



Title	双曲幾何学およびクライイン群論研究支援プログラム OPTiをめぐって
Author(s)	和田, 昌昭
Citation	数学, 55(1), p. 101-107
Version Type	VoR
URL	https://hdl.handle.net/11094/23428
rights	Copyright © 日本数学会
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

双曲幾何学およびクライン群論研究支援プログラム OPTi をめぐって

和田昌昭

はじまり

カスプを持つ双曲多様体に対して Epstein と Penner により導入された標準分解（ユークリッド的分解）という概念がある。それを、手頃な具体的対象である双曲的 2 橋結び目補空間に適用するとどうなるかを考え始めたのは 1996 年のことだった。最も単純な場合である 8 の字結び目補空間の標準分解は、Thurston の教科書 [1] の第 1 章に解説されていて、3 次元双曲幾何学の研究者なら誰でも知っている。が、一般的の双曲的 2 橋結び目補空間の標準分解は当時まだ知られておらず、ちょうど手頃な問題と考えたわけだ。

2 橋結び目の対称性を利用して、標準分解はこうなっているに違いない、という確信を得たちょうどその頃、大阪大学の作間誠氏が Weeks と共に著の論文で全く同じ主張を予想として述べていることを知った。Weeks といえば、3 次元双曲幾何学の研究には欠かせないプログラム SnapPea [2] の作者である。作間氏は、筆者とは別の動機で 2 橋結び目補空間の標準分解について興味を持ち、Weeks に相談してコンピュータを用いた実験を行い、その結果を論文としてまとめていたのだった。

Troels Jorgensen

作間氏は当初から 1 点穴空きトーラス群に関する Jorgensen の理論に興味を持っていた。Jorgensen による一点穴空きトーラス束の分解が、作間–Weeks 予想における 2 橋結び目補空間の標準分解にそっくりだからという、筆者から見ればずいぶんいい加減な理由なのだが。しかし後になって、2 橋結び目

の補空間は上下の橋の部分を除いてしまえば4点穴空き球面に厚みをつけたものであり、4点穴空き球面は1点穴空きトーラスと通約可能の関係にあるので、1点穴空きトーラス群の変形を非常に具体的に取り扱ったJorgensenの理論をまねれば2橋結び目補空間の双曲構造も捕らえられるはずだということがわかつってきた。筆者にはとても想像が及ばないこういう材料をうまく見つけ出す嗅覚が作間氏の持ち味だ。

1点穴空きトーラス群に関するJorgensenの理論は、“On Pairs of Punctured Tori”という非公開論文に書かれているが、その内容は非常に難解だ。それなら、わからないところは直接本人に聞けばよいだろうということで、作間氏の発案で、Jorgensenを日本に呼んで論文の内容を講義してもらおうということになった。

ここで、もう一つの偶然が作用した。実はJorgensenは、筆者がColumbia大学で学位を取得した時の指導教官だったのである。普通学生は指導教官が何を研究しているかは当然知っているものだが、筆者の場合は少し事情が違った。学位論文の内容ができるからJorgensenのところに、その内容で学位を取りたいので指導教官になってくれないか、と相談しに行ったので、指導教官が何の研究を行っているのか知らないまま学位を取得してしまったのである。ちなみに筆者の学位論文は、Clifford数を係数とする 2×2 行列で高次元のメビウス変換を表す方法があるので、その際幾何学的な情報をClifford数からどのように読み取るかを扱ったもので、1点穴空きトーラス群の変形理論とはかなり趣が違っている。

ともあれ、そんな事情も幸いして、その年の12月に大阪大学でJorgensenの連続講義が実現した。筆者にとっては公私両面で非常に楽しい1週間となった。が、数学的にはますます謎は深まるばかり。なんとなく主張したいことはわかったものの、その証明はわからないことだらけ。当のJorgensenはというと、‘誠はなんでも証明しようとしている’とか言って笑っている始末。結局我々が知りたかったことについてはほとんど解決のないままJorgensenは帰って行った。

