OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	セルフチューニング極配置制御系の設計
Author(s)	山本, 透
Citation	大阪大学, 1994, 博士論文
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.11501/3075304
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

セルフチューニング極配置制御系の設計

平成６年１月

山　本　　透

目　次

第１章　序論

１．１　セルフチューニングコントローラの歴史と基本構成 1
１．１．１　適応制御 1
１．１．２　セルフチューニングコントローラの基本構成 2
１．１．３　セルフチューニングコントローラの歴史 3
１．２　本論文の目的と各章の構成 4
参考文献 5

第２章　セルフチューニング極配置制御系の設計

２．１　緒言 9
２．２　極配置制御系の設計 10
２．２．１　問題の記述 10
２．２．２　閉ループ伝達特性 12
２．２．３　特性多項式の設計 13
２．２．４　コントローラパラメータの設計 14
２．３　セルフチューニングコントローラの設計 15
２．３．１　パラメータ同定法 15
２．３．２　セルフチューニング極配置制御系の設計 17
２．３．３　数値計算結果 18
２．４　セルフチューニング極配置制御系の漸近的性質 24
２．４．１　パラメータ同定法の収束性 24
２．４．２　制御誤差の漸近的性質 29
２．５　結言 32
参考文献 32
[付録　A]　正実性の条件 34
[付録　B]　(2.4.27) 式の導出 34

第３章　最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御系の設計

３．１　緒言 36
３．２　セルフチューニング極配置制御系の設計 37
３．２．１　問題の記述 37
３．２．２　制御則の導出と閉ループ伝達特性 38

3．2．3　セルフチューニング極配置制御系の設計.....41
3．2．4　セルフチューニング極配置制御系の漸近的性質.....44
3．2．5　第2章の方法との関連.....45
3．2．6　数値計算結果.....46
3．3　結言.....53
参考文献.....53
第4章　セルフチューニングＰＩＤ制御系の設計
4．1　緒言.....55
4．2　セルフチューニングＰＩＤ制御系の基本設計.....56
4．2．1　問題の記述.....56
4．2．2　極配置法に基づく設計.....58
4．2．3　セルフチューニングコントローラの設計.....60
4．2．4　数値計算結果.....62
4．3　前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計.....65
4．3．1　問題の記述.....65
4．3．2　前置補償器をもつＰＩＤ制御系の設計.....66
4．3．3　セルフチューニングコントローラの設計.....67
4．3．4　数値計算結果.....70
4．4　目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計.....75
4．4．1　問題の記述.....75
4．4．2　目標値ゲインをもつＰＩＤ制御系の設計.....76
4．4．3　セルフチューニングコントローラの設計.....77
4．4．4　セルフチューニングＰＩＤ制御系の漸近的性質.....79
4．4．5　数値計算結果.....81
4．5　ポリスチレン重合反応器への応用.....84
4．5．1　ポリスチレン重合反応器の概要.....84
4．5．2　モデリング.....84
4．5．3　数値計算結果.....86
4．6　結言.....94
参考文献.....95
第5章　結論.....98
謝辞
発表論文

第１章

序論

１．１　セルフチューニングコントローラの歴史と基本構成

１．１．１　適応制御

１８世紀末のWattによる蒸気機関調速機に端を発し，１９３０年代になって，ようやく「自動制御」の枠組みが体系づけられた．さらに，その流れは，現在の現代制御理論を中心とした制御系設計へと発展した．これまでの制御系設計は，制御対象の特性が既知であるという想定に基づくものであったが，実在のプラントの中には，特性を前もって正確に把握することが困難なもの，あるいは，特性が環境条件とか動作条件に応じて変動するようなものが数多く存在している．したがって，制御理論に関する研究が盛んに行われる一方で，実プラントへの適用に際して，種々の問題が生じることから，理論と実際への応用とのギャップが大きな問題となってきた．そして，この問題は制御対象の有する”不確かさ”ということばで総称されるようになった．このような流れの中で，不確かさを陽に取り扱った制御系設計が，急激に行われるようになり，それらは「適応制御」と「ロバスト制御」に大別されて研究が進められた．前者は，制御対象の不確かさを時々刻々推定し，この情報を制御系設計に取り込み，これに基づいて望ましい制御系設計を行う革新的手法として考えることができる．この意味において適応制御は，自動制御をさらに進めた”高度自動化”手法として捉えることもできる．一方後者は，不確かさの大きさを前もって考慮した上で，不確かさに対し鈍感な制御系設計を行う保守的手法と考えられる．

適応制御に関する研究は，古くは１９５０年代初期に始まったといえる．とくに，オートパイロットへの応用が主流であった．その後，１９６０年代になって，適応制御の研究が盛んに行われようになり,「適応制御」としての理論的な体系が確立された[1)]．適応制御は，設計手法の違いからセルフチューニングコントローラ[2),3)]（Self-Tuning Controller: STC）とモデル規範形適応制御[4),5)]（Model Reference Adaptive Controller: MRAC）に区別される．前者は，評価規範の最小化に基づく確率系の制御理論とシステム同定論とを融合させた設計方法と考えられる．一方，ＭＲＡＣは，確定系に対してリアプノフの安定論やポポフの超安定論を用いて，制御系の安定性や正実性に基づいて制御系設計が行

われる．ＭＲＡＣは，制御系の安定性に重きをおいていることから，理論的研究は盛んに行われるものの，実用化に向いていないという問題が指摘されている．その意味で，ＳＴＣは制御系設計が容易であり，実用性が加味された制御系設計であると考えられる．

１．１．２　セルフチューニングコントローラの基本構成

ＳＴＣは，主として離散時間確率系に対して制御系設計が行われている．ＳＴＣの基本構成を，**Fig.1.1** に示す．

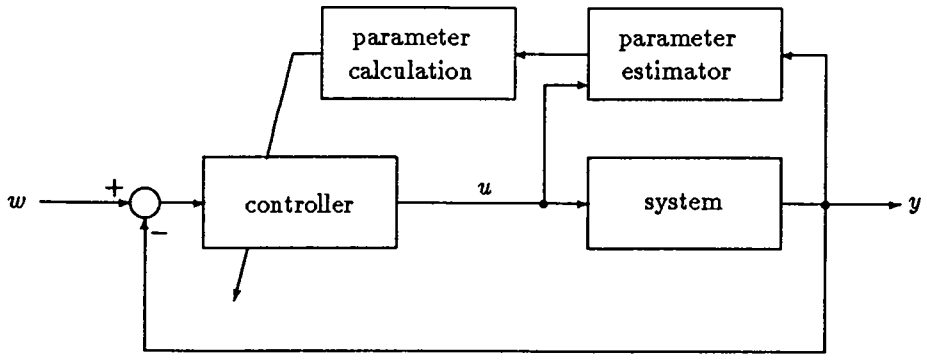

Fig.1.1　Block diagram of the usual self-tuning control system.

この基本構成は，Åström らによって初めて考察されたものである[2)3)]．**Fig.1.1** から分かるように，ＳＴＣは３つの部分から構成されている．まず，パラメータ推定部（parameter estimator）において，制御対象の入出力データから入出力関係を同定する．次に，推定パラメータを真のパラメータと見なして（ＣＥ原理：Certainly Equivalence Principle），システムパラメータからコントロールパラメータに置き換えを行うのが，パラメータ計算部（parameter calculation）である．これは，システムパラメータとコントロールパラメータとを関連づけた恒等式（Diophantine equation）に基づいて行われる．コントロールパラメータが計算されると，これを用いて制御入力が制御器（controller）において生成される．制御則は，評価規範の最小化に基づいて導出されるか，あるいは望ましい制御系の極を配置する極配置制御方式が通常とられている．上述のようなＳＴＣの設計は，間接型ＳＴＣ（Explicit STC）と言われ，制御対象の特性（状態）を把握した上での制御系設計が実現できる．一方，直接型ＳＴＣ（Implicit STC）は，コントローラパラメータを直接推定し，それを用いて制御入力が生成される．すなわち，パラメータ調節部が省略され，計算時間の短縮化を図ることができる．本論文では，前者の間接法に基づいたＳＴＣの設計について考察する．

１．１．３　セルフチューニングコントローラの歴史

ここでは，ＳＴＣの歴史について簡単に述べる．ＳＴＣの研究においても，数々の制御則が報告されてきた．制御則は，先にも述べたように評価規範の最小化に基づいて導出されるものと，極配置法に基づく制御則とに大別される．前者のオリジナルは，Åström らによって提案された最小分散制御則[2),3)]である．これは，次式のような評価規範の最小化に基づいて制御則が導出される．

$$\text{minimize} \quad J_1(k) = E[\{y(k+L+1) - w(k)\}^2] \tag{1.1.1}$$

ここで，$y(k)$ は出力，$w(k)$ は目標値を示している．また，L は制御対象のむだ時間である．制御則の導出にあたっては，$y(k+L+1)$ に対応する最適予測値$\bar{y}(k+L+1/k)$ を計算し，これが$w(k)$ に等しくなるような制御入力が計算される．最小分散制御系は，コントローラに制御対象の逆系を必要とすることから，制御対象に対する条件として最小位相系であるという条件が付加される．実際に，むだ時間の推定も困難であることから，この条件は，設計するにあたり非常に厳しい条件である．この問題を軽減するために，多くの研究報告がなされた．そのひとつに，次式の評価規範の最小化に基づく一般化最小分散制御[6)-8)] や重み付け最小分散制御[9)]がある．

$$\text{minimize} \quad J_2(k) = E[\{y(k+L+1) - w(k)\}^2 + \omega \cdot u^2(k)] \tag{1.1.2}$$

$u(k)$ は制御入力を表し，ωはその重み係数を示している．つまり制御入力に制限をもたせ，制御入力の発散を防いでいる．言い換えれば，本手法によりωの適当に設定することで，制御系の安定化を図ることができるということを意味している．さらに，むだ時間が未知である場合に対して，次の評価規範の最小化に基づく一般化予測制御[10)-12)]が提案された．

$$\text{minimize} \quad J_3(k) = E[\sum_{j=1}^{N}\{y(k+j) - w(k+j)\}^2 + \sum_{j=1}^{M}\omega(j)\{u(k+j-1) - u(k+j-2)\}^2] \tag{1.1.3}$$

この手法は，モデル予測制御[13),14)]の方法論を，先にあげた一般化最小分散制御の枠組みで捉えたものである．本手法により，評価規範の最小化に基づくＳＴＣの設計では，かなり広範囲の制御対象を取り扱うことが可能となった．

一方，不安定零点をもった制御対象すなわち非最小位相系に対するもう一つのアプローチとして，極配置法が考察されている．極配置法は，閉ループ系の特性根を望ましい制御特性が得られるように配置するという手法である．極配置法に関する研究は，モデル規範形適応制御法での考察[15)-18)] を併せると，非常に多くの報告がなされている．ＳＴ

Cでの極配置法の設計では，Wellstead らによる方法[19),20)] が基本となっている．Zarrop らは，コントローラパラメータを，目標値応答に関する特性多項式から計算するのでなく，出力の分散の最小化に基づいて設計する極配置法を提案している[21)]．Allidina らは，間接法に基づく極配置制御法の統一的設計方法を示した[22)]．また，Mo らは，間接法に基づく極配置法の問題点の一つである逆行列の計算を用いない新しい極配置制御アルゴリズムを与えた[23)]．さらに，先に述べた評価規範の最小化に基づいた制御則におけるコントローラパラメータを，極配置法に基づいて設計するという考察も行われている[24)-26)]．

ＳＴＣに関する安定性の考察は，１９７０年代以降になってようやく行われた．確定系に対しては，モデル規範形適応制御法のようにリヤプノフやポポフの安定定理に基づいて容易に証明できるが，制御対象として確率系を扱っていることから，安定性の証明も多種多様にわたっている．Ljung[27)-29)]の研究では，逐次型最小２乗法に代表される確率アルゴリズムの条件付き収束性が示されている．その後，Solo は，マルチンゲールの性質を用いて，逐次パラメータ同定法によるパラメータの収束性の条件を導出した[30)]．Goodwin らは，特殊なパラメータ同定法を用いて最小分散制御法に基づくＳＴＣの安定性を示している[31),32)]．Ydstie らは，可変忘却係数をもった逐次最小２乗法によるＳＴＣの安定性を示している[33)]．また，Landau は，マルチンゲールの性質を使って，直接型ＳＴＣの入出力安定性を示した[34)]．さらに，Tsiligiannis らは一般化最小分散制御の安定性を確定系に限定して考察している[35)]．

１．２　本論文の目的と各章の構成

評価規範の最小化に基づいた制御系設計では，つねに制御系の安定化ということが大きな問題となる．つまり，設定した評価関数とくに重み係数の選び方は，制御系の安定性や性質を大きく左右する．結局，設計する側に立って考えたとき，興味ある問題は制御系の性質をいかに改善するかということである．したがって，重み係数を設定する場合も，制御系の性質を十分に考慮した上での設定が必要となってくる．このように考えると，結局，制御系の極をどの位置に配置するかという問題に帰着されてしまう．したがって，極配置制御系の設計というものが重要な問題となる．そこで，本論文では，制御系を極配置法により設計することを考える．

まず，第２章では，セルフチューニング極配置制御系の設計法について考察する．このとき，制御対象をＣＡＲＭＡ（Controlled Auto-Regressive and Moving Average）モ

デルで記述し，確定外乱と確率外乱の付加されたモデルで記述する．ここで考察する確定外乱は，外乱の形状は既知であるが，その値は未知であるとする．また，確率外乱は，ガウス性白色雑音として考察する．したがって，本研究では確定外乱を除去するために，内部モデル原理に基づいた制御則を用いる．また，確定外乱がパラメータ同定に影響を与えると考えられるため，その影響を軽減するパラメータ調整則[36]についても考察する．さらに，本手法による制御系の漸近的性質について言及する[37]．次に，第3章では，最小分散制御に基づいたセルフチューニング極配置制御系の設計について考察する．第2章では一般的な確定外乱を考えたが，ここでは，ステップ状外乱に限定して考察する．この場合，ステップ関数の目標値に対し，ロバスト追従性を実現するために，制御系に積分器が挿入されるが，この積分器の挿入は，一方で確率的外乱の分散を増幅させてしまう．そこで，第3章では評価規範を設け，その最小化に基づいて制御則を導き，それに含まれるコントローラパラメータを適応調整するセルフチューニング極配置制御系について考察する[26),38)-41)]．最後に，第4章では，ＰＩＤ制御系[42]に基づいたＳＴＣの設計について考察する．化学プロセスに代表されるプロセス制御系では，今なおＰＩＤ制御等の古典制御理論に依存するところが大きいのが現状である[43]．ＰＩＤ制御系において重要な問題とされているのが，ＰＩＤゲインをどのように調整あるいは設定するかということである．したがって，第4章において，ＰＩＤゲインを適応調整するセルフチューニングＰＩＤ制御系[44]を設計する．このとき，制御対象のむだ時間をどのように扱うかということが大きな問題となり，そこでは，主として，むだ時間のために新たな補償器を挿入した複合型ＰＩＤ制御系[45)-47)]の設計方法について考察する．さらに第4章では，化学プロセスの一つであるポリスチレン重合反応器の温度制御問題に考察した手法を適用し[48]，その有効性を数値計算結果から検証する．

参考文献

1) E.Mishkin and L.Braun : Adaptive Control Systems, McGraw-Hill, New York (1961)
2) K.J.Åström, U.Borisson, L.Ljung and B.Wittenmark : Theory and Applications of Self-Tuning Regulators, Automatica, Vol.13, No.5, pp.457-476 (1977)
3) K.J.Åström : Theory and Applications of Adaptive Control -A Survey, Automatica, Vol.19, No.5, pp.471-486 (1983)

4) I.D.Landau and R.Lozano : Unification of Discrete Time Explicit Model Reference Adaptive Control Designs, Automatica, Vol.17, No.4, pp.593-611 (1981)
5) I.D.Landau, 富塚：適応システムの理論と実際，オーム社 (1981)
6) D.W.Clarke and P.J.Gawthrop : Self-Tuning Controller, IEE Proc., Vol.123, No.9, pp.929-934 (1975)
7) D.W.Clarke and P.J.Gawthrop : Self-Tuning Control, IEE Proc., Vol.126, No.6, pp.633-639 (1979)
8) D.W.Clarke : Self-Tuning Control of Nonminimum-Phase Systems, Automatica, Vol.20, No.5, pp.501-517 (1984)
9) M.J.Grimble : A Control Weighted Minimum-Variance Controller for Non-Minimum Phase Systems, Int. J. Control, Vol.33, No.4, pp.71-762 (1981)
10) D.W. Clarke, C.Mohtadi and P.S.Tuffs : Generalized Predictive Control, Automatica, Vol.23, No.2, pp.137-160 (1987)
11) D.W.Clarke and C.Mohtadi : Properties of Generalized Predictive Control, Automatica, Vol.25, No.6, pp.859-875 (1989)
12) H.Demircioglu and P.J.Gowthrop : Continuous-time Generalized Predictive Control(CGPC), Automatica, Vol.27, No.1, pp.55-74 (1991)
13) C.E.Garcia, D.M.Prett and M.Morari : Model Predictive Control: Theory and Practice -A Survey, Automatica, Vol.25, No.3, pp.335-348 (1989)
14) 西谷：モデル予測制御の応用，計測と制御，Vol.28, No.11, pp.996-1004 (1989)
15) H.Elliott : Direct Adaptive Pole Placement with Application to Nonminimum Phase Systems, IEEE Trans., Vol.AC-27, No.3, pp.720-725 (1982)
16) 藤井，水野：未知確定外乱を考慮した離散時間適応極配置制御系，計測自動制御学会論文集，Vol.21, No.10, pp.1021-1028 (1985)
17) 内門，金井：外乱に強い多変数非最小位相系の適応サーボ系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.22, No.5, pp.521-526 (1986)
18) D.Janecki : Direct Adaptive Pole Placement Having Purely Disturbance, IEEE Trans., Vol.Ac-32, No.2, pp.187-189 (1987)
19) P.E.Wellstead, D.Prager and P.Zanker : Pole-Assignment Self-Tuning Regurator, IEE Proc., Vol.126, No.8, pp.781-787 (1979)
20) P.E.Wellstead and S.P.Sanoff : Extended Self-Tuning Algorithm, Int. J. Control, Vol.34, No.3, pp.433-455 (1981)
21) M.B.Zarrop and M.Fischer : Reduced-Variance Pole-Assignment Self-Tuning Regulation, Int. J. Control, Vol.42, No.5, pp.1013-1033 (1985)

22) A.Y.Allidina and H.Yin : Explicit Pole-Assignment Self-Tuning Algorithm, Int. J. Control, Vol.42, No.5, pp.1113-1130 (1985)

23) L.Mo and M.M.Bayoumi : A Novel Approach to the Explicit Pole Assignment Self-Tuning Controller Design, IEEE Trans., Vol.34, No.3, pp.359-363 (1989)

24) A.Y.Allidina and F.M.Hughes : Generalized Self-Tuning Controller with Pole Assignment, IEE Proc., Vol.127, No.1, pp.13-18 (1980)

25) M.A.Lelic and M.B.Zarrop : Generalized Pole-Placement Self-Tuning Controller, Int. J. Control, Vol.46, No.2, pp.547-568, (1987)

26) T.Yamamoto, Z.H.Luo, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning Pole-Assignment Controller with Long-Range Prediction, Preprints of 12th IFAC World Congress, Sydney, pp.375-380 (1993)

27) L.Ljung, T.Sörderström and I.Gustavsson : Counterexamples to General Convergence of Commonly Used Recursive Identification Method, IEEE Trans., Vol.AC-20, No.5, pp.643-652 (1975)

28) L.Ljung : On Positive Real Transfer Functions and the Convergence of Some Recursive Schemes, IEEE Trans., Vol.AC-22, No.4, pp.539-551 (1977)

29) L.Ljung : Analysis of Recursive Stochastic Algorithms, IEEE Trans., Vol.AC-22, No.4, pp.551-575 (1977)

30) V.Solo : The Convergence of AML, IEEE Trans., Vol.AC-24, No.6, pp.958-962 (1979)

31) K.S.Sin and G.C.Goodwin : Stochastic Adaptive Control Using a Modified Least Squares Algorithm, Automatica, Vol.18, No.3, pp315-321 (1982)

32) G.C.Goodwin and K.S.Sin : Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice-Hall, New Jersey (1984)

33) B.E.Ydstie and W.H.Sargent : Convergence and Stability Property of an Adapive Regulator with Variable Forgetting Factor, Automatica, Vol.22, No.6, pp.749-751 (1986)

34) I.D.Landau : Near Supermartingales for Convergence Analysis of Recursive Identification and Adaptive Control Schemes, Int. J. Control, Vol.35, No.2, pp.197-226 (1982)

35) C.A.Tsiligiannis and S.A.Svoronos : Deterministic Convergence of a Clarke-Gowthrop Self-tuning Controller, Automatica, Vol.22, No.2, pp.193-197 (1986)

36) 山本，坂和，大松：セルフチューニング極配置制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.30, No.3 (1994)（掲載予定）

37) T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : A Global Convergence Analysis for Self-Tuning Pole-Assignment Controller, MTNS-93, Regensburg, (1993)

38) 山本，渡辺，大松：非最小位相系に対する2次規範制御の規準値追従性の改善，システムと制御，Vol.31, No.8, pp.604-612 (1987)

39) 山本，大松，石原：規準値追従性の改善ＳＴＣアルゴリズムに対する誤差解析，システムと制御，Vol.32, No.3, pp.207-208 (1988)

40) T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara : Improvement of the Tracking Property for the Linear Quadratic Adaptive Controller, Proc. of IFAC Symposium on ACASP, Glasgow, pp.117-122 (1989)

41) 山本，石原，大松：前置補償器をもつ一般化最小分散制御に対する適応系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.26, No.6, pp.656-661 (1990)

42) 須田 他：ＰＩＤ制御，朝倉書店 (1992)

43) 日本電気計測器工業会：プロセス産業を中心とした先端制御技術の適用状況と動向調査結果，計装，Vol.30, No.10, pp.43-49 (1990)

44) 山本，大松，石原：セルフチューニングＰＩＤ制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.25, No.10, pp.1069-1075 (1989)

45) T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning PID Controllers for Time Delay Systems, Proc. of ISCA International Conference on CAINE, Hawaii, pp.332-337 (1993)

46) 山本，石原，大松，北森：モデルマッチング法による離散時間Ｉ－ＰＤ型制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.27, No.8, pp.899-906 (1991)

47) T.Yamamoto, H.Ishihara, S.Omatu and T.Kitamori : Multivariable Self-Tuning Controller with I-PD Structure, Proc. of IEEE International Conference on IECON, Kobe, pp.1812-1817 (1991)

48) 山本，廣田，長迫，藤井：セルフチューニングＰＩＤ制御系の設計とポリスチレン重合反応器への応用，システム制御情報学会論文誌 （投稿中）

第２章

セルフチューニング極配置制御系の設計

２．１　緒言

適応制御手法の一つであるセルフチューニングコントローラ (Self-Tuning Controller; STC) は，単一入出力系および最小位相系に対し，十分に体系化されてきたといえる[1),2)]．また，ディジタルコンピュータの普及に伴い，実プラントに対してマイクロコンピュータ等を用いることで，制御系の実装化が容易に行えるようになってきた．しかし，従来の適応制御は，理想状態下での設計がほとんどであり，実システムへの適用を考えたとき，実際の問題とのギャップがしばしば指摘されている．たとえば，連続時間系に零次ホールダを前置して離散化する際，連続時間系が最小位相系であっても，サンプリング間隔により，離散時間系に不安定零点が出現するという問題が指摘されている[3)]．さらに，この問題に関連して，システムのむだ時間をどのように決定すれば良いかということも重要な問題の一つとされている．これまでに，上述のような問題に対して種々の方法が提案されてきた[4)−15)]．これらは大きく分けて，２つの方法論に区別することができる．一つは，一般化最小分散制御法[4)−6)]，重み付き最小分散制御法[7)]あるいは一般化予測制御法[8),9)] に代表されるように，評価規範の最小化に基づいた設計である．これらの手法は，評価規範に制御入力項が組み込まれており，その制御入力項にかかる重み係数を操作することで，制御系の安定化を実現するものである．もう一つは，極配置法に基づいた制御系設計である[10)−15)]．前者は，制御系設計が容易に行えるといった長所をもつが，制御系の安定性や制御系の性質についての検討は，試行錯誤的になってしまうという欠点をもつ．一方，後者は制御系の安定化と制御系の性質を十分考慮した上で，制御系設計が行えるといった長所をもつ．しかし，ＳＴＣの設計においては，確率外乱のみが付加されたシステムに対する考察が殆どであり，ステップ状外乱や周期性外乱に代表される確定外乱を併せてもつシステムに対しての考察は，著者の知る限りなされていない．そこで，本章では確定外乱と確率外乱が共に存在する系で，かつむだ時間が未知であるシステムに対して，極配置法の観点から制御系設計を行い，これを間接法に基づいたＳＴＣへと拡張する．

まず，２．２節では極配置制御系の設計について考察する．記述モデルとして，確定外乱および確率外乱が付加された一般的なＣＡＲＭＡ（Controlled Auto-Regressive and

Moving Average）モデルを用いる．次に，２．３節では，考察した極配置制御系に基づいたＳＴＣアルゴリズムを構成する[16),17)]．このとき，確定外乱によりパラメータ同定の劣化が考えられるため，これを軽減するパラメータ同定法を提案する[16),17)]．さらに，ここで考察したパラメータ同定法の有効性およびセルフチューニング極配置制御アルゴリズムの有効性を検証するために，いくつかの数値計算結果を示す．２．４節では，考察したセルフチューニング極配置制御系の漸近的性質[17)]について考察する．

２．２　極配置制御系の設計

２．２．１　問題の記述

制御系設計を行う前に，制御対象をどのような数学モデルで記述するかということが大きな問題である．ここでは，線形系の範囲内で一般性を失わないように，次式のような確定外乱と確率外乱が付加されたＣＡＲＭＡモデルを用いて考察する．

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k) + d(k) \tag{2.2.1}$$

ただし，$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ および $C(z^{-1})$ は，次式として与えられる．

$$\left.\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_l z^{-l} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

ここで，$u(k)$ および $y(k)$ は，操作量および制御量を示し，$d(k)$ および $\xi(k)$ は未知確定外乱および確率外乱を示している．また，z^{-1} は，$z^{-1}y(k) = y(k-1)$ を意味する時間遅れ作用素を示している．(2.2.1) 式と (2.2.2) 式によるシステムおよび目標値 $w(k)$ に対し，以下のような仮定を設ける．

【仮定 A】

[A.1] 多項式 $A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ および $C(z^{-1})$ の次数 n，m および l は既知である．

[A.2] パラメータ a_i，b_i および c_i は未知である．

[A.3] $d(k)$ は未知であるが，有界な確定外乱であり，

$$D(z^{-1})d(k) = 0 \tag{2.2.3}$$

を満足する．ただし，$D(z^{-1})$ は，安定多項式で

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{n'} z^{-n'} \tag{2.2.4}$$

で与えられる．また，次数n'およびパラメータ$d_i(i=1\sim n')$は既知とする．ここで，安定多項式とは，そのすべての零点zが単位円内および単位円上に存在する（$|z|\leq 1$）多項式をいい，$D(z^{-1})=0$は重根をもたないものとする．

[A.4] 多項式$\hat{A}(z^{-1})D(z^{-1})$と$\hat{B}(z^{-1})$の係数列は一次独立とする．ただし，$\hat{A}(z^{-1})$および$\hat{B}(z^{-1})$は，それぞれ$A(z^{-1})$と$B(z^{-1})$の推定値を示している．

[A.5] 目標値$w(k)$はステップ関数で与えられる．

[A.6] $\hat{C}(z^{-1})$は漸近安定多項式で，$f(z^{-1}):=[\{D(z^{-1})C(z^{-1})\}^{-1}-1/2]$は正実性（[付録 A]参照）が成立する．ただし，$\hat{C}(z^{-1})$は$C(z^{-1})$の推定値を示しており，漸近安定多項式とは，すべての零点が単位円内に存在する（$|z|<1$）多項式をいう．また，:=は定義式であることを意味している．

[A.7] 入出力信号から構成される次のベクトル

$$\begin{aligned}\psi(k-1):=[&-y_f(k-1),-y_f(k-2),\cdots,-y_f(k-n),\\&u_f(k-1),u_f(k-2),\cdots,u_f(k-m-1),\\&\eta_f(k-1),\eta_f(k-2),\cdots,\eta_f(k-l)]^T\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}y_f(k)&:=D(z^{-1})y(k)\\u_f(k)&:=D(z^{-1})u(k)\\\eta_f(k)&:=D(z^{-1})\eta(k)\end{aligned}\right\}\tag{2.2.6}$$

に対して，次式を満足する正定行列Rが存在する[18]．ここで，$\eta(k)$は白色性ガウス雑音$\xi(k)$の推定値を示している．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(k-1)\psi^T(k-1)=R\tag{2.2.7}$$

さらに$\{\xi(k)\}$は白色性ガウス雑音系列であり，以下のような仮定を満足するものとする．

【仮定 B】

[B.1]

$$E[\xi(k)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi(k)=0\tag{2.2.8}$$

[B.2]

$$E[\xi^2(k)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi^2(k)=\sigma^2\tag{2.2.9}$$

[B.3]

$$E[\xi(k)\xi(k+\tau)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi(k)\xi(k+\tau) = 0 \qquad (\tau \neq 0) \qquad (2.2.10)$$

ここに，$E[\cdot]$ は期待値を示している．

(2.2.3) 式を満足する確定外乱とし以下のようなものが考えられる．例えば，$D(z^{-1}) = 1-z^{-1}$ とすれば，ステップ状外乱を考えることができる．また，$D(z^{-1}) = 1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}$ とすれば，周波数ωが既知で，振幅および位相が未知な正弦波状の確定外乱を扱うことができる．ただし，Tはサンプリング間隔を示している．また，この場合$\omega T \neq 2n\pi(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ とする．さらに，$D(z^{-1}) = 1 - z^{-n'}$ とすれば，周期がn'の周期性外乱を考えることができる．

以上のような状況の下で，(2.2.1) 式で記述されるシステムに対し，セルフチューニング極配置制御系を設計する．ただし，[A.2] から実際にはシステムパラメータは未知であるが，ここでは $A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ および $C(z^{-1})$ が分かっているとして，制御系の設計手順を示し，２．３節において本手法を間接法に基づいたＳＴＣに拡張する．

制御則は，次式を満足する $u(k)$ により与えられる．

$$R(z^{-1})y(k) + D(z^{-1})S(z^{-1})u(k) - \gamma\cdot C(z^{-1})w(k) = 0 \qquad (2.2.11)$$

ここで，$R(z^{-1})$ と $S(z^{-1})$ については，極配置に基づいて計算される多項式で，それぞれ，次式により与えられる．

$$\left.\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2} + \cdots + r_{n+n'-1}z^{-(n+n'-1)} \\ S(z^{-1}) &= 1 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2} + \cdots + s_mz^{-m} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.12)$$

(2.2.11) 式における $R(z^{-1})$，$S(z^{-1})$ およびγは，制御系の安定性や制御系の性質を大きく左右する．そこで，これらの設計多項式およびパラメータのを極配置法の観点から設計する方法を，次節において考察する．

２．２．２　閉ループ伝達特性

まず，(2.2.1) 式と (2.2.11) から構成される制御系の閉ループ伝達特性について考察する．(2.2.1) 式と (2.2.11) 式から次式を得る．

$$\begin{aligned} &\{D(z^{-1})S(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-1}R(z^{-1})B(z^{-1})\}y(k) \\ &\qquad = z^{-1}\gamma\cdot C(z^{-1})B(z^{-1})w(k) \\ &\qquad\quad + D(z^{-1})\{S(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) + S(z^{-1})\}d(k) \end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

いま，(2.2.13) 式の左辺の多項式を $C(z^{-1})T(z^{-1})$ とおく．したがって，

$$C(z^{-1})T(z^{-1}) := D(z^{-1})S(z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-1}R(z^{-1})B(z^{-1}) \tag{2.2.14}$$

と定義する．このとき，(2.2.14) 式を用いると (2.2.13) 式は次式として書ける．

$$y(k) = \frac{z^{-1}\gamma \cdot B(z^{-1})}{T(z^{-1})}w(k) + \frac{D(z^{-1})S(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) + \frac{D(z^{-1})S(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})}d(k) \tag{2.2.15}$$

(2.2.15) 式から，$T(z^{-1})$ を閉ループ系の特性多項式と見なすことができる．すなわち，この多項式 $T(z^{-1})$ の設計は，制御系設計を行う上で重要な役割を果たす．そこで，$T(z^{-1})$ を設計多項式として，制御仕様を満足するように設計し，(2.2.14) 式の関係に基づいて $R(z^{-1})$ および $S(z^{-1})$ を計算する極配置制御系を考える．なお，(2.2.15) 式の右辺第3項は，(2.2.3) 式から零となる．

2．2．3　特性多項式の設計

前節で考察したように，(2.2.15) 式から $T(z^{-1})$ が，目標値応答に関する特性多項式であるから，この $T(z^{-1})$ をステップ入力に対して最も重要と思われる次の2つの指標[19)20)]に基づいて設計することを考える．

1) 立ち上がり時間

2) 減衰振動特性

これらの2つの指標は，即応性，オーバシュート量ならびに整定時間を決定する上で，重要となる指標である．上述の2つの指標に基づいて設計することから，$T(z^{-1})$ の設計パラメータの自由度は，高々2次で十分であると考えられるため，$T(z^{-1})$ を次式として定義する．

$$T(z^{-1}) := 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} \tag{2.2.16}$$

さらに，文献21) で考察したように t_1 と t_2 を，以下のように設定する．

$$t_1 = -2e^{-\frac{\rho}{2\mu}}\cos(\frac{\sqrt{4\mu - 1}}{2\mu}\rho) \tag{2.2.17}$$

$$t_2 = e^{-\frac{\rho}{\mu}} \tag{2.2.18}$$

$$\rho = T/\sigma \tag{2.2.19}$$

$$\mu = 0.25(1 - \delta) + 0.51\delta \tag{2.2.20}$$

ただし，σは立ち上がり時間を示しており，μが減衰振動特性を示す係数である．(2.2.20)式はμがδによって調整できることを示している．$\delta = 0.0$ のときは，２項展開形式モデルに相当する応答形状を示し，$\delta = 1.0$ とすると，Butterworth 形式モデルに相当する応答形状となる．一般的には，$0 \leq \delta \leq 2.0$ として設定することが望ましく[20]，δを大きくすればするほど，応答形状が振動的になる．以上の設計法にしたがって，設計多項式$T(z^{-1})$を設計する．

２．２．４　コントローラパラメータの設計

$T(z^{-1})$が設計されれば，(2.2.14)式の関係から，以下のように$R(z^{-1})$および$S(z^{-1})$を計算することができる．

まず，行列$\mathbf{D}$とベクトル$\mathbf{w}$および$\mathbf{v}$を，次式のように定義する．

$$\mathbf{D} := \left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & b_0 \\ b_m & & b_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_m \end{bmatrix}}_{n+n'} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \tilde{a}_1 & \ddots & \\ \tilde{a}_2 & \ddots & 1 \\ \vdots & & \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_{n+n'} & & \tilde{a}_2 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \tilde{a}_{n+n'} \end{bmatrix}}_{m} \end{array}\right] \Bigg\} n+m+n' \tag{2.2.21}$$

$$\mathbf{w} := [r_0, r_1, \cdots, r_{n+n'-1}, s_1, \cdots, s_m]^T \tag{2.2.22}$$

$$\mathbf{v} := [v_1, v_2, \cdots, v_{n_1}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n+m+n'-n_1}]^T \tag{2.2.23}$$

ここに，$\tilde{a}_i (i = 1 \sim n+n')$ は次式とする．

$$A(z^{-1})D(z^{-1}) := 1 + \tilde{a}_1 z^{-1} + \tilde{a}_2 z^{-2} + \cdots + \tilde{a}_{n+n'} z^{-(n+n')} \tag{2.2.24}$$

