frac{S_{14}(\mathrm{I})}{2S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_3 \quad , \tag{2.3.74}$$

$$u_3(\mathrm{I}) = \frac{S_{12}(\mathrm{I})}{2S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_2 + \frac{S_{14}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\varepsilon_0 x_3 \quad . \tag{2.3.75}$$

(2.3.73)～(2.3.75)式は本節での解析の出発とした(2.3.46)～(2.3.51)式が暗に仮定している境界条件を変位で示している意味のものであるが、境界での変位が変数x_2に依存しており、通常行われている双結晶試料の引張り試験においてチャックによって与えられている境界条件に対応しているとは考え難い。

参照系Ⅱに対する変位は弾性コンプライアンス$S_{11}(\mathrm{II})\sim S_{16}(\mathrm{II})$を用いると(2.3.73)～(2.3.75)式と同形式で与えられ参照系ⅠとⅡとの接合によって変位の不適合を生じる。この変位の不適合を解消する界面転位の密度は次式のように得られる。

$$a_{31} = 0 \quad , \tag{2.3.76}$$

$$a_{32} = \frac{1}{2}\left[\frac{S_{16}(\mathrm{II})}{S_{11}(\mathrm{II})} - \frac{S_{16}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\right]\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.77}$$

$$a_{33} = \frac{1}{2}\left[\frac{S_{15}(\mathrm{II})}{S_{11}(\mathrm{II})} - \frac{S_{15}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\right]\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.78}$$

$$a_{11} = -\frac{1}{2}\left[\frac{S_{15}(\mathrm{II})}{S_{11}(\mathrm{II})} - \frac{S_{15}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\right]\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.79}$$

$$a_{12} = -\frac{1}{2}\left[\frac{S_{14}(\mathrm{II})}{S_{11}(\mathrm{II})} - \frac{S_{14}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\right]\varepsilon_0 \quad , \tag{2.3.80}$$

$$a_{13} = -\left[\frac{S_{13}(\mathrm{II})}{S_{11}(\mathrm{II})} - \frac{S_{13}(\mathrm{I})}{S_{11}(\mathrm{I})}\right]\varepsilon_0 \quad . \tag{2.3.81}$$

引張り軸と粒界とが平行な双結晶試料の中で等軸双結晶の場合には$S_{11}(\mathrm{I})$と$S_{11}(\mathrm{II})$とが等しくなり、したがって(2.3.46)式から$\sigma_{11}(\mathrm{I})$と$\sigma_{11}(\mathrm{II})$とが等しくなる。また等軸双結晶では(2.3.77)～(2.3.81)式から界面転位の密度変化を弾性コンプライアンスS_{13}～S_{16}の差から知ることができる。

本節の解析では表面力の不適合は生じないが、前節の場合よりも現れる界面転位の種類は増加する。本節の解析と前節の解析とは粒界と引張り軸とが平行な双結晶試料において両成分結晶に「等しい伸び歪ε_0」を生じるような引張り試験に対する解析であるが、厳密には端面において変位で与えられるべき境界条件の詳細が異なっているため不適合応力が異なる結果となる。このように不適合応力は境界条件の詳細により大きく異なる可能性がある。言い換えると境界条件は粒界での不適合性を支配しており、実験とその解析に際して境界条件の設定には注意が必要である。

２．４　考察

本章の解析法では任意に与えられた境界条件を扱うことが可能である。本章で行った双結晶試料の引張り試験の解析にあたっては、解析しやすいように参照系の変形に対してSaint-Venantの半逆解法を適用できるような境界条件の弾性問題を解いている。つまり、初めに応力についてある仮定を設けている。例えば2.3.1節と2.3.2.2節とでは単軸応力状態を、2.3.2.1節では結果として２次元応力状態を仮定している。このように、最初に単軸応力状態を仮定する場合にはその時点で表面力の不適合を生じないことを暗に仮定していることになり、２次元応力状態を仮定する場合には同時に表面力の不適合が生じることを暗に意味していることになる。

次に、双結晶試料の引張り試験において実際に課されている境界条件と本章で解析した問題における境界条件とを比較検討する。通常、板状双結晶試料の引張り試験において、チャック部分は板厚方向にはさむ構造になっており変位はx_2, x_3方向に拘束されている。この意味では、2.3.2.2節での参照系に対して単軸応力状態を仮定した解析よりも2.3.2.1節での参照系に対して２次元応力状態を仮定した解析の方が実際の引張り試験における境界条件に近いといえる。また2.3.1節で行ったように、粒界と引張り軸とが垂直な引張り試験を参照系に対して単軸応力状態を仮定して解析する場合でも、チャック部分でのx_2方向の変位が実際の試験とは異なる。しかし、チャック部における詳細な境界条件の影響はSaint-Venantの原理により端面から試料の幅程度までしか及ばないと考えられるので、実際の条件と静的に等価な境界条件のもとでの解析であれば試料の中央部での不適合応力はどちらの場合でもほぼ等しくなることが期待できる。また、本論文では試料の幅(x_2方向)が無限に広いとして解析を進めたが、これは後述するように界面転位による応力場を求める際、問題を解析し易くするために必要な条件である。試料の幅が狭くなるとx_2方向に自由表面が存在する影響が次第に強く現れるようになり、第５、６章の結果を利用して不適

合応力を計算することは可能ではあるが修正を必要とするようになると思われる。結局、チャック部分での境界条件の詳細の影響とか試料幅が有限であることの影響が小さいと考えられ本章の解析法を単純な形で応用できるのは、試料の中央部での挙動に対してであるということになろう。

上述のように、本章で導入した解析法を種々の問題に応用する際表面力の不適合を避けて界面転位の導入だけを用いて解析できる可能性がある。例えば、これは多結晶体の変形に関するAshby[26]の理論や多結晶体の弾性定数に関する「Krönerモデル」[27]に関連していると思われる。

２．５　結言

粒界による弾性拘束の解析法として、一般的な境界条件のもとでの双結晶試料を例に挙げて規準変形の概念と界面転位とを用いる方法を導入した。まず、双結晶のそれぞれの成分結晶と同じ結晶方位をもち実際の系と同じ境界条件のもとにある２つの参照系を考える。この参照系をそれぞれ仮想境界の位置で分割して実際の系を形成するように結合させると、一般には粒界において表面力と変位との不適合を生じる。

表面力の不適合は、不適合を打ち消すように粒界に物体力を分布させた弾性問題の解を求め、それを重ね合わせることにより解消できる。変位の不適合は２段階の手続きを経て解消することができる。まず基準となる点を定めるために、任意に選ばれた一点において２つの参照系の粒界面が一致するようにこれらを相対的に剛体移動させる。次に、界面上の他の各点において残された変位の不適合を打ち消すように界面転位を導入する。

広く単軸引張りの実験に使われている板状双結晶試料で、粒界が引張り軸に垂直な場合には変位の不適合のみが起こるため界面転位による応力場のみで不適合応力を求めることができる。一方、粒界が引張り軸に平行な場合には表面力と変位との不適合が共に起こり、

物体力と界面転位とが必要になる。このうち界面転位については、転位線が引張り軸方向に平行な転位のみが生じ垂直な界面転位は生じない。表面力の不適合を生じる場合であっても、境界条件の詳細は異なるが巨視的には等価な変形を考えると界面転位の分布のみで不適合応力を解析できる可能性があり、本章で導入された解析法の簡便な応用が期待できる。このことは不適合応力が境界条件に支配されることと矛盾するような印象を与えるが、不適合応力には2.2.1節で示したように規準変形に対する境界条件の選び方に関する任意性があることから、その選び方を工夫することによって不適合応力を界面転位のみで表すことが可能と考えられる。この点は、特に多結晶体の巨視的力学特性に与える粒界の影響などのように複雑な問題に対して有効と思われる。

参 考 文 献

(1) J.P.Hirth, Metall. Trans., 3(1972), 3047.

(2) 宮本 博, 日本金属学会シンポジウム予稿, (1974), 13.

(3) 大橋鉄也, 半沢 宏, 岸田路也, 日本金属学会誌, 44(1980), 876.

(4) 浅田浩之, 北川和夫, 門前亮一, 古川泰司, 日本金属学会講演概要, (1985), 453.

(5) K.T.S.R.Iyenger and R.S.Alwar, Z. angew. Math. Phys., 14(1963), 344.

(6) K.T.S.R.Iyenger and R.S.Alwar, Z. angew. Math. Mech., 43(1963), 249.

(7) T.W.Chou and J.P.Hirth, J.Compoite Materials, 4(1970), 102.

(8) B.A.Bilby, Report of the Conference on Defects in Crystalline Solids, Physical Society London, (1955), 123.

(9) B.A.Bilby, Progress in Solid Mechanics, vol.1, North-Holland, Amsterdom, (1960), 375.

(10) 大橋鉄也，半沢　宏，日本機械学会講演論文集，No.800-10，(1980)，181.

(11) K.Nishioka, Y.Arimitsu and T.Takai, Grain Boundary Structure and Related Phenomena, Japan Inst. Metals, (1986), 915.

(12) K.Nishioka, T.Takai, Y.Arimitsu and T.Ohashi, Mechanics of Materials, 6(1987), 139.

(13) J.P.Hirth and J.Lothe, Theory of Dislocations, 2nd ed., John Wiley, New York, 1982.

(14) 村外志夫，森　勉，マイクロメカニックス　転位と介在物，培風館，1976.

(15) C.Somigliana, Rend. Circ. Accad. Lincei, 23(1914), 463.

(16) C.Somigliana, Rend. Circ. Accad. Lincei, 24(1915), 655.

(17) W.T.Read, Dislocations in Crystals, McGraw-Hill, New York, 1953.

(18) A.Reuss, Z. angew. Math. Mech., 9(1929), 49.

(19) W.Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner, Berlin, 1928.

(20) R.C.J.Howland, Proc. Roy. Soc., A124(1929), 89.

(21) C.A.Brebbia and S.Walker, 境界要素法の基礎と応用，神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭　訳，培風館，1972.

(22) C.A.Brebbia, 境界要素法入門，神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭　訳，培風館，1970.

(23) R.D.Mindlin, Physics, 7(1936), 195.

(24) 結城良治，木須博行，境界要素法による弾性解析，培風館，1987.

(25) 森口繁一，２次元弾性論，岩波書店，1957.

(26) B.F.Ashby, Phil. Mag., 21(1970), 399.

(27) E.Kröner, Zeitschrifts f. Phys., 151(1958), 504.

第３章　異方性弾性体の平面応力解

３．１　緒　言

弾性問題の解析において本来３次元である問題をしばしば２次元問題として取り扱うことがあり、通常は平面応力状態の概念と平面歪状態の概念とがよく用いられる。前者は厚さ方向を含む応力成分をゼロとしたもので薄板の応力状態に対応し、後者では厚さ方向を含む歪成分をゼロとして取扱い厚さ方向に長い弾性体の断面に対応している。前章で示した通り板状双結晶試料の参照系は単結晶板となり、実験に際して通常用いられる試料は厚さが長さ、幅に比べて小さく平面応力近似が妥当なことが期待できる。本章は異方性弾性体である単結晶板に対して３次元問題としての適合条件を満たす平面応力状態の厳密解を求め、板厚が十分薄い場合には応力成分は板厚方向に一様として近似することが妥当であることを示す。

板厚を通していたるところ次式が成立する解を板に対する平面応力解と定義する。

$$\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad , \tag{3.1.1}$$

ただしx_3軸を板の厚さ方向にとるものとし、解は３次元の６個の適合条件式のすべてを満足しているものとする。この解は等方性に対してはLove[1], Timoshenko and Goodier[2]らが示しているが、異方性に対しては知られていない[3],[4]。通常の構造設計などの目的にはFilon[5], Lekhnitsukii[4], Sokolnikoff[6], Muskhelishvili[7], Love[1]らにより論じられている一般化平面応力の方法で十分と考えられる。この方法は最近、西岡[8]により一般的な異方性板の場合に拡張され一般化平面応力による取扱が可能となった。しかし、微視的な考察、例えば外力のもとでの転位の運動についてとか結晶粒界による弾性的拘束

の効果などについては、板厚にわったての応力の平均値だけでなくより詳細な応力解析が望まれる。粒界あるいは異相界面に生じる弾性拘束の解析に関して第２章で規準変形による一般的解法を述べたが、本章では前章で考察した参照系として均質な異方性弾性板を考え、この参照系を(3.1.1)式がいたるところで成立する平面応力状態として取り扱い得る条件について示す[10]。

異方性弾性体の理論は用いる関数の性質から２通りに分類することができる。１つは、Lekhnitskii[11], Hearmon[12]が示しているように、Airyの応力関数を用いて等方性で解析されている種々の弾性問題について異方性の条件下で解析する方法である。もう１つは、Ambartsumyan[13]が示しているように、試料中央面が弾性対称面になっている異方性弾性体に対してせん断力の変化を表す関数を用いる方法である。また、彼は板厚方向の垂直変位を表す関数を用いた解析方法とその近似理論とを示している。このような立場から分類すると本章はAiryの応力関数が満たすべき条件について考察しており、前者の範囲に含まれる問題の解析と言えよう。

３．２　立方晶の平面応力解

３．２．１　数学的定式化

簡単のため物体力のない場合を考えると、３次元の弾性問題を表面力による境界条件のもとで解くには、次の平衡方程式

$$\sigma_{ij,j} = 0 \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{3.2.1}$$

および適合条件式

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad (3.2.2)$$

を全て満足する解を求めることになる。ここで指標の繰り返しについては総和規約に従っている。一様な厚さの立方晶板を考え結晶軸のうちc軸を板の表面に垂直にとりx_1-x_2面を板の中央面にとる。一般性を失うことなくx_1およびx_2軸をc軸以外の結晶軸の方向にとることができる。すると応力σ_{ij}と歪ε_{ij}との関係は次式となる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} \\
\varepsilon_{22} &= S_{12}\sigma_{11} + S_{11}\sigma_{22} \\
\varepsilon_{33} &= S_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\
\varepsilon_{23} &= \varepsilon_{31} = 0 \\
2\varepsilon_{12} &= S_{44}\sigma_{12}
\end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

ここで S_{11}, S_{12}, S_{44}はマトリックス表示による弾性コンプライアンスを表す。

平面応力の厳密解を導く問題は応力関数を導く問題に書き換えることができる。(3.1.1)式を考慮すると、平衡方程式(3.2.1)式は次のようなAiryの応力関数$\phi(x_1, x_2, x_3)$を導入することにより恒等的に満足される。

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \phi_{,22} \quad , \\
\sigma_{22} &= \phi_{,11} \quad , \\
\sigma_{12} &= -\phi_{,12} \quad .
\end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

(3.2.3)式および(3.2.4)式を用いて６個の適合条件式(3.2.2)式を書き直すと次式のようになる。

$$S_{11}\phi_{,2222} + (2S_{12} + S_{44})\phi_{,1122} + S_{11}\phi_{,1111} = 0 \quad , \tag{3.2.5}$$

$$S_{12}\phi_{,2222} + S_{12}\phi_{,1122} + S_{12}\phi_{,2233} + S_{11}\phi_{,3311} = 0 \quad , \tag{3.2.6}$$

$$S_{12}\phi_{,1122} + S_{12}\phi_{,1111} + S_{11}\phi_{2233} + S_{12}\phi_{,3311} = 0 \quad , \tag{3.2.7}$$

$$2S_{11}\phi_{,2223} + (2S_{12} + S_{44})\phi_{,1123} = 0 \quad , \tag{3.2.8}$$

$$(2S_{12} + S_{44})\phi_{,1223} + 2S_{11}\phi_{,3111} = 0 \quad , \tag{3.2.9}$$

$$2S_{12}\phi_{,1112} + 2S_{12}\phi_{,1222} + S_{44}\phi_{,1233} = 0 \quad . \tag{3.2.10}$$

(3.2.5)～(3.2.10)式を満たす応力関数ϕを求め、解が存在する条件について明らかにする。まず応力関数ϕに対する必要条件から考える。(3.2.6)式と(3.2.7)式とから次式が得られる。

$$S_{12}\nabla_1^2\theta + (S_{11} + S_{12})\theta_{,33} = 0 \quad , \tag{3.2.11}$$

ここで∇_1^2とθとは

$$\nabla_1^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 \quad , \tag{3.2.12}$$

$$\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \nabla_1^2\phi \quad , \tag{3.2.13}$$

を表す。(3.2.8)式と(3.2.9)式とから次式が得られる。

$$\theta_{,123} = 0 \ . \tag{3.2.14}$$

(3.2.10)式から

$$[2S_{12}\theta - S_{44}\phi_{,33}]_{,12} = 0 \tag{3.2.15}$$

が得られる。(3.2.14)式より$\theta(x_1, x_2, x_3)$は次の形であることがわかる。

$$\theta = \theta_0(x_1, x_2) + \theta_1(x_1, x_3) + \theta_2(x_2, x_3) \ , \tag{3.2.16}$$

ただしθ_0は $x_3 = 0$ におけるθの値とする。したがって、

$$\theta_1(x_1, 0) + \theta_2(x_2, 0) = 0 \tag{3.2.17}$$

が成立しなければならない。(3.2.11)式はθの形を支配する式であるが(3.2.16)式を(3.2.11)式に代入しても有益な結果は得られない。そこで(3.2.16)式を(3.2.15)式に代入すると、応力関数ϕの形として次式が得られる。

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{S_{12}}{S_{44}}\theta_0 x_3^2 + \phi_0(x_1, x_2) + \phi_1(x_1, x_2)x_3 + [\psi_1(x_1) + \psi_2(x_2)]x_3^2 \ , \tag{3.2.18}$$

ただしϕ_0とθ_0の間には次式の関係が成立する。

$$\nabla_1^2 \phi_0 = \theta_0 \quad . \tag{3.2.19}$$

Timoshenko and Goodier[2]に与えられている等方性の平面応力解に従って応力分布が板の中央面に関して対称な問題に制限すると応力関数ϕはx_3に関する偶関数となり、ϕ_1は次式を満足しなければならない。

$$\phi_1(x_1, x_2) = 0 \quad . \tag{3.2.20}$$

(3.2.18)式を(3.2.5)式に代入することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned}&(1 + \frac{S_{12}}{S_{44}} x_3^2 \nabla_1^2)[S_{11}\phi_{0,1111} + (2S_{12} + S_{44})\phi_{0,1122} + S_{11}\phi_{0,2222}] \\ &+ S_{11} x_3^2 [\psi_{1,1111} + \psi_{2,2222}] = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

ここで(3.2.21)式がx_3に依存せず恒等的に成立するためには、次式を満足しなければならない。

$$S_{11}\phi_{0,1111} + (2S_{12} + S_{44})\phi_{0,1122} + S_{11}\phi_{0,2222} = 0 \quad , \tag{3.2.22}$$

$$\psi_{1,1111} = -\psi_{2,2222} = K_0/24 \quad , \tag{3.2.23}$$

ここでK_0は定数を表しψ_1, ψ_2はそれぞれx_1, x_2の多項式で表され、次式のようになる。

$$\psi_1 = K_0 x_1^4 + K_1 x_1^3 + K_2 x_1^2 \quad , \tag{3.2.24}$$

$$\psi_2 = -K_0 x_2^4 + L_1 x_2^3 + L_2 x_2^2 \quad , \tag{3.2.25}$$

ここでK_1, K_2, L_1, L_2は定数を表す。また(3.2.24), (3.2.25)式において２次より低次の項は応力に寄与しないので無視している。

(3.2.18)式を(3.2.8), (3.2.9)式に代入することにより次式を得る。

$$\left[\frac{S_{12}}{S_{44}} (2S_{12} + S_{44}) \theta_{0,11} + \frac{2S_{11}S_{12}}{S_{44}} \theta_{0,22} + 2S_{11}\psi_{2,22} \right]_{,2} = 0 \quad , \tag{3.2.26}$$

$$\left[\frac{2S_{11}S_{12}}{S_{44}} \theta_{0,11} + \frac{S_{12}}{S_{44}} (2S_{12} + S_{44}) \theta_{0,22} + 2S_{11}\psi_{1,11} \right]_{,1} = 0 \quad . \tag{3.2.27}$$

(3.2.26)式と(3.2.27)式とをそれぞれx_1とx_2とで微分し、加え合わすと次式を得る。

$$(\nabla_1^2 \theta_0)_{,12} = 0 \quad , \tag{3.2.28}$$

したがって$\nabla_1^2 \theta_0$は次式で表される形をとることが分かる。

$$\nabla_1^2 \theta_0 = f(x_1) + g(x_2) + C \quad , \tag{3.2.29}$$

ここでCは定数をあらわす。(3.2.18)式を(3.2.6)式に代入し(3.2.20), (3.2.22), (3.2.24), (3.2.25)式および(3.2.29)式を用いると次式を得る。

$$S_{12}\left[\frac{S_{12}}{S_{44}}g_{,22} - 24K_0\right]x_3^2 + \frac{S_{11}S_{12}}{S_{44}}[f(x_1) + g(x_2) + C]$$
$$+ \frac{S_{12}}{S_{44}}(2S_{12} + S_{44} - 2S_{11})\phi_{0,2222} + 4S_{12}(-6K_0x_2^2 + 3L_1x_2 + L_2)$$
$$+ 4S_{11}(6K_0x_1^2 + 3K_1x_1 + K_2) = 0 \quad . \tag{3.2.30}$$

(3.2.30)式が任意のx_3に対して成立するためには次式が成立しなければならない。

$$g(x_2) = \frac{12K_0S_{44}}{S_{12}}x_2^2 + Gx_2 \quad , \tag{3.2.31}$$

ここでGは定数を表す。同様に(3.2.7)式より次式が得られる。

$$S_{12}\left[\frac{S_{12}}{S_{44}}f_{,11} + 24K_0\right]x_3^2 + \frac{S_{11}S_{12}}{S_{44}}[f(x_1) + g(x_2) + C]$$
$$+ \frac{S_{12}}{S_{44}}(2S_{12} + S_{44} - 2S_{11})\phi_{0,1111} + 4S_{12}(6K_0x_1^2 + 3K_1x_1 + K_2)$$
$$+4S_{11}(-6K_0x_2^2 + 3L_1x_2 + L_2) = 0 \quad , \tag{3.2.32}$$

$$f(x_1) = -\frac{12K_0S_{44}}{S_{12}}x_1^2 + Fx_1 \quad , \tag{3.2.33}$$

ここでFは定数を表す。(3.2.31)，(3.2.33)式とを(3.2.30)，(3.2.32)式に用いることにより次式を得る。

$$(2S_{12}+S_{44}-2S_{11})\phi_{0,1111}=\frac{12S_{11}S_{44}}{S_{12}}K_0x_2^2-S_{11}(G+\frac{12S_{44}}{S_{12}}L_1)x_2$$
$$+12(\frac{S_{11}S_{44}}{S_{12}}-2S_{44})K_0x_1^2-(S_{11}F+12S_{44}K_1)x_1-4(\frac{S_{11}S_{44}}{S_{12}}L_2+S_{44}K_2)-S_{11}C, \quad (3.2.34)$$

$$(2S_{12}+S_{44}-2S_{11})\phi_{0,2222}=-\frac{12S_{11}S_{44}}{S_{12}}K_0x_1^2-S_{11}(F+\frac{12S_{44}}{S_{12}}K_1)x_1$$
$$-12(\frac{S_{11}S_{44}}{S_{12}}-2S_{44})K_0x_2^2-(S_{11}G+12S_{44}L_1)x_2-4(\frac{S_{11}S_{44}}{S_{12}}K_2+S_{44}L_2)-S_{11}C. \quad (3.2.35)$$

(3.2.8)，(3.2.9)式は応力関数ϕ_0の形に特に制限は与えず、(3.2.29)，(3.2.34)，(3.2.35)式より次式を得る。

$$(2S_{12}+S_{44}-2S_{11})\phi_{0,1122}=\frac{6S_{44}K_0}{S_{12}}(2S_{11}-S_{44})x_1^2+\frac{F}{2}(2S_{12}+S_{44})x_1$$
$$+\frac{6S_{44}}{S_{12}}K_1(S_{11}+S_{12})x_1-\frac{6S_{44}K_0}{S_{12}}(2S_{12}-S_{44})x_2^2+\frac{G}{2}(2S_{12}+S_{44})x_2$$
$$+\frac{6S_{44}}{S_{12}}L_1(S_{11}+S_{12})x_2+\frac{C}{2}(2S_{12}+S_{44})+2(K_2+L_2)S_{44}(1+\frac{S_{11}}{S_{12}}). \quad (3.2.36)$$

(3.2.22), (3.2.34)～(3.2.36)式を満足する応力関数ϕ_0の形についてさらに考察する。(3.2.34)～(3.2.36)式を(3.2.22)式に代入すると次式を得る。

$$\frac{12K_0S_{44}^2}{S_{12}}(x_2^2-x_1^2)+(2S_{12}+S_{44}+2S_{11})(Fx_1+Gx_2)+\frac{12S_{44}}{S_{12}}(S_{11}+S_{12})(K_1x_1+L_1x_2)$$

$$+C(2S_{12}+S_{44})+4\left(\frac{S_{11}S_{44}}{S_{12}}+S_{44}\right)(K_2+L_2)+2S_{11}C=0 \quad . \tag{3.2.37}$$

(3.2.37)式が任意のx_1, x_2に対して成立するためには各定数は次式を満たさなければならない。

$$K_0=0 \quad , \quad F=-\frac{12S_{44}(S_{11}+S_{12})}{S_{12}(2S_{12}+S_{44}+2S_{11})}K_1 \quad ,$$

$$G=-\frac{12S_{44}(S_{11}+S_{12})}{S_{12}(2S_{12}+S_{44}+2S_{11})}L_1 \quad , \quad C=-\frac{4S_{44}(S_{11}+S_{12})}{S_{12}(2S_{12}+S_{44}+2S_{11})}(K_2+L_2) \quad . \tag{3.2.38}$$

以上の考察から、応力関数が(3.2.5)～(3.2.10)式を満足するための必要条件として次の結果を得る。

$$\phi(x_1,x_2,x_3)=\phi_0(x_1,x_2)+\frac{S_{12}}{S_{44}}x_3^2\nabla_1^2\phi_0+[K_1x_1^3+K_2x_1^2+L_1x_2^3+L_2x_2^2]x_3^2 \quad , \tag{3.2.39}$$

$$S_{11}\phi_{0,1111}+(2S_{12}+S_{44})\phi_{0,1122}+S_{11}\phi_{0,2222}=0 \quad , \tag{3.2.22}$$

$$\phi_{0,1111} = -\frac{12S_{11}S_{44}(S_{12}+S_{44}+S_{11})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}L_1x_2 - \frac{12S_{44}(2S_{12}^2-S_{11}^2+S_{12}S_{44}+S_{11}S_{12})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}K_1x_1$$
$$-\frac{4S_{44}(S_{11}L_2+S_{12}K_2)}{S_{12}(2S_{12}+S_{44}-2S_{11})} + \frac{4S_{11}S_{44}(S_{11}+S_{12})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}(K_2+L_2) \quad , \qquad (3.2.40)$$

$$\phi_{0,2222} = -\frac{12S_{11}S_{44}(S_{12}+S_{44}+S_{11})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}K_1x_1 - \frac{12S_{44}(2S_{12}^2-S_{11}^2+S_{12}S_{44}+S_{11}S_{12})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}L_1x_2$$
$$-\frac{4S_{44}(S_{11}K_2+S_{12}L_2)}{S_{12}(2S_{12}+S_{44}-2S_{11})} + \frac{4S_{11}S_{44}(S_{11}+S_{12})}{S_{12}[(2S_{12}+S_{44})^2-4S_{11}^2]}(K_2+L_2) \quad , \qquad (3.2.41)$$

ここでK_1, K_2, L_1, L_2は任意定数を表す。(3.2.22), (3.2.39)～(3.2.41)式によって適合条件(3.2.5)～(3.2.10)式の全てが満足されることも容易に確かめられる。したがって、立方晶に関してここで考えている場合について平面応力解が存在するための必要十分条件は応力関数が(3.2.22), (3.2.39)～(3.2.41)式を満たすことであるという結果が得られた。

3．2．2　可能な応力分布

(3.2.22)，(3.2.40)，(3.2.41)式と端面での境界条件とを共に満足する応力関数$\phi_0(x_1, x_2)$は板の中央面での応力状態を決定する。中央面以外での応力成分は(3.2.39)式の応力関数$\phi(x_1, x_2, x_3)$で決まり板厚方向に一致するx_3軸に沿って放物線状に変化する。板厚方向の変化は中央面での応力状態により決まるため応力関数$\phi_0(x_1, x_2)$が平面応力の厳密解の様子を決定する。

(3.2.40)，(3.2.41)式を簡潔に次式のように書き直す。

$$\phi_{0,1111} = Ax_1 + Bx_2 + C_1 \quad , \tag{3.2.42}$$

$$\phi_{0,2222} = \varkappa Ax_1 + \frac{B}{\varkappa} x_2 + C_2 \quad , \tag{3.2.43}$$

ここでA，B，C_1，C_2は任意定数を表し、$\varkappa$は次式のように材料の弾性コンプライアンスによって決まる定数である。

$$\varkappa = \frac{S_{11}(S_{11} + S_{12} + S_{44})}{2S_{12}^2 - S_{11}^2 + S_{12}S_{44} + S_{11}S_{12}} \quad . \tag{3.2.44}$$

(3.2.42)，(3.2.43)式の一般解は次式になる。

$$\begin{aligned}\phi_0 = {} & \alpha_{33}x_1^3x_2^3 + (A/120)x_1^5 + (B/24)x_1^4x_2 + \alpha_{32}x_1^3x_2^2 + \alpha_{23}x_1^2x_2^3 + (\varkappa A/24)x_1x_2^4 \\ & + (B/120\varkappa)x_2^5 + (C_1/24)x_1^4 + \alpha_{31}x_1^3x_2 + \alpha_{22}x_1^2x_2^2 + \alpha_{13}x_1x_2^3 + (C_2/24)x_2^4 \\ & + \alpha_{30}x_2^3 + \alpha_{21}x_1^2x_2 + \alpha_{12}x_1x_2^2 + \alpha_{03}x_2^3 + \alpha_{20}x_1^2 + \alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{02}x_2^2 \quad ,\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