こう書くとJorgensenというのは非常にいい加減な數学者のように聞こえるかも知れないが、そうではない。Jorgensenがその非公開論文を書いたのは彼が20代の頃、何か月も日夜計算しまくった結果をメモのようにまとめたのがその論文なのである。当時その論文の内容を理解できる數学者はいなかつた。それゆえ未だに非公開論文という形でしか残っていないのである。論文に書かれているJorgensenの主張のいくつかは、Jorgensen自身どのように証明すればよいかわかつてないと思われるが、それにもかかわらず、膨大な計算に裏付けられた数学的直感によって、彼の主張が間違っていたことは未だに一つもない。彼の話を聞いていると、‘見たことがないから証明証明と言つて騒ぐんだ。自分の目で確かめれば証明なんてしなくても事実だということがわかるよ’というふうに聞こえてくる。

Jorgensenが去った後、我々はJorgensenの理論を自分達のやり方で再構成する方針に方向転換した。今は、証明しなければ数学ではない時代だ。こうして、双曲的2橋結び目補空間の標準分解の決定を目標としたプロジェクトが自然発生した。メンバーは作間氏と、当時九州大学の大学院生で作間氏と共同研究を行っていた秋吉宏尚氏、奈良女子大学で筆者の同僚である山下靖氏、そして筆者の4人。1~2ヶ月に一度集まつては進展があれば報告するプライベートなセミナーがスタートした。

しばらくはJorgensenの理論の勉強会が続いたが、しかし論文の難解なのには閉口した。証明がわからないならともかく、何を主張しているのかがよくわからないありさまで、それでも精力的に読み

進める作間氏に妙に感心したりした。それでも Jorgensen の主張を証明しやすい形に整理し直し、一つ一つの命題に証明をつけていく作業が進んだ。ここでは手品のように次々アイデアを出しては証明をつけてゆく秋吉氏が本領を発揮した。

筆者はというと、数学的なことはさておき、とにかく絵を見れば何を主張したいのかはわかるだろうということで、コンピュータプログラムを作ることにした。1点穴空きトーラス群の変形自由度は複素2次元だ。Jorgensen の理論では、それが Complex Probability と呼ばれるパラメータで表されている。それを平面上の2点をマウスで動かすことで入力し、群の変形に伴って群の各元の等長円がどのように変化するかをリアルタイムで見られるようにした。

この時作ったプログラムが、後に OPTi に成長してゆくわけだ。セミナーの進行に合わせて、Jorgensen の理論に登場する概念を表示できるように一つ一つ機能を追加していく。こうして、初め等長円を表示するだけであったプログラムに、Complex Probability に附隨する要素、Ford 領域等を表示する機能が次々と追加されていった。

ある時、Jorgensen の理論には直接関係ないのだけれど、面白半分で Limit Set を表示する機能を追加した。これが、クライン群論を研究している関数論の研究者に非常にうけたのは、当時の筆者にとっては少し意外だった。

1年ほどこうしたセミナーを続けるうち、理論のかなりの部分が自分達のやり方で理解できるようになってきたので、もう一度 Jorgensen を日本に呼ぶことにした。ただし、今度は自分達の話を聞いてもらうために。

Jeffery Weeks

1998年1月に作間氏の招待で、Jorgensenと一緒に Weeks が来日した。彼とはそれまで面識がなかったが、話してみるとすぐに意気投合した。数学に関するプログラミングについてあれこれ細かいところまで理解し合える相手がいるのはとても楽しいものだ。

プログラミングができる数学学者自体は、実はけっこういるのではないか。数学の素養があれば、初步的なプログラミングを修得するのは簡単だ。数ページのプログラムを書いて、ちょっとしたコンピュータ実験をしてみる、といった使い方をしている数学者が多数いても不思議ではない。

が、本格的なプログラムの書ける数学者となると話は別だ。プログラムにちゃんとユーザインターフェイスをつけて、プログラミングに関する知識がない人でも使えるようにするには、それなりのプログラミング技術が必要だし、また何十倍もの労力がかかる。実際、ユーザインターフェイスがしっかりしていて誰でも簡単に使えるようなプログラムは、どの研究分野でも数えるほどしかないのではないだろうか。3次元双曲幾何学の分野でそのようなプログラムというと、OPTi 以外では、筆者は Weeks の SnapPea しか知らない。だから Weeks は、筆者にとって、双曲幾何学の分野でプログラミングの細かい話が通じる数少ない数学者のひとりというわけだ。

彼の作った SnapPea は、何度も言うように、3次元双曲幾何学でなくてはならない道具になっている。ところが、Weeks 本人はというと、定職に就けずに企業からプログラミングの請負いのアルバイトをしたりしているという。いったいどうなっているのだろう。