さらに，v_iは，

$$\begin{aligned} v(z^{-1}) &:= v_1 z^{-1} + v_2 z^{-2} + \cdots + v_{n_1} z^{-n_1} \\ &= C(z^{-1})T(z^{-1}) - D(z^{-1})A(z^{-1}) \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

で与えられる．ここで，$n_1 := max\{n+n', l+2\}$ である．(2.2.14)式における係数比較は，(2.2.21)式～(2.2.25)式を用いることで，次式の関係により与えられる．

$$\mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{w} \tag{2.2.26}$$

ここで，実際には$\tilde{a}_i$およびb_iは未知であるから，後で考察するパラメータ同定による推定結果$\hat{a}_i$，$\hat{b}_i$ を用いて逐次計算される．このとき行列$\mathbf{D}$は，仮定[A.1]および[A.4]より正則行列となる．したがって，逆行列が存在するから，次式により$R(z^{-1})$ と$S(z^{-1})$の各係数を計算することができる．

$$\mathbf{w} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{v} \tag{2.2.27}$$

この計算において，一意に$R(z^{-1})$および$S(z^{-1})$を与えられるために，それぞれの次数を$n+n'-1$とmとして設定した．また，(2.2.14)式において，$l \leq n+m+n'-2$でなければならない．

次に，パラメータγは，ステップ状の目標値に対する目標値応答において，定常偏差が生じないように次式として設定する．

$$\gamma := T(1)/B(1) \tag{2.2.28}$$

以上により，コントローラパラメータが計算される．

2．3　セルフチューニングコントローラの設計

これまでの考察は，システムパラメータが既知であるとして行ってきた．ここでは，システムパラメータが未知である場合に対して，これまでの考察に基づいて，セルフチューニングコントローラを設計する．

2．3．1　パラメータ同定法

前節で考察した極配置制御法に基づいて間接型のＳＴＣを設計する．まず，パラメータ同定法について考察する．通常の逐次最小２乗法では，確定外乱がパラメータ同定に大きな影響を与えるということが報告されている[22]．したがって，この影響を軽減するための修正を行う．

(2.2.1)式に$D(z^{-1})$を掛け，等価なモデルとして次式を得る．

$$D(z^{-1})A(z^{-1})y(k) = D(z^{-1})B(z^{-1})u(k-1) + D(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) + D(z^{-1})d(k) \tag{2.3.1}$$

ここで，(2.3.1)式の$D(z^{-1})d(k)$の項は，[A.3]の(2.2.3)式を考慮すると，$D(z^{-1})d(k)=0$として考えることができるため，以下ではこの項を削除して考える．さらに，$\xi(k)$は正

確に把握することができないから，これを$\xi(k)$の推定値$\eta(k)$に置き換え，(2.2.6)式の関係を用いると(2.3.1)式は次式となる．

$$A(z^{-1})y_f(k) = B(z^{-1})u_f(k-1) + C(z^{-1})\eta_f(k) \tag{2.3.2}$$

(2.3.2)式に基づいて，Solo[23]によって提案された拡張最小2乗法を適用する．すなわち，まずシステムパラメータa_i，b_iおよびc_iを未知パラメータ$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_i(k)$および$\hat{c}_i(k)$に変換し，これらにより構成される未知パラメータベクトル$\hat{\theta}(k)$とこれに対応するデータベクトル$\psi(k-1)$を次式として定義する．

$$\hat{\theta}(k) := [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \cdots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \hat{b}_1(k), \cdots, \hat{b}_m(k), \hat{c}_1(k), \hat{c}_2(k), \cdots, \hat{c}_l(k)]^T \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}\psi(k-1) := [&-y_f(k-1), -y_f(k-2), \cdots, -y_f(k-n),\\ &u_f(k-1), u_f(k-2), \cdots, u_f(k-m-1),\\ &\eta_f(k-1), \eta_f(k-2), \cdots, \eta_f(k-l)]^T\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

である．これを用いて，以下の調整則によりパラメータ同定を行う．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)}\varepsilon(k) \tag{2.3.5}$$

$$\Gamma(k) = \Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)} \tag{2.3.6}$$

$$\varepsilon(k) = y_f(k) - \{\hat{\theta}^T(k-1)\psi(k-1) + D'(z^{-1})\eta(k-1)\} \tag{2.3.7}$$

$$\eta(k) = y_f(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\psi(k-1) + D'(z^{-1})\eta(k-1)\} \tag{2.3.8}$$

ただし，

$$D'(z^{-1}) := z\{D(z^{-1}) - 1\} \tag{2.3.9}$$

であり，$\varepsilon(k)$と$\eta(k)$は，それぞれ事前誤差および事後誤差を示している．$\Gamma(k)$は誤差共分散行列を示しており，その初期値は$\Gamma(-1) = \alpha \cdot I$ただし$0 < \alpha < \infty$ として与える．

なお，このように変形したことで，次式に基づいて確定外乱を推定することができる．

$$\hat{d}(k) = y(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\phi(k-1) + \eta(k)\} \tag{2.3.10}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\phi(k-1) := [&-y(k-1), -y(k-2), \cdots, -y(k-n), u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-m-1),\\ &\eta(k-1), \eta(k-2), \cdots, \eta(k-l)]^T\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

以上のように，$d(k)$ がパラメータ調整則に含まれていないことから，パラメータ同定誤差に大きく影響しない．本アルゴリズムの有効性については，数値計算において示す．なお，データベクトル$\psi(k-1)$ に，$y_f(k-i)$，$u_f(k-i)$ および$\eta_f(k-i)$ が含まれており，Solo によって考察されたアルゴリズム[23]と異なる．したがって，パラメータ調整則の収束性について考察する必要があり，これについては2．4節において考察する．

2．3．2　セルフチューニング極配置制御系の設計

上述の極配置制御アルゴリズムとパラメータ同定法を組み合わせて，間接法に基づいたセルフチューニング極配置制御アルゴリズムについて考察する．

まず，設計仕様に基づいて，設計パラメータσ，δおよびνを設定する．これを用いて(2.2.16)式～(2.2.20)式により，特性多項式$T(z^{-1})$ を設計する．次に，(2.3.3)式～(2.3.9)式のパラメータ調整則により，未知パラメータ$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_i(k)$ および$\hat{c}_i(k)$ を推定する．このとき，まず(2.3.7)式により$\varepsilon(k)$ を計算し，(2.3.5)式により$\hat{\theta}(k)$ を求める．さらに，(2.3.6)式の$\Gamma(k)$ を更新し，(2.3.8)式の$\eta(k)$ を計算するという手順で行う．次に，(2.2.14)式のシステムパラメータを未知パラメータに置き換えた次式により，$\hat{R}(z^{-1})$ および$\hat{S}(z^{-1})$ を計算する．

$$\hat{C}(z^{-1})T(z^{-1}) := D(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})\hat{A}(z^{-1}) + z^{-1}\hat{R}(z^{-1})\hat{B}(z^{-1}) \tag{2.3.12}$$

ただし，この計算は(2.2.21)式～(2.2.27)式に基づいて行う．さらに，次式により$\hat{\gamma}$を計算する．

$$\hat{\gamma} = T(1)/\hat{B}(1) \tag{2.3.13}$$

最後に，計算した$\hat{R}(z^{-1})$，$\hat{S}(z^{-1})$ および$\hat{\gamma}$ を用いて，次式により操作量$u(k)$ を計算する．

$$\hat{R}(z^{-1})y(k) + D(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})u(k) - \hat{\gamma}\cdot\hat{C}(z^{-1})w(k) = 0 \tag{2.3.14}$$

上述の手順を簡単に以下にまとめる．

【セルフチューニング極配置制御アルゴリズム】

[1] 設計パラメータσ，δおよびνを設定する．

[2] 設計パラメータに基づいて，(2.2.16)式～(2.2.20)式により特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．

[3] 未知パラメータ$\hat{a}_i(k)$,$\hat{b}_i(k)$ および$\hat{c}_i(k)$ を，(2.3.3)式～(2.3.9)式のパラメータ調整則により推定する．

[4] (2.3.12)式および(2.2.21)式～(2.2.27)式より，$\hat{R}(z^{-1})$ と$\hat{S}(z^{-1})$ を計算する．

[5] (2.3.13) 式より，$\hat{\gamma}$を計算する．

[6] (2.3.14) 式に基づいて，操作量$u(k)$を生成する．

[7] [3] へ戻る．

以上により，システムに対する【仮定 A】および【仮定 B】の下で，セルフチューニング極配置制御系を構成することができる．ここで，構成したセルフチューニング極配置制御系のブロック線図を，**Fig.2.1** に示す．ただし，estimator は逐次最小2乗法による同定器を意味している．

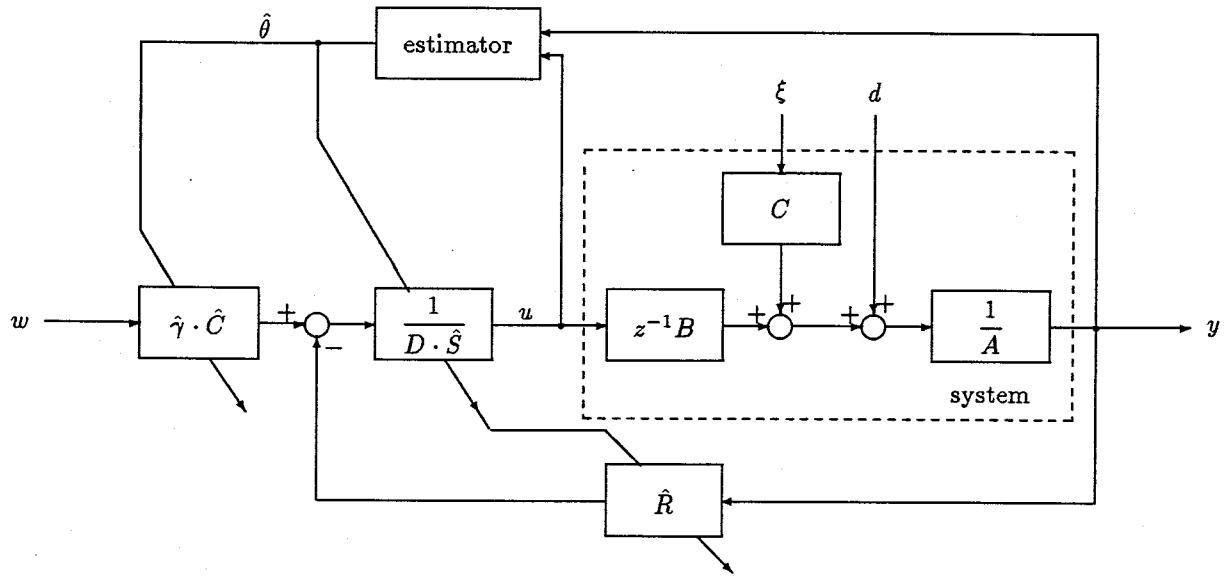

Fig.2.1　Block diagram of the proposed self-tuning pole-assignment control system.

2．3．3　数値計算結果

本節で考察したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムの有効性を検証するために，以下に2つの数値計算結果を示す．

[例2．1]

対象とするシステムは，次式のようなむだ時間をもった系とする．

$$y(k) = 0.503y(k-1) - 0.050y(k-2) + 0.077u(k-3) + 0.185u(k-4) + 0.010u(k-5) + \xi(k) + 0.2\xi(k-1) + d(k) \qquad (2.3.15)$$

ただし，確定外乱は次式のような正弦波状に与える．

$$d(k) = \sin(0.2k - 10) \tag{2.3.16}$$

したがって，$n' = 2$ とし，$d_1 = -2\cos 0.2$ および $d_2 = 1$ とする．また，確率外乱は $E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 0.01$ とした．(2.3.15) 式に対し，むだ時間未知として同定モデルを次式のように定める．

$$\begin{aligned} y(k) = &-\hat{a}_1(k)y(k-1) - \hat{a}_2(k)y(k-2) + \hat{b}_0(k)u(k-1) + \hat{b}_1(k)u(k-2) + \hat{b}_2(k)u(k-3) \\ &+ \hat{b}_3(k)u(k-4) + \hat{b}_4(k)u(k-5) + \xi(k) + \hat{c}_1(k)\xi(k-1) + \hat{d}(k) \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

さらに，設計多項式を以下のように設定する．

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.226z^{-1} + 0.416z^{-2} \tag{2.3.18}$$

$T(z^{-1})$ については，$\sigma = 3.0$ および $\delta = 0.5$ として設計した．さらに $w(k)$ はステップ状に与えた．

このときの制御結果を，**Fig.2.2** に示す．ただし，誤差共分散行列の初期値を $\Gamma(-1) = 100 \cdot I$，さらに未知パラメータの初期値を $\hat{\theta}(-1) = [0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0, 0]^T$ として数値計算を行った．とくに，誤差共分散行列は適応系の適応能力を示しており，その初期値を大きく取れば，適応能力を増大させることができるが，過渡特性が大きく劣化することがある．また，小さくすると適応能力が乏しくなり，パラメータ同定が十分に行われないといった欠点を有する．したがって，この設定については試行錯誤的になってしまうが，前述の両者の折衷点として，ここでは誤差共分散行列の初期値を $\Gamma(-1) = 100 \cdot I$ として定めた．

なお，(a) には出力結果を，(b) には制御入力の結果を示している．ここで，図中，破線は目標値を表している．また，パラメータ同定結果を **Fig.2.3** に示す．さらに，(2.3.10) 式による $\hat{d}(k)$ の計算結果を，**Fig.2.4** に示す．

これらの結果から，最初の部分にパラメータ同定の影響が見られるものの，パラメータ同定が十分行われると，良好な結果が得られていることが分かる．また，パラメータ同定結果から，同定モデルとしてオーバパラメトライズされた $\hat{b}_0(k)$ および $\hat{b}_1(k)$ についても，図中に示してあるが，ほぼ零の値となっており，このことからも，むだ時間が未知である系に対して適用可能であることが分かる．さらに，(2.3.10) 式により，$\hat{d}(k)$ が良好に計算されており，ここで考察したパラメータ調整則の有効性も検証される．

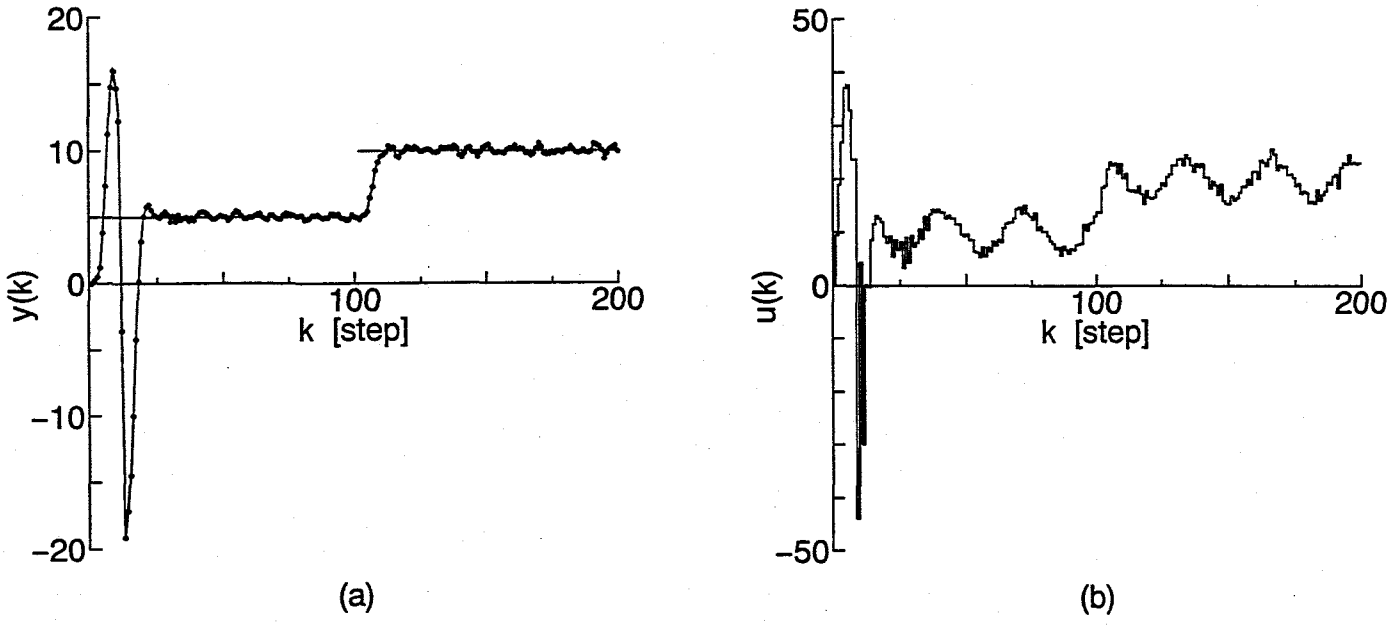

Fig.2.2 Simulation results using the proposed self-tuning pole-assignment control algorithm of (2.3.14) where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

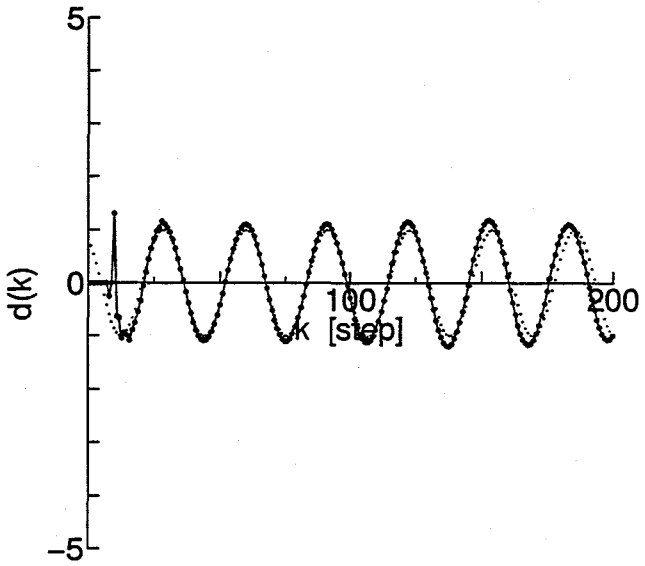

Fig.2.4 The calculated result of a deterministic disturbance $\hat{d}(k)$ using (2.3.10).

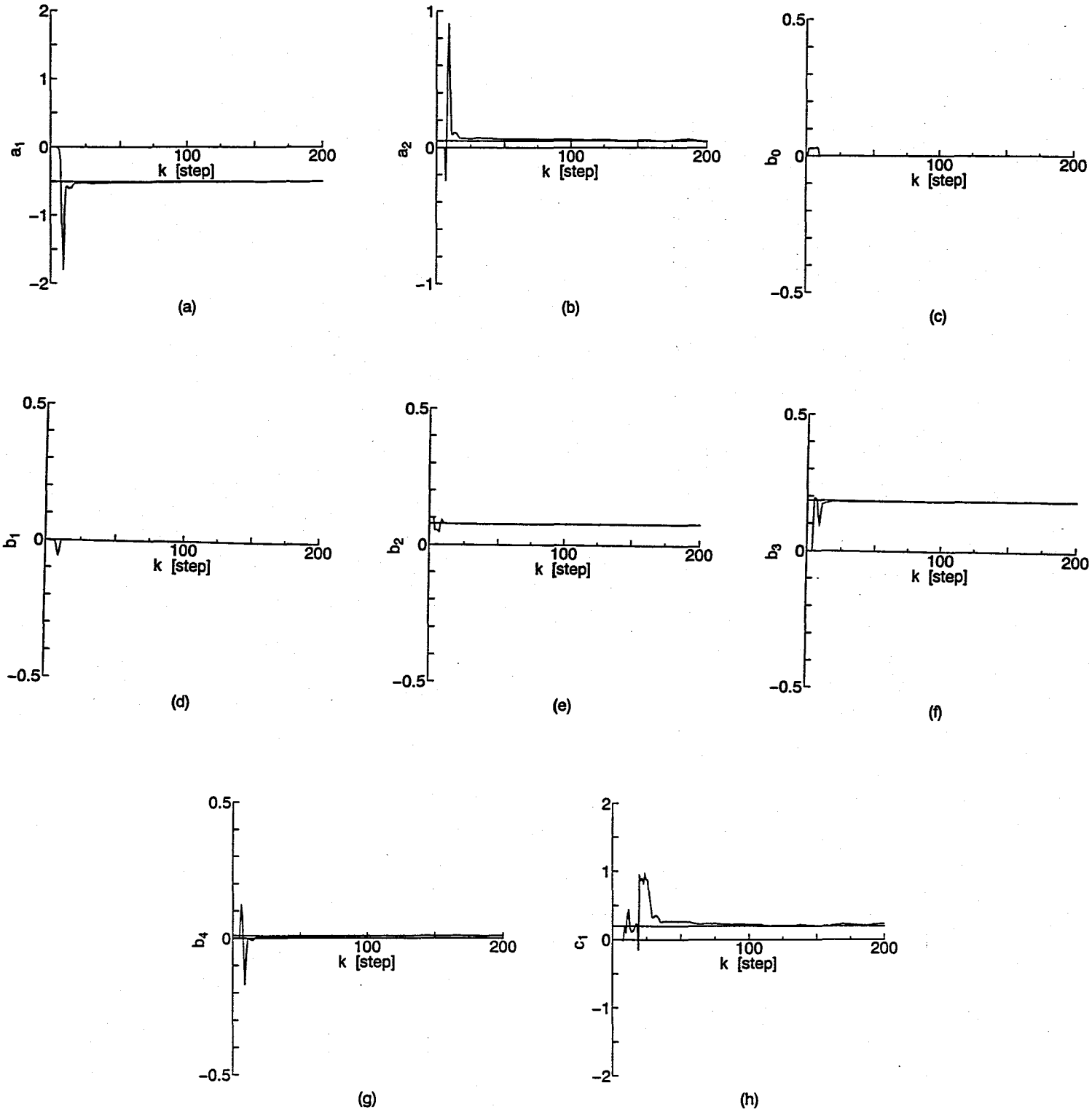

Fig.2.3 Identified parameters using the proposed least squares algorithm.

[例２．２]

対象とするシステムは，次式により与えられる．

$$y(k) = 0.503y(k-1) - 0.050y(k-2) + 0.077u(k-3) + 0.185u(k-4) + 0.010u(k-5) + \xi(k) + 0.2\xi(k-1) + d(k) \quad (2.3.19)$$

この(2.3.19)式において，最初$d(k)=2$として与え，$k=100$[step] の時点で$d(k)=1$に変化するステップ状外乱の変動の場合について考察する．システムを考える．

これまで，ステップ状外乱を有する系に対しては，以下のようなパラメータ調整則が用いられている．

$$\hat{\theta}'(k) = \hat{\theta}'(k-1) + \frac{\Gamma'(k-1)\psi'(k-1)}{\lambda(k) + \psi'^T(k-1)\Gamma'(k-1)\psi'(k-1)}\varepsilon'(k) \quad (2.3.20)$$

$$\Gamma'(k) = \frac{1}{\lambda(k)}[\Gamma'(k-1) - \frac{\Gamma'(k-1)\psi'(k-1)\psi'^T(k-1)\Gamma'(k-1)}{\lambda(k) + \psi'^T(k-1)\Gamma'(k-1)\psi'(k-1)}] \quad (2.3.21)$$

$$\varepsilon'(k) = y(k) - \hat{\theta}'^T(k-1)\psi'(k-1) \quad (2.3.22)$$

$$\eta'(k) = y(k) - \hat{\theta}'^T(k)\psi'(k-1) \quad (2.3.23)$$

$$\hat{\theta}'(k) = [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \cdots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \hat{b}_1(k), \cdots, \hat{b}_m(k), \hat{c}_1(k), \hat{c}_2(k), \cdots, \hat{c}_l(k), \hat{d}(k)]^T \quad (2.3.24)$$

$$\psi'(k-1) = [-y(k-1), -y(k-2), \cdots, -y(k-n), u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-m-1), \eta(k-1), \eta(k-2), \cdots, \eta(k-l), 1]^T \quad (2.3.25)$$

ただし，$\lambda(k)$は忘却係数を示しており，$0 < \lambda(k) \leq 1$である．このパラメータ調整則($\lambda(k)=0.99$)による制御結果を，このときの制御結果を**Fig.2.5**に示す．なお，制御則は(2.3.14)式による．また，設計多項式$T(z^{-1})$は，次式とした．

$$T(z^{-1}) = 1 - 0.921z^{-1} + 0.268z^{-2} \quad (2.3.26)$$

これは，$\sigma=2.0$および$\delta=0.5$として設計した．また，$\Gamma(-1)$および$\hat{\theta}(-1)$の初期値は，先の［例２．１］と同様に設定した．ここに，図中の矢印は，ステップ状外乱が変化したことを示している．

Fig.2.5から，$d(k)$の変動後の応答が乱れていることが分かり，上述のパラメータ調整則では，$d(k)$の変動には対応できないことが分かる．これは，データベクトル$\psi'(k-1)$の要素に，"1"という固定された値が存在することに起因すると考えられる．

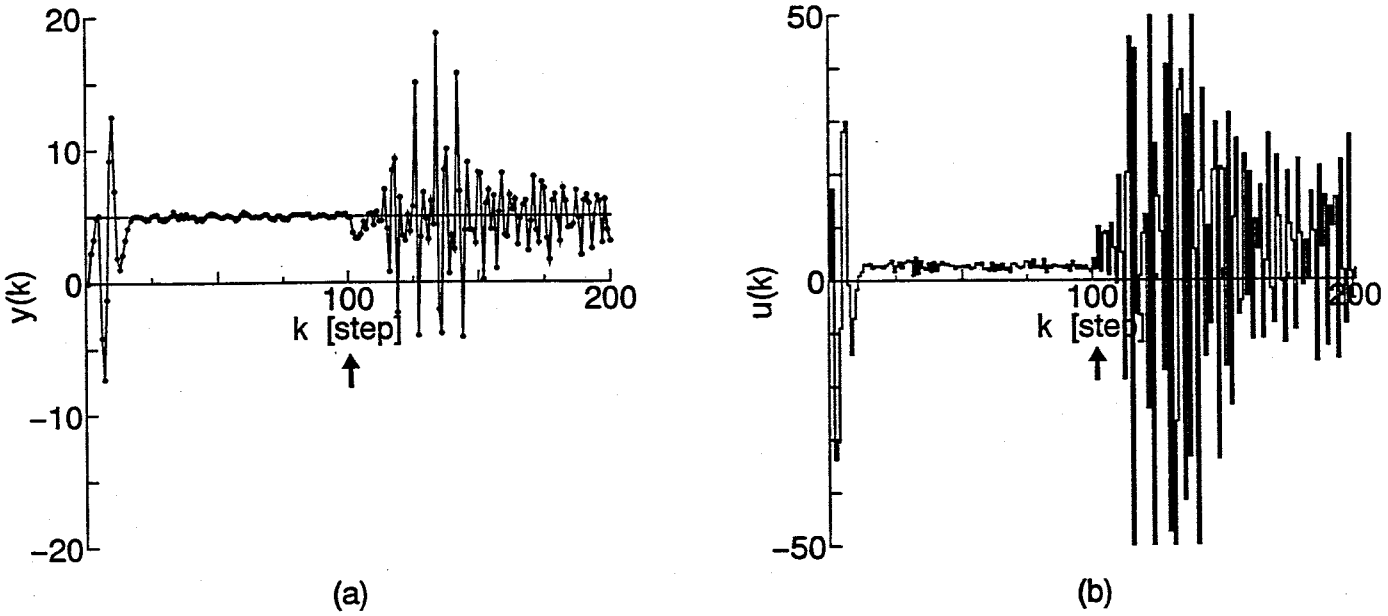

Fig.2.5 Simulation results in the case where $d(k)$ changes at 100[step], using the usual least squares algorithm of (2.3.20)-(2.3.25).

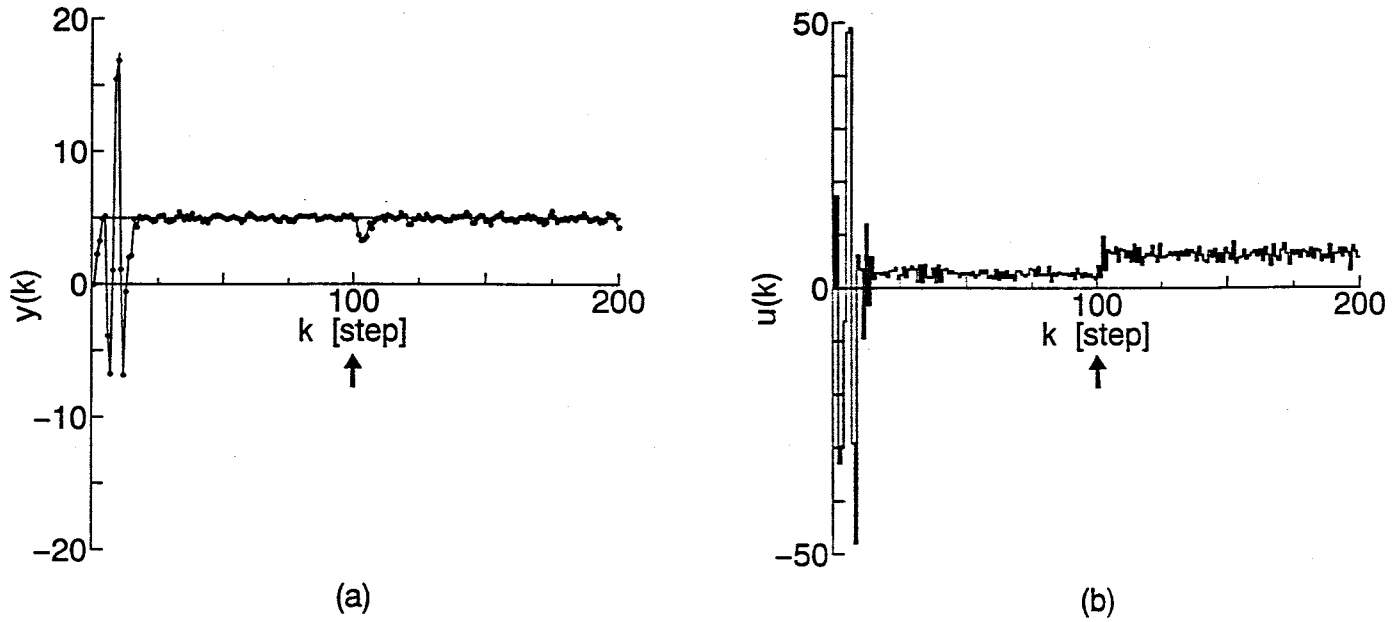

Fig.2.6 Simulation results in the case where $d(k)$ changes at 100[step], using the proposed least squares algorithm of (2.3.3)-(2.3.9).