ここでα_{ij}は任意定数を表し、x_1, x_2に関する1次の項と定数項とは応力値に影響を与えないので無視している。(3.2.22)式を満足するには次式が成立しなければならない。

$$\alpha_{22} = -\frac{S_{11}(C_1 + C_2)}{4(2S_{12} + S_{44})}, \qquad \alpha_{23} = -\frac{S_{11}(1 + 1/\varkappa)B}{12(2S_{12} + S_{44})},$$

$$\alpha_{32} = -\frac{S_{11}(1 + \varkappa)A}{12(2S_{12} + S_{44})}, \qquad \alpha_{33} = 0. \tag{3.2.46}$$

(3.2.45)式を(3.2.4)式へ代入すると次式を得る。

$$\sigma_{11}^{0} = -\frac{S_{11}(1 + \varkappa)A}{6(2S_{12} + S_{44})}x_1^3 - \frac{S_{11}(1 + 1/\varkappa)B}{2(2S_{12} + S_{44})}x_1^2x_2 + \frac{\varkappa A}{2}x_1x_2^2 + \frac{B}{6\varkappa}x_2^3$$
$$- \frac{S_{11}(C_1 + C_2)}{2(2S_{12} + S_{44})}x_1^2 + 6\alpha_{13}x_1x_2 + \frac{C_2}{2}x_2^2 + 2\alpha_{12}x_1 + 6\alpha_{03}x_2 + 2\alpha_{02}, \tag{3.2.47}$$

$$\sigma_{22}^{0} = \frac{A}{6}x_1^3 + \frac{B}{2}x_1^2x_2 - \frac{S_{11}(1 + \varkappa)A}{2(2S_{12} + S_{44})}x_1x_2^2 - \frac{S_{11}(1 + 1/\varkappa)B}{6(2S_{12} + S_{44})}x_2^3 + \frac{C_1}{2}x_1^2$$
$$+ 6\alpha_{31}x_1x_2 - \frac{S_{11}(C_1 + C_2)}{2(2S_{12} + S_{44})}x_2^2 + 6\alpha_{30}x_1 + 2\alpha_{21}x_2 + 2\alpha_{20}, \tag{3.2.48}$$

$$\sigma_{12}^{0} = -\frac{B}{6}x_1^3 + \frac{S_{11}(1 + \varkappa)A}{2(2S_{12} + S_{44})}x_1^2x_2 + \frac{S_{11}(1 + 1/\varkappa)B}{2(2S_{12} + S_{44})}x_1x_2^2 - \frac{\varkappa A}{6}x_2^3$$

$$- 3\alpha_{31}x_1^2 + \frac{S_{11}(C_1 + C_2)}{2S_{12} + S_{44}} x_1x_2 - 3\alpha_{13}x_2^2 + 2\alpha_{21}x_1 - 2\alpha_{12}x_2 - \alpha_{11} \quad . \tag{3.2.49}$$

(3.2.47)～(3.2.49)式の任意定数は板の中央面における境界条件により決定される。以上から、平面応力の厳密解が成り立つ状態では中央面の応力状態はx_1，x_2の３次の多項式で表されることがわかる。

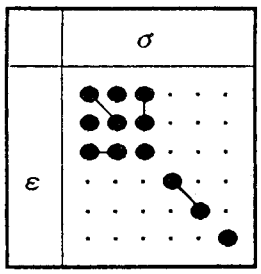
３．３　立方晶以外の結晶系の平面応力解

３．３．１　正方晶の場合

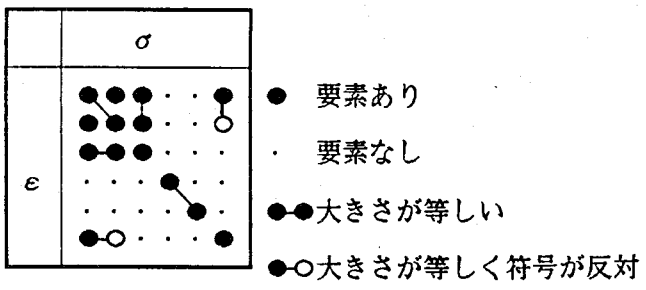
正方晶系は弾性的性質で分類すると２つに大別できる。表3-1は正方晶系の弾性コンプライアンスの要素を表したもので、(a)は結晶点群の国際記法[14]で4mm，422，$\bar{4}$2mあるいは4/mmmに相当し(b)は4，$\bar{4}$，4/mに相当する。正方晶系の中で表3-1(a)に含まれる結晶はS_{16}を含まず、平面応力状態では $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$ となる。したがって表3-1(a)の対称性を有す

表3-1　正方晶系の弾性コンプライアンス

(a)



(b)



る結晶の場合、応力関数は立方晶と同形で次式となる。

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi_0(x_1, x_2) + \frac{S_{13}}{S_{66}} x_3^2 \nabla_1^2 \phi_0 + [K_1 x_1^3 + K_2 x_1^2 + L_1 x_2^3 + L_2 x_2^2] x_3^2 \quad , \quad (3.3.1)$$

ここでK_1, K_2, L_1, L_2は任意定数であり結晶のc軸が試料表面に垂直で試料座標のx_3に一致するとする。応力関数$\phi_0(x_1, x_2)$は次式を満足しなければならない。

$$S_{11}\phi_{0,1111} + (2S_{12} + S_{66})\phi_{0,1122} + S_{11}\phi_{0,2222} = 0 \quad , \quad (3.3.2)$$

$$\phi_{0,1111} = -\frac{12S_{11}S_{66}(S_{12}+S_{66}+S_{11})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{11}^2]}L_1 x_2 - \frac{12S_{66}(2S_{12}^2-S_{11}^2+S_{12}S_{66}+S_{11}S_{12})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{11}^2]}K_1 x_1$$
$$- \frac{4S_{66}(S_{11}L_2+S_{12}K_2)}{S_{13}(2S_{12}+S_{66}-2S_{11})} + \frac{4S_{11}S_{66}(S_{11}+S_{12})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{12}^2]}(K_2+L_2) \quad , \quad (3.3.3)$$

$$\phi_{0,2222} = -\frac{12S_{11}S_{66}(S_{12}+S_{66}+S_{11})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{11}^2]}K_1 x_1 - \frac{12S_{66}(2S_{12}^2-S_{11}^2+S_{12}S_{66}+S_{11}S_{12})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{11}^2]}L_1 x_2$$
$$- \frac{4S_{66}(S_{11}K_2+S_{12}L_2)}{S_{13}(2S_{12}+S_{66}-2S_{11})} + \frac{4S_{11}S_{66}(S_{11}+S_{12})}{S_{13}[(2S_{12}+S_{66})^2-4S_{11}^2]}(K_2+L_2) \quad . \quad (3.3.4)$$

平面応力解が存在する必要十分条件として(3.3.1)～(3.3.4)式が得られ中央面での応力分布はx_1, x_2に関する３次の多項式になる。

３．３．２　六方晶の場合

前節の立方晶、正方晶の場合と同様に試料座標のx_3軸方向として結晶軸のｃ軸を取り、それが試料表面に垂直とする。六方晶の場合この結晶系の保有する対称性によって弾性コンプライアンスの間に次式の関係が成立する。

$$S_{66} = 2(S_{11} - S_{12}) \tag{3.3.5}$$

今の場合に対して適合条件式を応力関数によって表すと次式のようになる。

$$\phi_{,1111} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,2222} = 0 \quad , \tag{3.3.6}$$

$$S_{13}\phi_{,2222} + S_{13}\phi_{,1122} + S_{12}\phi_{,2233} + S_{11}\phi_{,3311} = 0 \quad , \tag{3.3.7}$$

$$S_{13}\phi_{,1122} + S_{13}\phi_{,1111} + S_{11}\phi_{,2233} + S_{12}\phi_{,3311} = 0 \quad , \tag{3.3.8}$$

$$\phi_{,2223} + \phi_{,1123} = 0 \quad , \tag{3.3.9}$$

$$\phi_{,1223} + \phi_{,3111} = 0 \quad , \tag{3.3.10}$$

$$S_{13}\phi_{,1112} + S_{13}\phi_{,1222} - (S_{11} - S_{12})\phi_{,1233} = 0 \quad . \tag{3.3.11}$$

立方晶の場合と同様な手順により次式のような応力関数のx_3依存性が得られる。

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi_0(x_1, x_2) + \frac{S_{13}}{2(S_{11} - S_{12})} x_3^2 \nabla_1^2 \phi_0 \quad , \tag{3.3.12}$$

ここでϕ_0は次式を満たす。

$$\nabla_1^2 \nabla_1^2 \phi_0 = 0 \qquad (3.3.13)$$

(3.3.5)式の関係には他の結晶系と異なる特別の意味がある。立方晶に関する(3.2.22)式や正方晶に関する(3.3.2)式は(3.3.5)式を考慮すると六方晶の(3.3.13)式に対応している。(3.3.5)式の関係は(3.2.34)，(3.2.35)式の左辺をゼロにし、また立方晶に関する(3.2.40)，(3.2.41)式や正方晶に関する(3.3.3)，(3.3.4)式に類似した関係式はこれらの式の分母に現れる項がゼロとなることに関連して六方晶の場合には現れない。立方晶に関する(3.2.39)式や正方晶に関する(3.3.1)式と比較して六方晶の(3.3.12)式には右辺の第３項が現れないが、これは等方性の場合に一致し[2]、(3.2.40)，(3.2.41)，(3.3.3)，(3.3.4)式と類似の式が現れないことと密接に関係している。以上のことは、(3.3.13)式が等方性の場合と一致することを意味し、ϕ_0が重調和関数である限り関数の形式にはどのような制限をも伴わない。

３．４　考察

応力関数$\phi(x_1, x_2 x_3)$を導出する際、x_3に関する偶関数と仮定した。これは端面での表面力が試料中央面に関して対称に分布していることを前提としている。更に、この表面力の板厚にわたっての分布は、(3.2.39)，(3.3.1)，(3.3.12)式から分かるように$\phi_0(x_1, x_2)$を決めるべき境界条件、すなわち試料中央面での境界条件によって決定されている。厳密にいえば端面での表面力の分布はこれらの関数のx_3依存性に従わなければならない。それ

にも関わらず、Saint-Venantの原理により、実際に与えられた表面力が上述の分布に従わない場合でも、それが静的に等価なものであれば、この表面力の違いによる応力分布の違いは端面の極近傍に限定されることが期待される。それゆえ本章で得た厳密な平面応力解は端面での表面力の詳細にかかわらず一般に引張り変形において成立することが期待される。

試料が十分薄ければ(3.2.39), (3.3.8), (3.3.10)式においてx_3^2に比例する項はϕ_0に比較して無視することができ $\phi \cong \phi_0$ を得ることができる。この近似が成立する場合には(3.1.1)式以外にσ_{11}, σ_{22}, σ_{12}が厚さ方向に変化しないという近似がつけ加わり、平面応力近似と呼ばれる。立方晶の場合には平面応力近似のもとでの解は(3.2.22), (3.2.40), (3.2.41)式と端面での境界条件とから決まる。また正方晶の場合には(3.3.2)～(3.3.4)式から決まる。c軸が試料表面に垂直な六方晶の場合(3.3.13)式だけで決定でき２次元的等方性を示す。

ところで第２章で示した単結晶板の参照系を平面応力のもとにある系として取り扱うに際しては、結晶のc軸が試料表面に垂直でない場合に対して平面応力解が成立するかどうか問題となる。結晶軸と試料軸とが一致した状態から出発して、試料軸を固定し結晶軸を回転させた後の弾性コンプライアンスは第６章に示すように異方性因子と方位因子との積で表される。座標変換後のマトリックス表示による弾性コンプライアンスは、結晶系の対称性から各成分間に関係はあるものの、一般には非ゼロ要素で占められる。したがって(3.2.3)式において$\varepsilon_{23} \neq 0$, $\varepsilon_{31} \neq 0$となり三斜晶系の平面応力解について考察するのとほぼ同程度の困難さを有する。三斜晶系の場合６個の適合条件式に現れる項数が増え、(3.2.13)式で示したような垂直応力の和θで整理することが困難となる。しかし適合条件式が４階の偏微分方程式でありしかもx_3に関してはたかだか２階であることから、厚さ方向に関する応力関数の形(応力関数のx_3依存性)はx_3の２次式以下になることが予想できる。したがって厚さが十分薄い場合には平面応力近似を適用し得ることが期待され、厚さ方向に

応力成分が変化しないことが期待できる。このことはAiryの応力関数と応力成分の関係式に変数x_3による微分が含まれていないことに起因しており、この点については第４章で考察する。

2.3節で取り上げた双結晶試料の一軸引張りの問題では参照系は一様引張り(応力分布が一定)の状態にあり、本章の議論を待つまでもなく結晶方位がいかにあろうとも適合条件式を恒等的に満足していて、応力状態は平面応力解となっている。

３．５　結言

結晶軸が試料表面に垂直な立方晶、正方晶に対して次に示す３つの条件を満たす厳密な平面応力解を示した。(1)(3.1.1)式の性質を持ち、(2)(3.2.1)式の平衡方程式を満たし、(3)(3.2.2)式の３次元適合条件式を満たす。この平面応力解は試料中央面での応力分布がx_1, x_2に関する３次の多項式で表されるように端面での境界条件が与えられているときに限り存在することが分かる。一方、ｃ軸が試料表面に垂直な六方晶板では端面での境界条件に対してなんらの制限がつかず、x_1-x_2平面において試料は等方的であるとして取り扱うことができる。いずれの場合でも、試料中央面以外では応力成分は厚さ方向に放物線状に変化し、試料中央面での応力分布によりある意味で支配されている。板厚が十分薄い場合には板厚方向の応力成分の変化は無視することができ、この状態を平面応力近似と呼ぶことができる。本章の解析結果から、前章で述べた双結晶試料の参照系における応力状態を平面応力として取り扱うことの妥当性が示された。

参 考 文 献

(1) A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover, New York, 1944.

(2) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd ed., Mcgraw-Hill, New York, 1970.

(3) A. E. Green and W. Zerna, Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1954.

(4) S. G. Lekhnitskii, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, translated by P. Fern, Holden-Day, San Francisco, 1963.

(5) L. N. G. Filon, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A201(1903), 63.

(6) I. S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1956.

(7) N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, translated by J. R. M. Radok, Noordhoff, Leyden, 1975.

(8) K. Nishioka, Z. angew. Math. Mech., 66(1986), 503.

(9) K. Nishioka, T. Takai, Y. Arimitsu and T. Ohashi, Mechanics of Materials, 6(1987), 139.

(10) K. Nishioka and Y. Arimitsu, Z. angew. Math. Mech., 68(1988), 139.

(11) S. G. Lekhnitskii, Anisotropic Plate, translated by S. W. Tsai and T. Cheron, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968.

(12) R. F. S. Hearmon, An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, London, 1961.

(13) S. A. Ambartsumyan, 異方弾性板の理論, 神谷紀生　訳, 森北出版, 1975.

(14) J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Oxford Univ. Press, London, 1967.

第４章　　一般化２次元弾性問題

４．１　緒言

第２章で示した規準変形の概念を応用し双結晶試料の応力場を求めるためには界面転位による応力場を求める必要がある。自由表面を含む系の転位の応力場は無限弾性体中での転位の応力場と仮想表面力を分布させた問題の解との重ね合わせとなる。本章では、この仮想表面力による解を解くために著者[1]らが提唱する一般化２次元弾性問題という新しい弾性問題を考え、これを応力関数を用いて解く方法について述べる。

弾性論においては本来３次元である問題をある種の条件を課して２次元問題として取り扱うことが多い。一般には平面歪状態と平面応力状態とがよく用いられる。平面応力状態は厚さ方向の応力成分をゼロとしたもので薄板の状態に対応し、平面歪状態は厚さ方向の歪成分をゼロとして取扱い厚さ方向に長い弾性体に適用される。x_2方向に変位が拘束されている棒、板、半無限体の表面に境界条件としてx_3, x_1方向の成分のみからなる表面力が与えられる問題は次式で定義される平面歪問題となり、１個の応力関数により解が得られる。

$$u_{3,2} = u_{1,2} = u_2 = 0 \qquad (4.1.1)$$

しかし、表面力がx_2方向の成分を有しx_2方向に一様である場合には、$u_2 \neq 0$となり一般にはx_3, x_1の関数となる。この場合のように変位成分u_i, 歪成分ε_{ij}, 応力成分σ_{ij}などの物理量がある方向(本論文ではx_2方向)に変化しない弾性問題も一種の２次元問題と考えることができる。この物理量の中で応力成分(歪成分でも同じ)が一方向に変化しない問題

が最も一般的な問題で、次式で定義できる。

$$\sigma_{ij,2} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (4.1.2)$$

(4.1.2)式で定義される一般化２次元弾性問題には(4.1.1)式で定義される平面歪問題は含まれるが、平面応力問題は含まれない。

通常の２次元弾性論についてはLove[2], Timoshenko and Goodier[3], Sokolnikoff[4], Fung[5]がその著書の中で説明しており、３個の応力成分を１個の応力関数で表すことができ数学的な取り扱いのうえで大きな利点となっている。一方３次元弾性問題は３個の応力関数を必要とし、２次元問題に比べて利点が少ないため一般の境界値問題に対してあまり利用されていない。邦文では最上[6], 森口[7]が応力関数による２次元弾性問題を取り上げている。特に、森口は応力関数の物理的意味について述べており、本章で考察する応力関数の任意性について示唆を与えるものである。

４．２　一般化２次元弾性問題の応力関数

２次元弾性問題では、境界条件が表面力で与えられる問題に対してAiryの応力関数が有効でよく用いられているが、この応力関数による弾性問題の解法は３次元問題にも拡張でき３個の独立な応力関数で問題を表すことができる。応力関数をテンソル表示した場合、応力関数は$\phi_{ij} = \phi_{ji}$ の性質をもつ。ここで非対角成分に対して$\phi_{12} = \phi_{23} = \phi_{31} = 0$ とすればMaxwellの解[8]であり、対角成分に対して$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = 0$ とすればMoreraの解[9]となる。またMaxwellの解の中でϕ_{22} 以外の全ての成分をゼロとすると、ϕ_{22}はx_3-x_1平面に関する２次元弾性問題に対するAiryの応力関数となる。一般化２次元問題は特別な

場合として平面歪問題を含んでいるので、Maxwellの解を用いて３次元問題として考察を始める。

Maxwellの解ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33}と応力成分との間には次式のような関係がある。

$$\sigma_{12} = -\phi_{33,12} \quad , \tag{4.2.1}$$

$$\sigma_{23} = -\phi_{11,23} \quad , \tag{4.2.2}$$

$$\sigma_{31} = -\phi_{22,31} \quad , \tag{4.2.3}$$

$$\sigma_{11} = \phi_{33,22} + \phi_{22,33} \quad , \tag{4.2.4}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{11,33} + \phi_{33,11} \quad , \tag{4.2.5}$$

$$\sigma_{33} = \phi_{22,11} + \phi_{11,22} \quad . \tag{4.2.6}$$

解くべき問題の応力成分はx_2方向に一定であるので(4.2.1)～(4.2.3)式から次式を得る。

$$\phi_{33,122} = 0 \quad , \tag{4.2.7}$$

$$\phi_{11,223} = 0 \quad , \tag{4.2.8}$$

$$\phi_{22,123} = 0 \quad . \tag{4.2.9}$$

(4.2.7)～(4.2.9)式を積分することにより応力関数は次の形をしていなければならないことが分かる。

$$\phi_{33} = f_1(x_3, x_1)x_2 + f_2(x_2, x_3) + f_3(x_3, x_1) \quad , \tag{4.2.10}$$

$$\phi_{11} = g_1(x_3, x_1)x_2 + g_2(x_3, x_1) + g_3(x_1, x_2) \quad , \tag{4.2.11}$$

$$\phi_{22} = h_1(x_3, x_1) + h_2(x_1, x_2) + h_3(x_2, x_3) \quad , \tag{4.2.12}$$

(4.2.10)～(4.2.12)式を(4.2.1)～(4.2.6)式へ代入すると次式となる。

$$\sigma_{12} = -f_1(x_1, x_2)_{,1} \quad , \tag{4.2.13}$$

$$\sigma_{23} = -g_1(x_3, x_1)_{,3} \quad , \tag{4.2.14}$$

$$\sigma_{31} = -h_1(x_3, x_1)_{,31} \quad , \tag{4.2.15}$$

$$\sigma_{11} = f_2(x_2, x_3)_{,22} + h_1(x_3, x_1)_{,33} + h_3(x_2, x_3)_{,33} \quad , \tag{4.2.16}$$

$$\sigma_{22} = \{g_1(x_3, x_1)_{,33} + f_1(x_3, x_1)_{,11}\}x_2 + g_2(x_3, x_1)_{,33} + f_3(x_3, x_1)_{,11} \quad , \tag{4.2.17}$$

$$\sigma_{33} = h_2(x_1, x_2)_{,11} + h_1(x_3, x_1)_{,11} + g_3(x_1, x_2)_{,22} \quad . \tag{4.2.18}$$

(4.2.16)式において関数$f_2(x_2, x_3)_{,22}$と$h_3(x_2, x_3)_{,33}$とは共に同じ変数x_2とx_3との関数であり、σ_{11}以外の応力成分には影響を及ぼさないので $f_2(x_2, x_3) = 0$ としても一般性を失わない。同様に(4.2.17)式と(4.2.18)式とから $f_3(x_3, x_1) = 0$, $g_3(x_1, x_2) = 0$ と置くことができる。

(4.2.16), (4.2.18)式の関数 $h_3(x_2, x_3)$ と $h_2(x_1, x_2)$ とは問題の定義$\sigma_{11,2} = 0$, $\sigma_{33,2} = 0$ から次式を満たす。

$$\sigma_{11,2} = h_3(x_2, x_3)_{,233} = 0 \quad , \tag{4.2.19}$$

$$\sigma_{33,2} = h_2(x_1, x_2)_{,112} = 0 \quad . \tag{4.2.20}$$

したがって関数$h_3(x_2, x_3)$と$h_2(x_1, x_2)$との形は

$$h_3(x_2, x_3) = h_{31}(x_2) + h_{32}(x_2)x_3 + h_{33}(x_3) \quad , \tag{4.2.21}$$

$$h_2(x_1, x_2) = h_{21}(x_1) + h_{22}(x_2)x_1 + h_{23}(x_2) \quad , \tag{4.2.22}$$

でなければならない。しかし$h_{31}(x_2) + h_{32}(x_2)x_3$と$h_{22}(x_2)x_1 + h_{23}(x_2)$とは応力成分に影響を与えないので

$$h_3(x_2, x_3) = h_{33}(x_3) \quad , \tag{4.2.23}$$

$$h_2(x_1, x_2) = h_{21}(x_1) \quad , \tag{4.2.24}$$

と書ける。更に、$h_{33}(x_3) + h_{21}(x_1) + h_1(x_3, x_1)$を改めて$h_1(x_3, x_1)$と書き直すと一般化２次元弾性問題に関する応力関数は次式となる。

$$\phi_{33} = f_1(x_3, x_1)x_2 \quad , \tag{4.2.25}$$

$$\phi_{11} = g_1(x_3, x_1)x_2 + g_2(x_3, x_1) \quad , \tag{4.2.26}$$

$$\phi_{22} = h_1(x_3, x_1) \quad . \tag{4.2.27}$$

更に、最後に残った条件$\sigma_{22,2} = 0$に(4.2.25), (4.2.26)式を代入すると次式に示す関係が満たされなければならないことがわかる。

$$g_1(x_3, x_1)_{,33} + f_1(x_3, x_1)_{,11} = 0 \quad , \tag{4.2.28}$$

(4.2.28)式は関数$g_1(x_3, x_1)$と$f_1(x_3, x_1)$とが互いに関連していることを示している。また一般化２次元問題はx_2方向を厚さ方向とする平面歪問題と比較してσ_{23}とσ_{12}の応力成分が存在する点が大きな特徴であり、これらは関数$g_1(x_3, x_1)$と$f_1(x_3, x_1)$とに関係している。

次に適合条件を満足するための応力関数の条件を調べる。６個の適合条件をMaxwellの応力関数を用いて表すと次式となる。

$$(1 + \nu)\nabla^2(\phi_{22,33} + \phi_{33,22}) + \Theta_{,11} = 0 \quad , \tag{4.2.29}$$

$$(1 + \nu)\nabla^2(\phi_{33,11} + \phi_{11,33}) + \Theta_{,22} = 0 \quad , \tag{4.2.30}$$

$$(1 + \nu)\nabla^2(\phi_{11,22} + \phi_{22,11}) + \Theta_{,33} = 0 \quad , \tag{4.2.31}$$

$$[(1 + \nu)\nabla^2\phi_{11} - \Theta]_{,23} = 0 \quad , \tag{4.2.32}$$

$$[(1 + \nu)\nabla^2\phi_{22} - \Theta]_{,31} = 0 \quad , \tag{4.2.33}$$

$$[(1 + \nu)\nabla^2\phi_{33} - \Theta]_{,12} = 0 \quad . \tag{4.2.34}$$

ここでνはPoisson比を表し、Θ及び∇^2は

$$\Theta = \nabla^2(\phi_{11} + \phi_{22} + \phi_{33}) - \phi_{11,11} - \phi_{22,22} - \phi_{33,33} \quad , \tag{4.2.35}$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2 \quad . \tag{4.2.36}$$

である。

(4.2.25)～(4.2.27)式を適合条件式(4.2.29)～(4.2.34)式に代入して(4.2.28)式を用いると次式が得られる。

$$\nabla_2^2 \nabla_2^2 h_1(x_3, x_1) + \nu \nabla_2^2 h_1(x_3, x_1)_{,33} + g_2(x_3, x_1)_{,3311} = 0 \quad , \tag{4.2.37}$$

$$(1 + \nu) \nabla_2^2 g_2(x_3, x_1)_{,33} = 0 \quad , \tag{4.2.38}$$

$$\nabla_2^2 \nabla_2^2 h_1(x_3, x_1) + \nu \nabla_2^2 h_1(x_3, x_1)_{,11} + g_2(x_3, x_1)_{,3333} = 0 \quad , \tag{4.2.39}$$

$$(1 + \nu) \nabla_2^2 g_1(x_3, x_1)_{,3} = 0 \quad , \tag{4.2.40}$$

$$\nu \nabla_2^2 h_1(x_3, x_1)_{,31} - g_2(x_3, x_1)_{,3331} = 0 \quad , \tag{4.2.41}$$

$$(1 + \nu) \nabla_2^2 f_1(x_3, x_1)_{,1} = 0 \tag{4.2.42}$$

ここで記号∇_2^2はx_3-x_1面での２次元問題に関する演算子で次式のように定義される。

$$\nabla_2^2 = \partial^2/\partial x_3^2 + \partial^2/\partial x_1^2 \tag{4.2.43}$$

したがって(4.1.2)式で表される一般化２次元問題は(4.2.37)～(4.2.42), (4.2.28)式を満足する４個の関数f_1 , g_1 , g_2 , h_1で表すことができる。

4．3　Leipholzの応力関数

これらの関数を用いて問題を解くには(4.2.37)～(4.2.42)，(4.2.28)式を満足する関数を捜さねばならないことになり相当に困難なことになるので、取り扱いを容易にするためにLeipholz[10]が提案した応力関数を用いることにする。３個のMaxwellの応力関数$\phi_{(ii)}$が独立な３個の調和関数$H_{(ii)}$とそれぞれに共通な関数Ωの和で書けるとする。つまり

$$\phi_{(ii)} = H_{(ii)} + \Omega \quad , \tag{4.3.1}$$

$$\nabla^2 H_{(ii)} = 0 \quad . \tag{4.3.2}$$

と表せるとする。ここで記号( )は中の指標が総和規約に従わないことをあらわす。

Leipholzは関数$H_{(ii)}$とΩとが次式に示す関係を満足するとき適合条件を満足することを示している。

$$(1-\nu)\nabla^2\Omega = H_{11,11} + H_{22,22} + H_{33,33} \quad . \tag{4.3.3}$$

(4.2.25)～(4.2.27)式を(4.3.1)式に代入すると次式を得る。

$$H_{11}(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_3, x_1)x_2 + g_2(x_3, x_1) - \Omega(x_1, x_2, x_3) \quad , \tag{4.3.4}$$

$$H_{22}(x_1, x_2, x_3) = h_1(x_3, x_1) - \Omega(x_1, x_2, x_3) \quad , \tag{4.3.5}$$

$$H_{33}(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_3, x_1)x_2 - \Omega(x_1, x_2, x_3) \quad . \tag{4.3.6}$$

(4.3.4)～(4.3.6)式を(4.3.3)式に代入すると次式を得る。

$$(2-\nu)\nabla^2\Omega(x_1, x_2, x_3) = [g_1(x_3, x_1)_{,11} + f_1(x_3, x_1)_{,33}]x_2 + g_2(x_3, x_1)_{,11} \quad . \tag{4.3.7}$$

同様に(4.3.2)式に代入すると次式を得る。

$$\nabla^2[g_1(x_3, x_1)x_2 + g_2(x_3, x_1)] - \nabla^2\Omega(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad , \tag{4.3.8}$$

$$\nabla^2 h_1(x_3, x_1) - \nabla^2\Omega(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad , \tag{4.3.9}$$

$$\nabla^2 f_1(x_3, x_1)x_2 - \nabla^2\Omega(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad . \tag{4.3.10}$$

(4.3.7)式を用いて(4.3.8)～(4.3.10)式中の$\Omega(x_1, x_2, x_3)$を消去すると次式になる。

$$[(2-\nu)\nabla_2^2 g_1 - g_{1,11} - f_{1,33}]x_2 + [(2-\nu)\nabla_2^2 g_2 - g_{2,11}] = 0 \quad , \tag{4.3.11}$$

$$-[g_{1,11} + f_{1,33}]x_2 + [(2-\nu)\nabla_2^2 h_1 - g_{2,11}] = 0 \quad . \tag{4.3.12}$$

$$[(2-\nu)\nabla_2^2 f_1 - g_{1,11} - f_{1,33}]x_2 - [g_{2,11}] = 0 \quad , \tag{4.3.13}$$

