OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	分散性運動媒質内の電磁界理論に関する研究
Author(s)	小山, 正樹
Citation	大阪大学, 1969, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/2311
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

分散性運動媒質内の電磁界理論に関する研究

小　山　正　樹

昭和43年12月

分散性運動媒質内の電磁界理論に関する研究

小　山　正　樹

昭和43年12月

内　容　梗　概

本論文は，筆者が大阪大学大学院工学研究科（通信工学専攻）に在学中行なった分散性運動媒質内の電磁界理論に関する研究の成果をまとめたものであり，つぎの6章からなっている．

第1章は“序論”であって，従来，電子ビーム，運動プラズマ等を別個の理論で考えていたものを，‘運動媒質’として統一的に考察することを提案し，そのために必要な方程式と従来の方程式の間の関係を明らかにしたものである．

第2章は“従来の巨視的電磁界理論に現われる矛盾”を2点について指摘する．第1のものは*Minkowski*と*Chu*の理論の間の矛盾で，第2のものは*Minkowski*の理論で知られる分極電流模型（*P.C.M.*)と携帯電流模型（*C.C.M.*)の間の矛盾である．両方の矛盾とも両者の電磁界が一致せず，したがって両者のエネルギ運動量テンソルの不一致という矛盾に帰結される．従来，電子ビーム等分散性運動媒質は*Chu*の理論によってのみ考えられていたので，*Minkowski*の一般的な運動媒質理論にとっては，*Chu*の理論と*Minkowski*の理論の不一致は重大である．

第3章では“相対性原理を基礎とした巨視的電磁界理論”を定式化する．第2章で指摘した矛盾を解決することによって，分散性運動媒質に対しても適用できる巨視的な電磁界方程式の定式化が本章の主題である．

基礎となる論理は*Chu*の理論の基礎である界ベクトルと波源ベクトルの区別と*Minkowski*の理論の基礎である相対論的不変性の二つである．したがって，従来の*Minkowski*の理論の拡張がここで可能になる．

第4章は“統計理論を基礎とした巨視的電磁界理論”の定式化にあてる．本章では従来の巨視的電磁界理論の基本的要請である巨視的量の定義は一切行なわず，微視的量に統計をほどこすことによって巨視的な電磁量を求め，それより巨視的な電磁界方程式を定式化する．この統計電磁理論を用いると，巨視的なエネルギ運動量に関して知られる疑問を解決することができる．本理論は微視的理論との直接的関連および論理的統一性という点で従来の巨視

的理論に優るものと思われる．

第５章では本理論を“運動プラズマおよび相対論的電子ビーム理論”に応用し，具体例の解法を示す．その一つは圧縮性運動磁化プラズマ中の *Cerenkov* 放射で，他の一つはビームプラズマ増巾器である．

第６章は“結論”であって本研究の成果を総括して述べたものである．

以上の各章を構成する研究内容は，すべて，電子通信学会雑誌，電子通信学会全国大会，電子通信学会アンテナ・伝播研究会，電子装置研究会，米国 *IEEE* 学会等においてすでに発表されたものである．

目　　次

内 容 梗 概

主 要 記 号 表

第 1 章 序　　論 …… 1

第 2 章 従来の巨視的電磁界理論に現われる矛盾 …… 3

2・1 序　　言 …… 3

2・2 *Minkowski* 形式と *EH* 形式 …… 3

2・2・1 問題の定式化 …… 5

2・2・2 周波数スペクトラムと角スペクトラム …… 10

2・3 分極電流模型と携帯電流模型 …… 15

2・4 結　　言 …… 18

第 3 章 相対性原理を基礎とした巨視的電磁界理論
（巨視的電気力学の統一理論） …… 19

3・1 序　　言 …… 19

3・2 予備的考察 …… 19

3・3 理　　論 …… 24

3・3・1 界方程式 …… 24

3・3・2 分極電流模型と携帯電流模型 …… 33

3・4 結　　言 …… 42

第 4 章 統計理論を基礎とした巨視的電磁界理論
（統計電磁気学） …… 43

4・1 序　　言 …… 43

4・2 統計理論の必要性 …… 43

4・3 微視的電磁界理論 …… 46

4・4 *Hamilton*の正準方程式および統計理論の基礎 …… 50
4・5 巨視的理論の定式化 …… 54
4・5・1 界方程式 …… 54
4・5・2 エネルギ関係式 …… 60
4・5・3 誘電体，運動媒質および相対論的電子ビーム …… 62
4・6 結　　言 …… 71

第 5 章 運動プラズマおよび相対論的電子ビーム理論 …… 73
5・1 序　　言 …… 73
5・2 運動プラズマの媒質定数 …… 73
5・3 *Cerenkov*放射 …… 76
5・4 ビームプラズマ増巾器 …… 83
5・5 結　　言 …… 85

第 6 章 結　　論 …… 87

謝　　辞 …… 88

文　　献 …… 89

付　　録 …… 93

主 要 記 号 表

$\mathbf{A}, \Phi$ ； 巨視的電磁ポテンシャル

$\mathbf{B}$ ； 磁束密度

$\mathbf{D}$ ； 電気変位

$\mathbf{E}(\mathbf{E}_c)$ ； 電界ベクトル（*EH* 形式の電界ベクトル）

$\mathbf{F}$ ； 力学的エネルギ流密度

$\mathbf{H}(\mathbf{H}_c)$ ； 磁界ベクトル（*EH* 形式の磁界ベクトル）

H ； *Hamiltonian*

$I(\theta)$ ； 角スペクトラム

$\mathbf{J}(\mathbf{J}_c, \mathbf{J}_m, \mathbf{J}_p)$ ； 外部力により誘起される電流密度（伝導，磁流，分極電流密度）

$\mathbf{M}(\mathbf{M}_c)$ ； 磁化ベクトル（*EH* 形式の磁化ベクトル）

N ； 単位体積当りの粒子数

$\mathbf{P}(\mathbf{P}_c)$ ； 分極ベクトル（*EH* 形式の分極ベクトル）

$\mathbf{R}$ ； 距離ベクトル

$\mathbf{S}$ ； *Poynting*ベクトル

T ； 全運動エネルギ

$U(W)$ ； 全電磁エネルギ（巨視的）

U_i ； 4 元速度

$W_0^k(\mathbf{r}, t)$ ； 一体確率密度関数

$\{X_k\}$ ； 全正準変数

$\mathbf{a}, \phi$ ； 微視的電磁ポテンシャル

c ； 真空中の光速度

$\mathbf{d}$ ； 微小変位ベクトル

$\mathbf{e}$ ； 微視的電界ベクトル

e ； 電子の電荷

f_i^{ext} ； 外部力

$\mathbf{g}$ ； 微視的電磁運動量密度

$\mathbf{h}$ ； 微視的磁界ベクトル

$\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ ； x, y, z 方向の単位ベクトル

$\mathbf{k}$ ； 波数ベクトル

m^0 ； 固有電子質量

p ； 圧　力

p_k, q_k ； 正準変数

q ； 電　荷

$\mathbf{s}$ ； 微視的 *Poynting* ベクトル

$\overline{t}_{\alpha\beta}$ ； *Maxwell* の応力テンソル

u ； 運動電荷（粒子）の速度

$\mathbf{v}$ ； 媒質の速度（2座標系間の相対速度）

$w(X, t)$ ； 確率密度関数

γ ； $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

δ ； *Dirac* のデルタ関数

σ ； 導伝率

$\rho\ (\rho_c, \rho_m, \rho_p)$ ； 電荷密度（伝導，磁荷，分極）

ε_0 ； 真空の誘電率

ε_p ； プラズマの誘電率

μ_0 ； 真空の透磁率

μ ； 質量密度

ω ； 信号角周波数

ω_c ； サイクロトロン角周波数

ω_p ； プラズマ角周波数

$< >$ ； 平均値

$[\ ]$ ； *Poisson* 括弧式

第1章　序　　論

運動媒質内で成立する電磁界理論の研究は*Maxwell* の電磁界理論の成功に刺激され，*Hertz* 以来，*Lorentz*（1903），*Minkowski*（1908）[1]，*Chu*（1960）[2]，*Panofsky-Phillips*[3]および*Landau-Lifshitz*[4]等によってなされてきた．とくに*Minkowski* は*Einstein*の特殊相対性理論に合致した巨視的電磁界理論を樹立した．最近，電子ビーム，半導体，電離層中の浮遊プラズマ等を‘運動媒質’として統一的に考察することが考えられて以来，これらの運動媒質理論の重要性が認められてきている．将来はさらに宇宙通信の分野にもその適用範囲が広まるものと思われる．

Minkowski の理論は相対性理論と合致しているけれども，非分散，等方，線形媒質に対してのみ考えられたものであり，この理論をそのまま電子ビーム，運動プラズマ等，分散，異方性，圧縮性媒質に適用することは疑問である．事実，本論文第2章で明らかにするように従来の種々の運動媒質理論には非常に解決困難と思われる疑問点があり，それは静止，運動媒質を問わず従来の巨視的電磁界理論の困難にも通じるものである．

本論文の第1の目的は，この困難を解決し，いかなる媒質にも適用でき，しかも単純な媒質の場合には，*Minkowski* の理論と一致するような一つの巨視的電磁界理論を定式化するにある．そのために第3章で*Chu*の理論を*Minkowski* の理論と統一することを考える．*Chu*の理論はもともと電子ビームに対して考えられた理論であり，電子ビームは運動媒質理論からみると，一つの分散性運動媒質であり，したがって，これを*Minkowski* の理論に合わすことによって必然的に*Minkowski* の理論を分散性媒質にも適用できるように拡張されるからである．

本章の結果は第2章で提示された二つの困難のうちの一つを解決することができる．

本論文の第2の目的は，あらたに微視的電磁界理論の帰結としての巨視的電磁界理論を定式化するにある．これは第4章で行なう．統計を用いた電磁理論の必要なことは二つの観点より明白である．一つは従来の巨視的電磁理

論に知られる矛盾* はこれら巨視的理論の中だけでは本質的に解決できないこと．もう一つは，従来の巨視的電磁理論が媒質を構成している個々の粒子の統計をまったく考慮していないことである.** 本章で考えられた理論は第2章の二つ目の困難を取り除くことができる．したがって第3，4章を合せて，従来の巨視的電磁界理論に知られる困難がすべて取り除かれることが示され，いかなる媒質に対しても運動媒質理論が適用できることが示される．

第5章は本理論の応用にあてる．ここで考える問題は圧縮性磁化プラズマ中の*Cerenkov*放射とビームプラズマ増巾器の二つである．前者は地球の大気圏を高速度で飛行するロケットのまわりのプラズマシースと電磁波の結合の現象の説明に役立ち[5]，後者は2ビーム不安定性の特別な場合である．

---

* たとえば*Minkowski*と*Chu* の理論のエネルギ運動量テンソルの不一致．

** ある媒質に電磁波がはいると媒質を作る個々の粒子は2次放射源とみなされる．しかし粒子数が莫大であるからそれらの合成の界は確率的にしか決められないことは予想されるところである．

第2章　従来の巨視的電磁界理論に現われる矛盾

2・1　序　　言

本章では*Minkowski* 形式と*Chu*の考えた*EH* 形式の間の矛盾，および*Minkowski* 形式自身について知られる内部矛盾について例をあげて指摘する．これら二つの矛盾は互いに類似しており，結局，エネルギ運動量テンソルの不一致という問題に帰することがわかる．すなわち，真の物理量が何であるのかという疑問が生じるのである．これらは巨視的な方程式にかぎれば，その方程式内で物理的説明が可能であるように思われるがそうでない．この問題の解決は第4章にまわすことにして，ここではとにかく，従来の巨視的方程式に現われる矛盾について考えることにする．

2・2　*Minkowski* 形式と*EH*形式

Minkowski 形式の基礎方程式はつぎのように相対論的に共変な形に書かれる．(1)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2・1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c + \rho \tag{2・1b}$$

ここで，$\mathbf{J}_c$ は内部の電磁界によって生じる伝導電流であり，したがって，一般に（$\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$）の関数である．一方，$\mathbf{J}$ はこれらの電磁界に独立な外部の力によって生じた電流である．

*EH*形式の基礎方程式は(2)

$$\nabla \times \mathbf{E}_c = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial t} - \mathbf{J}_m, \quad \nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H}_c = \rho_m \tag{2・2a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_c = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial t} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}_c = \rho_p + \rho \ . \tag{2・2b}$$

運動媒質に対して$\mathbf{J}_m$ と$\mathbf{J}_p$ は

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_c}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M}_c \times \mathbf{v}) \qquad (2\cdot 3a)$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}_c}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P}_c \times \mathbf{v}) . \qquad (2\cdot 3b)$$

ここで$\mathbf{v}$ は媒質の速度である．式（2・1）～（2・3）よりわかるように *Minkowski*形式の電磁界と *EH* 形式のそれとは，つぎの関係で結ばれている．

$$\mathbf{E}_c + \mu_0 \mathbf{M}_c \times \mathbf{v} = \mathbf{E} \qquad (2\cdot 4a)$$

$$\mathbf{H}_c - \mathbf{P}_c \times \mathbf{v} = \mathbf{H} \qquad (2\cdot 4b)$$

媒質が静止している場合（$\mathbf{v}=0$）には（$\mathbf{E}_c, \mathbf{H}_c$）と（$\mathbf{E}, \mathbf{H}$）は一致する．

EH 形式は非分散性媒質だけでなく分散のある運動媒質でも，$\mathbf{J}_p, \mathbf{J}_m$ をもとにして考慮することができるが，*Minkowski* 形式はそうでない．しかし式（2・4）の助けをかりて*Minkowski* 形式でも分散性媒質を取り扱うことができると仮定する．このことは必ずしも自明なことではなく，電磁エネルギ密度を考える場合には分散性媒質の波束のエネルギ密度と *Minkowski* のエネルギ運動量テンソルの（4・4）成分とは，全然一致しないことが知られている．(6),(7)

さて *Minkowski* 形式と *EH* 形式の違いを定量的，物理的に明らかにするために横方向に磁化された運動プラズマ中の運動電荷からの電磁放射，いわゆる *Cerenkov*放射について考える．このように波源を含む問題はおのずから *Poynting*ベクトル等電磁界の二次の量が問題になり，両記述形式の違いを定量的にみつけだすことができる．磁化プラズマ中の *Cerenkov*放射は実際に遭遇する問題としても重要であり，*Tuan-Seshadri* は定常磁化プラズマ中の *Cerenkov*放射について詳しく考察している．(5) 彼らの用いた方法はここでも有用であり簡単に拡張できる．

2・2・1　問題の定式化

ここで考える運動プラズマは簡単のために均質，非圧縮性および無損失な電子の流れであるとし，イオンの微少な運動は無視し電子を平均として中和することにのみあずかるものとする．外部静磁界$\mathbf{B}_0$は*Tuan-Seshadri*の解析[5]と同様に直角座標系を作るy軸に平行であるとし，小信号近似および時間項$e^{-i\omega t}$を仮定する．

さて，式（2・2）と（2・3）より，EH形式の基礎方程式は周波数領域でつぎのように与えられる．

$$\nabla\times\mathbf{E}_c = i\omega\mu_0(\mathbf{H}_c+\mathbf{M}_c)-\nabla\times(\mu_0\mathbf{M}_c\times\mathbf{v}) \qquad (2\cdot5a)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_c = -i\omega(\varepsilon_0\mathbf{E}_c+\mathbf{P}_c)+\nabla\times(\mathbf{P}_c\times\mathbf{v})+\mathbf{J} \qquad (2\cdot5b)$$

以下EH形式の電磁界，分極ベクトルおよび磁化ベクトルに対する添字cは簡単のために省略する．本問題では$\mathbf{M}=0$であり，$\mathbf{v}$は運動プラズマの平均速度でx軸に平行であるとする．またv^2/c^2は1に比して無視できるものとする．運動プラズマに対する運動方程式は[8]

$$(-i\omega+\mathbf{v}\cdot\nabla)^2\mathbf{R}=-\frac{e}{m}\left[\mathbf{E}+(-i\omega+\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{R}\times\mathbf{B}_0+\mu_0\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right], \qquad (2\cdot6)$$

ここで

$$\mathbf{R}=-\frac{1}{eN}\mathbf{P}, \qquad (2\cdot7)$$

Nは単位体積当りの電子の数である．

運動電荷としてy軸方向に一様で電荷qを持ちx軸方向に速度uで一様に運動する線状電荷を考える．すなわち

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\mathbf{i}_x\,qu\,\delta(z)\,\delta(x-ut).$$

あるいは周波数領域で

$$\mathbf{J}=\mathbf{i}_x\,q\,\delta(z)\,e^{\frac{i\omega}{u}x}. \qquad (2\cdot8)$$

上式と式（2・5）および（2・6）より $E_y = H_x = H_z = R_y = 0$ となり，いわゆる *ordinary wave*[9] は存在しない．式（2・6）と（2・7）より $\mathbf{v}\cdot\nabla = v\frac{\partial}{\partial x}$ と $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{i\omega}{u}$ を用いて分極ベクトルはつぎのように求まる．

$$P_x = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\left[\varepsilon_T E_x + i\varepsilon_H (E_z + \mu_0 v H_y)\right] \tag{2・9a}$$

$$P_z = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\left[-i\varepsilon_H E_x + \varepsilon_T (E_z + \mu_0 v H_y)\right], \tag{2・9b}$$

ここで

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 N}{m\varepsilon_0} \tag{2・10a}$$

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m} \tag{2・10b}$$

$$\gamma = 1 - \frac{v}{u} \tag{2・10c}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cdot\frac{\gamma}{\gamma^2 - \omega_c^2/\omega^2} \tag{2・10d}$$

$$\varepsilon_H = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cdot\frac{\omega_c/\omega}{\gamma^2 - \omega_c^2/\omega^2}. \tag{2・10e}$$

ベクトル公式 $\nabla\times(\mathbf{P}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{P} - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{P})$ を用い，さらに式（2・9）を（2・5b）に代入すると次式が得られる．

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{v\omega\varepsilon_H}{c^2} H_y + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1 E_x - v\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial z} + \varepsilon_0\omega\varepsilon_H E_z = \gamma J_x \tag{2・11a}$$

$$\frac{v}{c^2}\varepsilon_3 H_y + \varepsilon_0\varepsilon_2 E_z + i\varepsilon_0\varepsilon_H E_x = 0 , \qquad (2\cdot 11b)$$

ここで

$$\varepsilon_1 = \gamma - \varepsilon_T \qquad (2\cdot 12a)$$

$$\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_T \qquad (2\cdot 12b)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{c^2}{uv} - \varepsilon_T . \qquad (2\cdot 12c)$$

式(2・5a)はたんに

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{i\omega}{u} E_z = i\omega\mu_0 H_y . \qquad (2\cdot 13)$$

式(2・11b)と(2・13)より E_z および H_y は E_x によってつぎのように表わされる.

$$E_z = \frac{i}{1 - \dfrac{v\varepsilon_3}{u\varepsilon_2}} \left(-\frac{\varepsilon_H}{\varepsilon_2} E_x + \frac{v\varepsilon_3}{\omega\varepsilon_2} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \qquad (2\cdot 14a)$$

$$H_y = \frac{i}{\mu_0\left(1 - \dfrac{v\varepsilon_3}{u\varepsilon_2} \right)} \left(\frac{\varepsilon_H}{u\varepsilon_2} E_x - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \qquad (2\cdot 14b)$$

式(2・14)を(2・11a)に代入すると E_x に対する波動方程式がつぎのように得られる.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_2 - \frac{v}{u}\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_H^2\gamma}{\varepsilon_1} \right) E_x = -\, i\omega\mu_0 \frac{\gamma}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_2 - \frac{v}{u}\varepsilon_3 \right) J_x \qquad (2\cdot 15)$$

ここで再び v^2/c^2 は1に比して無視し式(2・10)および(2・12)を用いた. 上

式の解は式（2・8）を代入し z に対する *Fourier* 変換およびその逆変換を行なうことによりつぎのように得られる．

$$E_x = \mp \frac{\mu_0 c \left(\varepsilon_2 - \dfrac{v}{u} \varepsilon_3 \right) \gamma q}{2 p \varepsilon_1} e^{\pm \frac{i\omega p}{c} z} , \qquad (2 \cdot 16)$$

ここで

$$p^2 = \varepsilon_2 - \frac{v}{u} \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_H^2 \gamma}{\varepsilon_1} . \qquad (2 \cdot 17)$$

式（2・16）の＋あるいは－の符号は波源である運動電荷からの電磁エネルギの外向きの流れを要求する放射条件を満足するように選ばなければならない．すなわち $z > 0$ の領域では *Poynting* ベクトルは z が正に大きくなる方向を，また $z < 0$ の領域では *Poynting* ベクトルは z が負に大きくなる方向を向かねばならない．もちろん放射は式（2・17）の右辺が正のときにのみ可能であり，分散式は p と ω との関係できまる．式（2・10）と（2・12）より式（2・17）はつぎのように書き直される．

$$\frac{p^2}{\gamma^2} = \frac{U}{\gamma^2} - \frac{\Omega^2\gamma^2 - 1}{\Omega^2\gamma^2(\Omega^2\gamma^2 - R^2 - 1)} , \qquad (2 \cdot 18)$$

ここで

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p} \qquad (2 \cdot 19a)$$

$$R = \frac{\omega_c}{\omega_p} \qquad (2 \cdot 19b)$$

$$U = 1 - \frac{c^2}{u^2} \qquad (2 \cdot 19c)$$

U は運動電荷の速度が光速をこえることがないのでつねに負である．もしプラズマが静止している場合にはたんに $\gamma^2 = 1$ とおけばよく，その場合にも式

(2・18) の形はかわらない．すなわちプラズマの運動の効果はたんに p^2，U および Ω^2 を γ^2 で修正するのみで，運動特有の放射帯域は現われないが，これは運動媒質の一般的性質である．式(2・18) には γ の1次の項は無く，したがって伝搬定数は運動電荷と運動プラズマの速度差のみに影響されるが，これは *Cerenkov* 放射の特性そのものを表わしていると考えられる．そこでつぎに放射可能帯域を求める．まず $u = v$，すなわち $\gamma = 0$ なら p^2 は負であり放射は起こらない．外部静磁界が0 ($R = 0$) または無限大 ($R = \infty$) でもやはり p^2 は負となり放射は起こらない．$\Omega^2\gamma^2 > 1 + R^2$ または $\Omega^2\gamma^2 < 1$ なら式 (2・18) の第2項は負となり $U < 0$ であるので p^2 は負となりやはり放射は起こらない．結局放射は $1 < \Omega^2\gamma^2 < 1 + R^2$ で可能であるが，実際式 (2・18) より放射は

$$1 < \Omega_1^2\gamma^2 < \Omega^2\gamma^2 < 1 + R^2, \qquad (2・20)$$

の間でのみ起こることがわかる．ここで $\Omega_1^2\gamma^2$ は次式の正根である．

$$\Omega^4\gamma^4 - \left(1 + R^2 + \frac{\gamma^2}{U}\right)\Omega^2\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{U} = 0 \qquad (2・21)$$

正規化周波数 $1 + R^2$ は *hybrid* 共振周波数といわれる．$\Omega_1^2\gamma^2$ は運動電荷の速度 u が小さくなるにつれて $1 + R^2$ に近づき，$u = 0$ では $\Omega_1^2\gamma^2 = 1 + R^2$ となる．

さて角度 θ_{ph} を x 方向と z 方向の伝搬定数の比として次式のように定義する．

$$\tan\theta_{ph} = \pm\frac{up}{c} \qquad (2・22)$$

ここで複号は式(2・16) のそれに対応している．図2・1 にあるパラメータの値に対する正規化伝搬定数を，また図2・7 には

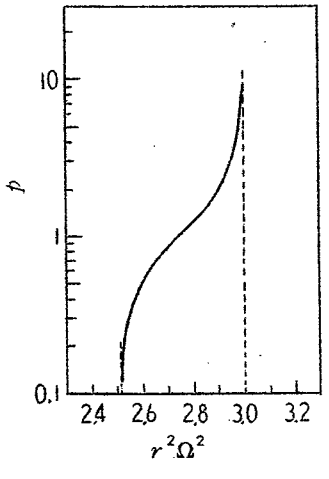

図2・1　正規化伝搬定数
($v/u = 0.1$, $U = -1$, $R^2 = 2$)