これに対し，本章で提案した手法による結果を，Fig.2.6 に示す．これらの結果から，本手法の有効性が顕著に示されている．なお，ステップ状外乱を有する系に対して，CARIMA（Controlled Auto-Regressive and Integrated Moving Average）モデル[8),22)]を用いた考察がなされているが，文献24) で示したように，$\Delta u(k)$ の有界性しか保証されず，操作量 $u(k)$ の有界性を示すことができない．この点においても，本節で考察したパラメータ調整則の有効性を認めることができる．

以上により，本章で考察したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムとパラメータ調整則の有効性が検証された．

2．4　セルフチューニング極配置制御系の漸近的性質

2．4．1　パラメータ同定法の収束性

ここでは，前節で考察したセルフチューニング極配置制御系の漸近的性質について考察する．本手法は，間接法に基づいているため，まず，(2.3.3) 式～(2.3.9) 式のパラメータ調整則による推定誤差の収束性について検討する．そのために，重要となるいくつかの補題を以下に与える．

[補題 2．1]

以下の関係が成立する．

i)

$$\eta(k) = \frac{1}{1+v(k-1)}\varepsilon(k) \tag{2.4.1}$$

ここで，

$$v(k-1) := \psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1) \tag{2.4.2}$$

ii)

$$\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k-1) - \Gamma(k-1)\psi(k-1)\eta(k) \tag{2.4.3}$$

ここで，

$$\tilde{\theta}(k) := \theta - \hat{\theta}(k) \tag{2.4.4}$$

ただし，θはシステムの真のパラメータベクトルを示している．

iii)

$$C(z^{-1})D(z^{-1})z(k) = b(k) \tag{2.4.5}$$

ここで，

$$z(k) := \eta(k) - \xi(k) \tag{2.4.6}$$

$$b(k) := \tilde{\theta}^T(k)\psi(k-1) \tag{2.4.7}$$

〔証明〕i) (2.3.5) 式の左から$\psi^T(k-1)$を掛け，(2.4.2) の関係を用いることで 次式を得る．

$$\psi^T(k-1)\hat{\theta}(k) = \psi^T(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \frac{v(k-1)}{1+v(k-1)}\varepsilon(k) \tag{2.4.8}$$

次に，$y_f(k) - D'(z^{-1})\eta(k-1)$ から (2.4.8) 式を引くと，

$$\begin{aligned} y_f(k) - \{\psi^T(k-1)\hat{\theta}(k) + D'(z^{-1})\eta(k-1)\} &= y_f(k) \\ - \{\psi^T(k-1)\hat{\theta}(k-1) + D'(z^{-1})\eta(k-1)\} &- \frac{v(k-1)}{1+v(k-1)}\varepsilon(k) \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

を得る．さらに，(2.3.7) 式と (2.3.8) 式を用いると次式となる．

$$\eta(k) = \frac{1}{1+v(k-1)}\varepsilon(k)$$

ii) θから (2.3.5) 式を引き，(2.4.1) 式，(2.4.2) 式および (2.4.4) 式の関係から，

$$\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k-1) - \Gamma(k-1)\psi(k-1)\eta(k)$$

を得る．

iii) (2.4.6) 式と (2.3.8) 式から，次式の関係を得る．

$$z(k) = y_f(k) - \hat{\theta}^T(k)\psi(k-1) - D'(z^{-1})\eta(k-1) - \xi(k) \tag{2.4.10}$$

ここで，$y_f(k)$ は，

$$y_f(k) = \theta^T \cdot \psi(k-1) + D(z^{-1})\xi(k) - \{C(z^{-1}) - 1\}D(z^{-1})z(k) \tag{2.4.11}$$

となる．ただし，ここでも $D(z^{-1})d(k) = 0$ の関係を用いた．したがって，(2.4.10) 式に (2.4.11) 式を代入することで，次式を得る．

$$\begin{aligned} z(k) = \theta^T \cdot \psi(k-1) + D(z^{-1})\xi(k) - \{C(z^{-1}) - 1\}D(z^{-1})z(k) \\ - \hat{\theta}^T(k)\psi(k-1) - \xi(k) - D'(z^{-1})\eta(k-1) \end{aligned}$$

$$= \{\theta - \hat{\theta}(k)\}^T \psi(k-1) - \{C(z^{-1}) - 1\} D(z^{-1}) z(k)$$
$$- D'(z^{-1}) z(k-1) \tag{2.4.12}$$

したがって，(2.4.4) 式，(2.4.7) 式および (2.3.9) 式を用いることで次式を得る．

$$C(z^{-1}) D(z^{-1}) z(k) = b(k)$$ ■

［補題 2．2］

以下の関係が成立する．

i)

$$\Gamma^{-1}(k) = \Gamma^{-1}(k-1) + \psi(k-1)\psi^T(k-1) \tag{2.4.13}$$

ii)

$$\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) + b^2(k) - 2b(k)\eta(k) - v(k-1)\eta^2(k) \tag{2.4.14}$$

〔証明〕 i) (2.3.6) 式に逆行列の補題を適用することで，容易に導出することができる．

ii) (2.4.13) 式と (2.4.3) 式から，

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) &= \tilde{\theta}^T(k)\{\Gamma^{-1}(k-1) + \psi(k-1)\psi^T(k-1)\}\tilde{\theta}(k) \\
&= \tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k) + \tilde{\theta}^T(k)\psi(k-1)\psi^T(k-1)\tilde{\theta}(k) \\
&= \{\tilde{\theta}(k-1) - \Gamma(k-1)\psi(k-1)\eta(k)\}^T\Gamma^{-1}(k-1)\{\tilde{\theta}(k-1) \\
&\quad - \Gamma(k-1)\psi(k-1)\eta(k)\} + \tilde{\theta}^T(k)\psi(k-1)\psi^T(k-1)\tilde{\theta}(k) \\
&= \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) - 2\tilde{\theta}^T(k-1)\psi(k-1)\eta(k) \\
&\quad + v(k-1)\eta^2(k) + b^2(k) \\
&= \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\
&\quad - 2\{\tilde{\theta}(k) + \Gamma(k-1)\psi(k-1)\eta(k)\}^T \cdot \psi(k-1)\eta(k) \\
&\quad + v(k-1)\eta^2(k) + b^2(k) \\
&= \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) - 2\tilde{\theta}^T(k)\psi(k-1)\eta(k) \\
&\quad - v(k-1)\eta^2(k) + b^2(k)
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

を得る．したがって，(2.4.7) 式を用いると，次式が成立する．

$$\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) + b^2(k) - 2b(k)\eta(k) - v(k-1)\eta^2(k)$$ ■

［補題 2．3］

次式の関係が成立する．

$$E[z(k)\xi(k)] = 0 \tag{2.4.16}$$

〔証明〕(2.4.6) 式および (2.2.9) 式より

$$E[z(k)\xi(k)] = E[\{\eta(k) - \xi(k)\}\xi(k)] = E[\eta(k)\xi(k)] - \sigma^2 \tag{2.4.17}$$

が成立する．さらに，(2.3.8) 式より次式の関係を得る．

$$E[\eta(k)\xi(k)] = E[\xi^2(k)] = \sigma^2 \tag{2.4.18}$$

したがって，(2.4.17) 式と (2.4.18) 式より，次式を導出することができる．

$$E[z(k)\xi(k)] = 0$$ ■

次に，[補題 2．1] ～ [補題 2．3] から，推定パラメータの収束性に関して，次の定理を導くことができる．

《定理 2．1》

【仮定 A】および【仮定 B】の下で，(2.3.3) 式～(2.3.9) 式のパラメータ調整則を適用したとき，以下のような関係式を得る．

i)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \hat{\theta}(k) = \theta \tag{2.4.19}$$

ii)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} D(z^{-1})z(k) = 0 \tag{2.4.20}$$

ただし，$P \cdot \lim$ は確率収束を示している．

〔証明〕i) (2.4.14) 式の両辺から $\tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1)$ を引くことで次式を得る．

$$\begin{aligned}&\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1)\\ &\quad = b^2(k) - 2b(k)\eta(k) - v(k-1)\eta^2(k)\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

次に，(2.4.5) 式および (2.4.6) 式を用いることで，次の関係を得る．

$$\begin{aligned}&\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1)\\ &\quad = b^2(k) - 2b(k)z(k) - 2C(z^{-1})D(z^{-1})z(k)\xi(k) - v(k-1)\eta^2(k)\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

いま，

$$g(k) := z(k) - \frac{1}{2}b(k) \tag{2.4.23}$$

であると定義すると，

$$\begin{aligned}
&\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1) \\
&\quad = -2b(k)g(k) - 2C(z^{-1})D(z^{-1})z(k)\xi(k) - v(k-1)\eta^2(k) \\
&\quad \leq -2b(k)g(k) - 2C(z^{-1})D(z^{-1})z(k)\xi(k)
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

の関係を得る．さらに，(2.4.24) 式の両辺の期待値を取り，[補題 2．3] を用いると，

$$\begin{aligned}
&E[\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k)] - E[\tilde{\theta}^T(k-1)\Gamma^{-1}(k-1)\tilde{\theta}(k-1)] \\
&\quad \leq -2E[b(k)g(k)]
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

を得る．次に，(2.4.25) 式の両辺において，$k = 0$ から $k = N$ までの和をとることで，(2.4.25) 式は次式となる．

$$E[\tilde{\theta}^T(N)\Gamma^{-1}(N)\tilde{\theta}(N)] - E[\tilde{\theta}^T(-1)\Gamma^{-1}(-1)\tilde{\theta}(-1)] \leq -2\sum_{k=0}^{N} E[b(k)g(k)] \tag{2.4.26}$$

ここで，[A.6]，(2.4.5) 式および (2.4.23) 式から，次式の関係を得る（[付録 B] 参照）．

$$2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)g(k) \geq 0 \tag{2.4.27}$$

したがって，(2.4.27) 式から (2.4.26) 式は次のように書ける．

$$\lim_{N\to\infty} E[\tilde{\theta}^T(N)\Gamma^{-1}(N)\tilde{\theta}(N)] \leq E[\tilde{\theta}^T(-1)\Gamma(-1)\tilde{\theta}(-1)] \tag{2.4.28}$$

さらに，

$$0 \leq E[\tilde{\theta}^T(-1)\Gamma^{-1}(-1)\tilde{\theta}(-1)] \leq M_1 < \infty \tag{2.4.29}$$

であるから，

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} E[\tilde{\theta}^T(N)\Gamma^{-1}(N)\tilde{\theta}(N)] \leq M_1 \tag{2.4.30}$$

が成立する．次に，$\Gamma^{-1}(k)$ の最小固有値を $\lambda_{min}[\Gamma^{-1}(k)]$ とすると，次式の関係を得ることができる．

$$E[\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k)] \geq E[\lambda_{min}[\Gamma^{-1}(k)]\tilde{\theta}^T(k)\tilde{\theta}(k)] \tag{2.4.31}$$

また，(2.4.13) 式の関係から，$\Gamma^{-1}(k)$ を次式として書き換えることができる．

$$\Gamma^{-1}(k) = \sum_{i=0}^{k} \psi(i-1)\psi^T(i-1) + \Gamma^{-1}(-1) \tag{2.4.32}$$

したがって，(2.4.31) 式は次式となる．

$$\frac{1}{k+1} E[\tilde{\theta}^T(k)\Gamma^{-1}(k)\tilde{\theta}(k)] \geq E[\beta^2(k)\tilde{\theta}^T(k)\tilde{\theta}(k)] \tag{2.4.33}$$

ただし，

$$\beta(k) := \sqrt{\lambda_{min}[\frac{1}{k+1}\{\sum_{i=0}^{k} \psi(i-1)\psi^T(i-1) + \Gamma^{-1}(-1)\}]} \tag{2.4.34}$$

である．ここで，$\Gamma^{-1}(-1) = \alpha \cdot I$ ただし $0 < \alpha < \infty$ であることを考慮し，$k \to \infty$ とした極限において，(2.4.34) 式の $\beta(k)$ は，(2.2.7) 式より次式となる．

$$\lim_{k\to\infty} \beta(k) = \sqrt{\lambda_{min}[R]} > 0 \tag{2.4.35}$$

このことは，$\beta(k)$ の $k \to \infty$ での極限が存在することを意味している．したがって，(2.4.33) 式において $k \to \infty$ とした極限を考えると，次式の関係を得る．

$$\lim_{k\to\infty} E[\beta^2(k)\tilde{\theta}^T(k)\tilde{\theta}(k)] = 0 \tag{2.4.36}$$

よって，次式が成立する．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \beta(k)\tilde{\theta}(k) = 0 \tag{2.4.37}$$

(2.4.35) 式から，$\lim_{k\to\infty} \beta(k) > 0$ であることから次式を得る．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \theta(k) = \theta$$

ii) (2.4.7) 式と (2.4.19) 式から次式を得る．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} b(k) = 0 \tag{2.4.38}$$

さらに，$C(z^{-1})$ が漸近安定多項式であることを考慮すると，(2.4.5) 式の関係から，容易に次式の関係を導出することができる．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} D(z^{-1})z(k) = 0$$ ■

2．4．2　制御誤差の漸近的性質

次に，制御誤差の漸近的性質について考察する．そのための準備として以下に補題を与える．

［補題 2．4］

以下の関係が成立する．

$$T(z^{-1})e(k) = z^{-1}\hat{H}(z^{-1})w(k) - \hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})z(k) - \hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})\xi(k) \quad (2.4.39)$$

ただし，$e(k)$ は制御誤差で次式により与えられる．

$$e(k) := w(k-1) - y(k) \quad (2.4.40)$$

また，$\hat{H}(z^{-1})$ は以下の式により与えられる．

$$\hat{H}(z^{-1}) := T(z^{-1}) - \hat{\gamma} \cdot \hat{B}(z^{-1}) \quad (2.4.41)$$

ただし，$\hat{\gamma}$は (2.3.13) 式で与えられる．

〔証明〕 (2.2.1) 式に $D(z^{-1})$ を掛け，(2.4.5) 式および (2.4.6) 式を代入すると次式を得る．

$$A(z^{-1})D(z^{-1})y(k) = z^{-1}B(z^{-1})D(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})D(z^{-1})\eta(k) - b(k) \quad (2.4.42)$$

さらに，(2.4.7) 式，(2.4.4) 式および (2.3.3) 式，(2.3.4) 式を考慮すると，(2.4.42) 式は次式として書き換えられる．

$$\hat{A}(z^{-1})D(z^{-1})y(k) = z^{-1}\hat{B}(z^{-1})D(z^{-1})u(k) + \hat{C}(z^{-1})D(z^{-1})\eta(k) \quad (2.4.43)$$

(2.4.43) 式に$\hat{S}(z^{-1})$ を掛け，(2.3.14) 式に $z^{-1}\hat{B}(z^{-1})$ を掛け，(2.3.12) 式の関係を用いることで次式を得る．

$$T(z^{-1})y(k) = z^{-1}\hat{\gamma} \cdot \hat{B}(z^{-1})w(k) + D(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})\eta(k) \quad (2.4.44)$$

さらに，(2.4.40) 式に代入し，(2.4.41) 式と (2.4.6) 式の関係を用いると次式を得る．

$$T(z^{-1})e(k) = z^{-1}\hat{H}(z^{-1})w(k) - \hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})z(k) - \hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})\xi(k) \quad \blacksquare$$

［補題 2．4］および《定理 2．1》より，制御誤差信号 $e(k)$ の確率漸近収束性について，以下のような定理が成立する．

《定理 2．2》

【仮定 A】および【仮定 B】のもとで，(2.3.3) 式～(2.3.9) 式のパラメータ調整則と制御則 (2.3.14) 式から，以下のような関係式が成立する．

$T(z^{-1})$ が漸近安定多項式であるならば，

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} e'(k) = 0 \tag{2.4.45}$$

ただし，$e'(k)$ は次式により与えられる．

$$e'(k) := e(k) + \frac{S(z^{-1})D(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \tag{2.4.46}$$

〔証明〕 (2.4.39) 式を $T(z^{-1})$ で割り，(2.4.46) 式に代入した上で $k \to \infty$ の極限を考えると次式を得る．

$$\begin{aligned} P \cdot \lim_{k\to\infty} e'(k) = P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{z^{-1}\hat{H}(z^{-1})}{T(z^{-1})}w(k) - P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})}{T(z^{-1})}z(k) \\ - P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\{\hat{S}(z^{-1}) - S(z^{-1})\}D(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

$T(z^{-1})$ が漸近安定多項式であることを考慮し，(2.4.47) 式の右辺第一項に最終値の定理を適用すると

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{z^{-1}\hat{H}(z^{-1})}{T(z^{-1})} = P \cdot \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{z^{-1}\hat{H}(z^{-1})}{T(z^{-1})}\frac{K}{1 - z^{-1}} \tag{2.4.48}$$

となる．ただし，ここに (2.4.41) 式と (2.3.13) 式の関係から，

$$P \cdot \lim_{z\to 1} \hat{H}(z^{-1}) = T(1) - \gamma \cdot \hat{B}(1) = 0 \tag{2.4.49}$$

となる．さらに，(2.4.47) 式の右辺第２項と第３項は，(2.4.19) 式と (2.4.20) 式の関係から，

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\hat{S}(z^{-1})D(z^{-1})}{T(z^{-1})}z(k) = 0 \tag{2.4.50}$$

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\{\hat{S}(z^{-1}) - S(z^{-1})\}D(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) = 0 \tag{2.4.51}$$

となる[25)]．(2.4.48) 式～(2.4.51) 式の関係から次式を得る．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} e'(k) = 0$$ ■

以上により，《定理 2．1》および《定理 2．2》から，本章で提案したセルフチューニング極配置制御系の確率漸近収束性が保証されることが分かった．このことは，間接法に基づくＳＴＣは，パラメータ推定値の真値への収束性（一致性）が保証され，かつ制御系の特性多項式が漸近安定であるとき，制御誤差の収束性が保証されるということを意味している．

2．5　結言

本章では，確定外乱と確率外乱が挿入されたＣＡＲＭＡモデルに対して，セルフチューニング極配置制御系の一設計方法について考察した．本手法の特徴を以下にまとめる．

[1] 内部モデルを考慮することで確定外乱を有する系に対しても，ステップ関数の目標値に対し追従性が保証される．

[2] 極配置法に基づいているため制御系の安定化が可能であり，制御系の性質を考慮した制御系設計が行える．

[3] 提案したパラメータ調整則は，確定外乱の変動を受けにくいため，これによる制御性能の劣化が生じない．また，推定パラメータの真値への収束性が保証される．

[4] 制御誤差の確率漸近収束性が保証される．

なお，本手法と同様の手順で多変数系に拡張するとき，(2.2.14) 式に対応する恒等式が行列計算となり，行列計算の不可換性や計算量が非常に多くなるなどの理由から，容易に拡張することができない．この問題点について今後考察を加える必要がある．

参考文献

1) K.J.Åström, U.Borisson, L.Ljung and B.Wittenmark : Theory and Applications of Self-Tuning Regulators, Automatica, Vol.13, No.5, pp.457-476 (1977)

2) K.J.Åström : Theory and Applications of Adaptive Control -A Survey, Automatica, Vol.19, No.5, pp.471-486 (1983)

3) K.J.Åström, P.Hagander and J.Sternby : Zeros of Sampled Systems, Automatica, Vol.20, No.1, pp.31-38 (1984)

4) D.W.Clarke and P.J.Gawthrop : Self-Tuning Controller, IEE Proc., Vol.123, No.9, pp.929-934 (1975)

5) D.W.Clarke and P.J.Gawthrop : Self-Tuning Control, IEE Proc., Vol.126, No.6, pp.633-639 (1979)

6) D.W.Clarke : Self-Tuning Control of Nonminimum-Phase Systems, Automatica, Vol.20, No.5, pp.501-517 (1984)

7) M.J.Grimble : A Control Weighted Minimum-Variance Controller for Non-Minimum Phase Systems, Int. J. Control, Vol.33, No.4, pp.71-762 (1981)

8) D.W. Clarke, C.Mohtadi and P.S.Tuffs : Generalized Predictive Control, Automatica, Vol.23, No.2, pp.137-160 (1987)

9) D.W.Clarke and C.Mohtadi : Properties of Generalized Predictive Control, Automatica, Vol.25, No.6, pp.859-875 (1989)

10) P.E.Wellstead, D.Prager and P.Zanker : Pole-Assignment Self-Tuning Regurator, IEE Proc., Vol.126, No.8, pp.781-787 (1979)

11) P.E.Wellstead and S.P.Sanoff : Extended Self-Tuning Algorithm, Int. J. Control, Vol.34, No.3, pp.433-455 (1981)

12) M.B.Zarrop and M.Fischer : Reduced-Variance Pole-Assignment Self-Tuning Regulation, Int. J. Control, Vol.42, No.5, pp.1013-1033 (1985)

13) A.Y.Allidina and H.Yin : Explicit Pole-Assignment Self-Tuning Algorithm, Int. J. Control, Vol.42, No.5, pp.1113-1130 (1985)

14) M.A.Lelic, and M.B.Zarrop : Generalized Pole-Placement Self-Tuning Controller, Int. J. Control, Vol.46, No.2, pp.547-568, (1987)

15) L.Mo and M.M.Bayoumi : A Novel Approach to the Explicit Pole Assignment Self-Tuning Controller Design, IEEE Trans., Vol.AC-34, No.3, pp.359-363 (1989)

16) 山本，坂和，大松：セルフチューニング極配置制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.30, No.3 (1994)（掲載予定）

17) T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : A Global Convergence Analysis for Self-Tuning Pole-Assignment Controller, MTNS-93, Regensburg, (1993)

18) G.C.Goodwin and K.S.Sin : Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice-Hall, New Jersey (1984)

19) 北森：制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，Vol.15, No.4, pp.549-555 (1979)

20) 重政，高木，市川，北森：制御系設計のための実用的な汎用参照モデル，計測自動制御学会論文集，Vol.19, No.7, pp.592-594 (1983)

21) 山本，石原，大松，北森：多変数離散時間2自由度ＰＩＤ型制御系における適応ゲイン調整法，計測自動制御学会論文集，Vol.28, No.4, pp.484-491 (1992)

22) P.S.Tuffs and D.W.Clarke : Self-Tuning Control of Offset : A Unified Approach, IEE Proc., Vol.132, No.3, pp.100-110 (1985)

23) V.Solo : The Convergence of AML, IEEE Trans., Vol.AC-24, No.6, pp.958-962 (1979)

24) 山本，坂和，大松：多段予測に基づく多変数適応極配置制御系の一設計，第13回適応制御シンポジウム資料，pp.45-48 (1993)

25) W.A.Fuller : Introduction to Statistical Time Series, John Wiley and Sons, New York (1976)

[付録 A] 正実性の条件

$f(z^{-1})$ が正実性をもつということは，$f(z^{-1})$ において

1) z−平面の単位円外に極をもたない．
2) 単位円上の極は単根で，その留数は正である．
3) 単位円上の極を除き，$z = e^{j\omega}$ であるすべての ω に対して，$\mathrm{Re}\{\tilde{f}(e^{j\omega})\} \geq 0$ が成立する．ただし，$f(k)$ の離散時間フーリエ変換を $f(e^{j\omega})$ とする．
4) 分母分子の次数差は零．

が成立することである．

[付録 B] (2.4.27) 式の導出

任意の入力 $b(k)$ に対して，次のシステム

$$g(k) = f(z^{-1})b(k) \tag{b.1}$$

ただし，

$$f(z^{-1}) := \sum_{i=0}^{\infty} f_i \cdot z^{-i} \tag{b.2}$$

を考える．このとき，(b.1) 式と (b.2) 式から次式の関係を得る．

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)g(k) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)\{f(z^{-1})b(k)\} \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)\sum_{i=0}^{\infty} f_i \cdot b(k-i) \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)\sum_{\tau=0}^{k} f_{k-\tau}b(\tau) \end{aligned} \tag{b.3}$$

次に，$b(k)$ の離散時間フーリエ変換 $\tilde{b}(e^{j\omega})$ とその離散時間逆フーリエ変換を以下のように定義する．

$$\tilde{b}(e^{j\omega}) := \sum_{k=0}^{\infty} b(k)e^{j\omega k} \tag{b.4}$$

$$b(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{b}(e^{j\omega})e^{-j\omega k}d\omega \tag{b.5}$$

このとき，(b.3) 式の右辺に離散時間逆フーリエ変換と離散時間フーリエ変換を適用すると，次式の関係を得ることができる．

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)g(k) &= 2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{j\omega})\tilde{b}(e^{j\omega})e^{-j\omega k}d\omega\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{j\omega})\tilde{b}(e^{j\omega})\{\sum_{k=0}^{\infty} b(k)e^{-j\omega k}\}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{j\omega})\tilde{b}(e^{j\omega})\tilde{b}(e^{-j\omega})d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{b}(e^{j\omega})|^2\tilde{f}(e^{j\omega})d\omega
\end{aligned} \tag{b.6}$$

さらに，$\mathrm{Im}\{\tilde{f}(e^{j\omega})\} = -\mathrm{Im}\{\tilde{f}(e^{-j\omega})\}$ であるから，(b.6) は次式として書ける．

$$2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)g(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{b}(e^{j\omega})|^2\mathrm{Re}\{\tilde{f}(e^{j\omega})\}d\omega \tag{b.7}$$

ここで,[付録 A] の3) より，$\mathrm{Re}\{\tilde{f}(e^{j\omega})\} \geq 0$ であるから，次式を導出することができる．

$$2\sum_{k=0}^{\infty} b(k)g(k) \geq 0$$ ■

第３章

最小分散を考慮した セルフチューニング極配置制御系の設計

３．１　緒言

第２章では，確定外乱と確率外乱が付加されたＣＡＲＭＡモデルに対して，むだ時間が未知であるという状況の下で，セルフチューニング極配置制御系を設計した．そこでは，確定外乱を内部モデルにより定常的に除去し，さらにステップ状の目標値に対する追従性を図った．しかしながら，第２章での考察も含め，内部モデルの挿入により確率外乱の分散が増幅されるという問題点が生じるにもかかわらず，これに対する考察はほとんど成されていない[1)-3)]．したがって，確率外乱の分散をできるだけ抑えるという立場に立った制御系設計も一方で必要となる．そのためには，従来から考察されているセルフチューニングコントローラ（ＳＴＣ）の設計のように，評価規範の最小化に基づく最小分散制御法[4)5)]の考えを導入しなければならない．評価規範の最小化に基づく制御系設計の場合，制御系の安定性や性質についての検討は試行錯誤的であるため，ここでは，制御則を評価規範の最小化に基づいて導出し，これに含まれるコントローラパラメータを，極配置法の観点から設計するセルフチューニング極配置制御系の設計を考える．評価規範の最小化に基づくＳＴＣの設計については，これまでに数多く考察されているが[4)-10)]，その中で一般化最小分散制御法[6),7)]は，非最小位相系に対しても，制御系設計が比較的容易に行えるという長所を有している．

本章では，評価規範の最小化と極配置法の２つの方法論の長所（つまり，前者は出力の分散を抑えることであり，後者は，制御系の安定化および制御系の性質を考慮した制御系設計が行えること）を取り入れたセルフチューニング極配置制御系の一設計法について考察する．ここでは，第２章で考察した確定外乱を簡単のためにステップ状外乱に限定し，このステップ状外乱と確率外乱が付加されたＣＡＲＭＡモデルで記述されるシステムを制御対象とする．まず，ステップ状外乱を除去するために，制御入力に積分動作を挿入し，その上で確率外乱に対して，その分散をできる限り抑えるという意味で，制御則を一般化最小分散制御法[6),7)]に基づいて導出する．次に，制御則に含まれるコントローラパラ

メータを，極配置の観点から調整する．これにより，制御系の安定化および制御系の性質を考慮した上で制御系設計を行うことができ，さらにステップ状外乱と確率外乱を抑制することができる．さらに，本手法を間接法に基づいたセルフチューニングコントローラ[11)12)]に拡張し，第2章で考察したセルフチューニング極配置法との比較についても考察する．最後に，考察した制御手法の有効性を検証するために，いくつかの数値計算結果を示す．

3．2　セルフチューニング極配置制御系の設計

3．2．1　問題の記述

対象とするシステムは，次式のようなステップ状外乱が付加されたＣＡＲＭＡモデルで与えられるものとする．

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k) + d(k) \tag{3.2.1}$$

ただし，$u(k)$ および $y(k)$ は，対象とするシステムの制御入力（操作量）および出力（制御量）である．$\xi(k)$ および $d(k)$ は，それぞれガウス性白色雑音とステップ状外乱を示している．さらに，$A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ および $C(z^{-1})$ は，次式により与えられる多項式である．

$$\left.\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m} \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_l z^{-l} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.2}$$

(3.2.1) 式と (3.2.2) 式によるシステムおよび目標値 $w(k)$ に対し，以下のような仮定を設ける．

【仮定 A】

[A.1] 多項式 $A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ および $C(z^{-1})$ の次数 n，m および l は既知である．

[A.2] パラメータ a_i，b_i および c_i は未知である．

[A.3] $\hat{b}_0(k) \neq 0$ および $\hat{p}_0(k) \neq 0$．ただし，$\hat{b}_0(k)$ は b_0 の推定値を示しており，$\hat{p}_0(k)$ は後で定義される多項式 $P(z^{-1})$ の初項の推定値を示している．

[A.4] 多項式 $\Delta\hat{A}(z^{-1})$ と $\hat{B}(z^{-1})$ の係数列は一次独立とする．ただし，$\Delta = 1 - z^{-1}$ であり，$\hat{A}(z^{-1})$ および $\hat{B}(z^{-1})$ は，$A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$ の推定値を示している．

[A.5] $\hat{C}(z^{-1})$ は漸近安定多項式で，$[\{\Delta C(z^{-1})\}^{-1} - 1/2]$ は正実性が成立する．ただし，$\hat{C}(z^{-1})$ は $C(z^{-1})$ の推定値を示している．

[A.6] $d(k)$ は大きさが未知のステップ関数で与えられ，次式を満足する．

$$\Delta d(k) = 0 \tag{3.2.3}$$

[A.7] 目標値 $w(k)$ はステップ関数で与えられる．

[A.8] 入出力信号から構成される次のベクトル

$$\begin{aligned}\psi(k-1) := [&-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \cdots, -\Delta y(k-n),\\ &\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \cdots, \Delta u(k-m-1),\\ &\Delta \eta(k-1), \Delta \eta(k-2), \cdots, \Delta \eta(k-l)]^T\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

に対して，次式を満足する正定行列 Rが存在する．ここで，$\eta(k)$ は白色性ガウス雑音$\xi(k)$ の推定値を示している．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k-1)\psi^T(k-1) = R \tag{3.2.5}$$

さらに，$\{\xi(k)\}$ に対して，次のような仮定が成立するものとする．

【仮定 B】

[B.1]

$$E[\xi(k)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(k) = 0 \tag{3.2.6}$$

[B.2]

$$E[\xi^2(k)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi^2(k) = \sigma^2 \tag{3.2.7}$$

[B.3]

$$E[\xi(k)\xi(k+\tau)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(k)\xi(k+\tau) = 0 \qquad (\tau \neq 0) \tag{3.2.8}$$

(3.2.1) 式および (3.2.2) 式により与えられるシステムに対し，次節において最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御系を設計する．まず，次節において一般化最小分散制御法[6),7)]の観点から制御則を導出する．

３．２．２　制御則の導出と閉ループ伝達特性

非最小位相系に対して，次式の評価規範の最小化に基づいた一般化最小分散制御法[6),7)]が，確率的外乱を有する系に対し有効な手法として詳細に考察されている．

$$\text{minimize}J(k) = E[\{P(z^{-1})e(k+1)\}^2 + \{Q'(z^{-1})\Delta u(k)\}^2] \tag{3.2.9}$$

ただし，$e(k)$ は制御誤差信号であり次式による．

$$e(k) := w(k-1) - y(k) \tag{3.2.10}$$

さらに，

$$P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_n z^{-n} \tag{3.2.11}$$

$$Q'(z^{-1}) = q'_0 + q'_1 z^{-1} + q'_2 z^{-2} + \cdots + q'_{m-1} z^{-(m-1)} \tag{3.2.12}$$

である．

ここでは，確率的外乱に対し，その分散をできるだけ抑えるという観点から，(3.2.9) 式の評価規範の最小化に基づいて制御則を導く．

(3.2.9) 式の最小化を行う前に，時刻 k における出力 $P(z^{-1})y(k+1)$ の最適予測値 $P(z^{-1})\bar{y}(k+1/k)$ を導出する．はじめに，多項式 $F(z^{-1})$ を次式によって定義しておく．

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &:= z\{P(z^{-1})C(z^{-1}) - \Delta A(z^{-1})p_0\} \\ &= f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_{n_1} z^{-n_1} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

ただし，

$$n_1 := \max\{n, n+l-1\} \tag{3.2.14}$$

である．(3.2.1) 式に $z \cdot p_0\Delta$ を掛け，この (3.2.13) 式を代入して (3.2.3) 式を用いると次式を得る．

$$P(z^{-1})C(z^{-1})y(k+1) = F(z^{-1})y(k) + p_0 \cdot B(z^{-1})\Delta u(k) + \Delta p_0 \cdot C(z^{-1})\xi(k+1) \tag{3.2.15}$$

これにより，時刻 k における最適予測値 $P(z^{-1})\bar{y}(k+1/k)$ を次式として定義することができる．

$$P(z^{-1})\bar{y}(k+1/k) := [F(z^{-1})y(k) + p_0 \cdot B(z^{-1})\Delta u(k)]/C(z^{-1}) - p_0 \cdot \xi(k) \tag{3.2.16}$$

このとき，(3.2.15) 式と (3.2.16) 式から次の関係を得る．

$$P(z^{-1})y(k+1) = P(z^{-1})\bar{y}(k+1/k) + p_0 \cdot \xi(k+1) \tag{3.2.17}$$

次に，(3.2.17) 式，(3.2.10) 式および (3.2.9) 式から，次式を得る．

$$J(k) = E[\{P(z^{-1})(w(k) - \bar{y}(k+1/k))\}^2 + \{Q'(z^{-1})\Delta u(k)\}^2] + E[\{p_0 \cdot \xi(k+1)\}^2] \tag{3.2.18}$$

これは，$u(k)$ および $y(k)$ が $\xi(k+1)$ と無相関であるという性質を用いることにより導出される．

以上の準備の後，(3.2.18) 式を $u(k)$ で偏微分すると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} &= E[2\frac{\partial\{P(z^{-1})\bar{y}(k+1)\}}{\partial u(k)}\{P(z^{-1})(\bar{y}(k+1/k) - w(k))\} \\ &\qquad + 2\frac{\partial\{Q'(z^{-1})\Delta u(k)\}}{\partial u(k)}Q'(z^{-1})\Delta u(k)] \\ &= 2E[p_0 \cdot b_0\{P(z^{-1})(\bar{y}(k+1/k) - w(k))\} + q_0' \cdot Q'(z^{-1})\Delta u(k)]\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

したがって，評価規範 (3.2.9) 式を最小にする $u(k)$ は，(3.2.19) 式を零とおき，次式を満足する $u(k)$ として与えられる．

$$\begin{aligned}&F(z^{-1})y(k) + \{p_0 \cdot B(z^{-1}) + Q(z^{-1})C(z^{-1})\}\Delta u(k) \\ &\qquad - p_0 \cdot C(z^{-1})\xi(k) - P(z^{-1})C(z^{-1})w(k) = 0\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

ただし，

$$\begin{aligned}Q(z^{-1}) &:= \frac{q_0' \cdot Q'(z^{-1})}{p_0 \cdot b_0} \\ &= q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_{m-1} z^{-(m-1)}\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

である．ここで，(3.2.20) 式の左辺第3項の $-p_0 \cdot C(z^{-1})\xi(k)$ は，制御系に積分器を挿入したことで増幅される白色雑音の分散を抑えるという効力をもつ．これまでに考察されているセルフチューニング極配置制御法では，評価規範の最小化から制御則が導かれていないため，この項を取り扱っているものはない．この項は，評価規範の最小化に基づいて制御則を導いたことによって，初めて出現したものである．したがって，(3.2.20) 式の制御則により，ステップ状外乱の除去と確率的外乱の分散の最小化を実現することができる．

次に，極配置制御系の設計において，重要となる閉ループ制御系の特性多項式を導く．(3.2.1) 式，(3.2.13) 式および (3.2.20) 式から，次式のような入出力関係式を得る．

$$\begin{aligned}y(k) = &\frac{z^{-1}P(z^{-1})B(z^{-1})}{T(z^{-1})}w(k) + \frac{p_0 \cdot B(z^{-1}) + \Delta C(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \\ &+ \frac{p_0 \cdot B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})}\Delta d(k)\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

ただし，

$$T(z^{-1}) := P(z^{-1})B(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{3.2.23}$$

である．(3.2.22) 式から，$T(z^{-1})$ が閉ループ系の安定性を左右する多項式，つまり特性多項式となるとこが分かる．なお，先にも述べたが，(3.2.22) 式の右辺第3項は，[A.6] を考慮すると定常的に零となる．したがって，(3.2.23) 式に基づいて望ましい $T(z^{-1})$ から，$P(z^{-1})$ および $Q(z^{-1})$ を計算する極配置制御系を設計することができる．

3．2．3　セルフチューニング極配置制御系の設計

(3.2.1) 式と (3.2.20) 式から構成される制御系の特性は，(3.2.23) 式の $T(z^{-1})$ に依存することを，前節において考察した．ここでは極配置の問題を考えるため，この $T(z^{-1})$ を望ましい伝達特性を有するように設定し，これに基づくコントローラパラメータを計算する問題について考える．

以下での展開を容易にするために，極配置制御系の設計に際し必要となる式を，改めて以下に列挙しておく．

$$\begin{aligned} &F(z^{-1})y(k) + \{p_0 \cdot B(z^{-1}) + Q(z^{-1})C(z^{-1})\}\Delta u(k) \\ &\quad - p_0 \cdot C(z^{-1})\xi(k) - P(z^{-1})C(z^{-1})w(k) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

$$T(z^{-1}) := P(z^{-1})B(z^{-1}) + \Delta A(z^{-1})Q(z^{-1}) \tag{3.2.23}$$

ただし，

$$P(z^{-1}) = p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \cdots + p_n z^{-n} \tag{3.2.11}$$

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \cdots + q_{m-1} z^{-(m-1)} \tag{3.2.21}$$

である．

$$F(z^{-1}) = z\{P(z^{-1})C(z^{-1}) - \Delta A(z^{-1})p_0\} \tag{3.2.13}$$

まず，(3.2.23) 式における特性多項式 $T(z^{-1})$ を，ここでも第2章での考察と同様に，次式のような2次式に限定して考える．

$$T(z^{-1}) := 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} \tag{3.2.24}$$

この係数 t_1 および t_2 については，(2.2.17) 式～(2.2.20) 式から，立ち上がり時間と減衰振動特性に基づいて設計する．

次に，システムパラメータ a_i，b_iおよびc_i を未知パラメータ$\hat{a}_i(k)$，$\hat{b}_i(k)$ および$\hat{c}_i(k)$ に置き換え，これらから構成される未知パラメータベクトル$\hat{\theta}(k)$ とこれに対応するデータベクトル$\psi(k-1)$ を，次式として定義する．

$$\hat{\theta}(k) := [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \cdots, \hat{a}_n(k), \hat{b}_0(k), \hat{b}_1(k), \cdots, \hat{b}_m(k), \hat{c}_1(k), \hat{c}_2(k), \cdots, \hat{c}_l(k)]^T \tag{3.2.25}$$

$$\begin{aligned}\psi(k-1) := [&-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \cdots, -\Delta y(k-n),\\ &\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \cdots, \Delta u(k-m-1),\\ &\Delta \eta(k-1), \Delta \eta(k-2), \cdots, \Delta \eta(k-l)]^T\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

これらを用いて，以下のパラメータ調整則により$\hat{\theta}(k)$ を逐次推定する．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)}\varepsilon(k) \tag{3.2.27}$$

$$\Gamma(k) = \Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)} \tag{3.2.28}$$

$$\varepsilon(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k-1)\psi(k-1) - \eta(k-1)\} \tag{3.2.29}$$

$$\eta(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\psi(k-1) - \eta(k-1)\} \tag{3.2.30}$$

ただし，$\varepsilon(k)$ と$\eta(k)$ は，それぞれ事前誤差および事後誤差を示している．とくに，(3.2.30) 式から$\eta(k)$ は$\xi(k)$ の推定値として捉えることもできる．$\Gamma(k)$ は誤差共分散行列を示しており，その初期値は，$\Gamma(-1) = \alpha \cdot I$ただし $0 < \alpha < \infty$ として与える．このとき，まず (3.2.29) 式により$\varepsilon(k)$ を計算し，次に，(3.2.27) 式より$\hat{\theta}(k)$ を計算する．さらに，(3.2.28) 式において$\Gamma(k)$ を更新した上で，(3.2.30) 式により$\eta(k)$ を計算する．

さらに，(3.2.23) 式の $A(z^{-1})$ および $B(z^{-1})$ を推定パラメータ $\hat{A}(z^{-1})$ と $\hat{B}(z^{-1})$ に置き換えた次式に基づいて，$\hat{P}(z^{-1})$ と$\hat{Q}(z^{-1})$ を計算する．

$$T(z^{-1}) = \hat{P}(z^{-1})\hat{B}(z^{-1}) + \Delta\hat{A}(z^{-1})\hat{Q}(z^{-1}) \tag{3.2.31}$$

このとき，$\hat{P}(z^{-1})$ と$\hat{Q}(z^{-1})$ の計算は，２．２．４節での (2.2.21) 式〜(2.2.27) 式と同様の手順で行う．なお，この計算において一意に $P(z^{-1})$ および $Q(z^{-1})$ が与えられるように，それぞれの次数を n と $m-1$ として設定した．

また，次式から$\hat{F}(z^{-1})$ を計算する．

$$\hat{F}(z^{-1}) = z\{\hat{P}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1}) - \Delta\hat{A}(z^{-1})\hat{p}_0\} \tag{3.2.32}$$

ただし，$\hat{p}_0$は(3.2.31)式において計算される$\hat{P}(z^{-1})$ の第一項を示している．

最後に，以上の計算結果を用いて，次式を満足する$u(k)$ により制御入力を計算する．

$$\hat{F}(z^{-1})y(k)+\{\hat{p}_0\cdot\hat{B}(z^{-1})+\hat{Q}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})\}\Delta u(k)$$
$$-\hat{p}_0\cdot\hat{C}(z^{-1})\eta(k)-\hat{P}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})w(k)=0 \qquad (3.2.33)$$

この(3.2.33)式は，(3.2.20)式において$\xi(k)$が，実際には正確な値として取得することができないので，これを$\eta(k)$に置き換えたものである．

これらの手順を，簡単に以下にまとめる．

【最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御アルゴリズム】

[1] 設計パラメータσおよびδを設定する．

[2] 設計パラメータに基づいて，(2.2.17)式～(2.2.20)式により特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．

[3] 未知パラメータ$\hat{a}_i(k)$,$\hat{b}_i(k)$および$\hat{c}_i(k)$ を，(3.2.25)式～(3.2.30)式のパラメータ調整則により推定する．

[4] (3.2.31)式に基づいて，$\hat{P}(z^{-1})$と$\hat{Q}(z^{-1})$を計算する．

[5] (3.2.32)式から，$\hat{F}(z^{-1})$を計算する．

[6] (3.2.33)式に基づいて，$u(k)$を生成する．

[7] [3]へ戻る．

以上により，システムに対する【仮定 A】,【仮定 B】の下で，最小分散を実現するセルフチューニング極配置制御系を構成することができる．

(3.2.1)式と(3.2.33)式により構成される制御系のブロック線図を，Fig.3.1 に示す．

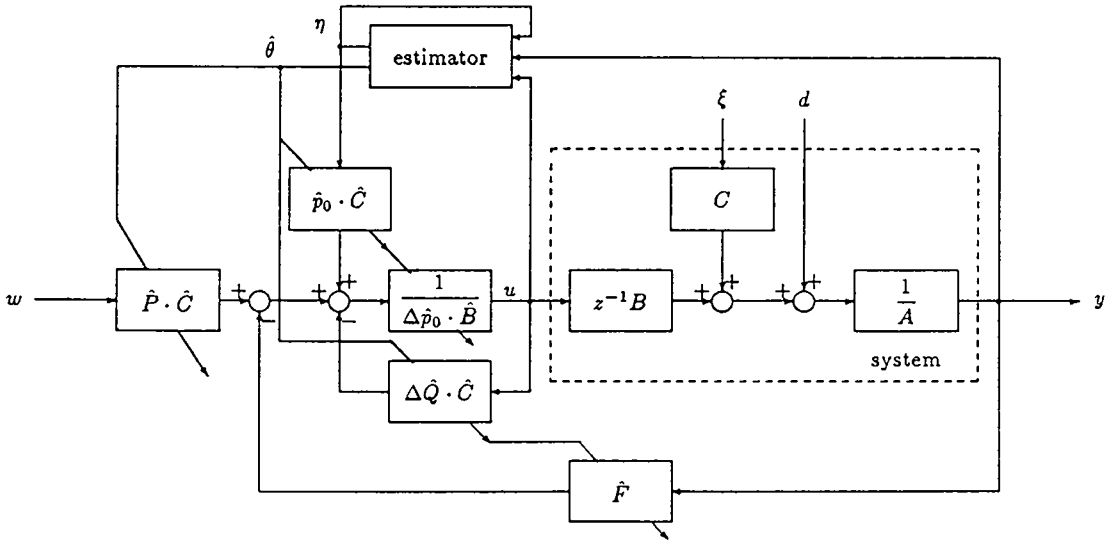

Fig.3.1　Block diagram of the proposed pole-assignment control system with minimum variance property.