(4.3.11)～(4.3.13)式がx_2の値に関わらず成立するためには、[ ]内がゼロでなければならない。したがって次式が成立する。

$$\nabla_2^2 f_1(x_3, x_1) = 0 \quad , \tag{4.3.14}$$

$$\nabla_2^2 g_1(x_3, x_1) = 0 \quad , \tag{4.3.15}$$

$$\nabla_2^2 h_1(x_3, x_1) = 0 \quad , \tag{4.3.16}$$

$$g_2(x_3, x_1)_{,11} = 0 \quad , \tag{4.3.17}$$

$$g_2(x_3, x_1)_{,33} = 0 \quad , \tag{4.3.18}$$

$$g_1(x_3, x_1)_{,11} + f_1(x_3, x_1)_{,33} = 0 \quad , \tag{4.3.19}$$

このように一般化２次元問題に対するLeipholzの応力関数は調和関数であることが分かる。(4.3.14)～(4.3.19)式は(4.2.37)～(4.2.42), (4.2.28)式に比べ解くことのできる境界値問題を制限しているが、前者を解く方が後者を解くより簡単である。またLeipholzの応力関数を用いることにより新たに課せられた制限については4.5節で考察する。

４．４　Fourier変換による応力解析

一般化２次元問題の例としてを板状試料の一般的な境界値問題を考察するために、応力関数が満たすべき偏微分方程式をFourier変換し常微分方程式を解く問題に書き直すことについて考える。この手法はSneddon[11]による２次元弾性問題の解析方法の拡張になる。板の面に垂直にx_3軸をとり板厚は2hで幅はx_1, x_2方向に無限の広がりをもっているとする。境界条件は表面に対して垂直な表面力$p_1(x_1)$, $p_2(x_1)$とx_1軸に平行な表面力$\tau_1(x_1)$, $\tau_2(x_1)$によって与えられるとする。ここで添え字1,2は表面の上下面の区別を表す。以上の境界条件のみの場合には通常の２次元問題として取り扱うことができ、Sneddonが解を示している。さらにx_2軸に平行でx_2方向に一様な表面力$q_1(x_1)$, $q_2(x_1)$が加わる場合(いわゆるx_3-x_1面に関する面外せん断力が作用する場合)には、本章で考察している一般化２次元弾性問題となる。ここで考える境界条件はFourier変換可能であるとし、合力と合モーメントとは釣り合っているとする。

前節で示したLeipholzの応力関数を直接この問題に適用することはできないので、(4.3.1)式の関数Ωの必要条件が

$$\nabla^2\nabla^2\Omega = 0 \quad , \tag{4.4.1}$$

であること[10]に着目し、Leipholzの応力関数の自然な拡張として応力関数$\phi_{(ii)}$を重調和関数としてみよう。

すると、(4.2.25)～(4.2.27)式は次式を満たす。

$$\nabla^2\nabla^2\phi_{11} = \nabla_2^2\nabla_2^2\phi_{11} = 0 \quad , \tag{4.4.2}$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi_{22} = \nabla_2^2\nabla_2^2\phi_{22} = 0 \quad , \tag{4.4.3}$$

$$\nabla^2\nabla^2\phi_{33} = \nabla_2^2\nabla_2^2\phi_{33} = 0 \quad . \tag{4.4.4}$$

適合条件については後で考察することにし、まず(4.4.2)～(4.4.4)式の一般解を求めよう。ϕ_{33}及びϕ_{11}は(4.2.25), (4.2.26)式で表される形式を有しAlmansiの定理[5]を適用し得るので、重調和関数 ϕ_{33}, ϕ_{11} を求める問題は調和関数$f_1(x_3,x_1)$, $g_1(x_3,x_1)$, $g_2(x_3,x_1)$を求める問題によって置き換えられる。一方、ϕ_{22}に対する(4.2.27)式にもAlmansiの定理を適用し得るけれどもここでは$h_1(x_3,x_1)$については重調和関数を求める。

関数$f_1(x_3,x_1)$, $g_1(x_3,x_1)$, $g_2(x_3,x_1)$のFourier変換をそれぞれ$F_1(\xi,x_3)$, $G_1(\xi,x_3)$, $G_2(\xi,x_3)$とすると調和方程式のFourier変換により次式を得る。

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \xi^2\right) F_1 = 0 \quad , \tag{4.4.5}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \xi^2\right) G_1 = 0 \quad , \tag{4.4.6}$$

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \xi^2\right) G_2 = 0 \quad . \tag{4.4.7}$$

(4.4.5)～(4.4.7)式の一般解は次式のように書ける。

$$F_1(\xi, x_3) = A_1 \cosh \xi x_3 + C_1 \sinh \xi x_3 \quad , \tag{4.4.8}$$

$$G_1(\xi, x_3) = A_2 \cosh \xi x_3 + C_2 \sinh \xi x_3 \quad , \tag{4.4.9}$$

$$G_2(\xi, x_3) = A_3 \cosh \xi x_3 + C_3 \sinh \xi x_3 \quad . \tag{4.4.10}$$

同様に関数$\phi_{22}(x_3, x_1)$のFourier変換を$\Phi(\xi, x_3)$と表すと、(4.4.3)式は次式のように変換できる。

$$\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \xi^2\right)^2 \Phi = 0 \quad . \tag{4.4.11}$$

(4.4.11)式の一般解は次式のように書ける。

$$\Phi(\xi, x_3) = (A + B\xi x_3)\cosh \xi x_3 + (C + D\xi x_3)\sinh \xi x_3 \quad . \tag{4.4.12}$$

(4.4.8)～(4.4.10), (4.4.12)式で与えられる一般解は応力関数としての必要条件のみから求められたので、応力関数が物理的に意味のある応力を与えるための十分条件をも満足

するためにはさらに適合条件を満足しなければならない。そこで、適合条件を満たすために応力関数F_1, G_1, G_2, Φ の係数A_1, C_1などの間に成り立つべき関係式について考察する。Beltrami-Michellの適合条件式を応力関数で表すと次式となる。

$$\nabla_2^2 \phi_{22,33} + \frac{1}{1+\nu}(\phi_{11,33} + \phi_{22,11} + \phi_{22,33} + \phi_{33,11})_{,11} = 0 \quad , \tag{4.4.13}$$

$$\nabla_2^2 (\phi_{33,11} + \phi_{11,33}) = 0 \quad , \tag{4.4.14}$$

$$\nabla_2^2 \phi_{22,11} + \frac{1}{1+\nu}(\phi_{11,33} + \phi_{22,11} + \phi_{22,33} + \phi_{33,11})_{,33} = 0 \quad , \tag{4.4.15}$$

$$-\nabla_2^2 \phi_{11,23} + \frac{1}{1+\nu}(\phi_{11,33} + \phi_{33,11})_{,23} = 0 \quad , \tag{4.4.16}$$

$$-\nabla_2^2 \phi_{22,31} + \frac{1}{1+\nu}(\phi_{11,33} + \phi_{22,11} + \phi_{22,33} + \phi_{33,11})_{,31} = 0 \quad , \tag{4.4.17}$$

$$-\nabla_2^2 \phi_{33,12} + \frac{1}{1+\nu}(\phi_{11,33} + \phi_{33,11})_{,12} = 0 \quad . \tag{4.4.18}$$

(4.2.25)～(4.2.27)式を考慮してFourier変換した(4.4.13)～(4.4.18)式に(4.4.8)～(4.4.10), (4.4.12)式を用いると、(4.4.15)式は恒等的に成立し、他の式から次のような２組の関係式が得られる。

$$A_1 = A_2 \qquad C_1 = C_2 \quad , \tag{4.4.19}$$

$$A_3 = 2\nu D \qquad C_3 = 2\nu B \quad . \tag{4.4.20}$$

したがって関数$f_1(x_3, x_1)$と$g_1(x_3, x_1)$とは恒等的に等しくなり、(4.2.28)式は自動的に満足されていることになる。(4.4.8)式と(4.4.12)式との係数は境界条件から次式で与えられ

る。

$$A = \frac{-(\overline{p_1}-\overline{p_2})(\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) + i(\overline{\tau_1}+\overline{\tau_2})\xi h \sinh \xi h}{\xi^2(\sinh 2\xi h + 2\xi h)} , \quad (4.4.21)$$

$$B = \frac{(\overline{p_1}+\overline{p_2})\cosh \xi h - i(\overline{\tau_1}-\overline{\tau_2})\sinh \xi h}{\xi^2(\sinh \xi h - 2\xi h)} , \quad (4.4.22)$$

$$C = \frac{-(\overline{p_1}-\overline{p_2})(\xi h \sinh \xi h + \cosh \xi h) + i(\overline{\tau_1}-\overline{\tau_2})\xi h \cosh \xi h}{\xi^2(\sinh \xi h - 2\xi h)} , \quad (4.4.23)$$

$$D = \frac{(\overline{p_1}+\overline{p_2})\sinh \xi h - i(\overline{\tau_1}+\overline{\tau_2})\cosh \xi h}{\xi^2(\sinh \xi h + 2\xi h)} , \quad (4.4.24)$$

$$A_1 = \frac{\overline{q_1} + \overline{q_2}}{2\xi \sinh \xi h} , \quad (4.4.25)$$

$$C_1 = \frac{\overline{q_1} - \overline{q_2}}{2\xi \cosh \xi h} , \quad (4.4.26)$$

ここで$\overline{p_i}$, $\overline{\tau_i}$, $\overline{q_i}$はそれぞれ境界条件p_i, τ_i, q_iのFourier変換を表す。

応力成分は関数G_1, G_2, Φで表される応力成分のFourier変換をFourier逆変換することにより次式のように与えられる。

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\Phi}{dx_3^2} \exp(-i\xi x_1) d\xi , \quad (4.4.27)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2G_2}{dx_3^2} \exp(-i\xi x_1) d\xi , \quad (4.4.28)$$

$$\sigma_{33} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \Phi \exp(-i\xi x_1) d\xi , \quad (4.4.29)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi G_1 \exp(-i\xi x_1) d\xi , \quad (4.4.30)$$

$$\sigma_{23} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi}{dx_3} \exp(-i\xi x_1) d\xi \quad , \tag{4.4.31}$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \frac{d\Phi}{dx_3} \exp(-i\xi x_1) d\xi \quad . \tag{4.4.32}$$

４．５　考察

応力関数による弾性問題の解法では、Maxwell, Morera, Airyあるいは他の応力関数を用いる場合でも微分演算を行って物理量である応力成分に対応させているため、応力関数自体に特別の物理的意味があるわけではない。しかし微分演算を行うことによって消去され、応力成分には影響を与えない項が持つ物理的意味は応力関数を用いて変位を論じるときには重要となるので、まず応力関数が持つ任意性についてSouthwell[12]が用いた方法を応用して考えてみる。

今、応力成分と応力関数との関係を(4.2.1)～(4.2.3)式のみで定義する。即ち、

$$\sigma_{12} = -\phi_{33,12} \quad , \tag{4.2.1}$$

$$\sigma_{23} = -\phi_{11,23} \quad , \tag{4.2.2}$$

$$\sigma_{31} = -\phi_{22,31} \quad . \tag{4.2.3}$$

他の応力成分については平衡方程式(3.2.1)式を積分してσ_{12}, σ_{23}, σ_{31}と関連付けることができ、次式のように応力関数との関係が得られる。

$$\sigma_{11} = \phi_{33,22} + \phi_{22,33} + k_1(x_2, x_3) \quad , \tag{4.5.1}$$

$$\sigma_{22} = \phi_{11,33} + \phi_{33,11} + k_2(x_3, x_1) \quad , \tag{4.5.2}$$

$$\sigma_{33} = \phi_{11,22} + \phi_{22,11} + k_3(x_1, x_2) \quad , \tag{4.5.3}$$

ここで$k_1(x_2, x_3)$, $k_2(x_3, x_1)$, $k_3(x_1, x_2)$は任意関数を表す。(4.2.4)～(4.2.6)式と比較すると任意関数の違いがあることがわかる。

次に(4.5.1)～(4.5.3)式に用いられているϕ_{33}, ϕ_{11}, ϕ_{22}とは独立な任意関数

$$\phi'_{33}(x_1, x_2, x_3) = f'_2(x_2, x_3) + f'_3(x_3, x_1) \quad , \tag{4.5.4}$$

$$\phi'_{11}(x_1, x_2) = g'_3(x_1, x_2) \quad , \tag{4.5.5}$$

$$\phi'_{22}(x_1, x_2, x_3) = h'_2(x_1, x_2) + h'_3(x_2, x_3) \quad , \tag{4.5.6}$$

を導入し、それぞれϕ_{33}, ϕ_{11}, ϕ_{22}に加えることを考える。

(4.2.1)～(4.2.3)式と矛盾しないためにこの付加関数は次式を満たすように選ばれている。

$$\sigma_{12} = -\phi'_{33}(x_1, x_2, x_3)_{,12} = 0 \quad , \tag{4.5.7}$$

$$\sigma_{23} = -\phi'_{11}(x_1, x_2)_{,23} = 0 \quad , \tag{4.5.8}$$

$$\sigma_{31} = -\phi'_{22}(x_1, x_2, x_3)_{,31} = 0 \quad . \tag{4.5.9}$$

したがって、応力成分σ_{12}, σ_{23}, σ_{31}に影響することなく応力成分σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}にϕ_{33}', ϕ_{11}', ϕ_{22}'から導かれ次式で表されるσ_{11}', σ_{22}', σ_{33}'を加えることができる。

$$\sigma_{11}' = \phi_{33}'_{,22} + \phi_{22}'_{,33} \equiv k_1'(x_2, x_3) \quad , \tag{4.5.10}$$

$$\sigma_{22}' = \phi_{11}'_{,33} + \phi_{33}'_{,11} \equiv k_2'(x_3, x_1) \quad , \tag{4.5.11}$$

$$\sigma_{33}' = \phi_{22}'_{,11} + \phi_{11}'_{,22} \equiv k_3'(x_1, x_2) \quad . \tag{4.5.12}$$

ここで σ_{11}', σ_{22}', σ_{33}' は各々 (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_2) の任意関数となり、それらを$k_1'(x_2, x_3)$, $k_2'(x_3, x_1)$, $k_3'(x_1, x_2)$で表す。応力関数には(4.5.4)～(4.5.6)式で与えられる任意性があるという結果と(4.2.10)～(4.2.12)式とを比べると、(4.2.25)～(4.2.27)式は(4.2.10)～(4.2.12)式において関数 $f_2(x_2, x_3)$, $f_3(x_3, x_1)$, $g_3(x_1, x_2)$, $h_2(x_1, x_2)$, $h_3(x_2, x_3)$を応力関数が持つ任意性と見なしてゼロに置いたものと考えられる。

またSouthwell[12]が示したように上述と同様な結果は付加関数を$\phi_{11}'(x_3, x_1)$, $\phi_{22}'(x_1, x_2)$, $\phi_{33}'(x_2, x_3)$あるいはそのほかの形に選ぶことによっても同様に得られる。このように応力関数の持つ任意性は一意的に定まらず、(4.2.10)～(4.2.12)式において３つの応力関数が含む任意性に対しては複数の組合せが考えられる。本章で示した解はそのうちの１つである。ここで考察している一般化２次元弾性問題ではこの３つの応力関数ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33}は互いに独立ではなく、(4.2.28)式で関係づけられる。

適合条件のうち(4.2.32)～(4.2.34)式を積分することにより次式を得る。

$$(1 + \nu)\nabla^2\phi_{11} - \Theta = k_4(x_3, x_1) + k_5(x_1, x_2) \quad , \tag{4.5.13}$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\phi_{22} - \Theta = k_6(x_1, x_2) + k_7(x_2, x_3) \quad , \tag{4.5.14}$$

$$(1 + \nu)\nabla^2\phi_{33} - \Theta = k_8(x_2, x_3) + k_9(x_3, x_1) \quad . \tag{4.5.15}$$

ここで$k_4(x_3, x_1)$～$k_9(x_3, x_1)$は任意関数を表す。さきに示したような応力関数の任意性から、(4.5.13)～(4.5.15)式右辺の任意関数はもともと応力関数ϕ_{11}～ϕ_{33}の保有する任意性の中に含まれているとみなすことが可能である。

更に、応力関数が持つ別の種類の任意性の1つに応力関数から変位を決定する際に生じるものがある。(4.5.13)～(4.5.15)式の右辺をゼロに置き、$\Theta = \sigma_{kk}$であることを用いると次式が得られる。

$$\sigma_{kk} = (1 + \nu)\nabla^2\phi_{(jj)} \tag{4.5.16}$$

Hookeの法則より歪と応力(応力関数)との関係は(4.5.16)式を用いて次式のように表される。

$$\begin{aligned} Eu_{1',1} &= \sigma_{kk} - (1 + \nu)(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= (1 + \nu)(\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33}) \quad , \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

$$\begin{aligned} Eu_{2',2} &= \sigma_{kk} - (1 + \nu)(\sigma_{33} + \sigma_{11}) \\ &= (1 + \nu)(\phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{11}) \quad , \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

$$\begin{aligned} Eu_{3',3} &= \sigma_{kk} - (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ &= (1 + \nu)(\phi_{33} - \phi_{11} - \phi_{22}) \quad , \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

ここでEはYoung率を表す。

(4.5.17)～(4.5.19)式を積分すると変位成分が次式のように求まる。

$$u_1 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33})_{,1} + k_{10}(x_2, x_3) \quad , \tag{4.5.20}$$

$$u_2 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{11})_{,2} + k_{11}(x_3, x_1) \quad , \tag{4.5.21}$$

$$u_3 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{33} - \phi_{11} - \phi_{22})_{,3} + k_{12}(x_1, x_2) \quad , \tag{4.5.22}$$

ここで$k_{10}(x_2, x_3)$～$k_{12}(x_1, x_2)$は任意関数を表す。これらの任意関数はさきに示した付加関数ϕ_{11}～ϕ_{33}に含まれるはずであるが、直接には分かり難い。任意関数 $k_{10}(x_2, x_3)$～$k_{12}(x_1, x_2)$は全くの任意ではなくその任意性には制限がつくことを次に示す。

(4.5.20)～(4.5.22)式からせん断歪成分を計算すると次式のようになる。

$$\varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$$
$$= \frac{1+\nu}{E}(-\phi_{33})_{,12} + \frac{1}{2}[k_{10}(x_2, x_3)_{,2} + k_{11}(x_3, x_1)_{,1}] \quad , \tag{4.5.23}$$

$$\varepsilon_{23} = (u_{2,3} + u_{3,2})/2$$
$$= \frac{1+\nu}{E}(-\phi_{11})_{,23} + \frac{1}{2}[k_{11}(x_3, x_1)_{,3} + k_{12}(x_1, x_2)_{,2}] \quad , \tag{4.5.24}$$

$$\varepsilon_{31} = (u_{3,1} + u_{1,3})/2$$
$$= \frac{1+\nu}{E}(-\phi_{22})_{,31} + \frac{1}{2}[k_{12}(x_1, x_2)_{,1} + k_{10}(x_2, x_3)_{,3}] \quad . \tag{4.5.25}$$

応力関数と応力状態とが一対一に対応するためには(4.5.23)～(4.5.25)式の[ ]内がゼ

ロでなければならない。

$$k_{10}(x_2, x_3)_{,2} + k_{11}(x_3, x_1)_{,1} = 0 \quad , \tag{4.5.26}$$

$$k_{11}(x_3, x_1)_{,3} + k_{12}(x_1, x_2)_{,2} = 0 \quad , \tag{4.5.27}$$

$$k_{12}(x_1, x_2)_{,1} + k_{10}(x_2, x_3)_{,3} = 0 \quad , \tag{4.5.28}$$

(4.5.23), (4.5.24), (4.5.25)式の[ ]内をx_3, x_1, x_2でそれぞれ微分し関数$k_{10}(x_2, x_3)$について解くと

$$k_{10}(x_2, x_3)_{,23} = 0 \quad , \tag{4.5.29}$$

が得られる。同様にして関数$k_{11}(x_3, x_1)$と$k_{12}(x_1, x_2)$について解くと次式を得る。

$$k_{11}(x_3, x_1)_{,31} = 0 \quad , \tag{4.5.30}$$

$$k_{12}(x_1, x_2)_{,12} = 0 \quad . \tag{4.5.31}$$

したがってこれらの関数は次式の形をしていなければならない。

$$k_{10}(x_2, x_3) = k_{13}(x_2) + k_{14}(x_3) \quad , \tag{4.5.32}$$

$$k_{11}(x_3, x_1) = k_{15}(x_3) + k_{16}(x_1) \quad , \tag{4.5.33}$$

$$k_{12}(x_1, x_2) = k_{17}(x_1) + k_{18}(x_2) \tag{4.5.34}$$

ここで右辺の関数$k_{13}(x_2)$～$k_{18}(x_2)$は任意関数である。得られた(4.5.32)～(4.5.34)式は(4.5.26)～(4.5.28)式が成立するための必要条件にすぎないので、同時に十分条件ともなる結果を求めるために(4.5.32)～(4.5.34)式を(4.5.26)～(4.5.28)式に代入すると、$k_{10}(x_2, x_3)$, $k_{11}(x_3, x_1)$, $k_{12}(x_1, x_2)$は次式に示すような一次関数でなければならないことがわかる。

$$k_{10}(x_2, x_3) = a_1 x_2 - a_3 x_3 + b_1 \quad , \tag{4.5.35}$$

$$k_{11}(x_3, x_1) = a_2 x_3 - a_1 x_1 + b_2 \quad , \tag{4.5.36}$$

$$k_{12}(x_1, x_2) = a_3 x_1 - a_2 x_2 + b_3 \quad . \tag{4.5.37}$$

ここでa_1～a_3とb_1～b_3とは任意定数を表す。このような一次関数は物理的には物体の剛体的な並進と回転とを意味しており、付加関数ϕ'_{11}～ϕ'_{33}の中に含めることができる。したがって、並進と回転とに伴う変位を除外するために任意定数a_1～a_3, b_1～b_3をゼロと置くと、Leipholzが示しているように変位と応力関数との関係は次式のようになる。

$$u_1 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33}),_1 \quad , \tag{4.5.38}$$

$$u_2 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{11}),_2 \quad , \tag{4.5.39}$$

$$u_3 = \frac{1+\nu}{E}(\phi_{33} - \phi_{11} - \phi_{22}),_3 \quad , \tag{4.5.40}$$

次に一般化２次元弾性問題の変位について考察する。(4.1.2)式で表される問題の定義に

は変位がx_2に依存する場合が除外されていない。したがって、例えばx_1-x_2面あるいはx_2-x_3面を主面とする曲げ、x_2軸回りのねじり、x_2軸方向の引張りとか圧縮変形問題などを含んでいる。ここでは、次章で取り扱う仮想表面力の面外せん断力問題の解法に便利なように更に次式で示す条件を課す。

$$u_{i,2} = 0 \quad , \tag{4.5.41}$$

即ち、変位がx_2軸方向に変化しない条件を課す。(4.2.25)～(4.2.27)式と(4.5.38)～(4.5..40)式とを用いて(4.5.41)式を表すと次式で示す関係が得られる。

$$[f_1(x_3, x_1) - g_1(x_3, x_1)]_{,1} = 0 \quad , \tag{4.5.42}$$

$$[f_1(x_3, x_1) - g_1(x_3, x_1)]_{,3} = 0 \quad . \tag{4.5.43}$$

$f_1(x_3, x_1) = g_1(x_3, x_1)$が成立する場合には(4.5.42), (4.5.43)式が満足されるので、1つの重調和関数$h_1(x_3, x_1)$と2つの調和関数$g_1(x_3, x_1)$と$g_2(x_3, x_1)$とで表される問題は(4.5.41)式で定義される問題に対応している。条件(4.5.41)式は上述の曲げ、ねじり、引張り圧縮変形を除外しており、また4.4節で応力場を解析した問題では$f_1(x_3, x_1) = g_1(x_3, x_1)$が成立しているので、4.4節はこれらの場合を除外した問題について定式化したことになっている。

最後に平面歪と平面応力状態とに対応する応力関数が示す性質の違いについて考察してみる。x_3方向を厚さ方向とする平面歪の場合、(4.5.38)～(4.5.40)式と問題の定義($\varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$)とから応力関数が満たすべき条件を次式のように得る。

$$(\phi_{11} - \phi_{22} - \phi_{33})_{,13} = 0 \quad , \tag{4.5.44}$$

$$(\phi_{22} - \phi_{33} - \phi_{11})_{,23} = 0 \quad , \tag{4.5.45}$$

$$(\phi_{33} - \phi_{11} - \phi_{22})_{,3} = 0 \quad . \tag{4.5.46}$$

一方、x_3方向を厚さ方向とする平面応力($\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0$)の場合には次式の関係が成立する。

$$\phi_{11,23} = 0 \quad , \tag{4.5.47}$$

$$\phi_{22,13} = 0 \quad , \tag{4.5.48}$$

$$\phi_{11,22} + \phi_{22,11} = 0 \quad . \tag{4.5.49}$$

もし$\phi_{11} = \phi_{22} = 0$ に選ぶと(4.5.47)～(4.5.49)式は自動的に満足される。したがって平面応力に対する応力関数ϕ_{33}は(4.5.47)～(4.5.49)式によって制限を受けず、変数x_1, x_2, x_3の関数となる。ただし、この場合適合条件により応力関数ϕ_{33}は試料中央面で変数x_1, x_2の重調和関数で、x_3に関しては２次関数になる。これは等方性の場合にはTimoshenko and Goodier[3]により、異方性の場合には本論文第３章で示した通りである。平面歪に対しては、(4.5.44)～(4.5.46)式から応力関数が変数x_3の関数であってはならずx_1, x_2のみの関数でなければならないことがわかる。また平面応力の場合と同様に、適合条件から応力関数ϕ_{33}は変数x_1, x_2の重調和関数となる。このように平面応力、平面歪問題に対するAiryの応力関数は、$\phi_{11} = \phi_{22} = 0$ という制限のもとでのMaxwellの応力関数に対応していることがわかる。つまりこれらの２次元弾性問題では、問題の定義(平面歪の場合は$\varepsilon_{33} =$

$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = 0$ 、平面応力の場合は$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$)に応じて３次元応力関数として$\phi_{11} = \phi_{22} = 0$ という応力関数を暗黙のうちに用いていることになる。一方、(4.1.2)式で定義される一般化２次元弾性問題は互いに関連し合う３個の応力関数を必要とするが、問題を更に(4.5.41)式で限定すると(4.5.41)式は平面歪の定義(4.1.1)式によく似た式となり、両者に対する応力関数も互いに強い関連性を示す形式となる。このように、一般化２次元弾性問題のうち(4.5.41)式で更に限定される問題に対する応力関数ϕ_{22}は前節で示した通りx_3, x_1の重調和関数で表すことができ、座標系の取り方を変換してx_2方向を厚さ方向にすると平面歪状態を表すAiryの応力関数に相当している。

４．６　結言

３次元弾性問題の中で一方向に応力、歪が変化しない問題はその軸に垂直な平面の位置にかかわらず等価と見なせるので一種の２次元的な弾性問題と考えることができ、本章ではこれを一般化２次元弾性問題として導入した。応力成分がx_2方向に変化しない問題を応力関数を用いて解くと、問題の定義と適合条件とから応力関数は(4.2.37)～(4.2.42), (4.2.28)式を満たす４個の関数で表すことができる。応力関数をそれぞれ重調和関数に選ぶとこれらのうち３個の関数は調和関数になり、$u_{i,2} = 0$ の条件を満たす解になる。

Fourier変換を用いて解を求めると解は(4.4.8)～(4.4.10), (4.4.12)式で与えられ、各係数は境界条件より(4.4.21)～(4.4.26)式のように求められる。応力成分はFourier逆変換により(4.4.27)～(4.4.32)式で与えられる。

参 考 文 献

(1) Y. Arimitsu and K. Nishioka, Z. angew. Math. Mech., 68(1988), 631.

(2) A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover, New York, 1944.

(3) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

(4) I. S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1956.

(5) Y. C. Fung, Foudation of Solid Mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1965.

(6) 最上武雄，二次元弾性理論，コロナ社，1942.

(7) 森口繁一，２次元弾性論，岩波書店，1956.

(8) J. C. Maxwell, Edinburgh Roy. Soc. Trans., 26(1870), 1.

(9) G. Morera, Atti della reale accademia dei Lincei, Rome, ser.5, 1(1892), 137.

(10) H. H. E. Leipholz, Der Stahlbau, 5(1972), 134.

(11) I. N. Sneddon, Fourier Transforms, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1951.

(12) R. V, Southwell, Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume, (1938), 211.

