



Title	2次元超音速翼列に生じる流体力学的不安定現象に関する研究
Author(s)	岩本, 幸治
Citation	大阪大学, 2001, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3184215
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

2次元超音速翼列に生じる
流体力学的不安定現象に関する研究

岩 本 幸 治

2次元超音速翼列に生じる
流体力学的不安定現象に関する研究

岩本 幸治

目次

第1章 緒言	1
1・1 本研究の目的	1
1・2 衝撃波振動に関するこれまでの研究	3
1・2・1 2次元遷音速ディフューザで見られる衝撃波振動	3
1・2・2 2次元翼（列）で見られる衝撃波振動	5
1・2・3 遷音速圧縮機で見られる衝撃波振動	7
1・3 本研究の焦点	8
1・4 本論文の概要	9
参考文献	11
 第2章 アクチュエータディスク法による安定解析	14
第2章の記号表	14
2・1 翼列モデル	16
2・2 定常成分	17
2・3 非定常成分	18
2・4 軸流方向波数 $\lambda_{l,2}$ の選び方	22
2・5 境界条件	26
2・6 結果と考察	30
2・6・1 定常成分の結果と考察	30
2・6・2 安定解析の結果と考察	31
2・7 まとめ	37
参考文献	37
 第3章 数値計算法	38
第3～6章の記号表	38
3・1 支配方程式	42
3・2 乱流粘性と LES 基礎 SGS モデル	44
3・2・1 乱流粘性係数	44
3・2・2 LES 基礎 SGS モデル	49

3・3	一般曲線座標変換	52
3・3・1	一般曲線座標系における支配方程式	52
3・3・2	メトリック, ヤコビアンの評価方法	54
3・4	離散化手法	56
3・4・1	TVD (Total Variation Diminishing) 条件	56
3・4・2	2次精度 TVD スキーム	59
3・4・3	TVD スキームのシステム方程式への適用	60
3・4・4	対流項への TVD スキームの適用	61
3・4・5	粘性項の評価方法	64
3・4・6	時間 2 次精度化と LU-SGS 陰解法	65
3・5	境界条件	70
3・6	定常解の収束条件	74
	参考文献	74
第 4 章	計算格子および計算コードの検証	76
4・1	計算格子	76
4・2	空間精度の検証	80
4・3	時間精度の検証	81
4・3・1	3 種類のスキームと時間ステップの組み合わせの比較	81
4・3・2	適切な時間ステップの決定	82
	参考文献	85
第 5 章	非定常粘性計算の結果と考察	86
5・1	計算の仮定と条件	86
5・2	計算による性能曲線	87
5・3	旋回失速	92
5・4	前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動	95
5・5	前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し, 伝ば方向が変化する変動	103
5・6	翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動	105
5・7	入口境界で逆流部分が発生することによる計算停止	113
5・8	アクチュエータディスク解析による結果との比較	115
5・9	まとめ	119

参考文献	120
第 6 章 非定常非粘性計算の結果と考察	121
6・1 計算の仮定と条件	121
6・2 計算による性能曲線	122
6・3 衝撃波の離脱が後回りに伝ば	124
6・4 翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動	129
6・5 アクチュエータディスク解析による結果との比較	136
6・6 まとめ	137
参考文献	138
第 7 章 結言	139
謝辞	142

第1章 緒言

1・1 本研究の目的

ガスタービンは圧縮機、燃焼器、タービンから構成され、燃焼器で発生する熱エネルギーを機械的な仕事に変換する装置であり、発電や航空機エンジンに用いられている。ガスタービンの長所として、蒸気タービンのようにボイラなどの付属装置を必要としないこと、燃料の変化に対応しやすいことが挙げられる。そのため、発電においては次世代都市環境において使用される分散型電力供給や、航空機においては超音速輸送機用コンバインドサイクルエンジンを構成するターボジェット（飛行マッハ数範囲0～3）、さらに石油以外の燃料（水素、メタノール、石炭、残渣油）の利用に関してこれまでと同様今後も多くの研究・開発が続けられるものと思われる。

ガスタービンの効率は圧縮機の圧力比が大きいほど高くなるが、それを少ない段数で達成することは軽量化、生産コストの低減、メンテナンスの容易化につながる。このことからガスタービンの回転数は増加傾向にあり、大流量の作動流体を効率良く圧縮できる軸流圧縮機においては、ロータから見た流入速度がハブ側で亜音速、ティップ側で超音速になる遷音速圧縮機が用いられている。

遷音速圧縮機のうち、ロータから見た流入速度が超音速になるスパン位置では超音速翼列が用いられる。超音速翼列は翼間チョークや衝撃波による過剰な全圧損失を抑制するために翼の反りや厚みが小さく、また周速が大きいために食い違い角が大きいことが特徴として挙げられる。圧力上昇は翼列入口部または翼間に発生する衝撃波が主に担い、それに加えて翼間流路面積の拡大による拡散作用によって達成される。

Fig. 1.1.1 は遷音速圧縮機の性能曲線の模式図である。遷音速圧縮機では回転数が大きくなると、失速線（stall line）が高流量側へ移動し、また翼間チョークによる高流量側の限界があるために運転領域が極端に狭くなる。そこで運転の安全性を確保するためには設計点だけでなく設計点外で生じ得る現象についても理解しておく必要がある。特に失速線近傍での流れの非定常性を理解することは、設計回転数付近の失速線近傍では高効率となることから重要である。

失速線はサージ線とも呼ばれ、圧縮機の各回転数における低流量側（チョークしている場合は高背圧側）の運転限界を結んだ線である。失速線近傍では旋回失速やサージなどの不安定現象が起こるが、個々の現象名は問わずそれらをひとまとめにして性能曲線上では失速線と呼ぶのが慣例である。これまで多くの研究者により、遷音速圧縮機の失速線近傍

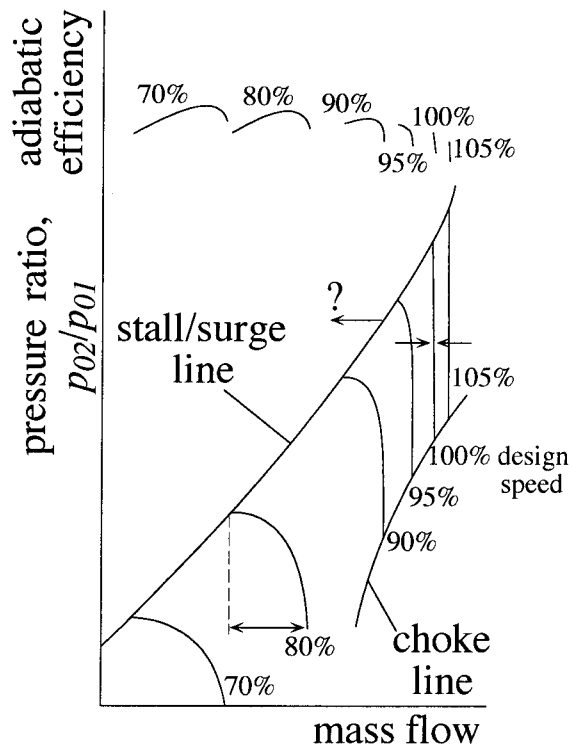


Fig. 1.1.1 Schematic of the performance curves of a transonic compressor

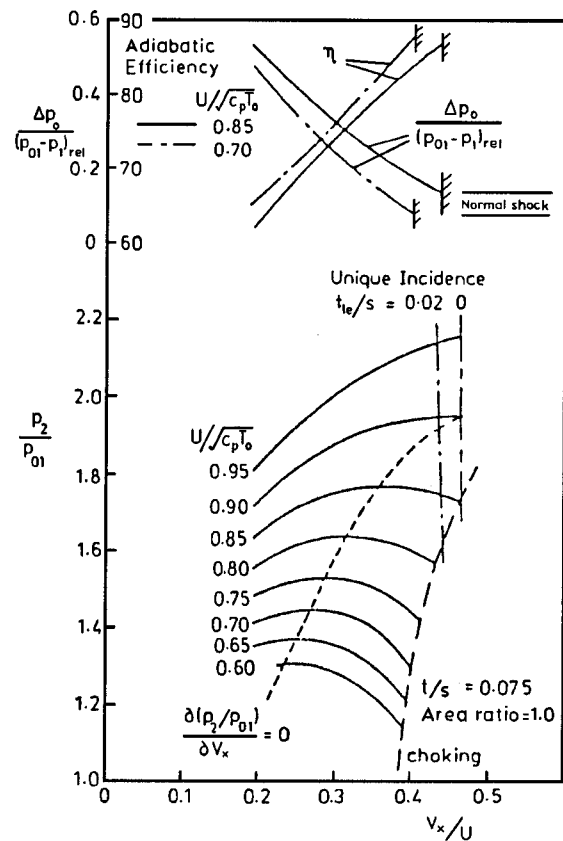


Fig. 1.1.2 Pressure ratios, loss coefficient and efficiency for uncambered blades of finite thickness. Blade inlet angle $\chi_l = 65^\circ$, meridional area ratio = 1.0. From Freeman and Cumpsty⁽¹⁴⁾ (1989)

では従来の亜音速圧縮機で見られるような旋回失速やサージが見られるほか、超音速流れ特有の現象として衝撃波がティップクリアランス流れや翼負圧面境界層と干渉して振動することが確認されている⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。また衝撃波の振動と関連して超音速失速フラッタや衝撃波誘起フラッタが発生する⁽⁶⁾⁻⁽¹²⁾。いずれの場合も翼列から見た座標系において流れが非定常性を持つ。Kerrebrock (1981) は、流れの非定常性は一般にロータティップ側で強くなり、非定常性の強さに応じて効率が低下することを指摘している⁽¹³⁾。また圧縮機入口の流れが乱れていたり、起動時などの過渡的な運転においてはより大きな失速マージンが必要になる。失速線近傍では大きな荷重変動が起こるが、そこから安定な運転に回復するためには、最悪の場合ガスタービンの運転を停止・再起動しなければならない。失速線近傍での不安定現象の把握はガスタービンの安全な運転を考える上で非常に重要である。

一方 Freeman and Cumpsty (1989) は、超音速翼列に用いられる翼の反りや厚みが小さい特徴を考慮して翼弦方向の運動量保存式を近似し、不始動状態（衝撃波が前縁から離脱し

て発生している状態)にある超音速翼列の定常特性を求めた⁽¹⁴⁾。その結果では、超音速翼列には定常性能曲線に衝撃波や圧縮性による右上がり勾配が存在し、それが回転数増加に伴って拡大することが示されている (Fig. 1.1.2)。Greitzer (1981) によれば、性能曲線の右上がり勾配はサージや旋回失速といった流体力学的不安定現象の発生に大きく関与する⁽¹⁵⁾。Freeman and Cumpsty の結果では亜音速翼列にはない衝撃波による全圧損失が右上がり勾配を作り出していることから、超音速翼列においては超音速流れに独特の衝撃波が関連した流体力学的不安定現象が存在する可能性が示されている。衝撃波が関連した不安定現象は十分に検討されるべき事項であるが、そのような研究が行われた報告はない。そこで本研究は超音速翼列における衝撃波が関連した流体力学的不安定現象の可能性について着目し、その発生原因や特徴、流れ場の挙動などを調べることを目的とする。

1・2 衝撃波振動に関するこれまでの研究

圧力分布の不連続を伴う衝撃波が振動すると機械に大きな非定常外力を与える。そのため遷音速圧縮機に限らず、遷音速ディフューザや単独翼、タービンにおいても衝撃波の振動に関する研究が行われている。本節ではまず遷音速圧縮機以外で見られる衝撃波振動、次に遷音速圧縮機で見られる衝撃波振動に関する研究について述べる。

1・2・1 2次元遷音速ディフューザで見られる衝撃波振動

衝撃波振動に関して多くの研究が行われているのは2次元遷音速ディフューザに関してであり、ラムジェットエンジンのインテーク部 (buzz 振動) やタービンノズルのモデルとして研究されている。遷音速ディフューザは構造が単純であり、圧力計測や光学的計測が容易であることから衝撃波振動の本質的理解を深めることができる。

Chen et al. は、ラムジェットエンジンのインテーク部分の特性を調べるために2次元遷音速ディフューザ (上側壁コンタード、下側壁平板) による実験を行っている (Chen et al.⁽¹⁶⁾ (1979), Sajben and Kroutil⁽¹⁷⁾ (1981), Bogar et al.⁽¹⁸⁾ (1983), Sajben et al.⁽¹⁹⁾ (1984), Bogar⁽²⁰⁾ (1986))。これらの文献では2種類のディフューザが試験され、いずれの場合でも 300 Hz 以下の衝撃波振動が見られる。はく離がない場合、衝撃波下流で逆圧力勾配によるはく離が発生する場合、衝撃波足下ではく離が発生する場合で衝撃波振動の形態が変化することを述べている。

文献 (18) では、はく離がない場合、衝撃波とディフューザ出口間の音響波の往復による気柱共鳴振動により衝撃波振動が発生し、この振動数はディフューザ長さに反比例することが示された。

文献 (16) では、逆圧力勾配によるはく離が発生する場合と衝撃波足下ではく離が発生する場合に、上流に向かう音響波と下流に対流するせん断渦の波が衝撃波振動時に支配的となることが確認された。特に衝撃波足下ではく離が発生する場合は音響波は減衰、せん断渦の波は増幅する。文献 (20) では、衝撃波足下ではく離が発生する場合の LDV による測定が行われており、衝撃波振動時には主流の約 1/2 の速度で対流する渦がはく離泡前縁から回転方向を交互に変えながら放出され、主流部に向かって流されることが確認された。

文献 (17) では、入口壁面に設置した trip によって境界層厚さを制御し、その衝撃波振動に対する影響を調べている。衝撃波下流で逆圧力勾配によるはく離が生じている場合は境界層厚さが増加するにしたがって衝撃波振動振幅は増加し、振動数はわずかに増加することを述べている。衝撃波足下ではく離が生じる場合には衝撃波振動に対してあまり影響が見られない。

文献 (19) では、ディフューザ出口下側壁にプリズム状の回転子を設け、流れ場の周波数応答を計測しているが、回転子と衝撃波振動との共振は見られていない。流れにはく離がない場合では、回転子による圧力変動は 1 次元音響波として伝ばするが、衝撃波足下ではく離がある場合では、はく離流のために変動場が 2 次元的になる。

Culick and Rogers⁽²¹⁾ (1983) は、ディフューザ内にある垂直衝撃波に下流から音響波（圧力波）が入射する 1 次元流れ場に関して微小じょう乱に対する安定性を求めている。解析には反射波の増幅率に関するパラメータ（admittance function）が用いられており、admittance function 実部の正負によって安定性が判別される。その結果では拡大流路に衝撃波があるがはく離が存在しない場合は無条件安定になる。しかし拡大流路に衝撃波が発生し、その直後からはく離によって流路断面積が一定になると近似した場合には衝撃波上流マッハ数 M_1 が $M_1 > \sqrt{(\gamma+3)/2}$ (γ は比熱比、不等号を等号にしたとき衝撃波直後の静圧が最大になる) で反射波が増幅、すなわち不安定となるモードがあることを示している。ただし仮定されている反射波は音響波のみである。

Kim et al.⁽²²⁾ (1991) は、2 次元遷音速ディフューザ（上側壁コンタード、下側壁平板）内の衝撃波と境界層との関係を乱流遷移に着目して実験を行っている。衝撃波振動数は 100 ~ 500 Hz である。衝撃波平均位置での圧力変動は衝撃波上流マッハ数の増加とともに増加し、これは外部流の場合とは反対であると述べている。また衝撃波平均位置は間欠率

が 0.5 になる位置と一致し、間欠率によって衝撃波平均位置が推定できるとしている。

Ott et al.⁽²³⁾ (1995) は、ラバルノズル出口部中央に楕円形の回転子を設け、ディフューザ部に発生する衝撃波の振動を、シュリーレン法によるラインスキャンカメラの映像と壁面圧力計測によって観察している。回転子振動数 (180 Hz までを実施) の増加に対して衝撃波振幅、圧力振幅がともに増加することを述べている。また境界層内を伝わる圧力変動があるため、衝撃波が計測点に達していない時点でも圧力が変動することを指摘している。さらに非粘性計算による実験との比較も行っている。

半田ら^{(24), (25)} (2000) は、2次元遷音速ディフューザ (上側壁平板、下側壁コンタート) に関して、衝撃波下流で逆圧力勾配によるはく離が発生する場合と衝撃波足下ではく離が発生する場合の2つの場合に対してシュリーレン法による可視化と圧力計測を行っている。いずれの場合も衝撃波下流のある箇所で強い圧力変動のピークが見られ、そこから上流へ伝ばするじょう乱と衝撃波から下流へ移流する渦 (この渦は Bogar⁽²⁰⁾ (1986) が確認している渦と同一のものである) の存在を確認している。また衝撃波振動のメカニズムとして、衝撃波振動により発生した渦が境界層の変動を引き起こし、ある地点で境界層が大きく変化することから主流部の断面積を変化させ、その変化が圧力じょう乱となって衝撃波にフィードバックするというモデルを提案している⁽²⁴⁾。さらに Culick and Rogers⁽²¹⁾ (1983) の導いたディフューザ内に発生する垂直衝撃波前後の微小じょう乱に対する関係式を用い、下流から白色スペクトルじょう乱を入射させた場合の衝撃波振動数を求めている⁽²⁵⁾。その結果は他者の結果を含めて実験とよく一致しており、微小じょう乱線形解析の有効性を示している。式展開の際に、衝撃波振動数は衝撃波直前マッハ数と衝撃波平均位置における流路断面積変化率のみに依存することも示しており、Bogar et al.⁽¹⁸⁾ (1983) の実験結果にあるような気柱共鳴によって衝撃波振動数が決定されるとする説を否定している。

1・2・2 2次元翼 (列) で見られる衝撃波振動

航空機主翼の buffet 振動に見られる衝撃波振動も関心を集めてきた。また遷音速圧縮機の基礎的研究として、動翼のティップ近傍を模擬した2次元翼列に関する研究も行われている。

McDevitt et al.⁽²⁶⁾ (1976) は、18% 翼弦長の翼厚を持つ対称円弧翼を迎え角 0° で風洞内に設置し、圧力計測とシャドウグラフ法による測定を行った。試験された上流マッハ数は 0.736 ~ 0.786 であり、翼面で超音速に加速されて衝撃波が発生する。後縁付近で逆圧力勾配によってはく離する場合と衝撃波足下ではく離する場合の遷移区間 (上流マッハ数 0.76

～ 0.78) において振動数が 190 ± 3 Hz となる衝撃波振動が見られている (無次元振動数 $\bar{f} = 2\pi f(c/2)/U_\infty \approx 0.49$, f : 振動数, c : 翼弦長, U_∞ : 上流速度). 翼上下面で振動位相は 180° 異なるため, この振動に対して以下のようなメカニズムを推測している. まず片面が衝撃波足下ではなく離するように遷移するとその面での流れが境界層により減速され, 衝撃波が弱くなる. 同時に反対面では加速が促進され, 衝撃波足下ではなく離するように遷移する. 以上のサイクルが続き, 上流マッハ数が十分大きくなり, 両面において衝撃波足下ではなく離するようになると振動は消えるとするものである.

Lee⁽²⁷⁾(1990)は, 単独翼では衝撃波振動による圧力変動が境界層内を翼後縁まで伝わり, そこから変動が主流中をさかのぼって衝撃波に伝わることにより衝撃波振動サイクルが形成されるとしている. この考察から導かれた振動数評価式の妥当性を調べるために, 11.8% 翼弦長の翼厚を持つ翼で流入マッハ数 0.688 ~ 0.747, 迎え角 $4.52 \sim 8.02^\circ$ の範囲の 7 点での実験結果を調べている. ただし境界層内を翼後縁まで伝わる変動の伝ば速度は圧力測定 of フーリエ分解によって得られた位相差を用い, 主流中をさかのぼる変動の伝ば速度は主流マッハ数と翼面上局所マッハ数の重み付き平均と定常時の翼面上局所音速を用いて算出している. その結果, 衝撃波振動数 (74.1 ~ 91.3 Hz) は評価式による予測とよく一致することを示している.

松下ら⁽²⁸⁾(1999)は, 食い違い角 30° , 10% 翼弦長の翼厚を持つ 2 次元対称翼 3 枚からなる翼列を風洞内に設置し, 翼間でチョークした後に衝撃波が発生する場合についての衝撃波振動を調べている. シュリーレン法で可視化した映像をラインスキャンカメラで捕らえ, その結果から衝撃波振動振幅と振動数を計測している. そして前述の Lee⁽²⁷⁾(1990) による評価式をもとに衝撃波振動数を試算して実験値と比較している. 単独翼とは異なり, 翼列の場合は翼間を形成する両側の翼後縁から翼間衝撃波までの距離が異なるため, 両側翼それぞれの場合で評価式を用いている. その結果, 衝撃波が翼間にある場合は衝撃波振動が周期性を保たず, 上流側翼の後縁よりも衝撃波が下流にある場合は下流側翼の後縁との距離で評価した値がよく一致することを示している. 衝撃波が翼間にある場合では振動サイクルを形成する周波数が (両側翼それぞれの距離で) 少なくとも 2 つあり, このことが周期性を乱す原因としている.

Tanuma et al.⁽²⁹⁾(1995)は, 翼間ピッチ数が 1 と 4 の場合の 2 次元タービン動翼の数値計算を行っている. 後流渦 (全ての翼で同位相, $St = fD_e/V_e = 0.146$ (1 pitch), 0.177 (4 pitches), 0.284 (experiment), f : 振動数, D_e : 後縁厚さ, V_e : 後縁での流速) とスロート下流に発生する衝撃波の干渉が観察されている. 後縁で発生した後流渦による変動が衝撃波を介

してタービン回転方向と逆方向の翼の負圧面に伝わり、それがさらに境界層内を上流に伝ばする様子が圧力変動から確認されている。

1・2・3 遷音速圧縮機で見られる衝撃波振動

遷音速圧縮機に関する系統的な研究は 1950 年頃に米国 NACA Lewis Research Center で始められた⁽¹³⁾。特に効率低下に大きく関与するロータティップ側での衝撃波振動は近年盛んに行われている研究である。

Ng and Epstein⁽¹⁾ (1985) は、設計点にある 2 種類の単段遷音速圧縮機 (tip speed : 457 m/s, 回転数 : 338 revs/s, 動・静翼 / tip speed : 430 m/s, 回転数 : 268 revs/s, 動翼のみ) の動翼出口部における全温・全圧を測定している。後流部の変動の他に主流部においても tip から mid-span にかけて blade passing 周波数の 3 ~ 4 倍の周波数 (15 ~ 20 kHz) の全圧変動が見られている。それらの変動振幅に対して、正弦波状に振動する垂直衝撃波による全圧変動をフィットさせてみたところ、衝撃波振動振幅は 0.2 ~ 0.6 mm になると算出されている。衝撃波が振動する原因はその周波数から後流渦にあると推定している。

Strazisar⁽²⁾ (1985) は、動翼だけからなる遷音速圧縮機ファン (tip 相対流入マッハ数 : 1.38, tip speed : 429 m/s, 回転数 : 266 revs/s) の翼間を LDV によって計測している。衝撃波振動のため、失速線近傍と最大効率点において衝撃波前後の軸流速度に時間的ばらつきがあることが示されている。衝撃波振幅は翼弦長の 3 ~ 4% (約 3 mm) であり周波数は計測できてはいないが、Ng and Epstein⁽¹⁾ に類似したモデルにより、1 kHz 程度の周波数ならば衝撃波振動による全圧損失は定常時より 11% 増加するという結果を得ている。衝撃波が振動する原因には直接触れてはいないが、衝撃波振動が発生する場合には後流がピッチの 4 ~ 6% 程度の振幅で振動することが観察されている。

Copenhaver et al.⁽³⁾ (1995) は、失速線近傍にある単段遷音速圧縮機 (tip 相対流入マッハ数 : 1.6, tip speed : 457.2 m/s, 回転数 : 350 revs/s) のケーシング圧力分布を計測結果と数値計算結果 (時間ステップ : 7×10^{-5} seconds, 動翼のみ) で比較している。実験、計算ともに衝撃波位置、特に翼負圧面側の衝撃波根元部分に強い非定常性が見られるが、計算では実験で見られた衝撃波下流にあるクリアランス渦と衝撃波の干渉による非定常現象は再現されていない。しかし定性的にはよく一致しているため、クリアランス部分を含む tip 付近の計算結果に対して考察を行っている。その結果、衝撃波が blade passing 周波数の約 1/10 の周波数 (850 Hz) で翼弦長の 1 ~ 6% 振動することが示されている。衝撃波は負圧面で大きく振動し、またクリアランス内では翼間よりも振幅が小さいことから衝撃波が振動する

原因は翼負圧面境界層との干渉によると結論づけている．さらにクリアランスがない場合の計算と比較して，クリアランス渦は境界層の発達を抑制し，ひいては衝撃波振動を抑制すると述べている．ただし，クリアランス渦が衝撃波に入射する部分では（境界層による振動よりは小さいが）衝撃波振動が促進されていることも述べている．

引き続き Copenhagen et al.⁽⁴⁾ (1997) は，文献 (3) と同一の単段遷音速圧縮機で失速線近傍と最高効率点での実験と数値計算（時間ステップ： 2.8×10^{-5} seconds，動翼のみ）を行い，最高効率点での非定常性は失速線近傍での非定常性に比べて小さくなる（衝撃波位置での静圧振幅を計算結果で比較すると約 1/2）ことを述べている．また失速線近傍における計算結果から，クリアランス内での衝撃波振動数は 2 kHz であり，これは翼負圧面付近で衝撃波と後縁の間を往復する音響波による振動数に近いとしている．実験から得られたクリアランス内での衝撃波振幅は翼弦長の 1～2% であった．

Puterbaugh and Copenhagen⁽⁵⁾ (1997) は，文献 (3) の静翼を拡散制御翼に変更した単段遷音速圧縮機でケーシング圧力分布を計測している．使用した実験装置における最小背圧から失速線近傍までの 4 点に関して測定を行っており，アンサンブル平均からの偏差（RMS 値）から非定常性を検討している．ティップクリアランス内では衝撃波とクリアランス渦が干渉する点およびその下流で非定常性が強く見られ，衝撃波がクリアランス渦と干渉して振動していることを示している．衝撃波は翼弦長の 2% の振幅で振動する．

1・3 本研究の焦点

以上，衝撃波振動に関する研究を述べてきた．これらの研究における衝撃波振動の原因は以下の 3 つにまとめられる．

- (1) 衝撃波下流域における気柱共鳴（上／下流に伝ばする音響波）
- (2) 衝撃波下流域における境界層を伝わる渦の波（境界層厚さの変化）と上流に伝ばする音響波
- (3) ティップクリアランス流れと衝撃波の干渉

これら 3 つの原因のうち特に衝撃波と境界層の干渉に関する報告が多い．いずれの原因が支配的になるかは運転条件によって異なる．

翼列の特徴として翼間が複数存在することが挙げられる．このため，ある翼間で衝撃波が振動する場合，その振動が隣接する翼間にどのように影響するのかを検討する必要がある．しかし筆者の知る限り，遷音速圧縮機動翼において各翼間での衝撃波振動の位相情報

までを解像したようなデータは実験、計算ともに公表されていない。

ところで遷音速圧縮機動翼内での衝撃波振動を考える上で、1・1節でも述べた Freeman and Cumpsty⁽¹⁴⁾ (1989) による超音速翼列の定常性能曲線 (Fig. 1.1.2) は注目に値する。彼らの結果では定常性能曲線に衝撃波や圧縮性による右上がり勾配が存在するが、これは流体力学的不安定現象の可能性を示唆するものである。線形解析による旋回失速発生点の予測では正確な定常性能曲線の勾配を取得することが鍵になるが、実際の遷音速圧縮機において性能曲線に右上がり勾配が見られることは皆無である⁽¹⁵⁾ (右上がり勾配が確認される前に運転不能になる)。そのため、これまでは超音速翼列における流体力学的不安定現象が亜音速翼列と同様に性能曲線の右上がり勾配と関係があるのかを調べることはできなかった。その意味で Freeman and Cumpsty⁽¹⁴⁾ による右上がり勾配は重要な情報をもたらしている。さらに彼らの結果では性能曲線の右上がり勾配が (粘性による損失ではない) 衝撃波による全圧損失によって作り出されているため、旋回失速とは異なる、衝撃波振動が関連した不安定現象が超音速翼列に存在する可能性を示している。また翼間が複数存在することから、旋回失速と同様、その不安定現象が周 (翼列軸) 方向に伝ばすることもあると考えられる。

実際の動翼内の流れ場は3次元的であり、半径方向流れも考慮しなければならない (衝撃波によって外方向流れが誘起される)。しかし本研究で注目しているのは非定常性が強いロータティップ側部分である。基本的性質を調べるため、実行可能な2次元流としてまず調べた。

以上のことから本研究では、超音速翼列流れに発生する衝撃波が関連した不安定現象について、存在の有無、変動モード、発生原因を調べることを焦点として研究を行う。

1・4 本論文の概要

本論文は2つの手法によって超音速翼列流れを解析する。1つはアクチュエータディスク解析であり、もう1つは数値流体力学 (CFD) による計算である。前者では現象に必要な最小限の性質のみを考慮することによって本質的な部分を特定することができる。しかしその本質的な部分が (実際の流れ場には存在する) 他の性質から受ける影響を検討することはできない。そこで後者の方法によってより実際に近い場合の流れ場を解析する。またアクチュエータディスク解析による結果は数値計算を行う上で検討すべき流れ場条件に対し指針を与える。両者の解析は相補的なものであり、これらの結果を統合することによ

て大小スケールの流れ場の挙動を過不足なく解析することができる。

第2章 アクチュエータディスク法による安定解析

第2章では Freeman and Cumpsty⁽¹⁴⁾ (1989) による超音速翼列の定常特性を利用したアクチュエータディスク解析を行う。ここでの解析は不安定現象の発生初期を対象としており、正弦波状に振動すると仮定した微小じょう乱変動を有する流れ場の安定性を判定する。また全圧損失が衝撃波による損失のみによって生じるモデルに対しても同様の解析を行い、超音速翼列流れに特有な衝撃波が関連した不安定現象について掘り下げて検討する。

第3章 数値計算法

第2章での結果を受け、数値計算を第3章以降で行う。第3章ではその方法を示す。物理的な不安定現象のみを捕らえるべく、数値的不安定防止策としてTVDスキームを用いている。本計算コードは Harten-Yee の風上型 TVD スキーム⁽³⁰⁾ (1985) を基本としており、最も単純で、経験則に対する依存度が小さく、最低限の時間または空間精度が維持されることから組み合わされたものである。

第4章 計算格子および計算コードの検証

まず本計算が用いる粘性用、非粘性用計算格子を示す。そして第3章で示した方法をもとに作成した計算コードの空間および時間精度の検証を行う。空間精度に関しては Tweedt et al.⁽³¹⁾ (1988) の実験結果と本計算結果を比較する。時間精度の検証では非定常計算用の時間2次精度陰解法の有効性を示す。さらに代表的な流れ場を異なる時間ステップによって計算し、その結果から第5章以降で用いる適切な時間ステップを決定する。

第5章 非定常粘性計算の結果と考察

有限ピッチ、粘性を有する場合の数値計算を行う。流入マッハ数（周速）の影響による非定常特性の違いを見るために、亜音速流入を含めた7つの周速に対して計算を行う。周速を一定にした場合の最大背圧点近傍で変動が周方向に伝ばする現象が4種類（旋回失速と「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」、 「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」、 「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と本論文で呼んでいる現象）見られた。本章ではその流れ場の詳細を示す。最後に伝ば速度比をアクチュエータディスク解析と比較し、旋回失速と「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」

の2種類がアクチュエータディスク解析による不安定モードに対応することを示す。

第6章 非定常非粘性計算の結果と考察

第5章で示された「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生要因を特定するために、その発生域である定常状態が *unique incidence* によりチョークしている場合の2つの周速に対して非定常非粘性計算を行う。その結果から「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生機構には粘性は本質的寄与をなしていないことを示す。また2つの周速いずれの最大背圧点でも「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」した後、入口境界の一部分において逆流が生じて計算継続不能になったが、その詳細についても述べる。

最後に本研究で得られた結論をまとめ、衝撃波が関連した不安定現象の完全な解明に向けてのさらなる方針を提示する。

参考文献

1. Ng, W. F. and Epstein, A. H., 1985, "Unsteady Losses in Transonic Compressors", *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 107, No. 2, pp. 345-353.
2. Strazisar, A. J., 1985, "Investigation of Flow Phenomena in a Transonic Fan Rotor Using Laser Anemometry", *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 107, No. 2, pp. 427-435.
3. Copenhaver, W. W., Puterbaugh, S. L. and Hah, C., 1995, "Unsteady Effects due to Interactions between Tip-Clearance Vortex and Rotor Passage Shock in a Transonic Compressor Rotor", *ISABE Paper 95-7073*.
4. Copenhaver, W. W., Puterbaugh, S. L. and Hah, C., 1997, "Unsteady Flow and Shock Motion in a Transonic Compressor Rotor", *AIAA Journal of Propulsion and Power*, Vol. 13, No. 1, pp. 17-23.
5. Puterbaugh, S. L. and Copenhaver, W. W., 1997, "Flow Field Unsteadiness in the Tip Region of a Transonic Compressor Rotor", *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, No. 1, pp. 122-128.
6. Adamczyk, J. J., Stevans, W. and Jutras, R., 1982, "Supersonic Stall Flutter of High-Speed Fans", *ASME Journal of Engineering for Power*, Vol. 104, No. 3, pp. 675-682.
7. Kobayashi, H., 1989, "Effects of Shock Waves on Aerodynamic Instability of Annular Cascade Oscillation in a Transonic Flow", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 111, No. 3, pp. 222-230.

8. Kobayashi, H., 1990, "Annular Cascade Study of Low Back-Pressure Supersonic Fan Blade Flutter", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 112, No. 4, pp. 768-777.
9. Shiratori, T. and Noguchi, Y., 1995, "Aerodynamic Instability of Transonic Cascade with Shock Movement", *ISABE Paper* 95-7059.
10. Watanabe, T., Doi, H. and Kaji, S., 1995, "Numerical Analysis of the Unstarted Flutter in a Compressor Cascade", *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*, Elsevier Science B. V., Edited by Tanida, Y. and Namba, M., pp. 207-222.
11. 柴田貴範, 梶昭次郎, 1997, "遷音速ファンの高負荷曲げ翼列フラッタに関する実験的研究", *日本ガスタービン学会誌*, Vol. 25, No. 99, pp. 96-101.
12. 柴田貴範, 梶昭次郎, 1998, "遷音速振動翼列の非定常空力解析", *日本ガスタービン学会誌*, Vol. 25, No. 100, pp. 44-49.
13. Kerrebrock, J. L., 1981, "Flow in Transonic Compressors", *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 1, pp. 4-19.
14. Freeman, C. and Cumpsty, N. A., 1989, "A Method for the Prediction of Supersonic Compressor Blade Performance", *ASME Paper* 89-GT-326.
15. Greitzer, E. M., 1981, "The Stability of Pumping Systems - The 1980 Freeman Scholar Lecture", *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 103, No. 2, pp. 193-242.
16. Chen, C. P., Sajben, M. and Kroutil, J. C., 1979, "Shock Wave Oscillations in a Transonic Diffuser Flow", *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 10, pp. 1076-1083.
17. Sajben, M. and Kroutil, J. C., 1981, "Effects of Initial Boundary-Layer Thickness on Transonic Diffuser Flows", *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 11, pp. 1386-1393.
18. Bogar, T. J., Sajben, M. and Kroutil, J. C., 1983, "Characteristic Frequencies of Transonic Diffuser Flow Oscillations", *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 9, pp. 1232-1240.
19. Sajben, M., Bogar, T. J. and Kroutil, J. C., 1984, "Forced Oscillation Experiments in Supercritical Diffuser Flows", *AIAA Journal*, Vol. 22, No. 4, pp. 465-474.
20. Bogar, T. J., 1986, "Structure of Self-Excited Oscillations in Transonic Diffuser Flows", *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 1, pp. 54-61.
21. Culick, F. E. C. and Rogers, T., 1983, "The Response of Normal Shocks in Diffusers", *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 10, pp. 1382-1390.
22. Kim, H., Matsuo, K., Kawagoe S. and Kinoshita, T., 1991, "Flow Unsteadiness by Weak Normal Shock Wave/Turbulent Boundary Layer Interaction in Internal Flow", *JSME International Journal*, Series II, Vol. 34, No. 4, pp. 457-465.
23. Ott, P., Bölcs, A. and Fransson, T. H., 1995, "Experimental and Numerical Study of the Time-Dependent Pressure Response of a Shock Wave Oscillating in a Nozzle", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 117, No. 1, pp. 106-114.
24. 半田太郎, 宮里義昭, 益田光治, 松尾一泰, 2000, "遷音速ディフューザ流れにおける衝撃波の自励振動 (第1報, 衝撃波を揺らすじょう乱の発生源と振動機構)", *日本機械学会論文集 (B編)*, 66巻645号, pp. 1337-1344.

25. 半田太郎, 宮里義昭, 益田光治, 松尾一泰, 2000, "遷音速ディフューザ流れにおける衝撃波の自励振動 (第2報, 振動のスペクトル分布とピーク周波数)", 日本機械学会論文集 (B編), 66巻645号, pp. 1345-1350.
26. McDevitt, J. B., Levy Jr., L. L. and Deiwert, G. S., 1976, "Transonic Flow about a Thick Circular-Arc Airfoil", *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 5, pp. 606-613.
27. Lee, B. H. K., 1990, "Oscillatory Shock Motion Caused by Transonic Shock Boundary-Layer Interaction", *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 5, pp. 942-944.
28. 松下政裕, 白鳥敏正, 桜井忠一, 1999, "遷音速翼列間流路に生じる衝撃波変動に関する研究 (翼間流れ場の計測)", 日本ガスタービン学会誌, Vol. 27, No. 2, pp. 102-107.
29. Tanuma, T., Yamamoto, S., Yuan, X. and Daiguji, H., 1995, "Navier-Stokes Analysis of Unsteady Transonic Flows through Turbine Cascades", *Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines*, Elsevier Science B. V., Edited by Tanida, Y. and Namba, M., pp. 691-707.
30. Yee, H. C., Warming, R. F. and Harten, A., 1985, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 327-360.
31. Tweedt, D. L., Schreiber, H. A. and Starcken, H., 1988, "Experimental Investigation of the Performance of a Supersonic Compressor Cascade", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 110, No. 4, pp. 456-466.

第2章 アクチュエータディスク法による安定解析

第2章の記号表

本記号表は第2章に適用される．断りのない限り諸量は翼列から見た相対座標系でのものである．

a : 音速

a_t : 淀み点音速

i : 虚数単位

k : 変動の y 方向波数

M : マッハ数

p : 静圧

p_t : 全圧 ($= p[1 + \{(\kappa - 1)/2\}M^2]^{\kappa/(\kappa - 1)}$)

t : 時間

u : x 方向流速

v : y 方向流速

x : 軸流方向座標

y : 翼列軸方向座標

β : 流入角または波面伝ば方向

κ : 比熱比 (本研究 (空気) では $\kappa = 1.4$)

λ : 変動の x 方向波数

ρ : 密度

χ : 翼の食い違い角 (本研究では $\chi = 60.0$ [deg])

ω : 複素角振動数

添字

abs : 絶対座標系

D : 翼列下流

S : 翼間衝撃波直前
 im : 虚部
 re : 実部
 rel : 相対座標系
 t : 淀み点状態
 U : 翼列上流
 $\wedge$: 変動成分
 $'$: 変動成分の複素振幅
 IU : 翼列上流の圧力（音響）波による変動
 $2D$: 翼列下流の圧力（音響）波による変動
 $3D$: 翼列下流の渦度変動およびエントロピ変動の波による変動

第2章 アクチュエータディスク法による安定解析

本章では Freeman and Cumpsty⁽¹⁾ (1989) による超音速翼列の定常特性を利用したアクチュエータディスク解析を行う。超音速翼列をアクチュエータディスクにモデル化し、正弦波状に振動すると仮定した微小じょう乱変動を有する流れ場の安定解析を行う。このことにより、超音速翼列流れに生じ得る不安定現象の種類と発生条件を知ることができる。不安定現象の発生初期では微小じょう乱変動を仮定できるため、方程式の線形化が可能になる。また全圧損失が衝撃波による損失のみによって生じるモデルに対しても同様の解析を行うことにより、超音速翼列流れに特有な衝撃波が関連した不安定現象について検討する。

2・1 翼列モデル

超音速翼列の不始動状態では翼前縁上流に離脱衝撃波が発生している。この様子を翼を平板で近似して描くと Fig. 2.1.1(a) のようになる。本研究で用いるアクチュエータディスク法では、衝撃波が発生している翼列をアクチュエータディスクモデルで表し、Fig. 2.1.1(b)に示すように翼列上・下流の流れを解析する。アクチュエータディスクは翼列上・下流の流れを境界条件で結びつける仮想的な無限小厚みの板である。本研究では異なる条件を用いた2種類のアクチュエータディスクモデルを用いて検討を行う。流入マッハ数が小さい場合には衝撃波は発生しないが、この場合は翼列のみをアクチュエータディスクにモデル化していることになる。

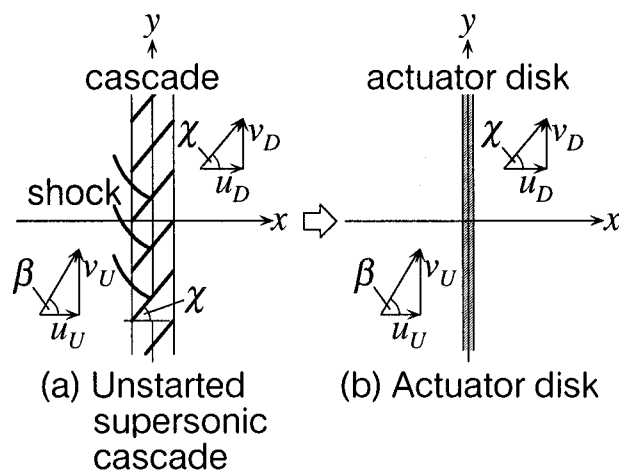


Fig. 2.1.1 Unstarted supersonic cascade and actuator disk

2・2 定常成分

まず定常成分の境界条件を定める．翼列上流と下流において

連続の式

$$\rho_u u_u = \rho_D u_D \quad (2.2.1)$$

全エンタルピ保存式

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2} (u_u^2 + v_u^2) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_D}{\rho_D} + \frac{1}{2} (u_D^2 + v_D^2) \quad (2.2.2)$$

Kutta の条件

$$u_D \sin \chi - v_D \cos \chi = 0 \quad (2.2.3)$$

が一般的に成立する．

2次元圧縮性流れの場合，さらにもう1つ条件が必要になる．よく用いられているのは実験により得られた全圧損失係数を用いる手法である．しかし不始動状態までカバーした実験データの入手が困難であることから，第1のモデル（モデル I）として Freeman and Cumpsty⁽¹⁾ (1989) によって導出された翼弦方向の運動量保存式

$$p_u \cos \chi + \rho_u u_u (u_u \cos \chi + v_u \sin \chi) = p_D \cos \chi + \rho_D u_D (u_D \cos \chi + v_D \sin \chi) \quad (2.2.4)$$

を用いる．超音速翼列に用いられる翼は反りや厚みが小さいため，式 (2.2.4) では翼からの外力項が無視されている．

モデル I で用いた境界条件を満たす翼列下流のマッハ数は2つ存在する．これらは衝撃波発生解と非発生解であり，低マッハ数側の解を選択することによって衝撃波発生時の超音速翼列下流の流れを求めることができる．モデル I は不始動状態における超音速翼列定常性能を上手く捕らえることができる．ただしモデル I では解析結果に陰的な全圧損失が

含まれる．例えば非圧縮の極限をとると，損失は $\Delta p_{loss} = \rho(v_U - v_D)^2/2$ になる(2)．この損失は衝突損失と呼ばれている．

性能曲線の右上がり勾配は全圧損失によって生じ，流れの不安定現象の発生条件でもある．全圧損失に衝突損失と衝撃波による全圧損失が混在しているモデル I では，いずれの全圧損失が不安定現象の主原因となっているのかを判定できない．そこで本研究では，特に衝撃波（損失）が関連した流体力学的不安定現象に着目して解析を進めるために，第 2 のモデル（モデル II）として衝撃波損失の他は損失を含まないような条件，すなわち，流れが等エントロピ的に翼面方向に転向して流入した後に，翼間に垂直衝撃波が発生する条件

$$p_U \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_U^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = p_S \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_S^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{p_D}{p_S} = \frac{2\kappa M_S^2 - (\kappa-1)}{\kappa+1} \quad (2.2.6)$$

を式 (2.2.4) の代わりに用いたモデルも検討する．式 (2.2.6) は Rankine-Hugoniot の関係式である． p_S, M_S は流れ方向が等エントロピ的に翼面方向に変化した時の衝撃波直前の圧力，マッハ数であり，これらは流路断面積比のみを考慮した 1 次元流れを仮定することによって求められる．ここで式 (2.2.1) ~ (2.2.3), (2.2.5), (2.2.6) を解くと， M_S に対して超音速，亜音速 2 種類の解が求められる． M_S は衝撃波上流のマッハ数であるため，超音速になる方（ $M_S > 1$ ）が用いられる．

以後，式(2.2.4)の翼弦方向の運動量保存式を用いるモデルをモデル I，式 (2.2.5), (2.2.6) の流れが等エントロピ的に翼面方向に転向して流入した後に，翼間に垂直衝撃波が発生する条件を用いるモデルをモデル II と呼ぶことにする．

2・3 非定常成分

不安定現象発生初期においては非定常成分の振幅は十分に小さいため，変動は微小じょう乱で表すことができる．そのため，非定常成分には微小じょう乱を仮定する．

まず翼列上・下流で微小じょう乱が満たすべき条件を導く．ただし翼列上・下流の定常

流れ場はそれぞれで一様であり，外力を受けないと仮定する．

微小じょう乱項には $\wedge$ をつける．例えば振動が起きている際の密度 ρ は定常項と微小じょう乱項の和 $\rho+\hat{\rho}$ で表される．微小じょう乱が満たすべき条件として次の4つが挙げられる．

連続の式

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3.1)$$

x 方向 Euler 方程式

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \quad (2.3.2)$$

y 方向 Euler 方程式

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad (2.3.3)$$

全エンタルピー保存式

$$\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right) - a^2 \left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.3.4)$$

以上4式 (2.3.1) ~ (2.3.4) は2次元微小じょう乱 Euler 方程式と呼ばれる．これらの式はそれぞれの基礎式に定常項と微小じょう乱項の和 ($\rho+\hat{\rho}$ 等) を代入した後，じょう乱の2次以上の項を無視し，さらに定常成分を差し引くことにより得られる．これにより，式 (2.3.1) ~ (2.3.4) は微小じょう乱の1次の項に関する線形微分方程式となっている．

さらに微小じょう乱変動の形を次のように仮定する．

$$\exp[i(\omega t - k y) + \lambda x] \quad (2.3.5)$$

例えば密度 ρ の非定常成分は $\hat{\rho} = \rho' \exp[i(\omega t - k y) + \lambda x]$ (ρ' は振幅) で表される．角振動数 ω は複素数で定義され，実部に re ，虚部に im の添字を付けると式 (2.3.5) は次のように詳しく書き直される．

$$\exp[-\omega_{im} t + \lambda_{re} x] \exp[i(\omega_{re} t - k y + \lambda_{im} x)] \quad (2.3.6)$$

翼列をロータのモデルとすると y (翼列軸) 方向には周期性があるため， y 方向波数 k は正の実数とおいている．式 (2.3.6) における 2 番目の指数関数は，流れ場が角振動数 ω_{re} で振動し，その振動が x, y 方向に伝ばすることを表している．1 番目の指数関数は振動振幅が時間的には ω_{im} の割合で減衰，空間的には λ_{re} の割合で x 方向に変化することを表している．振幅が時間的に増幅すれば ($\omega_{im} < 0$) 流れ場は不安定，減衰すれば ($\omega_{im} > 0$) 安定，一定振幅を保てば ($\omega_{im} = 0$) 中立安定となる．本研究ではこの減衰率 ω_{im} によって流れ場の安定性を判定する．

式 (2.3.5) で表される微小じょう乱変動 $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{p}$ を，2 次元微小じょう乱 Euler 方程式 (2.3.1) ~ (2.3.4) に代入すると，微小振幅 ρ', u', v', p' に対する同次の連立 1 次方程式が得られる．この連立方程式に非自明解が存在する場合は ρ', u', v', p' の係数行列式が 0 になることから 4 種類の x (軸流) 方向波数 λ が得られ，それぞれの λ に対する微小じょう乱 $\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{p}$ の振幅比が求められる．それぞれの λ は以下に述べる変動の波を表している．

(i) および (ii) : 圧力 (音響) 波

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a^2 - u^2} \left\{ i u (\omega - k v) + a \sqrt{(a^2 - u^2) k^2 - (\omega - k v)^2} \right\} \quad (2.3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_{1,2} &= v'_{1,2} \exp[i(\omega t - k y) + \lambda_{1,2} x] \\ \hat{p}_{1,2} &= \rho \left(\frac{\omega}{k} - v - i \frac{\lambda_{1,2}}{k} u \right) \hat{v}_{1,2} \\ \hat{u}_{1,2} &= i \frac{\lambda_{1,2}}{k} \hat{v}_{1,2} \\ \hat{\rho}_{1,2} &= \frac{\rho}{a^2} \left(\frac{\omega}{k} - v - i \frac{\lambda_{1,2}}{k} u \right) \hat{v}_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

この変動は等エントロピ変化 ($\hat{p}=a^2\hat{\rho}$) であり, 渦度変動が0である. 式 (2.3.7) の根号内は一般に複素数であるからこの値は (例えば $\sqrt{-1}=\pm i$ のように) 2つあり, そのため $\lambda_{1,2}$ は2つの値を表している. これら2つの値は上流または下流に伝ばする圧力波を表している. 本研究では2つの値のうち上流に伝ばするものを λ_1 , 下流に伝ばするものを λ_2 とする. $\lambda_{1,2}$ から適切に λ_1, λ_2 を選ぶためには2・4節で述べる伝ば波面の幾何学的な考察を必要とする.