3．2．4　セルフチューニング極配置制御系の漸近的性質

前節で考察した最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御系の漸近的性質について，2．4節での考察と同様の手順により，以下の定理を導出することができる．

《定理 3．1》

【仮定 A】および【仮定 B】の下で，(3.2.25) 式～(3.2.30) 式のパラメータ調整則と制御則 (3.2.33) 式から，以下のような関係式が成立する．

$T(z^{-1})$ が漸近安定多項式であるならば，

i)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \hat{\theta}(k) = \theta \tag{3.2.34}$$

ただし，θはシステムパラメータの真値である．

ii)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} z(k) = 0 \tag{3.2.35}$$

ただし，$z(k)$ は次式により与えられる．

$$z(k) := \eta(k) - \xi(k) \tag{3.2.36}$$

iii)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} e'(k) = 0 \tag{3.2.37}$$

ただし，$e'(k)$ は次式により与えられる．

$$e'(k) := e(k) + \frac{p_0 \cdot B(z^{-1}) + \Delta C(z^{-1})Q(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \tag{3.2.38}$$

〔証明〕 i)《定理 2．1》と同様にして導出することができる．

ii) $D(z^{-1}) = \Delta(= 1 - z^{-1})$ とした (2.4.20) 式から，次式の関係を得る．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \Delta z(k) = 0 \tag{3.2.39}$$

さらに，$z(-1) = 0$ を考慮すると，次式を導出することができる．

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} z(k) = 0$$

iii) まず，(2.4.43) 式から次式を得る．

$$\hat{A}(z^{-1})\Delta y(k) = z^{-1}\hat{B}(z^{-1})\Delta u(k) + \hat{C}(z^{-1})\Delta\eta(k) \tag{3.2.40}$$

次に，(3.2.40) 式に $\{\hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \hat{Q}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})\}$ を掛け，(3.2.33) 式に $z^{-1}\hat{B}(z^{-1})$ を掛け，さらに，(3.2.32) 式および (3.2.31) 式を用いることで次式を得る．

$$\begin{aligned}\hat{C}(z^{-1})T(z^{-1})y(k) = z^{-1}\hat{B}(z^{-1})\hat{P}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})w(k) \\ + \hat{C}(z^{-1})\{\hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \Delta\hat{C}(z^{-1})\hat{Q}(z^{-1})\}\eta(k)\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

この (3.2.41) 式を (3.2.10) 式に代入し，(3.2.31) 式および (3.2.36) 式を用いることで次式の関係を得る．

$$\begin{aligned}T(z^{-1})e(k) = z^{-1}\Delta\hat{A}(z^{-1})\hat{Q}(z^{-1})w(k) - \{\hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \Delta\hat{C}(z^{-1})\hat{Q}(z^{-1})\}z(k) \\ - \{\hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \Delta\hat{C}(z^{-1})\hat{Q}(z^{-1})\}\xi(k)\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

したがって，(3.2.42) 式に対して《定理　2．2》と同様の手順で，(3.2.37) 式を導出することができる．■

以上により，本節において考察した最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御系の確率漸近収束性が保証される．

3．2．5　第2章の方法との関連

ここでは，第2章で考察した極配置制御アルゴリズムと，本章で考察した極配置制御アルゴリズムとの関連について考察する．

まず，(3.2.31) 式の両辺に $\hat{C}(z^{-1})$ を掛け，(3.2.32) 式の関係を用いると次式を得る．

$$\hat{C}(z^{-1})T(z^{-1}) = \Delta\hat{A}(z^{-1})\{\hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \hat{Q}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})\} + z^{-1}\hat{F}(z^{-1})\hat{B}(z^{-1}) \tag{3.2.43}$$

次に，(2.3.12) 式において，$D(z^{-1}) := 1 - z^{-1}$ とし，(3.2.43) 式と比較すると，

$$\left.\begin{aligned}\hat{S}(z^{-1}) &:= \hat{p}_0 \cdot \hat{B}(z^{-1}) + \hat{Q}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1}) \\ \hat{R}(z^{-1}) &:= \hat{F}(z^{-1})\end{aligned}\right\} \tag{3.2.44}$$

として考えると，$l \leq 1$ の場合，(3.2.43) 式と (2.3.12) 式が等価となる．ただし，$\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k) = 0$ とした (3.2.33) 式と (2.3.14) 式の制御則を比較したとき，$w(k)$ に掛かる多項式が，$\hat{P}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})$ と $\hat{\gamma} \cdot \hat{C}(z^{-1})$ と異なる．このことは，第2章での手法が $\hat{\gamma}$ の調整によって，ステップ関数の目標値に対する追従性を保証するのに対し，本章で考察した手法は，(3.2.42) 式から明らかなように，ステップ関数の目標値に対してロバスト追従性を有しているということを意味している．しかし，定常的には (3.2.31) 式より

$$\hat{P}(1) = T(1)/\hat{B}(1) \tag{3.2.45}$$

となり，これは (2.3.13) 式の $\hat{\gamma}$ と等価となる．

以上により，ロバスト追従性という点では異なるものの，$l \leq 1$ の場合において，本章で考察した手法は，第２章で考察した手法に対して最小分散制御の特性を考慮した制御手法となっていることが分かる．

３．２．６　数値計算結果

本章で考察した最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムの有効性を検証するために，以下に３つの数値計算結果を示す．

まず，(3.2.33) 式に含まれる $-\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k)$ の項の効力について，次の［例３．１］で考察する．

［例３．１］

対象とするシステムが次式として与えられるものとする．

$$y(k) = 0.503y(k-1) - 0.050y(k-2) + 0.077u(k-1) + 0.185u(k-2) + 0.010u(k-3) + \xi(k) + 0.2\xi(k-1) \tag{3.2.50}$$

ただし，$E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 1$ とする．

まず，提案した (3.2.33) 式の制御則による制御結果を，**Fig.3.2** に示す．なお，(a) には出力結果を，(b) には制御入力の結果を示す．比較のために，(3.2.33) 式において，$-\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k)$ の項を除去した制御則による制御結果を，**Fig.3.3** に示す．ここでは，出力の分散から制御効果をみるため，目標値は $w(k) = 0$ とし特性多項式も $T(z^{-1}) = 1$ として設定した．**Fig.3.2** と **Fig.3.3** において，101[step]～200[step] での出力の分散と制御入力の分散を調べると，それぞれ，**Fig.3.2** では 1.48 および 2.66，**Fig.3.3** では 6.45 および 54.77 であった．このことからも，$-\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k)$ の項により，出力の分散が抑えられていることが分かる．とくに，制御入力の分散が十分に抑えられている．以上により，本手法の有効性が検証される．

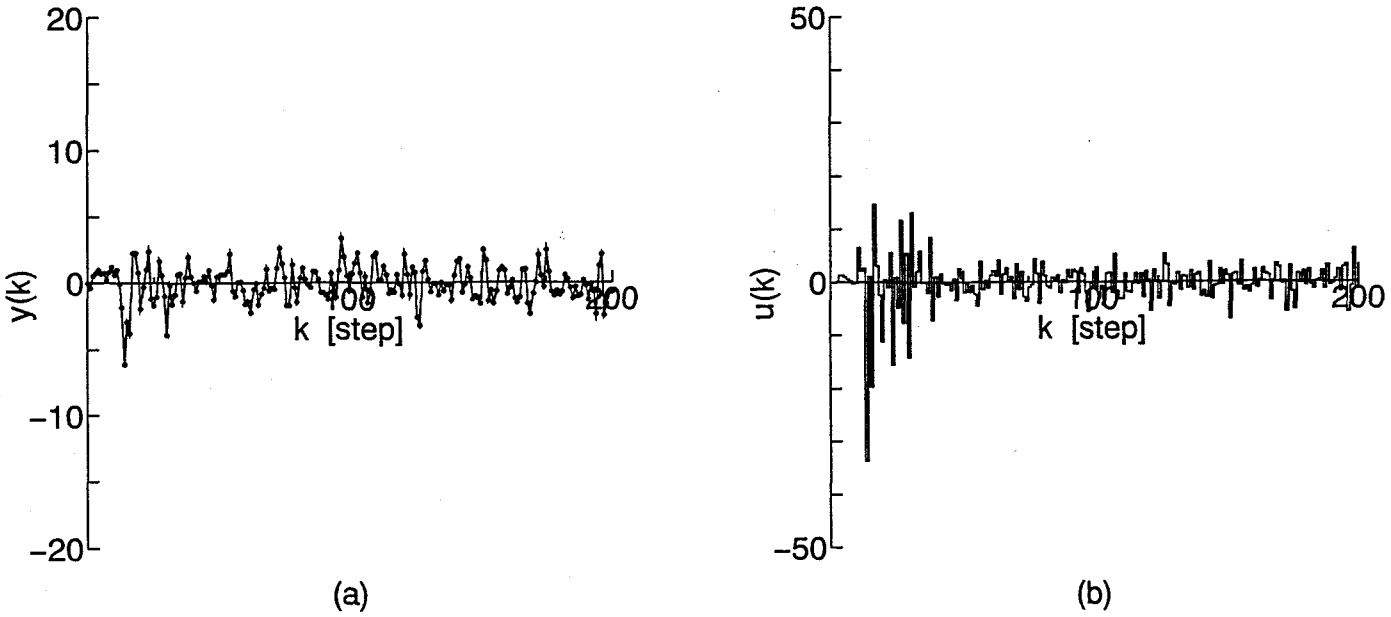

Fig.3.2　Simulation results using the pole-assignment control algorithm with the term of $-\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k)$ where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

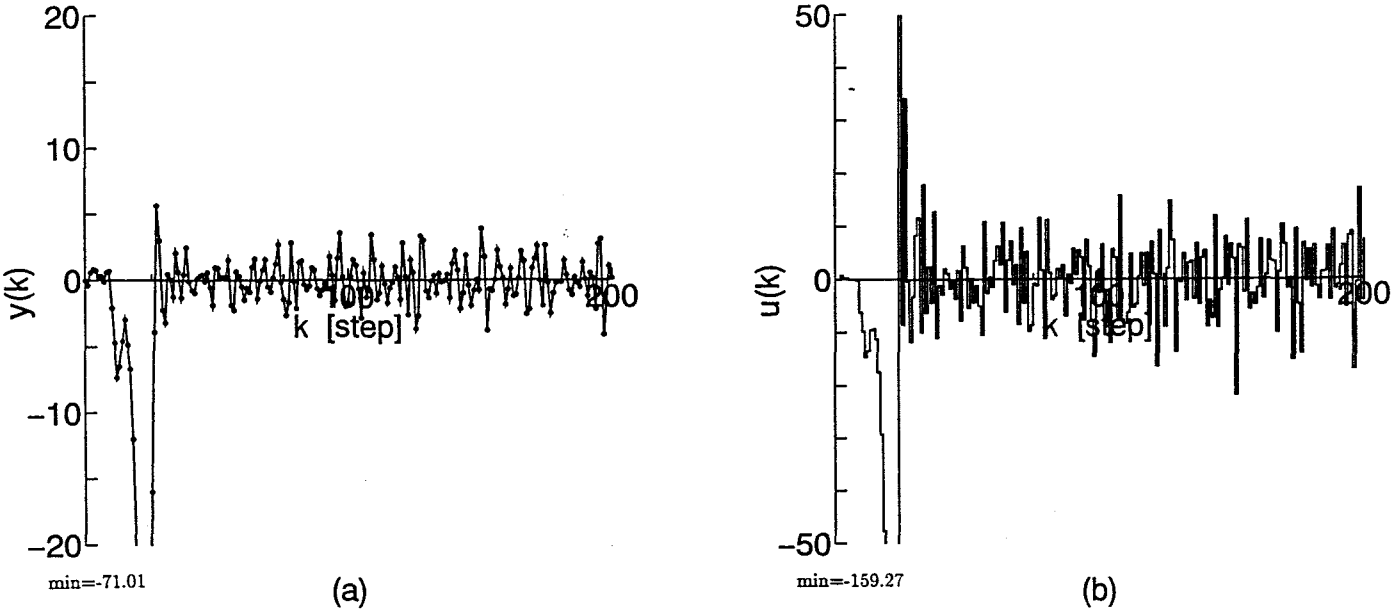

Fig.3.3　Simulation results using the pole-assignment control algorithm without the term of $-\hat{p}_0 \cdot \hat{C}(z^{-1})\eta(k)$ where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

次に，Wellsteadらにより提案されているセルフチューニング極配置法[1]との比較について考察する．

[例3．2]

対象とするシステムは，次式により与えられるものとする．

$$y(k) = 0.503y(k-1) - 0.050y(k-2) + 0.077u(k-1) + 0.185u(k-2) + 0.010u(k-3) + \xi(k) + 0.2\xi(k-1) + 2 \tag{3.2.51}$$

ここでは［例3．1］と異なり，システムにはステップ状の外乱が付加されている．また，$\xi(k)$については，$E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 0.1$とする．上述のシステムに対し，パラメータ同定用のモデルとして次式を用いる．

$$y(k) = -\hat{a}_1(k)y(k-1) - \hat{a}_2(k)y(k-2) + \hat{b}_0(k)u(k-1) + \hat{b}_1(k)u(k-2) + \hat{b}_2(k)u(k-3) + \xi(k) + \hat{c}_1(k)\xi(k-1) + \hat{d}(k) \tag{3.2.52}$$

さらに，特性多項式として次式を用いる．

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.226z^{-1} + 0.416z^{-2} \tag{3.2.53}$$

この$T(z^{-1})$は，$\sigma = 3.0$および$\delta = 0.5$として設計したものである．

以上の設定の上で，本節で考察した最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムを適用する．このときの制御結果を，**Fig.3.4** に示す．また，**Fig.3.5** には，このときのパラメータ同定結果を示す．これらの結果から，パラメータ同定が十分行われると，目標値に追従する良好な結果が得られていることが分かる．さらに，比較のために文献1)で考察されているWellsteadらによるセルフチューニング極配置制御法による制御結果を，**Fig.3.6** に示す．**Fig.3.4** と **Fig.3.6** を比較したとき，本章で考察した手法によると，制御入力には振動がなく，出力の分散が十分に抑えられており，その有効性が伺える．

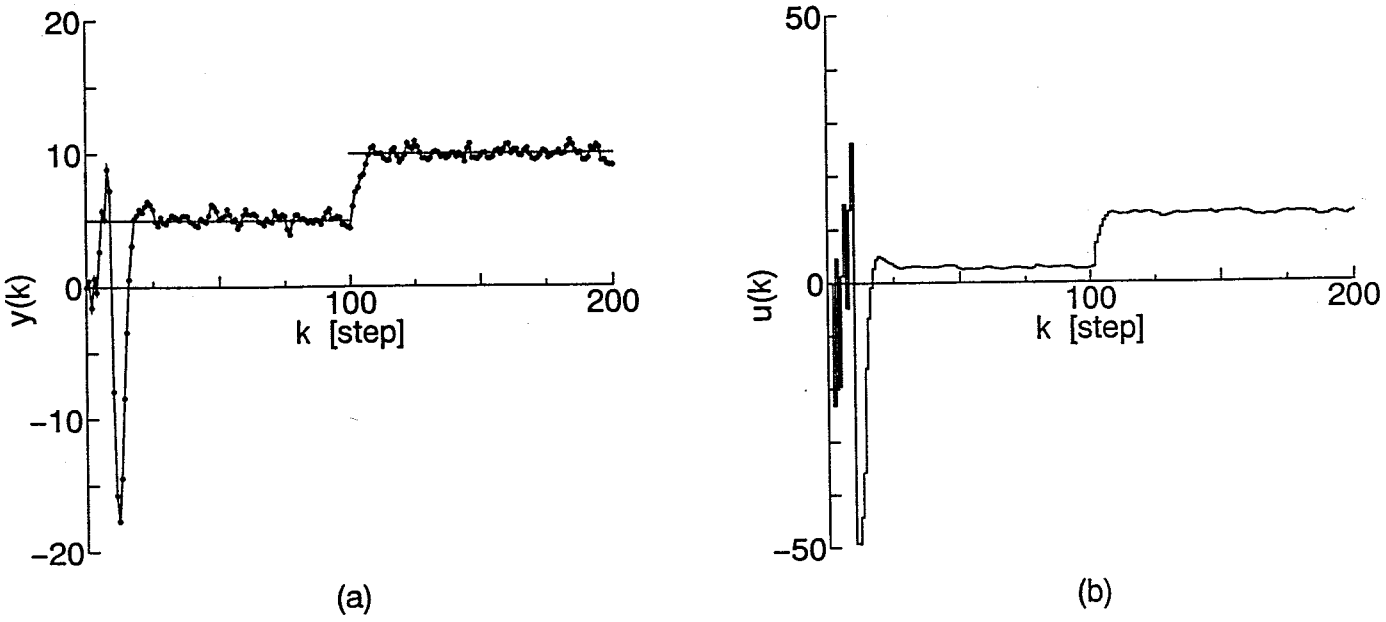

Fig.3.4 Simulation results using the proposed self-tuning pole-assignment control algorithm of (3.2.33) with minimum variance property where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

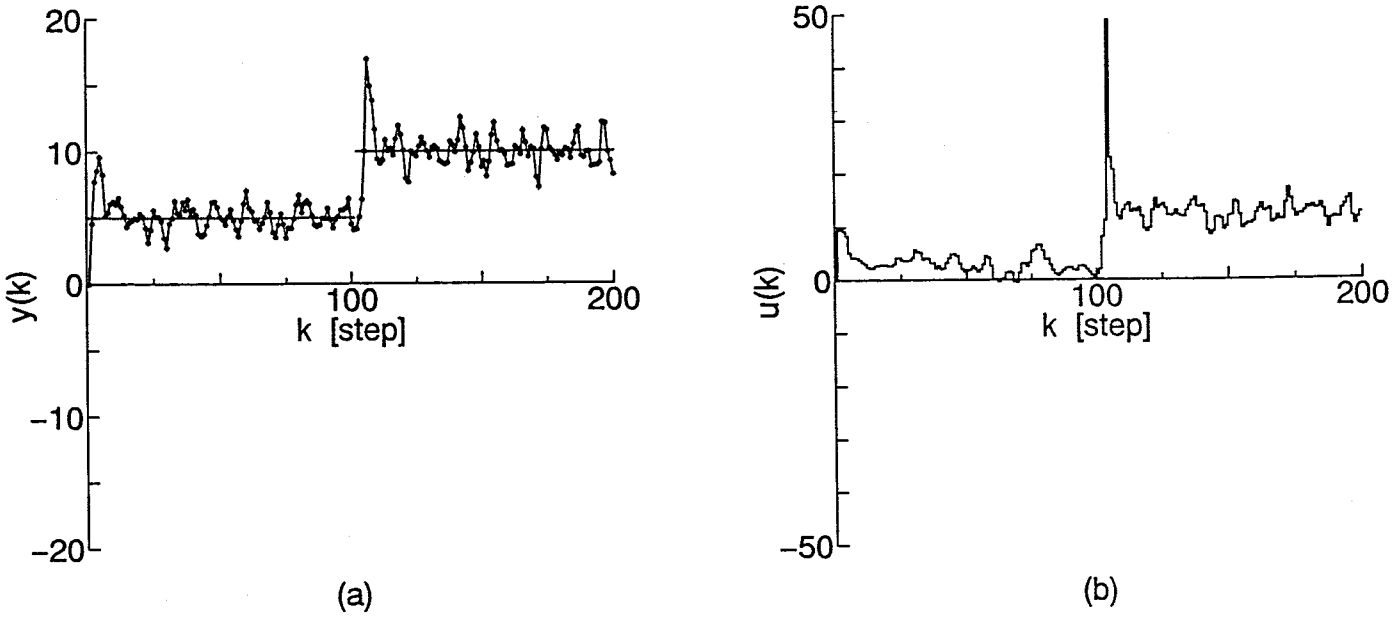

Fig.3.6 Simulation results using the usual self-tuning pole-assignment control algorithm by Wellstead, et al. where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

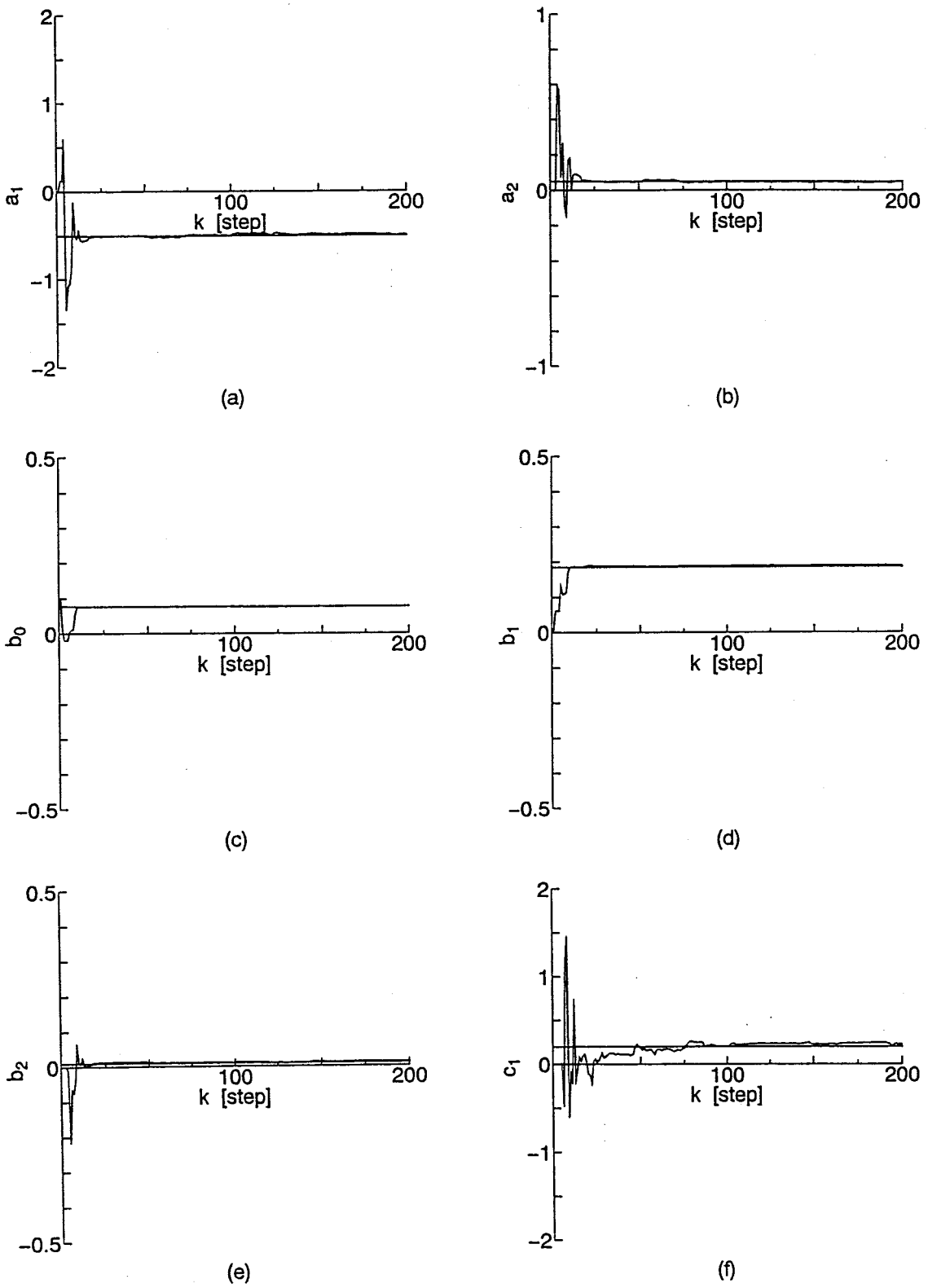

Fig.3.5　Identified parameters using the least squares algorithm of (3.2.25)-(3.2.30).

［例３．３］

ここでは，目標値がランプ関数とステップ関数の組み合わせとして与えられる場合について考察する[13)-15)]．ランプ関数の目標値への追従性を保証するために，内部モデルとして２個の積分器を挿入することが考えられるが，先にも考察したように，このことにより出力の分散を増幅させるという問題点が生じる．また，目標値がランプ関数で与え続けられるということはありえないので，ここでは，先に考察した１型のセルフチューニング極配置制御系に，目標値修正フィルタを挿入することで，この問題を改善する方法を提案する．

単位ランプ入力に対しては，(3.2.45) 式を考慮した (3.2.42) 式に最終値の定理[16)]を適用すると，次式の定常偏差

$$E[e(\infty)] = \frac{\hat{A}(1)\hat{Q}(1)}{T(1)} \tag{3.2.54}$$

が生じることから，$w(k)$ の代わりに見かけ上の目標値 $w_1(k)$ として次式を導入する．

$$\begin{aligned} w_1(k) &:= w(k) + \frac{\hat{A}(1)\hat{Q}(1)}{T(1)}\{w(k) - w(k-1)\} \\ &:= \{(1+\hat{g}_f) - \hat{g}_f z^{-1}\}w(k) \\ &:= \hat{G}_F(z^{-1})w(k) \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

ただし，

$$\hat{g}_f := \frac{\hat{A}(1)\hat{Q}(1)}{T(1)} \tag{3.2.56}$$

である．ここに，(3.2.55) 式の第一式右辺第２項にある $\{w(k) - w(k-1)\}$ により，ランプ関数の目標値に対しては，その傾きの情報を得ることができる．また，ステップ関数の目標値に対しては，この項は零となり，(3.2.55) 式の第一式は，$w(k)$ のみとなる．このことは，(3.2.55) 式がステップ関数とランプ関数の組み合わせで与えられる目標値に対して，自動的に切り替え可能であることを示している．結局，制御入力は次式として与えられる．

$$\begin{aligned} &\hat{F}(z^{-1})y(k) + \{\hat{B}(z^{-1}) + \hat{Q}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})\}\Delta u(k) \\ &\quad - \hat{C}(z^{-1})\eta(k) - \hat{P}(z^{-1})\hat{C}(z^{-1})\hat{G}_F(z^{-1})w(k) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

ここで考察した制御手法の有効性を示すために，以下に数値計算を行う．

対象とするシステムは，次式とする．

$$\begin{aligned} y(k) = {} & 0.503y(k-1) - 0.050y(k-2) + 0.077u(k-1) + 0.185u(k-2) + 0.010u(k-3) \\ & + \xi(k) + 0.2\xi(k-1) + 2 \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

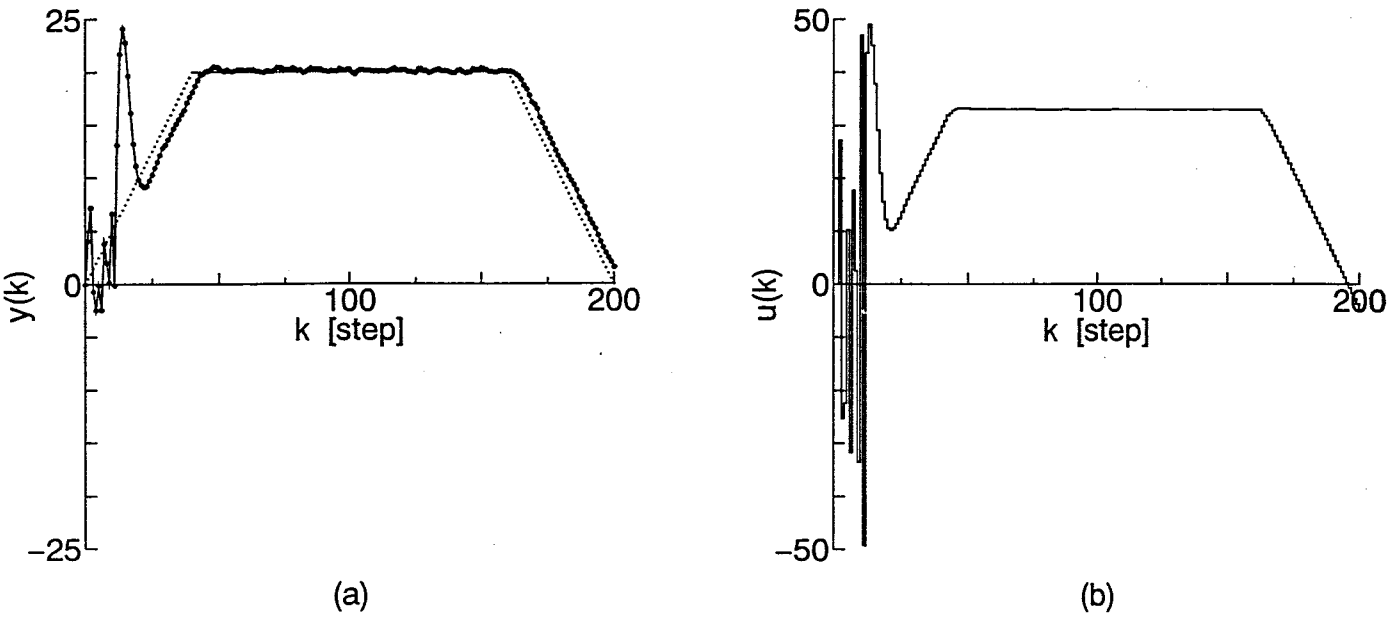

Fig.3.7 Simulation results for the reference signal with ramp function using the self-tuning pole-assignment control algorithm with minimum variance property of (3.2.33) where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

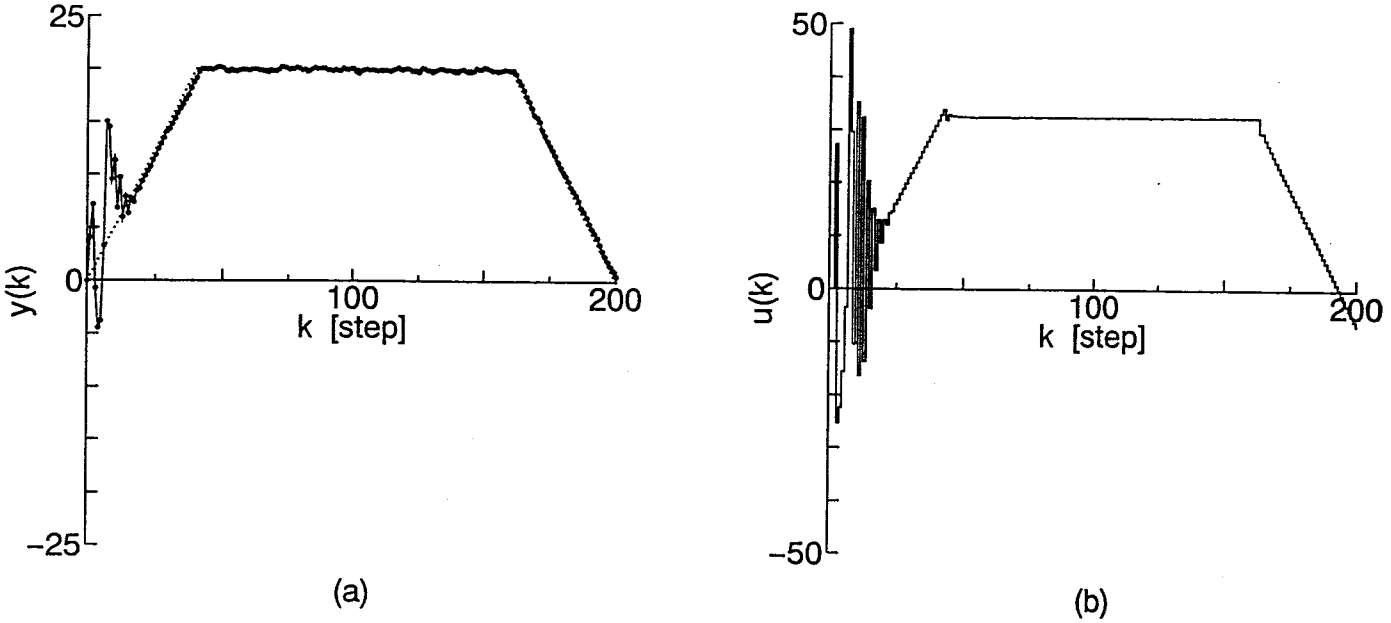

Fig.3.8 Simulation results for the reference signal with ramp function using the proposed self-tuning pole-assignment control algorithm of (3.2.57) where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