第５章　界面転位による不適合応力場

５．１　緒言

第２章で述べたように、双結晶試料の変形に際して粒界に生じる変位の不適合は一般に界面の剛体的な相対変位と界面転位の分布として取り扱うことができる。本章では双結晶試料の粒界に形成されるこの界面転位壁による応力場について解析する。この問題は双結晶試料を用いた実験の解析に有効であることが期待できる。

第２章で界面転位の転位密度を求めるとき、あるいは第３章で参照系を平面応力状態として取り扱うことが可能なことを示す場合、試料を異方性弾性体として取り扱ってきた。異方性弾性体中での転位の応力場についてはEshelbyら[1]がまっすぐで比較的簡単な場合について解を示しているが、一般には６次の代数方程式を解く必要があり複雑になる。したがって本章における界面転位の応力場の計算では、簡単のため均質な等方性弾性体中に転位壁が形成された状態で近似する。このように転位による応力場の計算にあたって双結晶試料を均質な等方性弾性体で近似しても誤差は多くの結晶で20～30%程度であることが期待できる[2]・[3]。異相双結晶試料の場合には不均質な等方性弾性体で近似することになり、本論文では取り扱わないがChou and Hirth[4]の解析を後述する仮想表面力による応力場の解として用いることができる。また、弾性的性質が互いに異なる２つの半無限体の表面を接合させてできる異相界面に転位壁が形成された場合の応力場は Nakahara[5], Chouら[6]・[7]によって示されており、これらを組み合わせれば板状異相双結晶試料の界面転位壁による応力場の解析も可能になる。

板状試料に転位壁が形成された場合、自由表面と転位線及びBurgersベクトルとの相対関係から図5-1に示す６通りの転位壁が考えられる。図中のE_1, E_3は転位線と自由表面とが平行な刃状転位、E_2, E_4は転位線と自由表面とが垂直な刃状転位、S_1, S_2はそれぞれ自由表

面に平行、垂直ならせん転位を表している。

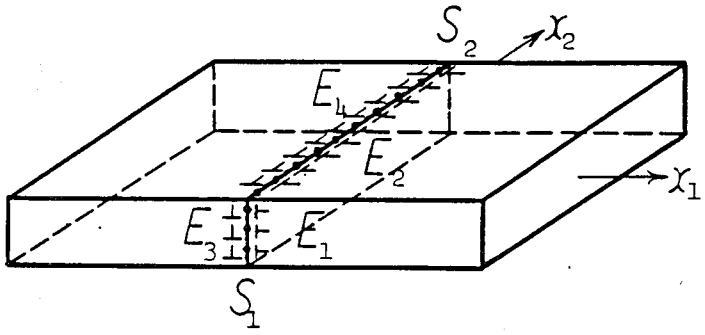


図5-1　無限平板中の転位壁の分類

自由表面をもつ弾性体中での転位の応力場は無限弾性体中での転位の応力場σ_{ij}^{∞}に自由表面で境界条件を満足するように仮想表面力を分布させた問題の応力場$\sigma_{ij}^{\prime}$を重ね合わせることにより得られる。このうちで自由表面に垂直な転位線を持つらせん転位壁が形成された場合には転位壁と自由表面とに垂直な断面に関して面外せん断力となる仮想表面力が必要となり、第４章で示した一般化２次元弾性問題の解法を用いて著者ら[8]がその応力場を示した。

ところで等方性弾性体中にある転位の応力場については多くの先人たちが研究しており、無限弾性体中に１本のまっすぐな転位が存在する場合の応力場は多数の転位論に関する教科書[2],[3],[9]に記載されている。自由表面での境界条件については、自由表面が１つだけ存在する半無限弾性体では自由表面と転位線とが平行な場合には鏡像転位を用いると簡単になり、らせん転位については鏡像転位による応力場の重ね合わせだけで解ける。一方、自由表面と転位線とが平行な刃状転位については表面での境界条件を満足させるためには鏡像転位のほかに仮想表面力が必要となり、らせん、刃状転位ともにHirth and Lothe[2]が応力場を示している。自由表面が２つある板状試料の場合には多少複雑になり鏡像転位

の無限列[2]が形成される。自由表面に転位線とBurgersベクトルとが共に平行な刃状転位の応力場はKroupa[10]が示している。自由表面に垂直ならせん転位については Eshelby[11]が、自由表面と任意の傾きをなす場合にはYoffe[12]が応力場を示している。

等方性弾性板中に転位壁が存在する問題を解くには、上述のように１本の離散転位が弾性板中にある場合の応力場を求めそれを重ね合わせて板状試料中にある転位壁の応力場を求めるよりも、まず無限弾性体中において離散転位が形成する転位壁による応力場から連続分布転位[13],[14]が形成する転位壁の応力場を求め、次いで自由表面の境界条件を満足させるように仮想表面力を自由表面に分布させた問題を解く方が簡単である。本章では連続分布転位が無限弾性体中にある場合の応力場を求め、次いで仮想表面力が作用する問題を第４章で示した一般化２次元弾性問題の解法を用いて計算する。

５．２　連続分布転位

無限弾性体中に連続分布転位が形成する転位壁の応力場を離散転位が形成する転位壁の応力場から求めることを考える。無限弾性体中の転位壁は転位の並び方により図5-2に示す

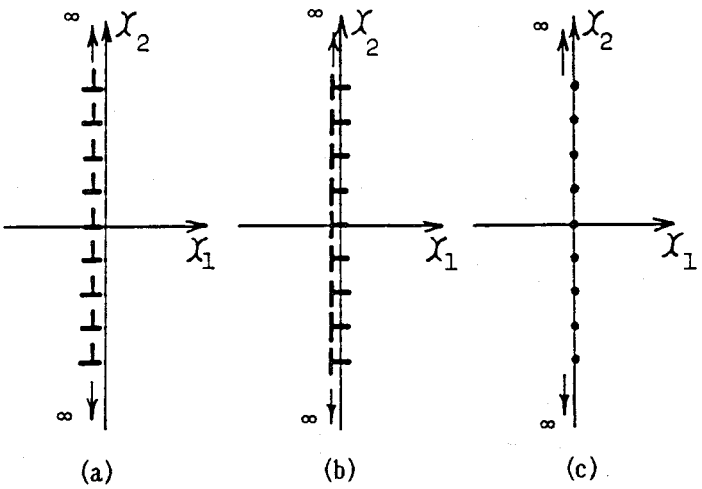


図5-2　無限弾性体中の転位壁

3通りに分類できる。式を簡潔に表すために次式で定義する変数X_1, X_2とσ_0とを用いる。

$$X_1 = x_1/D \quad , \quad X_2 = x_2/D \quad , \tag{5.2.1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\mu b}{2D(1-\nu)(\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2)^2} \quad , \tag{5.2.2}$$

ここでDは離散転位の間隔、μは剛性率を表す。図5-2 (a)に示す刃状転位壁の応力場σ_{ij}^{A*} (i, j=1～3)は次式で与えられる[2),15)]。

$$\sigma_{11}^{A*} = -\sigma_0 \sin 2\pi X_2 (\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2 + 2\pi X_1 \sinh 2\pi X_1) \quad , \tag{5.2.3}$$

$$\sigma_{22}^{A*} = -\sigma_0 \sin 2\pi X_2 (\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2 - 2\pi X_1 \sinh 2\pi X_1) \quad , \tag{5.2.4}$$

$$\sigma_{12}^{A*} = \sigma_0 2\pi X_1 (\cosh 2\pi X_1 \cos 2\pi X_2 - 1) \quad , \tag{5.2.5}$$

$$\sigma_{33}^{A*} = \nu (\sigma_{11}^{A*} + \sigma_{22}^{A*}) \quad , \tag{5.2.6}$$

$$\sigma_{13}^{A*} = \sigma_{23}^{A*} = 0 \quad . \tag{5.2.7}$$

同様に図5-2 (b)に示す刃状転位壁の応力場σ_{ij}^{B*} (i, j=1～3)は次式で与えられる[2)]。

$$\sigma_{11}^{B*} = -\sigma_0 2\pi X_1 (\cosh 2\pi X_1 \cos 2\pi X_2 - 1) \quad , \tag{5.2.8}$$

$$\sigma_{22}^{B*} = -\sigma_0 [2\sinh 2\pi X_1 (\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2) - 2\pi X_1 (\cosh 2\pi X_1 \cos 2\pi X_2 - 1)] \quad , \tag{5.2.9}$$

$$\sigma_{12}^{B*} = \sigma_0 \sin 2\pi X_2 (\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2 - 2\pi X_1 \sinh 2\pi X_1) \quad , \tag{5.2.10}$$

$$\sigma_{33}^{B\cdot} = \nu(\sigma_{11}^{B\cdot} + \sigma_{22}^{B\cdot}) \tag{5.2.11}$$

$$\sigma_{23}^{B\cdot} = \sigma_{31}^{B\cdot} = 0 \tag{5.2.12}$$

そして、図5-2 (c)に示すらせん転位壁による応力場 $\sigma_{ij}^{C\cdot}$ (i, j=1～3) は次式で与えられる[2),16)]。

$$\sigma_{31}^{C\cdot} = -\frac{\mu b}{2D}\frac{\sin 2\pi X_2}{\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2} \quad , \tag{5.2.13}$$

$$\sigma_{23}^{C\cdot} = \frac{\mu b}{2D}\frac{\sinh 2\pi X_1}{\cosh 2\pi X_1 - \cos 2\pi X_2} \quad , \tag{5.2.14}$$

$$\sigma_{11}^{C\cdot} = \sigma_{22}^{C\cdot} = \sigma_{33}^{C\cdot} = \sigma_{12}^{C\cdot} = 0 \quad . \tag{5.2.15}$$

これらの転位が連続分布する極限(D→0)を考えると比b/Dは転位密度ρになり(5.2.3)～(5.2.6), (5.2.8)～(5.2.11), (5.2.13), (5.2.14)式は次式となる。

$$\sigma_{11}^{A\cdot} = \sigma_{22}^{A\cdot} = \sigma_{12}^{A\cdot} = \sigma_{33}^{A\cdot} = \sigma_{11}^{B\cdot} = \sigma_{12}^{B\cdot} = \sigma_{31}^{C\cdot} = 0 \quad , \tag{5.2.16}$$

$$\sigma_{22}^{B\cdot} = \frac{\mu\rho}{(1-\nu)}\,\mathrm{sgn}(x_1) \quad , \tag{5.2.17}$$

$$\sigma_{33}^{B\cdot} = \frac{\mu\rho\nu}{(1-\nu)}\,\mathrm{sgn}(x_1) \quad , \tag{5.2.18}$$

$$\sigma_{23}^{C\cdot} = \frac{\mu\rho}{2}\,\mathrm{sgn}(x_1) \quad . \tag{5.2.19}$$

(5.2.16)式のように値がゼロとなる応力成分は、転位が単独で存在する場合には応力場を形成するが連続分布することにより互いの転位同志の応力場が打ち消し合った結果と考えられる。他方、(5.2.17)～(5.2.19)式で表される応力成分は転位壁からの距離に関してステップ関数状の特性を示し減衰しない。したがって転位壁が無限遠方まで影響を与えることになる。しかし、これは無限弾性体中では界面が無限の広がりを持つことに起因しておりSaint-Venantの原理に反するものではない。

これらの結果を図5-1の粒界に生じる界面転位E_1～E_4, S_1, S_2に当てはめて考えてみると、E_3, E_4の刃状転位壁は不適合応力を生じないことが分かる。Kroupa[10]が示しているように、この応力場を伴わない刃状転位壁では図5-3に示すようなバックリングを生じることになるが、以下の解析においてはこのバックリングが新たな曲げ応力を生じることのないような境界条件を想定している。以上、転位壁の種類とそれらによって生じる応力成分をまとめて表5-1に示す。

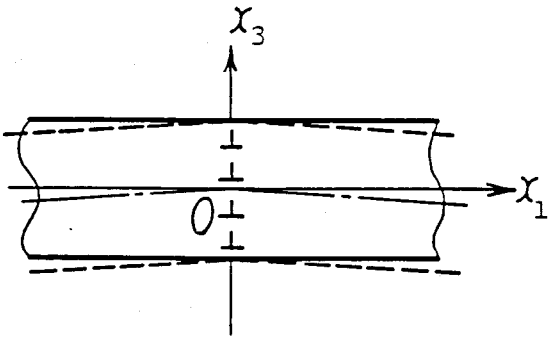


図5-3　刃状転位によるバックリング

表5-1　無限弾性体中にある転位壁により生じる応力場

	E_1	E_2	E_3	E_4	S_1	S_2
$\sigma^{\cdot}_{11}$	—	—	—	—	—	—
$\sigma^{\cdot}_{22}$	○	○	—	—	—	—
$\sigma^{\cdot}_{33}$	○	○	—	—	—	—
$\sigma^{\cdot}_{23}$	—	—	—	—	○	○
$\sigma^{\cdot}_{31}$	—	—	—	—	—	—
$\sigma^{\cdot}_{12}$	—	—	—	—	—	—

○　応力成分あり

—　応力成分なし

(5.2.16)～(5.2.19)式を図5-1の粒界に生じる界面転位に当てはめ、無限弾性体中の転位壁による応力場$\sigma^{\cdot}_{ij}$を２章で導入された転位密度テンソルa_{ij}で表すと次式になる。

$$\sigma^{\cdot}_{11} = \sigma^{\cdot}_{31} = \sigma^{\cdot}_{12} = 0 \quad , \tag{5.2.20}$$

$$\sigma^{\cdot}_{22} = \frac{\mu(a_{32} - \nu a_{23})}{(1-\nu)} \mathrm{sgn}(x_1) = \rho_r \mathrm{sgn}(x_1) \quad , \tag{5.2.21}$$

$$\sigma^{\cdot}_{33} = \frac{\mu(\nu a_{32} - a_{23})}{(1-\nu)} \mathrm{sgn}(x_1) = \rho_p \mathrm{sgn}(x_1) \quad , \tag{5.2.22}$$

$$\sigma^{\cdot}_{23} = \frac{\mu(a_{33} - a_{22})}{2} \mathrm{sgn}(x_1) = \rho_q \mathrm{sgn}(x_1) \quad , \tag{5.2.23}$$

ここでρ_p，ρ_q，ρ_rは界面転位の密度に依存する係数で次式で表される。

$$\rho_p = \frac{\mu(\nu a_{32} - a_{23})}{(1-\nu)} \quad , \tag{5.2.24}$$

$$\rho_q = \frac{\mu(a_{33} - a_{22})}{2} \quad , \tag{5.2.25}$$

$$\rho_r = \frac{\mu(a_{32} - \nu a_{23})}{(1-\nu)} \quad , \tag{5.2.26}$$

5．3　仮想表面力

板厚2hの双結晶試料の自由表面で境界条件を満たすためには、図5-4に示すように自由表面に垂直な力p_1，p_2と自由表面に平行でx_3-x_1面に関する面外せん断力q_1，q_2とが仮想表面力としてx_2方向に一様に作用しなければならない。そしてこれらの仮想表面力は界面転位の密度に応じて次式で与えられる。

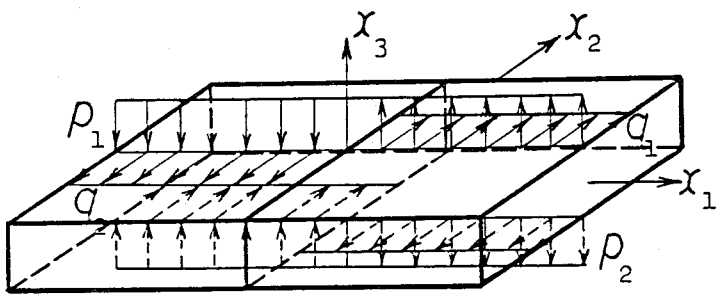


図5-4　仮想表面力の分布

$$p_1(x_1) = -\rho_p \mathrm{sgn}(x_1) \qquad \text{on } x_3 = +h \quad , \tag{5.3.1}$$

$$p_2(x_1) = \rho_p \mathrm{sgn}(x_1) \qquad \text{on } x_3 = -h \quad , \tag{5.3.2}$$

$$q_1(x_1) = -\rho_q \mathrm{sgn}(x_1) \qquad \text{on } x_3 = +h \quad , \tag{5.3.3}$$

$$q_2(x_1) = \rho_q \mathrm{sgn}(x_1) \qquad \text{on } x_3 = -h \quad , \tag{5.3.4}$$

(5.3.1)～(5.3.4)式をFourier変換すると次式となる。[17]

$$\overline{p_1} = -\overline{p_2} = \rho_p \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1)\exp(i\xi x_1)dx_1 = \rho_p \frac{2i}{\xi} \quad , \tag{5.3.5}$$

$$\overline{q_1} = -\overline{q_2} = \rho_q \int_{-\infty}^{\infty} q_1(x_1)\exp(i\xi x_1)dx_1 = \rho_q \frac{2i}{\xi} \quad . \tag{5.3.6}$$

これらの仮想表面力によって生じる応力場は第４章で示した一般化２次元弾性問題の解となり次式により与えられる。

$$\sigma_{11}^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\Phi}{dx_3^2}\exp(-i\xi x_1)d\xi \quad , \tag{5.3.7}$$

$$\sigma_{22}^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2G_2}{dx_3^2}\exp(-i\xi x_1)d\xi \quad , \tag{5.3.8}$$

$$\sigma_{33}^{**} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\Phi\exp(-i\xi x)d\xi \quad , \tag{5.3.9}$$

$$\sigma_{12}^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi F_1\exp(-i\xi x_1)d\xi \quad , \tag{5.3.10}$$

$$\sigma_{23}^{**} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Phi}{dx_3}\exp(-i\xi x_1)d\xi \quad , \tag{5.3.11}$$

$$\sigma_{31}^{**} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi\frac{d\Phi}{dx_3}\exp(-i\xi x_1)d\xi \quad , \tag{5.3.12}$$

ここで応力関数F_1, G_2, Φは(4.4.8), (4.4.10), (4.4.12)式で与えられ、係数は(5.3.5), (5.3.6)式を(4.4.21)～(4.4.26)式に代入すると次式で与えられる。

$$A = \rho_p \frac{-4i(\sinh\xi h + \xi h\cosh\xi h)}{\xi^3(\sinh 2\xi h + 2\xi h)} \quad , \tag{5.3.13}$$

$$B = 0 \quad , \tag{5.3.14}$$

$$C = 0 \quad , \tag{5.3.15}$$

$$D = \rho_p \frac{4i\sinh\xi h}{\xi^3(\sinh 2\xi h + 2\xi h)} \quad , \tag{5.3.16}$$

$$A_1 = 0 \quad , \tag{5.3.17}$$

$$C_1 = \rho_a \frac{i}{\xi^2\cosh\xi h} \tag{5.3.18}$$

(5.3.7)～(5.3.12)式の応力関数を(5.3.13)～(5.3.18)式の係数を用いて具体的に与えると(5.3.7)～(5.3.12)式は次式のようになる。

$$\sigma_{11}^{**} = \frac{-4\rho_p}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\{(\xi h\cosh\xi h-\sinh\xi h)\cos\xi x_3-\xi x_3\sinh\xi h\cdot\sinh\xi x_3\}\sin\xi x_1}{\xi(\sinh 2\xi h + 2\xi h)}d\xi, \tag{5.3.19}$$

$$\sigma_{22}^{**} = \frac{4\rho_p}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\nu\sinh 2\xi x_3}{\xi(\sinh 2\xi h + 2\xi h)}\sin x_1 d\xi \quad , \tag{5.3.20}$$

$$\sigma_{33}^{**} = \frac{4\rho_p}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\{(\sinh\xi h+\xi h\cosh\xi h)\cosh\xi x_3 - x_3\sinh\xi h\cdot\sinh\xi x_3\}\sin\xi x_1}{\xi(\sinh 2\xi h + 2\xi h)}d\xi, \tag{5.3.21}$$

$$\sigma_{12}^{**} = \frac{-2\rho_q}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sinh\xi x_3}{\xi\cosh\xi h}\cos\xi x_1 d\xi \quad , \tag{5.3.22}$$

$$\sigma_{23}^{**} = \frac{2\rho_q}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cosh\xi x_3}{\xi\cosh\xi h}\sin\xi x_1 d\xi \quad , \tag{5.3.23}$$

$$\sigma_{31}^{**} = \frac{4\rho_p}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{h\cosh\xi h\cdot\sinh\xi x_3 - x_3\sinh\xi h\cdot\cos\xi x_3}{\sinh 2\xi h + 2\xi h}\cos\xi x_1 d\xi \quad , \tag{5.3.24}$$

(5.3.19)～(5.3.24)式の積分は解析的に求めることができないので数値積分をする必要があるが、単位仮想表面力に対する解$\sigma_{ij}^{**}(\rho_p = 1, \rho_q = 1)$を計算しておけば与えられた仮想表面力による応力場はそれらの結果に与えられたρ_p, ρ_qの値をを乗じることにより容易に求められる。この単位仮想表面力による応力場を図5-5～図5-10に示す。ここで、距離は板厚2hの半分を単位として無次元化している。

この積分計算についてはFilon[18], 宮本[19]による方法の応用も考えられるが、本論文では二重指数関数型数値積分公式[20],[21]を用いて直接数値積分を行った。また以後の計算結果を図的に示すのに便利なように$-2 \leqq x_1 \leqq 2$, $-1 \leqq x_3 \leqq 1$の範囲で(5.3.19)～(5.3.24)式の数値積分の結果を65×41個の数値データにしてフロッピーディスクに格納した。ただし二重指数関数型数値積分公式は一種の反復法であり、(5.3.19)～(5.3.24)式の収束性にはかなり差が現れる。特に(5.3.20)式の積分が最も収束性が悪く、一般に試料中央面より自由表面が、界面に近い部分より界面から遠ざかるに従って積分計算の収束性が悪くなる傾向にある。

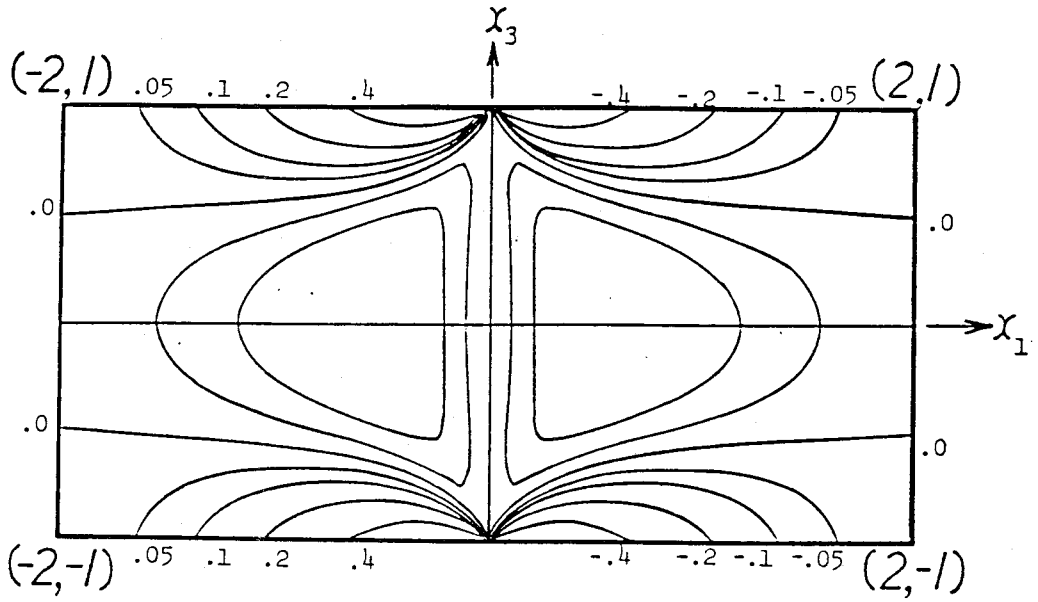


図5-5　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{11}^{**}，単位は ρ_p）

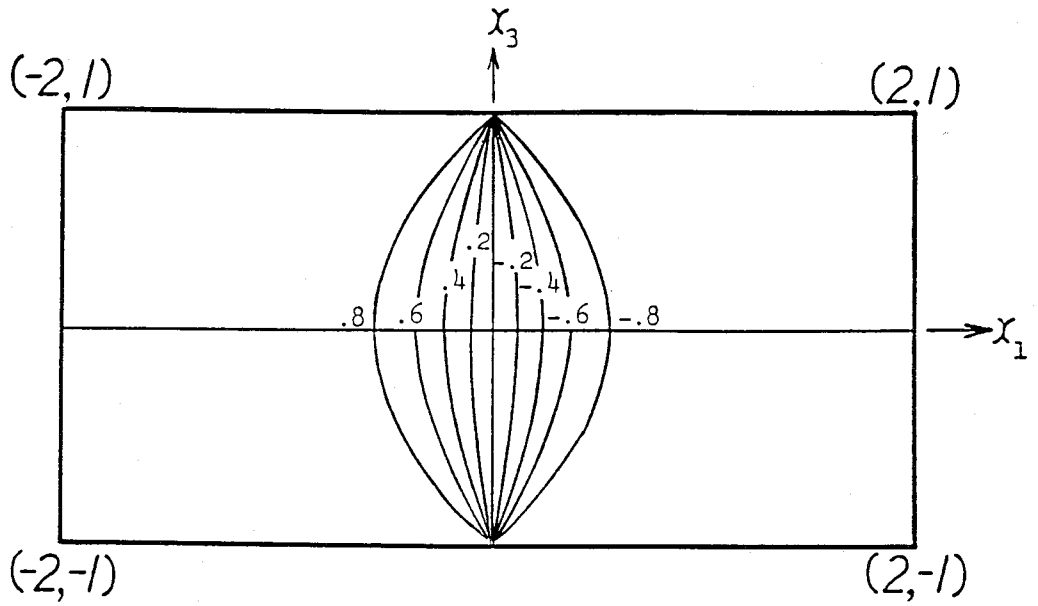


図5-6　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{22}^{**}，単位は ρ_p）

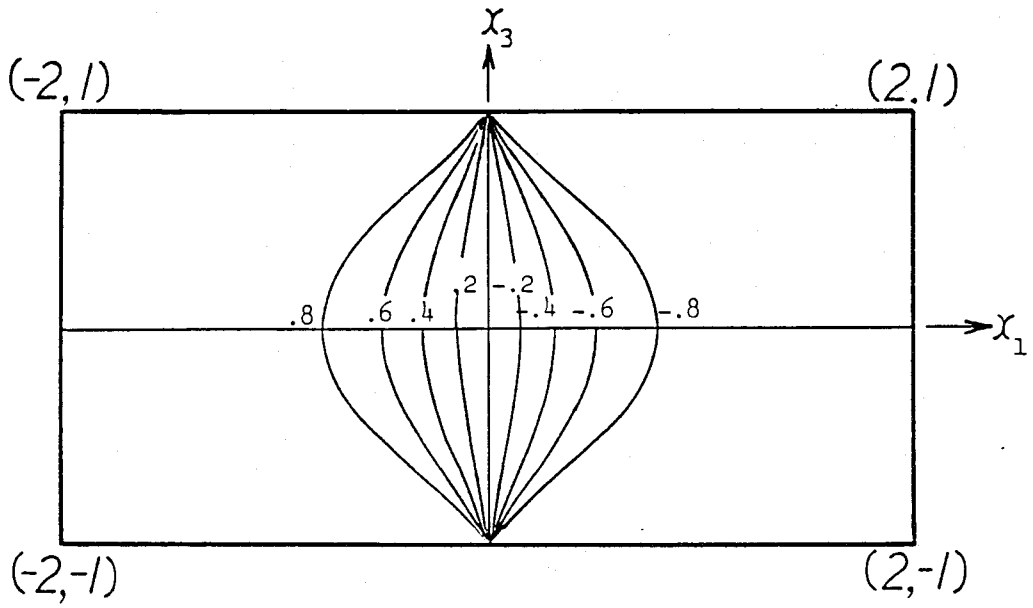


図5-7　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{33}^{**}，単位は ρ_p）

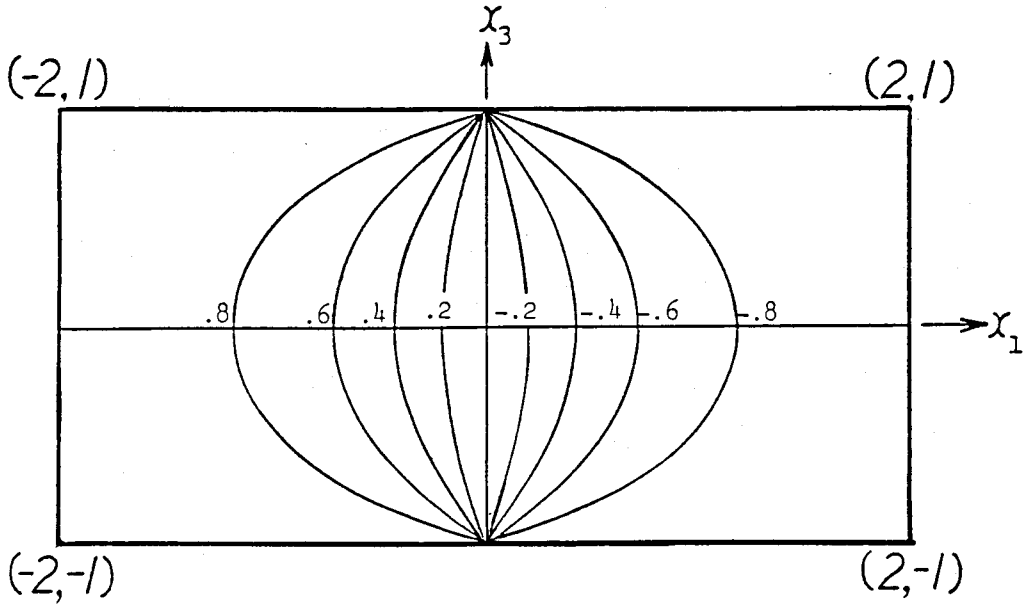


図5-8　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{23}^{**}，単位は ρ_q）

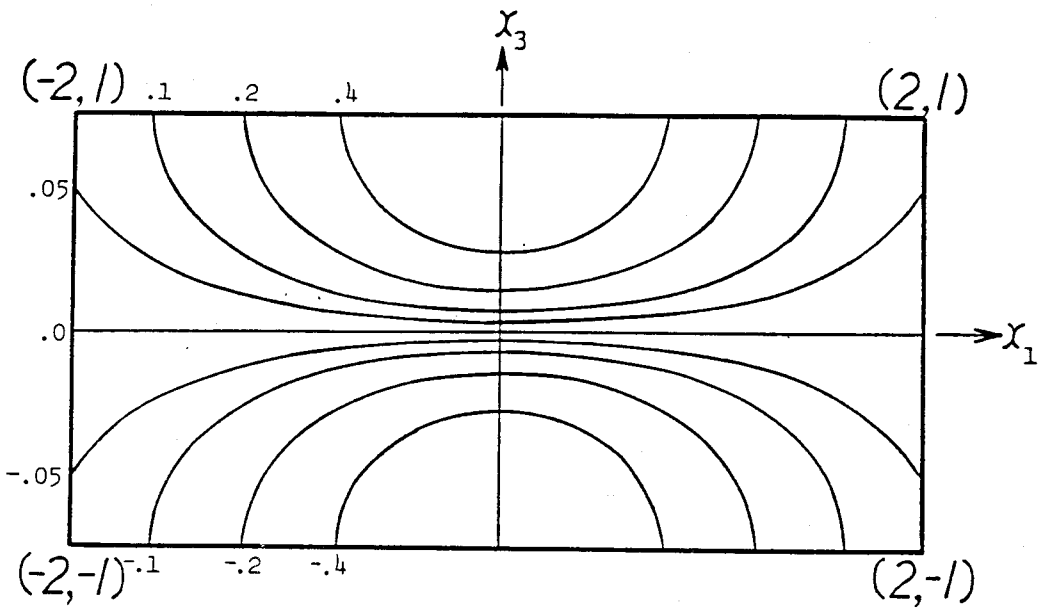


図5-9　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{31}^{**}，単位は ρ_p）

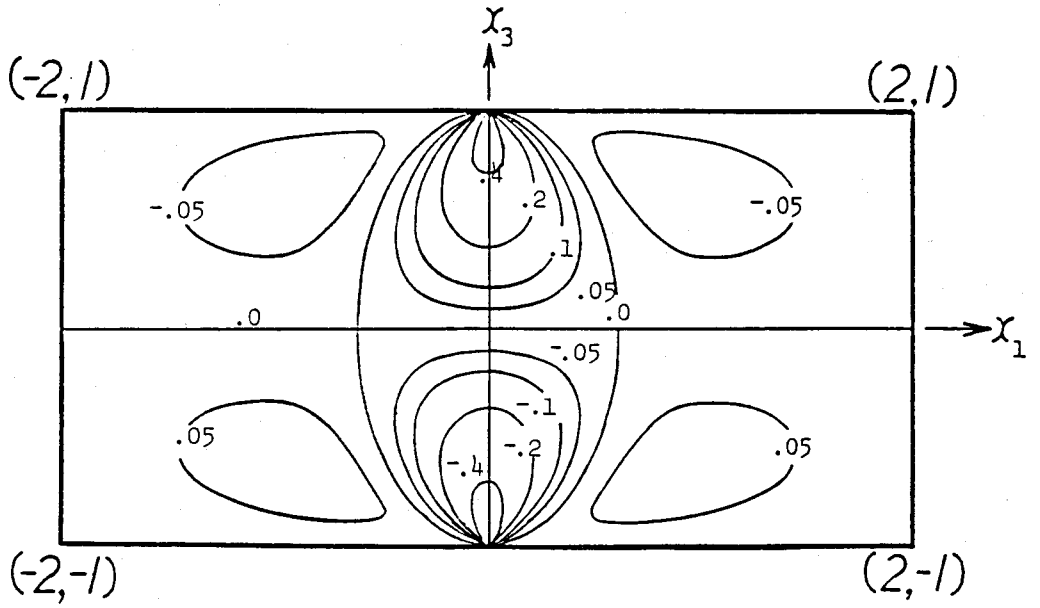


図5-10　単位仮想表面力による応力場（等応力線 σ_{12}^{**}，単位は ρ_q）

５．４　不適合応力

界面転位で表すことができる不適合応力場は(5.2.20)～(5.2.23)式の無限弾性体中の界面転位壁による応力場$\sigma_{ij}^{\cdot}$と(5.3.19)～(5.3.24)式の境界条件を満足させるために必要な仮想表面力による応力場$\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}$との重ね合わせにより次式のように得られる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\cdot} + \sigma_{ij}^{\cdot\cdot} \tag{5.4.1}$$