角度θ_{ph}を図示した．

2・2・2　周波数スペクトラムと角スペクトラム

電磁エネルギ，*Poynting*ベクトルあるいは*Lorentz* 力等の電磁界および波源の量の2次式から作られる量は直接に電磁気的実在を確かめるという点でむしろ電磁界より重要であると考えられるが，*Poynting*定理あるいはエネルギ運動量テンソルの発散に関しては古くからいろいろの疑問が知られている．なかでも*Poynting*ベクトル$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$に任意の回転ベクトル$\nabla\times\mathbf{F}$を加えても*Poynting*定理は変らないので$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$をある点を通過するエネルギの流れと定義することは問題であるという疑問はよく知られている．[10] しかし*Poynting*定理が*Maxwell* の方程式から直接に導かれる限りこの種の問題はさほど意味がなく，電磁エネルギ等の量が真に物理的意味を持つのであれば，$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$が電磁エネルギの流れを表わすとみなして十分さしつかえない．問題はむしろ*Minkowski* が導いたエネルギ運動量テンソルの非対称性でいままでに幾多の議論がなされてきたが，[11] いまだはっきりした定量的な解決は得られていない．その点で*Chu*の導いたエネルギ運動量テンソルは対称であり，[12] *Minkowski* のテンソルより優っているが*Lorentz* 力に関して実験事実と一致しないという困難がある．[13] このように両記述形式から得られるエネルギ運動量テンソルには一長一短があるものの，*Minkowski* のテンソルは現在多くの研究者に認められたテンソルであり，*Chu*のテンソルは特に電子ビーム理論にたずさわる研究者に用いられているテンソルである．[14] われわれの目的はこのような*Minkowski* 形式と*EH* 形式から導かれるエネルギ運動量テンソルの一成分である電磁エネルギの流れを表わす*Poynting* ベクトルをもとにして定量的，物理的に両記述形式の相異を明らかにすることであり，どちらの記述形式が物理的に納得のいくものであるかを確かめることである．

さて*Poynting*ベクトルは周波数領域で次式のように定義されるが，この表現は両記述形式で一致している．[11),(12]

$$\mathbf{S}_{\begin{Bmatrix}c\\m\end{Bmatrix}}=\frac{1}{2}R_e\left[\mathbf{E}_{\begin{Bmatrix}c\\m\end{Bmatrix}}\times\mathbf{H}^*_{\begin{Bmatrix}c\\m\end{Bmatrix}}\right] \tag{2・23}$$

ここでは*Minkowski*の定義による量には添字*m*を付けるが*Chu*の定義による量には前節同様に省略することにする．式(2・14)と(2・16)より*EH*形式から得られる*Poynting*ベクトルはつぎのように求まる．

$$S_z = \pm S_0 \frac{\gamma^2}{p} \cdot \frac{u}{c} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(1 - \frac{v\varepsilon_3}{u\varepsilon_2}\right) \tag{2・24a}$$

$$S_x = S_0 \frac{\gamma^2}{p^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{uv}{c^2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 p^2 + \varepsilon_H^2\right) \tag{2・24b}$$

ここで，$S_0 = q^2 / 8\,\varepsilon_0 u$，また式(2・24a)の複号は式(2・16)のそれに対応している．もしプラズマが静止している場合には$v/u = 0$であり上式はつぎのようになる．

$$S_z = \pm \frac{up}{c} S_x \tag{2・25a}$$

$$S_x = \frac{S_0}{p^2 \varepsilon_2} \left(\varepsilon_2 - \frac{c^2}{u^2}\right) \tag{2・25b}$$

$v/u = 0$の場合には*Minkowski*形式と*EH*形式は一致するので*Minkowski*形式に対しても式(2・25)はそのまま成立する．そこであるパラメータの値に対して上式(2・25)を数値計算しS_{mx}/S_0とS_{mz}/S_0を図2・2に示した．v/uが有限のときは式(2・24)を直接計算しなければならない．ここでわれわれは*EH*形式の困難に出合う．すなわち式(2・24a)を計算してみると放射の起こりうる帯域内(すなわち$p^2 > 0$)で式(2・24a)の右辺の括弧の中の符号は正にもまた同時にわずかに負にもなりうる(図3・3参照)．しかし波源である運動電荷からの外向きのエネルギの流れを要求する放射条件を満足するためには式(2・24a)の右辺は$z > 0$の領域でつねに正とならねばならない．もちろん同式には複号があり，そのどちらかにより同式の右辺をつねに正とすることはできると考えられそうであるが，同式の複号は式(2・16)を求め

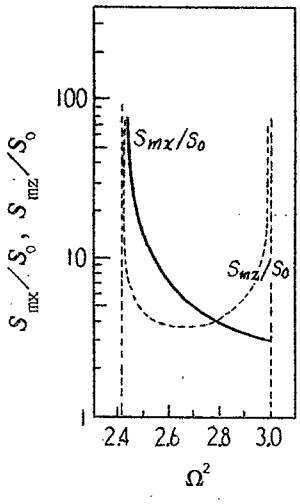

図２・２　正規化*Poynting*ベクトル
（$v/u=0$，$U=-1$，$R^2=2$）

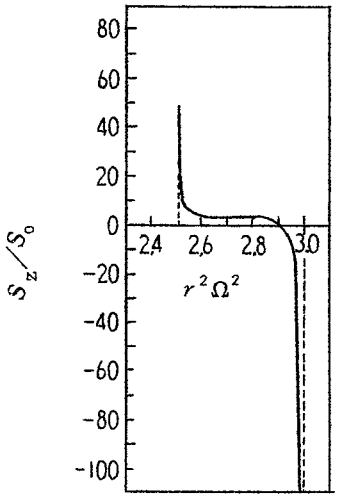

図２・３　*EH*形式による*Poynting*ベクトル（$v/u=0.1$，$U=-1$，$R^2=2$）

る際に用いた積分路の取りかこむ極に対応してでてきたものであり，この積分路を同一の可能帯域内で一つの極からまた別の極を取りかこむ（すなわち，外向波面を表わす極から内向波面を表わす極へ）ように変更することは許されない．あくまでも積分路は一つの帯域内ではある特定の極のみを取りかこむと考えるべきである．たとえこれが許されると考えても，そうすると今度は式（2・16）の指数部からわかるように伝搬定数が突然に正から負にかわり，波面は突然に外向き（進行波）から内向き（後進波）に変化することになって物理的に理解できない．したがってこのように考えると図２・３で示される*Poynting*ベクトルは物理的に理解できず，この点からして*EH*形式は不合理な記述形式である．

つぎに*Minkowski*形式から得られる*Poynting*ベクトルを考える．式（2・4），(2・14)，(2・16) および (2・23) より

$$S_{mz}=\pm S_0\frac{u\gamma\varepsilon_2}{c\beta\varepsilon_1}\left(1-\frac{v\varepsilon_3}{u\varepsilon_2}\right) \qquad (2\cdot 26a)$$

$$S_{mx} = \pm \frac{v}{cp}\left(\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_H^2}{\varepsilon_1}\right) S_{mz} \ . \qquad (2\cdot 26b)$$

式(2・24a)と(2・26a)より

$$S_z = \frac{\gamma \varepsilon_2}{\varepsilon_1} S_{mz} \ . \qquad (2\cdot 27)$$

上式は式(2・10)と(2・12)より $v/u = 0$ の場合には S_z と S_{mz} がお互いに一致することを示している．式(2・26a)はまたつぎのように書き直される．

$$\pm \frac{cp}{u} \cdot \frac{S_{mz}}{S_0} = \frac{(\Omega^2\gamma^2 - R^2)\ U - \gamma^2}{\Omega^2\gamma^2 - R^2 - 1} \qquad (2\cdot 28)$$

上式の右辺はつねに放射の起こる帯域内で正となることを示すことはたやすい．したがって S_{mz} はつねに $z > 0$ の領域で正で $z < 0$ の領域で負であり，*Minkowski* 形式の *Poynting* ベクトルはつねに放射条件を満足さすことができる．*Minkowski* 形式のベクトルより周波数スペクトラムを計算し図2・4および2・5に示した．

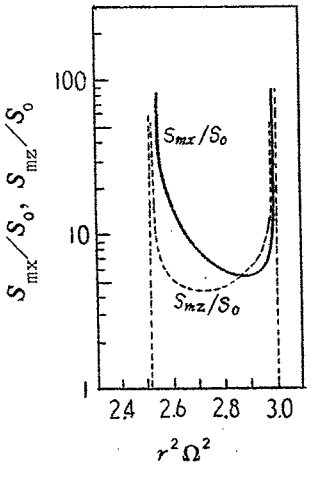

図2・4 *Minkowski* 形式による *Poynting* ベクトル ($v/u = 0.1$, $U = -1$, $R^2 = 2$)

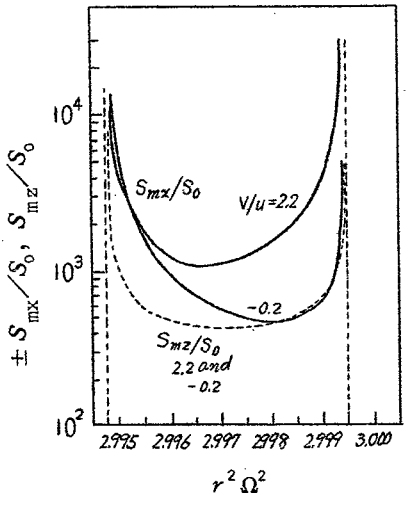

図2・5 *Poynting* ベクトル＋ S_{mx}/S_0 は $v/u = -0.2$ に対して，$-S_{mx}/S_0$ は $v/u = 2.2$ に対してとる ($U = -203.8$, $R^2 = 2$)

運動プラズマ中の*Cerenkov*放射の性質をさらに詳しく調べるために次式で与えられる*Cerenkov ray* の角度θと角スペクトラム$I(\theta)$を求めてみる．

$$tan\theta = \frac{S_{mz}}{S_{mx}} \tag{2・29a}$$

$$I(\theta) = \frac{S_{mz}(\gamma^2\Omega^2)}{sin\theta \cdot \dfrac{d\theta}{d(\gamma^2\Omega^2)}} \tag{2・29b}$$

プラズマが静止している場合にはθとθ_{ph}とは一致する．θおよび$I(\theta)$を図的解法により求めその一例を図２・６および２・７に示した．

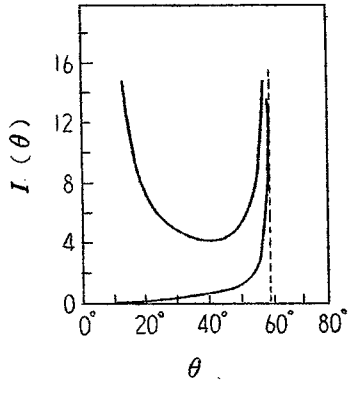

図２・６　角スペクトラム（$v/c=0.1$, $U=-1$, $R^2=2$）

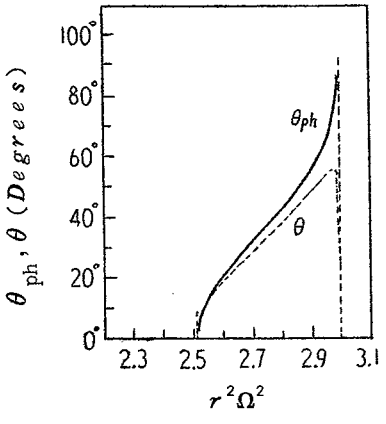

図２・７　波面と*Cerenkov ray*の方向（$v/u=0.1, U=-1, R^2=2$）

ここでは横方向に磁化された運動プラズマ中の運動電荷からの電磁放射を例にとり*Minkowski* 形式と*EH* 形式の違いを定量的に示した．それによると*EH*形式は放射条件をある周波数帯域内で満足さすことができないので物理的に不合理であるが，*Minkowski* 形式にはこのような困難は現われない

ことが示された．*Minkowski* 形式は今まで線形，等方，非分散等の媒質にはよく適用される記述形式であることが知られていたが，本例のように一般的でないにしろ分散性および非等方性運動媒質に対しても合理的な記述形式であることが示された．しかし*Minkowski* 形式は*EH* 形式と異なって媒質の電磁気的効果を運動方程式等の助けをかりてあらかじめ求める *self-consistent*な解析は不可能であり，実際われわれは運動磁化プラズマに対して*EH* 形式から出発しなければならなかった．そこで両者の長所をとり入れた記述形式を定式化する必要がある．本研究の出発点もこの点にある．ここでは定性的に，*EH* 形式が何故*Minkowski* 形式と矛盾するかについて簡単にふれるに止める．

まず*Minkowski* 形式の基礎方程式は*Lorentz* 変換に対して不変である．このことはとりもなおさず，界ベクトル（E, B, H, D）は媒質の運動に無関係であり，したがってBおよびDをMおよびPで表わしたとしてもMおよびPはあくまでも界ベクトルの一部で電流源Jのように波源とはみなされないことである．しかし*EH* 形式ではPおよびMに対して双極子モーメントという波源と同じ物理的な意味が与えられている．したがって*Minkowski* 形式からするとPおよびMが双極子モーメントから作られるという媒質が静止している場合の概念を捨て去らねばならない．さらに*EH* 形式は相対論的に不変でない．

2・3　分極電流模型と携帯電流模型[15]

運動プラズマのような分散性運動媒質に対しては，本来*Minkowski* 形式は考えられていない．しかし，前節で行なったように分散性運動媒質に対しても適用できるものと仮定すると，そのエネルギ運動量については*Minkowski*とは別に考察しておかねばならない．特に，*Minkowski* 形式の中でも分極電流模型と携帯電流模型の違いは，その手がかりとして重大な意味を持つものと思われる．ここで分極電流模型（*Polarization Current Model*:*P.C.M.*)とは媒質の電磁気的効果をすべて電束あるいは磁束によって考える模型で，したがって等価な誘電率あるいは透磁率で与えられるもので

ある．一方携帯電流模型（*Convection Current Model*：*C.C.M.*）とは媒質の効果を電流によって考える模型である．

ここで*C.C.M.*と*P.C.M.*の間の考えの違いを説明するために簡単な電子プラズマを考える．簡単な電子プラズマは自由電子の群とみなされ，各々の電子は規定された運動方程式によって支配されるとする．*C.C.M.*の観点からは電子群の速度と電荷密度の積は電流密度を生じ，この電流密度が*Maxwell*の方程式の等価な波源となると考えるのに対して，*P.C.M.*の観点からは上述の電子群は分散のある誘電体であるとみなされる．したがって*C.C.M.*の考えは従来の電子ビーム理論の考えと同じであり，結果として*EH*形式の考えと同じである．これに対して*P.C.M.*は損失のない場合の*Minkowski*形式に等価である．もちろん媒質が静止しているならば*C.C.M.*および*P.C.M.*が同じ結果を与えるということはいうまでもない．

そこで一例として一様に運動しているプラズマを考える．プラズマの運動方向はz方向とし，一方波面の方向はx方向と仮定する．*P.C.M.*の場合には基礎方程式はつぎのように与えられる．

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B} \tag{2·30a}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\omega\mathbf{D} \tag{2·30b}$$

$$\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}=\mu_0(\mathbf{H}-\mathbf{v}\times\mathbf{D}) \tag{2·30c}$$

$$\mathbf{D}+\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}=\varepsilon_0\varepsilon_p(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{2·30d}$$

$$\varepsilon_p=1-\frac{\omega_p^2}{\gamma^2(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2} \tag{2·31a}$$

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2} \tag{2·31b}$$

$$\mathbf{k}=k\,\mathbf{i}_x,\quad \mathbf{v}=v\,\mathbf{i}_z \tag{2·31c}$$

上式を直角成分にわけると，つぎの分散式が得られる．

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\omega_p^2}{c^2} \tag{2・32}$$

電磁界は，各々独立に E_y と E_z から導びかれる．この模型の場合には *Poynting* ベクトル

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}Re(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\,, \tag{2・33}$$

はつぎの様になる．

$$S_{px}=\frac{k}{2\omega\mu_0}\left[E_y^2+\left(1+\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_p^2}\right)E_z^2\right] \tag{2・34a}$$

$$S_{pz}=-\frac{\varepsilon_0 v\omega_p^2}{2\omega^2}\left[E_y^2+\left(1+\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_p^2}\right)E_z^2\right] \tag{2・34b}$$

C.C.M. の場合には基礎方程式は

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mu_0\mathbf{H} \tag{2・35a}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}=-\omega\varepsilon_0\mathbf{E}-i\mathbf{J} \tag{2・35b}$$

$$\mathbf{J}=\gamma\sigma\left[\mathbf{E}+\mu_0\mathbf{v}\times\mathbf{H}-\frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{E}\right)\right]+i\varepsilon_0\mathbf{v}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}) \tag{2・35c}$$

$$\sigma=i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\gamma(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\,. \tag{2・36}$$

上式を成分に分解すると式（2・32）と同じ分散式が得られる．この場合の *Poynting* ベクトルには，つぎの様なすべての成分がある．

$$S_{cx}=\frac{k}{2\omega\mu_0}\left(E_y^2+E_z^2\right) \tag{2・37a}$$

$$S_{cy} = -\frac{1}{2} Re \frac{\varepsilon_c \omega_p^2}{\omega^2} v E_y^* E_z \qquad (2\cdot37b)$$

$$S_{cz} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 v \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z^2 \qquad (2\cdot37c)$$

式 (2·34) と (2·37) からわかるように，*Poynting*ベクトル$\mathbf{S}_p$ は，明らかに$\mathbf{S}_c$ と異なる．したがって，*Poynting*ベクトルの観点からは，*P.C.M.* は *C.C.M.* とは等価でない．特に *C.C.M.* の場合には，y 方向のエネルギの流れが現われる．しかしながら，プラズマの流れは z 方向であり，$\mathbf{k}$ は x 方向なのでこの成分は物理的に理解が困難である．

本節の例は，つぎの二つの疑問を提示する．

a) *Poynting*ベクトル式 (2·33) は，*P.C.M.* と *C.C.M.* のどちらにも適用できるのか？ 言いかえれば，このように考えたエネルギ運動量テンソルは *P.C.M.* と *C.C.M.* のどちらででも正当化されるのか？

b) *Minkowski* の理論を分散性運動媒質の問題にも拡張して適用することができるか？

*b)*は前節の最初の部分ででも触れておいた．

第3章　相対性原理を基礎とした巨視的電磁界理論（巨視的電磁力学の統一理論）

3・1　序　　言

本研究の主要な問題は本章より始まる．前章では従来の巨視的電磁界理論に知られる二つの矛盾を例をあげて指摘した．それはエネルギ運動量に関するもので，その矛盾は巨視的理論の電磁界の相違に原因があった．本章ではこの矛盾をとり除くために相対性原理を基礎とした一つの巨視的な電磁界方程式を定式化する．

3・2　予備的考察

運動媒質中の電気力学の基礎方程式を求める際に用いた*Minkowski*の論理は*Sommerfeld*が説明しているように非常に簡単で何らの疑問点もないように思われる．(1) *Minkowski*の理論は，異なった座標系の間の変換に際しては基礎方程式の形をかえないという相対論的不変性にその基礎がおかれている．しかし*Chu*は彼の著書の中で*Minkowski*形式には運動媒質に働く応力とエネルギに関して欠陥のあることを指摘し，つぎのような疑問を投げかけている．(2)「成分がすべての慣性系で同じように定義されているテンソンは真のテンソンであるか．また対応する力の密度は誘電体はいうに及ばず磁性体の上のすべての電磁力の密度を含んでいるか」．これらの疑問は基本的なものであり非常に重要である．実際，巨視的な*Maxwell*の方程式が静止系と運動系で同じ形をなすべきであるという何らの理由もない．すなわち運動媒質を含む場合に考えた二つの座標系は物理的に明らかに異なったものであり，両系で*Maxwell*の方程式が同じ形で記述されるべきであるという根拠はない．さらに物質に働く電磁力の密度に関する後者の疑問もまた非常に重要である．

*Chu*の論理は*Minkowski*の論理と同様に簡単である．(16) 彼は電磁界ベクトルと波源の量を明白に区別している．*Chu*の求めた*EH*形式の思想からすると，電磁界と相互に作用しあっている物質は真空中に存在する等価な波源

とみなされる．したがって*Maxwell* の方程式は静止系と運動系でもちろん不変性を保つが，磁化電流と磁化ベクトルおよび分極電流と分極ベクトルの関係は運動媒質中では静止媒質中とは異なったものとなる可能性がある．*Minkowski* と*EH* 形式の間の相互の矛盾は上に述べたような異なった考え方から生じたものである．したがってここで採用する論理は二つの思想から作られており，一つは*Minkowski* 形式の基礎をなしている異なった座標系間の変換に対して基礎方程式はその形をかえないという相対論的不変性であり，他の一つは*EH* 形式の出発点である電磁界ベクトルと波源の量の間の区別である．

はじめに*Minkowski* 形式を考える．*Sommerfeld* によると，*Minkowski*は静止媒質中で成立する*Maxwell* の方程式を次のEDHB形で定式化した．(1)

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \qquad \nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \tag{3・1a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + \mathbf{J}' \qquad \nabla' \cdot \mathbf{D}' = \rho' \tag{3・1b}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}' = -\frac{\partial \rho'}{\partial t'} \tag{3・1c}$$

プライム（′）は媒質とともに運動する座標系（運動系）で測定される量につけ，運動を観測している座標系（実験室系）で測定される量にはプライムはつけないものとする．さて式（3・1）は式（3.*A*.1）（付録）に示された電磁界テンソルと4次元電流密度を用いると座標変換に対してその形をかえないことが知られている．すなわち式(3・1）は相対論的に不変であり実験室系でもつぎのように書かれる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3・2a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{3・2b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (3\cdot 2c)$$

したがって，*Minkowski* の理論によると電磁気学の基礎方程式は運動系および実験室系で同じ形を保持するということができる．しかし式（3・2）を実際に解くためには$\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$と$\mathbf{B}$の間の構成方程式が必要であるが，これを言いかえると，構成方程式が与えられないかぎり$\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$および$\mathbf{B}$を真の物理量とみなすことができない．したがって，*Chu*によって指摘されたようにこれらの量が電磁界テンソルの真の成分であるとみなされるだろうかという疑問がでてくる．実際，物理現象を記述する基礎方程式を構成する物理量は物理的に意味のある量でなければならないとも考えられる．

Minkowski 形式に関するつぎの疑問は，電流計や電圧計，その他外部にある測定器で電磁現象を測定可能ならしめる力の密度に関するものである．*Lorentz* 力密度は

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \qquad (3\cdot 3)$$

上式は*Chu*が指摘したように磁化と分極電流に起因する力の密度を含まず，単に自由電流に対する力の密度を含むのみである．しかし磁化や分極の起こり得る物質には明らかに力が働くことが予想され，媒質の動かない系では実験的にも確かめられている．*Minkowski* 形式からはそのような力の密度を導き出すことはできない*.

---

* ごく最近，*Chu*，*Haus*および*Penfield*は仮想仕事の原理を用い磁化や分極の起こりうる流体中の力の密度を考察し，*Minkowski*と*EH* 形式は流体中で同じ力の密度を与えることを示した.[20] 彼らはさらに物質中の両記述形式の定義による電磁界ベクトルの相違はそれ自身矛盾するものではないと結論しているが，これは*Chu* の著書の中の結論とは明らかに相反している．しかしたとえ力の密度が両記述形式で同じであっても，両記述形式を構成する電磁界ベクトルが真空中でも物質中でも全く同じに定義され同じ物理的意味を持つのであるのなら，両方の界ベクトルはお互いにすべての系で一致しなければならない．もしそうでなければ，どちらかの記述形式の電磁界ベクトルは物理的に意味のない量とみなされてしまう．

つぎに EH 形式を考察する．*Chu*は磁化および分極電流は真空中にあって電磁界と相互作用をする等価的な波源と考えている．したがって EH 形式の基礎方程式は相対論的に不変である．すなわち運動系では[2]

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} - \mathbf{J}'_m \quad \mu_0 \nabla' \cdot \mathbf{H}' = \rho'_m \tag{3・4a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} + \mathbf{J}'_p + \mathbf{J}' \quad \varepsilon_0 \nabla' \cdot \mathbf{E}' = \rho'_p + \rho' \tag{3・4b}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}'_m = -\frac{\partial \rho'_m}{\partial t'} \tag{3・4c}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}'_p = -\frac{\partial \rho'_p}{\partial t'} \tag{3・4d}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}' = -\frac{\partial \rho'}{\partial t'} \ . \tag{3・4e}$$

実験室系では，

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \quad \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m \tag{3・5a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J} \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_p + \rho \tag{3・5b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \tag{3・5c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \tag{3・5d}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \ . \tag{3・5e}$$

上式の不変性は式 (3·*A*·2)で定義される電磁界テンソルと4次元電流密度により証明される.