また，$\xi(k)$ については，$E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 0.01$ とする．上述のシステムに対し，パラメータ同定用のモデルとして，(3.2.52) 式を用いる．さらに，特性多項式としては，(3.2.53) 式を用いて数値計算を行う．

以上の設定の上で，まず，(3.2.33) 式によるセルフチューニング極配置制御アルゴリズムを適用する．このときの制御結果を，**Fig.3.7** に示す．なお，目標値は図中点線で示してあるような，ランプ関数とステップ関数の合成関数として与えた．**Fig.3.7** から，ランプ入力に対して定常偏差が生じていることが分かる．

一方，(3.2.55) 式と (3.2.57) 式によるセルフチューニング極配置制御アルゴリズムによる制御結果を，**Fig.3.8** に示す．**Fig.3.7** と比較して，ランプ入力に対しても十分に追従する良好な結果が得られていることが分かる．なお，時間関数で与えられる目標値に対しては，同様の考察を拡張することで，目標値への追従性を改善することができる．

以上により，本章で考察したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムの有効性が検証された．

3．3　結言

本章では，一般化最小分散制御法の評価規範の最小化から，最小分散を考慮したセルフチューニング極配置制御アルゴリズムの提案を行った．本手法の特徴は以下にまとめられる．

[1] 積分動作により，ステップ関数で与えられる目標値に対し，ロバスト追従性が保証される．

[2] 極配置法に基づいているため，制御系の安定化が常に実現でき，制御系の性質を考慮した制御系設計が行える．

[3] 評価規範の最小化に基づいて制御則を導出したことにより，確率的外乱の分散の影響をできるだけ抑えることができ，出力の最小分散制御が実現できる．

[4] 制御系の実装化が比較的容易に実現できる．

[5] 制御誤差の確率漸近収束性が保証される．

なお，制御系を設計するにあたり，[A.2] の $b_0 \neq 0$ という仮定が必要となるが，文献 12) では $b_0 = 0$ の場合に対して，一般化予測制御法の評価規範の最小化に基づいて制御則を導出し，これによる極配置制御系を設計することで，同様の制御結果を得ることができることを示している．

参考文献

1) P.E.Wellstead, D.Prager and P.Zanker : Pole-Assignment Self-Tuning Regurator, IEE Proc., Vol.126, No.8, pp.781-787 (1979)
2) P.E.Wellstead and S.P.Sanoff : Extended Self-Tuning Algorithm, Int. J. Control, Vol.34, No.3, pp.433-455 (1981)
3) M.B.Zarrop and M.Fischer : Reduced-Variance Pole-Assignment Self-Tuning Regulation, Int. J. Control, Vol.42, No.5, pp.1013-1033 (1985)
4) K.J.Åström, U.Borisson, L.Ljung and B.Wittenmark : Theory and Applications of Self-Tuning Regulators, Automatica, Vol.13, No.5, pp.457-476 (1977)
5) K.J.Åström : Theory and Applications of Adaptive Control -A Survey, Automatica, Vol.19, No.5, pp.471-486 (1983)
6) D.W.Clarke and P.J.Gawthrop : Self-Tuning Controller, IEE Proc., Vol.123, No.9, pp.929-934 (1975)
7) D.W.Clarke : Self-Tuning Control of Nonminimum-Phase Systems, Automatica, Vol.20, No.5, pp.501-517 (1984)
8) M.J.Grimble : A Control Weighted Minimum-Variance Controller for Non-Minimum Phase Systems, Int. J. Control, Vol.33, No.4, pp.71-762 (1981)
9) D.W. Clarke, C.Mohtadi and P.S.Tuffs : Generalized Predictive Control, Automatica, Vol.23, No.2, pp.137-160 (1987)
10) M.A.Lelic and M.B.Zarrop : Generalized Pole-Placement Self-Tuning Controller, Int. J. Control, Vol.46, No.2, pp.547-568, (1987)
11) 山本，石原，大松：前置補償器をもつ一般化最小分散制御に対する適応系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.26, No.6, pp.656-661 (1990)
12) T.Yamamoto, Z.H.Luo, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning Pole-Assignment Controller with Long-Range Prediction, Preprints of 12th IFAC World Congress, Sydney, pp.375-380 (1993)
13) 山本，渡辺，大松：非最小位相系に対する２次規範制御の規準値追従性の改善，システムと制御，Vol.31, No.8, pp.604-612 (1987)
14) 山本，大松，石原：規準値追従性の改善ＳＴＣアルゴリズムに対する誤差解析，システムと制御，Vol.32, No.3, pp.207-208 (1988)
15) T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara : Improvement of the Tracking Property for the Linear Quadratic Adaptive Controller, Proc. of IFAC Symposium on ACASP, Glasgow, pp.117-122 (1989)
16) E.Mishkin and L.Braun : Adaptive Control Systems, McGraw-Hill, New York (1961)

第４章

セルフチューニングＰＩＤ制御系の設計

４．１　緒言

ＰＩＤ制御手法[1)-6)]に代表される古典制御手法は，望ましい設計仕様を満足するような制御構造の決定およびその制御系に含まれる制御パラメータの調整法について，連続時間系を中心に数多く考察されてきた[6)]．一方，近年のディジタル計算機の発達により，入出力信号を数列として捉えた離散時間制御系の設計法についての考察も，並行して行われるようになってきた．ディジタル計算機の力を借りれば，複雑な制御アルゴリズムも容易に計算可能であることから，簡単な制御構造を有する古典制御手法に固執する必要もなく，制御性能の向上を目指して，自由度の大きい制御系を設計することができる．しかし，実システムへの実装化を考えたとき，複雑な制御構造のために実装化が不可能であったり，あいるは制御パラメータのもつ物理的意味が不明確になるなどの理由から，企業等の現場においては，今なお古典制御手法に頼るところが大きいのが現状である[7)]．したがって，ディジタル計算機を有効に利用した離散時間系でのＰＩＤ制御系の設計は，使う側すなわち企業の立場において非常に有用であると思われる．とくに，ＰＩＤゲインの決定および調整は，制御系の性質を大きく左右するため重要な問題とされている．離散時間系においては，高橋らによりステップ応答特性に基づいて，ＰＩＤゲインを決定する方法が報告されている[4)]．しかし，実際にはこの調整則により得られたＰＩＤゲインが，そのまま用いられることは少なく，実装化されるまでには何回かの調整が行われる．調整の際，ゲインの値によっては過大なオーバシュートが生じたり，整定時間が長くなったり，あるいは定常特性が劣化するなど，ゲインの決定は非常に厄介な問題である．また，制御対象の特性変動に対し，あらかじめ決定されたゲインにより，そのまま制御を続けると，満足な結果が得られないどころか，不安定になるという問題も生じる．これらの問題を軽減するために，オートチューニングＰＩＤ制御系[8)-12)]やセルフチューニングＰＩＤ制御系[13),14)]の構成法に関する報告がなされた．いずれの場合も，制御系設計が複雑であるとか，安定性が十分に保証されないといった問題点が残されている．

本章では，制御系をＰＩＤ制御系に限定し，ＰＩＤゲインを適応調整するセルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する．とくに，ＰＩＤゲインの適応調整にあたっては，制御系

の安定性や性質を設計者が設計できるように，極配置法に基づいて行う．まず，４．２節では極配置法に基づいたセルフチューニングＰＩＤ制御系の基本設計法[15]について述べる．ここでは，制御対象の記述モデルとしてＣＡＲ（Controlled Auto-Regressive）モデルを用い，離散時間系でのむだ時間が存在しないとして考察する．また，構成したセルフチューニングＰＩＤ制御系の有効性を数値計算により検証する．なお，むだ時間が存在する系に対する考察を，４．３節と４．４節において行う．一般に，むだ時間が存在すると過渡特性が鈍ったり，安定性が劣化することがある．４．３節では，むだ時間補償として制御対象に前置補償器を挿入し，その拡大系に対してセルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する方法[16),17)]について考察する．次に，４．４節では目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する[18),19)]．先の前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムは，むだ時間の大きさに対応して前置補償器の次数が大きくなってしまう．これに対しここで考察するセルフチューニングＰＩＤ制御系は，むだ時間の大きさによらず，ＰＩＤゲインと新しく挿入した目標値ゲインのみで制御系を設計することができる．最後に，４．５節では代表的な化学プラントの一つとして考えられるポリスチレン重合反応器の温度制御問題[19)]に，本章で考察した手法を適用し，数値計算結果からその有効性について検討する．

４．２　セルフチューニングＰＩＤ制御系の基本設計

４．２．１　問題の記述

対象とするシステムを，次式で与えられるようなステップ状外乱と確率的外乱の付加された２次のＣＡＲモデル†で記述する．

$$A(z^{-1})y(k) = b_0 \cdot u(k-1) + \xi(k) + d(k) \tag{4.2.1}$$

ただし，

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{4.2.2}$$

であり，$u(k)$ および $y(k)$ は，それぞれ制御入力および出力を示す．また，$\xi(k)$ と $d(k)$ は外乱を示し，それぞれ，白色性ガウス雑音とステップ状外乱とする．(4.2.1) 式は，連続

† 本章で考察するセルフチューニングＰＩＤコントローラは，システムの次数とＰＩＤ制御器の次数が同じでなければならない．すなわち，１次系に対してはＰＩ制御系，２次系に対してはＰＩＤ制御系を設計するものとする．

時間系において，むだ時間が存在しないか，むだ時間T_Lがサンプリング間隔Tに比べて，十分小さいようなシステムを扱うことを意味している．また，一般に制御対象は，n次の記述モデルで表現されるが，プロセス制御系のほとんどが，2次系以下で記述されることが多いことを考慮して，ここでは(4.2.1)式および(4.2.2)式を記述モデルとして用いる．すなわち，(4.2.1)式および(4.2.2)式として記述できる制御対象として，以下のようなシステムが考えられる．

$$G_1(s) = \frac{k_1}{1+T_1 s} e^{-T_L s} \tag{4.2.3}$$

$$G_2(s) = \frac{k_2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-T_L s} \tag{4.2.4}$$

ただし，むだ時間においては，先にも述べたように$T_L = 0$であるか$T_L \ll T$である．また，(4.2.4)式において，ω_nは固有振動数，ζは減衰係数で，ここでは$\zeta \geq 0.707$を満足するようなシステムを扱う．このことは，(4.2.4)式のシステムが共振点をもたないということに対応する．なお，むだ時間が存在する場合についての考察は，4．3節および4．4節において行う．

(4.2.1)式および(4.2.2)式で与えられるシステムに対し，以下のような仮定が成立するものとする．

【仮定 A】

[A.1] パラメータa_1，a_2およびb_0は未知である．

[A.2] $d(k)$は未知のステップ関数で与えられ，大きさは一定であり次式を満足する．

$$\Delta d(k) = 0 \tag{4.2.5}$$

ただし，$\Delta := 1 - z^{-1}$である．

[A.3] 目標値$w(k)$はステップ関数で与えられる．

[A.4] 入出力信号から構成される次のベクトル

$$\psi(k-1) := [-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \Delta u(k-1)]^T \tag{4.2.6}$$

に対して，次式を満足する正定行列Rが存在する．ここで，$\eta(k)$は白色性ガウス雑音$\xi(k)$の推定値を示している．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \psi(k-1)\psi^T(k-1) = R \tag{4.2.7}$$

さらに，$\{\xi(k)\}$に対して，次のような仮定が成立するものとする．

【仮定 B】

[B.1]

$$E[\xi(k)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(k) = 0 \tag{4.2.8}$$

[B.2]

$$E[\xi^2(k)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi^2(k) = \sigma^2 \tag{4.2.9}$$

[B.3]

$$E[\xi(k)\xi(k+\tau)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \xi(k)\xi(k+\tau) = 0 \qquad (\tau \neq 0) \tag{4.2.10}$$

(4.2.1) 式のシステムに対し，次式の制御則による離散時間ＰＩＤ制御系を構成する．

$$u(k) = \frac{C(z^{-1})}{1-z^{-1}}\{w(k) - y(k)\} \tag{4.2.11}$$

ただし，

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) &:= K_P(1-z^{-1}) + K_I + K_D(1-z^{-1})^2 \\ &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

である．なお，(4.2.12) 式に含まれる K_P，K_I および K_D は，それぞれ，比例ゲイン，積分ゲインおよび微分ゲインを示している．

(4.2.1) 式と (4.2.11) 式により構成されるＰＩＤ制御系の性質は，制御則に含まれるＰＩＤゲインの値に大きく依存する．したがって，これらのゲインをどのように決定するかということが重要な問題となる．このＰＩＤゲインの調整について次節以降考察する．

４．２．２　極配置法に基づく設計[15)]

制御系の性質のほとんどが，閉ループ制御系の極によって支配されることから，第２章や第３章での考察と同様に，極配置法の観点から各ＰＩＤゲインを調整することを考える．

(4.2.1) 式と (4.2.11) 式から構成されるＰＩＤ制御系の $w(k)$ から $y(k)$ への閉ループ伝達関数 $W_1(z^{-1})$ は，次式となる．

$$W_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1}b_0 \cdot C(z^{-1})}{(1-z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-1}b_0 \cdot C(z^{-1})} \tag{4.2.13}$$

したがって，次に示す多項式$T(z^{-1})$を，特性多項式とみなすことができる．

$$T(z^{-1}) := (1-z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-1}b_0 \cdot C(z^{-1}) \tag{4.2.14}$$

この$T(z^{-1})$を制御仕様を満足するように設計し，(4.2.14)式の関係に基づいて，各PIDゲインを計算する．ここでも，$T(z^{-1})$を次式として定義する．

$$T(z^{-1}) := 1 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} \tag{4.2.15}$$

(4.2.15)式のt_1およびt_2を，2．2．3節で考察した方法により設定する．すなわち，

$$t_1 = -2e^{-\frac{\rho}{2\mu}}\cos(\frac{\sqrt{4\mu-1}}{2\mu}\rho) \tag{4.2.16}$$

$$t_2 = e^{-\frac{\rho}{\mu}} \tag{4.2.17}$$

$$\rho := T/\sigma \tag{4.2.18}$$

$$\mu = 0.25(1-\delta) + 0.51\delta \tag{4.2.19}$$

ただし，σは立ち上がり時間を示しており，μが減衰振動特性を示す係数である．さらに，実用性を考慮して$0 \leq \delta \leq 2$として設定する．

(4.2.14)式および(4.2.12)式の関係から，PIDゲインは以下の計算式により計算できる．

$$\left.\begin{aligned} K_P &= -\frac{t_2 + a_1 + a_2}{b_0} \\ K_I &= \frac{1 + t_1 + t_2}{b_0} \\ K_D &= \frac{a_2}{b_0} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.20}$$

ここで，モデルマッチング法に基づく設計も考えられるが，以下の理由により，ここでは極配置法に基づく制御系設計について考察した．

i) 制御対象を(4.2.1)式で記述したことによるモデル化誤差が考えられ，厳密なモデルマッチングは元々設計できない．

ii) モデルマッチング法によると，コントローラとして無限個の補償要素が必要となる場合がある．

iii) コントローラの計算において，制御対象の逆系を用いなければならず，制御対象との極零相殺が起こり，システム変動に弱い制御系となる．

iv) 制御対象の安定性に関する条件（$A(z^{-1})$が漸近安定多項式）が，新たに必要となってくる．

４．２．３　セルフチューニングコントローラの設計

これまでの章で考察したように，ここでも間接法に基づくセルフチューニングコントローラ（ＳＴＣ）を設計する．

まず，望ましいσおよびδを設定し，(4.2.15)式～(4.2.19)式に基づいて特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．次に，(4.2.1)式および(4.2.2)式のシステムパラメータa_1，a_2 およびb_0を未知パラメータ$\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$ および$\hat{b}_0(k)$に置き換え，これらから構成される未知パラメータベクトル$\hat{\theta}(k)$とこれに対応するデータベクトル$\psi(k-1)$を次式として定義する．

$$\hat{\theta}(k) := [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \hat{b}_0(k)]^T \tag{4.2.21}$$

$$\psi(k-1) := [-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \Delta u(k-1)]^T \tag{4.2.22}$$

これらを用いて，以下の逐次最小２乗法によりパラメータ同定を行う．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)}\varepsilon(k) \tag{4.2.23}$$

$$\Gamma(k) = \Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)}{1+\psi^T(k-1)\Gamma(k-1)\psi(k-1)} \tag{4.2.24}$$

$$\varepsilon(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k-1)\psi(k-1) - \eta(k-1)\} \tag{4.2.25}$$

$$\eta(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\psi(k-1) - \eta(k-1)\} \tag{4.2.26}$$

ただし，$\varepsilon(k)$と$\eta(k)$は，それぞれ事前誤差および事後誤差を示している．$\Gamma(k)$は誤差共分散行列を示しており，その初期値は$\Gamma(-1) = \alpha \cdot I$ ただし，$0 < \alpha < \infty$として与える．なお，パラメータ同定にあたっては，まず(4.2.25)式から$\varepsilon(k)$ を計算し，(4.2.23)式に基づいて$\hat{\theta}(k)$を求める．さらに，(4.2.24)式により$\Gamma(k)$を更新した上で，(4.2.26)式から$\eta(k)$を計算する．

次に，推定パラメータに基づいて，次式により$\hat{C}(z^{-1})$を計算する．

$$T(z^{-1}) = (1-z^{-1})\hat{A}(z^{-1}) + z^{-1}\hat{b}_0(k)\cdot\hat{C}(z^{-1}) \tag{4.2.27}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\hat{C}(z^{-1}) &= \hat{K}_P(k)(1-z^{-1}) + \hat{K}_I(k) + \hat{K}_D(k)(1-z^{-1})^2 \\ &= \hat{c}_0(k) + \hat{c}_1(k)z^{-1} + \hat{c}_2(k)z^{-2}\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

である．さらに，次式によりPIDゲイン$\hat{K}_P(k)$，$\hat{K}_I(k)$ および$\hat{K}_D(k)$ を計算する．

$$\left.\begin{aligned}\hat{K}_P(k) &= -\{\hat{c}_1(k) + 2\hat{c}_2(k)\} \\ \hat{K}_I(k) &= \hat{c}_1(k) + \hat{c}_2(k) + \hat{c}_2(k) \\ \hat{K}_D(k) &= \hat{c}_2(k)\end{aligned}\right\} \tag{4.2.29}$$

最後に，次式による離散時間PID制御則により，制御入力を生成する．

$$\begin{aligned}u(k) = u(k-1) &+ \hat{K}_P(k)\{e(k) - e(k-1)\} + \hat{K}_I(k)e(k) \\ &+ \hat{K}_D(k)\{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\}\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

ただし，

$$e(k) := w(k) - y(k) \tag{4.2.31}$$

以上の手順をまとめると，次のようになる．

【セルフチューニングPID制御アルゴリズム】

[1] 設計パラメータσおよびδを設定する．

[2] 設計パラメータに基づいて，(4.2.15)式～(4.2.19)式により特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．

[3] (4.2.21)式～(4.2.26)式のパラメータ調整則により，未知パラメータ$\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$，$\hat{b}_0(k)$ を推定する．

[4] (4.2.27)式から，$\hat{C}(z^{-1})$ を計算する．

[5] (4.2.29)式から，PIDゲイン$\hat{K}_P(k)$，$\hat{K}_I(k)$ および$\hat{K}_D(k)$ を計算する．

[6] (4.2.30)式および(4.2.31)式に基づいて，$u(k)$ を生成する．

[7] [3] へ戻る．

以上により，システムに対する【仮定 A】,【仮定 B】の下で，セルフチューニングPID制御系を構成することができる．ここで考察したセルフチューニングPID制御系のブロック線図を **Fig.4.1** に示す．ただし，estimator はパラメータ同定器を示している．

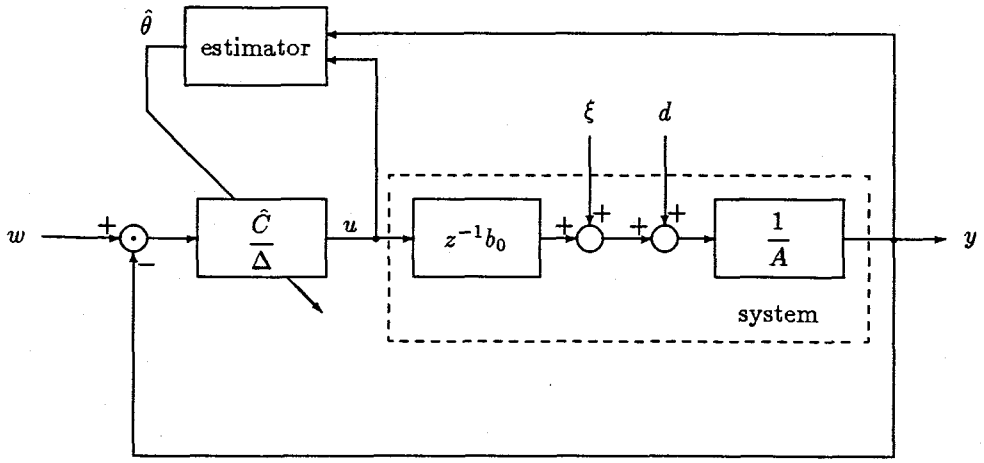

Fig.4.1　Block diagram of the proposed self-tuning PID control system based on pole-assignment method.

本節で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御系の漸近的性質については，第２章と同じ手順にしたがって考察することができる．

４．２．４　数値計算結果

ここでは，本節で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの有効性を検証するために，以下に数値計算について考察する．

［例４．１］

対象とするシステムは，次式にのような時変系とする．

i) $k \leq 100$[step]

$$y(k) = 0.639y(k-1) + 0.040y(k-2) + 0.183u(k-1) + 1 + \xi(k) \tag{4.2.32}$$

ii) $k > 100$[step]

$$y(k) = 0.798y(k-1) + 0.043y(k-2) + 0.458u(k-1) + 1 + \xi(k) \tag{4.2.33}$$

ただし，ここでも $E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 0.01$ とした．また，パラメータの同定モデルとして次式を用いる．

$$y(k) = -\hat{a}_1(k)y(k-1) - \hat{a}_2(k)y(k-2) + \hat{b}_0(k)u(k-1) + \xi(k) + \hat{d}(k) \tag{4.2.34}$$

さらに，特性多項式は次式として設計する．

$$T(z^{-1}) = 1 - 0.736z^{-1} + 0.135z^{-2} \tag{4.2.35}$$

(4.2.35) 式は，$\sigma = 2.0$，$\delta = 0.0$ として設定することで得られる．

まず，$K_P = 2.534$，$K_I = 2.183$ および $K_D = 0.219$ とした固定ゲインに基づく制御結果を，**Fig.4.2** に示す．なお，上述のＰＩＤゲインは，(4.2.32) 式のパラメータの真値を用いて，(4.2.27) 式と (4.2.29) 式から計算した値である．また，図中の矢印はその時刻において，システムが変動したことを示している．**Fig.4.2** から，システムの変動後応答が大きく乱れていることが分かる．

次に，本節で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムによる制御結果を，**Fig.4.3** に示す．ここで，図中の破線が目標値を示す．また，(a) には出力結果を，(b) には制御入力の結果を示している．ただし，初期値として $\Gamma(-1) = 100 \cdot I$，$\hat{\theta}(-1) = [0, 0, 0.1]^T$ と設定した．さらに，ＰＩＤゲインの計算結果を，**Fig.4.4** に示す．なお，破線はＰＩＤゲインの真値を示している．**Fig.4.2** と比較して，システムの変動に対しＰＩＤゲインが適応的に変動し，良好な結果を得ていることが分かる．

以上により，本節で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの有効性を検証することができた．

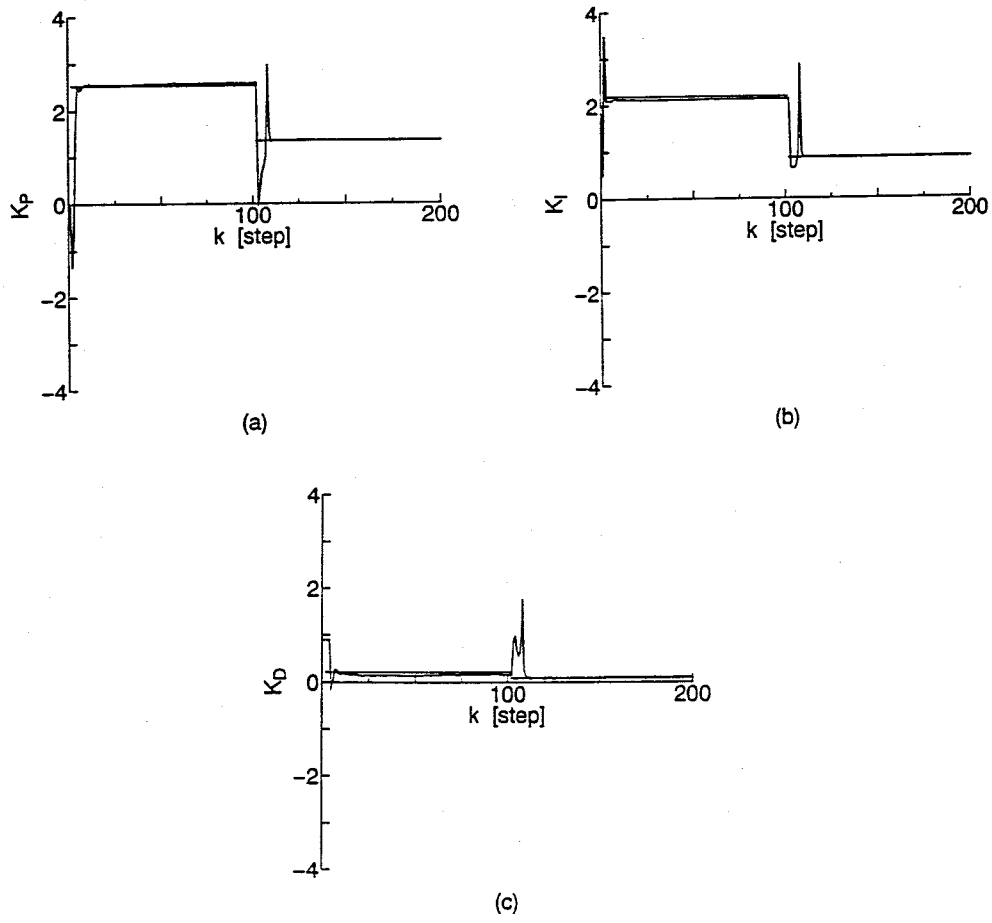

Fig.4.4　Identified PID gains for Fig.4.3.

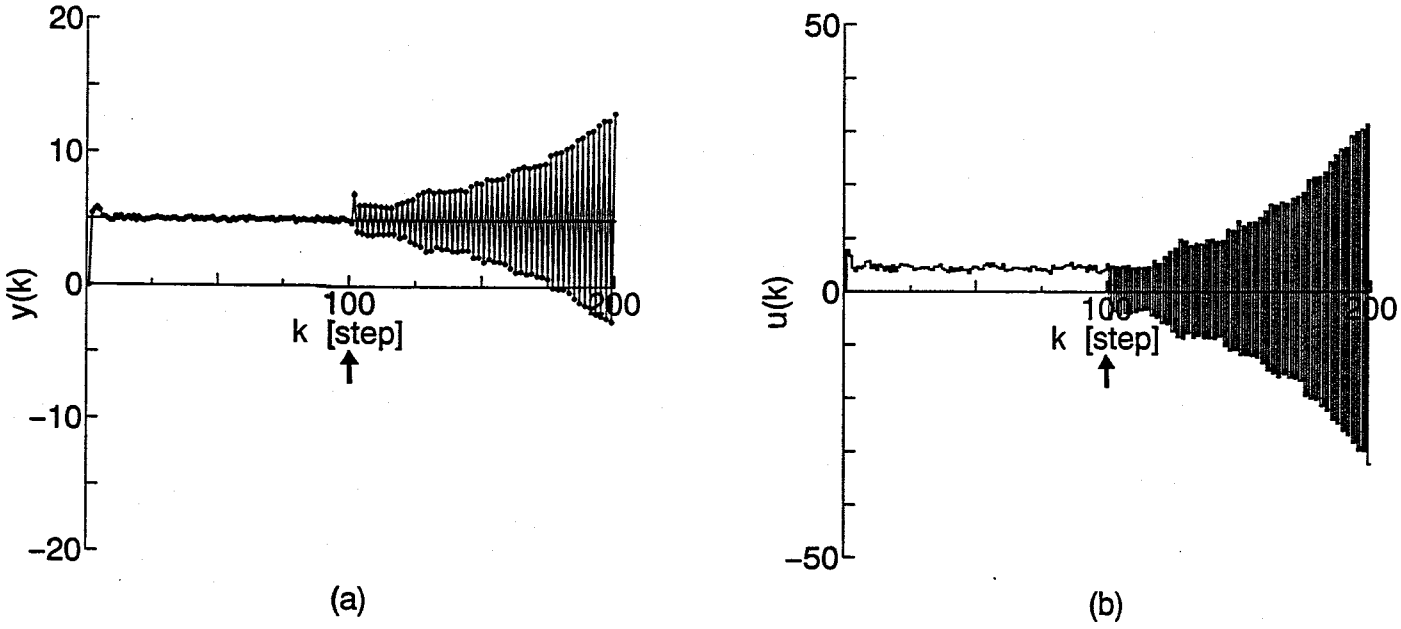

Fig.4.2 Simulation results using the PID control with fixed PID gains where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

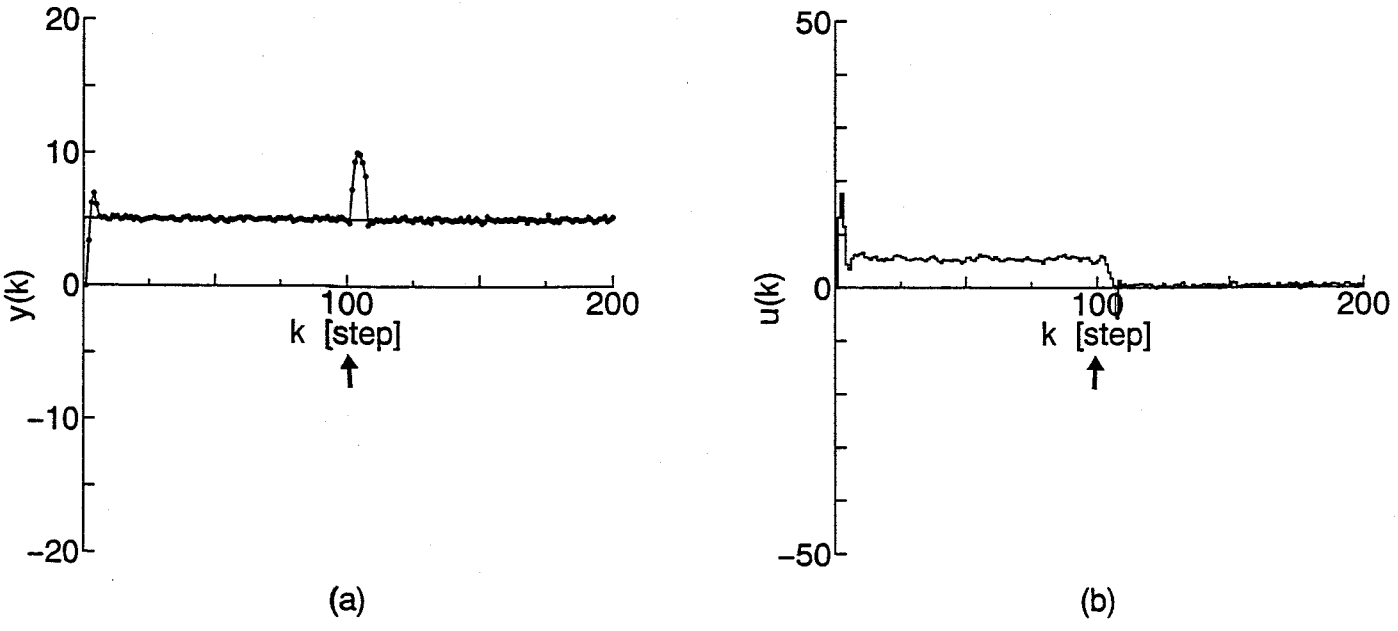

Fig.4.3 Simulation results for the time-varying system using the proposed self-tuning PID control algorithm where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

4．3　前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計

4．3．1　問題の記述

前節では，離散時間系においてむだ時間を陽に考える必要のない系に対して，セルフチューニングＰＩＤ制御系を設計した．しかし，制御対象の中にはむだ時間が大きいものも考えられ，これらを，先の(4.2.1)式として記述するには，非常に大きなサンプリング間隔を用いなければならない．このとき，制御対象に対する情報が少なくなることから，サンプリング間隔内での情報（たとえば，システム変動など）が，敏速に伝わらない可能性が生じてくる．したがって，上述のようなシステムに対して，(4.2.1)式で記述することは無理が生じ，制御対象を「むだ時間＋ＣＡＲ」モデルとして記述しなければ対応することができない．そこで本節では，むだ時間の取扱いが必要な系に対するセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計法の一つとして，制御対象に前置補償器を挿入した拡大系に対して，セルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する方法について考察する．

対象とするシステムを，次式で与えられる「むだ時間＋ＣＡＲ」モデルで記述する．

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-L}b_0 \cdot u(k-1) + \xi(k) + d(k) \tag{4.3.1}$$

ただし，

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{4.3.2}$$

であり，$u(k)$および$y(k)$は，それぞれ制御入力および出力を示す．また，$\xi(k)$と$d(k)$は外乱を示し，それぞれ，白色性ガウス雑音とステップ状外乱とする．また，$L(\geq 0)$は離散時間系でのむだ時間を示している．

(4.3.1)式および(4.3.2)式で与えられるシステムに対し，以下のような仮定が成立するものとする．

【仮定 A】

[A.1] パラメータa_1，a_2およびb_0は未知である．

[A.2] むだ時間は既知で，$L \geq 0$である．

[A.3] $d(k)$は未知のステップ関数で与えられ，大きさは一定であり次式を満足する．

$$\Delta d(k) = 0 \tag{4.3.3}$$

[A.4] 目標値$w(k)$はステップ関数で与えられる．

[A.5] 入出力信号から構成される次のベクトル

$$\psi(k-L-1) := [-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \Delta u(k-L-1)]^T \tag{4.3.4}$$

に対して，次式を満足する正定行列Rが存在する．ここで，$\eta(k)$は白色性ガウス雑音$\xi(k)$ の推定値を示している．

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\psi(k-L-1)\psi^T(k-L-1)=R \tag{4.3.5}$$

さらに，ここでも$\{\xi(k)\}$に対して，次のような仮定が成立するものとする．

【仮定 B】

[B.1]

$$E[\xi(k)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi(k)=0 \tag{4.3.6}$$

[B.2]

$$E[\xi^2(k)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi^2(k)=\sigma^2 \tag{4.3.7}$$

[B.3]

$$E[\xi(k)\xi(k+\tau)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\xi(k)\xi(k+\tau)=0 \qquad (\tau\neq 0) \tag{4.3.8}$$

(4.3.1) 式のシステムに対し，(4.2.11) 式の制御則を適用した際，$w(k)$ から $y(k)$ への閉ループ伝達関数$W_2(z^{-1})$は，次式となる．

$$W_2(z^{-1})=\frac{z^{-(L+1)}b_0\cdot C(z^{-1})}{(1-z^{-1})A(z^{-1})+z^{-(L+1)}b_0\cdot C(z^{-1})} \tag{4.3.9}$$