これらの応力場を等応力線図で表すと図5-11～図5-16になる。第６章で例示するねじれ粒界では $a_{32} = a_{23}$ であることから、その場合には(5.2.24), (5.2.26)式より $\rho_p = -\rho_r$ となる。図5-12に示す不適合応力場σ_{22}は $\rho_r = -1$ の場合に対するものである。これらの図から板状双結晶試料に生じる不適合応力は、粒界や粒界と自由表面との交線に大きな応力集中が起こり界面から遠ざかるに従い不適合応力σ_{22}以外の応力成分はゼロに近づくことが分かる。

$\rho_p = -\rho_r = 1$ の場合、不適合応力σ_{22}は粒界近傍でその絶対値が小さく粒界から離れるに従って増加して$-2\mathrm{sgn}(x_1)$に近づく。試料がx_3方向には有限であるので不適合応力σ_{33}, σ_{31}, σ_{32}などは粒界から遠ざかるに従って減衰するが、x_2方向には無限に長いので不適合応力σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}は粒界から遠くまで及ぶことがあり得ると予想される。しかし、本章で用いている一般化２次元弾性問題の境界条件により粒界から離れるとσ_{11}, σ_{12}は減衰し、σ_{22}は増加して一定値に近づく。

この界面転位による不適合応力場の計算では(5.3.19)～(5.3.24)式の積分計算に大部分の計算時間を費やす。他の数値計算方法と単純に比較するのは難しいが、計算時間に関して大きな利点はない。しかし、一旦(5.3.19)～(5.3.24)式を計算し、各点での値を数値デ

ータ化して記憶させておけば双結晶試料の結晶方位や引張り軸方向を変化させても転位密度の計算だけですみ、計算時間の大幅な短縮が可能となる。

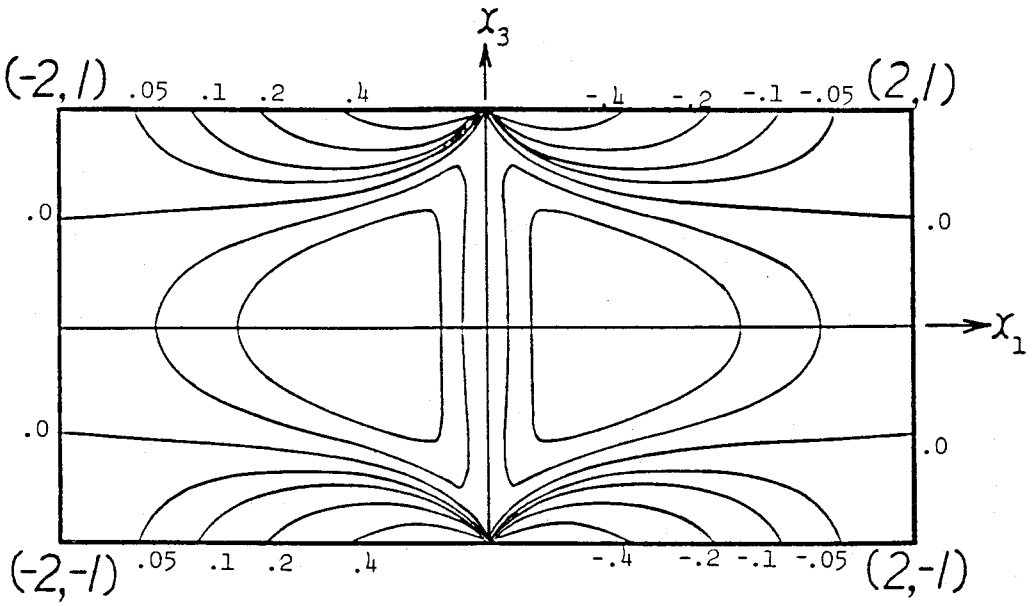


図5-11　不適合応力場（等応力線σ_{11}，単位はρ_D）

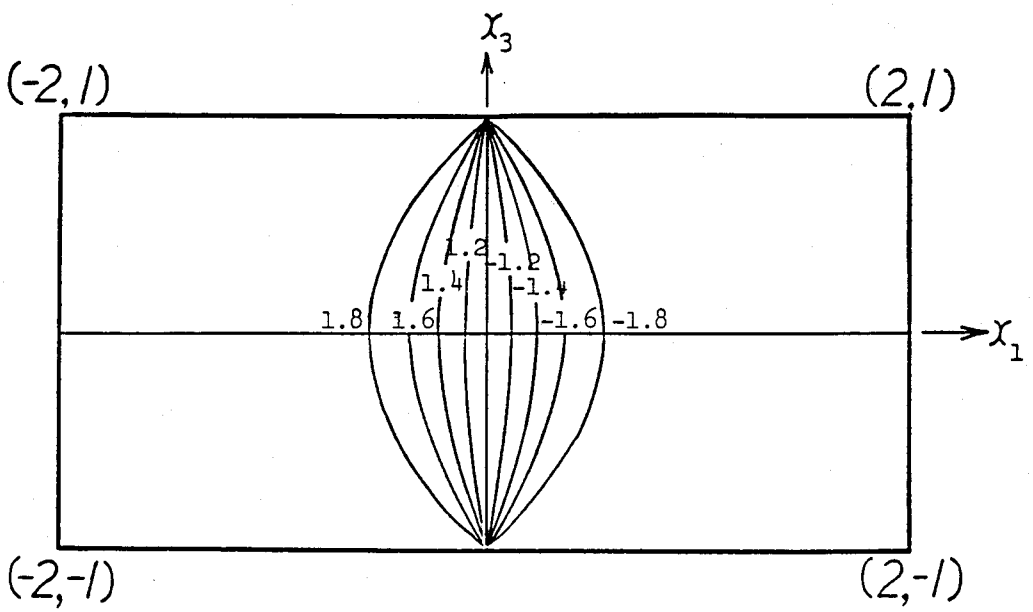


図5-12　不適合応力場（等応力線 σ_{22}，単位は ρ_p）

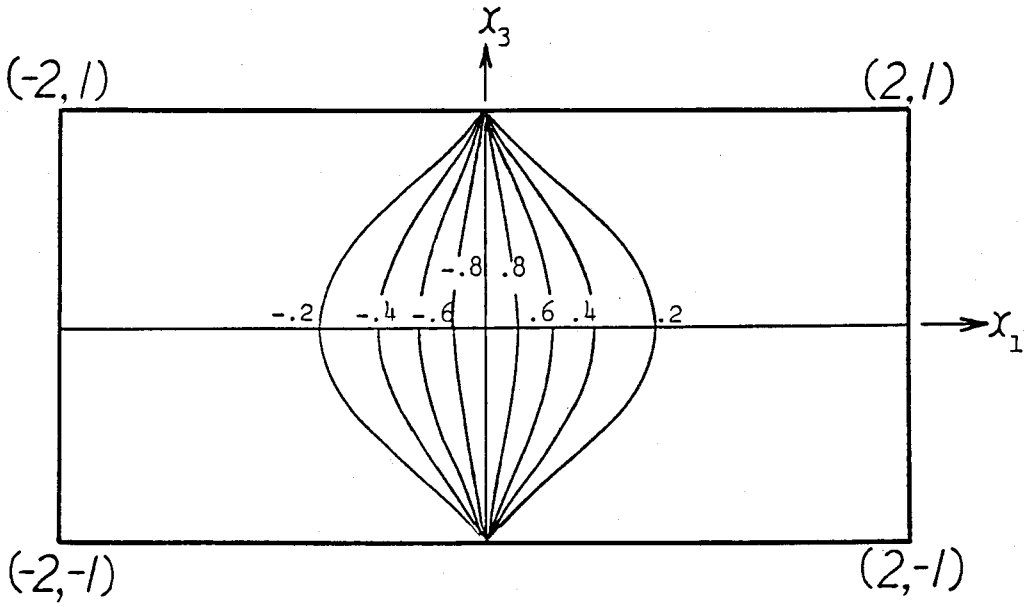


図5-13　不適合応力場（等応力線 σ_{33}，単位は ρ_p）

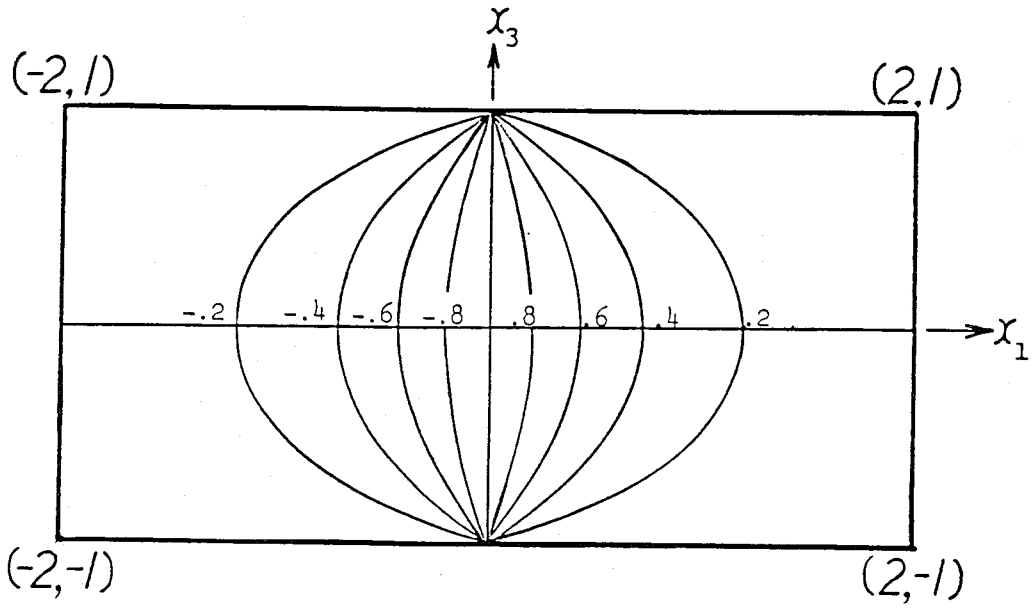


図5-14　不適合応力場（等応力線 σ_{23}，単位は ρ_0）

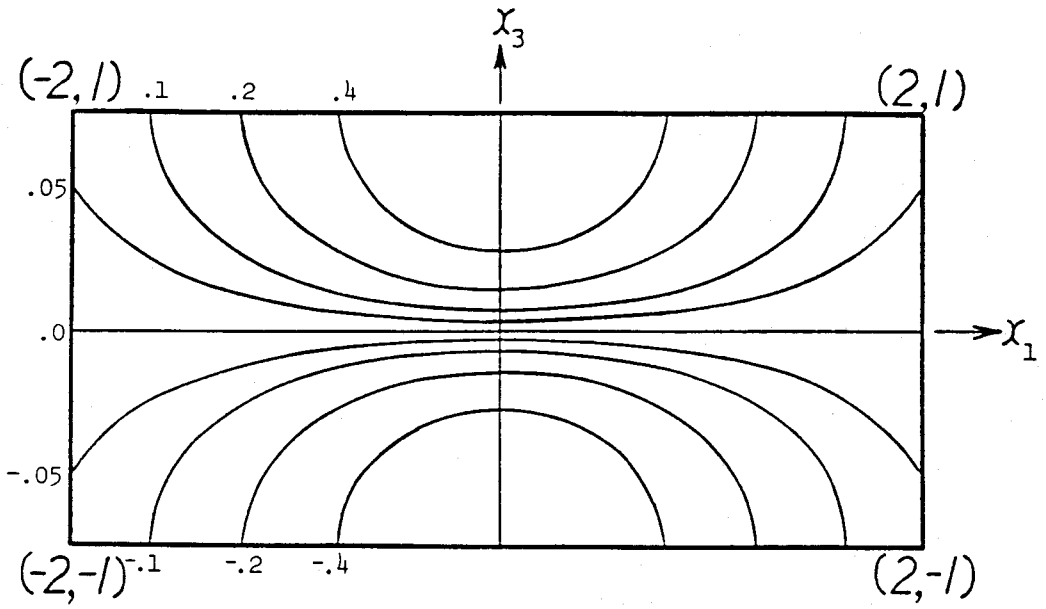


図5-15　不適合応力場（等応力線 σ_{31}，単位は ρ_0）

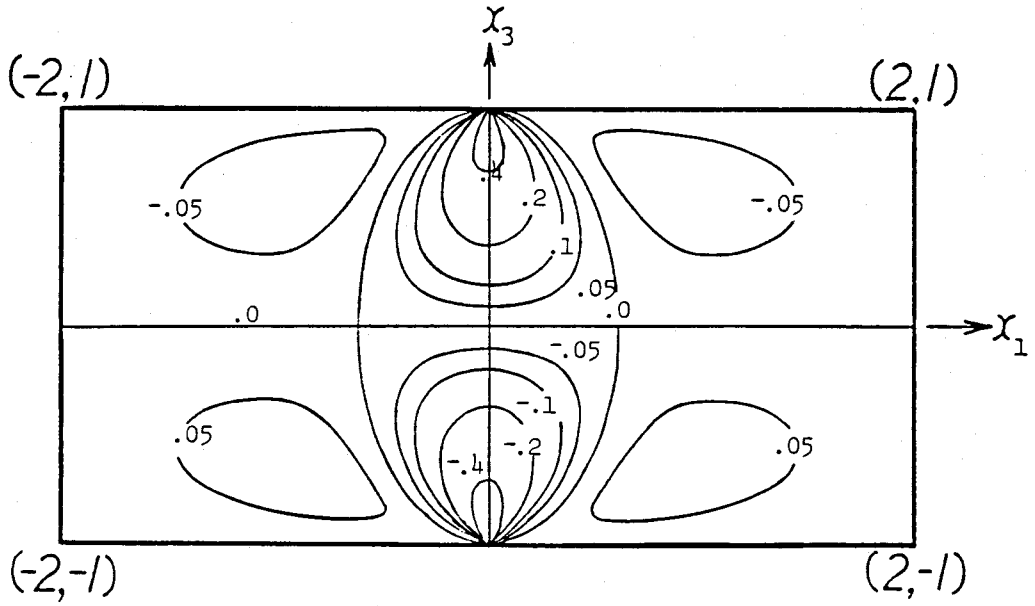


図5-16　不適合応力場（等応力線σ_{12}，単位はρ_0）

5．5　結言

弾性平板に存在する転位壁は転位線の方向とBurgersベクトルの方向とにより６種類に分類でき、無限に広い弾性平板の自由表面に垂直な面内に一様な分布をもつ転位壁が形成された場合の応力場を示した。無限弾性体中に一様な密度の連続分布転位壁が形成された場合の応力場は離散転位壁における転位の間隔を限りなく小さくした極限として得られる。この結果無限弾性体中の転位壁が作り出す応力場は、個々の転位による応力場が互いに打ち消し合ってゼロになる応力成分$\sigma_{11}^{\cdot}$，$\sigma_{31}^{\cdot}$，$\sigma_{12}^{\cdot}$とステップ関数状になる応力成分$\sigma_{22}^{\cdot}$，$\sigma_{33}^{\cdot}$，$\sigma_{23}^{\cdot}$とに大別できる。無限弾性体中での応力状態から無限に広い弾性平板の応力状態を知るには、自由表面での境界条件を満足するように表面に仮想表面力が分布した弾性平

板の解を重ね合わせてやるとよい。この際、自由表面に垂直ならせん転位壁は転位壁と表面とに垂直な断面に関して面外せん断力となる仮想表面力を必要とし、この応力場を求める問題は第４章で述べた一般化２次元弾性問題となる。また、転位壁に平行なBurgersベクトルを持つ刃状転位壁は応力場を生じるが、転位壁に垂直なBurgersベクトルを持つ刃状転位壁は応力場を生じない。

これらの不適合応力のうちσ_{22}以外の応力成分は粒界近傍で高く、特に転位壁と自由表面との交線近くで応力集中が起こる。$\rho_p = -\rho_r = 1$の場合には、不適合応力σ_{22}は界面近傍では絶対値が小さく粒界から離れるに従って一定値 $-2\mathrm{sgn}(x_1)$ に近づく。無限弾性体中での転位壁による応力場は減衰しないが、弾性平板の場合には転位壁から板厚程度離れると不適合応力σ_{22}以外は転位壁の影響が少なくなりSaint-Venantの原理と矛盾しない。しかし転位壁はx_2方向に無限に長いため不適合応力σ_{22}は粒界から無限に離れても減衰しない。

参 考 文 献

(1) J.D.Eshelby, W.T.Read and W.Shockly, Acta Met., 1(1953), 251.

(2) J.P.Hirth and J.Lothe, Theory of Dislocations, 2nd ed., John Wiley, New York, 1982.

(3) F.R.N.Nabarro, Theory of Crystal Dislocations, Oxford University Press, London, 1967.

(4) T.W.Chou and J.P.Hirth, J. Composite Materials, 4(1970), 102.

(5) S.Nakahara, J.B.C.Wu and J.C.M.Li, Mater. Sci. Eng., 10(1972), 291.

(6) Y.T.Chou and L.S.Lin, Mater. Sci. Eng., 20(1975), 19.

(7) Y.T.Chou, C.S.Pande and H.C.Yang, J. Appl. Phys., 46(1975), 5.

(8) Y. Arimitsu and K. Nishioka, Z. angew. Math. Mech., in print.

(9) 鈴木秀次，転位論入門，アグネ，1967.

(10) F. Kroupa, Czeh. J. Phys., 9(1959), 332.

(11) J. D. Eshelby and A. N. Stroh, Phil. Mag., 42(1951), 1401.

(12) E. H. Yoffe, Phil. Mag., 6(1961), 1141.

(13) 村外志夫，日本金属学会会報，13(1974)，733.

(14) B. A. Bilby, Progress in Solid Mechanics vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 331.

(15) A. H. Cottrell, Dislocations and plastic flow in crystals, Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1953, 94.

(16) J. C. M. Li and C. D. Needham, J. Appl. Phys., 31(1960), 1318.

(17) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信，数学公式Ⅱ，岩波書店，1976，274.

(18) L. N. G. Filon, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A201(1903), 63.

(19) 宮本　博，３次元弾性論，裳華房，1967.

(20) 戸田英雄，小野令美，入門数値計算，オーム社，1985.

(21) 森　正武，FORTRAN77　数値計算プログラミング，岩波書店，1987.

第６章　双結晶試料のすべり変形

６．１　緒言

第２章から第５章まで、双結晶試料の粒界近傍に生じる不適合応力について粒界に分布する界面転位と物体力とを導入して解析する方法を示してきたが、本章ではこの方法の応用について考察する。ここでは最も簡単な例として、面心立方晶の双結晶試料を粒界面に垂直な方向に引張った場合に粒界近傍のすべり系に生じる分解せん断応力について検討する。引張り軸に対して粒界面が垂直な双結晶試料を一様な引張り応力で引張った場合には、不適合応力を粒界面に分布する界面転位の応力場だけで表現することができる。前章までの議論は変形が弾性範囲内にある場合に限定してきたが、不適合応力を界面転位の分布で表現することができれば、粒界近傍の弾性的不適合応力の解析以外にも界面転位壁とすべり転位との相互作用に対して良く知られている転位の相互作用に関する結果を利用することにより、塑性変形に関係する現象の解析への本解析方法の応用が期待される。

Hook and Hirth[1],[2]はFe-3%Siの双結晶試料を用いた実験で２次すべり系が必ずしも主すべり系の活動にともなって生じるとは限らないことを報告している。この他にも粒界近傍に生じる不適合応力に起因した実験事実は、アルミニウムを用いて猪子ら[3]~[5]，高杉ら[6],[7]，三浦ら[8]，Chalmersら[9]~[11]が、亜鉛を用いて丸山ら[12],[13]が、β-黄銅を用いてMargolinら[14],[15]がそれぞれ報告している。結晶系が異なると固有のすべり系が異なり、塑性変形においては材料のすべり系が異なることによる現象が現れるはずである。また、材質が異なればたとえすべり系が同じであっても弾性的不適合による応力状態が異なることも有り得る。弾性的不適合応力自体を直接測定したものではないが、これらの実験の多くはすべり線を観察することにより不適合応力の影響を間接的に調べていることになる。これらの実験結果からは直接すべり線を観察できない領域における挙動や

弾性的不適合応力の分布自身を知ることはできず、これらを求めるためには通常は境界条件を仮定して与えられた結晶方位をもつ双結晶試料の弾性問題を計算機により数値的に解いている。しかし、数値計算によって個々の弾性問題は十分な精度で解けたとしても、双結晶試料に生じる弾性不適合応力の系統的な解析とかすべり変形などの塑性変形の解析には適した方法とは言えない。一方、実験結果はSchmid因子，弾性歪の適合性[1),(2)]，塑性歪の適合性[1),(2),(10)]，応力伝達係数[10)]などのパラメータを用いて整理されてきた。本章では、これらのパラメータのうち弾性解析で説明可能なSchmid因子，弾性歪の適合性，応力伝達係数などがもつ意味について考察し、界面転位の応力場によって表すことができる不適合応力との関連を示している。

６．２　成分結晶の方位と転位密度との関係

６．２．１　座標軸の回転に伴う弾性コンプライアンスの変化

第２章において、双結晶試料の単軸引張りの場合界面転位の密度は両成分結晶の弾性コンプライアンスの差に比例することを述べた。この界面転位の密度によって不適合応力を評価できるので、ここではまず成分結晶の結晶方位と弾性コンプライアンスとの関係について考察する。

本来４階のテンソルである弾性コンプライアンスは座標変換に際して次式に従って変換される。

$$S_{ijkl} = a'_{im} a'_{jn} a'_{ko} a'_{lp} S'_{mnop} \qquad (6.2.1)$$

ここでa'_{im}などは図6-1に示すように新旧両座標軸(x_1, x_2, x_3)，(x'_1, x'_2, x'_3)のあいだの方向

余弦を表し、またS_{ijkl}などはいわゆるテンソル表示による弾性コンプライアンスを表す。ただし図6-1では旧座標軸として結晶軸0-abcをとった場合を示している。

	a	b	c
x_1	α_1	β_1	γ_1
x_2	α_2	β_2	γ_2
x_3	α_3	β_3	γ_3

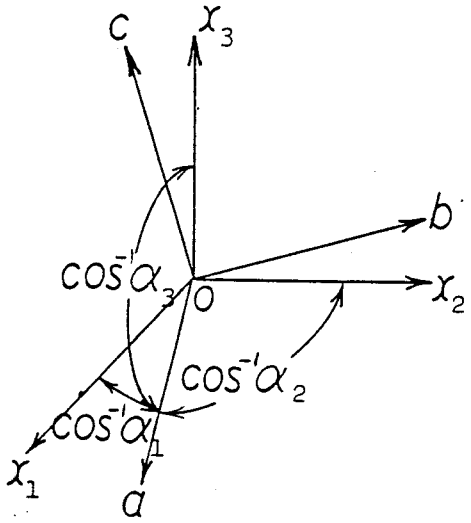


図6-1　座標軸の回転を表す行列

指標を次のように書き換えるとマトリックス表示による弾性コンプライアンスS_{ij}が得られる[6]。

テンソル表示	11	22	33	23, 32	31, 13	12, 21
マトリックス表示	1	2	3	4	5	6

Lekhnitskii[17]はマトリックス表示による弾性コンプライアンスS_{ij}の座標系の回転に伴う変換公式を次式で与えている。

$$S_{ij} = q'_{im} q'_{jn} S'_{mn} \qquad (6.2.2)$$

ここにq'_{im}などは変換マトリックスで表6-1で与えられる。

表6-1　座標変換マトリックス[17]　q'_{im}

i＼m	1	2	3	4	5	6
1	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\alpha_1\alpha_2$
2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$2\beta_2\beta_3$	$2\beta_3\beta_1$	$2\beta_1\beta_2$
3	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	$2\gamma_2\gamma_3$	$2\gamma_3\gamma_1$	$2\gamma_1\gamma_2$
4	$\beta_1\gamma_1$	$\beta_2\gamma_2$	$\beta_3\gamma_3$	$\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2$	$\beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1$	$\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1$
5	$\gamma_1\alpha_1$	$\gamma_2\alpha_2$	$\gamma_3\alpha_3$	$\gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2$	$\gamma_1\alpha_3+\gamma_3\alpha_1$	$\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1$
6	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_3$	$\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2$	$\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1$	$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$

(6.2.1)式と(6.2.2)式とは本質的には同じであり、Nye[16]によって与えられているように次のような関係がある。

$$S_{ijkl} = S_{mn} \quad (m \text{ and } n = 1,2,3) \quad , \tag{6.2.3}$$

$$2S_{ijkl} = S_{mn} \quad (m \text{ or } n = 1,2,3) \quad , \tag{6.2.4}$$

$$4S_{ijkl} = S_{mn} \quad (m \text{ and } n = 4,5,6) \quad . \tag{6.2.5}$$

この２つの表記方法を比較すると、(6.2.1)式は数値計算に適しており(6.2.2)式は比較的知見が得やすい形式になっている。試料座標系に関する弾性コンプライアンスを結晶軸に

関する値を用いて表すには、$0\text{-}x_1x_2x_3$座標系を試料座標系にとり$0\text{-}x'_1x'_2x'_3$座標系を結晶軸0-abcにとればよい。

結晶軸に関する弾性コンプライアンスS'_{ij}から試料軸に関する弾性コンプライアンスS_{ij}を求める関係式は、図6-1に示されている試料軸と結晶軸とのなす方向余弦と次式に示す異方性の程度を表す異方性因子J

$$J = S'_{11} - S'_{12} - \frac{1}{2} S'_{44} \quad , \tag{6.2.6}$$

とを用いて次式で与えられる。

$$S_{11} = S'_{11} - 2J(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) \quad , \tag{6.2.7}$$

$$S_{22} = S'_{11} - 2J(\beta_1^2\beta_2^2 + \beta_2^2\beta_3^2 + \beta_3^2\alpha_1^2) \quad , \tag{6.2.8}$$

$$S_{33} = S'_{11} - 2J(\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2 + \gamma_3^2\gamma_1^2) \quad , \tag{6.2.9}$$

$$S_{12} = S'_{12} + J(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2) \quad , \tag{6.2.10}$$

$$S_{23} = S'_{12} + J(\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_2^2\gamma_2^2 + \beta_3^2\gamma_3^2) \quad , \tag{6.2.11}$$

$$S_{31} = S'_{12} + J(\gamma_1^2\alpha_1^2 + \gamma_2^2\alpha_2^2 + \gamma_3^2\alpha_3^2) \quad , \tag{6.2.12}$$

$$S_{44} = S'_{44} + 4J(\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_2^2\gamma_2^2 + \beta_3^2\gamma_3^2) \quad , \tag{6.2.13}$$

$$S_{55} = S'_{44} + 4J(\gamma_1^2\alpha_1^2 + \gamma_2^2\alpha_2^2 + \gamma_3^2\alpha_3^2) \quad , \tag{6.2.14}$$

$$S_{66} = S'_{44} + 4J(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2) \quad , \tag{6.2.15}$$

$$S_{14} = 2J(\alpha_1^2\beta_1\gamma_1 + \alpha_2^2\beta_2\gamma_2 + \alpha_3^2\beta_3\gamma_3) \quad , \tag{6.2.16}$$

$$S_{25} = 2J(\alpha_1\beta_1^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_2^2\gamma_2 + \alpha_3\beta_3^2\gamma_3) \quad , \tag{6.2.17}$$

$$S_{36} = 2J(\alpha_1\beta_1\gamma_1^2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2^2 + \alpha_3\beta_3\gamma_3^2) \quad , \tag{6.2.18}$$

$$S_{15} = 2J(\alpha_1^3\gamma_1 + \alpha_2^3\gamma_2 + \alpha_3^3\gamma_3) \quad , \tag{6.2.19}$$

$$S_{16} = 2J(\alpha_1^3\beta_1 + \alpha_2^3\beta_2 + \alpha_3^3\beta_3) \quad , \tag{6.2.20}$$

$$S_{24} = 2J(\beta_1^3\gamma_1 + \beta_2^3\gamma_2 + \beta_3^3\gamma_3) \quad , \tag{6.2.21}$$

$$S_{26} = 2J(\alpha_1\beta_1^3 + \alpha_2\beta_2^3 + \alpha_3\beta_3^3) \quad , \tag{6.2.22}$$

$$S_{34} = 2J(\beta_1\gamma_1^3 + \beta_2\gamma_2^3 + \beta_3\gamma_3^3) \quad , \tag{6.2.23}$$

$$S_{35} = 2J(\gamma_1^3\alpha_1 + \gamma_2^3\alpha_2 + \gamma_3^3\alpha_3) \quad , \tag{6.2.24}$$

$$S_{45} = 4J(\alpha_1\beta_1\gamma_1^2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2^2 + \alpha_3\beta_3\gamma_3^2) \quad , \tag{6.2.25}$$

$$S_{46} = 4J(\alpha_1\beta_1^2\gamma_1 + \alpha_2\beta_2^2\gamma_2 + \alpha_3\beta_3^2\gamma_3) \quad , \tag{6.2.26}$$

$$S_{56} = 4J(\alpha_1^2\beta_1\gamma_1 + \alpha_2^2\beta_2\gamma_2 + \alpha_3^2\beta_3\gamma_3) \quad . \tag{6.2.27}$$