ここまでのところでは両記述形式はお互いに相対論的に不変であり矛盾はないが，以下に述べる磁化ベクトル**M**と分極ベクトル**P**が*EH* 形式と*Minkowski*形式とをお互いに相入れない記述形式にしていることが認められる.* *Chu*は媒質とともに動く運動系で**P**′ と**M**′ をつぎのように定義した.

$$\mathbf{J}'_{\mathrm{p}} = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t'} \qquad \nabla' \cdot \mathbf{P}' = -\rho'_{\mathrm{p}} \tag{3·6a}$$

$$\mathbf{J}'_{\mathrm{m}} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t'} \qquad \mu_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}' = -\rho'_{\mathrm{m}} \tag{3·6b}$$

実験室系では，運動学的方法を用い，電流密度と波源ベクトルの関係をつぎのように求めた.

$$\mathbf{J}_{\mathrm{p}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}) \tag{3·7a}$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{m}} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{v}) \tag{3·7b}$$

ここで**v**は物質の速度であり，一般には時間の関数である. さていまや相対性理論の立場からして両記述形式はお互いに矛盾していることは明らかである. すなわち，式 (3·1) と (3·2) でみたように*Minkowski* の方程式は座標系の変換に際して不変であるが，式 (3·4) と (3·6) および式 (3·5) と (3·7) より*Chu*の方程式は両座標系で同じ形を保持していないことがわかる. *EH* 形式には波源ベクトル**P**と**M**のほかに物質の速度**v**が現われ

---

* 式 (3·1) と (3·2) および式 (3·4) と (3·5) より両記述形式は相対論的に不変であるのでお互いに矛盾しない記述形式であると結論してはならない. 何故なら*Minkowski* 形式では**D**および**B**を含めて不変であるが*EH*形式ではそうではない. したがって*EH*形式が*Minkowski*形式と矛盾しないためには**D**と**B**にかわる**P**と**M**を含めた全体の式が不変でなければならない.

る．これは*EH*形式の注目すべき特徴であるが，相対性理論の立場からすると，もしある記述形式の基礎方程式に相対速度が現われるならその記述形式は矛盾するものといわなければならない**．さらに$\mathbf{P}$と$\mathbf{M}$はベクトルとして変換されるが，他の界ベクトル，たとえば$\mathbf{D}$と$\mathbf{B}$はテルソンの成分のように変換される．したがって，もし両記述形式がお互いに矛盾しないためには$\mathbf{P}$と$\mathbf{M}$はテンソルの成分のように変換されなければならない．

最後に*EH*形式から得られる力の密度を考える．式(3·*A*·2)より*EH*形式の*Lorentz*力密度は

$$\mathbf{f}_m = \rho_m \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mathbf{J}_m \times \mathbf{E} \tag{3·8a}$$

$$\mathbf{f}_p = \rho_p \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J}_p \times \mathbf{H} \tag{3·8b}$$

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{H}. \tag{3·8c}$$

これらの式は*Minkowski*形式と異なって磁化と分極された物質に対する力を考慮することができる．

3・3 理　　論

3・3・1 界方程式

前節でみたように*Minkowski*と*EH*形式を統一するためには*Chu*の方程式を異なった座標系の間の変換に際して相対論的に不変にしなければならないが，式(3・6)はそのままでは不変ではない．式(3・6)を式(3・4)に代入し，つぎの新しいベクトルを定義すると

$$\mathbf{D}' = \varepsilon_0 \mathbf{E}' + \mathbf{P}' \tag{3·9a}$$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 (\mathbf{H}' + \mathbf{M}'), \tag{3·9b}$$

** この点に関しては文献(17)を参照．この文献では*EH*形式の弱点が別の立場から説明されている．

結果として得られる式は不変となるが，これは明らかに *Minkowski* 形式そのものであることがわかる．残された方法は式（3・6）そのものを相対論的に不変にすることであるが，これはまた *EH* 形式の出発点から考えなおさなければならないことを意味している．

まず *EH* 形式の基礎は磁化される物質と分極される物質が作り出す双極子モーメントに置かれていることに注意する．さて分極電荷 ρ'_{p} と分極ベクトル $\mathbf{P}'$ の関係はよく知られるように，

$$\nabla' \cdot \mathbf{P}' = -\rho'_{\mathrm{p}} \ . \tag{3・10a}$$

また分極電荷の保存則は次式で表わされる．

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}'_{\mathrm{p}} = -\frac{\partial \rho'_{\mathrm{p}}}{\partial t'} \tag{3・10b}$$

EH 形式では式（3・10）と同じ関係が磁荷，磁化ベクトルおよび磁化電流に与えられている．すなわち

$$\mu_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}' = -\rho'_{\mathrm{m}} \tag{3・11a}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}'_{\mathrm{m}} = -\frac{\partial \rho'_{\mathrm{m}}}{\partial t'} \ . \tag{3・11b}$$

しかし $\mathbf{M}'$ と ρ'_{m} と $\mathbf{P}'$ と ρ'_{p} を同じ関係で結ぶかわりに式（3・4a）と（3・11a）をつぎのように書き直すことも許される．

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} + \mathbf{J}'_{\mathrm{m}} \tag{3・12}$$

$$\mu_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}' = \rho'_{\mathrm{m}} \tag{3・13}$$

これらの方程式は負の磁荷と距離ベクトルとの積から磁化ベクトルが作られていることを意味している．したがって，*EH* 形式と同じ論理により $\mathbf{M}'$ と $\mathbf{J}'_{\mathrm{m}}$ の関係はつぎのようになる．

$$\mathbf{J}_m' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t'} \tag{3・14}$$

新しい記述形式を作るためには，上式のように$\mathbf{M}'$と$\mathbf{J}_m'$の関係を書き換えておくと都合がよい．さて現在までに知られているいろいろな記述形式は波源の量$\mathbf{P}'$と$\mathbf{M}'$および電流密度$\mathbf{J}_p'$と$\mathbf{J}_m'$との関係で特徴づけられている．たとえば，*EH* 形式ではこれらの関係は式（3・6）で与えられ，アンペア電流模型（*amperian-current model*）ではつぎのようになる．[18]

$$\mathbf{J}_p' = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t'} + \mu_0 \nabla' \times \mathbf{M}' \tag{3・15a}$$

$$\mathbf{J}_m' = 0 \tag{3・15b}$$

さて式（3・15）は座標系の変換に対して不変であることが知られている．したがって新記述形式に適した形はアンペア電流模型で用いたと同様の方法で求められるはずである．言いかえると，たとえ分極電荷以外に磁荷が *Maxwell* の方程式に導入されたとしても，*Maxwell* の方程式で実際に効いてくるたとえば分極電流（有効分極電流）は真の分極電流（この電流は真の電気双極子モーメントの時間微分として表わされる）から虚の分極電流（これは明らかに磁化ベクトルを作る）を引いたものと考えねばならない．磁化電流についてもまったく同様である．したがっていま有効分極電流と有効磁化電流をつぎのように真の部分と虚の部分にわけて表示する．

$$\mathbf{J}_p' = \mathbf{J}_{pt}' - \mathbf{J}_{pi}' \tag{3・16a}$$

$$\mathbf{J}_m' = \mathbf{J}_{mt}' - \mathbf{J}_{pi}' \tag{3・16b}$$

まったく同様に有効波源ベクトルもつぎのように二つの部分に分けて表示する．

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_t' - \mathbf{P}_i' \tag{3・17a}$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}_t' - \mathbf{M}_i' \tag{3・17b}$$

EH 形式では式 (3・16) と (3・17) の虚の部分が無かったものと考えられる．さてつぎに $\mathbf{P}'$ と $\mathbf{J}_p'$ の関係および $\mathbf{M}'$ と $\mathbf{J}_m'$ の関係を決定する必要があるが，*Chu* の論理と同様に $\mathbf{J}_p$ と $\mathbf{J}_m$ がそれぞれ有効分極ベクトルと有効磁化ベクトルの時間微分から作られていると考えるのが最も物理的に納得のいくものである．すなわち式 (3・6a) と (3・14) から式 (3・16) と (3・17) を用いて

$$\mathbf{J}_p' = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{P}_t'}{\partial t'} - \frac{\partial \mathbf{P}_i'}{\partial t'} = \mathbf{J}_{pt}' - \mathbf{J}_{pi}' \tag{3・18a}$$

$$\mathbf{J}_m' = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t'} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_t'}{\partial t'} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_i'}{\partial t'} = \mathbf{J}_{mt}' - \mathbf{J}_{mi}' \tag{3・18b}$$

明らかに $\dfrac{\partial \mathbf{P}_t'}{\partial t'}$ と $\mathbf{J}_{pt}'$ の関係は *EH* 形式のそれと全く同じである．

$$\mathbf{J}_{pt}' = \frac{\partial \mathbf{P}_t'}{\partial t'} \tag{3・19a}$$

しかし式 (3・14) で指摘したように $\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{M}_t'}{\partial t'}$ と $\mathbf{J}_{mt}'$ の関係はつぎのように書かれる．

$$\mathbf{J}_{mt}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_t'}{\partial t'} \tag{3・19b}$$

これらの方程式から容易につぎの関係が得られる．

$$\nabla' \cdot \mathbf{P}_t' = -\rho_p' \tag{3・20a}$$

$$\mu_0 \nabla' \cdot \mathbf{M}_t' = \rho_m' \tag{3・20b}$$

$$\nabla' \times \mathbf{P}_t' = 0 \tag{3・20c}$$

$$\mu_0 \nabla' \times \mathbf{M}_t' = 0 \tag{3・20d}$$

残された仕事は $\mathbf{J}_{pi}$ と磁化ベクトルおよび $\mathbf{J}_{mi}$ と分極ベクトルの間の関係を誘導することである．もちろん $\mathbf{J}_{pt}$ は磁化ベクトルを，また $\mathbf{J}_{mt}$ は分極ベクトルを作らないことは明白である．Компонеец の方法[19] を用いると，$\mathbf{J}'_{pi}$ が作る全磁気双極子モーメントは

$$-\mathbf{m}'_i = \int \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{J}'_{pi}}{2} dV' = \int \frac{\mathbf{r}' \times \partial \mathbf{P}'_i / \partial t'}{2} dV' . \qquad (3\cdot21)$$

もちろん磁化ベクトル $\mathbf{M}'_i$ の定義は

$$\mathbf{m}'_i = \int \mathbf{M}'_i \, dV' . \qquad (3\cdot22a)$$

上式はまたつぎのように書くこともできる．

$$\mathbf{m}'_i = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times (\nabla' \times \mathbf{M}'_i) \, dV' \qquad (3\cdot22b)$$

式 (3・21) と (3・22b) を比較することにより次式が得られる．

$$\frac{\partial \mathbf{P}'_i}{\partial t'} = -\nabla' \times \mathbf{M}'_i , \qquad (3\cdot23a)$$

同様に

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'_i}{\partial t'} = \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{P}'_i}{\varepsilon_0} \right) . \qquad (3\cdot23b)$$

また上式から

$$\nabla' \cdot \mathbf{P}'_i = 0 \qquad (3\cdot23c)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{M}'_i = 0 . \qquad (3\cdot23d)$$

結局式 (3・19)，(3・20) および (3・23) から分極電流と磁化電流はつぎのように求まる．

$$\mathbf{J}_{\mathrm{p}}'=\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t'}=\mathbf{J}_{\mathrm{pt}}'-\nabla'\times\mathbf{M}' \qquad \nabla'\cdot\mathbf{P}'=-\rho_{\mathrm{p}}' \tag{3・24a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{J}_{\mathrm{m}}'=-\mu_0\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t'}=\mathbf{J}_{\mathrm{mt}}'-\nabla'\times\left(\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon_0}\right)\\&\mu_0\nabla'\cdot\mathbf{M}'=\rho_{\mathrm{m}}'\end{aligned}\right\} \tag{3・24b}$$

上式はわれわれが欲していたとおりの望ましい形になっており，式(3・*A*・3)のもとで相対論的に不変であることが証明される．式(3・*A*・3)は形式的にアンペア形式に一致する．したがって実験室系で次式が成立する．

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}=-\nabla\times\mathbf{M}+\mathbf{J}_{\mathrm{pt}} \tag{3・25a}$$

$$\mu_0\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}=\nabla\times\left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right)-\mathbf{J}_{\mathrm{mt}} \tag{3・25b}$$

つぎに*Maxwell*の方程式を不変にするために式(3・24)の右辺を式(3・12)と(3・5b)に代入すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}&\nabla'\times\left(\mathbf{E}'+\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon_0}\right)=-\mu_0\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'}+\mathbf{J}_{\mathrm{mt}}'\\&\mu_0\nabla'\cdot\mathbf{H}'=-\rho_{\mathrm{m}}'\end{aligned}\right\} \tag{3・26a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla'\times(\mathbf{H}'+\mathbf{M}')=\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'}+\mathbf{J}_{\mathrm{pt}}'+\mathbf{J}'\\&\varepsilon_0\nabla'\cdot\mathbf{E}'=\rho_{\mathrm{p}}'+\rho'\end{aligned}\right\} \tag{3・26b}$$

$$\nabla'\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{mt}}'=-\frac{\partial \rho_{\mathrm{m}}'}{\partial t'} \tag{3・26c}$$

$$\nabla'\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{pt}}'=-\frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}'}{\partial t'} \tag{3・26d}$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{J}' = -\frac{\partial \rho'}{\partial t'} \tag{3・26e}$$

これらの方程式が不変になるためには式(3・A・4)に示されるテンソルを定義しなければならないが，このテンソルは式(3・A・1)のテンソルの対偶テンソルであることがわかる．式(3・25)を式(3・26)の変換された式に代入すると次式が得られる．

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \tag{3・27a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{3・27b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \tag{3・27c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \tag{3・27d}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3・27e}$$

上式と式(3・12)の変換された式および式(3・5b)とを比較することにより次式が得られる．

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{3・28a}$$

$$\mathbf{J}_m = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \tag{3・28b}$$

言いかえると式(3・28)そのものを不変にするためには三つのテンソル式(3・A・3a)，(3・A・4)を導入しなければならない．さて構成方程式に必要な異

なった座標系間の量の間の関係を知るためには，上述の三つのテンソルを変換しなければならない．たとえばつぎの関係が簡単に得られる．

$$\mathbf{E}_{\parallel}' = [\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times (\mathbf{H} + \mathbf{M})]_{\parallel} \tag{3・29a}$$

$$\mathbf{E}_{\perp}' = \gamma [\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times (\mathbf{H} + \mathbf{M})]_{\perp} \tag{3・29b}$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}' = [\mathbf{H} - \varepsilon_0 \mathbf{v} \times (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0)]_{\parallel} \tag{3・29c}$$

$$\mathbf{H}_{\perp}' = \gamma [\mathbf{H} - \varepsilon_0 \mathbf{v} \times (\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0)]_{\perp} \tag{3・29d}$$

また

$$\mathbf{P}_{\parallel}' = [\mathbf{P} - (\mathbf{v} \times \mathbf{M})/c^2]_{\parallel} \tag{3・30a}$$

$$\mathbf{P}_{\perp}' = \gamma [\mathbf{P} - (\mathbf{v} \times \mathbf{M})/c^2]_{\perp} \tag{3・30b}$$

$$\mathbf{M}_{\parallel}' = [\mathbf{M} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}]_{\parallel} \tag{3・30c}$$

$$\mathbf{M}_{\perp}' = \gamma [\mathbf{M} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}]_{\perp} \tag{3・30d}$$

ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{3・31}$$

であり，記号 $\parallel$ と $\perp$ はそれぞれ速度 $\mathbf{v}$ に対して平行と垂直成分を表わす．もし式（3・9）の量を導入すると式（3・29）は数学的には *Minkowski* の得た式に一致するが，これは *Minkowski* の論理の当然の帰結である．

さて，つぎに次式で表わされるような最も簡単な構成方程式を考える．

$$(\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E}' = \mathbf{P}' \tag{3・32a}$$

$$(\mu - \mu_0)\,\mathbf{H}' = \mu_0 \mathbf{M}' \tag{3・32b}$$

ここで ε と μ はそれぞれ媒質の誘電率と透磁率である．式（3・29）と（3・

30) を上式に代入し式（3・9）の量を導入すると次式が得られる．

$$\varepsilon(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})=\mathbf{D}+(\mathbf{v}\times\mathbf{H})/c^2 \qquad (3\cdot33a)$$

$$\mu(\mathbf{H}-\mathbf{v}\times\mathbf{D})=\mathbf{B}-(\mathbf{v}\times\mathbf{E})/c^2 \qquad (3\cdot33b)$$

上式は完全に*Minkowski* が得た式に一致している．つぎに*Chu*の方程式（3・5）および（3・7）が新しい記述形式でどのように解明されるかを考える．はじめに，つぎの関係に注目する．

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}'+(\mathbf{v}'\times\mathbf{M}')/c^2 \qquad (3\cdot34a)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}'-\mathbf{v}'\times\mathbf{P}' \qquad (3\cdot34b)$$

ここで $(v/c)^2$は1に比して十分小さいとし$\gamma=1$とおいた．上の関係を式（3・26）の変換した式に代入すると

$$\nabla\times(\mathbf{E}+\mu_0\mathbf{M}'\times\mathbf{v})=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\nabla\times\left(\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon_0}\right)+\mathbf{J}_{mt} \qquad (3\cdot35a)$$

$$\nabla\times(\mathbf{H}-\mathbf{P}'\times\mathbf{v})=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\nabla\times\mathbf{M}'+\mathbf{J}_{pt}+\mathbf{J}\,. \qquad (3\cdot35b)$$

ここで$\mathbf{v}'=-\mathbf{v}$ の関係を用いた．もし$\mathbf{M}'$ と$\mathbf{P}'$ をそれぞれ$\mathbf{M}$と$\mathbf{P}$と考え式（3・25）を利用すると，上式は*Chu*が最初に求めた式に一致する．言いかえると*Minkowski* の基本的論理からすると*EH* 形式に現われる$\mathbf{P}$と$\mathbf{M}$は運動系で測定される量であり，一方電磁界ベクトル$\mathbf{E}$と$\mathbf{H}$は実験室系で測定される量であるということができる．これはまた，第一次近似理論では*EH*形式に現われる分極ベクトルと磁化ベクトルは二つの異なった座標系においても全く同じであり，したがっていままでその間違いを発見できなかった理由でもある．このようにして新記述形式を用いることにより，*EH* 形式の矛盾を解くことができた．

3・3・2　分極電流模型と携帯電流模型

本節では，前節の記述形式を基礎として2・3節で提出された分極電流模型（*P.C.M.*）と携帯電流模型（*C.C.M.*）の間の矛盾を取り除くことを考える．そこでまずはじめに分極の機構を詳しく調べる．

まず，電流密度は速度と電荷密度の積によって作られるという主張には何らの疑問もおこらないが，これに反して分極ベクトルは距離ベクトルと電荷密度によって作られると考えることは疑わしい．なぜなら特殊相対性理論のもとに作られた*Minkowski* 形式では，分極ベクトルは電磁界の一部分であり，それゆえ電磁界（**E**，**H**）のように電流密度等のような波源とみなされるべきでないからである．事実，分極ベクトルと磁化ベクトルは運動媒質中ではお互いに結合することがよく知られている．したがってこのように媒質が運動する系では分極ベクトルの直接的な物理的意味は失なわれている．したがって *self-consistent* な解析を可能にするためにはつぎの考えが最も物理的に納得がいきここでの出発点となりうるだろう．すなわち，媒質のいかなる電磁気的効果も真の電流密度* を基礎にして考えられなければならない．分極ベクトルも磁化ベクトルもこれらの真の電流密度によって生ずる界ベクトルとみなされなければならない．*Maxwell* の方程式はまたこれらの分極ベクトルおよび磁化ベクトルによって補足されなければならない．上述の考えからすると*C.C.M.* は困る模型である．なぜならば，最初からプラズマや導体のような媒質に対しては分極ベクトルおよび磁化ベクトルは作りだされないと仮定しているからである．あくまでも媒質は運動方程式の助けをかりて真の電流密度を生じ，これらの電流密度は分極および磁化ベクトルを作ると考えるべきである．

ここでの目的は新しく導びかれた記述形式をもとにして*C.C.M.* と *P.C.M* の両方に適用できる矛盾のない理論を定式化することである．

A．簡単な場合

まず損失のある誘電体（あるいは純粋の誘電体と導体との混合体）を考え

＊　真の電流密度の説明は前節で与えられている．

る．この誘電体は誘電率εおよび導電率σを持ち一定速度$\mathbf{v}$で運動しているものとする．前節で求めた新記述形式の基礎方程式は，従来の記号にもどすと

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{D}'}{\varepsilon_0}\right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} - \mathbf{J}'_m \tag{3・36a}$$

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{B}'}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} + \mathbf{J}'_p + \mathbf{J}' \tag{3・36b}$$

$$\mathbf{J}'_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial t'} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon_0}\right) \tag{3・36c}$$

$$\mathbf{J}'_p = \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial t'} + \nabla' \times \mathbf{M}' \ . \tag{3・36d}$$

式 (3・36) の中の電流密度$\mathbf{J}'_m$と$\mathbf{J}'_p$は“真”の電流密度である．したがって媒質の電磁気的効果はこれらの真の電流密度を基礎にして考えねばならない．損失のある誘電体の場合には媒質が2つの物理パラメータεとσで特徴づけられているので，波源ベクトルを2つの部分に分解する．一方はεの特性を，他方はσの特性を表わす．

$$\mathbf{J}'_m = \mathbf{J}'_{m1} + \mathbf{J}'_{m2} \tag{3・37a}$$

$$\mathbf{J}'_p = \mathbf{J}'_{p1} + \mathbf{J}'_{p2} \tag{3・37b}$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 \tag{3・37c}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}'_2 \tag{3・37d}$$

式 (3・36c) と (3・36d) はまたそれらの成分に分解される．

$$\mathbf{J}_{mi}{}' = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}'_i}{\partial t'} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{P}'_i}{\varepsilon_0}\right) \quad (i = 1, 2) \tag{3・38a}$$

$$\mathbf{J}_{pi}' = \frac{\partial \mathbf{P}_i'}{\partial t'} + \nabla' \times \mathbf{M}_i' \qquad (i = 1, 2) \tag{3・38b}$$

プライム系は媒質とともに運動している系であるからこの系でよく知られた *Maxwell* の方程式が導き出されなければならない．そこでつぎの構成方程式を与える．

$$\mathbf{P}_1' = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}' \tag{3・39a}$$

$$\mathbf{J}_{p2}' = \sigma \mathbf{E}' \tag{3・39b}$$

$$\mathbf{M}_1' = \mathbf{M}_2' = 0 \tag{3・39c}$$

上式を式(3・38) と (3・36)に代入するとつぎのよく知られた方程式が得られる．

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} \tag{3・40a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E}')}{\partial t'} + \sigma \mathbf{E}' + \mathbf{J}' \tag{3・40b}$$

さて式 (3・36)～(3・39) を実験室系へ変換する．式 (3・36) は *Lorentz* 変換に対して相対論的に不変である．すなわち

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}\right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \tag{3・41a}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_p + \mathbf{J} \tag{3・41b}$$

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \nabla \times \left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right) \tag{3・41c}$$

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \ . \tag{3・41d}$$

式 (3・39) の各成分もまた *Lorentz* 変換に対して不変である．

$$\mathbf{J}_{mi}=\mu_0\frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial t}-\nabla\times\left(\frac{\mathbf{P}_i}{\varepsilon_0}\right)\qquad(i=1,\ 2)\qquad(3\cdot42a)$$

$$\mathbf{J}_{pi}=\frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{M}_i\qquad(i=1,\ 2)\qquad(3\cdot42b)$$

構成方程式 (3・39) の *Lorentz* 変換は

$$\mathbf{P}_1-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{M}_1=(\varepsilon-\varepsilon_0)\ (\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\qquad(3\cdot43a)$$

$$\mathbf{J}_{p2}-\rho_{p2}\,\mathbf{v}=\sigma\gamma\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}\right)\qquad(3\cdot43b)$$

$$\mathbf{M}_1+\mathbf{v}\times\mathbf{P}_1=\mathbf{M}_2+\mathbf{v}\times\mathbf{P}_2=0\ ,\qquad(3\cdot43c)$$