(iii) および (iv): 渦度変動およびエントロピ変動の波

$$\lambda_3 = -\frac{i}{u}(\omega - k v) \quad (\text{重根}) \quad (2.3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_3 &= v'_3 \exp[i(\omega t - k y) + \lambda_3 x] \\ \hat{p}_3 &= 0 \\ \hat{u}_3 &= i \frac{k}{\lambda_3} \hat{v}_3 \\ \hat{\rho}_3 &= \rho'_3 \exp[i(\omega t - k y) + \lambda_3 x] \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

この変動では渦度変動 $\hat{\Omega}$ が

$$\hat{\Omega} = \left\{1 - (k/\lambda_3)^2\right\} \hat{v}_3 \quad (2.3.11)$$

となり, $\hat{u}_3, \hat{v}_3$ によって渦度変動を表している. ρ_3 は理想気体の状態方程式

$$p = \rho^* \exp\left[\frac{s-s_0}{c_v}\right] \quad (2.3.12)$$

ただし, s : エントロピ, s_0 : 基準となるエントロピ, c_v : 定積比熱

からエントロピ変動を密度変動によって表していることが分かる.

また式 (2.3.10) 第1式は

$$\hat{v}_3 = v'_3 \exp\left[i\left\{\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) - k\left(y - \frac{v}{u}x\right)\right\}\right] \quad (2.3.13)$$

のように表され、この変動が主流速度 (u, v) で移動していることも分かる。

以上で求められた変動のうち本研究のモデルに適した変動を翼列上・下流に仮定する。本研究においてはじょう乱発生源は翼列であるとし、翼列上流は渦無し流れ、下流は（翼列・衝撃波により）渦度・エントロピ変動がある流れを仮定する。そのため、上流には上流に伝ばする圧力波 λ_{1U} 、下流には下流に伝ばする圧力波 λ_{2D} と渦度・エントロピ変動の波 λ_{3D} の線形和が存在する。適切な $\lambda_{1U}, \lambda_{2D}$ の選び方は次節で述べる。

2・4 軸流方向波数 $\lambda_{1,2}$ の選び方

前節で導出した軸流方向波数

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a^2 - u^2} \left\{ i u (\omega - k v) + a \sqrt{(a^2 - u^2)k^2 - (\omega - k v)^2} \right\} \quad (2.3.7)$$

の根号内は複素数であるから、この値は（例えば $\sqrt{-1} = \pm i$ のように）2つある。本研究では $\lambda_{1,2}$ の2つの値のうち上流に伝ばするものを λ_1 、下流に伝ばするものを λ_2 とするので、それぞれが適切に対応する $\lambda_{1,2}$ の選び方を本節で述べる。ただし、じょう乱発生源はアクチュエータディスク上にあるものとする。

まず簡単のためにじょう乱の減衰率 $\omega_{im} = 0$ の場合を考える。単一のじょう乱発生源に着目すると、この発生源から発生するじょう乱は主流に流されながら音速 a で円形波面を形成して広がる。一方、発生源自身は位相速度 ω_{re}/k でアクチュエータディスク (y 軸) 上を移動する。この様子を Fig. 2.4.1 に示す。流れ場全体の変動はアクチュエータディスク上に分布する全てのじょう乱発生源による円形波面の重ね合わせで表される。軸流亜音速の場合、Fig. 2.4.1 に示されるように形成される円形波面は y 軸と交点 R_1, R_2 を持つが、その交点と移動した発生源が一致する場合は resonance と呼ばれる⁽³⁾。resonance 時では式 (2.3.7) の根号内が 0 になり、その角振動数 ω_{R1}, ω_{R2} は

$$\omega_{R1} = k(v - \sqrt{a^2 - u^2}), \quad \omega_{R2} = k(v + \sqrt{a^2 - u^2}) \quad (2.4.1)$$

で与えられる．また移動した発生源が円形波面内にとどまる場合 ($\omega_{R1} < \omega_{re} < \omega_{R2}$) は sub-resonance, 円形波面外に到達する場合 ($\omega_{re} < \omega_{R1}, \omega_{R2} < \omega_{re}$) は super-resonance と呼ばれる．流れ場の状態は resonance 周波数を境にして異なり, sub-resonance, super-resonance それぞれの場合で上流に伝ばするものを λ_1 , 下流に伝ばするものを λ_2 とするには適切な $\lambda_{1,2}$ の選び方が必要になる．

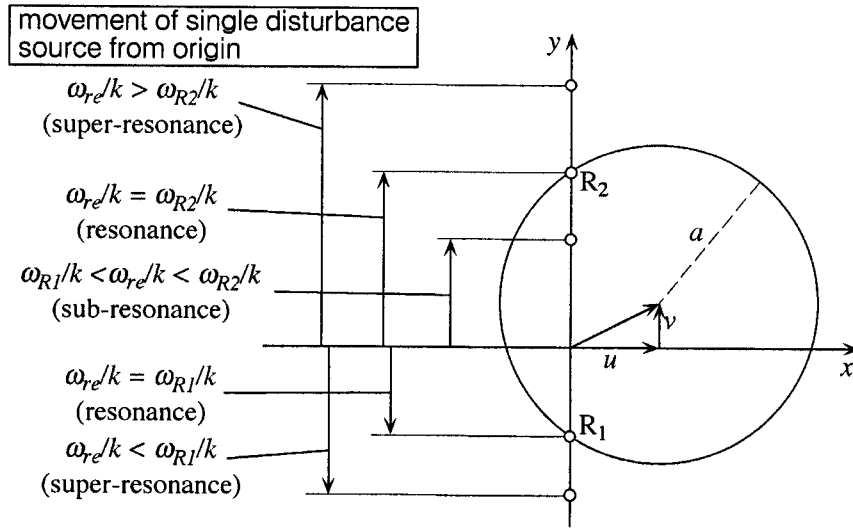


Fig. 2.4.1 Relationship between circular wave surface and travelling single disturbance source

super-resonance の場合, $\omega_{im} = 0$ では式 (2.3.7) 右辺の複素平方根内が負になり $\lambda_{1,2}$ は純虚数になる．この時は Fig. 2.4.2 に示されるようにじょう乱発生源を頂点とするマッハくさび (Mach wedge) が形成され, そのくさびの包絡線 PS, PT の傾きは 2 つの等位相面の傾き $\lambda_1/k, \lambda_2/k$ の値と等しい⁽⁴⁾ (本節最後に説明)．2 つの包絡線のうち一方は上流の流れ場を通り, もう一方は下流の流れ場を通る．変動がアクチュエータディスク (y 軸) から伝ばする様子を表すためには, 上流の包絡線 PS には λ_1 , 下流の包絡線 PT には λ_2 が相当するように $\lambda_{1,2}$ の複素平方根の値を選ばなければならない．Fig. 2.4.2 ($\omega_{re} > \omega_{R2}$) の場合, 上流の等位相面の傾きは下流のそれよりも大きくなることから, 2 つの等位相面の傾き $\lambda_{1,2}/k$ の大小を判別することにより適切な λ_1, λ_2 を選ぶことができる．ただし, じょう乱の発生源が点 R_1 よりも下に移動する ($\omega_{re} < \omega_{R1}$) 場合には上・下流における等位相面の傾きは逆の関係になる．

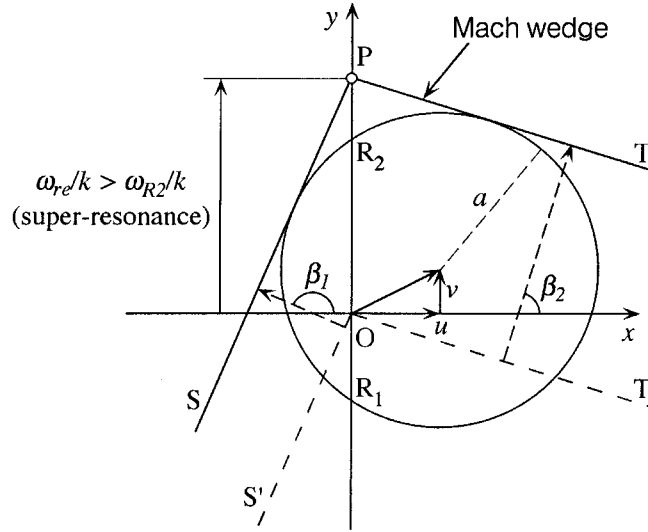


Fig. 2.4.2 Super-resonance ($\omega_{re} > \omega_{R2}$)

sub-resonance の場合はマッハくさびが形成されない。これはアクチュエータディスク上に分布する全てのじょう乱発生源による影響が互いに干渉し合うためである。このとき $\lambda_{1,2}$ の実部は一方が正でもう一方が負になる。式 (2.3.8) で表される変動が無限上・下流 ($x = \pm\infty$) で有限になるように、 λ_1 には実部が正、 λ_2 には実部が負となるものを $\lambda_{1,2}$ から選ぶ。

ここまでは減衰率 $\omega_{im} = 0$ の場合を述べてきた。 $\omega_{im} \neq 0$ の場合においても ω_{re} から sub-resonance, super-resonance の場合分けを行い、 $\omega_{im} = 0$ の場合と同様の判別基準に基づいて $\lambda_{1,2}$ から適切な λ_1, λ_2 を選び出す。この選び方に従うと $\omega_{im} \rightarrow 0$ としたときの極限値が $\omega_{im} = 0$ の場合と一致する。ただし super-resonance で $\omega_{im} \neq 0$ の場合、 $\text{Im}[\lambda_{1,2}/k]$ の2つの値で表される等位相面のなす角はマッハくさびの頂角よりも小さくなる。

以上のように $\lambda_{1,2}$ の選び方を規定すると、翼列上・下流における λ_1, λ_2 の波の x 方向に対する振幅の増減関係は Table 2.4.1 のようになる。Table 2.4.1 は、sub-resonance の場合は y 軸上に分布する全てのじょう乱発生源からの影響が互いに干渉し合うために無限上・下流における振幅が減少し、super-resonance の場合は無限上・下流においてもじょう乱の干渉が無く無限上・下流では過去に翼列から発生したじょう乱の振幅がそのままの状態で行きわたることを表している。

Table 2.4.1 Selection of $\lambda_{1,2}$

	amplifying ($\omega_{im} < 0$)	neutrally stable ($\omega_{im} = 0$)	attenuating ($\omega_{im} > 0$)
super-resonance ($\omega_{re} < \omega_{R1}$, $\omega_{R2} < \omega_{re}$)			
sub-resonance ($\omega_{R1} < \omega_{re} < \omega_{R2}$)			

Note : Vertical arrows mean time-amplifying or attenuating state.

Horizontal arrows mean the propropagating direction of the isophase surface.

(説明) super-resonanceの場合⁽⁴⁾

Fig. 2.4.2 において，原点 O から発生するじょう乱は主流に流されながら音速 a で円形波面を形成する一方，そのじょう乱を発した点は y 軸方向に位相速度 ω_{re}/k で伝ばし点 P に達する．その結果，包絡線 PS, PT で表されるマッハくさびが形成される．2つの包絡線 PS, PT の伝ば方向を β_1, β_2 (以後まとめて β で表す) とすれば，包絡線に垂直な方向の位相速度は $a + u \cos\beta + v \sin\beta$ で表され，その変動の形は

$$\exp \left[i \omega \left(t - \frac{x \cos\beta + y \sin\beta}{a + u \cos\beta + v \sin\beta} \right) \right] \quad (2.4.2)$$

で表される．本研究で仮定した変動の形

$$\exp [i (\omega t - k y) + \lambda x] \quad (2.3.5)$$

が包絡線 PS, PT を表すためには式 (2.4.2) と (2.3.5) における x, y の係数が等しくならなければならない．

$$k = \frac{\omega \sin\beta}{a + u \cos\beta + v \sin\beta} \quad (2.4.3)$$

$$\lambda = - \frac{i \omega \cos\beta}{a + u \cos\beta + v \sin\beta} \quad (2.4.4)$$

式 (2.4.3) から $\sin\beta, \cos\beta$ を求め、それを式 (2.4.4) に代入すると

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{i}{a^2 - u^2} \left\{ u(\omega - kv) + \operatorname{sgn}(\omega - kv) \cdot a \sqrt{(\omega - kv)^2 - (a^2 - u^2)k^2} \right\} \\ \lambda_2 &= \frac{i}{a^2 - u^2} \left\{ u(\omega - kv) - \operatorname{sgn}(\omega - kv) \cdot a \sqrt{(\omega - kv)^2 - (a^2 - u^2)k^2} \right\}\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

となる． $\omega_{im} = 0$ で super-resonance の場合 ($\omega_{re} < k(v - \sqrt{a^2 - u^2})$, $k(v + \sqrt{a^2 - u^2}) < \omega_{re}$) を考えているため、式 (2.4.5) の根号内は正である．このとき式 (2.4.5) は式 (2.3.7) に一致するので、じょう乱の等位相面の傾き $\lambda_{1,2}/k$ はマッハくさびの包絡線 PS, PT の傾きに一致する．

2・5 境界条件

2・3 節で仮定した翼列上・下流における微小じょう乱変動はアクチュエータディスク上 ($x = 0$) で境界条件により結び付けられる．本節ではその境界条件を示す．

本研究で仮定する流れには、上流には上流に伝ばする圧力波 λ_{IU} 、下流には下流に伝ばする圧力波 λ_{2D} と渦度・エントロピ変動の波 λ_{3D} の線形和が存在する．密度変動を例として具体的に示すと $\hat{\rho}_U = \hat{\rho}_{1U}$, $\hat{\rho}_D = \hat{\rho}_{2D} + \hat{\rho}_{3D}$ となる．各 λ に対応する変動成分 $\hat{p}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$ は式 (2.3.8), (2.3.10) に示される関係があるため、各波でどれか1つを基準にして他の値を表すことができる．本研究では上流に対しては $\hat{p}_{1U}$ 、下流は λ_{2D} に対しては $\hat{p}_{2D}$ 、 λ_{3D} のうち渦度変動の波に対しては $\hat{p}_{3D}$ 、エントロピ変動に対しては $\hat{p}_{3D}$ を基準にして表す．上・下流における変動の具体形を示すと次のようになる．

上流において

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_u &= v'_{1u} \exp[i(\omega t - k y) + \lambda_{1u} x] = \hat{v}_{1u} \\ \hat{p}_u &= \rho_u \left(\frac{\omega}{k} - v_u - i \frac{\lambda_{1u}}{k} u_u \right) \hat{v}_{1u} \\ \hat{u}_u &= i \frac{\lambda_{1u}}{k} \hat{v}_{1u} \\ \hat{\rho}_u &= \frac{\rho_u}{a_u^2} \left(\frac{\omega}{k} - v_u - i \frac{\lambda_{1u}}{k} u_u \right) \hat{v}_{1u} \end{aligned} \right\} \quad (2.5.1)$$

下流において

$$\left. \begin{aligned} \hat{v}_D &= (v'_{2D} e^{\lambda_{2D} x} + v'_{3D} e^{\lambda_{3D} x}) \exp[i(\omega t - k y)] = \hat{v}_{2D} + \hat{v}_{3D} \\ \hat{p}_D &= \rho_D \left(\frac{\omega}{k} - v_D - i \frac{\lambda_{2D}}{k} u_D \right) \hat{v}_{2D} \\ \hat{u}_D &= i \frac{\lambda_{2D}}{k} \hat{v}_{2D} + i \frac{k}{\lambda_{3D}} \hat{v}_{3D} \\ \hat{\rho}_D &= \frac{\rho_D}{a_D^2} \left(\frac{\omega}{k} - v_D - i \frac{\lambda_{2D}}{k} u_D \right) \hat{v}_{2D} + \hat{\rho}_{3D} \\ &= \frac{\rho_D}{a_D^2} \left(\frac{\omega}{k} - v_D - i \frac{\lambda_{2D}}{k} u_D \right) \hat{v}_{2D} + \rho'_{3D} \exp[i(\omega t - k y) + \lambda_{3D} x] \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

式 (2.5.1), (2.5.2) を微小じょう乱の基本形と呼ぶ。未知となる変動は $\hat{v}_{1u}$, $\hat{v}_{2D}$, $\hat{v}_{3D}$, $\hat{\rho}_{3D}$ の4つであるから、次に挙げる4つの境界条件式で方程式系は閉じる。

上・下流を結びつける境界条件は、流れが準静的であると仮定することによって導かれる。すなわち、定常成分と微小じょう乱変動成分の和 ($\rho + \hat{\rho}$ 等) が定常成分と同様の条件

(式 (2.2.1) ~ (2.2.4) あるいは式 (2.2.1) ~ (2.2.3), (2.2.5), (2.2.6)) を $x = 0$ で満たすものとする。そして2次以上の微小項を無視し、定常成分を差し引くことにより、微小じょう乱変動に関する境界条件が得られる。それらを以下に示す。

連続の式 (式 (2.2.1) に対応)

$$(\hat{\rho}_u u_u + \rho_u \hat{u}_u) - (\hat{\rho}_D u_D + \rho_D \hat{u}_D) = 0 \quad (2.5.3)$$

全エンタルピ保存式 (式 (2.2.2) に対応)

$$\left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_u}{\rho_u} \left(\frac{\hat{p}_u}{p_u} - \frac{\hat{\rho}_u}{\rho_u} \right) + u_u \hat{u}_u + v_u \hat{v}_u \right\} - \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_D}{\rho_D} \left(\frac{\hat{p}_D}{p_D} - \frac{\hat{\rho}_D}{\rho_D} \right) + u_D \hat{u}_D + v_D \hat{v}_D \right\} = 0 \quad (2.5.4)$$

Kuttaの条件（式 (2.2.3) に対応）

$$\hat{u}_D \sin \chi - \hat{v}_D \cos \chi = 0 \quad (2.5.5)$$

式 (2.5.3) ~ (2.5.5) はモデル I, II 両方で用いる.

さらにモデル I では式 (2.5.3) ~ (2.5.5) に加えて翼弦方向の運動量保存式（式 (2.2.4) に対応）

$$\begin{aligned} & \left\{ \hat{p}_u + (\hat{\rho}_u u_u + \rho_u \hat{u}_u) (u_u + v_u \tan \chi) + \rho_u u_u (\hat{u}_u + \hat{v}_u \tan \chi) \right\} \\ & - \left\{ \hat{p}_D + (\hat{\rho}_D u_D + \rho_D \hat{u}_D) (u_D + v_D \tan \chi) + \rho_D u_D (\hat{u}_D + \hat{v}_D \tan \chi) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

を用いる.

モデル II では式 (2.5.3) ~ (2.5.5) に加えて流れが等エントロピ的に翼面方向に転向して流入した後に、翼間に垂直衝撃波が発生する条件（式 (2.2.5), (2.2.6) に対応）

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{u_u^2 + v_u^2}{\rho_u} \hat{p}_u + u_u \hat{u}_u + v_u \hat{v}_u + \frac{1 - \frac{1}{2} M_u^2}{\rho_u} \hat{p}_u \\ & - \frac{(\kappa-1) M_D^2 + 2}{2 \kappa M_D^2 - (\kappa-1)} \left\{ (2 M_D^2 - 1) \left(\frac{1}{2} \frac{a_D^2}{\rho_D} \hat{p}_D + \frac{u_D \hat{u}_D + v_D \hat{v}_D}{M_D^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_D} \hat{p}_D \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

を用いる.

モデル I, モデル II それぞれの境界条件 4 式について式 (2.5.1), (2.5.2) の基本形を代入して整理すると、係数行列 $[M]$ と変動振幅ベクトル $[v'_{1U}, v'_{2D}, v'_{3D}, \rho'_{3D}]^T$ の積で表される.

$$[M] \begin{bmatrix} v'_{1U} \\ v'_{2D} \\ v'_{3D} \\ \rho'_{3D} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (2.5.8)$$

式 (2.5.8) が非自明解を持つと仮定すると、係数行列 $[M]$ の行列式が 0 にならなければならない。

$$\det[M]=0 \quad (2.5.9)$$

式 (2.5.9) は複素未知数 ω/k に関する方程式になり、その解 ω/k が微小じょう乱変動に関する固有振動数と減衰率に対応する。具体的には ω_{re}/k は翼列からみた座標系における変動の伝ば速度であり、 ω_{im} は変動の時間的減衰率を表す。y 方向波数 k を正の実数とおいているので、 $\omega_{im}/k < 0$ であれば流れ場は不安定、 $\omega_{im}/k > 0$ であれば安定、 $\omega_{im}/k = 0$ であれば中立安定と判定される。

式 (2.5.9) には ω/k を含む複素平方根をもつ $\lambda_{IU}/k, \lambda_{2D}/k$ が含まれているが、実際の解析においては方程式 (2.5.9) において移項や両辺を 2 乗するなどの操作で平方根を無くし、その結果得られた 12 次方程式を DKA 法⁽⁵⁾によって数値的に解いている。DKA 法は n 次方程式 $f(x) = 0$ の n 個の解に対する近似値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ から出発し、並列的に計算を進めて n 個の解全てを数値的に求める方法である。求められた 12 個の解 ω/k の中には平方根を無くす操作の際に混入した解で式(2.5.9)を満たさないものも含まれるが、それらは排除される。この方法を用いると、式 (2.5.9) を満たす解 ω/k 全てを確実に求めることができる。

2・6 結果と考察

本節では前節までで述べた定常，非定常成分による計算結果を示し，その考察を行う．計算結果は食い違い角 $\chi = 60$ [deg] を有する平板翼列に対するものである．この食い違い角は超音速翼列に典型的な値であり，また超音速翼列に用いられる翼厚は小さいため，平板に近似することは妥当な簡単化につながる．迎え角の計算範囲は正の迎え角がある場合 ($u_U/v_U \leq \cot\chi$) について検討を加える．

2・6・1 定常成分の結果と考察

モデル I による定常性能曲線を Fig. 2.6.1 に示す．予旋回のないロータをモデルとしているので周速は v_U に等しく，横軸は軸流方向流速 u_U を周速 v_U で無次元化したもの，縦軸は下流静圧 p_D を上流絶対系全圧 p_{tUabs} により無次元化したものである．また破線は各性能曲線の右上がり領域と右下がり領域の境界を表す．Fig. 2.6.1 から，周速 v_U の増加とともに右上がり領域が拡大し，かつその勾配も増加してゆくことが分かる．

2・2 節で述べたようにモデル I には衝撃波による損失以外に衝突損失が含まれているので，周速 v_U (流入マッハ数) が小さく衝撃波が発生しない領域においても衝突損失によって性能曲線に右上がり勾配ができる (Fig. 2.6.1 では衝突損失により任意の周速 v_U において $u_U/v_U \rightarrow 0$ で $p_D/p_{tUabs} \rightarrow 1$ になる)．衝撃波による損失のみを含むモデルでの定常性能を考えるため，モデル II の場合の定常性能曲線を検討する．

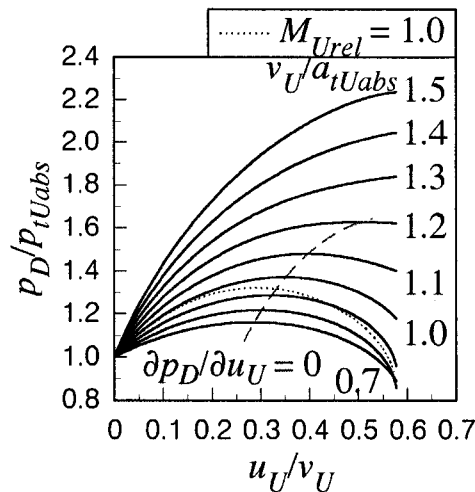


Fig. 2.6.1 Performance map for Model I (flat plate cascade, $\chi = 60^\circ$)

モデル II による定常性能曲線を Fig. 2.6.2 に示す．図の構成は Fig. 2.6.1 と同様である．モデル II で発生する全圧損失は衝撃波による損失のみであるから，Fig. 2.6.2 の右上がり勾配は衝撃波による損失によって発生していることになる．ただし，流れが翼列に対して亜音速で流入する領域 ($v_U/a_{tUabs} < 1$) においても Fig. 2.6.2 は右上がり勾配を示す．これは式 (2.2.5) から得られる 2 つのマッハ数 M_S のうち，翼間衝撃波直前のマッハ数 M_S を表す方 ($M_S > 1$) を常を選んであるからである．このことは v_U/a_{tUabs} が小さく上流が亜音速になっている場合でも，流れが翼列入口部で超音速に加速され衝撃波が発生することを意味している．実際には v_U/a_{tUabs} が十分小さければ $M_S < 1$ となり，衝撃波は発生せず性能曲線は右下がり勾配になる． v_U/a_{tUabs} が小さい場合に対して $M_S > 1, M_S < 1$ いずれのマッハ数を用いるべきかは有限ピッチの解析により入口部の流れをより詳細に求める必要がある．

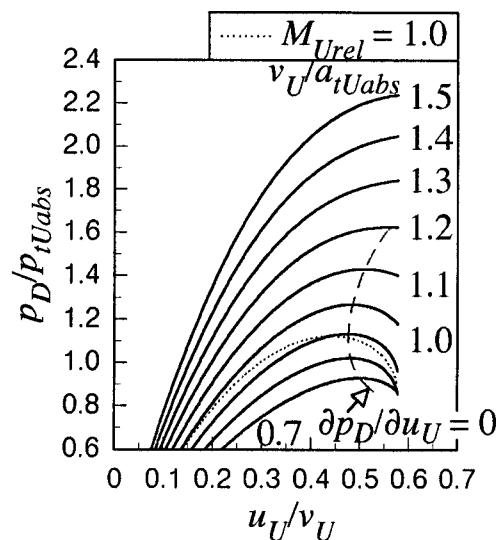


Fig. 2.6.2 Performance map for Model II (flat plate cascade, $\chi = 60^\circ$)

モデル I，モデル II 双方の定常性能曲線による考察から，流体の圧縮性や衝撃波は性能曲線に右上がり勾配を発生，拡大させることが判明した．右上がり勾配が安全運転を不可能にする要因であるならば，回転数の高速化に伴う圧縮機の正常作動流量域減少は流体の圧縮性や衝撃波が一因となっている可能性がある．

2・6・2 安定解析の結果と考察

微小じょう乱に対する安定解析の結果を変動の複素振幅比 ($v'_{1U}, v'_{2D}, v'_{3D}, \rho'_{3D}$ 間の比) の連続性や解の連続性を利用して分類した．その結果，モデル I では 8 種類 (ある 1 つの

定常条件下で8種類の解が同時に得られたというわけではない), モデル II では7種類の解 ω/k が得られた. それらの多くは全ての流れ条件において安定または中立安定である. 不安定を表す解はモデル I で2種類, モデル II で1種類得られた. 以下ではこれらの不安定解について考察を行う.

Fig. 2.6.3 にモデル I によって得られた解の1つ (モード A と呼ぶ) の定常性能曲線上での存在範囲を示す. 横軸, 縦軸は Fig. 2.6.1, 2.6.2 と同様である. 太実線よりも左側のグレーと斜線で示された領域においてモード A が存在する. 太破線より左側の斜線で示された領域においてモード A は不安定となる ($A(U)$, $A(S)$ はモード A が不安定, 安定であることをそれぞれ示す). モード A は衝撃波が発生していない ($M_{Urel} < 1$) 領域においても不安定になる. Fig. 2.6.3 には示されていないが, $v_U/a_{tUabs} = 0.2, 0.4$ といった流入マッハ数 M_{Urel} が低く, 非圧縮性流体と近似できる領域について同様の解析を行ったところ, これらの領域においてもモード A の存在が確認された. Fig. 2.6.3 から, モード A が不安定となるときには性能曲線は右上がり勾配になっていることが分かる.

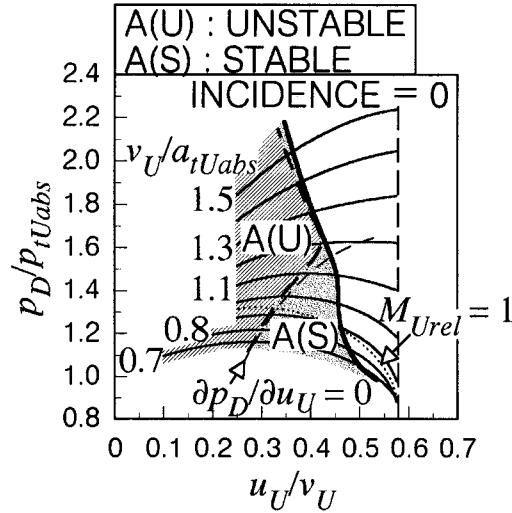


Fig. 2.6.3 Stability map of Mode A for Model I

Fig. 2.6.4 に $v_U/a_{tUabs} = 0.7$, Fig. 2.6.5 に $v_U/a_{tUabs} = 1.3$ でのモード A の伝ば速度比 (propagation velocity ratio, (静止系での変動の伝ば速度)/(周速) = $(v_U - \omega_{re}/k)/v_U = 1 - \omega_{re}/(k v_U)$) と減衰率 (attenuation rate, ω_{im}/k) を示す. Fig. 2.6.4, 2.6.5 いずれの横軸も軸流速を周速で無次元化したものである. Fig. 2.6.4, 2.6.5 ではモード A が不安定となる場合 ($\omega_{im}/k < 0$) は伝ば速度比が1より小さい. Fig. 2.6.3 に表されている全ての領域および非圧縮性流体と近似できる領域 $v_U/a_{tUabs} = 0.2, 0.4$ において調べた結果でもモード A が不安定となる

場合は伝ば速度比が1より小さくなることが確認された。一方、非圧縮性翼列流れに関するアクチュエータディスク解析によれば、はく離等により性能曲線に右上がり勾配が生じると、伝ば速度比が1よりも小さい不安定解が得られ、それは旋回失速に対応することが知られている⁽⁶⁾。これらのことから、モード A は圧縮性翼列流れにおける旋回失速を表すと考えられる。

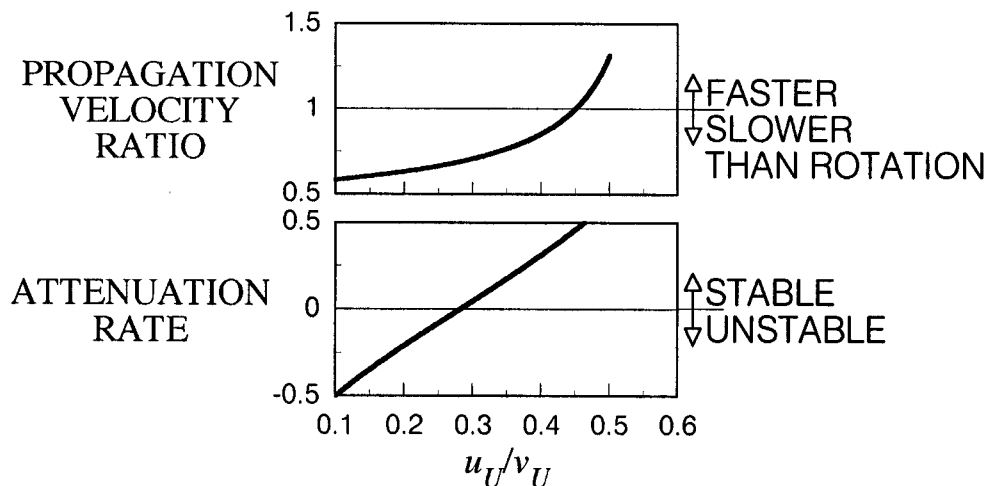


Fig. 2.6.4 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode A ($v_U/a_t U_{abs} = 0.7$)

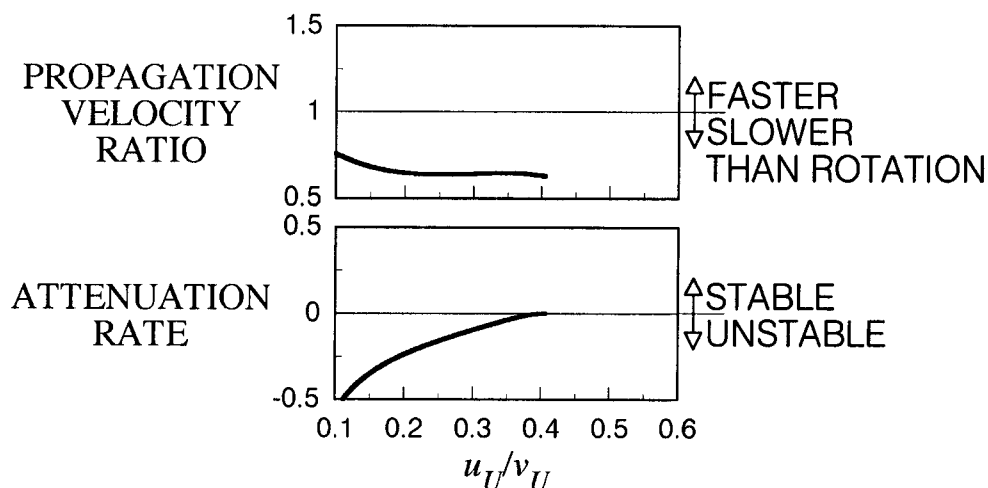


Fig. 2.6.5 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode A ($v_U/a_t U_{abs} = 1.3$)

次にモデル I によって得られたもう 1 つの解（モード B と呼ぶ）の定常性能曲線上での性質を Fig. 2.6.6 に示す。図の構成は Fig. 2.6.3 と同様である。上下の太実線により囲まれたグレーと斜線で示された領域にモード B が存在する。太破線より上側の斜線で示された領域においてモード B は不安定となる。モード A と同様、モード B が不安定となるときには性能曲線は右上がりとなっている。Fig. 2.6.3 と Fig. 2.6.6 を比較するとモード A とモード B は同時に存在する領域がある。したがってモード B はモード A とは別の種類のモード

として分類される。

モード B は圧縮性の影響が強い高回転域 (v_U/a_{tUabs} が大) において不安定となる。また超音速流入で incidence = 0 ($u_U/v_U = \cot 60 [\text{deg}] = 0.577$) の場合には、衝撃波は垂直衝撃波になり、全圧損失は衝撃波による損失のみになる。この条件下でもモード B が存在することから、モード B は衝撃波が関連した不安定現象に対応すると考えられる。

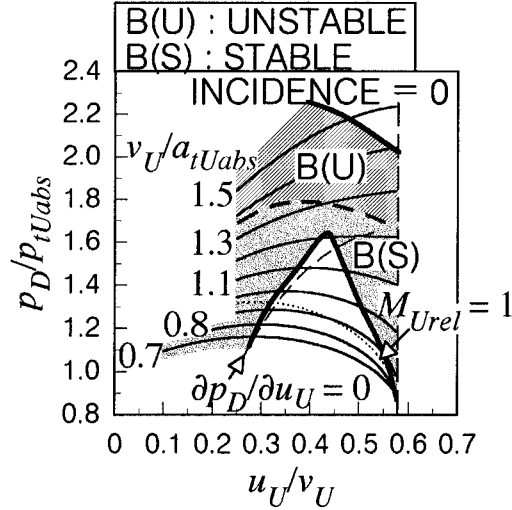


Fig. 2.6.6 Stability map of Mode B for Model I

Fig. 2.6.7 に $v_U/a_{tUabs} = 1.3$, Fig. 2.6.8 に $v_U/a_{tUabs} = 1.4$ でのモード B の伝ば速度比と減衰率を示す。横軸は Fig. 2.6.4 と同様である。モード B は低流量の場合を除いて伝ば速度比が 1 よりも大きい不安定となることが分かる。

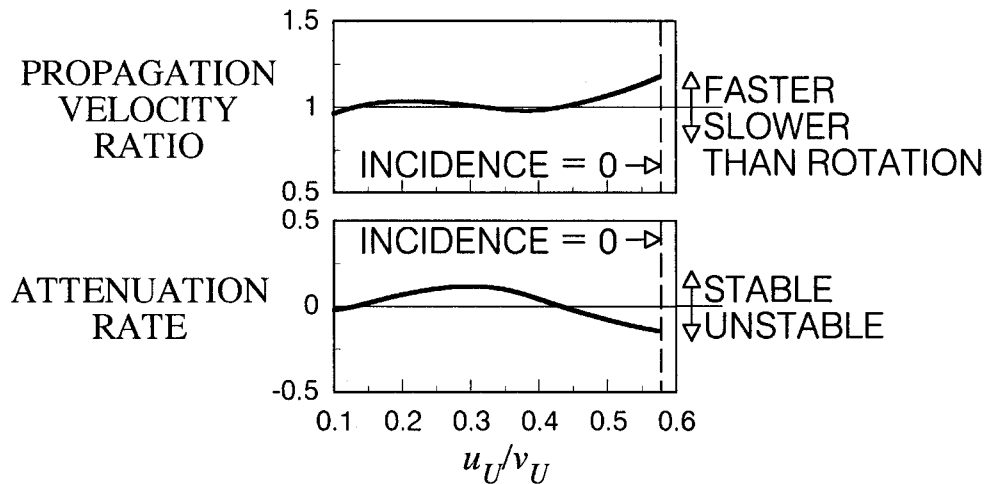


Fig. 2.6.7 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode B ($v_U/a_{tUabs} = 1.3$)

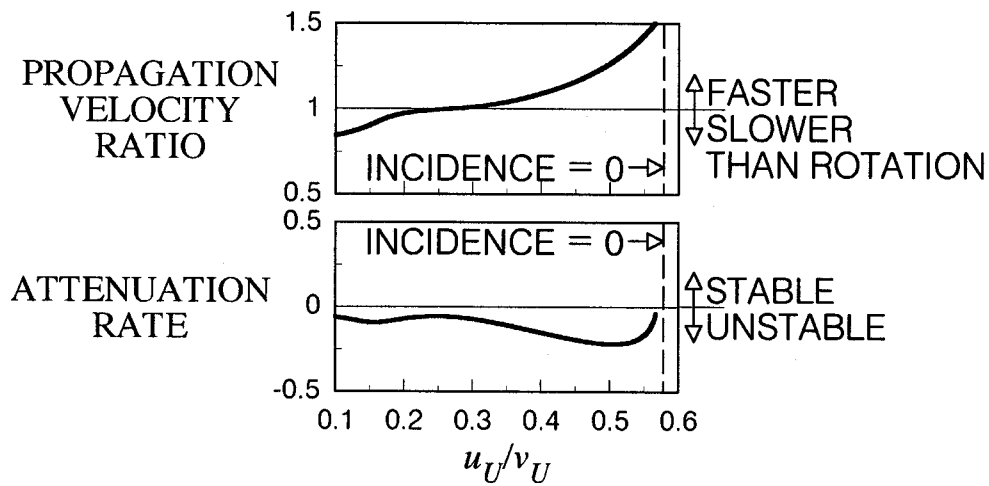


Fig. 2.6.8 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode B ($v_U/a_{tUabs} = 1.4$)

モデル I には衝突損失が含まれているため、モード B が衝撃波による全圧損失のみに関連しているかは判定できない。そこでモデル II に対してモデル I と同様の解析を行った。モデル II では不安定に関する解は 1 つだけであるが（モード C と呼ぶ），その解の定常性能曲線上での存在範囲を Fig. 2.6.9 に示す。太実線により囲まれたグレーと斜線で示された領域においてモード C が存在する。太破線よりも左側の斜線で示された領域においてモード C は不安定となる。モデル II には垂直衝撃波による損失しか含まれないので、モード C は垂直衝撃波が関連した不安定現象に対応すると考えられる。モード C の場合も性能曲線の右上がり勾配が不安定となるための必要条件になっている。

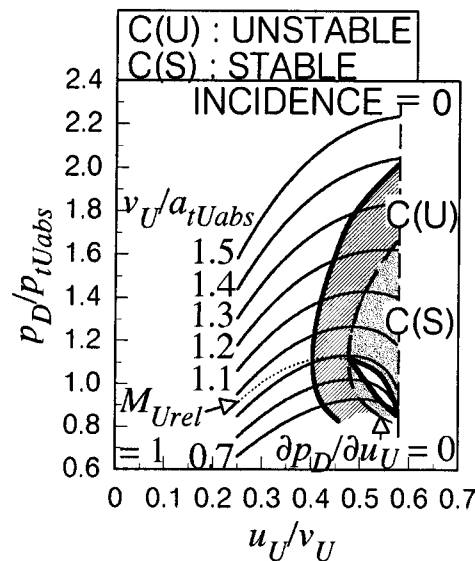


Fig. 2.6.9 Stability map of Mode C for Model II

Fig. 2.6.10 に $v_U/a_{tUabs} = 1.0$, Fig. 2.6.11 に $v_U/a_{tUabs} = 1.3$ でのモード C の伝ば速度比と減衰率を示す．モード C が不安定となる場合には伝ば速度が常に 1 より大きいことが分かる．これは Fig. 2.6.7, 2.6.8 の高流量域におけるモード B の挙動と一致している．

ところで超音速流入で $\text{incidence} = 0$ ($u_U/v_U = \cot 60 [\text{deg}] = 0.577$) の場合には，モデル I とモデル II は一致し，衝撃波は垂直衝撃波になるが，その場合にはモード B とモード C も安定・不安定にかかわらず一致する．実際 Fig. 2.6.7, 2.6.11 は同一周速 ($v_U/a_{tUabs} = 1.3$) での結果であるが，このときの $\text{incidence} = 0$ での値は双方が一致している．

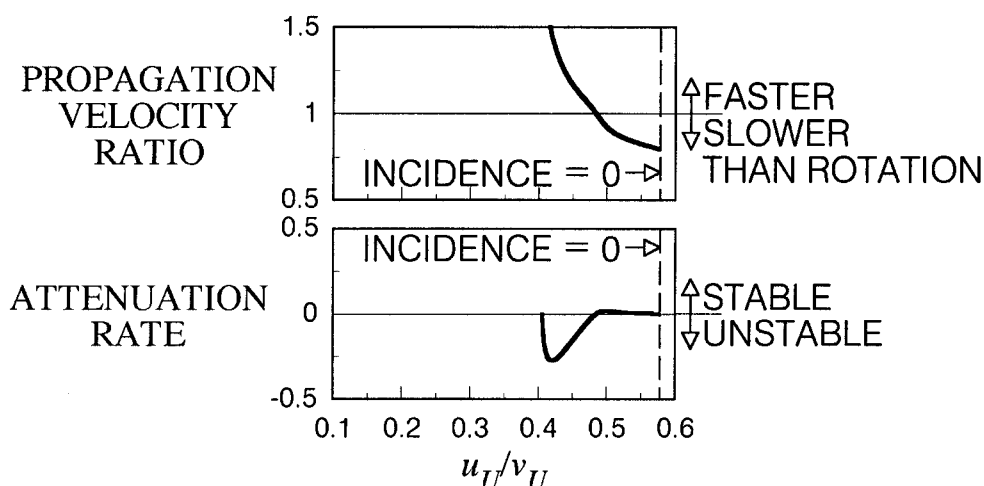


Fig. 2.6.10 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode C ($v_U/a_{tUabs} = 1.0$)

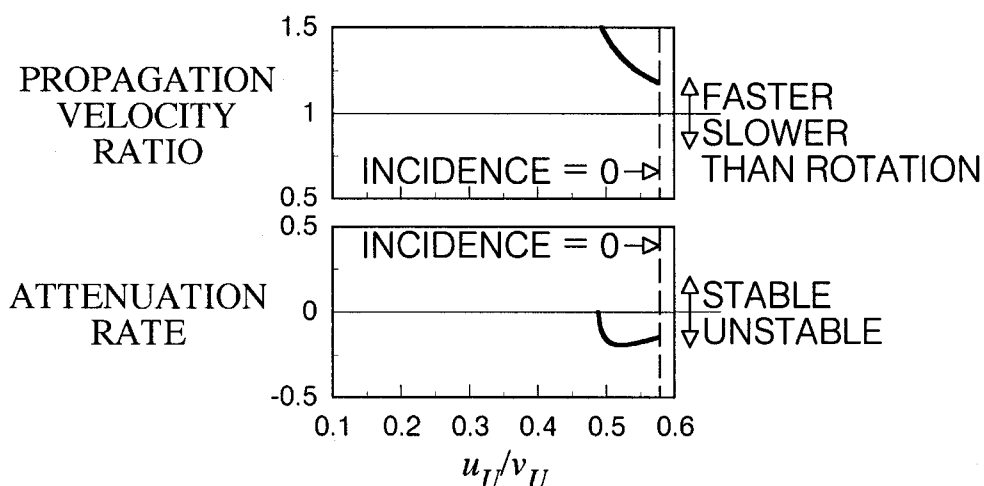


Fig. 2.6.11 Propagation velocity ratio and attenuation rate of Mode C ($v_U/a_{tUabs} = 1.3$)

以上のことから，モード B とモード C は同種の性質を持った不安定現象の異なるモデルによる表現であって，同一の不安定現象と見なして良いと考えられる．したがってモード B もやはり衝撃波が関連した不安定現象に対応すると考えられる．

2・7 まとめ

本章ではアクチュエータディスク法による微小じょう乱の安定解析を行い、衝撃波が関連した不安定現象の可能性について検討した。明らかにされたことは次のようにまとめられる。

- (1) 流体の圧縮性や衝撃波によって、性能曲線の右上がり領域が発生または拡大する。
- (2) 「翼弦方向の運動量保存の条件」を用いたモデル I による安定解析の結果、圧縮性翼列流れでも旋回失速が非圧縮領域から延長されて存在する可能性が示された。これは性能曲線において、不安定となる領域では右上がり、安定となる領域では主として右下がりとなる。不安定となる場合の伝ば速度比は 1 よりも小さい。
- (3) 「翼弦方向の運動量保存の条件」を用いたモデル I, 「流れが等エントロピ的に翼面方向に転向して流入した後に、翼間に垂直衝撃波が発生する条件」を用いたモデル II いずれのモデルにおいても、衝撃波が関連すると考えられる不安定現象が存在する可能性が示された。これらは性能曲線の右上がり領域において発生し、モデル I においては低流量部を除いて、モデル II においては発生する全ての領域において伝ば速度比が 1 よりも大きい。

参考文献

1. Freeman, C. and Cumpsty, N. A., 1989, "A Method for the Prediction of Supersonic Compressor Blade Performance", *ASME Paper* 89-GT-326.
2. 妹尾泰利, 1989, "流れの運動量・エネルギーと圧力損失③", *ターボ機械*, 17巻1号, pp. 51-56.
3. 梶昭次郎, 岡崎卓郎, 1969, "翼列を通過する音波の解析 (第2報, 有限ピッチ翼列に対する解析)", *日本機械学会論文集 (第2部)*, 35巻273号, pp. 1008-1020.
4. 梶昭次郎, 岡崎卓郎, 1972, "圧縮性流れにおける軸流機翼のフラッタ", *日本機械学会論文集 (第2部)*, 38巻309号, pp. 1023-1033.
5. 例えば 戸川隼人, 1991, 数値計算, 岩波書店, pp. 68-73.
6. 辻本良信, 上條謙二郎, 吉田義樹, 1992, "インデューサの旋回キャビテーションの解析", *日本機械学会論文集 (B編)*, 58巻551号, pp. 2052-2059.