任意の方位を有する２つの成分結晶に対する弾性コンプライアンスの差をとると (6.2.7)～(6.2.15)式の右辺第１項はキャンセルして異方性因子 J による項のみが残り、他はもともと J による項のみからなるので、界面転位の密度にはS'_{11}, S'_{12}, S'_{44}が単独では影響せず異方性因子 J によってのみ影響を及ぼすことが分かる。また、(6.2.7)～(6.2.27)式から成分結晶の全ての弾性コンプライアンスは異方性因子 J に比例し、方位因子は方向余

弦の４次関数となることが分かる。このうち方位因子による弾性コンプライアンスの変化は複雑になるが、 surface of coefficients of strain[17] からも知見が得られ、橋本ら[18], 北川[19] Hearmon[20]が結晶方位による変化を調べている。

表6-2　立方晶系の弾性コンプライアンス[21],[22] (弾性コンプライアンス×$10^{-11}Pa^{-1}$)

結晶	結晶構造	S_{11}'	$-S_{12}'$	S_{44}'	J	双結晶試料を用いた実験
Al	fcc	1.57	0.568	3.51	0.38	猪子[23], 福富[24], 三浦[25]
Ag	fcc	2.29	0.983	2.17	2.18	Hauser[9]
Au	fcc	2.33	1.065	2.38	2.20	
Cr	bcc	0.300	0.043	0.992	-0.153	
Cu	fcc	1.498	0.629	1.326	1.464	渡辺[26]
αFe	bcc	0.760	0.287	0.892	0.601	Hook[1],[2]※
Ge	ﾀﾞｲﾔﾓﾝﾄﾞ	0.978	0.266	1.490	0.499	Baillin[27]
K	bcc	82.3	37.0	38.0	100.3	
Mo	bcc	0.28	0.078	0.91	-0.102	栗下, 吉永ら[28]
Nb	bcc	0.660	0.233	3.48	-0.85	Lin[29]
Ni	fcc	0.734	0.274	0.802	0.607	
Pb	fcc	9.28	4.24	6.94	10.05	
W	bcc	0.244	0.068	0.624	0.00	

※ Fe - 3%Si　S_{11}' = 0.757, $-S_{12}'$ = 0.282, S_{44}' = 0.862, J = 0.608

表6-2に立方晶系の主な結晶の弾性コンプライアンスと異方性因子とを示す。等方性物体は J = 0 に相当している。双結晶試料の材質が変われば同じ結晶構造をとる場合でも異方

性因子 J が大きく異なる可能性があり、実験内容によっては異なった現象が観察されることが予想される。

6．2．2　界面転位の密度

面心立方晶のうちでアルミニウム双結晶試料をとり、その成分結晶は図6-2に示されているような方位関係にあるとし、引張り軸と粒界とが垂直な板状双結晶試料の引張り試験を例として考える。図において結晶軸を表す単位ベクトルを $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$とし、これらの結晶軸が試料座標系で次に示す２つの方位をもつ場合を想定する。

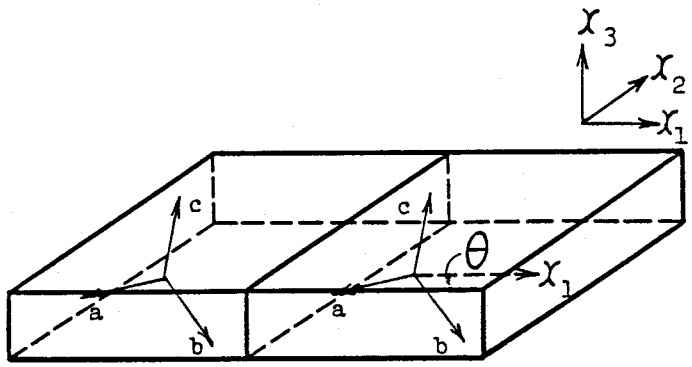


図6-2　ねじれ粒界を有する双結晶試料の単軸引張り

Case 1 : $\mathbf{a}=(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{b}=(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{c}=(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 0)$

Case 2 : $\mathbf{a}=(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$, $\mathbf{b}=(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{c}=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

領域Ⅰの成分結晶を固定し、領域Ⅱの成分結晶をx_1軸に関する右ネジ方向にθ回転させる。Case 1, Case 2 ともに粒界面はねじれ粒界に対応しており、粒界に生じる不適合応力は2.3.1節で示した通り界面転位のみで表される。その界面転位の密度は対応する弾性コン

プライアンスの差と引張り応力σ_aとに比例し、また回転角θに対する依存性は Case 1 と Case 2 とに対してそれぞれ図6-3と図6-4とに示されるものとなる。ここでは単位引張り応力(σ_a = 1 Pa)が作用した場合の界面転位密度を示している。

Case 1 では結晶軸の<1 $\bar{1}$ 2>方向が引張り軸x_1に一致し、領域Ⅱの回転角θをいかに取ろうともすべり面法線ベクトルと引張り軸とが直交し、Schmid因子がゼロとなるすべり系が存在し、作動し得るすべり系の数が減少する。Case 2 は結晶軸と試料座標とのなす方向余弦で表される行列(図6-1)がちょうど Case 1 の対称行列となる場合で、この場合にはSchmid因子がゼロになるすべり系は現れない。

図6-3, 6-4において一点鎖線は不適合応力を生じない刃状転位(図5-1のE_1, E_3に相当)の密度a_{31}, a_{21}を表し、実線は不適合応力を生じる刃状転位(図5-1のE_2, E_4に相当)の密度a_{23}, a_{32}を表す。また破線はらせん転位(図5-1のS_1, S_2に相当)の密度a_{22}, a_{33}を表す。転位密度の符号は転位のBurgersベクトルの方向を表すため、図6-3, 図6-4の縦軸の絶対値が不適合度の大きさの目安となるいわゆる転位密度を表す。またHook and Hirth[1]・[2]が示した弾性歪の適合性と本論文で示した転位密度とは等価であると考えられる。

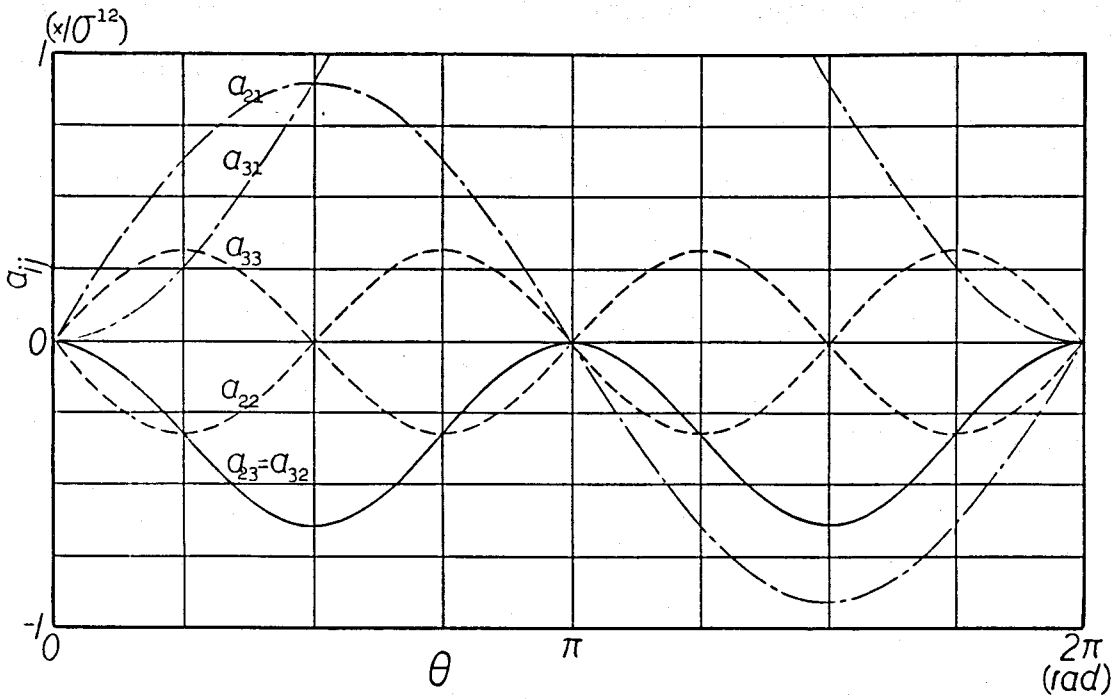


図6-3　転位密度の変化 (Case 1)

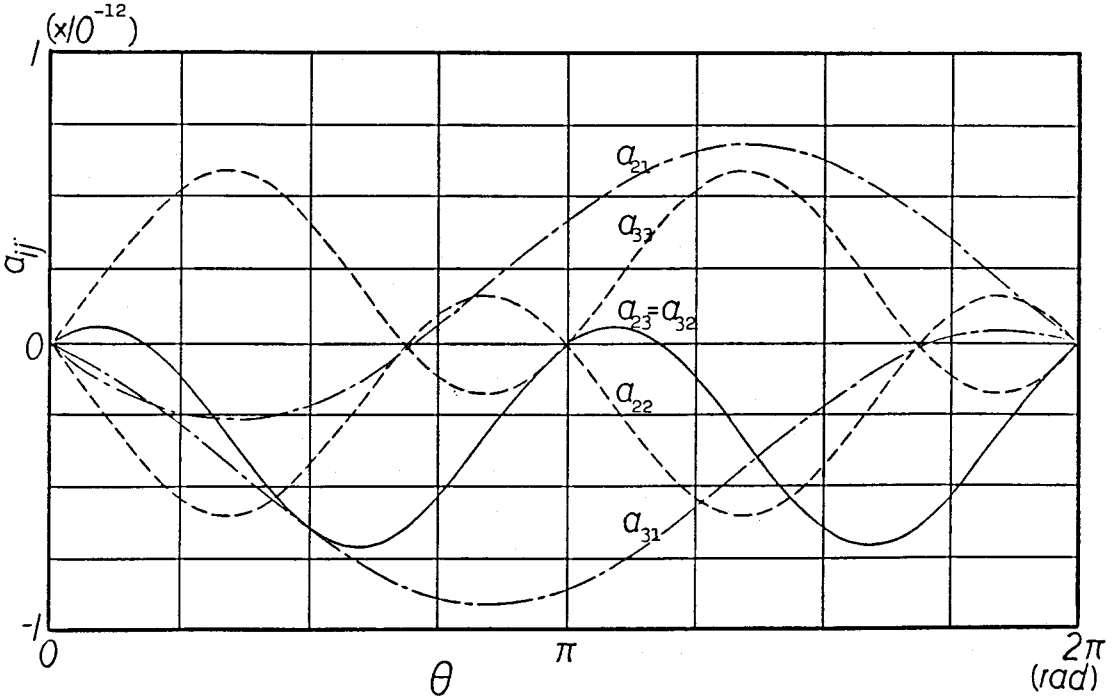


図6-4　転位密度の変化 (Case 2)

これらの転位密度は回転角θに対して別々に増減するため種々の状況が作り出され、そのいくつかをここに列挙する。

(1) Case 1 , Case 2 ともにらせん転位壁が形成されず、刃状転位壁のみにより不適合応力が生じる結晶方位(図6-3では$\theta = \pi/2$ 及び $3\pi/2$, 図6-4では $2\pi/3$ 付近及び $5\pi/3$ 付近)が存在する。しかし不適合応力を生じる刃状転位壁が形成されず、らせん転位壁のみで不適合応力を生じるような場合はない。

(2) $\theta = \pi$では刃状転位は生じるが不適合応力を生じない。つまり単結晶($\theta = 0$)以外にも不適合応力を生じない結晶方位が存在する。

(3) 刃状転位密度a_{23}とa_{32}との回転角θに対する変化は全く同じであり、らせん転位密度a_{22}とa_{33}との変化は全く対称的(逆符号)である。

(4) 不適合応力を生じる転位壁の密度(a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{33})は回転角θに関し周期πで増減し、不適合応力を生じない転位壁の密度(a_{23}, a_{32})は周期2πで変化する。

6．3 粒界近傍のすべり系に生じるせん断応力

6．3．1 面心立方晶のすべり系

金属の塑性変形機構の一つにすべり変形があり、双結晶試料を用いた実験の大多数は塑性域で行われており転位の移動によって生じるすべり変形を観察している。立方晶のうち面心立方晶(fcc)ではすべり系を特定するのが容易であるのに対して、体心立方晶(bcc)では作動するすべり系が材料に依存しすべり系に関する一般的な考察が困難なので、本論文では解析し易いfccについてのみ考察する。fccは{111}面が最密面でその面内の最密方向は<110>方向である。これらの面と方向とを組み合わせると表6-3に示すような12組のすべり系が考えられる。

表6-3　面心立方晶のすべり系

すべり面	a		b		c		d	
Miller指数	111		$\bar{1}\bar{1}1$		$\bar{1}11$		$1\bar{1}1$	
すべり方向	a_1	$01\bar{1}$	b_1	$0\bar{1}\bar{1}$	c_1	$01\bar{1}$	d_1	$0\bar{1}\bar{1}$
	a_2	$\bar{1}01$	b_2	101	c_2	101	d_2	$\bar{1}01$
	a_3	$1\bar{1}0$	b_3	$\bar{1}10$	c_3	$\bar{1}\bar{1}0$	d_3	110

結晶を回転させた後の状態で作動し得るすべり系を記述するためにすべり系を特定する必要がある。表6-3中のすべり系を指定する記号$a_1, a_2, \cdots, d_3$などは結晶軸(0-abc)に関して定義し、結晶に固定する。即ち、以後結晶軸をいかに回転させてもすべり系$a_1, a_2, \cdots, d_3$などは常に結晶軸に関して定義するものとする。結晶軸と試料座標との方向余弦を図6-1のようにとり、すべり系(すべり面の単位法線ベクトル、すべり方向の単位ベクトル)を試料座標で表すと表6-4, 6-5になる。

表6-4　結晶回転後の単位法線ベクトル

すべり面	単位法線ベクトル
a	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2,\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3)$
b	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\alpha_1-\beta_1+\gamma_1,\ -\alpha_2-\beta_2+\gamma_2,\ -\alpha_3-\beta_3+\gamma_3)$
c	$\frac{1}{\sqrt{3}}(-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1,\ -\alpha_2+\beta_2+\gamma_2,\ -\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)$
d	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_1-\beta_1+\gamma_1,\ \alpha_2-\beta_2+\gamma_2,\ \alpha_3-\beta_3+\gamma_3)$

表6-5　結晶回転後の単位すべり方向ベクトル

すべり方向	単位すべり方向ベクトル
a_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1-\gamma_1,\ \beta_2-\gamma_2,\ \beta_3-\gamma_3)$
a_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1-\alpha_1,\ \gamma_2-\alpha_2,\ \gamma_3-\alpha_3)$
a_3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1-\beta_1,\ \alpha_2-\beta_2,\ \alpha_3-\beta_3)$
b_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\beta_1-\gamma_1,\ -\beta_2-\gamma_2,\ -\beta_3-\gamma_3)$
b_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1+\alpha_1,\ \gamma_2+\alpha_2,\ \gamma_3+\alpha_3)$
b_3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha_1+\beta_1,\ -\alpha_2+\beta_2,\ -\alpha_3+\beta_3)$
c_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1-\gamma_1,\ \beta_2-\gamma_2,\ \beta_3-\gamma_3)$
c_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1+\alpha_1,\ \gamma_2+\alpha_2,\ \gamma_3+\alpha_3)$
c_3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha_1-\beta_1,\ -\alpha_2-\beta_2,\ -\alpha_3-\beta_3)$
d_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\beta_1-\gamma_1,\ -\beta_2-\gamma_2,\ -\beta_3-\gamma_3)$
d_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1-\alpha_1,\ \gamma_2-\alpha_2,\ \gamma_3-\alpha_3)$
d_3	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3)$

６．３．２　分解せん断応力

単結晶試料の引張り試験の場合、各すべり系に生じる分解せん断応力τと引張り応力σ_aとの間の関係は次式で表される。

$$\tau = \sigma_a \cos\chi \cos\lambda \qquad (6.3.1)$$

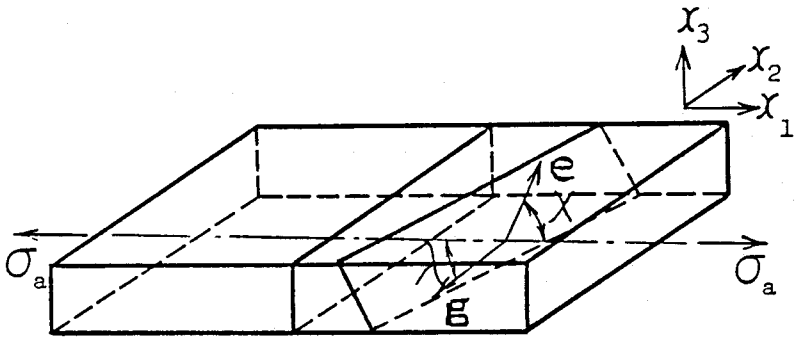


図6-5　Schmid因子

ここでχは図6-5で示されるように引張り軸とすべり面の法線ベクトルeとのなす角、λは引張り軸とすべり方向ベクトルgとのなす角を表し、$\cos\chi\cos\lambda$はSchmid因子と呼ばれている。このSchmid因子は0～0.5の値をとり、大きくなるにしたがって分解せん断応力は大きくなる。Schmid因子がゼロになるのは$\chi = \pi/2$ または$\lambda = \pi/2$ の場合で、それぞれすべり面と引張り軸とが平行な場合と垂直な場合とに対応している。Case 1 では引張り軸と(1$\bar{1}$1)面(すべり面d)とが平行で、更にすべり系c_3のすべり方向<$\bar{1}\bar{1}$0>に対しても引張り軸が垂直となるため全部で４つのすべり系でSchmid因子がゼロになる。本章で解析しようとしている問題では双結晶試料の引張り軸回りに成分結晶を回転させているため、界面転位の密度は変化するがSchmid因子は領域Ⅰ，Ⅱで同一であり回転角θに対して不変である。Case 1 とCase 2 とにおける各すべり系のSchmid因子を表6-6に示す。

表6-6 Schmid因子

すべり系	Schmid因子	
	Case 1	Case 2
a_1	0.136	0.090
a_2	0.408	0.207
a_3	0.272	0.117
b_1	0.408	0.146
b_2	0.136	0.127
b_3	0.272	0.019
c_1	0.272	0.046
c_2	0.272	0.399
c_3	0.000	0.353
d_1	0.000	0.282
d_2	0.000	0.066
d_3	0.000	0.216

双結晶試料の引張り試験においては塑性変形の初期にもかかわらずSchmid因子が最大となる主すべり系以外のすべり系にすべり線が観察される場合があるが、これは不適合応力が原因と考えられる。

板状双結晶試料のすべり系に生じる分解せん断応力は引張り力による分解せん断応力と不適合応力による各すべり系でのせん断応力との重ね合わせで与えられ、単位引張り応力(σ_a = 1 Pa)のもとでの分解せん断応力を Case 1, Case 2 に対して各々1つづつの方位関係の例をとって図6-6, 6-7に示す。ここで分解せん断応力の単位はPa、距離は板厚2hの半

分を単位として無次元化している。また本章における解析では、界面転位壁による応力場の計算に際し等方性近似を用いており、ここでは多結晶体アルミニウムにおける値[21]である剛性率 $\mu = 2.65\times10^{10}$Pa、Poisson比 $\nu = 0.347$ を用いた。

Case 1 では $\theta = \pi/4$ 付近でらせん転位の密度が高くなり、この場合にすべり系a_1～d_3に働く分解せん断応力をそれぞれ図6-6 (a)～(l)に示す。Case 2 では $\theta = \pi/3$ 付近でらせん転位の密度が高くなり、この場合にすべり系a_1～d_3に働く分解せん断応力をそれぞれ図6-7 (a)～(l)に示す。単位引張り応力のもとでは、いずれの場合にも粒界から遠ざかるにしたがってSchmid因子の値に近づき、粒界に近づくと不適合応力により分解せん断応力が上昇する場合と弾性不適合により緩和される場合とが生じる。ただし本解析では、不適合応力σ_{22}は界面近傍で小さく界面から遠ざかるに従って一定値に近づくため界面から無限に離れた点においても分解せん断応力はSchmid因子の値と厳密には一致しない。またSchmid因子が同じ値であるすべり系でも不適合応力により分解せん断応力が異なったり(例えば図6-6 (b), (d))、Schmid因子が大きいすべり系の分解せん断応力よりも小さいすべり系の分解せん断応力の値の方が大きくなる領域が現れたりする(例えば図6-7 (b), (l))。

本章での解析結果には、主すべり系以外のすべり系に対する分解せん断応力の値が主すべり系での値より大きくなる場合は現れない。しかしSchmid因子の値が小さいすべり系でも分解せん断応力の値が大きくなる領域が現れることから成分結晶の方位によっては主すべり系以外のすべり系においてすべり転位が作動することも期待できる。また、本章で解析したアルミニウムは比較的異方性が小さいため、粒界に生じる不適合応力が小さくなる。

分解せん断応力は試料の厚さ方向に非対称で、実験で観察されるいわゆる試料の「表」と「裏」との区別が生じる。[3]

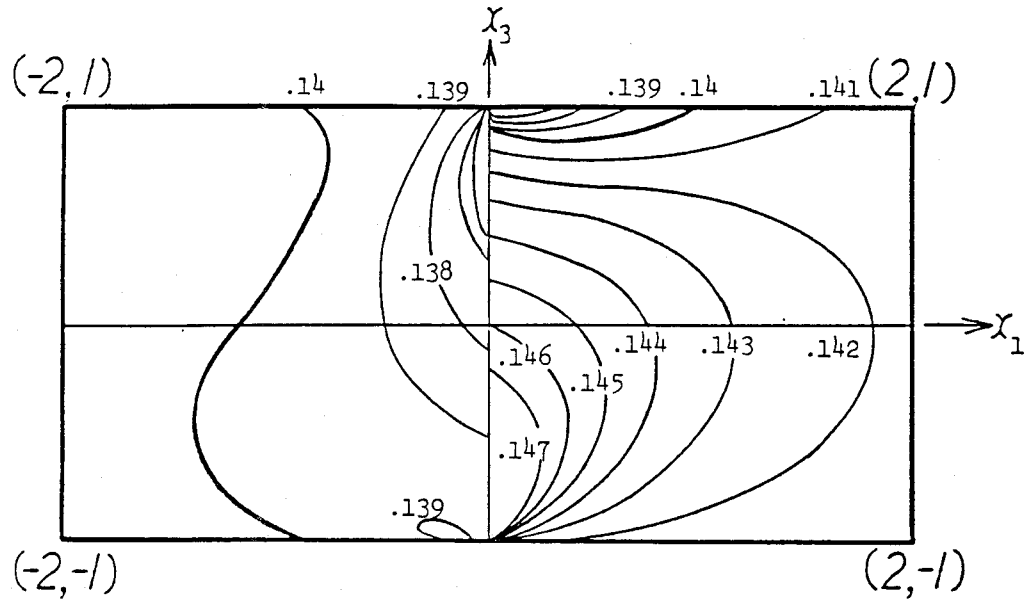


図6-6 (a) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 a_1, 単位はPa)

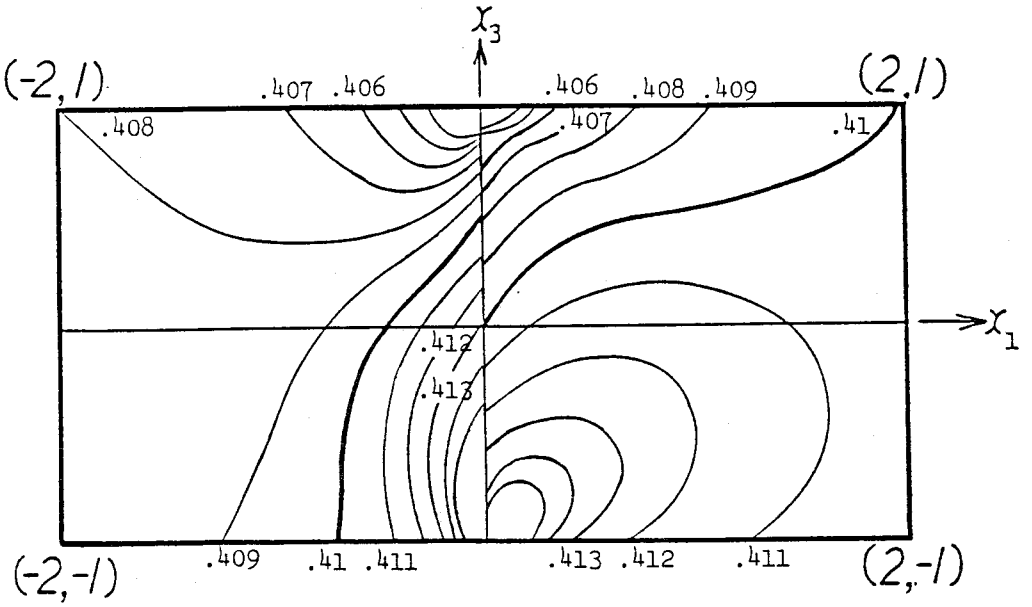


図6-6 (b) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 a_2, 単位はPa)

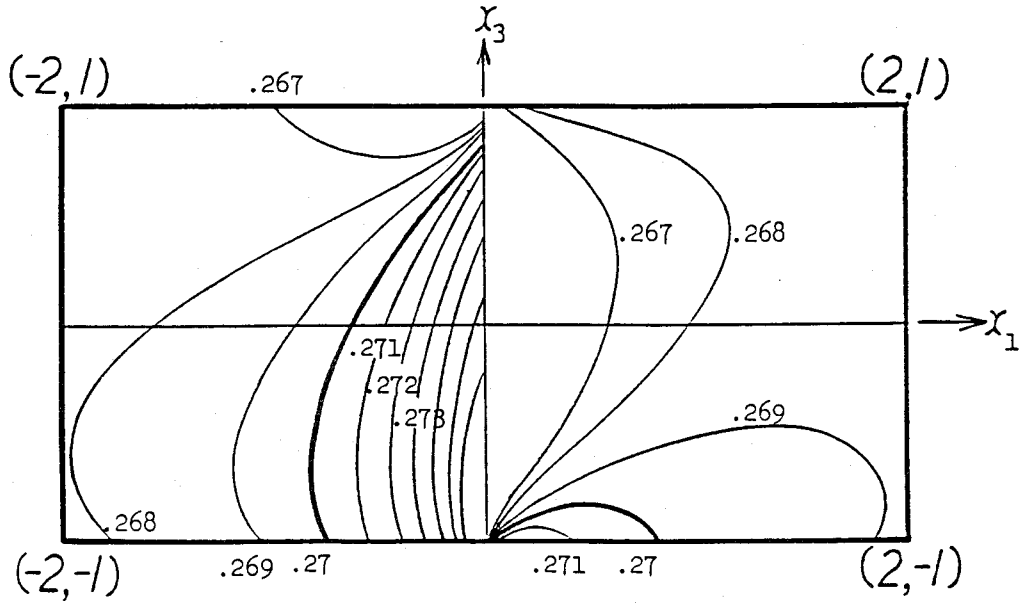


図6-6 (c) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 a_3, 単位はPa)

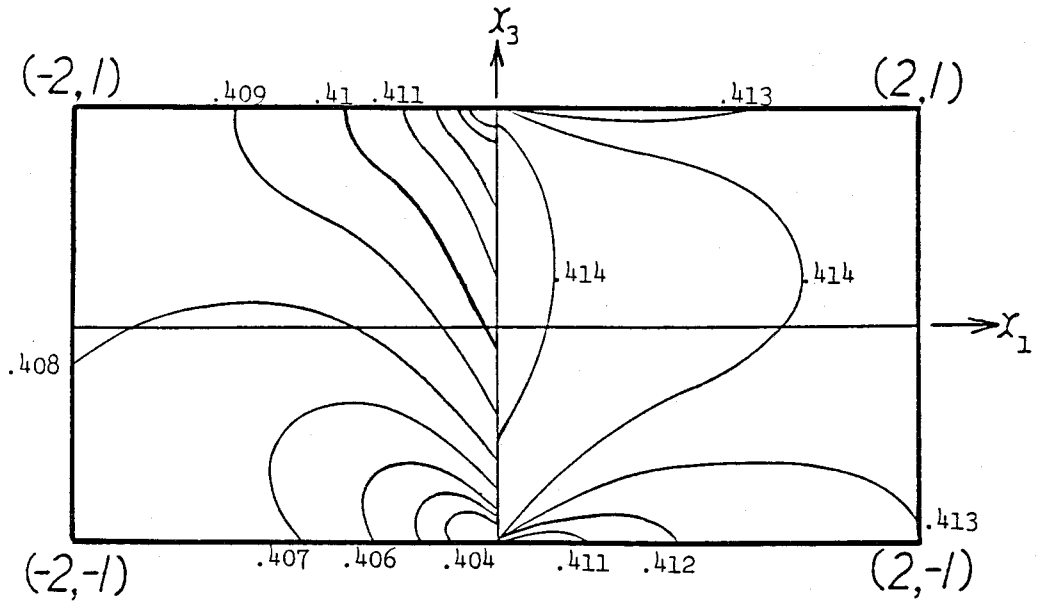


図6-6 (d) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 b_1, 単位はPa)