OPTi の研究者内での評価を聞いてみると、数学研究支援プログラムに対する需要がないとは思えない。双曲幾何学やクライン群論の研究仲間は OPTi を非常に高く評価してくれているし、それだから

らこそ筆者も頑張って OPTi の新しいバージョンを作る気になるわけだ。ただし、これはあくまで研究者個人としての評価だ。

数学コミュニティーでの組織的な評価ということになると話は別だ。とくに、一番重要な人事の評価に際しては、未だにほとんどの数学教室で、業績といえば論文のみ、作成したプログラムはよくて参考程度、という基準で評価が行われているのではないだろうか。これでは本格的なプログラムの書ける数学者は育たない。

よいプログラムを作るのは、実に根気のいる作業だ。数百ページにわたるプログラム中 1 文字の誤りも許されないという、数学とはまた違った種類の厳密性が要求される。プログラムのバージョンアップは、時には新たな論文を書くに匹敵する作業だ。こうした度重なるバージョンアップによって枯れて使いやすくなったプログラムが、一編の論文相応にも評価されないので、割りが合わない。

しかしこれは別に日本に限った話ではないらしい。筆者は OPTi を通じて後に Albert Marden と電子メールのやりとりをするようになった。Marden といえばクライン群論の大御所だが、Geometry Center の所長も勤めた人だ。彼が言うには、ミネソタ大学の Geometry Center はそもそもそういう問題を解決するために設立されたのだそうだ。そしてそこから Weeks や Surface Evolver の Ken Brakke のような人材が育って行った。しかし、5 年間のプロジェクトが終わった後、結局そういう問題に対する進展はほとんどなかった、と Marden は書いている。

間違いがないように言っておくが、プログラマに頼んで数学のためのプログラムを作ってもらえばいいではないか、という考えはナンセンスである。数学に日本数学会のようなコミュニティーがあるのと同様に、プログラマにはプログラマのコミュニティーがいろいろあって、そこでは数学とは全然別の基準でプログラムの評価が行われている。プログラミング技術として新しい要素がない限り、いくら最先端の数学を対象とした応用プログラムを作成してもたいして評価されないので。それに、小学生に算数を教えるためのプログラムならいざ知らず、数学研究のためのプログラムを作るには、それなりの数学的センスが必要だ。要するに、必要なのは数学ができるプログラマ、つまりプログラミングのできる数学者であって、それを正当に評価できるのは数学コミュニティー以外にはない。

ついでに、筆者がどうやってプログラミングをするようになったかも書いておくことにしよう。筆者がプログラミングを始めたのは 1979 年。当時大阪大学の数学教室にはミニコンが 1 台あり、それを使っていたのは整数論の山本芳彦先生だけという状態。そこへ学部 3 回生の筆者が潜り込んで、そのミニコンを毎日使い倒していたというのがはじまり。大学院へ進学すると、今度は奨学金を注ぎ込んで 8 ビットパソコンを買い、これまたキーボードが擦り切れるまで使いまくった。要するに、今で言うコンピュータおたくだったわけだ。

しかし、プログラミングはあくまで趣味であって本業は純粹数学、と筆者は妙に割り切って考えていた。当時は、コンピュータを使ってする数学なんて遊びだ、まじめな数学は紙とエンピツでやるものんだ、という空気が色濃く漂っていたし、指導教官からも、「和田はコンピュータで遊んでばかりで一向に数学をしない奴だ」と、よく怒られた。そんな状態なので、山本先生とは馬が合って、計算機室でよく話し込んだものだ。

この、数学は数学として続け、またプログラミングは趣味と割り切って続けたのが、結果的にはよかつたのだと思う。数学コミュニティーで生き残って定職に就くためには、プログラミングができる

だけではダメで、論文を書くことが絶対に必要だ。この状況は、そう簡単に変わることは思えない。しかし一方で、どこかでプログラミングの技術を身に付けないと、大規模なプログラムが書けるようにはならない。