第3章 数値計算法

第3～6章の記号表

本記号表は第3～6章に適用される。断りのない限り諸量は翼列から見た相対座標系でのものである。

- a : 特性速度
- A : x 方向流束ヤコビアン行列
- $\hat{A}$: ξ 方向流束ヤコビアン行列
- B : y 方向流束ヤコビアン行列
- $\hat{B}$: η 方向流束ヤコビアン行列
- c : 音速
- c_p : 定圧比熱
- c_v : 定積比熱
- e : 単位体積あたりの全エネルギー ($= p/(\gamma - 1) + \rho(u^2 + v^2)/2$)
- E : x 方向流束変数ベクトル
- $\hat{E}$: ξ 方向流束変数ベクトル
- $\bar{E}$: ξ 方向数値流束変数ベクトル
- F : y 方向流束変数ベクトル
- $\hat{F}$: η 方向流束変数ベクトル
- $\bar{F}$: η 方向数値流束変数ベクトル
- g : 流束制限関数 (limiter function)
- H : 単位質量あたりの全エンタルピー ($= \{\gamma/(\gamma - 1)\}(p/\rho) + (u^2 + v^2)/2$)
- I : 単位行列
- J : 一般曲線座標変換のヤコビアン
- M : マッハ数
- p : 静圧
- p_0 : 全圧 ($= p[1 + \{(\gamma - 1)/2\}M^2]^{\gamma/(\gamma - 1)}$)

Pr : Prandtl 数 ($= \mu c_p / \kappa$)

q : 熱流束 (添字がベクトルの方向)

Q : 物理面での保存変数ベクトル

$\hat{Q}$: 計算面での保存変数ベクトル

R : 気体定数 (本研究 (空気) の場合, $R = 287.1$ [J/(kg K)]) または
流束ヤコビアン行列の右固有行列 (添字が対応する方向)

R^{-1} : 流束ヤコビアン行列の左固有行列 (添字が対応する方向)

Re : Reynolds 数 ($= UL/\nu$, U は代表速度, L は代表長さ)

t : 時間

T : 静温

T_0 : 全温 ($= T[1 + \{(\gamma - 1)/2\}M^2]$)

u : x 方向速度成分

U : ξ 方向反変速度成分

v : y 方向速度成分

V : η 方向反変速度成分

x : 物理面のデカルト座標 (軸流方向)

y : 物理面のデカルト座標 (翼列軸方向)

β : 粘性と熱伝導によるエネルギーの対流成分

γ : 比熱比 (本研究 (空気) の場合, $\gamma = 1.4$) または
修正特性速度の修正分

δ : エントロピ補正が行われる範囲

δ' : エントロピ補正が行われる範囲を決定するパラメータ
(本研究 (圧縮性流体) の場合, $\delta' = 1/8$)

Δt : 時間ステップ

η : 計算面の一般曲線座標

κ : 熱伝導率

λ : 流束ヤコビアン行列の固有値

(下付添字が対応する方向, 上付添字が固有値の番号)

μ : 粘性係数

ν : 動粘性係数 ($= \mu/\rho$)

ξ : 計算面の一般曲線座標

ρ : 密度

σ : 2 次精度 TVD スキームに用いられる関数 ($\sigma(z) = \Psi(z)/2$)

τ : 粘性応力 (添字 1 番目が応力のかかる面, 2 番目が応力のかかる方向)

Ψ : エントロピ補正関数

添字

0 : 淀み点状態

1 : 翼列上流

2 : 翼列下流

abs : 絶対座標系

eff : 層流・乱流双方の効果を含めた量 (有効・・・)

i : ξ 方向の格子点座標 (下付)

j : η 方向の格子点座標 (下付)

n : 時間ステップ (上付)

lam : 層流に関する量 (分子・・・)

tur : 乱流に関する量 (渦・・・)

x : x による偏微分

y : y による偏微分

η : η による偏微分

ν : 粘性に関する量

ξ : ξ による偏微分

第3章 数値計算法

超音速翼列流れには亜音速翼列流れで見られる旋回失速の他、超音速流れに特有な衝撃波が関連した不安定現象が存在する可能性が第2章で示された。しかし第2章で用いた解析では翼列のピッチが無限小であると近似して翼列の特性をモデル化している。このため翼列を通過する流れの詳細については不明であり、これらが不安定現象に与える影響についても明らかでない。より実際の翼列に近づけるためには、有限ピッチ、粘性流れの解析を行う必要がある。そこで本章以降からは有限差分法による数値計算を行い、第2章で示された不安定現象が有限ピッチ、粘性流れにおいても存在するのかを検証するとともに、有限振幅を持つじょう乱による流れ場の挙動を明らかにする。

数値計算により流れ場の非定常性を見る際に最も注意すべきことは、数値的不安定を防止し、物理的な不安定現象のみを捕らえるようにしなければならないことである。そのため本研究では TVD スキームを用いる。TVD スキームは数値的安定性が最も高い1次精度風上差分の性質を高次精度に拡張したスキームであり、流束制限関数を導入することにより数値的不安定を抑制している。流束制限関数に求められるものは TVD 条件という明確な条件であり、数値粘性項を陽的に組み込む方法と違って経験則に依存しない。TVD スキームを大別すると、基本変数を高次内挿によって算出した後に数値流束を評価する MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 型と、基本変数の内挿は行わずに数値流束を評価し、差分実行後に高次精度になる non-MUSCL 型がある。高次内挿は数値的不安定が発生する可能性があるため(厳密解よりも大き過ぎる曲率を持つことがある)、本研究では non-MUSCL 型に属する Harten-Yee の風上型 TVD スキーム⁽¹⁾を用いる。

まず本章では本研究で使用される数値計算法について述べる。差分法はあらゆるスキームが組み合わせられているため、本研究がどのようなスキームを使用しているかを示す必要がある。具体的な内容に入る前に本研究が用いた主なスキームを列挙しておく。

- ・ 対流項 : Harten-Yee の風上型 TVD スキーム⁽¹⁾ (空間2次精度), 流束制限関数には Van Leer limiter を使用
- ・ 粘性項 : 2次精度中心差分
- ・ 乱流モデル : 改良型 LES 基礎 SGS モデル^{(2),(3)}
- ・ 時間微分項 : 3点後退差分 (時間2次精度), Newton 法により緩和
- ・ 行列反転 : LU-SGS 陰解法⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾

これらは最も単純で、経験則に対する依存度が小さく、最低限の時間または空間精度が維持されることから採用されている。

3・1 支配方程式

圧縮性流体は密度が変化し、運動学的エネルギーと熱学的エネルギーの交換が無視できない。流体は (i) 連続の式, (ii) Navier-Stokes 方程式, (iii) エネルギーの保存を満足するが、2次元圧縮性流の場合、これら (i) ~ (iii) の方程式を保存形で表すと次のように表わされる。

(i) 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.1.1)$$

(ii) Navier-Stokes 方程式

x 方向:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{yx})}{\partial y} = 0 \quad (3.1.2)$$

y 方向:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = 0 \quad (3.1.3)$$

(iii) エネルギーの保存

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (e+p)u - (\tau_{xx}u + \tau_{xy}v) + q_x \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (e+p)v - (\tau_{yx}u + \tau_{yy}v) + q_y \} = 0 \quad (3.1.4)$$

式 (3.1.2), (3.1.3) 中, 粘性応力 τ の添字は 1 番目が応力のかかる面, 2 番目が応力のかかる方向を表している. Newton 流体を仮定するので粘性応力は次のように表される.

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu_{eff} (2u_x - v_y), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{eff} (u_y + v_x), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu_{eff} (2v_y - u_x) \quad (3.1.5)$$

ただし速度 u, v に対する添字 x, y はそれぞれの方向による偏微分を表す. また $\mu_{eff} = \mu_{lam} + \mu_{tur}$ は有効粘性係数と呼ばれ, 層流・乱流粘性係数の和である. 層流 (分子) 粘性係数 μ_{lam} に対しては Sutherland の式

$$\frac{\mu_{lam}}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (3.1.6)$$

を用いる. 式 (3.1.6) の添字 0 は基準となる状態を表す. 本研究の場合は空気であるから $\mu_0 = 17.16 \times 10^{-6}$ [Pa·s], $S = 110.5$ [K] とする. 乱流 (渦) 粘性係数 μ_{tur} に関しては 3・2 節で詳しく述べる.

x, y 方向熱流束 q_x, q_y は Fourier の法則によって次のように表される.

$$q_x = -\kappa_{eff} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa_{eff} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.1.7)$$

有効熱伝導率 $\kappa_{eff} = \kappa_{lam} + \kappa_{tur}$ も層流・乱流熱伝導率双方の和であるが, 層流 (分子) 熱伝導率 κ_{lam} に対しては層流 Prandtl 数 Pr_{lam} を一定として次のように求められる.

$$\kappa_{lam} = c_p \mu_{lam} / Pr_{lam} \quad (3.1.8)$$

空気の場合, $Pr_{lam} = 0.72$ である. 乱流 (渦) 熱伝導率 κ_{tur} に関しては 3・2 節で述べる.

式 (3.1.4) 中 e は単位体積あたりの内部エネルギーと運動エネルギーの和を表す.

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3.1.9)$$

ここで γ は比熱比であり、空気では $\gamma = 1.4$ である。

本研究では理想気体を仮定するので、静圧 p と密度 ρ 、静温 T の間には状態方程式

$$p = \rho RT \quad (3.1.10)$$

が成り立つ。 R は気体定数であり、空気では $R = 287.1 \text{ [J/(kg K)]}$ である。

式(3.1.1) ~ (3.1.10), 3・2節で示す乱流粘性係数および乱流熱伝導率を求める式から、これらの方程式の求めるべき独立変数は4つであることが分かる。独立変数には保存量である $\rho, \rho u, \rho v, e$ をとる。

式 (3.1.1) ~ (3.1.4) をマトリクス形式で書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (E - E_v)}{\partial x} + \frac{\partial (F - F_v)}{\partial y} = 0 \\ & Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix}, E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \beta_x \end{bmatrix}, F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \beta_y \end{bmatrix} \\ & \tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu_{eff} (2u_x - v_y), \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{eff} (u_y + v_x), \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu_{eff} (2v_y - u_x) \\ & \beta_x = \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \kappa_{eff} T_x, \beta_y = \tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \kappa_{eff} T_y \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Q は保存変数ベクトルと呼ばれ、対流項 E, F 、粘性項 E_v, F_v は流束変数ベクトルと呼ばれる。式 (3.1.11) を一般曲線座標系に変換し、それを有限差分法によって離散化する。

3・2 乱流粘性と LES 基礎 SGS モデル

3・2・1 乱流粘性係数

Reynolds 数 $Re (= UL/\nu)$ 、 U は代表速度、 L は代表長さ) が大きく、流れの広い領域にわたって大小スケールの渦運動成分が混在している流れを乱流と言う。ターボ機械内部流れにおいては全ての場合乱流になっていると言ってもよい。そこでより現実に近い流れを扱うには乱流の影響を考慮する必要がある。

乱流の特徴の一つに、エネルギー散逸に寄与する小スケールの乱れの早い変動が挙げられる。そのため差分法で乱流を直接解く場合は空間解像度を飛躍的に向上させる必要があり、多くの格子点が必要とされる。それを満足する最小格子数は2次元流れでは $O(Re^{3/2})$ であり、通常 $Re = O(10^6)$ 以上のオーダを持つ超音速翼列流れでは $O(10^9)$ 以上となる。現在の計算機ではこのような格子数に対応できるほどの能力はない。そこで乱流の影響はモデル化し（乱流モデル）、少ない格子数でも乱流の影響が考慮できるようにする。本節ではまず支配方程式への乱流の影響を示す。

乱流の影響は次のように考慮される。まず各変数の瞬時値を平均成分と変動成分に分解（Reynolds 分解）して方程式全体の平均をとる。この平均処理により、変動成分の1次の項は消えて多くの項は平均成分だけで構成される。これが層流成分である。残存している2次以上の項が乱流成分であり、層流粘性応力に類するもの（乱流粘性）としてモデル化される。以下にその具体的な手順を述べる。

まず流れの諸量を平均部分と変動部分に分解する。密度 ρ 、静圧 p 、粘性応力 τ 、熱流束 q は Reynolds 平均値 ($\bar{f}$) とその変動成分 ($f' = f - \bar{f}$) に分解する。

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} + \rho', \quad \bar{p} = \bar{p} + p', \quad \bar{\tau} = \bar{\tau} + \tau', \quad \bar{q} = \bar{q} + q' \quad (3.2.1)$$

速度 u, v 、静温 T 、比内部エネルギー ε は密度加重平均値（Favre 平均値： $\bar{f}$ ）とその変動成分 ($f'' = f - \bar{f}$) に分解する。

$$u = \bar{u} + u'', \quad v = \bar{v} + v'', \quad T = \bar{T} + T'', \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'' \quad (3.2.2)$$

Reynolds 平均の定義には時間平均または空間平均が用いられる。

時間平均：

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \quad (3.2.3)$$

ここで Δt は平均流の時間スケールよりは小さいが、乱流の変動成分の時間スケールよりは大きい時間間隔である。

空間平均：

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} f dx dy \quad (3.2.4)$$

ここで $\Delta x, \Delta y$ は平均流の空間スケールよりは小さいが、乱流の変動成分の空間スケールよりは大きい空間間隔である。

密度加重平均は、密度の乱れが乱流にはあまり重要でないものとして用いられており、その定義は

$$\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho} \quad (3.2.5)$$

である。密度加重平均は亜音速、遷音速、超音速の前半においては圧縮性の影響をよく捕らえることができる。またその変動成分は

$$\overline{\rho f''} = \overline{\rho(f - \tilde{f})} = \overline{\rho f} - \bar{\rho} \tilde{f} = 0 \quad (3.2.6)$$

となる特徴を持つ。この特徴のために平均処理後の結果が非圧縮性流体の場合に近くなり、非圧縮性流体用の乱流モデルを拡張して用いることができる。

式 (3.2.1), (3.2.2) で定義された流れの諸量を式 (3.1.1) ~ (3.1.4) に代入し、代入した式全体に対して式 (3.2.3) で定義される Reynolds 平均をとると、変動成分の 1 次の項は平均操作によって消え、次のような平均方程式 (Reynolds 方程式) が得られる。

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial \left\{ \bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{p} - \left(\overline{\tau_{xx}} - \overline{\rho u'' u''} \right) \right\}}{\partial x} + \frac{\partial \left\{ \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} - \left(\overline{\tau_{yx}} - \overline{\rho u'' v''} \right) \right\}}{\partial y} = 0 \quad (3.2.8)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial \left\{ \bar{\rho} \bar{u} \bar{v} - \left(\overline{\tau_{xy}} - \overline{\rho u'' v''} \right) \right\}}{\partial x} + \frac{\partial \left\{ \bar{\rho} \bar{v}^2 + \bar{p} - \left(\overline{\tau_{yy}} - \overline{\rho v'' v''} \right) \right\}}{\partial y} = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\bar{e} + \bar{p}) \bar{u} - \left(\overline{\tau_{xx} - \rho u'' u''} \right) \bar{u} - \left(\overline{\tau_{xy} - \rho u'' v''} \right) \bar{v} + \left(\bar{q}_x + \overline{\rho \varepsilon'' u''} \right) \right\} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\bar{e} + \bar{p}) \bar{v} - \left(\overline{\tau_{yx} - \rho u'' v''} \right) \bar{u} - \left(\overline{\tau_{yy} - \rho v'' v''} \right) \bar{v} + \left(\bar{q}_y + \overline{\rho \varepsilon'' v''} \right) \right\} \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\bar{p} - \overline{\tau_{xx}} + \frac{1}{2} \overline{\rho u'' u''} \right) u'' + \left(-\overline{\tau_{xy}} + \frac{1}{2} \overline{\rho u'' v''} \right) v'' \right\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(-\overline{\tau_{yx}} + \frac{1}{2} \overline{\rho u'' v''} \right) u'' + \left(\bar{p} - \overline{\tau_{yy}} + \frac{1}{2} \overline{\rho v'' v''} \right) v'' \right\} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

式 (3.2.10) 左辺 [] 内の 2 項はオーダーが小さいために通常無視される。

単位体積あたりの全エネルギーの時間平均値 $\bar{e}$ は、厳密には

$$\bar{e} = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \overline{\rho(u^2 + v^2)} = \bar{\rho} \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \left[\frac{1}{2} \overline{\rho(u'^2 + v'^2)} \right] \tag{3.2.11}$$

と表される。式 (3.2.11) 最右辺 [] 内の項は乱流運動エネルギー ρk であるが、他の項に比べてオーダーが小さいため本研究では無視する。

粘性応力 τ 、熱流束 q の時間平均値は

$$\begin{aligned}
\overline{\tau_{xx}} &= \frac{2}{3} \mu_{lam} (\bar{T}) (2\bar{u}_x - \bar{v}_y), \quad \overline{\tau_{xy}} = \overline{\tau_{yx}} = \mu_{lam} (\bar{T}) (\bar{u}_y + \bar{v}_x), \\
\overline{\tau_{yy}} &= \frac{2}{3} \mu_{lam} (\bar{T}) (2\bar{v}_y - \bar{u}_x)
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\overline{q_x} = -\kappa_{lam} (\mu_{lam}, Pr_{lam}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}, \quad \overline{q_y} = -\kappa_{lam} (\mu_{lam}, Pr_{lam}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \tag{3.2.13}$$

のように $\bar{u}$ を $\bar{u}$ 、 $\bar{T}$ を $\bar{T}$ とおいて近似される。 τ と q は層流でのみ大きな役割を果たし、層流では $\bar{u} = \bar{u}$ 、 $\bar{T} = \bar{T}$ となるのでこの近似は差し支えない。

式 (3.2.8) ~ (3.2.10) 中の $-\overline{\rho u'' u''}$ 等で表される項は Reynolds 応力、式 (3.2.10) 中の $\overline{\rho \varepsilon'' u''}$ 等は Reynolds 熱流束と呼ばれ、これらが乱流による成分である。Reynolds 応力、Reynolds 熱流束は元の式 (3.1.1) ~ (3.1.4) に付加された形で表され、乱流の影響は層流の影響と分離して考えることができる。未知数である Reynolds 応力、Reynolds 熱流束は変動成分の 2 次の相関項であり、これらを求めるためには新たに方程式が必要となる。そこで元の式 (3.1.1) ~ (3.1.4) に新たな平均操作を行って Reynolds 応力、Reynolds 熱流束を求め

る式を作ると、その式にはさらに高次の変動成分による相関項が現れる。これらの項も未知数であるから、平均操作だけでは方程式系が閉じることはない。方程式系を閉じするためには流れの物理的特性を調べ、変動成分の相関項をより低次の項によってモデル化する必要がある。これが乱流の完結問題である。

Reynolds 応力、Reynolds 熱流束には様々なモデル化が提案されているが、その最も簡単なモデルは Boussinesq によって提案されている。Boussinesq は層流での粘性応力や分子運動による熱、質量移動についての類推から、Reynolds 応力が層流粘性応力と同様に变形速度に比例するとした。このモデルは総和規約を用いて次のように表される。

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_{tur} \left\{ \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_k} \right\} \quad (3.2.14)$$

ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタであり、 μ_{tur} は乱流粘性係数と呼ばれる。厳密には式 (3.2.14) 右辺には $-(2/3) \overline{\rho k} \delta_{ij}$ (ρk : 乱流運動エネルギー、式 (3.2.14) の縮約をとった場合に必要) が必要であるが、本研究ではオーダを考慮してこの項は無視している。

Reynolds 熱流束に関しても同様の類推から

$$\overline{\rho \varepsilon u_i} = -\kappa_{tur} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (3.2.15)$$

とモデル化される。

式 (3.2.14), (3.2.15) のモデルによって層流・乱流双方の効果を支配方程式に含めるためには式 (3.1.5), (3.1.7) において有効粘性係数 μ_{eff} 、有効熱伝導率 κ_{eff} を

$$\mu_{eff} = \mu_{lam} + \mu_{tur}, \quad \kappa_{eff} = \kappa_{lam} + \kappa_{tur} \quad (3.2.16)$$

とおくだけでよいことになる。乱流粘性係数 μ_{tur} と乱流熱伝導率 κ_{tur} については様々なモデルが提案されており、このモデル化によって乱流モデルは分類される。

3・2・2 LES 基礎 SGS モデル

圧縮性流体でよく用いられる乱流モデルの1つに Baldwin-Lomax モデル⁽⁸⁾ (1978) がある。Baldwin-Lomax モデルは、乱流境界層の内層と外層における Reynolds 応力を別々に評価し、壁近傍での乱流粘性のダンピング、乱流境界層外層での間欠性、遷移なども考慮されている。しかし Baldwin-Lomax モデルは壁面からの距離の関数を使用しているため (Prandtl の混合距離理論を理論的根拠とし、混合距離が壁面からの距離の関数になっている)、翼間流の場合では壁面からの距離をどの壁面からとるか、また後流ではどこを壁面に相当させるかが問題になる。

Baldwin-Lomax モデルは乱流の輸送方程式を解かず、層流成分と壁面からの距離から乱流成分を算出する。これは 0 方程式モデルまたは代数モデルと呼ばれる。0 方程式モデルは計算資源を節約できるという利点を持つ。しかし実際の流れにおいては乱流の影響が上流から下流に伝ばするので、乱流の輸送特性を表した方程式を解く必要がある。この観点に立ったモデルの代表として k - ε モデルがある。 k - ε モデルでは乱流運動エネルギー k と k の散逸率 ε に対し、変動の高次の項をモデル化した輸送方程式を解き、求められた k と ε から乱流粘性係数を求める。最も基本的な k - ε モデルは等方性乱流を仮定しており、壁面近傍では壁面垂直方向の乱流変動が減衰するという特徴を捕らえられない。これを改善するために提案されたものが低 Reynolds 数型 k - ε モデルであり、このモデルでは壁面近傍の Reynolds 数が低い領域で働くモデル関数が組み込まれている。提案されているモデル関数は多種に及ぶが、壁面からの距離を用いるものでは Baldwin-Lomax モデルと同様の問題が生じる。Fan et al. (1993) は壁座標 $y^+ = u_\tau y / \nu$ ($u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$: 壁面摩擦速度, τ_w : 壁面摩擦応力, y : 壁面からの距離, ν : 壁面動粘性係数) を用いたモデル関数では非定常乱流を全く予測できないと指摘している⁽⁹⁾。

y^+ を含まない k - ε モデルとして Gelolymos et al.^{(10), (11)} (1996) が圧縮性流体用に Launder-Sharma 型を拡張した低 Reynolds 数型 k - ε モデルを用いて定常計算を行った。本研究では Tweedt et al.⁽¹²⁾ (1988) が実験で用いた翼列を計算対象にしているが、その定常計算結果は Tweedt et al. による実験値と一致しなかった。もともと Launder-Sharma モデルは非圧縮性流体用に作られたモデルである。実験値と一致させるためにはモデル定数を変更するなどの必要があると思われる。また実験では定常値が得られる場合でも計算では数値的不安定

が発生するという問題も見られた。

本研究では壁面からの距離を用いないモデルを採用することを絶対条件として、LES (Large Eddy Simulation) 乱流モデルを用いることにする。このモデルは0方程式モデルであるが、定常計算結果による実験値との比較(4・2節)で良好な実績を得たことから採用した。以下にLES乱流モデルの理論的背景を述べる。LES乱流モデルは、「乱流の小スケール渦運動(高波数成分)の統計的性質は、流れ場全体の特長によらず普遍的である」とするKolmogoroffの相似則を理論的根拠にしている。このため乱流の小スケール渦運動に関しては壁面からの距離を考慮する必要がない。

LES乱流モデルにおいては「方程式を離散化することによって格子点間隔よりも小さい波長(高周波)の成分はなくなってしまい、それよりも大きい波長(低周波)の成分のみが残る」という立場をとる。この立場ではFig. 3.2.1に示すように、小さい波長の成分を含む関数 $u(x)$ は離散化により大きい波長の成分のみを含む関数 $\bar{u}(x)$ に近似されることになる。すなわち空間フィルタがかけられ、これは3・2・1節においてReynolds平均として空間平均(式(3.2.4))を用いていることに対応する。

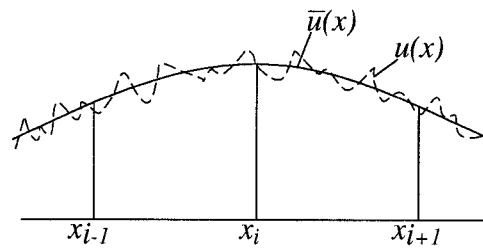


Fig. 3.2.1 Approximation to coarse function by discretization

いま、計算格子が乱流の大スケール渦運動(低周波成分)を捕らえるのに十分であるとする。この低周波成分をGS(Grid Scale)成分と呼ぶ。GS成分に関しては乱流の影響が捕らえられているので、モデル化すべき乱流の成分はGS成分よりも小さいスケール、つまりSGS(Subgrid Scale)成分となる。SGS成分が前述のKolmogoroffの相似則が成り立つ小スケール渦運動成分であるならば、いかなる流れ場であっても普遍的なモデル化が可能になり、これがLES乱流モデルの本質となる。

3・2・1節のReynolds平均に空間平均を用いると、SGS成分による影響は支配方程式にReynolds応力 $(-\overline{\rho u_i'' u_j''})$ 、Reynolds熱流束 $\overline{\rho \epsilon'' u_i''}$ として現れる。ただし $\bar{}$ は空間平均、 $''$ はSGS成分を表す。これらの量は式(3.2.14)、(3.2.15)によるBoussinesq近似で表される。

SGS 乱流粘性モデルで最も広く用いられている Smagorinsky モデルでは SGS 乱流粘性係数は次のように表される。

$$\mu_{tur} = (C_s \Delta)^2 \rho \sqrt{\varphi} \quad (3.2.17)$$

ここで C_s は Smagorinsky 定数である。 C_s と 3 次元圧縮性流体における φ は

$$C_s = 0.1, \quad \varphi = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \Delta = \sqrt[3]{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \quad (3.2.18)$$

である。 Δx は格子幅を表す。高倉ら⁽²⁾ (1988), ⁽³⁾ (1989) は式 (3.2.17), (3.2.18) を用いて 3 次元遷音速翼まわりの流れを計算している。その結果、乱流粘性が過大評価されて実験と合う圧力分布が得られない上、衝撃波の直後に乱流粘性が不自然に高い領域が生じることが指摘している。高倉らは計算の格子幅には各方向にオーダーの差があること、衝撃波直後の乱流粘性が不自然に高い領域をなくすことを考慮して圧縮性流体用に C_s , φ および Δ の改良を行い、実験に近い圧力分布を得ている。それによると

$$C_s = 0.5, \Delta = \min(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3), \varphi = |\omega|^2 \quad (3.2.19)$$

となる。ただし ω は渦度である。本研究では式 (3.2.17), (3.2.19) を 2 次元に適用して乱流粘性を評価する。

乱流熱伝導率 κ_{tur} に対しては乱流 Prandtl 数 Pr_{tur} を用いて

$$\kappa_{tur} = c_p \mu_{tur} / Pr_{tur} \quad (3.2.20)$$

とする。本研究では $Pr_{tur} = 0.90$ とする。

3・3 一般曲線座標変換

3・3・1 一般曲線座標系における支配方程式

複雑な物体まわりの流れを構造格子（格子座標が順序よく並んでいる格子）で解く場合，デカルト座標系における基礎式 (3.1.11) を直接は離散化せず，基礎式を一般曲線座標系に写像変換してから離散化を行う．一般曲線座標は座標軸を任意にとることができるが，境界条件を与えやすくするために計算領域境界に合わせて座標軸をとる．計算機の制約上，計算格子は境界層や衝撃波位置では細かくとられ，その他の領域は荒くとられる．すなわちデカルト座標における格子幅は一定ではない．一方，一般曲線座標系では格子幅 $\Delta\xi, \Delta\eta$ は全て 1 に変換される．

ここでは一般曲線座標系への変換の手順を述べる．デカルト座標系 (x, y) と一般曲線座標系 (ξ, η) には次の写像関係がある．

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

ただし ξ_x 等は $\partial\xi/\partial x$ 等を表す．式 (3.3.2) を $[\partial/\partial x, \partial/\partial y]^T$ について解き，式 (3.3.1) と比較することによりメトリック $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ ，ヤコビアン J が得られる．

$$\xi_x/J = y_\eta, \quad \xi_y/J = -x_\eta, \quad \eta_x/J = -y_\xi, \quad \eta_y/J = x_\xi, \quad 1/J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (3.3.3)$$

式 (3.3.3) の値は計算格子のデカルト座標により数値的に評価される．その方法は 3・3・2 節で述べる． ξ_x/J は各格子セル η 軸方向線分のデカルト座標系での x 方向投影長さ， $1/J$ はデカルト座標系での格子セル面積を表す．

空間微分は式 (3.3.1) の chain rule によって変換される．式 (3.3.1) を用いて，さらに式 (3.3.3) の $\xi_x/J = y_\eta, \eta_x/J = -y_\xi$ より

$$\begin{aligned}
\xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} &= J \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} E \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} E \right) - E \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \right) \right\} \right] \\
&= J \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} E \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} E \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

を利用すると，デカルト座標系における基礎式 (3.1.11) から一般曲線座標系における基礎式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} &= 0 \\
\hat{Q} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (e+p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (e+p)V \end{bmatrix}, \\
\hat{E}_v &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{yx} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x \beta_x + \xi_y \beta_y \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{yx} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x \beta_x + \eta_y \beta_y \end{bmatrix} \\
\tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu_{eff} (2u_x - v_y), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_{eff} (u_y + v_x), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu_{eff} (2v_y - u_x) \\
\beta_x &= \tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \kappa_{eff} T_x, \quad \beta_y = \tau_{yx} u + \tau_{yy} v + \kappa_{eff} T_y
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

U, V は反変速度成分と呼ばれ，

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \tag{3.3.6}$$

と定義される． U/J は格子セル境界 η 軸方向線分を通過する体積流量を表す．

式 (3.3.4) を利用することによって式 (3.3.5) は各格子セルに対して保存形になっている．保存形で表記された式は滑らかな領域だけでなく衝撃波のような不連続においても満たされる．そのため式 (3.3.5) の弱解は衝撃波解も含んでいる．弱解のうち実際の流れに対応する解はエントロピが減少しない条件を満たし，この条件によって衝撃波の有無が自動的に選択される．保存形の式を解くこの方法は衝撃波捕獲法と呼ばれる．

3・3・2 メトリック、ヤコビアンの評価方法

前節でも述べたように、メトリック $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ 、ヤコビアン J は計算格子のデカルト座標により数値的に評価される。ここではその際に注意すべき点を述べ、本研究で用いたメトリック、ヤコビアンの評価方法を示す。

メトリック評価の際に最も重要なことは、離散化した式が定常一様流の場合を数値的にも満足していることである。式 (3.3.5) の連続の式に定常一様流 $u = u_\infty, v = 0, \rho = \rho_\infty$ の値を代入するとこれらの項は微分の影響を受けないので次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x}{J} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi) = 0 \quad (3.3.7)$$

式 (3.3.7) が解析的に恒等式となることは自明である。差分近似の場合、メトリック y_ξ, y_η は2次精度中心差分で近似されるが、その外の ξ, η 方向差分には前進、後退、中心差分のように差分方法に任意性がある。そのため式 (3.3.7) は数値的には必ずしも恒等式にならない。例えば式 (3.3.7) で () 外の ξ, η 方向差分に前進差分を用いる場合、格子幅 $\Delta\xi, \Delta\eta$ は1であるから省略すると

$$\begin{aligned} \partial y_\eta / \partial \xi &= (y_\eta)_{i+1,j} - (y_\eta)_{i,j} = (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j+1} + y_{i,j-1})/2 \\ \partial y_\xi / \partial \eta &= (y_\xi)_{i,j+1} - (y_\xi)_{i,j} = (y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j} + y_{i-1,j})/2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

となり、これを式 (3.3.7) に代入しても数値的には恒等式にならない。この問題を解決するためには、メトリックは ξ, η 方向差分の方法に依存せず常にセル境界上 $(i+1/2, j), (i, j+1/2)$ の値を用い、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left\{ (y_\eta)_{i,j} + (y_\eta)_{i+1,j} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2} + \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}}{2} \right) \\
\left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left\{ (-x_\eta)_{i,j} + (-x_\eta)_{i+1,j} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2} + \frac{x_{i+1,j-1} - x_{i+1,j+1}}{2} \right) \\
\left(\frac{\eta_x}{J}\right)_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ (-y_\xi)_{i,j} + (-y_\xi)_{i,j+1} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{i-1,j} - y_{i+1,j}}{2} + \frac{y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j+1}}{2} \right) \\
\left(\frac{\eta_y}{J}\right)_{i,j+1/2} &= \frac{1}{2} \left\{ (x_\xi)_{i,j} + (x_\xi)_{i,j+1} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} + \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

のように $1/J$ をかけた形で定義されなければならない。このようにすれば式 (3.3.7) は数値的にも恒等式となる。このことは離散式を有限体積的に評価した場合と密接に対応している。式 (3.3.9) によるメトリックの評価は、Fig. 3.3.1 の破線で囲まれた検査面の境界線分を正確にとらえている。またヤコビアン J は Fig. 3.3.1 の検査面積の逆数でなければ保存則が満たされない。そこでヤコビアン J は式 (3.3.3) を直接数値的に評価はせずに、格子点 (i, j) を取り囲む4つの格子セル面積の平均値の逆数にしたものとする。すなわち

$$\left(\frac{1}{J}\right)_{i,j} = \frac{1}{4} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \tag{3.3.10}$$

と評価する。ただし S_1 等は Fig. 3.3.1 に示す格子点で囲まれた4つの四角形の面積である。

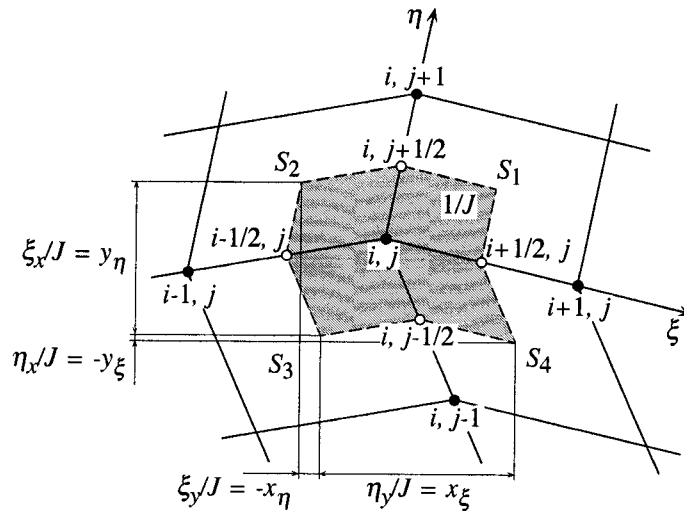


Fig. 3.3.1 Control surface of present scheme

3・4 離散化手法

3・4・1 TVD (Total Variation Diminishing) 条件

一般曲線座標系における支配方程式 (3.3.5) は離散化され、有限差分法によって数值的に解かれる。粘性項を除けば式 (3.3.5) は保存形の非線形双曲型方程式である。本章の最初でも述べたが、数値的不安定を防止するために対流項に対しては TVD (Total Variation Diminishing) 条件を満たすスキーム (TVD スキーム) を用いる。本研究では non-MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) 型に属する Harten-Yee の (空間) 2 次精度 TVD スキーム⁽¹⁾ を用いる。non-MUSCL 型は数値流束を評価する際に基本変数の内挿を行わないため、内挿の際に発生する可能性がある数値的不安定 (厳密解よりも大き過ぎる曲率を持つことがある) がない。本節では TVD スキームが用いられる理由と 1 次精度風上差分を例として数値スキームが TVD であるための十分条件を示す。

TVD スキーム以前の保存形双曲型方程式に対する衝撃波捕獲法は、特性速度が一定である線形方程式に対しては計算の安定性が保証される。しかし、このスキームを圧縮性 Euler 方程式のような非線形方程式に用いると以下の 3 つの問題が起こる。

- (i) 2 次以上の空間精度を持つスキームでは、解が滑らかでない領域において数値的な振動が生じてしまう。
- (ii) 非線形性により、計算の安定性が損なわれる。
- (iii) エントロピが減少する非物理的な解が選択される可能性がある。

一方、単調スキーム (monotone scheme, 単調性 (初期値が単調増加 (減少) であれば以後の任意の時間において単調増加 (減少)) を満たすスキーム) では上述の (ii) と (iii) の問題は解決されるが、全ての単調スキームは空間 1 次精度でしかない。単調スキームは上述の (ii) と (iii) の問題を解決するための十分条件であり、必ずしも単調スキームである必要はない。2 次以上の精度を持つスキームで上述の 3 つの問題を解決するためには、単調性を満たす条件を緩和し、その緩和された条件を満たすスキームを構築すれば良い。Harten⁽¹³⁾ (1984) はその条件として TVD (Total Variation Diminishing) 条件を考案した。ただし TVD 条件は上述の (iii) の問題を解決していないので、構築されるスキームにはエントロピが減少しない条件を満たす機構 (エントロピ補正) が必要になるとも述べている。

TVD 条件を定義するために保存形の 1 次元双曲型スカラー方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.4.1)$$

式 (3.4.1) の u に対する全変動 (Total Variation) $TV(u)$ は以下のように定義される。

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (3.4.2)$$

TVD 条件とは、時間 t が進行したときの TV が増加しない条件である。TVD 条件を格子点 $x_i = i\Delta x$ ($1 \leq i \leq i_{max}$) で離散化された方程式に対して適用する場合、全変動 $TV(u^n)$ は

$$TV(u^n) = \sum_{i=1}^{i_{max}} |u_{i+1}^n - u_i^n| = \sum_{i=1}^{i_{max}} |\Delta_{i+1/2} u^n| \quad (3.4.3)$$

と定義され、TVD 条件は

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (3.4.4)$$

と定義される。ただし上付き添字 n は時間ステップ ($t = n\Delta t$) を表し、 $\Delta_{i+1/2} u = u_{i+1} - u_i$ である。

次に 1 次精度風上差分を例として数値スキームが TVD であるための十分条件を示す。式 (3.4.1) が次のように離散化されているとする。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{f}_{i+1/2}^n - \tilde{f}_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.4.5)$$

1 次精度風上差分の場合、数値流束 $\tilde{f}_{i+1/2}$ は次のように定義される。

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [f_i + f_{i+1} - \Psi(a_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} u] \quad (3.4.6)$$

ただし $a = \partial f / \partial u$ は特性速度であり、数値的には次のように近似される。

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} (f_{i+1} - f_i) / \Delta_{i+1/2} u, & \Delta_{i+1/2} u \neq 0 \\ a(u_i), & \Delta_{i+1/2} u = 0 \end{cases} \quad (3.4.7)$$

また式 (3.4.6) 中、関数 $\Psi(z)$ は Roe スキームの場合 $\Psi(z) = |z|$ とされるが、これを用いると膨張衝撃波を解とする、つまりエントロピが減少することがある。そこで膨張衝撃波が速やかに膨張波に移行するように $\Psi(z)$ に修正が必要となる。これはエントロピ補正と呼ばれる。 $\Psi(z)$ は不連続面近傍 ($|z| < \delta$) において修正され、次のように定義される。

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta^2) / (2\delta), & |z| < \delta \end{cases} \quad (3.4.8)$$

δ は小さな値がとられるが、システム方程式を解く本研究では局所特性速度が複数ある。本研究では Yee et al.⁽¹⁴⁾ (1990) にならって局所特性速度の最大絶対値を 1/8 倍したものを δ とする。

式 (3.4.5) ~ (3.4.8) で与えられる 1 次精度風上差分が TVD であるための十分条件は Harten⁽¹³⁾ (1984) によって求められており、以下のようなになる。

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} C_{i+1/2}^- = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (-a_{i+1/2} + \Psi(a_{i+1/2})) \geq 0 \quad (3.4.9)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} C_{i+1/2}^+ = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{i+1/2} + \Psi(a_{i+1/2})) \geq 0 \quad (3.4.10)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{i+1/2}^- + C_{i+1/2}^+) = \frac{\Delta t}{\Delta x} \Psi(a_{i+1/2}) \leq 1 \quad (3.4.11)$$

これらのうち式 (3.4.11) で常に $\Psi(z) = |z|$ とおいた条件は CFL 条件と呼ばれ、Courant, Friedrich, Lewy によって提案された。CFL 条件は局所領域で一定と仮定した特性波が進行できる妥当な時間ステップ Δt の上限を表している。一方、式 (3.4.11) は CFL-like な条件と呼ばれる。式 (3.4.11) を満たす Δt をとれば、式 (3.4.5) ~ (3.4.8) で与えられる 1 次精度風上差分は式 (3.4.9), (3.4.10) を満たしており、TVD スキームであることが分かる。

3・4・2 2次精度 TVD スキーム

1次精度風上差分は TVD 条件を満足しているが、実用上の問題として空間2次以上の精度が不可欠である。式(3.4.5)～(3.4.8)を高次精度に拡張する1つの方法として、本研究では Harten-Yee の2次精度 TVD スキーム⁽¹⁾を用いる。式(3.4.6)は空間1次精度の数値粘性項 $\Psi(a_{i+1/2})\Delta_{i+1/2}u$ を有するが、Harten-Yee の2次精度 TVD スキームではこれを打ち消すために流束 $\sigma(a)g$ が付け加えられ、 f の代わりに修正流束 $f + \sigma(a)g$ が用いられる。数値流束 $\tilde{f}_{i+1/2}$ は次のように定義される。

$$\tilde{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [f_i + f_{i+1} + \sigma(a_{i+1/2})(g_i + g_{i+1}) - \Psi(a_{i+1/2} + \gamma_{i+1/2})\Delta_{i+1/2}u] \quad (3.4.12)$$

a , Ψ は式(3.4.7), (3.4.8) でそれぞれ定義される。 γ は $\sigma(a)g$ に対する特性速度であり以下のように定義される。

$$\gamma_{i+1/2} = \begin{cases} \sigma(a_{i+1/2})(g_{i+1} - g_i)/\Delta_{i+1/2}u, & \Delta_{i+1/2}u \neq 0 \\ 0, & \Delta_{i+1/2}u = 0 \end{cases} \quad (3.4.13)$$

また $\sigma(z)$ は

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \Psi(z) \quad (3.4.14)$$

である。修正流束 $f + \sigma(a)g$ に対して $a + \gamma$ は修正特性速度と呼ばれる。 γ が導入されることにより式(3.4.12), (3.4.13) は $f + \sigma(a)g$ に対しての1次精度風上差分の形をとる。このとき TVD 条件式(3.4.9)～(3.4.11) は a を $a + \gamma$ に置き換えられたものになり、式(3.4.9), (3.4.10) は自動的に満足される。しかし式(3.4.11)は満足されておらず、 Δt を無限小としないために γ は有限値をとらなければならない。また $a + \gamma$ による特性波の伝ば方向は a と同一になる必要がある。さらに数値的な振動を抑えるためには不連続面近傍で $g = 0$ になり、1次精度風上差分に戻る必要がある。 g は以上の制限を満たす必要があり、流束制限関数 (limiter function) と呼ばれる。Harten (1984) は g の1つとして次のような関数を考

案した⁽¹³⁾.

$$g_i = S \max \left[0, \min \left(\left| \Delta_{i+1/2} u \right|, S \Delta_{i-1/2} u \right) \right], \quad S = \text{sgn} \left(\Delta_{i+1/2} u \right) \quad (3.4.15)$$

式 (3.4.15) の関数は minmod limiter と呼ばれる. 式 (3.4.12) ~ (3.4.15) が Harten-Yee の 2 次精度 TVD スキームであり, 時間 1 次精度, 不連続面近傍以外で空間 2 次精度である.

minmod limiter は $\Delta_{i+1/2} u = \Delta_{i-1/2} u$ となる点で勾配に不連続が生じる. 実際に minmod limiter を用いて計算を行ったところ, この勾配の不連続性のために数値的な振動が発生することがあった. 数値的な振動を取り除くために本研究では勾配に不連続を持たない Van Leer limiter を流束制限関数 g として使用している. Van Leer limiter は以下のように定義される.

$$g_i = \frac{r+|r|}{1+r} \Delta_{i+1/2} u, \quad r = \frac{\Delta_{i-1/2} u}{\Delta_{i+1/2} u} \quad (3.4.16)$$

3・4・3 TVD スキームのシステム方程式への適用

TVD スキームは非線形双曲型 スカラー 方程式に対して定義されたものであり, 非線形双曲型 システム 方程式 (連立方程式になっている) には前節までの方法をそのまま用いることはできない. それは解の全変動が時間とともに減少するとは限らないからである. TVD 条件を満足する汎関数が存在すれば, それに対して TVD 理論が適用可能であるが, 非線形双曲型システム方程式ではそのような汎関数は見つかっていない. システム方程式に対して現時点で出来ることは, 各点で局所的な特性場の方程式系に対角化し, 対角化された個々のスカラー方程式に対して TVD スキームを適用することである.

まず対角化の手順を述べる. 簡単のため保存形の 1 次元双曲型システム方程式を考える.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (3.4.17)$$

ただし $U = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ である. 式 (3.4.17) はヤコビアン行列 $A = \partial F / \partial U$ を介して次のように書き直される.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.4.18)$$

ヤコビアン行列 A は固有値 λ^l ($l = 1, 2, \dots, N$) による対角行列 $\text{diag}(\lambda^l)$, 右固有行列 $R = [r^1, r^2, \dots, r^N]$ ($A r^l = \lambda^l r^l$), 左固有行列 $R^{-1} = [l^1, l^2, \dots, l^N]^T$ ($l^l A = \lambda^l l^l$) を用いると $A = R \text{diag}(\lambda^l) R^{-1}$ となるので, 式 (3.4.18) の両辺に左から R^{-1} をかけると

$$R^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + \text{diag}(\lambda^l) R^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.4.19)$$

となる. いま, 左固有行列 R^{-1} が局所時間または空間的に一定であると仮定すると, R^{-1} は時間・空間微分の中に入れることができ, 式 (3.4.19) は列ベクトル $w = R^{-1}U = [w^1, w^2, \dots, w^N]^T$ に対する双曲型スカラー方程式に対角化できる.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{diag}(\lambda^l) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = R^{-1}U \quad (3.4.20)$$

式 (3.4.20) は局所的に定義される互いに独立な特性量 w^l が, 対応する局所的に一定な特性速度 λ^l で伝ばすることを表している. システム方程式 (3.4.17) では対角化された式 (3.4.20) の個々に TVD スキームを適用することになる. この場合, (3.4.12), (3.4.13), (3.4.16) において $\Delta_{i+1/2} u$ は $\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1} \Delta_{i+1/2} U$ に置き換えられ, $\Delta_{i+1/2} U = R_{i+1/2} \alpha_{i+1/2}$ によって元の U に戻される.

3・4・4 対流項への TVD スキームの適用

前節では空間 2 次精度 TVD スキームをシステム方程式に適用する方法を述べた. 本節では, その方法を支配方程式 (3.3.5) の対流項 $\partial \hat{E} / \partial \xi$, $\partial \hat{F} / \partial \eta$ に適用する. 式 (3.3.5) の空間微分項を離散化した形は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{Q}_{i,j}}{\partial t} + [\tilde{E}_{i+1/2,j} - \tilde{E}_{i-1/2,j}] + [\tilde{F}_{i,j+1/2} - \tilde{F}_{i,j-1/2}] \\ & = [(\tilde{E}_v)_{i+1/2,j} - (\tilde{E}_v)_{i-1/2,j}] + [(\tilde{F}_v)_{i,j+1/2} - (\tilde{F}_v)_{i,j-1/2}] \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

となる．ただし $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ であるから格子幅は省略している．式 (3.4.21) のうち $[\tilde{E}_{i+1/2,j} - \tilde{E}_{i-1/2,j}]$ が ξ 方向， $[\tilde{F}_{i,j+1/2} - \tilde{F}_{i,j-1/2}]$ が η 方向の対流項である． ξ 方向の対流項に 2 次精度 TVD スキームを適用すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{i+1/2,j} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2,j} (E_{i,j} + E_{i+1,j}) + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i+1/2,j} (F_{i,j} + F_{i+1,j}) \right\} + (R_\xi)_{i+1/2,j} \Phi_{i+1/2,j} \right] \\ \phi'_{i+1/2,j} &= \sigma \left(\left(\frac{\lambda'_\xi}{J} \right)_{i+1/2,j} (g'_{i,j} + g'_{i+1,j}) - \Psi \left(\left(\frac{\lambda'_\xi}{J} \right)_{i+1/2,j} + \left(\frac{\gamma}{J} \right)_{i+1/2,j} \right) \alpha'_{i+1/2,j} \right. \\ \alpha'_{i+1/2,j} &= \left[(R_\xi^{-1})_{i+1/2,j} \Delta_{i+1/2,j} Q \right]^l\end{aligned}\quad (3.4.22)$$

ただし式 (3.4.22) 1 式目の $\{ \}$ 内の流束変数ベクトル E, F と 3 式目の Q はデカルト座標系でのもの (式 (3.1.11)) である．3・3・2 節で述べたようにメトリックは常にセル境界上 $(i+1/2, j)$ の値を用いなければならないため， E, F と Q が現れている． $\{ \}$ 内の項はメトリックをセル境界上 $(i+1/2, j)$ の値で固定した時の $\hat{E}_{i,j} + \hat{E}_{i+1,j}$ に等しい． R_ξ, R_ξ^{-1} はそれぞれ ξ 方向流束やコビアン行列に対する右，左固有行列である．

λ'_ξ は l 番目の固有値であり以下のようなになる．

$$\lambda'_\xi = U - c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, \lambda_\xi^2 = \lambda_\xi^4 = U, \lambda_\xi^3 = U + c \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \quad (3.4.23)$$

これらは (流速) $\pm$ (音速) で伝ばする圧力 (音響) 波，流速で伝ばする渦度変動・エントロピ変動の波の伝ば速度に対応している．2 次元の場合，対流項はこれら 4 つの特性波に分解される．

Ψ と σ はそれぞれ式 (3.4.8), (3.4.14) から変化しないが，ここに再び示しておく．

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta)/(2\delta), & |z| < \delta \end{cases} \quad (3.4.24)$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \Psi(z) \quad (3.4.25)$$

本研究では式 (3.4.24) の δ は次のように定義した．

$$\delta = \delta \max \left(\left| \frac{\lambda'_\xi}{J} \right| \right) = \delta \left(\left| \frac{U}{J} \right| + c \sqrt{\left(\frac{\xi_x}{J} \right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)^2} \right) \quad (3.4.26)$$

ただし Yee et al.⁽¹⁴⁾ (1990) にならって $\delta = 1/8$ である.

式 (3.4.13) の γ は α' に対して求められ,

$$\left(\frac{\gamma}{J} \right)_{i+1/2,j} = \begin{cases} \sigma \left(\left(\frac{\lambda'_\xi}{J} \right)_{i+1/2,j} \right) (g'_{i+1,j} - g'_{i,j}) / \alpha'_{i+1/2,j}, & \alpha'_{i+1/2,j} \neq 0 \\ 0, & \alpha'_{i+1/2,j} = 0 \end{cases} \quad (3.4.27)$$

となる.