ここで，　$\gamma=1/\sqrt{1-(v/c)^2}$　　(3・44)

式 (3・42b) と (3・43c) を用いて電流密度 $\mathbf{J}_{p2}$ は $\mathbf{P}_2$ によってつぎのように表わされる．

$$\mathbf{J}_{p2}=\frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial t}+\nabla\times(\mathbf{P}_2\times\mathbf{v})\qquad(3\cdot45)$$

上式を式 (3・43b) に代入すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{P}_2=\sigma\gamma\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}\right).\qquad(3\cdot46)$$

ここで連続の方程式

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_{p2}=-\frac{\partial\rho_{p2}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{P}_2)\ ,\qquad(3\cdot47)$$

を用いた．つぎに式 (3・43c) を用いると式 (3・43a) より $\mathbf{P}_1$ をつぎのように得る．

$$\mathbf{P}_1 = \gamma^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_0)\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}\right) \tag{3・48}$$

式 (3・46) および (3・48) から誘電体の損失を表わす項の電磁気的効果も *Maxwell* の方程式において分極ベクトルの一部分によって取り入れられることが知られる．いいかえればここに導いた *C.C.M.* は全く *P.C.M.* と一致する．したがって ε，σ を持つた媒質は周波数領域で複素誘電率 ε^* を持った媒質とみなせる．ここで ε^* は

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega'} \quad . \tag{3・49}$$

実験室系における構成方程式を得るためには，よく知られた *Minkowski* の方法，すなわち *Lorentz* 変換を用いて構成方程式

$$\mathbf{D}' = \varepsilon^* \mathbf{E}' \quad , \tag{3・50}$$

を実験室系へ変換すれば十分である．しかしこの場合には ε^* の中の ω' のような量は実験室系で測定可能な量に変換しておかねばならない．

B．一般的な場合

ここでは誘電体のみならず磁性体も含む場合を考える．我々は磁性体の透磁率と導磁率[+] をそれぞれ μ と σ_m とで表わす．これに対して誘電体はやはり ε と σ を持つとする．さてこの場合には4つの物理パラメータ ε，μ，σ および σ_m がある．したがって，各々の波源ベクトルは *A*．の場合に対応して4つの部分に分解される．

+ 導磁率を持つ *magnetic conductor* は実験的にまだ発見されていない．しかし複素透磁率を持った磁性体は存在することがよく知られている．したがってそのような物体を形式的に表現するために μ のみならず σ_m を持たせることは意味がある．

$$\mathbf{J}_m' = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{J}_{mi}' \tag{3・51a}$$

$$\mathbf{J}_p' = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{J}_{pi}' \tag{3・51b}$$

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{M}_i' \tag{3・51c}$$

$$\mathbf{P}' = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}_i' \tag{3・51d}$$

式（3・38）および（3・42）もまた分解される．

$$\mathbf{J}_{mi}' = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_i'}{\partial t'} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{P}_i'}{\varepsilon_0}\right) \qquad (i = 1 \sim 4) \tag{3・52a}$$

$$\mathbf{J}_{pi}' = \frac{\partial \mathbf{P}_i'}{\partial t'} + \nabla' \times \mathbf{M}_i' \qquad (i = 1 \sim 4) \tag{3・52b}$$

$$\mathbf{J}_{mi}' = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_i'}{\partial t} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{P}_i'}{\varepsilon_0}\right) \qquad (i = 1 \sim 4) \tag{3・53a}$$

$$\mathbf{J}_{pi}' = \frac{\partial \mathbf{P}_i'}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}_i' \qquad (i = 1 \sim 4) \tag{3・53b}$$

そこでつぎの構成方程式を与える．

$$\mu_0 \mathbf{M}_1' = (\mu - \mu_0)\, \mathbf{H}' \tag{3・54a}$$

$$\mathbf{J}_{m2}' = \sigma_m \mathbf{H}' \tag{3・54b}$$

$$\mathbf{P}_1' = \mathbf{P}_2' = 0 \tag{3・54c}$$

$$\mathbf{P}_3' = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \mathbf{E}' \tag{3・54d}$$

$$\mathbf{J}'_{p4} = \sigma \mathbf{E}' \tag{3・54e}$$

$$M_3' = M_4' = 0 \tag{3・54f}$$

上式を式(3・51)と(3・52)に代入するとよく知られた*Maxwell*の方程式が得られる．

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial (\mu \mathbf{H}')}{\partial t'} - \sigma_m \mathbf{H}' \tag{3・55a}$$

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E}')}{\partial t'} + \sigma \mathbf{E}' + \mathbf{J}' \tag{3・55b}$$

実験室系における構成方程式を得るために*Lorentz*変換を行なうと式(3・54)は

$$\mu_0 (M_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_1) = (\mu - \mu_0)(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}) \tag{3・56a}$$

$$\mathbf{J}_{m2} - \rho_{m2} \mathbf{v} = \sigma_m \gamma \left(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})}{c^2} \right) \tag{3・56b}$$

$$\mathbf{P}_1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times M_1 = \mathbf{P}_2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times M_2 = 0 \tag{3・56c}$$

$$\mathbf{P}_3 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times M_3 = (\varepsilon - \varepsilon_0)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3・56d}$$

$$\mathbf{J}_{p4} - \rho_{p4} \mathbf{v} = \sigma \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \right) \tag{3・56e}$$

$$M_3 + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_3 = M_4 + \mathbf{v} \times \mathbf{P}_4 = 0 \ . \tag{3・56f}$$

式(3・53a)，(3・53b)，(3・56c)および(3・56f)よりベクトル$\mathbf{J}_{m2}$と$\mathbf{J}_{p4}$はそれぞれ$\mathbf{M}_2$と$\mathbf{P}_4$でつぎのように表わされる．

$$\mathbf{J}_{m2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial t} + \mu_0 \nabla \times (\mathbf{M}_2 \times \mathbf{v}) \qquad (3\cdot57a)$$

$$\mathbf{J}_{p4} = \frac{\partial \mathbf{P}_4}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P}_4 \times \mathbf{v}) \qquad (3\cdot57b)$$

上式を式(3・56b)と(3・56e)に代入すると

$$\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{M}_2 = \sigma_m \gamma \left(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})}{c^2} \right) \qquad (3\cdot58a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{P}_4 = \sigma \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \right) . \qquad (3\cdot58b)$$

ベクトル$\mathbf{M}_1$と$\mathbf{P}_3$は式(3・56a,c,d,f)から

$$\mu_0 \mathbf{M}_1 = \gamma^2 (\mu - \mu_0) \left(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})}{c^2} \right) \qquad (3\cdot59a)$$

$$\mathbf{P}_3 = \gamma^2 (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \right) . \qquad (3\cdot59b)$$

ベクトル$\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{M}_3$および$\mathbf{M}_4$は式(3・56c,f), (3・58)と(3・59)から得られる．ここに導びかれた方程式は*Minkowski*によって得られた損失のない場合の構成方程式と等価であることをつぎに示す．まず$\frac{\partial}{\partial t} = -iw$, $\mathbf{v} \cdot \nabla = i\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$（$\mathbf{k}$は波数ベクトル）とすると式(3・58a,b)と(3・59a,b)から次式を得る．

$$\mu_0 (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) = \gamma^2 (\mu^* - \mu_0) \left(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{H})}{c^2} \right) \qquad (3\cdot60a)$$

ここで

$$\mu^* = \mu + \frac{i \sigma_m}{\gamma (\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})} , \qquad (3\cdot60b)$$

$$\mathbf{P}_3+\mathbf{P}_4=\gamma^2(\varepsilon^*-\varepsilon_0)\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}\right), \qquad (3\cdot61a)$$

ここで

$$\varepsilon^*=\varepsilon+\frac{i\sigma}{\gamma(\omega-\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})}. \qquad (3\cdot61b)$$

式 (3・56c, f) を式 (3・60) と (3・61) に代入すると

$$\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2=\gamma^2\varepsilon_0(\mu^*-\mu_0)\,\mathbf{v}\times(\mathbf{H}-\mathbf{v}\times\mathbf{D}) \qquad (3\cdot62a)$$

$$\mu_0(\mathbf{M}_3+\mathbf{M}_4)=-\gamma^2\mu_0(\varepsilon^*-\varepsilon_0)\,\mathbf{v}\times(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \qquad (3\cdot62b)$$

式 (3・61a), (3・62a), (3・60a) と (3・62b) からベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{M}$ はつぎのようになる.

$$\frac{\mathbf{P}}{\gamma^2}=(\varepsilon^*-\varepsilon_0)\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}\right)+\varepsilon_0(\mu^*-\mu_0)$$

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{H}-\mathbf{v}\times\mathbf{D}) \qquad (3\cdot63a)$$

$$\frac{\mu_0\mathbf{M}}{\gamma^2}=(\mu^*-\mu_0)\left(\mathbf{H}-\mathbf{v}\times\mathbf{D}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{H})}{c^2}\right)-\mu_0(\varepsilon^*-\varepsilon_0)$$

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (3\cdot63b)$$

上式は *Minkowski* によって得られたものと全く等価である.[6]

以上のように *C.C.M.* と *P.C.M.* の間の矛盾が新しい記述形式によって取り除かれることが示された. また損失のない *Minkowski* の構成方程式は分散や損失のある媒質にも一般化されうることが示された. 非等方で分散のある場合に対する *Minkowski* 記述形式の拡張理論は *Tai* によって報告されたが,[21] 彼の論文では *Minkowski* 形式の *C.C.M.* と *P.C.M.* の間の矛盾が取り除かれていない. したがって *Tai* による *Minkowski* 形式の拡張は幾分疑わしかった. 両方の模型の特性方程式が一致することは,[21] $\mu=\mu_0$ の媒質に

対しては2つの模型に対する*Maxwell* の方程式が同じ形で書かれるという事実による．

3・4 結　　言

*Chu*の求めた*EH* 形式は，*Newton*力学の基礎方程式が内部矛盾は含まないのと全く同等に，内部矛盾を含まない記述形式であり，それ自身の矛盾を探すことはいままで不可能であったが，*Newton*力学が*Einstein*の確立した相対論的力学とはお互いに矛盾するように，相対論的に不変な*Minkowski*形式とは相入れない記述形式であった．したがって両記述形式を統一する際に*Maxwell* の方程式の相対論的不変性が非常に大きな役割をはたすことは明らかであり，本章では，この相対論的不変性の要請を基礎として新しい記述形式を作ることができた．また*Minkowski* が得た携帯電流がない場合の構成方程式は正しい式であるが，携帯電流がある場合の構成方程式は自己矛盾する式であることが明らかとなり，その矛盾は新記述形式を用いて解決された．

しかし，本研究の主要な問題である巨視的エネルギ運動量に関しては本章は何も予言することができない*．この解決は次章で行なわれる．

---

* したがって巨視的理論における相対性原理を認めないのなら，*EH*形式と*Minkowski*形式のどちらが正しいかはこれまでの理論では予言できない．

第4章　統計理論を基礎とした巨視的電磁界理論（統計電磁気学）

4・1　序　　言

本章は前章とは別の基礎のもとに巨視的電磁界方程式の定式化を行う．前章では*Minkowski*と*EH*形式の矛盾は完全に取り除かれたが，やはりエネルギ運動量に関して十分に説明はできていない．そこには巨視的な量に関して仮定が必要であった．そこで本章では巨視的な量に関する仮定は一切行なわず，理論的に確立されている微視的な量からの帰結として巨視的な量を求める．また巨視的なエネルギ運動量も微視的なそれから求める．したがってそこには従来の理論の様なあいまいさは一切はいってこない．ここで本質的なのは巨視的理論は統計という唯一の手段によって微視的な理論から得られるということである．

4・2　統計理論の必要性

*Lorentz*は*Maxwell*の電磁理論を電子に適用し，いわゆる*Lorentz*の電子論を定式化した．彼の理論は，*Einstein*の特殊相対性理論に合致し，論理的に閉じた一つの体系を形成している．しかし媒質中の電磁理論いわゆる巨視的電磁理論には，いろいろと不完全な面が残されている．*Minkowski*形式のエネルギ運動量テンソル[6]は非対称で物理的に納得のいかないものである．特に，運動している媒質に対しては，第2，3章でみた様に，なお一層の困難が種々ある．

この様に*Maxwell-Lorentz*の微視的電磁理論が唯一で論理的に閉じた体系を作っているのに対し，媒質に対する巨視的電磁理論の定式化が種々考えられ，そこから上記のような困難が生ずるのにつぎの二つの原因が考えられる．一つは巨視的電磁界の定め方である．たとえば*Panofsky-Phillips*および*Landau-Lifshitz*のように微視的磁界の巨視的平均量を**B**と考えるか，*Chu*のようにそれを**H**と考えるかは記号のきめ方以上に重要な意味を持っている．すなわち*Poynting*ベクトルのように電磁界の2次の量をこれ

らを用いて定義する場合に，磁性体や運動媒質に対してはお互いは等しくはならず，そのためどちらが正しく定義されているかという疑問が生れる．しかしこの種の疑問はこれらの記述形式の中だけでは解決され得ない．このことは前章でも触れておいた．それにもましてあいまいなのは微視的電磁界を巨視的電磁界に移す場合の平均の操作である．一体平均とはある物理量の分布関数を考えそれをもとに行う操作であるが，電磁界に対しては全くこのような考慮がはらわれていない．もう一つの原因に媒質をどのような巨視的モデルで考えるかというのがある．すなわちすでに述べたように，*Panofsky-Phillips* と *Landau-Lifshitz* は媒質の電気的性質を電流で考え，*Chu* は電流の外に磁性体に対しては磁流をも考えている．このように媒質の微視的性質を巨視的な種々のモデルでおき変えられることが許されるとしても，そこには微視的電磁理論とは異なった論理的不完全さはまぬがれない．

そこで上記のような巨視的電磁理論の種々の欠陥を補い，微視的電磁理論と同様な論理的に閉じた巨視的電磁理論の定式化が望まれる．この新しい巨視的電磁理論に要求されることは，まず，従来の巨視的理論とは異なって；微視的電磁理論の論理的帰結として得られるものであること．したがって，そこにはかってな微視的電磁量の平均操作とか，媒質に対する巨視的モデルの設定とかの仮定は一切許されず不必要になり，たんに媒質の微視的な性質がわかれば十分である．つぎに電磁界の2次あるいはそれ以上の物理量が，電磁界そのものと同様に，対応する微視的物理量の新しく定義された平均操作によって得られること．このことは従来の種々の定式化で知られる疑問，一体何が本当に正しく巨視的電磁量を表わしているのか，という疑問に答えてくれるであろう．さらにこの新しい巨視的電磁理論は力学系に対する巨視的理論，たとえば，*Boltzmann* 方程式などの理論と同時に成立すべきものであること．

そこで上記のことを要求される巨視的電磁理論に必要なことは媒質の微視的理論が知られていることと，この微視的理論を巨視的理論に移す方法をみつけることの二つである．前者についてはすでに古典論や量子論でよく知られている．そこで後者について考えてみる．まずそのために電磁現象以外の

物理系である力学系を参考にする．力学系については古典力学，量子力学，熱力学および統計力学があるが，昔の熱素説と異なって，現在は熱の起源を粒子の運動に求めるのはよく知られていることである．すなわち微視的な力学の理論に統計的手法を用いて導びいた巨視的な力学の理論が統計力学であり，それば熱力学をよく説明する．この統計的手法はいかなる物理系に対しても適用できるものであり，我々の求めている巨視的な電磁理論の定式化にも有効であることがうかがわれる．ここでの目的も力学で用いられたと同じ統計的手法によって微視的な電磁理論より巨視的理論を定式化するにある．

このように統計理論を適用した巨視的電磁界方程式の定式化には上に述べた従来の巨視的理論を定式化する際の二つの仮定，すなわち電磁界の微視的平均としての巨視的量の定め方および媒質に対する巨視的モデルの設定は全く必要なく，* たんに媒質を構成している粒子数が十分多いことと，粒子および電磁界の全系のエネルギである *Hamiltonian* がわかれば十分である．しかしここで用いる統計理論は，巨視的な電磁界方程式自身が時間および座標の微分を含む理論であるから，必然的に，非平衡に対する理論である．力学系に対する非平衡の理論は *Gibbs*，*Boltzmann*[23],[24] *Vlasov*[25] およびテルレッキ[26] 等によってなされているが，その中でも *Boltzmann* 方程式は最もよく知られた方程式である．

4・3と4・4節では，従来，よく知られている *Maxwell－Lorentz* の電磁界方程式，および非平衡の統計理論の基本概念を必要な範囲で記述する．ここで本質的なのは *Maxwell-Lorentz* の電磁界方程式を *Hamilton* 形式で書くことである．4・5・1節では巨視的電磁界方程式，および *Boltzmann* 方程式で知られる粒子に対する巨視的運動方程式を定式化する．ここで巨視的電磁量の定め方が明確になる．4・5・2節は電磁気系および力学系に対するエネルギ関係式の導出にあてる．ここにおいてはじめて従来の理論で知られるおもな困難，たとえば，*Minkowski* 形式のエネルギ運動量テンソルの

＊ そのほかにも，物理的無限小[22]などという概念も必要ない．すなわち，ここで定式化しようとする巨視的電磁理論は全く確率的な性質のものであるからである．

非対称性や種々の記述形式の 電磁エネルギや *Poynting*ベクトル等の違いが克服される．4・5・3節は本理論の応用にあてる．

4・3 微視的電磁界理論[27]

いま，系は電子多数と電磁界とが相互作用をしている系を考える．もちろん，誘電体や磁性体を構成する粒子は電子だけではないが，最も簡単なしかも重要な系として，このような系を考える．しかしこのような微視的理論から作られた巨視的理論は電子集団だけでなく誘電体をも取り扱うように拡張できる．（4・5・3節参照） ここで用いる統計的手法は電子の系だけでなく，いかなる物質でも電磁界との相互作用を考慮した全系に対する*Hamiltonian*がわかれば用いることができる．

さて，*Maxwell-Lorentz* の微視的電磁界方程式は*Heaviside*単位系を用いてつぎのように書かれる．[27]

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad , \qquad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \tag{4・1a}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{1}{c}\rho\mathbf{v} , \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = \rho \tag{4・1b}$$

ここで$\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ は微視的電磁界，ρ，$\mathbf{v}$は電子の電荷密度および速度であるが，電子の電荷をe，個数をNと考えると

$$\rho = \sum_{k=1}^{N} e\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \tag{4・2a}$$

$$\rho_{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{N} e\mathbf{v}_k\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) , \tag{4・2b}$$

ここで$\mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}_k$はk番目の電子の座標と速度である．また電荷保存の法則は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_{\mathbf{v}} = 0 . \tag{4・3}$$

つぎに電荷密度 ρ を持つ粒子に働く *Lorentz* 力は

$$\mathbf{k} = \rho \left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{h}\right). \qquad (4\cdot4)$$

この力は粒子の運動量の変化に等しい．すなわち

$$\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \qquad (4\cdot5)$$

そこで，つぎに全系のエネルギの保存則を考える．いま空間全体の粒子が持つ力学的な運動エネルギ T の変化は

$$\frac{dT}{dt} = \int \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\, d\tau, \qquad (4\cdot6)$$

ここで $d\tau$ は体積素である．上式の $\mathbf{k}$ と $\mathbf{v}$ に式（4・1b）と（4・4）を代入し

$$-\mathbf{e}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(e^2 + h^2) - c(\mathbf{h}\cdot\nabla\times\mathbf{e}),$$

を用いると式（4・6）は

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} - \oint \mathbf{s}_n\, d\sigma, \qquad (4\cdot7a)$$

ここで，$d\sigma$ は面積系，さらに

$$U = \frac{1}{2}\int (e^2 + h^2)\, d\tau = \int u\, d\tau \qquad (4\cdot7b)$$

$$\mathbf{s} = c(\mathbf{e}\times\mathbf{h}), \qquad (4\cdot7c)$$

u は電磁エネルギ密度，$\mathbf{s}$ は *Poynting* ベクトルである．よく知られるように式（4・7a）は力学系と電磁気系とのエネルギバランスの式を表わしている．運動量の保存則も同様に求めることができる．ある空間の粒子の持つ運動量の時間変化は粒子に働く *Lorentz* 力に等しいので

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int \mathbf{k}\, d\tau \ . \qquad (4\cdot 8)$$

上式の$\mathbf{k}$に式(4.4)および(4.1)を代入すると

$$-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}\times\mathbf{h} = -\mathbf{e}\times(\nabla\times\mathbf{e}) - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}\times\mathbf{h}) \ ,$$

を用いて式(4・8)は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \oint \bar{t}_n\, d\sigma \ , \qquad (4\cdot 9a)$$

ここで

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2}\int \mathbf{e}\times\mathbf{h}\, d\tau = \int \mathbf{g}\, d\tau \qquad (4\cdot 9a)$$

$$\bar{t}_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta + h_\alpha h_\beta - \frac{1}{2}(e^2 + h^2)\,\delta_{\alpha\beta} \ , \qquad (4\cdot 9b)$$

$\mathbf{g}$は電磁運動量密度，$\bar{t}_{\alpha\beta}$は*Maxwell*の応力テンソルである．式(4・9a)は全系の運動量の保存則を表わしている．式(4・7)および(4・9)から作られる微視的電磁気系に対するエネルギ運動量テンソルは対称であり，[28] 物理的に納得がいく．

さて，以下で展開する理論の準備のために*Maxwell-Lorentz*の方程式(4・1)を調和振動子で表わすことを考えよう．まずつぎのように電磁ポテンシャル$\mathbf{a}$およびϕを導入する．

$$\mathbf{h} = \nabla\times\mathbf{a} \qquad (4\cdot 10a)$$

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \nabla\phi \qquad (4\cdot 10b)$$

*Lorentz*条件

$$\nabla\cdot\mathbf{a} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \ , \qquad (4\cdot 11)$$

を用いると，式（4・1）はつぎのような波動方程式で表わされる．

$$\nabla^2 \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = - \frac{1}{c} \rho \mathbf{v} \qquad (4\cdot12a)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \rho \qquad (4\cdot12b)$$

そこでいま，$\mathbf{a}$ および ϕ を次式を満足する時間に無関係な直交関数系 $\mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{r})$ および $\phi_{\sigma'}(\mathbf{r})$ で展開する．

$$\nabla^2 \mathbf{a}_{\lambda'} + \frac{\nu^2_{\lambda'}}{c^2} \mathbf{a}_{\lambda'} = 0 \qquad (4\cdot13a)$$

$$\nabla^2 \phi_{\sigma'} + \frac{\nu^2_{\sigma'}}{c^2} \phi_{\sigma'} = 0 \ ; \qquad (4\cdot13b)$$

ただし

$$\int \mathbf{a}_{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda'} \, d\tau = c^2 \delta_{\lambda\lambda'} \qquad (4\cdot14a)$$

$$\int \phi_{\sigma} \phi_{\sigma'} \, d\tau = c^2 \delta_{\sigma\sigma'} \ . \qquad (4\cdot14b)$$

すると $\mathbf{a}$ および ϕ はこれらを用いて

$$\mathbf{a} = q_{\lambda'}(t) \, \mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{r}) \qquad (4\cdot15a)$$

$$\phi = q_{\sigma'}(t) \, \phi_{\sigma'}(\mathbf{r}) \ . \qquad (4\cdot15b)$$

ここで添字の2度でるものは加え合わす約束にする．式（4・15）を（4・12）に代入し，それぞれ $\mathbf{a}_{\lambda}$，ϕ_{σ} をかけ式（4・2）および（4・14）を用いると

$$\ddot{q}_{\lambda} + \nu_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \frac{1}{c} \sum_{k'=1}^{N} e \, \mathbf{v}_{k'} \cdot \mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{r}_{k'}) \qquad (4\cdot16a)$$

$$\ddot{q}_{\sigma} + \nu_{\sigma}^2 q_{\sigma} = \sum_{k'=1}^{N} e \, \phi_{\sigma}(\mathbf{r}_{k'}) \ . \qquad (4\cdot16b)$$

ここでドット（・）は時間微分を表わす．以下に必要なもう一つの直交関係式を誘導する．式（4・16）に $a_\lambda(\mathbf{r})$，$\phi_\sigma(\mathbf{r})$ をかけ，λおよびσについて加え合すとつぎの関係が得られる．

$$a_\lambda(\mathbf{r})\, a_\lambda(\mathbf{r}_k) = c^2\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \qquad (4\cdot 17a)$$

$$\phi_\sigma(\mathbf{r})\, \phi_\sigma(\mathbf{r}_k) = c^2\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \qquad (4\cdot 17b)$$