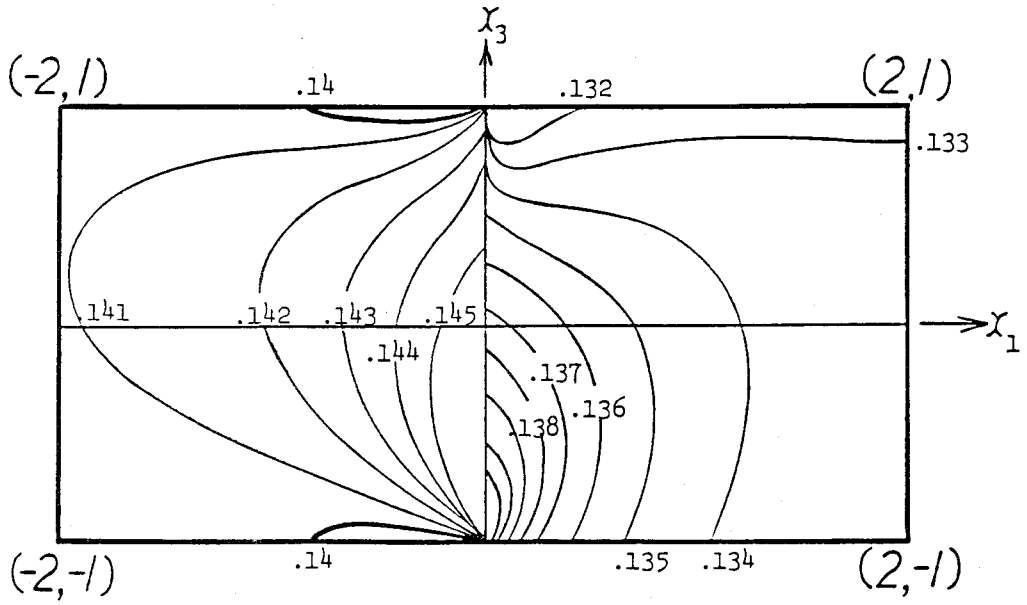


図6-6 (e) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 b_2, 単位はPa)

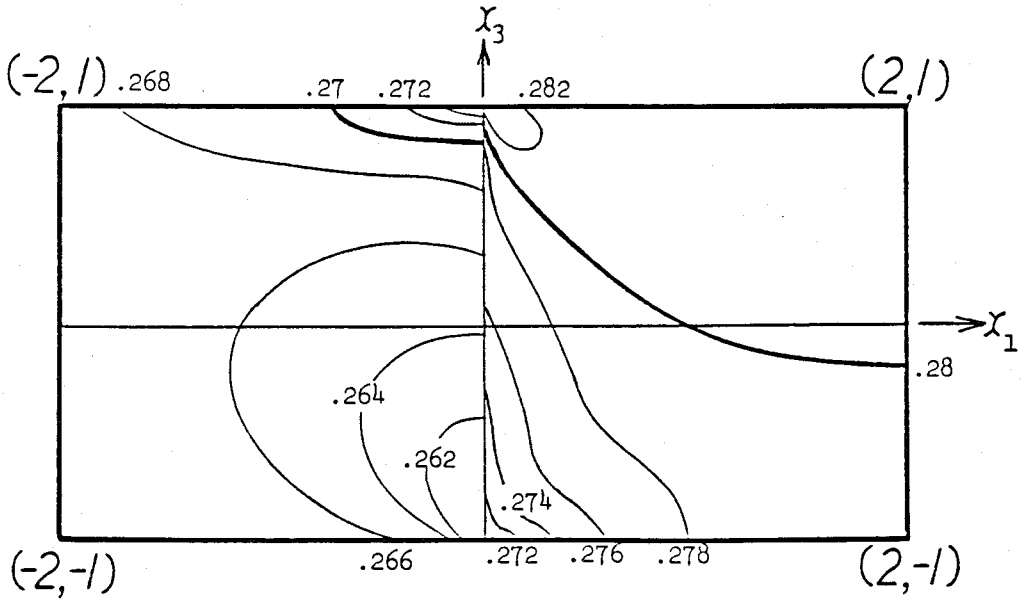


図6-6 (f) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 b_3, 単位はPa)

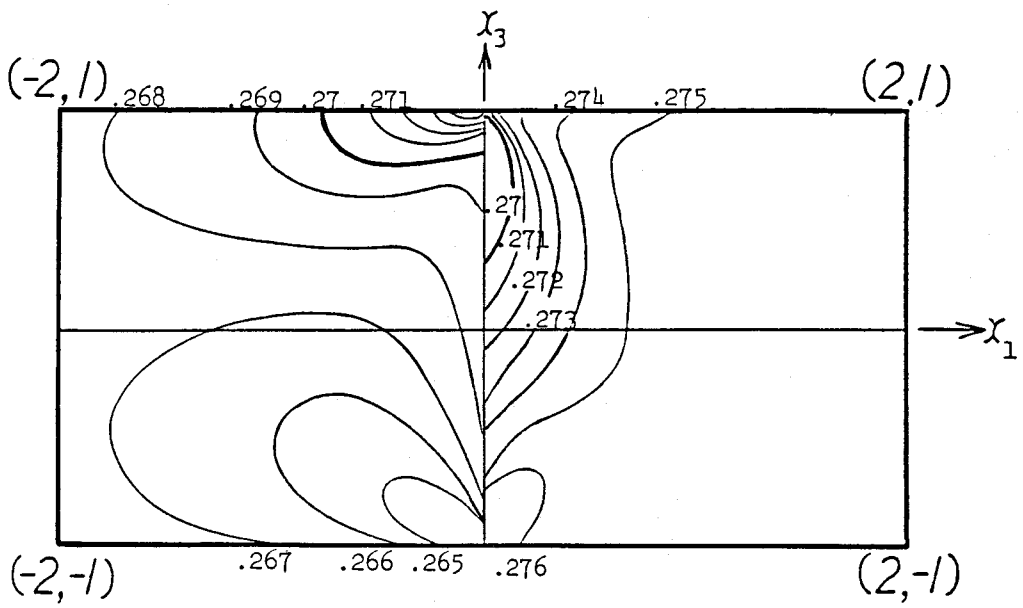


図6-6 (g) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 c_1, 単位はPa)

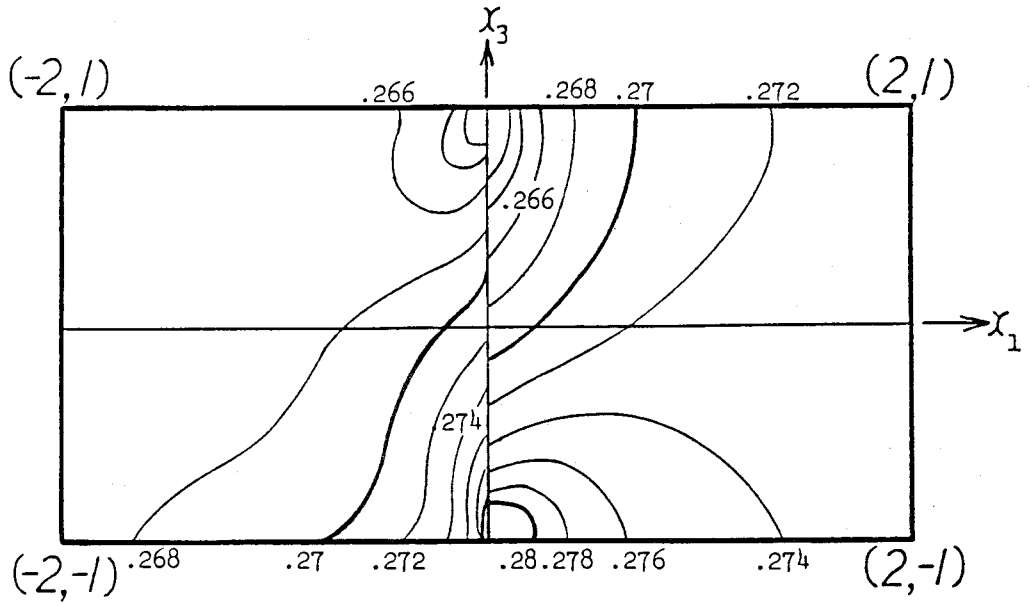


図6-6 (h) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 c_2, 単位はPa)

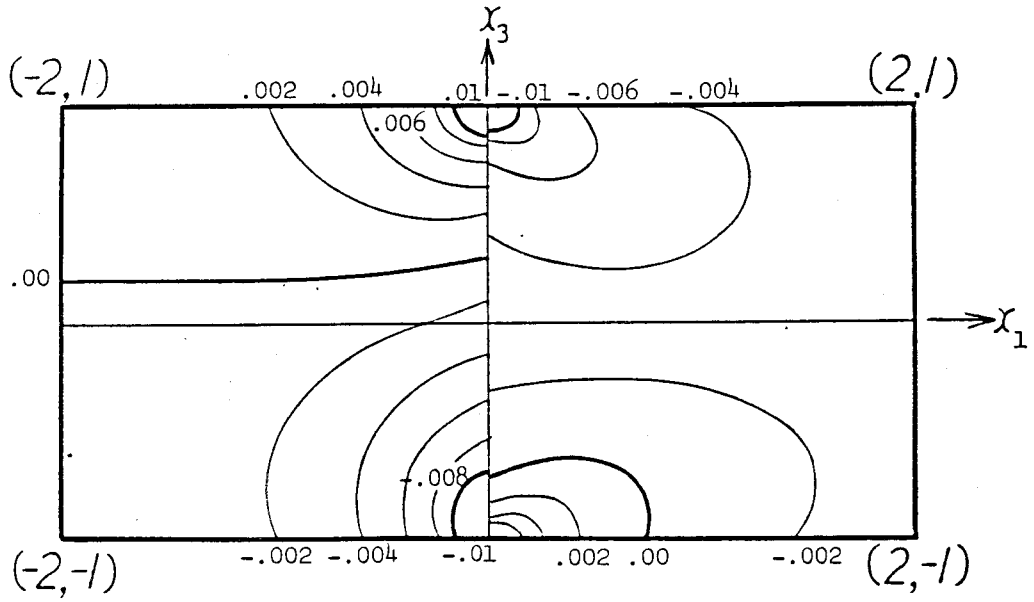


図6-6 (i) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 c_3, 単位はPa)

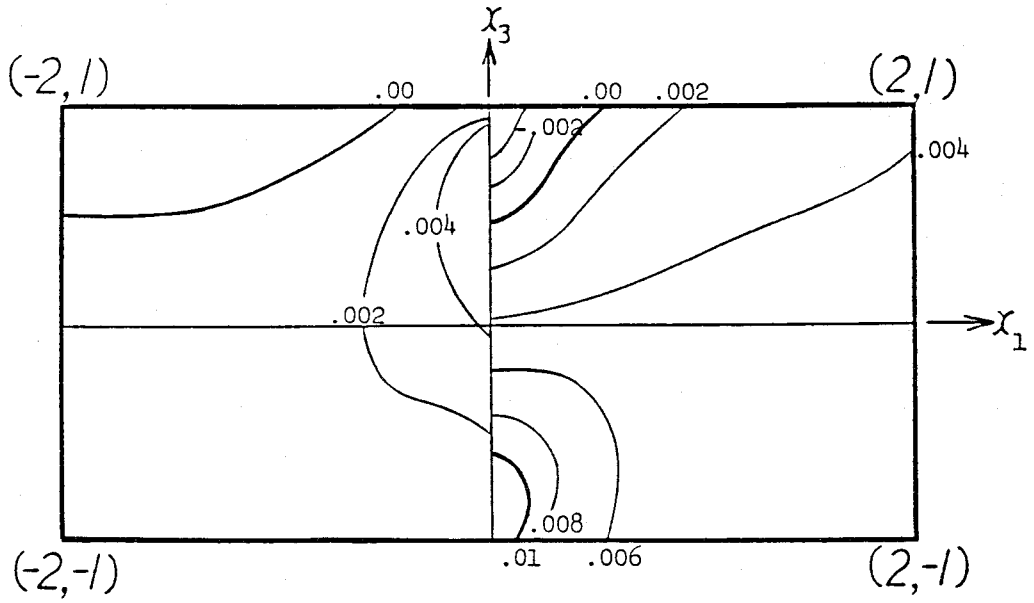


図6-6 (j) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 d_1, 単位はPa)

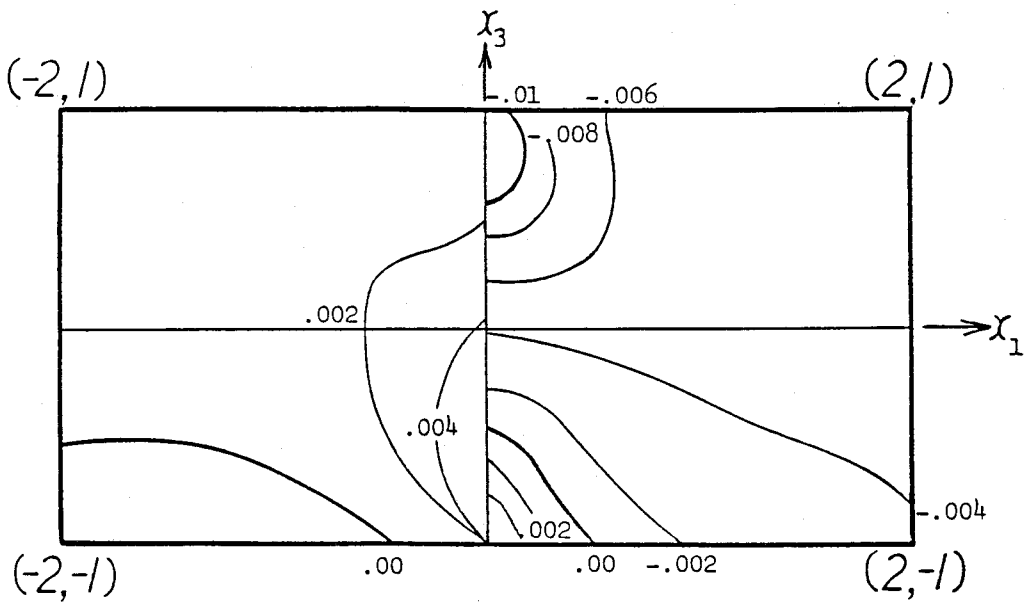


図6-6 (k) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 d_2, 単位はPa)

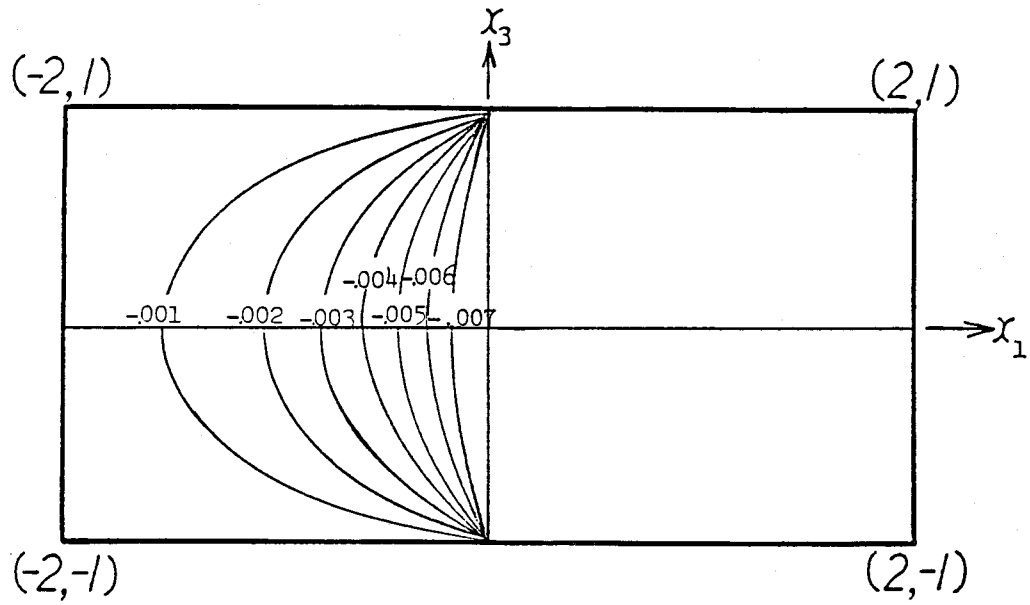


図6-6 (l) 分解せん断応力 (Case 1 $\theta=\pi/4$ すべり系 d_3, 単位はPa)

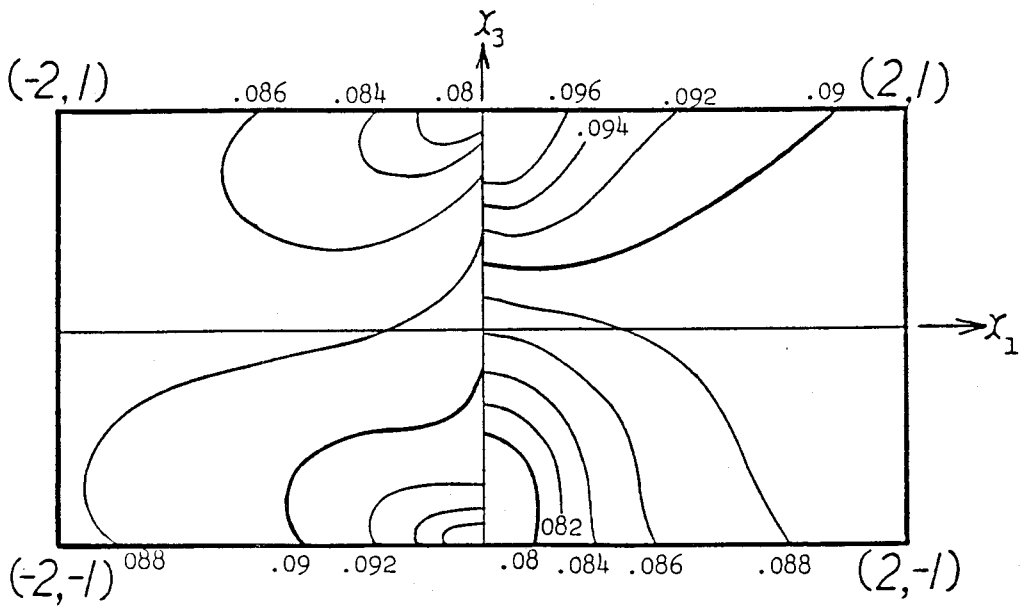


図6-7 (a) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 a_1, 単位はPa)

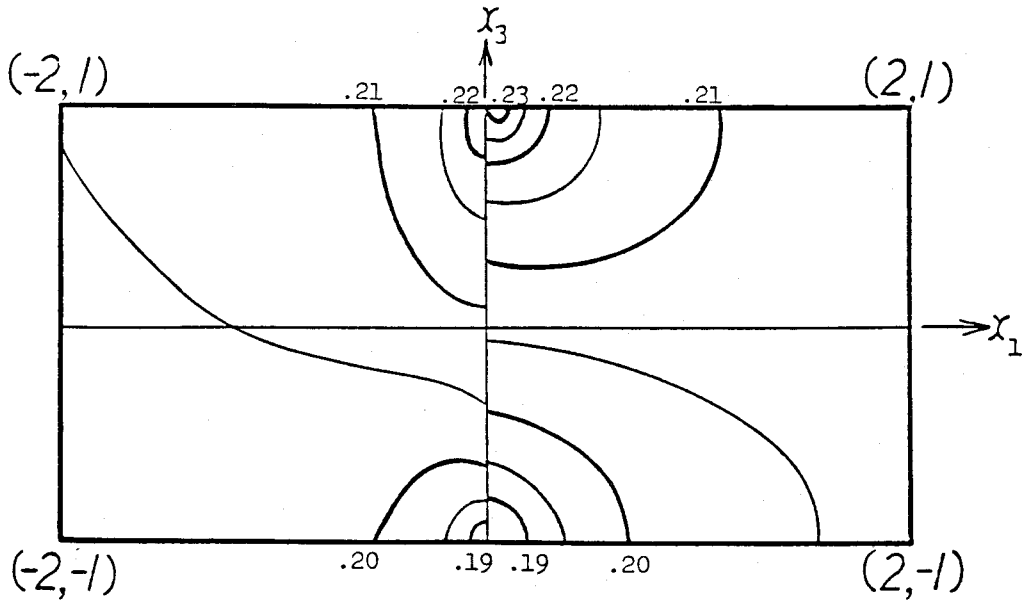


図6-7 (b) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 a_2, 単位はPa)

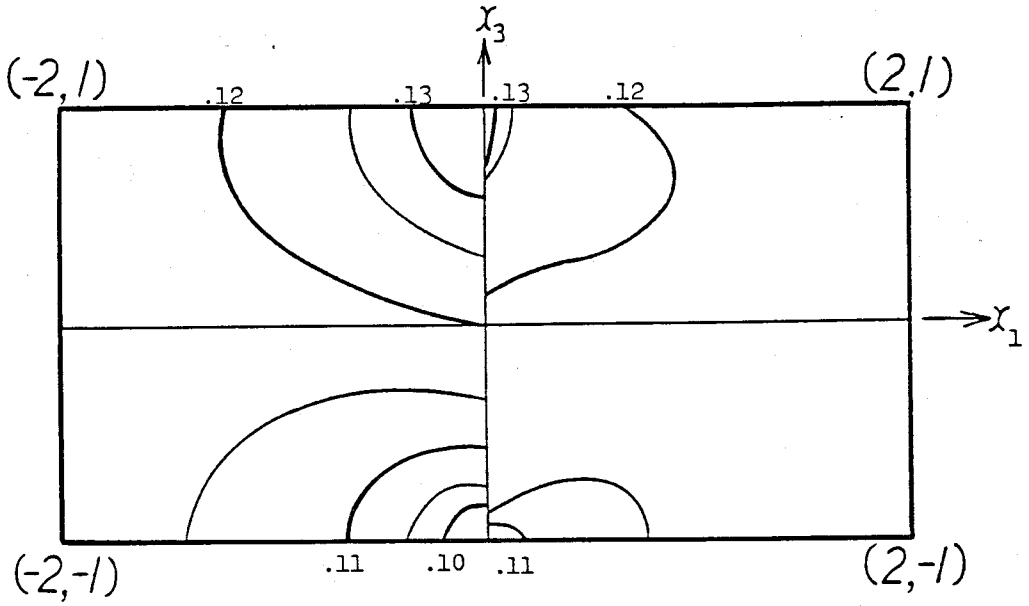


図6-7 (c) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 a_3, 単位はPa)

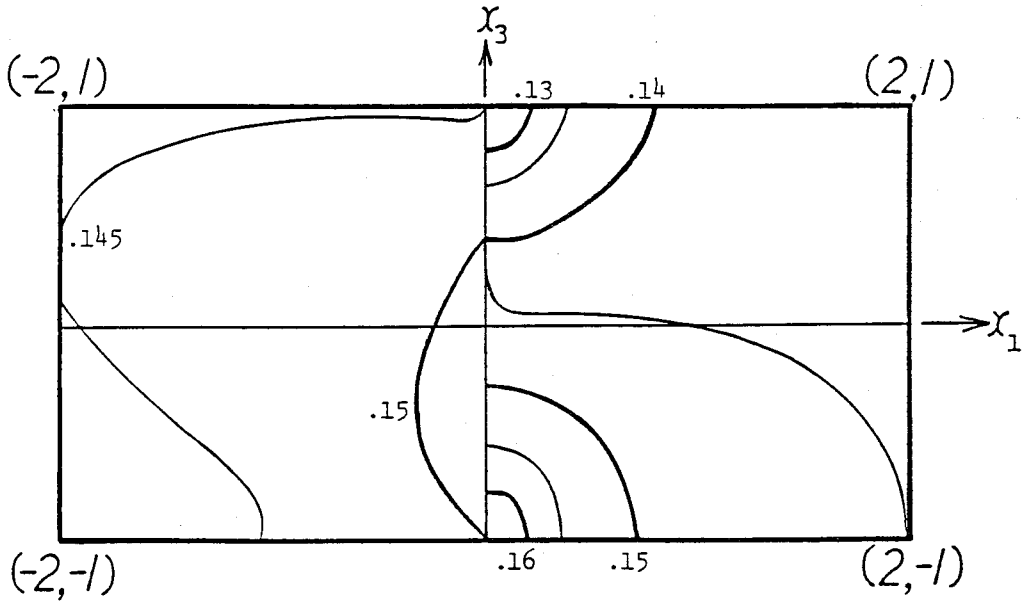


図6-7 (d) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 b_1, 単位はPa)

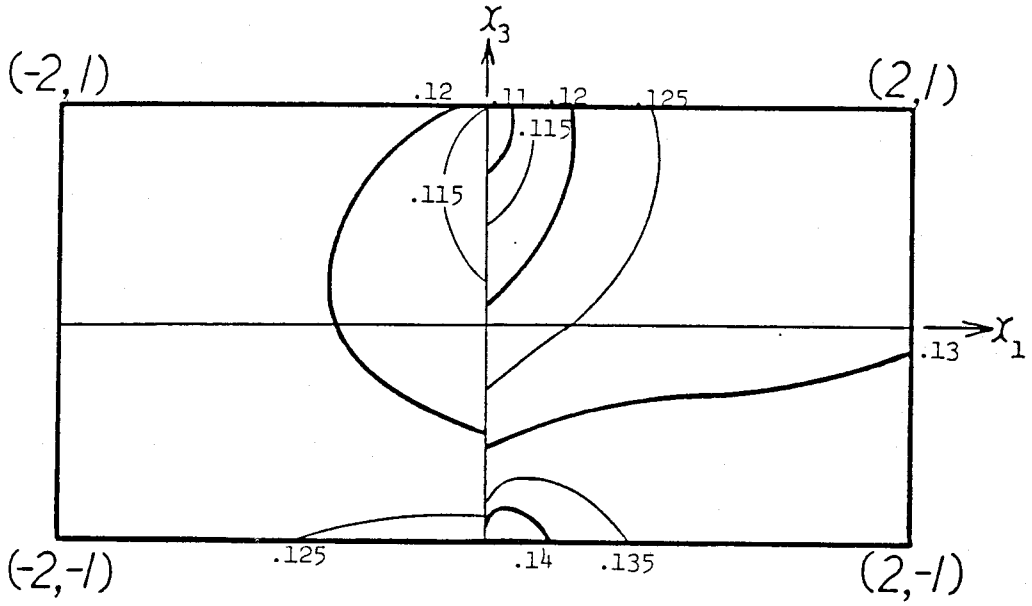


図6-7 (e) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 b_2, 単位はPa)

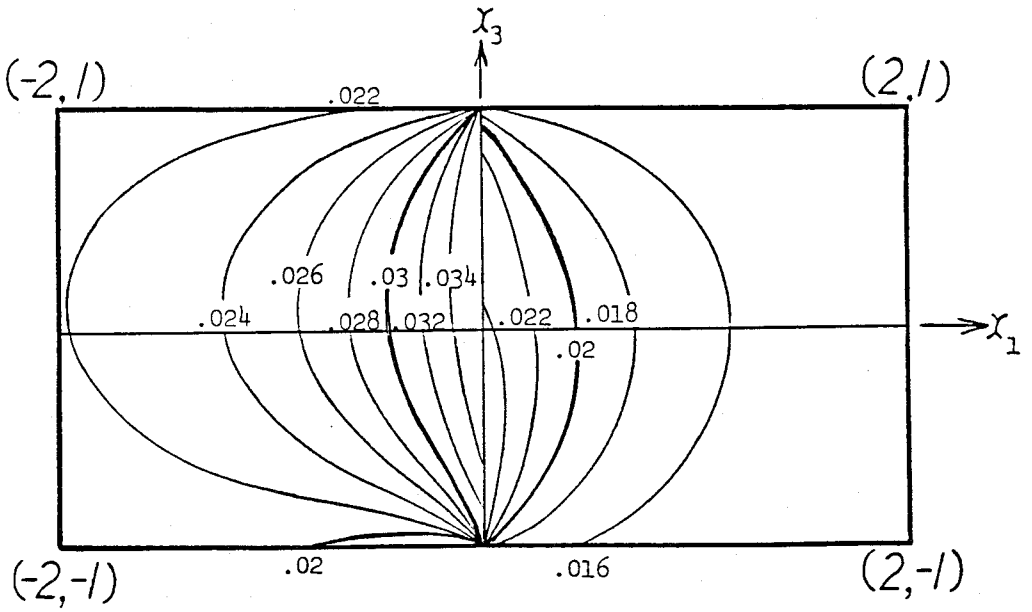


図6-7 (f) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 b_3, 単位はPa)

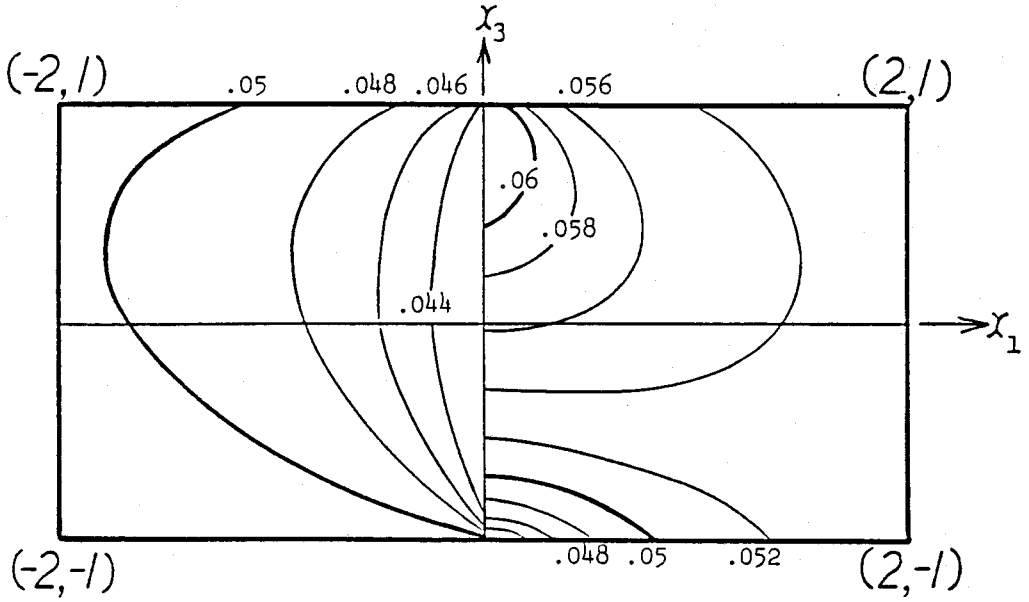


図6-7 (g) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 c_1, 単位はPa)