数値的な振動を取り除くため, 流速制限関数 g には勾配に不連続を持たない Van Leer limiter を用いる.

$$g'_{i,j} = \frac{r+|r|}{1+r} \alpha'_{i+1/2,j}, \quad r = \frac{\alpha'_{i-1/2,j}}{\alpha'_{i+1/2,j}} \quad (3.4.28)$$

右, 左固有行列 R'_ξ, R_ξ^{-1} と固有値 λ'_ξ はセル境界 $(i+1/2, j)$ で定義される. これらは ξ 方向流束ヤコビアン行列を $\hat{A} = R'_\xi \text{diag}(\lambda'_\xi) R_\xi^{-1}$ のように分離した要素である. 流束ヤコビアン行列はその定義 $\hat{A} = \partial \hat{E} / \partial \hat{Q}$ により, メトリックをセル境界上 $(i+1/2, j)$ で固定した時の $\hat{A}_{i+1/2,j} \Delta_{i+1/2,j} \hat{Q} = \hat{E}_{i+1,j} - \hat{E}_{i,j}$, すなわち

$$\left(\frac{\hat{A}}{J} \right)_{i+1/2,j} \Delta_{i+1/2,j} Q = \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2,j} (E_{i+1,j} - E_{i,j}) + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i+1/2,j} (F_{i+1,j} - F_{i,j}) \quad (3.4.29)$$

の関係を数値的に満足しなければならない. 式 (3.4.29) を数値的に満たすために, 格子点 $(i, j), (i+1, j)$ の値から $\hat{A} (= R'_\xi \text{diag}(\lambda'_\xi) R_\xi^{-1})$ の要素を算出する方法は Roe⁽¹⁵⁾ (1981) によって考案されており, Roe の平均は次のように定義される.

$$\begin{aligned}
u_{ave} &= (\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \\
v_{ave} &= (\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \\
H_{ave} &= (\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R) / (\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}) \\
c_{ave}^2 &= (\gamma - 1) \{ H_{ave} - (u_{ave}^2 + v_{ave}^2) / 2 \}
\end{aligned} \tag{3.4.30}$$

ただし添え字 L, R はそれぞれ格子点 $(i, j), (i+1, j)$ の値を表す．また H は単位質量あたりの全エンタルピーである．式 (3.4.30) の値を用いて $\hat{A} (= R_\xi \text{diag}(\lambda'_\xi) R_\xi^{-1})$ を構成すれば，式 (3.4.29) は数値的に満足される．Roe の平均は u, v, H 以外のパラメータには定義がない．そのため他のパラメータは u, v, H から導出しなければならない⁽¹⁶⁾．例えば音速 c は式 (3.4.30) 第 4 式のように算出される．

ここでは ξ 方向の対流項だけを示したが， η 方向の対流項についても同様の手法で 2 次精度 TVD スキームを適用する．

3・4・5 粘性項の評価方法

前節でも述べたように，2 次元の場合対流項は 4 種類の特性波に分解される．ある格子点に着目すると，特性波の影響は片側のみから伝えられるので（風上差分の拡張である）TVD スキームが用いられる．しかし拡散を意味する粘性項は格子点の両側から影響を受ける．そのため粘性項は中心差分で評価されるべきである．本研究でも 2 次精度中心差分により式 (3.4.21) の粘性項 $[(\tilde{E}_v)_{i+1/2,j} - (\tilde{E}_v)_{i-1/2,j}], [(\tilde{F}_v)_{i,j+1/2} - (\tilde{F}_v)_{i,j-1/2}]$ を評価する．ただし式 (3.5) にもあるように粘性項には変形勾配 u_x や温度勾配 T_x といった 1 階微分の項が含まれており，これらの項は Fig. 3.3.1 の検査面の境界 $((i+1/2, j)$ 等) に作用する．数値流束をより正確に評価するため，これらの項はセル境界で個々に求めてから $(\tilde{E}_v)_{i+1/2,j}, (\tilde{F}_v)_{i,j+1/2}$ を構成する．具体例として本研究では $(i+1/2, j)$ での u_x を次のように離散化している．

$$\begin{aligned}
(u_x)_{i+1/2,j} &= \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\eta_x}{J} \right)_{i+1/2,j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) - \frac{1}{2} (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}) \right) \right] / \left(\frac{1}{J} \right)_{i+1/2,j} \\
(\xi_x/J)_{i+1/2,j} &= [(\xi_x/J)_{i,j} + (\xi_x/J)_{i+1,j}] / 2, \quad (\eta_x/J)_{i+1/2,j} = [(\eta_x/J)_{i,j} + (\eta_x/J)_{i+1,j}] / 2 \\
(1/J)_{i+1/2,j} &= [(1/J)_{i,j} + (1/J)_{i+1,j}] / 2
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

ただし $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ であるから格子幅は省略している．ここで ξ 方向の差分はセル境界 $(i+1/2, j)$ に隣接する格子点上の値を， η 方向の差分はセル境界 $(i+1/2, j+1)$, $(i+1/2, j-1)$ 上の値を使った中心差分になっている．

層流・乱流双方の効果を含めた有効粘性係数に関しては，セル境界に隣接する格子点での値の平均値を用いた．

$$(\mu_{eff})_{i+1/2,j} = [(\mu_{eff})_{i,j} + (\mu_{eff})_{i+1,j}] / 2 \quad (3.4.32)$$

セル境界 $(i+1/2, j)$ での粘性応力は式 (3.4.31), (3.4.32) と定義式 (3.1.5) から求められる．熱流束も同様の考え方で離散化している．ここでは ξ 方向セル境界での離散化手法を示したが， η 方向セル境界でも同様の考え方で離散化している．

セル境界で求められた粘性応力と熱流束から， ξ 方向の粘性に関する数値流束は保存則を考慮して次のように定義される．

$$(\bar{E}_v)_{i+1/2,j} = \left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2,j} (\bar{E}_v)_{i+1/2,j} + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i+1/2,j} (\bar{F}_v)_{i+1/2,j} \quad (3.4.33)$$

ただし $(\bar{E}_v)_{i+1/2,j}$, $(\bar{F}_v)_{i+1/2,j}$ は上述の方法で評価された粘性応力と熱流束から構成されるデカルト座標での粘性項（式 (3.1.11)）である．

3・4・6 時間2次精度化とLU-SGS 陰解法

非定常現象を捕らえるためには時間精度も向上させなければならない．本研究では3点後退差分による時間2次精度化を行っている．さらに数値的安定性を保ちながら計算時間を短縮するために陰解法を組み込んでいる．本計算コードは時間1次精度でも使用することができ，定常，非定常計算の必要に応じて時間精度を切り替えることができる．

ξ, η 方向の差分をそれぞれオペレータ D_ξ, D_η で表すことにすると，式 (3.3.5) の時間1次または2次精度の陰解法はデルタ形式 ($\Delta\hat{Q}^n = \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n$) を用いて次のようになる．

$$\frac{(1+\theta)\Delta\hat{Q}^n - \theta\Delta\hat{Q}^{n-1}}{\Delta t} + D_\xi (\hat{E} - \hat{E}_v)^{n+1} + D_\eta (\hat{F} - \hat{F}_v)^{n+1} = 0 \quad (3.4.34)$$

$\theta = 0$ のときは時間 1 次精度， $\theta = 1/2$ のときは時間 2 次精度となる．Newton 法によって式 (3.4.34) から $\hat{Q}^{n+1}$ を求めることにすると次式が得られる．

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{\Delta t}{1+\theta} (D_\xi \hat{A} + D_\eta \hat{B}) \right] \Delta\hat{Q}^p \\ & = -\hat{Q}^p + \hat{Q}^n + \frac{\theta}{1+\theta} \Delta\hat{Q}^{n-1} - \frac{\Delta t}{1+\theta} [D_\xi (\hat{E} - \hat{E}_v)^p + D_\eta (\hat{F} - \hat{F}_v)^p] \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

ただし左辺の差分オペレータ D_ξ, D_η は $\Delta\hat{Q}^p = \hat{Q}^{p+1} - \hat{Q}^p$ にも作用する．上付添字 p は Newton 法の反復計算回数を表す．粘性項は $\hat{Q}^{n+1}$ に依存しないと仮定しているため，式 (3.4.35) には粘性項の流束ヤコビアン行列が現れない．

Newton 法の初期値には $\hat{Q}^{p=0} = \hat{Q}^n$ を与え，収束 ($\Delta\hat{Q}^p \rightarrow 0$) するまで反復計算を行う．収束時の $\hat{Q}^p$ が $\hat{Q}^{n+1}$ に更新され，その結果与えられた時間精度を有することができる．時間 2 次精度の場合，全ての格子点の $\Delta\hat{Q}^p$ の和（残差）が $p = 0$ の時の値よりも 2 桁落ちた時を収束とみなしているが，反復回数は 30 回を上限としている．4・3 節で示される時間精度の検証により，この条件は本研究に要求される時間精度を十分に満たしていることが判明した．時間 1 次精度では Newton 法は 1 回だけ行われて $\hat{Q}^{p=1} = \hat{Q}^{n+1}$ とする．

式 (3.4.35) 左辺 [] 内の正方行列は空間差分を含んでいる．式 (3.4.35) を直接解くとなると，総格子点数の 2 乗に比例する要素数を持つ非常に大きな行列を反転させなければならない．通常，式 (3.4.35) は直接解かれることはなく，近似式に変形して段階的に解かれる．本研究では Yoon and Jameson による LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss Seidel) 法⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾を用いる．

Yoon and Jameson の LU-SGS 法では式 (3.4.35) を次式で近似する．

$$\begin{aligned}
LD^{-1}U\Delta\hat{Q}^p &= -\frac{\Delta t}{1+\theta}\hat{R} \\
L &= I + \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(D_\xi^-\hat{A}^+ + D_\eta^-\hat{B}^+ - \hat{A}^- - \hat{B}^-\right) = D - \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(\hat{A}_{i-1,j}^+ + \hat{B}_{i,j-1}^+\right) \\
D &= I + \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(\hat{A}^+ - \hat{A}^- + \hat{B}^+ - \hat{B}^-\right) = I + \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(|\hat{A}| + |\hat{B}|\right)_{i,j} \\
U &= I + \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(D_\xi^+\hat{A}^- + D_\eta^+\hat{B}^- + \hat{A}^+ + \hat{B}^+\right) = D + \frac{\Delta t}{1+\theta}\left(\hat{A}_{i+1,j}^- + \hat{B}_{i,j+1}^-\right) \\
|\hat{A}| &= \hat{A}^+ - \hat{A}^-, \quad |\hat{B}| = \hat{B}^+ - \hat{B}^- \\
\hat{R} &= \frac{1}{\Delta t}\left[(1+\theta)(\hat{Q}^p - \hat{Q}^n) - \theta\Delta\hat{Q}^{n-1}\right] + D_\xi(\hat{E} - \hat{E}_v) + D_\eta(\hat{F} - \hat{F}_v)
\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

ただし差分オペレータ D_ξ, D_η の上付添字は + が前進差分, - が後退差分を表している. $\hat{A}^+$ は本来 $\hat{A}^+ = R_\xi \text{diag}\left(\left(\lambda'_\xi \pm |\lambda'_\xi|\right)/2\right) R_\xi^{-1}$ と定義されるが, 次式のように近似することによって数値粘性項が増加し, 数値的安定性が向上する.

$$\hat{A}^\pm = [\hat{A} \pm \sigma(\hat{A})I]/2, \quad \hat{B}^\pm = [\hat{B} \pm \sigma(\hat{B})I]/2 \tag{3.4.37}$$

$$\sigma(\hat{A}) = \max\left(|\lambda'_\xi|\right) = |U| + c\sqrt{(\xi_x)^2 + (\xi_y)^2}, \quad \sigma(\hat{B}) = \max\left(|\lambda'_\eta|\right) = |V| + c\sqrt{(\eta_x)^2 + (\eta_y)^2} \tag{3.4.38}$$

式 (3.4.38) は Yoon and Jameson の原著に示されているものである. しかし本研究が行う翼列計算の場合, 式 (3.4.38) では数値的発散 (失速線近傍において負圧面前縁付近で加速膨張過大のため負圧になる) が生じることが分かった. そこで本研究では千葉, 山本⁽¹⁷⁾ (1998) が圧縮性電磁流体粘性流れに用いた手法を参考に, 粘性項と熱伝導項の対角成分を考慮して式 (3.4.38) に付加した. それは次式で表される.

$$\begin{aligned}
\sigma(\hat{A}) &= |U| + c\sqrt{(\xi_x)^2 + (\xi_y)^2} + v_\xi, \quad \sigma(\hat{B}) = |V| + c\sqrt{(\eta_x)^2 + (\eta_y)^2} + v_\eta \\
v_\xi &= \left\{(\xi_x)^2 + (\xi_y)^2\right\}(\mu_{eff} + \kappa_{eff}/c_v)/\rho, \quad v_\eta = \left\{(\eta_x)^2 + (\eta_y)^2\right\}(\mu_{eff} + \kappa_{eff}/c_v)/\rho
\end{aligned} \tag{3.4.39}$$

ここで c_v は定積比熱である. 式 (3.4.39) を用いることにより数値的発散は回避できるようになった.

ところで式 (3.4.39) はセル境界 $((i+1/2, j), (i, j+1/2))$ 等で $\sigma(\hat{A})/J, \sigma(\hat{B})/J$ として評価さ

れる． v_ξ, v_η を除いた項は対流項から現れる項である．3・4・4節で示した対流項の評価方法と同様にするため， v_ξ, v_η を除いた項に用いる流速 u, v ，音速 c には Roe の平均（式 (3.4.30)）から算出した．また v_ξ, v_η は粘性項から現れる項である．3・4・5節で示した粘性項の評価方法と同様にするために μ_{eff}, κ_{eff} はセル境界に隣接する格子点での値の平均値（式 (3.4.32)）を用いた．密度 ρ は $1/\rho_{mean} = (1/\rho_L + 1/\rho_R)/2$ となるように

$$\rho_{mean} = 2\rho_L\rho_R/(\rho_L + \rho_R) \quad (3.4.40)$$

から算出した．ただし添え字 L, R はセル境界に隣接する格子点 $((i, j), (i+1, j))$ 等）を表す．式 (3.4.40) は粘性項に現れる速度勾配を評価する差分について，例えば $u_R - u_L$ が

$$\begin{aligned} u_R - u_L &= \frac{(\rho u)_R}{\rho_R} - \frac{(\rho u)_L}{\rho_L} = \left\{ \frac{\partial(\rho u / \rho)}{\partial \rho} \right\}_{mean} (\rho_R - \rho_L) + \left\{ \frac{\partial(\rho u / \rho)}{\partial(\rho u)} \right\}_{mean} \{(\rho u)_R - (\rho u)_L\} \\ &= -\frac{u_{mean}}{\rho_{mean}} (\rho_R - \rho_L) + \frac{1}{\rho_{mean}} \{(\rho u)_R - (\rho u)_L\} \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

のように保存変数 $\rho, \rho u$ の差分で評価した際に恒等的に式 (3.4.41) が満足される ρ_{mean} である．

実際の計算では式 (3.4.36) は

$$\text{Step 1 : } L\Delta\hat{Q}^* = -\frac{\Delta t}{1+\theta} \hat{R} \quad (3.4.42)$$

$$\text{Step 2 : } D^{-1}U\Delta\hat{Q}^p = \Delta\hat{Q}^*$$

という2段階で解かれる．Step 1 は $(i, j) = (1, 1)$ から，Step 2 は $(i, j) = (i_{max}, j_{max})$ から順番に解いていく Gauss-Seidel 法の形をとっている．具体形を以下に示す．

Step 1 :

$$\left[I + \frac{\Delta t}{1+\theta} (|\hat{A}| + |\hat{B}|)_{i,j} \right] \Delta \hat{Q}_{i,j}^* = \frac{\Delta t}{1+\theta} \left[-\hat{R}_{i,j} + (\hat{A}^+ \Delta \hat{Q}^*)_{i-1,j} + (\hat{B}^+ \Delta \hat{Q}^*)_{i,j-1} \right] \quad (3.4.43)$$

Step 2 :

$$\Delta \hat{Q}_{i,j}^p = \Delta \hat{Q}_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{1+\theta} \left[I + \frac{\Delta t}{1+\theta} (|\hat{A}| + |\hat{B}|)_{i,j} \right]^{-1} \left[(\hat{A}^- \Delta \hat{Q}^p)_{i+1,j} + (\hat{B}^- \Delta \hat{Q}^p)_{i,j+1} \right]$$

式 (3.4.43) は数値粘性を大きく評価した場合の 1 次精度風上差分に相当しており，有限体積的に考えると ξ 方向流束ヤコビアン行列に関する項は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} |\hat{A}|_{i,j} &= \frac{J_{i,j}}{2} \left[\left\{ \frac{\sigma(\hat{A})}{J} \right\}_{i+1/2,j} + \left\{ \frac{\sigma(\hat{A})}{J} \right\}_{i-1/2,j} \right] I \\ \hat{A}_{i-1,j}^+ &= \frac{J_{i-1,j}}{2} \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i-1/2,j} A_{i-1,j} + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i-1/2,j} B_{i-1,j} + \left\{ \frac{\sigma(\hat{A})}{J} \right\}_{i-1/2,j} I \right] \\ \hat{A}_{i+1,j}^- &= \frac{J_{i+1,j}}{2} \left[\left(\frac{\xi_x}{J} \right)_{i+1/2,j} A_{i+1,j} + \left(\frac{\xi_y}{J} \right)_{i+1/2,j} B_{i+1,j} - \left\{ \frac{\sigma(\hat{A})}{J} \right\}_{i+1/2,j} I \right] \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

ただし $\sigma(\hat{A})$ には式 (3.4.39) で密度 ρ の評価には式 (3.4.40) を用いたものを用いる．

$A = \partial E / \partial Q$, $B = \partial F / \partial Q$ はデカルト座標での流束ヤコビアン行列である．式 (3.4.44) の $(\xi_x/J)_{i-1/2,j} A_{i-1,j} + (\xi_y/J)_{i-1/2,j} B_{i-1,j}$ はメトリックをセル境界 $(i-1/2, j)$ で評価し，物理量を格子点 $(i-1, j)$ 上で評価したときの ξ 方向の流束ヤコビアン行列 $\hat{A}$ に等しい．式 (3.4.44) だけが 3・4・4 節で示した対流項の評価法と矛盾がない方法である．

式 (3.4.44) 第 1 式から分かるように $|\hat{A}|$, $|\hat{B}|$ は対角行列である．そのため，Step 1, 2 ともに $|\hat{A}|$, $|\hat{B}|$ を含んだ行列の反転は単純な除算になる．

時間 1 次精度では数値的安定性をさらに向上させるために Jameson et al. による Runge-Kutta 法⁽¹⁸⁾ (1981) を併用する．Jameson et al. の Runge-Kutta 法は次のように表される．

$$\begin{aligned} \hat{Q}^{(1)} &= \hat{Q}^n + \frac{1}{4} \Delta \hat{Q}^{(0)} \\ \hat{Q}^{(2)} &= \hat{Q}^n + \frac{1}{3} \Delta \hat{Q}^{(1)} \\ \hat{Q}^{(3)} &= \hat{Q}^n + \frac{1}{2} \Delta \hat{Q}^{(2)} \\ \hat{Q}^{n+1} &= \hat{Q}^n + \Delta \hat{Q}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.4.45)$$

式 (3.4.45) 中 $\Delta\hat{Q}^{(i)}$ が Newton 法で解かれる値である．式 (3.4.45) は陽解法では時間 4 次精度を有するが，陰解法での時間精度は定義できない．しかし陰解法に適用すれば数値的安定性が向上する．

3・5 境界条件

3・4 節で示した方法を各 iteration で実行した後，計算領域境界では境界条件が課せられる．本研究では翼列上・下流に計算領域が伸張しやすいこと，翼面や翼間に多くの格子を配しやすいことから上・下流に H 型，翼列まわりに O 型を配した H-O-H 型格子を用いている．この場合，Fig. 3.5.1 に示すように入境界，出口境界，翼面境界，周期境界，異なる格子とつながる接続境界，O 型格子の重なり境界の 6 種類の境界に区分される．境界条件を課す際には計算領域内から物理量を外挿することが多い．本研究では計算の安定性を考えて外挿は全て 0 次外挿を行う．

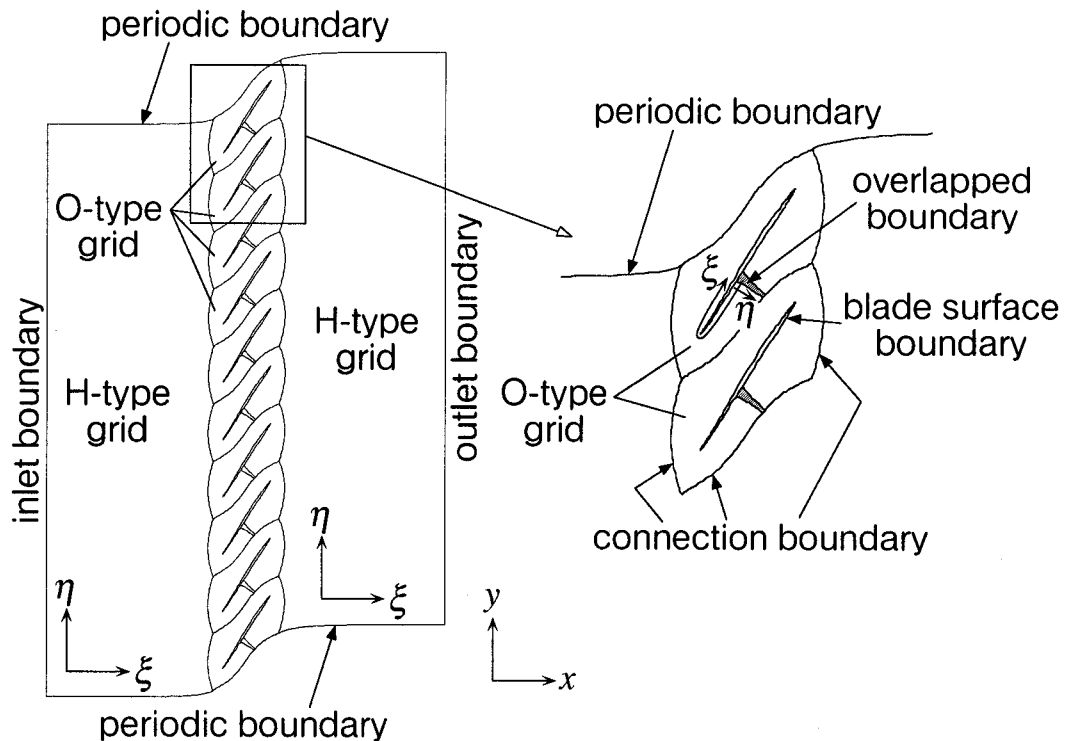


Fig. 3.5.1 Boundaries of H-O-H-type grid

入口境界 2次元圧縮性流れの場合、特性波は4種類ある。軸流亜音速であるため入口境界には3種類の特性波が計算領域外から伝ばし、1種類の特性波（(流速) - (音速)）が計算領域内から伝ばする。そのため入口境界では計算領域外からの条件として3つの値を規定し、残る1つの条件は計算領域内から得られることになる。3つの規定値として絶対系での全温 $T_{0labs} = 300$ [K]、全圧 $p_{0labs} = 0.1$ [MPa]、流速の y 方向成分 v_I （予旋回のない翼列を仮定しているのでこれは周速に等しい）を入口境界で規定する。超音速翼列に特有な unique incidence（5・2節で説明）があるため、入口境界で流入角は規定できない。計算は翼列から見た相対座標系で行うため、全温、全圧は

$$T_{0I} = T_{0labs} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v_I}{c_{0labs}} \right)^2 \right] \quad (3.5.1)$$

$$p_{0I} = p_{0labs} \left(T_{0I} / T_{0labs} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (3.5.2)$$

により相対系のものに変換される。

入口境界での未知数は4つであるから、 T_{0I}, p_{0I}, v_I の他にもう1つ値が必要となる。本研究では Chima⁽¹⁹⁾ (1985) によるリーマン不変量を外挿する境界条件を用いる。入口境界では等エントロピ流れが仮定され、計算領域内から1次元リーマン不変量

$$R_{in}^- = q - 2c/(\gamma-1) \quad (3.5.3)$$

を0次外挿する。ただし $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ は全速度である。 R_{in}^- と T_{0I} から入口境界での全速度 q_{in} を求める。

$$q_{in} = \left[(\gamma-1) R_{in}^- + \sqrt{4(\gamma+1) c_p T_{0I} - 2(\gamma-1) (R_{in}^-)^2} \right] / (\gamma+1) \quad (3.5.4)$$

この全速度 q_{in} と v_I によって x 方向流速 u が求められる。これらから入口境界での保存変数ベクトル $Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$ 全ての値が決定される。

出口境界 出口境界には1種類の特性波が計算領域外から伝ばする。そのため出口境界での規定値は1つになる。出口境界では静圧（背圧） p_2 を規定する。残る3つの条件は計算

領域内から得られるが，本研究では計算領域内から $\rho, \rho u, \rho v$ を 0 次外挿する．ところで定常計算では（一様流を初期値とする）impulsive start により計算を開始する．このとき背圧 p_2 と計算領域内部の静圧に差が有り過ぎて計算が発散することがある．そのため impulsive start の場合には次式に示す Rudy and Strikwerda⁽²⁰⁾ (1980) による無反射境界条件を用いる．

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(p - p_2) = 0, \quad \alpha > 0 \quad (3.5.5)$$

式 (3.5.5) 左辺第 1, 2 項は計算領域外から出口境界に伝ばする特性量の時間変化を表し，これは左辺第 3 項に示される現在の背圧 p と規定値 p_2 との差で調節される．定常解に達した時 $p = p_2$ となり，背圧は規定値と一致する．ダンピングパラメータ α は Rudy and Strikwerda が推奨する値 0.2 を用いている．

翼面境界 本研究では翼面が $\eta = 1 = \text{const}$ の線（ ξ 軸）上に位置し，格子は時間的に変形しない（翼振動を起こさない）．この場合翼面に垂直な方向の運動方程式は

$$(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = -\rho U (\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) \quad (3.5.6)$$

と表される．ただし翼面垂直方向の粘性応力はその大きさを考えて無視してある．演算回数削減のため，本研究では p_ξ を $\eta = 2$ での値で代用する．粘性，非粘性流によって式 (3.5.6) と組み合わせて用いる式が異なる．

・粘性流の場合 速度成分には non-slip 条件

$$u = v = 0 \quad (3.5.7)$$

が課せられる．その結果，式 (3.5.6) 右辺にある ξ （翼面）方向反変速度成分 $U = \xi_x u + \xi_y v$ は 0 になる．式 (3.5.6) から η 方向静圧勾配 p_η が求められ，壁面での静圧が求められる．

密度は断熱条件

$$\frac{\partial T}{\partial n_\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial n_\xi} = (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) \rho_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \rho_\eta = 0 \quad (3.5.8)$$

から得られる。ただし n_ξ は ξ 軸に対する法線ベクトルである。

・ **非粘性流の場合** 速度成分は ξ 方向反変速度成分 U を計算領域内から 0 次外挿し、 η 方向反変速度成分 V を 0 とおくことによって得られる。

$$U = \xi_x u + \xi_y v = U_{extrapolated} \quad (3.5.9)$$

$$V = 0 \quad (3.5.10)$$

式 (3.5.10) は壁面から体積流量が出入りしないことを表している。

式 (3.5.6), (3.5.9), (3.5.10) の他に単位質量あたりの全エンタルピを計算領域内から 0 次外挿する。

$$H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) = H_{extrapolated} \quad (3.5.11)$$

速度 u, v は式 (3.5.9), (3.5.10) から得られており、式 (3.5.11) から密度 ρ は静圧 p と速度 u, v で表すことができる。これらを式 (3.5.6) に代入すれば壁面での静圧が求められ、密度も決定される。

周期境界および接続境界 これらの境界では 1 つの格子の境界がもう 1 つの格子の境界と重なっている。本研究では互いの計算領域内点での保存変数ベクトル $Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$ の算術平均値を境界での値としている。

O 型格子の重なり境界 翼間衝撃波の解像度を損なわないように、O 型格子の ξ 方向境界では始点と終点を含む 3 点が重なっている。計算領域内の値を対応する境界に代入することにより、差分によって得られた値がこの境界には代入される。

3・6 定常解の収束条件

本研究では定常解の収束条件を以下のように定義する。判断基準となる値は残差 (residual)

$$\text{residual} = \sum_{\text{all grid points}} |Q^{n+1} - Q^n| = \sum_{\text{all grid points}} \sqrt{(Q^{n+1} - Q^n)^2} \quad (3.6.1)$$

であり、この残差が初期の残差に対して 10^{-4} 以下となった場合を定常解と判断する。さらに各翼前・後縁の静圧をモニタしており、それらが定常になることも確認して収束判定を行っている。

参考文献

1. Yee, H. C., Warming, R. F. and Harten, A., 1985, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 57, pp. 327-360.
2. 高倉葉子, 小川哲, 石黒登美子, 1988, "3次元翼まわりの粘性流れに関して", 第6回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, pp. 215-221.
3. Takakura, Y., Ogawa, S. and Ishiguro, T., 1989, "Turbulence Models for 3D Transonic Viscous Flows", *Proceedings, AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference*, Buffalo, New York, 89-1952-CP, pp. 240-248.
4. Yoon, S. and Jameson, A., 1988, "Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations", *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 9, pp. 1025-1026.
5. Yoon, S. and Kwak, D., 1992, "Implicit Navier-Stokes Solver for Three-Dimensional Compressible Flows", *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 11, pp. 2653-2659.
6. Yoon, S. and Jameson, A., 1994, "Multigrid Convergence of an Implicit Symmetric Relaxation Scheme", *AIAA Journal*, Vol. 32 No. 5, pp. 950-955.
7. Yoon, S., Jameson, A. and Kwak, D., 1995, "Effect of Artificial Diffusion Schemes on Multigrid Convergence", *AIAA Paper* 95-1670.
8. Baldwin, B. S. and Lomax, H., 1978, "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", *AIAA Paper* 78-257.
9. Fan, S., Lakshminarayana, B. and Barnett, M., 1993, "Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Model for Unsteady Turbulent Boundary-Layer Flows", *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 10, pp.

1777-1784.

10. Gerolymos, G. A. and Vallet, I., 1996, "Implicit Computation of Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equations Using $k-\varepsilon$ Closure", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 7, pp. 1321-1330.
11. Gerolymos, G. A., Vallet, I., Böles, A. and Ott, P., 1996, "Computation of Unsteady Three-Dimensional Transonic Nozzle Flows Using $k-\varepsilon$ Turbulence Closure", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 7, pp. 1331-1340.
12. Tweedt, D. L., Schreiber, H. A. and Starcken, H., 1988, "Experimental Investigation of the Performance of a Supersonic Compressor Cascade", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 110, No. 4, pp. 456-466.
13. Harten, A., 1984, "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-23.
14. Yee, H. C., Klopfer, G. H. and Montage, J. L., 1990, "High Resolution Shock-Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 88, pp. 31-61.
15. Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372.
16. 正木大作, 梶昭次郎, 1997, "Roe の近似 Riemann solver の収束性に関する一考察", 日本航空宇宙学会誌, 45巻525号, pp. 556-563.
17. 千葉史人, 山本悟, 1998, "LU-SGS 法を用いた圧縮性電磁流体粘性流れの数値解析", 第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 339-340.
18. Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E., 1981, "Numerical Simulation of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", *AIAA Paper* 81-1259.
19. Chima, R. V., 1985, "Inviscid and Viscous Flows in Cascades with an Explicit Multiple-Grid Algorithm", *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 10, pp. 1556-1563.
20. Rudy, D. H. and Strikwerda, J. C., 1980, "A Nonreflecting Boundary Condition for Subsonic Navier-Stokes Calculations", *Journal of Computational Physics*, No. 36, pp. 55-70.

第4章 計算格子および計算コードの検証

第3章で示した計算方法をもとに計算コードは作成されている。本章では計算格子を示し、計算コードの検証を行う。検証には空間精度、時間精度それぞれで異なる方法を用いている。空間精度に関しては Tweedt et al.⁽¹⁾ (1988) の実験結果と本計算結果を比較する。時間精度に関してはまず異なるスキームと時間ステップの組み合わせを用い、非定常計算には時間2次精度が不可欠であることを示す。さらに異なる時間ステップによって時間2次精度計算を行い、本計算が必要とする時間ステップを決定する。

4・1 計算格子

Fig. 4.1.1, 4.1.2 に粘性、非粘性計算用の計算格子をそれぞれ示す。格子線は2本毎に示している。いずれも上・下流にH型格子、10枚の翼まわりに10個のO型格子を配している。翼にはそれぞれ Fig. 4.1.1, 4.1.2 に示すように翼番号がつけられ、blade 1 下側の境界と blade 10 上側の境界が周期境界になる。

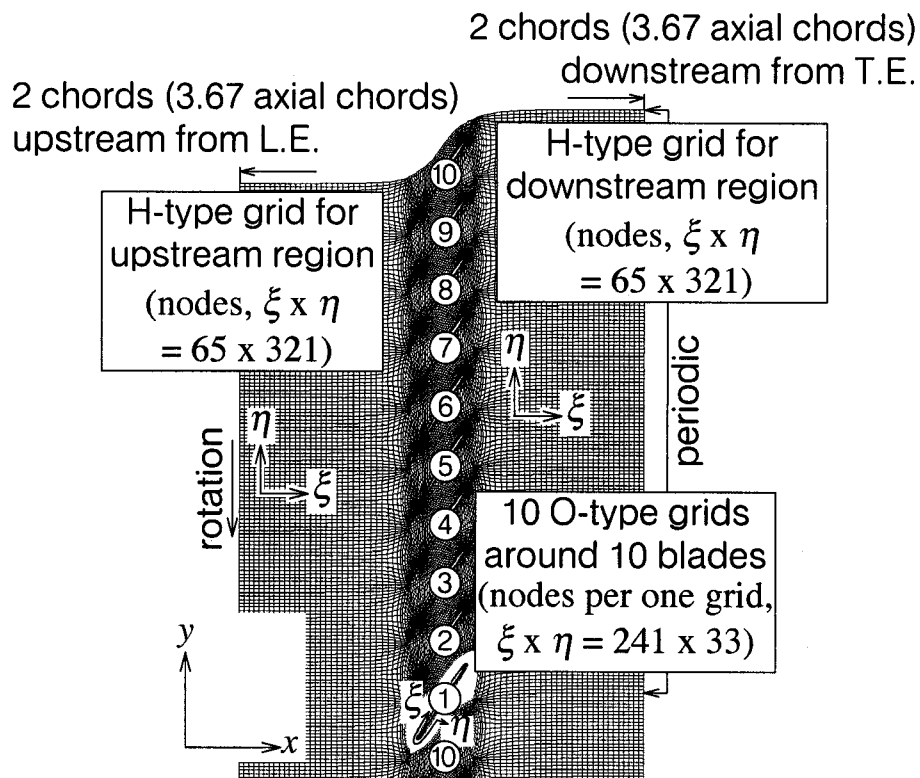


Fig. 4.1.1 Computational grid for viscous calculation (Every other grid line is shown)

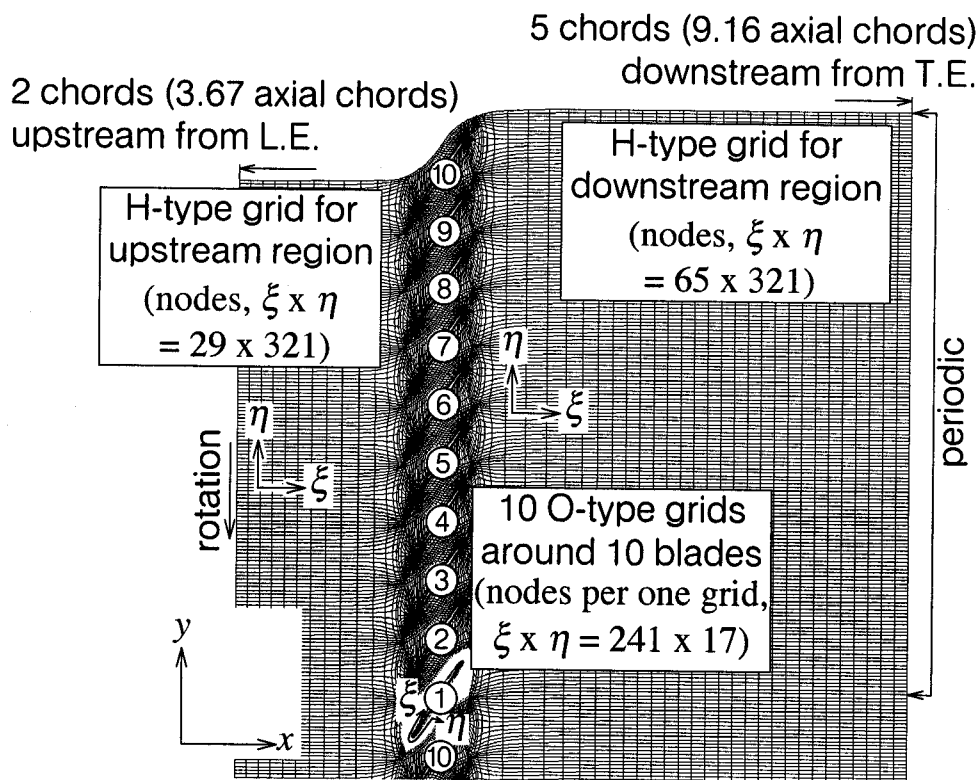


Fig. 4.1.2 Computational grid for inviscid calculation (Every other grid line is shown)

粘性計算格子 (Fig. 4.1.1) の格子点数は H 型格子が上・下流ともに $\xi \times \eta = 65 \times 321$, O 型格子が 1 つあたり $\xi \times \eta = 241 \times 33$ であり, 翼面上最小格子高さは翼弦長に対して 10^{-5} である. これは壁座標 $y^+ = (y_{wall} \sqrt{\tau_{wall} / \rho}) / \nu_{wall}$ (y_{wall} : 壁面からの距離, ν_{wall} : 壁面動粘性係数, τ_{wall} : 壁面せん断応力) にして $y^+ \sim 2$ であり, 粘性低層 ($y^+ < 5$) を解像するために 2, 3 の格子点が粘性低層内に配置されている. 入口, 出口境界はそれぞれ翼前縁, 後縁から 2 翼弦長の位置にある.

非粘性計算格子 (Fig. 4.1.2) の格子点数は上流の H 型格子が $\xi \times \eta = 29 \times 321$, 下流の H 型格子が $\xi \times \eta = 65 \times 321$, O 型格子が 1 つあたり $\xi \times \eta = 241 \times 17$ であり, 翼面上最小格子高さは翼弦長に対して 10^{-3} である. 境界層が存在しないために粘性計算時よりも少ない格子点を用いることができる. 入口境界は翼前縁から 2 翼弦長, 出口境界は後縁から 5 翼弦長の位置にある. 出口境界位置が粘性計算格子よりも遠いのは下流域に発生する衝撃波が粘性計算時に比べて減衰しにくいためである.

いずれの格子も翼面上での精度をより良くするために翼面上の格子線を直交させている. またこれらの格子は 1 ピッチ分の格子を形成し, それを積み重ねて形成されている.

すなわち各翼間で格子分布は同一である。

周期境界条件は単なる算術平均で与えられるため，周期境界上に衝撃波が発生する場合は Rankine-Hugoniot の関係式が満たされない．この場合は下流の周期境界位置を変更し，衝撃波が計算領域内にある格子を用いた．この格子による計算結果では定常な流れ場が得られた．

翼形状には Tweedt et al.⁽¹⁾ (1988) の実験供試体である ARL-SL19 翼列を用いた．これは Aerospace Research Laboratories が設計したコンプレッサの翼テイクアップ付近 (Stream Line 19) と等価な 2 次元流れを再現するように設計されている．Table 4.1.1 に ARL-SL19 翼列の諸元を示す．翼前縁で負圧面側が凹型になっている (負のキャンバ角) ため，翼断面形状が S 字型になる．これは凹型部分で圧縮波を発生させ，衝撃波上流のマッハ数を減少させることにより衝撃波による全圧損失が低減されることを目的としている (pre-compression 翼) ．

Table 4.1.1 ARL-SL19 cascade (Tweedt et al.⁽¹⁾ (1988))

Solidity, chord/pitch	1.5294	Stagger angle	56.93 deg
Maximum blade thickness/chord	0.0255	Blade chord	85 mm
Leading edge radius/chord	0.00128	Design relative inlet Mach number	1.612
Camber angle at leading edge	-2.89 deg	Design static pressure ratio	2.15

Fig. 4.1.1, 4.1.2 は楕円型偏微分方程式を数値的に解き，その解を格子座標に割り当てたものである．楕円型偏微分方程式を解く方法は，計算領域境界位置が物体によって指定されている場合に滑らかな格子形成を行うのに適している．

この方法では $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ に関する Poisson 方程式

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi, \eta), \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi, \eta) \quad (4.1.1)$$

が基礎式になる．式 (4.1.1) の従属変数 ξ, η を x, y に入れ替えると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -[P(\xi, \eta)x_{\xi} + Q(\xi, \eta)x_{\eta}]/J^2 \\
\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -[P(\xi, \eta)y_{\xi} + Q(\xi, \eta)y_{\eta}]/J^2 \\
\alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad \beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad \gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad 1/J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

式 (4.1.2) を数値的に解き、得られた解 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ を格子座標とする。式 (4.1.2) 中の湧き出し $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ は格子線間隔を制御するために用いられる。

湧き出し $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ は H 型格子と O 型格子の接続境界と、O 型格子の翼面境界と外側境界上に置いている。湧き出しの影響は格子座標に対して指数関数的に減衰する形をとっている。隣接する格子との接続を滑らかにするために O 型格子の翼面境界と外側境界では η 方向格子高さ s_{η} と格子線交差角 θ を制御する。試行錯誤をあまり必要とせずそのような制御を可能とする方法に Steger and Sorenson⁽²⁾ (1979) の方法がある。彼らの方法では湧き出し $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
P(\xi, \eta) &= p(\xi) \Big|_{\eta=1} e^{-a_1(\eta-1)} + p(\xi) \Big|_{\eta=\eta_{max}} e^{-a_2(\eta_{max}-\eta)} \\
Q(\xi, \eta) &= q(\xi) \Big|_{\eta=1} e^{-b_1(\eta-1)} + q(\xi) \Big|_{\eta=\eta_{max}} e^{-b_2(\eta_{max}-\eta)}
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned}
p(\xi) &= J[y_{\eta}R_{11} - x_{\eta}R_{12}], \quad q(\xi) = J[-y_{\xi}R_{11} + x_{\xi}R_{12}] \\
R_{11} &= -J^2[\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}], \quad R_{12} = -J^2[\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}]
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

$$x_{\eta} = \frac{s_{\eta}(-x_{\xi}\cos\theta - y_{\xi}\sin\theta)}{\sqrt{(x_{\xi})^2 + (y_{\xi})^2}}, \quad y_{\eta} = \frac{s_{\eta}(-y_{\xi}\cos\theta + x_{\xi}\sin\theta)}{\sqrt{(x_{\xi})^2 + (y_{\xi})^2}} \tag{4.1.5}$$

ここで s_{η} は η 方向格子高さであり、 θ はデカルト座標におけるベクトル $(-y_{\xi}, -x_{\xi})$ と (y_{η}, x_{η}) のなす角である。

4・2 空間精度の検証

空間精度の検証として Tweedt et al.⁽¹⁾ (1988) の実験結果と本計算結果を翼面上等エントロピマッハ数 ($M_{is} = \sqrt{2 \left\{ (p_{01}/p)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right\} / (\gamma-1)}$) 分布に関して比較する．計算格子は Fig. 4.1.1 の 1 ピッチ分を使用し，1 ピッチで空間周期性があると仮定して行う．

Fig. 4.2.1 に結果を示す．4 条件に対して行っている．各図の脚注にある AVDR は Axial Velocity Density Ratio の略であり，(出口質量流量)/(入口質量流量) を表す．実験においては

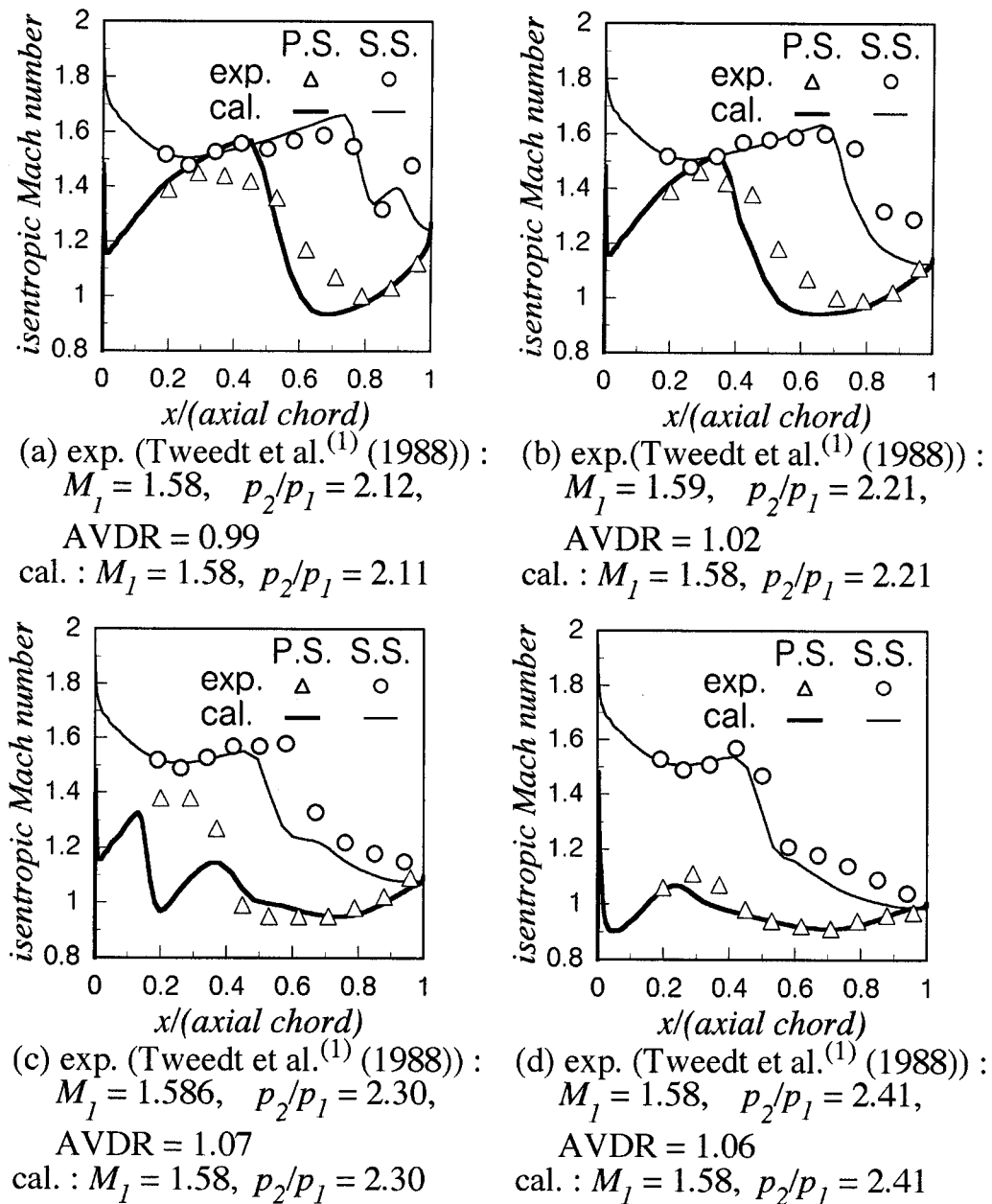


Fig. 4.2.1 Comparison of isentropic Mach number between the numerical and experimental (Tweedt et al.⁽¹⁾ (1988)) results

側面境界層を制御する抽気口があるために AVDR を表示する必要があるが、計算においては全て $AVDR = 1$ である。Fig. 4.2.1 中の急な等エントロピマッハ数の減少は衝撃波を表すが、Fig. 4.2.1(c) の場合を除き計算結果は衝撃波の位置を良く予測している。Fig. 4.2.1(c) の不一致に関しては本計算では考慮されていない AVDR による影響が主に関係しているものと思われる。この結果より本計算コードの空間精度の妥当性が確認された。

4・3 時間精度の検証

4・3・1 3種類のスキームと時間ステップの組み合わせの比較

衝撃波が過渡的に動く場合の 1 ピッチ計算を 3 種類のスキームと時間ステップの組み合わせによって行った。これらのスキームは (i) 時間 4 次精度陽的 Runge-Kutta スキーム (式 (3.4.45)) , $\Delta t = 2.0 \times 10^{-9}$ [s], (ii) 時間 1 次精度陰解法, $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ [s], (iii) 時間 2 次精度陰解法 (本計算方法) , $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ [s] である。計算格子は 4・2 節と同様 Fig. 4.1.1 の 1 ピッチ分である。(i) は陽解法であるために全格子点で CFL 数が 1 よりも小さくなるように時間ステップを設定しなければ数値的安定性が保証されない。

流れ場の計算条件は (周速)/(上流絶対系淀み点音速) $= v_1/c_{0labs} = 1.5$, (背圧)/(上流絶対系全圧) $= p_2/p_{0labs} = 1.6$ としている。計算初期には時間進行とともに翼間衝撃波が上流に移動する。結果を Fig. 4.3.1 に示す。Fig. 4.3.1(a) は 3 つの方法による静圧の時間履歴であるが、静圧をモニタする点は Fig. 4.3.1(b) の計算初期における等高線上に示してある。3 つの方法のうち (i) が最も時間精度が良く、(i) による結果をもとに他の方法の時間精度を判定することができる。(i) と (iii) による結果は Fig. 4.3.1(a) では重なっている。それに対し (ii) は (iii) よりも小さな時間ステップを用いているにもかかわらず (i) と一致しない。このことから時間精度は最低でも 2 次精度は必要であることが分かる。時間精度高次化の必要性は Copenhaver et al.⁽³⁾ (1995) も指摘している。(i) に比べて (iii) は計算所要時間が少ないことから本研究の非定常計算では (iii) による方法、つまり時間 2 次精度陰解法を用いることにする。