William Thurston

Jorgensen と Weeks を呼んで開催した研究集会の後、1点穴空きトーラス群を扱ったプログラムを関係者に配付することにした。とくに、Jorgensen の提案で、これまでにコンピュータで Limit Set を描いたことのある William Thurston, Curt McMullen, David Mumford, David Wright に手紙を書いてプログラムの入ったフロッピーディスクを送った。が、返事をくれたのは McMullen だけだった。それも、自分は Macintosh ユーザではないのでプログラムを実行できない、というつれない返事だった。まあ仕方ない。無名な数学者から突然プログラムを送りつけられても見向きもしないのが普通だ。

その年の 7 月に東工大で Cone 多様体に関する国際研究集会があり、Thurston と会うことができた。彼はまだコンピュータといえば計算機センターの大型汎用機のことをさす時代に、1点穴空きトーラス群の Limit Set を描くプログラムを走らせて、自分の研究費が許す計算機使用料以内に絵が完成するかどうか心配した、という経験の持ち主だ。

Thurston は講演のためにアメリカから自分の PowerBook を持参していたが、その中にはちゃっかり筆者のプログラムが入っていた。しかも、それだけでなく、講演でもそのプログラムを使ってくれていた。プログラムの作者としては大変嬉しい瞬間だ。

実際に Thurston と話をしてみると、彼もまたプログラマであることがわかった。先に Jorgensen の非公開論文の内容を理解できる数学者はいなかった、と書いたが、実は一人だけ例外がいた。それが Thurston だ。彼だけは論文の内容を非常にクリアに理解していた、と Jorgensen 自身が語っている。Thurston も、膨大な計算に基づく直感によって、証明する以前に数学的命題を事実として感じ取ってしまうタイプの数学者のような気がするが、その数学的直感を支えているのは、紙の上の計算だけではなく、コンピュータプログラムによる実験もあるのではないだろうか。

この国際研究集会を機に、筆者のプログラムは世界的に広く知られるようになる。ウェブサイト [3] も作ってインターネットを通じてプログラムをダウンロードできるようにした。名前が大事だという作間氏の助言に従って、プログラムの名称も PuncturedTori という味気ないものから OPTi に変更した。Once Punctured Tori Interactive の頭文字をとったものだが、みんなに気に入ってくれたようだ。

Lipman Bers

OPTi の改良を続けるうちに、 $PSL(2, C)$ の 2 元生成部分群が離散的かどうかを効率よく判定できることがわかってきた。これを使って 1 点穴空きトーラスに対する Bers スライスの絵が描けないものかと思案していたところ、京都大学の須川氏と大阪市立大学の小森氏が Bers スライスの描画に興味を持って共同研究していると聞いて、相談を持ちかけてみた。

1 点穴空きトーラス群のパラメータ空間は複素 2 次元だが、その様々な 1 次元部分空間が研究されている。それらは研究した数学者の名前を取って Maskit スライス、Earle スライス等の名前で呼ばれて

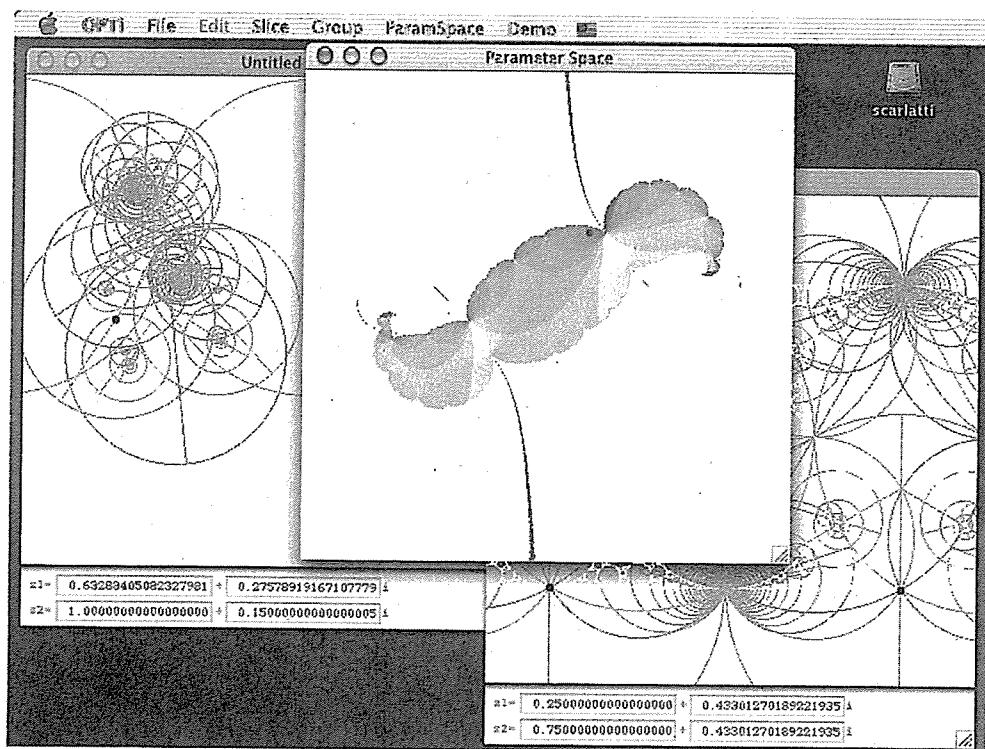
いるが、中でも理論的に最も重要なのが Bers スライスである。ところが Bers スライスは、コンピュータにとっては最も取扱いが難しいのだ。