4・4 *Hamilton* の正準方程式および統計理論の基礎[26]

ここでは前節の微視的電磁理論を *Hamilton* の正準方程式で書くことと，それを *Liouville* の定理を用いて統計理論に持ち込む方法について簡単に記述する．

いま可附番無限個の自由度を持つ任意の物理系を考える．この系の運動は *Hamilton* の正準方程式で記述される．

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (4\cdot 18a)$$

$$(k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (4\cdot 18b)$$

$$H = p_k q_k - L\,, \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,, \qquad (4\cdot 18c)$$

ここで q_k，p_k は k 番目の粒子あるいは電磁界を表わす調和振動子に対する一般化座標および一般化運動量，L は *Lagrange* 関数，H はこの系全体のエネルギを表わす *Hamiltonian* である．そこで q_k および p_k に通し番号をつけ，その全体を $\{X_k\}$ で表わすと，式（4・18）を用い，つぎの *Liouville* の定理で知られる位相体積保存の定理が成り立つ．

$$\sum_k \frac{\partial \dot{X}_k}{\partial X_k} = 0 \qquad (4\cdot 19)$$

そこで $\{X_k\}$ を座標軸とする無限次元位相空間内の任意の位相体積 G の中

にこの系をみいだす確率を次式で定義する．

$$W(G) = \int_G w(X, t)\, dX \qquad (4\cdot 20)$$

すると$w(X, t)$は位相確率密度と考えられる．そこで*Liouville*の定理を用いると

$$0 = \frac{d}{dt}\int_G w(X, t)\, dX = \int_G \left\{\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial(\dot{X}_k w)}{\partial X_k}\right\} dX. \qquad (4\cdot 21)$$

上式は任意の位相体積Gに対して成立すべきだから

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial(\dot{X}_k w)}{\partial X_k} = 0 .$$

あるいは上式に式（４・１８）を適用すると

$$\frac{\partial w}{\partial t} = [H, w] . \qquad (4\cdot 22a)$$

ここで$[H, w]$は*Poisson*括弧式で

$$[H, w] = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial w}{\partial q_k}\right) . \qquad (4\cdot 22b)$$

上式はよく知られるように非平衡の系に対する統計理論の基礎方程式であり実際力学系に対しては上式から*Boltzmann*方程式が導びかれる．[29]上式で必要なのは*Hamiltonian* Hと一般化座標および運動量だけでほかの仮定は一切必要ないことに注意する．すなわち巨視的理論は本質的に確率的な性質のものである．

そこで，つぎに電磁界および電子の系に対する*Hamiltonian*を求める．電磁界に対しては*Maxwell-Lorentz*の方程式が式（４・１６）のように調和振動子の形で書かれているので，簡単につぎのように求まる．

$$H_e = \sum_{\lambda'} \frac{1}{2} \left(p_{\lambda'}^2 + \nu_{\lambda'}^2 q_{\lambda'}^2 \right) - \sum_{\sigma'} \frac{1}{2} \left(p_{\sigma'}^2 + \nu_{\sigma'}^2 q_{\sigma'}^2 \right) \qquad (4\cdot23)$$

λおよびσ振動子の*Hamiltonian*の符号の違いは電子に対する電磁ポテンシャル$\mathbf{a}$およびϕの符号の違いによる．電子に対する力学的エネルギは相対性理論で知られるように

$$H_k = \sum_{k=1}^{N} \left\{ e\phi(\mathbf{r}_{k'}, t) + \sqrt{\mu^2 + (c\mathbf{p}_{k'} - e\mathbf{a}(\mathbf{r}_{k'}, t))^2} \right\}, \qquad (4\cdot24)$$

であるが，この式は*Dirac*の方程式と異なって線形ではない．このことは後で理論を展開する場合に困難を生じることになるので，我々は非相対論近似の*Hamiltonian*

$$H_k = \sum_{k=1}^{N} \left\{ e\phi(\mathbf{r}_{k'}, t) + \frac{(c\mathbf{p}_{k'} - e\mathbf{a}(\mathbf{r}_{k'}, t))^2}{2\mu} \right\}, \qquad (4\cdot25)$$

を採用する．したがって，電磁界および電子の全系に対する*Hamiltonian*は式（4・15）を用いると

$$H = \sum_{\lambda'} \frac{1}{2} \left(p_{\lambda'}^2 + \nu_{\lambda'}^2 q_{\lambda'}^2 \right) - \sum_{\sigma'} \frac{1}{2} \left(p_{\sigma'}^2 + \nu_{\sigma'}^2 q_{\sigma'}^2 \right) + \sum_{k=1}^{N} \left\{ e q_{\sigma'} \phi_{\sigma'}(\mathbf{r}_{k'}) + \frac{(c\mathbf{p}_{k'} - e q_{\lambda'} \mathbf{a}_{\lambda'}(\mathbf{r}_{k'}))^2}{2\mu} \right\}. \qquad (4\cdot26)$$

上式を用いて*Hamilton*の正準方程式を作ると，確かにそれらが式（4・16）および電子に対する運動方程式

$$\frac{d\mathbf{u}_k}{dt} = e \left\{ \mathbf{e}(\mathbf{r}_k, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_k \times \mathbf{h}(\mathbf{r}_k, t) \right\}, \qquad (4\cdot27)$$

になっている．ここで$\mathbf{u}_k$および$\mathbf{v}_k$はk番目の電子に対する力学的運動量および速度である．

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{c} (c\mathbf{p}_k - e\mathbf{a}) \qquad (4\cdot28\,a)$$

$$\mathbf{v}_k = \frac{c^2}{\mu}\mathbf{u}_k \qquad (4\cdot 28b)$$

そこで，式（4・26）を用いて *Poisson* 括弧式を計算する．ここで q_k は $\mathbf{r}_{k'}$（$k'=1, 2, \cdots, N$），$q_{\lambda'}$（$\lambda'=1, 2, \cdots$）と $q_{\sigma'}$（$\sigma'=1, 2, \cdots$）であり，p_k は $\mathbf{p}_{k'}$（$k'=1, 2, \cdots N$），$p_{\lambda'}$（$\lambda'=1, 2, \cdots$）と $p_{\sigma'}$（$\sigma'=1, 2, \cdots$）である．したがって

$$\begin{aligned}
[H, w] = \sum_{\lambda'} \Bigg[& -p_{\lambda'} \frac{\partial w}{\partial q_{\lambda'}} + \Big\{ \nu_{\lambda'}^2 q_{\lambda'} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu} (c\mathbf{p}_{k'} - e q_{\lambda''} \mathbf{a}_{\lambda''}) \\
& \cdot (-e\mathbf{a}_{\lambda'}) \Big\} \frac{\partial w}{\partial p_{\lambda'}} \Bigg] \\
& + \sum_{\sigma'} \left[p_{\sigma'} \frac{\partial w}{\partial q_{\sigma'}} + \left\{ -\nu_\sigma^2 q_{\sigma'} + \sum_{k=1}^{N} e\phi_{\sigma'} \right\} \frac{\partial w}{\partial p_{\sigma'}} \right] \\
& + \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{c}{\mu} (c p_{k'}^{\alpha} - e q_{\lambda'} a_{\lambda'}^{\alpha}) \frac{\partial w}{\partial r_{k'}^{\alpha}} \right. \\
& \left. + \left\{ e q_{\sigma'} \frac{\partial \phi_{\sigma'}}{\partial r_{k'}^{\alpha}} - \frac{e}{\mu} q_{\lambda'} \frac{\partial \mathbf{a}_{\lambda'}}{\partial r_{k'}^{\alpha}} (c\mathbf{p}_{k'} - e q_{\lambda'} \mathbf{a}_{\lambda'}) \right\} \frac{\partial w}{\partial p_{k'}^{\alpha}} \right].
\end{aligned} \qquad (4\cdot 29)$$

ここで $\mathbf{a}_{\lambda'}$, $\phi_{\sigma'}$ はすべて $\mathbf{r}_{k'}$ の関数であり，$\alpha = x, y, z$ をとる約束にする．上式で，電子の項の $\partial w/\partial r_{k'}^{\alpha}$ および $\partial w/\partial p_{k'}^{\alpha}$ の係数にはそれ自身の変数 $\mathbf{p}_{k'}$ および $\mathbf{r}_{k'}$ が存在するので，これを一度部分積分して以下の理論の展開が可能になるようにしておく．結局，全系に対する *Poisson* 括弧式は

$$\begin{aligned}
[H, w] = \sum_{\lambda'} \Bigg[& \frac{\partial (p_{\lambda'} w)}{\partial q_{\lambda'}} + \frac{\partial}{\partial p_{\lambda'}} \Big\{ \nu_{\lambda'}^2 q_{\lambda'} + \sum_{k'=1}^{N} \frac{1}{\mu} (c\mathbf{p}_{k'} - e q_{\lambda''} \mathbf{a}_{\lambda''}) \\
& \cdot (-e\mathbf{a}_{\lambda'}) \Big\} w \Bigg] \\
& + \sum_{\sigma'} \left[\frac{\partial (p_{\sigma'} w)}{\partial q_{\sigma'}} + \frac{\partial}{\partial p_{\sigma'}} \left\{ -\nu_{\sigma'}^2 q_{\sigma'} + \sum_{k=1}^{N} e\phi_{\sigma'} \right\} w \right]
\end{aligned}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{k'=1}^{N}\left[-\frac{\partial}{\partial r_{k'}^{\alpha}}\left\{\frac{cw}{\mu}\left(cp_{k'}^{\alpha}-eq_{\lambda'}a_{\lambda'}^{\alpha}\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial p_{k'}^{\alpha}}\left\{eq_{\sigma'}\frac{\partial\phi_{\sigma'}}{\partial r_{k'}^{\alpha}}-\frac{e}{\mu}q_{\lambda'}\frac{\partial a_{\lambda'}}{\partial r_{k'}^{\alpha}}\left(c\mathbf{p}_{k'}-eq_{\chi}\mathbf{a}_{\lambda'}\right)\right\}w\right]\cdot \tag{4・30}$$

4・5　巨視的理論の定式化

4・5・1　界方程式

前節で求めた*Poisson*括弧式（4・30）を用いて統計集団に対する運動方程式（4・22a）を厳密に解くことは，とりもなおさずすべての電子の運動を電磁界との相互作用を含んだ形で解く，すなわち*Hamilton*の正準方程式（4・18）を厳密に解くことに等しい．しかしこのことは電子数が莫大であることから原理的には可能であるにしても実際上はできないことである．[26][30] しかし我々に必要なのはこのような厳密な解ではなく，たんに電子に対しては距離$\mathbf{r}$と$\mathbf{r}+d\mathbf{r}$および速度$\mathbf{v}$と$\mathbf{v}+d\mathbf{v}$の間にある平均の電子数に対する方程式である．このことはとりもなおさずk番目の電子の一体確率密度$W_1^k(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k, t)$がわかれば十分である．すなわち，巨視的な量は本質的に確率的性質を持っていることになる．ここで

$$W_1^k(\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k, t)=\int w(X_{k'}, X_{\lambda'}, X_{\sigma'}, t)\,d(X_{k'}-\mathbf{r}_k\mathbf{p}_k)\,dX_{\lambda'}dX_{\sigma'}$$

$$(k=1, 2, \cdots N), \tag{4・31}$$

ここで$X_{k'}=(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\cdots\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots\mathbf{p}_N)$，$X_{\lambda'}=(q_{\lambda 1}, q_{\lambda 2}, \cdots p_{\lambda 1}, p_{\lambda 2}\cdots)$ $X_{\sigma'}=(q_{\sigma 1}, q_{\sigma 2}, \cdots p_{\sigma 1}, p_{\sigma 2}\cdots)$ また$d(X_{k'}-\mathbf{r}_k\mathbf{p}_k)$は$dX_{k'}=d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\cdots d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2\cdots d\mathbf{p}_N$より$\mathbf{r}_k, \mathbf{p}_k$を除く積分素を表わすことにする．電磁界に対しては少し事情は異なる．まずはじめに電磁界に対しては位置座標$\mathbf{r}$に対する関数形は式（4・13）によってすでに知られた関数であり，座標の役目をするのはq_λ（およびq_σ）であることに注意する．さらにq_λについてはすべてのλについては厳密にはわからないであろう．何

故ならもしすべてのλに対してq_λがわかれば式(4・15)より厳密に微視的な電磁界が求まることになる。しかしこれはすべての電子の運動が厳密にわかってはじめていえることで　これは上に見たように実際上はできないことである。したがってq_λそのものは厳密にはわからなく，その平均値$<q_\lambda>$のみがわかることが予想される。すなわち

$$<q_\lambda>=\frac{\int q_\lambda W_0^\lambda(q_\lambda,t)\,dq_\lambda}{\int W_0^\lambda(q_\lambda,t)\,dq_\lambda}\quad(\lambda=1,2,\cdots),\qquad(4\cdot32)$$

のみが我々が実際に巨視的電磁界として測定できる量であろう。ここで$W_0^\lambda(q_\lambda,t)$はλ振動子に対する一体確率密度関数である。同様にσ振動子に対しては

$$<q_\sigma>=\frac{\int q_\sigma W_0^\sigma(q_\sigma,t)\,dq_\sigma}{\int W_0^\sigma(q_\sigma,t)\,dq_\sigma}\quad(\sigma=1,2,\cdots),\qquad(4\cdot33)$$

のみが巨視的観測量であろう。そこで巨視的な電磁ポテンシャル$\mathbf{A}$およびΦは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=<q_{\lambda'}>\mathbf{a}_{\lambda'}\qquad(4\cdot34a)$$

$$\Phi(\mathbf{r},t)=<q_{\sigma'}>\phi_{\sigma'}\ ,\qquad(4\cdot34b)$$

と表わせることが予想される。実際以下このようにして巨視的電磁量を定めるのが正しいことがわかる。

さて，式(4・22a)と(4・30)を解くために，つぎのような仮定を設ける。したがって，以下に導出する巨視的方程式はここで設ける仮定のもとに成り立つことに注意する。まず電子と電磁界とは統計的に独立であり，したがって，電子と電磁界全体の確率密度はおのおのの確率密度の積に分解されるとする。さらに電子全体の確率密度は個々の電子の確率密度の積に分解され，電磁界についても同様とする。電子に対する上の仮定は電子同志の衝突は無視することであるが，電磁界に対する上の仮定は物理的にさほど明らかでない。

そこで，はじめにいわゆる連続の式を導出する。λ振動子に対してはq_λ

を除くすべての正準変数で式（4・22）を積分すると

$$W_1^{\lambda}(q_\lambda, p_\lambda, t) = \int w dX_{k'} d(X_{\lambda'} - q_\lambda p_\lambda) dX_{\sigma'} \qquad (4\cdot35a)$$

$$W_0^{\lambda}(q_\lambda, t) = \int w\, dX_{k'} d(X_{\lambda'} - q_\lambda)\, dX_{\sigma'} \qquad (4\cdot35b)$$

$$\overline{p_\lambda}(q_\lambda, t) = \frac{1}{W_0^{\lambda}(q_\lambda, t)} \int p_\lambda W_1^{\lambda}(q_\lambda, p_\lambda, t)\, dp_\lambda \ , \qquad (4\cdot35c)$$

を用いて

$$\frac{\partial W_0^{\lambda}(q_\lambda, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q_\lambda}\left(\overline{p_\lambda} W_0^{\lambda}(q_\lambda, t)\right). \qquad (4\cdot36)$$

同様にσ振動子に対しても

$$\frac{\partial W_0^{\sigma}(q_\sigma, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\overline{p_\sigma} W_0^{\sigma}(q_\sigma, t)\right), \qquad (4\cdot37)$$

ここでwは正準変数が無限大で0になると仮定し，W_0^{σ}および$\overline{p_\sigma}$は式（4・35）と同様に定義する．上式より以下しばしば用いる便利な恒等式を得る．

$$\overline{p_\lambda} W_0^{\lambda} = \frac{\partial}{\partial t}(q_\lambda W_0^{\lambda}) + \frac{\partial}{\partial q_\lambda}(q_\lambda \overline{p_\lambda} W_0^{\lambda}) \qquad (4\cdot38)$$

$$\overline{p_\sigma} W_0^{\sigma} = -\frac{\partial}{\partial t}(q_\sigma W_0^{\sigma}) + \frac{\partial}{\partial q_\sigma}(q_\sigma \overline{p_\sigma} W_0^{\sigma}) \qquad (4\cdot39)$$

つぎにk番目の電子に対しては$\mathbf{r}_k$を除くすべての正準変数で積分すると

$$\frac{\partial W_0^{k}(\mathbf{r}_k, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3} -\frac{\partial}{\partial r_k^{\alpha}} \cdot \frac{c W_0^{k}(\mathbf{r}_k, t)}{\mu}\left(c\overline{p_k^{\alpha}} - e\langle q_{\lambda'}\rangle a_{\lambda'}^{\alpha}\right). \qquad (4\cdot40)$$

そこで

$$\overline{\mathbf{v}_k}(\mathbf{r}_k, t) \equiv \frac{c^2}{\mu}\overline{\mathbf{u}_k}(\mathbf{r}_k, t) \equiv \frac{c}{\mu}\left(c\overline{\mathbf{p}_k} - e\langle q_{\lambda'}\rangle \mathbf{a}_{\lambda'}\right), \quad (4\cdot41)$$

とおくと式（4・40）は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(W_0^k(\mathbf{r}_k, t)\right) + \nabla\cdot\left(\overline{\mathbf{v}}_k W_0^k(\mathbf{r}_k, t)\right) = 0 \ . \quad (4\cdot42)$$

上式はよく知られた粒子集団に対する連続の方程式と本質的には同じであるが，$\overline{\mathbf{v}}_k$ の中に電磁ポテンシャルが $\langle q_{\lambda'}\rangle a_{\lambda'}$ の形で入っていることに注意する．

つぎに巨視的電磁界方程式と電子集団に対する *Boltzmann* 方程式を誘導する．まず，もっとも簡単な場合として σ 振動子を考える．式（4・22）に p_σ をかけ q_σ を除くすべての正準変数で積分すると次式が得られる．

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(q_\sigma W_0^\sigma(q_\sigma, t)\right) + \nu_\sigma^2 q_\sigma W_0^\sigma(q_\sigma, t)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\overline{p_\sigma^2} W_0^\sigma - \frac{\partial}{\partial t} q_\sigma \overline{p_\sigma} W_0^\sigma\right)$$
$$= W_0^\sigma(q_\sigma, t) \sum_{k'=1}^{N} \int e\,\phi_\sigma(\mathbf{r}_{k'}) W_0^k(\mathbf{r}_{k'}, t)\, d\mathbf{r}_{k'} \quad (4\cdot43)$$

上式の誘導は付録（*B*）に示される．上式をさらに q_σ で積分し，それに $\phi_\sigma(\mathbf{r})$ をかけ σ について加え合わすと式（4・13）および（4・17）を用い，$W_0^k(\mathbf{r}_{k'}, t)$ はすべての電子に対して等しいことを考えるとつぎのようになる．

$$\nabla^2\langle q_\sigma\rangle\phi_\sigma(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle q_\sigma\rangle\phi_\sigma(\mathbf{r}) = -Ne W_0^k(\mathbf{r}, t) \quad (4\cdot44)$$

ここで $\langle q_\sigma\rangle$ は式（4・33）で定義した．したがって，我々は本節のはじめの予想どおり巨視的なスカラポテンシャルを式（4・34b）で定義できることが

明らかとなった．そこで上式は巨視的方程式として

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\mathbf{r},t)=-Ne\overline{W}_0^{\,k}(\mathbf{r},t)\,. \qquad (4\cdot45)$$

同様にベクトルポテンシャルに対しても，電子の速度が現われるので多少複雑になるが，つぎのように求まる．

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=-\frac{1}{c}Ne\overline{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)\overline{W}_0^{\,k}(\mathbf{r},t) \qquad (4\cdot46)$$

ここで$\mathbf{A}$は式（4・34 a）でまた$\overline{\mathbf{v}}$は式（4・41）で与えられる．上式の誘導は付録（C）に与えられる．つぎに巨視的な電磁界を求める．微視的な電磁界は式（4・10）で与えられるが式（4・15）を用いると

$$\mathbf{h}=q_{\lambda'}\ \nabla\times\mathbf{a}_{\lambda'} \qquad (4\cdot47a)$$

$$\mathbf{e}=-\frac{1}{c}\,p_{\lambda'}\mathbf{a}_{\lambda'}\ -q_{\sigma'}\nabla\phi_{\sigma'}\ . \qquad (4\cdot47b)$$

そこでまったく電磁ポテンシャルを求めたのと同じようにして，巨視的電磁界はつぎのように求まる．

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad (4\cdot48a)$$

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\ , \qquad (4\cdot48b)$$

ここで巨視的磁界を$\mathbf{H}$あるいは$\mathbf{B}$とするのはまったく記号のきめ方でありどちらでもよいが，ここではそれを$\mathbf{B}$とする．つぎに巨視的な*Lorentz*条件は

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0\ , \qquad (4\cdot49)$$

と求まる．式（4・48）と（4・49）は決して自明ではない．微視的量に統計を適用してはじめて求まるのであって，記号のきめ方を除いて巨視的電磁界は唯一的に定められる．そこで式（4・45），（4・46），（4・48）お

よび（4・49）を用いると，巨視的電磁界方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (4\cdot 50a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J}, \qquad (4\cdot 50b)$$

$$\mathbf{J} = eN\bar{\mathbf{v}}W_0^k . \qquad (4\cdot 50c)$$

上式は微視的電磁界方程式と形式的には同じであるがその意味するところは大いに異なっている．たとえば微視的*Poynting*ベクトル$\mathbf{s}$は式（4・7c)で与えられるが，巨視的にも$\mathbf{S}=c(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$で与えられるかどうかは$u$に統計を適用することによってはじめて明らかになることである．事実，この点がいままでしばしば問題になっていた点で，たとえば*Minkowski*は*Poynting*ベクトルとしては上とは異なった量を考え，*Chu*は$\mathbf{B}$を$\mathbf{H}$と名づけた上で上の定義にしたがい，*Panofsky-Phillips*および*Landau-Lifshitz*はこれらの別々の定義を混用している．エネルギの関係は4・5・2と4・5・3節にまわすことにして，つぎに電子集団に対する運動方程式を誘導する．式（4・22a）に$c^2\mathbf{p}_k/\mu$および$-ce\,q_{\lambda'}\mathbf{a}_{\lambda'}/\mu$をそれぞれかけて積分すると式（4・48）を用いて次式が得られる．

$$\frac{\mu}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\mathbf{v}}W_0^k(\mathbf{r},t)\right)+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\left(\overline{\mathbf{v}v^\alpha}W_0^k(\mathbf{r},t)\right)\right]$$

$$=eW_0^k(\mathbf{r},t)\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}\bar{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}\right] \qquad (4\cdot 51)$$

上式の誘導は付録（*D*）に示す．上式は*Boltzmann*方程式より得られる運動方程式と同じであるが，$\mathbf{E}$および$\mathbf{B}$は電子全体が作る電磁界であることに注意する．式（4・50）と（4・51）は電子に対する力学系に電磁気系がうまく分離されている形であるが，このように都合よく分離できるのは，最初の仮定であるすべての多体確率密度関数が個々の確率密度関数の積で表わされることが本質的であって，もしそうならない場合にはこのような分離自体が

不可能となろう．そこで全系の密度関数が力学系と電磁気系との別々の密度関数の積で表わせない物理系が存在可能であろうかという問題が生れるがこの点はここでは深く立ち入らないことにする．

4・5・2　エネルギ関係式

微視的電磁エネルギ密度は式（4・7b）で与えられるが，これを調和振動子に対する正準変数で表わすと

$$u = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla\phi\right)^2 + (\nabla\times\mathbf{a})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c^2}(p_{\lambda'}\mathbf{a}_{\lambda'})^2 + \frac{2}{c}p_{\lambda'}q_{\sigma'}\mathbf{a}_{\lambda'}\nabla\phi_{\sigma'} + (q_{\sigma'}\nabla\phi_{\sigma'})^2 + (q_{\lambda'}\nabla\times\mathbf{a}_{\lambda'})^2\right\}. \qquad (4\cdot52)$$