極配置法の観点からＰＩＤゲインを計算するとき，むだ時間の存在により，(4.3.9) 式から任意に極配置が行えないことが容易に分かる．

そこで，新たにむだ時間補償器として制御対象に前置補償器を挿入し，この前置補償器によりむだ時間に相当する低次の項を補償し，残りの項をＰＩＤ制御器により補償する制御系を設計する．

４．３．２　前置補償器をもつＰＩＤ制御系の設計[16),17)]

まず，制御対象に次式の前置補償器$H^{-1}(z^{-1})$を挿入する．

$$H(z^{-1})=1+h_1z^{-1}+h_2z^{-1}+\cdots+h_Lz^{-L} \tag{4.3.10}$$

このとき，制御対象と前置補償器から構成される拡大系は，次式として与えられる．

$$A(z^{-1})H(z^{-1})y(k) = z^{-(L+1)}b_0 v(k) + \xi(k) + d(k) \tag{4.3.11}$$

ただし，

$$v(k) := H(z^{-1})u(k) \tag{4.3.12}$$

この(4.3.11)式に，次式のように改めたＰＩＤ制御則を適用し，ＰＩＤ制御系を構成する．

$$v(k) = \frac{C(z^{-1})}{1-z^{-1}}\{w(k) - y(k)\} \tag{4.3.13}$$

ただし，$C(z^{-1})$は次式による．

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) &:= K_P(1-z^{-1}) + K_I + K_D(1-z^{-1})^2 \\ &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

ここで，(4.3.1)式，(4.3.12)式および(4.3.13)式から構成される制御系の閉ループ伝達関数$W_3(z^{-1})$は，次式として与えられる．

$$W_3(z^{-1}) = \frac{z^{-(L+1)}b_0 \cdot C(z^{-1})}{(1-z^{-1})A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-(L+1)}b_0 \cdot C(z^{-1})} \tag{4.3.15}$$

(4.3.15)式より，次式に示す$T(z^{-1})$を制御系の特性多項式と見なすことができる．

$$T(z^{-1}) := (1-z^{-1})A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-(L+1)}b_0 \cdot C(z^{-1}) \tag{4.3.16}$$

$H(z^{-1})$の次数をL次としたことにより，望ましい$T(z^{-1})$から(4.3.16)式を満足するように，制御器$C(z^{-1})$と前置補償器$H(z^{-1})$を計算することができる．したがって，(4.3.10)式の前置補償器を挿入したことで，極配置に基づいてＰＩＤゲインの調整が可能となる．すなわち，$C(z^{-1})$が計算されれば，各ＰＩＤゲインは次式により計算することができる．

$$\left.\begin{aligned} K_P &= -(c_1 + 2c_2) \\ K_I &= c_0 + c_1 + c_2 \\ K_D &= c_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.17}$$

4．3．3　セルフチューニングコントローラの設計

これまでと同様，前置補償器をもつＰＩＤ制御系に基づいて，間接法の観点からセルフチューニングコントローラを設計する．

まず，望ましいσおよびδを設定し，(4.2.15)式～(4.2.19)式に基づいて$T(z^{-1})$を設計する．ただし，ここでも$T(z^{-1})$を(4.2.15)式のような2次式に限定して考える．

次に，システムパラメータ a_1，a_2 および b_0 を未知パラメータ $\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$ および $\hat{b}_0(k)$ に置き換え，これらから構成される未知パラメータベクトル $\hat{\theta}(k)$ とこれに対応するデータベクトル $\psi(k-L-1)$ を次式として定義する．

$$\hat{\theta}(k) := [\hat{a}_1(k), \hat{a}_2(k), \hat{b}_0(k)]^T \tag{4.3.18}$$

$$\psi(k-L-1) := [-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \Delta u(k-L-1)]^T \tag{4.3.19}$$

これらを用いて，以下の逐次最小２乗法によりパラメータ同定を行う．

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-L-1)}{1+\psi^T(k-L-1)\Gamma(k-1)\psi(k-L-1)}\varepsilon(k) \tag{4.3.20}$$

$$\Gamma(k) = \Gamma(k-1) - \frac{\Gamma(k-1)\psi(k-L-1)\psi^T(k-L-1)\Gamma(k-1)}{1+\psi^T(k-L-1)\Gamma(k-1)\psi(k-L-1)} \tag{4.3.21}$$

$$\varepsilon(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k-1)\psi(k-L-1) - \eta(k-1)\} \tag{4.3.22}$$

$$\eta(k) = \Delta y(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\psi(k-L-1) - \eta(k-1)\} \tag{4.3.23}$$

ただし，$\varepsilon(k)$ と $\eta(k)$ は，それぞれ事前誤差および事後誤差を示している．$\Gamma(k)$ は誤差共分散行列を示しており，その初期値は $\Gamma(-1) = \alpha \cdot I$ ただし，$0 < \alpha < \infty$ として与える．なお，パラメータ同定にあたっては，まず (4.3.22) 式から $\varepsilon(k)$ を計算し，(4.3.20) 式に基づいて $\hat{\theta}(k)$ を求める．さらに，(4.3.21) 式により $\Gamma(k)$ を更新した上で，(4.3.23) 式から $\eta(k)$ を計算する．

また，推定パラメータに基づいて，次式により $\hat{C}(z^{-1})$ と $\hat{H}(z^{-1})$ を計算する．

$$T(z^{-1}) = (1-z^{-1})\hat{A}(z^{-1})\hat{H}(z^{-1}) + z^{-(L+1)}\hat{b}_0(k)\cdot\hat{C}(z^{-1}) \tag{4.3.24}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\hat{C}(z^{-1}) &= \hat{K}_P(k)(1-z^{-1}) + \hat{K}_I(k) + \hat{K}_D(k)(1-z^{-1})^2 \\ &= \hat{c}_0(k) + \hat{c}_1(k)z^{-1} + \hat{c}_2(k)z^{-2}\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

である．さらに，次式によりＰＩＤゲイン $\hat{K}_P(k)$，$\hat{K}_I(k)$ および $\hat{K}_D(k)$ を計算する．

$$\left.\begin{aligned}\hat{K}_P(k) &= -\{\hat{c}_1(k) + 2\hat{c}_2(k)\} \\ \hat{K}_I(k) &= \hat{c}_1(k) + \hat{c}_2(k) + \hat{c}_2(k) \\ \hat{K}_D(k) &= \hat{c}_2(k)\end{aligned}\right\} \tag{4.3.26}$$

最後に，次式により制御入力を生成する．

$$v(k) = v(k-1) + \hat{K}_P(k)\{e(k) - e(k-1)\} + \hat{K}_I(k)e(k) + \hat{K}_D(k)\{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)\} \tag{4.3.27}$$

$$u(k) = \frac{1}{\hat{H}(z^{-1})}v(k) \tag{4.3.28}$$

ただし，

$$e(k) := w(k) - y(k) \tag{4.3.29}$$

以上の手順をまとめると，次のようになる．

【前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズム】

[1] 設計パラメータσおよびδを設定する．

[2] 設計パラメータに基づいて，(4.2.15)式～(4.2.19)式により特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．

[3] 未知パラメータ$\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$ および$\hat{b}_0(k)$ を，(4.3.18)式～(4.3.23)式のパラメータ調整則により推定する．

[4] (4.3.24)式から，$\hat{C}(z^{-1})$ と$\hat{H}(z^{-1})$ を計算する．

[5] (4.3.26)式から，ＰＩＤゲインを計算する．

[6] (4.3.27)式～(4.3.29)式に基づいて，$u(k)$ を生成する．

[7] [2] へ戻る．

以上により，【仮定 A】および【仮定 B】の下で，むだ時間系に対し，前置補償器を挿入したセルフチューニングＰＩＤ制御系を構成することができる．ここで考察した制御系のブロック線図を，Fig.4.5 に示す．

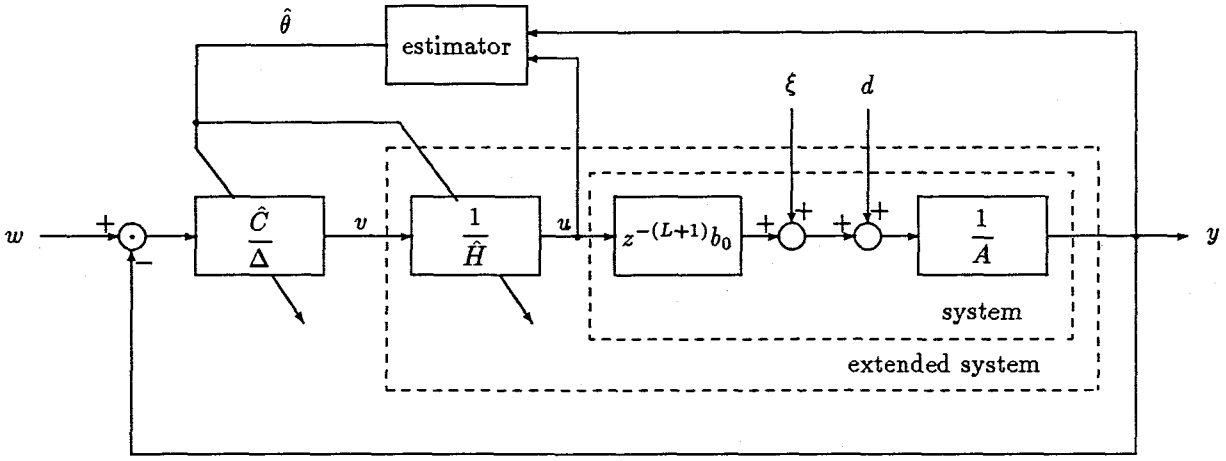

Fig.4.5　Block diagram of the proposed self-tunign PID control system with pre-compensator.

なお，本制御系の漸近的性質についても，第２章での考察と同様の手順で証明することができるため，ここでは省略する．

４．３．４　数値計算結果

本節で考察したむだ時間補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの有効性を検証するために，以下のような２つの数値計算について考察する．

[例４．２]

対象とするシステムは，次式で与えられるものとする．

$$y(k) = 0.811y(k-1) - 0.148y(k-2) + 0.274u(k-3) + 1 + \xi(k) \qquad (4.3.30)$$

ただし，$E[\xi(k)] = 0$ および $E[\xi^2(k)] = 0.01$ とする．(4.3.30) 式のシステムに対し，同定モデルとして次式を用いる．

$$y(k) = -\hat{a}_1(k)y(k-1) - \hat{a}_2(k)y(k-2) + \hat{b}_0(k)u(k-3) + \xi(k) + \hat{d}(k) \qquad (4.3.31)$$

また，特性多項式 $T(z^{-1})$ は，(2.3.18) 式と同様である．

以上の設定に基づいて，前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを適用する．このときの制御結果を，Fig.4.6 に示す．ただし，ここでも初期値として $\Gamma(-1) = 100 \cdot I$，$\hat{\theta}(-1) = [0, 0, 0.05]^T$ と設定した．

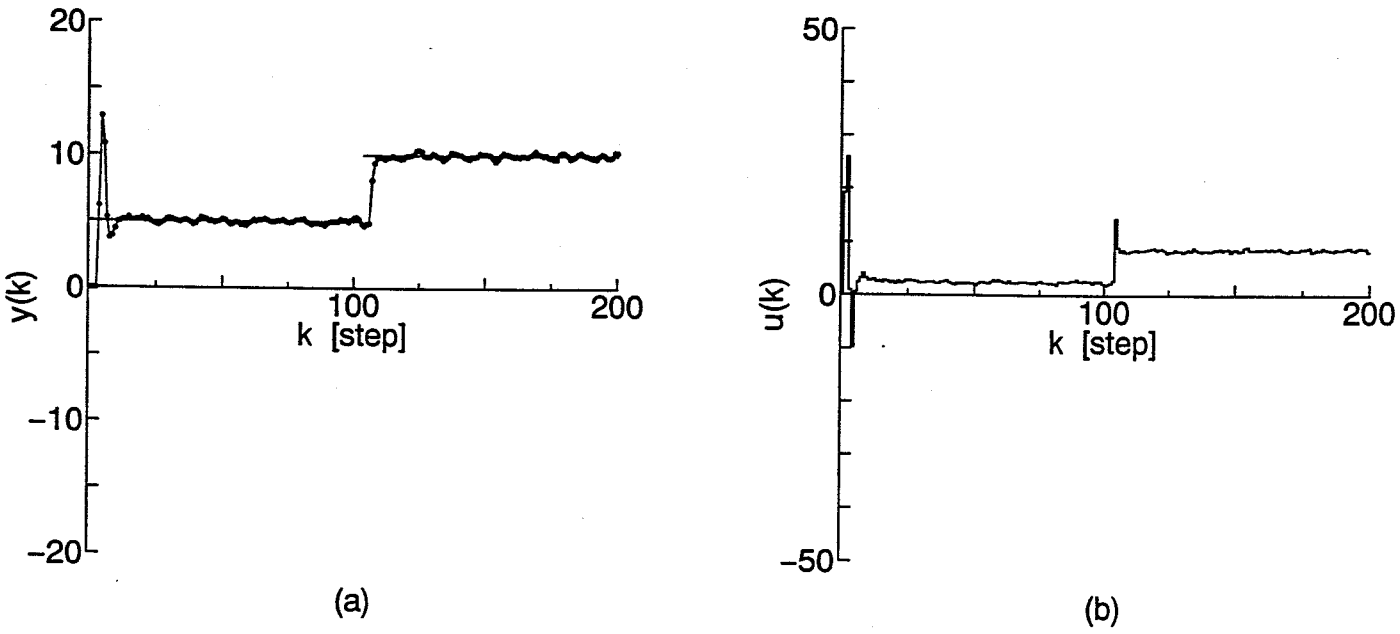

Fig.4.6　Simulation results using the self-tuning PID control algorithm with pre-compensator where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

さらに，ＰＩＤゲインの計算結果と $H(z^{-1})$ の計算結果を，それぞれ **Fig.4.7** に示す．これらの結果から，ＰＩＤゲインおよび前置補償器のパラメータもほぼ真値に収束し，良好な制御結果が得られていることが分かる．

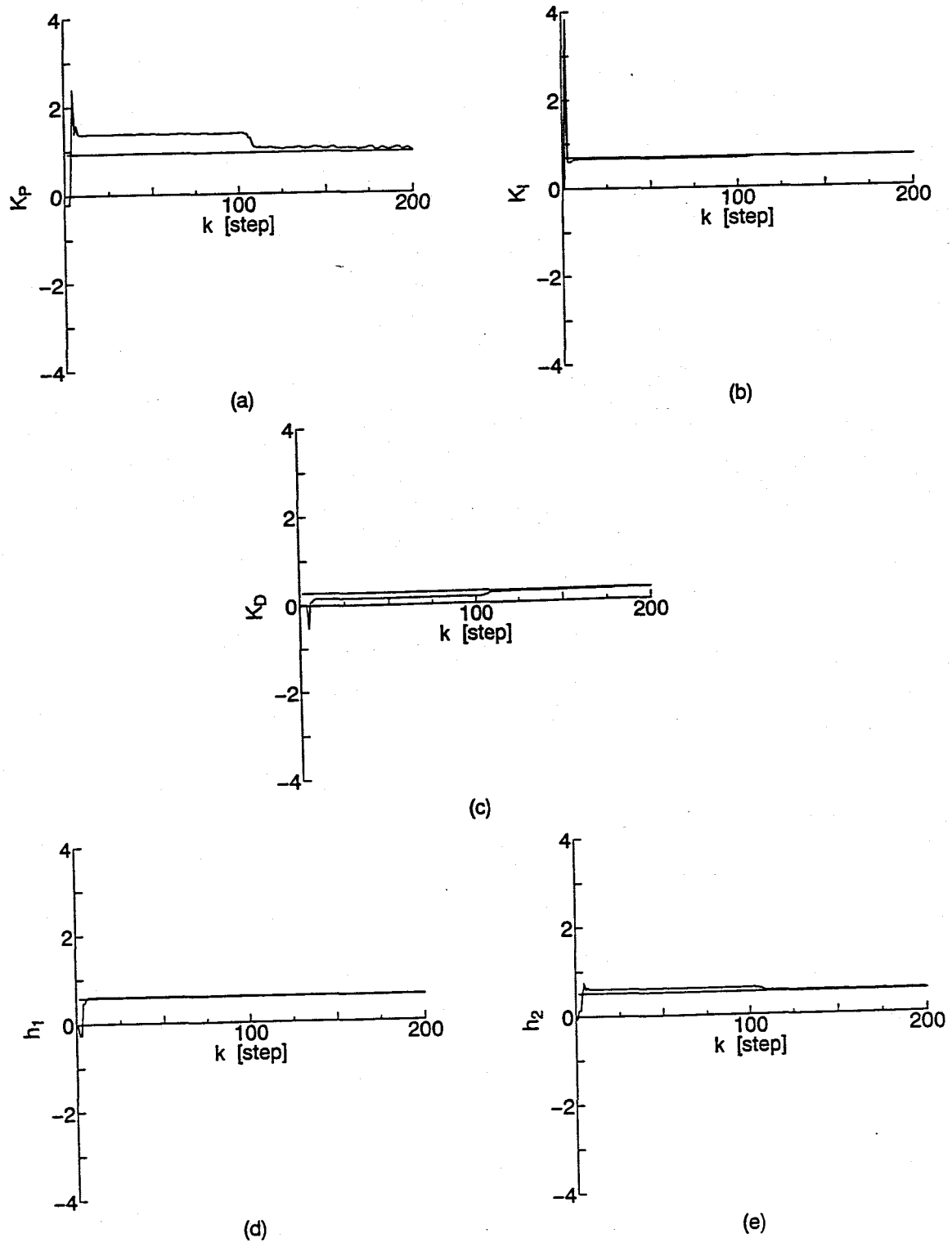

Fig.4.7　Identified PID gains and parameters of pre-compensator for Fig.4.6.

次に，時変系に対する考察を行う．

［例４．３］

対象とするシステムは，次式にのような時変系である．

i) $k \leq 100$[step]

$$y(k) = 0.639y(k-1) + 0.040y(k-2) + 0.183u(k-3) + 1 + \xi(k) \qquad (4.3.32)$$

ii) $k > 100$[step]

$$y(k) = 0.798y(k-1) + 0.043y(k-2) + 0.458u(k-3) + 1 + \xi(k) \qquad (4.3.33)$$

ただし，ここでも $E[\xi(k)] = 0$，$E[\xi^2(k)] = 0.01$ とした．また，パラメータの同定モデルとしては(4.3.31)式を用いる．さらに，特性多項式を(4.2.35)式として設定し数値計算を行う．このときの本手法による制御結果を，**Fig.4.8** に示す．また，ＰＩＤゲインと $H(z^{-1})$ の計算結果を，**Fig.4.9** に示す．ただし，$\hat{\theta}(-1)$ および $\Gamma(-1)$ は［例４．２］と同様に設定した．また，図中の矢印はシステムが変動した時刻を示している．

一方，比較のためにむだ時間系に対して通常用いられるスミス型補償器を挿入したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズム[18]による制御結果を，**Fig.4.10** に示す．これらの結果から，スミス型補償器を挿入したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムは，補償器の挿入により制御対象との直接的な極零相殺が行われるため，システム変動時，過渡特性が劣化していることが分かる．このことから，本節で考察した前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの方が，システムの変動に対し有効であることが分かる．

以上により，本節で考察した前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの有効性を検証することができた．

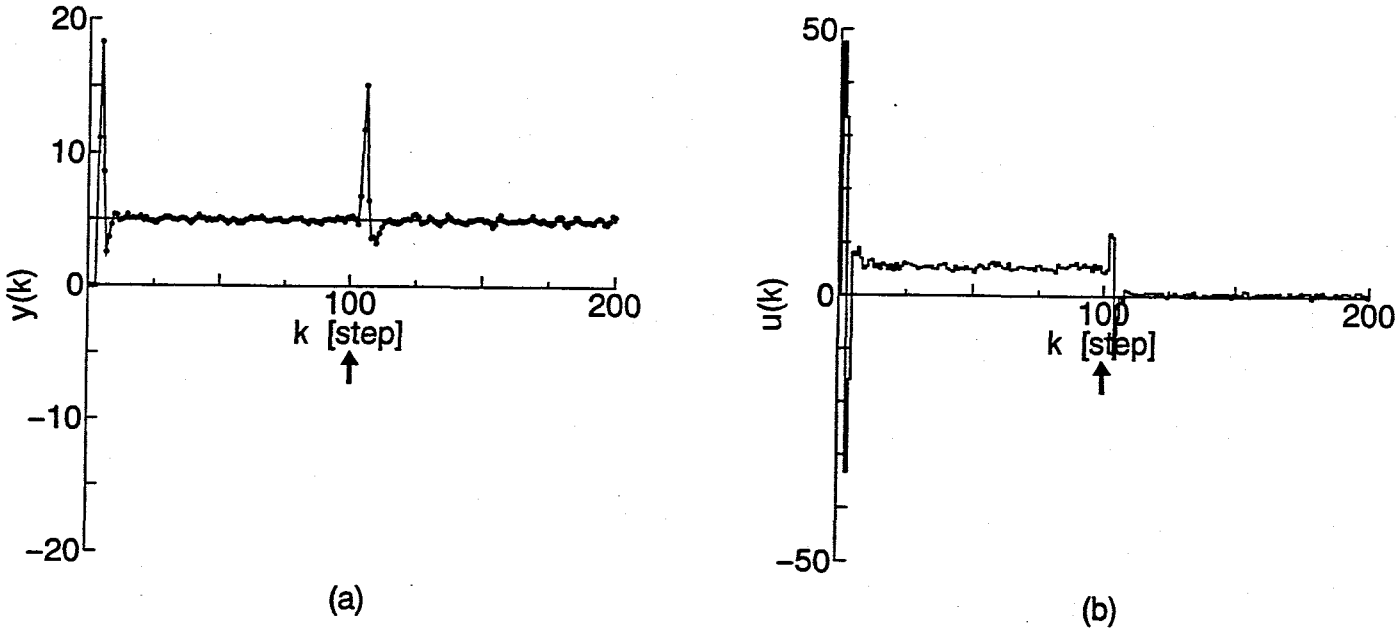

Fig.4.8 Simulation results for the time-varying system using the self-tuning PID control algorithm with pre-compensator where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

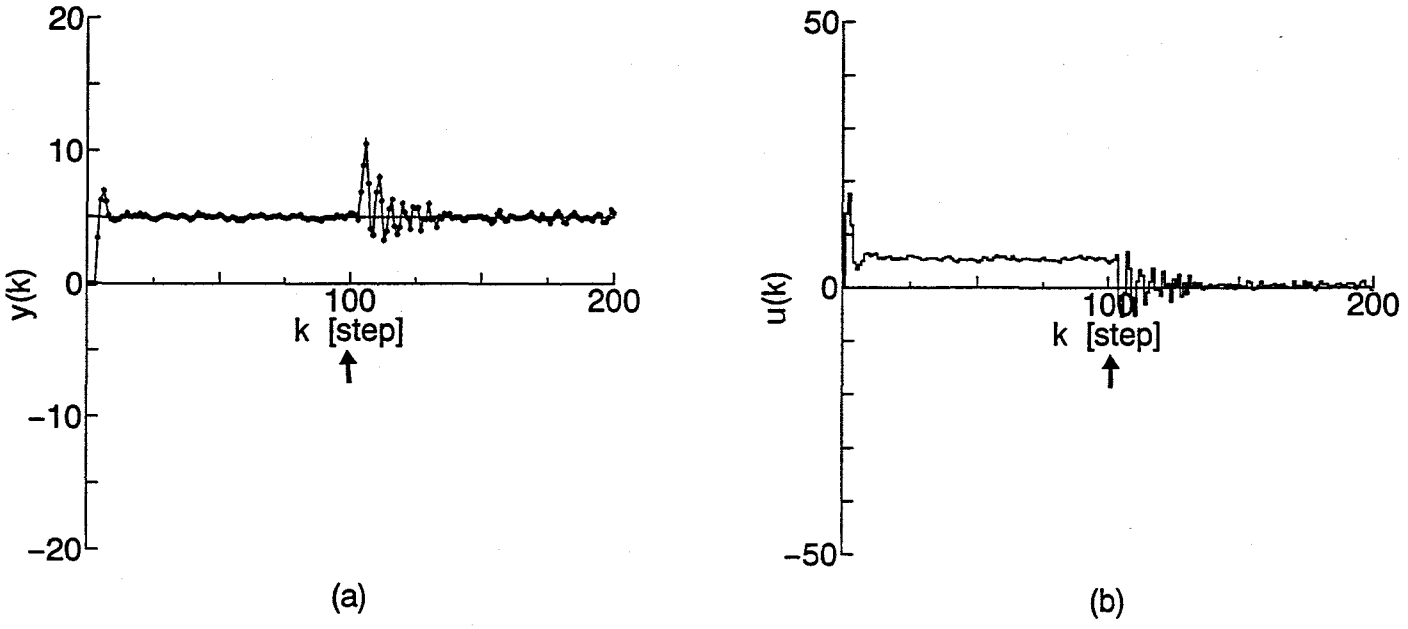

Fig.4.10 Simulation results for the time-varying system using the self-tuning PID control algorithm with Smith-type time-lag compensator where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

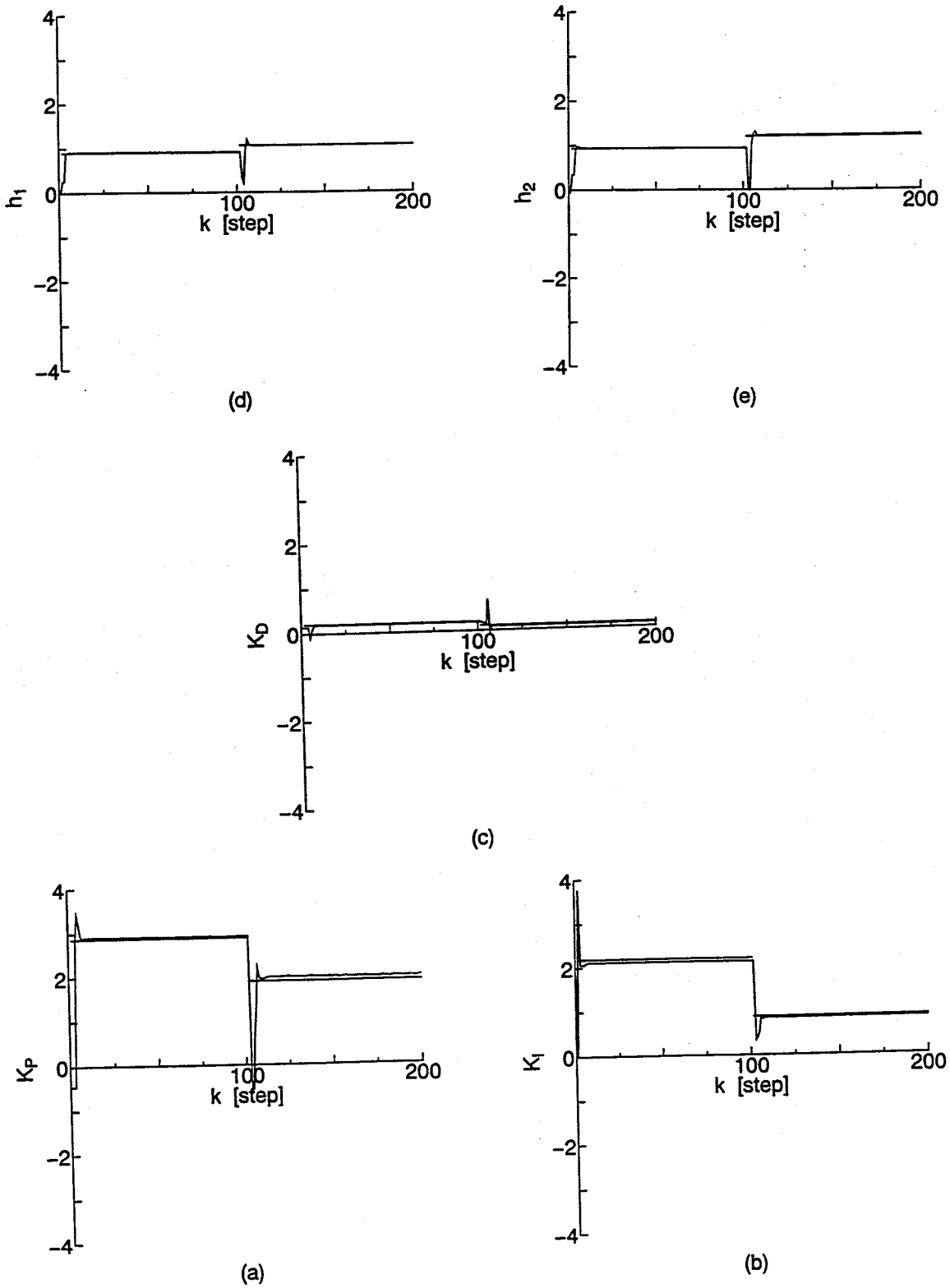

Fig.4.9　Identified PID gains and parameters of pre-compensator for Fig.4.8

4．4　目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計

4．4．1　問題の記述

前節では，むだ時間に対し新たに前置補償器を制御系に挿入した複合型ＰＩＤ制御系について考察してた．この手法は簡単に実装化することができるが，むだ時間が大きくなれば大きくなるほど，前置補償器の次数が大きくなるという問題点をもつ．そこで，本節ではむだ時間の大きさによらない目標値ゲインを挿入し，ＰＩＤゲインと併せた４つのゲインを過渡状態において可変にすることで，追従性の改善あるいは制御系の安定性の確保を実現するセルフチューニングＰＩＤ制御系[18),19)]の設計について考察する．

対象とするシステムを，ここでも次式のような「むだ時間＋ＣＡＲ」モデルで記述する．

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-L}b_0 \cdot u(k-1) + \xi(k) + d(k) \tag{4.4.1}$$

ただし，

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \tag{4.4.2}$$

であり，$u(k)$ および $y(k)$ は，それぞれ制御入力および出力を示す．また，$\xi(k)$ と $d(k)$ は外乱を示し，それぞれ，白色性ガウス雑音とステップ状外乱とする．また，$L(\geq 0)$ は離散時間系でのむだ時間を示している．

(4.4.1) 式および (4.4.2) 式で与えられるシステムに対し，４．３節での【仮定 Ａ】および【仮定 Ｂ】が成立するものとする．

次に，(4.4.1) 式のシステムに対し，ここでも次式のＰＩＤ制御則を適用した制御系を考える．

$$u(k) = \frac{C(z^{-1})}{1 - z^{-1}}\{w(k) - y(k)\} \tag{4.4.3}$$

ただし，

$$\begin{aligned} C(z^{-1}) &:= K_P(1 - z^{-1}) + K_I + K_D(1 - z^{-1})^2 \\ &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

である．なお，(4.4.4) 式に含まれる K_P，K_I および K_D は，それぞれ，比例ゲイン，積分ゲインおよび微分ゲインを示している．ここで，(4.4.1) 式と (4.4.3) 式により構成される閉ループ系の特性多項式 $T(z^{-1})$ が，次式となることをすでに示した．

$$T(z^{-1}) = (1 - z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-(L+1)}b_0 \cdot C(z^{-1}) \tag{4.4.5}$$

先にも考察したように，この式からはむだ時間のために，コントローラパラメータ$C(z^{-1})$を一意に計算することができないため，次節において，この問題を解決するための制御アルゴリズムについて考察する．

4．4．2　目標値ゲインをもつＰＩＤ制御系の設計[18)]

まず，次式のような新しい恒等式を導入する．

$$T(z^{-1}) = (1-z^{-1})A(z^{-1}) + z^{-1}b_0 \cdot C^*(z^{-1}) \tag{4.4.6}$$

ただし，$C^*(z^{-1})$は次式により与えられるＰＩＤゲインからなる多項式である．

$$\begin{aligned} C^*(z^{-1}) &:= K_P^*(1-z^{-1}) + K_I^* + K_D^*(1-z^{-1})^2 \\ &= c_0^* + c_1^* z^{-1} + c_2^* z^{-2} \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

ここで，$L=0$のとき$C^*(z^{-1}) = C(z^{-1})$となり，４．２節において考察した制御系に等価な問題となる．

次に，(4.4.1)式に$z^{L+1}(1-z^{-1})$を掛け，(4.4.6)式を用いると，

$$T(z^{-1})y(k+L+1) = b_0 \cdot C^*(z^{-1})y(k+L) + b_0\Delta u(k) + \Delta\xi(k+L+1) \tag{4.4.8}$$

を得る．いま，$y(k+L)$の最適予測値$\bar{y}(k+L/k)$を次式として定義する．

$$\bar{y}(k+L/k) := F(z^{-1})y(k-1) + E(z^{-1}) \cdot b_0 u(k-1) + E(1)\hat{d}(k) \tag{4.4.9}$$

ここで，多項式$E(z^{-1})$および$F(z^{-1})$は，次式の恒等式を解くことにより計算される．

$$1 = A(z^{-1})E(z^{-1}) + z^{-L}F(z^{-1}) \tag{4.4.10}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} E(z^{-1}) &= 1 + e_1 z^{-1} + e_2 z^{-2} + \cdots + e_{L-1} z^{-(L-1)} \\ F(z^{-1}) &= f_0 + f_1 z^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.11}$$

また，$E(1) = 1 + \sum_{i=1}^{L-1} e_i$である．このとき，$y(k+L)$と$\bar{y}(k+L/k)$との間には，(4.4.1)式と(4.4.10)式の関係から，次式のような関係が成立する．

$$y(k+L) = \bar{y}(k+L/k) + E(z^{-1})\xi(k+L) \tag{4.4.12}$$

(4.4.12)式を(4.4.8)式に代入すると次式の関係を得る．

$$\begin{aligned} &T(z^{-1})y(k+L+1) - b_0 \cdot C^*(z^{-1})E(z^{-1})\xi(k+L) - \Delta\xi(k+L+1) \\ &\qquad = b_0 \cdot C^*(z^{-1})\bar{y}(k+L/k) + b_0\Delta u(k) \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

いま，(4.4.13)$= b_0 \cdot C^*(z^{-1})w(k)$ とおくことで，次の２式を得る．

$$u(k) = \frac{C^*(z^{-1})}{1-z^{-1}}\{w(k) - \bar{y}(k+L/k)\} \tag{4.4.14}$$

$$y(k) = \frac{z^{-(L+1)}b_0 \cdot C^*(z^{-1})}{T(z^{-1})}w(k) + \frac{\Delta + z^{-1}b_0 \cdot C^*(z^{-1})E(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \tag{4.4.15}$$

つまり，(4.4.14) 式がＰＩＤ制御則となり，(4.4.15) 式は (4.4.14) 式の制御則を用いたときの，閉ループ系の入出力関係式となっている．ここで，実際のＰＩＤ制御器においては，$\bar{y}(k+L/k)$ ではなく $y(k)$ が用いられるため，以下にそのための修正を行う．

まず，$y(k)$ と$\bar{y}(k+L/k)$ の比を$\nu(k)$ とした次式を導入する．

$$\nu(k) := \frac{y(k)}{\bar{y}(k+L/k)} \tag{4.4.16}$$

この$\nu(k)$ を用いて，

$$C(z^{-1}) := \frac{C^*(z^{-1})}{\nu(k)} \tag{4.4.17}$$

とおくことで，(4.4.15) 式を次式として書き換えることができる．

$$u(k) = \frac{C(z^{-1})}{1-z^{-1}}\{\nu(k) \cdot w(k) - y(k)\} \tag{4.4.18}$$

(4.4.18) 式から明らかなように，本手法は $w(k)$ を修正するための可変の目標値ゲイン$\nu(k)$ が新たに制御系に挿入される．また，$C(z^{-1})$ が (4.4.17) 式から与えられることから，過渡状態においては，通常$\bar{y}(k+L/k) \neq y(k)$ であるから，$\nu \neq 1$ となり，ＰＩＤゲインおよび目標値ゲインが可変となる．しかし，定常状態では$\bar{y}(k+L) \fallingdotseq y(k)$ と考えられるから，$\nu \fallingdotseq 1$ となり一定の値をとる．