実は筆者は Columbia 大学在学中に、Bers から直接複素関数論の講義を受けたことがある。筆者の専門はトポロジーだったので、専門外の講義ということもあり、あまりはじめに聴いていなかったりするのだが、ドイツ語なまりの英語でよく冗談を飛ばす気のいいおじいさんという印象だった。その Bers の名前にこういう形で再会することになろうとは、当時は思いもよらなかった。

さて、幸いなことに、須川氏と小森氏によって用意された枠組みと、上で述べた離散性判定のアルゴリズムを組み合わせると、Bers スライスの絵が得られそうなことがわかった。実際にプログラムを書いてこれを実行したのは同僚の山下氏である。

山下氏は、少し毛色の変わった数学者だ。彼は東京工業大学の情報科学科出身である。つまり、筆者のようにプログラミングを独学で修得したのではなく、正式な計算機科学の教育を受けている。そのかわり、彼は数学に関してハンデを負っているわけだ。

山下氏のプログラムによって世界で初の Bers スライスの絵 [4] が得られたが、驚いたことには、その Bers スライスの周りを Exotic Components と呼ばれる領域が網の目のように取り囲んでいた。Exotic Components の存在自体は、理論的には以前から知っていたのだが、このような形で目にすることは思ってもみなかつた。山下氏の Bers スライスの絵は、クライン群論の研究者達には相当のインパクトがあったようだ。OPTi にはつれない返事だった McMullen も、山下氏の Bers スライスの絵には自分のウェブサイトからリンクを張って参照してくれている。



むすび

OPTiは、筆者が書いた他のプログラム同様、自分が個人的にコンピュータを使って実験してみるための簡単なプログラムとしてスタートした。それをみんなが使えるように整備しようと思ったのは、クライン群論の研究者達が Limit Set の描画機能を予想外に喜んでくれたからだった。そうして OPTi を公開することができた。ここでは、そうした人々との出会いを中心に書いてみた。各節には関係した数学者の名前を付けてみたが、大きな意味はない。

現代の数学は、それを理解するだけでも困難なレベルまで複雑化してしまっている。一方、プログラミングは数学とは別の困難さを伴う。近年のコンピュータハードウェアの技術革新は目まぐるしく、それに伴いソフトウェア技術も変更を余儀なくされている。1年前に主流だったプログラミング技術が今では役に立たないことだってある世界だ。その中で常に最新のスタイルでプログラムを書き続けるのは容易なことではない。先端の数学を対象とした応用プログラムを書くというのは、この2者を両立させないとできない非常に困難な仕事だ。しかし、それだからこそカッコイイ仕事もある。

ギリシャ時代から綿々と続く数学の流れは、時代ごとに様々な対象にアプローチし、それを取り入れては自分の血として来た。19世紀から20世紀にかけて数学は物理学と出会い、そしてそれを消化して自分のものとした。この先数学はコンピュータとどのようにつき合い、そして変貌してゆくのだろうか。

文 献

- [1] サーストン, 小島定吉 監訳, 3次元幾何学とトポロジー, 培風館.
- [2] <http://humber.northnet.org/weeks/index/>

[SnapPea.html](#)

- [3] [http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/
OPTi/](http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/OPTi/)
- [4] [http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita/
Slice/](http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita/Slice/)

(2002年9月4日提出)
(わだ まさあき・奈良女子大学理学部)