そこで $p_{\lambda'}p_{\lambda''}$，$p_{\lambda'}q_{\sigma'}$，$q_{\sigma'}q_{\sigma''}$ および $q_{\lambda'}q_{\lambda''}$ を計算する必要がある．これらを別々に計算し加え合わすと式（4・34）を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi\right)^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right\}$$

$$= \left(c\nabla^2\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi + e\bar{N}\bar{\mathbf{v}}\bar{W}_0^{\mathrm{k}}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\Phi\right)$$

$$+ \nabla\times\mathbf{A}\cdot\frac{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}{\partial t}. \qquad (4\cdot53)$$

が得られる．上式の誘導は付録（E）に示す．そこで *Lorentz* 条件式（4・49），ベクトル公式 $\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \nabla\nabla\cdot\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$ および，式（4・48）を用いると上式右辺は

$$c(\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}.$$

さらにベクトル公式 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$ を用いると，結局式（4・53）は

$$c\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + B^2) = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \qquad (4\cdot54)$$

したがって

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2), \tag{4·55}$$

は巨視的電磁エネルギ密度であるから

$$\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \tag{4·56}$$

は電磁エネルギの流れの密度を表わすベクトルになり，これを巨視的*Poynting*ベクトルと名づける．したがって，統計電磁理論の立場からは*Minkowski*が定義した*Poynting*ベクトルは正しくは電磁エネルギを表わしていなく，物質の力学的エネルギの流れも含まれていることがわかる．一方*Chu*の定義した*Poynting*ベクトルは正しく電磁エネルギの流れの密度を表わしている．

同様にして電磁運動量の巨視的量を誘導することができるが，微視的な$\mathbf{s}$と$\mathbf{g}$は互いに比例するので巨視的にも

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \tag{4·57}$$

となることが予想されるが，この証明はたやすい．したがって巨視的な電磁界に対するエネルギ運動量テンソルは*Minkowski*のそれと異なって対称になり，物理的に納得がいく．

最後に電子集団に対する巨視的な力学的エネルギ関係式を求める．電磁エネルギと同様に複雑な計算の後つぎのように求められる．

$$\frac{\mu}{c^2} N \left[\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \cdot \frac{W_0^{\,k} \overline{v^2 v^\alpha}}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{W_0^{\,k} \overline{v^2}}{2} \right] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{4·58}$$

巨視的な力学的エネルギ密度は

$$T = \frac{\mu N W_0^{\,k} \overline{v^2}}{2 c^2}, \tag{4·59}$$

であるから，力学的なエネルギの流れの密度$\mathbf{F}$は

$$\mathbf{F} = \frac{\mu N W_0^{\,k}}{2c^2}\,\overline{v^2\mathbf{v}}\ , \tag{4・60}$$

と解釈される．したがって電磁－力学全系に対するエネルギの保存則が式（4・54）と（4・58）よりつぎのように求まる．

$$\nabla\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial t}(W+T) = 0 \tag{4・61}$$

ここで用いた統計的手法は運動方程式およびエネルギ関係式だけでなく，さらに高い次数の関係式，たとえばストレスの保存則を力学系および電磁気系に対して求めることができる．しかし実際にはそれらの関係式は重要とは思われない。

4・5・3　誘電体，運動媒質および相対論的電子ビーム

ここではいままでよく知られている誘電体，電子ビームおよび最近よく研究されるようになった運動媒質の電磁気的性質を前節で定式化した‘統計電磁気学’の立場からどのように解釈されるかについて述べる．

はじめにA.で誘電体および運動媒質を考える．誘電体は周知のように電気的に全体として中性の物質に外部より電磁界を印加するとその物質が分極され，物質内部の電磁界が真空中のそれと異なるような物質をいうのであるが，前節で定式化した‘統計電磁気学’の微視的モデルは電子という負の電荷をもつ粒子に対する理論である．したがってこの理論を誘電体に応用するためには多少の理論的考察が必要になる．まず交流電磁界が印加されている媒質では原子核に束縛されている電子も，電子ビームあるいはプラズマのように電離している電子も本質的には区別できず，たんに時間おくれがどのような形で現われるかという違いのみがあることに注意する．このことは，磁性体を除くいかなる物質でもその電気的性質を等価な誘電率で表わすことが可能であることを示している．すなわち電子ビームにおいても交流分については誘電体と同じふるまいをする．したがってこの部分より誘電体に対する理論の拡張が行なわれよう．

つぎに*B*.では小信号線形近似の電子ビーム理論について考察する．従来の電子ビーム理論で最もよく知られた定理として*Chu*が最初に定式化した*Kinetic Power*定理があるが，この定理が統計電磁理論の立場からどのように解釈されるかについて考える．ここで最も重要なことは4・5・2節で誘導した厳密なエネルギ関係式より求めた2次の線形化されたエネルギ関係式は，1次の線形化された電磁界方程式および運動方程式より求めたエネルギ関係式に，一般には一致しない点である．この点で従来*Poynting*定理のエネルギ変換密度$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$の項を物理的によく説明できなかったものと思われる．またここで*Minkowski*のエネルギ運動量テンソルが力学系のエネルギや運動量をも含んだ混合テンソルであることが一層明確になる．

A. 誘電体および運動媒質

まず分極電荷を4・5・1節で考えた電子集団より構成することからはじめる．分極電荷で本質的なことは，それをある空間にわたって積分すると0になることである．そのような量は電子集団に対しては一つしか考えられない．すなわちある微小距離$\mathbf{d}(t)$だけ離れた電子集団の電荷密度の差である．これは確かにある空間にわたって積分すると0になる．ゆえに分極電荷ρ_pをつぎのように定義する．

$$\rho_p(\mathbf{r},t)=eN\left(W_0^k(\mathbf{r},t)-W_0^k(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)\right) \qquad (4\cdot62)$$

ここでW_0^kは4・5・1節で定義した電子集団に対する一体確率密度関数，また$\mathbf{d}$は微小距離で時間の関数と考える．上式を$\mathbf{d}$について展開し1次の項のみを残すと

$$\rho_p(\mathbf{r},t)=-eN(\mathbf{d}\cdot\nabla)W_0^k(\mathbf{r},t)\ . \qquad (4\cdot63)$$

そこでいま分極ベクトル$\mathbf{P}$を

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}\cdot t)=eN\mathbf{d}\,W_0^k(\mathbf{r},t)\ , \qquad (4\cdot64)$$

と定義すると式(4・63)は

$$\rho_p=-\nabla\cdot\mathbf{P}\ , \qquad (4\cdot65)$$

と書かれる．

つぎに分極電流 $\mathbf{J}_p$ については，位置 $\mathbf{r}$ における電子集団が作る電流から位置 $\mathbf{r}+\mathbf{d}$ における電流を差引いたものと $\mathbf{d}$ そのものが時間的に変化することによって作られる電流の和として定義する．すなわち

$$\mathbf{J}_p(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}(\mathbf{r},t)-\mathbf{J}(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)+eN\dot{\mathbf{d}}W_0^k(\mathbf{r},t)\ . \quad (4\cdot66)$$

そこで $\mathbf{J}(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)$ を $\mathbf{d}$ の1次まで展開する．

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)&=eN\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)W_0^k(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)\\&=eN\left(\bar{\mathbf{v}}+(\mathbf{d}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{v}}\right)\left(W_0^k+(\mathbf{d}\cdot\nabla)W_0^k\right)\\&=eN\left(\bar{\mathbf{v}}W_0^k+\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{d}\cdot\nabla)W_0^k+W_0^k(\mathbf{d}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{v}}\right)\end{aligned}$$

これに $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)=eN\bar{\mathbf{v}}W_0^k$，式（4・63）および（4・64）を用いると，上式は

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)-\mathbf{J}(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)&=\rho_p\bar{\mathbf{v}}-(\mathbf{P}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{v}}\\&=-\bar{\mathbf{v}}\nabla\cdot\mathbf{P}-(\mathbf{P}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{v}}\ .\end{aligned} \quad (4\cdot67)$$

よって，式（4・66）のはじめの2項は，もし $\bar{\mathbf{v}}=$一定なら対流電流 $\rho_p\bar{\mathbf{v}}$ を作ることがわかる．つぎに式（4・66）の第3項は電子集団に対する連続の式（4・42）を用いると

$$\begin{aligned}Ne\dot{\mathbf{d}}W_0^k&=\frac{\partial}{\partial t}\left(eN\mathbf{d}W_0^k\right)-eN\mathbf{d}\frac{\partial W_0^k}{\partial t}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(eN\mathbf{d}W_0^k\right)+eN\mathbf{d}\left((\bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla)W_0^k+W_0^k\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}\right)\\&=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{P}+\mathbf{P}\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}\ .\end{aligned} \quad (4\cdot68)$$

結局式（4・66）は（4・67）と（4・68）より

$$\mathbf{J}_p=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+(\bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla)\mathbf{P}+\mathbf{P}\cdot\nabla\cdot\bar{\mathbf{v}}-(\mathbf{P}\cdot\nabla)\bar{\mathbf{v}}-\bar{\mathbf{v}}\nabla\cdot\mathbf{P}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{P} \times \bar{\mathbf{v}}) . \qquad (4\cdot69)$$

したがって，分極電荷に対しても式（４・６５）および（４・６９）より連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0 , \qquad (4\cdot70)$$

が成り立つ．式（４・６５）および（４・６９）は*Chu*および*Panofshy-Phillips*によって誘電体の場合に求められている．このようにして我々は負の電荷を持つ電子集団より正味の電荷０である誘電体に理論を拡張できた．したがって，*Chu*と同じ考えにより，誘電体が電子集団と別に存在する場合には，誘電体に対する*Hamiltonian*を考えるまでもなく式（4・50b）の右辺に$\mathbf{J}$のほかにさらに$\mathbf{J}_p$を加えることができる．すなわち

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (4\cdot71a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_p + \frac{1}{c} \mathbf{J} . \qquad (4\cdot71b)$$

上式に式（４・６９）を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{J} , \qquad (4\cdot72a)$$

ここで

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{P} \times \bar{\mathbf{v}} \qquad (4\cdot72b)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} . \qquad (4\cdot72c)$$

式（４・７１）は我々がさきに定式化した基礎方程式であり，[31]式（4・71a）と（4・72a）はよく知られるように*Minkowski*理論の基礎方程式である．しかし４・５・２節ですでに述べたように*Minkowski*が定義した*Poynting*ベ

クトル c ($\mathbf{E}\times\mathbf{B}$) は真の電磁エネルギの流れの密度を表わさず，粒子の力学的なエネルギの流れをも含んでいるが，この点はもう一度B.で考える．しかし実際の問題が与えられた場合の境界条件はこれに反して式(4·17a)，(4·72 a) から積分表示によって求めるのが正しいであろう．何故なら式(4·71 b) の $\mathbf{J}_p$ にはすでに回転的な部分が含まれており，これが境界で一般には0にはならないからである．

B. 小信号電子ビーム理論およびエネルギ関係式

いま電子集団の平均の速度 $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ が時間および空間に無関係な直流速度 $\mathbf{v}_0$ とそれらに関係する交流速度 $\mathbf{v}_1$ ($\ll\mathbf{v}_0$) の和として表わされる，いわゆる小信号近似の場合を考える．すると，電流密度 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_0+\mathbf{J}_1=eN(\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1)\left(W_{0d}^{k}+W_{0a}^{k}\right),$$

より

$$\mathbf{J}_0=en\mathbf{v}_0 \qquad \left(n=NW_{0d}^{k}\right) \tag{4·73a}$$

$$\mathbf{J}_1=e\left(N\mathbf{v}_0W_{0a}^{k}+n\mathbf{v}_1\right), \tag{4·73b}$$

n は単位体積当りの電子数である．W_{0a}^{k} を W_0^{k} の1次の展開項とみなすと eNW_{0a}^{k} はたんに ρ_p と考えてよいであろう．同様に $n\mathbf{v}_1$ は $N\mathbf{d}W_0^{k}$ と考えてよいであろう．そこで，上式右辺第2項にふたたび式(4·68)を用いると

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_1-\rho_p\mathbf{v}_0=en\mathbf{v}_1&=eNW_0^{k}\,\dot{\mathbf{d}}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(eNW_0^{k}\mathbf{d}\right)+(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)eN\mathbf{d}W_0^{k}\\&=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}+(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{P},\end{aligned} \tag{4·74}$$

ここで2次以上の項は無視した．一方，式(4·69)より小信号近似の場合には

$$\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v}_0=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{P}. \tag{4·75}$$

したがって，式（4・74）と（4・75）より

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_p \quad . \tag{4・76}$$

そこで，*Maxwell* の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \tag{4・77 a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J}_0 \tag{4・77 b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \tag{4・78c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J}_p \quad . \tag{4・78d}$$

もし上式に式（4・75）を代入すると

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t} \quad , \tag{4・79a}$$

ここで

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c}\mathbf{P} \times \mathbf{v}_0 \tag{4・79 b}$$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{P} \quad . \tag{4・79 c}$$

したがって，式(4・78 a) と (4・79 b) より，電子ビームの微小交流分については誘電体と同じ取り扱いができることがわかった．こういう意味で*Minkowski* の運動媒質理論が誘電体をとわずいかなる分散性媒質にも小信号近似に関する限り適用できるものと思われる．つぎに運動方程式はストレステンソル

$$\bar{\Psi} = N W_0^{\,k} \frac{\mu}{c^2} \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'} \tag{4・80a}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \quad , \tag{4・80b}$$

が0の場合には,[29] 線形近似の範囲で，式（4・51）より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_1=\frac{1}{en}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)^2\mathbf{P}$$

$$=\frac{c^2}{\mu}e\left(\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0\right)\cdot \qquad (4\cdot81)$$

エネルギ関係式も同様に0次から高次まで書きおろされるがここでは2次式についてのみ考えることにする．

$$\varepsilon=\frac{c^2}{2\mu}N\bar{W}_0^{\,k}\ \overline{v'^2} \qquad (4\cdot82a)$$

$$\mathbf{q}=\frac{c^2}{2\mu}N\bar{W}_0^{\,k}\ \overline{\mathbf{v}'v'^2}\ , \qquad (4\cdot82b)$$

および式（4・80a）を無視すると,[29] 式（4・54）と（4・58）より

$$c\nabla\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{B}_1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(E_1^2+B_1^2)=-\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{J}_p \qquad (4\cdot83a)$$

$$\frac{\mu}{c^2}\left(n\mathbf{v}_1+\frac{\rho_p}{e}\mathbf{v}_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_1$$

$$=\frac{\mu\mathbf{J}_p}{c^2e}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_1=\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{J}_p\ . \qquad (4\cdot83b)$$

しかし上式のエネルギ関係式は式（4・80），（4・81）で与えられる1次の *Maxwell* の方程式および運動方程式と同時には成立しない．何故なら式（4・83b）を（4・81）を用いて計算すると

$$\frac{\mu\mathbf{J}_p}{ec^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_1=\frac{\mu\mathbf{J}_pc^2e}{c^2e\mu}\left(\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1\right)$$

$$=\mathbf{J}_p\cdot\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{J}_p\cdot(\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1)\ (\mathbf{B}_0=0)\ . \qquad (4\cdot84)$$

したがって，$1/c\,\mathbf{J}_p\cdot(\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1)$ だけ式（4・83b）の右辺と異なるがこの項は一般に0ではない．$\mathbf{v}_0$ と同じ方向に *bunching* された電子集団，たとえ

ば進行波管，などではこの項は0となる．この項がいままで電子と電磁界とのエネルギ変換を考える場合にエネルギ変換密度$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_p$の物理的解釈を困難にしていたものと考えられる．したがってこの項を考慮すると以下にみられるように$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_p$の物理的解釈が明確になる．

そこでまず，調和振動子のエネルギからはじめる．調和振動子に対する運動方程式は式（4・16）の形で与えられる．

$$\dot{p} + \nu^2 q = f \qquad (p = \dot{q}) , \tag{4·85}$$

ここでqは座標，pは運動量である．fはこの振動子に外部から働く力である．上式にpをかけると

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} p^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \nu^2 q^2 = pf - \nu^2 pq + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \nu^2 q^2 = pf$$

$$= \frac{d(qf)}{dt} - q \cdot \frac{df}{dt} \quad . \tag{4·86}$$

左辺はこの振動子が持つ全エネルギの単位時間当りの増分である．したがって右辺は単位時間に外部より加えられるエネルギに等しい．そこで誘電体にもどると，上式のqに相当するのがpである．よって電磁界が電子集団に与えるエネルギの単位時間当りの増分はまず上式右辺第1項に相当する項として

$$\frac{D}{Dt} \left\{ \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1 \right) \right\} \quad , \tag{4·87 a}$$

ここでD/Dtは実質微分係数で

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \quad .$$

さらに対流電流に対するエネルギ

$$\rho_p \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}_1 = -(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{v}_0) \nabla \cdot \mathbf{P} \quad , \tag{4·87 b}$$

それに式（4・86）の右辺第2項に相当する式

$$-\mathbf{P}\frac{D}{Dt}\left(\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1\right), \qquad (4\cdot87\,c)$$

以上で求まるはずであるが，すでにみたように2次のエネルギ関係式と1次の*Maxwell*の方程式および運動方程式から導びいたエネルギ関係式は式(4・84）の右辺第2項だけの違いがあるので上式に

$$-\frac{1}{c}\mathbf{J}_p\cdot(\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1)=-\frac{1}{c}(\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_1)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{P}, \qquad (4\cdot87)$$

を加えると式（4・87）全体は確かに

$$\mathbf{J}_p\cdot\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\nabla\times(\mathbf{P}\times\mathbf{v}_0)\right), \qquad (4\cdot88)$$

となることがわかる．したがって，式（4・83a）の右辺は物理的によく解釈されることになる．しかし，実際の問題を解く場合に，いつもこのように力学系と電磁気系とを分離しておく必要はない．むしろ本質的には媒質中では力学系と電磁気系を同時に求めねばならないので解きやすい様にしておく方が都合がよい．その意味で式（4・78a）および（4・79a）よりエネルギ関係式を求めてもよい．これを行なうと通常の方法を用いて，*Minkowski*と同様

$$c\nabla\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(E_1^2+H_1^2)=-\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\cdot\left(\mathbf{E}_1+\frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{H}_1\right), \qquad (4\cdot89)$$

と求まる．この場合には右辺の物理的意味は明確ではないしまた左辺も電磁－力学両系を同時に含んだ形になっている．その意味で*Minkowski*のエネルギ運動量テンソルは便利であるが，すでにみたように，これは電磁系だけに対するテンソルでないことに注意する．したがって*Minkowski*のテンソルが非対称であってもさしつかえない．

さらに上式より導びいた*Kinetic Power*定理は，[32] 電磁力学両系を含んだ定理として有効である．

4・6 結　　言

本章では従来の巨視的電磁理論で種々知られていた疑問を，微視的電磁理論に統計的操作をほどこすことによって定式化した一つの巨視的電磁理論から解決することを試みた．その結果，従来，特に知られていた巨視的電磁一力学エネルギに対する疑問のほとんどが説明できるものとなった．また本理論の応用として電子集団と電磁界との相互作用の系を誘電体，運動媒質，さらに小信号電子ビームの系に拡張した．その結果，運動媒質，電子ビームに対しては交流分に関する媒質の電磁気的効果は分極ベクトルとして考えうることが明らかとなった．さらにこの場合のエネルギ関係式を求めその物理的解釈を明確にした．

ここで定式化した統計電磁理論は微視的理論との直接的関連および論理的統一性という点で，従来の巨視的電磁理論に優るものと思われる．特にここでは考えなかったが磁性体との関連においてこの点がより一層明確になるものと思われる．しかし磁性は本質的に量子力学的現象であり定式化に多少の変更か，あるいは別の定式化が必要になるものと考えられる．

第5章　運動プラズマおよび相対論的電子ビーム理論

5・1　序　　言

本章は第3章および第4章の応用について述べる．第1の例は圧縮性運動磁化プラズマ中の*Cerenkov*放射で，プラズマの運動の効果が分散式および放射電力にどう影響するかを調べたものである．本例は大気圏あるいは電離層中を高速度で飛行するロケットのまわりにできるプラズマシース内に発生する低周波数領域の放射の現象[5]の解明に役立つものと思われる．

第2の例は非常に大きな増巾率が得られるビームプラズマ増巾器における電子ビームの相対論的効果を調べたものである．これは2ビーム不安定性の特別な場合である．

5・2　運動プラズマの媒質定数

媒質が圧縮性でない場合の誘電率および透磁率を求める方法は3・3・2節で詳しく考察した．ここでは，異方性，圧縮性運動媒質の一例である圧縮性運動磁化プラズマの電気パラメータを求める．

いま $\mu^0 = m^0 N \gg p/c^2$（μ^0：固有質量密度，p：圧力）とすると完全流体に対する相対論的運動方程式は4次元形式でつぎのように表わされる．[33]

$$\mu^0 \frac{dU_i}{d\tau} = f_i^{\mathrm{ext}} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad (5\cdot1)$$

ここで

$$U_i = \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \qquad (5\cdot2)$$

$$f_i^{\mathrm{ext}} = f_k F_k = \left(\rho_p \mathbf{E}_t + \mathbf{J}_p \times \mathbf{B}_t, \frac{i}{c} \mathbf{J}_p \cdot \mathbf{E}_t \right), \qquad (5\cdot3)$$

U_i は4元速度，f_i^{ext} は4元*Lorentz*力である．また $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{B}_t$ は外部静電

磁界を含めた全体の電磁界である．4元電流密度J_{pi}は4元速度とつぎの関係がある．

$$J_{pi} = \rho_p^0 U_i = (\rho_p \mathbf{u}, ic\rho_p), \qquad (5\cdot4)$$

ここで固有電荷密度は

$$\rho_p^0 = -eN = \rho_p \sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad (5\cdot5)$$

質量および電荷に対する連続の方程式は

$$\frac{\partial(\mu^0 U_i)}{\partial x_i} = -\frac{m^0}{e}\frac{\partial J_{pi}}{\partial x_i} = 0, \qquad (5\cdot6)$$

ただし

$$\mu^0 = \mu \sqrt{1 - u^2/c^2}. \qquad (5\cdot7)$$

そこで式（5・1）および（5・6）を3次元表示で書く．まず式（5・6）は

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot \mu\mathbf{u} = 0 \qquad (5\cdot8)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0. \qquad (5\cdot9)$$

式（5・1）は

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 \qquad (5\cdot10)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \mathbf{E}_0, \qquad (5\cdot11)$$

を用いると，小信号近似の範囲で

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{J}_p \fallingdotseq -\frac{e\rho_p^0}{m^0}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} + \frac{(\mathbf{J}_p - \rho_p\mathbf{v})\times\mathbf{B}_0}{\rho_p} - \frac{\nabla p}{\rho_p}\right) \qquad (5\cdot12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\rho_p=-\frac{e\rho_p^0}{m^0}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}}{c^2}+\frac{(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}_0}{c^2\rho_p}+\frac{1}{c^2\rho_p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\right). \tag{5・13}$$

そこで，式（5・12）−（5・13）$\mathbf{v}$を作ると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})=-\frac{e\rho_p^0}{m^0}\left(\mathbf{E}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\nabla p}{\rho_p}\right.$$
$$\left.+\frac{(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\times\mathbf{B}_0}{\rho_p}-\frac{\mathbf{v}\{(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}_0\}}{c^2\rho_p}-\frac{\mathbf{v}}{c^2\rho_p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\right). \tag{5・14}$$

いま

$$\omega_p^2=-\frac{e\rho_p^0}{m^0\varepsilon_0},\quad \omega_c=\left|\frac{e\rho_p^0 B_0}{\gamma m^0\rho_p}\right|,\quad \mathbf{E}_c=-\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0 \tag{5・15}$$

を用い，式（5・14）に第3章式（3・45）を代入すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)^2\mathbf{P}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\frac{\omega_c}{\gamma}\left[\mathbf{P}\times\mathbf{i}_{B_0}-\left(\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\mathbf{v}\times\{\mathbf{v}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{i}_{B_0})\}\right]$$
$$=\varepsilon_0\omega_p^2\left[\mathbf{E}-\frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})}{c^2}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\frac{\nabla p}{\rho_p}-\frac{\mathbf{v}}{c^2\rho_p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}\right]. \tag{5・16}$$