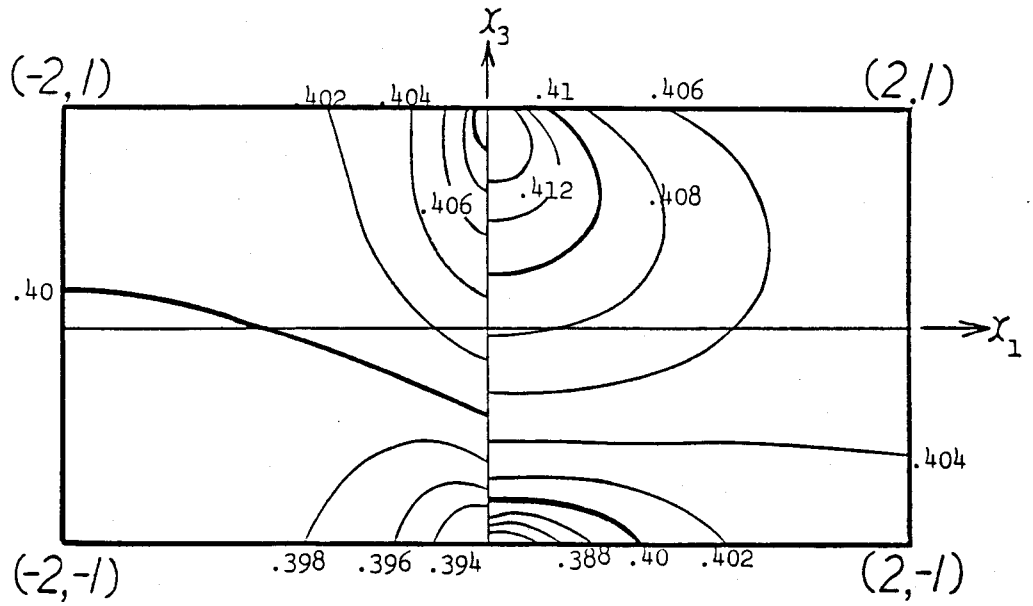


図6-7 (h) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 c_2, 単位はPa)

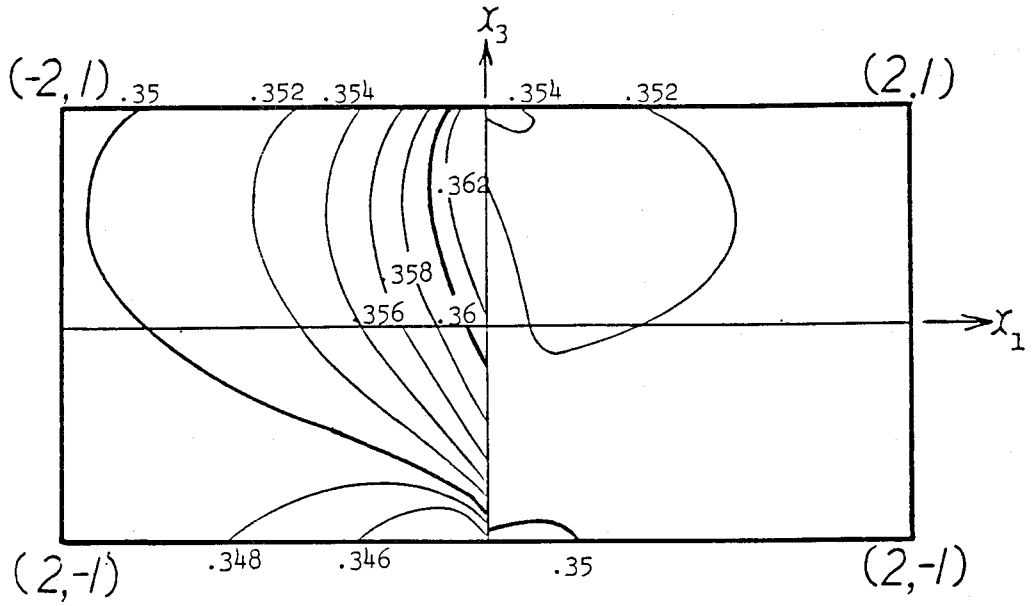


図6-7 (i) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 c_3, 単位はPa)

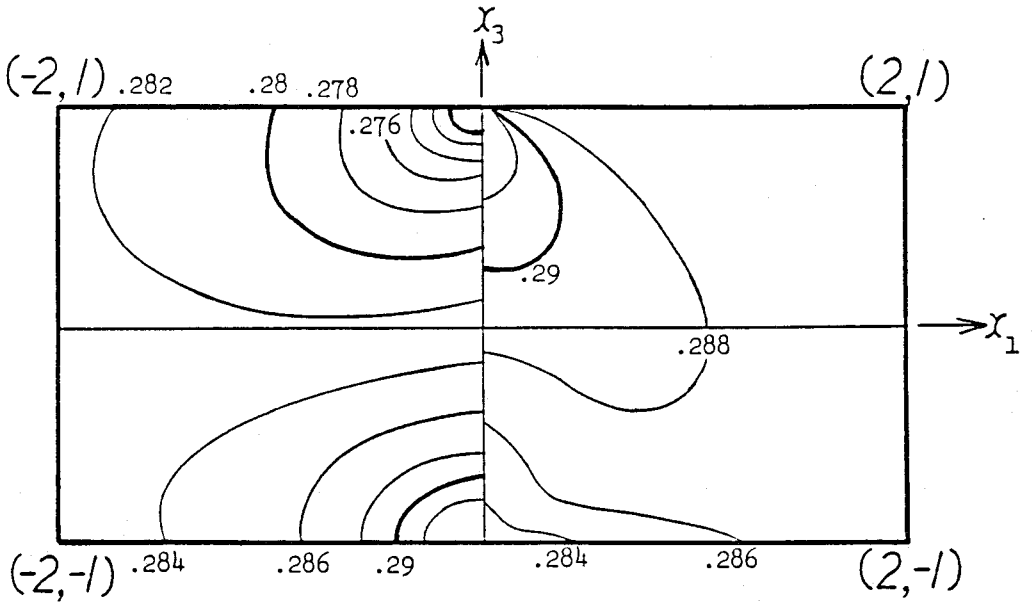


図6-7 (j) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 d_1, 単位はPa)

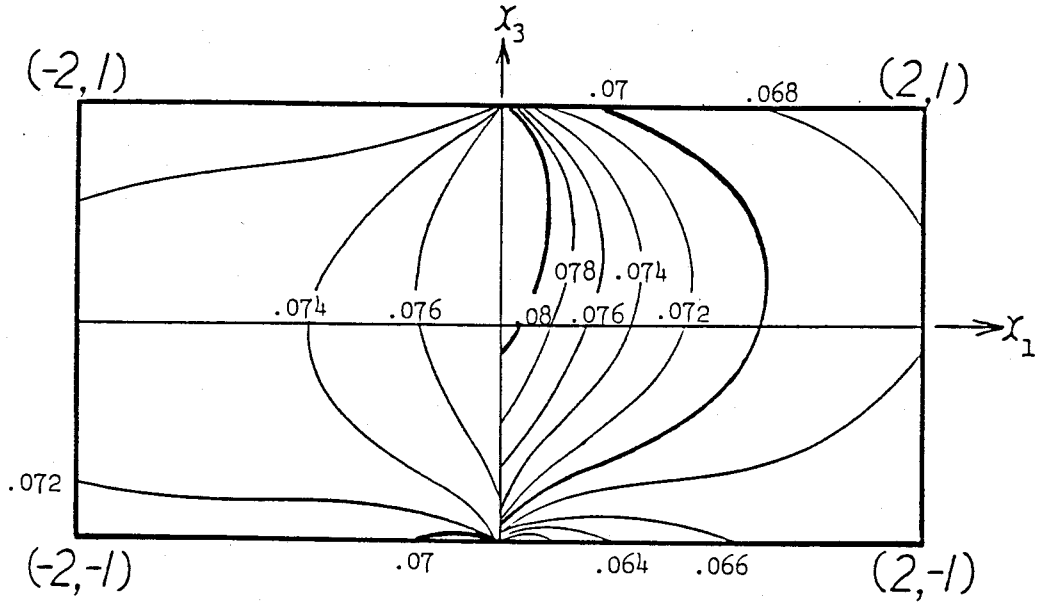


図6-7 (k) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 d_2, 単位はPa)

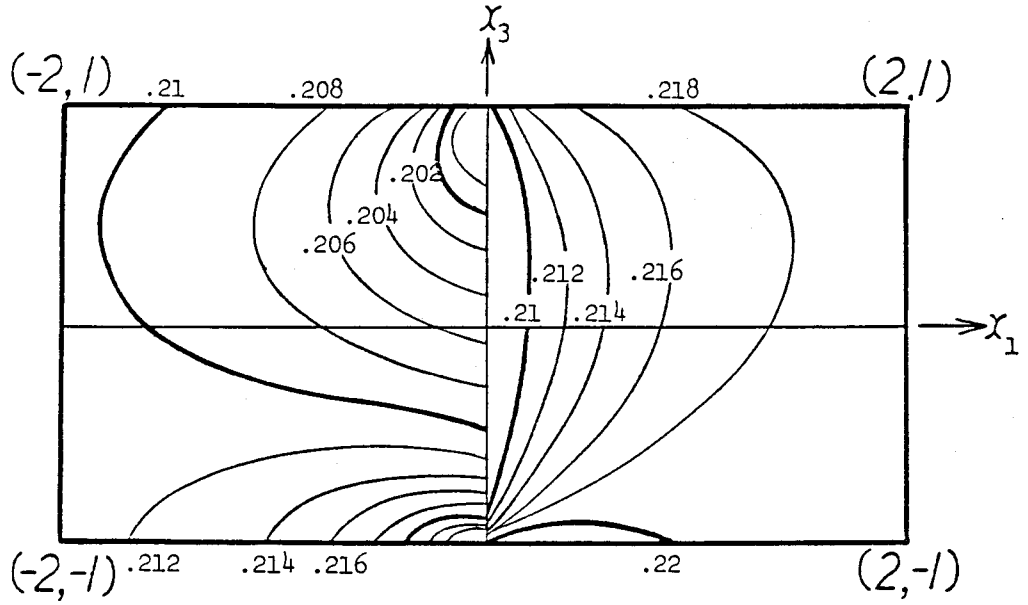


図6-7 (l) 分解せん断応力 (Case 2 $\theta = \pi/3$ すべり系 d_3, 単位はPa)

6．3．3　界面転位と粒界近傍の転位との相互作用

双結晶試料の粒界近傍にある転位は、Schmid因子から計算される分解せん断応力のような外力による応力$\sigma_{ij}^{ex.}$と前節で示したように不適合応力$\sigma_{ij}^{incom.}$との影響を受けることになる。また、これらとは別に転位自身が持つ応力場により隣接領域からの鏡像応力σ_{ij}^{image}と他の転位などによる応力$\sigma_{ij}^{int.}$とを受ける。転位が受ける全応力σ_{ij}^{total}はこれら４つの応力場の重ね合わせとなり次式で表される。

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^{ex.} + \sigma_{ij}^{incom.} + \sigma_{ij}^{image} + \sigma_{ij}^{int.} \qquad (6.3.2)$$

この応力場$\| \sigma \|$のもとにある転位に働く力fは転位の単位長さ当り次のPeach-Koehlerの式で与えられる。

$$f = \mathbf{t} \times \mathbf{b} \| \sigma \| \qquad (6.3.3)$$

ここで$\mathbf{t}$は転位線の単位接線ベクトルを表す。本論文に示している規準変形と界面転位とによる方法はこのような定量的議論においても十分な精度で計算可能であるが、種々の結晶方位を取る双結晶試料に対してより定性的な議論も可能である。

(6.3.2)式で隣接領域から受ける鏡像応力σ_{ij}^{image}は外力に比例せず、転位の方向及び転位自身が持つBurgersベクトルの方向と大きさとで決まり、他の転位などから受ける応力$\sigma_{ij}^{int.}$は塑性変形の程度により変化するが外力と直接的な対応関係にはない。一方、外力による応力$\sigma_{ij}^{ex.}$と不適合応力$\sigma_{ij}^{incom.}$とは外力に比例し、ある程度外力が大きく塑性変形の初期段階まででは隣接領域から受ける鏡像応力σ_{ij}^{image}と他の転位などから受ける応力$\sigma_{ij}^{int.}$とを無視することができる。このような状態では粒界近傍にある転位に作用する応

力場を界面転位の密度により評価することができ、界面転位壁と転位との相互作用から定性的な考察が可能となる。Schmid因子は$\sigma_{ij}^{ex.}$のみを評価するパラメータであり、粒界近傍で不適合応力$\sigma_{ij}^{incom.}$を無視できない場合には$\sigma_{ij}^{ex.}$のみでは応力場を表すのに不適切となる。界面転位の密度は外力のほかに異方性因子と方位因子とにも比例し、これらは材質と結晶方位とが決まると定量的に計算することができるので実験結果を整理するうえで大いに役立つと考えられる。

従来、双結晶試料を用いた実験では次式で示すような応力伝達係数N_{ij}[18]が結果の整理に多く用いられている。

$$N_{ij} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j) + (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{g}_j)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{g}_i) \qquad (6.3.4)$$

ここで、一方の成分結晶のすべり系をi(すべり面単位法線ベクトル$\boldsymbol{e}_i$, 単位すべり方向ベクトル$\boldsymbol{g}_i$)、他方の成分結晶のすべり系をj(すべり面単位法線ベクトル$\boldsymbol{e}_j$, 単位すべり方向ベクトル$\boldsymbol{g}_j$)で表す。この応力伝達係数による実験結果の評価は外力による応力場$\sigma_{ij}^{ex.}$をそれぞれの成分結晶間で評価することであり、不適合応力$\sigma_{ij}^{incom.}$が$\sigma_{ij}^{ex.}$に比べて小さい場合には適切なパラメータと考えられる。しかし、例えば異方性の程度や成分結晶間の方位によっては不適合応力が大きくなる可能性があり、必ずしも適切なパラメータとならないことが考えられる。また、応力伝達係数は粒界に転位が堆積した後の現象を整理するうえでは適切な場合があり得るが、すべり変形が起こる初期において粒界への転位の近づき易さが問題となる段階では不適切と言える。

また、すべり転位の界面転位壁への近づき易さ、あるいはすべり転位の界面への移動に伴う界面転位密度の増減などを考察することによりすべり転位と粒界との相互作用に関する評価が可能となる。すべり転位の界面への移動により界面転位密度が増加する場合には、

塑性変形により粒界近傍に応力集中が起こり易く隣接領域へのすべり転位の放出の可能性を意味している。また逆にすべり転位の界面への移動に伴い界面転位密度が減少する場合には塑性変形により弾性的不適合が緩和され、粒界がすべり転位を吸収することに対応している。実際には塑性変形は不均一に起こりしかもすべり転位は離散的なものであるので、連続分布転位との相互作用を考えたり均一変形を仮定した考察に対しては問題が残るが、現象の本質的な面が原子レベルの構造変化ではなく応力場を通しての相互作用として扱える問題である限り妥当な推論が可能と思われる。

界面転位とすべり転位との相互作用を定性的に考察する際、自由表面の影響は大きな問題となる。しかし、前章で示した通り不適合応力を転位壁による応力場と自由表面による影響(仮想表面力による応力場)とに分けて考えることができる。また、双結晶試料では問題にならないが、本論文の解析方法を多結晶体の問題にまで拡張する場合には互いの粒界が干渉し合うことが考えられる[30],[31]。この問題に対しても界面転位壁間の相互作用をとおして定性的考察の可能性がある。

６．４　結言

双結晶試料の粒界に生じる不適合応力を界面転位によって評価できる場合には、不適合応力のもとで粒界近傍のすべり転位が受ける影響を定性的に考察することが可能となる。不適合応力の問題は弾性拘束の問題であるが、不適合応力を転位の分布で表すことができると、例えば塑性変形のように転位の運動が関与する種々の問題を転位間の相互作用として考えることができ物理的知見を得やすい。このような観点から、本章では双結晶試料のすべり変形について考察を行った。

界面転位の密度は異方性の程度を表す異方性因子 Ｊ と試料座標と結晶軸とのなす方向余弦の４次式で表される方位因子とに比例する。ねじれ粒界に対応する２組の双結晶試料を

例にとり片方の成分結晶を引張り軸回りに回転させると、らせん転位と刃状転位との密度が別々に増減するため種々の特徴的な状態が存在する。たとえば、らせん転位の密度が小さく刃状転位の密度が大きい場合とその逆の状態とが存在したり、ちょうどπ(rad)回転した場合には不適合応力を生じない界面転位壁が形成される。

次に不適合応力をも含めて粒界近傍のすべり系に生じる分解せん断応力を計算すると、Schmid因子が等しいすべり系であっても分解せん断応力の大きいすべり系が場所によって異なる場合がある。また結晶方位によっては、主すべり系よりも２次すべり系の方が分解せん断応力が大きくなる場合が生じる可能性がある。不適合応力のために分解せん断応力は試料の厚さ方向に非対称となり、試料にいわゆる「表」と「裏」との区別が生じる。

参 考 文 献

(1) R.E.Hook and J.P.Hirth, Acta Met., 15(1967), 535.

(2) R.E.Hook and J.P.Hirth, Acta Met., 15(1967), 1099.

(3) 猪子富久治，安宅　健，木村　節，秋園幸一，美馬源次郎，辛島誠一，日本金属学会誌，46(1982), 672.

(4) 美馬源次郎，猪子富久治，安宅　健，日本金属学会誌，44(1980), 531.

(5) 美馬源次郎，猪子富久治，安宅　健，日本金属学会誌，42(1978), 887.

(6) 高杉隆幸，和泉　修，日本金属学会会報，14(1975), 649.

(7) O.Izumi and T.Takasugi, Z. Metallkde., 65(1974), 542.

(8) S.Miura and Y.Saeki, Acta Met., 26(1978), 93.

(9) J.J.Hauser and B.Chalmers, Acta Met., 9(1961), 802.

(10) J.D.Livingston and B.Chalmers, Acta Met., 5(1959), 322.

(11) R. Clark and B. Chalmers, Acta Met., 2(1954), 80.

(12) 丸山公一，辛島誠一，池　政秀，日本金属学会誌，42(1978)，69.

(13) 丸山公一，藤田達生，辛島誠一，日本金属学会誌，42(1978)，203.

(14) Yii-der Chuang and H. Margolin, Met. Trans., 4(1973), 1905.

(15) T. D. Lee and H. Margolin, Met. Trans., 8A(1977), 145.

(16) J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Oxford Univ. Press, London, 1967.

(17) S. G. Lekhnitsukii, Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, translated by P. Fern, Holden-Day, San Francisco, 1963.

(18) 橋本　敏，三浦　精，X-材料強度，21(1984)，138.

(19) K. Kitagawa, M. Ueda and H. Miyamoto, Acta Met., 28(1980), 1505.

(20) R. F. S. Hearmon, An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, London, 1961.

(21) J. P. Hirth and J. Lothe, Theory of Dislocations, 2nd ed., John Wiley, New York, 1982.

(22) 日本金属学会編，金属データブック，丸善，1984.

(23) F. Inoko and T. Fujita, Grain Boundary Structure and Related Phenomena, Japan Inst. Metals, (1986), 435.

(24) H. Fukutomi, T. Kamijo and R. Horiuchi, ibid., 929.

(25) S. Miura, ibid., 689.

(26) T. Watanabe, Phil. Mag., 37(1978), 649.

(27) X. Baillin, Grain Boundary Structure and Related Phenomena, Japan Inst. Metals, (1986), 739.

(28) H. Kurishita, H. Yoshinaga, K. Abiko, S. Suzuki and H. Kimura, ibid., 739.

(29) T. L. Lin, ibid., 715.

(30) S. Miyazaki, K. Shibata and H. Fujita, Acta Met., 27(1979), 855.

(31) H. Fujita and S. Miyazaki, Acta Met., 26(1978), 1273.

第７章　　結　論

本論文は双結晶試料の粒界近傍に生じる弾性的不適合応力を準解析的に解析する方法を示し、その応用例として粒界近傍のすべり系に生じる分解せん断応力を評価したものである。特に界面転位のみで不適合応力を評価できる問題に対しては、双結晶試料の応力場に関する定量的考察だけでなく定性的ではあるが多結晶体に関する諸問題への応用も期待できる。以下に研究成果を各章毎に要約して示す。

第２章においては、与えられた不均質弾性体の境界値問題に対してそれぞれの領域における弾性的性質が試料全体にわたって一様な参照系を導入し、それらを仮想境界で切断して互いに接合する際界面に生じる「変位の不適合」と「表面力の不適合」とについて述べ、これらの不適合を解消するために生じる内部応力として不適合応力を位置づけた。この表面力の不適合は界面に物体力が分布した弾性問題の解を重ね合わせることにより、また変位の不適合は界面転位を導入することにより解消しうることを示した。また、この界面転位の密度は与えられた不均質弾性体の各均質部分に対応する弾性コンプライアンスの差と外力とに比例することを示し、実際の双結晶試料の引張り試験に対する解析方法を具体的に示した。

第３章においては、異方性弾性板に対する平面応力解を板厚を通して板厚方向x_3に関わる応力成分がゼロとなり３次元弾性体に対する適合条件を全て満たす解として定義し、立方晶、正方晶、六方晶のｃ軸が試料表面に垂直な場合において平面応力解が存在するために応力関数が満たすべき必要十分条件を示した。表面力の境界条件が端面において厚さ方向に対称分布している場合には応力分布は板厚の中央面に対する境界条件により決定され、可能な平面応力解は板厚の中央面における応力分布がx_1, x_2の３次の多項式で表される場合に限られることが明らかとなった。一方、六方晶の場合には２次元的に等方性を示し、

応力関数は重調和関数であれば他になんらの制約を受けないことを示した。立方晶、正方晶の場合応力関数は板厚方向に放物線状に変化し、板厚が十分薄ければ板厚方向に一様な分布として近似できる。

第４章においては、ある方向に沿って応力成分が一定である問題を一般化２次元弾性問題として定義し、この問題の解を与える応力関数が満たすべき必要十分条件を明らかにした。そして、無限弾性体中に存在する転位壁の応力場をもとにして自由表面を持つ板状試料での応力場を求める問題をとりあげ、その際に必要となる面外せん断力が作用する問題は一般化２次元弾性問題のうちで変位がある方向に沿って一定となる特別な場合に相当し、この場合には３個の応力関数は全て重調和関数となることを示した。したがって、この場合には応力関数が満たすべき偏微分方程式をFourier変換することにより準解析的に解くことができる。また、応力関数が持つ任意性とか他の２次元弾性問題における応力関数と一般化２次元弾性問題に関する応力関数との相違について明らかにした。

第５章においては、板状双結晶試料の界面に形成される転位壁を６種類に分類しその応力場について考察した。無限弾性体中で離散転位が形成する転位壁の応力場から連続分布転位による転位壁の応力場を求め、これに自由表面での境界条件を満たすようにステップ関数状の仮想表面力を分布させると板状試料中での界面転位壁による応力場が得られる。この仮想表面力のうち、粒界と自由表面とに垂直な断面に関する面外せん断力による応力場は第４章で示した一般化２次元弾性問題の１つに相当している。板状試料中の転位壁による応力成分のうち減衰する成分は転位壁から板厚程度の距離にまで及び、転位壁と自由表面との交線近傍に応力集中が生じることを示した。また、転位壁は一方向に無限に長いとしているため転位壁から離れても減衰しない応力成分が存在することも示した。

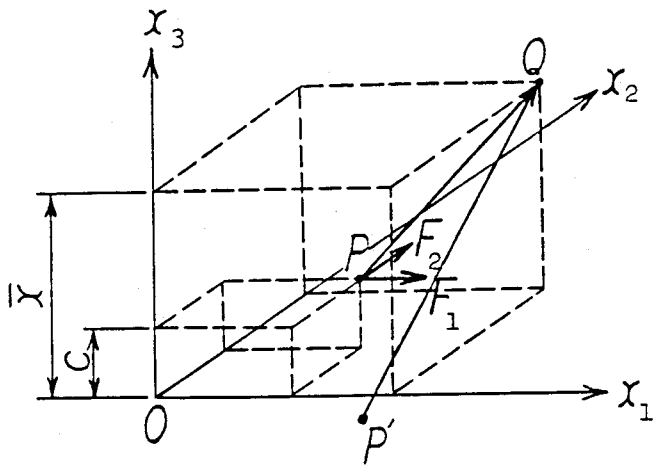
第６章においては、双結晶試料の成分結晶方位と界面転位の密度との関係を明らかにして、ねじれ粒界に生じる界面転位について結晶の回転角に対する転位密度の変化を示した。また本論文で導入した解析法の応用として、単軸引張りのもとにある双結晶試料の粒界近

傍のすべり系に生じる分解せん断応力を弾性不適合応力を含めて数値計算した。その結果、双結晶試料の粒界近傍においてはSchmid因子以外に不適合応力が分解せん断応力の大きさに影響を与えることを示した。このことにより、実験で観察されるすべり線がSchmid因子による予想と異なる可能性があることが分かり、不適合応力が無視できない場合には実験結果の整理によく用いられているSchmid因子、応力伝達係数などが必ずしも適切なパラメータとはならない場合があることを示した。また粒界および粒界と自由表面との交線には応力集中が起こり易く、分解せん断応力は試料の厚さ方向に関して非対称となり、いわゆる試料の「表」と「裏」の区別が生まれることを示した。

付　録

3次元Mindlinの解

図A-1に示すような半無限体中の一点Pに単位集中力が作用する場合の解はMindlinにより示されている。



着力点　P

着力点の鏡像点　P′

観測点　Q

$\overrightarrow{P'Q} = (R_1, R_2, R_3)$

$\overrightarrow{PQ} = (r_1, r_2, r_3)$

図A-1　3次元Mindlinの解

$$K = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad , \tag{A.1}$$

$$R = (R_i R_i)^{1/2} \quad , \tag{A.2}$$

$$R_1 = r_1 \quad , \tag{A.3}$$

$$R_2 = r_2 \quad , \tag{A.4}$$

$$R_3 = r_3 + 2c \quad . \qquad (A.5)$$

単位集中力F_iによる補正項の応力成分をσ^{c1}_{11i}，σ^{c1}_{12i}などと表し次式に示す。

単位集中力F_1による補正項

$$\sigma^{c1}_{111} = Kr_1\left[\frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{6c}{R^5}\left\{3c - (3-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2\bar{x}}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.6)$$

$$\sigma^{c1}_{121} = -Kr_2\left[\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{6c\bar{x}}{R^5}\left\{1 - \frac{5r_1^2}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.7)$$

$$\sigma^{c1}_{131} = -K\left[\frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5}\left\{\bar{x}R_3 - (1-2\nu)r_1^2 - \frac{5r_1^2\bar{x}R_3}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.8)$$

$$\sigma^{c1}_{221} = Kr_1\left[\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{6c}{R^5}\left\{c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2\bar{x}}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.9)$$

$$\sigma^{c1}_{231} = Kr_1r_2\left[-\frac{3(3-4\nu)R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5}\left\{1 - 2\nu + \frac{5\bar{x}R_3}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.10)$$

$$\sigma^{c1}_{331} = Kr_1\left[-\frac{1-\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5}\left\{c + (1-2\nu)R_3 + \frac{5\bar{x}R_3^2}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.11)$$

単位集中力F_2による補正項

$$\sigma_{112}^{c1} = Kr_2\left[\frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{6c}{R^5}\left\{c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2\bar{x}}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.12)$$

$$\sigma_{122}^{c1} = -Kr_1\left[\frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{6c\bar{x}}{R^5}\left\{1 - \frac{5r_2^2}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.13)$$

$$\sigma_{132}^{c1} = -\sigma_{231}^{c1} \quad , \qquad (A.14)$$

$$\sigma_{222}^{c1} = Kr_2\left[\frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2}\left\{3 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{6c}{R^5}\left\{3c - (3-2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2\bar{x}}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.15)$$

$$\sigma_{232}^{c1} = K\left[\frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5}\left\{\bar{x}R_3 - (1-2)r_2^2 - \frac{5r_2^2\bar{x}R_3}{R^2}\right\}\right] \quad , \qquad (A.16)$$

$$\sigma_{332}^{c1} = \frac{r_2}{r_1}\sigma_{331}^{c1} \quad , \qquad (A.17)$$

自由表面が２組存在する厚板の場合には着力点とその鏡像点とを図2-11に従って試料の外側へ順次移動させる必要がある。

謝　辞

本研究の遂行にあたり、懇切なご指導とご鞭撻とを賜りました大阪大学工学部精密工学科　岸田敬三教授、同学超高圧電子顕微鏡センター長　藤田広志教授にこころより深謝いたします。また本論文の作成にあたり、貴重なご教示と綿密なご校閲とをいただいた大阪大学工学部精密工学科　川辺秀昭教授、同学科　山田朝治教授に厚く感謝の意を表します。

本研究は、徳島大学工学部機械工学科　西岡一水教授の長年にわたって終始ご厚意あふれるご指導とご鞭撻とを賜って初めて成し得たものであり、謹んで深甚の謝意をささげます。また有益なご助言とご討論とを賜りました徳島大学工学部機械工学科　猪子富久治教授、香川大学教育学部　高井忠昌先生、日立製作所日立研究所　大橋鉄也氏に深く感謝いたします。

さらに、本論文の執筆にあたり、温かい励ましとご助力とをいただいた高知工業高等専門学校の教職員の皆様に深く感謝いたします。