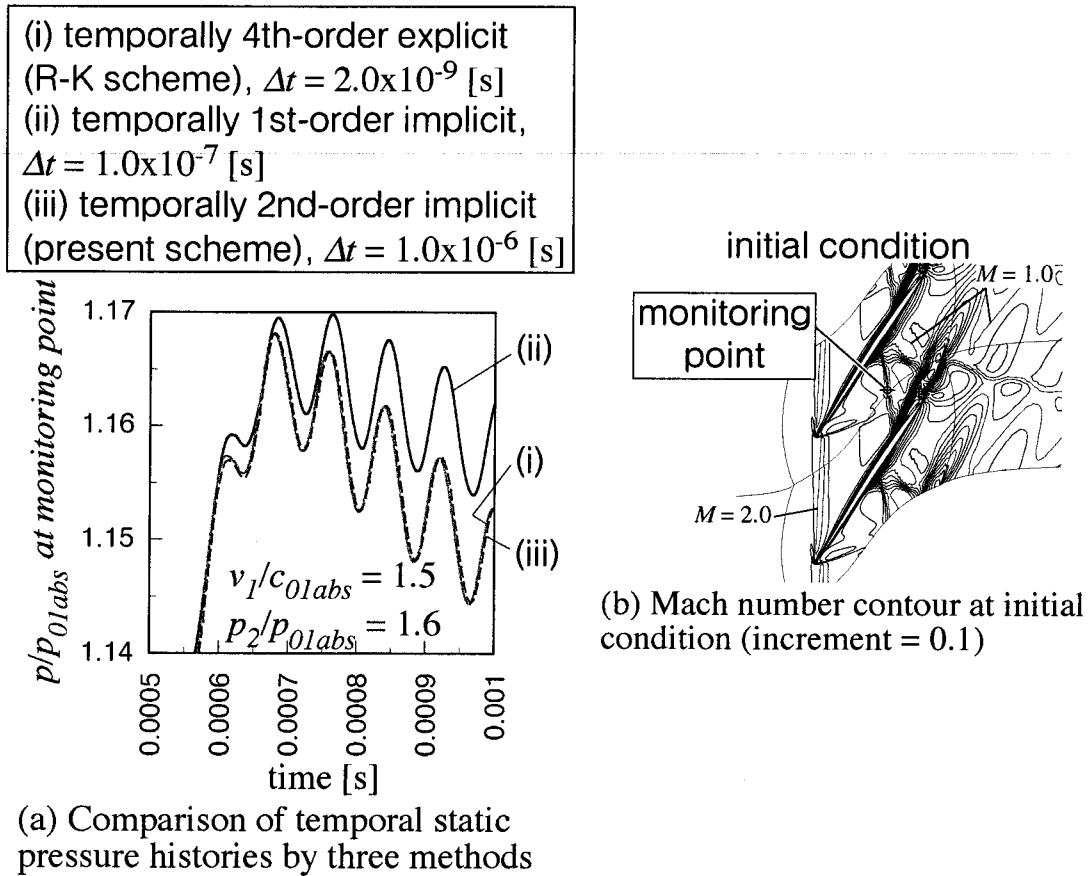


Fig. 4.3.1 Comparison of temporal static pressure histories by three methods and its monitoring point

4・3・2 適切な時間ステップの決定

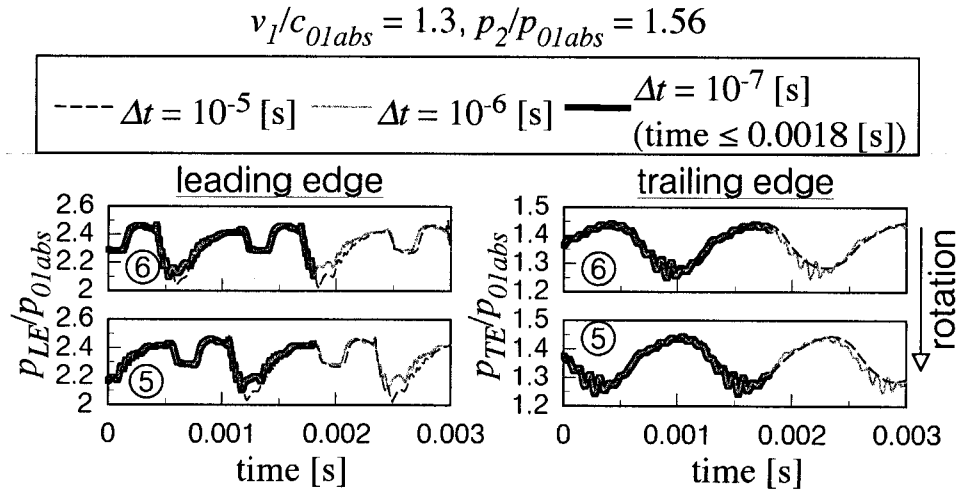
第5章以降で行う非定常計算に適切な時間ステップを決定するために、同一条件下での異なる時間ステップによる計算を行う。計算格子は Fig. 4.1.1 の 10 ピッチ粘性計算用のものを用い、前節の結果から時間2次精度陰解法について検討する。ある時間ステップでの結果がより細かい時間ステップでの結果と同一になることは、その時間ステップで精度が確保できているための必要条件である。精度が確保できる最大の時間ステップを用いれば計算所要時間を短縮することができる。本節では定常状態が unique incidence (5・2節で説明) によりチョークしている場合として (a) $v_1/c_{01abs} = 1.3$, $p_2/p_{01abs} = 1.56$, 不始動状態 (5・2節で説明) の場合として (b) $v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.402$, 亜音速流入で衝撃波が発生しない場合として (c) $v_1/c_{01abs} = 0.6$, $p_2/p_{01abs} = 1.06$ の計算をそれぞれの場合の代表として行う。上に挙げた (a) ~ (c) の条件ではいずれも変動が周方向に伝ばする現象が見られる。

比較は各翼前・後縁の静圧時間履歴によって行った。Fig. 4.3.2 に blade 5, 6 前・後縁における静圧時間履歴を示す。Fig. 4.3.2(a) $v_1/c_{0labs} = 1.3$, $p_2/p_{0labs} = 1.56$ の場合は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-7}$ [s] ($\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ [s] による結果は 0.0018 [s] まで) で, (b) $v_1/c_{0labs} = 1.1$, $p_2/p_{0labs} = 1.402$ と (c) $v_1/c_{0labs} = 0.6$, $p_2/p_{0labs} = 1.06$ の場合は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6}$ [s] で計算を行っている。Fig. 4.3.2(a) - (c) 全ての場合において中間の時間ステップ ((a) では $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ [s], (b) と (c) では $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ [s]) による結果は細かい時間ステップによる結果と一致しているが, 荒い時間ステップでは一致しない。(a), (c) の翼後縁で見られる高周波振動は渦放出によるものである。この振動は荒い時間ステップでは全く捕らえられていない。

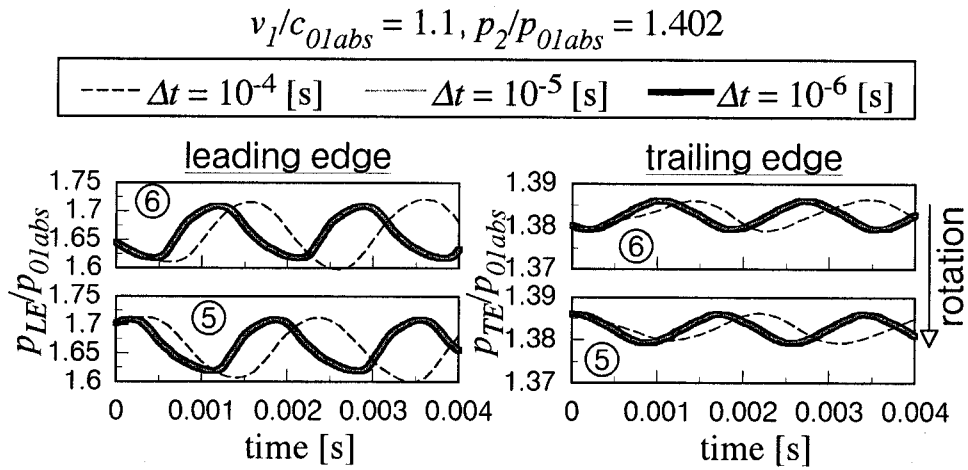
以上の結果から (周速)/(上流絶対系淀み点音速) = $v_1/c_{0labs} > 1.1$ の場合は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ [s], $v_1/c_{0labs} \leq 1.1$ の場合は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ [s] を適切な時間ステップとする。本計算では7つの周速で計算されるが, それぞれの blade passing 周期と時間ステップとの関係は Table 4.3.1 のようになる。また第5章以降の図中には使用した時間ステップが明記してある。

Table 4.3.1 Relationship between blade passing period and time step Δt

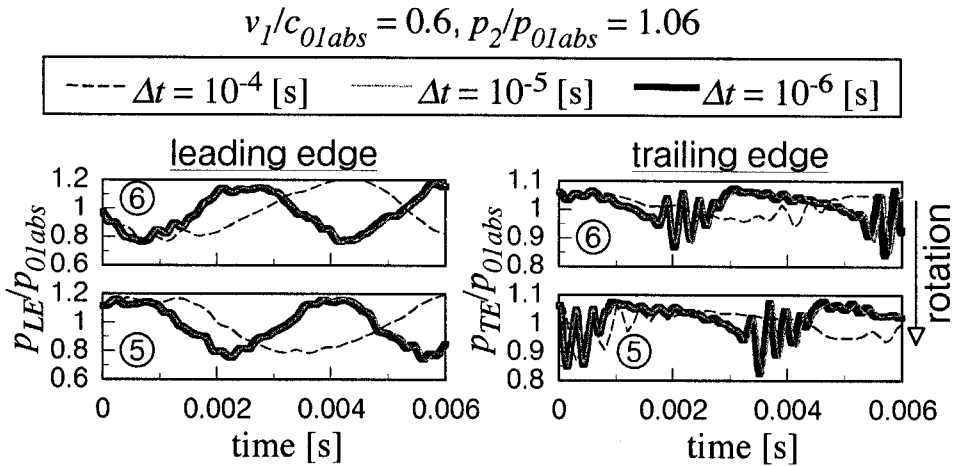
v_1/c_{0labs}	Δt [s]	$\Delta t/(\text{blade passing period})$	$(\text{blade passing period})/\Delta t$
		$= v_1 \Delta t / (\text{pitch})$	$= (\text{pitch}) / (v_1 \Delta t)$
1.5	10^{-6}	9.4×10^{-3}	107
1.3		8.1×10^{-3}	123
1.2		7.5×10^{-3}	133
1.1	10^{-5}	6.9×10^{-2}	15
0.9		5.6×10^{-2}	18
0.8		5.0×10^{-2}	20
0.6		3.7×10^{-2}	27



(a) $v_1/c_{0abs} = 1.3, p_2/p_{0abs} = 1.56, \Delta t = 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-7} \text{ [s]}$



(b) $v_1/c_{0abs} = 1.1, p_2/p_{0abs} = 1.402, \Delta t = 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6} \text{ [s]}$



(c) $v_1/c_{0abs} = 0.6, p_2/p_{0abs} = 1.06, \Delta t = 1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-6} \text{ [s]}$

Fig. 4.3.2 Comparison of temporal static pressure histories by three kinds of time step

参考文献

1. Tweedt, D. L., Schreiber, H. A. and Starke, H., 1988, "Experimental Investigation of the Performance of a Supersonic Compressor Cascade", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 110, No. 4, pp. 456-466.
2. Steger, J., L. and Sorenson, R. L., 1979, "Automatic Mesh-Point Clustering near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations", *Journal of Computational Physics*, No. 33, pp. 405-410.
3. Copenhaver, W. W., Puterbaugh, S. L. and Hah, C., 1995, "Unsteady Effects due to Interactions between Tip-Clearance Vortex and Rotor Passage Shock in a Transonic Compressor Rotor", *ISABE Paper 95-7073*.

第5章 非定常粘性計算の結果と考察

本章では Fig. 4.1.1 の計算格子を用いた非定常粘性計算の結果を示し考察を行う。流入マッハ数（周速）の影響による非定常現象の性質の違いを見るために、亜音速流入を含めた7つの周速に対して計算を行っている。いずれの周速においても最大背圧点近傍で流れ場が非定常になる。これらの非定常現象のうち変動が周方向に伝ばする現象が11箇所で見られ、これらは4種類に分類される。1つは亜音速翼列流れに通常見られる旋回失速であり、その他は本論文では「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」、「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と呼んでいる。本論文で用いる前回り、後回りという表現は、翼列とともに移動する座標系において変動が周速方向と同または逆方向にそれぞれ伝ばすることを表している。最後に変動が周方向に伝ばする現象の伝ば速度比をアクチュエータディスク解析と比較する。

5・1 計算の仮定と条件

本章で行った計算の仮定と条件を以下に列挙しておく。

- (i) 粘性計算である。
- (ii) 計算格子は Fig. 4.1.1 のものを用いる。ただし $v_1/c_{0labs} = 1.5$, $p_2/p_{0labs} = 1.4$ においてのみ下流の周期境界位置を変更した格子が用いられる。これは Fig. 4.1.1 の格子では（算術平均が与えられる）周期境界上に衝撃波が発生して Rankine-Hugoniot の関係式が満たされないからである。この場合最終的に定常な流れ場が得られた。
- (iii) 入口境界での絶対系全温 T_{0labs} と絶対系全圧 p_{0labs} は全て $T_{0labs} = 300$ [K], $p_{0labs} = 0.1$ [MPa] にそれぞれ固定する。そのため流れ場を決定するパラメータは周速 v_1 と背圧 p_2 になる。
- (iv) unique incidence（5・2節で説明）によりチョークしている場合として $v_1/c_{0labs} = 1.5, 1.3, 1.2$, 不始動状態（5・2節で説明）の場合として $v_1/c_{0labs} = 1.1, 0.9, 0.8$, 亜音速流入で衝撃波が発生しない場合として $v_1/c_{0labs} = 0.6$ の周速における計算を行う。

- (v) 意図的なじょう乱は一切与えていない。じょう乱は数値的誤差により発生する。
- (vi) 初期値には 1 ピッチ計算結果（1 ピッチ毎に周期性があると仮定）を用いる。1 ピッチ計算はまず時間 1 次精度陰解法で行い、定常に収束しない場合は時間 2 次精度に切り替えて得られた結果を初期値に用いる。1 ピッチ計算では定常状態になって 10 ピッチ計算では非定常になる場合があったが、本計算を行った範囲ではその逆はなかった。これは周方向自由度が小さい 1 ピッチ計算では周方向に変動するじょう乱が抑制されるためであると考えられる。また異なる初期値による計算を行った結果、非定常現象が完全に発達した状態では初期値依存性がないことも確認している。

5・2 計算による性能曲線

本計算による性能曲線を Fig. 5.2.1 に示す。上段には断熱効率が示してあり、各周速で最大背圧点に近づくと断熱効率が低下する。各周速に対して流れ場が求まった最大背圧点を結んだ線を失速線と称する。

超音速翼列流れの失速線近傍では周速の増加にともなって亜音速流入、不始動状態、unique incidence によるチョーキングの順に流れ場が変化する。本計算を行った周速の範囲ではその全てが見られた。それぞれで代表的な流れ場をマッハ数等高線にして Fig. 5.2.2 に示す。Fig. 5.2.2 はいずれも失速線近傍の作動点である。

周速が小さい場合は Fig. 5.2.2(a) のように流れが翼列から見て亜音速で流入し、衝撃波は発生しない。このような流れは $v_1/c_{0labs} = 0.6$ においてのみ見られた。ただし Fig. 5.2.2(a) ではすでに旋回失速が発生しており、blade 5 の負圧面に失速セルが見られる。

亜音速流入時よりも周速が大きくなると、Fig. 5.2.2(b) のように衝撃波が前縁から離脱して（離脱衝撃波）発生する。離脱衝撃波のため翼間は全域にわたって亜音速になる。超音速ノズルでは流れが超音速に加速さない場合を不始動状態と呼ぶが、この状態になぞらえて Fig. 5.2.2(b) のような状態は不始動状態と呼ばれる。不始動状態は $v_1/c_{0labs} = 0.8, 0.9, 1.1$ の高背圧側（背圧によって流量が変化する領域、 $v_1/c_{0labs} = 0.8, 0.9$ では $p_2/p_{0labs} > 1.0$ 、 $v_1/c_{0labs} = 1.1$ では $p_2/p_{0labs} > 1.35$ ）においてみられた。 $v_1/c_{0labs} = 0.9, 0.8$ の流量一定の領域（いずれも $p_2/p_{0labs} \leq 1.0$ ）でも離脱衝撃波は発生しているが、衝撃波下流である翼列の流

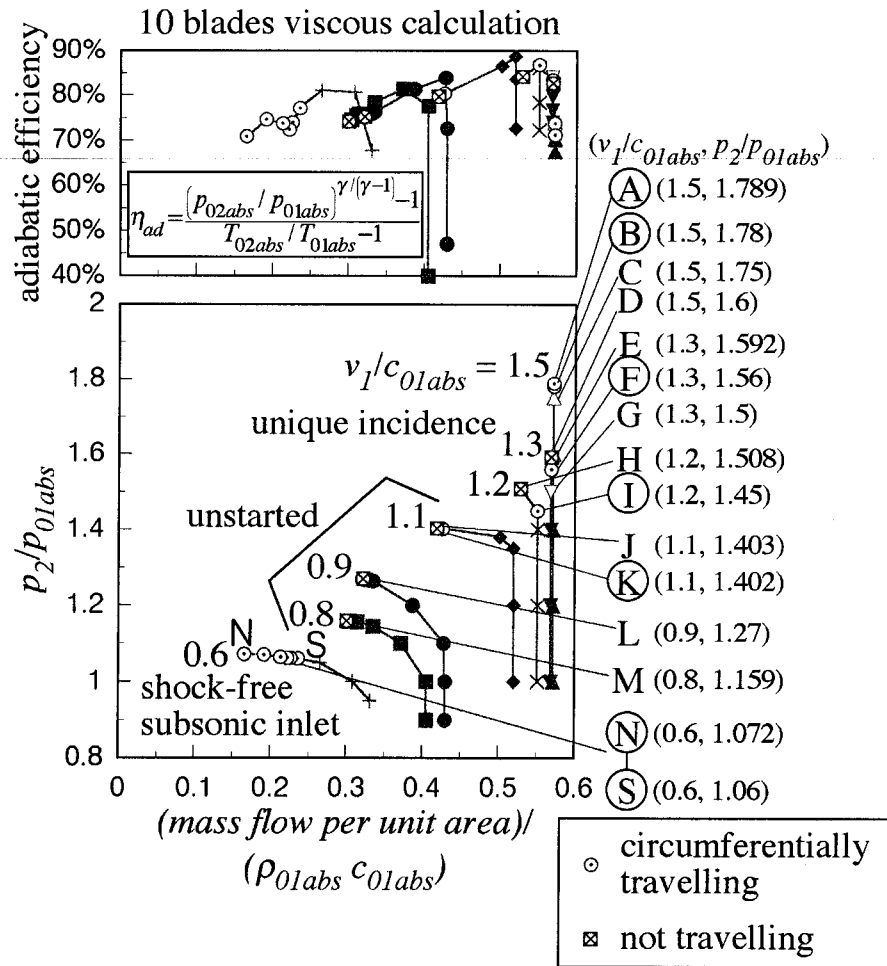


Fig. 5.2.1 Performance map by 10 blades viscous calculations

路面積最小部でマッハ数が1になって流れがチョークする翼間チョークが発生している。 $v_1/c_{0labs} = 1.1$ の流量一定の領域 ($p_2/p_{0labs} \leq 1.35$) では次に述べる unique incidence によるチョークが発生する。

さらに周速が大きくなると Fig. 5.2.2(c)のように衝撃波は翼列上流には発生しなくなる。このときの状態の模式図を Fig. 5.2.2(d) に示す。Fig. 5.2.2(d) の点線で示される翼負圧面から発生する膨張波と負圧面側に発生する弓形衝撃波は干渉し合い、翼列上流に衝撃波は存在しなくなる。この膨張波と衝撃波の干渉の結果、翼列上流には1本の特性波 (neutral characteristic) のみが伝ばし、この特性波によって上流の流れ場が一意的に決定される。この特性波は翼列入口部形状と流入マッハ数によって決定されるため、背圧によって上流の流れ場が変化することはない、流量の変化もない (流れがチョークする)。この状態は unique incidence⁽¹⁾と呼ばれ、超音速翼列に特有のチョーク状態である。unique incidenceによるチョークは $v_1/c_{0labs} = 1.2, 1.3, 1.5$ の全ての定常領域と $v_1/c_{0labs} = 1.1$ の流量一定の領域

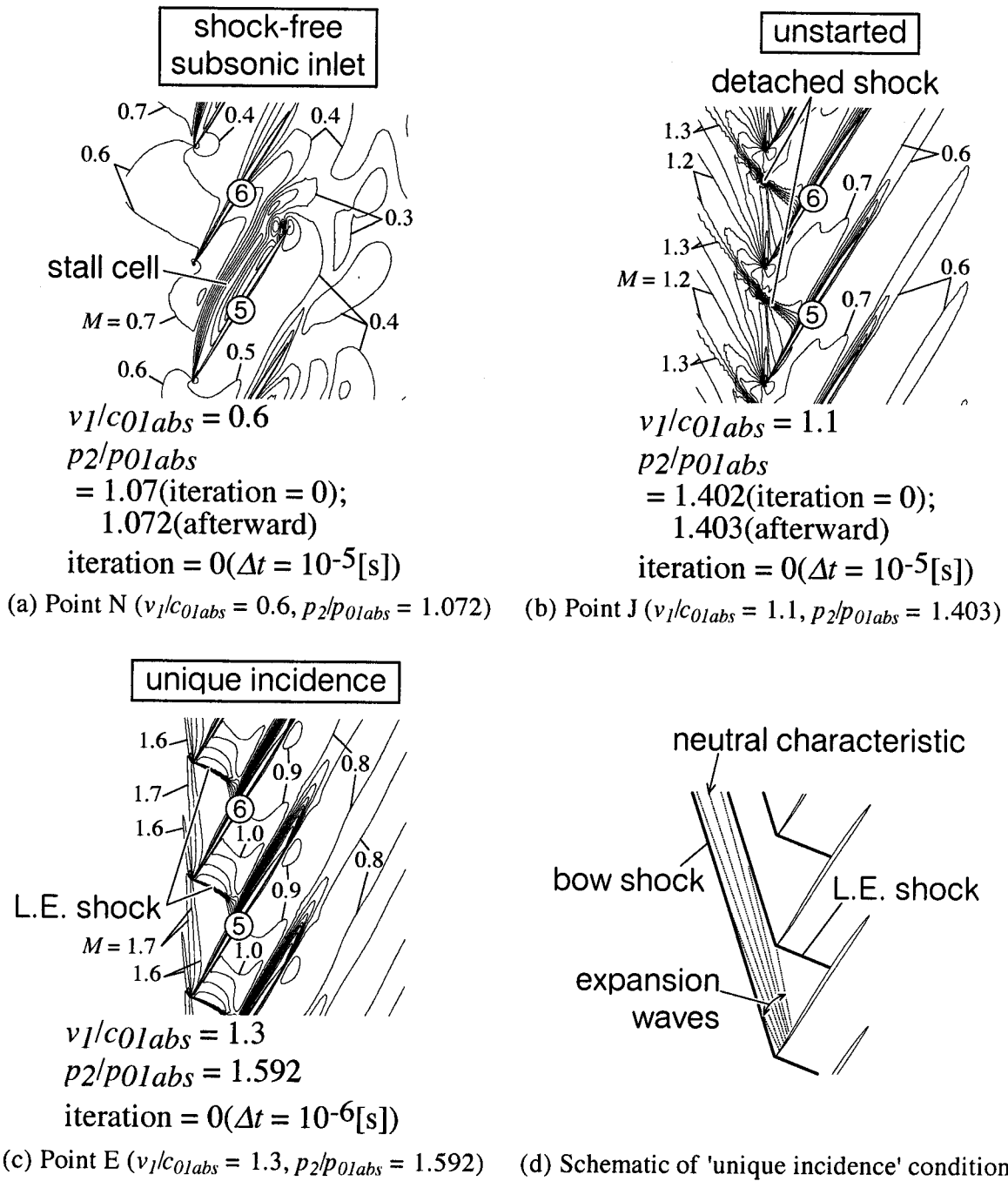


Fig. 5.2.2(a) - (c) Mach number contour (increment = 0.1) around blades 5 and 6 observed at points N, J and E in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 and (d) schematic of 'unique incidence' condition

($p_2/p_{01abs} \leq 1.35$) において見られた。

ふたたび Fig. 5.2.1 に戻ると、黒抜きの点で流れ場は定常になる。ラベル A ~ S を付した白抜きの点は失速線近傍にあり、これらの作動点では非定常現象が見られた。これらの非定常現象の特性を Table 5.2.1(a), (b) に示す。変動が周方向に伝ばする現象は Fig. 5.2.1 の円で囲んだラベルで表される作動点 A, B, F, I, K, N ~ S において見られた。これらの現象は

4種類に分類され、1つは亜音速翼列流れに通常見られる旋回失速である。その他は本論文では「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」、「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ぱ方向が変化する変動」、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と呼ぶことにする。次節以降ではこれらを中心に詳述する。

Table 5.2.1(a) Characteristics of unsteady phenomena

point	v_1/c_{01abs} , p_2/p_{01abs}	propagation velocity ratio	number of circumferential periods over 10 blades	remark
A	1.5, 1.789	0.81	1	"Backward travelling fluctuation related with fluctuating leading edge shock" appears before local backflow at inlet boundary.
B	1.5, 1.78	forward : 1.27 backward : 0.85	1	"Intermittently appearing, forward and backward travelling fluctuation."
C	1.5, 1.75	-	-	Trailing vortex shedding with shock-boundary layer interaction. $St = 0.33$ at point C, 0.32 at point D*.
D	1.5, 1.6	-	-	
E	1.3, 1.592	-	-	Local backflow at inlet boundary.
F	1.3, 1.56	1.19	5	"Forward travelling fluctuation with fluctuating passage shock."
G	1.3, 1.5	-	-	Trailing vortex shedding. $St = 0.34^*$

*Strouhal number St is defined as $St = f \times (\text{boundary layer thickness at trailing edge}) / (\text{mean flow velocity in cascade discharge area})$.

Table 5.2.1(b) Characteristics of unsteady phenomena

point	v_1/c_{01abs} p_2/p_{01abs}	propagation velocity ratio	number of		remark
			circumferential	periods over	
				10 blades	
H	1.2, 1.508	-	-	-	Local backflow at inlet boundary.
I	1.2, 1.45	1.21	1	1	"Forward travelling fluctuation with fluctuating passage shock."
J	1.1, 1.403	-	-	-	Local backflow at inlet boundary.
K	1.1, 1.402	0.86	6	6	"Backward travelling fluctuation related with fluctuating leading edge shock."
L	0.9, 1.27	-	-	-	Local backflow at inlet boundary.
M	0.8, 1.159	-	-	-	Local backflow at inlet boundary.
N	0.6, 1.072	0.85	6	6	
O	0.6, 1.07	0.86	6	6	
P	0.6, 1.064	0.87	6	6	"Rotating stall." Local backflow at inlet boundary occurs at the highest back pressure point N.
Q	0.6, 1.062	0.87	6	6	
R	0.6, 1.061	0.87	6	6	
S	0.6, 1.06	0.87	6	6	

5・3 旋回失速

Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中の点 N～S において亜音速翼列流れに通常見られる旋回失速が見られた。旋回失速が見られた無次元周速 $v_l/c_{01abs} = 0.6$ では亜音速流入で衝撃波が発生しない流れになる。1 ピッチ計算では $p_2/p_{01abs} = 1.061$ (作動点 R) までしか計算できなかったため (入口境界で逆流部分が発生する, 5・7 節で詳述), それ以上の背圧である作動点 Q ($p_2/p_{01abs} = 1.062$) の初期値は作動点 R と同じものを用いた。さらに高い背圧の作動点 P, O, N ($p_2/p_{01abs} = 1.064, 1.07, 1.072$) の流れは作動点 Q の結果から背圧を段階的に増加させて求めた。ここでは点 N～S のうち点 S ($v_l/c_{01abs} = 0.6, p_2/p_{01abs} = 1.06$) の結果を示す。

Fig. 5.3.1 に 点 S における各翼前・後縁での静圧時間履歴を示す。前縁では正弦波状の振動が発生している。後縁ではこれに重畳して後流渦放出による間欠的な高周波振動が見られる。後流渦放出は翼負圧面に発達するはく離域が縮小する際に起こる。翼列出口部での流量平均速度と後縁での境界層厚さに基づく後流渦放出 Strouhal 数は Fig. 5.3.1 の場合約

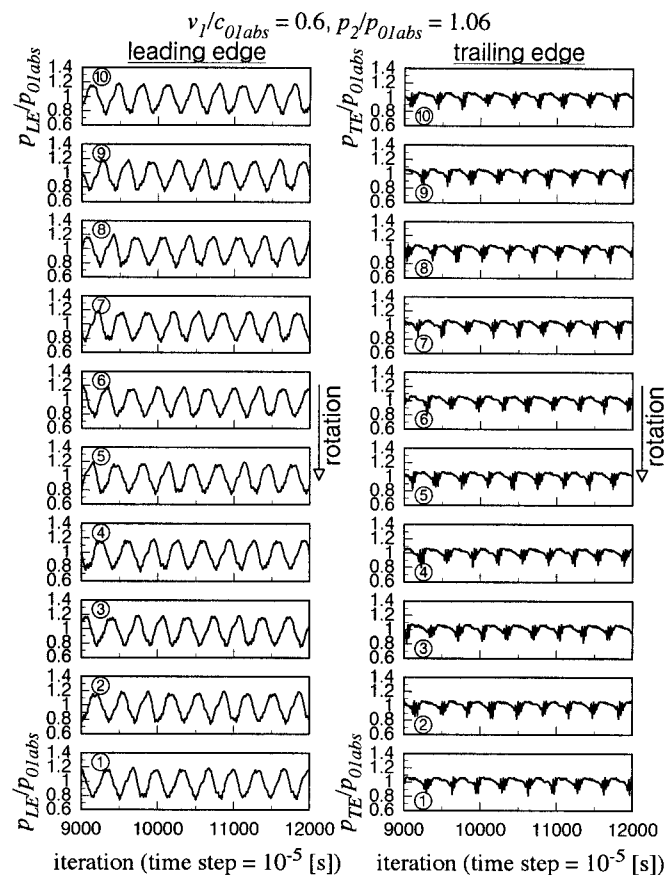


Fig. 5.3.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point S in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_l/c_{01abs} = 0.6, p_2/p_{01abs} = 1.06$)

0.34 である。

Fig. 5.3.2 に blade 6 翼面上の非定常静圧分布を示す。正圧面側については、淀み点の振動を示すために前縁付近の拡大図を付している。負圧面側の破線ははく離域の境界を示したものである。淀み点とはく離域の関係をを見ると、淀み点が下流に移動し始める時にはく離域が成長し始める。このことからはく離は淀み点位置、すなわち incidence の変化と連動して発生していることが分かる。

Fig. 5.3.3 に各翼前縁を結んだ線上での非定常静圧分布を示す。ただし前縁付近では前縁吸引による静圧低下によって各線が重なるため、その領域は削除してある。図中黒太線で示してある iteration = 11660 と 12000 で blade 6 負圧面に発生するはく離域が発達し始める。これらの時点では blade 6 前縁負圧面側の圧力が最小になる。同様に各翼前縁負圧面側で最小圧力になる時がそれぞれの負圧面におけるはく離開始に対応する。この最小領域を直線で近似すると図中の破線のようなになる。破線は 10 ピッチに対して 6 本あり、これらが周速方向 (rotation) と逆方向に伝ばしている。このことは 10 ピッチに対してセル数 6 の失速セルが (翼列とともに移動する相対系において) 後回りに伝ばしていることを表している。この図から伝ば速度比 ((静止系における変動の伝ば速度)/(周速)) を求めると 0.87 になる。点 S 以外の旋回失速点でも失速セル数は 6 であり、伝ば速度比は 0.87 ~ 0.85 である。

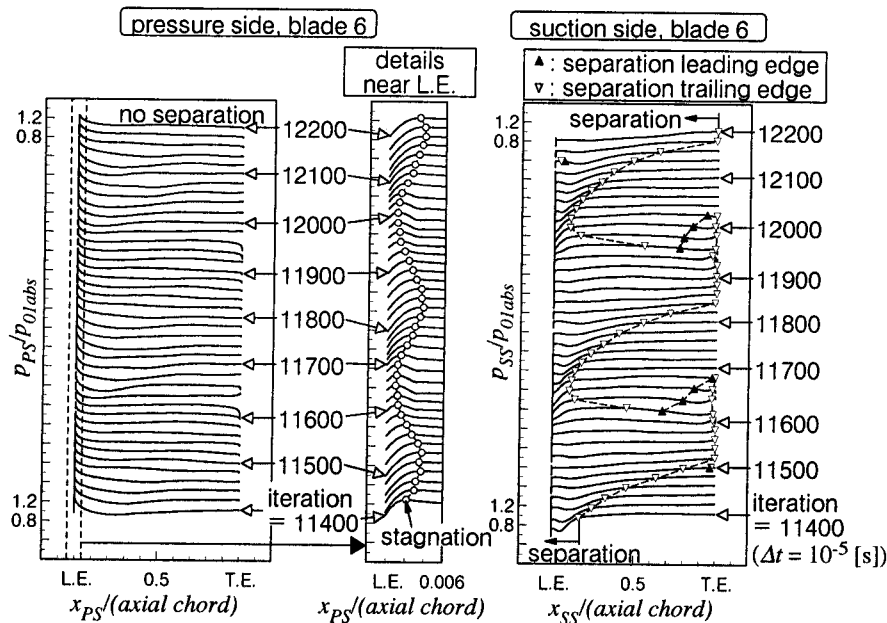


Fig. 5.3.2 Unsteady static pressure distributions on blade 6 observed at point S in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0abs} = 0.6$, $p_2/p_{0abs} = 1.06$)

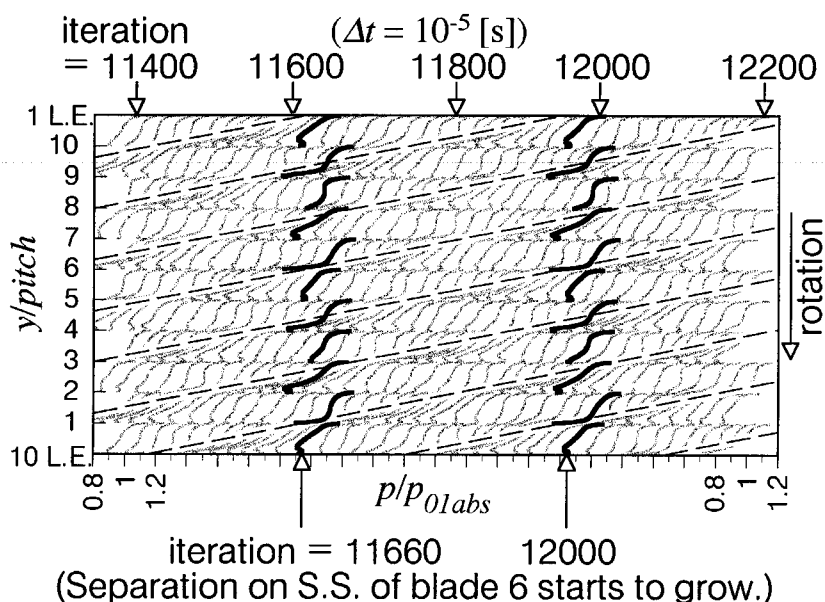


Fig. 5.3.3 Unsteady static pressure on the leading edge plane observed at point S in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0labs} = 0.6$, $p_2/p_{0labs} = 1.06$). Ranges between +1% and -1% pitch from blade leading edges are omitted for simplicity

流れ場の様子を見るために Fig. 5.3.4 に blade 5, 6, 7 まわりの翼弦方向運動量 ρV_t の等高線を示す。この振動の 1 周期は約 330 iteration ($\Delta t = 10^{-5}$ [s], (blade passing period)/ $\Delta t \sim 27$) になる。翼負圧面付近の密になった等高線が境界層を表す。Fig. 5.3.4 中黒い領域が運動量が負になる領域、つまり逆流域である。グレーの領域は軸流正方向から測った流れ角が翼の食違い角よりも小さい領域を表しており、境界層厚さが下流に向かって減少する部分に接している。この図では blade 5, 6 負圧面側でそれぞれ iteration = 11480, 11680 において前縁からはく離し始めるが、これらはそれぞれの翼正圧面側にあるグレーの領域が前縁から下流に移動し始める時間に一致する。すなわち incidence の増大がはく離を引き起こしている。このグレーの領域の移動、すなわち incidence の変化は周速方向 (Fig. 5.3.4 では下側) に隣接する翼負圧面の境界層によって変化するため、ある翼に発生するはく離は周速方向に隣接する翼に発生する境界層から影響を受けていることになる。この仕組みは従来から説明されている旋回失速の発生機構どおりであり、この結果から Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 N ~ S 見られる流れ場の変動は旋回失速であると結論付けた。

旋回失速が見られた点のうち最大背圧点 N ($p_2/p_{0labs} = 1.072$) では質量流量が急激に減少し、入口境界の一部分において逆流が生じる。入口境界では順流を仮定しているため境界条件に矛盾が生じ、計算継続不能となる。これについては 5・7 節で詳述する。

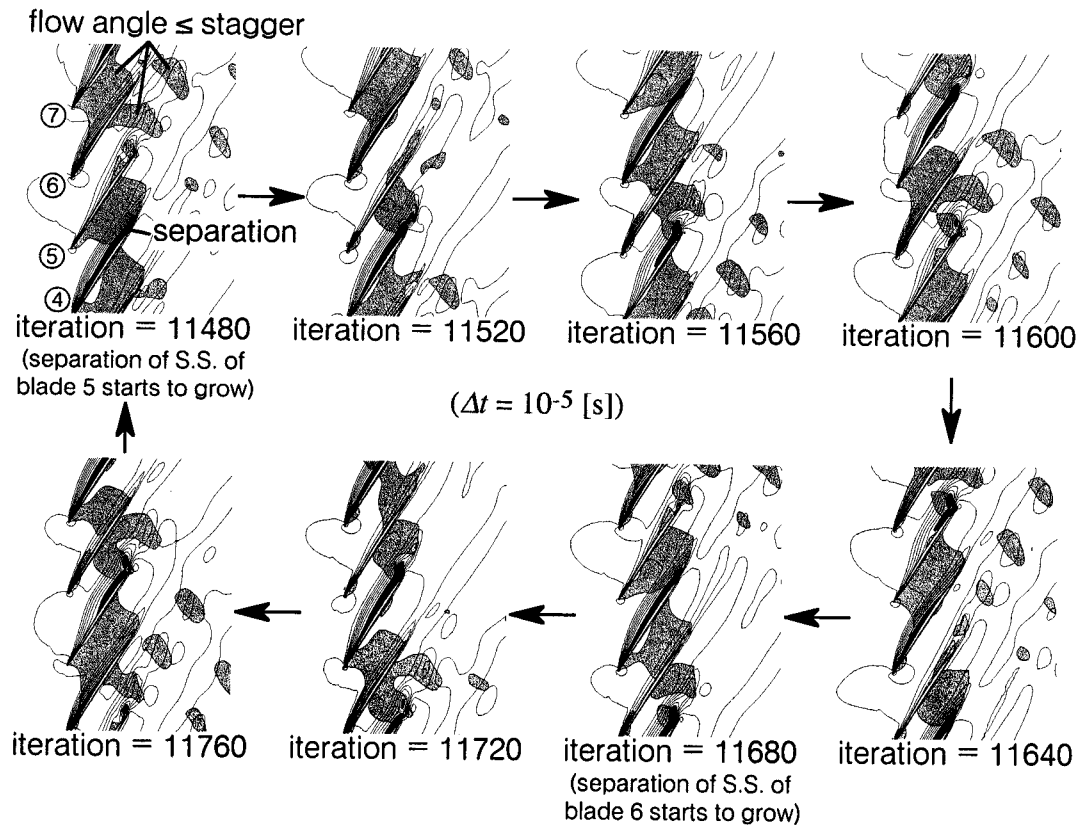


Fig. 5.3.4 Contour of momentum ρV_t tangential to the blade chord around blades 5, 6, 7 (increment of $\rho V_t/(\rho_{01abs}c_{01abs}) = 0.1$) observed at point S in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 0.6, p_2/p_{01abs} = 1.06$)

5・4 前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動

本論文で「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」と呼んでいる、変動が周方向に伝ばする現象は、翼負圧面から発生する膨張波と衝撃波が翼列上流で干渉することによって起こる。これは Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 A と点 K において発生する。点 A の計算初期は unique incidence によって流れがチョークしており、点 K では不始動状態にあるという差がある。

まず点 A ($v_1/c_{01abs} = 1.5, p_2/p_{01abs} = 1.789$) における結果を述べる。Fig. 5.4.1 に点 A における各翼前・後縁での静圧時間履歴を示す。前縁において iteration = 5000 付近から台形型の変動が周速と反対方向 (Fig. 5.4.1 では上向き) に伝ばしている。この変動の伝ば速度比は 0.81 である。この台形型の変動は衝撃波振動が incidence を変化させることにより発

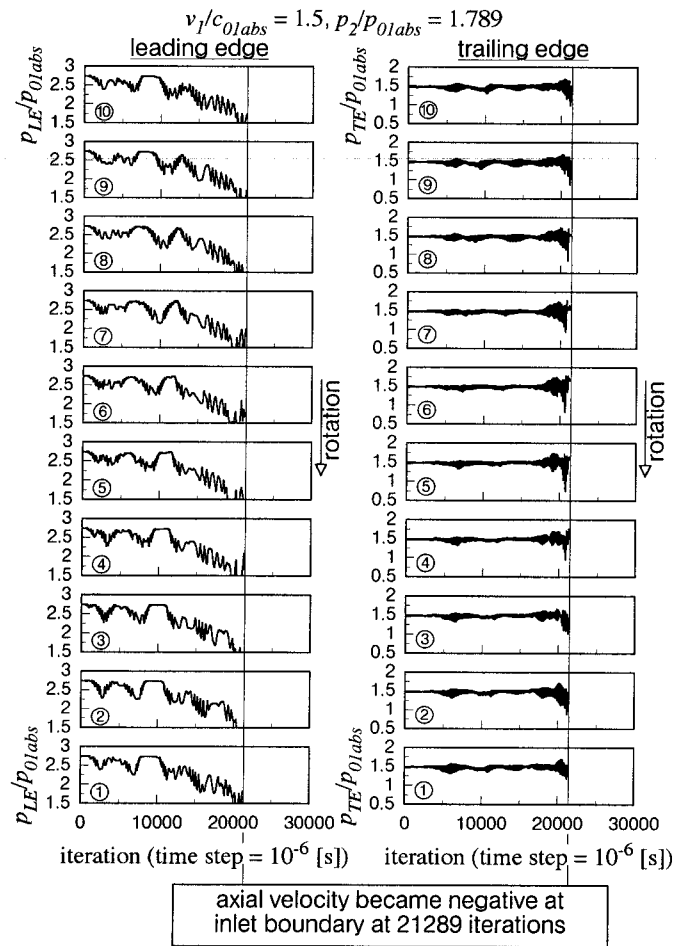


Fig. 5.4.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point A in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0abs} = 1.5, p_2/p_{0abs} = 1.789$)

生する． Fig. 5.4.2(a) に blade 6 負圧面側膨張終了点 (0.05% chord 位置，位置は Fig. 5.4.2 (d) に図示) におけるマッハ数，(b) に淀み点位置，(c) に翼弦線を延長した線上での衝撃波の位置，(d) に blade 6 前縁まわりのマッハ数等高線と速度ベクトルを示す． Fig. 5.4.2(b)，(c) は衝撃波が前縁から上流へ遠ざかる時は淀み点が前縁から下流へ遠ざかることを示している． 衝撃波が前縁に近い場合と遠い場合の流れ場を Fig. 5.4.2(d) に示してあるが，衝撃波が上流へ遠ざかる時は前進する衝撃波によって衝撃波下流の流れ角，つまり incidence が増大する． 淀み点の位置変化はこの incidence 変化によって起こる． incidence の増大は流れが前縁を回り込む際に静圧を減少させ，負圧面でのマッハ数を増加させる (Fig. 5.4.2(a)) ． Fig. 5.4.1 中前縁での台形型の変動はこの加速膨張域での静圧変化によって発生している．

Fig. 5.4.1 中台形型変動の正・負勾配域における高周波数の振動は，前縁近傍に局所的に起こる振動である． Copenhaver et al.⁽²⁾ (1995) も同様の振動を計算結果から報告しており，

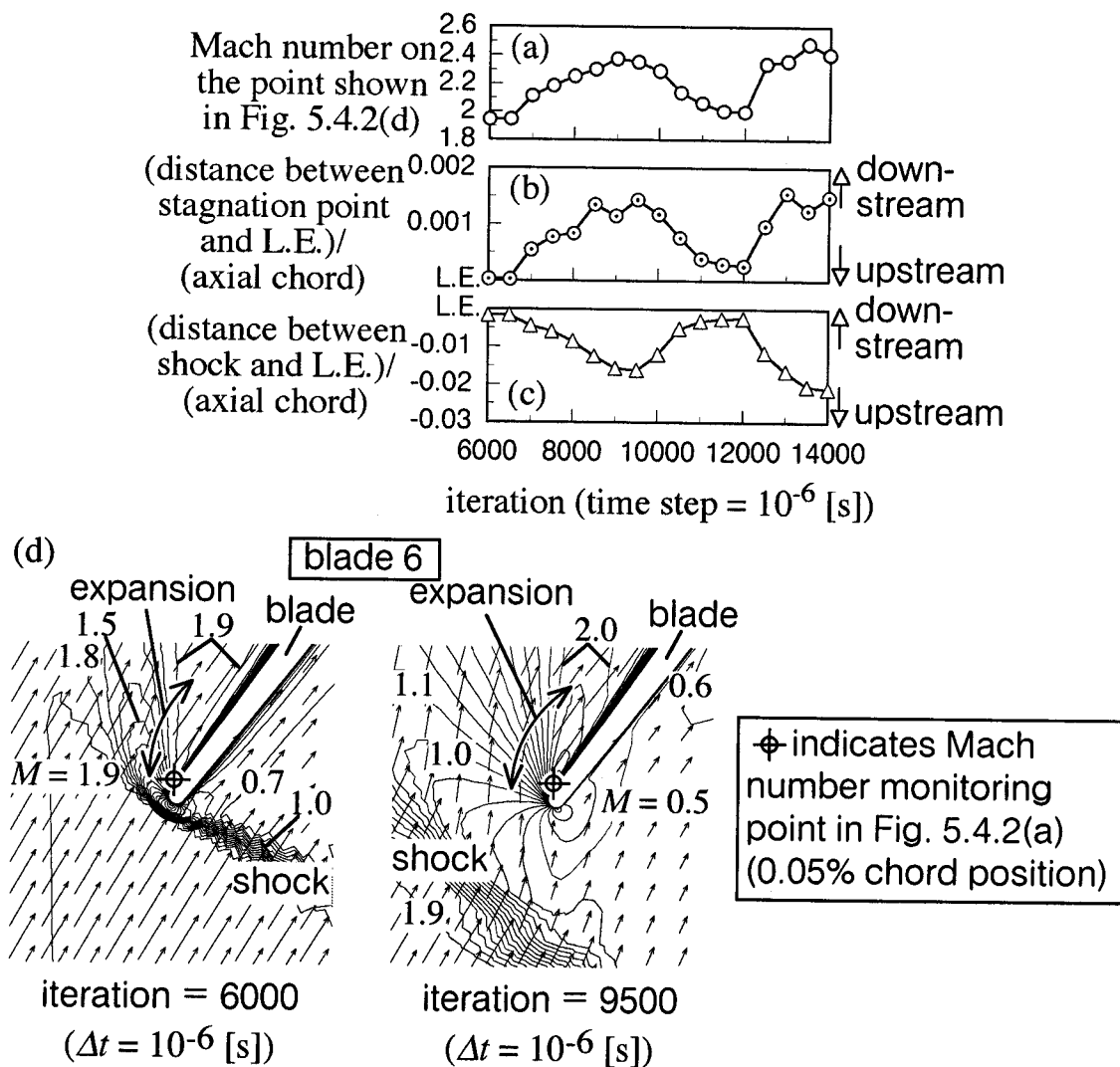
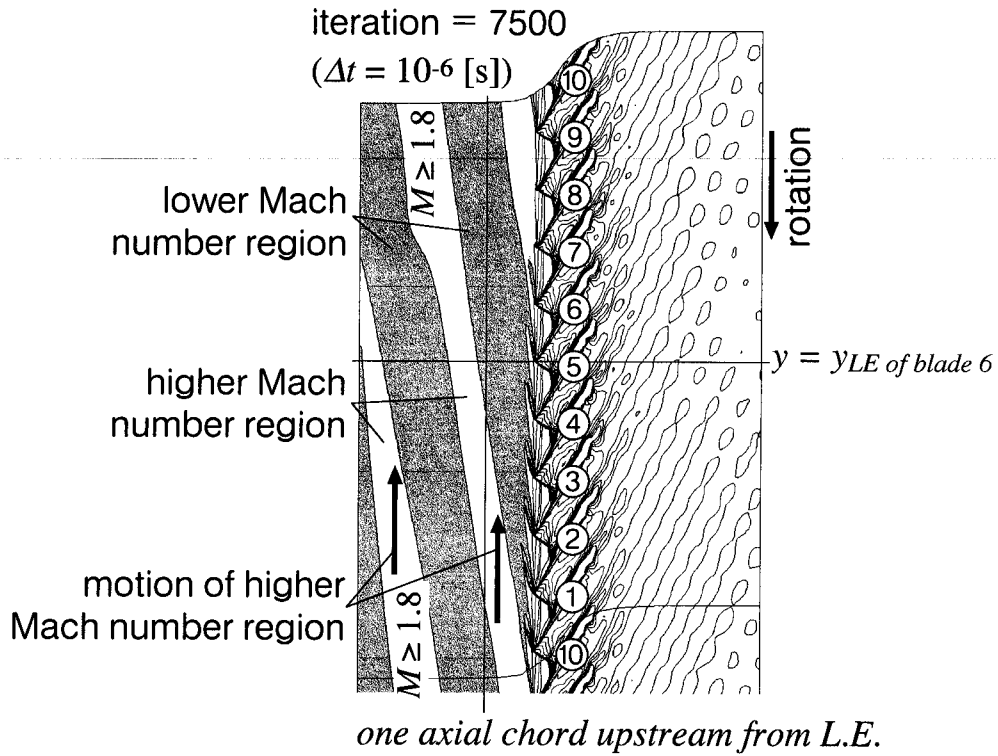


Fig. 5.4.2 (a) Mach number on 0.05% chord position (shown in Fig. 5.4.2(d)) of suction surface of blade 6, (b) location of stagnation point, (c) chordwise shock location, and (d) Mach number contour (increment = 0.1) and velocity vector around the leading edge. Observed at point A in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.789$)

これは incidence の変化によるものである。

流れ場全体を見るために Fig. 5.4.3(a) に iteration = 7500 でのマッハ数等高線, (b) と (c) に blade 6 前縁を通る軸流方向の線 ($y = y_{LE \text{ of blade } 6}$) 上と前縁から 1 axial chord 上流での非定常マッハ数分布をそれぞれ示す (これらの線は Fig. 5.4.3(a) に図示) . 計算初期では unique incidence により上流は一様な流れ場を呈しており, 衝撃波は前縁に付着している. iteration = 1500 で衝撃波が上流に押し出されて離脱し, 衝撃波から圧縮波が上流に伝ばする. この圧縮波は Fig. 5.4.3(b) 中左向きの矢印を付してあるステップ状の変動に対応する. 圧縮波の通過した領域ではマッハ数が減少する. 圧縮波は iteration = 4500 で入口境界に達



(a) Mach number contour at 7500 iterations (for $M \geq 0.5$, increment = 0.1)

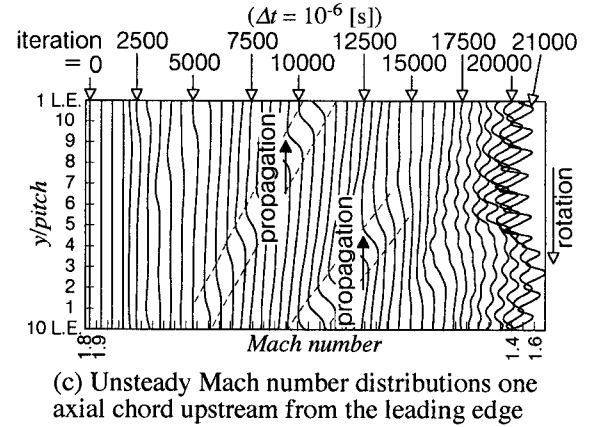
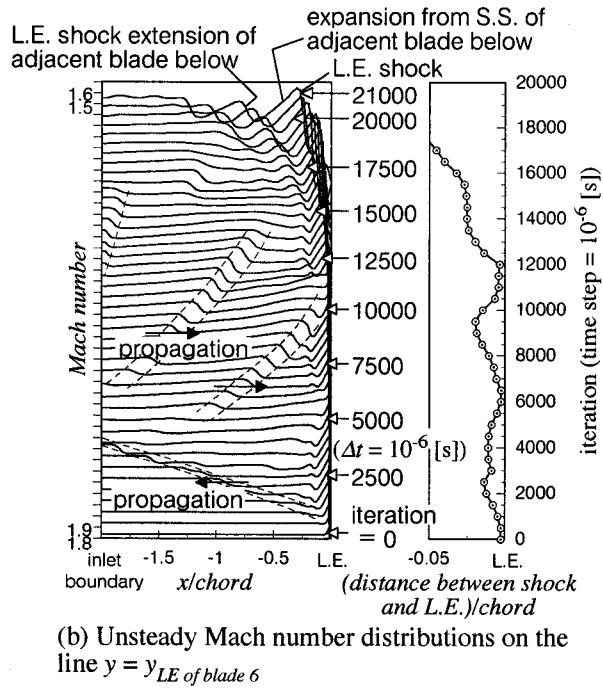


Fig. 5.4.3 (a) Mach number contour at 7500 iterations (for $M \geq 0.5$, increment = 0.1), (b) unsteady Mach number distributions on the line $y = y_{LE} \text{ of blade 6}$ (shown in Fig. 5.4.3(a)), and (c) unsteady Mach number distributions one axial chord upstream from the leading edge. Observed at point A in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.789$)

し、入口境界での流入角が増加、流量が減少する。その後 Fig. 5.4.3(a) 中上流の白で示されている高マッハ数領域が翼負圧面の前縁付近から発生する。この高マッハ数領域は領域を上流に伸ばしながら Fig. 5.4.3(c) に示すように周速と反対方向 (Fig. 5.4.3(a), (c) では上向き) に移動する。翼負圧面の前縁付近が発生点であることから、高マッハ数領域は Fig. 5.4.2 で述べた前縁まわりでの強い加速膨張が原因となって発生する。Fig. 5.4.3(b) では iteration = 6000 以降から高マッハ数領域が確認でき、右向き矢印が付してあるステップ状の変動に対応する。

前縁衝撃波は高マッハ数領域の伝ばと相関を持って振動する。Fig. 5.4.3(b) には衝撃波の位置も示してある。衝撃波は基本的には離脱しているが、高マッハ数領域が前縁に達すると前縁に付着する。1/2 ピッチ位置での衝撃波振動振幅は翼弦長の約 5% である。

iteration がさらに進むと、Fig. 5.4.3(c) では iteration = 15000 あたりから周方向に伝ばする高マッハ数領域が消失する。これは衝撃波が強くなり過ぎて高マッハ数領域が維持されなくなるからである。そして点 N と同様、最終的には質量流量が急激に減少し、入口境界の一部分において逆流が生じる。

「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」は点 K ($v_1/c_{0labs} = 1.1, p_2/p_{0labs} = 1.402$) においても見られた。Fig. 5.4.4 に点 K における各翼前・後縁での静圧時間履歴を示す。前・後縁両方で正弦波状の振動が発生しているが前縁での振動振幅の方が大きい。流れ場全体の様子からこの振動は主に翼列上流において発生していることが判明した。

前縁での振動は点 A と同様、衝撃波の振動による incidence の変化が関係している。Fig. 5.4.5 に点 K の場合に関する前縁付近の流れ場の詳細を示す。点 A と同様、Fig. 5.4.5(b), (c) は衝撃波が上流に移動するとき淀み点は下流に移動することを示している。ただし淀み点振動の位相が少し遅れている。また点 A と同様、淀み点が前縁から下流へ遠ざかると、つまり incidence が増大すると負圧面でのマッハ数が増加する (Fig. 5.4.5(a))。ただしその振幅は点 A よりも小さい。incidence 増大時は前縁静圧が減少することから、Fig. 5.4.4 中前縁での振動は incidence の変化によって起こっていることが分かる。

Fig. 5.4.6(a) に iteration = 16200 でのマッハ数等高線、(b) と (c) に blade 6 前縁を通る軸流方向の線 ($y = y_{LE \text{ of blade } 6}$) 上と前縁から 3 axial chord 上流での非定常マッハ数分布をそれぞれ示す (これらの線は Fig. 5.4.6(a) に図示)。Fig. 5.4.6(a) 中上流の (濃, 薄) グレーで示されている領域は低マッハ数領域であり、これは離脱衝撃波によって発生する。白で示されている領域は翼負圧面から発生する膨張波によって発生する。この白領域は Fig. 5.