上式が望ましい形の圧縮性運動磁化プラズマに対する相対論的運動方程式である．

つぎに状態方程式について考える．プラズマと共に運動する系ではよく知られるように，圧力と質量密度は比例し，比例定数は音速の2乗に等しい．すなわち，この系の量にはプライムをつけて表わすと

$$p'=\mu' a^2, \tag{5・17}$$

ここでaは音速である．実験室系の状態方程式は静止系のそれを*Lorentz*変換することによって得られるものと考える．すると式（5・17）に式（5・5）と（5・7）を代入し

$$p' = \frac{m^0}{e} a^2 (-\rho'_p). \qquad (5\cdot18)$$

上式を *Lorentz* 変換すると第3章式（3・45）を用いることによって

$$p = \frac{m}{e} a^2 \left[\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\gamma^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \right] (p = p', \ m = \gamma m^0) . \qquad (5\cdot19)$$

上式が我々の欲する状態方程式である．

5・3 *Cerenkov* 放射

ここでは一様に運動している線状電荷からの圧縮性運動磁化プラズマ中への *Cerenkov* 放射を考える．線状電荷は直交座標系を作る x 軸方向には一様で y 軸方向に一定速度 u で運動していると仮定する．したがって

$$q(\mathbf{r}, t) = q\delta(y - ut)\,\delta(z) \qquad (5.20a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}_y q u \,\delta(y - ut)\,\delta(z) . \qquad (5.20b)$$

上式を *Fourier* 変換すると

$$\mathbf{J} = \mathbf{i}_y q \delta(z) e^{iky} \left(k = \frac{\omega}{u} \right) . \qquad (5\cdot21)$$

また，式（5・16）は

$$-(\omega - vk)^2 \mathbf{P} - \frac{i(\omega - vk)\omega_c}{\gamma} \left[\mathbf{P} \times \mathbf{i}_{Bo} - \frac{\gamma^2 \mathbf{v} \times \{ \mathbf{v} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{i}_{Bo}) \}}{c^2} \right]$$

$$= \varepsilon_0 \omega_p^2 \left[\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla p}{\rho_p} + \frac{i w \mathbf{v}}{c^2 \rho_p} P \right] \qquad (5\cdot22)$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{v} \times \mathbf{P} . \qquad (5\cdot23)$$

状態方程式（5・19）は

$$\rho = \frac{m}{e} a^2 \left[\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\gamma^2} - \frac{i}{c^2} (\omega - vk) \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \right] , \qquad (5\cdot24)$$

ここで，$\mathbf{v}\cdot = v\,\partial/\partial y = i\,v\,k$ を用いた．

さて電磁界は（E_x, H_y, H_z）の組と（E_y, E_z, H_x）の組に分れるが前者は式（5・21）より0となる．したがって以下後者の組についてのみ考えることにする．複雑な計算の後，（H_y, p）の組に対する波動方程式がつぎのように得られる．[35]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(k'^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\omega'^2}{c^2} \right) \right] H_x + \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2 \gamma}{\varepsilon_1 \rho_p} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k'^2 \right] p = \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k' \right] J_y \qquad (5\cdot25)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(k'^2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} \cdot \frac{\omega_p^2}{a^2} \right) \right] p - \frac{\rho_p \varepsilon_2}{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_1) \gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k'^2 \right] H_x$$

$$= \frac{1}{\gamma \omega \varepsilon_0} \left[- \frac{\rho_p \varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} + \rho_p k' \right] J_y , \qquad (5\cdot26)$$

ここで

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\gamma^2 \left[(\omega - vk)^2 - \omega_c^2 \right]} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\omega_c \omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - vk) \left[(\omega - vk)^2 - \omega_c^2 \right]} \end{cases} \qquad (5\cdot27\,a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \qquad (5\cdot27\,b)$$

$$\begin{cases} k' = \gamma \left(k - \dfrac{\omega v}{c^2} \right) \\ \omega' = \gamma \left(\omega - vk \right) . \end{cases} \qquad (5\cdot27\,c)$$

式（5・25）と（5・26）は H_x と p とが結合していることを示す結合方

程式になっている．つぎにこれらの方程式の解を求める．式（５・２５），（５・２６）を空間成分について *Fourier* 変換し，ふたたび逆変換をすると

$$H_x = H_{xmo} + H_{xmp} \tag{5・28}$$

$$H_{xmo} = h_1(\omega')\ exp\left[i k y + i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo}'^2} - k'^2}\, z \right] \quad z > 0$$

$$H_{xmp} = h_2(\omega')\ exp\left[i k y + i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp}'^2} - k'^2}\, z \right] \quad z > 0 \ ,$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} h_1(\omega') = & \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} q i \left(k' - \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1} \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo}'^2} - k'^2} \right) + q i \left(\frac{c_{mo}'^2 k_p'^2}{\omega'^2} - 1 \right)}{2(1-\beta)\left(1 - \frac{c_{mo}'^2}{c_{mp}'^2}\right) \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo}'^2} - k'^2}} \\ & \frac{\left(i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp}'^2} - k'^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k' \right)}{} \\ h_2(\omega') = & \frac{i q \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left(k' - \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1} \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp}'^2} - k'^2} \right) + i q \left(\frac{c_{mp}'^2 k_p'^2}{\omega'^2} - 1 \right)}{2(1-\beta)\left(1 - \frac{c_{mp}'^2}{c_{mo}'^2}\right) \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp}'^2} - k'^2}} \\ & \frac{\left(i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp}'^2} - k'^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} k' \right)}{} \ . \end{aligned} \right. \tag{5・29}$$

つぎに圧力は

$$p = p_{mo} + p_{mp} \tag{5・30}$$

$$p_{mo} = p_1(\omega')\ exp\left[i k y + i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo'^2}} - k'^2}\ z \right]$$

$$p_{mp} = p_2(\omega')\ exp\left[i k y + i \sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp'^2}} - k'^2}\ z \right]$$

$$\left\{ \begin{aligned} p_1(\omega') &= \frac{i\rho_p q\left(\frac{c_{mo'^2} k_{e'^2}}{\omega'^2} - 1\right)\left(k' - \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1}\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo'^2}} - k'^2}\right) - \frac{i\rho_p q \varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1}}{2\gamma\omega\varepsilon_0(1-\beta)\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo'^2}} - k'^2\left(1 - \frac{c_{mo'^2}}{c_{mp'^2}}\right)}} \\ &\quad \frac{\left(i\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mo'^2}} - k'^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k'\right)}{} \\ p_2(\omega') &= \frac{i\rho_p q\left(\frac{c_{mp'^2} k_{e'^2}}{\omega'^2} - 1\right)\left(k' - \frac{i\varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1}\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp'^2}} - k'^2}\right) - \frac{i\rho_p q \varepsilon_2}{\varepsilon - \varepsilon_1}}{2\gamma\omega\varepsilon_0(1-\beta)\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp'^2}} - k'^2\left(1 - \frac{c_{mp'^2}}{c_{mo'^2}}\right)}} \\ &\quad \frac{\left(i\sqrt{\frac{\omega'^2}{c_{mp'^2}} - k'^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k'\right)}{}, \end{aligned} \right. \qquad (5\cdot31)$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned} c_{mp'^2} &= \omega'^2 (U + \sqrt{U^2 + W})^{-1} \\ c_{mo'^2} &= \omega'^2 (U - \sqrt{U^2 - W})^{-1} \\ \beta &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2}} \cdot \frac{\omega_c'}{\omega'} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (\omega_c = \gamma\omega_c) \\ U &= \frac{k_e'^2 + k_p'^2}{2(1-\beta)}, \quad W = \frac{k_e'^2 k_p'^2}{1-\beta} \\ k_e'^2 &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\omega'^2}{c^2}, \quad k_p'^2 = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_1} \cdot \frac{\omega_p^2}{a^2}. \end{aligned} \right. \qquad (5\cdot32)$$

添字*mo*は変形光学モードを，また*mp*は変形プラズマモードを表わしている．上式より分散式を計算し，その一例を図５・１に示した．

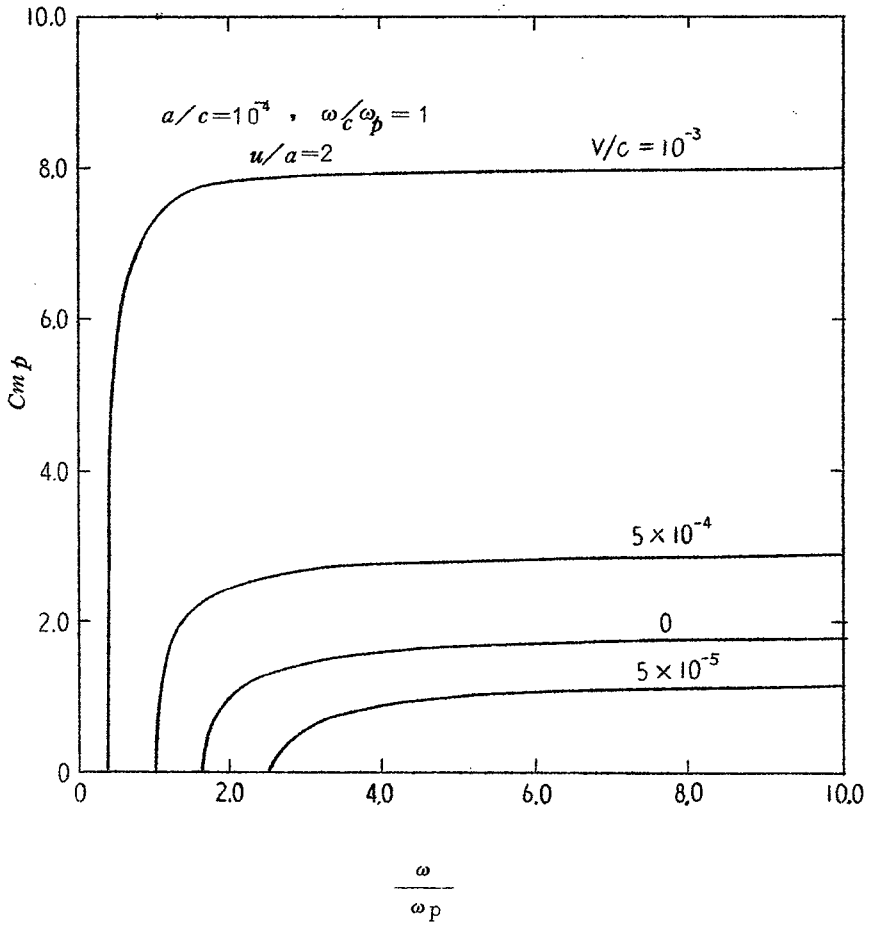

図５・１　*Cerenkov* 放射に対する分散式

これより，変形プラズマモードのみある周波数より上の領域で伝播することがわかる．

運動電荷の放射特性をしらべるためにはさらに周波数と角スペクトラムを求める必要がある．そのためにまず*Poynting*定理を求める．それは複雑な

計算の後つぎのようになる.[34]

$$\oint\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}+\frac{p}{\rho_p}\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\frac{\gamma^2\frac{\partial\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}}{\partial t}}{c^2}\mathbf{v}\right)\right]dS$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int\Big[\frac{1}{2}\Big\{\varepsilon_0\mathbf{E}^2+\mu_0\mathbf{H}^2-\frac{1}{\varepsilon_0\omega_p^{\,2}}(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})^2+\mu_0(\mathbf{v}\cdot\mathbf{P})^2-\mu_0\mathbf{v}^2\mathbf{P}^2$$

$$-\frac{e\gamma^2}{\rho_p ma^2}p^2+\frac{2\gamma^2}{\rho_p c^2}p\frac{\partial\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}}{\partial t}\Big\}+\frac{1}{\varepsilon_0\omega_p^{\,2}}\Big(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{c^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}}{\partial t}\mathbf{v}\Big)(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\Big]dV$$

$$+\int\gamma\omega_C\,\mathbf{i}_{B_0}\cdot[(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\times(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{P}]\,dV$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0\omega_p^{\,2}}\int(\mathbf{v}\cdot\nabla)\Big(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\frac{\gamma^2}{c^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}}{\partial t}\mathbf{v}\Big)(\mathbf{J}_p-\rho_p\mathbf{v})\,dV-\int\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dV \qquad (5\cdot33)$$

さて上式第1の積分は電磁およびポテンシャルエネルギを表わすと考えられる．第4の積分は運動電荷が供給する電磁エネルギを表わしている．第3の積分は一般化された *Ktnetic Powe r* を表わしている.[35] 最後に第2の積分は簡単な計算の後，やはり電磁エネルギを表わすと考えられる．よって上式左辺はこの体積より出て行くエネルギの流れを表わすと考えられる．したがって我々は *Poynting* ベクトルを周波数領域でつぎのように定義する．

$$\mathbf{S}=R_e\frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*+\frac{i\omega}{\rho_p}\Big(\mathbf{P}+\frac{\gamma^2(\mathbf{P}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v}\Big)^*p\Big]$$

上式に上で求めた界成分を代入し，複雑な計算の後 S_z および S_y が求められる．その1例を図5・2に示す．つぎに角スペクトラムは

$$I(\theta)=\frac{S_z/S_0}{\sin\theta\dfrac{d\theta}{d\Omega}},\quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_p}$$

$$\tan\theta=\frac{S_z}{S_y}\quad ,$$

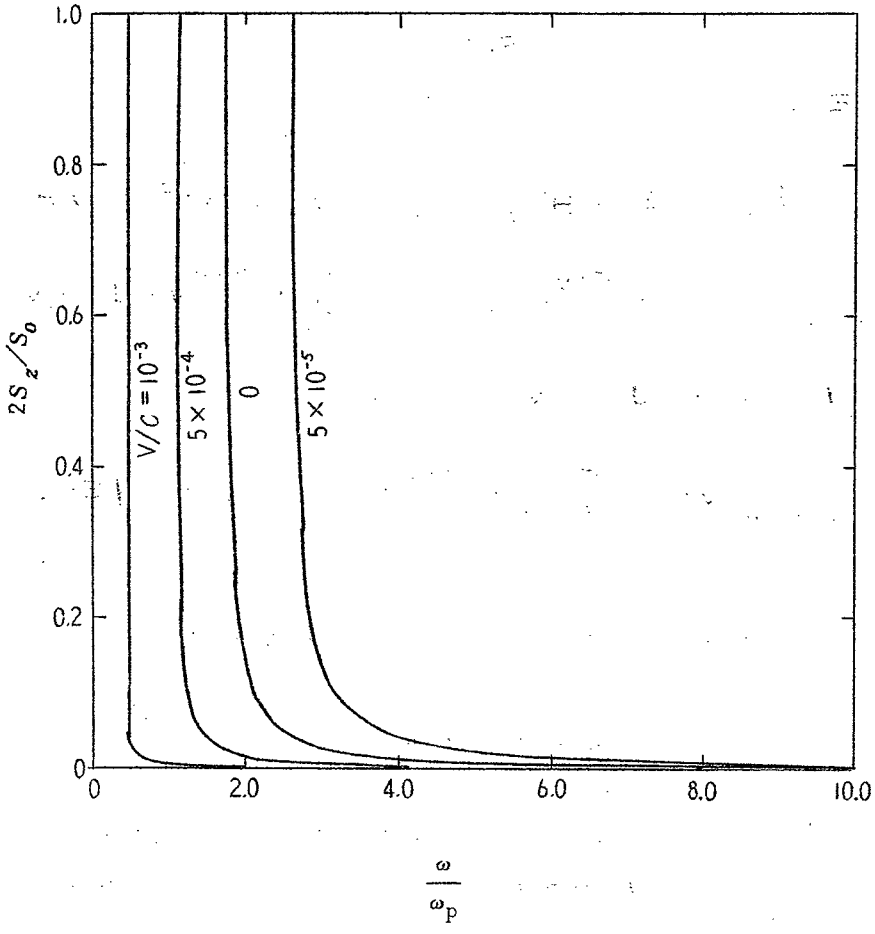

図5・2　周波数スペクトラム

で定義されるがこの数値計算例を図5・3に示す。

図5・1，2より運動プラズマの速度が音速に近ずくと共振のような現象を起すことがわかる。実際プラズマの速度が音速に等しいときには解は求まらない。

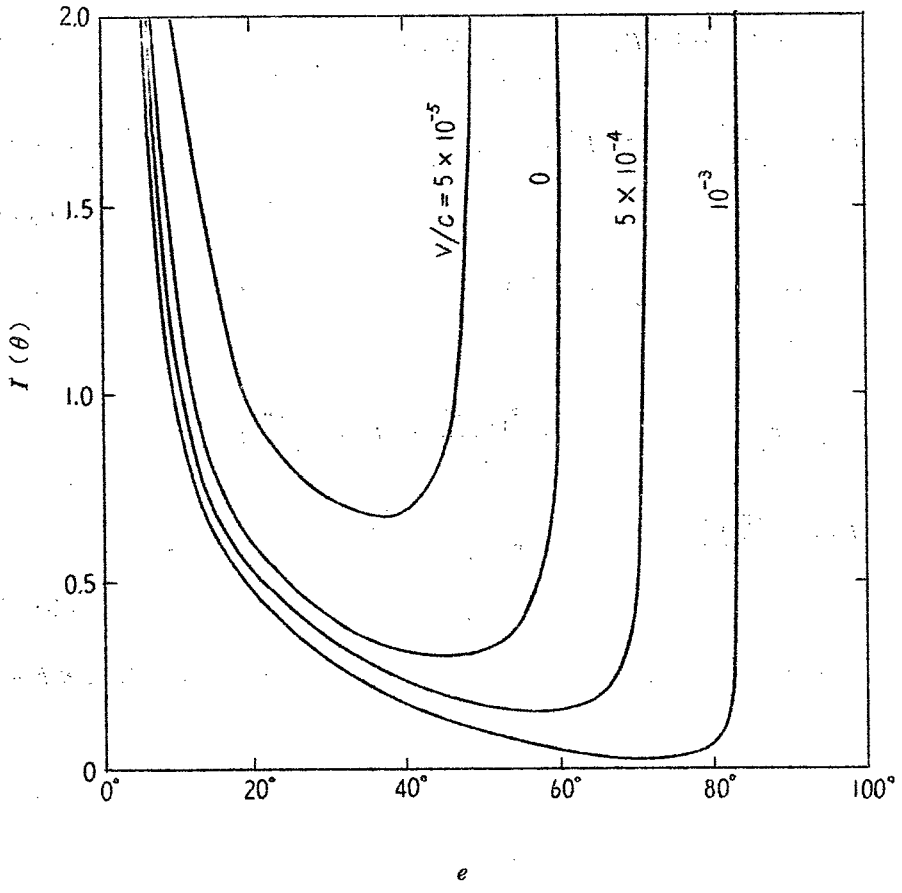

図５・３　角スペクトラム

５・４　ビームプラズマ増巾器

ここでは能動素子の一例としてビームプラズマ増巾器[36]について考える．ここで考えるビームは固体に対する応用も考えて，圧縮性の電子ビームであるとする．いまビームの流れの方向は z 方向であるとし，一次元模型 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ と考える．*Maxwell* の方程式と式（５・１６）よりつぎのような特性方程式を得る．

$$(\varepsilon_{2p}+\varepsilon_{1p}-1)E_z-\frac{\varepsilon_{1p}-1}{\rho_{p1}}\gamma^2 i\left(k-\frac{\omega v}{c^2}\right)p_1=0 \qquad (5\cdot34a)$$

$$i\left(k-\frac{\omega v}{c^2}\right)(\varepsilon_{1p}-1)E_z-\left\{\frac{e}{\varepsilon_0 m a^2}-\frac{(\varepsilon_{1p}-1)\gamma^2}{\rho_{p1}}\left(k-\frac{\omega v}{c^2}\right)^2\right\}\rho_1=0 \qquad (5\cdot34b)$$

ここで添字1はビームに関するもので，2はプラズマに関するものである．上式の0でない解は

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{2p}+\varepsilon_{1p}-1 & -\dfrac{\varepsilon_{1p}-1}{\rho_{p1}}\gamma^2 i\left(k-\dfrac{\omega v}{c^2}\right) \\ i\left(k-\dfrac{\omega v}{c^2}\right)(\varepsilon_{1p}-1) & -\dfrac{e}{\varepsilon_0 m a^2}+\dfrac{(\varepsilon_{1p}-1)\gamma^2}{\rho_{p1}}\left(k-\dfrac{\omega v}{c^2}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5\cdot35)$$

一般に a^2/c^2 は1に比して十分小さいのでこの項を無視し，上式を k について解くと

$$vk=\frac{1}{1-\dfrac{a^2}{v^2}}\left[w\pm\sqrt{\frac{\omega_{p1}^2}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\omega_{p2}^2}{\omega^2}\right)}+\frac{a^2}{v^2}\left(\omega^2-\frac{\omega_{p1}^2}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\omega_{p2}^2}{\omega^2}\right)}\right)}\right]. \qquad (5\cdot36)$$

もし $a=0$ なら，上式はよく知られたビームプラズマ増巾器の分散式の相対論的拡張になっていて $\omega<\omega_{p_2}$ で波の増巾および減衰がおこる．$a/c=10^{-3}$ の場合 v/c をパラメータにして上式を計算し図5・4に示した．

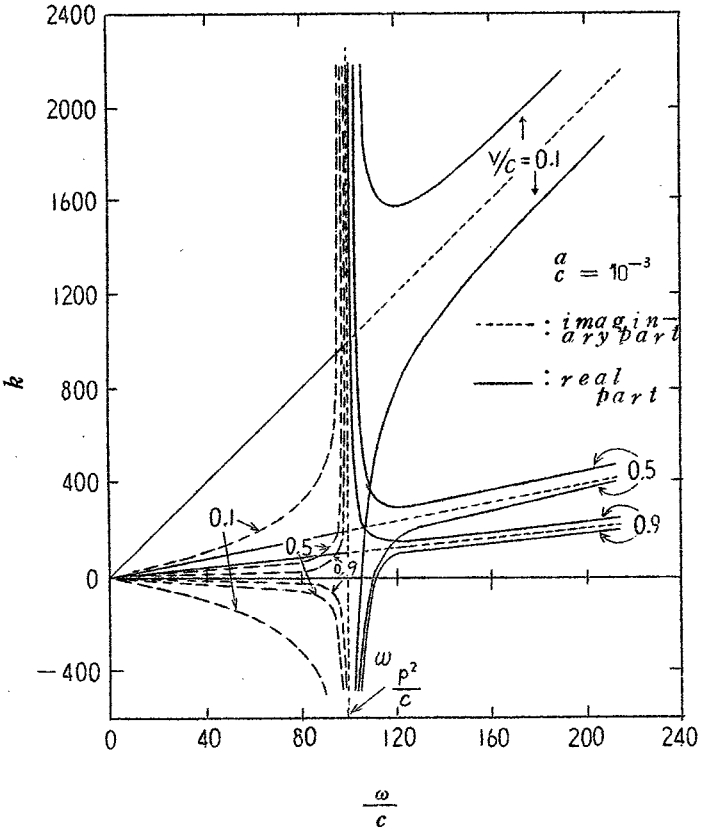

図５・４

５・５　結　　言

本章は一般的な運動媒質理論の応用について述べた．第１のものは圧縮性運動磁化プラズマ中の*Cerenkov* 放射で，第２のものはビームプラズマ増巾器である．その結果，一般に媒質の速度が電磁波の位相速度と等しくなる点と，圧縮性の媒質では音速と等しくなる点では，分数式および放射電力に特異性が現われることがわかった．

第6章　結　　論

本章は，この論文に関する結論で，本研究の成果を総括して述べたものである．

まず第1章において，静止媒質，運動媒質また分散性，異方性および圧縮性等，いかなる種類の媒質をも*Minkowski*に始まる一般的な運動媒質理論で考察することを提案し，そこに必要な基礎方程式について述べたものである．

第2章は*Minkowski*の最も簡単な運動媒質理論を分散性媒質にも適用できるようにするために*Chu*の*EH*形式と統一する必要のあることを指摘し，相互の矛盾および*Minkowski*形式自身の矛盾について考察し次章に役立てた．

第3章では，*Chu*の*EH*形式の基礎論理である電磁界と波源ベクトルの区別および相対性原理を基礎とした一つの巨視的電磁界方程式の定式化を行なった．その結果，*Minkowski*の運動媒質理論をいかなる媒質をも取り扱い得るように拡張できた．そしてそれを用いて分極電流模型と携帯電流模型の等価なことを証明した．

第4章は，統計理論を用いた統計電磁理論の定式化を行なった．本理論では従来の巨視的電磁理論とは異なって巨視的量の定義は一切必要なく，たんに媒質の微視的性質がわかっていれば巨視的量を統計操作によって求めることができる．本章ではさらに従来知られていた*Minkowski*のエネルギ運動量の非対称の疑問をも解明することができた．この統計電磁理論は，微視的理論との直接的関連および論理的統一性という点で従来の巨視的電磁理論に優るものと思われる．

第5章は，応用であり，圧縮性運動磁化プラズマ中の*Cerenkov*放射とビームプラズマ増巾器について考察した．前者は宇宙通信およびロケット－地球間等の通信の障害となるプラズマシースと電磁波の結合および低周波数領域における放射の解明に手がかりを与え，後者は2ビーム不安定性の特別な場合である．

謝　　辞

本研究の成果は，終始，御指導，御激励下さった大阪大学工学部板倉清保教授ならびに熊谷信昭助教授の御援助の賜物であり，ここに心からの謝意を表わす．

大学院在学中には，通信工学一般に関して御指導をいただいた大阪大学工学部青柳健次教授，笠原芳郎教授，滑川敏彦教授，大阪大学基礎工学部牧本利夫教授，藤沢和男教授，大阪大学産業科学研究所加藤金正教授ならびに松尾幸人教授に深謝する．

また，本研究に関していろいろと有益な討論ならびに数値計算に協力願った住友電工株式会社八木芳昭氏，日本電気株式会社中村圭次氏ならびに七里元宏氏に感謝する．

さらにまた，日頃より討論をして下さる大阪大学工学部板倉研究室の諸氏に御礼申し上げる．

文　　献

(1) *A. Sommerfeld*: "*Electrodynamics*", *Sec.* 34, *Academic Press, Inc., New York* (1952).