４．４．３　セルフチューニングコントローラの設計

これまでの考察と同様に，間接法に基づくセルフチューニングコントローラを設計する．このとき，ここでも，$T(z^{-1})$ を (4.2.15) 式のような２次式に限定して考察する．

まず，望ましいσおよびδを設定し，(4.2.15) 式～(4.2.19) 式に基づいて $T(z^{-1})$ を設計する．次に，システムの未知パラメータ$\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$ および$\hat{b}_0(k)$ を，(4.3.18) 式～(4.3.23) 式のパラメータ調整則により逐次推定する．

次に，(4.4.9) 式～(4.4.11) 式を用いて$\bar{y}(k+L/k)$ を計算する．このとき，$\hat{d}(k)$ は次式によりパラメータ同定結果から計算することができる．

$$\hat{d}(k) = y(k) - \{\hat{\theta}^T(k)\phi(k-L-1) + \eta(k)\} \tag{4.4.19}$$

ただし，

$$\phi(k-L-1) := [-y(k-1), -y(k-2), u(k-L-1)]^T \tag{4.4.20}$$

である．

次に，(4.4.6) 式を未知パラメータに置き換えた次式により，$C^*(z^{-1})$ を計算する．

$$T(z^{-1}) = (1-z^{-1})\hat{A}(z^{-1}) + z^{-1}\hat{b}_0(k)\cdot\hat{C}^*(z^{-1}) \tag{4.4.21}$$

さらに，次式から目標値ゲイン$\hat{\nu}(k)$を計算する．

$$\hat{\nu}(k) := \frac{y(k)}{\bar{y}(k+L/k)} \tag{4.4.22}$$

上で計算した$\hat{C}^*(z^{-1})$と$\hat{\nu}(k)$を用いて，次式から$\hat{C}(z^{-1})$を計算する．

$$\hat{C}(z^{-1}) := \frac{\hat{C}^*(z^{-1})}{\hat{\nu}(k)} \tag{4.4.23}$$

この$\hat{C}(z^{-1})$を用いて，次式から各ＰＩＤゲインを計算する．

$$\left.\begin{aligned} \hat{K}_P(k) &= -\{\hat{c}_1(k) + 2\hat{c}_2(k)\} \\ \hat{K}_I(k) &= \hat{c}_0(k) + \hat{c}_1(k) + \hat{c}_2(k) \\ \hat{K}_D(k) &= \hat{c}_2(k) \end{aligned}\right\} \tag{4.4.24}$$

最後に，次式を用いて制御入力を生成する．

$$\begin{aligned} u(k) = u(k-1) &+ \hat{K}_P(k)\{e'(k) - e'(k-1)\} + \hat{K}_I(k)e'(k) \\ &+ \hat{K}_D(k)\{e'(k) - 2e'(k-1) + e'(k-2)\} \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

ただし，

$$e'(k) = \hat{\nu}(k)\cdot w(k) - y(k) \tag{4.4.26}$$

である．

以上の手順をまとめると，次のようになる．

【目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズム】

[1] 設計パラメータσおよびδを設定する．

[2] 設計パラメータに基づいて，(4.2.15) 式～(4.2.19) 式により特性多項式$T(z^{-1})$を設計する．

[3] 未知パラメータ$\hat{a}_1(k)$，$\hat{a}_2(k)$ および$\hat{b}_0(k)$を，(4.3.18) 式～(4.3.23) 式のパラメータ調整則により推定する．

[4] (4.4.9) 式～(4.4.11) 式および (4.4.19) 式，(4.4.20) 式から，$\bar{y}(k+L/k)$ を計算する．

[5] (4.4.21) 式から，$\hat{C}^*(z^{-1})$ を計算する．

[6] (4.4.22) 式から，$\hat{\nu}(k)$ を計算する．

[7] (4.4.23) 式から，$\hat{C}(z^{-1})$ を計算する．

[8] (4.4.24) から，各ＰＩＤゲインを計算する．

[9] (4.4.25) 式および (4.4.26) 式に基づいて，$u(k)$ を生成する．

[10] [3] へ戻る．

以上により，目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系を構成することができる．ここで，(4.4.1) 式と (4.4.25) 式および (4.4.26) 式に構成されるＰＩＤ制御系を，**Fig.4.11** に示す．

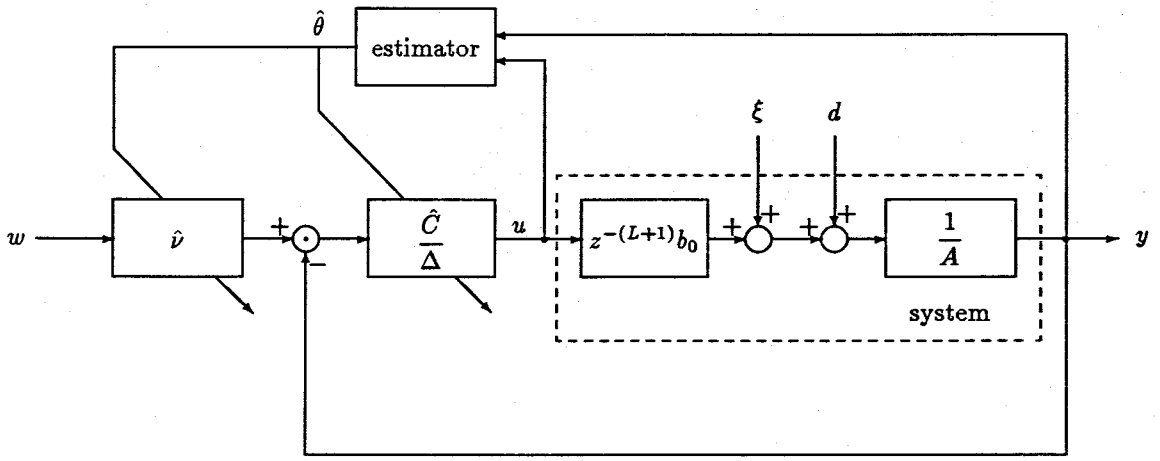

Fig.4.11　Block diagram of the proposed self-tuning controller based on predictive model.

Fig.4.11 から分かるように，本制御系は目標値修正のための可変の目標値ゲインもつが，４．３節での考察のように，むだ時間の大きさに応じて次数が大きくなるような動的補償器を必要としていない．

４．４．４　セルフチューニングＰＩＤ制御系の漸近的性質

ここでは，目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の漸近的性質について考察する．第２章での考察と同様に，以下の定理を導くことができる．

《定理 ４．１》

【仮定 A】および【仮定 B】の下で，(4.3.18) 式～(4.3.23) 式のパラメータ調整則と制御則 (4.4.25) 式から，以下のような関係式が成立する．

$T(z^{-1})$ が漸近安定多項式であるならば，

i)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} \hat{\theta}(k) = \theta \tag{4.4.27}$$

ただし，θはシステムパラメータの真値を示している．

ii)

$$P \cdot \lim_{k\to\infty} e''(k) = 0 \tag{4.4.28}$$

ただし，$e''(k)$ は次式により与えられる．

$$e''(k) := e(k) + \frac{\Delta + z^{-1}b_0 \cdot C^*(z^{-1})E(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \tag{4.4.29}$$

〔証明〕 i)《定理　2．1》と同様にして導出することができる．

ii) (2.4.43) 式と同様にして，次式の関係を得る．

$$\hat{A}(z^{-1})\Delta y(k) = z^{-(L+1)}\hat{b}_0(k)\Delta u(k) + \Delta\eta(k) \tag{4.4.30}$$

次に，(4.4.22) 式～(4.4.24) 式および (4.4.26) 式の関係を用いて，(4.4.25) 式を次式としてまとめることができる．

$$\Delta u(k) = \hat{C}^*(z^{-1})\{w(k) - \bar{y}(k + L/k)\} \tag{4.4.31}$$

(4.4.31) 式を (4.4.30) 式に代入し，(4.4.12) 式，(2.4.6) 式および (4.4.21) 式の関係を用いると次式を得る．

$$T(z^{-1})y(k) = z^{-(L+1)}\hat{b}_0(k)\hat{C}^*(z^{-1})w(k) + \{\Delta + z^{-1}\hat{b}_0(k)\hat{C}^*(z^{-1})E(z^{-1})\}\xi(k) + \Delta z(k) \tag{4.4.32}$$

これにより，(4.4.32) 式を (4.3.29) 式に代入することで，次式を導出することができる．

$$T(z^{-1})e(k) = \hat{X}(z^{-1})w(k) - \{\Delta + z^{-1}\hat{b}_0(k)\hat{C}^*(z^{-1})E(z^{-1})\}\xi(k) - \Delta z(k) \tag{4.4.33}$$

ただし，

$$\hat{X}(z^{-1}) := T(z^{-1}) - z^{-(L+1)}\hat{b}_0(k) \cdot \hat{C}^*(z^{-1}) \tag{4.4.34}$$

であり，(4.4.21) 式より $\hat{X}(1) = 0$ である．

したがって，(4.4.33) 式に対して，《定理　2．2》と同様の手順を適用することで，(4.4.28) 式を導出することができる． ■

以上により，本節において考察した目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御系の確率漸近収束性が保証される．

4．4．5　数値計算結果

ここでも，目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムの有効性を検証するために，以下のような数値計算について考察する．

[例4．4]

対象とするシステムは，次式で与えられるものとする．

$$y(k) = 0.503y(k-1) + 0.053y(k-2) + 0.186u(k-5) + 1 + \xi(k) \qquad (4.4.35)$$

ただし，$E[\xi(k)] = 0$ および $E[\xi^2(k)] = 0.01$ とする．特性多項式 $T(z^{-1})$ は，(2.3.18) 式と同様である．

以上の設定の下，本節で考察した目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを適用する．ただし，初期値として $\Gamma(-1) = 100 \cdot I$，$\hat{\theta}(-1) = [0, 0, 0.02]^T$ と設定した．このときの制御結果を，**Fig.4.12** に示す．また，ＰＩＤゲインと目標値ゲイン $\hat{\nu}(k)$ の計算結果を **Fig.4.13** に示す．比較のために，4．3節で考察した前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムによる制御結果を **Fig.4.14** に示す．これらの結果から，本節で考察した手法による制御結果は前置補償器をもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムによる制御結果とほぼ同等の制御結果であることが分かる．先に考察したように，ＰＩＤゲインが過渡状態において可変になることで，むだ時間系に対しても追従性が劣化せず，安定な制御系が構成されていることが分かる．また，コントローラパラメータが本手法の場合4個であるのに対し，前置補償器型のセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムは7個必要である．このことからも本手法の有効性が伺える．

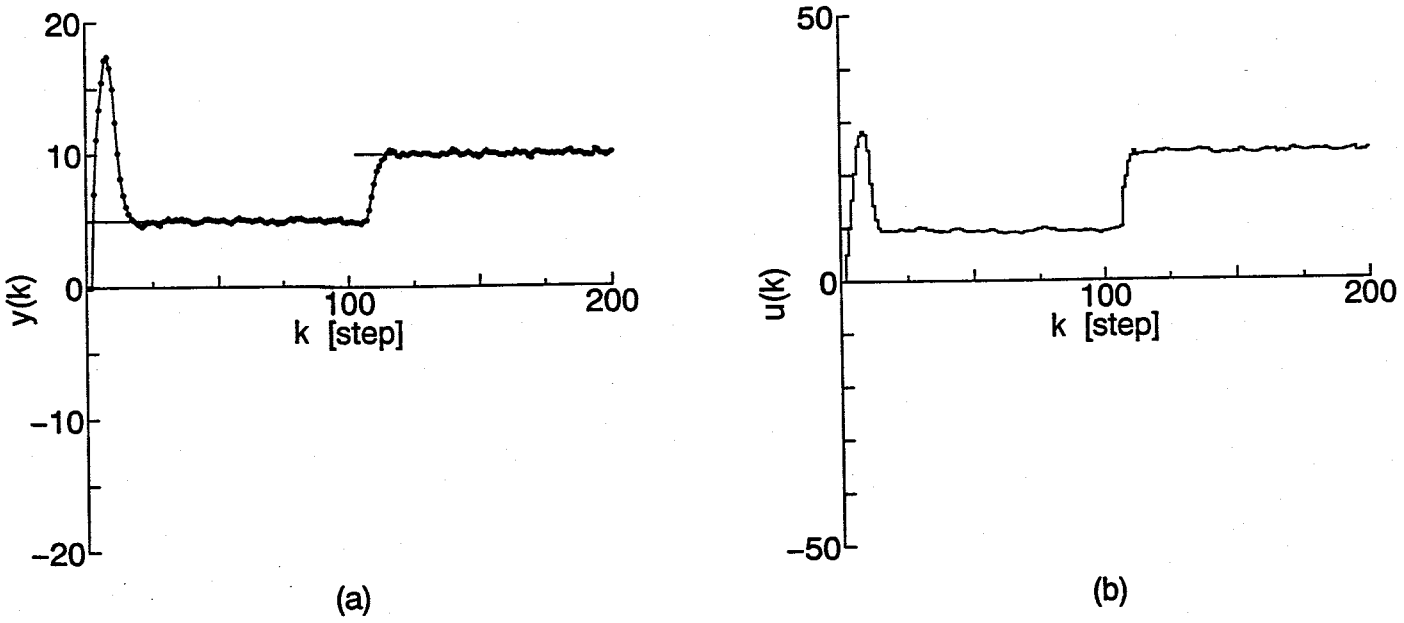

Fig.4.12 Simulation results using the self-tuning control algorithm with changable PID gains where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

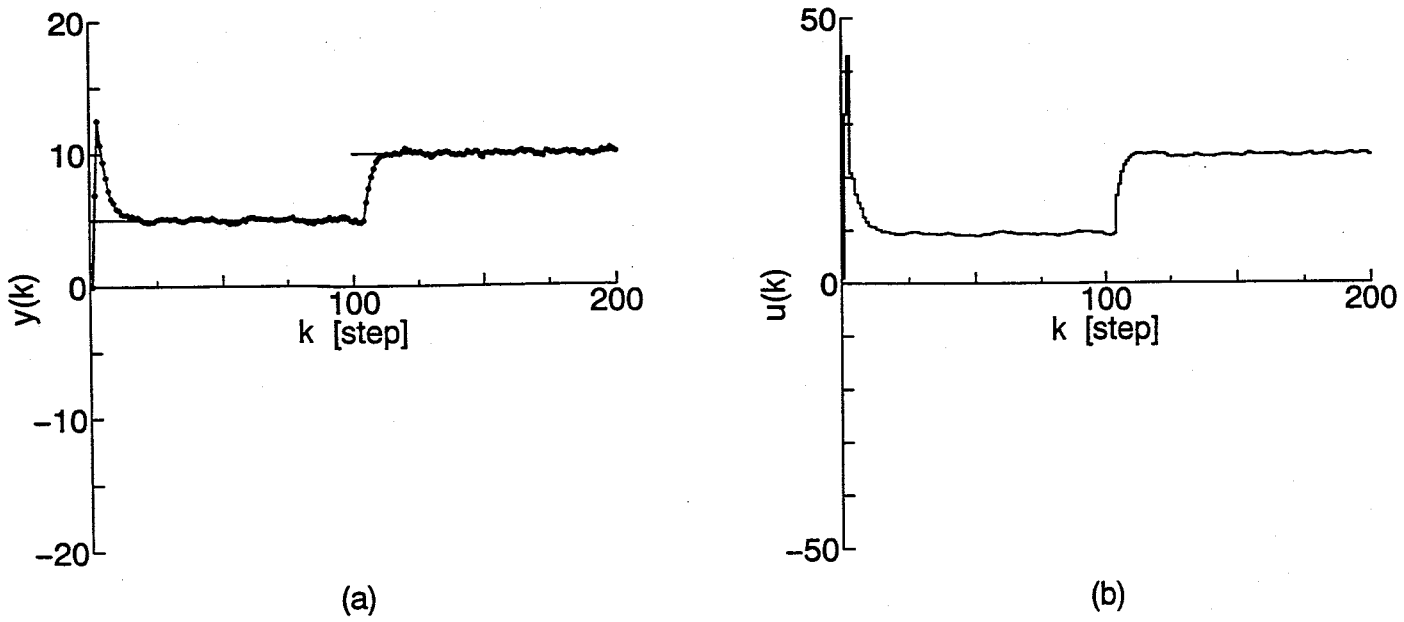

Fig.4.14 Simulation results using the self-tuning PID control algorithm with pre-compensator where (a) and (b) show output $y(k)$ and input $u(k)$.

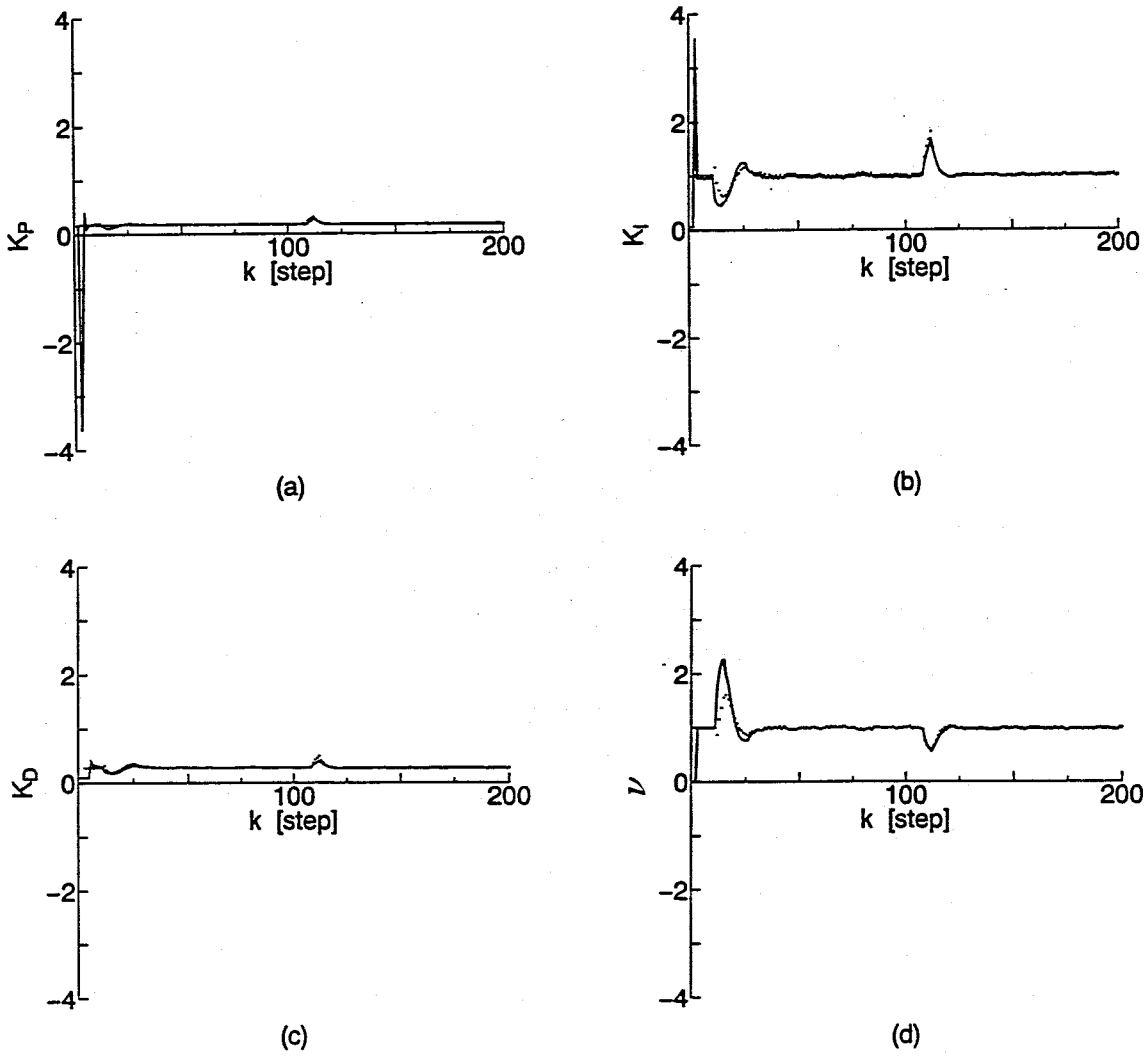

Fig.4.13　Identified PID gains and $\hat{\nu}(k)$ for Fig.4.12.

4．5　ポリスチレン重合反応器への応用

代表的な化学プロセスとして考えられるポリスチレン重合反応器の温度制御系は，非常に大きなむだ時間を有することから，これまでＰＩＤゲインの調整は難しい問題とされている．とくに，制御系の安定性と過渡特性とがtrade-offの関係にあり，試行錯誤的な調整を行わざるをえなかった．そこで，本節では本章で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御手法を適用することにより，その有効性について考察を行う．

4．5．1　ポリスチレン重合反応器の概要

まず，ここで考察するポリスチレン重合反応器の概要図を **Fig.4.15** に示す．

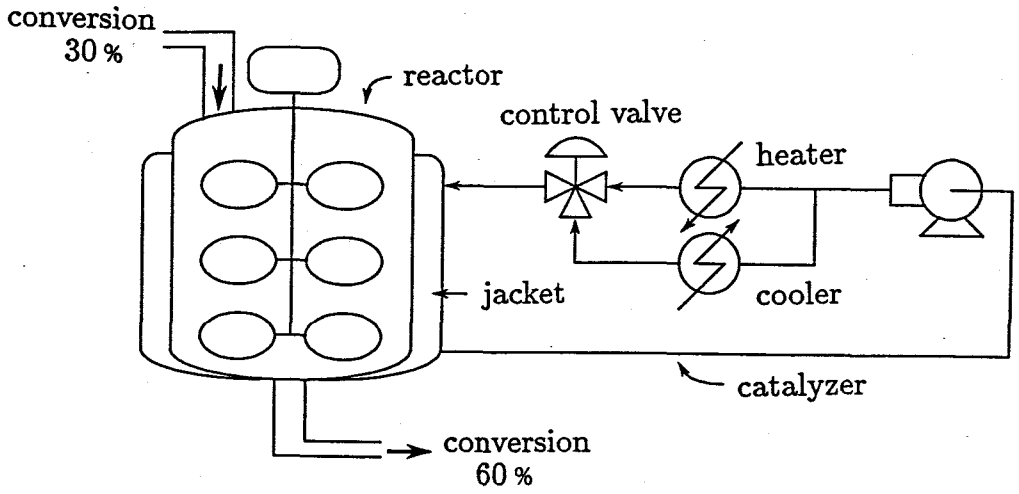

Fig.4.15　The schematic figure of the polystyrene reactor.

本プロセスの概略は以下の通りである．

[1] スチレンを原料とした連続式の重合反応器であり，反応器内は完全混合槽とみなせる．

[2] ジャケットに熱媒流体（オイル）を流して反応器内部の温度を制御する．

[3] 反応は発熱反応であり熱媒によって冷却している．

[4] 熱媒は一定の流量で流れ，熱媒温度は加熱側と冷却側の流量比により制御される．

上述のシステムに対して，セルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する．そのために，まず本プロセスのモデリング[19]について以下に考察する．

4．5．2　モデリング

Fig.4.17 に示すプロセスは，ジャケット操作量とジャケット温度（ジャケット温度系），ジャケット温度と反応温度（反応温度系）とした２つの系のカスケード結合として捉えられ，それぞれの入出力間にはＰＩＤ調節計が挿入されている．そこで，それぞれの２つの場合に分けてモデリングを行う．

〈ジャケット温度系〉

ジャケット温度系について，以下のような関係式が成立する．

$$\begin{aligned} c_j T_{jin} F_j &= c_j T_{jh} F_j(\alpha/100) + c_j T_{jc} F_j(1-\alpha/100) \\ &= \frac{F_j c_j \alpha}{100}(T_{jh} - T_{jc}) + c_j T_{jc} F_j \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

ここで，各変数は以下の通りである．

c_j ： ジャケット熱媒の熱容量　[J/m^{3}K]
T_{jin} ： ジャケット入口温度　[K]
T_{jh} ： 加熱側出口温度　[K]
T_{jc} ： 冷却側出口温度　[K]
F_j ： ジャケット熱媒の流量　[m^3/h]
α ： ジャケット操作弁の開閉度　[%]

さらに，(4.5.1) 式を次式として書き換えることができる．

$$T_{jin} = \frac{T_{jh} - T_{jc}}{100}\alpha + T_{jc} \tag{4.5.2}$$

実際には，操作弁とジャケット温度の計測点との間の距離（配管の長さ）に対応して，むだ時間を考慮する必要がある．したがって，このジャケット温度系は，「比例＋むだ時間」系として考えることができる．

〈反応温度系〉

反応温度系について，以下の関係式が成立する．

$$c_p w \frac{dT_r}{dt} = Q_{in} - Q_{out} + Q_R - Q_A - Q_j \tag{4.5.3}$$

ただし，各変数は以下の通りである．

Q_{in} ： 反応器に入る重合液の熱量　[J/h]
Q_{out} ： 反応器から出る重合液の熱量　[J/h]
Q_R ： 反応によって生じる熱量　[J/h]
Q_A ： 撹拌器による撹拌熱量　[J/h]
Q_j ： ジャケットでの冷却熱量　[J/h]
c_p ： 反応器内の重合液の比熱　[J/kg・K]

w ： 反応器および反応器内の重合液の質量　[kg]

T_r ： 反応温度　[K]

さらに，Q_jおよびQ_Rは次式により与えられる．

$$Q_j = U \cdot A(T_r - T_{jav}) \tag{4.5.4}$$

$$Q_R = k \cdot C_M \cdot w \cdot \Delta H \tag{4.5.5}$$

ただし，

$$k = k_c e^{-E/R \cdot T_r} \tag{4.5.6}$$

である．ここで，各変数は以下の通りである．

U ： 総括伝熱係数　[J/m^{2}K]

A ： 伝熱面積　[m^2]

T_{jav} ： ジャケット内の熱媒の平均温度　[K]

k ： 反応速度　[1/h]

C_M ： 未反応原料濃度（比）

ΔH ： 反応熱　[J/kg]

k_c ： 反応速度定数

E ： 活性化エネルギー

R ： 気体定数

(4.5.6) 式において，目標反応温度周りで線形化した上で，(4.5.4) 式および (4.5.5) 式を (4.5.3) 式に代入すると次式を得る．

$$(1 + \frac{c_p w}{U \cdot A} \frac{d}{dt}) T_r = T_{jav} + k' \tag{4.5.7}$$

ただし，

$$k' := \frac{Q_{in} - Q_{out} + Q'_R + Q_A}{U \cdot A} \tag{4.5.8}$$

である．なお，Q'_RはQ_Rを目標反応温度周りで線形化した値を示している．また，ジャケット温度と反応温度との間にもむだ時間が考えられる．したがって，(4.5.7) 式より反応温度系は，「一次遅れ＋むだ時間」系と見なすことができる．

４．５．３　数値計算結果

Fig.4.15 に示したポリスチレン重合反応器に対し，本章で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを適用し，その有用性を数値計算結果から検討する．

(4.5.2) 式および (4.5.7) 式における物理パラメータが，容易に把握できないことから，まず，入出力のヒストリカルデータから，制御対象のモデル化を行う．

まず，ジャケット温度系について考察する．(4.5.2) 式から「比例＋むだ時間」系として考えられることが分かった．そこで，T_{jin}を制御量$v(k)$，αを操作量$u(k)$として，次式のように同定モデル$\hat{v}(k+L/k)$の次数を限定して考える．

$$\hat{v}(k+L/k) = b_0 u(k-1) + d \tag{4.5.9}$$

この式を用いて入出力のヒストリカルデータから，それぞれのL（ただし，$0 \leq L \leq 50$）について，一括型の最小2乗法によりb_0とdを計算する．このとき，モデル化誤差$\sigma^2(=[\sum_{k=1}^{N}\{v(k+L)-\hat{v}(k+L/k)\}^2]/N$が最も小さくなる$L$をむだ時間として定める．ただし，$N$はデータ数を示している．また，ここで用いるヒストリカルデータは，実プラントにおいてサンプリング間隔60［秒］で取得したものである．上述の計算結果を，**Fig.4.16(a)** に示す．**Fig.4.16(a)** から，$L=9$のときモデル化誤差は最小値をとり，パラメータ同定結果から，次式としてモデル化することができる．

$$v(k) = 0.3748u(k-10) + 117.145 + \xi(k) \tag{4.5.10}$$

ただし，$E[\xi(k)]=0$および$E[\xi^2(k)]=2.6968$である．

しかし，これまでにも考察してきたように，むだ時間が存在する系に対しては，制御系設計が複雑になることから，ここではこのむだ時間系を一次遅れ系と見なして，上述と同様の計算を行い，その結果を **Fig.4.16(b)** に示す．**Fig.4.16(b)** から，$L=0$のときモデル化誤差が最小となることが分かり，このとき次式のようなモデルを得た．

$$v(k) = 0.9491v(k-1) + 0.0488u(k-1) + 3.2021 + \xi_j(k) \tag{4.5.11}$$

ただし，$E[\xi_j(k)]=0$および$E[\xi_j^2(k)]=0.1078$である．そもそも，(4.5.10) 式を用いたとしても，ステップ状外乱を除去するために，積分器を挿入する必要があり，制御系としてはＰＩ制御系を構成することになる．したがって，ここではモデル化誤差も小さくなることを考慮して，「一次遅れ」系と見なした (4.5.11) 式を，ジャケット温度系のモデルとする．

次に，反応温度系について同様の考察をする．(4.5.7) 式から本プロセスは，「一次遅れ＋むだ時間」系と考えることができる．ここでは，$T_{jin} \fallingdotseq T_{jav}$とし，$T_r$を制御量$y(k)$，$T_{jav}$を操作量$v(k)$として考える．これを離散化すると，次式のようなモデルを得ることができる．

$$\hat{y}(k+L/k) = a_1 y(k+L-1) - b_0 v(k-1) + b_1 v(k-2) + d \tag{4.5.12}$$

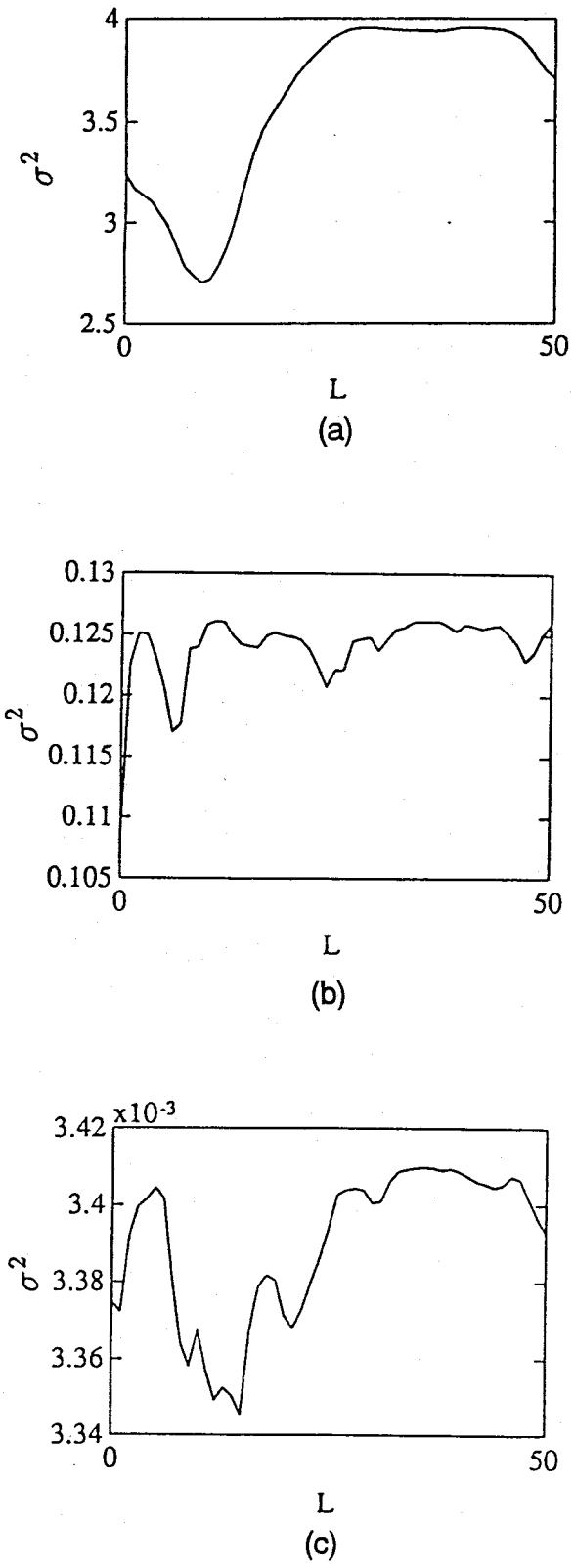

Fig.4.16　Calculation results of time dalay L

このモデルに対して，先と同様の計算を行いその結果を Fig.4.16(c) に示す．Fig.4.16(c) から，$L = 15$ のときモデル化誤差が最小値をとり，このとき次式のような結果を得た．

$$y(k) = 0.9814y(k-1) + 0.0037v(k-16) + 0.0013v(k-17) + 1.6511 + \xi_r(k) \quad (4.5.13)$$

ただし，$E[\xi_r(k)] = 0$ および $E[\xi_r^2(k)] = 0.00385$ である．したがって，ここでは (4.5.13) 式を反応温度系のモデルとする．

以上の準備の後，(4.5.11) 式および (4.5.13) 式を真のシステムと見なして，本章で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを適用する．

このとき，反応温度系において，目標反応温度 $w(k)$ を達成すべく望ましいジャケット温度 $v^*(k)$ を計算し，さらに，この望ましいジャケット温度を達成すべくジャケット操作弁の開閉度 $u(k)$ を，ジャケット温度系において計算するという手順をとる．つまり，ここで考察する制御系は Fig.4.17 に示すような制御系となる．

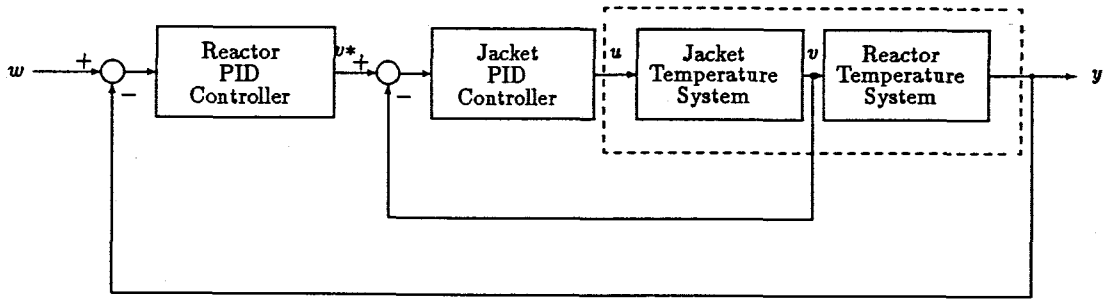

Fig.4.17　The schematic diagram of the control system.