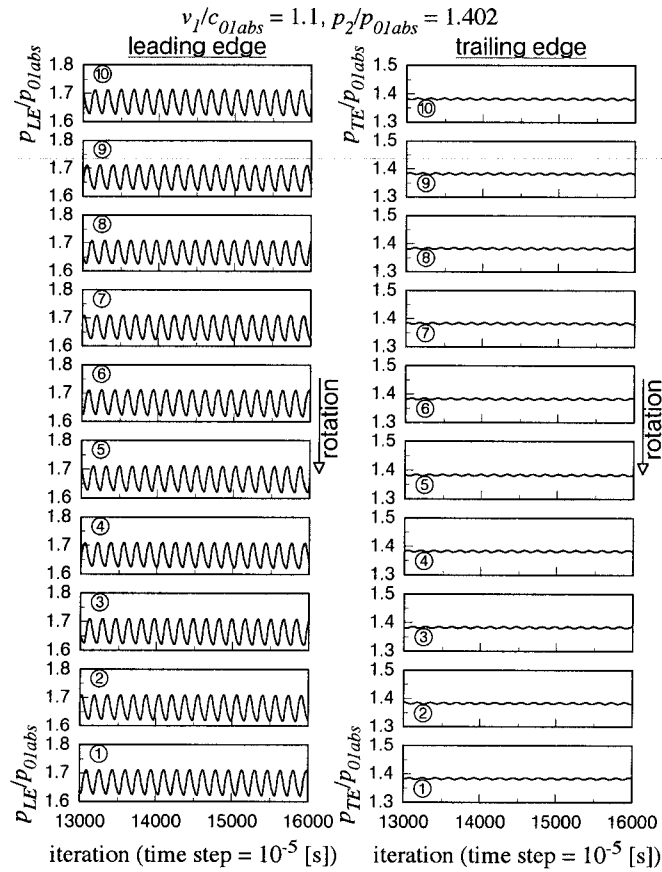


Fig. 5.4.4 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point K in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0abs} = 1.1, p_2/p_{0abs} = 1.402$)

4.6(c) では6つの極大値で示されている．6つの極大値は周速と反対方向（Fig. 5.4.6(c) では上向き）に移動しており，その伝ば速度比は0.86である．ただしこの6つの極大値は形状が変化する．これは膨張波が弱い，すなわち Fig. 5.4.5(a) でのマッハ数変動振幅が小さいために離脱衝撃波による影響を受けつつ極大値が移動しているためであると考えられる．iterationを進めてマッハ数等高線を見てゆくと，Fig. 5.4.6(a) 中グレーと白の領域はそれぞれの面積が変化するのみであり，点Aのような領域の移動は等高線からは見られなかった．

衝撃波の振動はその上流のマッハ数，つまり周速方向に隣接する翼負圧面から発生する膨張波によるマッハ数の振動と相関を持つ．Fig. 5.4.6(b) には $x/chord = -0.2$ （衝撃波直前）でのマッハ数の振動と衝撃波位置も示してある．衝撃波直前マッハ数が増加する際には衝撃波は下流に押しやられる．これは点Aと同様の傾向である．1/2 ピッチ位置での衝撃波振動振幅は翼弦長の約3%である．

点Aでは最終的には入口境界の一部分において逆流が生じて計算が終了するが，点Kの

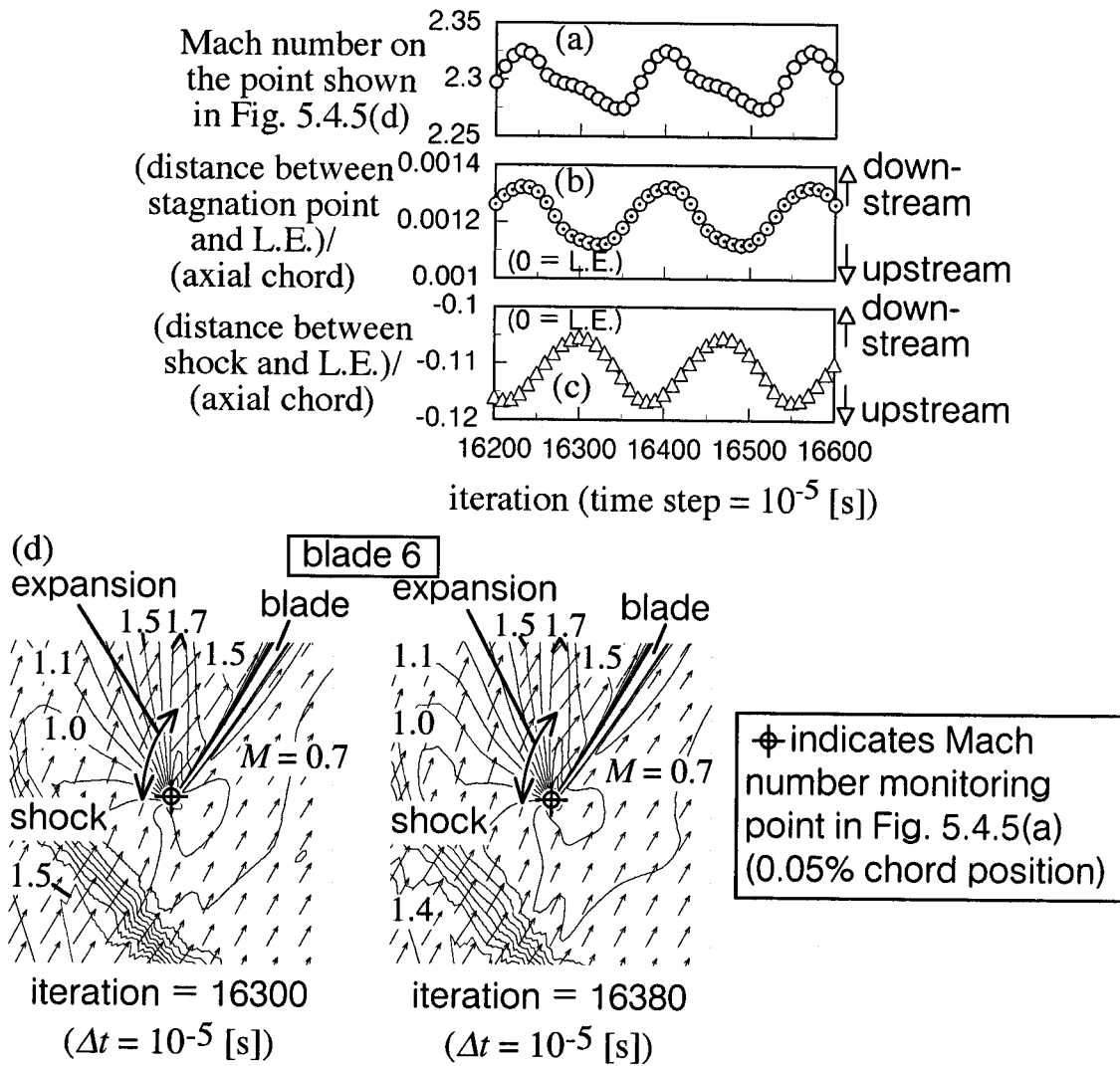


Fig. 5.4.5 (a) Mach number on 0.05% chord position (shown in Fig. 5.4.5(d)) of suction surface of blade 6, (b) location of stagnation point, (c) chordwise shock location, and (d) Mach number contour (increment = 0.1) and velocity vector around the leading edge. Observed at point K in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.402$)

場合はそのようなことはなく計算は継続できる。

本節の最後として点 A, K での変動の共通点をまとめておく。

(i) 衝撃波の振動が周速方向に隣接する翼負圧面から発生する膨張波によって起こる

(ii) その衝撃波の振動が incidence を振動させ、その翼負圧面の膨張波が振動する

これらのことから点 A, K での変動を同種の変動と見なしている。

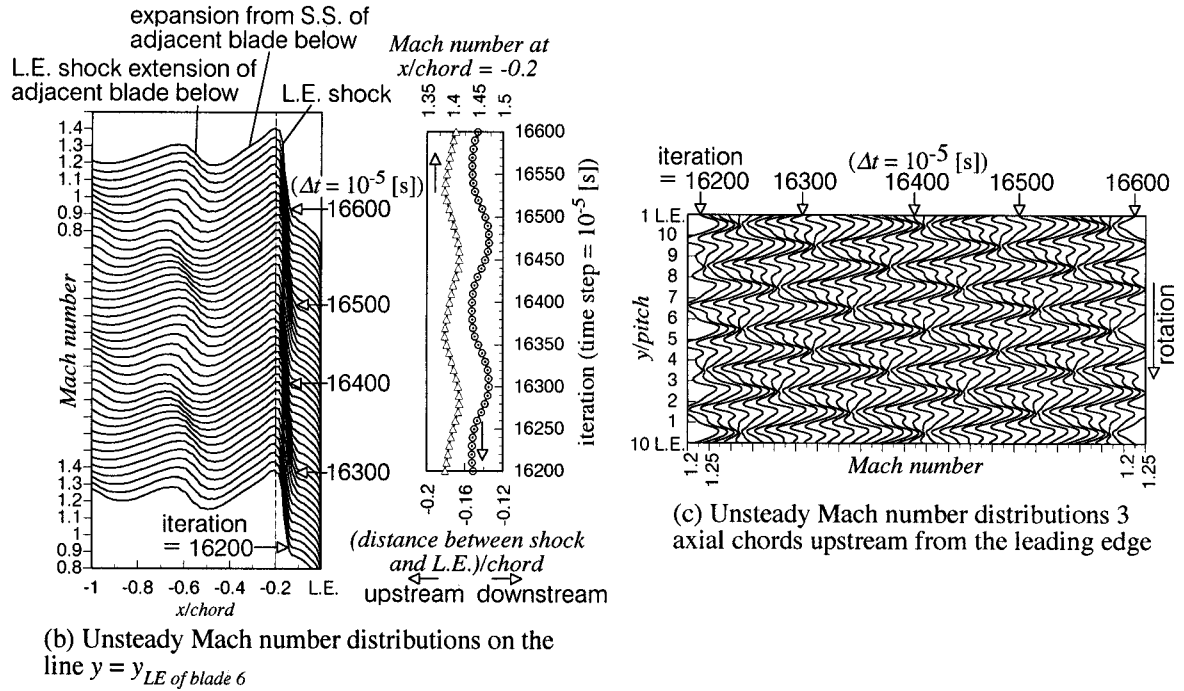
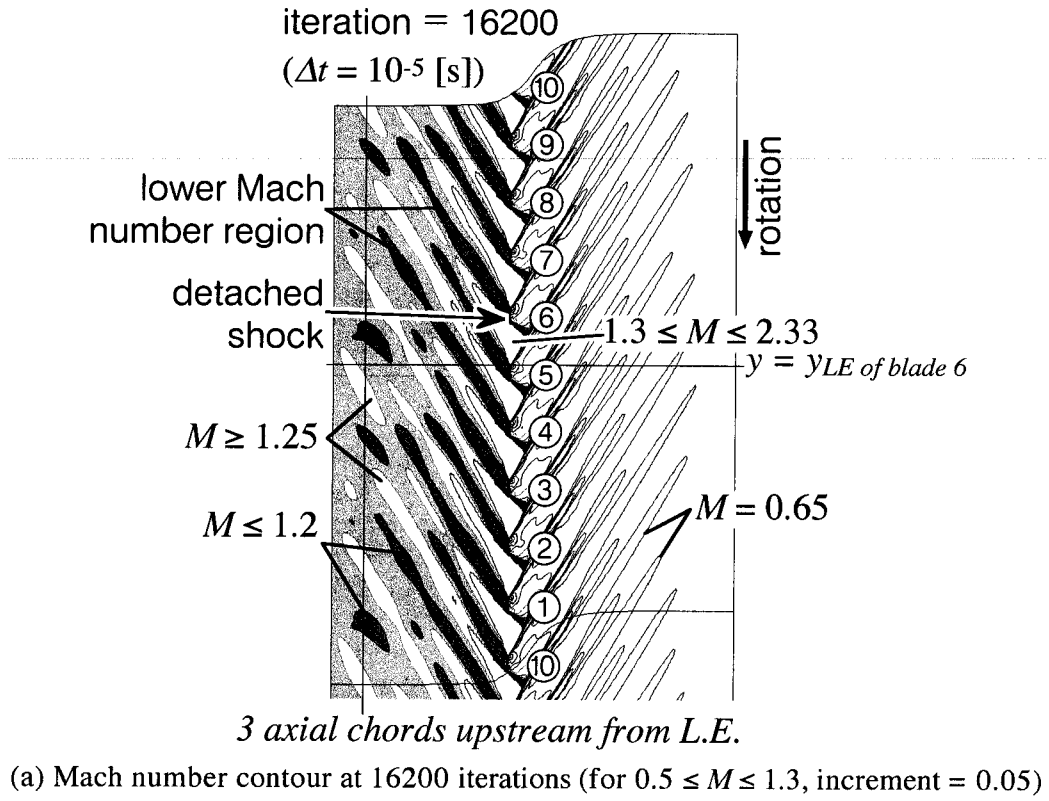


Fig. 5.4.6 (a) Mach number contour at 16200 iterations (for $0.5 \leq M \leq 1.3$, increment = 0.05), (b) unsteady Mach number distributions on the line $y = y_{LE} \text{ of blade } 6$ (shown in Fig. 5.4.6(a)), and (c) unsteady Mach number distributions 3 axial chords upstream from the leading edge. Observed at point K in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.402$)

5・5 前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動

本論文で「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」と呼んでいる、変動が周方向に伝ばする現象は Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中の点 B ($v_1/c_{0abs} = 1.5, p_2/p_{0abs} = 1.78$) において発生する。

Fig. 5.5.1 に点 B における各翼前・後縁での静圧時間履歴を示す。前縁において台形型の変動が見られる。この台形型の変動は点 A (5・4 節) と同様、衝撃波の振動による incidence の変化によって起こる。台形型の負勾配、正勾配の部分ではそれぞれ前縁から離脱、前縁に付着する方向に衝撃波が移動する。台形型の上底では衝撃波は付着している。

Fig. 5.5.2 に iteration = 22000 ~ 28500 における翼列上流でのマッハ数等高線と前縁から 1 axial chord 上流 (Fig. 5.5.2(a) に図示) での非定常マッハ数分布を示す。Fig. 5.5.2(a) 中グレーで示される領域では衝撃波によりマッハ数が低下している。iteration = 20000~24500 では衝撃波が前縁から離脱してゆくが、その際にはグレーの領域が拡大し、Fig. 5.5.2(b) 中

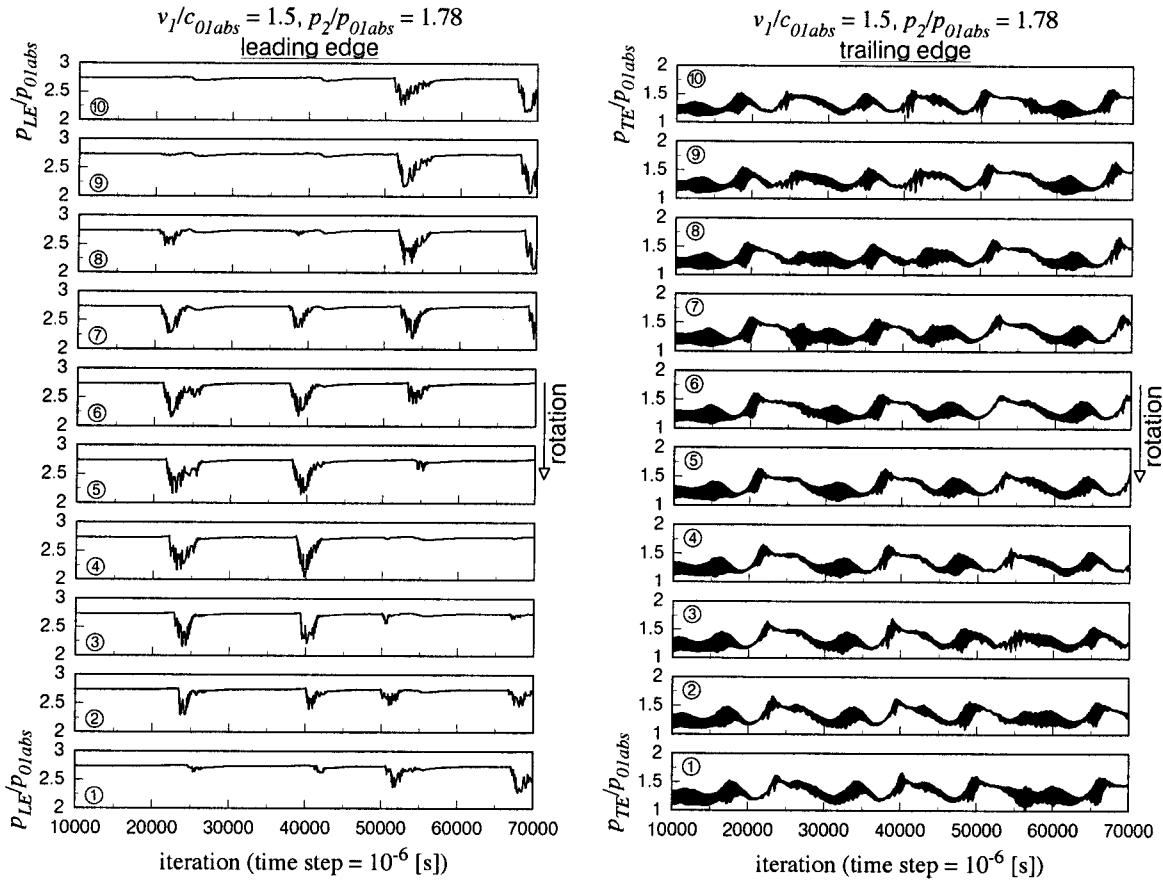
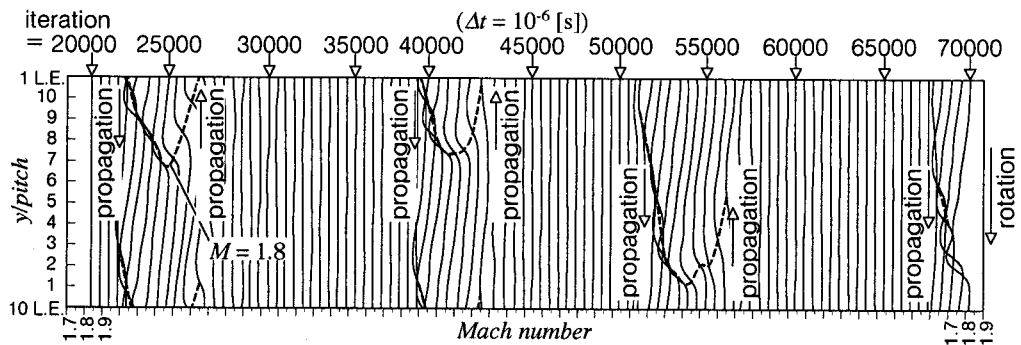
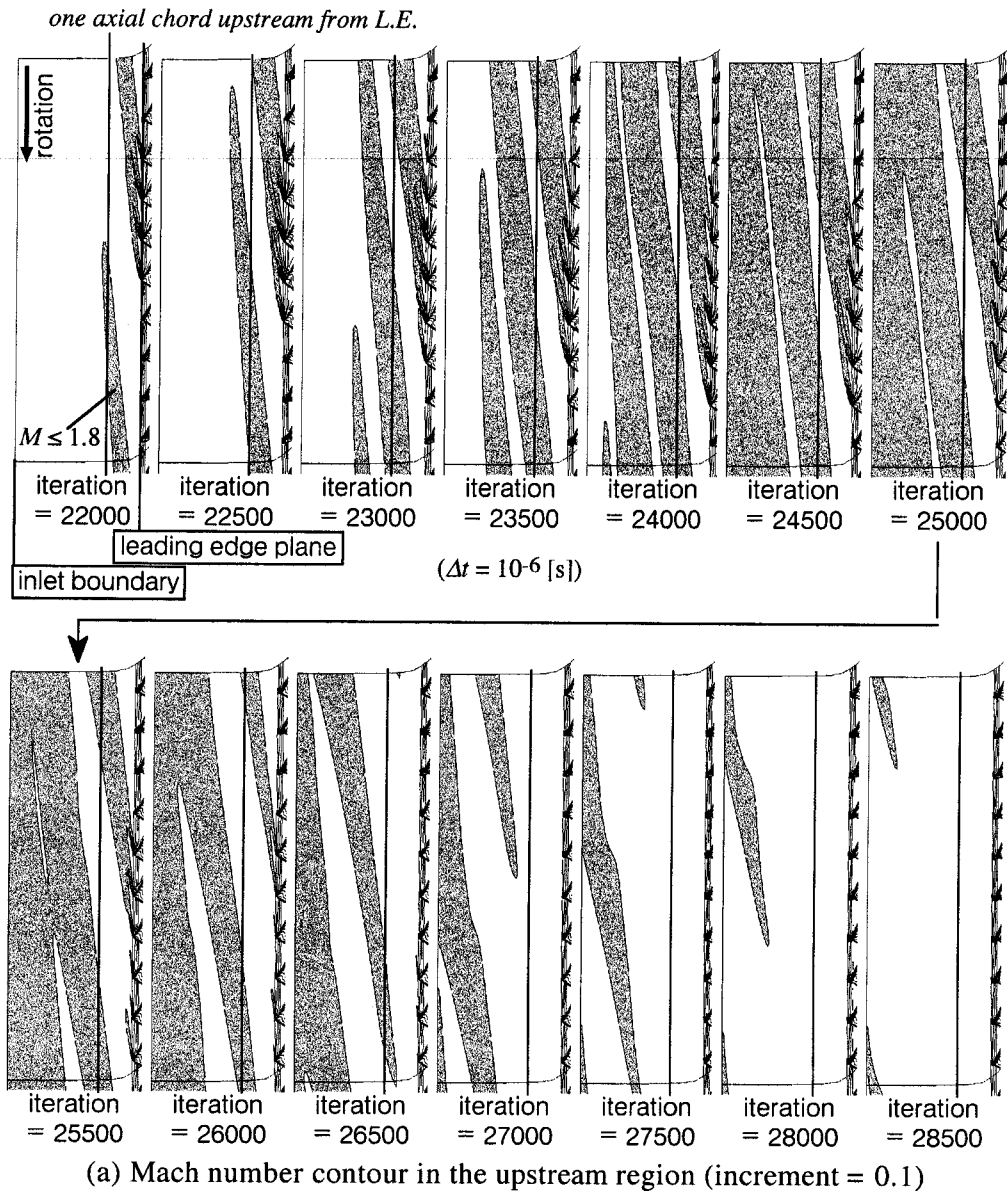


Fig. 5.5.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point B in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0abs} = 1.5, p_2/p_{0abs} = 1.78$)



(b) Unsteady Mach number distributions one axial chord upstream from the leading edge

Fig. 5.5.2 (a) Mach number contour in the upstream region (increment = 0.1) and (b) unsteady Mach number distributions one axial chord upstream from the leading edge (shown in Fig. 5.5.2(a)). Observed at point B in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.78$)

下向き矢印で示されるように変動は周速と同方向（前回り，Fig. 5.5.2(a) では下向き）に伝ばする．グレーの領域が入口境界に達すると（iteration = 24500）入口境界での流量が減少する．しかし iteration = 24500 以降では白で示される領域が回復してゆく．この白の領域は翼負圧面から発生する膨張波によって発生し，衝撃波の離脱が incidence を増大させて膨張波を強めている．この期間では Fig. 5.5.2(b) 中上向き矢印で示されるように変動が周速と反対方向（後回り）に伝ばするが，iteration とともに変動振幅が減少する．そして上流は一様流に回復し，入口境界での流量も回復する．翼列下流でも上流と同様の観察を行ったが，下流では前回りの変動しか確認できなかった．その発生時期は上流で前回りの変動が現れている時期と一致する．Fig. 5.5.1, Fig. 5.5.2(b) で示されるように点 B では上述の変動が間欠的に発生する．変動の伝ば速度比，発生時間間隔は非一様であったが，平均的な伝ば速度比は前回りで 1.27，後回りで 0.85 である．1/2 ピッチ位置での衝撃波振動振幅は翼弦長の約 10% である．

前節で示した点 A, K と本節で示した点 B ではいずれも翼列上流の衝撃波と翼負圧面から発生する膨張波の干渉によって変動が起こる．違いは衝撃波と膨張波の強弱関係にあり，この違いによって変動の形態に差異が生じると考えられる．

5・6 翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動

本論文で「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と呼んでいる，変動が周方向に伝ばする現象は Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 F ($v_1/c_{0labs} = 1.3, p_2/p_{0labs} = 1.56$) と点 I ($v_1/c_{0labs} = 1.2, p_2/p_{0labs} = 1.45$) において見られた．これらの点では定常状態が unique incidence によりチョークしている．両者ともに翼列下流で周速方向に移動する高圧領域と干渉して翼間衝撃波が振動する．

Fig. 5.6.1, 5.6.2 に点 F, I における各翼前・後縁での静圧時間履歴をそれぞれ示す．後縁での振動は計算初期から次第に大きくなり一定振幅に落ち着く．点 F (Fig. 5.6.1) の場合は振動する翼間衝撃波が最上流位置では翼前縁から離脱する．Fig. 5.6.1 の前縁での変動はこの衝撃波の離脱によって発生している．一方点 I では衝撃波の離脱は小さいため，Fig. 5.6.2 の前縁での変動は非常に小さい．いずれの場合も変動は主に翼間衝撃波下流で発生する．

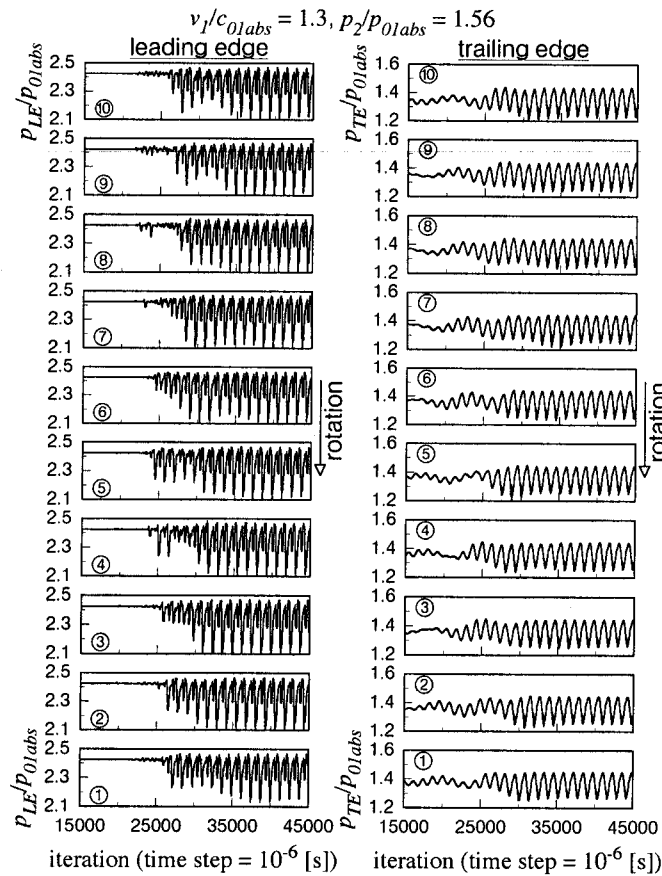


Fig. 5.6.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point F in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{0,abs} = 1.3, p_2/p_{0,abs} = 1.56$)

Fig. 5.6.3, 5.6.4 に点 F, I それぞれの場合の静圧等高線と非定常静圧分布を示す。Fig. 5.6.3(a), 5.6.4(a) 中グレーで示された領域は高压領域であり、この領域は Fig. 5.6.3(b), 5.6.4(b) それぞれのピークに対応し、これが周速と同方向 (Fig. 5.6.3, 5.6.4 では下向き) に移動する。点 F (Fig. 5.6.3) では5つの高压領域が存在するが点 I (Fig. 5.6.4) では1つしか存在しない。Fig. 5.6.3(b), 5.6.4(b) から変動の伝ば速度比を求めると点 F では 1.19, 点 I では 1.21 になる。この結果から変動とともに移動する座標系から見た高压領域に垂直方向のマッハ数を概算してみた。その結果を Table 5.6.1 に示す。後縁から 1, 2, 3 axial chord 下流において試算しており、軸流正方向から測った高压領域の傾きは点 F の場合 163° , 点 I の場合 152° としている。マッハ数は後流域で最小になるが、後流域での最小値を高压領域下流の値とした。またマッハ数は主流部分で最大になるが、主流部分での最大値を高压領域上流とした。参考のため Table 5.6.1 には括弧内に垂直衝撃波の場合の上・下流マッハ数の関係を示している。いずれの場合も高压領域上流では相対的に超音速になっており、その上・下流マッハ数の関係は垂直衝撃波のそれに近い。このことから高压領域は弱い衝撃波

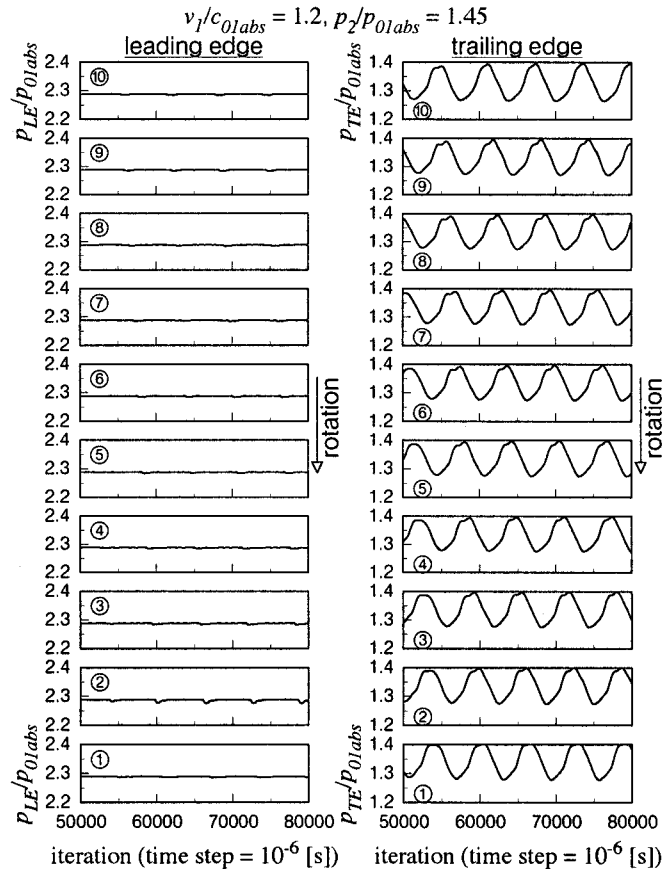
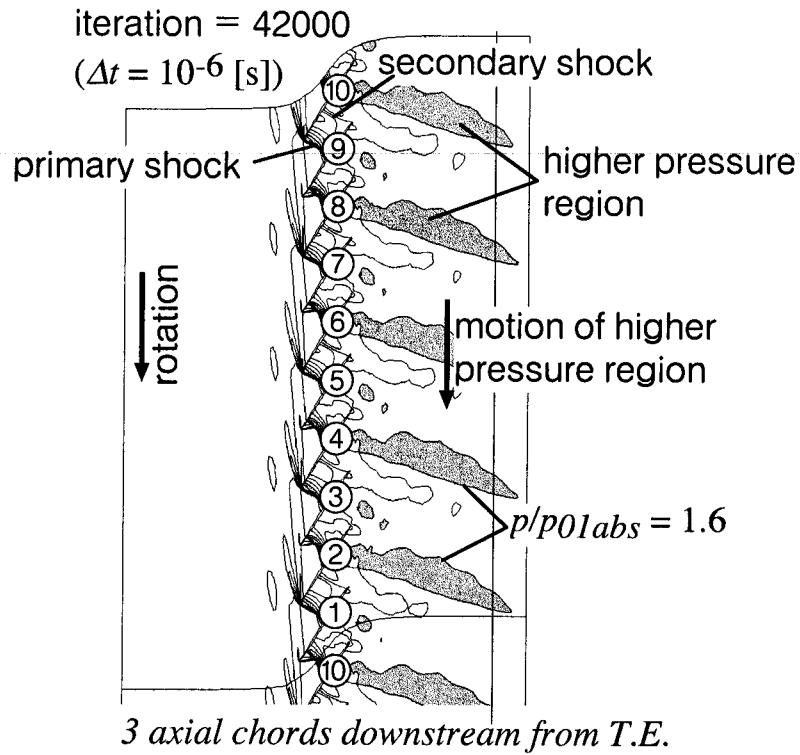


Fig. 5.6.2 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point I in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.2, p_2/p_{01abs} = 1.45$)

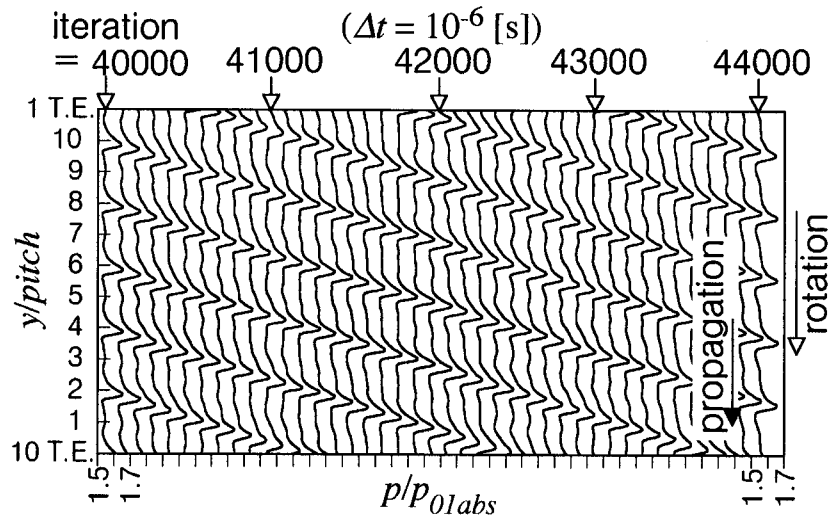
Table 5.6.1 Mach number upstream and downstream of higher pressure region in the frame moving with higher pressure region

point ($v_1/c_{01abs},$ p_2/p_{01abs})	one axial chord downstream from T.E. $M_{U_{hpr}} \rightarrow M_{D_{hpr}}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)	2 axial chords downstream from T.E. $M_{U_{hpr}} \rightarrow M_{D_{hpr}}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)	3 axial chords downstream from T.E. $M_{U_{hpr}} \rightarrow M_{D_{hpr}}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)
F (1.3, 1.56)	1.13 $\rightarrow$ 0.95 (1.13 $\rightarrow$ 0.89)	1.10 $\rightarrow$ 0.91 (1.10 $\rightarrow$ 0.91)	1.07 $\rightarrow$ 0.98 (1.07 $\rightarrow$ 0.94)
I (1.2, 1.45)	1.08 $\rightarrow$ 0.96 (1.08 $\rightarrow$ 0.93)	1.07 $\rightarrow$ 0.98 (1.07 $\rightarrow$ 0.94)	1.06 $\rightarrow$ 0.99 (1.06 $\rightarrow$ 0.94)

* $M_{U_{hpr}}$ and $M_{D_{hpr}}$ are Mach numbers upstream and downstream of higher pressure region in the frame moving with higher pressure region, respectively.

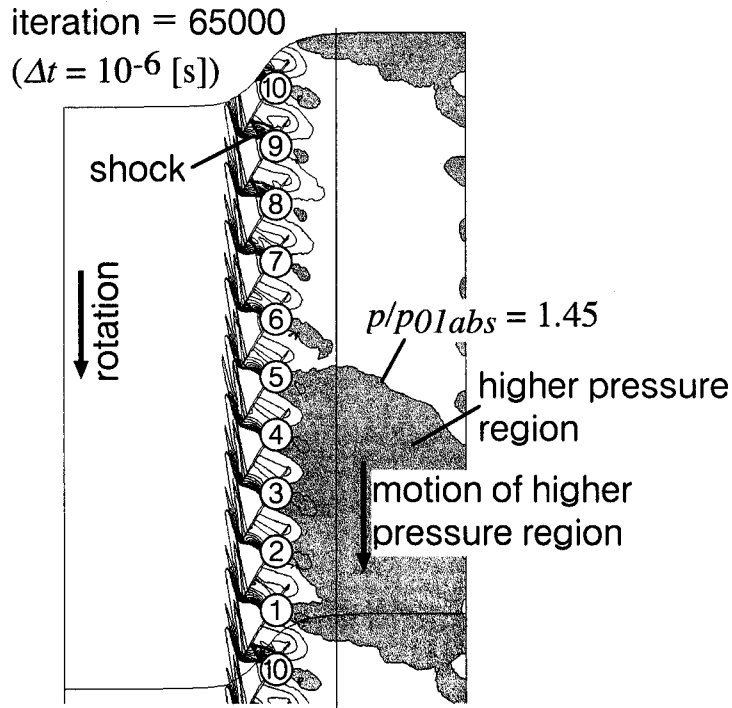


(a) Static pressure contour at 42000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.1$)



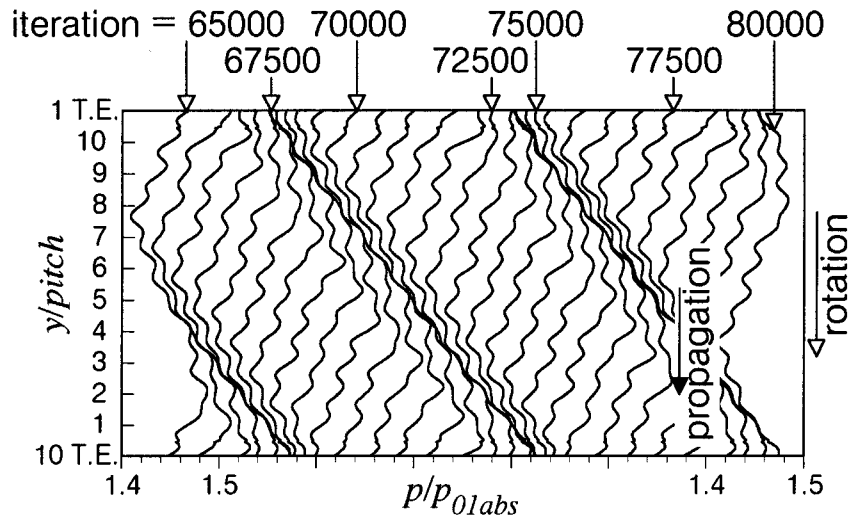
(b) Unsteady static pressure distributions 3 axial chords downstream from the trailing edge

Fig. 5.6.3 (a) Static pressure contour at 42000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.1$) and (b) unsteady static pressure distributions 3 axial chords downstream from the trailing edge (shown in Fig. 5.6.3(a)). Observed at point F in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.3$, $p_2/p_{01abs} = 1.56$)



one axial chord downstream from T.E.