(2) *R. M. Fano, L. J. Chu, and R. B. Adler*: "*Electromagnetic fields, energy, and forces*", *chapters* 9, 10 *and appendix* 1, *John Wiley & Sons, Inc., New York* (1960).

(3) *W. K. H. Panofsky and M. Phillips*: "*Classical electricity and magnetism*", *chapters* 9 *and* 21, *Addison-Wesley* (1962).

(4) *L. D. Landau and E. M. Lifshitz*: "*Electrodynamics of continuous media*", *Oxford*: *Pergamon*; *Reading Mass.*: *Addison-Wesley* (1960).

(5) (*a*) *H. S. Tuan and S. R. Seshadri*: "*Radiation from a uniformly moving distribution of electric charge in an anisotropic compressible plasma*", *IEEE Trans., AP*-13, 1, *p.* 71 (*Jan.* 1965).

(*b*) _____: "*Radiation from a uniformly moving charge in an anisotropic plasma*", *IEEE Trans., MTT*-11, 6, *p.* 462 (*Nov.* 1963).

(6) *C. Møller*: "*The theory of relativity*", *Sec.* 72, *Oxford Univ. Press, London* (1952).

(7) *L. D. Landau and E. M. Lifshitz, op. cit., p.* 255.

(8) *H. Unz*: "*Drifting magneto-ionic theory for oblique incidence*", *IEEE Trans., AP*-13, *p.* 595 (*July* 1965).

(9) *W. P. Allis*: "*Propagation of waves in a plasma in a magnetic field*", *IRE Trans., MTT*-9, 1, *p.* 79 (*Jan.* 1961).

(10) 梅原忠利："電磁波序説"，第2章，コロナ社(昭38).

(11) *C. Møller, op. cit., Sec.* 72.

(12) *R. M. Fano, L. J. Chu, and R. B. Adler, op. cit., p.*493.

(13) *M. S. Cohen and K. J. Harte*: "*The Lorentz force*", *Proc. IEEE (Correspondence)*, 53, 8, *p.* 1145 (*Aug.* 1965).

(14) *D. L. Bobroff and H. A. Haus*: "*Orthogonality of modes of propagation in electronic waveguides*", *in Proceedings of the symposium on electronic waveguides, Vol. VIII, Polytechnic Press, Brooklyn, N. Y.* (1958).

(15) *M. Koyama*: "*On the polarization and the convection current models*", *Proc. IEEE (Letter)*, 55, 4, *p.* 579 (*April* 1967).

(16) *R. M. Fano, L. J. Chu, and R. B. Adler, op. cit., chapter* 5.

(17) *R. C. Costen and L. D. Staton*: "*Note on Maxwell's field equations and the constitutive equations*", *Proc. IEEE (Letter)*, 54, *p.* 1210 (*Sept.* 1966).

(18) *W. K. H. Panofsky and M. Phillips, op. cit., chapter* 21.

(19) *A. C.* Компонеец: "理論物理学", (日本語版) *p.* 161, モスクワ (1961).

(20) *L. J. Chu, H. A. Haus, and P. Penfield* "*The force density in polarizable and magnetizable fluids*", *Proc. IEEE*, 54, *p.* 920 (*July* 1966).

(21) *C. T. Tai*: "*Electrodynamics of moving anisotropic media: the first order theory*", *Radio Science*, 69D, 3, *p.* 401 (*March* 1965).

(22) *R. M. Fano, L. J. Chu, and R. B. Adler, op. cit., chapter* 1.

(23) *J. W. Gibbs*: "*Elementary principles in statistical mechanics*", (*New Heaven, reprint of* 1914).

(24) 後藤憲一：〃プラズマ物理学〃，第１２章，共立出版（昭42）．

(25) 後藤憲一，*ibid.*，第13章．

(26) ヤ・ペ・テルレッキー：〃統計物理学〃，（日本語版），第V章，東京図書(1967).

(27) *W. Heitler*: "*The quantum theory of radiation*", *chapter* 1, *Oxford Univ. Press* (1954).

(28) *C. Møller, op. cit., chapter V.*

(29) 後藤憲一，*op, cit.*

(30) *L. D. Landau and E. M. Lifshitz*: 〃統計物理学〃，（日本語版），第1章，岩波書店．

(31) 小山，板倉：〃運動媒質中の電気力学の統一理論〃，信学誌，*p.* 1940, *No.* 50 (昭42−10).

(32) *B. L. Bobroff and H. A. Haus and J. W. Klüver*: "*On the small signal power theorem of electron beams*", *J. A. P. Vol.* 33, 10, *p.* 2932 (1962).

(33) *C. Møller, op. cit., chapter VI.*

(34) 小山，板倉：〃運動している圧縮性磁化プラズマ中の電磁放射〃，信学会アンテナ伝播研究会（1967−08）．

(35) 小山，板倉：〃相対論的電子ビーム理論〃，信学会電装研究会（1967−04）．

(36) *P. Chorney*: "*Recent advances in beam-plasma amplifiers*", *IEEE Conv. Rec.*

付　　録

A.

$$F_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & -icB_x \\ E_z & 0 & -E_x & -icB_y \\ -E_y & E_x & 0 & -icB_z \\ icB_x & icB_y & icB_z & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\cdot A\cdot 1a)$$

$$H_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\cdot A\cdot 1b)$$

$$J_i=(J_x, J_y, J_z, ic\rho) \qquad (3\cdot A\cdot 1c)$$

$$K_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & -ic\mu_0 H_x \\ E_z & 0 & -E_x & -ic\mu_0 H_y \\ -E_y & E_x & 0 & -ic\mu_0 H_z \\ ic\mu_0 H_x & ic\mu_0 H_y & ic\mu_0 H_z & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\cdot A\cdot 2a)$$

$$J_{mi}=(J_{mx}, J_{my}, J_{mz}, ic\rho_m) \qquad (3\cdot A\cdot 2b)$$

$$J_{pi}=(J_{px}, J_{py}, J_{pz}, ic\rho_p) \qquad (3\cdot A\cdot 2c)$$

$$J=(J_x, J_y, J_z, ic\rho) \qquad (3\cdot A\cdot 2d)$$

$$M_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & P_z/\varepsilon_0 & -P_y/\varepsilon_0 & -ic\mu_0 M_x \\ -P_z/\varepsilon_0 & 0 & P_x/\varepsilon_0 & -ic\mu_0 M_y \\ P_y/\varepsilon_0 & -P_x/\varepsilon_0 & 0 & -ic\mu_0 M_z \\ ic\mu_0 M_x & ic\mu_0 M_y & ic\mu_0 M_z & 0 \end{bmatrix} \qquad (3\cdot A\cdot 3a)$$

$$J_{pti}=(J_{ptx}, J_{pty}, J_{ptz}, ic\rho_p) \qquad (3\cdot A\cdot 3b)$$

$$J_{mti}=(J_{mtx}, J_{mty}, J_{mtz}, ic\rho_m) \qquad (3\cdot A\cdot 3c)$$

$$L_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & -(E_z+P_z/\varepsilon_0) & E_y+P_y/\varepsilon_0 & -ic\,\mu_0 H_x \\ E_z+P_z/\varepsilon_0 & 0 & -(E_x+P_x/\varepsilon_0) & -ic\,\mu_0 H_y \\ -(E_y+P_y/\varepsilon_0) & E_x+P_x/\varepsilon_0 & 0 & -ic\,\mu_0 H_z \\ ic\,\mu_0 H_x & ic\,\mu_0 H_y & ic\,\mu_0 H_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3\cdot A\cdot 4a)$$

$$N_{ik}=\begin{bmatrix} 0 & H_z+M_z & -(H_y+M_y) & -ic\,\varepsilon_0 E_x \\ -(H_z+M_z) & 0 & H_x+M_x & -ic\,\varepsilon_0 E_y \\ H_y+M_y & -(H_x+M_x) & 0 & -ic\,\varepsilon_0 E_z \\ ic\,\varepsilon_0 E_x & ic\,\varepsilon_0 E_y & ic\,\varepsilon_0 E_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3\cdot A\cdot 4b)$$

B. 式（４・３０）に p_σ をかけて q_σ を除くすべての変数で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{p_\sigma}\,W_0^\sigma=\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\overline{p_\sigma^2}\,W_0^\sigma+\nu_\sigma^2 q_\sigma W_0^\sigma-W_0^\sigma\sum_{k=1}^{N}\int e\phi_\sigma(\mathbf{r}_{k'})W_0^k(\mathbf{r}_{k'},t)\,d\mathbf{r}_{k'},$$

上式に式（４・３９）を代入すると

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_\sigma W_0^\sigma+\frac{\partial^2}{\partial t\partial q_\sigma}q_\sigma\overline{p_\sigma}W_0^\sigma=\frac{\partial}{\partial q_\sigma}\overline{p_\sigma^2}\,W_0^\sigma+\nu_\sigma^2 q_\sigma W_0^\sigma$$
$$-W_0^\sigma\sum_{k=1}^{N}\int e\phi_\sigma(\mathbf{r}_{k'})W_0^k(\mathbf{r}_{k'},t)\,d\mathbf{r}_{k'}.$$

上式から式(43)が得られる.

C. 式(30)を p_λ, q_λ を除くすべての変数で積分すると

$$\frac{\partial W_1^\lambda}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial q_\lambda}p_\lambda W_1^\lambda+\nu_\lambda^2 q_\lambda\frac{\partial W_1^\lambda}{\partial p_\lambda}$$
$$+\int\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\mu}(c\mathbf{p}_{k'}-e q_{\lambda'}\mathbf{a}_{\lambda'})(-e\mathbf{a}_\lambda)w\,dX_{k'}\,d(X_{\lambda'}-q_\lambda p_\lambda)\,dX_{\sigma'}.$$

(4·C·1)

上式右辺の最後の項は

$$w(X_{k'}, X_{\lambda'}, X_{\sigma'}, t) = w(X_{k'}, t)\, w(q^{e}_{\lambda'}, t)\, w(p^{e}_{\lambda'}, t)\, W^{\lambda}_{1}(q_{\lambda}, p_{\lambda}, t) \cdot w(X_{\sigma'}, t),$$

とおくと

$$\int \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu} (c\mathbf{p}_{k'} - e q_{\lambda'} \mathbf{a}_{\lambda'})(-e\mathbf{a}_{\lambda})\, w(X_{k'}, t)\, w(q^{e}_{\lambda'}, t)\, W^{\lambda}_{1}(q_{\lambda}, p_{\lambda}, t) \cdot d_{1}X_{k}\, d(q_{\lambda'} - q_{\lambda})$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu} (c\mathbf{p}_{k'} - e <q_{\lambda'}>^{e} \mathbf{a}_{\lambda})(-e\mathbf{a}_{\lambda})\, w(X_{k'}, t)\, W^{\lambda}_{1}\, dX_{k'},$$

ここで $<q_{\lambda'}>^{e}$ は q_{λ} は含く．さらに上式で $X_{k'}$ のうち $\mathbf{p}_{k'}$ で積分すると

$$= \int \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} \sum_{k=1}^{N} \frac{W^{k}_{0}(\mathbf{r}_{k'}, t)}{\mu} (c\mathbf{p}_{k'} - e <q_{\lambda'}>^{e} \mathbf{a}_{\lambda})(-e\mathbf{a}_{\lambda}) d\mathbf{r}_{k'}\, W^{\lambda}_{1}.$$

そこで上式を式（4・C・1）に代入し式（4・38）を用い p_{λ} をかけて積分する．しかる後 q_{λ} で積分すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} <q_{\lambda}> + \nu_{\lambda}^{2} <q_{\lambda}> = \sum_{k=1}^{N} \int \frac{W^{k}_{0}}{\mu} e\mathbf{a}_{\lambda} (c\mathbf{p}_{k'} - e <q_{\lambda'}> \mathbf{a}_{\lambda'})\, d\mathbf{r}_{k'}.$$

以下の誘導はΦと同様である．

D．電子に対しては $c p_{k}{}^{\beta} - e q_{\lambda'} a_{\lambda'}{}^{\beta}$ をかけて積分すると

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (c p_{k}{}^{\beta} - e q_{\lambda'} a_{\lambda'}{}^{\beta})\, w(\mathbf{r}_{k}, \mathbf{p}_{k}, q_{\lambda'}, t)\, d\mathbf{p}_{k}\, dq_{\lambda'}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{3} \left[\int -(c p_{k}{}^{\beta} - e q_{\lambda'} a_{\lambda'}{}^{\beta}) \frac{\partial}{\partial r_{k}{}^{d}} \frac{c}{\mu} w(\mathbf{r}_{k}, \mathbf{p}_{k}, q_{\lambda'}, t)(c p_{k}{}^{\alpha} - e q_{\lambda'} a_{\lambda'}{}^{\alpha}) \cdot d\mathbf{p}_{k}\, dq_{\lambda'} \right.$$

$$+\int(c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\beta}-e\,q_{\lambda'}\,a_{\lambda'}{}^{\beta})\frac{\partial}{\partial\,p_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\Big\{e<q_{\sigma'}>\frac{\partial\phi_{\sigma'}}{\partial r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}+\frac{-e}{\mu}\,q_{\lambda'}\frac{\partial\mathbf{a}_{\lambda'}}{\partial r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}(c\mathbf{p}_{\mathrm{k}}-e\,q_{\lambda'}\mathbf{a}_{\lambda'})\Big\}$$
$$w\,(\mathbf{r}_{\mathrm{k}},\,\mathbf{p}_{\mathrm{k}},\,q_{\lambda'},\,t)\,d\mathbf{p}_{\mathrm{k}}\,dq_{\lambda'}\Big]$$

$$+\sum_{\lambda'}\int-(c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\beta}-e\,q_{\lambda'}\,a_{\lambda'}{}^{\beta})\frac{\partial w(\mathbf{r}_{\mathrm{k}},\,\mathbf{p}_{\mathrm{k}},\,q_{\lambda'},\,t)\,p_{\lambda'}}{\partial q_{\lambda'}}\,d\mathbf{p}_{\mathrm{k}}\,dq_{\lambda'}\,.$$

よって一度部分積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\overline{c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\beta}}-e<q_{\lambda'}>a_{\lambda'}{}^{\beta}\}\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}(\mathbf{r}_{\mathrm{k}},\,t)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{3}\Big[-\frac{\partial}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\frac{c}{\mu}\overline{(c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\beta}-e<q_{\lambda'}>a_{\lambda'}{}^{\beta})(c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}-e<q_{\lambda'}>a_{\lambda'}{}^{\alpha})}\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}$$

$$-e<q_{\lambda}{}^{2}>\frac{\partial\,a_{\lambda'}{}^{\beta}}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\cdot\frac{c}{\mu}(\overline{c\,p_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}-e<q_{\lambda'}>a_{\lambda'}{}^{\alpha})\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}\Big]$$

$$-c\Big\{e<q_{\sigma'}>\frac{\partial\phi_{\sigma'}}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\beta}}+\frac{-e}{\mu}<q_{\lambda'}>\frac{\partial\mathbf{a}_{\lambda'}}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\beta}}(c\overline{\mathbf{p}_{\mathrm{k}}}-e<q_{\lambda'}>\mathbf{a}_{\lambda'})\Big\}\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}$$

$$-e\,a_{\lambda'}{}^{\beta}<\overline{p_{\lambda'}}\,W_{\mathrm{o}}^{\lambda}>W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}\quad,$$

上式で$<q_{\lambda}{}^{2}>=<q_{\lambda}>^{2}$と仮定した．さらに最後の項は$q_{\lambda}$について積分することを意味する．

上式にcをかけてμで割ると

$$\frac{\mu}{c^{2}}\Big[\frac{\partial}{\partial\,t}\overline{v^{\beta}}\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\overline{v_{\mathrm{k}}{}^{\beta}\,v_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}\Big]$$

$$=e\,W_{\mathrm{o}}^{\mathrm{k}}\Big[-\frac{1}{c}\frac{\partial A^{\beta}}{\partial\,t}-\frac{\partial}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\beta}}\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial A^{\beta}}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}\overline{v_{\mathrm{k}}{}^{\alpha}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\,r_{\mathrm{k}}{}^{\beta}}\overline{\mathbf{v}_{\mathrm{k}}}\Big]\,.$$

上式が運動方程式になっているのを確かめるのはたやすい．たとえばいま$\beta=x$とおくと

$$\frac{\mu}{c^2}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\overline{V_x}\,W_0^k+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r^\alpha}\overline{v_x v^\alpha}\,W_0^k\Big]$$

$$=eW_0^k\Big[-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\Phi-\frac{1}{c}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}\overline{v_x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\overline{v_y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\overline{v_z}\Big)$$

$$+\frac{1}{c}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial x}\overline{v_x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\overline{v_y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\overline{v_z}\Big)\Big]$$

$$=eW_0^k\Big[-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{c}\Big\{\overline{v_y}\Big(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)$$

$$-\overline{v_z}\Big(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\Big)\Big\}\Big]$$

$$=eW_0^k\Big[E_x+\frac{1}{c}(\overline{\mathbf{v}}\times\mathbf{B})_x\Big].$$

E. 電磁エネルギについては調和振動子に対する正準変数はすべて

$$<p^2>=<p>^2$$
$$<q^2>=<q>^2\ ,$$

と仮定する．まず式（4・30）に $p_\lambda p_{\lambda'}$ をかけて積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}<\overline{p_\lambda}\,W_0^\lambda><\overline{p_{\lambda'}}\,W_0^{\lambda'}>=-<\overline{p_{\lambda'}}\,W_0^{\lambda'}>\Big[\nu_\lambda^2<q_\lambda>$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\frac{W_0^{k'}}{\mu}(c\,\overline{\mathbf{p}_{k'}}-e<q_{\chi'}>\mathbf{a}_{\chi''})(-e\mathbf{a}_\lambda)\,d\mathbf{r}_{k'}$$

$$=<\overline{p_\lambda}\,W_0^\lambda>\Big[\nu_{\lambda'}^2<q_{\lambda'}>+\sum_{k=1}^{N}\int\frac{W_0^{k'}}{\mu}(c\,\overline{\mathbf{p}_{k'}}-e<q_{\chi''}>\mathbf{a}_{\lambda''})(-e\mathbf{a}_{\lambda'})\,d\mathbf{r}_{k'}\ ,$$

そこで $\mathbf{a}_\lambda\,\mathbf{a}_{\lambda'}$ をかけて λ, λ' について加えると直交条件を用いて最後の項は

$$-\frac{eN}{\mu}c^2W_0^k\,(c\,\overline{\mathbf{p}}-e\,\mathbf{A})\ ,$$

となるので

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}<q_\lambda>\mathbf{a}_\lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}<q_{\lambda'}>\mathbf{a}_{\lambda'}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}<q_{\lambda'}>\mathbf{a}_{\lambda'}\left[\nu_\lambda^2<q_\lambda>\mathbf{a}_\lambda - ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}<q_\lambda>\mathbf{a}_\lambda\left[\nu_{\lambda'}^2<q_{\lambda'}>\mathbf{a}_{\lambda'} - ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right].$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2=-2\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\left(-c^2\nabla^2\mathbf{A} - ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right). \qquad (4\cdot E\cdot 2)$$

つぎに $p_{\lambda'}\ q_{\sigma'}$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}<\overline{p_{\lambda'}}\ W_0^{\lambda'}><q_{\sigma'}>=-<q_{\sigma'}>\left[\nu_{\lambda'}^2<q_{\lambda'}>\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\int\frac{W_0^{k'}}{\mu}\left(c\overline{\mathbf{p}_k}-e<q_{\lambda''}>\mathbf{a}_{\lambda''}\right)\left(-e\,\mathbf{a}_{\lambda'}\right)d\,\mathbf{r}_{k'}\right.$$

$$-<\overline{p_{\sigma'}}\ W_0^{\sigma'}><\overline{p_{\lambda'}}\ W_0^{k'}>.$$

上式に $\mathbf{a}_{\lambda'}\nabla\phi_{\sigma'}$ をかけて λ', σ' について加えると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\nabla\Phi=-\nabla\Phi\left[-c^2\nabla^2\mathbf{A} - ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right]$$

$$+\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (4\cdot E\cdot 2)$$

同様にして

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)^2=2\nabla\Phi\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi \qquad (4\cdot E\cdot 3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A})^2=2\nabla\times\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A}, \qquad (4\cdot E\cdot 4)$$

よって式（4・E・1）から式（4・E・4）より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right)^2+\frac{2}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\nabla\Phi+(\nabla\Phi)^2+(\nabla\times\mathbf{A})^2\right\}$$

$$=-\frac{2}{c^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\left(-c^2\nabla^2\mathbf{A}-ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right)-\frac{2}{c}\nabla\Phi\left(-c^2\nabla^2\mathbf{A}\right.$$

$$\left.-ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right)+\frac{2}{c}\left(\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+2\nabla\Phi\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi$$

$$+2\nabla\times\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A}$$

$$=\frac{2}{c}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\right)\left(-c^2\nabla^2\mathbf{A}\right)+\frac{2}{c}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\right)$$

$$\left(-ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right)-2\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\right)$$

$$+2\nabla\times\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{A}\quad.$$

上式の左辺はたんに

$$\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)\ ,$$

であり右辺は*Lorentz*条件を用いて $\partial\nabla\Phi/\partial t$ を消去すると

$$\frac{2}{c}\left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\right)\left(-c^2\nabla^2\mathbf{A}+c^2\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}\right)+2\nabla\times\mathbf{A}\frac{\partial\nabla\times\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$+\frac{2}{c}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\right)\left(-ceNW_0^k\bar{\mathbf{v}}\right).$$

上式より式（4・53）がでる.

論文目録　大阪大学

報告番号 甲第1058号　氏名 小山正樹

主論文　分散性運動媒質内の電磁界理論に関する研究（主論文のうち印刷公表したもの）

1. 運動プラズマ中の電磁放射による Minkowski および EH 記述形式の一考察
電子通信学会雑誌, 50　昭和42年12月

1. On the Polarization and the Convection Current Models（分極と擾導電流模型について）
Proc. IEEE (Letter) 55, 4　昭和42年4月

1. 運動媒質中の電気力学の統一理論
昭和41年度電気通信学会全国大会

1. 運動磁化プラズマ中の Cerenkov 放射による Maxwell-Minkowski と Maxwell-Chu 模型の一考察
電気通信学会アンテナ・伝播研究会
昭和41年7月

1. 運動媒質中の電気力学の統一理論
電気通信学会アンテナ・伝播研究会
昭和41年12月

コクヨ 20×20

1. Minkowski 理論からみた相対論的電子ビーム理論とその応用について
電子通信学会創立50周年記念全国大会
昭和42年

1. 相対論的電子ビーム理論
電気通信学会電子装置研究会
昭和42年4月

1. 運動媒質中の電気力学の統一理論
電子通信学会雑誌, 50 昭和42年10月

1. 運動している圧縮性磁化プラズマ中の電磁放射
電子通信学会 アンテナ・伝播研究会
昭和42年8月

コクヨ 20×20