まず，従来本プロセス対して以下のようなＰＩＤゲインを用いて制御を行っていた．

〈ジャケット温度系〉

$$K_P^j = 3.0 \quad K_I^j = 5.0 \quad K_D^j = 0.09 \quad (4.5.14)$$

〈反応温度系〉

$$K_P^r = 2.5 \quad K_I^r = 0.083 \quad K_D^r = 5.0 \quad (4.5.15)$$

これらのゲインは，オペレータのこれまでの熟練に基づいて与えられた値である．このときの計算結果を，Fig.4.18 に示す．なお，(a) には反応温度 $y(k)$ の結果を，(b) には反応温度系において計算された望ましいジャケット温度 $v^*(k)$ を示している．また，(c) にはジャケット温度の結果を示しており，(d) にはジャケット操作弁の開閉度 $u(k)$ を示している．ただし，反応温度およびジャケット温度は，ある温度で正規化した値で示してあるため，その単位が［%］となっている．また，制御開始直後の立ち上がりにおいて反応温度

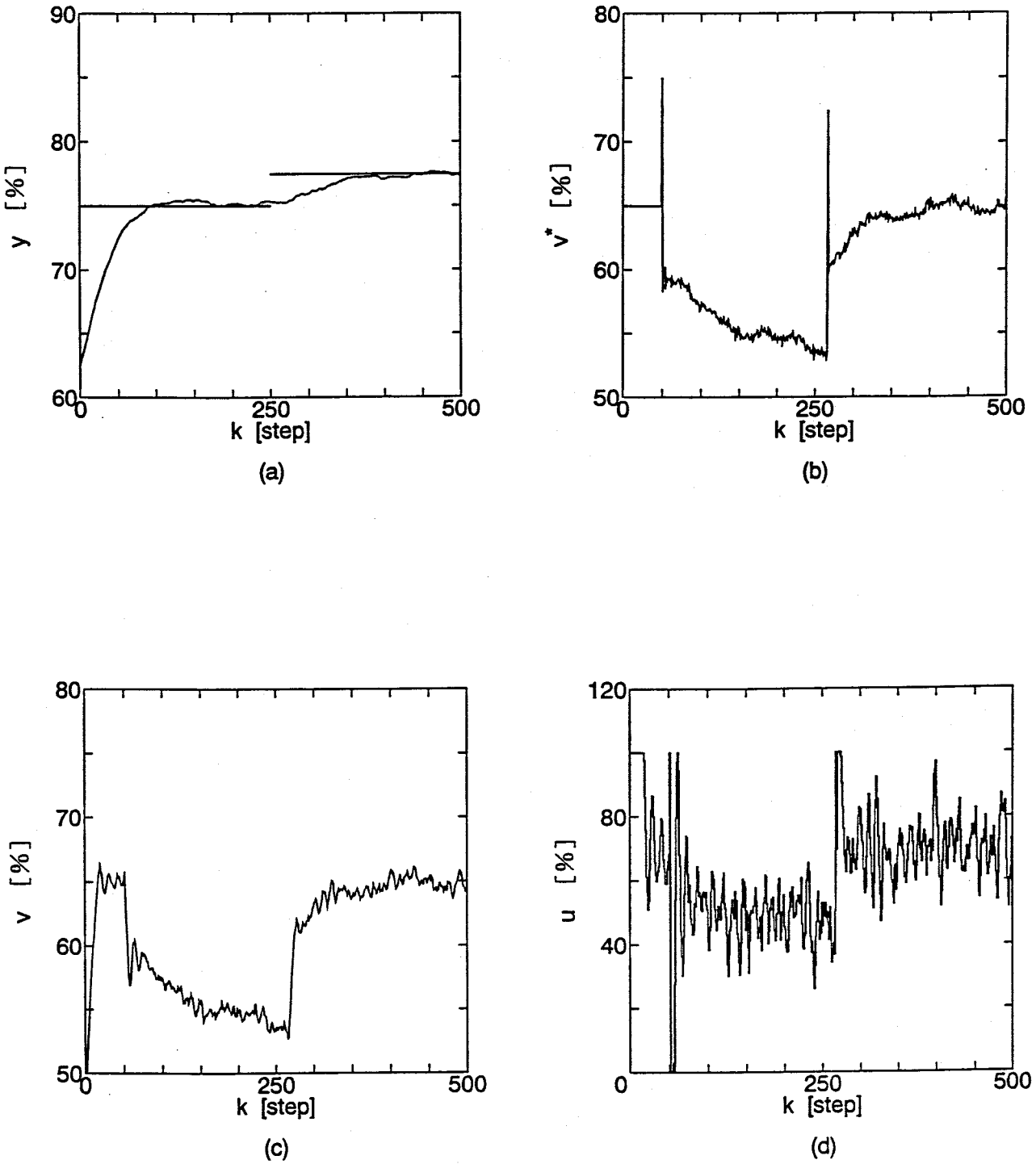

Fig.4.18 Simulation results by using the usual PID control method with fixed PID gains of (4.5.14) and (4.5.15).

が70［%］に達するまでは，反応温度制御系を切り離し，目標ジャケット温度を65［%］に設定してジャケット温度系のみで制御を行っている．さらに，ジャッケト操作弁の開閉度には，

$$0 \leq u(k) \leq 100\,[\%] \tag{4.5.16}$$

の制限を設けている．

一方，本章で考察した手法を適用した結果について考察する．まず，(4.5.11) 式および (4.5.13) 式に対する同定モデルとして次式を用いる．

〈ジャッケト温度系〉

$$\hat{v}(k) = -\hat{a}_1^j(k)v(k-1) + \hat{b}_0^j(k)u(k-1) + \hat{d}^j(k) \tag{4.5.17}$$

〈反応温度系〉

$$\hat{y}(k) = -\hat{a}_1^r(k)y(k-1) + \hat{b}_0^r(k)v(k-16) + \hat{d}^r(k) \tag{4.5.18}$$

ここで，(4.5.13) 式から反応温度系では零点が存在するが，本章で考察した手法を適用するために，(4.5.18) 式のような一次のＣＡＲモデルを同定モデルとして用いる．また，(4.5.17) 式および (4.5.18) 式から明らかなように，それぞれの系に対する同定モデルを１次式としたことから，ここで適用する制御系は，ともにＰＩ制御系となる．次に，特性多項式であるが，以下のようにそれぞれ設計した．

〈ジャッケト温度系〉

$$T_j(z^{-1}) = 1 - 1.6091z^{-1} + 0.6622z^{-2} \tag{4.5.19}$$

〈反応温度系〉

$$T_r(z^{-1}) = 1 - 1.9109z^{-1} + 0.9128z^{-2} \tag{4.5.20}$$

ジャケット温度系はむだ時間が存在しないことから，４．２節で考察したセルフチューニングＰＩ制御アルゴリズムを適用する．また，反応温度系においては，むだ時間が非常に大きいことから，実用性を考慮して４．４節で考察した目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩ制御アルゴリズムを適用する．なお，適用にあたっては (4.5.17) 式の未知パラメータを，(4.2.21) 式～(4.2.26) 式のパラメータ調整則を用いて推定し，(4.5.18) 式の未知パラメータは，(4.3.18) 式～(4.3.23) 式のパラメータ調整則を用いて推定する．ただし，初期値についてはこれまでと同様に，$\Gamma(-1) = 100 \cdot I$および$\hat{\theta}(-1) = [0.\,0.\,0.01]^T$として設定した．

以上の設定の下，本章で考察した手法を適用した制御結果を，**Fig.4.19** に示す．さらに，**Fig.4.20** にはそのときのＰＩゲインおよび目標値ゲインの計算結果を示している．

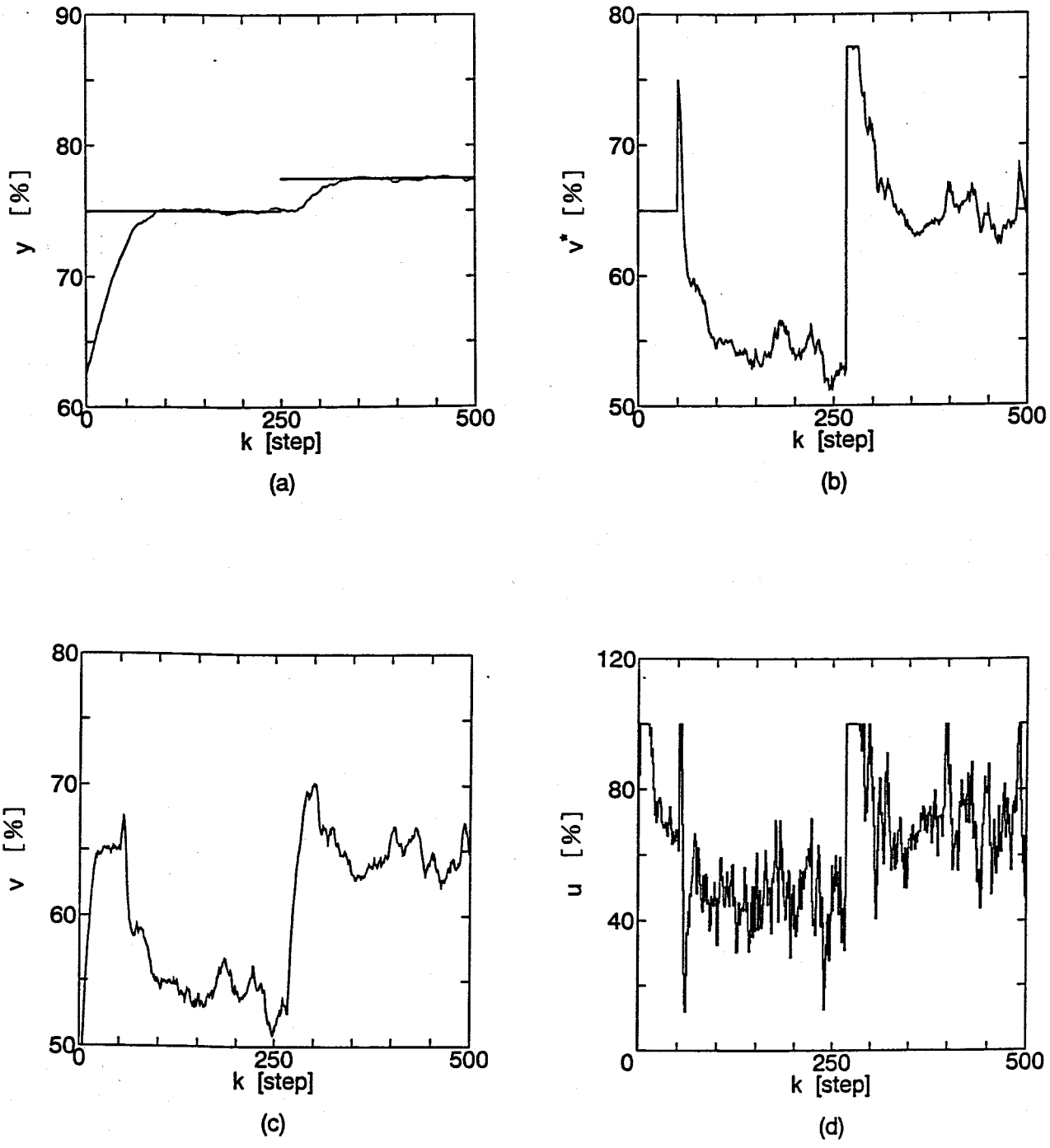

Fig.4.19 Simulation results by using the proposed self-tuning PID control algorithm.

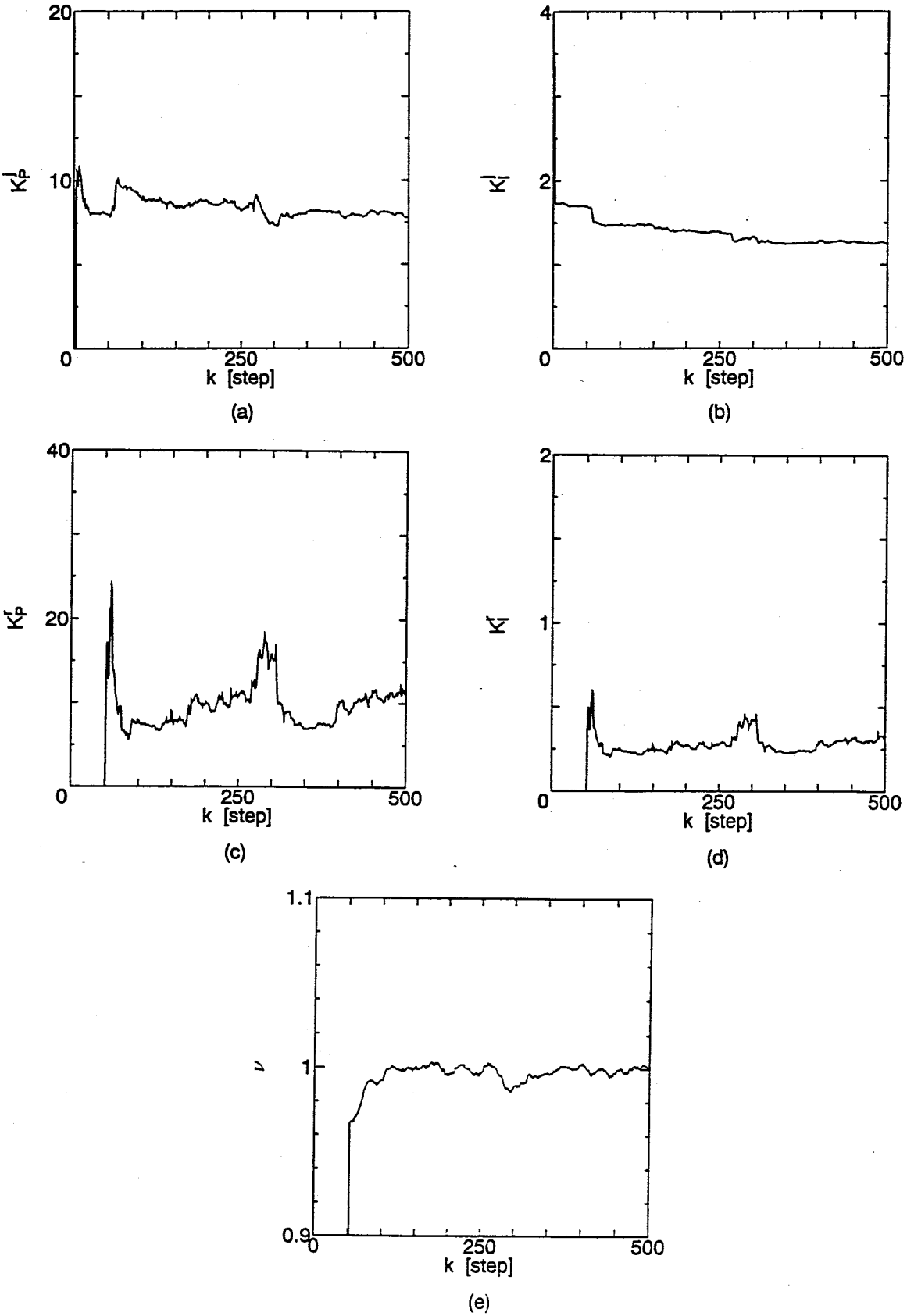

Fig.4.20　Identified PID gains and $\hat{\nu}(k)$.

Fig.4.18～**Fig.4.20** の結果から，とくに反応温度系において，ＰＩゲインが過渡状態において大きく変化し，そのことにより良好な過渡特性が得られていることが分かる．また，本プロセスに対して通常のセルフチューニングコントローラを適用すると，むだ時間の大きさに対応するコントローラパラメータが必要となり，制御系設計が複雑になってしまうという問題点が生じる．しかし，本手法によると反応温度系のようなむだ時間が非常に大きいシステムに対しても，少ないコントローラパラメータで対応することができる．以上により，本章で考察した手法の有効性を検証することができた．なお，反応温度系を２次のＣＡＲモデルで近似し，これに対してＰＩＤ制御系を構成する数値計算を行ったが，目標反応温度への追従性については，良好な結果を得たものの微分ゲインが大きくなり，ジャケット操作弁の開閉度が非常に過度に変化する制御結果となった．

最後に，制御系の安定性について考察する．**Fig.4.17** に示す閉ループ系の特性多項式 $T(z^{-1})$ は，次式となる．

$$T(z^{-1}) = T_j(z^{-1})\{(1-z^{-1})A^r(z^{-1}) + z^{-17}b_0^j \cdot b_0^r \cdot C^j(z^{-1})C^r(z^{-1})\} \qquad (4.5.21)$$

さらに，

$$\left.\begin{aligned} T_j(z^{-1}) &= (1-z^{-1})A^j(z^{-1}) + z^{-1}b_0^j \cdot C^j(z^{-1}) \\ T_r(z^{-1}) &= (1-z^{-1})A^r(z^{-1}) + z^{-16}b_0^r \cdot C^r(z^{-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.22)$$

であるから，(4.5.22) 式を用いることで，(4.5.21) 式は次式として書き換えられる．

$$\begin{aligned} T(z^{-1}) &= (1-z^{-1})T_j(z^{-1})A^r(z^{-1}) + z^{-16}b_0^r \cdot C^r(z^{-1})\{T_j(z^{-1}) - (1-z^{-1})A^j(z^{-1})\} \\ &= T_j(z^{-1})\{(1-z^{-1})A^r(z^{-1}) + z^{-16}b_0^r \cdot C^r(z^{-1})\} \\ &\quad - z^{-16}(1-z^{-1})A^j(z^{-1})b_0^r \cdot C^r(z^{-1}) \\ &= T_j(z^{-1})T_r(z^{-1}) - z^{-16}(1-z^{-1})A^j(z^{-1})b_0^r \cdot C^r(z^{-1}) \end{aligned} \qquad (4.5.23)$$

ここで，本プロセスでは $b_0^r \ll 1$ であることから，(4.5.23) 式の右辺第２項を無視して考えることができる．したがって，ここでの特性多項式を

$$T(z^{-1}) \fallingdotseq T_j(z^{-1})T_r(z^{-1}) \qquad (4.2.24)$$

と見なすことができる．以上により，ここで構成する制御系の安定性が保証され，《定理４．１》と同様の手順で本制御系の確率漸近収束性を示すことができる．

４．６　結言

本章では，プロセス制御系における制御手法として，今なおＰＩＤ制御手法が主流であることを考慮し，ＰＩＤゲインを適応調整するセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを提案した．とくに，むだ時間をもつシステムに対しては，むだ時間のための補償器を挿入した上で，ＰＩＤ制御系設計を行うという複合制御[6]（２自由度制御）の立場から考察を行った．とくに，極配置法に基づいた設計を採用したことにより，制御系の安定性や性質についての検討が容易に行え，これを考慮した制御系設計が実現可能となった．

本章で考察したむだ時間系に対する２つの方法の特徴を，以下に簡単にまとめる．

◎ 前置補償器＋セルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズム

[1] システム変動に対して，適応性を有している．

[2] むだ時間の大きな系に対しては，むだ時間補償器のパラメータが増大するため，ＰＩＤゲインの計算が複雑化し，高次の制御系となってしまう．

◎ 目標値ゲインをもつセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズム

[1] むだ時間の大きさにより，制御系の次数が変化しない．

[2] ＰＩＤゲインを，常に予測値を用いて計算するため，外乱に対するロバスト性が保証されない．

さらに，４．５節では本章で考察した手法を，これまでＰＩＤゲインの調整が困難とされていたポリスチレン重合反応器の温度制御問題に適用し，数値計算結果からその有効性を検証した．

本章では，むだ時間をもつ系に対して，前置補償器もしくは目標値ゲインを制御系に挿入することで対応したが，このようなシステムに対しても，ＰＩＤ制御器のみで制御系の安定化さらには制御系の性質が検討できるような制御系設計というものが必要である．また，実システムへの応用を考えると，むだ時間が未知である系あるいは非線形系に対する考察も不可欠であると考えられる．これらは非常に難しい問題とされており，これについての考察は，今後考察されねばならない問題点である．

参考文献

1) J.G.Ziegler and N.B.Nichols : Optimum Settings for Automatic Controllers. Trans. ASME, Vol.64. No.8, pp.759-768 (1942)

2) P.T.Nims : Some Design Criteria for Automatic Controls. Trans. AIEE. Vol.70. pp.606-611 (1950)

3) K.L.Chien, J.A.Hrones and J.B.Reswick : On the Automatic Control of Generalized Passive Systems, Trans. ASMA, Vol.74, pp.175-185 (1972)

4) Y.Takahashi, C.S.Chan, D.M.Auslander : Parametereinstellung bei Linearen DDC-Algorithmen, Regelungstechnik und Prozeβ-Datenverarbeitung, Heft 6, pp.237-344 (1971)

5) 北森：制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，Vol.15, No.4, pp.549-555 (1979)

6) 須田　他：ＰＩＤ制御，朝倉書店　(1992)

7) 日本電気計測器工業会：プロセス産業を中心とした先端制御技術の適用状況と動向調査結果，計装，Vol.30, No.10, pp.43-49 (1990)

8) Y.Nishikawa, T.Ohta and H.Tanaka : A Method for Auto-Tuning of PID Control Parameters, Automatica, Vol.20, No.3, pp.321-332 (1984)

9) K.J.Åström and T.Hägglund : Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins, Automatica, Vol.20, No.5, pp.645-651 (1984)

10) F.Radke and R.Isermann : A Parameter-Adaptive PID-Controller with stepwise Parameter Optimization, Automatica, Vol.23, No.4, pp.449-457 (1987)

11) 重政，飯野，神田：２自由度ＰＩＤコントローラのオートチューニング方法，計測と制御，Vol.27, No.4, pp.305-311 (1988)

12) W.R.Cluett and E.Goberdhansingh : Autotuning for Model-Based Predictive Control, Automatica, Vol.26, No.4, pp.691-697 (1990)

13) F.Cameron and D.E.Seborg : A Self-Tuning Controller with a PID Structure, Int. J. Control, Vol.38, No.2, pp.401-417 (1983)

14) P.J.Gowthrop : Self-Tuning PID Controller : Algorithms and Implementation, IEEE Trans., Vol.AC-31, No.3, pp.201-209 (1986)

15) 山本，大松，石原：セルフチューニングＰＩＤ制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.25, No.10, pp.1069-1075 (1989)

16) 山本，石原，大松，北森：モデルマッチング法による離散時間Ｉ－ＰＤ型制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.27, No.8, pp.899-906 (1991)

17) T.Yamamoto, H.Ishihara, S.Omatu and T.Kitamori : Multivariable Self-Tuning Controller with I-PD Structure, Proc. of IEEE International Conference on IECON, Kobe, pp.1812-1817 (1991)

18) T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning PID Controllers for Time Delay Systems, Proc. of ISCA International Conference on CAINE, Hawaii, pp.332-337 (1993)

19) 山本，廣田，長迫，藤井：セルフチューニングＰＩＤ制御系の設計とポリスチレン重合反応器への応用，システム制御情報学会　（投稿中）

第5章

結論

本論文では，制御系の安定性や性質が，閉ループ伝達関数の極の位置に大きく依存していることを考慮して，極配置法の観点からセルフチューニングコントローラの設計方法について考察した．ここでは，確率外乱と確定外乱が付加された離散時間系を対象とし，ステップ状の目標値に対して追従性を保証する方法について考察を行った．このとき，望ましい応答を得る極の位置を，応答の立ち上がり時間と減衰振動特性を考慮して設計する方法を示した．また，極配置制御系を間接型セルフチューニングコントローラに拡張する際のパラメータ調整則として，確定外乱の影響を軽減することが可能な手法について考察し，数値計算結果からその有効性を検証した．

まず第2章では，制御系に内部モデルを挿入し確定外乱を除去した上で，目標値応答を改善する方法を示した．本手法では，ステップ状外乱あるいは周期が既知の正弦波状外乱が付加されたシステムを取り扱うことができる．また，そこでは間接型セルフチューニング制御系の確率漸近収束性について考察した．第2章での設計手法は，第3章および第4章の設計手法の基本となっている．

次に，第2章での考察によると内部モデルの挿入により，確率外乱の分散が増幅されることから，第3章では最小分散制御の立場からセルフチューニング極配置制御系を設計する手法について考察した．つまり，2次評価規範の最小化に基づいて制御則を導き，この制御則に含まれるコントロールパラメータを極配置の観点から設計する方法を示した．

さらに，第4章では，制御器をＰＩＤ制御器に限定した上で，セルフチューニングコントローラを極配置の観点から設計する方法を提案した．ここでは，制御パラメータが3個しかないことから，制御対象を2次系もしくは1次系に限定して考察した．4．2節では第2章での設計法をもとに，セルフチューニングＰＩＤ制御の基本設計について考察し，数値計算において従来の固定ゲインによるＰＩＤ制御法との比較から，本手法の有効性を示した．ＰＩＤ制御系を設計するにあたっては，離散時間系でのむだ時間の取扱いが重要な問題となる．そこで，4．3節および4．4節では，むだ時間を有する離散時間システムに対するセルフチューニングＰＩＤ制御手法を提案した．4．3節では，制御対象に前置補償器を挿入した拡大系に対してセルフチューニングＰＩＤ制御系を設計する方

法について考察した．本手法は，スミス型むだ時間補償器のように，むだ時間補償器において制御対象との極零相殺を必要としないことから，システム変動に対してロバスト性をもつ．しかし，むだ時間の大きなシステムにおいては，高次の前置補償器が必要となり，制御系の次数が高くなるという欠点を有している．4．4節ではＰＩＤ制御系に新たに目標値ゲインを挿入し，むだ時間が存在するシステムに対しても，高々4個の制御パラメータで制御できる方法について考察した．本手法では，過渡状態において4個のパラメータの大きさが変動し，これにより，むだ時間を有するシステムに対しても任意の極配置が可能となる．最後に，4．5節では，実際の化学プラントであるポリスチレン重合反応器の温度制御問題に，本論文で考察したセルフチューニングＰＩＤ制御アルゴリズムを適用し，数値計算結果からその有効性について考察した．本プロセスは，制御系が2つのＰＩＤ制御器のカスケード結合として与えられていること，また，反応温度系にかなり大きなむだ時間が存在するということもあって，これまでＰＩＤゲインの調整は，極めて難しい問題とされていた．しかし，本論文で考察した手法により，過渡特性および定常特性とも良好な制御結果を得ることができた．

最後に，適応制御の果たすべく役割について考えてみたい．制御系設計の流れ，すなわち手動制御から自動制御へ，そして自動制御から適応制御へ展開されてきた背景からも，適応制御に課せられた期待とその役割は，非常に大きいものがあると考えられる．そのこともあって，ここ数十年の間，適応制御に関する理論的研究は盛んに行われ，その一時代を築き上げた．しかしながら，華麗な理論展開とは裏腹に，実用性の欠如が指摘され，高度自動化を進めるはずの適応制御が，無用の長物とさえ言われるようになってきた．この原因の多くは，適応制御が理想状態（制御対象が多くの仮定を満足する状態）という護られた世界において設計されていることにある．したがって，これらの仮定を一つずつ取り除く研究が必要となり，現在では，ロバスト適応制御やユニバーサルコントローラさらにはインテリジェントチューニングコントローラの設計についての研究が盛んに行われるようになってきた．一方，適応制御が無用の長物となったもう一つの原因として，適応制御のほとんどが，高次の補償器を必要としていることにあると考えられる．これまでＰＩＤ制御におけるＰ，Ｉ，Ｄの3つのパラメータでさえ我々は十分に調整することができなかった．このことを考えると，高次の補償器に含まれるパラメータをうまくチューニングすることは，さらに困難なことであると思われる．また，企業等の現場において，今なおＰＩＤ制御が主流であることを考えると，Ｐ，Ｉ，Ｄの3つのパラメータの適応チューニング則を与えることも，適応制御の有用性を明らかにする一つの方法であると考えられる．文献1) の巻頭に，「ＰＩＤ制御が学問というより技（わざ）に類するものであるから…」とある．確かに，ＰＩＤ制御のＰ，Ｉ，Ｄのパラメータのチューニングが技

である以上，数式をいじったところで，適当な解が出てこないのかも知れない．しかしながら，今後，もう少しＰＩＤ制御にこだわり，そしてもう一度原点に返って，ＰＩＤ制御と適応制御を融合させたセルフチューニングＰＩＤ制御系の設計について研究を進めて行きたいと思う．

参考文献

1) 須田　他：ＰＩＤ制御，朝倉書店　(1992)

謝辞

本論文をまとめるにあたり，懇切な御指導と御助言を賜りました大阪大学坂和愛幸教授に，深く感謝するとともに御礼申し上げます．また，本論文作成に際して，有益な御助言を賜りました大阪大学須田信英教授ならびに田村坦之教授に厚く御礼申し上げます．さらに，大阪大学井上雄二郎助教授には，理論的な討論のために貴重な時間を割いて頂きました．ここに深く感謝致します．

本研究は昭和５８年，徳島大学大松繁教授の御指導のもとに着手し，約１０年の歳月を経て，ここにまとめあげることができました．今日に至るまでの長きにわたり，同教授には一方ならぬ御指導と御鞭撻を賜りました．心から感謝し，ここに御礼申し上げます．

また，徳島大学在学中より添田喬先生（現徳島文理大学長），菊地章先生（現鳴門教育大学助教授）ならびに渡辺栄治先生（現福山大学助手）には，御指導と励ましのお言葉を賜りました．さらに，高松工業高等専門学校在職中には，石原弘一教授を初めとして数多くの方々の御指導と御援助を頂きました．そして，文部省内地研究中，東京大学北森俊行教授には制御系設計の真髄とも言うべく有益な御助言を賜りました．加えて，４．５節の研究を遂行するにあたり，出光石油化学藤井憲三主任技師，長迫透技師ならびに八山光秀技師には，実システムの現状ならびに実装化における諸問題についの御教示を頂きました．また，本節の数値計算は大阪大学廣田直哉氏の御協力によるものであります．このように，本論文を執筆するにあたり，多数の方々の御指導と御鞭撻ならびに御援助を賜りました．ここに記して深く感謝の意を表します．

最後に，日頃熱心に御討論頂く大阪大学羅正華助手，小原敦美講師，下村卓助手ならびに小寺優子事務官を初めとした坂和研究室の皆様方に御礼申し上げます．

発表論文

[1] E.Watanabe, T.Yamamoto and S.Omatu : A Design Method for a Self-Tuning Regulator for a Distributed-Parameter System, Int. J. Control, Vol.43, No.1, pp.271-283 (1986)

[2] 山本：多変数系に対するＳＴＲの一構成，電気学会論文誌，Vol.106-C, No.10, pp.222 (1986)

[3] 山本，大松：p入力q出力（$p > q$）多変数系に対するＳＴＲの一設計法，システムと制御，Vol.30, No.11, pp.721-723 (1986)

[4] 山本，渡辺，大松：ＳＴＲにおける２次規範制御の規準値追従性の改善，計測自動制御学会論文集，Vol.22, No.11, pp.1225-1227 (1986)

[5] 山本，稲井，大松：２次評価規範をもつＳＴＣによる温度制御，電子情報通信学会論文誌，Vol.J70-A, No.1, pp.120-123 (1987)

[6] 山本，渡辺，大松：ＳＴＲ手法による徳島市のＮＯｘ濃度値制御の一考察，電子情報通信学会論文誌，Vol.J70-A, No.3, pp.589-592 (1987)

[7] 山本，渡辺，大松：非最小位相系に対する２次規範制御の規準値追従性の改善，システムと制御，Vol.31, No.8, pp.604-612 (1987)

[8] 山本，大松，石原：不安定零点をもつ単一入出力システムに対する２次規範適応制御系の構成，高松工業高等専門学校研究紀要，Vol.23, pp.1-10 (1987)

[9] 大松，山本，稲井：マイコンを用いた恒温槽の適応温度制御，電子情報通信学会論文誌，Vol.J71-A, No.1, pp.25-33 (1988)

[10] 大松，丸山，山本，吉川：多変数ＳＴＣによる恒温槽の適応温度制御，電気学会論文誌，Vol.108-D, No.1, pp.31-38 (1988)

[11] 山本，大松，石原：規準値追従性の改善ＳＴＣアルゴリズムの誤差解析，システムと制御，Vol.32, No.3, pp.207-208 (1988)

[12] 山本，大松，石原，丸山：前向き補償器をもつ比例制御による恒温槽温度制御，電子情報通信学会論文誌，Vol.71-A, No.6, pp.1257-1265 (1988)

[13] 山本，諸沢，石原，大松：セルフチューニングコントローラによる圧力制御系の適応制御，電子情報通信学会論文誌，Vol.J71-A, No.6, pp.1326-1329 (1988)

[14] 山本，大松，添田：大気環境保全に立脚した交通流の適応制御，電気学会論文誌，Vol.108-C, No.8, pp.595-602 (1988)

[15] 山本，大松，石原：多変数系に対する一般化最小分散適応制御の定常偏差の改善，高松工業高等専門学校研究紀要，Vol.24. pp.113-123 (1988)

[16] T.Yamamoto, S.Omatu and H.Ishihara : Improvement of the Tracking Property for the Linear Quadratic Adaptive Controller, Proc. of IFAC Symposium on ACASP, Glasgow, pp.117-122 (1989)

[17] S.Omatu, T.Yamamoto and M.Hotta : Adaptive Temperature Control of a Water Bath by Using Multivariable Self-Tuning Control, Proc. of IFAC Symposium on ACASP, Glasgow, pp.399-408 (1989)

[18] 山本，大松，石原：セルフチュニングＰＩＤ制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.25, No.10, pp.1069-1075 (1989)

[19] 山本，石原，大松：セルフチューニングコントローラによるプロセス制御系の適応制御（第１報：一般化最小分散適応制御系の設計と圧力制御），高松工業高等専門学校研究紀要，Vol.25, pp.13-22 (1989)

[20] 石原，山本，真山：モデル予測制御による空気圧力制御系のシミュレーションと実験，日本機会学会論文集，Vol.56-C, No.521, pp.77-81 (1990)

[21] 山本，石原，大松：一般化最小分散適応制御による圧力タンクの圧力制御，日本機会学会論文集，Vol.56-C, No.523, pp.731-737 (1990)

[22] 山本，石原，大松：前置補償器をもつ一般化最小分散制御に対する適応系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.26, No.6, pp.656-661 (1990)

[23] 山本，石原，大松：一般化最小分散制御に基づいたＰＩＤ制御系の一設計，システム制御情報学会論文誌，Vol.34, No.7, pp.205-211 (1990)

[24] 山本，石原，大松：ＰＩＤ制御に基づいたモデル追従適応制御系の一設計，電気学会論文誌，Vol.111-C, No.1, pp.32-39 (1991)

[25] 山本，石原，大松，北森：モデルマッチング法に基づいた離散時間Ｉ－ＰＤ型制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.27. No.8, pp.899-906 (1991)

[26] T.Yamamoto, H.Ishihara, S.Omatu and T.Kitamori : Multivariable Self-Tuning Controller with I-PD Structure, Proc. of IEEE International Conference on IECON, Kobe, pp.1812-1817 (1991)

[27] 山本，大松，石原，北森：多変数離散時間２自由度ＰＩＤ型制御系に基づくＳＴＣの設計，高松工業高等専門学校研究紀要，Vol.27. pp.31-43 (1991)

[28] 山本，石原，大松，北森：多変数離散時間２自由度ＰＩＤ型制御系における適応ゲイン調整法，計測自動制御学会論文集，Vol.28. No.4. pp.484-491 (1992)

[29] T.Yamamoto, H.Ishihara, S.Omatu and T.Kitamori : Self-Tuning Controller with Two-Degree-of-Freedom PID Structure and Its Application. Proc. of IFAC Symposium on ACASP, Grenoble, pp.527-532 (1992)

[30] T.Yamamoto, Z.H.Luo, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning Pole-Assignment Controller with Long-Range Prediction, Preprints of 12th IFAC World Congress. Sydney, pp.375-380 (1993)

[31] T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : A Global Convergence Analysis for Self-Tuning Pole-Assignment Controller, MTNS-93, Regensburg, (1993)

[32] 羅，山本：ゲイン適応によるフレキシブルロボットアームのひずみ直接フィードバック制御，日本機械学会論文集，Vol.59-C, No.566, pp.3146-3150 (1993)

[33] T.Yamamoto, Y.Sakawa and S.Omatu : Self-Tuning PID Controllers for Time Delay Systems, Proc. of ISCA International Conference on CAINE, Hawaii, pp.332-337 (1993)

[34] 山本，坂和，大松：セルフチューニング極配置制御系の一設計，計測自動制御学会論文集，Vol.30, No.3 (1994)（掲載予定）

[35] 山本，廣田，長迫，藤井：セルフチューニングＰＩＤ制御系の設計とポリスチレン重合反応器への応用，システム制御情報学会論文誌　（投稿中）