(a) Static pressure contour at 65000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.05$)



(b) Unsteady static pressure distributions one axial chord downstream from the trailing edge

Fig. 5.6.4 (a) Static pressure contour at 65000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.05$) and (b) unsteady static pressure distributions one axial chord downstream from the trailing edge (shown in Fig. 5.6.4(a)). Observed at point I in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.2$, $p_2/p_{01abs} = 1.45$)

に成長したものであり、音響波の伝ば速度（音速 - 流速）以上の速度で伝ばしていることが分かる。高圧領域上流マッハ数が点 I の方が点 F よりも小さいため、Fig. 5.6.4(b)（点 I）の静圧分布が Fig. 5.6.3(b)（点 F）の静圧分布に比べてなだらかになっていると考えられる。

翼間流れ場の詳細を見るために Fig. 5.6.5, 5.6.6 に blade 5, 6, 7 まわりの静圧等高線を点 F, I それぞれに対して示す。振動の 1 周期は点 F で約 1300 iteration ($\Delta t = 10^{-6}$ [s], (blade passing period)/ $\Delta t \sim 123$) 点 I で約 6300 iteration ($\Delta t = 10^{-6}$ [s], (blade passing period)/ $\Delta t \sim 133$) になる。グレーで示された高圧領域が翼間出口部にさしかかると翼間衝撃波が上流に移動する。点 F (Fig. 5.6.5) では翼間衝撃波が 2 つ存在する。上流の方を primary shock, 下流の方を secondary shock と呼ぶことにすると primary shock が後退する際に secondary shock は前進し, primary shock が前進する際には secondary shock は消失する。これは primary shock が後退するとき (primary shock に対する相対流入マッハ数減少) はその下流の圧力が減少し, その減少分を secondary shock が前進することによって補い, 逆に primary shock が前進する時はその下流の圧力が十分に昇圧されており, secondary shock が発生しなくても圧力上昇が達成されるからである。点 I (Fig. 5.6.6) の場合には secondary shock は常に発生しない。1/2 ピッチ位置での衝撃波振動振幅は点 F の primary shock で翼弦長の約 10%, 点 I で約 7% である。

各翼間で位相は異なるが変動の振る舞いは同じであるため、ここでは blade 5, 6 間に着目する。Fig. 5.6.7(b), 5.6.8(b) は Fig. 5.6.7(a), 5.6.8(a) に示される検査面 ABCD に流入出す質量流量の変化を点 F, 点 I それぞれに対して示している。Fig. 5.6.7(b), 5.6.8(b) には平均静圧も示してある。境界 CD の静圧が上昇する、すなわち高圧領域が境界 CD に到達する際にはそこでの流量が減少する。一方翼列入口部では流量変動が小さいことが確認された。そのため翼列出口部である境界 AB での流量変化により翼間の流体質量が増減し、その結果翼間衝撃波が振動する。境界 BC での流量が最小値をとるとき、すなわち境界 BC での流量が検査面 ABCD に流入しにくくなるときには境界 AB での流量が増加、境界 CD での流量が減少する傾向にある。このことからある翼列出口部における流量変化が周速方向 (Fig. 5.6.7(a), 5.6.8(a) では下側) に隣接する翼間の流出を抑制していることになる。これが原因となって高圧領域は周速方向に隣接する翼間出口部に発生し、その結果高圧領域が周速と同方向に移動するものと考えられる。

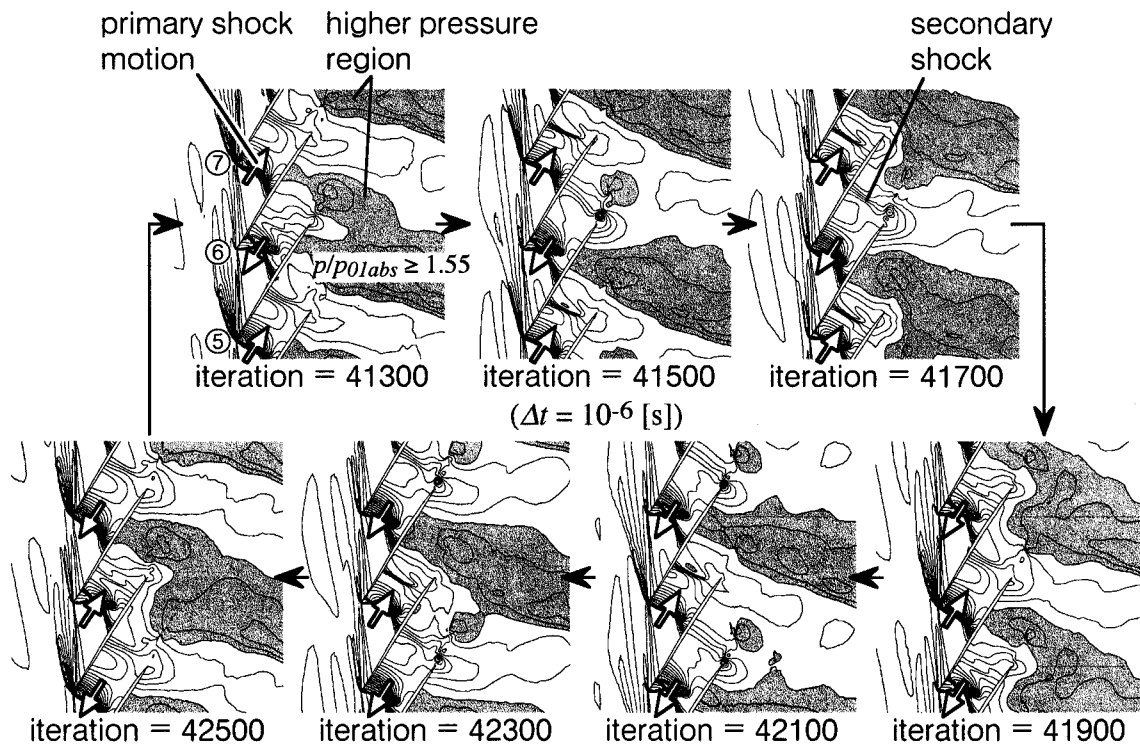


Fig. 5.6.5 Static pressure contour (increment of $p/p_{01abs} = 0.05$) observed at point F in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.3$, $p_2/p_{01abs} = 1.56$)

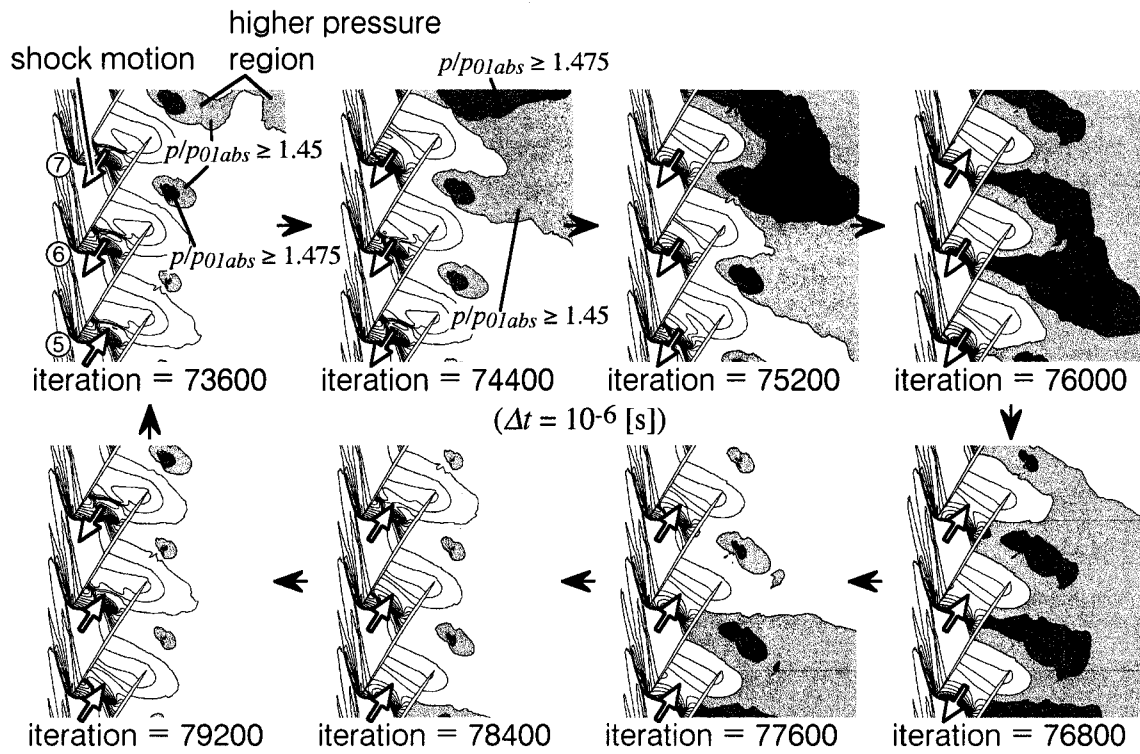


Fig. 5.6.6 Static pressure contour (increment of $p/p_{01abs} = 0.05$) observed at point I in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.2$, $p_2/p_{01abs} = 1.45$)

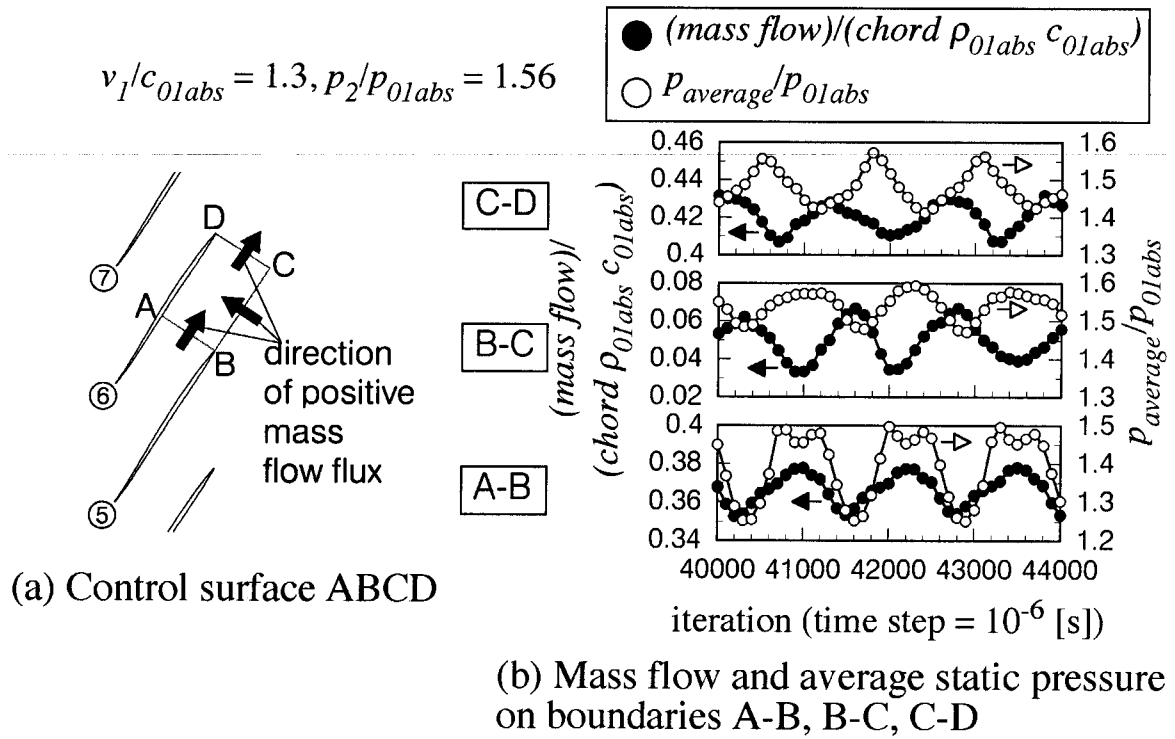


Fig. 5.6.7 Relationship between mass flow and static pressure in cascade discharge area observed at point F in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.3, p_2/p_{01abs} = 1.56$)

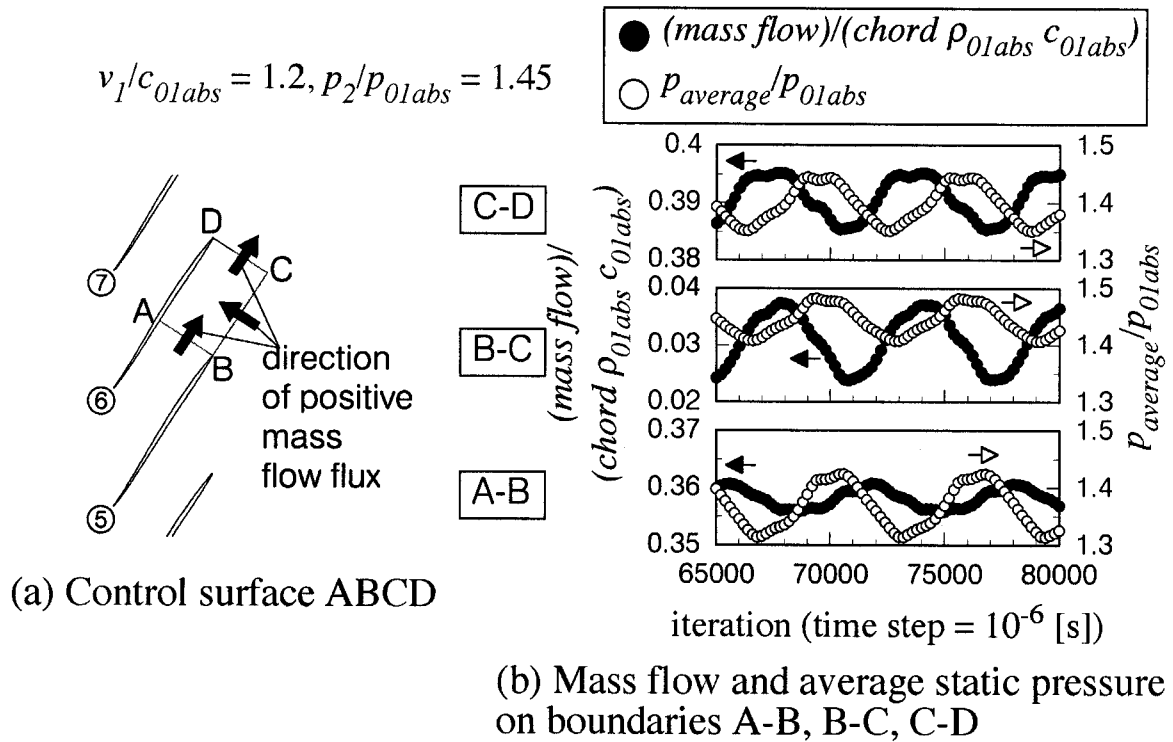


Fig. 5.6.8 Relationship between mass flow and static pressure in cascade discharge area observed at point I in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.2, p_2/p_{01abs} = 1.45$)

5・7 入口境界で逆流部分が発生することによる計算停止

Fig. 5.7.1 に Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中各周速の最大背圧点における入口および出口境界での質量流量の時間履歴を示す．点 J ($v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.403$) と N ($v_1/c_{01abs} = 0.6$, $p_2/p_{01abs} = 1.072$) では同一背圧での 1 ピッチ計算を行うことができなかったため，初期値に低い背圧を用いている．Fig. 5.7.1 を見ると，入口，出口境界ともに流量が急激に減少し

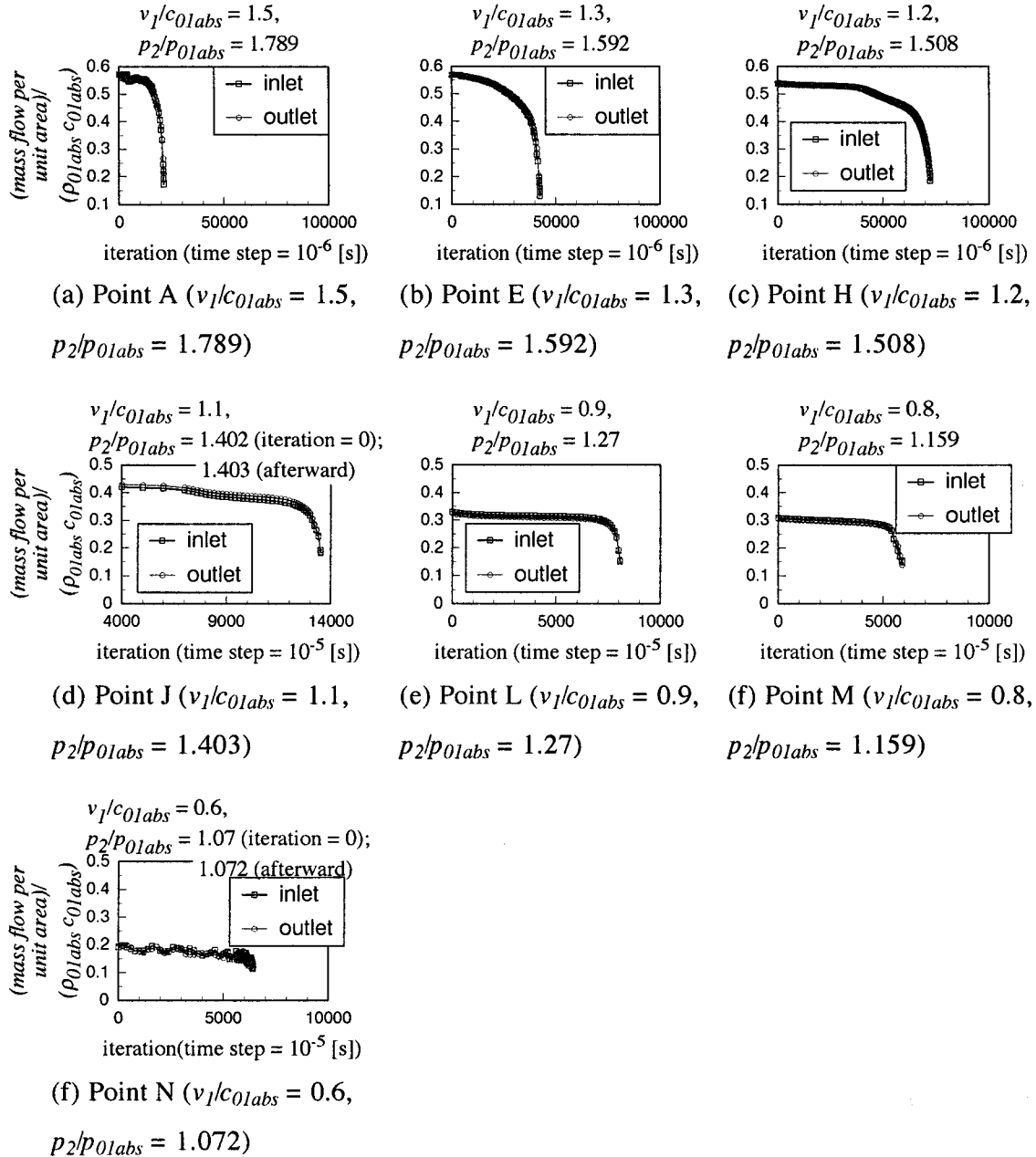


Fig. 5.7.1 Mass flow at inlet and outlet boundaries observed at points A, E, H, J, L, M and N in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1

ている．最終的には入口境界の一部分において逆流が生じる．入口境界で順流を仮定している本計算では境界条件に矛盾が生じ，計算継続不能となる．

最大背圧点での数値的振る舞いは以下のようになる．入口境界での速度の絶対値 $q_{in} = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ は式 (3.5.4) によって与えられる(3)．

$$q_{in} = \left[(\gamma - 1) R_{in}^- + \sqrt{4(\gamma + 1) c_p T_{oi} - 2(\gamma - 1) (R_{in}^-)^2} \right] / (\gamma + 1) \quad (3.5.4)$$

軸流方向速度 u_1 は式 (3.5.4) で得られる速度 q_{in} と規定値である周速 v_1 から $u_1 = \sqrt{(q_{in})^2 - (v_1)^2}$ として計算される．最大背圧点においては最終的に式 (3.5.4) で得られる q_{in} が v_1 よりも小さくなる．その結果軸流方向速度 u_1 が得られなくなる．一方 $u_1 = 0$ の時には入口境界での 1 次元リーマン不変量 R_{in}^- は $R_{in}^- = v_1 - 2c_1 / (\gamma - 1)$ となり，これを式 (3.5.4) に代入すると $q_{in} = v_1$ となる．このことから $u_1 = 0$ は本計算で用いている入口境界条件の限界であり，逆流が発生すると計算に矛盾が生じる．

入口境界で逆流を許容する境界条件に変更すれば計算継続は可能である．しかし逆流時には対流による特性波（渦変動，エントロピー変動の波）が計算領域内部から入口境界に影響し，入口境界での規定値数が 2 つ減少する．そのような状態において入口境界で何を規定すべきかは入口境界上流を含めた系全体の挙動に依存し，それは想定する系によって異なる．本計算は周方向に伝ばする変動の数値的観察を主題としているため，境界条件変更は行わなかった．

Fig. 5.7.2 に Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 J ($v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.403$) における軸流方向運動量 pu の等高線を示す．Fig. 5.7.2 の 1 iteration 後に入口境界上の一部分で逆流が発生する．境界層はく離により図中黒で示されている逆流域が発生する．このはく離が計算継続不能前に急激に増加し，その結果 Fig. 5.7.1 に示される質量流量が急激に減少する．また翼列上流で等高線が密になっている部分は離脱衝撃波を表している．blade 1 - 2, 3 - 4, 5 - 6, 8 - 9 間で離脱衝撃波は消失している．これは成長したはく離によって前縁を回り込む流れが翼負圧面にまで曲がりきらず，その結果衝撃波発生に十分なマッハ数に加速されないためである．加速域（負圧面圧力減少）または衝撃波（正圧面圧力増加）消失により翼は揚力を失い，流れは翼列を通過するのに十分な力を受けられなくなる．本計算の衝撃波発生時には全ての最大背圧点で衝撃波の消失が見られた．

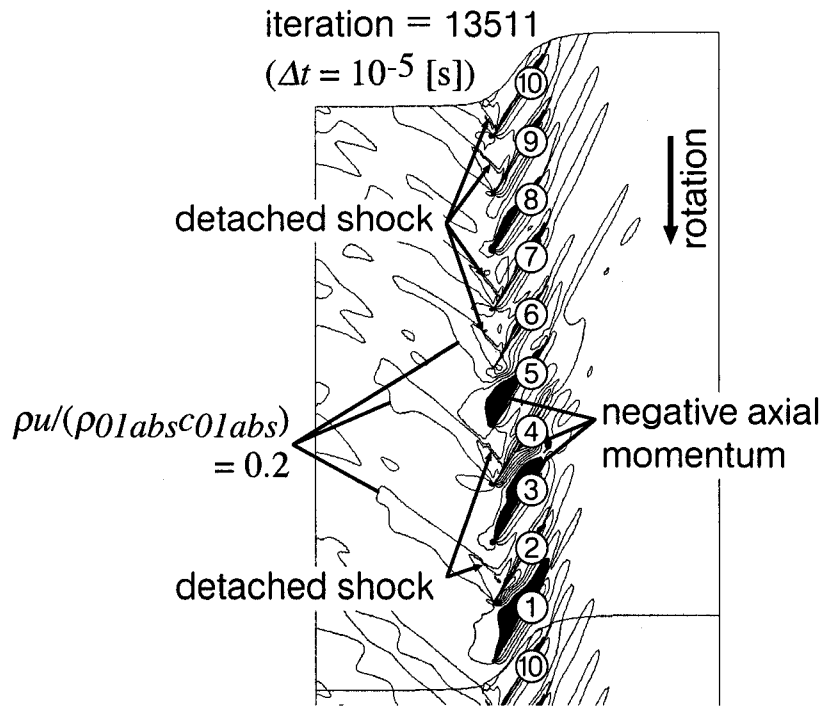


Fig. 5.7.2 Contour of axial momentum ρu one iteration before the local backflow at inlet boundary (increment of $\rho u / (\rho_{01abs} c_{01abs}) = 0.1$). Observed at point J in Fig. 5.2.1 and Table 5.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.1$, $p_2/p_{01abs} = 1.403$)

5・8 アクチュエータディスク解析による結果との比較

本計算で得られた、変動が周方向に伝ばする現象の伝ば速度比を第2章で述べたアクチュエータディスク解析による結果と比較する。ここで示すアクチュエータディスク解析による結果は「翼弦方向の運動量保存の条件」を用いたモデル I によるものである。食い違い角は本計算の翼列と同一としているが翼厚は考慮されていない。モデル I では不安定モードが2種類存在するが、それらのうち旋回失速に対応する方をモード I、衝撃波が関連した不安定現象に対応する方をモード II とここでは呼ぶことにする。

Fig. 5.8.1(a) - (e) に伝ば速度比の比較結果を示す。各図で上段には性能曲線、下段にはアクチュエータディスク解析によるモードの時間的減衰率が示してある。性能曲線中実線がモデル I によるものである (Freeman and Cumpsty⁽⁴⁾ (1989))。また超音速流入時 (Fig. 5.8.1(a)-(d)) に対しては、連続の式、Prandtl-Meyer 関数、等エントロピ変化 (全圧一定) の式を用いた unique incidence によるチョーク限界⁽¹⁾を破線で示してある。実線は破線と

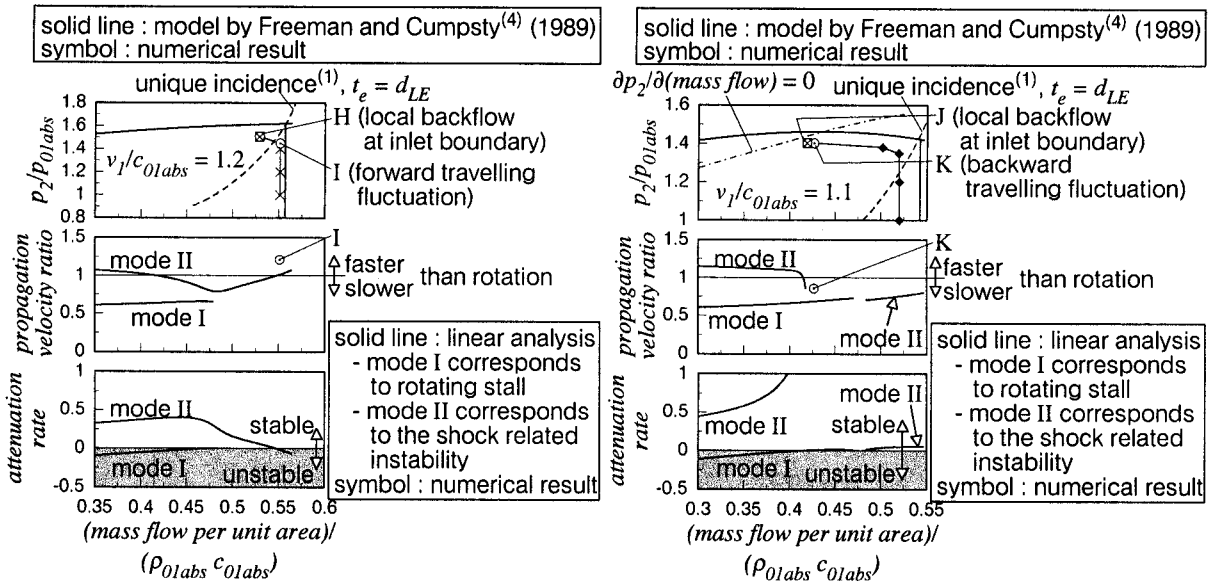
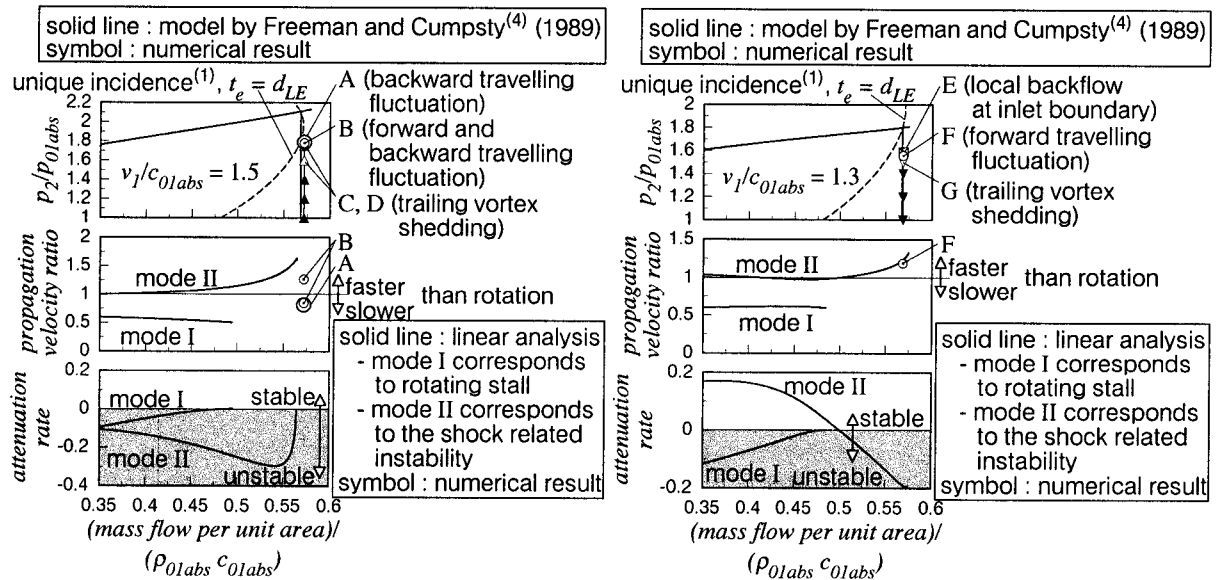
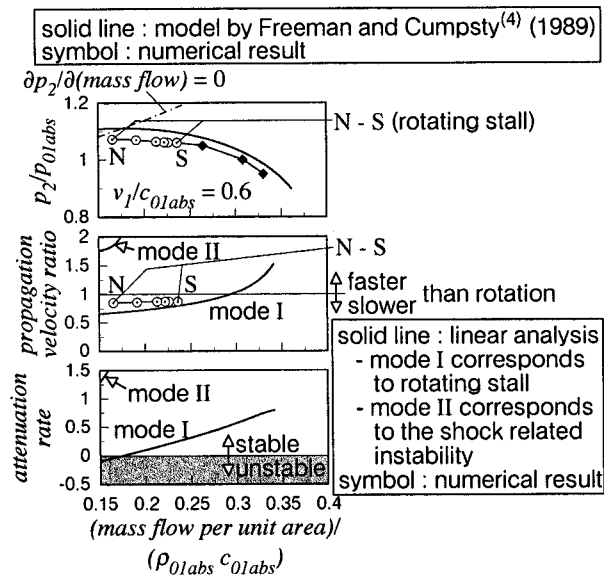


Fig. 5.8.1(a) - (d) Comparisons between circumferentially travelling fluctuations observed in present viscous calculations and results of the linear stability analysis

の交点で流れがチョークして流量一定のまま圧力比のみが変化する。

アクチュエータディスク解析と本計算が同一流入条件になる点を考える際、質量流量または流入角のどちらかを一致させる必要がある。それぞれの場合で比較を行った結果、質量流量に関して一致させた場合がアクチュエータディスク解析の結果とよく一致することが判明した。そのためここでは Fig. 5.8.1 各図の横軸を質量流量にする。



(e) Points N ~ S ($v_1/c_{01abs} = 0.6$, $p_2/p_{01abs} = 1.072 \sim 1.06$)

Fig. 5.8.1(e) Comparisons between circumferentially travelling fluctuations observed in present viscous calculations and results of the linear stability analysis

Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中の作動点 A ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.789$) で見られた「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」と点 B ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.78$) で見られた「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」に対して比較したものが Fig. 5.8.1(a) に示されている。点 A, B と同一の質量流量においてはアクチュエータディスク解析には不安定モードが存在しない。5・4, 5・5 節で述べたように、これらの変動は翼負圧面から発生する膨張波が関係している。アクチュエータディスク解析では膨張波の効果がモデル化されていないため、この差異が不安定モードが存在しない理由として考えられる。点 A の伝ば速度比は点 B の後回りの伝ば速度比に近い。このことから、これらの変動は同一のものであり、点 A では点 B の前回りの変動が減衰している可能性が考えられる。

Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 F ($v_1/c_{01abs} = 1.3$, $p_2/p_{01abs} = 1.56$) と点 I ($v_1/c_{01abs} = 1.2$, $p_2/p_{01abs} = 1.45$) で見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」に対して比較したものが Fig. 5.8.1 (b), (c) にそれぞれ示されている。点 F, I とともに同一質量流量において不安定モード II が存在するが、その伝ば速度比は点 F の場合はよく一致し点 I の場合はアクチュエータディスク解析よりも大きい。5・6 節で述べたように、この変動は音響波よりも速く伝ばする（弱い衝撃波が伝ばする）。アクチュエータディスク解析では音響波以上

の速度ではじょう乱は伝ばしない。このことが点 I の場合点 F の場合に比べて強く現れていると考えられる。同一質量流量で不安定になること、伝ば速度比が1よりも大きいことから点 F, I で見られた変動はモード II, すなわち衝撃波が関連した不安定現象に対応すると考えられる。

Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 K ($v_I/c_{0labs} = 1.1, p_2/p_{0labs} = 1.402$) で見られた「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」に対して比較したものが Fig. 5.8.1 (d) に示されている。伝ば速度はモード II に近いが、この周速のモード II は常に安定で実際には発生しない。同一質量流量で不安定を示すモードはモード I, すなわち旋回失速であるが点 K では失速セルは発生しない。5・4節で述べたように点 K の変動は翼負圧面から発生する膨張波が関係しており、旋回失速とは異なる変動である。

Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 N~S ($v_I/c_{0labs} = 0.6, p_2/p_{0labs} = 1.072 \sim 1.06$) で見られた旋回失速に対して比較したものが Fig. 5.8.1(e) に示されている。旋回失速に対応するモード I と比べて伝ば速度比が1に近く、また発生領域も高流量側にまで及んでいる。後回りの場合、伝ば速度比が1に近いということは翼列とともに移動する座標系においては伝ば速度が小さいということである。計算では翼間流体の慣性の影響があり、その影響だけモード I よりも伝ば速度比が1に近いと考えられる。

これらの結果から、アクチュエータディスク解析で得られる2種類の流れ場の不安定モードのうち旋回失速に対応するモードは Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 N~S, 衝撃波が関連した不安定現象に対応するモードは点 F, I において有限ピッチ、粘性流れの場合にも存在することが判明した。有限ピッチの場合は旋回失速では翼間流体の慣性効果分だけ伝ば速度比が1に近く、衝撃波が関連した不安定現象では弱い衝撃波が伝ばすることにより伝ば速度が大きくなる場合があることがアクチュエータディスク解析の場合との差異として現れる。

また計算ではその他の変動、つまり Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 A, B, K での変動が見られた。これらの変動を予測するためには翼負圧面から発生する膨張波の影響を陽的に含むモデルが必要であると考えられる。

5・9 まとめ

本章ではアクチュエータディスク法による安定解析の結果を受けて、有限ピッチ、粘性流れの場合での流れ場の挙動を明らかにするために非定常粘性計算を行った。流入マッハ数（周速）の影響による違いを見るために、7つの周速に対して計算を行った。明らかにされたことは次のようにまとめられる。

(1) いずれの周速においても失速線近傍で流れ場に非定常性が見られた。非定常点のうち変動が周方向に伝ばする現象が11箇所で見られ、これらは4種類に分類される。1つは亜音速流入で衝撃波が発生しない時に見られた旋回失速であり、その他では「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」、「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と本論文で呼んでいる変動が発生する。これらの非定常特性はTable 5.2.1にまとめられる。

(2) 「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」は翼負圧面から発生する膨張波と前縁衝撃波が翼列上流で干渉することによって起こる。膨張波は衝撃波離脱が incidence を増大させ、前縁を回り込む流れが加速されることによって発生する。衝撃波は周速方向に隣接する翼負圧面から発生する膨張波によって振動し、その衝撃波振動によりその翼負圧面の膨張波が振動する。

(3) 「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」ではまず衝撃波が離脱、翼列上流に低マッハ数領域が発生し、このとき変動は周速と同方向に伝ばする。しかし衝撃波離脱による incidence の増加が翼負圧面から膨張波を発生させ、低マッハ数領域を弱める。この際には変動は周速と反対方向に伝ばする。これが間欠的に起こる。

(4) 「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」では翼列下流で周速方向に移動する高圧領域と翼間衝撃波が干渉して振動する。また高圧領域上流では高圧領域に対して相対的に超音速になっており（マッハ数にして 1.1 程度）、その上・下流マッハ数の関係は垂直衝撃波のそれに近い。周速よりも速く変動が伝ばする理由としては、ある翼列出口部における流量変化が周速方向に隣接する翼間の流出を抑制し、高圧領域が周速方向に隣接する翼間出口部に発生するためであると考えられる。

(5) アクチュエータディスク解析で得られる 2 種類の流れ場の不安定モードのうち旋回失速に対応するモードは Fig. 5.2.1, Table 5.2.1 中点 N ~ S ($v_1/c_{01abs} = 0.6$, $p_2/p_{01abs} = 1.072 \sim 1.06$) , 衝撃波が関連した不安定現象に対応するモードは点 F ($v_1/c_{01abs} = 1.3$, $p_2/p_{01abs} = 1.56$) と点 I ($v_1/c_{01abs} = 1.2$, $p_2/p_{01abs} = 1.45$) の「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」として有限ピッチ, 粘性流れの場合にも存在する. 点 N~S の周速では亜音速流入であり, 点 F, I の周速では定常状態が *unique incidence* によりチョークしている.

(6) アクチュエータディスク解析との差異として, 旋回失速では翼間流体の慣性効果分だけ伝ば速度比が 1 に近く, 衝撃波が関連した不安定現象では弱い衝撃波が伝ばすることにより伝ば速度が大きくなる場合があることが挙げられる.

参考文献

1. Cumpsty, N. A., 1989, *Compressor Aerodynamics*, Longman, John Wiley & Sons, New York, pp. 198-205.
2. Copenhaver, W. W., Puterbaugh, S. L. and Hah, C., 1995, "Unsteady Effects due to Interactions between Tip-Clearance Vortex and Rotor Passage Shock in a Transonic Compressor Rotor", *ISABE Paper* 95-7073.
3. Chima, R. V., 1985, "Inviscid and Viscous Flows in Cascades with an Explicit Multiple-Grid Algorithm", *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 10, pp. 1556-1563.
4. Freeman, C. and Cumpsty, N. A., 1989, "A Method for the Prediction of Supersonic Compressor Blade Performance", *ASME Paper* 89-GT-326.

第6章 非定常非粘性計算の結果と考察

第5章で示された「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生要因を特定するために、本章では Fig. 4.1.2 の計算格子を用いた非定常非粘性計算の結果を示し考察を行う。

「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生域である、定常状態がunique incidenceによりチョークしている場合の2つの周速に対して計算を行う。「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は非粘性計算でも発生し、その発生範囲は粘性流れの場合よりも周速、圧力比両方に関して拡大する。このことから「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生機構には粘性は本質的寄与をなしていないことが判明した。また、本章で行われた2つの周速のいずれの最大背圧点でも「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」した後、入口境界の一部分において逆流が生じて計算継続不能になった。

粘性計算と同様、最後に伝ば速度比をアクチュエータディスク解析と比較する。

6・1 計算の仮定と条件

本章で行った計算の仮定と条件を以下に列挙しておく。

- (i) 非粘性計算である。
- (ii) 計算格子は Fig. 4.1.2 のものを用いる。ただし周期境界上に衝撃波が発生する $v_1/c_{0labs} = 1.3$, $p_2/p_{0labs} = 1.2$ においてのみ下流の周期境界位置を変更した格子を用いる。この場合最終的に定常な流れ場が得られた。
- (iii) 入口境界での絶対系全温 T_{0labs} と絶対系全圧 p_{0labs} は全て $T_{0labs} = 300$ [K], $p_{0labs} = 0.1$ [MPa] にそれぞれ固定する。
- (iv) 「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」に関して着目しているため、非粘性計算ではその発生領域である、定常状態が unique incidence によりチョークしている場合 ($v_1/c_{0labs} = 1.5, 1.3$) について計算を行う。
- (v) 意図的なじょう乱は一切与えていない。
- (vi) 初期値には1ピッチ計算結果（1ピッチで空間周期性があると仮定）を用いる。粘性計算の結果から、じょう乱が完全に発達した時の初期値依存性がないことが分かっている。そのため1ピッチ計算では Fig. 6.2.1 の点 E' の場合 ($v_1/c_{0labs} = 1.3$,

$p_2/p_{01abs} = 1.938$) を除いて時間 1 次精度陰解法を用いた。点 E' の場合の 1 ピッチ計算は時間 1 次精度陰解法では入口境界で逆流部分が発生するが、時間 2 次精度陰解法では逆流部分が発生しなかった。そのため点 E' の場合は時間 2 次精度陰解法による結果を初期値にしている。

6・2 計算による性能曲線

非粘性計算による性能曲線を Fig. 6.2.1 に示す。 $v_1/c_{01abs} = 1.5, 1.3$ それぞれについて示しており、各図の左側は断熱効率を示している。小さい記号で示されているものは粘性計算結果である。非粘性計算による最大背圧点は粘性計算よりも高背圧側に位置している。ラベル A' ~ J' を付した白抜き点で非定常現象が見られ、これらの点では全て変動が周方向

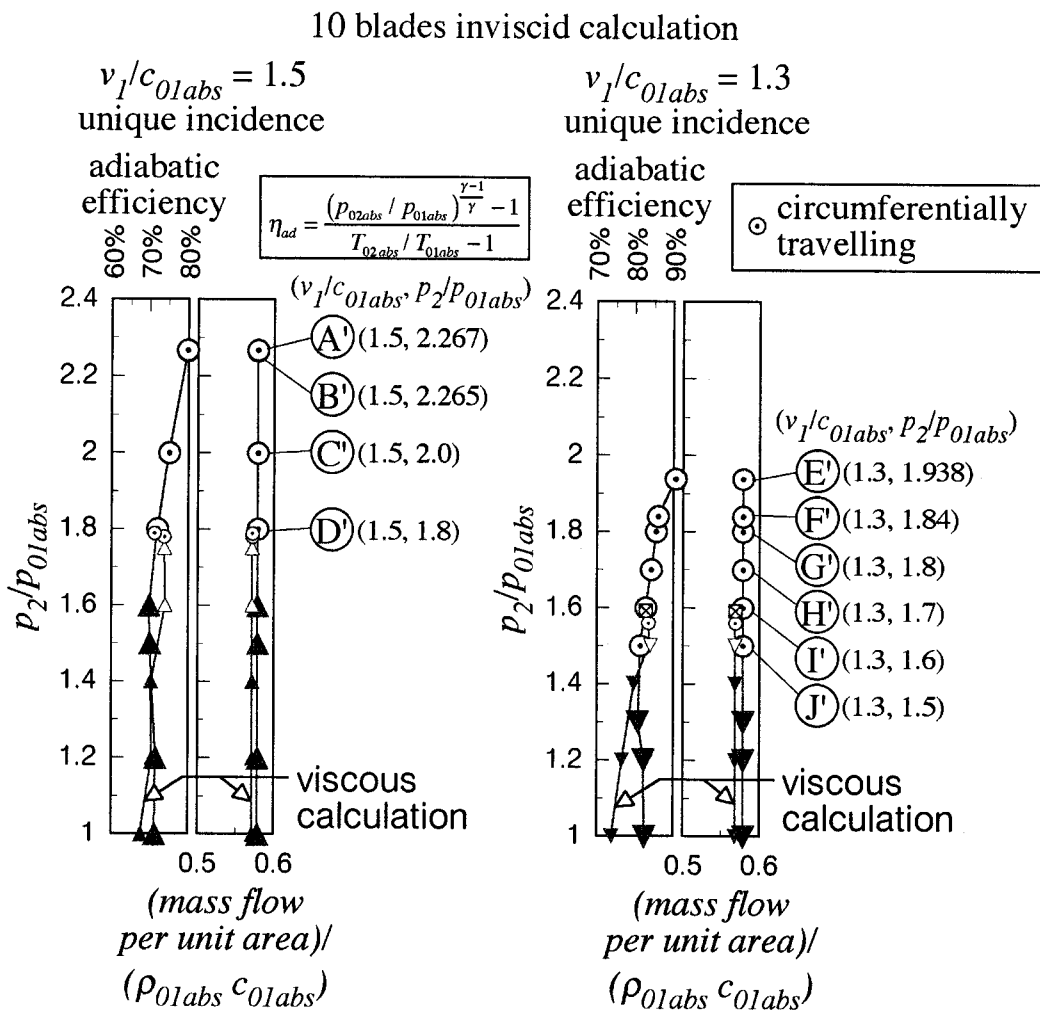


Fig. 6.2.1 Performance curves by 10 blades inviscid calculation

に伝ばする。これらの非定常現象の特性を Table. 6.2.1 に示す。

点 A', E' では入口境界で逆流が発生する前に「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」し、点 A',

Table 6.2.1 Characteristics of unsteady phenomena

point	v_1/c_{01abs} , p_2/p_{01abs}	propagation velocity ratio	number of circumferential periods over 10 blades	remark
A'	1.5, 2.267	0.82	1	"Backward travelling fluctuation with shock detachment" appears before local backflow at inlet boundary.
B'	1.5, 2.265	1.29		
C'	1.5, 2.0	1.26	1	"Forward travelling fluctuation with fluctuating passage shock."
D'	1.5, 1.8	1.17		
E'	1.3, 1.938	0.88	1	"Backward travelling fluctuation with shock detachment" appears before local backflow at inlet boundary.
F'	1.3, 1.84	1.32		
G'	1.3, 1.8	1.31		
H'	1.3, 1.7	1.27	1	"Forward travelling fluctuation with fluctuating passage shock."
I'	1.3, 1.6	1.23		
J'	1.3, 1.5	1.16		

E' 以外の点では「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」が見られた。粘性計算の $v_I/c_{0Iabs} = 1.5$ では「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は見られなかったこと、粘性計算の $v_I/c_{0Iabs} = 1.3$ よりも高、低背圧側に発生領域があることから、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は非粘性流れでは発生領域が拡大されることが分かる。そのため、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生機構には粘性は本質的寄与をなしていないことが判明した。

次節以降では流れ場の詳細を述べ、粘性流れとの違いを明らかにする。

6・3 衝撃波の離脱が後回りに伝ば

「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」する現象は、非粘性計算を行った2つの周速の最大背圧点、すなわち Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 A' ($v_I/c_{0Iabs} = 1.5$, $p_2/p_{0Iabs} = 2.267$) と点 E' ($v_I/c_{0Iabs} = 1.3$, $p_2/p_{0Iabs} = 1.938$) において見られた。前縁衝撃波が離脱することによって始まる後回りの変動としては、粘性計算でも「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」(5・4節)が見られた。本節で述べる現象は、衝撃波の離脱が後回り方向に伝ばする。衝撃波の離脱が周方向に約1周(10翼間)すると、その後に入境界で逆流部分が発生する。翼間によっては翼負圧面から発生する膨張波によって高マッハ数領域が発生し、それによって衝撃波が下流に押しやられるものもある。これは「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」と同じであるが、衝撃波は周期的な振動をしない。衝撃波が離脱し、翼負圧面から膨張波が発生するという共通点があるため、本節では粘性計算の「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」との対比を行いながら結果を述べる。点 A', E' とともに同様の傾向があったため、点 A' の結果を主に示す。

Fig. 6.3.1, 6.3.2 に点 A', E' における各翼前・後縁での静圧時間履歴をそれぞれ示す。点 A', E' それぞれ blade 2 において iteration = 44000, 10000 付近で前縁の静圧が急増し、この静圧急増が周速方向と反対方向 (Fig. 6.3.1, 6.3.2 では上側) に伝ばしている。これらの図から変動の伝ば速度比を求めると点 A' で 0.82, 点 E' で 0.88 になる。

前縁の静圧急増は衝撃波の離脱により発生する。発生以前は衝撃波は完全に翼間に納まっており、衝撃波が前縁には接していない。粘性計算の後回りの変動では衝撃波が前縁に接していた。また Fig. 6.3.1 の blade 2, 3, 4 前縁, Fig. 6.3.2 の blade 2, 3 前縁で見られる

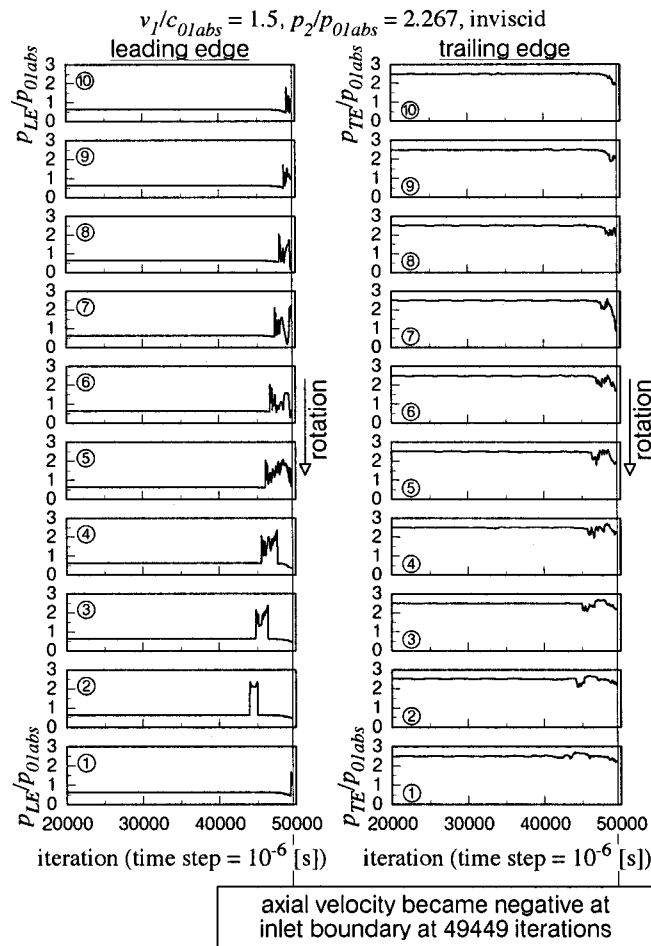


Fig. 6.3.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point A' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_l/c_{0,abs} = 1.5$, $p_2/p_{0,abs} = 2.267$)

(静圧急増後の) 静圧急減は衝撃波が再び完全に翼間に納まった時に起こる。前縁まわりの流れの様子を見るために、Fig. 6.3.3(a) に blade 3 負圧面側膨張終了地点 (0.05% chord 位置、位置は Fig. 6.3.3(d) に図示) におけるマッハ数、(b) に淀み点位置、(c) に翼弦線を延長した線上での衝撃波の位置、(d) に blade 3 前縁まわりのマッハ数等高線と速度ベクトルを点 A' について示す。Fig. 6.3.3(a) - (c) は粘性計算の後回りの変動と同様、衝撃波が前縁から上流へ遠ざかる時は淀み点が前縁から下流へ遠ざかって incidence が増大し、負圧面でのマッハ数が増加することを示している。また Fig. 6.3.3(d) を見ると、衝撃波が完全に翼間に納まる際には衝撃波上流のマッハ数が多い。これは粘性計算の後回りの変動と同様に、周速方向に隣接する翼の負圧面に発生する膨張波が原因である。衝撃波離脱時は前縁に加速膨張域が見られるが、この加速による静圧減少よりも衝撃波による静圧増加の方が大きい。その結果 (前縁が衝撃波上流になり、静圧が小さい) 衝撃波が完全に翼間に納まっている時よりも (前縁が衝撃波下流になり、静圧が大きい) 衝撃波離脱時の方が前縁

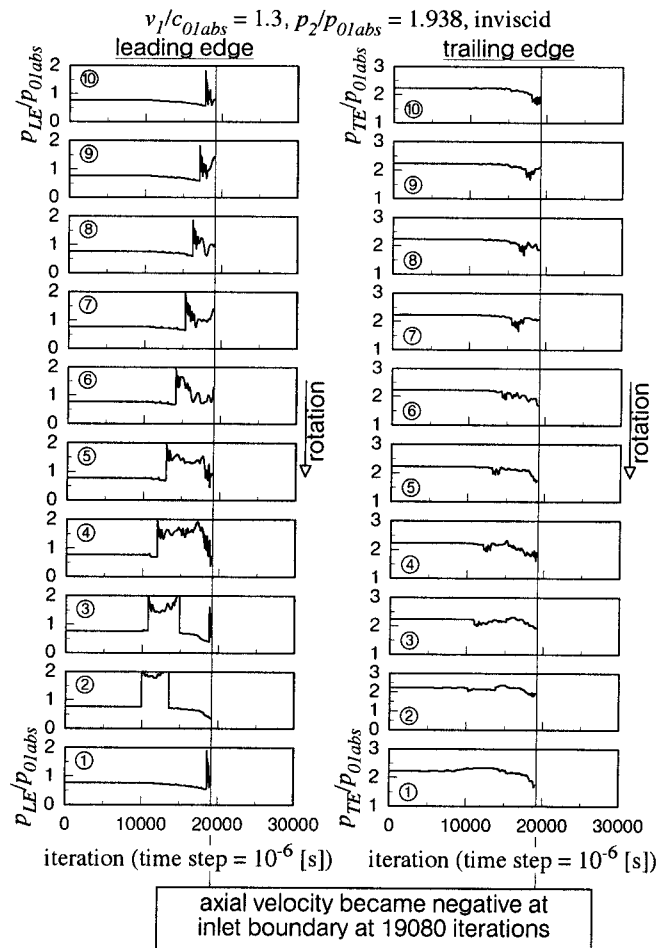


Fig. 6.3.2 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at point E' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.3, p_2/p_{01abs} = 1.938$)

での静圧が大きくなる。

流れ場全体を見るために Fig. 6.3.4(a) に iteration = 48600 でのマッハ数等高線, (b) と (c) に blade 3 前縁を通る軸方向の線 ($y = y_{LE \text{ of blade } 3}$) 上と前縁から 1% axial chord 上流での非定常マッハ数分布を作動点 A' についてそれぞれ示す (これらの線は Fig. 6.3.4(a) に図示した)。Fig. 6.3.4(a) 中上流には離脱衝撃波が発生している。この衝撃波は iteration が進むにつれて Fig. 6.3.4(b) に示されるように上流に伸張してきたものである。Fig. 6.3.4(a) のグレーで示される低マッハ数領域は、流れが衝撃波を通過する時マッハ数が急減して、その後徐々に増加する領域である。Fig. 6.3.3(d) で述べたように、衝撃波の離脱はその上流のマッハ数が小さい時に起こるため、離脱の順番は衝撃波下流方向、すなわち周速と反対方向に起こる。この様子が Fig. 6.3.4(c) の上向きに伝ばする変動によって示されている。しかし粘性計算の後回りの変動と同様に離脱衝撃波が incidence を増大させ、その結果 Fig. 6.3.4(a) 中白で示される高マッハ数領域が発生する。この高マッハ数領域に位置する blade 9

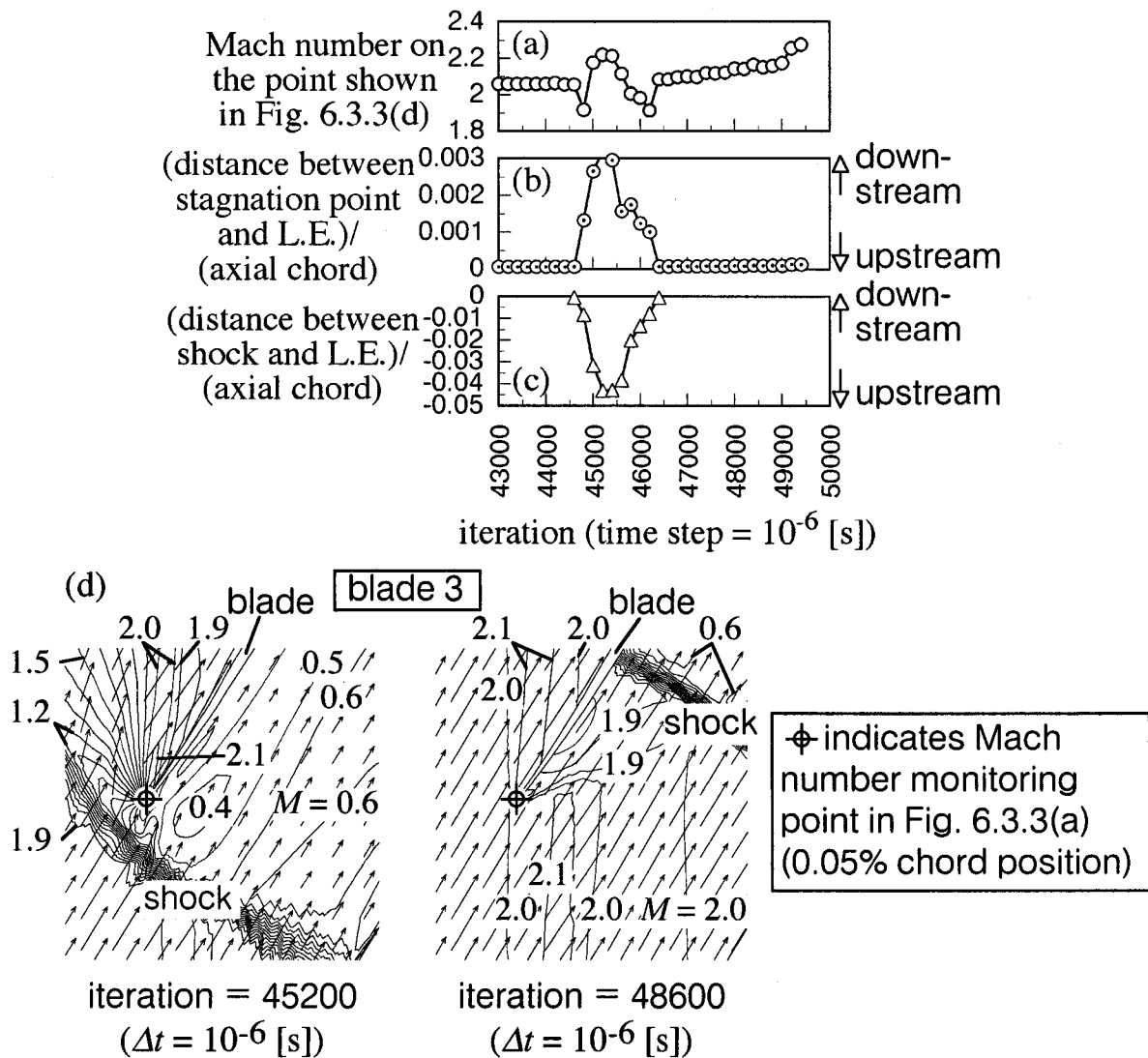
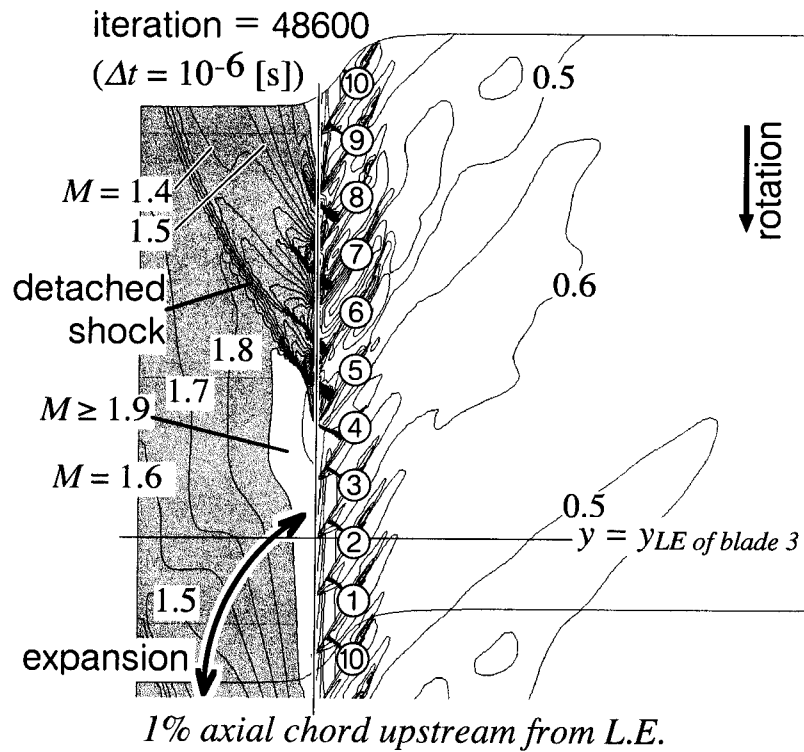


Fig. 6.3.3 (a) Mach number on 0.05% chord position (shown in Fig. 6.3.3(d)) of suction surface of blade 3, (b) location of stagnation point, (c) chordwise shock location, and (d) Mach number contour (increment = 0.1) and velocity vector around the leading edge. Observed at point A' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.267$)

~5 の翼間では衝撃波が翼間に納まる。

点 A', E' とともに変動は周方向に約 1 周 (10 翼間) しかせず, 最終的には入口境界において逆流部分が発生することにより計算継続不能になる. 非粘性計算を行った $v_1/c_{01abs} = 1.3$, 1.5 での流入マッハ数 (それぞれ 1.74, 1.92) はともに粘性計算 (それぞれ 1.64, 1.84) の場合と比較して大きくなる. 粘性計算においても $v_1/c_{01abs} = 1.5$ の最大背圧では「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」の後に入口境界において逆流部分が発生した. 流入マッハ数が高い場合は衝撃波によって達成できる背圧が大きいため逆流が生じやすく, 変動が維持され難いものと思われる.



(a) Mach number contour at 48600 iterations (increment = 0.1)

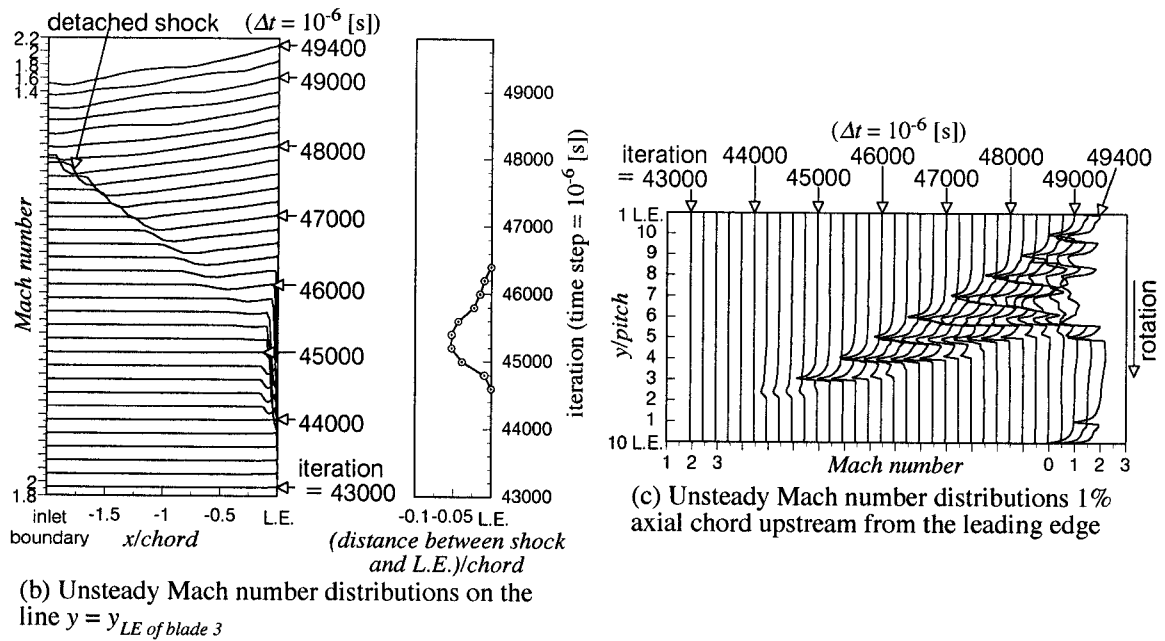


Fig. 6.3.4 (a) Mach number contour at 48600 iterations (increment = 0.1), (b) unsteady Mach number distributions on the line $y = y_{LE} \text{ of blade } 3$ (shown in Fig. 6.3.4(a)), and (c) unsteady Mach number distributions 1% axial chord upstream from the leading edge. Observed at point A' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.267$)

6・4 翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動

非粘性計算においても「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」が Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 B' ~ D', F' ~ J' において見られた。これらの点は $v_1/c_{0labs} = 1.5, 1.3$ 両方の周速に存在する。粘性計算の $v_1/c_{0labs} = 1.5$ では「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は見られなかった。また点 J' ($v_1/c_{0labs} = 1.3, p_2/p_{0labs} = 1.5$) と同一周速、圧力比における粘性計算では「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は発生しなかった。これらのことから非粘性流れの「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は発生領域が周速、圧力比両方に関して拡大されることが判明した。

$v_1/c_{0labs} = 1.5$ の場合、高背圧側にある点 B' ($v_1/c_{0labs} = 1.5, p_2/p_{0labs} = 2.265$)、C' ($v_1/c_{0labs} = 1.5, p_2/p_{0labs} = 2.0$) では変動が弱い。一方、点 D' ($v_1/c_{0labs} = 1.5, p_2/p_{0labs} = 1.8$) では変動が明瞭に見られた。 $v_1/c_{0labs} = 1.3$ の場合は計算を行った全ての点において点 D' のように変動が明瞭に見られ、その傾向は作動点 D' と同様であった。そのため、ここでは $v_1/c_{0labs} = 1.5$ の場合の点 B', C', D' について詳しく述べる。

Fig. 6.4.1 に点 D' における各翼前・後縁、Fig. 6.4.2 に点 B', C' における blade 5, 6 の後縁での静圧時間履歴を示す。Fig. 6.4.1 (点 D') では矩形状の変動が周速と同方向 (Fig. 6.4.1 では下向き) に伝ばしている。Fig. 6.4.2 (点 B', C') でも 10 枚の翼全てに関して後縁での静圧履歴を見たが、それらからは変動の伝ばが分からなかった。しかし後に示すが、点 B', C' では下流の非定常静圧分布から弱い変動の伝ばが確認された。

点 B', C', D' のいずれにおいても前縁での変動は全く見られない。これは粘性計算とは異なり、翼間衝撃波が前縁にまで達しないためである。このことは非粘性流れにおける「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の全ての点で同一であり、流れ場の様子から衝撃波より上流に全く変動がないことが全ての点で確認された。

Fig. 6.4.3 に点 D' における iteration = 40000 での静圧等高線と 1 axial chord 下流 (位置は Fig. 6.4.3(a) に図示) での非定常静圧分布を示す。Fig. 6.4.3(a) 中グレーで示された領域は高圧領域である。この領域は Fig. 6.4.3(b) のピークに対応し、これが周速と同方向 (Fig. 6.4.3(a), (b) では下向き) に移動する。Fig. 6.4.3(b) から変動の伝ば速度比を求めると 1.17 になる。また Fig. 6.4.3(b) と同様の図を点 B', C' についてそれぞれプロットしたものが Fig. 6.4.4(a), (b) である。Fig. 6.4.3(b) と比較すると振幅は小さい (Fig. 6.4.3(b) での振幅は $0.86 p_{0labs}$, Fig. 6.4.4(a), (b) ではそれぞれ $0.01 p_{0labs}, 0.02 p_{0labs}$) が、変動が周速と同方向に移

動することが分かる．変動の伝ば速度比は点 B', C' でそれぞれ 1.29, 1.26 である．

粘性計算と同様，変動の伝ば速度比から変動とともに移動する座標系から見た高压領域先端境界（Fig. 6.4.3(a) 中のグレーで示される領域の下側）に垂直方向の相対マッハ数を概算してみた．その結果を Table 6.4.1 に示す．軸流正方向から測った高压領域の傾きは点 B'

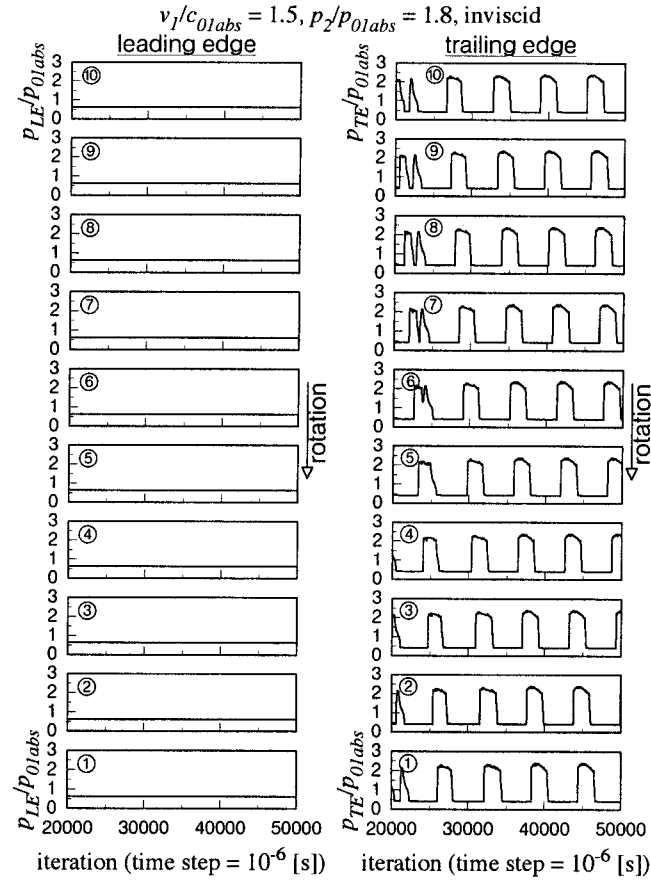
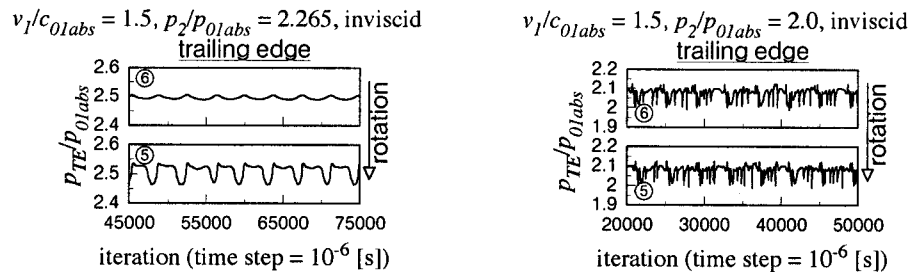
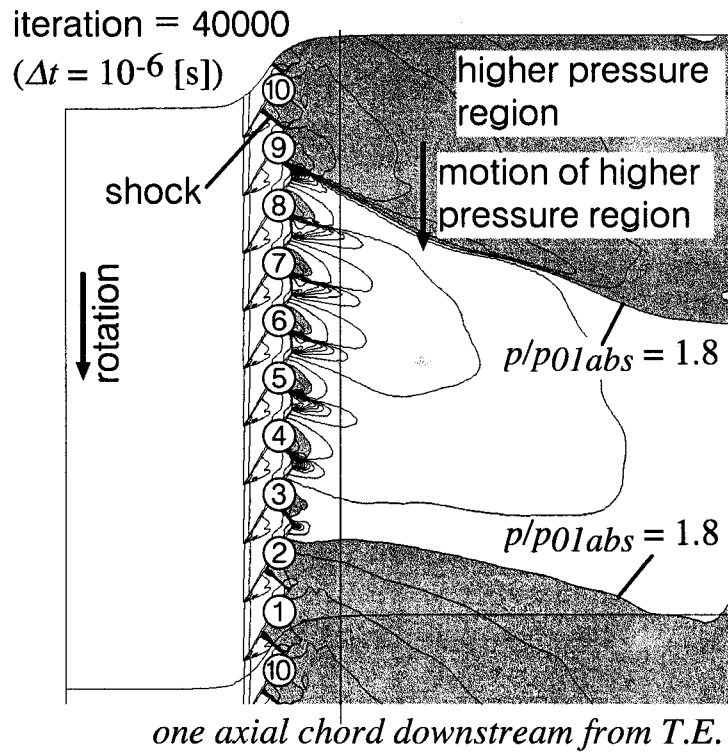


Fig. 6.4.1 Static pressure fluctuations at the leading and trailing edges observed at operating point D' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.8$)

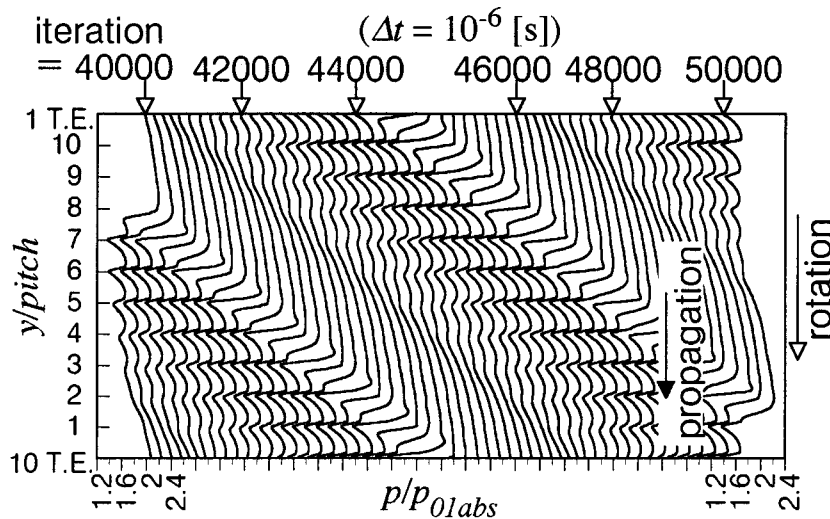


(a) Point B' ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.265$) (b) Point C' ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.0$)

Fig. 6.4.2 Static pressure fluctuations at the trailing edges of blades 5 and 6. Observed at points B' ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.265$) and C' ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 2.0$) in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1



(a) Static pressure contour at 40000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.1$)



(b) Unsteady static pressure distributions one axial chord downstream from the trailing edge

Fig. 6.4.3 (a) Static pressure contour at 40000 iterations (increment of $p/p_{01abs} = 0.1$) and (b) unsteady static pressure distributions one axial chord downstream from the trailing edge (shown in Fig. 6.4.3(a)). Observed at point D' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.8$)

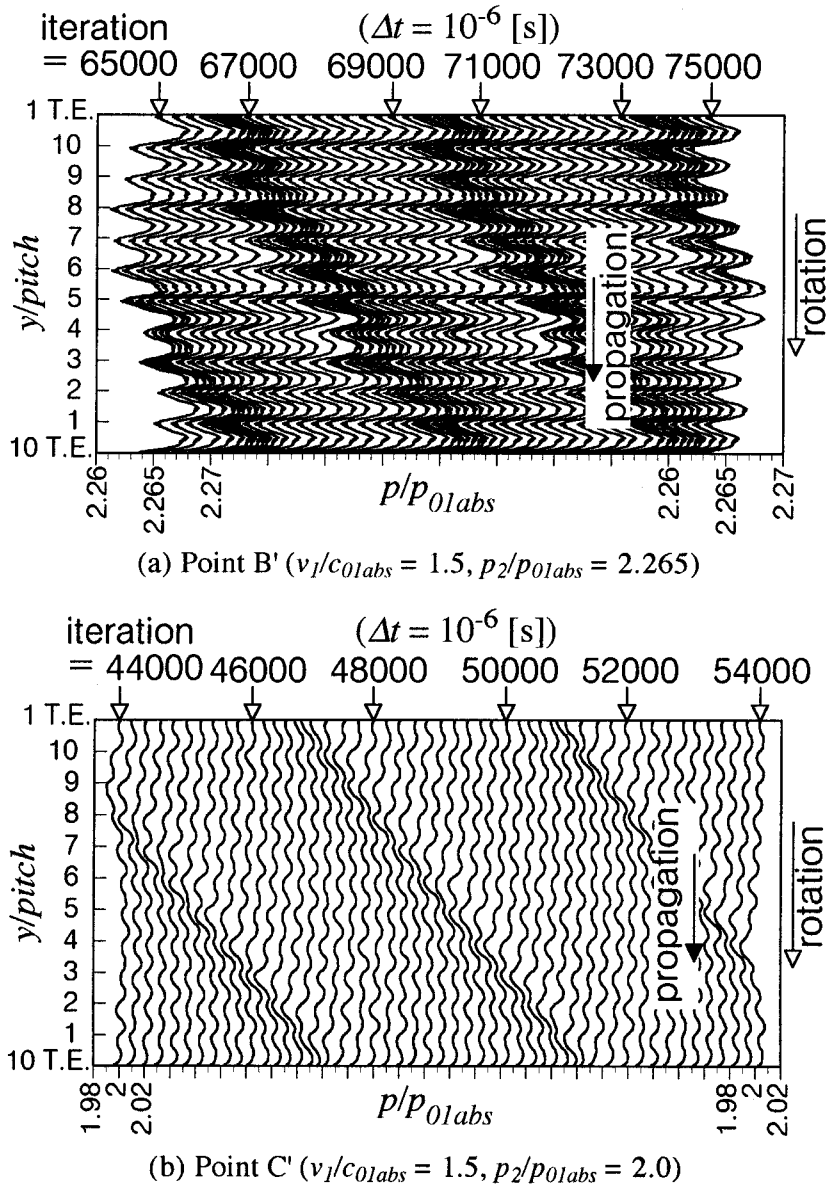


Fig. 6.4.4 Unsteady static pressure distributions one axial chord downstream from the trailing edge (shown in Fig. 6.4.3(a)). Observed at points B' ($v_1/c_{0labs} = 1.5, p_2/p_{0labs} = 2.265$) and C' ($v_1/c_{0labs} = 1.5, p_2/p_{0labs} = 2.0$) in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1

の場合 158° ，点 C' の場合 162° ，点 D' の場合 151° ，点 F' の場合 158° ，点 G' の場合 155° ，点 H' の場合 162° ，点 I' の場合 162° ，点 J' の場合 156° としている．点 B', C' 以外の点では全てに対して高圧領域上流が相対的に超音速になり，粘性計算と同様，上・下流マッハ数の関係は垂直衝撃波のそれに近い．再度 Fig. 6.4.3(a)を見ると，高圧領域の移動方向先端（Fig. 6.4.3(a) では下端）の等高線が密になり，衝撃波になっていることが分かる．点 B', C' 以外の点では全ての静圧等高線から下流の衝撃波が確認できる．Fig. 6.4.3(a) と同一の増分 (increment of $p/p_{0labs} = 0.1$) またはその半分の増分にもかかわらず，粘性計算では静圧等

高線 (Fig. 5.6.3(a), 5.6.4(a)) からは衝撃波が確認されなかった。この原因として、後流による拡散が圧力勾配を小さくしていることが考えられる。

Table 6.4.1 Mach number upstream and downstream of the leading edge of higher pressure region in the frame moving with higher pressure region

point (v_l/c_{01abs} , p_2/p_{01abs})	one axial chord downstream from T.E. $M_{Uhpr} \rightarrow M_{Dhpr}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)	2 axial chords downstream from T.E. $M_{Uhpr} \rightarrow M_{Dhpr}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)	3 axial chords downstream from T.E. $M_{Uhpr} \rightarrow M_{Dhpr}^*$ ($M_1 \rightarrow M_2$, assuming normal shock)
B' (1.5, 2.265)	0.92 $\rightarrow$ 0.90 (no shock)	0.91 $\rightarrow$ 0.91 (no shock)	0.91 $\rightarrow$ 0.91 (no shock)
C' (1.5, 2.0)	1.01 $\rightarrow$ 0.99 (1.01 $\rightarrow$ 0.99)	1.00 $\rightarrow$ 0.99 (1.00 $\rightarrow$ 1.00)	1.00 $\rightarrow$ 0.99 (1.00 $\rightarrow$ 1.00)
D' (1.5, 1.8)	1.27 $\rightarrow$ 0.86 (1.27 $\rightarrow$ 0.80)	1.11 $\rightarrow$ 0.88 (1.11 $\rightarrow$ 0.90)	1.13 $\rightarrow$ 0.85 (1.13 $\rightarrow$ 0.89)
F' (1.3, 1.84)	1.06 $\rightarrow$ 0.94 (1.06 $\rightarrow$ 0.94)	1.06 $\rightarrow$ 0.93 (1.06 $\rightarrow$ 0.94)	1.06 $\rightarrow$ 0.94 (1.06 $\rightarrow$ 0.94)
G' (1.3, 1.8)	1.09 $\rightarrow$ 0.93 (1.09 $\rightarrow$ 0.92)	1.05 $\rightarrow$ 0.92 (1.05 $\rightarrow$ 0.95)	1.05 $\rightarrow$ 0.93 (1.05 $\rightarrow$ 0.95)
H' (1.3, 1.7)	1.15 $\rightarrow$ 0.91 (1.15 $\rightarrow$ 0.88)	1.10 $\rightarrow$ 0.92 (1.10 $\rightarrow$ 0.91)	1.10 $\rightarrow$ 0.90 (1.10 $\rightarrow$ 0.91)
I' (1.3, 1.6)	1.14 $\rightarrow$ 0.92 (1.14 $\rightarrow$ 0.88)	1.10 $\rightarrow$ 0.92 (1.10 $\rightarrow$ 0.91)	1.07 $\rightarrow$ 0.92 (1.07 $\rightarrow$ 0.94)
J' (1.3, 1.5)	1.20 $\rightarrow$ 0.90 (1.20 $\rightarrow$ 0.84)	1.11 $\rightarrow$ 0.90 (1.11 $\rightarrow$ 0.90)	1.08 $\rightarrow$ 0.92 (1.08 $\rightarrow$ 0.93)

* M_{Uhpr} and M_{Dhpr} are Mach numbers upstream and downstream of higher pressure region in the frame moving with higher pressure region, respectively.

一方点 B', C' では点 C' の 1 axial chord 下流の場合を除いて超音速にまで加速されず，衝撃波にまで至っていない．点 B', C' において変動が弱くなるのは衝撃波が形成されないためであると考えられる．

翼間流れ場の詳細を見るために点 D' における blade 5, 6, 7 まわりの静圧等高線を Fig. 6.4.5 に示す．振動の 1 周期は約 6100 iteration ($\Delta t = 10^{-6}$ [s], (blade passing period)/ $\Delta t \sim 107$) になる．粘性計算時と同様，グレーで示された高圧領域が翼列出口部にさしかかると翼間衝撃波が上流に移動する．ただし翼間衝撃波の位置は粘性計算よりも下流にあり，前縁にまで達しない．1/2 ピッチ位置での衝撃波振動振幅は翼弦長の約 30% である．この場合（点 D'）が非粘性計算における衝撃振幅最大の場合であり，その他の点については点 B', C' では約 1%， $v_1/c_{01abs} = 1.3$ の場合の点 F' ~ J' では翼弦長の 11 ~ 17% であった．

Fig. 6.4.6(b) は Fig. 6.4.6(a) に示される検査面 ABCD に流入出する質量流量の変化を点 D' に対して示している．Fig. 6.4.6(b)には平均静圧も示してある．粘性計算の場合と同様，境界 BC での流量が最小値をとるときには境界 AB での流量が増加，境界 CD での流量が減少する傾向にある．このことからある翼列出口部における流量変化が周速方向（Fig. 6.4.6(a) では下側）に隣接する翼間の流出を抑制し，高圧領域が周速方向に隣接する翼間出

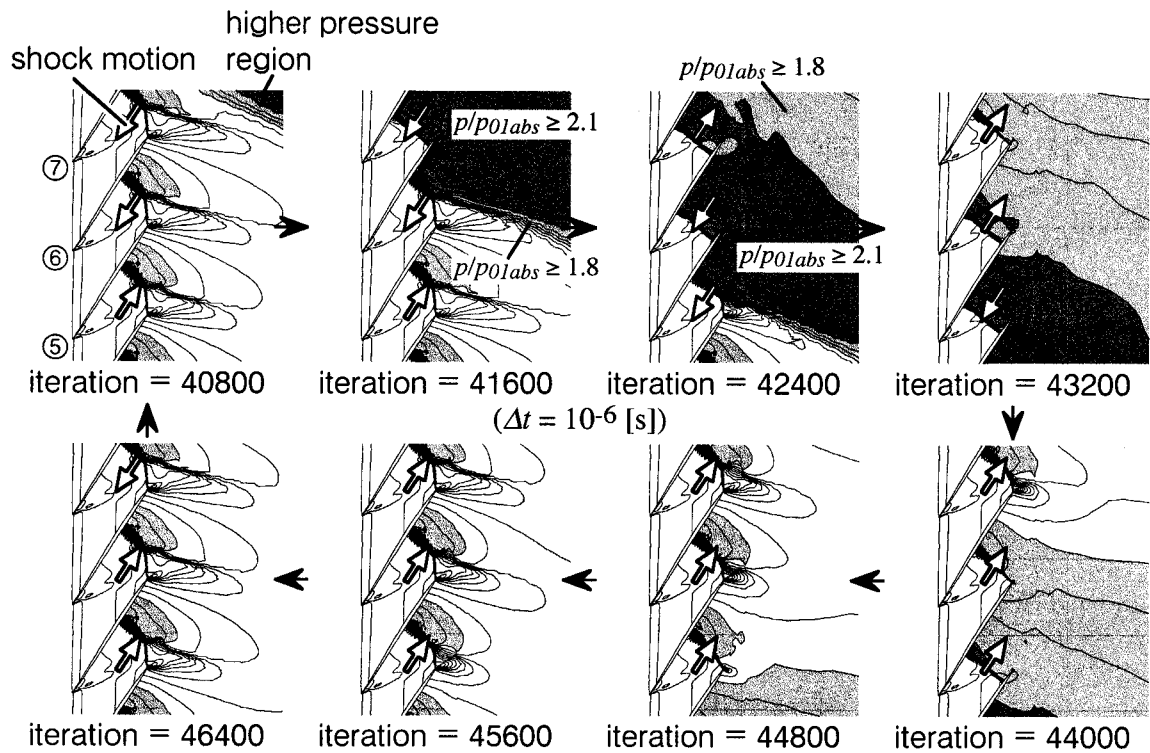


Fig. 6.4.5 Static pressure contour (increment of $p/p_{01abs} = 0.1$) observed at point D' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.8$)

口部に発生することになる（高圧領域が周速方向に移動する）。ここで述べた周速よりも速く変動が伝ばする理由は粘性流れの場合と同一であり、粘性の有無に関係しない。

ところで点 D' ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.8$, 伝ば速度比 1.17) は粘性計算で「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」が見られた点 B ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.78$, 伝ば速度比 1.27, 0.85) に圧力比が近く、前回りの伝ば速度比に近い。さらに点 B は粘性計算で「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」が見られた点 A ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.789$, 伝ば速度比 0.81) にも圧力比が近く、後回りの伝ば速度比に近い。そのため粘性計算の点 B における変動は「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」が交互に発生することによって生じていると考えられる。

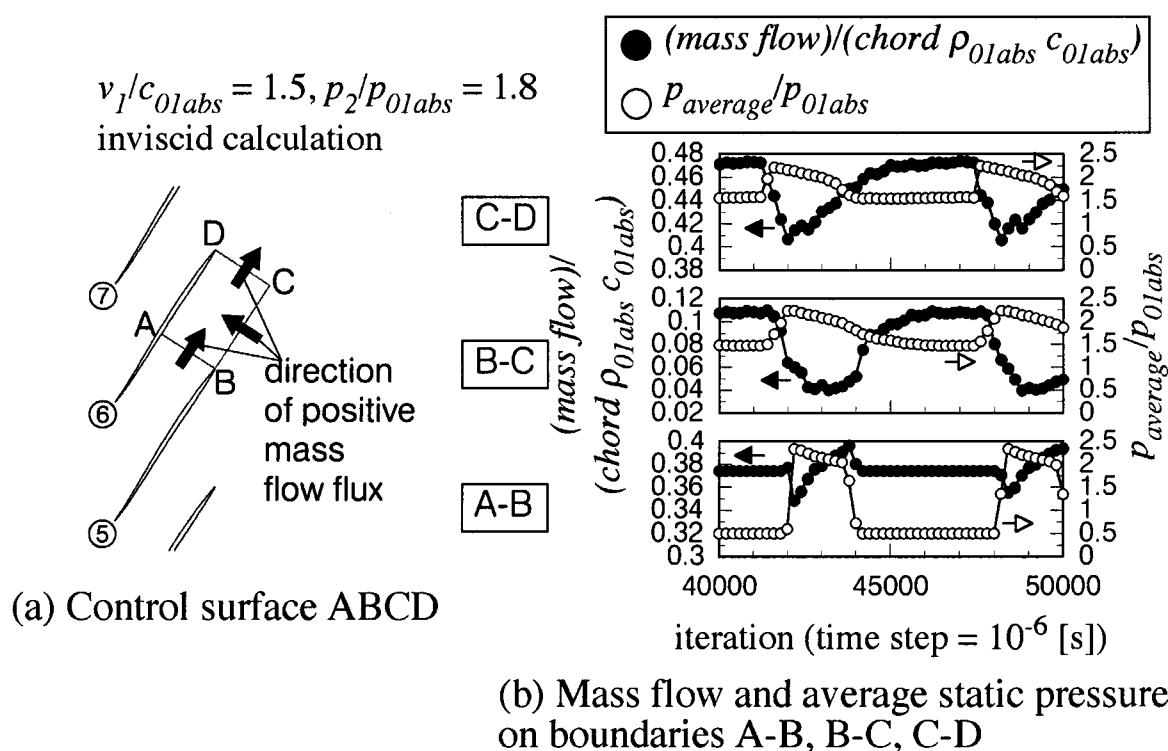


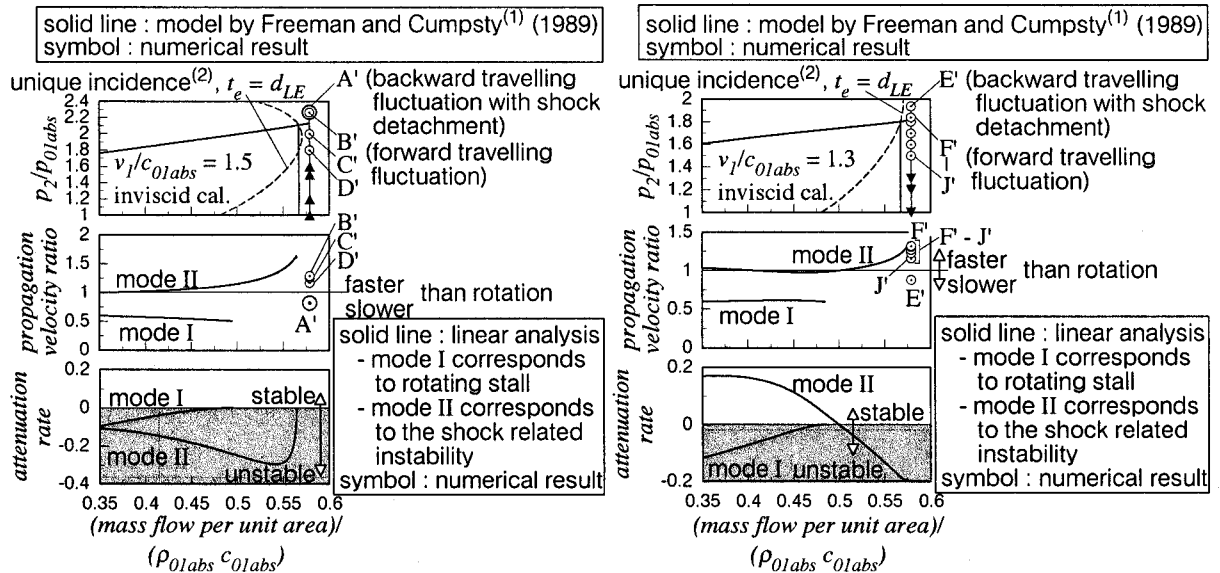
Fig. 6.4.6 Relationship between mass flow and static pressure in cascade discharge area observed at point D' in Fig. 6.2.1 and Table 6.2.1 ($v_1/c_{01abs} = 1.5$, $p_2/p_{01abs} = 1.8$)

6・5 アクチュエータディスク解析による結果との比較

非粘性計算で得られた，変動が周方向に伝ばする現象の伝ば速度比を第2章で述べたアクチュエータディスク解析による結果と比較する．アクチュエータディスク解析による結果は第5章で用いたものと同じである．モードⅠが旋回失速に対応し，モードⅡが衝撃波が関連した不安定現象に対応する．

比較結果を Fig. 6.5.1 に示す．第5章と同じく横軸は質量流量である．流入角で比較した場合，特に $v_l/c_{01abs} = 1.3$ の計算では流入角が翼列の食い違い角よりも小さいため，性能曲線の存在領域さえアクチュエータディスク解析とは一致しなかった．

$v_l/c_{01abs} = 1.3$ (Fig. 6.5.1(b)) の場合，Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 F' ~ J' で見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と同一の質量流量において不安定モードⅡが存在し，高背圧側（点 F'）では伝ば速度比も一致する．粘性計算時にも $v_l/c_{01abs} = 1.3$ では不安定モードⅡに対応する変動として「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」が見られた． $v_l/c_{01abs} = 1.5$ (Fig. 6.5.1(a)) の場合，周方向に伝ばする変動が見られた点と同一の質量流量では不安定モードが存在しない．しかし Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 B' ~ D' で見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 F' ~ J' で見られた変動



(a) Points A', B', C' and D' ($v_l/c_{01abs} = 1.5$,
 $p_2/p_{01abs} = 2.267, 2.265, 2.0$ and 1.8)

(b) Points E' F', G', H', I' and J' ($v_l/c_{01abs} = 1.3$,
 $p_2/p_{01abs} = 1.938, 1.84, 1.8, 1.7, 1.6$ and 1.5)

Fig. 6.5.1 Comparisons between circumferentially travelling fluctuations observed in present inviscid calculations and results of the linear stability analysis

と同一の変動であり、モード II の発生領域に近いことからこれらはモード II に対応するものと考えられる。

Fig. 6.2.1, Table 6.2.1 中点 A', E' で見られた「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」する現象は旋回失速とは異なる現象であるためモード I には対応せず、アクチュエータディスク解析では予測できない。

6・6 まとめ

第 5 章で示された「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生要因を特定するため、この変動が発生する unique incidence によりチョークしている場合の 2 つの周速に対して非定常非粘性計算を行った。明らかにされたことは以下のようにまとめられる。

(1) 最大背圧点近傍で非定常現象が見られたが、その全てが変動が周方向に伝ばする現象であった。これらは 2 種類に分類される。1 つは粘性計算でも見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」であり、もう 1 つは最大背圧点で見られる「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」する現象である。これらの非定常特性は Table 6.2.1 にまとめられる。

(2) 粘性計算で見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」は非粘性計算でも発生した。このことから、この現象の発生機構に対して粘性は本質的寄与をなしていないことが分かった。非粘性流れの場合、周速、圧力比に関するその発生領域は拡大する。

(3) 粘性計算と同じく「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」では翼列下流で周速方向に移動する高圧領域と翼間衝撃波が干渉して振動する。高圧領域の移動方向先端では衝撃波が形成される（衝撃波上流の相対マッハ数は 1.0 ~ 1.2 であった）。ただし変動が弱い場合は衝撃波にまで至っていない。周速よりも速く変動が伝ばする理由（ある翼列出口部における流量変化が周速方向に隣接する翼間の流出を抑制し、高圧領域が隣接する翼間出口部に発生する）も粘性計算と同様であり、この理由は粘性が関係していない。

(4) 「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」する現象では、ある翼間に発生する衝撃波が離脱し、衝撃波下流のマッハ数が低下する。マッハ数が低下した流れによってその下流、すなわち

周速と反対方向に隣接する翼間に発生する衝撃波が離脱する。そしてこの離脱衝撃波下流のマッハ数が低下する。このような順番で衝撃波離脱が周速と反対方向の順に起こるが、最終的には入口境界の一部分において逆流が生じて計算継続不能になる。

参考文献

1. Freeman, C. and Cumpsty, N. A., 1989, "A Method for the Prediction of Supersonic Compressor Blade Performance", *ASME Paper* 89-GT-326.
2. Cumpsty, N. A., 1989, *Compressor Aerodynamics*, Longman, John Wiley & Sons, New York, pp. 198-205.

第7章 結言

本論文では遷音速圧縮機ロータティップ側部分に生じる流体力学的不安定現象の基本的性質を調べるため、2次元超音速翼列流れについて2つの手法によって解析を行った。1つはアクチュエータディスク解析であり、もう1つは数値流体力学（CFD）による計算である。特に超音速流れに独特の衝撃波が関連した不安定現象について、存在の有無、変動モード、発生原因を調べることに焦点を当てた。本章では本論文で得られた結論をまとめる。

アクチュエータディスク法による安定解析（第2章）では、超音速翼列をアクチュエータディスクにモデル化し、正弦波状に振動すると仮定した微小じょう乱の安定性を解析した。その結果、超音速翼列には亜音速翼列で通常見られる旋回失速の他に衝撃波が関連した不安定現象が存在することが示された。この不安定現象は流体の圧縮性や衝撃波によって発生する性能曲線の右上がり領域において発生し、高流量域では周速よりも速く伝ばすることが特徴として挙げられる。

アクチュエータディスク解析によって示された不安定現象が有限ピッチ、粘性流れにおいても存在するのかを検証し、さらに有限振幅を持つじょう乱による流れ場の挙動を明らかにするため、有限差分法による非定常粘性計算を行った（第5章）。流入マッハ数（周速）の影響による非定常特性の違いを見るために、亜音速流入を含めた7つの周速に対して計算を行った。その結果、周速を一定にした場合の最大背圧点近傍で変動が周方向に伝ばする現象が4種類見られた。それらは亜音速翼列で通常見られる旋回失速と「前縁衝撃波の振動と関係した後回りの変動」、「前縁衝撃波の離脱が間欠的に発生し、伝ば方向が変化する変動」、「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」と本論文で呼んでいる現象である。

アクチュエータディスク解析による結果との比較により、旋回失速に対応するモードは亜音速流入時に見られ、衝撃波が関連した不安定現象に対応するモードは「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」として数値計算で見られることが判明した。「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」が発生する周速では定常状態が *unique incidence* によりチョークしている。アクチュエータディスク解析との差異として、旋回失速では翼間流体の慣性効果

分だけ伝ば速度比が1に近く、衝撃波が関連した不安定現象では弱い衝撃波が伝ばすることにより伝ば速度が大きくなる場合があることが挙げられる。

「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」では翼列下流で周速方向に移動する高圧領域と翼間衝撃波が干渉して振動する。この高圧領域は弱い衝撃波であり、高圧領域から見た高圧領域上流のマッハ数は約1.1であった。周速よりも速く変動が伝ばする理由としては、ある翼列出口部における流量変化が周速方向に隣接する翼間の流出を抑制し、高圧領域が周速方向に隣接する翼間出口部に発生するためであると考えられる。

粘性計算で示された「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生要因を特定するために、その発生域である、定常状態が *unique incidence* によりチョークしている場合の2つの周速に対して非定常非粘性計算を行った（第6章）。「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生範囲は粘性流れの場合よりも周速、圧力比両方に関して拡大する。このことから「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」の発生機構には粘性は本質的寄与をなしていないことが判明した。下流に発生する高圧領域の移動方向先端は衝撃波である（衝撃波上流の相対マッハ数は1.0～1.2）。ただし変動が弱い場合は衝撃波にまで至っていない。また周速よりも速く変動が伝ばする理由も粘性計算と同様であり、これは粘性とは関係していない。

その他では2つの周速のいずれの最大背圧点でも「衝撃波の離脱が後回りに伝ば」した後、入口境界の一部分において逆流が生じて計算継続不能になった。

以上の結果により、本研究の焦点である衝撃波が関連した不安定現象は2次元超音速翼列では「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」として存在することが示された。この現象の発生機構には粘性は本質的寄与をなしていない。従来の衝撃波振動に関する研究の多くは、境界層や後流渦との干渉を振動発生の原因にしているが、本研究で見られた「翼間衝撃波の振動を伴う前回りの変動」はそれには属さない、衝撃波が発生する超音速翼列流れに特有の流れ場の固有振動である可能性が高い。2次元解析であるため、実際のロータでこのような現象が発生するかは断言できないが、遷音速圧縮機の安全性向上のためには十分に検討されるべき事項であると考えられる。最後に衝撃波が関連した不安定現象の完全な解明に向けて、さらなる方針を提示する。

(1) 3次元性の影響の検討

より実際に近づけるためには3次元計算を行わなければならない。特にテップクリアランスについては、翼間流体が翼列出口部以外であるテップクリアランスから流れることができるため、隣接する翼間での流量関係が本論文で示したようにはならない可能性がある。この効果が不安定現象にどのように影響するのかを明確にする必要がある。

(2) 他の変動の解明

第2章のアクチュエータディスク解析で予測できた不安定現象は旋回失速と衝撃波が関連した不安定現象だけである。数値計算ではそれら以外にも変動が見られた。これら他の変動が流体力学的不安定現象であるかを確認するため、新たな解析モデルの検討が必要である。

(3) parametric study が行える解析

現在の計算機環境では、数値計算に費やされる時間がかかり過ぎるという問題がある。そのため本論文で示した結果が超音速翼列流れの非定常現象を全て網羅したとは断言できない。(2)と重なる部分があるが、本論文で得られた超音速翼列の非定常現象の特性を十分活用し、仮定を施したモデル解析によって parametric study を行い、数値計算を補う必要があると考えられる。

謝辞

本論文の完成までに、多くの方々からご協力をいただきました。最後に感謝の意を表したいと思います。

私の指導教官であり、本論文の主査をなさっていただいた辻本良信教授に心から感謝いたします。先生が与えて下さった本テーマは、非常に興味深い、やりがいのあるテーマでした。また自分では至らなかった点を数多くご指摘いただきました。先生の研究に対する姿勢を見習うべく、これからも努力したいと思います。

圧縮性流体に関する知識を一から教えていただいた横田和彦助手に深く感謝いたします。先生には、本論文の研究を遂行している間に多くのご助言、ご討論をしていただきました。先生から教えていただいた知識、考え方は私の財産になっております。

本論文の副査をしていただいた吉川孝雄教授、杉本信正教授に深く感謝いたします。両先生のご助言は、本論文の正確性をより向上させるきっかけになりました。またお忙しいところ、本論文をご査読いただいたことを申し訳なく思い、非常に感謝しております。

吉田義樹助教授には実際の機械に対する多くの知識を快くお教えいただきました。数式のみにとらわれがちな私に、先生からは実際との対応付けを行う姿勢を教わりました。

本論文では扱いませんでしたが、超音速風洞の立ち上げを行いました。その際に、現工学院大学の佐藤光太郎助教授には光学的計測法の基礎をお教えいただきました。また山本昌万技官には音響学の基礎をお教えいただきました。

本論文の研究は、2000年度は愛媛大学に勤務させていただきながら行いました。愛媛大学の鮎川恭三学長、越智順治教授、河原源太助教授、十河基介技官には研究を十分に推進できる環境を与えていただきました。

最後に個々人の名前を挙げることはできませんでしたが、私を支えていただいた大阪大学基礎工学部辻本研究室および愛媛大学工学部流体工学研究室のみなさまに感謝いたします。